Minoration de la hauteur sur les variétés abéliennes de type C.M. et applications

Nicolas Ratazzi

Abstract : In this article we give a lower bound for the Néron-Tate height of points on Abelian varieties A/K of C.M. type in the spirit of Lehmer's problem. Our result is a generalisation of the theorem of David and Hindry on the abelian Lehmer's problem. Furthermore we give two applications of our result : the first is a new lower bound for the absolute minimum of a subvariety V of A. Although lower bounds for this minimum were already known (decreasing multi-exponential function of the degree for Bombieri-Zannier), our methods enable us to prove, up to an ε the optimal result that can be conjectured. The second application is a theorem in the direction of a conjecture of Rémond generalising the Manin-Mumford conjecture : we prove Rémond's conjecture for all power of one simple Abelian variety of C.M. type of dimension $g \geq 1$. This generalises the previous known result, due to Viada (who was able to prove Rémond's conjecture for power of one elliptic curve with complex multiplication) concerning this problem.

Keywords : Abelian varieties, normalised height, Lehmer's problem
2000 Mathematics Subject Classification : 11G50, 11G10, 11J95, 14K22, 11R20

Table des matières

Adresse électronique : ratazzi@math.jussieu.fr décembre 2004

1 Introduction

Dans cet article on s'intéresse au problème de la minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les points sur les variétés abéliennes de type C.M. ainsi qu'à deux applications de ceci : minoration du minimum absolu des sous-variétés de variétés abéliennes et conjecture de Rémond sur une généralisation de l'énoncé de Manin-Mumford. Les problèmes de minoration de hauteur remontent aux travaux de Lehmer dans les années 1930 : soit $x \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})\backslash\mu_\infty$ un nombre algébrique qui n'est pas une racine de l'unité. On sait par un théorème de Kronecker que sa hauteur logarithmique absolue $h(x)$ est strictement positive. En 1933 Lehmer énonce la célèbre conjecture

Conjecture 1.1 (Problème de Lehmer) *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})\backslash\mu_\infty, \quad h(x) \geq \frac{c}{D},$$

où $D = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$.

Plus exactement, Lehmer se pose plutôt la question inverse : est-il possible de contredire cet énoncé ? C'est en 1979 , avec le théorème de Dobrowolski [14], qu'est obtenu le meilleur résultat, au choix de la constante près, à ce jour en direction de cette conjecture (on trouvera dans [22] une reformulation de la preuve de Dobrowolski utilisant l'inégalité des pentes de Bost). Ce résultat est optimal à des puissances de log près :

Théorème 1.1 (Dobrowolski) *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{Q}})\backslash\mu_\infty, \quad h(x) \geq \frac{c}{D}\left(\frac{\log\log 3D}{\log 2D}\right)^3,$$

où $D = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$.

Peu de temps après, en 1981, Laurent a étendu dans son article [17], la conjecture de Lehmer aux courbes elliptiques sur un corps de nombres, en remplaçant la hauteur sur $\mathbb{G}_m$ par la hauteur de Néron-Tate et il a étendu le résultat de Dobrowolski au cas des courbes elliptiques E/K à multiplication complexe. Depuis, on connait de nombreuses généralisations de ces énoncés : au cas du groupe $\mathbb{G}_m^n$ dans [1] et [3] ou des variétés abéliennes de type C.M. dans [11] ; aux cas de la minoration de la hauteur canonique des sous-variétés dans [2] et [23] ; utilisant un invariant plus fin que le degré usuel dans [4] et [24]. Dans leur article [11], David et Hindry énoncent la conjecture suivante (on utilise ici librement la notion d'indice d'obstruction $\delta_{\mathcal{L}}$ rappelée plus loin dans l'introduction), qu'ils appellent problème de Lehmer abélien :

Conjecture 1.2 (Problème de Lehmer abélien) *Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres et $\mathcal{L}$ un fibré en droites symétrique ample sur A. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, \mathcal{L})$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A, on a*

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K,\mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L},K}(P)}. \tag{1}$$

De plus, en terme du degré $D = [K(P) : K]$, on a pour tout point $P \in A(\overline{K})$ qui n'est pas de torsion

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K,\mathcal{L})}{D^{\frac{1}{g_0}}}, \tag{2}$$

où g_0 est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant le point P.

Dans un précédent travail ([23] corollaire 1), l'auteur a montré que la partie 1. de cette conjecture (utilisant l'indice d'obstruction) entraine de fait la meilleure minoration possible pour la hauteur canonique des sous-variétés non de torsion, *i.e.*, le problème de Lehmer abélien pour les points est équivalent au problème de Lehmer pour les sous-variétés :

Conjecture 1.3 (Problème de Lehmer pour les sous-variétés) *Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres et $\mathcal{L}$ un fibré en droites symétrique et ample sur A. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, \mathcal{L})$ telle que pour toute sous-$\overline{K}$-variété V, $\overline{K}$-irréductible de $A_{\overline{K}}$ qui n'est pas contenue dans une sous-$\overline{K}$-variété de torsion (translatée d'une sous-variété abélienne de $A_{\overline{K}}$ par un point de torsion), on a*

$$\frac{\widehat{h}_{\mathcal{L}}(V)}{\deg_{\mathcal{L}} V} \geq \mu^{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{c(A/K,\mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L},K}(V)}.$$

Ainsi seul reste à traiter le cas de la minoration de la hauteur de Néron-Tate des points sur une variété abélienne. Dans cette direction, David et Hindry obtiennent le résultat suivant (c'est le théorème 1.5 de [11]) :

Théorème 1.2 (David-Hindry [11]) *Soient A/K une variété abélienne de type C.M. de dimension g sur un corps de nombres et munie d'un fibré en droites ample et symétrique $\mathcal{L}$. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, \mathcal{L})$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A on a*

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{D^{\frac{1}{g}}} \left(\frac{\log \log 3D}{\log 2D} \right)^{\kappa(g)},$$

où $\kappa(g)$ est une fonction explicite de g et $D = [K(P) : K]$.

Par ailleurs, ils énoncent un problème de Lehmer "multihomogène" *a priori* plus fort que le problème de Lehmer abélien (*cf.* le paragraphe A.2 de l'appendice du présent article). Ils se demandent également dans quelle mesure leur théorème 1.2 pourrait être raffiné afin de dire des choses sur la deuxième partie du problème de Lehmer abélien. Enfin, ils indiquent qu'il serait intéressant de quantifier l'hypothèse "d'ordre infini" en terme du degré de la plus petite sous-variété de torsion pouvant contenir le point.

Dans notre présent article nous répondons entre autres à toutes ces questions, dans un cadre raffiné plus précis. Nous formulons notre résultat principal (et la preuve) en utilisant des indices d'obstructions. Ceci a l'avantage, d'une part d'être plus précis, et d'autre part, de justifier totalement la preuve du corollaire 1 de [23]. Par ailleurs, indépendamment de son intérêt propre, le résultat principal de cet article (théorème 1.3) nous permet d'obtenir deux conséquences distinctes : tout d'abord, en nous restreignant au cas d'une puissance d'une variété abélienne simple de type C.M., nous obtenons une minoration du minimum absolu des variétés V (non nécessairement irréductibles) qui ne sont pas de torsion. Ceci étend un récent théorème de Amoroso et David concernant le problème similaire sur le groupe multiplicatif de dimension n et donne un résultat, optimal aux facteurs log près, raffinant dans ce cadre les résultats de Bombieri et Zannier [10][1] ainsi que David et Philippon [12]. Par ailleurs, notre théorème 1.3, combiné à une bonne majoration des points de torsion sur les variétés abéliennes (ceci faisant l'objet d'un article indépendant, cf. [25]), permet une amélioration sensible en direction d'un récent problème de Rémond [27] généralisant la conjecture de Manin-Mumford dans le cas des courbes plongées dans une variété abélienne.

Avant d'énoncer précisément nos résultats, commençons par définir l'indice d'obstruction :

Définition 1.1. Soient A/K une variété abélienne, $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample et symétrique, P un point de $A(\overline{K})$ et F/K une extension algébrique. On définit *l'indice d'obstruction de P relativement à $\mathcal{L}$ et F*, et l'on note $\delta_{\mathcal{L},F}(P)$, par

$$\delta_{\mathcal{L},F}(P) = \min \left\{ \left(\deg_{\mathcal{L}_F} X\right)^{\frac{1}{\operatorname{codim} X}} \ / \ X \text{ sous-}F\text{-variété stricte de } A_F, \text{ telle que } P \in X(\overline{K}) \right\},$$

[1] qui obtenaient pour toute variété abélienne C.M. ou toute puissance d'une courbe elliptique une dépendance non explicite en le degré de la variété V supposée géométriquement irréductible

où l'on a noté $\mathcal{L}_F$ le faisceau sur A_F tiré en arrière de $\mathcal{L}$ par la projection naturelle de A_F sur A. Plus généralement on peut définir l'*indice d'obstruction (relativement à $\mathcal{L}$ et F), pour une sous-$\overline{K}$-variété V de $A_{\overline{K}}$* :

$$\delta_{\mathcal{L},F}(V) = \min\left\{\left(\deg_{\mathcal{L}_F} X\right)^{\frac{1}{\operatorname{codim} X}} \ / \ X \text{ sous-}F\text{-variété stricte de } A_F, \text{ telle que } \overline{V}^F \subset X\right\},$$

où l'on a noté $\overline{V}^F$ l'image schématique de $V \subset A_{\overline{K}}$ dans A_F.

Remarque 1.1. En considérant la variété $\overline{\{P\}}^F$, image schématique de $P \in A_{\overline{K}}$ dans A_F, on constate immédiatement que

$$\delta_{\mathcal{L},F}(P) \leq [F(P) : F]^{\frac{1}{g}}.$$

On notera $\delta_{\mathcal{L},\mathrm{tors}}$ l'indice d'obstruction relatif au corps $K_{\mathrm{tors}} = K(A_{\mathrm{tors}})$. Par ailleurs dans la suite, comme on travaille avec un fibré en droites $\mathcal{L}$ fixe, on l'omettra régulierement dans la notation de $\delta_{\mathcal{L},F}$ afin de ne pas trop alourdir les notations. Ceci étant, on peut maintenant énoncer le raffinement attendu du problème de Lehmer :

Conjecture 1.4 (Problème de Lehmer abélien relatif) *Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample et symétrique. Il existe une constante strictement positive $c(A/K, \mathcal{L})$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A on a*

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L},\mathrm{tors}}(P)}.$$

Remarque 1.2. On ne généralise dans cet énoncé que la première partie de l'énoncé du problème de Lehmer abélien de David et Hindry, car comme nous le montrons dans l'appendice (corollaire A.1), la seconde partie en est en fait toujours une conséquence.

Cette généralisation du problème de Lehmer abélien, ou plus simplement l'énoncé probablement plus accessible dans lequel on remplace $\delta_{\mathcal{L},\mathrm{tors}}(P)$ par $[K_{\mathrm{tors}}(P) : K_{\mathrm{tors}}]^{\frac{1}{g}+\varepsilon}$ pour tout ε (et avec une constante $c(A/K, \mathcal{L}, \varepsilon)$ dépendant de ε), admet une conséquence tout à fait frappante : sa véracité permettrait de rendre inconditionnel le théorème 1.5 cité ci-dessous. On obtiendrait ainsi une généralisation considérable du problème de Manin-Mumford [26]. Dans un précédent travail, [24], nous avons obtenu dans le cas de ce problème de Lehmer relatif un résultat, optimal à des puissances de $\log D_{\mathrm{tors}}$ près, dans le cas des courbes elliptiques à multiplication complexe. Mieux notre énoncé faisait intervenir non pas D_{tors} mais $D_{\mathrm{ab}} = [K^{\mathrm{ab}}(P) : K^{\mathrm{ab}}]$ où K^{ab} est la clôture abélienne de K. En direction de cette conjecture, nous obtenons, dans le cas des variétés abéliennes de type C.M., un résultat, essentiellement optimal pour le terme principal. Pour tout entier n, on note $K_n := K(A[n])$ l'extension engendrée sur K par le groupe des points de torsion $A[n]$. On a $K_{\mathrm{tors}} = \bigcup_{n \geq 1} K(A[n])$.

Théorème 1.3 *Soit A/K une variété abélienne de type C.M. de dimension g sur un corps de nombres et munie d'un fibré en droites ample et symétrique $\mathcal{L}$. Il existe une constante strictement positive $c(A/K,\mathcal{L})$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ et pour tout entier n, on a l'alternative suivante :*

$$\textit{soit} \qquad \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K,\mathcal{L})}{\delta_{\mathcal{L},K_n}(P)} \left(\frac{\log\log 3\,[K_n : K]\,\delta_{\mathcal{L},K_n}(P)}{\log 2\,[K_n : K]\,\delta_{\mathcal{L},K_n}(P)} \right)^{\kappa(g)},$$

avec $\kappa(g) = (g+1)!(2g+5)(g+2)(2g.g!)^g$;
soit le point P est contenu dans une sous-variété de torsion stricte, B, de A_{K_n}, définie sur K_n, de degré majoré par

$$\left(\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} B\right)^{\frac{1}{\operatorname{codim} B}} \leq c(A/K,\mathcal{L})^{-1} \delta_{\mathcal{L},K_n}(P) \left(\log 2\,[K_n : K]\,\delta_{\mathcal{L},K_n}(P)\right)^{2g+2\kappa(g)}.$$

Remarque 1.3. Un peu plus généralement le même énoncé est valable pour toute extension L/K abélienne telle que son discriminant $\operatorname{disc}(L/K)$ vérifie

$$\frac{1}{[L:K]} \log \operatorname{disc}(L/K) \leq c_1(A/K,\mathcal{L}) \left(\log[L:K]\right)^2. \tag{3}$$

Notamment (cf. la preuve du lemme 2.3) ceci est vrai pour toute extension $K \subset L \subset K_n$ telle que $\log \varphi(n) \ll \log[L:K]$. Par exemple, on peut voir que le théorème précédent reste valable pour tout n avec $L = K(T_n)$ où T_n est un point de torsion de A d'ordre n.[1]

L'analogue de ce résultat dans le cas du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^n$ a été prouvé récemment par Amoroso et David dans [3].

Remarque 1.4. Notons qu'en appliquant la remarque 1, on déduit aussitôt du théorème 1.3 le même énoncé où l'on a remplacé $\delta_{\mathcal{L},K_n}(P)$ par le degré $[K_n(P) : K_n]^{\frac{1}{g}}$.

On a ici quantifié l'hypothèse "P est d'ordre infini" par une borne sur le degré de la plus petite sous-variété de torsion contenant le point P. Notons que ce type de résultats, rarement mis en évidence, contient la plupart du temps des informations arithmétiques supplémentaires. On donne d'ailleurs ici une conséquence de cette quantification. Il s'agit d'une minoration du minimum absolu des sous-variétés non de torsion de A^n où A/K est une variété abélienne simple de type C.M. Pour cela on introduit deux notations : on pose $\mathcal{L}_n$ le fibré $\mathcal{L}^{\boxtimes n}$ sur A^n déduit d'un fibré ample et symétrique $\mathcal{L}$ sur A. Par ailleurs, on note

$$V^\star = V \setminus \bigcup B,$$

où l'union porte sur les sous-variétés B de torsion incluses dans V. On donne dans l'énoncé suivant une minoration du minimum absolu d'une variété non de torsion. Notons que l'on ne la suppose pas irréductible.

[1] Notons que l'inégalité (3) n'est pas toujours vérifiée comme le montre l'exemple $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{l}) \subset \mathbb{Q}(A[l])$ avec l premier congru à 1 modulo 4.

Théorème 1.4 *Soit A/K une variété abélienne simple de type C.M. et $n \geq 1$ un entier. Il existe une constante strictement positive $c(A/K,n)$ telle que : pour toute sous-variété (non nécessairement irréductible) V de A^n, définie sur une extension $K_r := K(A[r])/K$ pour un certain entier r, incomplètement définie dans A^n sur K_r par des équations de degré au plus D_{inc}, alors pour tout point $\overline{K}$-rationnel P de $V^\star$, on a :*

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) \geq \frac{c(A/K,n)}{D_{\mathrm{inc}}} \left(\frac{\log\log 3\,[K_r:K]\,D_{\mathrm{inc}}}{\log 3\,[K_r:K]\,D_{\mathrm{inc}}} \right)^{\kappa(g)},$$

avec $\kappa(g) = (g+1)!(2g+5)(g+2)(2g.g!)^g$.

Notons (*cf.* par exemple [10] p.790) que V est toujours incomplètement définie par des équations de degré au plus $c_1(A/K,\mathcal{L},n)\deg_{\mathcal{L}} V$. En notant $\mu^\star(V)$ le minimum absolu de V (*i.e.* le minimum des hauteurs des points de $V^\star$), on obtient en corollaire :

Corollaire 1.1 *Soit A/K une variété abélienne simple de type C.M. et $n \geq 1$ un entier. Il existe une constante strictement positive $c(A/K,n)$ telle que : pour toute sous-variété (non nécessairement irréductible) V/K de A^n, non de torsion et définie sur K, on a :*

$$\mu^\star(V) \geq \frac{c(A/K,n)}{\deg_{\mathcal{L}} V} \left(\frac{\log\log 3 \deg_{\mathcal{L}} V}{\log 3 \deg_{\mathcal{L}} V} \right)^{\kappa(g)},$$

avec $\kappa(g) = (g+1)!(2g+5)(g+2)(2g.g!)^g$.

Ceci rend effectif les résultats de Bombieri et Zannier [10], et raffine ceux de david-et Philippon [12] concernant ce même problème. Plus exactement en suivant la preuve de [10], on constate qu'ils obtiennent une minoration effective mais qui est multiexponentielle en le degré, au lieu d'être comme ici linéaire. Concernant le résultat de [12], bien qu'il ne soit pas explicitement rédigé, on peut voir qu'ils obtiennent comme conséquence de leur théorème principal, une minoration polynomiale en le degré.

Passons maintenant au problème de Rémond. Pour cela nous avons besoin d'une définition.

Définition 1.2. Soit $X/\overline{K}$ une courbe incluse dans une variété abélienne $A/\overline{K}$. On dit que X *est transverse* si X n'est contenue dans aucun translaté de sous-variété abélienne de A.

Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres, X une courbe transverse de A et r un entier. Suivant Bombieri, Masser et Zannier [8] dans le cas de $\mathbb{G}_m^n$ et Rémond [27] dans le cas des variétés abéliennes, on s'intéresse au problème suivant : on considère l'ensemble

$$A^{[r]} := \bigcup_{\operatorname{codim} G \geq r} G(\overline{K})$$

où l'union porte sur les sous-groupes algébriques fermés de A de codimension au moins r. À quelle condition sur r peut-on garantir que l'ensemble $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$ est fini ? C'est essentiellement à ce problème qu'est consacré l'article de Rémond. Notons que dans le cas le plus faible possible, si $r = \dim A$, on retrouve déjà la conjecture de Manin-Mumford. Si A est une puissance de courbe elliptique, on peut voir que $X(\overline{K}) \cap A^{[1]}$ est infini, donc on doit nécessairement prendre $r \geq 2$. Par ailleurs, Rémond montre que $X(\overline{K}) \cap A^{[1]}$ est de hauteur bornée. En utilisant le théorème de Northcott, le problème se ramène donc à trouver à quelle condition sur $r \geq 2$ les points de l'ensemble $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$ sont de degré borné.

Théorème 1.5 (Rémond [27]) *Si la conjecture 1.4 est vraie et si la courbe X est transverse, alors $X(\overline{K}) \cap A^{[2]}$ est fini.*

Dans le cas des variétés abéliennes de type C.M. il obtient un résultat inconditionnel mais plus faible. On se donne A une variété abélienne de type C.M., isogène au produit $\prod_{i=1}^{m} A_i^{n_i}$ où les A_i sont des variétés abéliennes simples de dimension respective g_i, deux à deux non-isogènes.

Théorème 1.6 (Rémond [27]) *Avec les notations précédentes, si X est une courbe transverse dans A et si A est de type C.M., alors $X(\overline{K}) \cap A^{[2+\sum_{i=1}^{m} g_i]}$ est fini.*

En utilisant notre résultat en direction du problème de Lehmer relatif ainsi qu'un résultat faisant l'objet d'un article séparé [25] concernant la torsion dans les variétés abéliennes de type C.M., nous améliorons ceci et obtenons un résultat optimal dans le cas d'une puissance d'une variété abélienne simple de type C.M. :

Théorème 1.7 *On utilise les notations précédentes. Soient $n \geq 1$ un entier et A une variété abélienne C.M., isogène à une puissance d'une variété abélienne simple. Soit également X une courbe transverse dans A. L'ensemble*

$$X(\overline{K}) \cap A^{[2]}$$

est fini.

Nous généralisons ainsi le résultat de Viada [34], valable pour une puissance d'une courbe elliptique C.M., au cas d'une puissance d'une variété abélienne C.M. simple de dimension quelconque.

Remarque 1.5. On peut en fait énoncer un résultat optimal dans un cadre plus vaste qu'une puissance d'une variété abélienne simple de type C.M. Soit A/K une variété abélienne. On note

$$\gamma(A) = \inf \{ x > 0 \ / \exists C > 0, \ \ \forall F/K \text{ finie}, \ \ |A(F)_{\text{tors}}| \leq C[F:K]^x \} .$$

La variété abélienne A est isogène à un produit : $\prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$, où les A_i sont simples et deux à deux non-isogènes, de dimension g_i. On montre au paragraphe 4 que si X est une courbe transverse de A et si A est de type C.M., alors

$$\min_{1\leq i\leq m} g_i > \sum_{i=1}^m \gamma(A_i) \Longrightarrow \left|X(\overline{K}) \cap A^{[2]}\right| < +\infty.$$

De plus, on peut montrer (cf. [25]) que $\gamma(A_i) \leq \frac{2g_i}{2+\log_2 g_i}$ où $g_i = \dim A_i$ et $\log_2$ est le log en base 2.

Plan de l'article : les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à la preuve du théorème 1.3 concernant le problème de Lehmer, le paragraphe 4 est consacré au théorème 1.7 concernant le problème de Rémond et le paragraphe 5 au théorème 1.4 concernant le minimum absolu. L'appendice explique les liens entre les parties (1) et (2) du problème de Lehmer abélien ainsi que les liens entre le problème de Lehmer abélien et sa variante multihomogène (conjecture A.1) formulée par David et Hindry.

Plus précisément, au paragraphe 2 nous donnons une majoration du discriminant absolu de l'extension $K(A[n])/\mathbb{Q}$ dont nous aurons besoin dans l'application du lemme de Siegel. Nous faisons également dans ce paragraphe les rappels nécessaires sur les isogénies de Frobenius. Classiquement depuis le résultat de Dobrowolski concernant le problème de Lehmer, c'est essentiellement en utilisant des transformés par ces isogénies d'un point P, dont on suppose par l'absurde qu'il ne vérifie pas la conclusion du théorème 1.3, que nous allons extrapoler. Il y aura ceci dit ici une différence, dans la mesure où l'on travaille, non plus sur K mais sur $K(A[n])$: on considérera plutôt des tordus de ces points par un certain automorphisme de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, un Frobenius de l'extension abélienne $K(A[n])/K$. Au paragraphe 3, et avec la différence précédemment indiquée, on donne la preuve du théorème 1.3 en suivant ce qui est fait dans [11]. Notons qu'il y a une autre différence : on travaille avec les indices d'obstruction alors que dans [11] la preuve est faite avec le degré D. Il y a donc certaines modifications à faire, et il convient parfois d'être un peu attentif (cf. par exemple la remarque 3.9). Ceci étant la preuve est une classique preuve d'approximation diophantienne, avec un lemme de Siegel (le théorème de Bombieri-Vaaler qui nous permet d'avoir un contrôle explicite de la dépendance en le corps sur lequel on travaille), un lemme de zéros et, comme dans [11] une descente finale où l'on réitère g fois l'ensemble de la preuve pour pouvoir conclure. Au paragraphe 4, nous donnons une preuve du théorème 1.7 en utilisant notre résultat sur le problème de Lehmer. Au paragraphe 5 nous donnons une preuve par récurrence sur n du théorème 1.4 basé sur notre théorème 1.3. On utilise ici à plein l'alternative démontrée dans le théorème 1.3. Enfin dans l'appendice nous montrons, que la partie (2) du problème de Lehmer abélien 1.2 entraîne sa partie (1) ; autrement dit, si l'on sait minorer la hauteur des points qui ne sont contenus dans aucune sous-variété de torsion, alors on sait en fait aussi bien minorer la hauteur de tous les points non de torsion. Ceci nous permet de raffiner, dans le cas des variétés abéliennes de type C.M. un résultat de Masser [18] sur la minoration des points d'ordre infini. Dans le second et dernier sous-paragraphe de l'appendice, nous montrons que la conjecture multihomogène de David et Hindry A.1 est en fait une conséquence du problème de Lehmer abélien.

2 Préliminaires arithmético-géométriques

2.1 Ramification

On travaille ici et comme partout avec une variété abélienne A/K où K est un corps de nombres.

Notations. On note φ la *fonction d'Euler* et, si L/F est une extension finie de corps, on note $\mathcal{D}_{L/F}$ la *différente de* L/F. Par ailleurs, si n est un entier, on note $K_n = K(A[n])$ l'extension de degré $\deg(K_n/K)$ de K engendrée par les points de torsion d'ordre au plus n de $A(\overline{K})$. Dans ce qui suit, on s'intéresse à une majoration du *discriminant absolu*, $\mathrm{disc}(n)$, de $K_n/\mathbb{Q}$. On donne de plus une majoration du nombre et de la taille des premiers qui se ramifient dans K_n.

Lemme 2.1 *Si n un entier strictement positif, on note $\omega(n)$ le nombre de nombres premiers deux à deux distincts divisant n. On a les inégalités :*

1. *Pour tout entier $n \geq 2$, on a $\omega(n) \leq \frac{2\log\varphi(n)}{\log 2}$.*
2. *Pour tout entier n assez grand, on a $\omega(n) \leq \frac{4\log n}{\log\log n}$.*

Démonstration : Le point 1. est un exercice facile. Montrons le point 2. : on écrit la décomposition de n en facteurs premiers,

$$n = \prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i^{r_i} \geq \prod_{i=1}^{\omega(n)} \pi(i),$$

où $\pi(i)$ dénote le i-ème nombre premier. En appliquant le théorème des nombres premiers, on en déduit $\log n \geq \frac{1}{2}\omega(n)\log\omega(n)$. Supposons par l'absurde que l'on a pour certains n assez grands, l'inégalité contraire de celle annoncée. On a donc

$$\omega(n) > \frac{4}{\log\log n}\log n \gg \sqrt{\log n}.$$

En passant au log et en injectant ceci dans l'inégalité donnée par le théorème des nombres premiers, on en déduit pour certains n assez grands :

$$\frac{4\log n}{\log\log n} < \omega(n) \leq \frac{2\log n}{\log\omega(n)} < \frac{4\log n}{\log\log n},$$

ce qui est absurde. Notons qu'il s'agit d'un résultat très classique que l'on peut par exemple trouver dans [33]. $\square$

Lemme 2.2 *Soit n un entier strictement positif. On écrit sa décomposition en facteurs premiers $n = \prod p_i^{\alpha_i}$. On a*

$$\prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i \leq \varphi(n)^3.$$

Démonstration : C'est un simple calcul :

$$\prod_{i=1}^{\omega(n)} p_i \leq \prod_{\alpha_i \geq 2} \varphi(p_i^{\alpha_i}) \prod_{\alpha_i=1} (\varphi(p_i)+1) \leq 2^{\mathrm{Card}\{i/\alpha_i=1\}} \prod_{\alpha_i \geq 2} \varphi(p_i^{\alpha_i}) \prod_{\alpha_i=1} \varphi(p_i)$$
$$\leq 2^{\mathrm{Card}\{p/p|n\}} \varphi(n) \leq 2^{\frac{2\log\varphi(n)}{\log 2}} \varphi(n) = \varphi(n)^3,$$

où l'on a utilisé le lemme 2.1 précédent dans la dernière inégalité. □

Lemme 2.3 *Il existe deux constantes strictement positives* $c_1(A/K)$ *et* $c_1'([K:\mathbb{Q}])$ *telles que pour tout* $n \geq 1$*, on a*

$$\mathrm{disc}(n) \leq (c_1 \deg(K_n/K))^{c_1' \deg(K_n/K) \log \deg(K_n/K)}.$$

Démonstration : Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K au-dessus d'un nombre premier p et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de K_n au-dessus de $\mathfrak{p}$. Soient v la place associée à p, w_K la place associée à $\mathfrak{p}$ et w_{K_n} celle associée à $\mathfrak{P}$. Soient π, π_K, π_{K_n} les uniformisantes associées à ces idéaux. Si $e(\mathfrak{p})$ (respectivement $e(\mathfrak{P})$) est l'indice de ramification de $\mathfrak{p}$ sur p (respectivement de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{p}$), on a

$$w_{K_n}(\pi) = e(\mathfrak{p}) w_{K_n}(\pi_K) = e(\mathfrak{p}) e(\mathfrak{P}) w_{K_n}(\pi_{K_n}) = e(\mathfrak{p}) e(\mathfrak{P}), \text{ et, } w_K(\pi) = e(\mathfrak{p}).$$

On sait par le Theorem 1. de [30] (voir également la proposition 18 de [31]) que, si la variété abélienne A a bonne réduction en $\mathfrak{p}$, alors l'extension K_n/K ne peut être ramifiée en $\mathfrak{p}$ que si p divise n (c'est le sens facile du critère de Néron-Ogg-Schafarevitch). Dans la suite on suppose pour simplifier que la variété abélienne a partout bonne réduction sur K. Ainsi, on a

$$\mathcal{D}_{K_n/K} = \prod_{\mathfrak{P}/p|n} \mathfrak{P}^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{K_n/K})}.$$

Or la proposition 13 de [29] et la remarque suivant cette proposition nous donne la borne :

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{K_n/K}) \leq e(\mathfrak{P}) - 1 + w_{K_n}(e(\mathfrak{P})) = e(\mathfrak{P}) - 1 + e(\mathfrak{p}) e(\mathfrak{P}) v(e(\mathfrak{P})).$$

Par ailleurs, l'indice $e(\mathfrak{P})$ étant inférieur à $\deg(K_n/K)$, on a $v(e(\mathfrak{P})) \leq \frac{\log \deg(K_n/K)}{\log 2}$. Ainsi, on obtient la minoration

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{P}}(\mathcal{D}_{K_n/K}) \leq \frac{2}{\log 2} e(\mathfrak{P}) \log \deg(K_n/K).$$

Par transitivité et par définition du discriminant $\mathrm{disc}(n)$ on a

$$\mathrm{disc}(n) = N_{\mathbb{Q}}^{K}(\mathrm{Disc}(K_n/K))\, \mathrm{Disc}(K/\mathbb{Q})^{\deg(K_n/K)} = c_2^{\deg(K_n/K)} N_{\mathbb{Q}}^{K_n}(\mathcal{D}(K_n/K)),$$
$$\leq \prod_{p|n} p^{c_3 \sum_{\mathfrak{P}/p} f(\mathfrak{P}) e(\mathfrak{P}) \log \deg(K_n/K)} \leq \prod_{p|n} p^{c_3 \deg(K_n/K) \log \deg(K_n/K)}.$$

Le formalisme de l'accouplement de Weil nous indique que $\mu_n \subset K_n$, donc pour les degrés que $\deg(K_n/\mathbb{Q}) \geq \varphi(n)$. Ainsi, en utilisant le lemme 2.2 précédent, on peut conclure :

$$\mathrm{disc}(n) \leq \varphi(n)^{3c_3 \deg(K_n/K) \log \deg(K_n/K)} \leq \deg(K_n/\mathbb{Q})^{3c_3 \deg(K_n/K) \log \deg(K_n/K)}.$$

Dans le cas général d'une variété n'ayant pas partout bonne réduction, il faut également faire intervenir les places de mauvaise réduction, ce qui fait apparaître la constante c_1 de l'énoncé. □

Corollaire 2.1 *Il existe une constante strictement positive c_2 telle que pour tout $n \geq 1$, on a*

$$\log \left(\mathrm{disc}(n)^{\frac{1}{\deg(K_n/K)}} \right) \leq c_2 \left(\log \deg(K_n/K) \right)^2.$$

Démonstration : C'est immédiat. □

Remarque 2.6. Cette estimation n'est très certainement pas optimale, mais elle est simple à obtenir et nous suffira.

2.2 Frobenius et isogénies admissibles

2.2.1 Morphismes de Frobenius

Notations. Si K est un corps de nombres, on note $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, v une place finie de K, et k_v le corps résiduel associé à v.

Si A/K est une variété abélienne, on note $\mathcal{A}/\mathcal{O}_K$ son modèle de Néron, et A_v/k_v la fibre spéciale correspondant à la place finie v. Rappelons la propriété universelle du modèle de Néron : si $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ est lisse, de fibre générique X/K, tout K-morphisme $X \to A$ se relève de manière unique en un $\mathcal{O}_K$-morphisme $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$. La propriété universelle du produit fibré $A_v = \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}_K} k_v$ permet d'associer naturellement à tout $\mathcal{O}_K$-endomorphisme de $\mathcal{A}$ un k_v-endomorphisme de A_v. En utilisant la propriété universelle du modèle de Néron, on en déduit une flèche naturelle

$$\Psi : \mathrm{End}_K(A) \to \mathrm{End}_{k_v}(A_v).$$

Cette flèche n'est en général pas surjective, mais on peut par contre montrer qu'elle est injective aux places de bonne réduction.

Sur la variété A_v/k_v, on dispose d'un endomorphisme particulier : le morphisme de Frobenius Frob_v, correspondant en coordonnées projectives à l'élévation à la puissance $q = \mathrm{N}(v)$, où $\mathrm{N}(v)$ est la norme $K/\mathbb{Q}$ de v. Dans le cas C.M., un théorème de Shimura-Taniyama permet d'affirmer que le morphisme Frob_v se relève en presque toute place :

Proposition 2.1 (Shimura-Taniyama) *Soit A/K une variété abélienne de type C.M. Notons $\prod_{i=1}^r K_i$ le produit de corps de nombres qui est inclus dans $\mathrm{End}_K(A) \otimes \mathbb{Q}$ et tel que $\sum_{i=1}^r [K_i : \mathbb{Q}] = 2\dim A$. On suppose que le corps de nombres K contient tous les K_i, et* *que* $\prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{K_i}$ *est inclus dans* $\mathrm{End}_K(A)$. *Alors, pour presque toutes places, l'endomorphisme* Frob_v *se relève en un* K*-endomorphisme* α_v *de* A. *On appelera morphisme de Frobenius sur* A *un tel endomorphisme.*

Démonstration C'est le Theorem 1 paragraphe III.13 de [31]. □

Ce sont ces morphismes de Frobenius sur A/K qui vont nous permettre d'écrire l'étape d'extrapolation.

Remarque 2.7. En fait on pourrait spécifier les places qu'il faut exclure dans la proposition, mais nous n'en aurons pas besoin. Par ailleurs, pour pouvoir appliquer le théorème, il faut vérifier deux conditions : la première est toujours satisfaite quitte à faire une extension de degré borné de K. La seconde n'est pas toujours satisfaite, mais on peut toujours trouver une variété abélienne isogène qui la vérifie.

Enfin pour tout nombre premier p, on note Φ_p l'automorphisme de Frobenius de l'extension abélienne K_n/K et on choisit une extension de Φ_p à $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, que l'on note encore Φ_p.

2.2.2 Isogénies admissibles

On rappelle la notion d'isogénie admissible telle qu'introduite dans [11].

Définition 2.1. Soient A une variété abélienne et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur A. Une isogénie α de A est dite *admissible* par rapport à $\mathcal{L}$ si

1. α est dans le centre de $\mathrm{End}(A)$.
2. il existe un entier $\mathrm{q}(\alpha)$ appelé *poids* de α tel que $\alpha^\star\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes \mathrm{q}(\alpha)}$.

Remarque 2.8. En fait la condition (1) ne sert qu'a simplifier l'énoncé du lemme 2.6. C'est la condition (2) qui importe vraiment. Les seules isogénies qui nous intéresseront sont les relevées α_v des morphismes de Frobenius qui sont admissibles (*cf.* la Proposition 2.2).

Lemme 2.4 *Soient* A *une variété abélienne de dimension* g *munie d'un fibré en droites très ample* $\mathcal{L}$, *et* α *une isogénie admissible relativement à* $\mathcal{L}$, *de poids* $q = \mathrm{q}(\alpha)$. *Dans le plongement projectif de* A, *associé à* $\mathcal{L}$, $A \hookrightarrow \mathbb{P}_n$, *on a :*

1. $\mathrm{card}\,(\mathrm{Ker}(\alpha)) = q^g$,
2. *pour toute sous-variété* V *de* A *de stabilisateur* G_V, *on a*

$$\deg_{\mathcal{L}}(\alpha(V)) = \frac{q^{\dim(V)}}{|G_V \cap \mathrm{Ker}(\alpha)|}\deg_{\mathcal{L}}(V)$$

3. *pour toute sous-variété* V *de* A, *définie incomplètement dans* A *par des équations de degré inférieur à* L, *de stabilisateur* G_V *on a*

$$\deg_{\mathcal{L}} G_V = \mid G_V : G_V^0 \mid \deg_{\mathcal{L}} G_V^0 \leq \deg_{\mathcal{L}} V)(2L)^{\dim V - \dim G_V}$$

et G_V *est défini incomplètement dans* A *par des équations de degré inférieur à* $2L$.

