CONDITION DE LEVI POUR UN PROBLEME DE GOURSAT ASSOCIE A DES SYSTEMES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

D. GOURDIN et M. SEIFOUDINI *

Introduction

Dans cet article, nous étudions les opérateurs aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^{n+2}$, pseudo-différentiels par rapport à $y \in \mathbb{R}^n$, différentiels par rapport à $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, matriciels et faiblement hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constantes au plus égale à deux et nous éxaminons le problème de Goursat linéaire avec les conditions de Levi dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables.

L' objet de ce travail est de montrer l'existence , l'unicité et le domaine de dépendance des solutions de ce problème Nous nous inspirons des travaux de Mme Y. Hasegawa [8] et [9] qui a étudié le problème similaire pour une seule équation dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables.

Nous proposons d'étendre ces résultats à des systèmes dans l'espace des fonctions indéfiniment différentiables.

Plusieurs auteurs (D. Gourdin et M.Mechab) ont travaillé sur le problème de Goursat dans différents espaces tels les espaces de Gevrey et autres. Nous allons enrichir ces travaux dans les espaces C^∞ . On donnera une condition suffisante de résolubilité par la méthode d'éstimations d'énergie sous les conditions de Levi.En s'inspirant des travaux de Y. Hasegawa [9] , nous allons établir des inégalités d'énergie de deux (sous) problèmes sous-jacents de Cauchy et montrer l'existence d'un domaine de définition enfin de démontrer notre résultat principal.

*Address: Laboratoire d'analyse Complexe de l'Institut de Maths de Jussieu, Université Paris VI, 175, rue Chevaleret 75013 Paris, FRANCE. email:seifoudi@math.jussieu.fr

1 Notations et Définitions

Soient $N, m \in \mathbb{N}$, le point générique de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, sera noté (t,x,y), on utlisera les notations habituelles de dérivations, à savoir $D_t = -i\dfrac{\partial}{\partial_t}$, $D_x = -i\dfrac{\partial}{\partial_x}$ et $D_y = \Big(-i\dfrac{\partial}{\partial_{y_1}},\dots,-i\dfrac{\partial}{\partial_{y_n}}\Big)$ et les variables duales de t, x et y sont notées τ, ξ et η.
$S^m_{1,0} = S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m défini dans [10].
On notera $\mathcal{E}_t$ l'espace des fonctions C^∞ en t et

$$\tilde{H}^\infty_{x,y} = \Big\{f \ \in \ C^\infty_{x,y};\ \int_{|x|<X}\int_{\mathbb{R}^n} \mid D^\alpha_x D^\beta_y f(x,y) \mid^2 dxdy < \infty,\ \ \forall\, \alpha,\beta, X>0\Big\}.$$

l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées sont bornées sur $B(0,X)\times\mathbb{R}^n$, pour tout $X>0$, où $B(0,X) = \{x\in\mathbb{R}, \mid x \mid < X\}$

$\forall p,\ \forall k$, on notera également :

$$\begin{aligned}
\parallel f \parallel^2_{k,\Omega(t)} &= \sum_{j+|\alpha|\le k}\int_{\Omega(t)} \mid D^j_x D^\alpha_y f \mid^2 dxdy\\
\parallel u \parallel_k &= \parallel u \parallel_{H^k(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}^n_y)}\\
\parallel \psi \parallel^2_{y,k} &= \sum_{|\alpha|\le k}\int \mid D^\alpha_y \psi \mid^2 dy
\end{aligned}$$

Rappelons l'expression du polynôme sous-caractéristique d'un opérateur h (J. Vaillant [16] page 15), en utilisant les notations de sommation d'Einstein

$$\mathcal{K}_h \equiv [H^{\star A}_B - \frac{1}{2}\partial^\lambda_\lambda(H^A_B)]\gamma_A\delta^B + \frac{1}{2}H^A_B(\partial^\lambda\delta^B\partial_\lambda\gamma_A - \partial^\lambda\gamma_A\partial_\lambda\delta^B) \ \ modH'$$

où γ et δ representent des vecteurs propres respectivement à droite et à gauche .

On considère $\mathcal{H}$ une matrice d'opérateurs différentiels par rapport à t et x et pseudo-différentiels par rapport à y d'ordre ϖ. On suppose que $\mathcal{H}$ admet la décomposition suivante :

$$\mathcal{H} = hk - r \tag{1.1}$$

où

$$h(t,x,y;D_t,D_x,D_y)=\sum_{0\le i+j\le m} a_{i,j}(t,x,y;D_y)D_t^iD_x^j,$$
$$k(t,x,y;D_t,D_x,D_y)=\sum_{j=0}^{l} b_j(t,x,y;D_y)D_x^j$$

avec les $a_{ij}(t,x,y;D_y)$ et $b_j(t,x,y,D_y)$, respectivement, dans $S_{1,0}^{m-(i+j)}(\mathbb{R}^n)$ et $S_{1,0}^{l-(j)}(\mathbb{R}^n)$, par rapport à y dépendant d'une façon C^∞ des paramètres t et x; et r un opérateur matriciel $N\times N$ admettant des propriétés particulières dont on explicetera ultérieurement et d'ordre inférieur ou égal à $m+l-2$.

