
MONODROMIE DU FAISCEAU PERVERS DES CYCLES ÉVANESCENTS DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA SIMPLES ET APPLICATIONS

par

Boyer Pascal

et avec un appendice de Laurent Fargues

arxiv :math.AG/0511448

Résumé. — Dans la situation géométrique des variétés de Shimura simples de Kottwitz étudiées dans le livre d’Harris et Taylor [6], on décrit la filtration de monodromie du complexe des cycles évanescents ainsi que la suite spectrale correspondante. On prouve en particulier que cette filtration coïncide avec celle donnée par les poids à un décalage près. D’après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, on en déduit une description de la filtration de monodromie-locale du modèle de Deligne-Carayol. En application on obtient la description des composantes locales des représentations automorphes cohomologiques de certains groupes unitaires, une correspondance de Jacquet-Langlands globale entre deux tels groupes et une preuve de la conjecture de monodromie-poids pour la cohomologie de ces variétés de Shimura.

Abstract (Monodromy of the perverse sheaf of vanishing cycles of some simple Shimura varieties and applications)

In the geometric situation of the simple Shimura varieties of Kottwitz studied in Harris and Taylor’s book [6], we describe the monodromy filtration of the vanishing cycles complex and the spectral sequence associated to it. We prove in particular that this filtration coincides with the weight one up to shift. Thanks to the Berkovich-Fargues’ theorem, we deduce the description of the local monodromy filtration of the Deligne-Carayol model. In application, we obtain the description of the local components of cohomological automorphic representations of certain unitary groups, a global Jacquet-Langlands correspondence between two such groups and a proof of the weight-monodromy conjecture for the cohomology of these Shimura varieties.

Table des matières

Introduction.....	1
Partie I. Notations et rappels.....	9
1. Rappels sur les représentations de $GL_d(F_v)$	9

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G22, 14G35, 11G09, 11G35, 11R39, 14L05, 11G45, 11Fxx.

Mots clefs. — Variétés de Shimura, modules formels, correspondances de Langlands, correspondances de Jacquet-Langlands, faisceaux pervers, cycles évanescents, filtration de monodromie, conjecture de monodromie-poids.

1.1. Induites paraboliques.....	9
1.2. Foncteur de Jacquet.....	12
2. Rappels des données géométriques.....	12
2.1. Le modèle local de Deligne-Carayol.....	13
2.2. Variétés de Shimura simples et systèmes locaux.....	15
3. Rappels des propriétés cohomologiques.....	21
3.1. Sur le modèle local.....	22
3.2. Sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor.....	22
Partie II. Filtrations de monodromie : énoncés.....	26
4. Énonces des théorèmes locaux.....	26
4.1. Groupes de cohomologie des modèles de Deligne-Carayol.....	26
4.2. Filtration de monodromie-locale.....	26
5. Énonces des théorèmes globaux.....	28
5.1. Rappels sur les faisceaux pervers.....	28
5.2. Définition de la catégorie des faisceaux pervers de Hecke.....	29
5.3. Notations.....	32
5.4. Filtration de monodromie.....	35
6. Schéma de la preuve : par récurrence.....	37
Partie III. Preuve des théorèmes.....	41
7. Étude dans le groupe de Grothendieck \mathfrak{G}	41
7.1. Groupe de Grothendieck des faisceaux pervers : généralités.....	41
7.2. Image dans \mathfrak{G} de $R\Psi_v[d-1]$	42
7.3. Décomposition dans \mathfrak{G} des $j_1^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d-tg]$	43
7.4. Étude aux points supersinguliers des $j_1^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d-tg]$	51
8. Faisceaux de cohomologie des $j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)$	57
8.1. Une écriture dans \mathfrak{G} de $j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d-tg]$	57
8.2. Filtration de monodromie-locale en hauteur non maximale.....	58
9. Preuve des théorèmes globaux sous (9.1.1).....	62
9.1. Preuve de (5.4.7) sous (9.1.1).....	62
9.2. Preuve de (5.4.11) sous (9.1.1).....	63
9.3. Pureté de la filtration de monodromie de $R\Psi_v[d-1]$	64
10. Étude de la suite spectrale des cycles évanescents.....	67
10.1. Cas où $\pi_v \simeq \mathrm{Sp}_s(\pi_v)$	67
10.2. Involution de Zelevinski et première preuve de (9.1.1).....	70
10.3. Cas $\pi_v \simeq \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$	70
10.4. Preuve de (9.1.1).....	80
Partie IV. Compléments sur la cohomologie globale.....	81
11. Parties sans monodromie de la cohomologie globale.....	81
12. Correspondances de Jacquet-Langlands globales.....	85

13. Composantes locales des représentations automorphes..... 87
 14. Pureté de la filtration de monodromie des $H_{\eta_v}^i$ 91

Partie V. Récapitulatifs..... 93
 15. sur les faisceaux..... 93
 16. sur les calculs de groupe de cohomologie..... 95
 17. sur la suite spectrale des cycles évanescents..... 96

Partie VI. Figures..... 98
 Références..... 105

Introduction

0.1. — Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p , d’anneau des entiers \mathcal{O}_K . Pour un entier d strictement positif fixé, on considère le groupe $D_{K,d}^\times$ (resp. W_K) des éléments inversibles de “1” algèbre à division centrale sur K d’invariant $1/d$ (resp. le groupe de Weil de K). Pour un nombre premier $l \neq p$, Langlands (resp. Jacquet-Langlands) a (resp. ont) conjecturé l’existence d’une bijection rec_K (resp. JL) entre les $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -représentations irréductibles admissibles de $GL_d(K)$ et les représentations l -adiques indécomposables de W_K (resp. entre les représentations admissibles irréductibles de $D_{K,d}^\times$ et les représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_d(K)$) qui sont compatibles à la formation des fonctions L ; on renvoie à [8] pour des énoncés précis.

A l’aide de la cohomologie étale, Deligne a construit une série de représentations $\mathcal{U}_{K,l,d}^i$ du produit de ces trois groupes. Pour $d = 2$ et pour ρ une représentation irréductible de $D_{K,2}^\times$ tel que $\pi := \text{JL}(\rho)$ soit une représentation cuspidale de $GL_2(K)$, Carayol dans [3], montre que la composante ρ -isotypique $\mathcal{U}_{K,l,2}^1(\rho)$ de $\mathcal{U}_{K,l,2}^1$ réalise les correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands, i.e.

$$\mathcal{U}_{K,l,2}^1(\text{JL}^{-1}(\pi^\vee)) \simeq \pi \otimes \text{rec}_K(\pi^\vee)(-\frac{1}{2}).$$

Le cas d quelconque est traité dans [6] et dans [2] en égale caractéristique. En outre pour $d = 2$, Carayol décrit également ce qui se passe pour les autres représentations.

Le but premier de ce travail est de faire de même pour d quelconque, i.e. calculer complètement les $\mathcal{U}_{K,l,d}^i(\rho)$ pour ρ une représentation irréductible quelconque de $D_{K,d}^\times$. Dans le cas où ρ est la représentation triviale, le résultat se formule comme suit.

Théorème 1 *Pour $0 \leq i \leq d - 1$, on a $\mathcal{U}_{K,l,d}^i(1^\vee) = \pi_i \otimes 1(-i)$ où π_i est l’unique quotient irréductible de l’induite parabolique*

$$\text{Ind}_{P_{i,d}(K)}^{GL_{sg}(K)} \text{Sp}_i \otimes 1$$

où $P_{i,d}$ est le parabolique standard associée aux i premiers vecteurs et Sp_i est la représentation de Steinberg de $GL_i(K)$.

Le cas général, cf. le théorème (4.1.2), s'énonce de manière similaire en faisant intervenir les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands. Une autre formulation de notre résultat revient à dire qu'il n'y a pas d'annulation dans l'expression, calculée dans [6], de la représentation virtuelle $\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i [\mathcal{U}_{K,l,d}^i(\rho)]$ où $\mathcal{U}_{K,l,d}^{d-i}(\rho)$, pour $1 \leq i \leq d$, y est alors donnée par le i -ème terme de plus haut poids.

0.2. — La preuve du théorème 1 procède par globalisation via l'étude des variétés de Shimura étudiées dans [6], qui sont de type PEL, définies sur un corps CM, F , et associées à un groupe de similitudes G/\mathbb{Q} tel que le groupe unitaire correspondant sur \mathbb{R} soit de la forme $U(1, d-1) \times U(0, d) \times \cdots \times U(0, d)$. Une place v au dessus de p est fixée de sorte que le complété F_v du localisé de F en v soit isomorphe au corps local précédemment noté K , d'anneau des entiers \mathcal{O}_v et tel que $G(F_v) \simeq GL_d(F_v)$. A certains sous-groupes compacts $U^p(m)$ de $G(\mathbb{A}^\infty)$, on associe alors une variété de Shimura $X_{U^p,m} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_v$ munie d'une action par correspondances de $G(\mathbb{A}^\infty)$, classifiant des variétés abéliennes munies de structures additionnelles ; on renvoie au §2.2 pour les détails.

0.3. — La fibre spéciale $\overline{X}_{U^p,m}$ de $X_{U^p,m}$ est stratifiée par des sous-schémas localement fermés $\overline{X}_{U^p,m}^{(d-h)}$ pour $1 \leq h \leq d$, de pure dimension $d-h$ tels que le théorème de Serre-Tate donne un isomorphisme entre le complété de l'hensélisé strict de l'anneau local de $X_{U^p,m}$ en un point géométrique de $\overline{X}_{U^p,m}^{(d-h)}$ et l'anneau $R_{F_v,d-h,m_1}$ qui représente le foncteur des déformations de niveau m_1 d'un \mathcal{O}_v -module de Barsotti-Tate sur $\overline{\kappa}(v)$ de hauteur h . Par ailleurs pour $1 \leq h < d$, il existe un sous-schéma fermé $\overline{X}_{U^p,m,M_{d-h}}^{(d-h)}$ de $\overline{X}_{U^p,m}^{(d-h)}$ stable sous les correspondances associées aux éléments du sous-groupe parabolique $P_{h,d}(F_v)$ de $GL_d(F_v)$ (cf. la définition (1.1.1)) et tel que

$$\overline{X}_{U^p,m}^{(d-h)} = \overline{X}_{U^p,m,M_{d-h}}^{(d-h)} \times_{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v^{m_1}) :$$

on dit que *les strates non supersingulières sont géométriquement induites*.

0.4. — Pour un nombre premier l distinct de p , les auteurs de [6] introduisent sur chacune des strates $\overline{X}_{U^p,m,M_{d-h}}^{(d-h)}$, des systèmes locaux \mathcal{F}_{τ_v} associés aux représentations irréductibles τ_v de $D_{v,h}^\times$. Ils décrivent alors la restriction des cycles évanescents $R^i\Psi_v := R^i\Psi_{\eta_v}(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ à la strate $\overline{X}_{U^p,m}^{(d-h)}$ en fonction des \mathcal{F}_{τ_v} et des cycles évanescents locaux $\Psi_{F_v,l,h,n}^i$, cf. (3.2.4). D'après le théorème de comparaison de Berkovich, le théorème local se déduit alors de la connaissance de la fibre en un point supersingulier des $R^i\Psi_v$.

0.5. — Le complexe $R\Psi_v[d-1]$ est vu comme un faisceau pervers muni d'une filtration de monodromie dont on notera gr_k les gradués. Notre deuxième résultat concerne la description des gr_k dans la catégorie des faisceaux pervers sur $\overline{X}_{U^p,m}$ munis d'une action compatible de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$. Pour $1 \leq tg \leq d$, et pour π_v (resp. Π_t) une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ (resp. quelconque de $GL_{tg}(F_v)$), on introduit le faisceau $HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)$ sur la strate $\overline{X}_{U^p,m}^{(d-tg)}$, "induit" à partir du système local $\mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_t(\pi_v)^\vee)} \otimes \Pi_t$ sur la composante $\overline{X}_{U^p,m,M_{d-tg}}^{(d-tg)}$. Les composantes π_v -isotypiques gr_{k,π_v} des gr_k , cf. la

proposition (5.1.3), se décrivent alors, théorème (5.4.4), au moyen des faisceaux pervers $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \mathrm{Sp}_t(\pi_v))[d - tg]$ où $j^{\geq tg}$ désigne l'injection de la strate $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}$; en ce qui concerne le cas π_v triviale, l'énoncé est le suivant :

Théorème 2 *Les faisceaux pervers $gr_{k, 1_v}$ sont nuls pour $k \geq d$ et sinon on a*

$$gr_{k, 1_v} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq d \\ t \equiv k - 1 \pmod{2}}} j_{!*}^{\geq t} HT(1, t, 1_v, \mathrm{Sp}_t)\left(-\frac{t+k-1}{2}\right)[d-t]$$

L'énoncé pour π_v quelconque est similaire et fait intervenir les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands.

0.6. — En utilisant la conjecture de monodromie-poids, la preuve du théorème 2 découlerait de la connaissance du théorème 1 pour toutes les hauteurs $h < d$ ainsi que de la description des restrictions aux strates des faisceaux des cycles évanescents en fonction des systèmes locaux \mathcal{F}_{τ_v} comme rappelé en (0.4.). Par ailleurs le théorème 1 en hauteur d , découle d'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, du calcul des germes aux points supersinguliers des faisceaux de cohomologie des gr_k .

On raisonne alors par récurrence en supposant connus⁽¹⁾ les $\mathcal{U}_{F_v, l, h}^i$ du modèle de Deligne-Carayol de hauteur h pour tout $1 \leq h < d$. On en déduit alors le théorème 2 sauf en ce qui concerne les faisceaux pervers supportés aux points supersinguliers i.e. on ne sait pas à quel k associer chacun des $j_!^{\geq d} HT(1, d, 1_v, \mathrm{Sp}_d)\left(-\frac{d+k'-1}{2}\right)$ pour $|k'| < d$ et $k' \equiv d - 1 \pmod{2}$. De même on sait déterminer tous les faisceaux de cohomologie $h^i gr_k$ des gr_k en dehors des points supersinguliers. La technique repose sur l'étude de la suite spectrale associée à la filtration de monodromie :

$$E_1^{i, j} = h^{i+j} gr_{-i} \Rightarrow R^{i+j+d-1} \Psi_v \quad (1)$$

en essayant d'en deviner les termes initiaux, l'aboutissement étant connu. En outre en utilisant la perversité des gr_k ainsi que la compatibilité de $R\Psi_v$ à la dualité de Verdier, on obtient un contrôle sur les germes aux points supersinguliers des $h^i gr_k$. On étudie ensuite la suite spectrale des cycles évanescents dont à nouveau on essaie de deviner les termes initiaux alors que l'aboutissement est connu, en utilisant en particulier le théorème de Lefschetz difficile. Le contrôle obtenu précédemment nous permet alors de prouver le théorème 1. On prouve ensuite la conjecture de monodromie-poids faisceautique en "plaçant" chacun des $j_!^{\geq d} HT(1, d, 1_v, \mathrm{Sp}_d)\left(-\frac{d+k-1}{2}\right)$ sur gr_k et on explicite la suite spectrale de monodromie (1).

0.7. — En ce qui concerne les résultats globaux que l'on obtient, citons

- la description "explicite" des gradués pour la filtration de monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents ainsi que de la suite spectrale associée ;
- la pureté de la filtration de monodromie du complexe des cycles évanescents ;
- la détermination des extensions intermédiaires des systèmes locaux d'Harris-Taylor ;

⁽¹⁾En fait on suppose plutôt connu les gradués locaux $gr_{h, k, loc}$ de la filtration de monodromie-locale du complexe des cycles évanescents $\Psi_{F_v, l, h}^\bullet$.

- le calcul de tous les groupes de cohomologie des différents faisceaux ou complexes de faisceaux qui sont introduits.

0.8. — Comme conséquence directe de ces calculs on obtient une description des composantes locales des représentations automorphes cohomologiques de $G_\tau(\mathbb{A})$ ainsi qu’une correspondance de Jacquet-Langlands globale entre deux formes intérieures de groupes unitaires qui complète [7] §3. A partir de cette description, on prouve alors la conjecture de monodromie-poids, i.e. la pureté de la filtration de monodromie des groupes de cohomologie de la fibre générique des variétés de Shimura étudiées.

Signalons que récemment Taylor et Yoshida ont indépendamment obtenu dans [16], la pureté de la filtration de monodromie de la cohomologie globale dans le cas tempéré, i.e. dans le cas où la cohomologie est concentré en degré médian. Pour cela ils se ramènent par changement de base au cas Iwahori et utilisent la suite spectrale de Rapoport-Zink. Dans notre cas, nous avons un dévissage qui permet, en utilisant aussi un changement de base, de se ramener au cas de GL_2 traité par Carayol dans [3]. Par ailleurs en ce qui concerne la conjecture de monodromie-poids cohomologique, le cas des variétés de Shimura uniformisées par les demi-espaces de Drinfeld est traité dans [9] à partir de la version faisceautique qui découle de l’existence d’un modèle semi-stable.

Décrivons succinctement le contenu des divers paragraphes.

0.9. — *La première partie* est consacrée à des rappels sur les données géométriques locales et globales tirées de [6]. On commence par des rappels de [17] sur les induites paraboliques, §1.1, et les foncteurs de Jacquet §1.2.

Le modèle local de Deligne-Carayol est introduit au paragraphe 2.1. En ce qui concerne les données globales, §2.2, outre le fait que les strates non supersingulières soient géométriquement induites, la donnée fondamentale est celle des systèmes locaux d’Harris-Taylor $\mathcal{F}(g, t, \pi_v)$ sur la strate tg , attachés aux représentations $JL^{-1}(\mathrm{Sp}_t(\pi_v)^\vee)$ des inversibles $D_{v,tg}^\times$ de l’algèbre à division centrale sur F_v d’invariant $1/tg$. La propriété essentielle que l’on utilisera sur ces systèmes locaux est l’isomorphisme (3.2.4).

On redonne en outre la description de l’ensemble des points supersinguliers et on définit pour tout diviseur g de $d = sg$, le faisceau $\mathcal{F}(g, s, \pi_v)$ à support sur les points supersinguliers. On notera par ailleurs que les $\mathcal{F}(g, t, \pi_v)$ ne sont pas à priori irréductibles car ils proviennent de la restriction à $\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ de $JL^{-1}(\mathrm{Sp}_t(\pi_v)^\vee)$.

0.10. — Le paragraphe 3 rappelle les résultats d’ordre cohomologique de [6]. Au niveau local, §3.1, on explicite le lien entre $\Psi_{F_v,l,h}^i$ et $\mathcal{U}_{F_v,l,h}^i$ et on introduit l’entier e_{π_v} qui est le cardinal de la classe d’équivalence inertielle, définition (3.0.1), de π_v . En particulier e_{π_v} est égal au nombre de sous-représentations irréductibles de la restriction à $\mathcal{D}_{o,tg}^\times$ de $JL^{-1}(\mathrm{Sp}_t(\pi_v)^\vee)$.

De [6], on retient principalement la détermination des parties cuspidales des groupes de cohomologie des modèles locaux de Deligne-Carayol ainsi que le calcul, cf. le théorème

(VII.1.5) de [6], de la somme alternée, dans le groupe de Grothendieck des $GL_d(F_v) \times W_v$ -modules

$$\sum_i (-1)^i \mathcal{U}_{F_v, l, d}^i(\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{Sp}_s(\pi_v)^\vee)).$$

En global, §3.2, on exploite l'isomorphisme (3.2.4) et notamment la description de l'action, par la proposition (3.2.3). On introduit selon [12], pour toute représentation irréductible algébrique ξ de $G(\mathbb{Q})$, le système local \mathcal{L}_ξ sur les variétés $X_{U^p, m}$ et on considère les groupes de cohomologie du produit tensoriel de ce dernier avec un système local d'Harris-Taylor.

Le résultat fondamental qui résulte des arguments de comptage de points est la proposition (3.2.9) qui calcule la somme alternée des groupes de cohomologie à support compact des systèmes locaux d'Harris-Taylor, dans le groupe de Grothendieck des $G^{(h)}(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$ -modules, où pour tout h , \mathbb{Z} est identifié au quotient $D_{v, h}^\times / \mathcal{D}_{v, h}^\times$ via la valuation de la norme réduite. On introduit pour cela le caractère Ξ de $\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ défini par $\Xi(1) = \frac{1}{l}$. Ainsi les représentations automorphes Π qui interviennent dans cette description ainsi que dans celle de la cohomologie de la fibre générique à valeurs dans \mathcal{L}_ξ , vérifient des conditions $\mathrm{Hyp}(\infty)$ aux places infinies que l'on donne à la définition (3.2.6).

0.11. — *La deuxième partie* donne l'énoncé des théorèmes locaux et globaux. Le théorème (4.1.2) est la motivation initiale de ce travail, c'est à dire décrire, pour tout diviseur g de d et toute représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$, chacun des $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i(\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{Sp}_s(\pi_v)^\vee))$. Finalement on obtient un résultat plus précis, théorème (4.2.3), qui est la description des gradués de la filtration de monodromie-locale définie par Fargues en appendice et de la suite spectrale correspondante.

0.12. — On énonce ensuite, §5.4, les résultats globaux. On commence, après avoir fait quelques rappels sur les faisceaux pervers §5.1, par découper, proposition (5.1.3), nos faisceaux pervers selon leur composantes isotypiques pour le sous-groupe d'inertie I_v et on note ainsi gr_{k, π_v} (resp. gr_{k, ξ, π_v}) la composante $\mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)_{|I_v}$ -isotypiques du gradué gr_k (resp. $gr_{k, \xi}$) pour la filtration de monodromie du faisceau pervers $R\Psi_v[d-1]$ (resp. $(R\Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi)[d-1]$ pour ξ une représentation irréductible algébrique de $G(\mathbb{Q})$), où π_v est une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $1 \leq g \leq d$. La représentation $\mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)_{|I_v}$ n'étant pas irréductible, pour un I_v -module V , V_{π_v} est le facteur direct de V sur lequel l'action de I_v se décompose en une somme de sous-représentations irréductibles qui sont aussi des sous-représentations de $\mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)_{|I_v}$.

On introduit ensuite §5.2, certaines catégories de faisceaux pervers de Hecke qui fourniront le cadre catégoriel des différents complexe de faisceaux que nous considérerons dans la suite et on donne, définition (5.3.1), un certain nombre de notations attachées aux systèmes locaux d'Harris-Taylor $\mathcal{F}(g, t, \pi_v)_1$ et aux faisceaux induits $HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)$ qui leurs sont associés sur la strate $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}$ où Π_t est une représentation de $GL_{tg}(F_v)$ qui sera le plus souvent elliptique de type π_v . On introduit alors le système projectif \mathfrak{G} des groupes de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke sur la tour des $\overline{X}_{U^p, m}$ munis d'une action compatible de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$.

On énonce alors les théorèmes globaux qui précisent, théorème (5.4.1) (resp. (5.4.4)), les faisceaux pervers simples de $(R\Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi)[d-1]$ (resp. des gr_{k,ξ,π_v}) en termes des faisceaux pervers

$$j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \mathrm{Sp}_t(\pi_v))[d-tg] \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{tg-1+k}{2}\right)$$

avec $1 \leq t \leq d/g$ (resp. $|k| < t \leq s_g$ et $t \equiv k-1 \pmod{2}$). D'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, le théorème local (4.1.2) se déduit alors du calcul, théorème (5.4.7), des faisceaux de cohomologie des $j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)$ et de la détermination, théorème (5.4.11), de la suite spectrale de monodromie associée.

On donne ensuite le schéma de la preuve qui procède par récurrence en supposant connu (4.2.3) pour tout $d' < d$. On renvoie le lecteur à §6 pour un aperçu des implications logiques entre les divers énoncés locaux et globaux. Avant de se lancer dans la preuve proprement dite, on donne des conséquences de l'hypothèse de récurrence, sur les représentations obtenues en prenant la cohomologie des systèmes locaux d'Harris-Taylor.

0.13. — *La troisième partie* s'occupe des preuves des théorèmes locaux et globaux. On démontre en premier lieu, §7, le théorème (5.4.1), i.e. on donne l'image de $R\Psi_v[d-1]$ dans le système projectif \mathfrak{G} des groupes de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke sur la tour des $\overline{X}_{U^p, m}$.

La preuve procède en plusieurs étapes. Tout d'abord de la description (3.2.4) des restrictions aux strates $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}$ des $R^i\Psi_v$ et du calcul (3.2.6) de $\sum_i (-1)^i [\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i]$, on en déduit, proposition (7.2.2), l'égalité suivante où on a posé $s_g = \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, la partie entière de d/g :

$$\begin{aligned} [R\Psi_v[d-1]] &= \sum_{g=1}^d \sum_{\pi_v \in \mathrm{Cusp}_v(g)} \frac{1}{e_{\pi_v}} \sum_{i=1}^{s_g} \sum_{t=i}^{s_g} (-1)^{t-i} \\ &\quad [j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{i-1}, \overrightarrow{t-i}]_{\pi_v})[d-tg] \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{tg-2+2i-t}{2}\right)] \quad (2) \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste alors à exprimer l'image des faisceaux pervers qui interviennent dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus soit :

$$\begin{aligned} [j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})[d-tg]] &= \\ \sum_{i=0}^{s_g-t} j_{!*}^{\geq (t+i)g} HT(g, t+i, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{[\overleftarrow{i-1}]_{\pi_v}})[d-(t+i)g] &\otimes \Xi^{i(g-1)/2} \quad (3) \end{aligned}$$

Pour prouver cette dernière égalité, on raisonne par récurrence descendante sur la dimension des supports des faisceaux pervers simples dans $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})[d-tg]$ en réinjectant (3) pour les différents t , avec g et π_v fixés, dans (2). On argumente tout d'abord sur le fait que le membre de droite de (2) doit s'écrire comme une somme à coefficients positifs de faisceaux pervers simples, autoduale pour la dualité de Verdier. On invoque ensuite

le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues afin d'utiliser l'hypothèse de récurrence sur les modèles locaux en hauteur $h < d$, afin d'obtenir des renseignements sur les germes aux points non supersinguliers de ces faisceaux pervers simples.

On démontre alors, proposition (7.3.3), le résultat hors des points supersinguliers au sens où les égalités du théorème précédent et de (3) sont vraies si on rajoute une somme alternée de faisceaux pervers à support sur les points supersinguliers. Le fait est qu'on utilise vraiment (3.2.4) et pas seulement un calcul de somme alternée des restrictions des faisceaux des cycles évanescents, ce qui explique l'indétermination au niveau des points supersinguliers.

0.14. — Le paragraphe (7.4) est consacré à la détermination de ces faisceaux pervers ponctuels qui nous manquent. Une idée naive est que pour connaître un faisceau ponctuel, on peut commencer par calculer son groupe de cohomologie H^0 . Étant donné un tel faisceau pervers ponctuel \mathcal{P} à déterminer, nous verrons en fait que la connaissance de son H^0 suffit à le déterminer complètement : en effet grâce à (7.2.11), nous montrerons que \mathcal{P} contient $\mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes (\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}) \otimes \Xi^{(s-t)(g-1)/2}$ avec

$$H^0(\mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}) \otimes \Xi^{(s-t)(g-1)/2} = H^0(\mathcal{P})$$

de sorte que $\mathcal{P} = \mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes \Xi^{(s-t)(g-1)/2}$.

On commence alors par calculer les groupes de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor, ou tout du moins leur $\Pi^{\infty, v}$ -partie, pour Π automorphe vérifiant $\text{Hyp}(\infty)$ avec $\Pi_v = \text{Sp}_s(\pi_v)$. On montre à la proposition (7.4.1) que ceux-ci sont alors tous nuls de sorte que, d'après la proposition (7.3.3), l'égalité (3.2.6) fournit, corollaire (7.4.6), le H^0 des faisceaux ponctuels manquant ainsi que leur détermination. Le théorème (5.4.1) découle alors directement de ces résultats, cf. le corollaire (7.4.10).

0.15. — Le huitième paragraphe est consacré, proposition (8.2.1), au calcul des faisceaux de cohomologies des faisceaux pervers $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$. D'après la proposition (7.3.3), on peut procéder par récurrence en utilisant la suite spectrale (5.1.10) dont l'aboutissement est connu sauf au niveau des points supersinguliers. Ainsi ces faisceaux de cohomologie ne sont pas complètement déterminés aux points supersinguliers mais il ne reste qu'un nombre réduit de possibilités, cf. le lemme (8.2.6), que l'on peut obtenir, d'après (7.3.3), par récurrence en utilisant par exemple la suite spectrale (8.2.13).

0.16. — Au neuvième paragraphe, on prouve les théorèmes globaux sous la proposition (9.1.1). D'après Berkovich-Fargues la connaissance du théorème local (4.2.3) revient à celle des germes aux points supersinguliers des faisceaux de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor ainsi que les flèches correspondantes dans la suite spectrale (5.1.10). Si nous disposions du théorème (4.2.3) pour d , le raisonnement de la preuve de la proposition (8.2.4) nous permettrait de déterminer complètement les faisceaux de cohomologie des gr_k . Par souci d'efficacité nous montrons, proposition (9.1.2), qu'il suffit, en utilisant l'opérateur de monodromie N , en fait de connaître les parties de poids $s(g-1)$ de l'aboutissement de la suite spectrale de monodromie-locale de (4.2.3). On est alors ramené à prouver la proposition (9.1.1), i.e. à déterminer les parties de poids $s(g-1)$ des $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i$.

On donne ensuite, proposition (9.3.1), une preuve de la conjecture de monodromie-poids version faisceau-tique. On remarque tout d'abord que pour $s > 2$, le raisonnement par récurrence implique le résultat de sorte qu'il reste à initialiser la récurrence et donc à prouver que pour $s = 2$, la monodromie n'est pas triviale, en particulier sur la cohomologie. Le résultat est connu pour $s = 2$ et $g = 1$ d'après [3]. Le principe, qui nous a été suggéré par M. Harris, est de s'y ramener via un changement de base adéquat.

0.17. — Le dixième paragraphe est consacré à la preuve de la proposition (9.1.1). Celle-ci repose sur l'étude de la suite spectrale des cycles évanescents. Pour Π une représentation irréductible automorphe de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ telle que $\Pi_v \simeq \mathrm{Sp}_s(\pi_v)$ avec π_v cuspidale, la $\Pi^{\infty,v}$ -partie de son aboutissement est connue d'après [6] et [16], ou peut-être rapidement recalculée à partir de la proposition (7.4.1). La détermination de cet aboutissement nous restreint, corollaire (10.1.3), alors le nombre de possibilités pour les $\mathcal{U}_{F_v,l,d}^i(\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{Sp}_s(\pi_v)^{\vee}))$ ce qui nous permet de conclure en utilisant une propriété d'invariance des $\mathcal{U}_{F_v,l,d}^{\bullet}$ sous l'involution de Zelevinski, cf. le théorème (10.2.1).

Cependant la preuve de celle-ci repose sur tout ou partie du théorème de comparaison de Faltings à partir d'un énoncé similaire du côté espace de Drinfeld, ce qui dépasse le cadre de ce texte. Par ailleurs la preuve de la conjecture de monodromie-poids version cohomologique demande une étude des Π^{∞} -parties des divers groupes de cohomologie, pour Π automorphe vérifiant $\mathrm{Hyp}(\infty)$ et tel que $\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$. La $\Pi^{\infty,v}$ -partie de la cohomologie de la fibre générique n'est pas a priori connue. On se propose dans un premier temps de la calculer, ou tout du moins les bouts de poids $s(g-1)$, le cas général étant traité, de manière indépendante, à la proposition (11.1).

On calcule tout d'abord, proposition (10.3.4), les $\Pi^{\infty,v}$ -parties des groupes de cohomologie des faisceaux pervers d'Harris-Taylor. On en déduit alors, corollaire (10.3.5), la connaissance des $\Pi^{\infty,v}$ -parties de poids $s(g-1)$ des groupes de cohomologie de la fibre générique. Pour ce faire on utilise le théorème de Lefschetz difficile. On étudie alors, proposition (10.3.11), les $\Pi^{\infty,v}$ -parties des termes $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale des cycles évanescents. On montre, qu'à travers les suites spectrales associées à la stratification, qu'en ce qui concerne les bouts de poids $s(g-1)$, seule la strate supersingulière contribue de sorte que l'on se retrouve dans une situation similaire à celle de [2] dans le cas cuspidal, où les bouts de poids $s(g-1)$ des $E_2^{p,q}[\Pi^{\infty,v}]$ sont nuls pour $p \neq 0$. Cette constatation découle du contrôle, lemme (10.3.13), des contributions des strates non supersingulières. La proposition (9.1.1), découle alors directement de la connaissance des $\Pi^{\infty,v}$ -parties de l'aboutissement de la suite spectrale des cycles évanescents et du fait qu'en ce qui concerne celles de poids $s(g-1)$, celles-ci ne proviennent que des points supersinguliers.

0.18. — *La quatrième partie* donne des compléments et applications des résultats précédents. On commence, proposition (11.1), par calculer les $\Pi^{\infty,v}$ -parties des groupes de cohomologie de la fibre générique pour Π automorphe tel que $\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$, alors que nous n'avions traité, corollaire (10.3.5), que celles de poids $s(g-1)$.

On donne ensuite une correspondance de Jacquet-Langlands globale qui complète les résultats de [7] §3. On décrit ensuite, proposition (13.1), les composantes locales des représentations automorphes et cohomologiques de $G_{\tau}(\mathbb{A})$.

On conclut enfin, théorème (14.1), par la preuve de la conjecture de monodromie-poids globale, i.e. les gradués de la filtration de monodromie des groupes de cohomologie de la fibre générique sont purs.

0.19. — Enfin dans *cinquième partie*, on récapitule les différents résultats obtenus tout au long du texte et dans *sixième* on illustre par des figures les différentes suites spectrales étudiées.

Remerciements Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers Gérard Laumon pour son soutien constant tout au long de ces années ainsi que pour sa perspicacité à dépister les fausses bonnes idées et à mettre en avant les autres. Merci aussi à Laurent Fargues de m'avoir fourni une bonne notion de monodromie locale qui m'a permis de simplifier grandement les preuves; un deuxième merci pour ses nombreuses explications sur les variétés de Shimura et les groupes unitaires. J'adresse des remerciements à Jean-François Dat pour m'avoir fourni l'habillage catégoriel des faisceaux de Hecke ainsi que pour ses nombreux conseils. Enfin je remercie Michael Harris pour son aide ainsi que l'IHES pour son accueil.

PARTIE I

NOTATIONS ET RAPPELS

1. Rappels sur les représentations de $GL_d(F_v)$

Tous les énoncés ainsi que leur preuve peuvent être trouvés dans [17].

1.1. Induites paraboliques. —

1.1.1. Définition. — Pour une suite $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_k = d$, on note P_{r_1, r_2, \dots, r_k} le sous-groupe parabolique de GL_d standard associé au sous-groupe de Levi $GL_{r_1}(F_v) \times GL_{r_2-r_1}(F_v) \times \dots \times GL_{r_k-r_{k-1}}(F_v)$ et on note N_{r_1, \dots, r_k} son radical unipotent.

1.1.2 — Soient π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{n_1}(F_v)$ et $GL_{n_2}(F_v)$; on note selon la coutume, $\pi_1 \times \pi_2$ l'induite parabolique $\text{Ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(F_v)}^{GL_{n_1+n_2}(F_v)} \pi_1(n_2/2) \otimes \pi_2(-n_1/2)$.
Remarque : Le symbole \times est associatif, i.e. $\pi_1 \times (\pi_2 \times \pi_3) = (\pi_1 \times \pi_2) \times \pi_3$ que l'on notera donc $\pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3$.

1.1.3. Définitions. — Soit g un diviseur de $d = sg$ et π_v une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_v)$:

- les sous-quotients irréductibles de $V(\pi_v, s) := \pi_v(\frac{1-s}{2}) \times \pi_v(\frac{3-s}{2}) \times \dots \times \pi_v(\frac{s-1}{2})$ seront dits elliptiques de type π_v ;

- $V(\pi_v, s)$ possède un unique quotient (resp. sous-espace) irréductible que l'on notera $\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ (resp. $\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v}$); c'est une représentation de Steinberg (resp. de Speh) généralisée notée habituellement $\mathrm{Sp}_s(\pi_v)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$);

- pour π_1 et π_2 des représentations respectivement de $GL_{t_1g}(F_v)$ et $GL_{t_2g}(F_v)$, on notera $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ (resp. $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$) l'induite parabolique $\pi_1(-t_2/2) \times \pi_2(t_1/2)$ (resp. $\pi_1(t_2/2) \times \pi_2(-t_1/2)$).

La propriété habituelle de transitivité des induites paraboliques donne le lemme suivant.

1.1.4. Lemme. — Pour $(\pi_i)_{1 \leq i \leq 3}$ des représentations de $GL_{t_i g}(F_v)$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2)^\vee &\simeq \pi_1^\vee \overleftarrow{\times} \pi_2^\vee \\ (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2) \overrightarrow{\times}_g \pi_3 &= \pi_1 \overrightarrow{\times} (\pi_2 \overrightarrow{\times} \pi_3) \\ (\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2) \overleftarrow{\times}_g \pi_3 &= \pi_1 \overleftarrow{\times} (\pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3) \end{aligned}$$

En outre si π_1 et π_2 sont elliptiques de type π_v , il en est de même de $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ et donc de $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$.

Remarque : Si π_1, π_2 et π_3 sont des représentations elliptiques de type π_v on a en outre

$$\pi_1 \overrightarrow{\times} (\pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3) = \pi_2 \overleftarrow{\times} (\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_3)$$

En effet d'après [17], on sait que $\pi_1 \times \pi_2 \simeq \pi_2 \times \pi_1$ si les supports cuspidaux de π_1 et π_2 sont disjoints ⁽²⁾.

1.1.5. Proposition-Définition. — Pour g un diviseur de $d = sg$ et π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on a pour $1 \leq t \leq s$:

- $\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}$ (resp. $\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}$) est de longueur 2; on notera $\overrightarrow{[t-1, s-t]}_{\pi_v}$, (resp. $\overleftarrow{[t, s-t-1]}_{\pi_v}$) son unique sous-espace irréductible, et $\overleftarrow{[t, s-t-1]}_{\pi_v}$ (resp. $\overrightarrow{[t-1, s-t]}_{\pi_v}$) son unique quotient irréductible;
- par dualité $\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}$ (resp. $\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}$) est de longueur 2 avec $\overleftarrow{[s-t-1, t]}_{\pi_v}$ (resp. $\overrightarrow{[s-t, t-1]}_{\pi_v}$) pour unique sous-espace irréductible et $\overrightarrow{[s-t, t-1]}_{\pi_v}$ (resp. $\overleftarrow{[s-t-1, t]}_{\pi_v}$) pour unique quotient irréductible;
- on notera $[\pi]$ (resp. $[\pi]$) l'unique, s'il existe, sous-espace (resp. quotient) irréductible de π . Pour π_1 et π_2 des représentations irréductibles elliptiques de type π_v , $\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2$ et $\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2$ ont un unique sous-espace et un unique quotient irréductible et on a :

$$[\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2] = [\pi_2^\vee \overleftarrow{\times} \pi_1^\vee]^\vee \quad [\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2] = [\pi_2^\vee \overrightarrow{\times} \pi_1^\vee]^\vee$$

⁽²⁾En fait loc. cit. donne un critère plus précis; dans le cas où π_1 et π_2 sont irréductibles, il faut et il suffit que leurs supports cuspidaux ne soient pas liés.

Pour π_3 une troisième représentation irréductible elliptique de type π_v , on a

$$\begin{aligned} [[\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2] \overrightarrow{\times} \pi_3] &= [\pi_1 \overrightarrow{\times} [\pi_2 \overrightarrow{\times} \pi_3]] = [\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2 \overrightarrow{\times} \pi_3] \\ [[\pi_1 \overrightarrow{\times} \pi_2] \overleftarrow{\times} \pi_3] &= [\pi_1 \overleftarrow{\times} [\pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3]] = [\pi_1 \overleftarrow{\times} \pi_2 \overleftarrow{\times} \pi_3] \end{aligned}$$

- Soient $r \geq 1$ et $\Gamma^s = (a_i, \epsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$ tel que les a_i sont des entiers strictement positifs avec $s-1 = a_1 + \dots + a_r$ et $\epsilon_i = \pm 1$; on notera Γ^s sous la forme $(\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r)$ où pour tout i la flèche au dessus de a_i est \overleftarrow{a}_i (resp. \overrightarrow{a}_i) si $\epsilon_i = -1$ (resp. $\epsilon_i = 1$). On associe à Γ^s un sous-quotient irréductible $[\Gamma^s]$ de $V(s, \pi_v)$ que l'on note aussi sous la forme $[\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r]_{\pi_v}$. On convient par ailleurs des égalités suivantes :

$$[\dots, \overleftarrow{a}, \overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_v} = [\dots, \overleftarrow{a+b}, \dots]_{\pi_v} \quad [\dots, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \dots]_{\pi_v} = [\dots, \overrightarrow{a+b}, \dots]_{\pi_v}$$

D'après [17], on obtient alors une bijection, modulo les identifications ci-dessus, entre les sous-quotients irréductibles de $V(s, \pi_v)$ et l'ensemble des $[\Gamma^s]$ telle que l'on ait les relations suivantes, où \overleftarrow{c} désigne arbitrairement \overleftarrow{c} ou \overrightarrow{c} :

$$\begin{aligned} [\dots, \overleftarrow{a}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_v} &= [\dots, \overleftarrow{a}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_v} \\ [\dots, \overleftarrow{a}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_v} &= [\dots, \overleftarrow{a}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{b}, \dots]_{\pi_v} \\ [\dots, \overleftarrow{a}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{b}, \dots]_{\pi_v} &= [\dots, \overleftarrow{b}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{a}, \dots]_{\pi_v} \\ [\dots, \overleftarrow{a}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{b}, \dots]_{\pi_v} &= [\dots, \overleftarrow{b}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{a}, \dots]_{\pi_v} \end{aligned}$$

1.1.6 — Dans [17], $(\overleftarrow{a}_1, \dots, \overrightarrow{a}_r)$ est représenté sous la forme $\circ \xrightarrow{\frac{1-s}{2}} \circ \dots \circ \xleftarrow{\dots} \circ \xrightarrow{\frac{s-1}{2}}$ où les a_1 premières flèches vont dans le sens de la flèche au dessus de a_1 , les a_2 suivantes dans le sens de la flèche au dessus de a_2 ... Ainsi graphiquement on a

$$\begin{aligned} [\Gamma_1^{s_1}] \overrightarrow{\times} [\Gamma_2^{s_2}] &= \overbrace{\circ \xleftarrow{\dots} \circ \dots \rightarrow \circ}^{\Gamma_1^{s_1}} \longleftrightarrow \overbrace{\circ \rightarrow \circ \dots \rightarrow \circ}^{\Gamma_2^{s_2}}, \\ [\Gamma_1^{s_1}] \overleftarrow{\times} [\Gamma_2^{s_2}] &= \overbrace{\circ \xleftarrow{\dots} \circ \dots \rightarrow \circ}^{\Gamma_2^{s_2}} \longleftrightarrow \overbrace{\circ \rightarrow \circ \dots \rightarrow \circ}^{\Gamma_1^{s_1}} \end{aligned}$$

1.1.7 — Exemples : la représentation cuspidale irréductible π_v de $GL_q(F_v)$ étant fixé, avec nos notations, on a :

$$\begin{aligned} \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v} &= \overbrace{[[\overrightarrow{0}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} \dots \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{0}]_{\pi_v}]}^s = \overbrace{[[\overleftarrow{0}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \dots \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_v}]}^s \\ \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v} &= \overbrace{[[\overleftarrow{0}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \dots \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_v}]}^s = \overbrace{[[\overrightarrow{0}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} \dots \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{0}]_{\pi_v}]}^s \\ \overleftarrow{[t-1, s-t]}_{\pi_v} &= \overbrace{[[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [s-t-1]_{\pi_v}]}^s = \overbrace{[[\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [s-t]_{\pi_v}]}^s \\ &= \overbrace{[[s-t-1]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [t-1]_{\pi_v}]}^s = \overbrace{[[s-t]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [t-2]_{\pi_v}]}^s \end{aligned}$$

Notation : Dans la suite $\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ désignera une représentation elliptique quelconque de type π_v de $GL_{sg}(F_v)$.

1.2. Foncteur de Jacquet. — Soit $P = MN$ un parabolique de GL_d de Lévi M et de radical unipotent N .

1.2.1. Définition. — Pour π une représentation admissible de $GL_d(F_v)$, l'espace des vecteurs $N(F_v)$ -coinvariants est stable sous l'action de $M(F_v) \simeq P(F_v)/N(F_v)$. On notera $J_N(\pi)$ cette représentation tordue par $\delta_P^{-1/2}$.

1.2.2. Lemme. — Soit g un diviseur de $d = sg$ et π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. Pour $1 \leq h \leq d$, le foncteur de Jacquet vérifie les propriétés suivantes :

– si g ne divise pas h , alors

$$J_{N_{h,d}^{op}}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) = J_{N_{h,d}^{op}}([\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}) = J_{N_{h,d}}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) = J_{N_{h,d}}([\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}) = (0)$$

– si $h = tg$ alors

$$J_{N_{tg,sg}}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v((s-t)/2)} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v(-t/2)}$$

$$J_{N_{tg,sg}}([\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}) = [\overrightarrow{t-1}]_{\pi_v((t-s)/2)} \otimes [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v(t/2)}$$

$$J_{N_{tg,sg}^{op}}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v((t-s)/2)} \otimes [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v(t/2)}$$

$$J_{N_{tg,sg}^{op}}([\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}) = [\overrightarrow{t-1}]_{\pi_v((s-t)/2)} \otimes [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v(-t/2)}$$

Démonstration. — soit $\Gamma = (a_i, \epsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$, les résultats découlent alors des propriétés suivantes que l'on trouve dans [17] :

- $J_{N_{g,2g,\dots,sg}^{op}}([\Gamma^s])$ est de la forme $\pi_v(\frac{1-s}{2} + \sigma(0)) \otimes \dots \otimes \pi_v(\frac{1-s}{2} + \sigma(s-1))$ où σ est une permutation de l'ensemble $\{0, \dots, s-1\}$ soumise à la règle suivante : soit $1 \leq i \leq r$ avec $\epsilon_i = 1$ (resp. $\epsilon_i = -1$) : pour tout $a_1 + \dots + a_{i-1} \leq r < r' \leq a_1 + \dots + a_i$ alors $\sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(r')$ (resp. $\sigma^{-1}(r) > \sigma^{-1}(r')$).⁽³⁾

- en ce qui concerne $J_{N_{g,2g,\dots,sg}}([\Gamma^s])$ la règle est inversée, i.e. $\sigma^{-1}(r) > \sigma^{-1}(r')$ (resp. $\sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(r')$).

□

2. Rappels des données géométriques

Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p , on note \mathcal{O}_K son anneau des entiers, \mathcal{P}_K l'idéal maximal et $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ le corps résiduel de cardinal $q = p^f$. On notera aussi ϖ_K une uniformisante. L'extension maximale non ramifiée de K sera notée K^{nr} de complété \hat{K}^{nr} , d'anneau des entiers respectifs $\mathcal{O}_{K^{nr}}$ et $\mathcal{O}_{\hat{K}^{nr}}$.

⁽³⁾Autrement dit σ est compatible aux orientations des flèches.

2.1. Définitions. — - Soit $\text{Art}_K^{-1} : W_K \longrightarrow K^\times$ le morphisme de la théorie du corps de classe qui envoie les frobenius géométriques Fr du groupe de Weil W_K de K sur les uniformisantes, i.e. $\text{val}(\text{Art}_K^{-1}(\text{Fr})) = -1$. Pour $c \in W_K$, on notera $\text{deg}(c) := \text{val}(\text{Art}_K^{-1}(c))$.