Démonstration Le point (1) est facile : par définition, $\alpha^\star\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes q}$. On a donc,

$$q^g \deg_{\mathcal{L}}(A) = \deg_{\mathcal{L}^{\otimes q}}(A) = \deg_{\alpha^\star\mathcal{L}}(A) = |\mathrm{Ker}(\alpha)| \deg_{\mathcal{L}}(A).$$

L'amplitude de $\mathcal{L}$ nous assure que le dernier degré est strictement positif. On simplifie pour conclure. Pour le point (2), il s'agit du point (ii) du lemme 6. de [15] et le point 3. correspond au point (ii) du lemme 2.1. de [11]. □

Lemme 2.5 *Soient G un sous-groupe algébrique de la variété abélienne A/K, $\mathcal{L}$ un fibré en droites très ample sur A, et α une isogénie admissible relativement à $\mathcal{L}$ de poids* $\mathrm{q}(\alpha)$ *de A. On a*

$$\mathrm{q}(\alpha)^{\dim G} \leq \mathrm{card}\left(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap G\right) \leq \left[G : G^0\right] \mathrm{q}(\alpha)^{\dim G}.$$

Démonstration On note que

$$\left[G : G^0\right] \mathrm{card}\left(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap G^0\right) \geq \mathrm{card}\left(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap G\right) \geq \mathrm{card}\left(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap G^0\right).$$

La restriction de α à la sous-variété abélienne G^0 est encore une isogénie admissible de poids $\mathrm{q}(\alpha)$ pour $(G^0, \mathcal{L}_{|G^0})$ (*cf.* Lemme 2.4. point (ii) de [11]). Par le point (1) du lemme 2.4 précédent, on en déduit que le cardinal du noyau de cette isogénie $\alpha_{|G^0}$ est $\mathrm{q}(\alpha)^{\dim G^0}$.
□

Soient F/K une extension finie de corps et V une sous-F-variété stricte de A_F, F-irréductible. Le lemme suivant (dont l'origine remonte à Dobrowolski [14]) montre que les images par une isogénie admissible de ses composantes géométriquement irréductibles sont essentiellement distinctes. Nous en aurons besoin au paragraphe 3.8. On commence pour cela par donner une définition :

Définition 2.2. Soient A une variété abélienne et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur A. Deux isogénies admissibles de A par rapport à $\mathcal{L}$ sont dites *premières entre elles* si leurs poids sont premiers entre eux.

Lemme 2.6 *Soient A une variété abélienne sur K de dimension $g \geq 1$, $\mathcal{L}$ un fibré en droites très ample sur A, F/K une extension finie de corps de nombres et V une sous-F-variété stricte de A_F, irréductible sur F. Si $V_{\overline{K}}$ n'est pas une réunion de sous-variétés de torsion de $A_{\overline{K}}$, on a :*

1. *Pour tout couple (α, β) d'isogénies admissibles pour $\mathcal{L}$, de poids distincts, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/F)$, et pour toute composante géométriquement irréductible W de $V_{\overline{K}}$, les sous-variétés $\alpha(W)$ et $\beta(\sigma(W))$ sont distinctes.*

2. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble d'isogénies admissibles pour $\mathcal{L}$, deux à deux premières entre elles. Notons $V_1, \ldots, V_M$ les composantes géométriquement irréductibles de $V_{\overline{K}}$, et notons $\mathcal{Q}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ défini par*

$$\mathcal{Q} = \{\alpha \in \mathcal{P} \ / \ \exists i, j,\ 1 \leq i < j \leq M, \quad \alpha(V_i) = \alpha(V_j)\}.$$

Le cardinal de $\mathcal{Q}$ est majoré par $\frac{\log M}{\log 2}$.

Démonstration Dans ce contexte il s'agit de la proposition 2.7. de [11] appliquée sur le corps de nombres F. □

On conclut ce paragraphe en "rappelant" que les morphismes de Frobenius sur A/K sont des isogénies admissibles :

Définition 2.3. Soient A une variété abélienne et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur A. Suivant Mumford , on dit que $\mathcal{L}$ est *totalement symétrique* si $\mathcal{L}$ est le carré d'un fibré en droites symétrique.

Le théorème de Lefschetz (*cf.* par exemple le Theorem A.5.3.6 de [16]) nous indique que si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites ample, alors $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ est très ample.

Proposition 2.2 *Soient A/K une variété abélienne de type C.M. vérifiant les hypothèses de la proposition 2.1, et $\mathcal{L}$ un fibré en droites très ample et totalement symétrique sur A. Soit α_v un morphisme de Frobenius sur A pour la place finie v. Alors, α_v est une isogénie admissible pour $\mathcal{L}$ de poids* $\mathrm{q}(\alpha)$.

Démonstration C'est la proposition 3.3. de [11]. □

3 Preuve du théorème 1.3

Dans la suite de ce paragraphe, on va prouver le théorème 1.3. Pour cela on va suivre les idées de [11] avec les modifications indiquées dans l'introduction. On commence tout d'abord par quelques réductions.

3.1 Réductions

Quitte à faire une extension de degré borné de K et quitte à prendre une variété abélienne isogène à la variété de départ, on supposera désormais toujours que les hypothèses de la proposition 2.1 sont satisfaites. On note

$$\delta_n(\cdot) := \delta_{\mathcal{L},K_n}(\cdot) \quad \text{et} \quad \delta_n^\star(\cdot) := [K_n : K]\delta_n(\cdot).$$

Par ailleurs, comme on travaille avec une variété abélienne A/K de type C.M., on sait que, quitte à faire au départ une extension bornée de K (ce que l'on fait) de sorte que les endomorphismes de A soient tous définis sur K, l'extension K_n/K est abélienne (*cf.* par exemple [5] Th 9.2 ou [35] Cor. 2 du theorem 5). Enfin, quitte à prendre un multiple de n, on peut toujours supposer ce n assez grand (devant les différentes constantes $c_i := c_i(A/K, \mathcal{L})$ intervenant dans ce qui précède et dans la suite).

3.2 L'hypothèse (H)

Soit P un point de $A(\overline{K})$. On fixe deux entiers, $\rho_{\min}$ et $\rho_{\max}$, ne dépendant que de g, que nous expliciterons plus tard mais dont la valeur est fixée une fois pour toute. On pose $\delta_n^\star = \delta_n^\star(P)$. On se donne aussi un point $Q \in A(\overline{K})$ qui vérifie l'**hypothèse (H)** suivante :

1. Il existe un entier $\rho \in \{\rho_{\min}, \ldots, \rho_{\max}\}$ tel que
$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(Q) \leq \frac{c}{\delta_n(Q)} \left(\frac{\log\log \delta_n^\star}{C_0 \log \delta_n^\star} \right)^{(g+1)!\rho}.$$
2. Il existe une constante $(g+1)!(2g.g!)^g \rho_{\min} \geq c_g > 0$, telle que $Q = f(\sigma(P))$ où f est une isogénie de poids au plus $(C_0 \log \delta_n^\star)^{c_g}$ et σ est un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Nous utiliserons fréquemment le petit lemme suivant :

Lemme 3.1 *Avec les notations précédentes, si Q vérifie l'hypothèse (H), alors on a*
$$\log \delta_n(Q) \leq C_0 \log \delta_n^\star(P).$$

Démonstration : Soit X une K_n-variété de dimension $d < g$ passant par le point $\sigma(P)$ telle que $\delta_n(P) = (\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} X)^{\frac{1}{g-d}}$. La variété $f(X)$ passe alors par Q, donc
$$\begin{aligned} \delta_n(Q) &\leq (\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} f(X))^{\frac{1}{g-d}} \\ &\leq \mathbf{q}(f)^{\frac{d}{g-d}} \delta_n(P) \leq \mathbf{q}(f)^g \delta_n^\star(P) \qquad \text{par le lemme 2.4 point 2.} \end{aligned}$$

Or le poids $\mathbf{q}(f)$ est par l'hypothèse (H) polynomial en $C_0 \log \delta_n^\star(P)$. On peut donc conclure en passant au log. □

3.3 À propos des paramètres

On note $Q \in A(\overline{K})$ un point vérifiant l'hypothèse (H) et V une sous-K_n-variété irréductible de A_{K_n} de dimension minimale, réalisant $\delta_n(Q)$. En utilisant un lemme de Siegel fin, le théorème de Bombieri-Vaaler, nous allons construire une fonction F, polynôme homogène à coefficients dans $\mathcal{O}_{K_n}$ de degré L en les fonctions abéliennes de $A \times A$, nul à un ordre $\geq T_0 + 1$ sur l'image $i(V)$ de V dans $A \times A$, le long de l'espace tangent à l'origine de la sous-variété abélienne B de $A \times A$ définie comme étant l'image de A par l'application $i : x \mapsto (x, Nx)$, N étant un paramètre. L'entier L est le degré de la fonction auxiliaire, T_0 est l'ordre d'annulation au point Q que l'on rentre dans la machine et à partir duquel on va extrapoler, N est un paramètre compris entre $\sqrt{L}$ et $\sqrt{2L}$. Pour des raisons techniques (*cf.* le paragraphe sur l'extrapolation de [11]) on choisit pour N une puissance de 2. Au vu du résultat que l'on cherche à prouver, on fera intervenir dans le choix des paramètres, des facteurs $\delta_n(Q)$ et des facteurs polynomiaux en $\log \delta_n^\star$ ou $\log\log \delta_n^\star$.

D'autres paramètres N_i correspondant aux degré des isogénies α_i de Frobenius vont intervenir. On choisit les paramètres de sorte que

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(N\alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_g(Q)) \leq c_3. \tag{4}$$

Enfin, on va extrapoler g fois, utilisant à chaque fois l'extrapolation précédente. On obtient ainsi des ordres d'annulation T_i chacun étant nécessairement plus petit que le précédent.

Par ailleurs, tous ces paramètres sont choisis polynomiaux en $\delta_n(Q)$ et en $\log \delta_n^\star$. De plus, comme L donc N^2 va être de la forme $\delta_n(Q)(\log \delta_n^\star)^*$ et que on veut comme résultat une minoration du type $1/\delta_n(Q)(\log \delta_n^\star)^{*'}$, on sait par avance grace à l'inégalité (4) que les N_i seront choisis polynomiaux en $\log \delta_n^\star$ ou plus petits.

3.4 Lemme de Siegel

Définition 3.1. Si S est un $\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel, on définit la *hauteur logarithmique de Schmidt* [28] de S, $h_2(S)$ comme suit : sur $\mathbb{G}_m^n(\overline{\mathbb{Q}})$ on définit

$$h_2(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{d}\left(\sum_{v \in M_K^0} d_v \log \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|_v + \sum_{v \in M_K^\infty} d_v \log \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|_v^2}\right).$$

Soit N un entier. On définit alors la hauteur h_2 d'un sous-$\overline{\mathbb{Q}}$-espace vectoriel S algébrique de dimension d de $\overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$ par :

$$h_2(S) = h_2(\mathbf{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x}_d),$$

où $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_d$ est une base de S sur un corps de nombres quelconque sur lequel S est défini.

Rappelons le lemme de Siegel que nous allons utiliser : il s'agit du théorème de Bombieri-Vaaler [9]. Il y a ici une différence fondamentale avec l'article de David et Hindry : on veut pouvoir controler la dépendance en l'extension K_n/K.

Théorème 3.1 (Bombieri-Vaaler) *Soit $\mathbb{F}/\mathbb{Q}$ un corps de nombres de degré d. Soient M et N deux entiers strictement positifs et S un sous-$\mathbb{F}$-espace vectoriel de $\mathbb{F}^N$ de dimension $N - M > 0$. Il existe un élément non nul $\boldsymbol{x}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{F}}^N$ de S tel que*

$$h_2(1, \boldsymbol{x}) \leq \frac{1}{2d} \log \mid \mathrm{Disc}(\mathbb{F}/\mathbb{Q}) \mid + \frac{1}{N-M} h_2(S).$$

Avant de poursuivre, faisons quelque brefs rappels concernant la projective normalité.

Définition 3.2. On dit qu'une sous-variété X de $\mathbb{P}_n$ est *projectivement normale* si son anneau de coordonnées $S(X)$ est un anneau normal (*i.e.*, intégralement clos).

On peut montrer (*cf.* par exemple Birkenhake-Lange [7] p. 190-193) que $X \subset \mathbb{P}_n$ est projectivement normale si et seulement si elle est normale, et pour tout $d \geq 0$ la flèche naturelle

$$H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(d)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(d))$$

est surjective.

Concernant les variétés abéliennes plongées de manière projectivement normale, on a le résultat suivant que l'on trouve par exemple dans [7] theorem 3.1 p. 190.

Proposition 3.1 *Soient A/K une variété abélienne, et $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur A. Pour tout $n \geq 3$, le fibré $\mathcal{L}^{\otimes n}$ définit un plongement projectivement normal de A dans un espace projectif $\mathbb{P}_n$.*

Soient A/K une variété abélienne sur un corps de nombres, munie d'un fibré en droites symétrique ample $\mathcal{L}$. Quitte à travailler avec $\mathcal{L}^{\otimes 4}$ plutôt qu'avec $\mathcal{L}$, on peut supposer que $\mathcal{L}$ est très ample, totalement symétrique et définit un plongement projectivement normal de A dans un projectif $\mathbb{P}_n$. On note $\mathcal{M} = \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{L}$ le fibré en droites sur $A \times A$ associé à $\mathcal{L}$. On va maintenant pouvoir construire la fonction F recherchée.

Soient L et T deux entiers. On note $\{s_0, \ldots, s_l\}$ une base de $H^0(A \times A, \mathcal{M})$. On peut, par projective normalité, choisir une base $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ du K-vectoriel $H^0\left(A \times A, \mathcal{M}^{\otimes L}\right)$ telle que tous les Q_i sont homogènes de degré L en les s_j. De plus, on peut aussi voir les s_i comme des $(1,1)$-formes homogènes de $K[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ où $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_n)$, et $\mathbf{Y} = (Y_0, \ldots, Y_n)$. Enfin on note T_B l'espace tangent à l'origine de la sous-variété abélienne $B = i(A)$ de $A \times A$ définie par $y = [N]x$.

But : fabriquer un polynôme, $F = \sum_{i=1}^m b_i Q_i$, à coefficients entiers dans $\mathcal{O}_{K_n}$, en les fonctions abéliennes de $A \times A$, tel que F est de "petite" hauteur, et tel que F s'annule à un ordre supérieur à $T_0 + 1$ sur $i(V)$, le long de T_B.

En notant Θ l'application thêta définie sur $T_{A(\mathbb{C})}$ par la composition

$$T_{A(\mathbb{C})} \xrightarrow{\exp_{A(\mathbb{C})}} A(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$$

associée à $\mathcal{L}$, ceci correspond à trouver une solution de petite hauteur au système d'inconnues les b_i

$$\frac{\partial^{\kappa} F\left(\Theta(\mathbf{u}+\mathbf{z}), \Theta(N(\mathbf{u}+\mathbf{z}))\right.}{\partial \mathbf{z}^{\kappa}}\Big|_{\mathbf{z}=0} = 0, \tag{5}$$

pour tout $|\ \kappa\ | \leq T$ et $\mathbf{u} \in T_{A(\mathbb{C})}$ tels que $\Theta(\mathbf{u}) \in V(\overline{K})$.

On reprend le lemme 5.1. de [11] en remplaçant K par K_n. On obtient alors directement :

Lemme 3.2 *Il existe une constante strictement positive c_4 telle que le rang du système (5) sur K_n est majoré par*

$$\boldsymbol{rg} = c_4 \left(T_0 \delta_n(Q)\right)^{g-d_0} \left(LN^2\right)^{d_0}.$$

On peut maintenant construire la fonction que l'on veut. Étant donné un polynôme F à coefficients dans $\overline{K}$, on note $h(F)$ la hauteur logarithmique absolue du point projectif défini par 1 et les coefficients de F.

Lemme 3.3 *Si $T_0\delta_n(Q) < 2L^2$, alors il existe une fonction F solution du système (5), de hauteur majorée par*

$$h(F) \le c_5 \left(\log[K_n : K]\right)^2 + \frac{\boldsymbol{rg} \times (C_0 T_0 \log(\delta_n(Q)) + L)}{L^{2g}}.$$

Démonstration : Il suffit de reprendre la preuve du lemme 5.4. de [11] et d'appliquer le théorème 3.1 en lieu et place du classique lemme de Siegel. Comme $K_n = K(A[n])$, on utilise le corollaire 2.1 pour majorer le discriminant apparaîssant dans le théorème 3.1. C'est ce discriminant qui nous donne le terme $c_5 \left(\log[K_n : K]\right)^2$. □

3.5 Lemme de zéros

Avec les notations précédentes, on pose $\Sigma = \left\{\sigma(Q) \;/\; \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_n)\right\}$. Pour r compris entre 1 et g on pose de plus

$$\mathcal{P}_r = \{\mathrm{Id}\} \cup \left\{\alpha_v \;/\; \frac{N_r}{2} \le N(v) \le N_r,\ v \mid p \text{ non-ramifié dans } K_n\right\},$$

où pour chaque premier p on ne prend qu'une seule place v/p et où les N_i sont des paramètres qui seront spécifiés ulterieurement. Il faut notamment les choisir de sorte que $\frac{N_i}{\log N_i} \ge 2\log\delta_n^\star \ge \frac{4}{\log 2}\log[K_n : K]$ afin de ne pas être embété quand on enlève les places ramifiées (*cf.* lemme 2.1). En supposant ceci vérifié, le théorème de Chebotarev nous assure alors que

$$\mathcal{P}_r \ge \frac{c_6 N_r}{\log N_r}.$$

Notation. Si α est un élément de $\mathcal{P}_r$ pour un certain entier r, associé au nombre premier p, on notera $\widetilde{\alpha}$ l'opérateur $\alpha \circ \Phi_p^{-1}$, composé d'une isogénie et d'un morphisme de Galois. Par convention, si α est l'identité, on prendra également l'identité pour $\widetilde{\alpha}$.

Pour tout entier r entre 1 et g, on note alors

$$\Sigma^{(r)} = \left\{\widetilde{\alpha}_r \circ \cdots \circ \widetilde{\alpha}_g(Q)) \;/\; Q \in \Sigma,\ \alpha_i \in \mathcal{P}_i\right\}.$$

On convient que $\Sigma^{(g+1)} = \Sigma$.