On supposera que les opérateurs h et k vérifient les hypothèses suivantes.

Soient h_m et k_l les matrices principales de h et k, c'est à dire:

$$h_m(\tau;\xi,\eta)=\sum_{j+k=m} \overset{\circ}{a}_{jk}(t,x,y;\eta)\tau^j\xi^k$$
$$k_l(\xi;\eta)=\sum_{j=0}^{l} \overset{\circ}{b}_j(t,x,y;\eta)\xi^j$$

où $\overset{\circ}{a}_{jk}(t,x,y;\eta)$ et $\overset{\circ}{b}_j(t,x,y;\eta)$ sont homogènes respectivement de dégrés $m-(j+k)$ et $l-j$ en η. On considère les polynômes caractéristiques de h et k définis par

$$H_m=det(h_m(\tau;\xi,\eta)$$
$$K_l=det(k_l(\xi,\eta)$$

On supposera qu'on peut décomposer H_m et K_l sous la forme

$$H_m=\prod_{j=1}^{n''}(\tau-\tau_j(t,x,y;\xi,\eta))^{\rho_j}$$
$$K_l=\prod_{j=1}^{n'}(\xi-\xi_j(t,x,y;\eta))^{\nu_j}$$

et on imposera les hypothèses suivantes

(A-1) $\forall j\in\{1,\dots n"\}, 1\le\rho_j\le 2$ et pour tout $T,\ X>0$, il existe $\delta>0$ tel que: $\forall i\neq j$, $\forall(t,x,y)\in[0,T]\times[-X,X]\times\mathbb{R}^n,\ \forall(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$,

$$\mid\tau_i(t,x,y;\xi,\eta)-\tau_j(t,x,y;\xi,\eta)\mid\ge\delta\mid(\xi,\eta)\mid$$

(A-1)' $\forall j \in \{1, \dots n'\}, 1 \leq \nu_j \leq 2$ et pour tout $T,\ X > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que: $\forall i \neq j$, $\forall (t,x,y) \in [0,T] \times [-X,X] \times \mathbb{R}^n$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,

$$\mid \xi_i(t,x,y,\eta) - \xi_j(t,x,y,\eta) \mid \geq \delta \mid \eta \mid$$

(A-2) (voire [16], [1]) On suppose que la matrice réduite de h_m dans le localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\tau]$ par le sous-anneau divisible par $\tau - \tau_j$ est :

$$\mathbf{h_m} \sim \begin{pmatrix} (\tau-\tau_j)^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\ j = 1, ..., m_1.$$

(A-2)' (voire [16], [1]) On suppose que la matrice réduite de k_l dans le localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\xi]$ par le sous-anneau divisible par $\xi - \xi_j$ est :

$$\mathbf{k_l} \sim \begin{pmatrix} (\xi-\xi_j)^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\ j = 1, ..., l_1.$$

(A-3)

r est d'ordre $l + m - 2$ et

En désignant par R la matrice principale de r et par $R^\star$ sa matrice sous-principale,il existe une matrice A ; $N \times N$ homogène de dégré $m - 2$ telle que:

$$\begin{cases} R = AK \\ ([R^\star - AK^\star + \sum_{|\alpha|=1} A^{(\alpha)} K_{(\alpha)}] \times cof(K)) \mid_{\xi=\xi_j} = 0 \quad \forall\ 1 \le j \le l_1 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$rq = B(m-2)\Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1} + B(m-2+l_2-1)\Gamma_{l_1} + B(m-2+l-2)I_N$$

où $B(j)$ est un opérateur différentiel suivant t et x , pseudo-différentiel suivant y et d'ordre total au plus j . En plus l'ordre en D_t dans $B(j)$ est au plus $m-2$.

$$\begin{cases} \textit{Les matrices } R \textit{ et } R^\star \textit{ vérifient :} \\ \textit{Il existe une matrice} A \textit{ tels que } R = AK \textit{ et } R^\star = AK^\star. \\ \textit{Avec } K \textit{ la matrice principale de } k \textit{ et } K^\star \textit{ sa matrice sous} - \textit{principale} \end{cases}$$

Remarque 1.1 *Les hypothèses* **(A-1)** *et* **(A-1)'** *expriment le fait que h et k sont des opérateurs à caractéristiques de multiplicité constante au plus égale à 2. On peut écrire alors:*

$$H_m = \prod_{j=1}^{m_1} (\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta))^2 \prod_{j=m_1+1}^{m_2} (\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta)) = (H_{m_1})^2 H'_{m_2-m_1}$$

$$K_l = \prod_{j=1}^{l_1} (\xi - \xi_j(t,x,y;\eta))^2 \prod_{j=l_1+1}^{l_2} (\xi - \xi_j(t,x,y;\eta)) = (K_{l_1})^2 K'_{l_2-l_1}$$