- Étant donné une représentation σ (resp. π) de W_K (resp. de $GL_d(K)$) et un entier r , on notera $\sigma(r)$ (resp. $\pi(r)$) la représentation $\sigma \otimes |\text{Art}_K^{-1}|^r$ (resp. $\pi \otimes |\det|^r$).

2.1. Le modèle local de Deligne-Carayol. — On considère dans la suite la définition restrictive suivante de \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate, cf. par exemple [6] II.1.

2.1.1. Définition. — Soit S un \mathcal{O}_K -schéma dans lequel p est localement nilpotent. Un \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate sur S , est un groupe de Barsotti-Tate H/S muni d'une injection $i : \mathcal{O}_K \hookrightarrow \text{End}(H)$ vérifiant la propriété suivante. L'algèbre de Lie de H , $\text{Lie}(H)$, est un faisceau localement libre sur S muni de deux actions de \mathcal{O}_K définies soit par i soit par le morphisme structural $\mathcal{O}_K \rightarrow \mathcal{O}_S$; on demande alors que ces deux actions coïncident et que $\text{Lie}(H)$ soit de dimension 1.

2.1.2 — On rappelle alors les propriétés suivantes issues de la conjonction des propriétés générales sur les groupes de Barsotti-Tate et de la théorie des modules elliptiques de Drinfeld :

- pour tout $d \geq 1$, il existe un unique \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate formel $\Sigma_{K,d}$ sur $\bar{\kappa}$ de hauteur d caractérisé par les propriétés suivantes sur une loi de groupe F et sa structure de \mathcal{O}_K -module $x \in \mathcal{O}_K \mapsto \varphi_x(X) \in \bar{\kappa}[[X]] : F(X, Y) \equiv X + Y \pmod{(X, Y)^{q^d}}$, $\varphi_{\varpi_K}(X) = X^{q^d}$ et $\varphi_{\{a\}}(X) \equiv aX \pmod{X^{q^d}}$, pour tout $a \in \kappa$ où $\{a\} \in \mathcal{O}_K$ désigne le représentant de Teichmüller de a .
- tout \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate sur $\bar{\kappa}$ est de la forme $\Sigma_{K,g} \times (K/\mathcal{O}_K)^h$.

2.1.3. Proposition. — (cf. [6]) Soit S un schéma localement noethérien sur lequel p est localement nilpotent et soit H/S un \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate. Alors pour tout $h \geq 0$, il existe un sous-schéma fermé réduit $S^{[h]}$ de S tel que :

- $S^{[h-1]} \subset S^{[h]}$ et la codimension de toute composante de $S^{[h-1]}$ dans $S^{[h]}$ est au plus 1 ;
- pour tout point géométrique s de S , s appartient à $S^{[h]}$ si et seulement si $\sharp H[p](\kappa^{\text{sep}}(s)) \leq p^{[K:\mathbb{Q}_p]h}$;
- sur $S^{(h)} := S^{[h]} - S^{[h-1]}$, on a une suite exacte courte de \mathcal{O}_K -modules de Barsotti-Tate $0 \rightarrow H^0 \rightarrow H \rightarrow H^{\text{ét}} \rightarrow 0$ où H^0 est formel et $H^{\text{ét}}$ est ind-étale de hauteur h .

2.1.4. Définition. — Soit C la catégorie des \mathcal{O}_K -algèbres locales, artiniennes, de corps résiduel $\bar{\kappa}$. Pour un objet R de C , une déformation sur R d'un \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate H_0/κ est un couple (H, f) où H est un \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate sur R et $f : H_0 \xrightarrow{\sim} H \times_R \bar{\kappa}$.

2.1.5. Proposition. — (cf. [4]) Le foncteur qui à un objet R de C associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations sur R de $\Sigma_{K,d}$ est pro-représentable par un anneau local complet noethérien $R_{K,d}$ de corps résiduel $\bar{\kappa}$. En outre il existe un isomorphisme

$$R_{K,d} \simeq \mathcal{O}_{\hat{K}^{nr}}[[T_1, \dots, T_{d-1}]]$$

tel que la déformation universelle $(\widetilde{\Sigma}_{K,d}, \tilde{f})$ sur $R_{K,d}$ est caractérisée par les propriétés suivantes sur une loi de groupe formel F et sa structure de \mathcal{O}_K -module $x \mapsto \varphi_x$:

- $F(X, Y) \equiv X + Y \pmod{(X, Y)^q}$;
- $\varphi_{\varpi_K}(X) \equiv \varpi_K u_0 X + T_1 u_1 X^q + \dots + T_{d-1} u_{d-1} X^{q^{d-1}} + u_d X^{q^d}$, où u_1, \dots, u_d sont des unités de $\mathcal{O}_{\hat{K}^{nr}}[[T_1, \dots, T_{d-1}]][[X]]^\times$, cf. [13] p106 ;
- $\varphi_{\{a\}}(X) \equiv aX \pmod{X^2}$ pour tout $a \in \kappa$.

2.1.6. Définition. — Une structure de niveau n sur un \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate H/S de hauteur constante h sur un schéma S , est un morphisme de \mathcal{O}_K -modules :

$$\iota_n : (\mathcal{P}_K^{-n}/\mathcal{O}_K)^d \longrightarrow H[\mathcal{P}_K^n](S)$$

tel que $\{\iota_n(x) : x \in (\mathcal{P}_K^{-n}/\mathcal{O}_K)^d\}$ soit un système complet de section de la \mathcal{P}_K^n -torsion de H/S .

2.1.7. Proposition. — (cf. [6]) Soit H/S un \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate de hauteur constante h sur S connexe et tel que l'on ait une suite exacte courte de \mathcal{O}_K -module de Barsotti-Tate :

$$0 \rightarrow H^0 \longrightarrow H \longrightarrow H^{et} \rightarrow 0$$

avec H^0 formel et H^{et} ind-étale. Un morphisme $\iota_m : (\mathcal{P}_K^{-m}/\mathcal{O}_K)^h \longrightarrow H[\mathcal{P}_K^m](S)$ est alors une structure de niveau de Drinfeld si et seulement s'il existe un facteur direct M de $(\mathcal{P}_K^{-m}/\mathcal{O}_K)^h$ tel que :

- $\iota_{m,|M} : M \longrightarrow H^0[\mathcal{P}_K^m](S)$ est une structure de niveau de Drinfeld ;
- ι_m induit un isomorphisme de S -schémas en groupes $\iota_m^{et} : ((\mathcal{P}_K^{-m}/\mathcal{O}_K)^h / M)_S \longrightarrow H^{et}[\mathcal{P}_K^m]$.

2.1.8. Proposition. — (cf. [4]) Le foncteur qui à un objet R de C associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des déformations sur R de $\Sigma_{K,d}$ munies d'une structure de niveau n est pro-représentable par un anneau local complet, noethérien, régulier $R_{K,d,n}$ de corps résiduel $\bar{\kappa}$ tel que, en notant $\tilde{\iota}_n$ la structure de niveau universelle sur $R_{K,d,n}$, e_1, \dots, e_d la base canonique du $\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n$ -module $(\mathcal{P}_K^{-n}/\mathcal{O}_K)^d$, et X un paramètre de $\widetilde{\Sigma}_{K,d}/R_{K,d}$, alors les $X(\tilde{\iota}_n(e_i))$ forment un système de paramètres locaux de $R_{K,d,n}$.

2.1.9. Définition. — Soit $\Psi_{K,l,d,n}^i$ le $\bar{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel de dimension finie associé, via la théorie des cycles évanescents de Berkovich, au morphisme structural $\mathrm{Spf} R_{K,d,n} \longrightarrow \mathrm{Spf} \hat{\mathcal{O}}_K^{nr}$.

2.1.10 — Cet espace vectoriel est muni entre autre d'une action de $GL_d(\mathcal{O}_K)$ qui se factorise par le morphisme surjectif naturel $GL_d(\mathcal{O}_K) \longrightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K^n)$ et on pose $\Psi_{K,l,d}^i = \varinjlim \Psi_{K,l,d,n}^i$ de sorte que pour $\mathfrak{K}_n := \text{Ker}(GL_d(\mathcal{O}_K) \longrightarrow GL_d(\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K^n))$, $\Psi_{K,l,d,n}^i = (\Psi_{K,l,d}^i)^{\mathfrak{K}_n}$. On introduit le groupe \mathcal{N}_K (resp. \mathcal{N}'_K) défini comme le noyau de

$$(g, \delta, c) \in GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times W_K \mapsto \text{val}(\det(g^{-1})\text{rn}(\delta)) \text{Art}_K^{-1}(c) \in \mathbb{Z}$$

(resp. composé avec la projection canonique $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$), où $D_{K,d}$ est l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$ et d'ordre maximal $\mathcal{D}_{K,d}$.

2.1.11 — Pour ξ un caractère d'ordre fini de K^\times , on note $\Psi_{K,l,d,\xi}^i$ la ξ^l -composante isotypique où ξ^l est la restriction de ξ à \mathcal{O}_K^\times . Ainsi $\Psi_{K,l,d,\xi}^i$ (resp. $\Psi_{K,l,d}^i$) est muni d'une action de \mathcal{N}'_K (resp. de \mathcal{N}_K).

2.1.12 — Dans la définition de $R_{K,d,n}$, il est agréable de considérer plutôt les déformations par quasi-isogénies ce qui donne un schéma formel $\text{Spf } R_{K,d,n,\mathbb{Z}} \simeq \coprod_{\mathbb{Z}} \text{Spf } R_{K,d,n}$ de sorte que la construction précédente fourni des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espaces vectoriels $\mathcal{U}_{K,l,d,n}^i \simeq (\mathcal{U}_{K,l,d}^i)^{\mathfrak{K}_n}$ où

$$\mathcal{U}_{K,l,d,\xi}^i \simeq \text{Ind}_{\mathcal{N}_K}^{GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times W_K} \Psi_{K,l,d,\xi}^i$$

est une représentation de $GL_d(K) \times D_{K,d}^\times \times W_K$.

Pour toute représentation admissible irréductible τ de $D_{K,d}^\times$ de caractère central ξ , la réciprocity de Frobenius donne que la composante isotypique $\mathcal{U}_{K,l,d,\xi}^i(\tau_v)$ est isomorphe à $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}(\text{res}_{\mathcal{D}_{K,d}^\times}^{D_{K,d}^\times} \tau, \Psi_{K,l,d,\xi^{-1}}^i)$ où l'action de (g^c, σ) est donnée par celle de $(g, \delta, \sigma) \in \mathcal{N}'_K$ pour $\delta \in D_{K,d}^\times$ quelconque.

2.2. Variétés de Shimura simples et systèmes locaux. — Commençons par introduire les variétés de Shimura simples associées à des groupes unitaires telles qu'elles sont définies dans [6].

2.2.1 — Soit tout d'abord une donnée de type PEL $(F, B, *, V, \langle, \rangle)$ définie comme suit :

- soit E une extension quadratique imaginaire pure de \mathbb{Q} dans laquelle p se décompose en u et u^c où $c \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ désigne la conjugaison complexe. Soit alors F^+ une extension totalement réelle de \mathbb{Q} de degré e dont on fixe un plongement $\tau : F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. On pose alors $F = F^+E$ et on note $v = v_1, \dots, v_r$ les places de F au dessus de u ; F_v désigne alors le complété du localisé en v de F , d'anneau des entiers \mathcal{O}_v et de corps résiduel $\kappa(v) \simeq \kappa_q$ avec $q = p^{f_1}$.
- B est une algèbre à division centrale sur F de dimension d^2 telle que :
 - $\dim_F B = d^2$;
 - son algèbre opposée B^{op} est isomorphe à $B \otimes_{E,c} E$; soit alors une involution positive de seconde espèce $*$ sur B , i.e. $*$: $B \longrightarrow B^{op}$ est telle que $*|_E = c$ et $\text{Tr}(xx^*) > 0$ pour tout $x \in B$.

- à toute place x de F , B_x est soit décomposée soit une algèbre à division ;
 - B est décomposée en v ;
 - si d est pair alors le nombre de places de F^+ au dessus desquelles B est ramifiée est congru à $1 + \frac{n}{2}[F^+/\mathbb{Q}] \pmod{2}$.
- V est le $B \otimes B^{op}$ -module sous-jacent à B . Un accouplement alterné $(,): V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}$ (resp. $(V \otimes \mathbb{A}^\infty) \times (V \otimes \mathbb{A}^\infty) \longrightarrow \mathbb{A}^\infty$) *-hermitien pour l'action de B sur V est de la forme

$$(x_1, x_2)_\beta = \text{Tr}_{B/\mathbb{Q}}(x_1 \beta x_2^*)$$

pour $\beta \in B^{*-1}$ (resp. $B^{*-1} \otimes \mathbb{A}^\infty$). On définit alors une involution de seconde espèce \sharp_β sur B (resp. $B \otimes \mathbb{A}^\infty$) définie par

$$((b_1 \otimes b_2)x, y) = (x, (b_1^* \otimes b_2^\sharp)y)$$

et on note G_β/\mathbb{Q} (resp. $G_\beta/\mathbb{A}^\infty$) le groupe algébrique dont les R -points, pour toute \mathbb{Q} -algèbre (resp. \mathbb{A}^∞ -algèbre) R est l'ensemble des paires

$$(\lambda, g) \in R^\times \times (B^{op} \otimes R)^\times$$

telles que $gg^{\sharp_\beta} = \lambda$. On note alors $G_{\beta,1}$ le noyau du morphisme $\nu: G_\beta \longrightarrow \mathbb{G}_m$ qui envoie (λ, g) sur λ .

2.2.2 — Pour $i = 1, \dots, r$, on pose $\Lambda_i = \mathcal{O}_{B_{v_i}} \subset V_{v_i}$ et on note Λ_i^\vee son dual dans $V_{v_i}^\vee$ de sorte que $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^r \Lambda_i \oplus \bigoplus_{i=1}^r \Lambda_i^\vee \subset V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est un \mathbb{Z}_p -réseau de $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ sur lequel l'accouplement de V se restreint en un \mathbb{Z}_p -accouplement. En outre comme $B_v \simeq \mathbb{M}_d(F_v)$, en notant ϵ_1 l'idempotent de B_v associé au premier vecteur de la base canonique, on a $\Lambda_{1,1} := \epsilon_1 \Lambda_1 \simeq (\mathcal{O}_v^\vee)^d$.

2.2.3 — *Hypothèse supplémentaire* : soit $\sigma: F^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$, on choisit alors, ce qui est possible, β tel que

$$G_{1,\sigma}(\mathbb{R}) = \begin{cases} U(1, d-1) & \text{si } \sigma = \tau \\ U(0, d) & \text{si } \sigma \neq \tau \end{cases}$$

2.2.4 — A τ est associé une extension

$$(\cdot)_\tau: (V \otimes \mathbb{A}) \times (V \otimes \mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

ayant pour invariants $(1, n-1)$ en τ et $(0, n)$ à toutes les autres places infinies. On note G_τ le groupe des similitudes associé qui ne dépend que de τ et pas du choix de β bien qu'il y ait $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)$ choix possibles où $\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)$ désigne le sous-ensemble de $H^1(\mathbb{Q}, G_\tau)$ constitué des éléments qui deviennent triviaux dans $H^1(\mathbb{Q}_{p'}, G_\tau)$ pour toute place p' de \mathbb{Q} .

2.2.5. Remarque. — - On notera que si d est pair alors $\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)$ est nul tandis que pour d impair on a

$$\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) = \text{Ker} \left((F^+)^\times / \mathbb{Q}^\times N_{F/F^+}(F^\times) \longrightarrow \mathbb{A}_{F^+}^\times / \mathbb{A}^\times N_{F^+/F}(\mathbb{A}_F^\times) \right)$$

Par ailleurs, cf. [11] §7, pour n impair l'application $\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, Z_{G_\tau}) \longrightarrow \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)$ est bijective de sorte que toutes les formes intérieures de G_τ isomorphes à G_τ partout localement, sont en fait isomorphes à G .

- On a $G_\tau(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p) \simeq (\mathbb{Q}_p)^\times \times \prod_{i=1}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ et le stabilisateur de $\Lambda \subset V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ est alors sous cet isomorphisme, identifié à $\mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times$.

2.2.6 — Soit U^p un sous-groupe compact de $G(\mathbb{A}^{\infty,p})$ et $m = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$. On pose

$$U^p(m) = U^p \times \mathbb{Z}_p^\times \times \prod_{i=1}^r \text{Ker}(\mathcal{O}_{B_{v_i}}^\times \longrightarrow (\mathcal{O}_{B_{v_i}}/v_i^{m_i})^\times)$$

On considère alors $\mathcal{X}_{U^p(m)}$ le foncteur de la catégorie des paires (S, s) où S est un \mathcal{O}_v -schéma connexe localement noethérien et s est un point géométrique de S , tel que $X_{U^p(m)}(S, s)$ est l'ensemble des classes d'équivalence des $(r+4)$ -uplets $(A, \lambda, i, \bar{\mu}^p, \iota_{1,m_1}, \dots, \iota_{r,m_r})$ où :

- A est une variété abélienne sur S de dimension ed^2 ;
- $\lambda : A \longrightarrow A^\vee$ est une polarisation;
- $i : B \hookrightarrow \text{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est telle que (A, i) est compatible au sens de [6] lemme IV.1.2 p94 et $\lambda \circ i(b^*) = i(b)^\vee \circ \lambda$ pour tout $b \in B$;
- $\bar{\mu}^p$ est une U^p -orbite $\pi_1(S, s)$ -invariante d'isomorphismes de $B \otimes \mathbb{A}^{\infty,p}$ -modules $\mu^p : V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^{\infty,p} \longrightarrow V^p A_s$ qui envoie l'accouplement \langle, \rangle de $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}^{\infty,p}$ sur un $(\mathbb{A}^{\infty,p})^\times$ -multiple de l'accouplement de Weil associé à λ ;
- $\iota_{1,m_1} : v_1^{-m_1} \Lambda_{1,1}/\Lambda_{1,1} \longrightarrow \epsilon_1 A[v_1^{m_1}](S)$ est une structure de niveau de Drinfeld;
- pour tout $i = 2, \dots, r$, $\iota_{i,m_i} : (v_i^{-m_i} \Lambda_i/\Lambda_i)_S \longrightarrow A[v_i^{m_i}]$ est un isomorphisme de S -schémas munis d'une action de \mathcal{O}_B .

Deux $(r+4)$ -uplets $(A, \lambda, i, \bar{\mu}, \iota_{i,m_i})$ et $(A', \lambda', i', \bar{\mu}', \iota'_{i,m_i})$ sont équivalents s'il existe une isogénie $\beta : A \longrightarrow A'$ qui envoie λ sur un \mathbb{Q}^\times -multiple de λ' , i sur i' , $\bar{\mu}$ sur $\bar{\mu}'$ et ι_{i,m_i} sur ι'_{i,m_i} .

2.2.7 — *Remarque* : Si s' est un autre point géométrique de S alors $\mathcal{X}_{U^p(m)}(S, s)$ est canoniquement en bijection avec $X_U(S, s')$ de sorte que l'on peut considérer $\mathcal{X}_{U^p(m)}$ comme un foncteur sur les \mathcal{O}_v -schémas localement noethérien en posant $\mathcal{X}_{U^p(m)}(\coprod_i S_i) = \prod_i \mathcal{X}_{U^p(m)}(S_i)$ où les S_i sont connexes.

2.2.8. Proposition. — *Si U^p est suffisamment petit⁽⁴⁾, alors $\mathcal{X}_{U^p(m)}$ est représenté par un schéma projectif sur $\text{Spec } \mathcal{O}_v$ que l'on notera $X_{U^p(m)}$ et que l'on appelle la variété de Shimura de niveau U .*

Remarque : Soit $h : \mathbb{C} \longrightarrow \text{End}_B(V)_{\mathbb{R}}$ le morphisme d'algèbres à involutions où $\text{End}_B(V)$ est munie de l'adjonction par rapport à la forme symplectique \langle, \rangle et \mathbb{C} de la conjugaison

⁽⁴⁾s'il existe un premier x de \mathbb{Q} tel que l'image de U^p dans $G(\mathbb{Q}_x)$ ne contient aucun élément non trivial d'ordre fini

complexe, définit par $h(z) := (z, \bar{z}, \dots, \bar{z}) \times (\bar{z}, \dots, \bar{z}) \times \dots \times (\bar{z}, \dots, \bar{z}) \in G_{1, \mathbb{R}}$. On note X la classe de $G_\tau(\mathbb{R})$ -conjugaison de h de sorte que X s'identifie à l'espace symétrique hermitien $G_\tau(\mathbb{R})/K_\infty$ où K_∞ , un sous-groupe compact maximal modulo le centre de $G_\tau(\mathbb{R})$, est le centralisateur dans le groupe de Lie $G_\tau(\mathbb{R})$. La variété de Shimura $X_{U^p(m)}$ n'est pas en général associée à la donnée de Shimura (G, X) , on a en fait la décomposition suivante définie sur F , cf. [11] §8 :

$$X_{U^p(m)} = \coprod_{\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G)} \text{Sh}_{U^p(m)}(G', X)$$

où G' parcourt les formes intérieures de G_τ isomorphes à G_τ partout localement et où $\text{Sh}_{U^p(m)}(G', X)$ désigne le modèle canonique sur F de la variété de Shimura associée à la donnée de Shimura (G', X) . Ainsi d'après le remarque (2.2.5), on a $X_{U^p(m)} = \text{Sh}_{U^p(m)}(G_\tau, X)^{\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)}$.

Propriété 1 : *quand U varie, les $X_{U^p(m)}$ forment un système projectif de schémas projectif sur \mathcal{O}_v dont les morphismes de transition sont finis et plats : quand $m_1 = m'_1$ ils sont en plus étales.*

Propriété 2 : *le système projectif $(X_{U^p(m)})_{U^p, m}$ est naturellement muni d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty)$.*

2.2.9 — Soit U^p un sous-groupe compact suffisamment petit de $G(\mathbb{A}^{\infty, p})$. On note $\overline{X}_{U^p, m}$ la fibre spéciale de $X_{U^p(m)}$ et soit \mathcal{A} la variété abélienne universelle sur \overline{X}_U naturellement munie d'une action de \mathcal{O}_B ce qui donne donc une action de $\mathcal{O}_{B, p}$ sur $\mathcal{A}[p^\infty]$ qui se décompose alors sous la forme

$$\mathcal{A}[p^\infty] = \prod_{i=1}^r \mathcal{A}[v_i^\infty] \times \prod_{i=1}^r \mathcal{A}[v_i^{c\infty}]$$

Ainsi $\mathcal{G} := \epsilon \mathcal{A}[v^\infty]$ est un \mathcal{O}_v -module de Barsotti-Tate compatible de dimension 1 et de hauteur d sur $\overline{X}_{U^p, m}$ et les groupes de Barsotti-Tate $\mathcal{A}[v_i^\infty]$ sont ind-étales pour $i > 1$.

2.2.10. Définition. — Pour tout $0 \leq h \leq d - 1$, on note $\overline{X}_{U^p, m}^{[h]}$ et $\overline{X}_{U^p, m}^{(h)}$ les strates respectivement fermées et ouvertes de $\overline{X}_{U^p, m}$ associées au \mathcal{O}_v -module de Barsotti-Tate $\mathcal{G}/\overline{X}_{U^p, m}$, comme dans la proposition (2.1.3).

Propriété 3 : *pour tout $0 \leq h \leq d - 1$, la strate $\overline{X}_{U^p, m}^{[h]}$ est de pure dimension h et munie d'une action de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Dans le cas de bonne réduction, i.e. $m_1 = 0$, elle est en outre lisse.*

2.2.11 — Pour tout point géométrique x de $\overline{X}_{U^p, m}^{(h)}$, soit M_x le noyau de l'application

$$(\iota_{1, m_1})_x : v^{-m_1} \Lambda_{1,1} / \Lambda_{1,1} \longrightarrow \mathcal{G}_x[v^{m_1}](\kappa(x)) \simeq \mathcal{G}_x^{et}[v^{m_1}](\kappa(x))$$

Pour tout x , M_x est un facteur direct de rang $d - h$ de $v^{-m_1} \Lambda_{1,1} / \Lambda_{1,1}$ sur \mathcal{O}_v / v^{m_1} . De plus quand x varie, les M_x se recollent en un faisceau localement constant \underline{M} sur $\overline{X}_{U^p, m}^{(h)}$. On obtient ainsi une décomposition de $\overline{X}_{U^p, m}^{(h)}$ indexée par les facteurs directs M de $v^{-m_1} \Lambda_{1,1} / \Lambda_{1,1}$, libres de rang $d - h$ en tant que \mathcal{O}_v / v^{m_1} -modules : $\overline{X}_{U^p, m}^{(h)} = \coprod_M \overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)}$ où pour tout point fermé x de $\overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)}$ on ait $M_x = M$.

2.2.12. Lemme. — Supposons $m_1 = 0$ et $m'_i = m_i$ pour $i > 1$ alors $\overline{X}_{U^p, m', M}^{(h)} \longrightarrow \overline{X}_{U^p, m}^{(h)}$ est fini et plat.

2.2.13. Définition. — Soit $M \subset \Lambda_{1,1}$ un \mathcal{O}_v -sous-module libre de rang $d - h$ et facteur direct. Soit $P_M \subset \text{Aut}(\Lambda_{1,1})$ le sous-groupe parabolique maximal qui stabilise M . On pose alors

$$G_M(\mathbb{A}^\infty) = G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times P_M(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$$

et on note $\overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)} := \overline{X}_{U^p, m, v^{-m_1} M / M}^{(h)}$. Par ailleurs on associe à M un élément $\bar{g}_M \in GL_d(F_v) / P_{d-h, d}(F_v)$ tel que pour tout relèvement g_M de ce dernier, M soit l'image par g_M de l'espace engendré par les $d - h$ premiers vecteurs de la base canonique.

Propriété 4 : pour M fixé, le système projectif des $\overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)}$ admet une action de $G_M(\mathbb{A}^\infty)$ de sorte que $\overline{X}_{U^p, m}^{(h)}$ muni de son action de $G(\mathbb{A}^\infty)$ est géométriquement induit à partir de $\overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)}$:

$$\overline{X}_{U^p, m}^{(h)} \simeq \overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)} \times_{P_M(\mathcal{O}_v / v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v / v^{m_1})$$

2.2.14. Définitions. — - Pour tout h , on notera M_h le facteur direct de $\Lambda_{1,1}$ libre de rang $d - h$ associé au $d - h$ -premiers vecteurs de la base canonique et $G_{(h)}(\mathbb{A}^\infty)$ le groupe $G_{M_h}(\mathbb{A}^\infty)$.

- On notera $\overline{X}_{U^p, m, M}^{[h]}$ l'adhérence de $\overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)}$ dans $\overline{X}_{U^p, m}^{[h]}$.

Remarque : On peut montrer que $\overline{X}_{U^p, m, M}^{[h]}$ est lisse.

Propriété 5 : pour ξ une représentation de dimension finie de G sur un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel, il existe pour tout U^p suffisamment petit, un système local \mathcal{L}_ξ sur les $X_{U^p, m}$.

2.2.15 — Dans [6], les auteurs définissent les variétés d'Igusa de première espèce ainsi qu'un isomorphisme de celles-ci vers $\overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)}$ pour tout M . Ces variétés sont munies d'une action de $G_M^+(\mathbb{A}^\infty)$ qui agit via le quotient $G_M^+(\mathbb{A}^\infty) \longrightarrow G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_h(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ où $(\mathbb{Z} \times GL_h(F_v))^+$ désigne le sous-semi-groupe de $\mathbb{Z} \times GL_h(F_v)$ formé des éléments (c, g) tels que $\varpi_o^{\lfloor -c/(n-h) \rfloor} g \in GL_h(\mathcal{O}_v)$ qui est induit par la surjection $P_M(F_v) \longrightarrow \mathbb{Z} \times GL_h(F_v)$ qui à $g_v = g_M(g_v^c, g_v^{et}) g_M^{-1}$ associe $(v(\det g_v^c), g_v^{et})$.

Propriété 6 : via la notion de variété d'Igusa de seconde espèce, on peut définir des systèmes locaux $\mathcal{F}_{\rho_v, M}$ sur les $\overline{X}_{U^p, m, M}^{(h)}$ associés à une représentation irréductible admissible ρ_v des inversibles $D_{v, d-h}^\times$ de l'algèbre à division $D_{v, d-h}$ de centre F_v et d'invariant $1/(d-h)$. Tout élément $(g^p, g_{p,0}, c, g_o^{et}, g_{o_i}, \delta)$ de $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_h(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times (D_{v, d-h}^\times / \mathcal{D}_{v, d-h}^\times)$ définit naturellement un morphisme

$$(g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta) : (g^p, g_{p,0}, c, g_v^{et}, g_{v_i}, \delta)^* (\mathcal{F}_{\rho, M} \otimes \mathcal{L}_\xi) \longrightarrow \mathcal{F}_{\rho, M} \otimes \mathcal{L}_\xi$$

2.2.16. Définition. — Soit H_0/\mathbb{Q} le groupe algébrique forme intérieure de G_τ telle que $H_0(\mathbb{R})$ est compact, $H_{0,v} \simeq D_{v,d}^\times$ et $H_0(\mathbb{A}^\infty) \simeq G^{(0)}(\mathbb{A}^\infty)$.

Propriété 7 : l'ensemble des points supersinguliers $\overline{X}_{U^p, m}^{(0)}$ de $\overline{X}_{U^p, m}$ est un sous-schéma de dimension nulle, constitué de $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$ classes d'isogénies tel que chaque classe d'isogénie $\overline{X}_{U^p, m}^{(0)}(\overline{\mathbb{F}}_q)_i$ pour $i \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$ est isomorphe, en tant que $G^{(0)}(\mathbb{A}^\infty) := G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times D_{v,d}^\times \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$ -ensemble, à (cf. [6] lemme V.1.2 p.153) :

$$H_0(\mathbb{Q}) \backslash G^{(0)}(\mathbb{A}^\infty) / (\mathcal{D}_{v,d}^\times \times U^p(m))$$

En outre l'action de $c_v \in W_v$ sur cet ensemble est donnée par la translation de $\deg(c_v)$ sur la composante $\mathbb{Z} \simeq D_{v,d}^\times / \mathcal{D}_{v,d}^\times$ qui envoie 1 sur une uniformisante $\Pi_{v,d}$ de $D_{v,d}$. L'action d'un élément $g^\infty \in G^{(0)}(\mathbb{A}^\infty)$ est donnée par la correspondance

$$\begin{array}{ccc} & H_0(\mathbb{Q}) \backslash \left[\frac{G^{(0)}(\mathbb{A}^{\infty, o})}{U_1^{p,v}(m')} \times \mathbb{Z} \right] & \\ & \swarrow c_1 \qquad \searrow c_2 & \\ H_0(\mathbb{Q}) \backslash \left[\frac{G^{(0)}(\mathbb{A}^{\infty, o})}{U_2^{p,v}(m)} \times \mathbb{Z} \right] & & H_0(\mathbb{Q}) \backslash \left[\frac{G^{(0)}(\mathbb{A}^{\infty, o})}{U_2^{p,v}(m)} \times \mathbb{Z} \right] \end{array}$$

où $U_1^p(m')$ est tel que $U_1^{p,v}(m') \subset U_2^{p,v}(m) \cap (g^{\infty, v})^{-1} U_2^{p,v}(m) g^{\infty, v}$, avec c_1 (resp. c_2) induit par l'inclusion $U_1^{p,v}(m') \subset U_2^{p,v}(m)$ (resp. par la translation à gauche de $g^{\infty, v}$ sur $G^{(0)}(\mathbb{A}^{\infty, v})$) et la translation de $\text{val}(\det(g_v))$ sur la composante \mathbb{Z} .

Remarque : D'après [10], on a une bijection canonique $f : \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) \longrightarrow \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$ de sorte que dans la décomposition sur $\mathcal{O}_v X_{U^p(m)} = \coprod_{\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)} \text{Sh}_{U^p(m)}(G, X)$ l'ensemble des points supersinguliers de la composante $\text{Sh}_{U^p(m)}(G, X)$ indexée par $i \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)$ correspond à la classe d'isogénie des points supersinguliers de $X_{U^p(m)}$ associée à $f(i) \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$.

2.2.17. Définition. — Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$, on notera $\mathcal{F}(g, s, \pi_v)$ le faisceau concentré aux

points supersinguliers dont la restriction à toute classe d'isogénie $i \in \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$ est

$$\begin{array}{c} H_0(\mathbb{Q}) \backslash [(G^{(0)}(\mathbb{A}^{\infty, v})/U^{p, v}(m)) \times (\mathbb{Z} \times \text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}))] \\ \downarrow \\ \overline{X}_{U^{p, m}}^{(0)}(\overline{\mathbb{F}}_q)_i = H_0(\mathbb{Q}) \backslash [(G^{(0)}(\mathbb{A}^{\infty, v})/U^{p, v}(m)) \times \mathbb{Z}] \end{array}$$

où l'action diagonale de H_0 est donnée par translation à droite sur $G^{(0)}(\mathbb{A}^{\infty, v}) = H_0(\mathbb{A}^{\infty, v})$, par translation de valeur $\text{val} \text{rn}(\cdot)$ sur \mathbb{Z} et par l'action naturelle sur $\text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v})$.

2.2.18. Définition. — Pour tout $0 \leq h < d$, on notera

$$G^{(h)}(\mathbb{A}^{\infty}) := G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^{\times} \times D_{v, d-h}^{\times} \times GL_h(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^{\times}$$

3. Rappels des propriétés cohomologiques

3.0.1. Définition. — Soit τ une représentation irréductible de $D_{K, h}^{\times}$, sa restriction à $\mathcal{D}_{K, h}^{\times}$ est une somme de représentations irréductibles $\rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_{e_{\tau}}$ et on notera e_{τ} le nombre de celles ci. Étant donnée une représentation irréductible ρ de $\mathcal{D}_{K, h}^{\times}$, soient alors τ et τ' des sous-représentations irréductibles de l'induite de $\mathcal{D}_{K, h}^{\times}$ à $D_{K, h}^{\times}$ de ρ : d'après la réciprocity de Frobenius, ce sont exactement celles telles que leur restriction à $\mathcal{D}_{K, h}^{\times}$ contienne ρ . On en déduit alors que τ et τ' sont inertiuellement équivalentes, i.e. $\tau' \simeq \tau \otimes \chi$ avec $\chi : \delta \mapsto x^{\text{val}(\det \delta)}$ pour $x \in \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times}$. On note \mathfrak{C}_h l'ensemble des classes d'équivalences inertielles des représentations admissibles et irréductibles du groupe $D_{K, h}^{\times}$. De la même façon, deux représentations π et π' de $GL_g(K)$ seront dites inertiuellement équivalentes, s'il existe un caractère $\xi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times}$ tel que $\pi \simeq \pi' \circ \xi \circ \text{val} \circ \det$ et on notera Cusp_g l'ensemble des classes d'équivalence inertielle des représentations cuspidales de $GL_g(K)$ ainsi que e_{π} le cardinal de la classe d'équivalence inertielle de π .

3.0.2. Définition. — Soit σ une représentation irréductible de W_K . Une représentation de I_K sera dite σ -isotypique, si ses sous-représentations irréductibles sont aussi des sous-représentations irréductibles de la restriction à I_K de σ .

Remarque : Si une représentation de I_K est σ -isotypique et σ' -isotypique alors σ et σ' sont inertiuellement équivalentes.

3.0.3. Lemme. — Pour tout entier g et toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$, $e_{\text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi})} = e_{\pi}$.

Démonstration. — On rappelle que l'entier en question correspond au nombre de caractères χ de \mathbb{Z} tels que $\tau \simeq \tau \otimes \chi \circ \text{val} \circ \det$ en notant $\tau = \text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi})$; par Jacquet-Langlands c'est aussi le nombre de caractères χ de \mathbb{Z} tels que $\overleftarrow{[s-1]}_{\pi} \simeq \overleftarrow{[s-1]}_{\pi} \otimes (\chi \circ \text{val} \circ \det) \simeq$

$[\overleftarrow{s-1}]_{\pi \otimes (\chi \circ \text{val} \circ \det)}$ et donc au nombre de caractères ξ tels que $\pi \simeq \pi \otimes \xi \circ \text{val} \circ \det$, d'où le résultat. \square

3.1. Sur le modèle local. — Soit τ une représentation admissible irréductible de $D_{K,h}^\times$. L'espace que l'on souhaite étudier est le $(GL_h(K) \times W_K)$ -module

$$\text{Hom}_{D_{K,h}^\times}(\tau, \mathcal{U}_{K,l,h}^i) = \mathcal{U}_{K,l,h}^i(\tau) \simeq \Psi_{K,l,h}^i(\tau) := \text{Hom}_{D_{K,h}^\times}(\tau, \Psi_{K,l,h}^i)$$

3.1.1 — Pour tout τ , on a un morphisme naturel de \mathcal{N}_K -modules : $\mathcal{U}_{K,l,h}^i(\tau) \otimes \tau \longrightarrow \Psi_{K,l,h}^i$ qui envoie $f \otimes v$ sur $f(v)$. On note $\Psi_{K,l,h}^i[\tau]$ l'image de ce morphisme et soit $\Psi_{K,l,h,m}^i[\tau]$ la préimage de $\Psi_{K,l,h}^i[\tau]$ dans $\Psi_{K,l,h,m}^i$. Le sous-module $\Psi_{K,l,h}^i[\tau]$ ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de τ . Le groupe $D_{K,h}^\times$ étant compact, on a $\Psi_{K,l,h}^i = \bigoplus_{\tau \in \mathfrak{C}_h} \Psi_{K,l,h}^i[\tau]$. Soit Δ_τ un ensemble d'éléments de $D_{K,h}^\times$ tel que les congruences des $\text{val}(\det \delta)$ pour $\delta \in \Delta_\tau$ forment un système de représentants de $\mathbb{Z}/e_\tau \mathbb{Z}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{K,l,h}^i(\tau) \otimes \tau &\longrightarrow \bigoplus_{\delta \in \Delta_\tau} \Psi_{K,l,h}^i[\tau]^\delta \\ f \otimes v &\longmapsto (f(\delta^{-1}v))_\delta \end{aligned}$$

où $\Psi_{K,l,h}^i[\tau]^\delta$ est l'espace $\Psi_{K,l,h}^i[\tau]$ muni de la structure de \mathcal{N}_K -module où (g, ν, c) agit via $(g, \delta^{-1}\nu\delta, c)$, est un isomorphisme de \mathcal{N}_K -modules.

3.1.2. Théorème. — (cf. [6]) *Pour toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_d(K)$, $\mathcal{U}_{K,l,d}^i(\text{JL}^{-1}(\pi)^\vee)$ est nul pour $i \neq d-1$ et*

$$\mathcal{U}_{K,l,d}^{d-1}(\text{JL}^{-1}(\pi)^\vee) \simeq \pi \otimes \text{rec}_K^\vee(\pi)(-\frac{d-1}{2})$$

3.1.3. Théorème. — (cf. [6] théorème VII.1.5) *Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(K)$, on a*

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i [\mathcal{U}_{K,l,d}^{d-1-i}(\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_s(\pi)^\vee))] = \sum_{i=1}^s (-1)^i [\overleftarrow{s-1-i}, \overrightarrow{i}]_{\pi} \otimes \text{rec}_K^\vee(\pi)(-\frac{d+s-2-2i}{2})$$

3.2. Sur les systèmes locaux d'Harris-Taylor. —

3.2.1. Définition. — Pour τ_v une représentation irréductible admissible de $D_{v,h}^\times$, on note $\mathcal{F}_{\tau_v, U^p(m), 1}$ le faisceau sur $\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}$ noté précédemment $\mathcal{F}_{\tau_v, U^p(m), M_{d-h}}$ et on définit :

$$\mathcal{F}_{\tau_v, U^p(m)} := \mathcal{F}_{\tau_v, U^p(m), 1} \times_{P_{h,d}(\mathcal{O}_v/v^{m_1})} GL_d(\mathcal{O}_v/v^{m_1})$$

le faisceau induit sur toute la strate $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}$.

3.2.2 — Les systèmes locaux $\mathcal{F}_{\tau_v} = (\mathcal{F}_{\tau_v, U^p(m)})_{U^p(m)}$ d'Harris-Taylor sont tels que la restriction à $\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}$ du i -ème faisceau des cycles évanescents $R^i\Psi_v$ vérifie

$$(R^i\Psi_v)_{\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}}^h \simeq \bigoplus_{\tau_v \in \mathcal{E}_h} (\mathcal{F}_{\tau_v, U^p(m)} \otimes \mathcal{U}_{F_v, l, h, m_1}^i(\tau_v))^{h/e_{\tau_v}}, \quad (3.2.4)$$

où l'action d'un élément $(g^{\infty, p}, g_{p,0}, g_v^0, g_v^{et}, g_{v_i}, c_v)$ de $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (GL_{n-h}(F_v) \times GL_h(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$ est donnée par l'action naturelle de

$$(g^{\infty, p}, g_{p,0} p^{-f_1 v(c_v)}, v(\det g_v^0) - v(c_v), g_v^{et}, g_{v_i}) \in G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (\mathbb{Z} \times GL_h(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times$$

sur le système \mathcal{F}_{τ_v} au dessus de $\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}$, et par celle de (g_v^0, c_v) sur la tour des $\mathcal{U}_{F_v, l, h, m_1}^i(\tau_v)$. L'isomorphisme (3.2.4) implique alors la proposition suivante.

3.2.3. Proposition. — *Pour tout i, j , on a un isomorphisme canonique*

$$H_c^j(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}, R^i\Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi)^h \simeq \bigoplus_{\tau_v \in \mathcal{E}_h} (H_c^j(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}, \mathcal{F}_{\tau_v, U^p(m)} \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \mathcal{U}_{F_v, l, h, m_1}^i(\tau_v))^{h/e_{\tau_v}}$$

tel que l'action de $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times (GL_{n-h}(F_v) \times GL_h(F_v))^+ \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$ se prolonge à $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{n-h}(F_v) \times GL_h(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$ de sorte que l'action de $(g^{\infty, p}, g_{p,0}, g_v^0, g_v^{et}, g_{v_i}, c_v)$ sur la limite inductive, indexée par $U^p(m)$, du membre de gauche, induit l'action de $(g^{\infty, p}, g_{p,0} p^{-f_1 v(c_v)}, v(\det(g_v^0) - v(c_v)), g_v^{et}, g_{v_i}) \times (g_v^0, c_v)$ sur la limite inductive du membre de droite.

Dans la suite on couplera la proposition précédente avec la suivante.

3.2.4. Proposition. — *Soient $1 \leq tg < d$, π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$. Pour $1 \leq i \leq l$ et pour tout j ,*

$$\varinjlim_{U^p(m)} H_c^j(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}_{\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{Sp}_t(\pi_v)^\vee), U^p(m)} \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \Pi_t \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$$

est naturellement muni d'une action de $G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{n-tg}(F_v) \times GL_{tg}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$ telle que $(g^{\infty, p}, g_{p,0}, g_v^0, g_v^{et}, g_{v_i}, c_v)$ y agisse via l'action naturelle de

$$(g^{\infty, p}, g_{p,0} p^{-f_1 v(c_v)}, v(\det(g_v^0) - v(c_v)), g_v^{et}, g_{v_i})$$

sur $\varinjlim_{U^p(m)} H_c^j(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}_{\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{Sp}_t(\pi_v)^\vee), U^p(m)} \otimes \mathcal{L}_\xi)$ et celle de (g_v^0, c_v) sur $\Pi_t \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$.

Ainsi cet espace en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times W_v$ est de la forme

$$\bigoplus_{\chi} (\mathrm{Ind}_{P_{tg, d}(F_v)}^{GL_d(F_v)} \Pi_t \circ \chi(\mathrm{val}(\det)) \otimes \pi_\chi) \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v \circ \chi(\mathrm{val}(\det)))$$

où χ décrit les caractères $\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ et π_χ est une représentation de $GL_{d-tg}(F_v)$.

Démonstration. — Le faisceau $\mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_t(\pi_v)^\vee)}$ étant induit à partir de $\mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_t(\pi_v)^\vee),1}$ on a :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H_c^j(\overline{X}_{U^p,m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_t(\pi_v)^\vee), U^p(m)} \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \Pi_t \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \simeq \\ \text{Ind}_{P_{tg,d}(F_v)}^{GL_d(F_v)} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H_c^j(\overline{X}_{U^p,m, M_{d-tg}}^{(d-tg)}, \mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_t(\pi_v)^\vee), U^p(m), 1} \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \Pi_t \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \quad (3.2.5) \end{aligned}$$

tel que l'action de $((g_v^c, g_v^{et}), c_v) \in P_{tg,d}(F_v) \times W_v$ sur le membre de droite de (3.2.5), soit donnée par l'action de $(g_v^{et}, \text{val}(\det g_v^c) - \deg(c_v)) \times (g_v^c, c_v) \in GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z} \times GL_{tg}(F_v) \times W_v$ où $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H_c^j(\overline{X}_{U^p,m, M_{d-tg}}^{(d-tg)}, \mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_t(\pi_v)^\vee), U^p(m)} \otimes \mathcal{L}_\xi)$ (resp. $\Pi_t \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$) est vue comme un $GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -module (resp. $GL_{tg}(F_v) \times W_v$ -module). Le résultat découle alors de l'écriture

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H_c^j(\overline{X}_{U^p,m, M_{d-tg}}^{(d-tg)}, \mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_t(\pi_v)^\vee), U^p(m)} \otimes \mathcal{L}_\xi) \simeq \bigoplus_{\chi} \chi \otimes \pi_\chi$$

où χ décrit les caractères $\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ et où π_χ est une représentation de $GL_{d-tg}(F_v)$, à priori réductible. □

3.2.5 — Remarque : Les systèmes locaux \mathcal{F}_{τ_v} ne sont pas irréductibles mais plutôt une somme directe de e_{τ_v} systèmes locaux irréductibles. La complexité de l'écriture de (3.2.4), est la contre-partie de la simplicité de la description de l'action de $GL_d(F_v) \times W_v$ qui tient au fait que l'on a fait apparaître $\mathcal{U}_{F_v, l, h}^i(\tau_v)$ plutôt que $\text{Hom}_{\mathcal{D}_{v, h}^\times}(\rho_o, \Psi_{F_v, l, h}^i)$ avec ρ_v une représentation irréductible de I_o de sorte que ce dernier est seulement muni d'une action de $\mathcal{N}_v \cap (GL_h(F_v) \times D_{v, h}^\times)$.

3.2.6. Définition. — On considère pour une représentation automorphe Π de $G_\tau(\mathbb{A})$, l'hypothèse $\text{Hyp}(\infty)$ suivante : Π_∞ est cohomologique pour une certaine représentation algébrique ξ sur \mathbb{C} de la restriction des scalaires de F à \mathbb{Q} de GL_g , i.e. il existe i tel que

$$H^i((\text{Lie}G_\tau(\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, U_\tau, \Pi_\infty \otimes (\xi')^\vee) \neq (0)$$

où U_τ est un sous-groupe compact modulo le centre de $G_\tau(\mathbb{R})$, maximal, cf. [6] p.92, et où ξ' est le caractère sur \mathbb{C} associé à ξ via un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$ fixé. On dira que Π vérifie $\text{Hyp}(\xi)$ si Π vérifie $\text{Hyp}(\infty)$ pour ξ .

3.2.7 — On note $[H_{h, \xi, \tau_v}^*] := \sum_i (-1)^i \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p, m}} [H_c^i(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}, \mathcal{F}_{\tau_v, U^p(m)} \otimes \mathcal{L}_\xi)]$ dans le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de $(G(\mathbb{A}^{\infty, o}) \times GL_h(F_v) \times \mathbb{Z})$.