On rappelle une variante (affaiblie) du lemme de zéros démontré dans [11] (théorème 4.1.).

Théorème 3.2 (Lemme de zéros) *On utilise les notations précédemment introduites. Soient A/K une variété abélienne de dimension g, plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}^m$ de façon projectivement normale et M un entier strictement positif. On se donne une forme*

$F \in K_n[X_0, \ldots, X_m]$ homogène de degré L, non-identiquement nulle sur A_{K_n}. On suppose que F s'annule à un ordre supérieur à $1 + M$ le long de $T_{A_{K_n}}$ en tous les points de $\Sigma^{(1)}$. Sous ces hypothèses,

il existe un entier $r \in \{1, \ldots, g\}$, une sous-K_n-variété de A_{K_n}, V, stricte et K_n-irréductible, de dimension $d \geq g - r$, telle que $V_{\overline{K}}$ contient un élément de $\Sigma^{(r+1)}$, incomplètement définie dans A avec multiplicité supérieure à $\frac{1}{g}M$ le long de l'espace tangent à l'origine $T_{A_{K_n}}$ par des formes de degré inférieur à $2LN_1 \times \cdots \times N_{r-1}$, telle que :

$$M^{g-d} \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{P}_r} \widetilde{\alpha}(V) \right) \leq c_7 (LN^2 N_1 \times \cdots \times N_{r-1})^{g-d}.$$

Démonstration : C'est le théorème 4.1. (version galoisienne) et la scolie 4.8. de [11] appliqué avec

$$K = K_n, \qquad \forall i \in \{1, \ldots, g\} \;\; T_i = \frac{1}{g} M, \qquad L = L, \qquad \mathcal{V} = T_{A_{K_n}}.$$

Plus précisément, on reprend leur preuve,la seule différence étant la suivante : l'a où ils introduisent (p.27, paragraphe 4.2.) la suite d'idéaux

$$\mathfrak{I}_1 = (P), \quad \mathfrak{I}_{r+1} = (\partial^{T_r}_{0,\alpha} \mathfrak{I}_r;\ \alpha \in \mathcal{P}_r),$$

nous introduisons la suite

$$\mathfrak{I}_1 = (P), \quad \mathfrak{I}_{r+1} = (\partial^{T_r}_{0,\alpha_p} \Phi_p(\mathfrak{I}_r);\ \widetilde{\alpha}_p = \alpha_p \circ \Phi_p^{-1} \in \mathcal{P}_r).$$

La preuve est alors la même. □

Comme dans [11], nous aurons également besoin d'un résultat supplémentaire, raffinant l'inégalité de Bézout :

Lemme 3.4 *Il existe une constante c_8 telle que la propriété suivante est vraie : soient V une sous-K_n-variété stricte de A, irréductible sur K_n et F une forme de degré μ sur A, définie sur K_n. On suppose que F est nulle avec multiplicité supérieure à m sur une sous-K_n-variété V' de A, et on suppose également que les intersections $V \cdot V'$ et $V \cdot \mathcal{Z}(F)$ ont une composante W, K_n-irréductible en commun, de codimension 1 dans V. Dans ce cas, on a l'inégalité*

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W \leq c_8 \frac{(\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V)\mu}{m}.$$

Démonstration : Il s'agit du lemme 4.9. de [11] avec $K = K_n$. □

3.6 Extrapolation

L'extrapolation suit pour partie ce qui est fait par David et Hindry dans [11]. Ceci dit, il y a tout de même une différence : comme la fonction auxiliaire n'est plus construite à coefficients entiers mais à coefficients dans $\mathcal{O}_{K_n}$, on va à la manière des cas non-ramifié de [4] et [24], faire intervenir les automorphismes de Frobenius Φ_p de l'extension abélienne K_n/K. Ceci étant noté, les choses fonctionnent bien ensuite à condition de se restreindre au cas des premiers non-ramifiés dans K_n. C'est pour cela que l'on définit les ensembles $\mathcal{P}_r$ tels qu'on les définit. On énonce le lemme qui nous permet d'extrapoler. Notons que l'on utilise ici le fait que l'extension K_n/K est abélienne.

Lemme 3.5 *Soient $x \in \mathcal{O}_{K_n}$, p un nombre premier non-ramifié dans K_n et v une valuation sur $\overline{K}$ étendant p. En notant $\Phi_p \in \mathrm{Gal}(K_n/K)$ l'automorphisme de Frobenius associé à p, on a*

$$\mid x^p - \Phi_p x \mid_v \leq p^{-1}.$$

Démonstration : C'est le lemme 3.1. de [4] (*cf.* aussi le lemme 4.3 de [24]). □

Remarque 3.9. Notons que c'est cette restriction, le fait de se restreindre à ne travailler qu'avec les premiers non-ramifiés dans K_n, qui fait apparaître les facteurs $\log \delta_n^\star$ plutôt que $\log \delta_n(P)$. Pour corriger ceci, on pourrait s'inspirer de l'article [24], mais, indépendamment des autres complications, il y aurait cette fois-ci non plus g, mais 2^g étapes d'extrapolation à faire.

On reprend le paragraphe 6 de [11] et on remplace dans le théorème 6.4, le corps $K(Q)$ par $K_n(Q)$. Ceci ce fait sans autre changement et on obtient ainsi

Proposition 3.2 *Pour tout i compris entre 1 et g, on fait les hypothèses suivantes sur les paramètres :*

$$T_i \log N_{g-i} \geq 2L \text{ et si } i \leq g-1, \quad T_i \log N_{g-i} > 2c_9 \left(T_{i+1} \log(T_{i+1} + L) + L + h(F)\right).$$

Dans ce cas, la fonction auxiliaire F est nulle le long de $T_{B(\mathbb{C})}$ à un ordre supérieur à T_g en tout point de $\Sigma^{(1)}$.

Démonstration : Il s'agit de reprendre les calculs de la proposition 6.5. de [11] (elle même basée sur l'extrapolation de Laurent [17]) en passant de K à K_n. On conserve donc leurs notations. Il s'agit de la même chose que ce qui est fait dans les propositions 6.1 et 7.1 de [24] dans le cadre des courbes elliptiques. On raisonne par récurrence, on suppose F nulle à un ordre supérieur à T_i le long de $T_{B(\mathbb{C})}$ en tous les points de $\Sigma^{(g+1-i)}$, et on va montrer la même chose à au rang $i+1$. Plus exactement, étant donné un point R_{g+1-i} de $\Sigma^{(g+1-i)}$, plutôt que de montrer que F s'annule en un point $\widetilde{\alpha}_p(R_{g+1-i})$ à un ordre supérieur à T_{i+1}, on va montrer, ce qui est équivalent, que $\Phi_p(F)$ s'annule au point $\alpha_p(R_{g+1-i})$ au même ordre. Cette reformulation nous permettra d'appliquer le lemme 3.5. Notons que le rang

$i = 0$, autrement dit l'initialisation de la récurrence, est vrai par construction de F par le lemme de Siegel.

Soient v une place de K_n au-dessus d'un premier non-ramifié dans K_n, R un point de $\Sigma^{(g+1-i)}$ défini sur une extension K'_n/K_n, et w une place de K'_n au dessus de v. Notons $\mathbf{R} = (R_0, \ldots, R_n)$ un système de coordonnées projectives de R dans $\mathcal{O}_w$, telles que $\| \mathbf{R} \|_w = 1$. Soit ∂^κ un opérateur différentiel d'ordre $| \kappa | \leq T_1$ le long de $T_{B(\mathbb{C})}$. L'application du petit théorème de Fermat dans le cadre des variétés abéliennes conduisant à l'inégalité (20) p.47 de [11] et le lemme 3.5 nous donnent

$$\left|\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}), \mathbf{F}^{(N)} \circ \mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)\right|_w \leq |\pi_v|_w^{T-|\kappa|}, \tag{6}$$

où $\mathbf{F}_{\alpha_v}$ et $\mathbf{F}^{(N)}$ sont des formes homogènes de $\mathcal{O}_K[\mathbf{X}]$ de degré respectifs $\mathrm{N}(v)$ et 4^{m+1}, représentant respectivement l'endomorphisme de Frobenius sur A associé à v, et la multiplication par $N = 2^{m+1}$.

On veut maintenant sommer sur toutes les places w au-dessus de v. Malheureusement, le choix du système de coordonnées projectives pour R dépend de w. On est donc obliger d'alourdir les notations pour pallier ce probème. Soient S, S_N, S_{α_v}, S_{N,α_v} des coordonnées projectives non nulles de R, $\mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{R})$, $\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})$, $\mathbf{F}^{(N)} \circ \mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})$ respectivement. On note de plus $S_{w,N}$, S_{w,α_v}, S_{w,N,α_v} des coordonnées de ces points de valeur absolue w-adique maximale.

Soit maintenant ∂^κ un opérateur différentiel de longueur minimale pour lequel

$$\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}), \mathbf{F}^{(N)} \circ \mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)$$

est non nul. Si $|\kappa|$ est supérieur à T_1, on a gagné. Sinon on applique la formule de Leibniz en utilisant que F est bihomogène de bidegré (L, L). On a donc

$$\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)\left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)}{S_{N,\alpha_v}}\right) = \frac{\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R}), \mathbf{F}^{(N)}\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)\right)}{S_{\alpha_v}^L S_{N,\alpha_v}^L}$$

Or ceci est égal à

$$\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)\left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{w,\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)}{S_{w,N,\alpha_v}}\right) \cdot \frac{\left(S_{w,\alpha_v} S_{w,N,\alpha_v}\right)^L}{\left(S_{\alpha_v} S_{N,\alpha_v}\right)^L}.$$

On réécrit alors l'inégalité (6) en passant au log, en sommant sur toutes les places w au-dessus de v et en notant n_w les degrés locaux :

$$\sum_{w/v} n_w \log\left(\left|\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)\left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)}{S_{N,\alpha_v}}\right)\right|_w\right) \tag{7}$$

$$\leq (T - |\kappa|) \sum_{w/v} n_w \log(|\pi_v|_w) + L \sum_{w/v} n_w \log\left(\frac{|S_{w,\alpha_v} S_{w,N,\alpha_v}|_w}{|S_{\alpha_v} S_{N,\alpha_v}|_w}\right). \tag{8}$$

Or

$$\sum_{w/v} n_w \log(|\pi_v|_w) = [K'_n : K_n] \log(|\pi_v|_v) \leq -[K'_n : K_n] \log (\mathrm{N}(v))$$

De plus, on peut voir que

$$\begin{aligned}\sum_{w/v} n_w \log\left(\frac{|S_{w,\alpha_v} S_{w,N,\alpha_v}|_w}{|S_{\alpha_v} S_{N,\alpha_v}|_w}\right) &\leq [K'_n : K_n] \left(h_{\mathcal{L}}(\alpha_v(R)) + h_{\mathcal{L}}(N\alpha_v(R))\right) \\ &\leq [K'_n : K_n] \left(\mathrm{N}(v)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(R) + N^2\mathrm{N}(v)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(R) + c_{14}\right).\end{aligned}$$

C'est l'inégalité (21) p. 49 de [11]. On obtient ainsi, en notant Gauche le membre de gauche de l'inégalité (7) la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\text{Gauche} &\leq -c_{10} T_i [K'_n : K_n] \log N_{g-i} + L[K'_n : K_n](N(v) \left(N^2 + 1)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(R) + c_{200}\right) \quad (9)\\ &\leq -c_{10} T_i [K'_n : K_n] \log N_{g-i} + c_{11} L[K'_n : K_n] \leq -c_{12} T_i [K'_n : K_n] \log N_{g-i}, \quad (10)\end{aligned}$$

par choix des paramètres et par l'hypothèse. Il reste à majorer le terme $-$Gauche. Par définition de la hauteur (absolue logarithmique) projective, on a

$$\begin{aligned}\frac{-1}{[K'_n : K_n]}\text{Gauche} &\leq h\left(\left(\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)\left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)}{S_{N,\alpha_v}}\right)\right)^{-1}\right) \\ &= h\left(\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)\left(\frac{\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})}{S_{\alpha_v}}, \frac{\mathbf{F}^{(N)}\left(\mathbf{F}_{\alpha_v}(\mathbf{R})\right)}{S_{N,\alpha_v}}\right)\right),\end{aligned}$$

ceci ayant un sens grace à l'hypothèse de non nullité de $\Phi_p\left(\partial^\kappa F\right)(\cdots)$. Il ne reste maintenant plus qu'à majorer cette dernière hauteur. Il s'agit d'un calcul classique (*cf.* par exemple [11] p. 50). On obtient

$$\frac{-1}{[K'_n : K_n]}\text{Gauche} \leq c_{13}\left(T_{i+1}\log(T_{i+1} + L) + LN^2\mathrm{N}(v)\widehat{h}_{\mathcal{L}}(R) + h(F)\right). \quad (11)$$

Finalement, en mettant ensemble les inégalités (9) et (11), on obtient

$$T_i \log N_{g-i} \leq c_{14}\left(T_{i+1}\log(T_{i+1} + L) + L + h(F)\right). \quad (12)$$

Les hypothèses permettent alors de conclure. □

3.7 Choix complet des paramètres

Jusque là on a du imposer les inégalités suivantes sur les paramètres :

$$\forall i, N_i \gg (\log \delta_n^\star)^2, \qquad N^2 \simeq L, \qquad \text{et si} \quad i \leq g-1,\ T_0\delta_n(Q) \ll L^2 \ll (T_i \log\log \delta_n^\star)^2.$$

De plus, L étant linéaire en $\delta_n(Q)$, il en est de même pour les T_i qui sont strictement décroissants, en fait vérifiant :

$$T_{i+1} \leq T_i \frac{\log\log \delta_n^\star}{C_0 \log \delta_n^\star}.$$

On doit également avoir $T_0 \geq \ldots \geq T_{g-1} \geq \frac{(\log \delta_n^\star)^2}{\log\log \delta_n^\star}$. Ainsi, on a :

$$T_g \simeq T_0 \left(\frac{\log\log \delta_n^\star}{C_0 \log \delta_n^\star}\right)^g = \delta_n(Q) \frac{T_0}{\delta_n(Q)} \left(\frac{\log\log \delta_n^\star}{C_0 \log \delta_n^\star}\right)^g.$$

Enfin la dernière chose à vérifier est la suivante :

$$\forall i \in \{1, \ldots, g-1\}, \quad C_0 T_0^{g+1-d_0} \delta_n(Q)^{g-d_0} \log \delta_n^\star \ll c T_i L^{2(g-d_0)} \log\log \delta_n^\star.$$

En ayant en tête que l'on veut que L soit le plus petit possible, ceci nous permet d'en déduire les valeurs optimales pour les T_i et pour L :

$$L = \left[C_0^{2g} \delta_n(Q) (\log \delta_n^\star)^{2g-1} (\log\log \delta_n^\star)^{-2g}\right], N = 2^{m+1}, m = \left[\frac{\log L}{2\log 2}\right],$$

et, pour tout $i \in \{1, \ldots, g\}$

$$T_0 = \left[C_0^{3g-\frac{1}{2}} \delta_n(Q) (\log \delta_n^\star)^{3g-2} (\log\log \delta_n^\star)^{-3g}\right], T_i = \left[T_0 \left(\frac{\log\log \delta_n^\star}{C_0 \log \delta_n^\star}\right)^i\right].$$

Par ailleurs on pose

$$\forall i \in \{1, \ldots, g\} \quad N_i = \left(\frac{C_0 \log \delta_n^\star}{\log\log \delta_n^\star}\right)^{i.i!\rho},$$

pour un certain ρ entre $\rho_{\min}$ et $\rho_{\max}$, avec $\rho_{max} = (g+2)(2g.g!)^g \rho_{\min}$ et $\rho_{\min} = 2g+5$. Avec ces choix de paramètres on vérifie bien que l'on a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(N\alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_g(Q)) \leq c_3.$$

3.8 Fin de l'extrapolation

On considère l'application

$$\begin{array}{rccccccc} \varphi : & A & \overset{i}{\hookrightarrow} & A \times A & \hookrightarrow & \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n & \underset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}_{(n+1)^2-1} \\ & x & \mapsto & (x, [N]x) & & & & \end{array}$$

Proposition 3.3 *Soient ρ compris entre $\rho_{\min}$ et $\rho_{\max}$ et Q un point de $A(\overline{K})$ vérifiant l'hypothèse* (H) *pour ρ. Le lemme de zéros (théorème 3.2) nous fournit une K_n-variété V, K_n-irréductible, stricte de A, de dimension d, telle que : il existe un point $Q_1 \in A(\overline{K})$, de la forme $Q_1 = \widetilde{\alpha}_{r+1} \circ \ldots \circ \widetilde{\alpha}_g(Q)$, pour un certain $r \in \{1, \ldots, g\}$ et certains $\alpha_i \in \mathcal{P}_i$,*

$i \in \{r+1, \ldots, g\}$, tel que V est de dimension $d \geq g-r$, que $Q_1 \in V(\overline{K})$, et si V n'est pas une sous-variété torsion, on a

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V \leq c_{15} \frac{C_0 \log\log \delta_n^\star}{N_r} \left(\frac{L^2 N_1 \times \cdots \times N_{r-1}}{T_g} \right)^{g-d}.$$

En remplaçant les paramètres par leur valeur, on obtient,

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V \leq c_{15} \frac{C_0^{(2g+\frac{3}{2}+\rho(r!-1))(g-d)} \delta_n(Q)^{g-d} (\log \delta_n^\star)^{(2g+\rho(r!-1))(g-d)}}{N_r (\log\log \delta_n^\star)^{(2g+\rho(r!-1))(g-d)-1}}.$$

De plus V est incomplètement définie par des formes de degré au plus

$$c_{16} L N^2 N_1 \times \cdots \times N_{r-1}$$

avec multiplicité supérieure à $\frac{1}{g} T_g$.

Démonstration : On applique le théorème 3.2 à la fonction auxiliaire F construite précédemment, tirée en arrière par φ. Comme F est une forme bi-homogène de bidegré (L, L) non-identiquement nulle sur $A_{K_n} \times A_{K_n}$, elle n'est pas identiquement nulle sur B_{K_n} par choix du paramètre N (on a pris $N^2 \geq L+1$). De plus la proposition 3.2 nous indique que F est nulle le long de $T_{B(\mathbb{C})}$ à un ordre supérieur à T_g en tous les points de $\Sigma^{(1)}$. La forme $G = F \circ \varphi$, qui est une forme de degré $L(N^2+1)$ vérifie donc les hypothèses du lemme de zéros. Il suffit de vérifier l'inégalité annoncée pour le degré de V. On suppose donc que V n'est pas de torsion.