Avec $2l_1 + (l_2 - l_1) = l_2 + l_1 = Nl$ *et* $2m_1 + (m_2 - m_1) = m_2 + m_1 = Nm.$

Remarque 1.2 **(A-2)** *et* **(A-2)'** *sont équivalentes à l'existence d' un mineur de h_m, respectivement k_l, non divisible par $(\tau - \tau_j)$, respectivement $(\xi - \xi_j)$, pour tout $j = 1, \ldots, m_1$, respectivement $j = 1, \ldots, l_1$.*

On considère le problème de Goursat suivant :

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{H}u(t,x,y) = (hk - r)u(t,x,y) = f(t,x,y), \\ D_t^i u \mid_{t=0} = \phi_i(x,y), \quad 0 \le i \le m-1 \\ D_x^j u \mid_{x=0} = \psi_j(t,y), \quad 0 \le j \le l-1 \end{cases}$$

Avec les conditins de compatibilité suvantes :

$$(C) \qquad D_x^j \phi_i(0,y) = D_t^i \psi_j(0,y), \qquad \forall\ 0 \le i \le m-1\ ,\ 0 \le j \le l-1$$

Définition 1.1 *On dit que $\mathcal{H}$ vérifient les conditions de Levi $\mathcal{L}$, si*
(L-1) *Le polynôme sous caractéristique de h est divisible par H_{m_1}*
(L-2) *Le polynôme sous caractéristique de k est divisible par K_{l_1}*

On obtient le résultat suivant :

Théorème 1 *Si l'opérateur $\mathcal{H}$ vérifie les conditions* **(A-3)** *et ceux de Levi $\mathcal{L}$, alors pour tout $f \in \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y})$, $\phi_i \in \tilde{H}^{\infty}_{x,y}$, $0 \leq i \leq m-1$ et $\psi_j \in \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{y})$, $0 \leq j \leq l-1$, vérifiant les conditions de compatibilité (C), il existe une unique solution u dans $\mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y})$ du problème (1.2).*

2 Preuve du Résultat

Nous allons prouver ce Théorème par induction en se ramenant à des problèmes de Cauchy pour h et k relativement à des données respectives sur les hyperplans $t = 0$ et $x = 0$.

2.1 Preliminaires

Lemme 2.1 *(L-1) est équivalent à :*

Il existe $p($ resp. p' $)$ différentiel en t et pseudo-différentiel en (x, y) de symbole principal $P = cof(h_m)$ d'ordre $m_1 + m_2$, Δ_{m_1} (resp. Δ'_{m_1}) de symbole principal H_{m_1} et Δ_{m_2} (resp. Δ'_{m_2}) de symbole principal $H'_{m_2-m_1}$ différentiels en t et pseudo-différentiels en (x, y) tels que :

$$ph = \Delta_{m_2}\Delta_{m_1}I_{N\times N} + C(m_2 - 1)\Delta_{m_1} + C(m_2 + m_1 - 2).$$

(resp.

$$hp' = \Delta'(m_2)\Delta'(m_1)I_{N\times N} + C'(m_2 - 1)\Delta'(m_1) + C'(m_2 + m_1 - 2)).$$

Où $C(m_2-1)$ (resp. $C'(m_2-1)$) et $C(m_2+m_1-2)$ (resp. $C'(m_2+m_1-2)$) sont d'ordre respectifs $m_2 - 1$ et $m_2 + m_1 - 2$.

Lemme 2.2 *(L-2) est qui équivaut à :*
Il existe q (resp. q') différentiel en x et pseudo-différentiel en y de symbole principal $Q = cof(k_l)$ d'ordre $l_1 + l_2$, Γ_{l_1} (resp. Γ'_{l_1}) de symbole principal K_{l_1} et Γ_{l_2} (resp. Γ'_{l_2}) de symbole principal $K'_{l_2-l_1}$ différentiels en x et pseudo-différentiels en y tels que :

$$qk = \Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1}I_N + C(l_2 - 1)\Gamma_{l_1} + C(l_2 + l_1 - 2).$$

(resp.

$$kq' = \Gamma'_{l_2}\Gamma'_{l_1} I_N + C'(l_2 - 1)\Gamma'_{l_1} + C'(l_2 + l_1 - 2)).$$

Où les C_j (resp. C'_j sont des opérateurs d'ordre inférieurs ou égal à j.