3.2.8. Définition. — Pour tout entier h , on considère l'identification canonique définie par la valuation de la norme réduite : $D_{v, h}^\times / \mathcal{D}_{v, h}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$. On notera $\Xi : \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ le caractère défini par $\Xi(1) = \frac{1}{l}$

3.2.9. Proposition. — Pour Π une représentation de $G_\tau(\mathbb{A})$, on a alors

$$[H_{h,\xi,\tau_v}^*(\Pi^{\infty,v})] = \begin{cases} \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) \epsilon(\Pi) m(\Pi) \text{Red}_{\tau_v}^h(\Pi_v) & \text{si } \Pi_\infty \text{ vérifie Hyp}(\infty) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2.6)$$

où $\epsilon(\Pi)$ est un signe qui dépend de Π , $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes et $\text{Red}_{\tau_v}^h : \text{Groth}(GL_d(F_v)) \longrightarrow \text{Groth}(D_{v,h}^\times/\mathcal{D}_{v,h}^\times \times GL_{d-h}(F_v))$ est défini comme la composition des deux homomorphismes suivant :

– en premier lieu, on a un homomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Groth}(GL_d(F_v)) &\longrightarrow \text{Groth}(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)) \\ [\Pi_v] &\mapsto [J_{P_{h,d}}(\Pi_v) \otimes \delta_{P_{h,d}}^{1/2}] \end{aligned}$$

– ensuite on a un homomorphisme

$$\begin{aligned} \text{Groth}(GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)) &\longrightarrow \text{Groth}(D_{v,h}^\times/\mathcal{D}_{v,h}^\times \times GL_{d-h}(F_v)) \\ [\alpha \otimes \beta] &\mapsto \sum_\psi \text{vol}(D_{v,h}^\times/F_v^\times, d\bar{h}_v)^{-1} \text{Tr } \alpha(\phi_{\text{JL}(\tau_v^\vee \otimes \psi)})[\psi \otimes \beta], \end{aligned}$$

où ψ décrit les caractères de $\mathbb{Z} \simeq D_{v,h}^\times/\mathcal{D}_{v,h}^\times$ tels que α et $\tau_v^\vee \otimes \psi$ ont le même caractère central et où l'on considère des mesures de Haar associées sur $GL_h(F_v)$ et $D_{v,h}^\times$.

Remarque : On a $\epsilon(\Pi) = 1$ (resp. $\epsilon(\Pi) = (-1)^{s-1}$) s'il existe une place x tel que Π_x est de carré intégrable (resp. $\Pi_x \simeq \text{Speh}_s(\pi_x)$ pour π_x irréductible cuspidale de $GL_g(F_x)$ avec $d = sg$).⁽⁵⁾

3.2.10 — Pour toute représentation irréductible ξ de $G(\mathbb{Q})$, on note $\mathcal{C}_{H_0,\xi}^\infty$ l'ensemble des formes automorphes sur H_0 de type $(\xi')^\vee$ à l'infini. De la propriété 7, on en déduit le résultat suivant.

3.2.11. Proposition. — Pour tout i , on a un isomorphisme $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$ -équivariant

$$\varinjlim_{U^p,m} H^0(\bar{X}_{U^p,m}^{(0)}, R^i \Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi) \simeq \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) \text{Hom}_{D_{v,d}^\times}(\mathcal{C}_{H_0,\xi}^\infty, \mathcal{U}_{F_v,l,d}^i) \quad (3.2.7)$$

Remarque : Le groupe $H_0(\mathbb{R})$ étant compact, l'espace $\mathcal{C}_{H_0,\xi}^\infty$ s'écrit comme une somme directe $\bigoplus_{\bar{\Pi}} m(\bar{\Pi}) \bar{\Pi}$ où $\bar{\Pi}$ décrit l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations automorphes de $H_0(\mathbb{A})$ cohomologiques pour $(\xi')^\vee$.

⁽⁵⁾L'auteur n'est pas certain que le cas $\Pi_x \simeq \text{Speh}_s(\pi_x)$ soit connu, de sorte qu'on en donnera une preuve.

PARTIE II
FILTRATIONS DE MONODROMIE : ÉNONCÉS

4. Énonces des théorèmes locaux

4.1. Groupes de cohomologie des modèles de Deligne-Carayol. —

4.1.1 — Considérons le complexe à flèches nulles

$$ML^\bullet(s) := ([\overrightarrow{s-1}]_1 \otimes |\mathrm{Art}_K^{-1}|^{(s-1)/2}, [\overleftarrow{1}, \overrightarrow{s-2}]_1 \otimes |\mathrm{Art}_K^{-1}|^{(s-3)/2}, \dots, \\ [\overleftarrow{s-1}]_1 \otimes |\mathrm{Art}_K^{-1}|^{(1-s)/2}) \otimes \mathrm{JL}^{-1}(1^\vee) \otimes \mathrm{rec}_K^\vee(1)((1-s)/2)$$

où $[\overleftarrow{s-1}]_1$ est placé en degré 0. Pour π une représentation cuspidale de $GL_g(K)$, on pose

$$\pi \diamond ML^\bullet(s) := ([\overrightarrow{s-1}]_\pi \otimes |\mathrm{Art}_K^{-1}|^{(s-1)/2}, [\overleftarrow{1}, \overrightarrow{s-2}]_\pi \otimes |\mathrm{Art}_K^{-1}|^{(s-3)/2}, \dots, \\ [\overleftarrow{s-1}]_\pi \otimes |\mathrm{Art}_K^{-1}|^{(1-s)/2}) \otimes \mathrm{JL}^{-1}(\pi)^\vee \otimes \mathrm{rec}_K^\vee(\pi)((1-sg)/2)$$

4.1.2. Théorème. — *Pour tout d , on a $\mathcal{U}_{K,l,d}^{d-1+\bullet} = \bigoplus_{d=sg}^{g|d} \bigoplus_{\pi \in \mathrm{Cusp}_g} \pi \diamond ML^\bullet(s)$ où Cusp_g désigne l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(K)$.*

4.1.3 — Autrement dit, on a

$$\mathcal{U}_{K,l,d}^{d-s+i}(\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{Sp}_s(\pi)^\vee)) \simeq \begin{cases} \mathrm{rec}_K^\vee(\pi)(-\frac{d-s+2i}{2}) \otimes [\overleftarrow{i}, \overrightarrow{s-i-1}]_\pi & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

où $[\overleftarrow{i}, \overrightarrow{s-i-1}]_\pi$ est l'unique quotient irréductible de l'induite

$$\mathrm{Ind}_{P_{i,g,sg}(K)}^{GL_{sg}(K)} \mathrm{Sp}_i(\pi(\frac{(s-i)(g-1)}{2})) \otimes \mathrm{Speh}_{s-i}(\pi(\frac{-i(g-1)}{2})).$$

Remarque : Le cas Iwahori, pourrait se déduire du résultat principal de [14] en utilisant le théorème de comparaison de Faltings, cf. [5].

4.2. Filtration de monodromie-locale. — On rappelle l'amélioration du théorème de comparaison de Berkovich donnée par Fargues en appendice.

4.2.1. Théorème-définition. — *Soit $X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathcal{O}_K$ un morphisme propre d'un schéma X de type fini de dimension d sur le trait $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_K$. Le complexe des cycles évanescents $R\Psi_\eta(\mathbb{Q}_l)[d-1]$ est un faisceau pervers munie d'une action de W_K qui fournit une filtration de monodromie dont on notera gr_k les gradués et on considère la suite spectrale $E_1^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i} \Rightarrow R^{i+j+d-1}\Psi_\eta(\mathbb{Q}_l)$.*

Pour tout point géométrique x de la fibre spéciale X_s , en considérant les germes en x des $h^i gr_k$, on obtient une suite spectrale $E_{1,x}^{i,j} = (h^{i+j} gr_{-i})_x \Rightarrow R^{i+j+d-1} \Psi_\eta(\mathbb{Q}_l)_x$ dont la nature est purement locale de sorte que si $Y \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K$ est un autre schéma avec un point y tel que le complété formel de l'anneau local de Y en y est isomorphe, en tant que \mathcal{O}_K -schéma formel, au complété formel de l'anneau local de X en x , alors pour tout $r \geq 1$, on a $E_{r,x}^{i,j} = E_{r,y}^{i,j}$.

La filtration ainsi obtenue sera dite de monodromie-locale.

4.2.2 — Pour tout $s \geq 1$, on introduit ⁽⁶⁾ une suite de bicomplexe $MLE_r^{i,j}(s)$ défini comme suit :

- pour $r = 1$, $MLE_1^{i,j}(s)$ est nul pour $|j| \geq s$ ou $j \equiv s \pmod{2}$ ou $i + j > 0$ ou $i > (1 - s - j)/2$. Sinon pour $j = s - 1 - 2r$ avec $0 \leq r < s$ et $i = s - 1 - 2r - k$ avec $0 \leq k \leq (s - 1 - j)/2$, on a

$$MLE_1^{s-1-2r-k, s-1-2r}(s) = [\overleftarrow{s-1-k}]_1 \overrightarrow{[k-1]}_1 \otimes |\text{Art}_K^{-1}|^{-(s-1-2r)/2}$$

- les flèches $d_1^{i,j}$ se déduisent des suites exactes courtes (4.2.8) ;

- pour $r \geq 2$, $MLE_r^{i,j}(s) = MLE_2^{i,j}(s)$ est nul pour $|j| \geq s$ ou $j \equiv s \pmod{2}$ ou $2i \neq 1 - s - j$, et

$$MLE_2^{1-s-r, s-1-2r} = [\overleftarrow{s-1-r, r}]_1 \otimes |\text{Art}_K^{-1}|^{-(s-1-2r)/2}$$

Nous allons en fait prouver l'énoncé suivant dont découle directement le théorème (4.1.2).

4.2.3. Théorème. — La filtration de monodromie-locale du complexe $\mathcal{U}_{K,l,d,n}^\bullet$ est équivariante pour l'action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_n = C^\infty(\mathfrak{K}_n \backslash GL_d(K) / \mathfrak{K}_n)$ et celle de I_K ; en outre pour n variant, les filtrations de monodromie locale forment des systèmes inductifs compatibles à l'action des correspondances de Hecke. On note $gr_{d,n,loc,k}$ les gradués et $E_{r,gr,loc}^{i,j}$ les termes de la suite spectrale associée avec $E_{1,gr,loc}^{i,j} = h^{i+j} gr_{d,n,loc,-i}$. On a alors :

$$E_{\bullet,gr,loc}^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{\substack{g|d \\ d=sg}} \bigoplus_{\pi \in \text{Cusp}_g} JL^{-1}(\pi^\vee) \otimes (\pi \diamond MLE_{\bullet,\bullet}^{\bullet,\bullet}(s))$$

où comme précédemment $\pi \diamond ([\overleftarrow{s-1}]_1 \otimes \text{rec}_K^\vee(1)) := [\overleftarrow{s-1}]_\pi \otimes \text{rec}_K^\vee(\pi)$.

4.2.4 — Autrement dit on a les propriétés suivantes :

(1) pour tout k , $gr_{d,n,loc,k}$ est une somme directe $\bigoplus_{\substack{g|d=sg \\ \pi_v \in \text{Cusp}_g}} gr_{d,n,loc,k,\pi_v}$, où en tant que

I_v -module, gr_{d,n,loc,k,π_v} est $\text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$ -isotypique au sens de la définition (3.0.2) ⁽⁷⁾

⁽⁶⁾Par exemple pour $s = 4$ on a représenté à la figure (6) les $MLE_1^{i,j}(4)$ et $MLE_\infty^{i,j}(4)$.

⁽⁷⁾Sans utiliser le fait que les $\text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$ décrivent l'ensemble des représentations irréductibles de W_v , l'énoncé dit que pour σ_v qui ne serait pas de la forme $\text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$, gr_{d,loc,k,σ_v} est nul.

- (2) les gr_{d,n,loc,k,π_v} sont nuls pour $|k| \geq s$ et pour $|k| < s$, ses groupes de cohomologie $h^i gr_{d,n,loc,k,\pi_v}$ sont nuls pour $i < d - s + |k|$ et pour $i \not\equiv d - s + k \pmod{2}$; pour $d - s + |k| \leq i = d - s + |k| + 2r \leq d - 1$, $h^{d-s+|k|+2r} gr_{d,loc,k,\pi_v}$ est l'espace des vecteurs invariants sous $K_{v,n} \subset GL_d(F_v)$ de l'espace suivant :

$$JL^{-1}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v^\vee}) \otimes [\overleftarrow{|k|+2r}]_{\pi_v} \overrightarrow{[\overrightarrow{s-2-2r-|k|}]_{\pi_v}} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{i+k}{2});$$

- (3) la suite spectrale $E_{1,gr,loc}^{i,j} = h^{i+j} gr_{d,n,loc,-i,\pi_v} \Rightarrow \mathcal{U}_{F_v,n}^{d,i+j}$ dégénère en E_2 et ses $d_1^{i,j}$ se déduisent des suites exactes courtes

$$0 \rightarrow [\overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t}]_{\pi_v} \rightarrow [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{[\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v}} \rightarrow [\overleftarrow{t}, \overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \rightarrow 0 \quad (4.2.8)$$

5. Énoncés des théorèmes globaux

5.1. Rappels sur les faisceaux pervers. — Pour X un schéma séparé de type fini sur un corps, on considère la t -structure perverse autoduale sur $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. On reprend les notations et les résultats de [1] : en particulier quand il n'y a pas de confusion relativement à X , on note pour $a \in \mathbb{Z}$, ${}^p\tau^{\leq a}$, ${}^p\tau^{\geq a}$ les foncteurs de troncations de $D_c^b := D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dans $D^{\leq a} := D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)^{\leq a}$ et $D^{\geq a} := D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)^{\geq a}$, $\text{Perv} := D^{\geq 0} \cap D^{\leq 0}$, ${}^pH^0 := {}^p\tau^{\leq 0} {}^p\tau^{\geq 0} : D_c^b \rightarrow \text{Perv}$.

5.1.1. Définition. — Soit σ_v une représentation irréductible de W_v . Un faisceau pervers P irréductible, de la forme $j_{1*}\mathcal{L}$ pour $j : U \hookrightarrow X$ localement fermé et \mathcal{L} un système local sur U , muni d'une action de I_v , sera dit σ_v -isotypique si \mathcal{L} l'est au sens de la définition (3.0.2).

On a alors le lemme suivant dont la preuve est immédiate.

5.1.2. Lemme. — Soient $\sigma_{v,1}$ et $\sigma_{v,2}$ des représentations irréductibles non inertiuellement équivalentes de W_v et soient P_1, P_2 des faisceaux pervers muni d'une action de I_v , respectivement $\sigma_{v,1}$ et $\sigma_{v,2}$ isotypique. Si $\varphi : P_1 \rightarrow P_2$ est un morphisme de faisceau pervers I_v -équivariant, pour tout i , on a $h^i\varphi = 0$.

Le lemme (5.3.6) de [1] donne alors la décomposition en somme directe suivante.

5.1.3. Proposition. — Tout faisceau pervers P sur X muni d'une action de I_v s'écrit comme une somme directe $\bigoplus_{\sigma_v} P_{\sigma_v}$ où la somme porte sur les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles de W_v et où P_{σ_v} est σ_v -isotypique au sens de la définition (3.0.2). En particulier pour tout point géométrique $x : \text{Spec } K \rightarrow X$, $(P_{\sigma_v})_x$ est une représentation σ_v -isotypique.

5.1.4. Corollaire. — Soit P un faisceau pervers sur X muni d'une action compatible de W_v . On considère sa filtration de monodromie et on note $gr_k P$ son gradué de poids k . La suite spectrale $E_{1,gr,glob}^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i} P \implies h^{i+j} P$ est la somme directe sur les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles σ_v de W_v des suites spectrales

$$E_{1,gr,glob,\sigma_v}^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i} P_{\sigma_v} \implies h^{i+j} P_{\sigma_v} \quad (5.1.9)$$

5.1.5 — Le complexe des cycles évanescents $R\Psi_v[d-1]$ sur $\overline{X}_{Up,m}$ est un faisceau pervers muni d'une action de W_v ; on considère alors sa filtration de monodromie et on note $gr_{k,Up(m)}$ son gradué de niveau k . On note N le logarithme de la partie unipotente de la monodromie de sorte qu'en particulier on a $N^k : gr_{k,Up(m)} \simeq gr_{-k,Up(m)}$. On pose $gr_k = (gr_{k,Up(m)})_{Up,m}$, et on dispose alors de la suite spectrale $E_{1,Up(m),gr,glob}^{i,j} = h^{i+j} (gr_{-i,Up(m)}) \implies R^{i+j+d-1} \Psi_v$ équivariante sous l'action de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$, qui, d'après le corollaire précédent, se scinde en une somme directe portant sur les classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles σ_v de W_v :

$$E_{1,Up(m),gr,glob,\sigma_v}^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i,Up(m),\sigma_v} R^{i+j+d-1} \Psi_v \quad (5.1.10)$$

5.1.6. Définition. — Pour ξ une représentation algébrique irréductible de G sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$, on notera $gr_{k,Up(m),\xi}$ le gradué de $(R\Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi)[d-1]$ soit $gr_{k,Up(m),\xi} \simeq gr_{k,Up(m)} \otimes \mathcal{L}_\xi$. Pour σ_v une représentation irréductible de W_v , on notera $gr_{k,Up(m),\xi,\sigma_v} := gr_{k,Up(m),\sigma_v} \otimes \mathcal{L}_\xi$. Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on notera $gr_{k,Up(m),\pi_v}$ (resp. $gr_{k,Up(m),\xi,\pi_v}$) pour $gr_{k,Up(m),\text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)}$ (resp. $gr_{k,Up(m),\xi,\text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)}$) et de manière générale on mettra un indice π_v en lieu et place de $\text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$.

5.2. Définition de la catégorie des faisceaux pervers de Hecke. — Il s'agit ici de donner le cadre catégoriel pour les énoncés et les preuves des résultats des paragraphes suivants; ce qui suit m'a été suggéré par Jean-François Dat.

5.2.1. Définition. — On considère un groupe \tilde{G} et on considère un ensemble \mathcal{I} tel qu'à tout $I \in \mathcal{I}$ soit associé un sous-groupe compact \mathcal{K}_I de \tilde{G} . On met sur \mathcal{I} une relation d'ordre partiel $J \subset I$ si et seulement si \mathcal{K}_J est un sous-groupe distingué de \mathcal{K}_I . Un schéma de Hecke pour (\tilde{G}, \mathcal{I}) , est un système projectif de schémas $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_{I \in \mathcal{I}}$ relativement à des morphismes finis $r_{J,I} : X_J \longrightarrow X_I$ de restriction du niveau, tel que pour tout $g \in \tilde{G}$ et tout $J \subset I$ tels que $g^{-1} \mathcal{K}_J g \subset \mathcal{K}_I$, on dispose d'un morphisme fini de schémas $[g]_{J,I} : X_J \longrightarrow X_I$ vérifiant les propriétés suivantes :

- pour $g \in \mathcal{K}_I$ et $J \subset I$, $[g]_{J,I} : X_J \longrightarrow X_I$ est le morphisme de restriction du niveau $r_{J,I}$;

- pour tout $g, g' \in \tilde{G}$, et tout $K \subset J \subset I$ tels que $g^{-1} \mathcal{K}_J g \subset \mathcal{K}_I$ et $(g')^{-1} \mathcal{K}_K g' \subset \mathcal{K}_J$, on a

$$[gg']_{K,I} = [g]_{J,I} \circ [g']_{K,J} : X_K \longrightarrow X_J \longrightarrow X_I.$$

- pour tout $J \subset I$, $X_J/\mathcal{K}_I \simeq X_I$, où $g \in \mathcal{K}_I$ agit sur X_J via $[g]_{J,J}$; autrement dit $r_{J,I} : X_J \rightarrow X_I$ est un bon quotient de X_J par $\mathcal{K}_I/\mathcal{K}_J$.

5.2.2 — *Exemples* : avec les notations du §2.2, \mathcal{I} est l'ensemble des sous-groupes compacts de $\tilde{G} := G(\mathbb{A}^\infty)$ de la forme $U^p(m)$ avec $X_{U^p,m}$, ou $\overline{X}_{U^p,m,M_{d-h}}^{(d-h)}$ avec $G := G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$.

5.2.3. Définition. — Soit $X_{\mathcal{I}} = (X_I)_I$ un schéma de Hecke pour (\tilde{G}, \mathcal{I}) , on définit alors la catégorie $\text{FPH}_{\tilde{G}}(X_{\mathcal{I}})$ (resp. $\text{FH}_{\tilde{G}}(X_{\mathcal{I}})$) des faisceaux pervers (resp. des faisceaux) de Hecke sur $X_{\mathcal{I}}$ comme la catégorie dont les objets sont les systèmes $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ où \mathcal{F}_I est un faisceau pervers (resp. faisceau) sur X_I tels que

- pour tout $g \in \tilde{G}$ et $J \subset I$ tel que $g^{-1}\mathcal{K}_J g \subset \mathcal{K}_I$, on dispose d'un morphisme de faisceau sur X_I , $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*}\mathcal{F}_J$ soumise à la condition de cocycle habituelle

$$u_{K,I}(g'g) = [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \circ u_{J,I}(g)$$

- pour tout $g \in \mathcal{K}_I$, $u_{J,I}(g)$ se factorise par les \mathcal{K}_I invariants, i.e. induit une flèche $\mathcal{F}_I \rightarrow r_{J,I,*}\mathcal{F}_J^{\mathcal{K}_I}$ où $\mathcal{F}_J^{\mathcal{K}_I}$ désigne le sous-faisceau de \mathcal{F}_J invariant par tous les $u_{J,J}(g)$ où g décrit \mathcal{K}_I .

Les flèches sont alors les systèmes $(f_I)_{I \in \mathcal{I}}$ avec $f_I : \mathcal{F}_I \rightarrow \mathcal{F}'_I$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) \\ \downarrow f_I & & \downarrow [g]_{J,I,*}(f_J) \\ \mathcal{F}'_I & \xrightarrow{u_{J,I}(g)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \end{array}$$

5.2.4. Proposition. — *Pour tout schéma de Hecke $X_{\mathcal{I}}$, la catégorie $\text{FH}_{\tilde{G}}(X_{\mathcal{I}})$ (resp. $\text{FPH}_{\tilde{G}}(X_{\mathcal{I}})$) est abélienne (resp. abélienne et artinienne).*

Démonstration. — Elle ne présente aucune difficulté. Montrons par exemple l'existence d'un noyau pour $f = (f_I : \mathcal{F}_I \rightarrow \mathcal{F}'_I)_I$. Les catégories à niveau fini étant abélienne, soit pour tout I , \mathcal{G}_I un noyau de f_I . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_I & \longrightarrow & \mathcal{F}_I & \xrightarrow{f_I} & \mathcal{F}'_I \\ \downarrow & & \downarrow u_{J,I}(g) & & \downarrow u_{J,I}(g) \\ [g]_{J,I,*}(\mathcal{G}_J) & \longrightarrow & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_J) & \xrightarrow{[g]_{J,I,*}(f_J)} & [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J) \\ \downarrow & & \downarrow [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) & & \downarrow [g]_{J,I,*}(u_{K,J}(g')) \\ [g'g]_{K,J,*}(\mathcal{G}_K) & \longrightarrow & [g'g]_{K,J,*}(\mathcal{F}_K) & \xrightarrow{[g'g]_{K,J,*}(f_K)} & [g'g]_{K,J,*}(\mathcal{F}'_K) \end{array}$$

De la propriété universelle du noyau \mathcal{G}_J (resp. \mathcal{G}_K), on en déduit une flèche

$$u_{J,I}(g) : \mathcal{G}_I \longrightarrow [g]_{J,I,*}(\mathcal{G}_J) \quad (\text{resp. } [g]_{K,J,*}(u_{K,J}(g')) : [g]_{J,I,*}(\mathcal{G}_J) \longrightarrow [g']_{K,J,*}(\mathcal{G}_K))$$

la propriété de cocycle pour \mathcal{G} découle alors de celles pour \mathcal{F} et \mathcal{F}' via la commutativité du diagramme précédent. De la même façon, en utilisant la propriété universelle du noyau et la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{G}_I & \longrightarrow & \mathcal{F}_I & \xrightarrow{f_I} & \mathcal{F}'_I \\ \downarrow & & \downarrow u_{J,I}(g) & & \downarrow u_{J,I}(g) \\ r_{J,I,*}(\mathcal{G}_J)^{\mathcal{K}_I} & \longrightarrow & r_{J,I,*}(\mathcal{F}_J)^{\mathcal{K}_I} & \xrightarrow{r_{J,I,*}(f_J)} & r_{J,I,*}(\mathcal{F}'_J)^{\mathcal{K}_I} \end{array}$$

on obtient que pour tout $g \in \mathcal{K}_I$, $u_{J,I}(g)$ induit une flèche $\mathcal{G}_I \longrightarrow r_{J,I,*}\mathcal{G}_J^{\mathcal{K}_I}$.

□

5.2.5 — Remarque : Dans la suite du texte, les faisceaux de Hecke que l'on considérera seront tels que pour $g \in \mathcal{K}_I$, $u_{J,I}(g)$ induit un isomorphisme $\mathcal{F}_I \longrightarrow r_{J,I,*}\mathcal{F}_J^{\mathcal{K}_I}$, de sorte que par exemple, les invariants sous \mathcal{K}_I de la cohomologie en niveau J , est isomorphe à la cohomologie en niveau I . Cette propriété est clairement conservée par passage au noyau mais ne l'est pas pour les conoyaux. Cela étant, on remarquera que les constructions des paragraphes suivants se font toujours par des noyaux à partir d'une flèche entre deux faisceaux vérifiant cette propriété additionnelle de sorte que tous les faisceaux que l'on construit la vérifient aussi.

5.2.6. Notation. — Pour $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un objet de $\text{FPH}_{\tilde{G}}(X_{\mathcal{I}})$ ou de $\text{FH}_{\tilde{G}}(X_{\mathcal{I}})$, on notera $H^i(\mathcal{F})$ pour la limite inductive des $H^i(X_I, \mathcal{F}_I)$.

5.2.7. Proposition. — Soient $\overline{X}_{\mathcal{I}}$, $X_{\mathcal{I}}$ et $Y_{\mathcal{I}}$ des schémas de Hecke pour (\tilde{G}, \mathcal{I}) tels que $j_{\mathcal{I}} : X_{\mathcal{I}} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}}$ soit un système projectif d'inclusions affines G -équivariantes et $Y_{\mathcal{I}} = \overline{X}_{\mathcal{I}} \setminus X_{\mathcal{I}}$. On dispose alors des foncteurs $j_!, Rj_*, j_* : \text{FPH}_G(X_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \text{FPH}_G(\overline{X}_{\mathcal{I}})$, ${}^p j^* = {}^p j^! : \text{FPH}_G(\overline{X}_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \text{FPH}_G(X_{\mathcal{I}})$ et pour $i : Y_{\mathcal{I}} := \overline{X}_{\mathcal{I}} - X_{\mathcal{I}} \hookrightarrow \overline{X}_{\mathcal{I}}$ des foncteurs $i_* = i_! : \text{FPH}_G(Y_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \text{FPH}_G(\overline{X}_{\mathcal{I}})$, ${}^p i^*, {}^p Ri^! : \text{FPH}_G(\overline{X}_{\mathcal{I}}) \longrightarrow \text{FPH}_G(Y_{\mathcal{I}})$.

Démonstration. — On commence par rappeler la proposition suivante tirée de [1].

5.2.8. Proposition. — (cf. proposition 1.3.17 de [1]) Pour tout foncteur exact f , on note ${}^p f$ pour ${}^p H^0 f$ comme foncteur sur la catégorie des faisceaux pervers.

(i) Si f est t -exact à gauche (resp. à droite), ${}^p f$ est alors exact à gauche (resp. à droite).

Par ailleurs pour \mathcal{F} dans $D^{\geq 0}$ (resp. $D^{\leq 0}$), on a

$${}^p f({}^p H^0 \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} {}^p H^0 f(\mathcal{F}) \quad (\text{resp. } {}^p H^0 f(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} {}^p f({}^p H^0 \mathcal{F})).$$

- (ii) Soit (f^+, f_+) une paire de foncteurs exacts adjoints; pour que f^+ soit t -exact à droite, il faut et il suffit que f_+ soit t -exact à gauche et dans ce cas $({}^p f^+, {}^p f_+)$ forment une paire de foncteurs adjoints.
- (iii) Si $f_1 : D_{c,1}^b \rightarrow D_{c,2}^b$ et $f_2 : D_{c,2}^b \rightarrow D_{c,3}^b$ sont t -exact à gauche (resp. à droite), alors $f_2 \circ f_1$ l'est aussi et ${}^p(f_2 \circ f_1) = {}^p f_2 \circ {}^p f_1$.

On rappelle que $j_!$, Rj_* , j^* , i_* sont t -exact et donc égaux à leur version perverse alors que i^* est t -exact à droite. De même les morphismes $r_{J,I}$ et $[g]_{J,I}$ étant finis, $r_{J,I}^*$ (resp. $[g]_{J,I,*}$) est t -exact à droite (resp. t -exact) de sorte que $({}^p r_{J,I}^*, {}^p r_{J,I,*})$ et $({}^p [g]_{J,I,*} = [g]_{J,I,*}, {}^p [g]_{J,I}^!)$ forment des paires de foncteurs adjoints avec ${}^p r_{J,I}$ et ${}^p [g]_{J,I}^!$ (resp. ${}^p r_{J,I,*}$, resp. ${}^p [g]_{J,I,*}$) exacts à droite (resp. à gauche, resp. exact). Pour $J \subset I$, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} X_J & \xleftarrow{j_J} & \overline{X}_J & \xleftarrow{i_J} & Y_J \\ \downarrow [g]_{J,I} & & \downarrow \overline{[g]}_{J,I} & & \downarrow \widetilde{[g]}_{J,I} \\ X_I & \xleftarrow{j_I} & \overline{X}_I & \xleftarrow{i_I} & Y_I \end{array}$$

Soient alors $(\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}}$ un objet de $\text{FPH}_{\widetilde{G}}(X_{\mathcal{I}})$ et g, J, I avec $u_{J,I}(g) : \mathcal{F}_I \rightarrow [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_I)$. Par application de $Rj_{I,*}$ (resp. $j_{I,!}$), on obtient $Rj_{I,*} \mathcal{F}_I \xrightarrow{Rj_{I,*}(u_{J,I}(g))} Rj_{I,*}[g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_I) = \overline{[g]}_{J,I,*}(Rj_{I,*} \mathcal{F}_I)$ (resp. $j_{I,!} \mathcal{F}_I \xrightarrow{j_{I,!}(u_{J,I}(g))} j_{I,!}[g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_I) = \overline{[g]}_{J,I,*}(j_{I,!} \mathcal{F}_I)$).

En ce qui concerne $j_{I,!}$, on considère le diagramme commutatif de la figure (5.2) où la flèche notée (1) s'obtient à partir du diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} Y_J & \xrightarrow{\widetilde{[g]}_{J,I}} & Y_I \\ i_J \downarrow & & \downarrow i_I \\ X_J & \xrightarrow{[g]_{J,I}} & X_I \end{array}$$

comme le morphisme de changement de base $\overline{i}_I^* \circ [g]_{J,I,*} \rightarrow [g]_{J,I,*} \circ i_J^*$.

Les cas de i_* , ${}^p i^*$ sont traités ci dessus et ceux de ${}^p j^*$ et ${}^p Rj^!$ se traitent de manière strictement similaire. □

5.2.9 — Exemples : étant donné un système local \mathcal{L}_\emptyset sur X_\emptyset , soit pour $I \in \mathcal{I}$, $\mathcal{L}_I = r_{I,\emptyset}^* \mathcal{L}_\emptyset$; $(\mathcal{L}_I[d])_{I \in \mathcal{I}}$ est alors un objet de $\text{FPH}_{\widetilde{G}}(X_{\mathcal{I}})$, où d est la dimension de $X_{\mathcal{I}}$. Si en outre les X_I sont la fibre générique d'un S -schéma \mathcal{X}_I de dimension relative $d - 1$, pour S un trait, alors $(R\Psi_\eta(\mathcal{L}_I)[d - 1])_{I \in \mathcal{I}}$ est un objet de $\text{FPH}_{\widetilde{G}}(\overline{X}_{\mathcal{I}})$ où \overline{X}_I désigne la fibre spéciale de X_I .

5.3. Notations. —

5.3.1. Définitions. — — Pour $1 \leq g \leq d$, on notera $s_g := \lfloor \frac{d}{g} \rfloor$, la partie entière de d/g .

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & j_{I,*}(\mathcal{F}_I) & \longrightarrow & Rj_{I,*}(\mathcal{F}_I) & \longrightarrow & i_{I,*} \circ {}^p i_I^* \circ Rj_{I,*}(\mathcal{F}_I) & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow Rj_{I,*}(u_{J,I}(g)) & & \downarrow i_{I,*} \circ {}^p i_I^* \circ Rj_{I,*}(u_{J,I}(g)) & \\
 & & & Rj_{I,*} \circ [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_I) & \longrightarrow & i_{I,*} \circ {}^p i_I^* \circ Rj_{I,*} \circ [g]_{J,I,*}(\mathcal{F}_I) & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow = & \\
 & & & & & i_{I,*} \circ {}^p i_I^* \circ [\overline{g}]_{J,I,*} \circ Rj_{J,*}(\mathcal{F}_J) & \\
 & & & & & \downarrow = & \\
 & & & & & i_{I,*} \circ {}^p (i_I^* \circ [\overline{g}]_{J,I,*}) \circ Rj_{J,*}(\mathcal{F}_J) & \\
 & & & & & \downarrow (1) & \\
 & & & & & i_{I,*} \circ {}^p ([\widetilde{g}]_{J,I,*} \circ i_J^*) \circ Rj_{J,*}(\mathcal{F}_J) & \\
 & & & & & \downarrow = & \\
 & & & & & i_{I,*} \circ [\widetilde{g}]_{J,I,*} \circ {}^p i_J^* \circ Rj_{J,*}(\mathcal{F}_J) & \\
 & & & & & \downarrow = & \\
 0 \rightarrow & [\overline{g}]_{J,I,*} \circ j_{J,*}(\mathcal{F}_J) & \longrightarrow & [\overline{g}]_{J,I,*} \circ Rj_{J,*}(\mathcal{F}_J) & \longrightarrow & [\overline{g}]_{J,I,*} \circ i_{J,*} \circ {}^p i_J^* \circ Rj_{J,*}(\mathcal{F}_J) & \rightarrow 0
 \end{array}$$

– On introduit les injections

$$i^h : \overline{X}_{U^p,m}^{[d-h]} \hookrightarrow \overline{X}_{U^p,m}, \quad j^{\geq h} : \overline{X}_{U^p,m}^{(d-h)} \hookrightarrow \overline{X}_{U^p,m}^{[d-h]} \quad k_1^=h : \overline{X}_{U^p,m,M_{d-h}}^{(d-h)} \hookrightarrow \overline{X}_{U^p,m}^{(d-h)}$$

– On notera $\text{FPH}(\overline{X})$ (resp. $\text{FPH}(X)$, resp. $\text{FPH}(\overline{X}^{(h)})$, resp. $\text{FPH}(\overline{X}^{[h]})$) la catégorie des faisceaux pervers de Hecke sur la tour des $\overline{X}_{U^p,m}$ (resp. $X_{U^p,m}$, resp. $\overline{X}_{U^p,m}^{(h)}$, resp. $\overline{X}_{U^p,m}^{[h]}$) avec $\tilde{G} = G(\mathbb{A}^\infty)$.

– On notera aussi $\text{FPH}(\overline{X}_{M_{d-h}}^{(d-h)})$ (resp. $\text{FPH}(\overline{X}_{M_{d-h}}^{[d-h]})$) la catégorie des faisceaux pervers de Hecke sur la tour des $\overline{X}_{U^p,m,M_{d-h}}^{(d-h)}$ (resp. $\overline{X}_{U^p,m,M_{d-h}}^{[d-h]}$) avec $\tilde{G} = G(\mathbb{A}^{\infty,v}) \times P_{h,d}(F_v)$. On utilisera des notations similaires pour les faisceaux de Hecke.

– Un système projectif de faisceaux pervers ou pas, non nul $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}} \in \text{FPH}(\overline{X}^{(d-h)})$ (ou dans $\text{FH}(\overline{X})$) sera dit induit s'il est de la forme

$$(k_1^=h,* \mathcal{F}_I)_{I \in \mathcal{I}} \times_{P_{h,d}^{op}(F_v)} GL_d(F_v)$$

où $\times_{P_{h,d}^{op}(F_v)} GL_d(F_v) : \text{FPH}(\overline{X}_{M_{d-h}}^{(d-h)}) \longrightarrow \text{FPH}(\overline{X}^{(d-h)})$ est le foncteur qui à un faisceau $(\mathcal{F}_{0,I})_I$ associe $(\mathcal{F}_{0,I} \times_{P_{h,d}^{op}(\mathcal{O}_v)} GL_d(\mathcal{O}_v))_I$ de sorte que pour tout $g \in GL_d(F_v)$, la correspondance associée induit un isomorphisme de $g^* \mathcal{F}_{\overline{g}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_0$ où $\mathcal{F}_{\overline{g}}$ est la restriction

de \mathcal{F} à la composante $(\overline{X}_{U^p, m, M_g}^{(d-h)})_I$ où M_g est le sous-module associé à l'image de g dans le quotient $GL_d(F_v)/P_{h,d}(F_v)$.

– Pour $tg < d$, on notera $\mathcal{F}(g, t, \pi_v)_1 = (\mathcal{F}(g, t, \pi_v, I)_1)_{I \in \mathcal{I}}$ le système local

$$\mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v^\vee})} = (\mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v^\vee}, I)}_{I \in \mathcal{I}})$$

sur la tour des $(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-tg}}^{(d-tg)})_{I=U^p(m)}$ et soit $\mathcal{F}(g, t, \pi_v) = (\mathcal{F}(g, t, \pi_v, I))_I$ le faisceau induit associé, défini donc sur la tour des $(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)})_{I=U^p(m)} : \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d-tg] \in \text{FPH}(\overline{X}^{(d-tg)})$.

– Pour $1 \leq tg \leq d$, un $GL_d(F_v) \times W_v$ -faisceau sur la tour $(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)})_{I=U^p(m)}$ sera dit de type $HT(g, t)$ s'il est induit, et si sa restriction à $(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-tg}}^{(d-tg)})_{I=U^p(m)}$ est de la forme

$$(\mathcal{F}(g, t, \pi_v, I)_1 \otimes \Pi_v^{\mathfrak{K}_{v, m_1}} \otimes \chi)_I$$

pour un certain triplet (Π_v, π_v, χ) où :

- π_v est une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$,
- Π_v est une représentation de $GL_{tg}(F_v)$
- χ un caractère de \mathbb{Z} ,
- et $\mathfrak{K}_{v, m_1} := \text{Ker}(GL_{tg}(\mathcal{O}_v) \rightarrow GL_{tg}(\mathcal{O}_v/v^{m_1}))$ ⁽⁸⁾

telle que l'action d'un élément $(g^{\infty, p}, g_{p,0}, g_v^0, g_v^{et}, g_{v_i}, c_v) \in G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{tg}(F_v) \times GL_{d-tg}(F_v) \times \prod_{i=2}^r (B_{v_i}^{op})^\times \times W_v$ soit donnée par l'action naturelle de

$$(g^{\infty, p}, g_{p,0} p^{-f_1 v(c_v)}, g_v^{et}, g_{v_i}, v(\det g_v^c) - v(c_v)) \in G(\mathbb{A}^{\infty, p}) \times \mathbb{Q}_p^\times \times GL_{d-tg}(F_v) \times \mathbb{Z}$$

sur $\mathcal{F}_{\text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v^\vee})}$ au dessus de $(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-tg}}^{(d-tg)})_{I=U^p(m)}$, et par celle de (g_v^c, c_v) sur $\Pi_v \otimes \chi$. On le notera alors

$$HT(g, t, \pi_v, \Pi_v, \chi) = (HT(g, t, \pi_v, \Pi_v, \chi, I))_I, \quad HT(g, t, \pi_v, \Pi_v, \chi)[d-tg] \in \text{FPH}(\overline{X}^{(d-tg)})$$

et on omet χ si celui-ci est trivial. De même le faisceau $HT(g, t, \pi_v, \Pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi$ sera noté

$$HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_v) = (HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_v, I))_I, \quad HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_v)[d-tg] \in \text{FPH}(\overline{X}^{(d-tg)})$$

– Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et $1 \leq t \leq s_g$, on note

$$\mathcal{P}(g, t, \pi_v) = (\mathcal{P}(g, t, \pi_v, I))_I \in \text{FPH}(\overline{X})$$

le faisceau pervers défini comme l'extension intermédiaire $j_{!*}^{\geq tg}$ du faisceau pervers sur $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}$, $HT(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v^\vee})[d-tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$, qui est donc pur de poids $d-tg$ pour π_v unitaire ⁽⁹⁾ et qui ne dépend que de la classe d'équivalence inertielle de π_v .

⁽⁸⁾ On ne met pas en indice de référence à la dimension tg car en général le contexte est clair.

⁽⁹⁾ sinon on rajoute le poids de $\text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$

5.3.2. Remarque. — $\mathcal{F}(g, t, \pi_v)$ et $HT(g, t, \pi_v, \Pi_v)$ (resp. $\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$) se présentent sous la forme d'une somme directe de e_{π_v} systèmes locaux (resp. faisceaux pervers) irréductibles :

$$\mathcal{F}(g, t, \pi_v) = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathcal{F}(g, t, \rho_{v,i}) \quad (\text{resp. } \mathcal{P}(g, t, \pi_v) = \bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \mathcal{P}(g, t, \rho_{v,i}))$$

donnés par la restriction de $JL^{-1}(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v})$ à $\mathcal{D}_{v,tg}^\times$ qui s'écrit comme une somme directe $\bigoplus_{i=1}^{e_{\pi_v}} \rho_{v,i}$ de représentations irréductibles, de sorte que la différence entre les faisceaux $\mathcal{F}(g, t, \rho_{v,i})$ (resp. $\mathcal{P}(g, t, \rho_{v,i})$) provient de l'action de $\mathcal{D}_{v,tg}^\times \subset \mathcal{N}_v$ donnée sur chacun comme dans la formule (3.1).

5.3.3. Définition. — Soit $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_I)_I$ le système projectif de groupes de Grothendieck associés à $\text{FPH}(\overline{X}_I)$.

5.4. Filtration de monodromie. —

5.4.1. Théorème. — Soit $1 \leq g \leq d$ et s_g la partie entière de d/g . Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on a l'égalité suivante dans \mathfrak{G} :

$$e_{\pi_v}[R\Psi_{\pi_v}[d-1]] = \sum_{k=1-s_g}^{s_g-1} \sum_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)\left(-\frac{tg+k-1}{2}\right),$$

où la torsion concerne l'action de W_v .

5.4.2 — Pour tout s , soit $MGr_k(s)$ le faisceau pervers nul pour $|k| \geq s$ et égal à

$$\bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} j_{!*}^{\geq t} \mathcal{F}(1, t, 1_v)[d-t] \otimes \overleftarrow{[t-1]}_{1_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(1_v)(-(t-1+k)/2)$$

5.4.3 — Pour toute représentation cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$, on pose

$$\begin{aligned} \pi_v \diamond (j_{!*}^{\geq t} \mathcal{F}(1, t, 1_v)[d-l] \otimes \overleftarrow{[t-1]}_{1_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(1_v)(-(t-1+k)/2)) := \\ j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d-tg] \otimes \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-(tg-1+k)/2) \end{aligned}$$

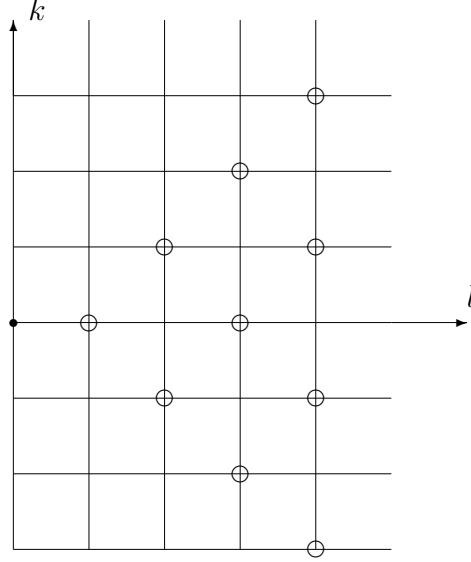
5.4.4. Théorème. — Soit $1 \leq g \leq d$ et s_g la partie entière de d/g . Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on a $e_{\pi_v} gr_{\bullet, \pi_v} = \pi_v \diamond MGr_{\bullet}(s_g)$.

5.4.5 — Autrement dit pour $1 \leq g \leq d$, π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et pour tout $|k| < s_g$, $e_{\pi_v} gr_{k, \pi_v}$ est égale à

$$\bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)\left(-\frac{tg+k-1}{2}\right),$$

dans $\text{FPH}(\overline{X})$, où la torsion concerne l'action de W_v .

FIGURE 1. Pour $s = 4$, dans le repère (t, k) , on marque sur la ligne $k = k_0$ les t tels que $j_{!*}^{\geq t} \mathcal{F}(1, t, 1_v)[d-t] \otimes \mathrm{Sp}_t(1_v) \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^{\vee}(1_v)(-(t-1+k)/2)$ soit un constituant de $MGr_{k_0}(4)$



5.4.6. Définition. — Pour $1 \leq g \leq d$, et on fixe une représentation π_v irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, que l'on notera χ_v pour $g = 1$. Pour tout $1 \leq t \leq s_g$, Π_t désigne une représentation quelconque de $GL_{tg}(F_v)$, qui dans les applications sera elliptique de type π_v .

5.4.7. Théorème. — Pour g, π_v et Π_t comme ci-dessus, on considère la restriction à la tour des $(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)})_{I=U^p(m)}$ de $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$;

- elle est nulle pour h ne s'écrivant pas sous la forme $(t+a)g$ avec $0 \leq a \leq s_g - t$;
- pour $h = (t+a)g$ avec $0 \leq a \leq s_g - t$, elle est nulle pour $i \neq tg - d + a(g-1)$ et sinon elle est isomorphe dans $\mathrm{FH}(\overline{X})$ à $^{(10)} HT(g, t+a, \pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [a-1]_{\pi_v}) \otimes \Xi^{\frac{a(g-1)}{2}}$.

5.4.8. Corollaire. — Pour $g > 1$, $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$ est nul pour i ne s'écrivant pas sous la forme $tg - d + a(g-1)$ avec $0 \leq a \leq s_g - t$ et pour un tel $i = tg - d + a(g-1)$ il est isomorphe dans $\mathrm{FH}(\overline{X})$ à $j_{!*}^{\geq (t+a)g} HT(g, t+a, \pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [a-1]_{\pi_v}) \otimes \Xi^{\frac{a(g-1)}{2}}$.

5.4.9. Corollaire. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ pour $1 \leq g \leq d$, on a

⁽¹⁰⁾ cf. la définition (3.2.8)

(i) pour $g > 1$, $(h^i gr_{k,\pi_v})^{e_{\pi_v}}$ est une somme directe sur tous les couples (t, a) tels que $-d + tg + a(g - 1) = i$ et $t \equiv k - 1 \pmod{2}$ des faisceaux induits dans $\text{FH}(\overline{X})$:

$$j_1^{\geq (t+a)g} HT(g, t + a, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{a-1}]_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{tg - 1 + k + a(g - 1)}{2} \right)$$

(ii) pour $g = 1$, la restriction de $h^i gr_{k,\chi_v}$ pour $i \equiv k - 1 \pmod{2}$, à la tour des $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-t)}$ pour $t \geq d + i$ est égale au faisceau induit dans $\text{FH}(\overline{X})$

$$HT(1, t, \chi_v, [\overleftarrow{i-1}]_{\chi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{t-i-1}]_{\chi_v}) \otimes \chi_v \left(-\frac{d + i - 1 + k}{2} \right)$$

et nulle dans tous les autres cas.