On note $\widetilde{V}$ une composante irréductible de $V_{\overline{K}}$. Comme V n'est pas une sous-variété de torsion, le point 1. du lemme 2.6 nous dit alors qu'il n'existe pas de triplet $(\alpha, \beta, \sigma) \in \mathcal{P}_r^2 \times \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_n)$ tel que $\alpha(\widetilde{V}) = \beta(\sigma(\widetilde{V}))$. Le choix de $N_r \geq (\log \delta_n^\star)^2$ fait que la suite du calcul de la majoration du degré de V marche comme dans [11] p.54-55, en remplaçant K par K_n :

$$\deg \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{P}_r,\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_n)} \widetilde{\alpha}(\sigma(\widetilde{(V)})) \right) \geq \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_r} \sum_{i=1}^{M} \frac{N(\alpha)^d \deg(\sigma_i(\widetilde{V}))}{\mathrm{Card}\left(\mathrm{Ker}\alpha \cap G_{\sigma_i(\widetilde{V})}\right)},$$

où l'on a noté $\sigma_i(\widetilde{V})$ les différents conjuguées de $\widetilde{V}$. On poursuit alors comme dans [11] p.55. Notamment on a

$$\mid G_{\widetilde{V}} : G_{\widetilde{V}}^0 \mid \leq \deg \widetilde{V} (4L^2 N_1 \times \cdots \times N_{r-1})^{g-s} \leq C_0^{\star_1} (\delta_n^\star)^{\star_2},$$

où $\star_1$ et $\star_2$ sont des constantes explicites ne dépendant que de g. De plus par choix du paramètre N_r, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_r$ est supérieur à $\frac{N_r}{C_0 \log\log \delta_n^\star}$. Finalement tous calculs faits, on obtient

$$\deg \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{P}_r,\ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_n)} \widetilde{\alpha}(\sigma(\widetilde{(V)})) \right) \geq \frac{c_{238}}{C_0} \frac{N_r \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V}{\log\log \delta_n^\star}.$$

En remplaçant dans l'inégalité fournie par le lemme de zéros, on obtient :

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V \leq c_{15} \frac{C_0 \log\log \delta_n^\star}{N_r} \left(\frac{L^2 N_1 \times \cdots \times N_{r-1}}{T_g} \right)^{g-d}.$$

En remplaçant les paramètres par leur valeurs, on obtient :

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V \leq c_{15} \frac{C_0^{(2g+\frac{3}{2}+\rho(r!-1))(g-d)} \delta_n(Q)^{g-d} (\log \delta_n^\star)^{(2g+\rho(r!-1))(g-d)}}{N_r (\log\log \delta_n^\star)^{(2g+\rho(r!-1))(g-d)-1}}.$$

Ceci conclut. □

Corollaire 3.1 *Avec les notations de la proposition précédente et si V n'est pas de torsion, on a l'inégalité*

$$\delta_n(Q_1) \leq \frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}} (\log \delta_n^\star)^{2g}}{N_1 (\log\log \delta_n^\star)^{2g-1}} \delta_n(Q),$$

en particulier, $\delta_n(Q_1) < \delta_n(Q)$.

Démonstration : Par définition de l'indice d'obstruction, on a $\delta_n(Q_1) \leq (\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V)^{\frac{1}{\operatorname{codim}(V)}}$. Ainsi en appliquant la proposition précédente, on en déduit

$$\delta_n(Q_1) \leq c_{15} \frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho(r!-1)} (\log \delta_n^\star)^{2g+\rho(r!-1)}}{N_r^{\frac{1}{g-d}} (\log\log \delta_n^\star)^{2g+\rho(r!-1)}} (\log\log \delta_n^\star)^{\frac{1}{g-d}} \delta_n(Q).$$

À partir de là le calcul se fait exactement comme celui de la scolie 7.2. de [11] □

3.9 Descente finale et preuve du théorème principal 1.3

On va maintenant montrer le théorème. Pour cela on choisit P un point de $A(\overline{K})$ et on suppose par l'absurde qu'il ne vérifie pas la conclusion du théorème 1.3 : on suppose donc que

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) < \frac{c}{\delta_n(P)} \left(\frac{\log\log \delta_n^\star}{C_0 \log \delta_n^\star} \right)^{(g+1)!\rho_{\max}},$$

et on suppose également que P n'est contenue dans aucune sous-K_n-variété de torsion, B, stricte de A_{K_n} telle que

$$\left(\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} B\right)^{\frac{1}{\operatorname{codim} B}} \leq \delta_n(P) \left(C_0 \log \delta_n^\star\right)^{2g+\frac{1}{2}+2(g+1)!(2g.g!)^g(2g+5)}.$$

Le point P vérifie l'hypothèse (H) pour la valeur de ρ maximale, notée $\rho_{\max}$. La descente que l'on va maintenant expliquer est tout à fait similaire au paragraphe 7.3. de [11], à ceci prèt que l'on travaille sur le corps K_n et surtout que l'on ne travaille qu'avec les indices d'obstructions, ce qui force à être un peu plus soigneux.

On définit g ensembles de premiers correspondant aux isogénies de Frobenius données par les ensembles $\mathcal{P}_i^{(j)}$, pour $i \in \{1, \ldots, g\}$ et $j \in \{1, \ldots, g\}$:

$$\mathcal{P}_i^{(j)} = \{\mathrm{Id}\} \cup \left\{ \alpha_v \ / \ \frac{N_i^{(j)}}{2} \leq N(v) \leq N_i^{(j)}, \ \ v \mid p \text{ non-ramifié dans } K_n \right\},$$

où les $N_i^{(j)}$ sont définis par la formule :

$$N_i^{(j)} = \left(\frac{C_0 \log \delta_n^\star}{\log \log \delta_n^\star} \right)^{i.i!\rho_j},$$

avec $\rho_j = (2gg!)^{g-j} \rho_{\min}$.

On utilisera aussi des ensembles $\mathcal{S}_i^{(j)}$ dont le cardinal est au plus la moitié du cardinal de $\mathcal{P}_i^{(j)}$.

On introduit deux autres familles d'ensembles d'isogénies :

$$\forall j \in \{1, \ldots, g\} \qquad \mathcal{Q}_i = \left\{ \beta_j \ / \ \beta_j = \alpha_g^{(j)} \circ \cdots \circ \alpha_2^{(j)}, \ \ \alpha_i^{(j)} \in \mathcal{P}_i^{(j)} \right\}.$$

En appliquant la proposition 3.3 à un point Q, pour les ensembles $\mathcal{P}_i^{(j)}$, on obtient un point $Q_1 = \beta_j(Q)$ avec $\beta_j \in \mathcal{Q}_j$. On pose également $\mathcal{R}_0 = \{\mathrm{Id}\}$ et

$$\forall i \in \{1, \ldots, g\}, \qquad \mathcal{R}_i = \{ F_i \ / \ F_i = \beta_i \circ \cdots \circ \beta_1, \ \ \beta_i \in \mathcal{Q}_i \}.$$

Notations. De même que pour les isogénies α, on associe aux isogénies β et F les opérateurs $\widetilde{\beta}$ et $\widetilde{F}$ définis en remplaçant les α par les $\widetilde{\alpha}$.

On montre maintenant que l'on peut, partant de P, extrapoler g fois.

Lemme 3.6 *Soient $i \in \{0, \ldots, g-1\}$ un entier et F_i un élément de $\mathcal{R}_i$. Le point $P_i = \widetilde{F}(P_i)$ vérifie l'hypothèse (H) avec $\rho = \rho_{i+1}$.*

Démonstration : Par construction des ensembles $\mathcal{P}_i^{(j)}$ et par choix des $N_i^{(j)}$, l'isogénie F_i vérifie bien le point 2. de l'hypothèse (H). Ainsi il suffit de vérifier l'inégalité sur la hauteur de P_i pour pouvoir conclure. Or on a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) = \mathbf{q}(F_i) \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P).$$

En posant $q_i = \mathbf{q}(F_i)$, on constate donc qu'il suffit de majorer convenablement q_i. Par définition des ensembles $\mathcal{R}_i$, on a

$$\begin{aligned} q_i &\leq \prod_{l=1}^{i} \max \{ \mathbf{q}(\beta_l) \ / \ \beta_l \in \mathcal{Q}_l \} \leq \prod_{l=1}^{i} \prod_{k=2}^{g} N_k^{(l)} \\ &\leq \left(\frac{C_0 \log \delta_n^\star}{\log \log \delta_n^\star} \right)^{(g+1)!(2g.g!)^g \rho_{\min}} \end{aligned}$$

On obtient donc, en appliquant le lemme 3.1 (ou plutôt sa preuve),

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) &\leq \frac{c}{\delta_n(P)} \left(\frac{\log\log\delta_n^\star}{C_0\log\delta_n^\star}\right)^{(g+1)!\rho_{\max}-(g+1)!(2g.g!)^g\rho_{\min}} \\
&\leq \frac{c}{\delta_n(P_i)} \left(\frac{\log\log\delta_n^\star}{C_0\log\delta_n^\star}\right)^{(g+1)!\rho_{\max}-(g+1)!(2g.g!)^g\rho_{\min}} q_i^{-g} \\
&\leq \frac{c}{\delta_n(P_i)} \left(\frac{\log\log\delta_n^\star}{C_0\log\delta_n^\star}\right)^{(g+1)!(\rho_{\max}-(g+1)(2g.g!)^g\rho_{\min})}.
\end{aligned}$$

On a choisi $\rho_{\max} = (g+2)(2g.g!)^g\rho_{\min}$, ce qui conclut. □

Remarque 3.10. Notons qu'il y a dans la preuve du lemme précédent une subtilité qui n'apparaît que du fait que l'on travaille avec les indices d'obstruction : contrairement à ce qui se passe dans [11], on ne peut pas minorer ici directement l'indice $\delta_n(P)$ par $\delta_n(P_i)$ (dans [11], les auteurs montraient que $K(P) = K(P_i)$) : en effet cette majoration sera un sous-produit (*cf.* le corollaire 3.1) du fait que le point vérifie l'hypothèse (H). Il faut donc faire un peu attention. Ceci étant on n'a à la place plus besoin de vérifier l'égalité des degrés des corps de définition.

On passe maintenant à la proposition cruciale, qui va nous permettre de faire marcher la descente.

Proposition 3.4 *Il existe un entier $k \in \{1,\dots,g\}$, une suite $V_0,\dots,V_k$ de sous-K_n variétés strictes de A_{K_n} et une suite d'éléments $F_i = \beta_i \circ \cdots \circ \beta_1 \in \mathcal{R}_i$, $i \in \{1,\dots,k\}$ (et $F_0 = \mathrm{Id}$) vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Les dimensions d_i de V_i sont croissantes.*
2. *La variété V_i passe par $P_i = \widetilde{F}_i(P)$.*
3. *La variété $\widetilde{\beta}_i^{-1}V_i$ contient V_{i-1} si $i \in \{1,\dots,k\}$.*
4. *On a la majoration*

$$\Delta_i := \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V_i \leq \frac{c_{15}}{N_1^{(i)}} \left(\frac{\delta_n(P_{i-1})C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+1}(g!-1)}(\log\delta_n^\star)^{2g+\rho_{i+1}(g!-1)}}{(\log\log\delta_n^\star)^{2g-1+\rho_{i+1}(g!-1)}}\right)^{g-d_i}.$$

5. *Si $d_i = d_{i+1}$ et si pour tout $j < i \leq k-1$, $d_j < d_{j+1}$, alors le nombre $\boldsymbol{q}(\beta_{i+1})$ est premier avec $\mid G_{V_i} : G_{V_i}^0 \mid$.*
6. *Il existe $l \in \{0,\dots,k-1\}$ tel que $d_l = d_{l+1}$.*

Cette proposition se prouve en deux étapes, tout comme dans l'article de David et Hindry.

3.9.1 Proposition 3.4, première étape

Définition 3.3. Soient $\mathcal{N}$ un ensemble et $\mathcal{S}$ un sous-ensemble. On dit que $\mathcal{S}$ est *exceptionnel (pour $\mathcal{N}$)* si le cardinal de $\mathcal{S}$ est au plus la moitié du cardinal de $\mathcal{N}$.

Lemme 3.7 *Soit $l \in \{0, \ldots, g-1\}$. Supposons donnée une suite $W_i^{(l)})_{0 \leq i \leq l}$ de sous-K_n-variétés strictes de A_{K_n} et une suite d'éléments $F_i = \beta_i \circ \cdots \circ \beta_1 \in \mathcal{R}_i$, $i \in \{1, \ldots, l\}$ (et $F_0 = \mathrm{Id}$) vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *Les dimensions $d_i^{(l)}$ de $W_i^{(l)}$ sont croissantes en i à l fixé.*
2. *La variété $W_i^{(l)}$ passe par $P_i = \widetilde{F}_i(P)$.*
3. *La variété $\widetilde{\beta}_i^{-1} W_i^{(l)}$ contient $W_{i-1}^{(l)}$ si $i \in \{1, \ldots, l\}$.*
4. *On a la majoration*

$$\Delta_i^{(l)} := \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_i^{(l)} \leq \frac{c_{15}}{N_1^{(i)}} \left(\frac{\delta_n(P_{i-1}) C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+1}(g!-1)} (\log \delta_n^{\star})^{2g+\rho_{i+1}(g!-1)}}{(\log\log \delta_n^{\star})^{2g-1+\rho_{i+1}(g!-1)}} \right)^{g-d_i^{(l)}} . \qquad (13)$$

Dans ces conditions, il existe un élément $\widetilde{\beta}_{l+1}(Q_{l+1})$ tel que :

5. *Le nombre $\boldsymbol{q}(\beta_{l+1})$ est premier avec $\mid G_{W_l^{(l)}} : G^0_{W_l^{(l)}} \mid$ et il existe une suite de sous-K_n-variétés stricte de A, $(W_i^{(l+1)})_{0 \leq i \leq l+1}$ vérifiant les propriétés précédentes 1.,2.,3.,4. avec l remplacé par $l+1$ et $F_{l+1} = \beta_{l+1} \circ F_l$. De plus cette suite vérifie la propriété :*
6. *Pour tout $i \in \{0, \ldots, l\}$, on a $W_i^{(l)} \subset W_i^{(l+1)}$.*

Démonstration : On va appliquer la proposition 3.3 en partant :

1. Du point $\widetilde{F}_l(P)$;
2. Des ensembles $\mathcal{P}_1^{(l+1)}, \ldots, \mathcal{P}_g^{(l+1)}$ où l'on choisit comme ensembles exceptionnels les

$$\mathcal{S}_i^{(l+1)} = \left\{ v \in \mathcal{P}_i^{(l+1)} \ / \ \mathrm{pgcd} \left(N(v), \mid G_{W_l^{(l)}} : G^0_{W_l^{(l)}} \mid \right) \neq 1 \right\}.$$

Le nombre de nombres premiers divisant un entier n est au plus polynômial en $\log n$ (*cf.* par exemple le lemme 2.1) et le cardinal de la partie discrète des stabilisateurs de $W_l^{(l)}$ est au plus polynomial en le degré de $W_l^{(l)}$ d'après le point 3. du lemme 2.4. Ainsi en utilisant la propriété 4., on a

$$\mathrm{Card}\ \mathcal{S}_i^{(j)} \leq C_0 \log \delta_n^{\star}.$$

Comme tout les $N_i^{(j)}$ sont de cardinal au moins $C_0(\log \delta_n^{\star})^2$, on est bien assuré que les $\mathcal{S}_i^{(l+1)}$ sont exceptionnels. Par ailleurs, le lemme 3.6 nous assure que P_i vérifie l'hypothèse (H). On va donc pouvoir lui appliquer la proposition 3.3 avec $\rho = \rho_i$.

Cette proposition nous fournit un élément $\beta_{l+1} \in \mathcal{Q}_{l+1}$ tel que la propriété 5. soit satisfaites (par le choix même des ensembles exceptionnels). Par ailleurs, on obtient ainsi une sous-K_n-variété, $W_{l+1}^{(l+1)}$, stricte de A, K_n irréductible, de dimension $d_{l+1}^{(l+1)}$, passant par $P_{l+1} = \widetilde{\beta}_{l+1}(P_l)$. Si $W_{l+1}^{(l+1)}$ était de torsion, alors la variété $\widetilde{F}_{l+1}^{-1} W_{l+1}^{(l+1)}$ serait également de torsion. Or cette dernière contient le point P, et est de degré au plus

$$\begin{aligned}\left(\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} F_{l+1}^{-1} W_{l+1}^{(l+1)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{codim} W_{l+1}^{(l+1)}}} &\leq \mathbf{q}(F_{l+1}) \left(\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_{l+1}^{(l+1)}\right)^{\frac{1}{\operatorname{codim} W_{l+1}^{(l+1)}}} \\ &\leq \mathbf{q}(F_{l+1}) \frac{L N^2 N_1 \times \cdots \times N_{g-1}}{T_g},\end{aligned}$$

la dernière inégalité venant de ce que la variété $W_{l+1}^{(l+1)}$ est donnée par le lemme de zéro. En remplaçant les paramètres par leur valeur, on en déduit une contradiction, car P n'est contenu par hypothèse dans aucune sous-K_n-variété de torsion stricte de degré au plus

$$\left(\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} B\right)^{\frac{1}{\operatorname{codim} B}} \leq \delta_n(P) \left(C_0 \log \delta_n^{\star}\right)^{2g+\frac{1}{2}+2(g+1)!(2g.g!)^g(2g+5)}.$$

Finalement la variété $W_{l+1}^{(l+1)}$ n'est pas de torsion, et on peut appliquer la proposition 3.3 pour majorer plus finement son degré :

$$\begin{aligned}\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_{l+1}^{(l+1)} &\leq c_{15} \delta_n(P_l)^{g-d_{l+1}^{(l+1)}} \frac{C_0^{(2g+\frac{3}{2}+\rho_{l+1}(r_{l+1}!-1))(g-d_{l+1}^{(l+1)})} (\log \delta_n^{\star})^{(2g+\rho(r_{l+1}!-1))(g-d_{l+1}^{(l+1)})}}{N_{r_{l+1}} (\log\log \delta_n^{\star})^{(2g+\rho_{l+1}(r_{l+1}!-1))(g-d_{l+1}^{(l+1)})-1}} \\ &\leq c_{15} \frac{\delta_n(P_l)^{g-d_{l+1}^{(l+1)}}}{N_1^{(l+1)}} \times \left(\frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}} (\log \delta_n^{\star})^{2g}}{\log\log \delta_n^{\star})^{2g-1}}\right)^{g-d_{l+1}^{(l+1)}}.\end{aligned}$$

La dernière inégalité s'obtient de la même manière que le corollaire 3.1. La variété ainsi construite vérifie bien l'inégalité 13.