Preuve
Posons

$$D_x - \xi_j(t, x, y; D_y) = \partial_j$$

On a :

$$\begin{cases} \partial_1\partial_2 \dots \partial_{l_2} I_N = \Gamma_{l_2} \\ \partial_1\partial_2 \dots \partial_{l_1} I_N = \Gamma_{l_1} \end{cases}$$

où $1 \leq l_1 \leq l_2$, et

$$\begin{cases} \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l_1} \text{ sont des racines doubles} \\ \xi_{l_1+1}, \dots, \xi_{l_2} \text{ sont des racines simples} \end{cases}$$

L'hypothèse **(A-2)'** est équivaut à l'hypothèse **(A-2)"** suivante :

(A-2)" Il existe un opérateur q de symbole principal $Q = {}^{cof}(k_l) = cof(k)$ tel *que* :

$$kq = \Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1} I_{N\times N} + A(l_2 - 1)\Gamma_{l_1} + A(l_1 + l_2 - 2)$$

où $A(i) \equiv A(i; t, x, y, D_x, D_y)$ est un opérateur pseudo-différentiel suivant y et *un* opérateur différentiel suivant x, d'ordre total i et I_N est la matrice identité .

2.2 Domaine de Dépendance pour le Problème de Gourast et Estimations d'Energie

Soit

(2.1) $$\tau_{max} = max_{\{t \ \in[0,T], |x|\leq X, y \ \in \mathbb{R}^n, |\xi|=1, i=1,\dots,m_2\}} \mid \tau_i(t, x, y; \xi, 0) \mid$$

(2.2) $$\mathcal{D}(t_0, x_0) = \{(t, x, y); \mid x - x_0 \mid < \tau_{max}(t - t_0),\ t \leq 0\}$$

$$\Omega(t_0, X_0) = \bigcup_{|x_0|<X_0} \mathcal{D}(t_0, x_0),\ X_0 > 0.$$

On prend un point (t_0, X_0) et on le fixe. Posons :

$$\Omega(t_0, X_0) \equiv \Omega.$$

Et on note $\Omega(s)$ l'intersection de Ω et de l'hyperplan $t = s$. Soit

$$\Omega(s) = \Omega \cap \{(s, x, y)\}$$

Proposition 2.1 *On considère le problème suivant:*

$$\begin{cases} hv = f \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y}) \\ D^i_t v \mid_{t=0} = \phi_i(x, y) \in \tilde{H}^{\infty}_{x,y}, 0 \le i \le m-1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Sous les suppositions $(A-1)$ et $(A-2)$, la solution du problème de Cauchy 2.3 admet l'éstimation suivante :

$$\sum_{i=0}^{m-2+p} \| D^i_t v \|_{k+m-2+p-i,\Omega(t)} \tag{2.4}$$

$$\le C_1(k,p)\{\sum_{i=0}^{m-1} \| \phi_i \|_{k+m-1+p-i,\Omega(0)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \| D^i_s f(s) \|_{k+p-i,\Omega(s)} ds\}$$

$\forall p$, $\forall k$, *où*

$$\| f \|^2{}_{k,\Omega(t)} = \sum_{j+|\alpha| \le k} \int_{\Omega(t)} | D^j_x D^{\alpha}_y f |^2 dxdy.$$

et $C_1(k, p)$ est une constante dépendante de k, p et $\Omega(t)$ mais indépendante de f et de $\{\phi_i\}$.

Preuve de la Proposition 2.1

Pour la preuve ,nous allons utiliser les deux lemmes suivants: grâce aux quelles,on localise les inégalités sur $\Omega(t), \Omega(0)$ *et* $\Omega(s)$ respectivement. Car h n'est différentiel que relativement à t et à x et pas par rapport à y.

Lemme 2.3 *On considère le problème 2.3 .*
On suppose $(A-1)$, $(A-2)$ et en plus $f \ \in \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y}), \phi_i(x, y) \ \in \ \tilde{H}^{\infty}_{x,y}$, alors la solution du problème 2.3 a une éstimation suivante:

(2.5)
$$\sum_{i=0}^{m-2+p} \| D^i_t v \|_{k+m-2+p-i} \le C_1(k,p)\{\sum_{i=0}^{m-1} \| \phi_i \|_{k++m-1+p-i} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \| D^i_s f(s) \|_{k+p-i} ds\}.$$

où

$$\| u \|_k = \| u \|_{H^k(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_y)}.$$

Dans le problème de Cauchy 2.3, le domaine de dépendance du point (t_0, x_0, y) est $\mathcal{D}(t_0, x_0)$. A savoir que si

$$f \equiv 0 \;\in\; \mathcal{D}(t_0, x_0) \; et \; \phi \equiv 0 \; dans \; \mathcal{D}(t_0, x_0) \cap \{t = 0\}, \; alors \; v \equiv 0 \; dans \; \mathcal{D}(t_0, x_0).$$

Preuve du lemme 2.3

On remarque que $\mathcal{D}(t_0, x_0) = \bigcup_{y \in \mathbb{R}^n} \Gamma(t_0, x_0, y)$ avec $\Gamma(t_0, x_0, y) = \{(t, x, z) : \sqrt{|x - x_0|^2 + |z - y|^2} < \tau_{max}(\mathrm{t}_0 - t); t \geq 0\}$.