5.4.10 — On introduit les bicomplexes

$$MGE_{\bullet, \bullet}^{\bullet, \bullet}(s) = \bigoplus_{l=1}^s j_1^{\geq l} \mathcal{F}(1, t, 1_v)[d - t] \otimes MLE_{\bullet, \bullet}^{\bullet, \bullet}(s)$$

de sorte que le point (2) du théorème (4.2.3) et donc (4.1.2), découle du résultat suivant.

5.4.11. Théorème. — Soit $1 \leq g \leq d$ et s_g la partie entière de d/g . Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on a $e_{\pi_v} E_{\bullet, \bullet, gr, glob, \pi_v}^{\bullet, \bullet} = \pi_v \diamond MGE_{\bullet, \bullet}^{\bullet, \bullet}(s_g)$.

5.4.12 — Autrement dit, la suite spectrale (5.1.10) dégénère en E_2 et les applications $d_1^{i,j}$ sont induites par les suites exactes (4.2.8).

Remarque : A la figure (9) on a représenté la suite spectrale (5.1.10) dans le cas $g = 6$ et $s = 4$.

6. Schéma de la preuve : par récurrence

6.0.13 — Remarquons tout d'abord que le théorème (5.4.4) découlerait de (5.4.1) si on disposait de la conjecture de monodromie-poids (MP) version faisceautique, i.e. la pureté des gradués de la filtration de monodromie. D'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues (BF), le théorème (4.2.3) se déduit de la détermination des germes en un point supersingulier des gradués de la filtration de monodromie du complexe des cycles évanescents de la variété de Shimura et de la suite spectrale associée, soit donc des théorèmes (5.4.4), (5.4.7) et (5.4.11). Par ailleurs, comme on l'a déjà noté, le théorème (4.1.2) découle directement de (4.2.3) puisqu'il s'agit de l'aboutissement de la suite spectrale associée à la filtration de monodromie-locale. On résume ces implications dans le tableau suivant. Le principe est alors de raisonner par récurrence en supposant connu (4.2.3) pour tout $d' < d$.

6.0.14. Remarque. — A priori, il nous faut travailler à niveau fini et montrer que les résultats obtenus sont compatibles aux correspondances de Hecke; cependant devant l'immédiateté de ces vérifications et afin de ne pas alourdir encore les preuves, on raisonne

(5.4.1)
↓ MP ?
(5.4.4) + (5.4.7) + (5.4.11)
↓ BF
(4.2.3) en hauteur $\leq d$
↓
(4.1.2) en hauteur $\leq d$

souvent sur le système inductif total. En particulier nous ne marquerons plus la référence au niveau dans les notations; par exemple on écrira \mathcal{F}_{τ_v} au lieu de $\mathcal{F}_{\tau_v, U^v(m)}$.

6.0.15 — Dans un premier temps le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues (BF) et la description (HT) des faisceaux des cycles évanescents en fonction des systèmes locaux d’Harris-Taylor (cf. (3.2.4)), nous permet, §7, de montrer le théorème (5.4.1). On montre ensuite, proposition (8.2.1), le théorème (5.4.7) hors des points supersinguliers et on obtient un contrôle (C) sur ce qui peut se passer au niveau de ces derniers. Selon le même principe, si on disposait de (4.2.3) pour la hauteur d , on en déduirait (5.4.7) et (5.4.11). On démontre, §9, comment la connaissance des parties de poids minimal de (4.1.2) permet d’obtenir (5.4.7), proposition (9.1.2)⁽¹¹⁾, (5.4.11), §9.2 et enfin §9.3, la conjecture de monodromie-poids version faisceautique i.e. le théorème (5.4.4). Reste alors, §10.1.17, à calculer les parties de poids minimal de (4.1.2) ce qui se fait via l’étude de la suite spectrale des cycles évanescents (SSCE) à travers les suites spectrales associées à la stratification (SSS) en utilisant le contrôle (C) sur ce qui peut se passer au niveau des points supersinguliers. Evidemment tout ceci passe par le calcul, ou au moins le contrôle, des groupes de cohomologie (CHT) des systèmes locaux d’Harris-Taylor, qui sont distillés au fur et à mesure et dont nous détaillons l’enchaînement logique après le tableau récapitulatif suivant.

6.0.16 — En ce qui concerne le rôle des divers calculs de groupes de cohomologie, voici leur enchaînement logique. Pour commencer on calcule exclusivement des composantes $\Pi^{\infty, v}$ -isotypiques pour Π une représentation irréductible automorphe et cohomologique de $G_r(\mathbb{A})$, car dans tous les autres cas tous les calculs donnent des résultats nuls. On considère plus particulièrement deux situations selon que Π_v est de la forme $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$ ou $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$ pour π_v une représentation cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $d = sg$. Pour alléger les notations, on notera $H^i(j_1^{\geq tg})$ pour la composante $\Pi^{\infty, v}$ -isotypique du i -ème groupe de cohomologie du complexe $j_1^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d - tg]$ et on utilisera une notation similaire pour $H^i(j_{1*}^{\geq tg})$.

6.0.17 — La situation est largement plus simple dans le cas où $\Pi_v = [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$. On commence, proposition (7.4.1), par calculer les $H^i(j_1^{\geq tg})$ et on trouve que ceux-ci sont tous nuls si $tg \neq d$. En utilisant (3.2.6), on en déduit alors, corollaire (7.4.4), le calcul des

⁽¹¹⁾de sorte que (5.4.7)=(8.2.1)+(9.1.2)

§7 : (4.2.3) en hauteur $d' < d$	\implies BF+HT	(5.4.1)
§8 : (4.2.3) en hauteur $d' < d$	\implies (8.2.1)	(5.4.7) hors des points supersinguliers + C=contrôle aux points supersinguliers
(4.2.3) en hauteur $d' \leq d$	\implies (9.1.2)	(5.4.7)+ (5.4.11)
§9 : (4.1.2) en hauteur $d' < d$ et en poids minimal pour la hauteur d	\implies C+N	$\left\{ \begin{array}{l} (5.4.7) : \text{§9.1 proposition (9.1.2)} \\ (5.4.11) : \text{§9.2} \\ (5.4.4) : \text{§9.3} \Rightarrow \text{MP faisceautique} \end{array} \right.$
§10	\implies SSCE+SSS +C+CHT	poids minimal de (4.1.2) en hauteur d

$H^i(j_!^{\geq tg})$ qui sont nuls pour $i \neq 0$. Ces calculs permettent de compléter, corollaire (7.4.6), aux points supersinguliers, la détermination des constituants simples du faisceau pervers $j_!^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d - tg]$ obtenu, corollaire (7.3.17), sur les autres strates grâce à la description des faisceaux des cycles évanescents en fonction des systèmes locaux d'Harris-Taylor ainsi qu'au théorème de comparaison de Berkovich-Fargues. On en déduit alors, corollaire (7.4.11), le calcul des $\Pi^{\infty, v}$ -parties des groupes de cohomologie $H_c^j(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}, R^i \Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi)$. A ce moment ci, on dispose du théorème (5.4.4) de sorte que l'on peut calculer via la suite spectrale des poids SSP, corollaire (10.1.1), les $\Pi^{\infty, v}$ -parties des groupes de cohomologie $H_{\eta_v, \xi}^i$ de la fibre générique. On en déduit alors, proposition (10.1.2), les $\Pi^{\infty, v}$ -parties des termes $E_2^{p, q}$ de la suite spectrale des cycles évanescents qui nous permet d'obtenir, corollaire (10.1.3), une première liste de possibilités pour les $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i(\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_s(\pi_v)^\vee))$.

6.0.18 — On considère alors $\Pi_v = \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ et on calcule, proposition (10.3.4), les $H^i(j_{!*}^{\geq tg})$ qui sont non nuls pour $i \equiv s - t \pmod{2}$ et $|i| \leq s - t$. De ce calcul et de la connaissance des constituants simples des $j_!^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d - tg]$, on en déduit, lemme (10.3.13), un contrôle sur les $H^i(j_!^{\geq tg})$. On étudie ensuite la suite spectrale des cycles évanescents. On commence par en déterminer l'aboutissement, corollaire (10.3.5) et proposition (11.1), en utilisant le calcul des $H^i(j_{!*}^{\geq tg})$ ainsi que le théorème (5.4.4). En utilisant le théorème de Lefschetz difficile ainsi que le corollaire (10.1.3) qui contrôle ce qui se passe au niveau des points supersinguliers, on en déduit, proposition (10.3.12) et corollaire (11.2), le calcul des $H^i(j_!^{\geq tg})$. Le résultat est qu'en ce qui concerne les parties de poids minimal, $s(g-1)$, tout ce passe au niveau des points supersinguliers. L'étude de la suite spectrale des cycles évanescents fournit alors la partie de poids $s(g-1)$ du théorème (4.1.2) qui d'après ce que l'on a vu, implique les théorèmes globaux (5.4.7) et (5.4.11) qui d'après le théorème de

comparaison de Berkovich-Fargues, impliquent le théorème local (4.2.3), ce qui complète la démonstration. On résume la discussion précédente dans le tableau suivant.

$\Pi_v = \mathrm{Sp}_s(\pi_v)$		$\Pi_v = \mathrm{Speh}_s(\pi_v)$
$H^i(j_{!*}^{\geq tg})$ (7.4.1)		
$\begin{array}{c c} \text{SSP} \downarrow & \downarrow (3.2.6) \\ \hline H_{\eta_v}^i (10.1.1) & H^i(j_{!*}^{\geq tg}) (7.4.4) \end{array} \Rightarrow$	$\begin{array}{c} j_{!*}^{\geq tg} = \sum j_{!*}^{\geq (t+r)g} \\ (7.3.17) \\ + \\ (7.4.6) \end{array} \Rightarrow$	$H^i(j_{!*}^{\geq tg})$ (10.3.4)
\downarrow		$\downarrow (5.4.4) \quad \downarrow \begin{smallmatrix} \text{SSP} \\ \text{LD} \end{smallmatrix}$
$H^j(\overline{X}^{(d-h)}, R^i\Psi) \quad h \neq d$ (7.4.11)		$\begin{array}{c c} \text{contrôle} & H_{\eta_v}^i \\ \hline H^i(j_{!*}^{\geq tg}) & (10.3.5) \\ (10.3.13) & (11.1) \end{array}$
(10.1.1) \downarrow SSS		$\overline{\text{LD} + (10.1.3)}$
$H^j(R^i\Psi) \quad j \neq 0$ (10.1.2)		\downarrow $\overline{H^i(j_{!*}^{\geq tg})}$ (10.3.12) (11.2)
\downarrow SSCE		$\overline{\text{SSCE}}$
contrôle $\Psi_{F_v}^{d,i}$ (10.1.3)	$\begin{array}{c} (5.4.7) \\ (5.4.11) \end{array} \Big $	$\leftarrow \Psi^{d,i}$ (4.1.2)
	$\overline{\text{BF}}$	
	\downarrow	
	(4.2.3)	

6.0.19. Remarque. — - Afin de ne pas multiplier les situations, nous n'avons considéré dans nos énoncés que les faisceaux induits notés $HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)$ à partir des systèmes locaux $\mathcal{F}(g, t, \pi_v)_1 \otimes \Pi_t$. Ceux-ci sont munis d'une action par correspondances de $G(\mathbb{A}^\infty) \times \mathbb{Z}$; cependant quand on les considère comme des constituants de $R\Psi_v$, on les voit comme munis d'une action par correspondances de $G(\mathbb{A}^\infty) \times W_v$. Le lien entre les deux situations est donnée par $c_v \in W_v \mapsto -v(c_v) \in \mathbb{Z}$. Afin de distinguer les deux situations, l'action de W_v sera toujours accompagnée d'un $\mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$ tandis que pour \mathbb{Z} il sera toujours question du caractère Ξ (cf. plus loin).

- Par ailleurs nous ne considérons pas par la suite l'action totale de W_v mais plutôt ses frobenius semi-simplifiés.

PARTIE III
PREUVE DES THÉORÈMES

7. Étude dans le groupe de Grothendieck \mathfrak{G}

7.1. Groupe de Grothendieck des faisceaux pervers : généralités. —

7.1.1 — Soit X un \mathbb{F}_q -schéma X . On rappelle que la catégorie $\text{Perv}(X)$ des faisceaux pervers sur X est noethérienne et artinienne, ses objets simples étant de la forme $j_{!*}\mathcal{L}$ où \mathcal{L} est un système local irréductible sur $j : U \hookrightarrow X$, où U est un ouvert d'un fermé de X .

Pour P un objet de $\text{Perv}(X)$, sa dimension n est par définition la plus grande dimension des supports U des faisceaux pervers simples constituant P de sorte que $-n = \min\{i / h^i P \neq 0\}$ et $h^{-n}P$ a un support de dimension n .

7.1.2. Définition. — Étant donnée une catégorie triangulée A localement petite, on considère son groupe de Grothendieck $K(A)$ défini comme le groupe libre engendré par les classes d'isomorphismes d'objets de A quotienté par les relations :

- $A[1] = -A$;
- $A = B + C$ pour tout triangle distingué $B \rightarrow A \rightarrow C \xrightarrow{+1}$.

7.1.3. Proposition. — Soit $(\mathcal{D}^{\leq 0}, \mathcal{D}^{\geq 0})$ une catégorie dérivée munie d'une t -structure non dégénérée : on note \mathcal{C} son coeur qui est alors une catégorie abélienne de groupe de Grothendieck $\text{Groth}(\mathcal{C})$. L'application qui à un objet \mathcal{F} de \mathcal{D} associe

$$\sum_i (-1)^i [{}^p h^i \mathcal{F}] \in \text{Groth}(\mathcal{C})$$

induit un isomorphisme du groupe de Grothendieck $K(\mathcal{D})$ de la catégorie triangulée \mathcal{D} , sur $\text{Groth}(\mathcal{C})$.

Démonstration. — Pour tout objet \mathcal{G} de \mathcal{D} et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a un triangle distingué

$$\tau_{\leq n} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \tau_{\geq n+1} \mathcal{G} \xrightarrow{+1}$$

de sorte que si \mathcal{G} est un objet de $\mathcal{D}^{\geq n}$, on a $[\mathcal{G}] = (-1)^n [{}^p h^n \mathcal{G}] + [\tau_{n+1} \mathcal{G}]$ car $\tau_{\leq n} \mathcal{G} = \tau_{\leq n} \tau_{\geq n} \mathcal{G} = ({}^p h^n \mathcal{G})[n]$. Soit alors a et b tel que \mathcal{F} soit un objet de $\mathcal{D}^{[a,b]}$. En appliquant ce qui précède à $\tau_{\geq n} \mathcal{F}$ pour n variant de a à b , on obtient l'égalité $[\mathcal{F}] = \sum_i (-1)^i [{}^p h^i \mathcal{F}]$, de sorte que l'application $\sum_i \alpha_i [P_i] \in \text{Groth}(\mathcal{C}) \mapsto \sum_i \alpha_i [P_i] \in K(\mathcal{D})$ est inverse de celle de l'énoncé. \square

7.1.4. Corollaire. — Soit $D_b^c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ la catégorie dérivée des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -complexes constructibles sur un \mathbb{F}_q -schéma X que l'on muni de la t -structure de perversité autoduale (resp. de la t -structure triviale) de coeur la catégorie $\text{Perv}(X)$ (resp. $\text{Const}(X)$) des faisceaux pervers

(resp. des faisceaux constructibles) sur X . Pour tout objet \mathcal{F} de $D_b^c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$, son image dans $\text{Groth}(\text{Perv}(X))$ est déterminée par son image dans $\text{Groth}(\text{Const}(X))$.

7.1.5. Lemme. — Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion d'un ouvert U d'un \mathbb{F}_q -schéma X ; on note $i : Z \hookrightarrow X$ le fermé complémentaire. L'image d'un objet \mathcal{F} de $D_b^c(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dans $\text{Groth}(\text{Const}(X))$ est déterminée par l'image de $j^*\mathcal{F}$ dans $\text{Groth}(\text{Const}(U))$ et celle de $i^*\mathcal{F}$ dans $\text{Groth}(\text{Const}(Z))$.

Démonstration. — Le résultat découle directement de l'existence du triangle distingué $j_!j^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \xrightarrow{+1}$. \square

On en déduit alors la proposition suivante.

7.1.6. Proposition. — Soit X un schéma muni d'une stratification

$$X^{[0]} \subset X^{[1]} \subset \dots \subset X^{[d-1]} = X$$

et soit \mathcal{P} un faisceau pervers sur X . Alors l'image de \mathcal{P} dans le groupe de Grothendieck des faisceaux pervers sur X est déterminée par l'image de $\sum_i (-1)^i [h^i(\mathcal{P})]_{X^{(h)}}$ dans le groupe de Grothendieck des faisceaux localement constant sur $X^{(h)} := X^{[h]} - X^{[h-1]}$ pour tout $0 \leq h < d$.

7.2. Image dans \mathfrak{G} de $R\Psi_v[d-1]$. —

7.2.1. Proposition. — Les complexes $Rj_*^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)_0[d-tg]$ et $j_!^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)_0[d-tg]$ sont des faisceaux pervers.

Démonstration. — Le résultat découle du fait que $j^{\geq tg}$ est une inclusion affine. \square

7.2.2. Proposition. — Pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, on a l'égalité suivante dans \mathfrak{G} :

$$e_{\pi_v}[R\Psi_{\pi_v}[d-1]] = \sum_{i=1}^{s_g} \sum_{t=i}^{s_g} (-1)^{t-i} [j_!^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{i-1}, \overrightarrow{t-i}]_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{tg-2+2i-t}{2})] \quad (7.2.11)$$

Démonstration. — L'isomorphisme (3.2.4) et l'égalité (3.1.3) déterminent pour tout $0 \leq h < d$, la somme $\sum_i (-1)^i [R^i \Psi_{v, [\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}]}]$ dans le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne des faisceaux constructibles sur $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}$. Le résultat découle alors de la proposition (7.1.6). \square

7.3. Décomposition dans \mathfrak{G} des $j_!^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d - tg]$. — Rappelons le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues

7.3.1. Théorème. — Soit z un point géométrique de $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}$. Le germe en z de $R\Psi_v$ est égal à $\Psi_{F_v, l, h, m_1}^\bullet$ en tant qu'objet de la catégorie dérivée filtrée $\mathbb{D}^b F(\overline{\mathbb{Q}}_l)$.

Ainsi l'hypothèse de récurrence sur la filtration de monodromie-locale des modèles de Deligne-Carayol de hauteur strictement inférieure à d , donne le corollaire suivant.

7.3.2. Corollaire. — Pour tout point géométrique $z_I = U^p(m)$ de $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}$, le germe en z_I de $h^i gr_{k, \pi_v, I}$ vérifie les propriétés suivantes :

(1) il est nul si h n'est pas divisible par g ;

(2) pour $h = tg$, ils sont nuls pour $|k| \geq l$ quelque soit i ;

(3) pour $h = tg$ et $|k| < t$:

(i) ils sont nuls pour $i < tg - d - t + 1 + |k|$ et pour $i \not\equiv tg - d - t + 1 + k \pmod{2}$;

(ii) pour $tg - d - t + 1 + |k| \leq i = tg - d - t + 1 + |k| + 2r \leq tg - d$, la fibre en z_I de $h^i gr_{k, \pi_v, I}$ est naturellement munie d'une action de $\mathcal{N}_v \cap \mathcal{H}_{v, m_1}$ où $\mathcal{N}_v \subset GL_h(F_v) \times D_{v, h}^\times \times W_v$ est défini comme au §2.1, où $GL_h(F_v)$ est vu naturellement comme un sous-groupe du Levi $GL_h(F_v) \times GL_{d-h}(F_v)$ de $GL_d(F_v)$ et où \mathcal{H}_{v, m_1} est l'algèbre de Hecke associée à $\mathfrak{K}_{v, m_1} \subset GL_h(\mathcal{O}_v)$. On obtient alors que la fibre en z_I de $(h^i gr_{k, \pi_v, I})^{e_{\pi_v}}$ est isomorphe, en tant que $\mathcal{N}_v \cap \mathcal{H}_{v, m_1}$ module, aux invariants sous \mathfrak{K}_{v, m_1} de

$$JL^{-1}(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}}) \otimes \overleftarrow{[|k|+2r]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[t-2r-|k|-2]_{\pi_v}} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{t(g-1) + |k| + k + 2r}{2} \right).$$

Remarque : En ce qui concerne le dernier point du corollaire précédent, et donc le fait que la filtration locale soit équivariante, on peut la déduire du théorème de comparaison de Berkovich-Fargues avec les strates des variétés de Shimura en rang $d' < d$ en supposant connus, par récurrence, les théorèmes globaux pour celles-ci.

7.3.3. Proposition. — Pour tout $1 \leq t \leq s_g$, on a l'égalité dans \mathfrak{G}

$$j_!^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg] = \sum_{i=t}^{s_g} j_{!*}^{\geq ig} HT(g, i, \pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[i-t-1]_{\pi_v}})[d - ig] \otimes \Xi^{\frac{(t-i)(g-1)}{2}} \oplus P_{!, t}$$

où $P_{!, t}$ est une somme alternée de faisceaux pervers concentrés aux points supersinguliers.

Démonstration. — On raisonne par récurrence descendante sur la dimension des faisceaux pervers qui interviennent, en traitant tous les t par récurrence de s_g à 1 et en travaillant sur les systèmes inductifs comme indiqué dans la remarque (6.0.14).

7.3.4. Lemme. — Pour tout $1 \leq t \leq s_g$, $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$ est le seul constituant de dimension $d-tg$ de $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$. Par ailleurs tous les autres constituants de $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$ sont de poids strictement inférieur à $d-tg$.

Démonstration. — On a la suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t) \longrightarrow j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] \longrightarrow j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] \rightarrow 0$$

où $P_{\pi_v, t, 0}$ est égale à $i^{\geq tg, *} j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg-1]$ qui est donc de poids inférieur ou égal à $d-tg-1$ et de dimension strictement inférieure à $d-tg$, d'où le résultat. \square

7.3.5 — D'après le lemme précédent, tous les faisceaux pervers qui interviennent dans l'écriture de $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$ sont de dimension inférieure ou égale à $d-tg$. Ainsi pour $h > d-g$, il n'y a aucun constituant de dimension h dans les $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$ pour $1 \leq t \leq s_g$ et pour $h = d-g$, $j_{!*}^{\geq g} HT(g, 1, \pi_v, \Pi_1)[d-g]$ est le seul constituant de dimension $d-g$ pour $t = 1$. Supposons donc que pour tout $h > h_0$, les constituants des $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$ pour $1 \leq t \leq s_g$, sont ceux prédits par l'énoncé et traitons la dimension h_0 .

7.3.6. Lemme. — Supposons la proposition (7.3.3) vérifiée pour les faisceaux pervers de dimension strictement supérieure à $0 < h_0 < d-g$, i.e. pour tout $1 \leq t \leq s_g$, les constituants de dimension strictement plus grande que h_0 des $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$ sont les

$$j_{!*}^{\geq (t+r)g} HT(g, t+r, \pi_v, \Pi_t \times \overrightarrow{[r-1]_{\pi_v}})[d-tg] \otimes \Xi^{\frac{r(g-1)}{2}}$$

avec $d-(t+r)g > h_0$. Pour tout k , l'image dans \mathfrak{G} de $e_{\pi_v} gr_{k, \pi_v}$ est alors égale à

$$\sum_{\substack{|k| < t < (d-h_0)/g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)\left(-\frac{tg+k-1}{2}\right) + P_{k, h_0}$$

où $P_{k, h_0} = (P_{k, h_0, I})_I$ est une somme de faisceaux pervers simples de dimension inférieure ou égale à h_0 à support dans la tour des $(\overline{X}_{U^p, m}^{[h_0]})_{I=U^p(m)}$, i.e. la fibre de $h^i P_{k, h_0, I}$ en tout point géométrique de $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}$ est nulle pour $h < d-h_0$ et pour tout i .

Démonstration. — D'après (7.2.2), chacun⁽¹²⁾ des $\mathcal{P}(g, t, \pi_v)\left(-\frac{tg+k-1}{2}\right)$, pour $d-tg > h_0$ est un constituant d'un $e_{\pi_v} gr_{r, \pi_v}$; il s'agit alors de montrer que $r = k$. Le résultat découle directement via le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, de l'hypothèse de récurrence sur le théorème local (4.2.3). En effet, pour $tg < d$ les π_v -parties des $h^0 gr_{tg, loc, k}$ sont pures de poids $tg-1+k$. L'équivalent du théorème de Serre-Tate et le théorème de

⁽¹²⁾On rappelle, cf. la remarque (5.3.2), que les $\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ ne sont pas irréductibles; cependant les arguments fonctionnent de manière strictement identique pour tous ses constituants simples car la seule différence entre ceux-ci provient de l'action de $\mathcal{D}_{v, tg}^\times$.

Berkovich-Fargues impliquent alors que la fibre en tout point géométrique z de la strate tg de $h^{tg-d}gr_{k,\pi_v}$ est pure de poids $tg-1+k$. Or la fibre en un point géométrique de la strate tg de $h^{tg-d}\mathcal{P}(g,t,\pi_v)(-\frac{tg+k-1}{2})$ est de poids $tg-1+k$. Ainsi pour $t=1$, $\mathcal{P}(g,t,\pi_v)((1-g)/2)$ est un constituant de gr_{0,π_v} car tous les autres faisceaux pervers qui interviennent sont de dimension strictement plus petite. On raisonne alors par récurrence sur t ; on suppose que pour tout $t < t_0 < (d-h_0)/g$, et tout $|k| < t-1$, $\mathcal{P}(g,t,\pi_v)(-\frac{tg+k-1}{2})$ est un constituant de gr_{k,π_v} et traitons le cas de t_0 . D'après ce qui précède on en déduit que pour tout $|k| < t_0$, $\mathcal{P}(g,t_0,\pi_v)(-\frac{t_0g-1+k}{2})$ est un constituant de gr_{r,π_v} avec $r \geq k$; en effet dans le cas contraire la filtration par le poids de gr_r donnerait une suite exacte courte

$$0 \rightarrow P \rightarrow gr_{r,\pi_v} \rightarrow \mathcal{P}(g,t_0,\pi_v)(-\frac{t_0g-1+k}{2}) \rightarrow 0$$

modulo des faisceaux pervers de dimension strictement plus petite, ce qui donnerait une suite exacte longue

$$\dots h^{t_0g-d}gr_{r,\pi_v} \rightarrow h^{t_0g-d}\mathcal{P}(g,t_0,\pi_v)(-\frac{t_0g-1+k}{2}) \rightarrow h^{t_0g-d+1}P \dots$$

or $h^{t_0g-d+1}P$ a un support de dimension strictement plus petite que $d-t_0g$ de sorte qu'il existerait un point géométrique de $\overline{X}_{U^p,m}^{(d-t_0g)}$ tel que la fibre de $h^{t_0g-d}gr_{r,\pi_v}$ serait de poids t_0g-1+k ce qui n'est pas. Ainsi en particulier pour $k=t_0-1$, il existe $r \geq t_0-1$ tel que gr_{r,π_v} soit de dimension $d-t_0g$. Pour la même raison que ci-dessus, on en déduit qu'il s'agit de $r=t_0-1$. On utilise alors l'opérateur N qui finit de placer les $\mathcal{P}(g,t_0,\pi_v)(-\frac{t_0g+k-1}{2})$ sur les gr_{k,π_v} , d'où la récurrence.

Par ailleurs on remarque qu'en tout point géométrique z de $\overline{X}_{U^p,m}^{(h)}$, pour $h \geq h_0$, la fibre en z des faisceaux de cohomologie de $gr_{k,\pi_v,U^p(m)} - P_{k,h_0,U^p(m)}$ est égale à celle du modèle local i.e., d'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues à celle de $gr_{k,\pi_v,U^p(m)}$ de sorte que celle de $P_{k,h_0,U^p(m)}$ est nulle. □

7.3.7 — Retour à la preuve de la proposition (7.3.3) : le principe est d'étudier l'égalité (7.2.11) en utilisant le lemme précédent ainsi que (7.3.4) pour $j_{!*}^{\geq t_0g}HT(g,t_0,\pi_v,\Pi_{t_0})[d-t_0g]$ dont le seul constituant de dimension supérieur ou égal à $d-t_0g$ est

$$j_{!*}^{\geq t_0g}HT(g,t_0,\pi_v,\Pi_{t_0})[d-t_0g].$$

Note : on suppose, afin de simplifier la rédaction, que Π_t est elliptique de type π_v .

7.3.8. Lemme. — Pour $1 \leq l \leq s_g$, soit $A_{\pi_v,t,r}(\Pi_t)$ un constituant de $j_{!*}^{\geq tg}HT(g,t,\pi_v,\Pi_t)[d-tg]$ de poids $d-tg-r$ et de dimension h_0 . Il existe alors des entiers k et $a \geq 0$ ainsi que Π'_t une représentation elliptique de type π_v , et donc de même support cuspidal que Π_t , telle que $A_{\pi_v,t,r}(\Pi'_t) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t(g+1)-2(a+1)}{2})$ soit un constituant de $e_{\pi_v}gr_{k,\pi_v}$.

Démonstration. — Soit $A_{\pi_v, t, r}(\Pi_t)$ un constituant de $j_!^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$ de sorte que $A_{\pi_v, t, r}(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t(g+1)-2}{2})$ apparaît dans le membre de droite de l'égalité de la proposition (7.2.2). On considère alors δ maximal tel qu'il existe une représentation elliptique Π'_t de type π_v de $GL_{tg}(F_v)$ tel que $A_{\pi_v, t, r}(\Pi'_t) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{\delta}{2})$ apparaisse dans le membre de droite de l'égalité de la proposition (7.2.2). On remarque alors qu'il y apparaît avec un coefficient positif et aucun négatif de sorte qu'il reste dans la somme ce qui implique le résultat. En effet s'il apparaissait avec un coefficient négatif, ce serait comme constituant d'un $j_!^{\geq t'g} HT(g, t', \pi_v, \overleftarrow{[t'-r-1, \overrightarrow{r}]}_{\pi_v})[d - t'g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t'(g+1)-2(r+1)}{2})$ pour r impair positif et on note que $j_!^{\geq t'g} HT(g, t', \pi_v, \overleftarrow{[t'-1]}_{\pi_v})[d - t'g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t'(g+1)-2}{2})$ contiendrait un $A_{\pi_v, t, r}(\Pi''_t) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{\delta+2r}{2})$ pour Π''_t une représentation de même support cuspidal que Π'_t , contredisant la maximalité de δ . □

7.3.9 — Supposons dans un premier temps que h_0 n'est pas de la forme $d - tg$ et qu'il existe t, r tel que $A_{\pi_v, t, r}(\Pi_t)$ contienne un faisceau pervers simple de dimension h_0 . Le lemme précédent implique alors qu'il existe $k \geq 0$ tel que, avec les notations du lemme (7.3.6), P_{k, h_0} ait un constituant simple, disons $B_{\pi_v, k}$, de dimension h_0 et de poids $d - 1 + \delta$ pour un certain entier δ . On raisonne alors comme dans la preuve du lemme (7.3.6). Étant de dimension inférieure ou égale à h_0 , P_{k, h_0} est alors de dimension h_0 de sorte que $h^{-h_0} P_{k, h_0}$ est de dimension h_0 . En outre comme $h^{-h_0} P_{k, h_0, I=U^p(m)}$, d'après le lemme (7.3.6), est à support dans $\overline{X}_{U^p, m}^{[h_0]}$, on en déduit que pour tout point générique de $\overline{X}_{U^p, m}^{(h_0)}$, la fibre en ce point de $h^{-h_0} P_{k, h_0, I}$ est non nulle de sorte qu'il existe un point géométrique z_I de $\overline{X}_{U^p, m}^{(h_0)}$ tel que la fibre en z_I de $h^{-h_0} P_{k, h_0, I}$ soit non nulle. Par ailleurs, les π_v -parties des $h^{-h_0} gr_{k, loc}$ du modèle local de hauteur $d - h_0$ sont toutes nulles, on en déduit, d'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, que la fibre en z de $h^{-h_0} gr_{k, \pi_v}$ est nulle ce qui implique que $\delta \neq k$: en effet sinon $e_{\pi_v} gr_{k, \pi_v}$ est une extension de

$$\left(\bigoplus_{\substack{|k| < t < (d-h_0)/g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)(-\frac{tg+k-1}{2}) \right) \oplus B_{k, \pi_v}$$

par des faisceaux pervers de dimension inférieure ou égale à h_0 ce qui implique que $(h^{-h_0} gr_{k, \pi_v})^{e_{\pi_v}}$ admettrait $h^{-h_0} B_{k, h_0}$ comme facteur direct. Selon le même principe, on doit même avoir $\delta < k$. Comme on ne dispose pas de la pureté des gr_k , pour montrer que $\delta = k$ on raisonne alors comme suit.

7.3.10. Lemme. — Soit \mathcal{P} un constituant de $R\Psi_{\pi_v}[d-1]$. On en déduit alors que $D\mathcal{P}(1-d)$ est un constituant de $R\Psi_{\pi_v^{\vee}}[d-1]$.

Démonstration. — Le résultat découle simplement de la compatibilité de $R\Psi_v$ avec la dualité de Verdier, soit $DR\Psi_{\eta_v}(\overline{\mathbb{Q}}_l[d-1]) \simeq R\Psi_{\eta_v}(D\overline{\mathbb{Q}}_l[d-1])$ et du fait que la fibre générique de $X_{U^p, m}$ est lisse de sorte que $D\overline{\mathbb{Q}}_l[d-1] \simeq \overline{\mathbb{Q}}_l[d-1](1-d)$. \square

On considère alors un constituant simple de dimension h_0 de poids maximal, disons $d-1+r$ de $R\Psi_{\pi_v}[d-1]$. C'est alors un constituant de gr_{k, π_v} pour $k > r$ d'après ce qui précède. Par ailleurs en utilisant le lemme (7.3.10), on obtient un constituant simple de dimension h_0 de gr_{-k, π_v} et de poids $-r$, de sorte que l'opérateur de monodromie N^k fournit un constituant simple de dimension h_0 de gr_{k, π_v} et de poids $-r+2k > r$, d'où la contradiction par maximalité de r .

7.3.11 — Supposons désormais que $h_0 = d - t_0g$ et supposons avoir montré par récurrence que pour tout $t_1 \leq t \leq s_g$, le seul constituant de dimension $d - t_0g$ de $j_!^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$, est $j_{!*}^{\geq t_0g} HT(g, t_0g, \pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{t_0 - t - 1}]_{\pi_v})[d - t_0g] \otimes \Xi^{\frac{(t_0-t)(g-1)}{2}}$. Le résultat est vérifié pour $t_1 = t_0$, supposons le donc vérifié jusqu'au rang t_1 et traitons le cas de $t_1 - 1$. On étudie alors les faisceaux pervers de dimension $d - t_0g$ dans le membre de droite de (7.2.11), en particulier ceux de poids $d - t_0$, ce qui donne $j_{!*}^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v, \Pi)[d - t_0g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t_0(g-1)}{2})$ avec

$$(-1)^{t_0-1} \Pi = [\overrightarrow{t_0 - 1}]_{\pi_v} - \sum_{i=1}^{t_0-t_1} (-1)^i [\overrightarrow{t_0 - i - 1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i - 1}]_{\pi_v} = (-1)^{t_1-t_0} [\overrightarrow{t_1 - 1}, \overleftarrow{t_0 - t_1}]_{\pi_v}.$$

Or ce dernier ne peut pas apparaître dans le membre de gauche de (7.2.11). En effet si t_1 est pair c'est évident car à gauche il ne peut y avoir que des coefficients positifs. Sinon de manière générale, on raisonne comme suit. Le lemme (7.3.10) donnerait que $j_{!*}^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v^{\vee}, [\overrightarrow{t_0 - t_1}, \overleftarrow{t_1 - 1}]_{\pi_v^{\vee}})[d - t_0g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t_0(g+1)-2}{2})$ serait un constituant de $e_{\pi_v}[R\Psi_{\pi_v}[d-1]]$ qui, vu le poids, ne pourrait provenir que de $j_!^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v^{\vee}, [\overleftarrow{t_0 - 1}]_{\pi_v^{\vee}})[d - t_0g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t_0(g+1)-2}{2})$, ce qui n'est pas d'après le lemme (7.3.4).

Ainsi $j_{!*}^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v, [\overrightarrow{t_1 - 1}, \overleftarrow{t_0 - t_1}]_{\pi_v})[d - t_0g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t_0(g-1)}{2})$ doit être un constituant d'un $j_!^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{i}, \overrightarrow{t - i - 1}]_{\pi_v})[d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t(g-1)+2i}{2})$ pour $0 \leq i < t$ et $t > t_0$ et $t \equiv t_1 - 1 \pmod{2}$. Le résultat, i.e. $t = t_1 - 1$ et $r = 0$, découle alors des trois lemmes suivants.

7.3.12. Lemme. — Pour un point géométrique z de $\overline{X}_{U^p, m, M_{d-t_0g}}^{(d-t_0g)}$, les fibres en z des faisceaux de cohomologies des $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)$, pour $t \geq t_0$, sont, en tant que représentation de $GL_{t_0g}(F_v) \times GL_{d-t_0g}(F_v) \times W_v$ de la forme $\bigoplus_{\chi} (\Pi_t(\chi) \times \pi_{\chi}) \otimes \pi'_{\chi} \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(\chi)$ où χ décrit les caractères de \mathbb{Z} et π_{χ} (resp. π'_{χ}) est une représentation de $GL_{(t_0-t)g}(F_v)$ (resp. $GL_{d-t_0g}(F_v)$).

Démonstration. — C'est évident en utilisant que les strates sont induites, i.e.

$$j_{1*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t) = j_{1,*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)_1 \otimes \Pi_t \times_{P_{t_0g, d}(F_v)} P_{t_0g, d}(F_v)$$

en tant que $P_{t_0g, d}(F_v) \times \mathbb{Z}$ -module. Les torsions découlent alors de l'action telle qu'elle est décrite au §3.2. □

7.3.13. Lemme. — *Supposons que pour tout $1 \leq t \leq t_0$, les constituants simples de dimension strictement supérieure à $d - t_0g$ des $j_{1*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$ sont ceux prévus par la proposition (7.3.3) et supposons qu'il existe $t < t_0$ tel que*

$$j_1^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{t - r - 1}]_{\pi_v})[d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)\left(-\frac{t(g-1) + 2r}{2}\right)$$

admette $j_{1}^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v, [\overleftarrow{t_1 - 1}, \overleftarrow{t_0 - t_1}]_{\pi_v})[d - t_0g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)\left(-\frac{t_0(g-1)}{2}\right)$ comme constituant. On a alors $t \leq t_1$ et $r = 0$.*

Démonstration. — On considère la filtration par le poids de

$$j_1^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{t - r - 1}]_{\pi_v})[d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)\left(-\frac{t(g-1) + 2r}{2}\right)$$

et la suite spectrale qui s'en déduit

$$E_1^{i,j} = h^{i+j} gr_{-i}(t, r) \Rightarrow$$

$$h^{i+j} j_1^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{t - r - 1}]_{\pi_v})[d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)\left(-\frac{t(g-1) + 2r}{2}\right)$$

où $gr_k(t, r)$ désigne le gradué de poids k de $j_1^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{t - r - 1}]_{\pi_v})[d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)\left(-\frac{t(g-1) + 2r}{2}\right)$. D'après le lemme précédent toutes les fibres aux points géométriques de $\overline{X}_{U^p, m, M_{d-t_0g}}^{(d-t_0g)}$ des $E_1^{i,j}$ avec $i + j < t_0g - d$ sont, en tant que $GL_{t_0g}(F_v) \times W_v$ -module, de la forme $\bigoplus_{\chi} [\overleftarrow{r}, \overrightarrow{t - r - 1}]_{\pi_v(\chi)} \times \pi_{\chi} \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v(\chi))\left(-\frac{t(g-1) + 2r}{2}\right)$ alors que celles des faisceaux de cohomologies de $j_{1*}^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v, [\overleftarrow{t_1 - 1}, \overleftarrow{t_0 - t_1}]_{\pi_v})[d - t_0g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)\left(-\frac{t_0(g-1)}{2}\right)$ sont de la forme $\bigoplus_{\chi} [\overleftarrow{t_1 - 1}, \overleftarrow{t_0 - t_1}]_{\pi_v(\chi)} \times \pi'_{\chi} \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v(\chi))\left(-\frac{t_0(g-1)}{2}\right)$. En remarquant que les $E_1^{i, t_0g - d + 1 - i}$ ont un support de dimension strictement inférieur à $d - t_0g$ et que les E_{∞}^n sont nuls pour $n \neq tg - d$, on en déduit alors que $r = 0$ et $t \leq t_1$. □

7.3.14. Lemme. — *Pour tout $1 \leq t < t_0$ et toute représentation Π elliptique de type π_v de $GL_{(t_0-t)g}(F_v)$ distincte de $[\overleftarrow{t_0 - t - 1}]_{\pi_v}$, $j_1^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$ ne contient pas*

$$j_{1*}^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v, \Pi_t \overrightarrow{\times} \Pi)[d - tg] \otimes \Xi^{(t_0-t)(g-1)/2}.$$

Démonstration. — Dans le cas contraire considérons t minimal pour cette propriété. En l'appliquant à $\Pi_t = [\overleftarrow{t - 1}]_{\pi_v}$, on en déduit que $j_{1*}^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v, [\overleftarrow{t - 1}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{t_0 - t - 1}]_{\pi_v})[d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)\left(-\frac{t_0(g-1)}{2}\right)$ reste dans le membre de droite de (7.2.11), où $[\overleftarrow{t_0 - t - 1}]_{\pi_v}$ désigne

II. En effet il y apparaît via $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v})[d-tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{t(g-1)}{2})$ et n'est pas compensé car d'après le lemme précédent ce ne pourrait qu'être pour un $t' < t$ ce qui contredirait la minimalité de t . Si le signe est négatif on obtient directement la contradiction, sinon on argumente comme suit : par application de la dualité de Verdier, on en déduit que $e_{\pi_v}[gr_{k,\pi_v}]$ pour un certain k , devrait contenir $j_{!*}^{\geq t_0g} HT(g, t_0, \pi_v^{\vee}, \overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \Pi_t^{\vee})[d-t_0g] \otimes \text{rec}_{F_v}(\pi_v)(-\frac{t_0(g+1)-2}{2})$ qui est de poids $d+t_0-2$. Or tous les constituants de dimension strictement supérieur à $d-t_0g$ de $R\Psi_{\pi_v}[d-1]$ sont de poids strictement inférieur à $d+t_0-2$ de sorte qu'il existerait un point géométrique de $\overline{X}_{U^p,m}^{(d-t_0g)}$ tel que la fibre de $h^{t_0g-d}gr_{k,\pi_v}$ en ce point admettrait un facteur direct de poids $d+t_0-2$ de la forme $\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \Pi_t^{\vee}$ ce qui n'est pas d'après le corollaire (7.3.2). \square

7.3.15 — *Fin de la preuve de la proposition (7.3.3)* : pour tout k , on pose dans \mathfrak{G} :

$$Q_{k,\pi_v,t_0} := e_{\pi_v}gr_{k,\pi_v} - \sum_{\substack{|k| < t \leq t_0 \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)(-\frac{tg+k-1}{2})$$

Le corollaire (7.3.2) et ce qui précède, prouvent alors que pour tout point générique z de dimension supérieure ou égale à $d-t_0g$, $\sum_i (-1)^i (h^i Q_{k,\pi_v,t_0})_z$ est nulle. On en déduit donc d'après la proposition (7.1.6), que Q_{k,π_v,t_0} est de dimension strictement inférieure à $d-t_0g$, ce qui conclut la récurrence. \square

7.3.16. Définition. — Pour $t \leq t'$ et Π_t une représentation de $GL_{tg}(F_v)$, soit dans $FPH(\overline{X})$: ⁽¹³⁾

$$\mathcal{P}_-(g, t', \pi_v, t, \Pi_t) := j_{!*}^{\geq t'g} HT(g, t', \pi_v, \Pi_t \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[t'-t-1]}_{\pi_v})[d-t'g] \otimes \Xi^{\frac{(t'-t)(g-1)}{2}}$$

pur de poids $d-t'g-2(t'-t)$ et

$$\mathcal{P}_+(g, t', \pi_v, t, \Pi_t) = j_{!*}^{\geq t'g} HT(g, t', \pi_v, \Pi_t \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[t'-t-1]}_{\pi_v})[d-t'g] \otimes \Xi^{\frac{(t'-t)(g+1)}{2}}$$

pur de poids $d-t'g+2(t'-t)$.

La filtration par le poids donne alors le corollaire suivant.

7.3.17. Corollaire. — (i) Il existe, pour $0 \leq i \leq s_g - t$, des faisceaux pervers $P_{\pi_v,t,i}(\Pi_t) \in FPH(\overline{X})$ tels que l'on ait, dans $FPH(\overline{X})$, les suites exactes suivantes :

$$0 \rightarrow P_{\pi_v,t,0}(\Pi_t) \rightarrow j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] \rightarrow j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] \rightarrow 0$$

⁽¹³⁾ Comme dans la remarque (5.3.2), ceux-ci ne sont pas simples mais plutôt une somme directe de e_{π_v} faisceaux pervers simples où la différence entre eux provient de l'action de $\mathcal{D}_{v,tg}^{\times}$. Par ailleurs pour ce qui est des poids cf. la remarque (6.0.19).

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow P_{\pi_v, t, 1}(\Pi_t) &\longrightarrow P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t) \longrightarrow \mathcal{P}_-(g, t+1, \pi_v, t, \Pi_t) \oplus A_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t) \rightarrow 0 \\
&\dots \\
0 \rightarrow P_{\pi_v, t, r}(\Pi_t) &\longrightarrow P_{\pi_v, t, r-1}(\Pi_t) \longrightarrow \mathcal{P}_-(g, t+r, \pi_v, t, \Pi_t) \oplus A_{\pi_v, t, r-1}(\Pi_t) \rightarrow 0 \\
&\dots \\
0 \rightarrow P_{\pi_v, t, s_g-t}(\Pi_t) &\longrightarrow P_{\pi_v, t, s_g-t-1}(\Pi_t) \longrightarrow \mathcal{P}_-(g, s_g, \pi_v, t, \Pi_t) \oplus A_{\pi_v, t, s_g-t-1}(\Pi_t) \longrightarrow 0 \\
&\text{avec } A_{\pi_v, t, i}(\Pi_t), \text{ pour } 1 \leq i \leq s_g - t, \text{ des faisceaux pervers concentrés aux points} \\
&\text{supersinguliers purs de poids } d-tg-i-1 \text{ et } P_{\pi_v, t, s_g-1}(\Pi_t) \text{ un faisceau pervers concentré} \\
&\text{aux points supersinguliers de poids inférieur ou égal à } d-tg-s_g+t. \\
(ii) \text{ Dualement pour la dualité de Verdier, le complexe } Rj_*^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] &\text{ est} \\
&\text{un objet de } \text{FPH}(\overline{X}) \text{ qui s'insère dans les suites exactes courtes} \\
0 \rightarrow j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] &\longrightarrow Rj_*^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] \\
&\longrightarrow DP_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t)(tg-d) \rightarrow 0 \\
0 \rightarrow DA_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t)(tg-d) \oplus \mathcal{P}_+(g, t+1, \pi_v, t, \Pi_t) &\longrightarrow \\
&DP_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t)(tg-d) \longrightarrow DP_{\pi_v, t, 1}(\Pi_t)(tg-d) \rightarrow 0 \\
&\dots \\
0 \rightarrow DA_{\pi_v, t, r-1}(\Pi_t)(tg-d) \oplus \mathcal{P}_+(g, t+r, \pi_v, t, \Pi_t) &\longrightarrow \\
&DP_{\pi_v, t, r-1}(\Pi_t)(tg-d) \longrightarrow DP_{\pi_v, t, r}(\Pi_t)(tg-d) \rightarrow 0 \\
&\dots \\
0 \rightarrow DA_{\pi_v, t, s_g-t-1}(\Pi_t)(tg-d) \oplus \mathcal{P}_+(g, s_g, \pi_v, t, \Pi_t) &\longrightarrow \\
&DP_{\pi_v, t, s_g-t-1}(\Pi_t)(tg-d) \longrightarrow DP_{\pi_v, t, s_g-t}(\Pi_t)(tg-d) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Remarque : Hors des points supersinguliers, nous avons montré que les gr_k était purs de poids $d-1+k$, ce qui n'a rien d'impressionnant puisque finalement on l'a déduite de la pureté locale qui nous est donnée d'après l'hypothèse de récurrence. Nous verrons à la proposition (9.3.2) comment la démontrer pour les faisceaux pervers supportés par les points supersinguliers.