Comme dans [11] nous construisons maintenant la variété $W_0^{(l+1)}$. On va pour cela couper $W_0^{(l)}$ par des formes définissant incomplètement $W_{l+1}^{(l+1)}$, en utilisant l'information sur la multiplicité contenue dans le lemme de zéros : on coupe $W_0^{(l)}$ par le nombre minimal de formes $G_1, \ldots, G_u$, choisies parmies les formes définissant incomplètement $W_{l+1}^{(l+1)}$ avec multiplicité supérieure à T_g, données par la proposition 3.3, nulles sur $W_{l+1}^{(l+1)}$, tirées en arrière par $\widetilde{F}_{l+1}^{-1}$ de sorte que

$$W_0^{(l)} \cdot \widetilde{F}_{l+1}^{-1} \mathcal{Z}(G_1) \cdots \widetilde{F}_{l+1}^{-1} \mathcal{Z}(G_u)$$

a la même dimension au point P que

$$W_0^{(l)} \cdot \widetilde{F}_{l+1}^{-1}(W_{l+1}^{(l+1)}).$$

De plus la proposition 3.3 nous assure qu'il existe de telles formes, nulles sur $W_{l+1}^{(l+1)}$ avec multiplicité supérieure à $\frac{1}{g}T_g$, de degré au plus $2L^2N_1^{(l+1)} \times \cdots \times N_{r_{l+1}-1}^{(l+1)}$. Ainsi la variété $W_0^{(l+1)}$ peut être définie par récurrence sur u. Parmi les composantes isolées de $W_0^{(l)} \cdot \widetilde{F}_{l+1}^{-1}\mathcal{Z}(G_l)$, on en choisit une, que l'on note $W_1'^{(l+1)}$, contenant une composante isolée de dimension maximale de

$$W_0^{(l)} \cdot \widetilde{F}_{l+1}^{-1} W_{l+1}^{(l+1)},$$

passant par le point P. On applique maintenant le lemme 3.4 et on obtient

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_1'^{l+1} \leq \frac{c_{15}}{T_g} \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l)} L^2 N_1^{(l+1)} \times \cdots N_{r_{l+1}-1}^{(l+1)}.$$

Par récurrence sur u on obtient une sous-K_n-variété stricte de A, $W_u'^{(l+1)} =: W_0^{(l+1)}$, irréductible sur K_n, contenant le point P et vérifiant

$$W_0^{(l+1)} \subset \widetilde{F}_{l+1}^{-1} W_{l+1}^{(l+1)},$$

et de degré majoré par

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l+1)} \leq \frac{c_{17}}{T_g^u} \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l)} \left(L^2 N_1^{(l+1)} \times N_{r_{l+1}-1}^{(l+1)} \right)^u.$$

En utilisant le fait que $\rho_{l+1} \leq \rho_1$ et $r_{l+1} \leq g$, on remplace maintenant les paramètres par leur valeur pour obtenir :

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l+1)} \leq c_{17} \delta_n(P_l)^u \left(\frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_1(g!-1)} (\log \delta_n^\star)^{2g+\rho_1(g!-1)}}{(\log\log \delta_n^\star)^{2g+\rho_1(g!-1)}} \right)^u.$$

En remplaçant $\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l)}$ par sa majoration donnée par l'hypothèse de récurrence et en notant que $u = \dim W_0^{(l)} - \dim W_0^{(l+1)}$, on obtient la majoration

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(l+1)} \leq c_{18} \delta_n(P)^{\operatorname{codim}_A(W_0^{(l+1)})} \left(\frac{C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_1(g!-1)} (\log \delta_n^\star)^{2g+\rho_1(g!-1)}}{(\log\log \delta_n^\star)^{2g+\rho_1(g!-1)}} \right)^{\operatorname{codim}_A(W_0^{(l+1)})}.$$

Notons que l'on a ici utilisé le corollaire 3.1 pour majorer $\delta_n(P_l)$ par $\delta_n(P)$. Ceci achève la construction au rang $i = 0$. De plus, la propriété 6. est bien vérifiée pour $i = 0$.

On se donne maintenant un entier $m \in \{0, \ldots, l-1\}$ et on suppose les variétés $W_i^{(l+1)}$ construites pour $i \in \{0, \ldots, m\}$. On veut construire les variétés $W_m^{(l+1)}$ comme précédemment. De fait ceci marche effectivement de la même façon et est détaillé dans [11] p.66-67. □

Le lemme 3.7 nous permet d'obtenir le résultat suivant :

Lemme 3.8 *Soit u un entier compris entre 0 et $g-1$. S'il existe un élément de $F_u = \beta_u \circ \cdots \circ \beta_1 \in \mathcal{R}_u$ et une suite de sous-K_n-variétés $W_i^{(u)}$ strictes de A, vérifiant les hypothèses du lemme 3.7, alors, il existe un élément*

$$F_g = \beta_g \circ \cdots \circ \beta_{u+1} \circ F_u \in \mathcal{R}_g$$

et des sous-K_n-variétés strictes $(W_i^{(j)})_{0 \leq i \leq j, u \leq g}$ stricte de A telles que : pour tout $l \in \{l, \ldots, g\}$, la suite $(W_i^{(l)})_{0 \leq i \leq l}$ vérifie les proporiétés 1., 2., 3. et 4. du lemme 3.7 pour $F_l = \beta_l \circ \cdots \circ \beta_1$ et telles que de plus les deux propriétés suivantes soient vérifiées :

5'. Pour tout $l \in \{u, \ldots, g-1\}$, le nombre $N(\beta_{l-1})$ est premier avec $\mid G_{W_l^{(l)}} : G^0_{W_l^{(l)}} \mid$.

6'. Pour tout $i \in \{0, \ldots, g\}$ et pour tout $l \in \{u, \ldots, g-1\}$, on a

$$W_i^{(l)} \subset W_i^{(l+1)}.$$

De plus, pour $F_0 = \mathrm{Id}$, il existe une telle sous-variété $W_0^{(0)}$.

Démonstration : Soient $W_0^{(0)}$ une sous-K_n-variété stricte de A passant par $P_0 = P$, de dimension minimale et réalisant $\delta_n(P)$, *i.e.*, telle que

$$\delta_n(P)^{\mathrm{codim}\, W_0^{(0)}} = \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} W_0^{(0)}.$$

On note $d_0^{(0)}$ sa dimension et on pose $F_0 = \mathrm{Id}$. La variété $W_0^{(0)}$ vérifie les propriétés 2. et 4. du lemme 3.7. De plus, pour $l = 0$, les deux autres conditions sont vides, donc vérifiées. On applique le lemme 3.7 et on obtient des variétés $W_0^{(1)}$, $W_1^{(1)}$ ainsi qu'un élément $F_1 \in \mathcal{R}_1$. Par récurrence sur l on obtient alors le lemme. De même lorsque l'on part d'un entier u quelconque, la même récurrence permet de conclure. □

3.9.2 Proposition 3.4, seconde étape

Cette seconde étape, qui est purement combinatoire, se reprend mot pour mot dans la seconde étape de la descente de [11] p.68-71. Pour ne pas alourdir ce papier plus que de raison, nous l'omettons ici. Cette étape permet de prouver la proposition 3.4.

3.10 Conclusion

Soit i le plus petit entier compris entre 0 et k tel que $d_i = d_{i+1}$ dans la proposition 3.4. La propriété 3. de cette proposition nous assure que V_i est une composante isolée de $\widetilde{\beta}_{i+1}^{-1} V_{i+1}$. De plus, la variété $\widetilde{\beta}_{i+1}^{-1} V_{i+1}$ est stable par translation par les points de Ker β_{i+1}. Ainsi pour tout élément ξ de ce noyau, la variété $V_i + \xi$ est une composante isolée de $\widetilde{\beta}_{i+1}^{-1} V_{i+1}$. Par la propriété 5. de la proposition 3.4, le nombre $N(\beta_{i+1})$ est premier avec le cardinal de la partie discrète du stabilisateur de V_i. Ainsi, en notant s_i la dimension de ce stabilisateur, on en déduit que le nombre de telles composantes est

$$N\left(\beta_{i+1}\right)^{g-s_i}.$$

En comparant les degrés, on obtient l'inégalité

$$N(\beta_{i+1}) \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V_i \leq \deg_{\mathcal{L}_{K_n}} \left(\beta_{i+1}^{-1} V_{i+1}\right).$$

La variété V_i passe par construction par le point P_i, donc son degré sur K_n est majoré par

$$\deg_{\mathcal{L}_{K_n}} V_i \geq \delta_n(P_i)^{g-d_i}.$$

La propriété 4. de la proposition 3.4 (majoration de Δ_i) nous donne alors

$$N(\beta_{i+1})^{g-s_i}\delta(P_i)^{g-d_i} \leq N(\beta_{i+1})^{g-d_i}\frac{\delta_n(P_i)^{g-d_i}}{N_1^{(i+1)}}\left(C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+2}(g!-1)}(\log\delta_n^\star)^{2g+\rho_{i+2}(g!-1)}\right)^{g-d_i}.$$

En simplifiant par $\delta_n(P_i)$ et en remplaçant $N_1^{(i)}$ par sa valeur, on obtient

$$1 \leq \Delta,$$

où

$$\Delta \leq \frac{\left(C_0^{2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+2}(g!-1)}(\log\delta_n^\star)^{2g+\rho_{i+2}(g!-1)}\right)^{g-d_i}(\log\log\delta_n^\star)^{\rho_{i+1}}}{C_0^{\rho_{i+1}}(\log\delta_n^\star)^{\rho_{i+1}}}.$$

Ainsi, on en déduit une contradiction si

$$\left(2g+\frac{3}{2}+\rho_{i+2}(g!-1)\right)(g-d_i) < \rho_{i+1}.$$

Or, par construction on a

$$\rho_{i+1} \geq (2g.g!)\rho_{i+2}.$$

Ainsi, si $\rho_{\min} = 2g+5$ on peut conclure. Le choix de $\rho_{\min}$ nous permet donc de finir la preuve. □

4 Preuve du théorème 1.7

La preuve repose essentiellement sur trois points :

1. En relisant la preuve de Rémond, on peut dans le cas C.M. utiliser une estimation du cardinal des points de torsion meilleure que celle qu'il utilise : là où il utilise une estimation de Masser, on peut dans notre cas utiliser le corollaire 1.2 de [25].
2. Dans une variété abélienne A^n, avec A simple, les sous-groupes algébriques sont de dimension un multiple de la dimension de A.
3. Notre résultat (théorème 1.3) sur le problème de Lehmer permet de gagner 1 dans l'estimation finale.

4.1 Préliminaires

Notons tout d'abord que le problème que l'on considère est stable par isogénies. Dans la suite on se restreint donc au cas d'une variété abélienne de type C.M. produit de variétés abéliennes géométriquement simples, $A = \prod_{i=1}^{m} A_i^{n_i}$, les A_i étant de dimension g_i et deux à deux non isogènes. Par ailleurs, on fixe une courbe X qui est transverse dans A. Rémond obtient également dans le cas C.M., en appliquant la théorème 1.2 de David-Hindry, le résultat inconditionnel suivant :

Théorème 4.1 (Rémond [27]) *L'ensemble $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$ est fini dès que*

$$r \geq 2 + \sum_{i=1}^{m} g_i.$$

En relisant la preuve de Rémond, on constate en fait qu'il prouve un résultat un peu plus fin. On donne pour cela une notation en suivant [25] :

Notation. Soit A/K_0 une variété abélienne, on note

$$\gamma(A) = \inf \left\{ b > 0 \ / \ \exists C(A) > 0 \ \forall K/K_0 \text{ finie }, |(A(K)_{\text{tors}})| \leq C(A/K_0)[K : K_0]^b \right\}.$$

Proposition 4.1 *L'ensemble $X(\overline{K}) \cap A^{[r]}$ est fini dès que*

$$r > 1 + \sum_{i=1}^{m} \gamma(A_i).$$

Dans sa preuve du théorème 4.1, il utilise la majoration due à Masser [19]

$$\text{Card}\,(A_i(K)_{\text{tors}}) \ll D^{g_i+\varepsilon}$$

avec ε assez petit. En prenant le produit, on voit que $\gamma(A) \leq \sum_{i=1}^{m} g_i + \varepsilon$ d'où le choix de r dans le théorème 4.1.

Il y a donc deux manières de raffiner ce résultat. La première consiste à remplacer le terme $1 + \sum \gamma(A_i)$ par un terme plus petit. Le théorème principal de notre article (le théorème 1.3) nous permet précisément d'améliorer ceci. La seconde amélioration possible consiste à obtenir une majoration plus précise que celle de Masser pour l'exposant $\gamma(A)$ dans le cas d'une variété abélienne simple de type C.M. C'est ensuite la conjonction de ces deux améliorations ainsi qu'une astuce triviale qui nous permettra de prouver le théorème 1.7. Nous expliquons ceci dans le paragraphe 4.3. Passons maintenant à l'énoncé et la preuve de la première amélioration.

4.2 La première amélioration

On commence par donner l'énoncé, et on consacre le reste du paragraphe à sa preuve.

Proposition 4.2 *Soient A/K_0 une variété abélienne de type C.M. et X une courbe transverse dans A. L'ensemble $X(\overline{K_0}) \cap A^{[r]}$ est fini dès que*

$$r > \sum_{i=1}^{m} \gamma(A_i).$$

Pour simplifier la vérification au lecteur, on s'efforce de conserver les notations de Rémond. Ainsi on notera dans ce qui suit, r' ce que l'on notait r précédemment. Par ailleurs on note K_0 le corps de base, $K = K_0(P)$ une extension de degré $D = [K : K_0]$ de K_0. On introduit également la notation $K_n = K_0(A[n])$ où n est le plus grand ordre des points de torsion de $A(K)$, et on pose $D_n = [K_n(P) : K_n]$. Notons T_n un point d'ordre n de $A(K)$. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & K_n(P) & \\
K_n = K_0(A[n]) \arrow[ur, "D_n"] & & K = K_0(P) \arrow[ul] \\
 & K_0\left(A(K)_{\mathrm{tors}}\right) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & K_0(T_n) \arrow[u] & \\
 & K_0 \arrow[u] \arrow[uuul, "d_n"] \arrow[uuur, "D"'] &
\end{tikzcd}$$

On rappelle un lemme classique dont nous avons besoin.

Lemme 4.1 *Soient n un entier et A/K_0 une variété abélienne de dimension g. On a*

$$[K_0(A[n]) : K_0] \leq n^{4g^2}.$$

Démonstration : Soit $n \geq 1$ un entier. La représentation naturelle

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{K_0}/K_0) \to \mathrm{Aut}\,(A[n])$$

nous donne une injection de $\mathrm{Gal}(K_0(A[n])/K_0)$ dans $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Ceci conclut. $\square$

Corollaire 4.1 *Il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives ne dépendant que de A/K_0, telles que l'on a l'inégalité*

$$d_n \leq c_1 D^{c_2}.$$

Démonstration : En utilisant l'inégalité du lemme 4.1, on majore d_n par une puissance de n. Par ailleurs, on sait (en utilisant par exemple les résultats transcendants de Masser [19], ou algébrique de Silverberg [32] dans notre cas) que l'on peut majorer n par une puissance du degré de $[K_0(T_n) : K_0] \leq D$. Ceci permet de conclure. □

On peut maintenant passer à la preuve de la proposition 4.2 proprement dite. On fait ceci en deux étapes :

1. On montre que si $r' > \sum_{i=1}^{m} \gamma(A_i)$ alors on peut borner D en fonction de D_n.
2. En reprenant le paragraphe 6 de [27] en travaillant sur K_n plutôt que sur K^t, on montre que D_n est borné dès que $r' \geq 2$.

Ainsi par la première étape, D est borné et le théorème de Northcott nous permet alors de conclure concernant la finitude de $X(\overline{K}) \cap A^{[r']}$. Notons à titre de remarque que nous n'avons pas besoin ici d'appliquer le lemme 6.1 de [27] utilisant le théorème de Raynaud (ex-conjecture de Manin-Mumford). Il nous reste maintenant à prouver les deux étapes précédentes. C'est ce qu'on fait dans les deux sous-paragraphes suivants. Dans ces deux étapes, on appliquera notre théorème 1.3 en direction du problème de Lehmer relatif, en conjonction avec le corollaire 4.1 afin de majorer $d_n D_n$ par une puissance de D.

4.2.1 Rappels de notations de [27]

On travaille sur une variété abélienne de type C.M., $A = \prod_{i=1}^{m} A_i^{n_i}$ définie sur un corps de nombres K_0. On note X la courbe transverse incluse dans A. On note

$$P = (P_1^{(1)}, \ldots, P_{n_1}^{(1)}, \ldots, P_1^{(i)}, \ldots, P_{n_i}^{(i)}, \ldots, P_{n_m}^{(m)})$$

le point de degré $D = [K_0(P) : K_0]$ sur K_0 avec lequel on travaille. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on introduit de plus deux $\mathrm{End}(A_i)$-modules :

1. N_i est le sous-$\mathrm{End}(A_i)$-module de $\mathrm{Hom}(A, A_i)$ des morphismes nuls en P.
2. Γ_i est le sous-$\mathrm{End}(A_i)$-module de $A_i(\overline{K})$ engendré par les points $P_1^{(i)}, \ldots, P_{n_i}^{(i)}$

Pour tout i, l'espace vectoriel réel $\Gamma_i \otimes \mathbb{R}$ est naturellement muni d'une structure euclidienne en utilisant la hauteur de Néron-Tate. On note

$$\nu_i = \mathrm{Vol}\left(\Gamma_i \otimes \mathbb{R} / \left(\Gamma_i / (\Gamma_i)_{\mathrm{tors}}\right)\right)$$

le volume pour cette norme.

Avec les notations de [27], on prend $r = 2$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on note s_i le rang du $\mathrm{End}(A_i)$-module Γ_i, et on introduit les deux nombres

$$t = \sum_{i=1}^{m} n_i - s_i, \quad \text{et} \quad q = \sum_{i=1}^{m} g_i(n_i - s_i).$$

Enfin les morphismes ψ_j intervenant sont des éléments de N_i apparaissant dans la proposition 5.1. de [27].

4.2.2 Preuve de l'étape 1

En utilisant les notations et la preuve de la proposition 5.1 de [27], on a

$$D \leq \deg X \cap V \ll \deg V \ll \left(\prod_{j=1}^{t} \|\psi_j\|^{2\mathrm{rg}\psi_j} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dans cette série d'inégalités, V est une variété auxiliaire introduite dans la preuve de [27]. La première inégalité résulte de ce que $X \cap V$ est définie sur K_0 et contient le point P comme composante isolée. La seconde inégalité découle du théorème de Bézout et du fait que X étant fixe dans tout ceci, $\deg_{\mathcal{L}} X$ est une constante.