Puis cf D.Gourdin [7] .

Ainsi, la Proposition 2.1 sera déduite.

Ensuite,on pose $u = qu'$ .Ainsi,on a :

$$\begin{cases} kqu' = v \\ hv = rqu' + f \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k'u' = v \\ hv = r'u' + f \end{cases}$$

On a alors :

Proposition 2.2 *On considère le problème suivant:*

$$(2.6) \qquad \begin{cases} kqu' = v \;\in\; \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y}) \\ D^j_x u' \mid_{x=0} = \psi'_j(t, y) \;\in\; \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_y), \; 0 \leq j \leq l_2 + l_1 - 1 = Nl - 1 \end{cases}$$

Sous les suppositions $(A-3)$ et $(A-4)$,la solution du problème de Cauchy 2.6 a l'éstimation suivante :

$$(2.7) \qquad \sum_{h=0}^{p'} \| D^h_t\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1} u'\} \|_{q'(i)+k+p'-h,\Omega(t)}$$

$$\leq C_2(k, p')\{\sum_{h=0}^{p'} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| D^h_t \psi'_j(t, y) \|_{y,k+p'+l-1-j-h} + \sum_{h=0}^{p'} \| D^h_t v \|_{k+p'-h,\Omega(t)}\}$$

$0 \leq i \leq l - 1$ *où* $q'(i) = Nl - (l_1 + l_{2-i}) - i$,

$$avec \;\; \| \psi \|^2_{y,k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int | D^\alpha_y \psi |^2 dy,$$

$C_2(k,p')$ est une constante dépendante de k,p' et $\Omega(t)$ mais indépendante de v et de $\{\psi_j\}$.

En particuliers si $i=2$,l'inégalité 2.7 devient :

$$\sum_{h=0}^{p'} \parallel D_t^h u' \parallel_{Nl-2+k+p'-h,\Omega(t)} \tag{2.8}$$

$$\leq C_2(k,p')\{\sum_{h=0}^{p'}\sum_{j=0}^{Nl-1} \parallel D_t^h \psi_j'(t,y) \parallel_{y,k+p'-h} + \sum_{h=0}^{p'} \parallel D_t^h v \parallel_{k+p'-h,\Omega(t)}\}$$

Preuve de la Proposition 2.2

On considère le problème 2.6

$$(2.6)\begin{cases} k' = kqu' = v \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y}) \\ D_x^j u' \mid_{x=0} = \psi_j'(t,y) \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_y), \ 0 \leq j \leq l_2 + l_1 - 1 = Nl - 1 \end{cases}$$

On pose $u = qu'$.

k' étant hyperbolique dans la direction de x .On considère t comme paramètre . Par la théorie des équations hyperboliques, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.4 *Le problème de Cauchy 2.6 admet une solution unique $u \in \ \mathcal{E}_x(H^{\infty}_y)$ et nous avons l'éstimation suivante:*

$$\sum_{j=0}^{q'(i)+p} \parallel D_x^j\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u'\} \parallel_{y,k+q'(i)+p-j} \tag{2.9}$$

$$\leq C(k,p)\{\parallel \psi(t,y) \parallel_{y,k+p+l-1} + \int_{|x'|\leq|x|}\sum_{j=0}^{p} \parallel D_{x'}^j v(x') \parallel_{y,k+p-j} dx'\}$$

On fixe t et soit $X(t) = max_{(t,x,y)\ \in\Omega(t)} \mid x \mid$.
De 2.9, posons $k = 0$, nous avons :

$$(2.10) \qquad \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{q'(i)+p} \| D_x^j\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u'\} \|^2{}_{y,q'(i)+p-j}dx$$

$$\leq C'(k,p)\int_{|x|\leq X(t)}\{\sum_{j=0}^{Nl-1} \| \psi_j'(t,y) \|^2{}_{y,p+Nl-1-j}dx + \int_{|x|\leq X(t)}\sum_{j=0}^{p}(\int_{|x'|\leq|x|} \| D_{x'}^j v(x') \|_{y,p-j}dx')^2dx\}$$

Et on a:

$$(2.11) \qquad \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{q'(i)+p} \| D_x^j\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u\} \|^2{}_{y,q'(i)+p-j}dx$$

$$= \| \Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u \|^2{}_{q'(i)+p,\Omega(t)}$$