7.3.18. Corollaire. — Pour tout $|k| < s_g$, l'image de $e_{\pi_v} gr_{k, \pi_v}$ dans \mathfrak{G} est égale à

$$\left(\sum_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)\left(-\frac{tg+k-1}{2}\right) \right) + P_k$$

où comme ci-dessus, P_k est une somme de faisceaux pervers concentrés aux points supersinguliers. Dans tous les autres cas gr_{k, π_v} est de dimension nulle, concentré aux points supersinguliers.

7.4. Étude aux points supersinguliers des $j_!^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d - tg]$. — Le but de ce paragraphe est de déterminer les faisceaux pervers ponctuels non précisés dans la proposition (7.3.3). On rappelle que le raisonnement du paragraphe précédent ne s'appliquait pas au niveau des points supersinguliers car nous n'y connaissons pas l'aboutissement de (5.1.10). Une idée naive est que pour connaître un faisceau ponctuel, on peut commencer par calculer son groupe de cohomologie H^0 .

7.4.1. Proposition. — Soit $1 \leq g < d$ ne divisant pas d (resp. g divisant $d = sg$), et soit Π une représentation globale de $G_r(\mathbb{A})$ telle que Π vérifie $\text{Hyp}(\xi)$ avec $\Pi_v \simeq \text{Sp}_s(\pi_v)$ pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. Pour tout i et $1 \leq l \leq s_g$ (resp. $1 \leq l < s$), la composante $\Pi^{\infty, v}$ -isotypique des groupes de cohomologie des faisceaux pervers $j_{!*}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$ est nulle, soit avec les notations de (5.2.6) :

$$H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg])[\Pi^{\infty, v}] = 0.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence pour t variant de $s - 1$ à 1 ; l'initialisation de la récurrence se fait d'elle même dans la preuve de l'induction qui suit. On reprend les suites exactes courtes de faisceaux pervers du corollaire (7.3.17). On montre tout d'abord, par récurrence sur i de $s - t - 1$ à 0 , que pour tout $j \neq 0$, les groupes de cohomologie $H^j(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls et que

$$H^0(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}] = \sum_{k=i}^{s_g - t - 1} H^0(A_{\pi_v, t, k}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}] + H^0(P_{\pi_v, t, s_g - t}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$$

Le résultat est clairement vrai pour $i = s - t - 1$ car $P_{\pi_v, t, s - t - 1}(\Pi_t)$ est un faisceau pervers ponctuel. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $i + 1$ et montrons le au rang i . La suite exacte longue de cohomologie associée à

$$0 \rightarrow P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \rightarrow P_{\pi_v, t, i-1}(\Pi_t) \rightarrow \mathcal{P}_-(g, t + i, \pi_v, t, \Pi_t) \oplus A_{\pi_v, t, i-1}(\Pi_t) \rightarrow 0$$

fournit, pour $j \neq 0$, les isomorphismes $H^j(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}] \simeq H^j(P_{\pi_v, t, i-1}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$ car d'après l'hypothèse de récurrence portant sur les t , $H^j(\mathcal{P}_-(g, t + i, \pi_v, t, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$ est nul ce qui implique la nullité de $H^j(\mathcal{P}_-(g, t + i, \pi_v, t, \Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$. Par ailleurs pour $j = 0$, on a la suite exacte courte

$$0 \rightarrow H^0(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}] \rightarrow H^0(P_{\pi_v, t, i-1}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi) \rightarrow H^0(A_{\pi_v, t, i-1}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi) \rightarrow 0$$

d'où le résultat.

On considère alors la suite exacte longue de cohomologie associée à

$$0 \rightarrow P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t) \rightarrow j_!^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg] \rightarrow j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg] \rightarrow 0$$

qui s'écrit

$$0 \rightarrow H^{-1}(j_!^{\geq tg}) \rightarrow H^{-1}(j_{!*}^{\geq tg}) \rightarrow H^0(P_{\pi_v, t, s - t - 1}) \rightarrow H^0(j_!^{\geq tg}) \rightarrow H^0(j_{!*}^{\geq tg}) \rightarrow 0$$

et pour tout $i \neq -1, 0$, $H^i(j_{!*}^{\geq tg}) \simeq H^i(j_{!*}^{\geq tg})$ où pour alléger les notations, on a omis d'écrire $HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$ ainsi que $[\Pi^{\infty, v}]$. On en déduit alors que pour $i \neq 0$, $H^i(j_{!*}^{\geq tg})$ est pur de poids $d - 1 + i$ alors que $H^0(j_{!*}^{\geq tg})$ est mixte de poids inférieur ou égal à $d - 1$. Le calcul de la somme alternée $\sum_i (-1)^i H^i(j_{!*}^{\geq tg})$, laquelle est nulle pour $g \nmid d$ et pour $g|d$ est constituée d'un seul terme de poids $d - 1 - (s - t)$, implique alors la nullité des $H^i(j_{!*}^{\geq tg})$ pour $i > 0$ et celle des $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg])[\Pi^{\infty, v}]$ pour $i \geq 0$ et pour tout π_v . La dualité de Poincaré donne alors la nullité des $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi^{\vee}}(g, t, \pi_v^{\vee}, \Pi_t^{\vee})[d - tg])[\Pi^{\infty, v}]$ pour tout π_v et tout $i \leq 0$ et donc finalement la nullité des $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg])[\Pi^{\infty, v}]$ pour tout i et tout π_v . \square

7.4.2 — *Remarque* : Il est possible de faire des calculs strictement similaires pour π_v quelconque. Par exemple, au lemme (9.3.2) on traite le cas de $\pi_v \simeq \mathrm{Sp}_{n_1}(\xi_1) \boxplus \cdots \boxplus \mathrm{Sp}_{n_r}(\xi_r)$, le cas général étant traité dans la preuve du théorème (14.1).

7.4.3 — D'après le corollaire (7.3.17) et en remarquant qu'un faisceau pervers ponctuel n'a de la cohomologie qu'en degré zéro, les corollaires suivants découlent directement de (3.2.6).

7.4.4. Corollaire. — *Pour g divisant $d = sg$ (resp. $1 \leq g < d$ ne divisant pas d), soit Π une représentation irréductible de $G(\mathbb{A})$ vérifiant $\mathrm{Hyp}(\xi)$ telle que $\Pi_v \simeq \mathrm{Sp}_s(\pi_v)$. On a alors :*

(i) *pour tout $i \neq d - tg$ (resp. pour tout i), $H_c^i(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-tg}}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g, t, \pi_v)_1 \otimes \mathcal{L}_{\xi})[\Pi^{\infty, v}]$ et donc $H_c^i(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g, t, \pi_v, I) \otimes \mathcal{L}_{\xi})[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls et pour $i = d - tg$*

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H_c^{d-tg}(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-tg}}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g, t, \pi_v)_1 \otimes \mathcal{L}_{\xi})[\Pi^{\infty, v}] = \\ \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_{\tau})m(\Pi) \overleftarrow{[s - t - 1]}_{\pi_v(-t(g-1)/2)} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H_c^{d-tg}(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty, v}] \\ = \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_{\tau})m(\Pi) (\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t - 1]}_{\pi_v}) \otimes (\Xi^{(s-t)(g-1)/2} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

en tant que représentation de $GL_{(s-t)g}(F_v) \times \mathbb{Z}$ et de $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$, où $\mathfrak{A}(\pi_v)$ est l'ensemble des caractères $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_l^{\times}$, tels que $\pi_v \otimes \chi \circ \mathrm{val}(\det) \simeq \pi_v$ et $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes.

(ii) pour tout $1 \leq t \leq s$, on a

$$\begin{aligned} H^0(j_1^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)) \\ = \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) e_{\pi_v}(\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t - 1]_{\pi_v}}) \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) | - |^{-(s-t)(g-1)/2} \end{aligned}$$

7.4.5 — On rappelle que H_0 est une forme intérieure de G_τ telle que $H_0(\mathbb{A}^{\infty, v}) \simeq G_\tau(\mathbb{A}^{\infty, v})$, $H_0(\mathbb{R})$ est compact et $H_{0, v} \simeq D_{v, d}^\times$.

Hypothèse : pour la preuve de l'énoncé suivant on considère une représentation automorphe cohomologique et irréductible Π de $G_\tau(\mathbb{A})$ telle que :

- $\Pi_v \simeq \text{Sp}_s(\pi_v)$ pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $d = sg$;
- l'ensemble $\mathfrak{A}_{H_0, \xi}(\Pi)$ des représentations irréductibles automorphes $\overline{\Pi}$ de $H_0(\mathbb{A})$ telle que $(\overline{\Pi}^{\infty, v})^\vee \simeq \Pi^{\infty, v}$, est réduit à un élément avec $m(\overline{\Pi}) = m(\Pi)$, $\overline{\Pi}_v^\vee \simeq \text{JL}^{-1}(\Pi_v)$.

Remarque : L'existence d'une telle représentation Π est assurée par Harris-Labesse (cf. [7] théorème 3.2.1).

7.4.6. Corollaire. — Pour tout $1 \leq t \leq s_g$, les faisceaux pervers $A_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)$ du corollaire (7.3.17) sont tous nuls et pour g ne divisant pas d (resp. $g|d = sg$) $P_{\pi_v, t, s_g - t}(\Pi_t)$ est nul (resp. $P_{\pi_v, t, s - t - 1}(\Pi_t)$ est le faisceau pervers ponctuel de support l'ensemble des points supersinguliers tel que $P_{\pi_v, t, s - t - 1}(\Pi_t)$ est isomorphe à $\mathcal{F}(g, s, \pi_v)(-\frac{(s-t)(g-1)}{2}) \otimes (\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t - 1]_{\pi_v}})$.

Démonstration. — D'après la proposition précédente on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{s_g - t - 1} \lim_{\overrightarrow{U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p, m}, A_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}] + \lim_{\overrightarrow{U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p, m}, P_{\pi_v, t, s_g - t}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}] \\ = \lim_{\overrightarrow{U^p(m)}} H^{d - tg}(\overline{X}_{U^p, m}, j_1^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t, I))[\Pi^{\infty, v}]. \end{aligned}$$

Le membre de droite est d'après (3.2.6) soit nul, pour g ne divisant pas d , soit de poids $d - tg - s_g + t$ pour g divisant d .

- Les faisceaux pervers $A_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)$, pour $0 \leq i < s_g - t$ étant de dimension zéro et purs de poids $d - tg - i$, la nullité de $H^0(\overline{X}_{U^p, m, M_{d - tg}}^{[d - tg]}, A_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$ implique celle des $A_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)$.

- De même pour g ne divisant pas d , $P_{\pi_v, t, s - t}$, faisceau pervers concentré aux points supersinguliers, est nul car son groupe de cohomologie en degré 0 l'est.

- Pour g divisant d , on rappelle, cf. le corollaire (7.4.4), que $H_c^i(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-tg}}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g, t, \pi_v)_1 \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$ est nul pour $i \neq d - tg$, et

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H_c^{d-tg}(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-tg}}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g, t, \pi_v)_1 \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}] = \\ \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v(-t(g-1)/2)} \otimes \Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \chi$$

où $\mathfrak{A}(\pi_v)$ est l'ensemble des caractères $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_l^\times$, tels que $\pi_v \otimes \chi \circ \text{val}(\det) \simeq \pi_v$. Ainsi pour toute représentation elliptique Π_t de type π_v de $GL_{tg}(F_v)$,

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p, m}^{[d-tg]}, j_{!}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg][\Pi^{\infty, v}] = \\ \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)e_{\pi_v}\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes \Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}}$$

en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$. On étudie alors comme précédemment l'égalité (7.2.11) et tout particulièrement les faisceaux pervers de dimension nulle. En ce qui concerne les faisceaux pervers simples de poids $s(g+1) - 4$, le membre de droite de (7.2.11) est égal à

$$(P_{\pi_v, s-1, 1}(\overleftarrow{[s-2]}_{\pi_v}) \left(-\frac{(s-1)(g+1)-2}{2}\right) - \mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes \overleftarrow{[s-2, 1]}_{\pi_v}) \\ \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{s(g+1)-4}{2}\right)$$

de sorte que $P_{\pi_v, s-1, 1}(\overleftarrow{[s-2]}_{\pi_v})$ contient $\mathcal{F}(g, s, \pi_v) \left(-\frac{g-1}{2}\right) \otimes \overleftarrow{[s-2, 1]}_{\pi_v}$ et donc, vu que les strates sont induites, $\mathcal{F}(g, s, \pi_v) \left(-\frac{g-1}{2}\right) \otimes \overleftarrow{[s-2]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[0]}_{\pi_v}$. Par ailleurs d'après (3.2.7), on a le lemme suivant

7.4.7. Lemme. — Pour toute représentation Π_s de $GL_d(F_v)$, on a

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p, m}^{(0)}, \mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi \otimes \Pi_s) = \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)e_{\pi_v}(\mathcal{C}_{H_0, \xi}^\infty[\text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s]}_{\pi_v})])^\vee \otimes \Pi_s$$

de sorte que sa partie $\overline{\Pi}^{\infty, v}$ -isotypique est $e_{\pi_v}m(\overline{\Pi})\Pi_s$.

7.4.8 — Remarque : Sans utiliser [7], on arriverait au fait suivant : pour toute représentation irréductible automorphe $\overline{\Pi}$ de $H_0(\mathbb{A})$, cohomologique pour $(\xi')^\vee$ de multiplicité $m(\overline{\Pi})$, il existe une unique représentation irréductible automorphe Π de $G_\tau(\mathbb{A})$ telle que $\Pi^{\infty, v} \simeq (\overline{\Pi}^{\infty, v})^\vee$ et $\Pi_v \simeq \text{JL}(\overline{\Pi}_v^\vee)$, avec $m(\Pi) \geq m(\overline{\Pi})$. On renvoie au §12 pour des correspondances de Jacquet-Langlands générales.

7.4.9 — En appliquant ce lemme à $\Pi_s = \Pi_{s-1} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_v}$ et en utilisant les propriétés imposées à Π , on obtient que la partie $\overline{\Pi}^{\infty, v}$ -isotypique de $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p, m}^{(0)}, \mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes \Pi_{s-1} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_v})$ est égale à la partie $\Pi^{\infty, v}$ -isotypique de $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H_c^0(\overline{X}_{U^p, m}^{(g)}, HT(g, s-1, \pi_v, \Pi_{s-1})[g])$ qui d'après ce qui précède est égale à celle de $\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p, m}, P_{\pi_v, s-1, 1}(\Pi_{s-1}))$. On en déduit donc que

$$P_{\pi_v, s-1, 1}(\Pi_{s-1}) \text{ est égal à } \mathcal{F}(g, s, \pi_v) \left(-\frac{g-1}{2}\right) \otimes \Pi_{s-1} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_v}.$$

On raisonne alors par récurrence sur t de $s-1$ à 1 , en supposant que pour tout $t > t_0$, $P_{\pi_v, t, s-t-1}(\Pi_t)$ est isomorphe à $\mathcal{F}(g, s, \pi_v) \left(-\frac{(s-t)(g-1)}{2}\right) \otimes \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v}$. On regarde alors les faisceaux pervers de dimension nulle et de poids $s(g+1) - 2(s-t_0+1)$ dans l'égalité (7.2.11), soit

$$P_{\pi_v, t_0, s-t_0-1}([\overleftarrow{t_0-1}]_{\pi_v}) \otimes \left(-\frac{t_0(g+1)-2}{2}\right) + \mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes \left(\sum_{i=1}^{s-t_0} (-1)^i [\overleftarrow{t_0-1}, \overrightarrow{i}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t_0-i-2}]_{\pi_v}\right) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{s(g+1)-2(s-t_0+1)}{2}\right)$$

ce qui donne

$$P_{\pi_v, t_0, s-t_0-1}([\overleftarrow{t_0-1}]_{\pi_v}) - \mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes [\overleftarrow{t_0-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{s-t_0-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{(s-t_0)(g-1)}{2}\right)$$

positif. On en déduit alors que $\mathcal{F}(g, s, \pi_v) \left(-\frac{(s-t_0)(g-1)}{2}\right) \otimes [\overleftarrow{t_0-1}, \overrightarrow{1}, \overleftarrow{s-t_0-1}]_{\pi_v}$ est contenu dans $P_{\pi_v, t_0, s-t_0-1}([\overleftarrow{t_0-1}]_{\pi_v})$ et donc vu le caractère induit des strates, que $P_{\pi_v, t_0, s-t_0-1}(\Pi_{t_0})$ contient $\mathcal{F}(g, s, \pi_v) \left(-\frac{(s-t_0)(g-1)}{2}\right) \otimes \Pi_{t_0} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t_0-1}]_{\pi_v}$. L'égalité provient alors de l'égalité des H^0 comme dans le cas $t_0 = s-1$, traité ci-avant, d'où le résultat. \square

7.4.10. Corollaire. — *Le théorème (5.4.1) est vrai.*

Démonstration. — En effet le résultat découle directement de la proposition (7.2.2) en réinjectant les égalités de la proposition (7.3.3) où les $P_{i, t}$ sont nuls d'après le corollaire (7.4.6). On obtient ainsi pour tout $1 \leq i \leq s_g$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=i}^{s_g} (-1)^{t-i} j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{i-1}, \overrightarrow{t-i}]_{\pi_v}) [d-tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{tg-2+2i-t}{2} \right) = \\
& \sum_{l=i}^{s_g} (-1)^{t-i} \sum_{r=0}^{s_g-t} j_{!*}^{\geq (t+r)g} HT(g, t+r, \pi_v, [\overleftarrow{i-1}, \overrightarrow{t-i}]_{\pi_v} \overrightarrow{[r-1]}_{\pi_v}) [d-(t+r)g] \\
& \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{(t+r)(g-1)+2(i-1)}{2} \right)
\end{aligned}$$

laquelle somme est alors égale à

$$\sum_{t=i}^{s_g} j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_{t,i}) [d-tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{t(g-1)+2(i-1)}{2} \right)$$

où $\Pi_{t,i} := \sum_{r=i}^t (-1)^{r-i} [\overleftarrow{i-1}, \overrightarrow{r-i}]_{\pi_v} \overrightarrow{[t-r-1]}_{\pi_v} = [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}$ avec

$$\begin{aligned}
e_{\pi_v}[R\Psi_v[d-1]] &= \sum_{i=1}^{s_g} \sum_{t=i}^{s_g} j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_{t,i}) [d-tg] \\
& \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{t(g-1)+2(i-1)}{2} \right) \\
&= \sum_{t=1}^{s_g} j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) \\
& \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{tg-1}{2} \right) \left(\sum_{|k|<t} \binom{-k}{2} \right) \\
&= \sum_{k=1-s}^{s-1} \sum_{\substack{|k|<t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) [d-tg] \\
& \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{tg+k-1}{2} \right)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

7.4.11. Corollaire. — Pour tout $g|d = sg$, et π_v une représentation cuspidale de $GL_g(F_v)$, on considère les groupes de cohomologie $H_c^j(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}, R^i\Psi_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}_{\xi})$ ainsi que leur limite inductive sur tous les idéaux I de A , limite que l'on notera $H_{=h, i, \pi_v, \xi}^j$. Pour Π une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ vérifiant $\text{Hyp}(\xi)$, on a les résultats suivant :

- (1) pour g ne divisant pas d , les $H_{=h, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour tous j, h, i ;
- (2) pour g divisant $d = sg$ et $\pi_v \simeq [s-1]_{\pi_v}$, les $H_{=h, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour h qui n'est pas de la forme tg avec $1 \leq t \leq s$;
- (3) pour g divisant $d = sg$ et $\pi_v \simeq [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$, les $H_{=tg, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour $j \neq d-tg$;
- (4) pour g divisant $d = sg$ et $\pi_v \simeq [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$, les $H_{=tg, i, \pi_v, \xi}^{d-tg}[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour i ne vérifiant pas $t(g-1) \leq i \leq tg-1$. Si $1 \leq l < s$ et $i = tg-r$ avec $1 \leq r \leq t$, $H_{=tg, tg-r, \pi_v, \xi}^{d-tg}[\Pi^{\infty, v}]$ est isomorphe à

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_{\tau}) m(\Pi) ([\overleftarrow{t-r}, \overrightarrow{r-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{s(g-1)-2(r-t)}{2} \right)$$

en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times W_v$, où $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes.

Démonstration. — On rappelle (cf. la proposition (3.2.3)) que pour tout i, j , on a un isomorphisme canonique

$$H_c^j(\overline{X}_{UP,m,M_{d-h}}^{(d-h)}, R^i \Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi)^h \simeq \bigoplus_{\tau_v \in \mathfrak{C}_h} (H_c^j(\overline{X}_{UP,m,M_{d-h}}^{(d-h)}, \mathcal{F}_{\tau_v} \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \mathcal{U}_{F_v,l,h,m}^i(\tau_v))^{h/e_{\tau_v}}$$

de sorte que les résultats découle directement du corollaire (7.4.4). □

8. Faisceaux de cohomologie des $j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)$

Rappelons, cf §6, que d'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, la filtration de monodromie-locale du complexe $\Psi_{F_v,l,d}^\bullet$ sera donnée par les germes en un point supersinguliers des faisceaux de cohomologie des gr_k . On propose alors de calculer tous les faisceaux de cohomologie des gr_k . D'après la proposition (7.3.3) précisée par le corollaire (7.4.6), il nous suffit de déterminer les faisceaux de cohomologie des $j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d - tg]$. Nous verrons que cela ne pose aucun problème en dehors des points supersinguliers car on peut utiliser l'hypothèse de récurrence dans le théorème (4.2.3). Au niveau des points supersinguliers on ne dispose d'aucun renseignement local, cependant la proposition (7.3.3) nous permet de restreindre efficacement les possibilités pour les germes en un point supersingulier de ces faisceaux de cohomologie.

8.1. Une écriture dans \mathfrak{G} de $j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d - tg]$. —

8.1.1. Lemme. — *Pour tout $1 \leq t \leq s_g$, on a l'égalité dans \mathfrak{G} :*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(g, t, \pi_v) &= \sum_{r=0}^{s_g-t} (-1)^r j_{!*}^{\geq (t+r)g} HT(g, t+r, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}) [d - (t+r)g] \\ &\quad \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{r(g-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

Démonstration. — On démontre le résultat par récurrence sur t de s_g à 1, en utilisant les corollaires (7.3.17) et (7.4.6). Le cas $t = s_g$ est directement donné par loc. cit. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $t+1$ et traitons le cas de t . D'après loc. cit. on a

$$\begin{aligned} j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) [d - tg] &\otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) = \mathcal{P}(g, t, \pi_v) \\ &+ \sum_{i=1}^{s-t} j_{!*}^{\geq (t+i)g} HT(g, t+i, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i-1}]_{\pi_v}) [d - (t+i)g] \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{ig-i}{2} \right) \end{aligned} \tag{8.1.12}$$

D'après l'hypothèse de récurrence on a

$$j_{1*}^{\geq(t+i)g} HT(g, t+i, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i-1}]_{\pi_v}) [d - (t+i)g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{ig-i}{2}\right) =$$

$$\sum_{r=0}^{s-t-i} (-1)^r j_1^{\geq(t+i+r)g} HT(g, t+i+r, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v}) [d - (t+i+r)g]$$

$$\otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{(i+r)g-i-r}{2}\right)$$

de sorte que (8.1.12) s'écrit

$$\mathcal{P}(g, t, \pi_v) - j_1^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) [d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) =$$

$$\sum_{r=1}^{s-t} (-1)^r j_1^{\geq(t+r)g} HT(g, t+r, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \Pi_r) [d - (t+r)g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{rg-r}{2}\right)$$

où $\Pi_r = (-1)^{r-1} [\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v} + \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{i-1} [\overleftarrow{i-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{r-i-1}]_{\pi_v} = [\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v}$ d'où le résultat. \square

8.2. Filtration de monodromie-locale en hauteur non maximale. — On rappelle que d'après l'hypothèse de récurrence, le théorème (4.2.3) est connu pour les modèles locaux de Deligne-Carayol de hauteur strictement inférieure à d . Ainsi l'aboutissement de la suite spectrale (5.1.10) est connue en dehors des points supersinguliers tandis qu'on ne connaît que les germes en des points non supersinguliers des termes E_1 (cf. le théorème-définition (4.2.1)).

8.2.1. Proposition. — Pour $g \neq 1$ et $1 \leq t \leq s_g$, les faisceaux de cohomologie $h^i \mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ sont nuls pour tout $i < t - s_g$ et i qui n'est pas de la forme $tg - d + a(g-1)$. Pour $i = tg - d + a(g-1)$ avec $0 \leq a < s_g - t$, ils sont égaux dans $\text{FH}(\overline{X})$ à

$$j_1^{\geq(t+a)g} HT(g, t+a, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{a-1}]_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{a(g-1)}{2}\right).$$

Démonstration. — Pour $i < tg - d$, les $h^i \mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ sont tous nuls car $\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ est de dimension $d - tg$. On a la suite exacte courte de faisceaux pervers

$$0 \rightarrow P_{\pi_v, 1, 0}(\pi_v) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \rightarrow j_1^{\geq g} \mathcal{F}(g, t, \pi_v, \pi_v) [d - tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \rightarrow \mathcal{P}(g, t, \pi_v) \rightarrow 0$$

où $P_{\pi_v, 1, 0}(\pi_v)$ est un faisceau pervers de dimension $d - (t+1)g$ de sorte que $h^{tg-d} j_{1*}^{\geq g} \mathcal{F}(g, 1, \pi_v) [d - g]$ est isomorphe à $j_1^{\geq g} \mathcal{F}(g, 1, \pi_v)$. Le principe est alors d'utiliser le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues couplé avec le lemme (8.1.1). Remarquons tout d'abord que d'après le corollaire (7.3.18), pour tout k , gr_{k, π_v} est pur hors des points supersinguliers, de

sorte qu'en ce qui concerne les strates non supersingulières, on a

$$e_{\pi_v} h^i gr_{k, \pi_v} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} h^i \mathcal{P}(g, t, \pi_v) \left(-\frac{tg-1+k}{2} \right)$$

Ainsi d'après le corollaire (7.3.2), on en déduit le lemme suivant.

8.2.2. Lemme. — *Les $h^i \mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ vérifient les propriétés suivantes :*

- *hormis les points supersinguliers, ils sont à support dans les strates $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-t'g)}$ pour $t \leq t' \leq s_g$ avec $t'g - d - t' + t - 1 \leq i \leq t'g - d$ et $i \equiv t'g - d - t' + t - 1 \pmod{2}$;*
- *pour $i = t'g - d - t' + t - 1 + 2r$, la fibre en un point géométrique de $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-t'g)}$ de $h^i \mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ est un facteur direct de*

$$\overleftarrow{[t+2r-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[t'-t-2r-1]}_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{t'(g-1) + 2(t-1) + 2r}{2} \right)$$

8.2.3 — Soit z un point géométrique de $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-t'g)}$. Les strates étant induites, on en déduit que la fibre en z de $h^i \mathcal{P}(g, t, \pi_v) \left(-\frac{t(g-1)}{2} \right)$ est de la forme :

$$\bigoplus_{\chi} \left(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v \circ \chi} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[t'-t-(g-1)/2]}_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v \circ \chi) \left(-\frac{t(g-1)}{2} \right) \right)$$

où π_{χ} est une représentation de $GL_{(t'-t)g}(F_v)$. Pour $\chi = \Xi^{-(t'-t)(g-1)-2r/2}$ avec $r > 0$, on remarque que si $\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v(r)} \overrightarrow{\times} \pi_{\chi}$ contient un des deux constituants de $\overleftarrow{[t+2r-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[t'-t-2r-1]}_{\pi_v}$ alors il contient aussi tous les constituants de

$$\left(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[t'-t-2r-1]}_{\pi_v} \right) \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[2r-1]}_{\pi_v}$$

alors que, par exemple $\overleftarrow{[2r-1, 1, t-1, t'-t-2r]}_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{t'(g-1)+2r}{2} \right)$ n'est pas un constituant de $e_{\pi_v} h^{t'g-d-t'+t-1+2r} gr_{1-t, \pi_v}$ d'où la contradiction.

On en déduit ainsi que $h^{t'g-d-t'+t-1} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ est le seul faisceau de cohomologie ayant un support d'intersection non vide avec la strate $t'g$. Le raisonnement étant valide pour tout t' , on en déduit aussi que le support de $h^{t'g-d-t'+t-1} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ est contenu dans la strate $t'g$. Le lemme (8.1.1) donne alors que la restriction à la strate $t'g$ de $h^{t'g-d-t'+t-1} \mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ est isomorphe à $HT(g, t', \pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[t'-t-1]}_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{(t'-t)(g-1)}{2} \right)$, de sorte que

$$h^{t'g-d-t'+t-1} \mathcal{P}(g, t, \pi_v) \simeq j_1^{\geq t'g} HT(g, t', \pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[t'-t-1]}_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{(t'-t)(g-1)}{2} \right).$$

□

8.2.4. Proposition. — Pour $g = 1$, les $h^i\mathcal{P}(1, t, \chi_v)$, sont nuls pour $i \neq t - d$ et pour $i = t - d$ leur restriction à $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-t-r)}$, pour $0 \leq r < d - t$ est égale dans $\text{FH}(\overline{X}^{d-t-r})$ à $HT(1, t + r, \chi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\chi_v} \overrightarrow{[r-1]}_{\chi_v})$.

Démonstration. — Elle est strictement identique à celle pour $g \neq 1$, en considérant à chaque étape les restrictions aux strates $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-t-r)}$. □

8.2.5. Proposition. — Pour g ne divisant pas d , $h^{s_g g - d - (s_g - l)}\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ est, dans $\text{FH}(\overline{X})$, isomorphe à

$$j_!^{\geq s_g g} HT(g, s_g, \pi_v, ([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{[s_g - t - 1]}_{\pi_v})) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{(s_g - t)(g - 1)}{2} \right).$$

Par ailleurs les $h^i\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ sont nuls pour $s_g g - d - (s_g - t) < i \leq 0$.

Démonstration. — Tant qu'on est en dehors des points supersinguliers, les arguments précédents s'adaptent, en utilisant le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues avec la connaissance de la filtration de monodromie-locale des modèles de Deligne-Carayol en hauteur strictement inférieure à d . En ce qui concerne les points supersinguliers, on raisonne par récurrence sur t de s_g à 1. Pour $t = s_g$, le corollaire (7.3.17), joint au corollaire (7.4.6), donne

$$\mathcal{P}(g, s_g, \pi_v) = j_!^{\geq s_g g} HT(g, s_g, \pi_v, [\overleftarrow{s_g - 1}]_{\pi_v})[d - s_g g] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)$$

d'où le résultat. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . On considère les suites exactes courtes du corollaire (7.3.17), où l'on rappelle que d'après (7.4.6), les $A_{\pi_v, t, g}$ sont nuls :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow P_{\pi_v, t, 0}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) \rightarrow j_!^{\geq t g} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})[d - t g] \rightarrow \\ j_{!*}^{\geq t g} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})[d - t g] \rightarrow 0 \\ \dots \\ 0 \rightarrow P_{\pi_v, t, s_g - l}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) \rightarrow P_{\pi_v, t, s_g - t - 1}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) \rightarrow \mathcal{P}_-(g, s_g, \pi_v, t, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où $P_{\pi_v, t, s_g - t}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})$ est le faisceau pervers nul. On démontre alors par récurrence sur r , de $s_g - t$ à 0, que le germe en un point supersingulier de $h^i P_{\pi_v, t, r}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})$ est nul pour tout i , d'où le résultat. □

En direction du théorème (5.4.7), on a le résultat suivant.

8.2.6. Lemme. — Pour $g \neq 1$ divisant $d = s g$ (resp. $g = 1$), la fibre en un point supersingulier de $h^i\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ (resp. de $h^i\mathcal{P}(1, t, \chi_v)$) est nulle pour $i < t - s$. Par ailleurs les $h^{t-s+i}\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ sont concentrés aux points supersinguliers pour $0 \leq i < s - t$, de fibre

(resp. la fibre en un point supersingulier de $h^{t-s+i}\mathcal{P}(1, t, \chi_v)$ est), en tant que $GL_d(F_v) \times W_v$ -module, un sous-espace, éventuellement nul, de

$$\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\overleftarrow{[s-t-2-i]}}_{\pi_v} \overleftarrow{[i]}_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{(s-t)(g-1)}{2} \right).$$

Démonstration. — Nous ne traitons que le cas $g \neq 1$, le raisonnement pour $g = 1$ étant strictement identique. On raisonne par récurrence sur t de s à 1, le cas $t = s$ étant trivial. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $t + 1$ et traitons le cas de t . On considère alors les suites exactes courtes de faisceaux pervers de (7.3.17). On remarque tout d'abord que toutes les fibres en un point supersingulier des faisceaux de cohomologie des $\mathcal{P}_-(g, t + r, \pi_v, t, \Pi_t)$ sont de poids $(s-t)(g-1)$ de sorte qu'il en est de même pour les $P_{\pi_v, t, r}(\Pi_t)$ et donc pour $\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$. Le résultat découle alors de l'étude des suites exactes longues associées. Une façon plus visuelle et plus directe d'obtenir le résultat est de considérer l'isomorphisme $Dj_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)[d-tg] \simeq j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v^{\vee})d-tg$ et de regarder la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = R^p \text{Hom}(h^{-q}\mathcal{P}(g, t, \pi_v), K_{s_o}) \Rightarrow h^{p+q}\mathcal{P}(g, t, \pi_v^{\vee})(d-1) \quad (8.2.13)$$

où K_{s_o} désigne le complexe dualisant sur $\overline{X}_{U^p, m}$ ⁽¹⁴⁾. On rappelle que pour un faisceau \mathcal{L} sur $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-(t+r)g)}$, par adjonction on a

$$R\text{Hom}(i_*^{(t+r)g} j_!^{\geq (t+r)g} \mathcal{L}, f^! \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq i_*^{(t+r)g} Rj_*^{\geq (t+r)g} R\text{Hom}(\mathcal{L}, j^{\geq (t+r)g, !} i^{(t+r)g, !} f^! \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

et comme $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-(t+r)g)}$ est lisse, on a $j^{\geq (t+r)g, !} i^{(t+r)g, !} f^! \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \overline{\mathbb{Q}}_l[2(d-(t+r)g)](d-(t+r)g)$ soit pour $p \geq -2(d-(t+r)g)$,

$$\begin{aligned} R^p \text{Hom}(j_!^{\geq (t+r)g} HT(g, t+a, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\overleftarrow{[a-1]}}_{\pi_v}) \otimes | \text{Art}_{F_v}^{-1} |^{-a(g-1)/2}, K_{s_o}) \simeq \\ (i_*^{(t+a)g} R^{p+2(d-(t+a)g)} j_*^{\geq (t+a)g} HT(g, t+a, \pi_v^{\vee}, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v^{\vee}} \overleftarrow{\overleftarrow{[a-1]}}_{\pi_v^{\vee}}) \otimes | \text{Art}_{F_v}^{-1} |^{-a(g+1)/2})(tg-d) \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

Ainsi pour z un point supersingulier, $(E_2^{p,q})_z$, pour q de la forme $d-tg-a(g-1)$ (resp. $q = a+1$) avec $0 \leq a < s-t$, et $p = -(s-t-a)g-i$ avec $0 \leq i \leq s-t-a$ (resp. $p = 0$), s'il est non nul, est mixte de poids $(s-t-a-r)(g-1)/2 + (a+r)(g+1)/2$ avec $0 \leq r < s-t-a$ si $p < -(s-t-a)g$ et pur de poids $(s-t)(g+1)/2$ si $p = (s-t-a)g$. Dans ce dernier cas on obtient alors

$$\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\overleftarrow{[s-t-a-1]}}_{\pi_v} \overleftarrow{[a-1]}_{\pi_v} \otimes | \text{Art}_{F_v}^{-1} |^{-(s-t)(g+1)/2}$$

(resp. $(h^{-q} j_{!*}^{\geq tg} \mathcal{F}(g, t, \pi_v)_0)_{\vee}^{\vee}(-tg) \otimes | \text{Art}_{F_v}^{-1} |^{-(s-t)(g+1)/2}$ où le dual est pris en tant que représentation de $GL_{(s-t)g}(F_v)$). Dans la figure (2) on représente ces $(E_2^{p,q})_z$ de poids $(s-t)(g+1)$. Le résultat découle alors du fait que les E_{∞}^i sont tous nuls pour $i \geq 0$.

⁽¹⁴⁾On pourra voir les termes $E_2^{p,q}$ à la figure (7) (resp. (8)), pour $g = 7$, $s = 5$ et $t = 4$ (resp. $t = 3$, $t = 2$ et $t = 1$).

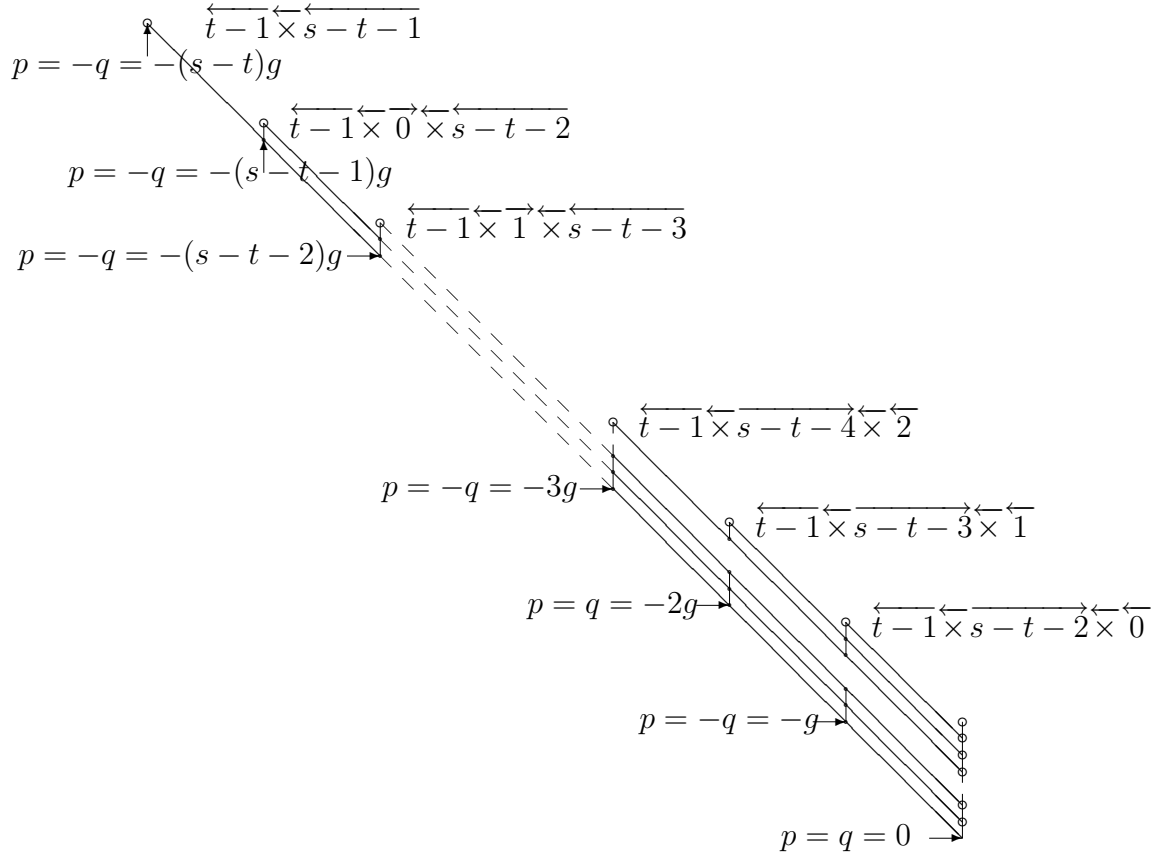


FIGURE 2. parties de poids $(s-t)(g+1)$ de la fibre aux points supersinguliers des $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale (8.2.13)

□

9. Preuve des théorèmes globaux sous (9.1.1)

On rappelle, cf. §6, que le théorème (4.2.3) découle, d'après le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues, des théorèmes globaux (5.4.4), (5.4.7) et (5.4.11). En outre le théorème (4.2.3) implique, grâce à (5.4.11) via Berkovich-Fargues, le théorème (4.1.2). Par ailleurs le principe de la preuve de la proposition (8.2.1) montre que (4.2.3) implique les théorèmes globaux. Le but de ce paragraphe est de montrer que le théorème (4.1.2) implique les théorèmes globaux (5.4.4), (5.4.7) et (5.4.11) et donc le théorème local (4.2.3). Par souci d'efficacité, on montrera, en utilisant l'opérateur N , qu'il nous suffit en fait de connaître les parties de poids $s(g-1)$ de (4.1.2).

9.1. Preuve de (5.4.7) sous (9.1.1). —

9.1.1. Proposition. — Pour tout diviseur g de $d = sg$ et π_v une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F_v)$, la partie de poids $d - s$ de $\mathcal{U}_{F_v, l, d, \xi_v}^{d-s+i}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v^\vee})$ est nulle pour $0 < i < s$ et égale à $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{d-s}{2})$ pour $i = 0$.

La preuve de cette proposition sera donnée au paragraphe suivant ; montrons comment le théorème (4.2.3) en découle. On commence par prouver le théorème (5.4.7) qui d'après la proposition (8.2.1) découle alors de la proposition suivante.

9.1.2. Proposition. — Sous le résultat de la proposition (9.1.1), pour $g \neq 1$ divisant d , $h^{t-s+i}\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ est nul pour $i \neq 0$ et sinon est concentré aux points supersinguliers de fibre isomorphe à $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{(s-t)(g-1)}{2})$ pour $i = 0$.

Démonstration. — D'après le lemme (8.2.6) tous les germes en un point supersingulier des $\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$, sont de poids $(s-t)(g-1)$. Le raisonnement de la preuve de la proposition (8.2.1) s'applique alors tel quel en étudiant les $\mathcal{P}(g, t, \pi_v)(-\frac{t(g-1)}{2})$ pour $1 \leq t \leq s$ et en utilisant la connaissance des parties de poids $s(g-1)$ de (4.2.3). □

9.2. Preuve de (5.4.11) sous (9.1.1). —

Démonstration. — On considère la suite spectrale (5.1.10) associée à la filtration de monodromie. D'après la proposition précédente et le point (ii) de la proposition (7.3.3), le germe en un point supersingulier z de $E_1^{i,j}$ vérifie les propriétés suivantes (cf. la figure (6) dans le cas $s = 4$ et $g = 3$) :

- il est nul pour i, j ne vérifiant pas la condition suivante : il existe $0 \leq k \leq s-1$ tel que $j = 1 - s + 2k$ et $-k \leq i \leq s-1-2k$;
- pour $j = 1 - s + 2k$ avec $0 \leq k \leq s-1$, le germe en z de $E_1^{s-1-2k-r, 1-s+2k}$ pour $0 \leq r \leq s-1-k$ est isomorphe à $[\overleftarrow{s-r-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)+2k}{2})$.

En outre d'après (9.1.1), pour $j = 1 - s$ et pour tout $0 \leq i < s-1$, l'application $d_1^{i, 1-s} : E_1^{i, 1-s} \longrightarrow E_1^{i+1, 1-s}$ induit en z la flèche non triviale

$$[\overleftarrow{i}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-i-2}]_{\pi_v} \longrightarrow [\overleftarrow{i+1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-i-3}]_{\pi_v}$$

dont le noyau est $[\overleftarrow{i}, \overleftarrow{s-i-1}]_{\pi_v}$ et le conoyau est $[\overleftarrow{i+2}, \overleftarrow{s-i-3}]_{\pi_v}$. Le logarithme N^k de la partie unipotente de la monodromie induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_1^{i, 1-s} & \xrightarrow{d_1^{i, 1-s}} & E_1^{i+1, 1-s} \\ N^k \uparrow & & \uparrow N^k \\ E_1^{i-2k, 1-s+2k} & \xrightarrow{d_1^{i-2k, 1-s+2k}} & E_{i-2k+1, 1-s+2k} \end{array}$$

En remarquant que pour $0 \leq k \leq -i$, N^k induit des isomorphismes $E_1^{i-2k, 1-s+2k} \simeq E_1^{i, 1-s}$ et $E_1^{i+1-2k, 1-s+2k} \simeq E_1^{i+1, 1-s}$, on en déduit que la flèche $d_1^{i-2k, 1-s+2k}$ est aussi induite par la flèche non triviale $[\overleftarrow{i}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{s-i-2}]_{\pi_v} \longrightarrow [\overleftarrow{i+1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{s-i-1}]_{\pi_v}$.

Finalement pour tout $1 \leq t' < t \leq s$ et tout $k \equiv t' - 1 \pmod{2}$ avec $|k| \leq t' - 1$, les flèches

$$h^{-d+tg-(t-t')} gr_{k, \pi_v} \longrightarrow h^{-d+tg-(t-t'-1)} gr_{k-1, \pi_v}$$

de la suite spectrale (5.1.10), sont non nulles, et se déduisent pour $t' < t - 1$, des suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow [\overleftarrow{t'-1}, \overrightarrow{t-t'}]_{\pi_v} \rightarrow [\overleftarrow{t'-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{t-t'-1}]_{\pi_v} \rightarrow \\ \rightarrow [\overleftarrow{t'}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{t-t'-2}]_{\pi_v} \rightarrow [\overleftarrow{t'+1}, \overrightarrow{t-t'-2}]_{\pi_v} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et pour $t' = t - 1$ de la suite exacte $0 \rightarrow [\overleftarrow{t-2}, \overrightarrow{1}]_{\pi_v} \rightarrow [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{0}]_{\pi_v} \rightarrow [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \rightarrow 0$. \square

Remarque : On verra plus loin (cf. les remarques (10.3.6) et (10.4.3)) qu'on pourrait en fait montrer (4.2.3) directement, sans utiliser l'opérateur de monodromie N .

9.2.1. Corollaire. — Pour $0 \leq i \leq d - tg$ et $g > 1$, $R^i j_*^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg]$ est, dans $\text{FH}(\overline{X})$, une somme directe sur tous les couples (n, r) tels que $ng + r(g - 1) = i$ des faisceaux de type $HT(g, t + n + r)$

$$j_!^{\geq (t+n+r)g} HT(g, t + n + r, \pi_v, (\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{n-1}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v}) \otimes \Xi^{\frac{n(g+1)+r(g-1)}{2}}$$

Pour $g = 1$, $R^i j_*^{\geq h} HT(1, h, \chi_v, \Pi_h)[d - h]$ est à support dans la tour des $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h-i)}$ et sa restriction à $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h-i-r)}$ est le faisceau : $HT(1, h + i + r, \chi_v, (\Pi_h \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i-1}]_{\chi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{r-1}]_{\chi_v}) \otimes \Xi^i$.