On relie maintenant la proposition 4.3 de [27] et on obtient :

$$\prod_{j=1}^{t} \|\psi_j\|^{2\mathrm{rg}\psi_j} \ll \prod_{i=1}^{m} \mathrm{vol}\left(N_i \otimes \mathbb{R}/N_i\right) \ll \prod_{i=1}^{m} \left(\mid (\Gamma_i)_{\mathrm{tors}} \mid v_i^{-1}\right).$$

Finalement, ceci nous donne

$$D \ll \left[\prod_{i=1}^{m} \left(\mid (\Gamma_i)_{\mathrm{tors}} \mid v_i^{-1}\right) \right]^{\frac{1}{q}} \ll \left(D^{\sum_{i=1}^{m} \gamma(A_i) + \varepsilon} \prod_{i=1}^{m} v_i^{-1} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{14}$$

En appliquant notre théorème 1.3, on peut maintenant relire la proposition 4.2 de [27] : grace au théorème 1.3 on améliore l'estimation faisant intervenir la minoration de la hauteur des points $Q_j^{(i)}$. On obtient ainsi :

$$\prod_{i=1}^{m} v_i^{\frac{1}{2}} \geq c_8 D_n^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

En regroupant les deux dernières inégalités, on obtient finalement que D est borné polynomialement en fonction de D_n si et seulement si

$$q > \sum_{i=1}^{m} \gamma(A_i).$$

Or par construction de q, on sait que $q \geq r'$, donc en prenant $r' > \sum_{i=1}^{m} \gamma(A_i)$ on a bien la conclusion voulue. $\square$

4.2.3 Preuve de l'étape 2

On reprend ce qui est fait au paragraphe 6 de l'article [27] de Rémond, en remplaçant K_{tors} et D_{tors} par K_n et D_n. Tout marche pareil : les points de torsion intervenant sont des points de $A(K)_{\text{tors}}$, donc en particulier définis sur K_n. Ceci prouve que D_n est borné dès que $r' \geq 2$ et conclut donc la preuve de notre proposition 4.2.

4.3 Conclusion

Nous expliquons maintenant comment conclure la preuve du théorème 1.7. Comme indiqué auparavant, nous avons besoin pour conclure la preuve, d'un raffinement des bornes sur la torsion dans les variétés abéliennes de type C.M. Dans cette direction, nous obtenons dans le corollaire 1.2 de [25] le résultat suivant :

Théorème 4.2 [25] *Soit A/K_0 une variété abélienne de dimension g, simple et de type C.M. On a*

$$\gamma(A) \leq \frac{2g}{2+\log_2 g}$$

où $\log_2$ *dénote le logarithme en base* 2.

Si A est (isogène à) une puissance d'une courbe elliptique C.M., alors le théorème précédent et la proposition 4.2 permettent de conclure. On suppose désormais que A est (isogène à) une puissance d'une variété abélienne simple de type C.M. A_1 de dimension g_1 supérieure à 2.

On constate que dès que g_1 est strictement supérieur à 1, le théorème 4.2 entraîne en particulier $\gamma(A_1) < g_1$ ce qui est meilleur que la borne de Masser. Néanmoins en appliquant la proposition 4.2, ceci ne permet *a priori* que d'obtenir la finitude de l'ensemble

$$A^{[g_1]} \cap X(\overline{K_0}).$$

On utilise donc pour conclure le lemme trivial suivant :

Lemme 4.2 *Soit G un sous-schéma en groupes de $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$, les A_i étant de dimensions respectives g_i. Si G est strictement inclus dans A, alors sa codimension vérifie*

$$\operatorname{codim}(G) \geq \min_{1\leq i\leq m} g_i.$$

Démonstration : Soit G^0 la composante connexe de l'identité de G. C'est une sous-variété abélienne de A. Elle est donc isogène à un produit de $A_i^{s_i}$. Comme G est strictement inclus dans A, il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $s_i \leq n_i - 1$. Ceci conclut. □

Corollaire 4.2 *Soit* $A = \prod_{i=1}^m A_i^{n_i}$, *les* A_i *étant de dimensions respectives* g_i. *On suppose que* A *est de dimension supérieure à* 2. *On note* $A^{[r]} = \bigcup_{\mathrm{codim}(G)\geq r} G(\overline{K})$, *et on note* $g_{\min} = \min_{1\leq i\leq m} g_i$. *On a*

$$A^{[2]} = A^{[\max\{g_{\min},2\}]}.$$

Démonstration : C'est évident par le lemme précédent. □

On termine maintenant la preuve du théorème 1.7 : soit A_1/K_0 une variété abélienne de type C.M. de dimension $g_1 \geq 2$. Soit $n \geq 1$ un entier et soit X une courbe transverse dans $A = A_1^n$. On sait par ce qui précède que $A^{[g_1]} \cap X(\overline{K_0})$ est fini. Le corollaire 4.2 permet donc de conclure : l'ensemble $A^{[2]} \cap X(\overline{K_0})$ est fini. □

Remarque 4.11. Notons que dans le théorème 1.7, le cas le plus difficile est le cas où A_1 est de dimension 2. En effet, si A_1 est de dimension supérieure à 3, notre théorème 4.2 permet de conclure sans avoir à utiliser le raffinement sur le problème de Lehmer. Par contre en dimension 2, on peut voir que $\gamma(A_1) = \frac{4}{3}$ (cf. la proposition 1.1 de [25]) et dans ce cas, l'utilisation de notre théorème 1.3 est indispensable.

5 Preuve du théorème 1.4

5.1 Une petite réduction géométrique

Lemme 5.1 *Soient* X/K *est une variété projective de dimension* g *et* $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_g$ *des fibrés en droites amples. On a l'inégalité*

$$(\mathcal{L}_1^g)\ldots(\mathcal{L}_g^g) \leq (\mathcal{L}_1 \cdot \ldots \cdot \mathcal{L}_g)^g\,.$$

Démonstration : Il s'agit d'une généralisation en dimension g d'un résultat bien connu pour les surfaces, découlant du théorème de l'indice de Hodge. Cette généralisation est elle même bien connue des spécialistes (cf. par exemple l'exercice 6 p.50 de [13]). Ceci se prouve par récurrence sur g en se ramenant en dimension inférieure (jusqu'à la dimension 2) grâce au théorème de Bertini. □

On note N la forme quadratique définie positive sur $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ déduite de l'involution de Rosati (correspondant au fibré ample $\mathcal{L}$). On note $\|\cdot\| = \sqrt{N(\cdot)}$ la norme qui s'en déduit.

Corollaire 5.1 *Soit* α *une isogénie de* A/K. *On note* n *son degré, et* $[n]$ *l'isogénie correspondante. On a*

$$\|[n]\| \leq (\mathcal{L}^g)^{\frac{g-1}{2}} \|\alpha\|^g.$$

Démonstration : Rappelons que par définition (cf. [20] p.192 avec un facteur de renormalisation $2g$), on a

$$N(\alpha) = \frac{1}{\mathcal{L}^g}\left(\alpha^*\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^{g-1}\right), \quad \text{et} \quad n = \deg\alpha = \frac{1}{\mathcal{L}^g}(\alpha^*\mathcal{L})^g.$$

On applique le lemme 5.1 précédent avec $\mathcal{L}_1 = \alpha^*\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}$ pour $i \geq 2$. On en déduit

$$n \leq \frac{1}{\mathcal{L}^g}(\alpha^*\mathcal{L})^g(\mathcal{L}^g)^{g-1} \leq \frac{1}{\mathcal{L}^g}\left(\alpha^*\mathcal{L}\cdot\mathcal{L}^{g-1}\right)^g = (\mathcal{L}^g)^{g-1}N(\alpha)^g.$$

Le degré de l'isogénie $[n]$ se calcule explicitement : c'est le poids $\mathrm{q}([n]) = n^2$ de cette isogénie admissible. Ceci permet de conclure. $\square$

5.2 Preuve du théorème 1.4

Soit A/K une variété abélienne simple de type C.M. de dimension g. On note que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier r, on a $K(A^n[r]) = K(A[r])$. On donne tout d'abord un résultat de comparaison de degré dont nous aurons besoin dans la suite.

Lemme 5.2 *Il existe une constante strictement positive c_1, ne dépendant que de A/K et n, telle pour tout entiers m et r, en notant $K_m = K(A[m])$, $K_{mr} = K(A[mr])$ et T un point de torsion de A^n d'ordre exactement r, on a*

$$\deg(K_m(T)/K) \leq \deg(K_{mr}/K) \leq c_1 \deg(K_m(T)/K)^{16g^2}.$$

Démonstration : Il suffit bien sur de montrer l'inégalité de droite. On note g la dimension de A et on distingue pour cela deux cas. Si $r \geq m$, alors

$$\begin{aligned}\deg(K_m(T)/K) &\geq \deg(K(T)/K) \geq c_1 r^{\frac{1}{2}} &&\text{d'après le (1.1) de Silverberg [32]}\\ &\geq c_1(rm)^{\frac{1}{4}} \geq c_1 \deg(K_{mr}/K)^{\frac{1}{16g^2}} &&\text{d'après le lemme 4.1.}\end{aligned}$$

Par aileurs, dans l'autre cas, si $m \geq r$, on a

$$\deg(K_m(T)/K) \geq \deg(K_m/K) \geq c_1 m^{\frac{1}{2}} \geq c_1(mr)^{\frac{1}{4}} \geq c_1 \deg(K_{mr}/K)^{\frac{1}{16g^2}}$$

par le même argument. Ceci conclut. $\square$

On passe maintenant à la preuve du théorème 1.4. Pour cela on raisonne par récurrence sur la dimension n. Si $n = 1$, il s'agit du théorème 1.3. On suppose donc le résultat vrai au rang $n-1 \geq 1$ et on veut le montrer au rang n. On suppose par l'absurde que le résultat est faux en dimension n. Ainsi, il existe un point $P = (x_1, \dots, x_n) \in A^n(\overline{K})$ et une sous-variété V de A^n définie sur $K_m = K(A[m])$ tels que

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) < C_0(n)^{-1} D_{\text{inc}}^{-1}\left(\frac{\log\log[K_m : K]D_{\text{inc}}}{\log[K_m : K]D_{\text{inc}}}\right)^{\kappa(n)}. \tag{15}$$

Comme le point P est un point $\overline{K}$-rationnel de V, on a nécessairement $\delta_{\mathcal{L},K_m}(P) \leq D_{\text{inc}}$. Ainsi l'inégalité 15 précédente nous donne :

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) < C_0(n)^{-1}\delta_{\mathcal{L},K_m}(P)^{-1}\left(\frac{\log\log[K_m : K]\delta_{\mathcal{L},K_m}(P)}{\log[K_m : K]\delta_{\mathcal{L},K_m}(P)}\right)^{\kappa(n)}. \tag{16}$$

On voit ainsi que l'on est bien dans la seconde partie de l'alternative du théorème 1.3. Ainsi, il existe une sous-variété de torsion stricte B/K_m de A^n dont le degré est majoré par

$$\deg_{\mathcal{L}} B^{\frac{1}{\mathrm{codim} B}} \leq c(E/K, \mathcal{L}, n) D_{\mathrm{inc}} \left(\log[K_m : K] D_{\mathrm{inc}}\right)^{-2n-2\kappa(n)}. \tag{17}$$

On écrit

$$B_{\overline{K}} = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{Gal}(K_m(T)/K_m)} H + \sigma(T),$$

où H est la composante connexe de l'origine de B et T est un point de torsion de A^n d'ordre un certain entier r.

On note

$$\Lambda = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(A^n, A) \ / \ H \subset \mathrm{Ker}\varphi\}.$$

Rappelons que l'on note N la forme quadratique définie positive sur $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{R}$ déduite de l'involution de Rosati (correspondant au fibré ample $\mathcal{L}$), et $\|\cdot\| = \sqrt{N(\cdot)}$ la norme qui s'en déduit. En utilisant l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(A^n, A) \simeq \mathrm{End}(A)^n$, on munit $\mathrm{Hom}(A^n, A) \otimes \mathbb{R}$ de la norme

$$(f_1, \ldots, f_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \|f_i\|$$

On note encore $\|\cdot\|$ cette norme. On note également $\mathrm{Vol}(\Lambda)$ le volume, pour la norme précédente, de $(\Lambda \otimes \mathbb{R})/\Lambda$. Par le théorème $\widehat{2}$ de [6] on sait qu'il existe un élément φ non nul de Λ tel que

$$\|\varphi\| \leq c_3 (\deg_{\mathcal{L}} H)^{c_4}.$$

En utilisant le corollaire 5.1, on voit que quitte à modifier c_4, on peut en fait supposer que $\varphi = (m_1, \ldots, m_n)$ où les m_i sont les isogénies admissibles "multiplication par m_i". (Il suffit de remplacer chacune des composante φ_i de φ par $m_i = \widehat{\varphi}_i \circ \varphi_i$ où $\widehat{\varphi}_i$ est l'isogénie duale de φ_i). Enfin, quitte à renuméroter, on peut supposer que

$$\|\varphi\| = m_n.$$

On pose maintenant H' la composante connexe de l'origine de $\ker\varphi$. Par construction H' contient H (car H est une variété abélienne contenue dans $\ker\varphi$). De plus A étant simple, la variété abélienne H' est paramétrée par

$$\Phi : A^{n-1} \to A^n, \qquad (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \left(m_n(x_1), \ldots, m_n(x_{n-1}), -\sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_i)\right).$$

Quitte à remplacer T par $\sigma(T)$, on peut supposer que $P \in H + T$. On se donne maintenant $y \in \Phi^{-1}(P - T)$ et $V' = \Phi^{-1}(V - T)$.

Lemme 5.3 *Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $V' \subsetneq A^{n-1}$.

2. V' est incomplètement définie sur K_{mr} dans A^{n-1} par des équations de degré inférieur à $2^n\|\varphi\|^2 D_{\mathrm{inc}}$.

3. $y \in (V')^\star$.

4. $\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) \geq \|\varphi\|^2 \widehat{h}_{\mathcal{L}_{n-1}}(y)$.

Démonstration : Les points 1. et 3. sont faciles. Pour le point 2., les composantes de Φ étant admissibles, on voit (cf. [15] lemme 6 (iii)) que V' est incomplètement définie par des équations de degré majoré par

$$\max\left\{m_n^2, \left\|\sum_{i=1}^{n-1} m_i\right\|^2\right\} D_{\mathrm{inc}} \leq 2^n m_n^2 D_{\mathrm{inc}} = 2^n\|\varphi\|^2 D_{\mathrm{inc}}.$$

La minoration de hauteur découle des inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) = \widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P-T) = \widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(\Phi(y)) &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(\Phi_i(y)) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(\Phi_i(y)) = \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(m_n(y_i)) \\
&\geq m_n^2 \widehat{h}_{\mathcal{L}_{n-1}}(y) = \|\varphi\|^2 \widehat{h}_{\mathcal{L}_{n-1}}(y).
\end{aligned}$$

Ceci conclut. □

Ce lemme nous permet de terminer la preuve par récurrence : par hypothèse de récurrence, il existe une constante $c(A/K, \mathcal{L}, n-1)$ strictement positive telle que

$$\|\varphi\|^{-2}\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) \geq \widehat{h}_{\mathcal{L}_{n-1}}(y) \geq \frac{c(E/K,\mathcal{L},n-1)^{-1}}{2^n\|\varphi\|^2 D_{\mathrm{inc}}}\left(\frac{\log\log\left([K_{mr}:K]n\|\varphi\|^2 D_{\mathrm{inc}}\right)}{\log\left([K_{mr}:K]n\|\varphi\|^2 D_{\mathrm{inc}}\right)}\right)^{\kappa(n-1)}.$$

En utilisant la majoration de $\|\varphi\|$ en fonction de $\deg_{\mathcal{L}} H$, en utilisant le lemme 5.2 et en utilisant également l'identité

$$\deg_{\mathcal{L}} B = [K_m(T) : K_m] \deg_{\mathcal{L}} H,$$

on obtient :

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P) \geq \frac{c(E/K,\mathcal{L},n-1)^{-1} c_5}{n D_{\mathrm{inc}}} \left(\log\left([K_m : K] n \deg_{\mathcal{L}} B D_{\mathrm{inc}}\right)\right)^{-\kappa(n-1)}.$$

On utilise maintenant l'inégalité (17) et le fait que $\kappa(n) - \kappa(n-1) > 0$ pour conclure.

A Appendice

On montre ici que la première partie de la conjecture de Lehmer abélienne 1.2 (minoration des points engendrant la variété abélienne en terme de l'indice d'obstruction), formulée dans [11] entraîne la seconde partie de cette conjecture (minoration des points non de torsion en fonction du degré du point et de la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant le point). De même pour le résultat non-conjectural, ce qui permet d'améliorer le précédent meilleur résultat connu, dû à Masser [18], pour la minoration des points d'ordre infini sur les variétés abéliennes de type C.M. Par ailleurs on montre que la conjecture de Lehmer abélienne entraîne la conjecture de Lehmer abélienne multihomogène *a priori* plus forte, telles qu'elles sont énoncées dans [11]. On montre également que toute avancée en direction de la conjecture de Lehmer entraîne une avancée similaire en direction de la conjecture multihomogène. En utilisant le résultat principal de [11] on en déduit, en direction de la conjecture multihomogène, une minoration optimale aux puissances de log près dans le cas des variétés abéliennes de type C.M.

A.1 Sur la conjecture de Lehmer sur les variétés abéliennes

En utilisant le théorème de David et Hindry [11], on obtient un résultat, optimal aux puissances de log près en direction de l'inégalité (2) du problème de Lehmer abélien (conjecture 1.2).