Et en plus, on a :

$$\int_{|x|\leq X(t)}\sum_{j=0}^{p}(\int_{|x'|\leq|x|} \| D_{x'}^j v(x') \|_{y,p-j}dx')^2dx\}$$

$$\leq \int_{|x|\leq X(t)}\sum_{j=0}^{p}\{\int_{|x'|\leq|x|}1^2dx' \int_{|x'|\leq|x|} \| D_{x'}^j v(x') \|^2{}_{y,p-j}dx'\}dx$$

$$\leq \int_{|x|\leq X(t)}\sum_{j=0}^{p}\{2X(t) \int_{|x'|\leq|x|} \| D_{x'}^j v(x') \|^2{}_{y,p-j}dx'\}dx$$

$$\leq (2X(t))^2 \| v \|^2{}_{p,\Omega(t)}.$$

Ainsi,on a :

$$(2.12) \qquad \| \Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u \|^2{}_{q'(i)+p,\Omega(t)}$$

$$\leq C'(0,p)\{2X(t)\{\| \psi(t,y) \|^2{}_{y,p+l-1}dx + (2X(t))^2 \| v \|^2{}_{p,\Omega(t)}\}$$

Si $p' = 0$ dans 2.3, et 2.3 est équivalent à 2.12.

Ensuite on considère les éstimées de la dérivée dans la direction de t .On différencie 2.12 par rapport à t. Et de la même manière,on obtient l'éstimation de la dérivée dans la direction de t.

Ainsi on a une proposition plus analogue à la proposition 2.2 dont la preuve est similaire à celle de la proposition 2.2.

Proposition 2.3 *Quel que soit k, le problème*

$$\begin{cases} ku = v \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y}) \\ D^j_x u \mid_{x=0} = \psi_j(t,y) \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{y}), \ 0 \le j \le l-1 \end{cases} \tag{2.13}$$

admet l'éstimation suivante:

$$\sum_{h=0}^{m-2} \| D^h_t u \|_{m-2-h,\Omega(t)} \le C \sum_{h=0}^{m-2} \| D^h_t u' \|_{Nl-2+m-2-h,\Omega(t)} \tag{2.14}$$

$$\le C\{\sum_{h=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-1} \| D^h_t \psi_j(t,y) \|_{y,m-2-h} + \sum_{h=0}^{m-2} \| D^h_t v \|_{m-2-h,\Omega(t)}\}$$

Preuve de la Proposition 2.3

On établit la première inégalité par recurrence sur h et la deuxième est exactement la Proposition 2.2 en prenant $i = \nu$ et $p' = m-2$

2.3 Construction de la solution

Soit

$$ku = v \tag{2.15}$$

Alors $\varpi u = (hk - r)u = f$ est équivalent à 2.16

$$\begin{cases} ku = v \\ hv = ru + f \end{cases} \tag{2.16}$$

On re-écrit

$$D^i_t(ku) \mid_{t=0} = \sum_{k=0}^{i} C_{ik}(x,y;D_x,D_y)\phi_k(x,y) \equiv \tilde{\phi}'_i(x,y) \tag{2.17}$$

,où C_{ik} est un opérateur différentiel suivant x et pseudo-différentiel suivant y et d'ordre total au plus l.

Soit v_1 la solution de :

$$\begin{cases} hv_1 = f \\ D_x^j v_1 \mid_{x=0} = \tilde{\phi}_j'(x,y) \ , \ 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Et u_1 la solution de :

$$\begin{cases} ku_1 = v_1 \\ D_x^j u \mid_{x=0} = \psi_j(t,y) \ , \ 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

En général, pour $\rho \geq 2$, v_ρ est la solution de :

$$\begin{cases} hv_\rho = ru_{\rho-1} \\ D_t^i v_\rho \mid_{t=0} = 0 \ , \ 0 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

Et u_ρ est solution de :

$$\begin{cases} ku_\rho = v_\rho \\ D_x^j u_\rho \mid_{x=0} = 0, 0 \leq j \leq l-1 \end{cases}$$

Nous voulons montrer que la série $u_1 + u_2 + \ldots$ converge . Prenons k et p dans (2.7) et on les fixe . Par la preuve de la Proposition 2.1, nous avons :

(2.18)
$$\sum_{i=0}^{m-2+p} \parallel D_t^i v_1 \parallel_{k+m-p-2-i,\Omega(t)} \leq C_1 \{ \sum_{i=0}^{m-1} \parallel \tilde{\phi} \parallel_{k+p-1,\Omega(0)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \parallel D_s^i f(s) \parallel_{k+p-i,\Omega(s)} ds \}$$

Et par la proposition 2.2,nous avons l'éstimation de u_1' $(u_1 = qu_1')$.Dans 2.4, soit k comme dans 2.6 et $p' = m-2+p$. Ainsi,on a:

$$\begin{cases} k'u' = v \\ hv = r'u' + f \end{cases}$$

d'ordre total $(m+l-2)N$, avec

$$\begin{cases} u = qu' \\ k' = kq \ d'ordre \ lN \end{cases}$$

on a :