9.3. Pureté de la filtration de monodromie de $R\Psi_v[d - 1]$. — La proposition suivante correspond au théorème (5.4.4) qui rappelons le découle, en utilisant la pureté de la filtration de monodromie, du théorème (5.4.1) qui est prouvé au corollaire (7.4.10).

9.3.1. Proposition. — Pour tout $|k| < s_g$, $e_{\pi_v} gr_{k, \pi_v}$ est, dans $\text{FPH}(\overline{X})$, égal à

$$\sum_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(g, t, \pi_v) \left(-\frac{tg + k - 1}{2} \right)$$

Dans tous les autres cas gr_{k, π_v} est nul.

Démonstration. — Par rapport au corollaire (7.3.18), il s'agit de traiter les points super-singuliers et donc, d'après le corollaire (7.4.6) de montrer que pour tout $r \equiv s - 1 \pmod{2}$ et $|r| \leq s - 1$, $\mathcal{P}(g, s, \pi_v)(-\frac{sg+r-1}{2})$ est un constituant de $e_{\pi_v} gr_{r, \pi_v}$.⁽¹⁵⁾

On commence par remarquer, en utilisant la partie unipotente N de la monodromie, qu'il suffit en fait de montrer que $\mathcal{P}(g, s, \pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$ est un constituant de $e_{\pi_v} gr_{1-s, \pi_v}$. Considérons alors $\mathcal{P}(g, s, \pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$ et soit r tel qu'il soit un constituant de $e_{\pi_v} gr_{r, \pi_v}$. Soit z_I un point géométrique de $\overline{X}_{U^p, m}^{(0)}$. D'après la proposition (9.1.2), les germes en z_I des $h^{-1} gr_{k, \pi_v}$ sont tous de poids strictement plus grand que $s(g-1)$ sauf pour $k = 2 - s$. Par ailleurs le germe en z_I de $R^{d-1} \Psi_{\pi_v}$ n'a aucun constituant de poids $s(g-1)$ de sorte que $r \leq 2 - s$.

- Si on avait $r \leq -s$, la partie unipotente N de la monodromie donnerait que $\mathcal{P}(g, s, \pi_v)(-\frac{s(g-1)-2r}{2})$ serait un constituant de $e_{\pi_v} R\Psi_{\pi_v}[d-1]$ ce qui n'est pas d'après (7.2.2) (7.3.3) et (7.4.6), car $1 - s - 2r > s - 1$.

- Supposons $r = 2 - s$: pour $s > 2$, par application de la dualité de Verdier et de l'opérateur de monodromie N , on en déduit que $\mathcal{P}(g, s, \pi_v) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{s(g+1)-2}{2})$ et $\mathcal{P}(g, s, \pi_v)(-\frac{s(g+1)-4}{2})$ sont des constituants de $e_{\pi_v} gr_{s-2, \pi_v}$. Ainsi par une nouvelle application de N , $\mathcal{P}(g, s, \pi_v)(-\frac{s(g+1)-4}{2})$ est aussi un constituant de $e_{\pi_v} gr_{s-5, \pi_v}$ et donc devrait apparaître deux fois ce qui n'est pas. Dans le cas $s = 2$, la situation défavorable correspondrait à $\mathcal{P}(g, 2, \pi_v)(-g)$ et $\mathcal{P}(g, 2, \pi_v)(1-g)$ constituants de $e_{\pi_v} gr_{0, \pi_v}$ de sorte que dans la cohomologie globale, la monodromie serait nulle ce qui est en contradiction avec la proposition suivante pour $s = 2$. □

9.3.2. Proposition. — *Pour tout diviseur g de $d = sg$ et toute représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$, il existe une représentation irréductible automorphe Π de $D_{\mathbb{A}}^{\times}$ vérifiant $\text{Hyp}(\infty)$ telle que $\pi_v \simeq \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ telle que l'opérateur de monodromie N sur $H_{\eta_v}^{d-1}[\Pi^{\infty}]$ soit non nul où $H_{\eta_v}^i = \varinjlim_{U^p(m)} H^i(X_{U^p, m} \otimes_{\mathcal{O}_v} \overline{F}_v, \mathcal{L}_{\xi})$.*

Démonstration. — Le principe, qui nous a été suggéré par M. Harris, est de se ramener au cas Iwahori par changement de base résoluble. Commençons donc par traiter le cas Iwahori. Notons que récemment Yoshida et Taylor, cf. [16], ont rédigé ce résultat qui par ailleurs m'avait été expliqué par A. Genestier. Cependant dans notre cas, vu que l'on ne s'intéresse qu'au cas $s = 2$ et donc $g = 1$, le résultat a déjà été prouvé par Carayol, cf. [3].

Considérons désormais le cas général de π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ pour $g > 1$. On reprend les notations de [6]. La somme alternée de la cohomologie

⁽¹⁵⁾On remarquera que le raisonnement suivant est valable pour toutes les strates de sorte qu'en raisonnant par récurrence l'argument du corollaire (7.3.18) en utilisant le théorème de comparaison de Berkovich-Fargues n'était pas strictement nécessaire.

de la variété globale à valeur dans \mathcal{L}_ξ , dans le groupe de Grothendieck correspondant, y est écrite sous la forme

$$\sum_{\pi^\infty} \pi^\infty \otimes [R_\xi(\pi^\infty)] \quad [R_\xi(\pi^\infty)] = \sum_i (-1)^i R_\xi^i(\pi^\infty)$$

où π^∞ décrit l'ensemble des représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}^\infty)$. Par ailleurs, corollaire VI.2.7 de loc. cit., s'il existe une représentation irréductible π_∞ de $G_\tau(\mathbb{R})$ telle que $\pi := \pi^\infty \otimes \pi_\infty$ vérifie Hyp(∞) avec $BC(\pi) = (\psi, \Pi)$ où $JL(\Pi)$ est cuspidale, avec les notations de loc. cit., alors $R_\xi^i(\pi^\infty)$ est nulle pour $i \neq d-1$.

Soit alors $\sigma_v = \text{rec}_{F_v}(\pi_v)$ et soit L_v une extension de F_v telle que la restriction de σ_v à L_v soit non ramifiée. On rappelle que l'extension L_v/F_v est résoluble; cf.[15] IV-2. On globalise alors la situation comme dans [6] : soit $(F')^+/F^+$ une extension résoluble de corps totalement réels telle que :

- la place v de F^+ soit inerte dans $(F')^+$;
- l'extension $(F')^+_v/F^+_v$ est isomorphe à l'extension L_v/F_v .

On pose alors $F' = E(F')^+$. D'après le corollaire VI.2.6 de loc. cit., on peut choisir une représentation automorphe cuspidale Π de $GL_d(\mathbb{A}_F)$ telle que Π vérifie :

- $\Pi^c \simeq \Pi^\vee$;
- Π_∞ a le même caractère central qu'une représentation algébrique de $\text{Res}_{\mathbb{Q}}^G(GL_d)$;
- $\pi_v \simeq \text{Sp}_s(\pi_v \otimes \psi)$ pour un certain caractère ψ de F'_ω .

Soit alors le changement de base $\Pi' := BC_{F'/F}(\Pi)$; d'après loc. cit. (théorèmes VI.1.1 et VI.2.9) on associe à Π et Π' des représentations π et π' de respectivement $G_\tau(\mathbb{A}_F)$ et $G_\tau(\mathbb{A}_{F'})$ qui vérifient Hyp(∞) avec $\pi'_v \simeq [\overleftarrow{s-1}]_\zeta \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{s-1}]_\zeta$, pour ζ un caractère de F'_ω . Par ailleurs d'après le théorème VII.1.9 de loc. cit. appliqué aux bonnes places de F , et en utilisant le théorème de densité de Chebotarev, on en déduit que la représentation galoisienne $R_{\xi'}(\pi'^{\infty})$ est isomorphe à $R_\xi(\pi^\infty)|_{\text{Gal}(\overline{F}/F')}$ avec $R_{\xi'}(\pi'^{\infty})_\omega \simeq (\text{Sp}_s \otimes \zeta^{-1})^g$ de sorte que $R_\xi(\pi^\infty) \simeq \text{Sp}_s \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)$, d'où le résultat. \square

9.3.3. Proposition. — Soit Π une représentation irréductible automorphe de $G_\tau(\mathbb{A})$ obtenue via le théorème VI.2.9 de [6] et telle que π_v est l'induite irréductible $[\overleftarrow{s_1-1}]_{\xi_1} \boxplus \cdots \boxplus [\overleftarrow{s_r-1}]_{\xi_r}$ où les ξ_i sont des caractères de F_v^\times . En tant que représentation de W_v , $H_{\eta_v}^{d-1}[\Pi^\infty]$ est la somme directe des $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) \bigoplus_{i=1}^r \text{Sp}_{s_i} \otimes \xi_i$ où Sp_s est la représentation de dimension s , $|-|^{(1-s)/2} \oplus \cdots \oplus |-|^{(s-1)/2}$ où l'indice de nilpotence de l'opérateur de monodromie N est égal à s .

Démonstration. — Le cas $s = 2$ et $g = 1$ de la proposition (9.3.2) est prouvé par Carayol dans [3] de sorte que la proposition précédente est vraie pour $g = 1$ et s quelconque. On étudie ensuite la suite spectrale

$$E_1^{i,j}[\Pi^\infty] = H^{i+j}(gr_{-i})[\Pi^\infty] \Rightarrow H_{\eta_v}^{i+j}[\Pi^\infty] \quad (9.3.15)$$

où pour tout i , $H_{\eta_v}^i$ (resp. $H_{\eta_v, \xi}^i$) désigne la limite projective sur $U^p(m)$ des groupes de cohomologie de la fibre générique du faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_l$ (resp. \mathcal{L}_ξ) de $X_{U^p, m}$. Cette étude est faite dans le cas général au théorème (14.1); le point est qu'en ce qui concerne les Π^∞ -parties, nous ne devons considérer que les représentations π_v de $GL_1(F_v)$, i.e. le cas $g = 1$, qui rappelons le est connu grâce à Carayol, d'où le résultat. \square

Remarque : Pour des résultats généraux sur les composantes locales π_v ainsi que sur la partie π^∞ -isotypique des groupes de cohomologie de la fibre générique, on renvoie respectivement aux théorèmes (13.1) et (14.1).

10. Étude de la suite spectrale des cycles évanescents

Le but de ce paragraphe est de prouver la proposition (9.1.1). Le principe de la preuve est d'étudier la suite spectrale des cycles évanescents en y intégrant, via les suites spectrales associées à la stratification, la connaissance des $H_c^i(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g, t, \pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi)$.

10.1. Cas où $\pi_v \simeq \mathrm{Sp}_s(\pi_v)$. — Soit $1 \leq g \leq d$ et π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. On fixe dans la suite une représentation automorphe irréductible Π de $G_\tau(\mathbb{A})$ vérifiant $\mathrm{Hyp}(\xi)$ et telle que $\pi_v \simeq [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$ pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ et on note $m(\Pi)$ la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes. On commence par un résultat déjà présent dans [12].

10.1.1. Corollaire. — *Les groupes de cohomologie de la fibre générique $H_{\eta_v, \xi}^i[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour $i \neq d-1$ et*

$$H_{\eta_v, \xi}^{d-1}[\Pi^{\infty, v}] = \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) \left(-\frac{sg-1}{2}\right)$$

Démonstration. — On considère la suite spectrale

$$E_{1, \xi}^{i, j}[\Pi^{\infty, v}] := H^{i+j}(gr_{-i, \xi})[\Pi^{\infty, v}] \Rightarrow H_{\eta_v, \xi}^{i+j+d-1}[\Pi^{\infty, v}]$$

Le théorème (5.4.4) découle de la proposition (9.3.2). La proposition (7.4.1) donne alors la nullité de $E_{1, \xi}^{i, j}[\Pi^{\infty, v}]$ pour $i+j \neq 0$, ou $|i| \geq s$ ou $i \equiv s \pmod{2}$. Pour $|i| < s$ et $i = s-1-2r$, on a

$$E_{\infty, \xi}^{s-1-2r, 2r+1-s}[\Pi^{\infty, v}] = E_{1, \xi}^{s-1-2r, 2r+1-s}[\Pi^{\infty, v}] = \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{s(g-1)+2r}{2}\right)$$

d'où le résultat. \square

10.1.2. Proposition. — Pour tout $0 \leq i \leq d - 1$, les $GL_d(F_v) \otimes W_v$ -modules $H^j(R^i \Psi_{\pi_v, \xi})[\Pi^{\infty, v}]$ vérifient les propriétés suivantes :

- (1) ils sont nuls si g n'est pas un diviseur de d ;
- (2) pour g un diviseur de $d = sg$, ils sont nuls si j n'est pas de la forme $d - tg$ pour $1 \leq l \leq s$;
- (3) pour g un diviseur de $d = sg$ et $j = d - tg$ avec $1 \leq t \leq s$, ils sont nuls si i n'est pas de la forme $tg - r$ avec $1 \leq r \leq t$;
- (4) pour g un diviseur de $d = sg$ et $1 \leq t < s$, $H^{d-tg}(R^{tg-r} \Psi_{\pi_v})[\Pi^{\infty, v}]$ est isomorphe à

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) [\overleftarrow{[t-r, r-1]}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{s(g-1) + 2(t-r)}{2} \right)$$

Démonstration. — On utilise la suite spectrale associée à la stratification

$$E_{1, \xi, U^p(m), \pi_v}^{p, q; i} = H_c^{p+q}(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-p+1)}, R^i \Psi_{\pi_v, \xi}) \Rightarrow H_c^{p+q}(\overline{X}_{U^p, m}, R^i \Psi_{\pi_v, \xi}) \quad (10.1.16)$$

On rappelle que d'après le corollaire (7.4.11), $E_{1, \xi, U^p(m), \pi_v}^{p, q; i}[\Pi^{\infty, v}]$ est non nul si et seulement si :

- g est un diviseur de $d = sg$,
- $p - 1 = tg$ pour $1 \leq t \leq s$,
- $p + q = d - tg$,
- $i = tg - r$ avec $1 \leq r \leq t$.

Les points (1), (2) et (3) en découlent alors directement. Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \varinjlim_{U^p(m)} E_{1, \xi, U^p(m), \pi_v}^{tg+1, d-2tg-1; tg-r}[\Pi^{\infty, v}] &\simeq \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) [\overleftarrow{[t-r, r-1]}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \\ &\otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{s(g-1) - 2(r-t)}{2} \right) \end{aligned}$$

de sorte que pour tout $k \geq 1$, les flèches $d_k^{p, q; i} : E_{k, \xi, \pi_v}^{p, q; i}[\Pi^{\infty, v}] \longrightarrow E_{k, \xi, \pi_v}^{p+k, q+k-1}[\Pi^{\infty, v}]$ de (10.1.16) sont toutes nulles. En effet pour que $E_{k, \xi, \pi_v}^{p, q; i}[\Pi^{\infty, v}]$ (resp. $E_{k, \xi, \pi_v}^{p+k, q+k-1; i}[\Pi^{\infty, v}]$) soit non nul, il faut qu'il existe $1 \leq t_1 \leq s$ et $1 \leq r_1 \leq t_1$ (resp. $1 \leq t_2 \leq s$ et $1 \leq r_2 \leq t_2$) avec

$$(p, q, i) = (t_1 g + 1, d - 2t_1 g - 1, t_1 g - r_1) \quad (\text{resp. } (p+k, q+k-1, i) = (t_2 g + 1, d - 2t_2 g - 1, t_2 g - r_2)).$$

Ce qui donne $1 = 3g(t_2 - t_1)$; on voit alors que pour tout $k \geq 1$, $E_{k, \xi, \pi_v}^{p, q; i}[\Pi^{\infty, v}]$ et $E_{k, \xi, \pi_v}^{p+k, q+k-1}[\Pi^{\infty, v}]$ ne peuvent pas être tous deux non nuls de sorte que $E_{\infty, \xi, U^p(m), \pi_v}^{p, q; i}[\Pi^{\infty, v}] = E_{1, \xi, U^p(m), \pi_v}^{p, q; i}[\Pi^{\infty, v}]$ d'où le résultat d'après le corollaire (7.4.11). \square

10.1.3. Corollaire. — La partie de poids $d - s$ de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-i}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]_{\pi_v}}))$ est un constituant de $\Pi_i \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{d-s}{2})$ où

$$\Pi_i = \begin{cases} \overleftarrow{[s-1]_{\pi_v}} & \text{pour } i = 1 \\ \overrightarrow{[0]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-2]_{\pi_v}} & \text{pour } i = 2 \\ \dots & \\ \overrightarrow{[i-2]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-i]_{\pi_v}} & \text{pour } i \\ \dots & \\ \overrightarrow{[s-2]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[0]_{\pi_v}} & \text{pour } i = s \end{cases}$$

En outre $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]_{\pi_v}}))$ contient $\overrightarrow{[s-1]_{\pi_v}} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$ et la partie de poids $s(g-1)$ de $\sum_{i=1}^s (-1)^i \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-i}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]_{\pi_v}}))$ est égale à $(-1)^s \overrightarrow{[s-1]_{\pi_v}} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$.

Démonstration. — On étudie la $\Pi^{\infty, v}$ -partie de la suite spectrale des cycles évanescents pour Π vérifiant les propriétés du début de ce paragraphe :

$$E_{2, \xi, \pi_v}^{p, q}[\Pi^{\infty, v}] = \varinjlim_{U^p(m)} H^p(\overline{X}_{U^p, m}, R^a \Psi_{\pi_v, \xi})[\Pi^{\infty, v}] \Rightarrow H_{\eta_v, \pi_v, \xi}^{p+q}[\Pi^{\infty, v}] \quad (10.1.17)$$

10.1.4. Lemme. — Pour tout $1 < r < s$, la partie de poids $s(g-1)$ de $E_{2, \xi, \pi_v}^{0, d-r}[\Pi^{\infty, v}]$ est un constituant de $E_{2, \xi, \pi_v}^{d-(r-1)g, (r-1)(g-1)}[\Pi^{\infty, v}]$, i.e. de $\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_{\tau})m(\Pi)[\overrightarrow{[r-2]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-r]_{\pi_v}}] \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$; celle de $E_{2, \xi, \pi_v}^{0, d-1}[\Pi^{\infty, v}]$ est nulle.

Démonstration. — D'après la proposition précédente, les $E_{2, \xi, \pi_v}^{p, q}[\Pi^{\infty, v}]$ de poids $s(g-1)$ pour $p \neq 0$, non nuls, sont

$$E_{2, \xi, \pi_v}^{d-rg, r(g-1)}[\Pi^{\infty, v}] \simeq \sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_{\tau})m(\Pi)[\overrightarrow{[r-1]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-r-1]_{\pi_v}}] \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$$

Or, d'après le corollaire (10.1.1), pour $1 \leq r < s$, la partie de poids $s(g-1)$ de $E_{\infty, \xi, \pi_v}^{d-r}[\Pi^{\infty, v}]$ est nulle d'où le résultat. \square

10.1.5. Lemme. — Pour $g > 1$, le terme $E_{2, \xi, \pi_v}^{0, d-r}[\Pi^{\infty, v}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents est égal à $\sharp \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0) \mathrm{Hom}_{D_{v, d}^{\times}}(\mathcal{C}_{H_0, \xi}^{\infty}, \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-r})[\Pi^{\infty, v}]$.

Démonstration. — On étudie la suite spectrale associée à la stratification pour le faisceau $R^{d-r} \Psi_{\pi_v}$. D'après la proposition précédente, pour tout $1 \leq l < s$, $H_c^0(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, R^{d-r} \Psi_{\pi_v, \xi})[\Pi^{\infty, v}]$ est nul; pour $g \neq 1$, il en est de même de $H_c^1(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, R^{d-r} \Psi_{\pi_v, \xi})[\Pi^{\infty, v}]$, d'où le résultat. \square

10.1.6. Lemme. — Pour $g = 1$, $\mathrm{Hom}_{D_{v, d}^{\times}}(\mathcal{C}_{H_0, \xi}^{\infty}, \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-r})[\Pi^{\infty, v}]$ est un constituant de

$$m(\Pi)[\overrightarrow{[r-2]_{\chi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[d-r]_{\chi_v}}] \otimes \chi_v^{\vee}.$$

Démonstration. — Pour $g = 1$, on remarque que le seul $H_c^1(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}, R^{d-r}\Psi_{\chi_v, \xi})$ ayant une partie de poids 0 non nulle, est pour $h = d - 1$ et $r = d$, de $\Pi^{\infty, v}$ -composante isotypique égale à $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) [\overrightarrow{d-2}]_{\chi_v} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\chi_v} \otimes \chi_v^\vee$ ce qui correspond à la contribution de $E_{2, \xi, \chi_v}^{1, 0}[\Pi^{\infty, v}]$ dans le lemme (10.1.4), d'où le résultat. \square

Ainsi pour tout $1 \leq i \leq s$, la partie de poids $d - s$ de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-i}(\text{JL}^{-1}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v^\vee}))$ est un constituant de $\Pi_i \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{d-s}{2})$ où Π_i est comme dans l'énoncé. Par ailleurs on remarque que $E_{2, \xi, \pi_v}^{d-s+1, (s-1)(g-1)}[\Pi^{\infty, v}]$ contient $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$ alors que $E_{2, \pi_v}^{d-s+2, (s-2)(g-1)}[\Pi^{\infty, v}]$ non; on en déduit alors que $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-i}(\text{JL}^{-1}(\pi_v)^\vee)$ contient $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$. Le calcul sur la somme alternée correspond à (3.1.3). \square

10.2. Involution de Zelevinski et première preuve de (9.1.1). — Il est possible de prouver la proposition (9.1.1) sans plus d'étude cohomologique en utilisant le résultat suivant.

10.2.1. Théorème. — *Pour toute représentation irréductible cuspidale π_v de $GL_g(F_v)$, on a, pour tout $s \geq 1$ et pour tout i , un isomorphisme canonique*

$$(\mathcal{U}_{F_v, l, sg}^{sg-1+\bullet}(\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_s(\pi_v))))^{\vee, \iota} (d-1) \simeq \mathcal{U}_{F_v, l, sg}^{sg+s-2-2\bullet}(\text{JL}^{-1}(\text{Sp}_s(\pi_v^\vee)))$$

où dans le membre de droite l'exposant \vee, ι désigne le dual composé avec l'involution de Zelevinski, ι , sur $GL_{sg}(F_v)$.

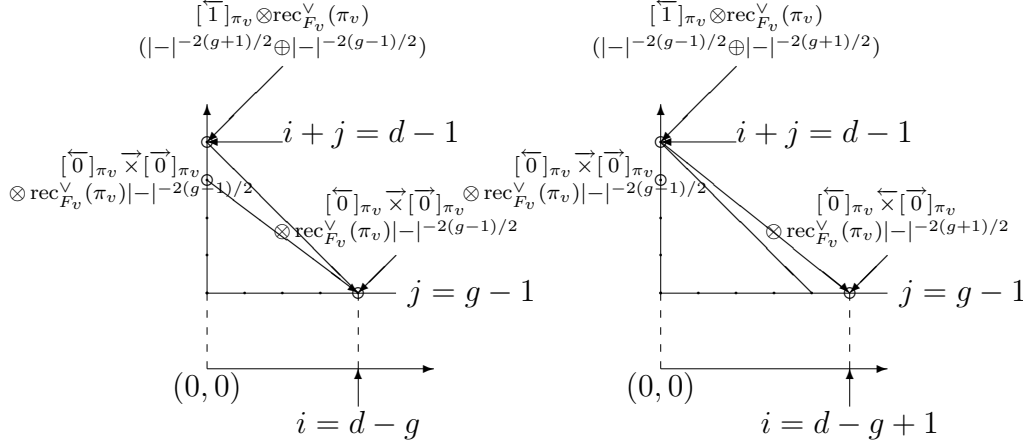
Remarque : Laurent Fargues a une preuve de ce résultat qui utilise, tout ou partie, l'isomorphisme de Faltings, à partir d'un résultat similaire du côté de l'espace de Drinfeld.

Ainsi avec les notations du corollaire (10.1.3), s'il existait $1 \leq i \leq s$ tel que Π_i admette un constituant autre que $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$, on en déduirait que $\mathcal{U}_{F_v, l, sg}^{sg-s-1+i}(\text{JL}^{-1}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}))$ aurait un constituant de poids $sg + s - 2$ autre que $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v^\vee}$. Or, d'après les corollaires (7.3.17) et (7.4.6), pour tout k , les germes aux points supersinguliers des $h^i gr_{k, \pi_v^\vee}$ sont tous de poids strictement plus petit que $sg + s - 2$ ou alors égales à $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v^\vee} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{sg+s-2}{2})$, d'où le résultat.

10.3. Cas $\pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$. — Nous allons prouver la proposition (9.1.1) sans utiliser le théorème (10.2.1). Pour cela nous revenons à l'étude de la suite spectrale des cycles évanescents.

10.3.1 — On peut remarquer que la connaissance des $E_{2, \chi, \pi_v}^{p, q}[\Pi^{\infty, v}]$ de la suite spectrale (10.1.17) ne nous fournit pas le théorème local. La partie gauche de la figure (3) illustre ce fait dans le cas $s = 2$, où pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_{d/2}(F_v)$, l'on n'arrive pas à exclure le cas :

$$\begin{aligned}
 - \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-1}(\mathrm{JL}^{-1}([\overleftarrow{1}]_{\pi_v})) &= [\overleftarrow{1}]_{\pi_v} \otimes (\mathrm{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{d-1}{2}) \otimes \mathrm{Sp}_2); \\
 - \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-2}(\mathrm{JL}^{-1}([\overleftarrow{1}]_{\pi_v})) &= [\overleftarrow{0}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(-\frac{d-2}{2}).
 \end{aligned}$$


 FIGURE 3. $E_2^{p,q}[\Pi^{\infty, v}]$ de (10.1.17) pour $\Pi_v \simeq \mathrm{Sp}_2(\pi_v)$ et $\Pi_v \simeq \mathrm{Speh}(\pi_v)$

Si la flèche indiquée est un isomorphisme, on obtient bien le bon aboutissement.

10.3.2 — Dans le cas où l'on considère une représentation automorphe Π de $G_\tau(\mathbb{A})$ vérifiant $\mathrm{Hyp}(\xi)$ et telle que $\pi_v \simeq [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$, on calculera les termes $E_{2, \xi}^{p,q}[\Pi^{\infty, v}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents et on montrera alors que le théorème local en découle. Dans la parité de droite de la figure (3), on illustre comment on exclut le cas défavorable ci-avant, en remarquant que $[\overleftarrow{0}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_v}$ n'est pas isomorphe à $[\overleftarrow{0}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{0}]_{\pi_v}$, contredisant le théorème de Lefschetz difficile. On pourra aussi se référer aux figures (4) et (5) qui détaillent pour $s = 4$ et $g = 2$, les $E_{2, \pi_v}^{p,q}[\Pi^{\infty, v}]$ respectivement dans les cas $\pi_v = [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$ et $\pi_v = [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$.

10.3.3 — On considère ⁽¹⁶⁾ dans la suite Π une représentation irréductible automorphe de $G_\tau(\mathbb{A})$ vérifiant $\mathrm{Hyp}(\xi)$ et telle que $\pi_v \simeq [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$, pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. On suppose par ailleurs que l'ensemble des représentations irréductibles automorphes $\overline{\Pi}$ de $H_0(\mathbb{A})$ telles que $\overline{\Pi}^{\infty, v} \simeq \Pi^{\infty, v}$ est réduite à une unique représentation, en particulier $m(\Pi) = m(\overline{\Pi})$, et $\overline{\pi}_v \simeq \mathrm{JL}^{-1}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v})$. L'objectif est de calculer les termes $E_2^{p,q}[\Pi^{\infty, v}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents.

10.3.4. Proposition. — *Pour tout $1 \leq l \leq s$, $H^i(j_{!}^{\geq tg} \mathrm{HT}_\xi(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}))[d - tg][\Pi^{\infty, v}]$ est nul pour $|i| > s - t$ ou $i \not\equiv s - t \pmod{2}$ et sinon, il est isomorphe à*

$$\# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) \left([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \left[\frac{s-t-i}{2} - 1 \right]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} \left[\frac{s-t+i}{2} - 1 \right]_{\pi_v} \otimes \left(\Xi^{\frac{(s-t)g+i}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1} \right) \right)$$

⁽¹⁶⁾ cf. aussi les conditions qui précèdent le corollaire (7.4.6)

en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$, où $\mathfrak{A}(\pi_v)$ est l'ensemble des caractères $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_l^\times$, tels que $\pi_v \otimes \chi \circ \text{val}(\det) \simeq \pi_v$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence pour t variant de s à 1, le cas $t = s$ est donné par le lemme (7.4.7) et les conditions imposées ci-dessus à Π . Les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow P_{\pi_v, t, 0}(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}}) \longrightarrow j_!^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}})[d-tg] \longrightarrow j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}})[d-tg] \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow P_{\pi_v, t, i}(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}}) \longrightarrow P_{\pi_v, t, i-1}(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}}) \longrightarrow \mathcal{P}_-(g, t+i, \pi_v, t, \overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}}) \rightarrow 0$$

pour $1 \leq i \leq s-t-1$, fournissent

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}})[d-tg])[\Pi^{\infty, v}] &= \sum_{r=1}^{s-t} (-1)^r \sum_i (-1)^i H^i(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}} \\ &\quad \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[r-1]_{\pi_v}})[\Pi^{\infty, v}] \otimes \Xi^{r/2} + \sum_i (-1)^i H^i(j_!^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}})[d-tg])[\Pi^{\infty, v}] \end{aligned} \quad (10.3.18)$$

où par simplification, on écrit $H^i(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[r-1]_{\pi_v}})$ pour

$$\lim_{UP(m)} H^i(\overleftarrow{X}_{UP, m}^{[d-(t+r)g]}, j_{!*}^{\geq (t+r)g} HT_\xi(g, t+r, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[r-1]_{\pi_v}})[d-(t+r)g])$$

D'après l'hypothèse de récurrence et (3.2.6), pour tout $i \equiv 1 \pmod{2}$, la partie de poids $(s-t)(g-1) + i$ du membre de droite de (10.3.18) est nulle; il en est de même pour $i > 2(s-t)$ ou $i < 0$, tandis que pour $0 \leq i = 2k < 2(s-t)$ (resp. $i = 2(s-t)$) celle-ci est égale à

$$\sum_{r=1}^{s-t-k} H^{t-s+2k+r}(\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[r-1]_{\pi_v}})[\Pi^{\infty, v}] \otimes \Xi^{r/2}$$

(resp. à la partie de poids $(s-t)(g+1)$ de (3.2.6)), ce qui donne

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) \pi \otimes (\Xi^{\frac{s(g-1)+2k}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

$$\begin{aligned} \pi &= (\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} ((-1)^{s-t-k} \overleftarrow{[s-t-k-1]_{\pi_v}} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{s-t-k-1} (-1)^{r-1} \overleftarrow{[r-1]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-r-k-1]_{\pi_v}})) \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[k-1]_{\pi_v}} \\ &= (\overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-k-1]_{\pi_v}}) \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[k-1]_{\pi_v}} \\ &\quad (\text{resp. } \overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}} \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]_{\pi_v}}). \end{aligned}$$

Or $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]_{\pi_v}})[d-tg])$ est pur de poids $(s-t)g + i$ de sorte que son semi-simplifié est égal à celui de l'énoncé. On conclut alors à l'égalité des représentations,

et pas seulement de leur semi-simplifiée, en remarquant que les strates étant induites, l'espace précédent, en tant que représentation de $GL_d(F_v)$ est de la forme $\text{Ind}_{P_{t,g,d}(F_v)}^{GL_d(F_v)} [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v((s-t)g-i)/2} \otimes \pi'$ pour une certaine représentation π' de $GL_{d-tg}(F_v)$. \square

10.3.5. Corollaire. — Pour tout $i \neq d - s$, la partie de poids $s(g - 1)$ de $H_{\eta_v, \xi}^i[\Pi^{\infty, v}]$ est nulle alors que pour $i = d - s$ elle est égale à $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$.

10.3.6. Remarque. — En fait on peut à ce stade déterminer complètement les $H_{\eta_v, \xi}^i$, cependant comme on l'a déjà remarqué seule la connaissance des parties de poids $s(g - 1)$ nous est nécessaire. Pour un énoncé complet, on pourra voir la proposition (11.1).

Démonstration. — On écrit i sous la forme $d - 1 - \delta$ et on étudie la suite spectrale

$$E_{1, \xi}^{i, j} := H^{i+j}(gr_{-i, \xi}) \Rightarrow H_{\eta_v, \xi}^{d-1+i+j} \quad (10.3.19)$$

qui, d'après la pureté, dégénère en E_2 . On pourra se référer à la figure (10) où l'on a représenté les $H^i(gr_{k, \xi})[\Pi^{\infty, v}]$ pour $s = 4$. D'après les propositions (7.3.3) (ii) et (9.3.1), on a

$$e_{\pi_v} H^i(gr_{k, \xi})[\Pi^{\infty, v}] = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k+1 \pmod{2}}} H^i(\mathcal{P}(g, t, \pi_v)(-\frac{tg-1+k}{2}))[\Pi^{\infty, v}]$$

Ainsi d'après la proposition (10.3.4), pour $\delta > 0$, la partie de poids $s(g - 1)$ de $H_{\eta_v, \xi}^{d-1+\delta}[\Pi^{\infty, v}]$ est nulle ; précisément pour $\delta > 0$, les poids de $H_{\eta_v, \xi}^{d-1+\delta}[\Pi^{\infty, v}]$ sont parmi les $k = s(g - 1) + 2\delta + 2r$ avec $0 \leq r < s - \delta$ et sa partie de poids $s(g - 1) + 2\delta$, que l'on notera avec un indice, est un quotient de

$$\begin{aligned} E_{1, \xi}^{1-s+\delta, s-1}[\Pi^{\infty, v}]_{s(g-1)+2\delta} &= \frac{1}{e_{\pi_v}} H^\delta(\mathcal{P}(g, s - \delta, \pi_v)(-\frac{(s - \delta)(g - 1)}{2})) \\ &= \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{s - \delta - 1}]_{\pi_v} \times [\overleftarrow{\delta - 1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g - 1) + 2\delta}{2}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $\delta > 0$, d'après (10.3.4), la partie de poids $s(g - 1)$ de $H_{\eta_v, \xi}^{d-s-\delta}[\Pi^{\infty, v}]$ est un sous-quotient de

$$\begin{aligned} E_{1, \xi}^{1-s+\delta, s-1-2\delta}[\Pi^{\infty, v}]_{s(g-1)} &= \frac{1}{e_{\pi_v}} H^{-\delta}(\mathcal{P}(g, s - \delta, \pi_v)(-\frac{(s - \delta)(g - 1)}{2})) \\ &= \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{s - \delta - 1}]_{\pi_v} \times [\overrightarrow{\delta - 1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g - 1)}{2}) \end{aligned}$$

On utilise alors le théorème de Lefschetz difficile dont on rappelle l'énoncé ci-après.

10.3.7. Théorème. — Le fibré canonique sur la fibre générique de $X_{U^p, m}$ est ample et équivariant pour l'action de $G(\mathbb{A}^\infty)$ et W_v ; il induit alors une classe $h \in H_{\eta_v, \xi}^2(1)$, telle que les applications itérées du cup produit $h^i : H_{\eta_v, \xi}^{d-1-i} \longrightarrow H_{\eta_v, \xi}^{d-1+i}(i)$ sont des isomorphismes.

10.3.8 — Ainsi pour $s > 2$, on observe que si la partie de poids $s(g-1)$ de $H_{\eta_v}^{d-1-\delta}[\Pi^{\infty,v}]$, pour $1 < \delta < s-1$, est non nulle, ses constituants sont de la forme

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{s-2}, \overrightarrow{1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$$

alors qu'un constituant non nul de poids $s(g-1) + 2\delta$ de $H_{\eta_v, \xi}^{d-1+2\delta}[\Pi^{\infty,v}]$, s'il existe, est de la forme

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{s-2}, \overleftarrow{1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1) + 2\delta}{2}\right).$$

La contradiction découle alors du théorème de Lefschetz difficile et de l'observation de l'orientation de la dernière flèche.

10.3.9 — Pour $\delta = 1$ et $s > 2$, la partie de poids $s(g-1) + 2$ de $H_{\eta_v, \xi}^d[\Pi^{\infty,v}]$ est un quotient de $\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{s-2}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{0}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)+2}{2}\right)$ alors que la partie de poids $s(g-1)$ de $H_{\eta_v, \xi}^{d-2}[\Pi^{\infty,v}]$ est un constituant de $\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{s-2}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{0}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$. La contradiction découle alors du théorème de Lefschetz difficile et du fait que $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$ n'est pas un quotient de $[\overleftarrow{s-2}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{0}]_{\pi_v}$.

10.3.10 — Pour $\delta = s-1$ et $s \geq 2$, on observe que $E_{2, \xi}^{d-s}[\Pi^{\infty,v}] = H_{\eta_v, \xi}^{d-s}[\Pi^{\infty,v}]$ est un sous-espace de $E_{1, \xi}^{0, 1-s}[\Pi^{\infty,v}]$ qui est égal à

$$\frac{1}{e_{\pi_v}} H^{1-s}(\mathcal{P}(g, 1, \pi_v)) = \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{0}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s-2}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$$

alors que $E_{2, \xi}^{d-s}[\Pi^{\infty,v}] = H_{\eta_v, \xi}^{d+s-2}[\Pi^{\infty,v}]$ est un quotient de $E_{1, \xi}^{0, s-1}[\Pi^{\infty,v}]$ qui est égal à

$$\frac{1}{e_{\pi_v}} H^{s-1}(\mathcal{P}(g, 1, \pi_v)) = \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{0}]_{\pi_v} \overleftarrow{\times} [\overleftarrow{s-2}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g+1)-2}{2}\right)$$

Ainsi d'après Lefschetz difficile, s'ils sont non nuls, ils doivent être égaux à $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}$. Par ailleurs on remarque que ce dernier n'est pas un constituant de $H_{\eta_v, \xi}^{d-s+1}[\Pi^{\infty,v}]$, ni de $H_{\eta_v, \xi}^{d+s-3}[\Pi^{\infty,v}]$, de sorte que $\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$ est effectivement un constituant de $H_{\eta_v, \xi}^{d-s}$, d'où le résultat. \square

10.3.11. Proposition. — Pour tout $p \neq 0$ et tout q , sont nulles, les parties de poids $s(g-1)$ des $E_{2, \xi}^{p, q}[\Pi^{\infty,v}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents

$$E_{2, \xi}^{p, q} = \varinjlim_{U^p(m)} H^p(\overline{X}_{U^p, m}, R^q \Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi) \Rightarrow H_{\eta_v, \xi}^{p+q} \quad (10.3.20)$$

Démonstration. — Le principe est d'étudier les $E_{2, \xi}^{p, q}[\Pi^{\infty,v}]$ via les suites spectrales associées à la stratification

$$E_{1, U^p(m), \xi}^{p, q; i} = H_c^{p+q}(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-p+1)}, R^i \Psi \otimes \mathcal{L}_\xi) \Rightarrow H_c^{p+q}(\overline{X}_{U^p, m}, R^i \Psi \otimes \mathcal{L}_\xi) \quad (10.3.21)$$

Ainsi le résultat découle simplement de la proposition suivante.

10.3.12. Proposition. — Pour tout $1 \leq t < s$ et pour tout i , la partie de poids $(s-t)(g-1)$ de $H_c^i(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g, t, \pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$ est nulle.

Démonstration. — Il s'agit dans un premier temps d'étudier les parties de poids $(s-t)(g-1)$ des $H_c^i(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-tg)}, HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty, v}]$ pour une représentation Π_t quelconque de $GL_{tg}(F_v)$.

10.3.13. Lemme. — Pour tout $1 \leq t < s$, les $\varinjlim_{U^p(m)} H^i(\overline{X}_{U^p, m}^{[d-tg]}, (j_1^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[(s-t)g])[\Pi^{\infty, v}]$ vérifient les propriétés suivantes :

(i) ils sont de la forme $\bigoplus_\chi (\text{Ind}_{P_{tg, d}(F_v)}^{GL_d(F_v)}(\Pi_t \otimes \chi) \otimes \pi_\chi) \otimes \chi$, en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times \mathbb{Z}$, où χ décrit les caractères $\mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$ et π_χ est une représentation de $GL_{(s-t)g}(F_v)$;

(ii) ils sont nuls pour $|i| \geq s-t+1$;

(iii) ils sont en général mixtes de poids $(s-t)(g+1) - 2(k-1)$ pour $1 \leq k \leq s-t+1$ vérifiant $s-t-2(k-1) \leq i \leq s-t-(k-1)$;

(iv) soit $t-s \leq i_0 < 0$, le plus petit indice i tel que la partie de poids $(s-t)(g-1)$ de $\varinjlim_{U^p(m)} H^i(\overline{X}_{U^p, m}^{[d-tg]}, j_1^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[(s-t)g][(s-t)g][\Pi^{\infty, v}]$ soit non nulle⁽¹⁷⁾. Cette dernière est alors égale à

$$\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) \Pi_t \overline{\times} [\overline{i_0 - t + s - 1}, \overline{-i_0}]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}).$$

Démonstration. — Le point (i) correspond à la proposition (3.2.4) qui découle directement de l'action de $GL_{tg}(F_v)$ sur la strate via $\text{val}(\det)$ et du fait que les strates non supersingulières sont induites.

Pour les points (ii)-(iii), on considère les suites exactes

$$0 \rightarrow P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t) \rightarrow P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \rightarrow \mathcal{P}_-(g, t+i+1, \pi_v, t, \Pi_t) \rightarrow 0 \quad (10.3.22)$$

et on reprend les notations simplifiées de la preuve de la proposition (10.3.4) en notant $P_{\pi_v, t, -1, \xi}(\Pi_t) := j_1^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$. Par facilité on notera $P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)$ pour $P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \otimes \mathcal{L}_\xi$. Le résultat découle alors directement du cas $i = -1$ dans le lemme suivant.

10.3.14. Lemme. — Pour tout $-1 \leq i \leq s-t-1$, les $\varinjlim_{U^p(m)} H^j(\overline{X}_{U^p, m}^{[d-(t+i+1)g]}, P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \otimes$

$\mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$ vérifient les points suivants :

(1) ils sont nuls pour $|j| \geq s-t-i$;

⁽¹⁷⁾Si un tel i_0 , n'existe pas l'énoncé est vide.

(2) pour $|j| < s-t-i$, ils sont mixtes de poids $(s-t)(g+1)-2(k+i)$ pour $1 \leq k \leq s-t-i$ vérifiant $s-t-i-1-2(k-1) \leq j \leq s-t-i-1-(k-1)$;

Démonstration. — (1)-(2) On raisonne par récurrence descendante, le cas $i = s-t-1$ étant évident car $P_{\pi_v, t, s-t-1}(\Pi_t)$ est le faisceau concentré aux points supersinguliers

$$\mathcal{F}(g, s, \pi_v) \otimes \Pi_t((s-t)/2) \times \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v(-t/2)} \otimes |\mathrm{Art}_{F_v}^{-1}|^{-\frac{(s-t)(g-1)}{2}}$$

Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang $i+1$ et traitons le cas de $P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)$. On considère la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte (10.3.22). D'après l'hypothèse de récurrence les $H^j(P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t))$ sont nuls pour $|j| \geq s-t-i-1$ et d'après la proposition (10.3.4), les $H^j(\mathcal{P}_-(g, t+i+1, \pi_v, t, \Pi_t))$ sont nuls pour $|j| \geq s-t-i$, d'où le point (1). En ce qui concerne le point (2), la suite exacte longue en question s'écrit alors

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^{-(s-t-i-1)}(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)) &\rightarrow H^{-(s-t-i-1)}(j_{!*}^{\geq(t+i+1)g}) \rightarrow H^{-(s-t-i-2)}(P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t)) \rightarrow \\ &H^{-(s-t-i-2)}P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t) \rightarrow 0 \dots \dots 0 \rightarrow H^{(s-t-i-1)-2r}(P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t)) \rightarrow \\ H^{(s-t-i-1)-2r}(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)) &\rightarrow H^{(s-t-i-1)-2r}(j_{!*}^{\geq(t+i+1)g}) \rightarrow H^{(s-t-i-1)-2r+1}(P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t)) \\ &\rightarrow H^{(s-t-i-1)-2r+1}(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)) \rightarrow 0 \dots \\ 0 \rightarrow H^{(s-t-i-1)-2}(P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t)) &\rightarrow H^{(s-t-i-1)-2}(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)) \rightarrow \\ H^{(s-t-i-1)-2}(j_{!*}^{\geq(t+i+1)g}) &\rightarrow H^{s-t-i-2}(P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t)) \rightarrow H^{s-t-i-2}(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H^{s-t-i-1}(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t)) &\rightarrow H^{s-t-i-1}(j_{!*}^{\geq(t+i+1)g}) \rightarrow 0 \quad (10.3.23) \end{aligned}$$

On rappelle que $H^j(j_{!*}^{\geq(t+i+1)g})$ est pur de poids $(s-t)g - (i+1) + j$ de sorte qu'en utilisant l'hypothèse de récurrence, les $H^j(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t))$ sont de poids $(s-t)(g+1) - 2(i+1+k-1)$ avec $1 \leq k \leq s-t-i$.

Soit alors j de la forme $s-t-1-i-(2r+1)$ avec $0 \leq 2r+1 \leq 2(s-t-1-i)$; la suite exacte longue ci-dessus montre alors que les poids de $H^j(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t))$ sont ceux de $H^j(P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t))$, i.e. $(s-t)(g+1) - 2(i+1+k)$ pour $1 \leq k \leq s-t-i-1$ vérifiant $-2(k-1) \leq j - (s-t-2-i) \leq -(k-1)$. Le changement de variable $k' = k+1$ donne alors le résultat, i.e. $H^j(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t))$ est de poids $(s-t)(g+1) - 2(i+k')$ avec $1 \leq k' \leq s-t-i$ vérifiant $-2(k'-1)+1 \leq j - (s-t-1-i) \leq -(k'-1)$ soit ce qui est prévu car $j - (s-t-1-i)$ est impair⁽¹⁸⁾.

Pour j de la forme $s-t-1-i-2r$ avec $0 \leq 2r \leq 2(s-t-1-i)$, la suite exacte longue précédente montre que les poids de $H^j(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t))$ sont, à priori, ceux de $H^j(P_{\pi_v, t, i+1}(\Pi_t))$ ainsi que celui de $H^j(j_{!*}^{\geq(t+i+1)g})$ soit $(s-t)(g+1) - 2(i+1+r)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $H^j(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t))$ est de poids $(s-t)(g+1) - 2(i+1+k)$ avec $1 \leq k \leq s-t-i-1$

⁽¹⁸⁾Le cas $j - (s-t-1-i) = -2(k'-1)$ n'est pas à considérer.

vérifiant $-2(k-1) \leq j - (s-t-2-i) \leq -(k-1)$, de sorte que $H^j(P_{\pi_v, t, i}(\Pi_t))$ est de poids $(s-t)(g+1) - 2(i+k')$ avec $1 \leq k' \leq s-t-i$ vérifiant $-2(k'-1) + 1 \leq j - (s-t-1-i) \leq -(k'-1)$ soit ce qui est prévu car le cas $j - (s-t-1-i) = -2(k'-1)$ est justement donné par le poids de $H^j(j_{!*}^{\geq(t+i+1)g})$ soit $(s-t)(g+1) - 2(i+1+r)$. \square

10.3.15 — Suite de la preuve du lemme (10.3.13) : (iv) Dans la suite on ne considère que les parties de poids $(s-t)(g-1)$. D'après le lemme (10.3.14), $H^{t-s}(P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t))$ est nul de sorte que la suite exacte longue (10.3.23) s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^{t-s}(j_!^{\geq tg}) \rightarrow \Pi_t \overrightarrow{\times} [s-t-1]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{(s-t)(g-1)/2} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) \\ \rightarrow H^{1+t-s}(P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t)) \rightarrow H^{1+t-s}(j_!^{\geq tg}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \end{aligned}$$

10.3.16 — Le cas $i_0 = t-s$ découle alors du fait que les strates sont induites, i.e. si $H^{t-s}(j_!^{\geq tg})$ est un sous-espace de $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} [s-t-1]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$ alors il est égal à tout l'espace.