Théorème A.1 *Si A/K est de type C.M., alors il existe une constante strictement positive $c(A/K,\mathcal{L})$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini, on a*

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K,\mathcal{L})}{D^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2D)^{-\kappa(g_0)},$$

où $D = [K(P) : K]$, où g_0 est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique de A contenant P et où $\kappa(g_0) = (2g_0(g_0+1)!)^{g_0+2}$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du corollaire 2 de [23] appliqué à la variété $V = \overline{\{P\}}$ image schématique de P dans A sur K. On peut faire une preuve directe (ce qui permet d'utiliser le résultat principal de [11] sans avoir à faire intervenir en plus leur remarque utilisant l'indice d'obstruction[1]) : on commence par le cas où $A = \prod_{i=1}^{n} A_i^{r_i}$, les A_i étant des variétés abéliennes simples deux à deux non-isogènes et où $\mathcal{L}$ est le fibré en droites ample et symétrique associé au plongement

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N,$$

les A_i étant plongées dans $\mathbb{P}_{n_i}$ par des fibrés en droites $\mathcal{L}_i$ très amples et symétriques. On note G le plus petit sous-groupe algébrique contenant V. On note G^0 la composante

[1] remarque maintenant justifiée par le présent article.

connexe de l'identité de G. C'est une sous-variété abélienne de A et elle est donc isogène à $B = \prod_{i=1}^n A_i^{s_i}$ où $0 \leq s_i \leq r_i$. On note alors $\pi : A \to B$ une projection naturelle obtenue par oubli de certaines coordonnées, de sorte que $\pi_{|G}$ est une isogénie. Montrons que l'on est dans les conditions d'application du théorème principal de [11] en prenant comme variété abélienne B et comme point $\pi(P)$.

Si $\pi(P)$ est d'ordre fini modulo une sous-variété abélienne stricte de B, en notant H le plus petit sous-groupe algébrique contenant $\pi(P)$, on a $\dim H < \dim B$. Ainsi $G_1 = G \cap \pi^{-1}(H)$ est un sous-groupe algébrique strict de G (car $\pi_{|G}$ est une isogénie), contenant V. Ceci est absurde.

Si $\pi(P)$ est d'ordre fini, comme π est une isogénie, le point P est aussi d'ordre fini. Ceci est absurde.

Finalement, $\pi(P)$ est un point d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne de B. On peut donc appliquer le théorème principal de [11]. Par ailleurs, la hauteur et le degré sont définis relativement aux plongements

$$A = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{N_A} \quad \text{et} \quad B = \prod_{i=1}^n A_i^{s_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{s_i} \overset{\text{Segre}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{N_B}.$$

De plus l'application $\overline{\pi} : \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \to \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{s_i}$ est la projection linéaire définie par oubli de coordonnées. Dans ce cas, et pour ces plongements, on a

$$\widehat{h}_{M_B}(\pi(P)) \leq \widehat{h}_M(P) \quad \text{et} \quad \deg \pi(P) \leq \deg P.$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_M(P) &\geq \widehat{h}_{M_B}(\pi(P)), \quad \text{d'où par le théorème de [11],} \\
&\geq \frac{c(B, M_B)}{(\deg \pi(P))^{\frac{1}{g_0}}} \left(\log 2 \deg \pi(P)\right)^{-\kappa(g_0)} \geq \frac{c(B, M_B)}{(\deg P)^{\frac{1}{g_0}}} \left(\log 2 \deg P\right)^{-\kappa(g_0)}. \\
&\geq \frac{c'(A, M)}{(\deg P)^{\frac{1}{g_0}}} \left(\log 2 \deg P\right)^{-\kappa(g_0)},
\end{aligned}$$

où on a pris pour $c'(A, M)$ le minimum des $c(B, M_B)$ quand s_i varie dans $[\![0, r_i]\!]$.

Dans le cas général, la variété abélienne A est donnée avec une isogénie ρ vers la variété abélienne $B = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i}$. Soit P d'ordre infini de la variété abélienne de A. Le point $Q = \rho(P)$ est un point d'ordre infini de la variété abélienne de B. Il résulte facilement de la preuve de la proposition 14. de [21] qu'il existe $c'(A, \mathcal{L})$ tel que

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq c'(A, \mathcal{L}) \widehat{h}_M(Q).$$

Ainsi en appliquant le résultat précédent, on en déduit presque l'inégalité voulue : il faut encore remplacer le degré $\deg Q$ par $\deg P$. Or $\deg Q \leq \deg P$. Ceci permet de conclure.$\square$

Remarque A.12. Ce résultat améliore le meilleur résultat précédemment connu, dû à Masser qui obtient dans [18], pour tout point P d'ordre infini de $A(\overline{K})$:

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L})}{D^2 \log 2D}.$$

En faisant la même preuve et en appliquant la partie (1) de la conjecture 1.2 au lieu du théorème de [11], on obtient le

Corollaire A.1 *La partie (1) de la conjecture 1.2 entraîne sa partie (2).*

Remarque A.13. Si au lieu du théorème de David-Hindry, on applique la conjecture 1.4 sur le problème de Lehmer relati, on peut partout remplacer le symbole D par D_{tors} dans ce qui précède.

A.2 Sur la conjecture de Lehmer multihomogène sur les variétés abéliennes

Soit A/K une variété abélienne de dimension g. Quitte à augmenter un peu K (*cf.* par exemple [23] lemme 1), on peut supposer (et on suppose) que tous les endomorphismes de A sont définis sur K. On note $\widehat{h}_{\mathcal{L}}$ la hauteur de Néron-Tate sur $A(\overline{K})$ associée à un diviseur ample et symétrique $\mathcal{L}$. Pour tout entier n on pose $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}^{\boxtimes n}$ fibré en droites symétrique ample sur A^n et on note $\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}$ la hauteur de Néron-Tate associée. On commence par un lemme.

Lemme A.1 *Soit $(P_1, \ldots, P_n)$ un point de $A^n(\overline{K})$. On a*

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(P_1, \ldots, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i).$$

Démonstration : C'est une conséquence formelle des propriétés de fonctorialité des hauteurs de Weil et de la définition de la hauteur de Néron-Tate. □

En utilisant ce lemme, on démontre le résultat suivant :

Théorème A.2 *Si A/K est de type C.M., alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $c(A/K, \mathcal{L}, n) > 0$ telle que pour tout point $(P_1, \ldots, P_n) \in A^n(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n, on a :*

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{D^{\frac{1}{g}}} (\log 2D)^{-n\kappa(g)},$$

où $D = [K(P_1, \ldots, P_n) : K]$.

Démonstration : Soient $A_1, \dots, A_n$ des entiers strictement positifs et $Q_1, \dots, Q_n$ des points de $A(\overline{K})$ tels que pour tout i, $P_i = A_i Q_i$. On a

$$\widehat{h}_{\mathcal{L}_n}(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(Q_i) = \sum_{i=1}^n A_i^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i),$$

et,

$$[K(Q_1, \dots, Q_n) : K]^{\frac{1}{ng}} \leq \left(A_1^{2g} \times \cdots \times A_n^{2g} D\right)^{\frac{1}{ng}}.$$

Le théorème de David-Hindry nous donne alors

$$\sum_{i=1}^n A_i^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{\left(\prod_{i=1}^n A_i^{\frac{2}{n}}\right) D^{\frac{1}{gn}}} \left(\log\left((\prod_{i=1}^n A_i) D\right)\right)^{-\kappa(g)}.$$

On pose maintenant, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = \frac{13 \widehat{h}(P_i)}{4 \min_j \widehat{h}(P_j)}, \text{ et } A_i = [\sqrt{x_i}].$$

Pour tout i, on a $x_i \geq \frac{13}{4}$ et $x_i \geq A_i^2 \geq \frac{x_i}{3}$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n A_i^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \leq \frac{3 \times 4}{13} n \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j), \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n A_i^2 \leq \left(\frac{13}{4 \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)}\right)^n \prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j) &\geq c_{10}(A/K, \mathcal{L}, n) \sum_{i=1}^n A_i^{-2} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \\
&\geq \frac{c_{11}(A/K, \mathcal{L}, n)}{\left(\prod_{i=1}^n A_i^{\frac{2}{n}}\right) D^{\frac{1}{gn}}} \left(\log 2D \prod_{i=1}^n A_i\right)^{-\kappa(g)} \\
&\geq \frac{4 c_{11}(A/K, \mathcal{L}, n) \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)}{13 \prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i)^{\frac{1}{n}} D^{\frac{1}{gn}}} \left(\log 2D \prod_{i=1}^n A_i\right)^{-\kappa(g)}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a la majoration

$$\log \prod_{i=1}^n A_i \leq n \log\left(\frac{13}{2 \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)}\right) + 2 \log \prod_{i=1}^n \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i).$$

Or on peut toujours supposer que les $\widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i)$ sont inférieurs à 1, donc,

$$\log \prod_{i=1}^n A_i \leq n \log\left(\frac{13}{2 \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)}\right).$$

Ainsi,

$$\log 2D \prod_{i=1}^{n} A_i \leq n \log \left(\frac{13 D^{\frac{1}{n}}}{2 \min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \right).$$

On en déduit que

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c_1(A/K,n)}{D^{\frac{1}{ng}}} \left(\log \frac{D^{\frac{1}{n}}}{\min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \right)^{-\kappa(g)}.$$

Le point $(P_1, \ldots, P_n)$ étant d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne, les points P_i sont en particulier d'ordre infini sur A. Le résultat inconditionnel de Masser sur la minoration de la hauteur des points sur les variétés abéliennes, theorem de [19], nous donne donc :

$$\log \frac{D^{\frac{1}{n}}}{\min_j \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_j)} \leq c_2(A/K, \mathcal{L}, n) \log 2D.$$

Ainsi, on en déduit

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c_3(A/K,\mathcal{L},n)}{D^{\frac{1}{g}}} (\log 2D)^{-n\kappa(g)}$$

ce qui conclut. □

Remarque A.14. Si au lieu de faire appel au théorème 1.5. de [11] dans la preuve du théorème A.2 on applique la conjecture 1.2, alors on en déduit le résultat suivant :

Théorème A.3 *Soient A/K une variété abélienne de dimension g sur le corps de nombres K et $\mathcal{L}$ un fibré en droites symétrique ample sur A. Si la conjecture 1.2 est vraie pour $(A/K, \mathcal{L})$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $c(A/K, \mathcal{L}, n) > 0$ telle que pour tout point $(P_1, \ldots, P_n) \in A^n(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n, on a :*

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K,\mathcal{L},n)}{D^{\frac{1}{g}}},$$

où $D = [K(P_1, \ldots, P_n) : K]$.

Remarque A.15. Les mêmes remarques qu'au paragraphe précédent, concernant le remplacement de D par D_{tors} s'appliquent.

Remarque A.16. En fait dans leur article [11], les auteurs formulent également une conjecture multihomogène du problème de Lehmer abélien. Plutôt que de supposer le point $(P_1, \ldots, P_n)$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n, ils supposent les points P_i linéairement indépendants dans A. Précisément ils donnent la conjecture 1.6 suivante :

Conjecture A.1 (David-Hindry) *Soient A/K une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres et $\mathcal{L}$ un fibré en droites symétrique ample sur A. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $c(A/K, \mathcal{L}, n) > 0$ telle que pour tout n-uplet $(P_1, \ldots, P_n)$ de points d'ordre infini dans $A(\overline{K})$, End(A)-linéairement indépendants, on a :*

$$\prod_{i=1}^{n} \widehat{h}_{\mathcal{L}}(P_i) \geq \frac{c(A/K, \mathcal{L}, n)}{D^{\frac{1}{g}}},$$

où $D = [K(P_1, \ldots, P_n) : K]$.

Dans la formulation de la conjecture A.1 qu'ils donnent, David-Hindry écrivent "linéairement indépendants" sans préciser s'il s'agit de $\mathbb{Z}$-linéairement ou de $\mathrm{End}(A)$-linéairement indépendants. Il paraît préférable de préciser. En effet, si on comprend l'assertion "linéairement indépendants" comme $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, alors la conjecture A.1 est fausse comme le montre l'exemple suivant : on prend E/K une courbe elliptique à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire contenu dans K. On se donne $\alpha \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas la multiplication par un entier, on se donne également un point P_1 d'ordre infini dans $E(\overline{K})$ et pour tout $n \geq 1$, on choisit des points P_n tels que $nP_n = P_1$. Enfin on pose $Q_n = \alpha(P_n)$. Puisque P_1 est d'ordre infini, les points P_n et Q_n sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants. De plus on a

$$\widehat{h}(P_n)\widehat{h}(Q_n) = \frac{\mathrm{N}(\alpha)}{n^4}\widehat{h}(P_1)^2, \quad \text{et} \quad D_n := [K(P_n, Q_n) : K] = [K(P_n) : K] \leq cn^2.$$

Donc,

$$\widehat{h}(P_n)\widehat{h}(Q_n) \leq \frac{c'}{D_n^2}.$$

Ceci montre que l'hypothèse "$\mathbb{Z}$-linéairement indépendants" est insuffisante.

Par contre en supposant les points $\mathrm{End}(A)$-linéairement indépendants, la situation est bien meilleure. Précisément, on a le

Théorème A.4 *La conjecture 1.2 entraîne la conjecture A.1.*

Démonstration : Soit $n > 0$ un entier. Au vu du théorème A.3, la seule chose à prouver, est de montrer que l'hypothèse (i) : "les points $(P_1, \ldots, P_n)$ sont $\mathrm{End}(A)$-linéairement indépendants", entraîne l'hypothèse (ii) : "le point $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_n)$ est d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n." On va plutôt montrer que non(ii) implique non(i). Si non(ii) est vraie, alors, il existe un endomorphisme φ, non-nul, de A^n tel que $\varphi(\mathbf{P}) = 0$. Or on peut écrire $\varphi(\mathbf{P}) = (\varphi_1(\mathbf{P}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{P}))$, où les φ_i sont des morphismes de A^n vers A non tous nuls. On suppose par exemple que φ_1 est non-nul. En notant ψ_i la restriction de φ_1 à la i-eme composante de A^n, on obtient ainsi n endomorphismes de A, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, non tous nuls et tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(P_i) = \varphi_1(\mathbf{P}) = 0.$$

Autrement dit, les points $P_1, \ldots, P_n$ sont End(A)-linéairement dépendants. $\square$

Enfin la même preuve permet de constater que le théorème A.3 entraîne un énoncé analogue en remplaçant l'hypothèse "d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte" par "End(A)-linéairement indépendants". Ce dernier résultat à également été montré par Viada [34] proposition 4. dans le cas particulier où A est une courbe elliptique.

Références

[1] F. Amoroso and S. David. Le problème de Lehmer en dimension supérieure. In *J. Reine Angew. Math.*, volume 513, pages 145–179, 1999.

[2] F. Amoroso and S. David. Densité des points à coordonnées multiplicativement indépendantes. In *Ramanujam J.*, volume 5, pages 237–246, 2001.

[3] F. Amoroso and S. David. Distribution des points de petite hauteur dans les groupes multiplicatifs. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)*, III :325–348, 2004.

[4] F. Amoroso and U. Zannier. A Relative Dobrowolski Lower Bound over Abelian Extensions. In *Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci. (4)*, volume XXIX, pages 711–727, 2000.

[5] M. Baker and J. Silverman. A lower bound for the canonical height on abelian varieties over abelian extensions. À paraître dans *Mathematical Research Letters*, 2003.

[6] D. Bertrand. Minimal heights and polarizations on abelian varieties. Preprint of the MSRI, Berkeley, California, June, 1987.

[7] C. Birkenhake and H. Lange. *Complex abelian varieties*, volume 302 of *Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, 1992.

[8] E. Bombieri, D. Masser, and U. Zannier. Intersecting a Curve with Algebraic Subgroups of Multiplicative Groups. In *Internat. Math. Res. Notices*, volume 20, pages 1119–1139, 1999.

[9] E. Bombieri and J. Vaaler. On Siegel's lemma. *Invent. Math.*, 73(1) :11–32, 1983.

[10] E. Bombieri and U. Zannier. Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 23(4) :779–792 (1997), 1996.

[11] S. David and M. Hindry. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M. In *J. Reine Angew. Math.*, volume 529, pages 1–74, 2000.

[12] S. David and P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abeliennes. II. *Comment. Math. Helv.*, 77(4) :639–700, 2002.

[13] O. Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[14] E. Dobrowolski. On a question of Lehmer and the number of irreductible factors of a polynomial. In *Acta Arith.*, volume 34, pages 391–401, 1979.

[15] M. Hindry. Autour d'une conjecture de Serge Lang. In *Invent. Math.*, volume 94, pages 575–603, 1988.

[16] M. Hindry and J. Silverman. *Diophantine Geometry An Introduction*, volume 201 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2000.

[17] M. Laurent. Minoration de la hauteur de Néron-Tate. In M.-J. Bertin, editor, *Séminaire de théorie des nombres de* P*aris, 1981-1982*, volume 38, pages 137–152. Progr. Math., 1983.

[18] D. Masser. Lettre à Daniel Bertrand du 10 novembre 1986.

[19] D. Masser. Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety. In *Compositio Math.*, volume 53, no. 2, pages 153–170, 1984.

[20] D. Mumford. *Abelian varieties.* Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1970.

[21] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives III. In *J. Math. Pures Appl.*, volume 74, pages 345–365, 1995.

[22] N. Ratazzi. *Minoration de la hauteur de Néron-Tate pour les points et les sous-variétés : variations sur le problème de Lehmer.* Thèse de mathématiques de l'Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, mai 2004, disponible à l'adresse internet http ://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/61/63/index_fr.html.

[23] N. Ratazzi. Densité de points et minoration de hauteur. In *J. Number Theory*, volume 106/1, pages 113–128, 2004.

[24] N. Ratazzi. Théorème de Dobrowolski-Laurent pour les extensions abéliennes sur une courbe elliptique à multiplication complexe. *Int. Math. Res. Not.*, 58 :3121–3152, 2004.

[25] N. Ratazzi. Borne sur la torsion dans les variétés abéliennes de type C.M. Prépublication de l'institut de mathématiques de Jussieu, février 2005.

[26] M. Raynaud. Courbes sur une variété abélienne et points de torsion. In *Invent. Math.*, volume 71, pages 207–234, 1983.

[27] G. Rémond. Intersection de sous-groupes et de sous-variétés I. Prépublication de l'Institut Fourier no. 626, octobre 2003.

[28] W. Schmidt. *Diophantine approximations and Diophantine equations*, volume 1467 of *Lecture Notes in Matematics.* Springer-Verlag, 1991.

[29] J.-P. Serre. *Corps locaux.* Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII. Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962.

[30] J.-P. Serre and J. Tate. Good reduction of abelian varieties. *Ann. of Math. (2)*, 88 :492–517, 1968.

[31] G. Shimura and Y. Taniyama. *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, volume 6 of *Publications of the Mathematical Society of Japan.* The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961.

[32] A. Silverberg. Torsion points on abelian varieties of CM-type. *Compositio Math.*, 68(3) :241–249, 1988.

[33] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, volume 1 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, second edition, 1995.

[34] E. Viada. The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves. In *Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci.* Série *(V)*, volume 2, pages 47–75, 2003.

[35] W. C. Waterhouse. Abelian varieties over finite fields. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 2 :521–560, 1969.

Adresse : Ratazzi Nicolas
Université Paris 6 Institut de Mathématiques
Projet Théorie des nombres
Case 247
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
FRANCE
email : ratazzi@math.jussieu.fr