(2.19)

$$\sum_{h=0}^{p'=m-2+p} \| D_t^h\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u_1'\} \|_{q'(i)+k+m-2+p-1-i,\Omega(t)}$$

$$\leq C_2\{ \sum_{h=0}^{m-2+p} \sum_{j=1}^{lN-1} \| D_t^h\psi_j'(t,y) \|_{y,k+m-2+p+lN-j-h} + \sum_{h=0}^{m-2+p} \| D_t^h v_1 \|_{k+m-2+p-h,\Omega(t)}\}$$

Soit

$$\begin{cases} k'u_1' = v_1 \ (k' = kq \ , \ u_1 = qu_1') \\ D_x^j u_1' = \psi_j'(t,y), \ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} hv_\rho = r'u_{\rho-1}' \ (r' = rq \ , \ u_\rho = qu_\rho') \\ D_t^i v_\rho \mid_{t=0} = 0 \ (0 \leq j \leq Nl-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k'u_\rho' = v_\rho \ (k' = kq \ , \ u_\rho = qu_\rho') \\ D_x^j u_\rho' = \psi_j'(t,y), \ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases}$$

Soient

(2.20) $$\sum_{i=0}^{m-1} \| \tilde{\phi}_i \|_{k+m-1+p-i,\Omega(0)} = M_1$$

(2.21) $$sup_{0\leq s\leq T}\{\sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{k+p-i,\Omega(s)}\} = K$$

(2.22) $$\sum_{h=0}^{m-2+p} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| D_t^h\psi_j'(t,y) \|_{y,k+m-2+p+Nl-1-j-h} = M_2$$

De 2.19 à 2.22,on a :

(2.23)

$$\sum_{h=0}^{m-2+p} \| D_t^h\{\Gamma(l_2)\Gamma_{l_1}u_1'\} \|_{q'(i)+k+m-2+p-i-h,\Omega(t)}$$

$$\leq C_2M_2 + C_2C_1M_1 + C_1C_2\int_0^t Kds = C_2M_2 + C_2C_1M_1 + C_1C_2Kt$$

Par l'hypothèse $(A-5)$ et de 2.23 , on a :

(2.24)
$$\sum_{h=0}^{p} \| D_t^h(r'u'_1) \|_{k+p-h,\Omega(t)} \leq C'_3 \sum_{i=0}^{2} \sum_{h=0}^{m-2+p} \| D_t^h\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u'_1\} \|_{q'(i)+k+p-1-h,\Omega(t)}$$

En posant $C_3 = 3C'_3$, par 2.23 et 2.24, on a:

$$\sum_{h=0}^{p} \| D_t^h(r'u'_1) \|_{k+p-h,\Omega(t)} \leq C_2C_3M_2 + C_1C_2C_3M_1 + C_1C_2C_3Kt. \tag{2.25}$$

Et en général, par induction, on a:

La solution u'_ρ du problème

$$\begin{cases} k'u'_\rho = v_\rho \ (k' = kq \ , \ u_\rho = qu'_\rho) \\ D_x^j u'_\rho = \psi'_j(t,y), \ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases} \tag{2.26}$$

a l'éstimation suivante:

$$\sum_{h=0}^{m-2+p} \| D_t^h\{\Gamma(l_{2-i})\Gamma_{l_1}u'_\rho\} \|_{q'(i)+k+m-2+p,\Omega(t)} \tag{2.27}$$

$$\leq (C_1C_2C_3)^{\rho-1}\{(C_2M_2 + C_1C_2M_1)\frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!} + C_1C_2K\frac{t^\rho}{(\rho)!}\}$$

En particuliers si $i = 2$, 2.27 devient:

$$\sum_{h=0}^{m-2+p} \| D_t^h u'_\rho \|_{Nl-2+m-2+p-h,\Omega(t)} \tag{2.28}$$

$$\leq (C_1C_2C_3)^{\rho-1}\{M\frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!} + N\frac{t^\rho}{(\rho)!}\}$$

où $M = C_2M_2 + C_1C_2M_1$,$\tilde{K} = C_1C_2K$.

Par conséquent

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} D_t^h u'_\rho$$

$(0 \leq h \leq m-2+p)$ est convergente dans $H^{Nl-2+m-2+k+p-h}(\Omega(t))$.

En posant

$$u' = \sum_{\rho=1}^{\infty} u'_\rho$$

Alors $D_t^h u'_\rho \in \ H^{Nl-2+m-2+k+p-h}(\Omega(t)), 0 \leq h \leq m-2+p$,où k et p sont arbitraires,alors par le Lemme de Sobolev, $u' \in \ C^\infty(\Omega(t))$.
Il est évident que $u = ru'$ est solution du problème de Goursat 1.2.

2.4 Unicité de la solution

Soient u^1 et u^2 deux solutions du problème 1.2.Posons $w = u^1 - u^2$. Ainsi w satisfait

$$\begin{cases} \varpi w = (hk - r)w = 0 \\ D_t^i w \mid_{t=0} = 0 \ 0 \leq i \leq m-1 \\ D_x^j w \mid_{x=0} = 0 \ 0 \leq j \leq l-1 \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} kw = v \\ hv = rw \\ D_t^i w \mid_{t=0} = 0 \quad 0 \leq i \leq m-1 \\ D_x^j w \mid_{x=0} = 0 \quad 0 \leq j \leq l-1 \end{cases}$$

Montrons que le problème 2.29 a pour seule solution $w = 0$.