10.3.17 — Pour $i_0 = 1+t-s$, la suite exacte longue (10.3.23) s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} [s-t-1]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) \rightarrow \\ H^{1+t-s}(P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t)) \rightarrow H^{1+t-s}(j_!^{\geq tg}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

tandis que celle associée à $0 \rightarrow P_{\pi_v, t, 1}(\Pi_t) \rightarrow P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t) \rightarrow \mathcal{P}_-(g, t+1, \pi_v, t, \Pi_t) \rightarrow 0$ s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^{1+t-s}(P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t)) \rightarrow \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) \\ \Pi_t \overrightarrow{\times} [0]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [s-t-2]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Ainsi si $H^{1+t-s}(j_!^{\geq tg})$ est non nul, alors $H^{1+t-s}(P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t))$ contient strictement

$$\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} (s-t)_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

et étant de la forme $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} \pi \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$ ainsi qu'un sous-espace de $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} [0]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [s-t-2]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$, on en déduit qu'il est égal à ce dernier de sorte que $H^{1+t-s}(j_!^{\geq tg})$ est isomorphe à

$$\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} [1, s-t-1]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}),$$

d'où le résultat.

10.3.18 — Par ailleurs on remarque de la même façon que si $i_0 > 1 + t - s$, la partie de poids $(s - t)(g - 1)$ de $H^{1+t-s}(P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t))$ est alors égale à

$$\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t - 1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}).$$

10.3.19 — Supposons alors $i_0 \geq 2 + t - s$. La suite exacte longue (10.3.23) donne l'égalité pour tout $i \geq 2$, des parties de poids $(s - t)(g - 1)$ de $H^{t-s+i}(P_{\pi_v, t, 0}(\Pi_t))$ et de $H^{t-s+i}(j_1^{\geq tg})$. On va montrer que, pour tout $2 \leq i \leq i_0 - (t - s)$, la partie de poids $(s - t)(g - 1)$ de $H^{t-s+r}(P_{\pi_v, t, i-2}(\Pi_t))$ est nulle pour $i \leq r < i_0 - l + s$ et que celle de $H^{i+t-s-1}(P_{\pi_v, t, i-2}(\Pi_t))$ est égale à

$$\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[i - 1, s - t - i]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}).$$

D'après ce que l'on vient de voir, c'est vrai pour $i = 2$. Supposons donc le résultat acquis jusqu'au rang i et traitons le cas de $i + 1$. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \rightarrow P_{\pi_v, t, i-1}(\Pi_t) \rightarrow P_{\pi_v, t, i-2}(\Pi_t) \rightarrow \mathcal{P}_-(g, t + i - 1, \pi_v, t, \Pi_t) \rightarrow 0$, s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^{i-1+t-s}(P_{\pi_v, t, i-2}(\Pi_t)) \rightarrow \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[i - 2]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t - i]}_{\pi_v} \\ \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) \rightarrow H^{i+t-s}(P_{\pi_v, t, i-1}(\Pi_t)) \rightarrow H^{i+t-s}(P_{\pi_v, t, i-2}(\Pi_t)) \rightarrow 0 \dots \end{aligned}$$

ainsi que l'égalité des parties de poids $(s - t)(g - 1)$ des espaces $H^{i+t-s+r}(P_{\pi_v, t, i-1}(\Pi_t))$ et $H^{i+t-s+r}(P_{\pi_v, t, i-2}(\Pi_t))$ pour tout $r > 0$. Le cas $i + 1$ découle alors de la nullité de la partie de poids $(s - t)(g - 1)$ de $H^{i+t-s}(P_{\pi_v, t, i-2}(\Pi_t))$ et de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} H^{i+t-s-1}(P_{\pi_v, t, i-2}(\Pi_t)) \simeq \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[i - 2, s - t - i + 1]}_{\pi_v} \\ \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}). \end{aligned}$$

10.3.20 — Considérons $0 \rightarrow P_{\pi_v, t, i_1+1}(\Pi_t) \rightarrow P_{\pi_v, t, i_1}(\Pi_t) \rightarrow \mathcal{P}_-(g, t + i_1 + 1, \pi_v, t, \Pi_t) \rightarrow 0$ avec $i_1 = i_0 - t + s - 2$, et la suite exacte longue de cohomologie associée qui s'écrit

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^{i_0-1}(P_{\pi_v, t, i_1}(\Pi_t)) \rightarrow \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[i_1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s - t - i_1 - 2]}_{\pi_v} \\ \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) \rightarrow H^{i_0}(P_{\pi_v, t, i_1+1}(\Pi_t)) \rightarrow H^{i_0}(P_{\pi_v, t, i_1}(\Pi_t)) \rightarrow 0 \dots \end{aligned}$$

(10.3.24)

avec $H^{i_0}(P_{\pi_v, t, i_1}(\Pi_t)) = H^{i_0}(j_!^{\geq tg})$ non nul par hypothèse. La suite exacte longue associée à $0 \rightarrow P_{\pi_v, t, i_1+2}(\Pi_t) \rightarrow P_{\pi_v, t, i_1+1}(\Pi_t) \rightarrow \mathcal{P}_-(g, i_1 + 2, \pi_v, t, \Pi_t) \rightarrow 0$ s'écrit

$$0 \rightarrow H^{i_0}(P_{\pi_v, t, i_1+1}(\Pi_t)) \rightarrow \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) \\ \Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i_1 + 1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s - t - i_1 - 3}]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) \rightarrow \dots$$

Ainsi si on veut que $H^{i_0}(P_{\pi_v, t, i_1}(\Pi_t))$ soit non nul, il faut que $H^{i_0}(P_{\pi_v, t, i_1+1}(\Pi_t))$ soit égal à $\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i_1 + 1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s - t - i_1 - 3}]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$ et donc

$$H^{i_0}(P_{\pi_v, t, i_1+1}(\Pi_t)) \simeq \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{i_1 + 2}, \overleftarrow{s - t - i_1 - 3}]_{\pi_v} \\ \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

d'où le résultat. \square

10.3.21 — Retour sur la preuve de la proposition (10.3.12) :

Remarque : Si on savait que les strates $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}$ étaient affines, la proposition (10.3.12) découlerait directement du point (iii) du lemme (10.3.13) pour $k = s - t + 1$ car seul $H_c^{d-tg}(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}, \mathcal{F}(g, t, \pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}]$ pourrait être de poids $t - s$ ce qui serait contradictoire avec (3.2.6). Ne disposant pas de l'affinité des strates $\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}$, on entre plus précisément dans la combinatoire.

On raisonne par récurrence sur t de 1 à s_g puis pour t fixé, par récurrence sur i de $t - s$ à 0. L'initialisation de la récurrence pour $t = 1$ se traite comme le passage de t à $t + 1$; on suppose alors le résultat acquis pour tout $1 \leq t' < t$ ⁽¹⁹⁾.

10.3.22 — Pour $i = t - s$, si l'espace en question était non nul, on aurait d'après le point (iv) du lemme (10.3.13),

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ U^p(m)}} H_c^{(s-t)(g-1)}(\overline{X}_{U^p, m}, HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty, v}] = \\ \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{s - t - 1}]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}).$$

On considère alors la suite spectrale (10.1.16) pour $i = t(g - 1)$. On remarque que toutes les parties de poids $s(g - 1)$ de $E_1^{p, q; t(g-1)}[\Pi^{\infty, v}]$ sont nulles pour $p - 1 \neq tg$; en effet pour $p - 1 < tg$ cela découle de l'hypothèse de récurrence et pour $p - 1 > tg$ du fait que

⁽¹⁹⁾Pour $t = 1$, l'hypothèse de récurrence est vide.

$t'(g-1) > t(g-1)$ pour $p-1 = t'g$. On obtient alors

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U^p(m)}} H^{(s-t)(g-1)}(\overline{X}_{U^p, m}, R^{t(g-1)}\Psi_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty, v}] \simeq \\ \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$$

On considère alors la suite spectrale (10.1.17), de sorte que $E_{2, \xi}^{(s-t)(g-1), t(g-1)}[\Pi^{\infty, v}]$ est isomorphe à l'espace ci-dessus. Or comme d'après l'hypothèse de récurrence toutes les parties de poids $s(g-1)$ des $E_{2, \xi}^{p, q}[\Pi^{\infty, v}]$ pour $q < l(g-1)$ sont nulles et que d'après le lemme (10.3.13) il en est de même pour $p+q < d-s$, on en déduit que $E_{\infty, \xi}^{d-s}[\Pi^{\infty, v}]$ admettrait $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$ comme sous-espace ce qui n'est pas d'après la proposition (10.3.11).

10.3.23 — Supposons donc le résultat vérifié pour tout $t-s \leq i = t-s+\delta \leq i_0 < -1$ et traitons le cas de i_0 . D'après le point (iv) du lemme (10.3.13), on obtiendrait

$$\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{\delta}, \overrightarrow{s-t-1-\delta}]_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

Comme précédemment, la suite spectrale (10.1.16) pour $i = t(g-1)$, donne que la partie de poids $s(g-1)$ de $E_{2, \xi}^{(s-t)(g-1)+\delta, t(g-1)}[\Pi^{\infty, v}]$ dans la suite spectrale (10.1.17) est isomorphe à $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{\delta}, \overrightarrow{s-t-1-\delta}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$. On remarque alors que $E_{\infty, \xi}^{d-s+\delta}[\Pi^{\infty, v}]$ admettrait $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{t+\delta}, \overrightarrow{s-t-1-\delta}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$ comme sous-espace car ce dernier n'apparaît pas dans les $E_{2, \xi}^{p, q}[\Pi^{\infty, v}]$ pour $q < l(g-1)$ d'après l'hypothèse de récurrence, ni pour $q = t'(g-1) > t(g-1)$ d'après le lemme (10.3.13) (i) ainsi que le corollaire (10.1.3). \square

10.4. Preuve de (9.1.1). — Il s'agit donc de prouver la proposition (9.1.1). En étudiant les parties de poids $s(g-1)$ des composantes $\Pi^{\infty, v}$ isotypiques pour Π irréductible auto-morphe tel que $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$, on s'est ramené d'après le paragraphe précédent, à une situation similaire à celle de [2], i.e. dans la suite spectrale des cycles évanescents, seuls les points supersinguliers contribuent. La fin de la preuve procède alors exactement comme dans loc. cit.

10.4.1 — Précisément, la partie de poids $s(g-1)$ de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s}(\text{JL}^{-1}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v^\vee}))$, d'après le corollaire (10.1.3), est un constituant de $[\overrightarrow{s-2}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{0}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$. On considère alors la suite spectrale (10.3.21) pour $i = d-s$, où, d'après le corollaire (7.4.11), tous les $E_{1, \xi}^{p, q; d-s}$ sont nuls pour $p+q \neq 0$ ou $p-1 \neq d$ de sorte que le terme $E_{2, \xi}^{0, d-s}[\Pi^{\infty, v}]$ de (10.3.20), et donc $E_{\infty, \xi}^{0, d-s}[\Pi^{\infty, v}]$ d'après (10.3.12), est égal à cet espace qui est donc, d'après (10.3.11), égal à $[\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1)}{2}\right)$.

10.4.2 — On suppose avoir montré par récurrence que pour tout $0 \leq r < r_0 < s - 1$, les parties de poids $s(g - 1)$ de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s+r}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v^\vee}))$ sont comme prévues, i.e. nulles pour $r \neq 0$, et égales à $\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$ pour $r = 0$. D'après le corollaire (10.1.3), la partie de poids $s(g - 1)$ de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s+r_0}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v^\vee}))$ est un constituant de $\overrightarrow{[s-2-r_0]}_{\pi_v} \otimes \overleftarrow{[r_0]}_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$. Or comme la partie de poids $s(g - 1)$ de $\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s+i}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v^\vee}))$ est égale à $\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$, en remarquant, d'après le corollaire (10.1.3), que $\overrightarrow{[s-1-r_0, r_0+1]}_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$ ne peut pas être un constituant de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s+r}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v^\vee}))$ pour $r > r_0$, on en déduit que si la partie de poids $s(g - 1)$ de $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s+r_0}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v^\vee}))$ est non nulle, elle est alors égale à $\overrightarrow{[s-2-r_0, r_0+2]}_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$. Comme précédemment ce dernier espace est aussi égal à la partie de poids $s(g - 1)$ de $\frac{1}{\#\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)} E_{\infty, \xi}^{d-s+r_0}[\mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)][\Pi^{\infty, v}]$ ce qui n'est pas d'après (10.3.11).

Finalement le cas $r_0 = s - 1$ est donné en utilisant que la partie de poids $s(g - 1)$ de $\sum_{i=0}^{s-1} (-1)^i \mathcal{U}_{F_v, l, d}^{d-s+i}(\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v^\vee}))$ est égale à $\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)}{2})$. \square

10.4.3. Remarque. — Comme dans la remarque (10.3.6), on aurait pu traiter tous les poids des $\mathcal{U}_{F_v, l, d}^i$. Il suffit pour cela de montrer un analogue du point (iv) de la proposition (10.3.12) pour tous les poids.

PARTIE IV

COMPLÉMENTS SUR LA COHOMOLOGIE GLOBALE

11. Parties sans monodromie de la cohomologie globale

11.1. Proposition. — Soient g un diviseur de $d = sg$ et π_v une représentation irréductible cuspidale unitaire de $GL_g(F_v)$. On considère une représentation automorphe Π de $G_\tau(\mathbb{A})$ vérifiant $\mathrm{Hyp}(\xi)$ telle que $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v}$. Le $GL_d(F_v) \times W_v$ -module $H_{\eta_v, \xi}^{d+s-2-2i}[\Pi^{\infty, v}]$ est alors isomorphe à $\#\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{d+s-2-2i}{2})$ pour $0 \leq i < s$.

Démonstration. — La proposition (10.3.11) joint au théorème de Lefschetz difficile implique que pour tout $0 \leq r \leq s - 1$, $H_{\eta_v, \xi}^{d-s+2r}[\Pi^{\infty, v}]$ admet $\#\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v} \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)+2r}{2})$ comme facteur direct. On reprend la suite spectrale (10.3.19) en utilisant la proposition (10.3.4) ainsi que le théorème de Lefschetz difficile. On pourra se reporter à la figure (10) où l'on a représenté les $H^i(gr_{k, \xi})[\Pi^{\infty, v}]$ dans le cas $s = 4$. On

rappelle tout d'abord que pour $1 < \delta < s$, on a

$$\frac{H^{-\delta}(gr_{k,\xi})[\Pi^{\infty,v}]}{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k+1 \equiv s+\delta \pmod{2}}} \left(([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{\frac{s-t+\delta-2}{2}}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{\frac{s-t-\delta-2}{2}}]_{\pi_v} \right) \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{d-1-\delta+k}{2} \right) \quad (11.0.25)$$

$$\frac{H^\delta(gr_{k,\xi})[\Pi^{\infty,v}]}{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k+1 \equiv s+\delta \pmod{2}}} \left(([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{\frac{s-t-\delta-2}{2}}]_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} [\overrightarrow{\frac{s-t+\delta-2}{2}}]_{\pi_v} \right) \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{d-1+\delta+k}{2} \right) \quad (11.0.26)$$

On remarque ainsi que tous les $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$ des $E_{1,\xi}^{p,q}[\Pi^{\infty,v}]$ de (10.3.19) restent dans l'aboutissement ; il nous faut alors montrer que tous les autres disparaissent. Dans la suite on ne considèrera plus les $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$.

11.0.4 — Prenons dans un premier temps $\delta > 1$, de sorte qu'outre les $[\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$, les éventuels constituants non nuls de $E_{\infty,\xi}^{d-s-\delta}[\Pi^{\infty,v}]$ (resp. de $E_{\infty,\xi}^{d-s+\delta}[\Pi^{\infty,v}]$) sont de la forme

$$\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overrightarrow{r}, \overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{s-t-r}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{d-1-\delta-k}{2} \right)$$

avec $s-t-r = r+\delta, r+\delta+1, r+\delta-1$ (resp. $s-t-r = r-\delta, r-\delta-1, r-\delta+1$) et certains entiers k qu'il n'est pas nécessaire de préciser. Pour $\delta \geq 2$, on remarque que les ensembles $\{\delta, \delta+1, \delta-1\}$ et $\{-\delta, -\delta+1, -\delta-1\}$ sont disjoints de sorte que d'après le théorème de Lefschetz difficile, l'éventuel constituant est forcément nul. ⁽²⁰⁾

11.0.5 — Pour $\delta = 1$, le raisonnement est plus fin et demande de distinguer les sous-espaces des quotients dans nos induites. Si on reprend le raisonnement précédent dans le cas $\delta = 1$, le théorème de Lefschetz difficile impose que les éventuels constituants de $H_{\eta_v,\xi}^{d-1\pm 1}[\Pi^{\infty,v}]$ sont de la forme

$$\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\left[\overrightarrow{\frac{s-t}{2}}, \overleftarrow{t-1}, \overrightarrow{\frac{s-t}{2}}\right]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{d-1-k}{2} \right) \quad (11.0.27)$$

⁽²⁰⁾On peut aussi argumenter en remarquant que ce ne sont pas des constituants locaux licites d'une représentation automorphe alors que dans l'aboutissement seules celles ci doivent apparaître.

pour $1 \leq t \leq s$, $0 \leq r \leq (s-t)/2$ et certains entiers k qu'il n'est pas nécessaire de préciser. On revient sur (11.0.25) et sur la suite spectrale (10.3.19). Ainsi on a

$$\frac{E_{1,\xi}^{-k,-1+k}[\Pi^{\infty,v}]}{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k+1 \equiv s-1 \pmod{2}}} \left(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\left[\frac{s-t-1}{2} \right]}_{\pi_v} \overleftarrow{\left[\frac{s-t-3}{2} \right]}_{\pi_v} \right) \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{d-2+k}{2}\right)$$

$$\frac{E_{1,\xi}^{-k-1,-1+k}[\Pi^{\infty,v}]}{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k+1 \equiv s-2 \pmod{2}}} \left(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\left[\frac{s-t}{2} \right]}_{\pi_v} \overleftarrow{\left[\frac{s-t-4}{2} \right]}_{\pi_v} \right) \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{d-2+k}{2}\right)$$

$$\frac{E_{1,\xi}^{-k+1,-1+k}[\Pi^{\infty,v}]}{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s \\ t \equiv k+1 \equiv s \pmod{2}}} \left(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\left[\frac{s-t-2}{2} \right]}_{\pi_v} \overleftarrow{\left[\frac{s-t-2}{2} \right]}_{\pi_v} \right) \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{d-2+k}{2}\right)$$

11.0.6 — Pour $k = s-1$, on remarque que la partie de poids $s(g+1)-2$ de $H_{\eta_v,\xi}^{d-2}[\Pi^{\infty,v}]$ est un sous-espace de $\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) \left[\overleftarrow{[s-2]}_{\pi_v} \overrightarrow{[0]}_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g+1)-2}{2}\right) \right]$. Or $\left[\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v} \right]$ n'étant pas un sous-espace de $\left[\overleftarrow{[s-2]}_{\pi_v} \overrightarrow{[0]}_{\pi_v} \right]$, on en déduit, en utilisant (11.0.27), que la partie de poids $s(g+1)-2$ de $H_{\eta_v,\xi}^{d-2}[\Pi^{\infty,v}]$ est nulle.

11.0.7 — Pour $0 \leq k \leq s-3$, on a :

$$\begin{aligned} - E_{1,\xi}^{-k,-1+k}[\Pi^{\infty,v}] &= E_{1,\xi}^{-k-2,k+1}[\Pi^{\infty,v}] \otimes | - |^2 \oplus \#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) V_{k,-1} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{d-2+k}{2}\right), \\ &\text{avec } V_{k,-1} = \left(\overleftarrow{[k]}_{\pi_v} \overrightarrow{\left[\frac{s-k-2}{2} \right]}_{\pi_v} \overleftarrow{\left[\frac{s-k-4}{2} \right]}_{\pi_v} \right); \\ - E_{1,\xi}^{-k-1,-1+k}[\Pi^{\infty,v}] &= E_{1,\xi}^{-k-3,k+1}[\Pi^{\infty,v}] \otimes | - |^2 \oplus \#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) V_{k,-2} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{d-2+k}{2}\right), \\ &\text{avec } V_{k,-2} = \left(\overleftarrow{[k+1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\left[\frac{s-k-2}{2} \right]}_{\pi_v} \overleftarrow{\left[\frac{s-k-6}{2} \right]}_{\pi_v} \right); \\ - E_{1,\xi}^{-k+1,-1+k}[\Pi^{\infty,v}] &= E_{1,\xi}^{-k-1,k+1}[\Pi^{\infty,v}] \otimes | - |^2 \oplus \#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) V_{k,0} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{d-2+k}{2}\right) \\ &\text{avec } V_{0,0} = 0 \text{ et } V_{k,0} = \left(\overleftarrow{[k-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\left[\frac{s-k-4}{2} \right]}_{\pi_v} \overleftarrow{\left[\frac{s-k-4}{2} \right]}_{\pi_v} \right) \text{ pour } 0 < k \leq s-3. \end{aligned}$$

On suppose alors par récurrence que $E_{\infty}^{-k-2,k+1}[\Pi^{\infty,v}] = (\text{Ker } d_1^{-k-2,k+1} / \text{Im } d_1^{-k-3,k+1})[\Pi^{\infty,v}]$ est nulle; l'opérateur de monodromie N implique alors que $E_{\infty}^{-k,-1+k}[\Pi^{\infty,v}]$ est égal à $\text{Ker } d_+ / \text{Im } d_- \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{d-2+k}{2}\right)$ avec $V_{k,-2} \xrightarrow{d_-} V_{k,-1} \xrightarrow{d_+} V$. Ainsi d'après (11.0.27), si $E_{\infty}^{-k,-1+k}[\Pi^{\infty,v}]$ était non nul, il serait égal à

$$\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) \left[\overleftarrow{\left[\frac{s-k}{2} \right]}_{\pi_v}, \overleftarrow{[k-1]}_{\pi_v}, \overrightarrow{\left[\frac{s-k}{2} \right]}_{\pi_v} \right] \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{d-2+k}{2}\right).$$

En remarquant qu'aucun des constituants de $[\frac{\overrightarrow{s-k}}{2}, \overleftarrow{k-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\frac{\overrightarrow{s-k-2}}{2}]_{\pi_v}$ n'est un constituant de $V_{k,-2}$, on en déduit que quelque soit d_- , on a une surjection

$$V_{k,-1}/\text{Im } d_- \rightarrow \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\frac{\overrightarrow{s-k}}{2}, \overleftarrow{k-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\frac{\overrightarrow{s-k-2}}{2}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{d-2+k}{2})$$

alors que $[\frac{\overrightarrow{s-k}}{2}, \overleftarrow{k-1}, \frac{\overrightarrow{s-k}}{2}]_{\pi_v}$ n'est pas un sous-espace de $[\frac{\overrightarrow{s-k}}{2}, \overleftarrow{k-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\frac{\overrightarrow{s-k-2}}{2}]_{\pi_v}$ de sorte que $E_{\infty}^{-k,-1+k}[\Pi^{\infty,v}]$ est nul.

11.0.8 — Pour $1-s \leq k \leq 0$ on raisonne de manière strictement identique en étudiant les suites exactes $E_{1,\xi}^{-k-1,k+1} \xrightarrow{d_1^{-k-1,k+1}} E_{1,\xi}^{-k,k+1} \xrightarrow{d_1^{-k,k+1}} E_{1,\xi}^{-k+1,k+1}$ et en remplaçant l'étude des sous-espaces par celle des quotients. □

11.2. Corollaire. — Soit Π une représentation irréductible automorphe de $G_\tau(\mathbb{A})$ telle que $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v}$ où π_v est une représentation irréductible cuspidale unitaire de $GL_g(F_v)$. Si $[H_{h,\xi,\tau_v}^i(\Pi^{\infty,v})]$ muni de son action naturelle de $GL_d(F_v)$ est non nul dans le groupe de Grothendieck $\text{Groth}(GL_{d-h}(F_v) \times (D_{v,h}^\times/\mathcal{D}_{v,h}^\times))$, on a alors $\tau_v = \text{JL}^{-1}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v^\vee})$, $h = tg$ avec $1 \leq t \leq s$ et $i = (s-t)(g+1)$. Dans ce cas, ils sont donnés par

$$\lim_{UP(m)} H_c^{(s-t)(g+1)}(\overline{X}_{UP,m,M_{d-tg}}^{(d-tg)}, \mathcal{F}_{\tau_v} \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty,v}] \simeq \sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overrightarrow{s-t-1}]_{\pi_v(t(g+1)/2)} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g+1)}{2}} \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{D}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

en tant que représentation de $GL_{(s-t)g}(F_v) \times (D_{v,h}^\times/\mathcal{D}_{v,h}^\times)$, où $\mathfrak{D}(\pi_v)$ est l'ensemble des caractères χ de $\mathbb{Z} \simeq D_{v,h}^\times/\mathcal{D}_{v,h}^\times$ tels que $\text{JL}^{-1}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v^\vee}) \otimes \chi^{-1} \simeq \text{JL}^{-1}([\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v^\vee})$.

Démonstration. — On rappelle que d'après le lemme (10.3.13), les composantes $\Pi^{\infty,v}$ -isotypiques des $H_c^i(\overline{X}_{UP,m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g,t,\pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \Pi_t$ sont mixtes de poids $(s-t)(g-1)+2k$ avec $0 \leq k < s-t$ et de la forme $\sharp \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)(\Pi_t \overrightarrow{\times} \pi_+) \overleftarrow{\times} \pi_- \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{(s-t)(g-1)+2k}{2})$ où π_+ (resp. π_-) est une représentation elliptique de $GL_{(s-t-k)g}(F_v)$ (resp. de $GL_{kg}(F_v)$). On raisonne alors par récurrence sur k , de 0 à $s-t-2$, afin de montrer que pour tout i , les parties de poids $(s-t)(g-1)+2k$ des $H_c^i(\overline{X}_{UP,m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g,t,\pi_v, I) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty,v}]$ sont nulles. Le cas $k=0$ a été traité dans la proposition (10.3.12). Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $k < s-t-2$ et montrons le au rang $k+1$. On raisonne alors par récurrence sur t de 1 à $s-1$. L'initialisation de la récurrence se prouve comme le cas général; on suppose donc le résultat acquis jusqu'au rang $t < s-2$ et prouvons le au rang $t+1$.

11.0.9 — Supposons qu'il existe j tel que la partie de poids $(s-t)(g-1)+2(k+1)$ de $H_c^j(\overline{X}_{UP,m}^{(d-tg)}, \mathcal{F}(g,t,\pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi)[\Pi^{\infty,v}]$ soit non nulle. On étudie ensuite la suite spectrale (10.3.21) associée à la stratification pour $i = t(g-1)$. Ainsi la partie de poids

$m_k := s(g-1) + 2(k+1)$ de $E_{1,\xi}^{tg+1,j-tg-1;t(g-1)}[\Pi^{\infty,v}]$ est non nulle de la forme $\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)(\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \pi_+ \overleftarrow{\times} \pi_- \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{m_k}{2})$ où π_+ (resp. π_-) est une représentation elliptique de $GL_{(s-t-k)g}(F_v)$ (resp. de $GL_{kg}(F_v)$). Or d'après l'hypothèse de récurrence pour tout $1 \leq t' < t$, les parties de poids $m_k = (s-t')(g-1) + t'(g-1) + 2(k+1)$ des $E_{1,\xi}^{t'g+1,j'-t'g-1;t'(g-1)}[\Pi^{\infty,v}]$ sont nulles ; en effet celles-ci sont données par les parties de poids $(s-t')(g-1) + 2k'$ avec $s(g-1) + 2(k+1) = (s-t')(g-1) + t'(g-1) + 2\delta + 2k'$ avec $t(g-1) = t'(g-1) + \delta$, $0 < \delta < t' < t$, soit $k' = k + 1 - \delta$. Pour $t' > t$, les parties de poids m_k des $E_{1,\xi}^{t'g+1,j'-t'g-1;t'(g-1)}[\Pi^{\infty,v}]$ sont nulles car $t(g-1)$ ne s'écrit pas sous la forme $t'(g-1) + \delta$ avec $0 \leq \delta < t'$.

11.0.10 — On étudie la suite spectrale (10.3.20) des cycles évanescents. D'après ce qui précède, la partie de poids m_k de $E_{2,\xi}^{j,t(g-1)}[\Pi^{\infty,v}]$ est de la forme

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)(\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \pi_+ \overleftarrow{\times} \pi_- \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{m_k}{2}).$$

Par ailleurs les parties de poids m_k des $E_{2,\xi}^{j+r+1,t(g-1)-r}[\Pi^{\infty,v}]$, pour $r \geq 1$ sont nulles ; en effet celles-ci proviendraient à travers la suite spectrale (10.3.21), des parties de poids $(s-t')(g-1) + 2k'$ de la composante $\Pi^{\infty,v}$ -isotypique de $H_c^{j+r-1}(\overline{X}_{U^p,m}^{(d-l'g)}, \mathcal{F}(g, t', \pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \overrightarrow{[k', t-1-k']_{\pi_v}}$, pour $1 \leq t' < t$ avec $s(g-1) + 2(k+1) = (s-t')(g-1) + t'(g-1) + 2\delta + 2k'$, soit $k' = k + 1 - \delta$ avec $0 < \delta < t'$ qui sont nulles d'après l'hypothèse de récurrence. En ce qui concerne les parties de poids m_k des $E_{2,\xi}^{j-r-1,t(g-1)+r}[\Pi^{\infty,v}]$ pour $r > 0$, elles proviennent à nouveau des parties de poids $(s-t')(g-1) + 2k'$ des composantes $\Pi^{\infty,v}$ -isotypiques des $H_c^{j-r-1}(\overline{X}_{U^p,m}^{(d-l'g)}, \mathcal{F}(g, t', \pi_v) \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \overrightarrow{[k', t-1-k']_{\pi_v}}$ pour $1 \leq t' \leq s$ avec $k' = k + 1 - \delta$ et $0 \leq \delta = (t-t')(g-1) + r < t'$, ce qui impose d'après l'hypothèse de récurrence $t' > t$, avec $\delta = 0$ et $k' = k + 1$. On remarque alors que $\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{k}, \overleftarrow{t-1}, \overleftarrow{1}, \overleftarrow{s-t-k-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)(-\frac{s(g-1)+2(k+1)}{2})$ serait un constituant de $E_{\infty,\xi}^j[\Pi^{\infty,v}]$, ce qui n'est pas d'après la proposition (11.1).

□

Remarque : On pourra voir la figure (5), où l'on a représenté pour $s = 4$ et $g = 2$, les $E_2^{p,q}[\Pi^{\infty,v}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents.

12. Correspondances de Jacquet-Langlands globales

Le but de ce paragraphe est d'apporter l'amélioration suivante à la proposition (3.2.1) de [7].

12.1. Proposition. — *Il existe une bijection dite de Jacquet-Langlands entre :*

- les représentations irréductibles automorphes $\overline{\Pi}$ de $H_0(\mathbb{A})$ cohomologiques pour ξ' ;
- les représentations irréductibles automorphes Π de $G_\tau(\mathbb{A})$ cohomologiques pour ξ' vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

(a) Π_v est une représentation essentiellement de carré intégrable, i.e. $\Pi_v \simeq \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $d = sg$;

(b) $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v}$,

compatible aux correspondances de Jacquet-Langlands locales, soit $\overline{\Pi}^{\infty,v} \simeq \Pi^{\infty,v}$ et $\Pi_v \simeq \text{JL}(\overline{\Pi}_v)$ dans le cas (a) et $\Pi_v \simeq \iota(\text{JL}(\overline{\Pi}_v))$ dans le cas (b) où ι désigne l'involution de Zelevinski. En outre on a $m(\Pi) = m(\overline{\Pi})$.

Par ailleurs soit Π^v une représentation de $G_\tau(\mathbb{A}^v)$ telle que pour toute représentation Π_v de $GL_d(F_v)$ avec $\Pi := \Pi^v \Pi_v$ vérifiant $\text{Hyp}(\xi)$, Π_v n'est pas de la forme $\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ ou $\overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v}$ pour π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$ avec $d = sg$. Alors il n'existe pas de représentation irréductible automorphe $\overline{\Pi}$ de $H_0(\mathbb{A})$ telle que $\overline{\Pi}^{\infty,v} \simeq \Pi^{\infty,v}$.

Démonstration. — Soit Π une représentation automorphe de $G_\tau(\mathbb{A})$ cohomologique pour ξ et telle que $\Pi_v \simeq \overleftarrow{[s'-1]}_{\pi_v}$ pour une certaine représentation cuspidale unitaire π_v de $GL_{g'}(F_v)$. D'après la proposition (7.4.1), pour tout $1 \leq t < s'$, on a

$$\lim_{\overrightarrow{U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p,m}^{[d-tg]}, j_!^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg])[\Pi^{\infty,v}] =$$

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s'-t-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s'-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

Par ailleurs ce dernier est aussi égal à

$$\lim_{\overrightarrow{U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p,m}^{(0)}, \mathcal{F}(g, s', \pi_o) \otimes \mathcal{L}_\xi \otimes \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s'-t-1]}_{\pi_v})[\Pi^{\infty,v}] \otimes (\Xi^{\frac{(s'-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

qui est égal à $\sum_{\overline{\Pi} \in \mathfrak{U}_{H_0, \xi}(\Pi^{\infty,v})} \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0) m(\overline{\Pi}) \Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s'-t-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s'-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$ d'après le lemme (7.4.7), où $\mathfrak{U}_{H_0, \xi}(\Pi^{\infty,v})$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations irréductibles $\overline{\Pi}$ automorphes cohomologiques pour $(\xi')^\vee$ et telles que $(\overline{\Pi}^{\infty,v})^\vee \simeq \Pi^{\infty,v}$ avec $\overline{\Pi}_v^\vee \simeq \text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s'-1]}_{\pi_v})$ et où on rappelle que $\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) = \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)$.

12.0.11 — De la même façon, soit Π une représentation irréductible automorphe de $G_\tau(\mathbb{A})$ cohomologique pour ξ et telle que $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s'-1]}_{\pi_v}$. On reprend la preuve de la proposition (10.3.4). Pour $t = s'$, le lemme (7.4.7) donne

$$\lim_{\overrightarrow{U^p(m)}} H^0(\overline{X}_{U^p,m}^{(s'g')}, \mathcal{F}(g', s', \pi_v) \otimes \overleftarrow{[s'-1]}_{\pi_v})[\Pi^{\infty,v}] =$$

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0) \left(\sum_{\overline{\Pi} \in \mathfrak{U}_{H_0, \xi}(\Pi^{\infty,v})} m(\overline{\Pi}) \right) \overleftarrow{[s'-1]}_{\pi_v} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}$$

Pour $t = s' - 1$, on obtient alors

$$\frac{1}{\#\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)} \sum_i (-1)^i H^i(j_{!*}^{\geq (s'-1)g'}) = - \left(\left(\sum_{\bar{\Pi} \in \mathfrak{M}_{H_0, \xi}(\Pi^{\infty, v})} m(\bar{\Pi}) \right) \overleftarrow{[s'-2]_{\pi_v}} \overrightarrow{[\overline{0}]_{\pi_v}} \otimes \Xi^{-1/2} + \left(\sum_{\Pi \in \mathfrak{M}_{G_\tau, \xi}(\Pi^{\infty, v})} m(\Pi) \right) \overleftarrow{[s'-2]_{\pi_v}} \overrightarrow{[\overline{0}]_{\pi_v}} \otimes \Xi^{1/2} \right) \otimes (\Xi^{g'/2} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

qui d'après la pureté, doit être égal à $\frac{-1}{\#\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)} (H^{-1}(j_{!*}^{\geq (s'-1)g'}) + H^1(j_{!*}^{\geq (s'-1)g'}))$ de sorte que la dualité de Verdier donne le résultat.

12.0.12 — Supposons que Π_v ne soit ni de la forme $\overleftarrow{[s'-1]_{\pi_v}}$ ni $\overrightarrow{[s'-1]_{\pi_v}}$ pour tout diviseur s' de $d = s'g'$ et toute représentation cuspidale π_v de $GL_{g'}(F_v)$. Supposons qu'il existe une représentation $\bar{\Pi}$ cohomologique pour ξ telle que $\bar{\Pi}^{\infty, v} \simeq \Pi^{\infty, v}$ et soit s' , π_v tel que $\bar{\Pi}_v \simeq \mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s'-1]_{\pi_v}})$. Le lemme (7.4.7) donne comme précédemment

$$\frac{1}{\#\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, H_0)} H^0(\mathcal{F}(g, s', \pi_v) \otimes \overleftarrow{[s'-1]_{\pi_v}}) \simeq \left(\sum_{\bar{\Pi} \in \mathfrak{M}_{H_0, \xi}(\Pi^{\infty, v})} m(\bar{\Pi}) \right) \overleftarrow{[s'-1]_{\pi_v}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}$$

de sorte que

$$\frac{1}{\#\mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)} \sum_i (-1)^i H^i(j_{!*}^{\geq (s'-1)g'})[\Pi^{\infty, v}] = \left(- \left(\sum_{\Pi \in \mathfrak{M}_{G_\tau, \xi}(\Pi^{\infty, o})} m(\Pi) \right) (\mathrm{Ind}_{P_{d-g', d}(F_v)}^{GL_d(F_v)} \overleftarrow{[s'-2]_{\pi_v}} \otimes \mathrm{red}_{\mathrm{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s'-2]_{\pi_v}})}^{d-g'}(\Pi_v)) + \left(\sum_{\bar{\Pi} \in \mathfrak{M}_{H_0, \xi}(\Pi^{\infty, v})} m(\bar{\Pi}) \right) \overleftarrow{[s'-2]_{\pi_v}} \overrightarrow{[\overline{0}]_{\pi_v}} \otimes \Xi^{(g-1)/2} \right) \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}$$

La condition de pureté et la compatibilité à la dualité de Verdier, impose alors que Π_v est soit isomorphe à $\overleftarrow{[s'-1]_{\pi_v}}$ soit à $\overrightarrow{[s'-1]_{\pi_v}}$ d'où la contradiction.

12.0.13 — Ce dernier raisonnement montre en outre qu'étant donné une représentation $\bar{\Pi}$ comme dans l'énoncé, il lui correspond une représentation Π vérifiant les conditions de l'énoncé. Dans le cas où $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s'-1]_{\pi_v}}$, l'égalité $s = s'$ découle du corollaire (13.3) ci-après. \square

13. Composantes locales des représentations automorphes

13.1. Proposition. — Soit Π une représentation irréductible automorphe de $G_\tau(\mathbb{A})$ vérifiant $\mathrm{Hyp}(\infty)$. Pour tout $0 \leq i < d$, il existe alors un réel δ ainsi que des entiers n_i ⁽²¹⁾ tels que :

- $\sum_{i=0}^{d-1} n_i(d-i) = d$,
- pour i tel que $n_i \neq 0$, $n_j = 0$ pour $j \equiv i+1 \pmod{2}$, tels que pour toute place v telle que $D_{v,d}^\times \simeq GL_d(F_v)$, il existe :

⁽²¹⁾ n_i représente la dimension de la partie primitive de la représentation galoisienne de $H_{\eta_v}^i$

- des entiers $t_j > 1$ et g_j pour $1 \leq j \leq u$, ainsi que des entiers t'_k et g'_k pour $1 \leq k \leq u'$, avec $\sum_{j=1}^u t_j g_j + \sum_{k=1}^{u'} t'_k g'_k = d$,
- des représentations irréductibles cuspidales $\pi_{v,j}$ et $\pi'_{v,k}$ de respectivement $GL_{g_j}(F_v)$ et $GL_{g'_k}(F_v)$ telles que $\pi_{v,j}(\delta)$ et $\pi'_{v,k}(\delta)$ soient unitaires vérifiant les conditions suivantes :
 - pour tout $0 \leq i < d - 1$, $\sum_k / t'_k = d - 1 - i$ $g'_k = n_i$;
 - Π_v est l'induite irréductible $[\overleftarrow{t_1 - 1}]_{\pi_{v,1}} \times \cdots \times [\overleftarrow{t_u - 1}]_{\pi_{v,u}} \times [\overrightarrow{t'_1 - 1}]_{\pi'_{v,1}} \times \cdots \times [\overrightarrow{t'_{u'} - 1}]_{\pi'_{v,u'}}$, avec :
 - si $u > 0$ alors pour tout j , $s_j \equiv 1 \pmod{2}$;
 - si $u = 0$ alors tous les s_i ont la même parité donnée par $(-1)^{s_i - 1} = \epsilon(\Pi)$.

13.2. Corollaire. — Toute représentation automorphe de $G_\tau(\mathbb{A})$ cohomologique, vérifie la conjecture de Ramanujan-Peterson.

13.3. Corollaire. — Soit Π une représentation irréductible automorphe de $G_\tau(\mathbb{A})$ cohomologique et supposons qu'il existe une place v_0 telle que $G_{v_0}^\times \simeq GL_d(F_{v_0})$ et Π_{v_0} tempérée, i.e. avec les notations du théorème précédent $t'_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq u'$ (resp. $\Pi_{v_0} \simeq [\overrightarrow{s - 1}]_{\pi_{v_0}}$ pour π_{v_0} une représentation cuspidale de $GL_g(F_{v_0})$ avec $d = sg$). On en déduit alors, en utilisant les notations du théorème précédent, que pour toute place v non ramifiée, pour tout $1 \leq k \leq u'$ (resp. pour tout $1 \leq j \leq u$) $t'_k = 0$ (resp. $t_j = 0$), i.e. Π_v est tempérée et $n_i = 0$ pour tout $0 \leq i < d - 1$ (resp. $n_i = 0$ pour $i \neq s$ et $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{s - 1}]_{\pi'_{v,1} \times \cdots \times \pi'_{v,u'}}$).

Démonstration. — de la proposition (13.1) : A torsion par un caractère près, Π_v est unitaire et donc d'après la classification de Tadic de la forme $[\overrightarrow{s_1 - 1}]_{[\overleftarrow{t_1 - 1}]_{\pi_{v,1}(\lambda_1)}} \times \cdots \times [\overrightarrow{s_u - 1}]_{[\overleftarrow{t_u - 1}]_{\pi_{v,u}(\lambda_u)}}$ où $\pi_{v,i}$ sont des représentations irréductibles cuspidales unitaires de $GL_{g_i}(F_v)$ avec $\lambda_i \in]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $\sum_{i=1}^u g_i s_i t_i = d$. L'induite étant irréductible, l'ordre des facteurs n'importe pas. Soit alors $r \geq 1$ tel que $\pi_v := \pi_{v,1}(\lambda_1) \simeq \cdots \simeq \pi_{v,r}(\lambda_r)$ et $\pi_{v,i}(\lambda_i)$ n'est pas isomorphe à π_v pour $i > r$. On note $t_0 := \max_{1 \leq i \leq r} \{s_i, t_i\}$. On note g l'entier tel que π_v est une représentation cuspidale de $GL_g(F_v)$. Par ailleurs soit $0 \leq k_1$ (resp. $k_1 \leq k_2$, resp. $k_2 \leq k_3 \leq r$) tel que pour tout $1 \leq i \leq k_1$ (resp. $k_1 < i \leq k_2$, resp. $k_2 < i \leq k_3$) on ait $s_i = t_i = t_0$ (resp. $t_i < s_i = t_0$, resp. $s_i < t_i = t_0$) et $\max_{k_3 < i \leq r} \{t_i, s_i\} < t_0$.

13.4. Lemme. — Pour tout $\max\{s, t\} < r \leq st$, $\text{red}_{J_{L^{-1}}([\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v})}([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}}) = (0)$.

Démonstration. — Le résultat découle essentiellement de [17] et en particulier du lemme suivant.

13.5. Lemme. — Pour tout s, t , les constituants de $J_{N_{g,2g,\dots,sg}}([\overrightarrow{s-1}]_{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v}})$ sont de la forme $\pi_v(\frac{2-t-s}{2} + \sigma(1)) \otimes \cdots \otimes \pi_v(\frac{2-t-s}{2} + \sigma(st))$ où le multi-ensemble $R := \{\sigma(1), \dots, \sigma(st)\}$

est tel que $\{\pi_v(\frac{2-t-s}{2} + r) / r \in R\}$ soit égal au support cuspidal de $[\overrightarrow{s-1}]_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}}$. Pour tout $0 \leq i \leq st-1$, on pose $\sigma^{-1}(i) = \{n_i(1) < n_i(2) < \dots\}$. On a alors les conditions suivantes :
 (i) pour $0 \leq k < s-1$ et $0 \leq i < t$, on a $n_{t-1+k-i}(\min(k+1, i+1)) > n_{t+k-i}(\min(k+2, i+1))$;
 (ii) pour $0 \leq k < s$ et $0 \leq i < j < t$, on a $n_{t-1+k-i}(\min(k+1, i+1)) > n_{t-1+k-j}(\min(k+1, j+1))$.

Remarque : Quand on regarde le support cuspidal de $\overbrace{[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(\frac{1-s}{2})} \boxplus \dots \boxplus [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(\frac{s-1}{2})}}^s$ dans l'ordre de gauche à droite, pour tout $0 \leq k < s-1$ et $0 \leq i < t$, le $\pi_v(\frac{2-t-s}{2} + t-1+k-i)$ du k -ème facteur est le $\min(k+1, i+1)$ -ème. La condition (ii) du lemme précédent affirme que dans un même facteur, on doit prendre les $\pi_v(i)$ de gauche à droite, tandis que la condition (i) précise que le $\pi_v(i)$ du k -ème facteur arrive après le $\pi_v(i+1)$ du $k+1$ -ème facteur.

Démonstration. — Comme $([\overrightarrow{s-1}]_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}})$ s'injecte dans les induites $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(\frac{1-s}{2})} \times [\overrightarrow{s-2}]_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v(1/2)}}$ et $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(\frac{1-s}{2})} \boxplus [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(\frac{3-s}{2})} \times (s-2)_{\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v(1)}}$, on se ramène aisément, par récurrence sur s , au cas $s=2$ soit à étudier $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(-1/2)} \boxplus [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(1/2)}$. Or dans le groupe de Grothendieck, cette dernière est égale à $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(-1/2)} \times [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(1/2)} - [\overleftarrow{t}]_{\pi_v} \times [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v}$. La condition (ii) constitue l'unique restriction sur les σ pour l'induite totale $[\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(-1/2)} \times [\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v(1/2)}$. Il suffit alors de remarquer que les σ vérifiant (i) et pas (ii) sont obtenues à partir de $[\overleftarrow{t}]_{\pi_v} \times [\overleftarrow{t-2}]_{\pi_v}$. □

Ainsi si on obtenait un constituant de la forme $[\overleftarrow{r-1}]_{\pi_v} \otimes \pi$, on en déduirait, par transitivité du foncteur de Jacquet, avec les notations du lemme précédent, que la bijection σ_0 telle que $\sigma_0(i) = \sigma(1) - i + 1$ pour $1 \leq i \leq r$ vérifierait les conditions (i) et (ii) ce qui impose $r \leq t$.