Par la Proposition 2.1, nous avons

$$\sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h kw \|_{m-2-h,\Omega(t)} \leq C_1 \int_0^t \| rw \|_{\Omega(s)} ds \tag{2.30}$$

Dans la Proposition 2.3, posons $p' = m-2$ et $k = 0$,nous avons

$$\sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h w \|_{m-2-h,\Omega(t)} \leq C_2 \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h kw \|_{m-2-h,\Omega(t)} \tag{2.31}$$

Par l'hypothèse $(A-5)$, on a :

$$\| rw \|_{\Omega(s)} \leq C_3 \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h w \|_{m-2-h,\Omega(s)} \tag{2.32}$$

Soit

$$M_3(t) \equiv \sum_{h=0}^{m-2} \| D_t^h \ w \|_{m-2-h,\Omega(t)} \tag{2.33}$$

Ainsi par de 2.31 à 2.33, nous avons

$$M_3(t) \leq 3C_2C_1 \int_0^t \| rw \|_{\Omega(s)} ds \leq 3C_1C_2C_3 \int_0^t M_3(s)ds \tag{2.34}$$

Posons $N_3 = sup_{0\leq t\leq T} M_3(t)$ et $3C_1C_2C_3 = C$, nous avons

$$M_3(t) \leq C \int_0^t M_3(s)ds \leq CN_3t \tag{2.35}$$

Ainsi $M_3(t) \leq CN_3(t)$. Par ref2.32, nous avons

$$M_3(t) \leq C \int_0^t CN_3 s ds \leq C^2 N_3 \frac{t^2}{2!} \tag{2.36}$$

En général pour tout j arbitraire;$j \geq 1$, nous avons

$$M_3(t) \leq C^j N_3 \frac{t^j}{j!} \tag{2.37}$$

$$Ainsi \ M_3(t) \equiv 0 \Longrightarrow w \equiv 0$$

Ceci complète la preuve du Théorème .

References

[1] Bourbaki, Modules plats.Localisations. Hermann, Paris 1961.

[2] Y. CHOQUET-BRUHAT,Ondes Asymptotiques et Approchées pour des systèmes d'équatins aux dérivées partielles non linéaires, J. Math. pures et appl. 48, 1969, 117-158

[3] D. GOURDIN , Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples. Comptes rendus Acad. Sci. Paris 278, série A,1974, 269-274.

[4] D. GOURDIN , Le problème de Cauchy pour les systèmes linéaires, faiblement hyperboliques caractéristiques multiples. Comptes rendus Acad. Sci. Paris 282, série A,1976, 1105-1107.

[5] D. GOURDIN ,*Les opérateurs faiblement hyperboliques à caractéristiques multiplicités constantes , bien décomposables et le problème de Cauchy non caractéristiques associé* . J. Math. Kyoto Univ.,17-3 (1977),539-566 .

[6] D. GOURDIN ,*Problème de Cauchy non caractéristique pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable, Domaine de dépendance.* Comm. in Partial Diff. equations, 4(5),1979,447-507.

[7] D. GOURDIN ,M. MECHAB ,*Etude du problème de Cauchy faiblement hyperbolique C^∞ pour des systèmes à caractéristiques de multiplicité variable quelconque.* Edition Jean Vaillant ,1985,121-147.

[8] Y. HASEGAWA , On the Levi condiiton for Goursat problem, J. Math. Kyoto Univ.,27-1 (1987),1-25.

[9] Y. HASEGAWA, On the C^∞ Goursat problem for the equations with constant coefficients , J. Math. Kyoto Univ.,19-1 (1979),125-151.

[10] Lars Hôrmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III .

[11] A. LAX , On the Cauchy's Problem for differential equations with multiple characteristics, Comm. pure apll. Math.,IX (1956), 135-169.

[12] P. D. LAX , Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems Duke Mth. J.,vol.24,1957,627-646

[13] D. LUDWIG,Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem, Comm. pure appl. Math. vol. 13,1960,473-508

[14] A. LAX , On the Cauchy's Problem for differential equations with multiple characteristics, Comm. pure apll. Math.,IX (1956), 135-169.

[15] T.NISHITANI, *On the E-wellposedness for Goursat problem with constant coefficients*, J.Math. Kyoto Univ.,20-1 (1980),179 -190.

[16] J. VAILLANT ,Données de Cauchy portées par une caractéristique double dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles,rôle des bicaractéristiques. J.Math. pures . appl. 47, 1968, p.1-40

[17] J. VAILLANT , Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples, J. Math. pure et apl. 58,1979, 165-216.