De même si on obtenait $[\overrightarrow{r-1}]_{\pi_v} \otimes \pi$, la bijection σ_0 telle que $\sigma_0(i) = \sigma_0(1) + i - 1$ pour $1 \leq i \leq r$ vérifierait les conditions (i) et (ii) ce qui impose $r \leq s$, d'où le résultat. □

On en déduit alors que pour tout $t > t_0$, $\text{red}_{\text{JL}^{-1}([\overleftarrow{t-1}]_{\pi_v})}(\Pi_v)$ est nul de sorte que d'après (3.2.6), que pour tout $t_0 < t \leq s$, $\sum_i (-1)^i H^i(j_{!}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty}] = 0$. D'après le lemme (8.1.1), on en déduit alors que pour tout i , $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty}]$ est nul. Ainsi en reprenant l'argument de la preuve du lemme (13.4) et en utilisant le lemme (13.5), on obtient :

13.6. Lemme. — Soit $r := \max\{s, t\}$. Si $r > t$ (resp. $r > s$), alors $\text{red}_{\text{JL}^{-1}(\overrightarrow{[r-1]}_{\pi_v})}(\overrightarrow{[s-1]}_{\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v}})$ est isomorphe à $(-1)^{r-1} \Xi^{\frac{(t-1)(sg-1)}{2}} \otimes \overrightarrow{[s-1]}_{\overrightarrow{[t-2]}_{\pi_v(-\frac{sg-1}{2})}}$ (resp. $\Xi^{\frac{(s-1)(tg+1)}{2}} \otimes \overrightarrow{[s-2]}_{\overrightarrow{[t-1]}_{\pi_v(-\frac{tg+1}{2})}}$)
 Dans le cas $r = s = t$, on obtient la somme des deux termes ci-dessus.

Ainsi d'après (3.2.6), $\frac{\epsilon(\Pi)}{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)} \sum_i (-1)^i H^i(j_{!}^{\geq t_0 g} HT_\xi(g, t_0, \pi_v, \Pi_l)[d - t_0 g])[\Pi^\infty]$ qui d'après ce qui précède est égal à $\frac{\epsilon(\Pi)}{\#\text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)} \sum_i (-1)^i H^i(j_{!*}^{\geq t_0 g} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_l)[d - t_0 g])$, est donné par

$$\begin{aligned} & \Xi^{\frac{d-t_0 g}{2}} ((\Xi^{\frac{t_0-1}{2}} (-1)^{t_0-1} \Pi_t(\frac{t_0-1}{2}) \times (\overrightarrow{[t_0-2]}_{\overrightarrow{[t_0-1]}_{\pi_v(-1/2)}})^{k_1} + \\ & \Xi^{-\frac{t_0-1}{2}} (\Pi_t(\frac{1-t_0}{2}) \times \overrightarrow{[t_0-1]}_{\overrightarrow{[t_0-2]}_{\pi_v(1/2)}})^{k_1}) \times \overrightarrow{[s_2-1]}_{\overrightarrow{[t_2-1]}_{\pi_v, 2(\lambda_2)}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_u-1]}_{\overrightarrow{[t_u-1]}_{\pi_v, u(\lambda_u)}} + \\ & \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \Xi^{-\frac{t_i-1}{2}} (-1)^{t_0-1} (\overrightarrow{[s_1-1]}_{\overrightarrow{[t_1-1]}_{\pi_v, 1(\lambda_1)}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_{i-1}-1]}_{\overrightarrow{[t_{i-1}-1]}_{\pi_v, i-1(\lambda_{i-1})}} \times \\ & \Pi_t(\frac{1-t_i}{2}) \times \overrightarrow{[t_0-1]}_{\overrightarrow{[t_i-2]}_{\pi_v(-1/2)}} \times \overrightarrow{[s_{i+1}-1]}_{\overrightarrow{[t_{i+1}-1]}_{\pi_v, i+1(\lambda_{i+1})}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_u-1]}_{\overrightarrow{[t_u-1]}_{\pi_v, u(\lambda_u)}}) + \\ & + \sum_{i=k_2+1}^{k_3} \Xi^{\frac{s_i-1}{2}} ((\overrightarrow{[s_1-1]}_{\overrightarrow{[t_1-1]}_{\pi_v, 1(\lambda_1)}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_{i-1}-1]}_{\overrightarrow{[t_{i-1}-1]}_{\pi_v, i-1(\lambda_{i-1})}} \times \\ & \Pi_t(\frac{s_i-1}{2}) \times \overrightarrow{[s_i-2]}_{\overrightarrow{[t_0-1]}_{\pi_v(1/2)}} \times \overrightarrow{[s_{i+1}-1]}_{\overrightarrow{[t_{i+1}-1]}_{\pi_v, i+1(\lambda_{i+1})}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_u-1]}_{\overrightarrow{[t_u-1]}_{\pi_v, u(\lambda_u)}}) \end{aligned}$$

En utilisant que pour tout i , $H^i(j_{!*}^{\geq t_0 g} HT_\xi(g, t_0, \pi_v, \Pi_l)[d - t_0 g])$ est pur de poids $d - t_0 g + i$, on en déduit alors que ceux-ci sont alors isomorphes à

$$\Pi_t(\frac{t_0-1}{2}) \times (\overrightarrow{[t_0-1]}_{\overrightarrow{[t_0-2]}_{\pi_v(-1/2)}})^{k_1} \times \overrightarrow{[s_2-1]}_{\overrightarrow{[t_2-1]}_{\pi_v, 2(\lambda_2)}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_u-1]}_{\overrightarrow{[t_u-1]}_{\pi_v, u(\lambda_u)}} \quad \text{pour } i = 1 - t_0$$

$$\Pi_t(\frac{1-t_0}{2}) \times (\overrightarrow{[t_0-2]}_{\overrightarrow{[t_0-1]}_{\pi_v(1/2)}})^{k_1} \times \overrightarrow{[s_2-1]}_{\overrightarrow{[t_2-1]}_{\pi_v, 2(\lambda_2)}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_u-1]}_{\overrightarrow{[t_u-1]}_{\pi_v, u(\lambda_u)}} \quad \text{pour } i = t_0 - 1$$

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{k_1 < k \leq k_2 / 1-t_k = i} (-1)^{t_0-1} (\overrightarrow{[s_1-1]}_{\overrightarrow{[t_1-1]}_{\pi_v, 1(\lambda_1)}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_{i-1}-1]}_{\overrightarrow{[t_{i-1}-1]}_{\pi_v, i-1(\lambda_{i-1})}} \times \Pi_t(\frac{1-t_i}{2}) \times \\ & \overrightarrow{[t_0-1]}_{\overrightarrow{[t_i-2]}_{\pi_v(-1/2)}} \times \overrightarrow{[s_{i+1}-1]}_{\overrightarrow{[t_{i+1}-1]}_{\pi_v, i+1(\lambda_{i+1})}} \times \cdots \times \overrightarrow{[s_u-1]}_{\overrightarrow{[t_u-1]}_{\pi_v, u(\lambda_u)}}) \\ & \quad \text{pour } 0 \leq -i < t_0 - 1 \end{aligned}$$

$$\bigoplus_{k_2 < k \leq k_3 / s_k - 1 = i} \left(([\overline{s_1 - 1}]_{[\overline{t_1 - 1}]_{\pi_{v,1}(\lambda_1)}} \times \cdots \times [\overline{s_{i-1} - 1}]_{[\overline{t_{i-1} - 1}]_{\pi_{v,i-1}(\lambda_{i-1})}} \times \Pi_t(\frac{s_i - 1}{2}) \right. \\ \left. \times [\overline{s_i - 2}]_{[\overline{t_0 - 1}]_{\pi_{v,(1/2)}}} \right) \times [\overline{s_{i+1} - 1}]_{[\overline{t_{i+1} - 1}]_{\pi_{v,i+1}(\lambda_{i+1})}} \times \cdots \times [\overline{s_u - 1}]_{[\overline{t_u - 1}]_{\pi_{v,u}(\lambda_u)}}) \\ \text{pour } 0 \leq i < t_0 - 1$$

Si on veut que ces résultats soient compatibles à la dualité de Verdier, il faut alors que pour tout i , $\min\{s_i, t_i\} = 1$. En outre s'il existe i tel que $t_i > 1$ alors $\epsilon(\Pi) = 1$ et pour tout j , $s_j \equiv 1 \pmod{2}$. Si pour tout i , $t_i = 1$ alors tous les s_i ont la même parité donnée par $(-1)^{s_i - 1} = \epsilon(\Pi)$.

Par ailleurs les $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, [\overline{t - 1}]_{\pi_v})[d - tg]) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)(1 - tg)$ servent à calculer la cohomologie de la fibre générique via la suite spectrale des poids. On en déduit alors que tous les poids $\text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_{v,i}(\lambda_i))$ s'obtiennent à partir de ceux obtenus par la cohomologie de la fibre générique par une translation entière, d'où le résultat. \square

14. Pureté de la filtration de monodromie des $H_{\eta_v}^i$

14.1. Théorème. — Pour toute représentation irréductible Π et pour tout i , les gradués, $gr_{k,\xi}[\Pi^{\infty}]$ de la filtration de monodromie de $H_{\eta_v,\xi}^i[\Pi^{\infty}]$ sont purs de poids $d - 1 + k$ ⁽²²⁾. En fait pour $i \neq d - 1$, l'opérateur de monodromie N agit trivialement sur les $H_{\eta_v,\xi}^i$.

Démonstration. — Soit v une place non ramifiée. Remarquons tout d'abord que s'il n'existe pas de Π'_v ⁽²³⁾ tel que Π'_v ne vérifie pas $\text{Hyp}(\xi)$, alors tous les $H_{\eta_v,\xi}^i[\Pi^{\infty}]$ sont nuls. Considérons alors Π irréductible vérifiant $\text{Hyp}(\xi)$ de sorte que, d'après ce qui précède, Π_v est de la forme

$$[\overline{s_1 - 1}]_{\pi_{v,1}} \times \cdots \times [\overline{s_u - 1}]_{\pi_{v,u}} \times [\overline{t_1 - 1}]_{\pi'_{v,1}} \times \cdots \times [\overline{t_{u'} - 1}]_{\pi'_{v,u'}}$$

avec $\pi_{v,i}$ et $\pi'_{v,j}$ irréductibles cuspidales unitaires de respectivement $GL_{g_i}(F_v)$ et $GL_{g'_j}(F_v)$. ⁽²⁴⁾ On étudie alors la suite spectrale

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(gr_{-i,\xi}) \Rightarrow H_{\eta_v,\xi}^{i+j+d-1} \quad (14.0.28)$$

D'après le théorème (5.4.4), les $H^r(gr_{k,\xi}[\Pi^{\infty,v}])$ se calculent à partir des $H^r(\mathcal{P}(g_i, t, \pi_{v,i}))[\Pi^{\infty,v}]$ pour $1 \leq i \leq u$ et $1 \leq tg_i \leq d$ ainsi que des $H^r(\mathcal{P}(g'_i, t, \pi'_{v,i}))[\Pi^{\infty,v}]$ pour $1 \leq i \leq u'$ et $1 \leq tg'_i \leq d$. Le calcul de ces derniers s'obtient par récurrence descendante sur l via le calcul des $\text{red}_{\text{JL}^{-1}([\overline{t-1}]_{\pi_{v,i}})}^{tg_i}(\Pi_v)$.

⁽²²⁾ plus le poids de ξ que l'on supposera nul

⁽²³⁾ On peut en outre supposer que ce dernier soit de même support cuspidal que Π_v

⁽²⁴⁾ En outre tous les s_i ont la même congruence modulo 2.

14.0.14 — A priori, pour une preuve rigoureuse on devrait introduire des notations comme dans la preuve de la proposition (13.1) en regroupant les $\pi_{v,i}$ qui sont isomorphes, puis en les triant selon leur s_i . Cependant comme le foncteur de Jacquet est additif sur les induites et vu que les $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_l))[\Pi^{\infty, v}]$ se calculent à partir de ceux-ci, par récurrence, on remarque alors que les divers $\pi_{v,i}$ n'interagissent pas entre eux de sorte que chacun des $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_l)[d - tg])[\Pi^{\infty, v}]$ sera de la forme

$$\bigoplus_{\substack{k/\pi_v, k \simeq \pi_v \\ s_k \geq l}} H(i, \pi_v, t, s_k, -) \oplus \bigoplus_{\substack{k/\pi'_{v,k} \simeq \pi_v \\ t_k \geq l}} H(i, \pi_v, t, t_k, +)$$

où $H(i, \pi_v, t, s_k, -)$ (resp. $H(i, \pi_v, t, t_k, +)$) correspond au calcul de $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d - tg])[\Pi^{\infty, v}]$ effectué comme si k est tel que pour tout $1 \leq i \neq k \leq u$ et pour tout $1 \leq j \leq u'$ (resp. pour tout $1 \leq i \leq u$ et $1 \leq j \neq k \leq u'$), $\pi_{v,i}$ et $\pi'_{v,j}$ ne sont pas isomorphes à π_v . Plaçons nous alors dans une telle situation, i.e. $\Pi_v \simeq \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v} \times \pi_{v,1}$ (resp. $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v} \times \pi_{v,1}$) où $\pi_{v,1}$ est une représentation irréductible de $GL_{d-sg}(F_v)$ de support cuspidal disjoint de la droite associée à π_v irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$. Les calculs sont alors exactement similaires à ceux déjà effectués, rappelons rapidement comment cela s'articule.

- pour $l > s$, les $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_{\xi}(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls : on procède par récurrence descendante sur l de s_g à $s + 1$. Le cas $t = s_g$ quand $s_g g = d$ découle du lemme (7.4.7) en utilisant une correspondance de Jacquet-Langlands globale comme au théorème (12.1). Dans les autres situations le résultat découle du fait que $\text{red}_{\text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v})}^{tg}(\Pi_v)$ est nul ;

- pour $t = s$, on a $H^0(j_{!*}^{\geq sg} HT_{\xi}(g, s, \pi_v, \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v})[d - sg])[\Pi^{\infty, v}] \simeq \Pi_o$ ⁽²⁵⁾ : le résultat découle directement du point précédent et du fait que $\text{red}_{\text{JL}^{-1}(\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v})}^{sg}(\Pi_v) = \pi_{v,1}(-sg/2) \otimes \Xi^{\frac{d-sg}{2}}$;

- pour $1 \leq t < s$ et $\Pi_o \simeq \overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v} \times \pi_{v,1}$, tous les $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v}))[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls : la preuve est strictement identique à celle de la proposition (7.4.1) ;

- pour $1 \leq t < s$ et $\Pi_v \simeq \overrightarrow{[s-1]}_{\pi_v} \times \pi_{v,1}$, les $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v})[d - tg])[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour $|i| > s - t$ ou $i \equiv s - t - 1 \pmod{2}$. Dans les autres cas, il est isomorphe à

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_{\tau}) m(\Pi) (\overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v} \times \overrightarrow{[\frac{s-t+i-4}{2}]_{\pi_v}}) \times \overleftarrow{[\frac{s-t-i-4}{2}]_{\pi_v}} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)g+i}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1})$$

La preuve est identique à celle de la proposition (10.3.4).

14.0.15 — On revient alors à l'étude de la suite spectrale (14.0.28) dont on vient de déterminer les termes $E_1^{i,j}[\Pi^{\infty, v}]$. La détermination des flèches $d_1^{i,j}$ se fait alors comme dans la preuve de la proposition (11.1) car à nouveau les divers $\pi_{v,i}$ n'interagissent pas entre

⁽²⁵⁾Dans le cas respé on utilise que $(-1)^{s-1} = \epsilon(\Pi)$.

eux dans les arguments de dualité. Considérons en effet le cas de deux contributions : si celles-ci correspondent à des Steinberg généralisées alors tout est concentré sur les H^0 de sorte que toutes les flèches sont nulles. Supposons donc avoir à traiter le cas de deux Speh⁽²⁶⁾. Si elles sont de même longueur, on se retrouve alors dans la situation de la preuve de (11.1) mais avec des multiplicité 2, ce qui ne change en rien les arguments. Supposons les alors de longueur distinctes, $t' < t$ et reprenons les arguments de la preuve de (11.1). Tant qu'on étudie des $H^i(gr_k)$ avec $\min\{|i|, |k|\} > t$, il n'y a rien à rajouter car n'intervient que la composante de plus grande longueur. Dans les autres cas, l'argument consiste à comparer par dualité les termes H^i et H^{-i} . Pour $i > 0$, H^i (resp. H^{-i}) est une somme directe constituée de représentations de la forme

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) [\overrightarrow{t-1}]_{\pi_v} \times ([\overrightarrow{r_1-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{t-r_1-r_2-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\otimes} [\overrightarrow{r_2-1}]_{\pi_v}) \quad (14.0.29)$$

avec $r_2 \leq t'/2$ (resp. $r_1 \leq t'/2$)⁽²⁷⁾

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) ([\overrightarrow{r_1-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overleftarrow{t-r_1-r_2-1}]_{\pi_v} \overrightarrow{\times} [\overrightarrow{r_2-1}]_{\pi_v}) \times [\overrightarrow{t'-1}]_{\pi_v} \quad (14.0.30)$$

avec $r_2 \leq t/2$ (resp. $r_1 \leq t/2$). On remarque alors que les composants de (14.0.29) sont disjoints de ceux de (14.0.30), sauf éventuellement $[\overrightarrow{t-1}]_{\pi_v} \times [\overrightarrow{t'-1}]_{\pi_v}$. Ce sont donc les seuls qui peuvent rester dans l'aboutissement⁽²⁸⁾. Pour voir que ces derniers restent effectivement dans l'aboutissement il suffit de remarquer qu'ils n'apparaissent que dans les termes $H^i(gr_{0,\xi})[\Pi^{\infty,v}]$ de sorte qu'il ne peut y avoir de simplifications, d'où le résultat. \square

PARTIE V RÉCAPITULATIFS

15. sur les faisceaux

- 15.0.16 — - $R\Psi_v(\mathcal{L}_\xi) \simeq R\Psi_v(\overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes \mathcal{L}_\xi$;
 - $R\Psi_v[d-1]$ est un objet de $\text{FPH}(\overline{X})$;
 - $R\Psi_v[d-1] = \bigoplus_{\pi_v \in \text{Cusp}(d)} R\Psi_{\pi_v}[d-1]$ avec les notations de la proposition (5.1.3), où $\text{Cusp}(d)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence inertielle des représentations irréductibles cuspidales de $GL_g(F_v)$ pour tout $1 \leq g \leq d$;

⁽²⁶⁾Le cas d'une Speh avec une Sp se traite de la même façon.

⁽²⁷⁾On peut être plus précis, cf. la proposition (10.3.4).

⁽²⁸⁾On le savait déjà car seules les représentations automorphes subsistent dans l'aboutissement.

- $R\Psi_{\pi_v}[d-1]$ est mixte de poids $d-1$; sa filtration de monodromie est égale à celle par le poids au décalage de $d-1$ près, on note gr_{k,π_v} le gradué de poids k de sa filtration de monodromie de sorte qu'en particulier $N^k : gr_{k,\pi_v} \xrightarrow{\sim} gr_{-k,\pi_v}$;

- pour $1 \leq g \leq d$ et π_v une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F_v)$; pour tout $|k| < s_g := \lfloor d/g \rfloor$, dans $\text{FPH}(\overline{X})$ on a (cf. 5.4.4) :

$$e_{\pi_v} gr_{k,\pi_v} = \bigoplus_{\substack{|k| < t \leq s_g \\ t \equiv k-1 \pmod{2}}} \mathcal{P}(g, t, \pi_v) \left(-\frac{tg+k-1}{2} \right)$$

où $\mathcal{P}(g, t, \pi_v) := j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \overleftarrow{[t-1]}_{\pi_v})[d-tg] \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v)$;

- la suite spectrale des poids (5.1.10) dégénère en E_2 et les applications $d_1^{i,j}$ sont induites par les suites exactes (4.2.8).

15.0.17 — $j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] \in \text{FPH}(\overline{X})$ est pur de poids $d-tg$ pour π_v unitaire ; ses faisceaux de cohomologies $h^i j_{!*}^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg]$ sont, pour $g > 1$ ⁽²⁹⁾, nuls pour i ne s'écrivant pas sous la forme $tg-d+a(g-1)$ avec $0 \leq a \leq s_g-t$ et pour un tel $i = tg-d+a(g-1)$, isomorphe dans $\text{FH}(\overline{X})$ à

$$j_!^{\geq (t+a)g} HT(g, t+a, \pi_v, \Pi_t \overrightarrow{[a-1]}_{\pi_v}) \otimes \Xi^{\frac{a(g-1)}{2}}$$

15.0.18 — Pour tout $1 \leq t \leq s_g$, on a, cf. (7.3.3), l'égalité dans \mathfrak{G}

$$j_!^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] = \sum_{i=t}^{s_g} j_{!*}^{\geq ig} HT(g, i, \pi_v, \Pi_t \overrightarrow{[i-t-1]}_{\pi_v})[d-ig] \otimes \Xi^{\frac{(t-i)(g-1)}{2}}$$

Dualement on a

$$Rj_*^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] = \sum_{i=t}^{s_g} j_{!*}^{\geq ig} HT(g, i, \pi_v, \Pi_t \overleftarrow{[i-t-1]}_{\pi_v})[d-ig] \otimes \Xi^{\frac{(t-i)(g+1)}{2}}$$

On en déduit alors que, au moins pour $g > 1$,

$$R^i j_*^{\geq tg} HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)[d-tg] = \bigoplus_{(r,a) / i=(t+r+a)g-d-a} j_!^{\geq (t+r+a)g} HT(g, t+r+a, \pi_v, (\Pi_t \overleftarrow{[r-1]}_{\pi_v}) \overrightarrow{[a-1]}_{\pi_v}) \otimes \Xi^{((r+a)(g-1)+2r)/2}$$

⁽²⁹⁾ pour $g = 1$ cf. (5.4.7)

16. sur les calculs de groupe de cohomologie

16.0.19 — Cas où Π_v est de la forme $\mathrm{Sp}_s(\pi_v)$:

- (1) d'après la proposition (7.4.1), $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^\infty]$ est nul pour tout i .
(2) d'après le corollaire (7.4.4), $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^\infty]$ est donné par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \xi^{-1}) & i = 0 \end{cases}$$

où $\mathfrak{A}(\pi_v)$ est l'ensemble des caractères $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_l^\times$, tels que $\pi_v \otimes \chi^{-1} \circ \mathrm{val}(\det) \simeq \pi_v$.

- (3) par application de la dualité de Verdier, $H^i(Rj_*^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^\infty]$ est donné par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{(s-t)(g+1)/2} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) & i = 0 \end{cases}$$

16.0.20 — Cas où Π_v est de la forme $\mathrm{Speh}_s(\pi_v)$:

- (1) d'après la proposition (10.3.4), $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^\infty]$ est donné par

$$\begin{cases} \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g-1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) & i = l - s \\ \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)(\Pi_t \overrightarrow{\times} \overrightarrow{[\frac{s-t-i}{2}-1]}_{\pi_v}) \overleftarrow{\times} \overrightarrow{[\frac{s-t+i}{2}-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)g+i}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) & \begin{cases} l - s < i < s - t \\ i \equiv l - s \pmod{2} \end{cases} \\ \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overleftarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g+1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) & i = s - t \end{cases}$$

- (2) d'après le corollaire (11.2), $H^i(j_{!*}^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^\infty]$ est donné par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq s - t \\ \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overleftarrow{\times} \overrightarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{\frac{(s-t)(g+1)}{2}} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) & i = s - t \end{cases}$$

- (3) par application de la dualité de Verdier, $H^i(Rj_*^{\geq tg} HT_\xi(g, t, \pi_v, \Pi_t))[\Pi^\infty]$ est donné par

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ \# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)\Pi_t \overleftarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v} \otimes (\Xi^{(s-t)(g+1)/2} \otimes \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{A}(\pi_v)} \chi^{-1}) & i = 0 \end{cases}$$

17. sur la suite spectrale des cycles évanescents

A partir du calcul des groupes de cohomologie à support compact des $HT(g, t, \pi_v, \Pi_t)$, l'isomorphisme (cf. la proposition (3.2.3))

$$H_c^j(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}, R^i \Psi_v \otimes \mathcal{L}_\xi)^h \simeq \bigoplus_{\tau_v \in \mathfrak{C}_h} (H_c^j(\overline{X}_{U^p, m, M_{d-h}}^{(d-h)}, \mathcal{F}_{\tau_v} \otimes \mathcal{L}_\xi) \otimes \mathcal{U}_{F_v, l, h, m}^i(\tau_v))^{h/e_{\tau_v}}$$

permet de calculer les

$$H_{=h, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}] := \varinjlim_{U^p(m)} H_c^j(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-h)}, R^i \Psi_{\pi_v} \otimes \mathcal{L}_\xi)$$

Les suites spectrales associées à la stratification

$$E_{1, U^p(m), \pi_v}^{p, q; i} = H_c^{p+q}(\overline{X}_{U^p, m}^{(d-p+1)}, R^i \Psi_{\pi_v}) \Rightarrow H_c^{p+q}(\overline{X}_{U^p, m}, R^i \Psi_{\pi_v}) \quad (17.0.31)$$

permettent alors de calculer les termes $E_2^{i, j}[\Pi^{\infty, v}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents. On résume les résultats obtenus dans

17.0.21 — le cas où $\Pi_v \simeq \mathrm{Sp}_s(\pi_v)$: le corollaire (7.4.11) donne tout d'abord :

17.0.22. Corollaire. — Les $H_{=h, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ vérifient les propriétés suivantes :

- (1) pour g divisant $d = sg$ et $\Pi_v \simeq [s-1]_{\pi_v}$, les $H_{=h, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour h qui n'est pas de la forme tg avec $1 \leq t \leq s$;
- (2) pour g divisant $d = sg$ et $\Pi_v \simeq [s-1]_{\pi_v}$, les $H_{=tg, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour $j \neq d - tg$;
- (3) pour g divisant $d = sg$ et $\Pi_v \simeq [s-1]_{\pi_v}$, les $H_{=tg, i, \pi_v, \xi}^{d-tg}[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour i ne vérifiant pas $t(g-1) \leq i \leq tg-1$. Si $1 \leq t < s$ et $i = tg - r$ avec $1 \leq r \leq t$, on a

$$H_{=tg, tg-r, \pi_v, \xi}^{d-tg}[\Pi^{\infty, v}] \simeq$$

$$\# \mathrm{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) ([\overleftarrow{t-r}, \overrightarrow{r-1}]_{\pi_v} \times [\overleftarrow{s-t-1}]_{\pi_v}) \otimes \mathrm{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{s(g-1) - 2(r-t)}{2} \right)$$

en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times W_v$, où $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes.

Ainsi, cf. la preuve de la proposition (10.1.2), les suites spectrales associées à la stratification sont triviales, i.e. dégénèrent en E_1 de sorte que les aboutissements sont donnés par la proposition (10.1.2) dont on rappelle l'énoncé ci-dessous :

17.0.23. Proposition. — Pour tout $0 \leq i \leq d-1$, les $H^j(R^i \Psi_{\pi_v, \xi})[\Pi^{\infty, v}]$, en tant que $GL_d(F_v) \otimes W_v$ -modules, vérifient les propriétés suivantes :

- (1) ils sont nuls si g n'est pas un diviseur de d ;
- (2) pour g un diviseur de $d = sg$, ils sont nuls si j n'est pas de la forme $d - tg$ pour $1 \leq t \leq s$;

(3) pour g un diviseur de $d = sg$ et $j = d - tg$ avec $1 \leq t \leq s$, ils sont nuls si i n'est pas de la forme $tg - r$ avec $1 \leq r \leq t$;

(4) pour g un diviseur de $d = sg$ et $1 \leq t < s$, $H^{d-tg}(R^{tg-r}\Psi_{\pi_v, \xi})[\Pi^{\infty, v}]$ est isomorphe à

$$\# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{[t-r, r-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}] \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g-1) - 2(r-t)}{2}\right)$$

Enfin la suite spectrale des cycles évanescents dégénère en E_3 et l'aboutissement $H_{\eta_v}^i[\Pi^{\infty, v}]$ est donné par le corollaire (10.1.1) :

17.0.24. Corollaire. — Les groupes de cohomologie de la fibre générique $H_{\eta_v, \xi}^i[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour $i \neq d - 1$ et

$$H_{\eta_v}^{d-1}[\Pi^{\infty, v}] = \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi)[\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}] \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee([\overleftarrow{[s-1]}_{\pi_v}])\left(-\frac{sg-1}{2}\right)$$

17.0.25 — Cas où $\Pi_v \simeq \text{Speh}_s(\pi_v)$:

17.0.26. Corollaire. — Les $H_{=h, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour g divisant $d = sg$ et $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{[s-1]}]_{\pi_v}$, les $H_{=h, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour h qui n'est pas de la forme tg avec $1 \leq t \leq s$;

(2) pour g divisant $d = sg$ et $\Pi_v \simeq [\overleftarrow{[s-1]}]_{\pi_v}$, les $H_{=tg, i, \pi_v, \xi}^j[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour $j \neq (s-t)(g+1)$;

(3) pour g divisant $d = sg$ et $\Pi_v \simeq [\overrightarrow{[s-1]}]_{\pi_v}$, les $H_{=tg, i, \pi_v, \xi}^{(s-t)(g+1)}[\Pi^{\infty, v}]$ sont nuls pour i ne vérifiant pas $t(g-1) \leq i \leq tg-1$. Si $1 \leq t < s$ et $i = tg - r$ avec $1 \leq r \leq t$, on a

$$H_{=tg, tg-r, \pi_v, \xi}^{d-tg}[\Pi^{\infty, v}] \simeq \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau)m(\Pi) \left((\overleftarrow{[t-r, r-1]}_{\pi_v} \overrightarrow{\times} \overleftarrow{[s-t-1]}_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v)\left(-\frac{s(g+1) - 2r}{2}\right) \right)$$

en tant que représentation de $GL_d(F_v) \times W_v$, où $m(\Pi)$ est la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes.

Démonstration. — Le raisonnement est identique à celui de la preuve de la proposition (10.1.2). On remarque alors que pour tout $k \geq 1$, les flèches

$$d_k^{p, q; i} : E_{k, \pi_v, \xi}^{p, q; i}[\Pi^{\infty, v}] \longrightarrow E_{k, \pi_v, \xi}^{p+k, q+k-1}[\Pi^{\infty, v}]$$

des suites spectrales associées à la stratification sont toutes nulles. En effet, d'après le corollaire (11.2), pour que $E_{k, \pi_v}^{p, q; i}[\Pi^{\infty, v}]$ (resp. $E_{k, \pi_v, \xi}^{p+k, q+k-1; i}[\Pi^{\infty, v}]$) soit non nul, il faut qu'il existe $1 \leq t_1 \leq s$ et $1 \leq r_1 \leq t_1$ (resp. $1 \leq t_2 \leq s$ et $1 \leq r_2 \leq t_2$) avec

$$(p, q, i) = (t_1g + 1, d - 2t_1g - 1 + s - t_1, t_1g - r_1)$$

$$\text{(resp. } (p+k, q+k-1, i) = (t_2g + 1, d - 2t_2g - 1 + s - t_2, t_2g - r_2)\text{)}.$$

Ce qui donne $1 = (3g + 1)(t_2 - t_1)$; on voit alors que pour tout $k \geq 1$, $E_{k,\pi_v,\xi}^{p,q;i}[\Pi^{\infty,v}]$ et $E_{k,\pi_v,\xi}^{p+k,q+k-1}[\Pi^{\infty,v}]$ ne peuvent pas être tous deux non nuls de sorte que $E_{\infty,I,\pi_v,\xi}^{p,q;i}[\Pi^{\infty,v}] = E_{1,I,\pi_v,\xi}^{p,q;i}[\Pi^{\infty,v}]$ d'où le résultat d'après le corollaire précédent. \square

Enfin la suite spectrale des cycles évanescents dégénère en E_3 et l'aboutissement $H_{\eta_v,\xi}^i[\Pi^{\infty,v}]$ est donnée par la proposition (11.1) dont on rappelle l'énoncé.

17.0.27. Proposition. — *Les groupes de cohomologie de la fibre générique $H_{\eta_v,\xi}^i[\Pi^{\infty,v}]$ sont nuls pour $|d - 1 - i| \geq s$ ou pour $i \not\equiv d - s \pmod{2}$ et sinon*

$$H_{\eta_v,\xi}^{d+s-2-2i}[\Pi^{\infty,v}] \simeq \# \text{Ker}^1(\mathbb{Q}, G_\tau) m(\Pi) [\overrightarrow{s-1}]_{\pi_v} \otimes \text{rec}_{F_v}^\vee(\pi_v) \left(-\frac{d+s-2-2i}{2} \right)$$

PARTIE VI FIGURES

Aide à la lecture des figures (4) et (5) :

- on indique les coordonnées (p, q) telles que $E_2^{p,q}[\Pi^{\infty,v}]$ est non nulle avec Π une représentation irréductible automorphe de $G(\mathbb{A})$ vérifiant $\text{Hyp}(\infty)$ et telle que $\Pi_v \simeq \text{Sp}_4(\pi_v)$ (resp. $\text{Speh}_4(\pi_v)$) dans la figure 5 (resp. figure 6) pour π_v une représentation cuspidale de $GL_2(F_v)$. Les représentations obtenues sont des représentations elliptiques de type π_v . Pour chacune de ces coordonnées, on indique qu'elle est la strate qui la donne dans la suite spectrale de stratification correspondante ;
- le nombre en dessous des $\overleftarrow{3}$ indique le poids ;
- toutes les flèches indiquées sont les seules non triviales et découlent des suites exactes (4.2.8) ;
- on note avec un cercle plus grand les coordonnées qui contribuent à l'aboutissement de la suite spectrale.

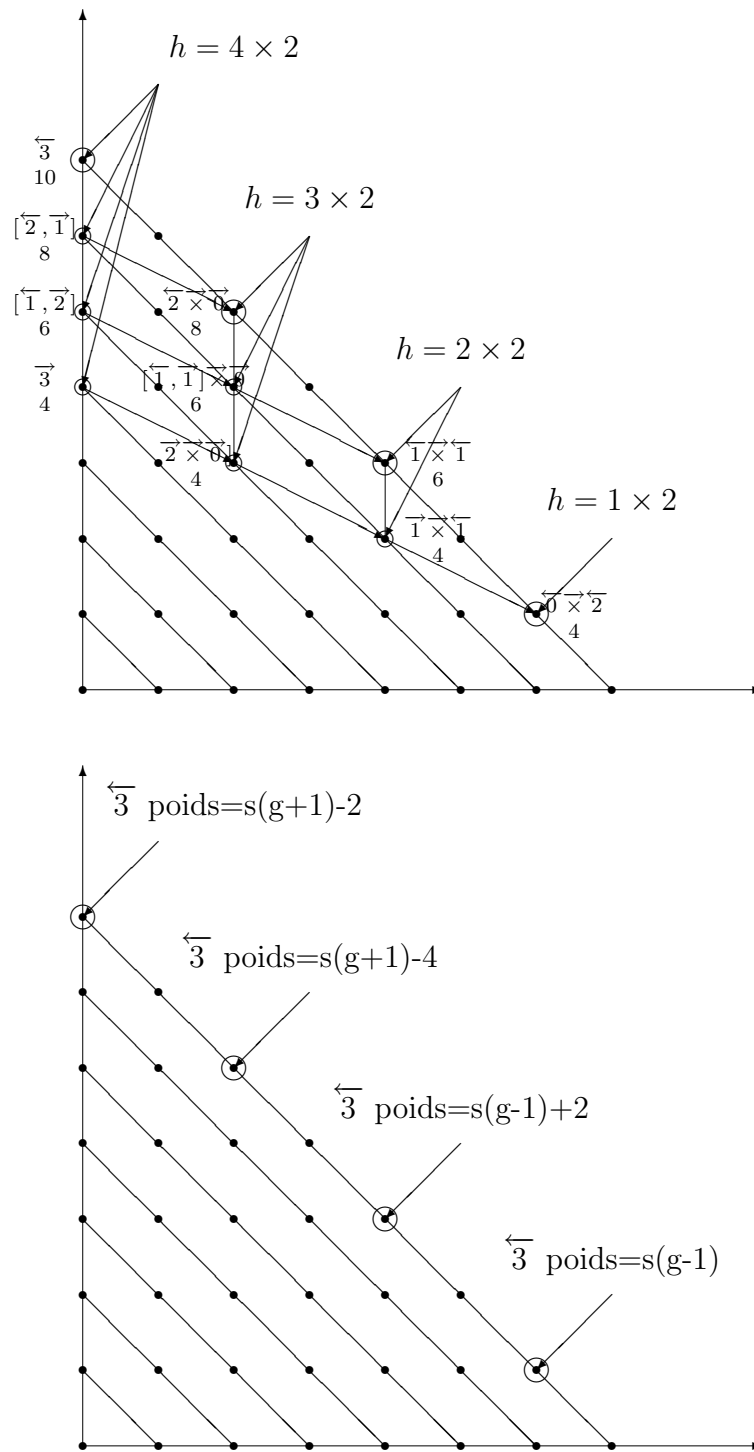


FIGURE 4. $s = 4, g = 2$; $E_2^{p,q}[\Pi^{\infty,v}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents : cas $\Pi_v = \text{Sp}_4(\pi_v)$. Le dessin du bas représente le terme E_3 et donc l'aboutissement de la suite spectrale.

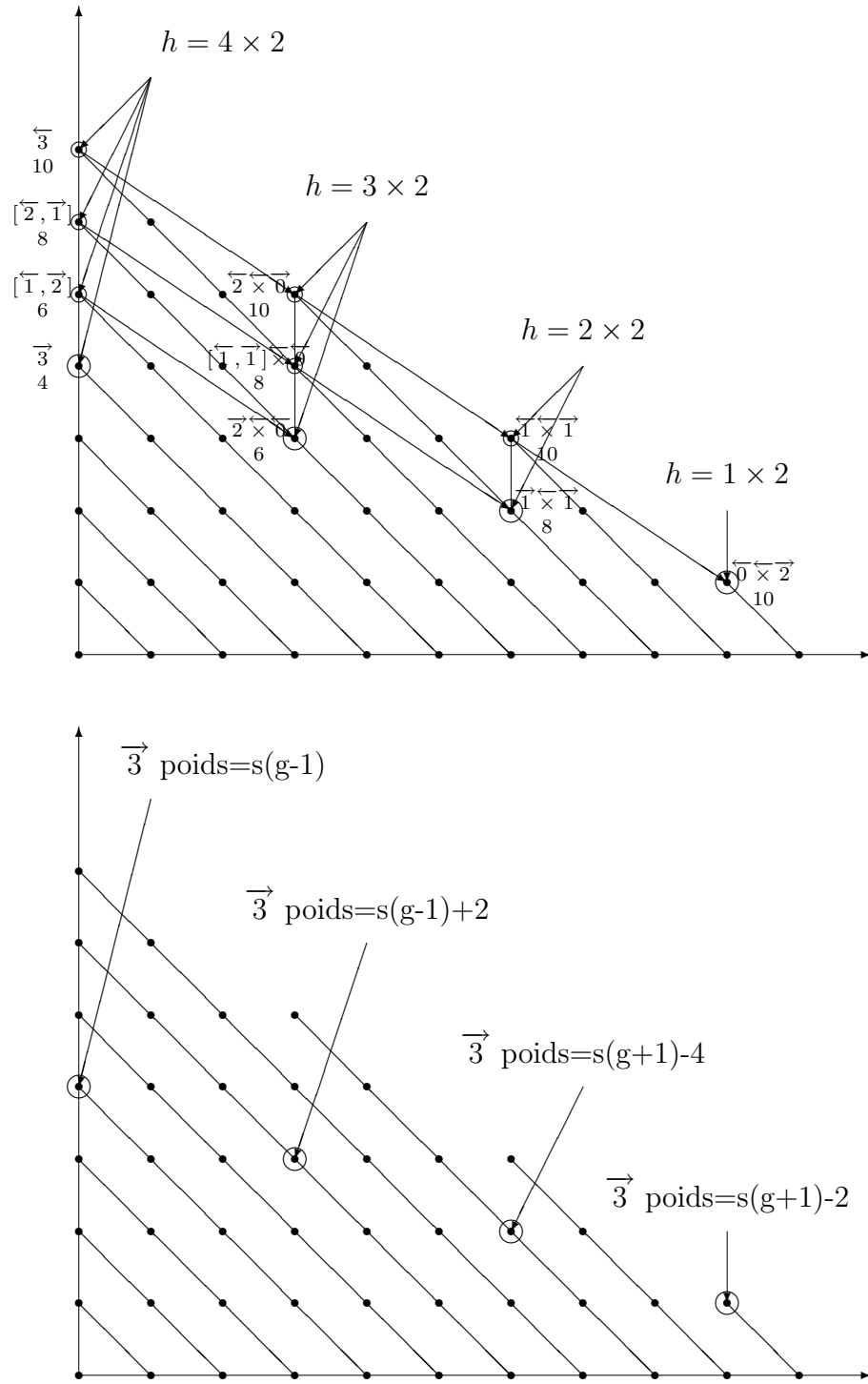


FIGURE 5. $s = 4, g = 2 : E_2^{p,q}[\Pi^{\infty,v}]$ de la suite spectrale des cycles évanescents : cas $\Pi_v = \text{Speh}_s(\pi_v)$. Le dessin du bas représente le terme E_3 et donc l'aboutissement de la suite spectrale.

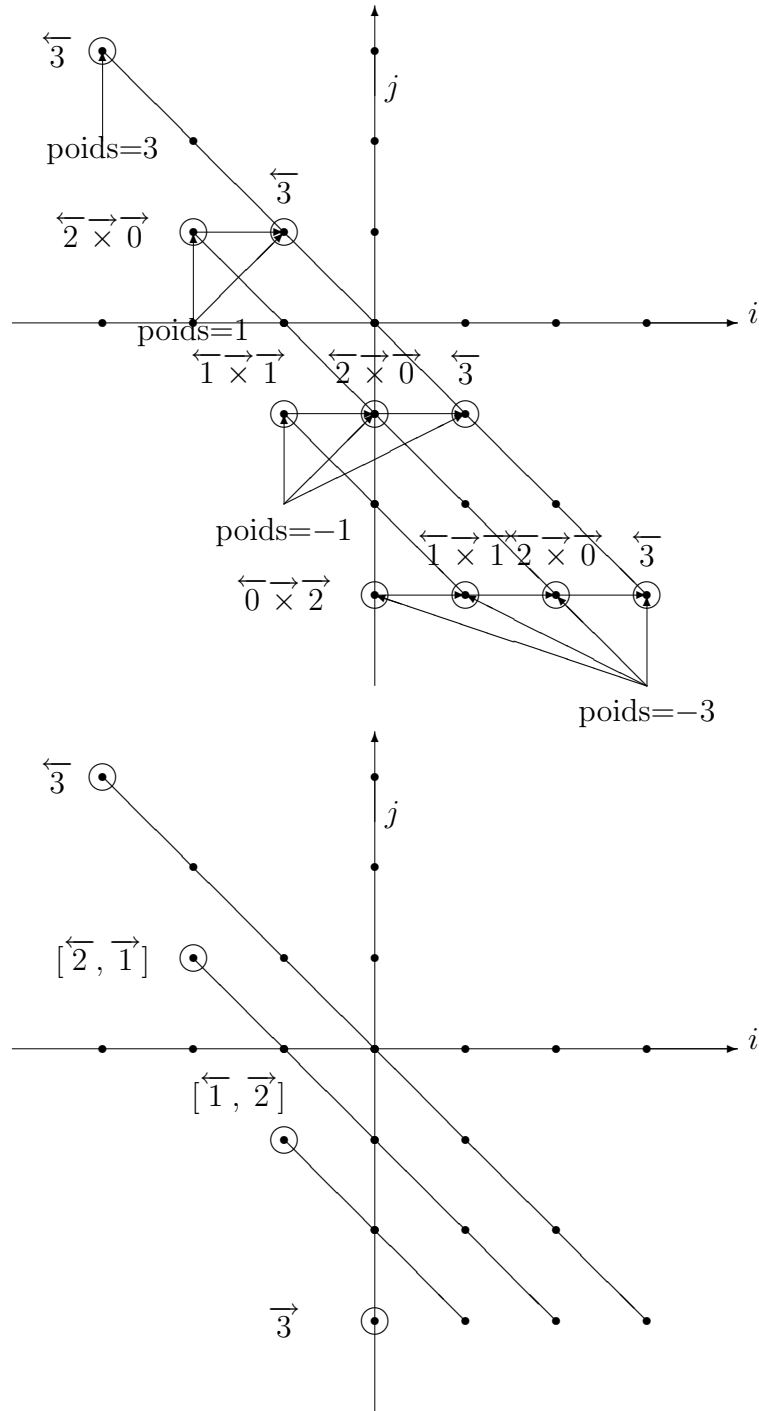


FIGURE 6. Termes $MLE_{\bullet}^{i,j}$ pour $s = 4$

Aide à la lecture des figures (7), (8) : le nombre qui accompagne les représentations indique le décalage à donner à la représentation de Galois associée ; ainsi quand, dans les $E_2^{p,q}$ des suites spectrales (8.2.13) pour $\mathcal{P}(g, t, \pi_v, k)$, on écrit $\overleftarrow{s-1}_r$, il faut lire

$$j_!^{\geq t g} HT(g, t, \pi_v, [\overleftarrow{s-1}]_{\pi_v}) \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) \left(-\frac{i(g-1) + t - 1 - k + r}{2} \right).$$

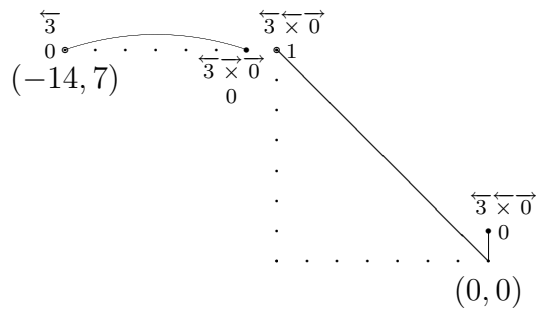


FIGURE 7. $g = 7, s = 5; E_2^{p,q}$ de la suite spectrale (8.2.13) pour $t = 4$

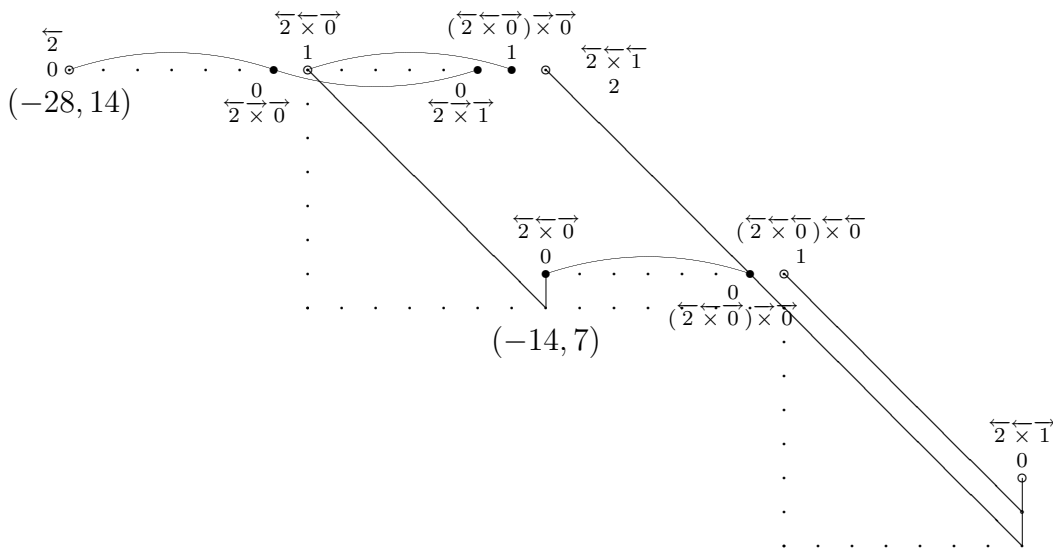


FIGURE 8. $g = 7, s = 5; E_2^{p,q}$ de la suite spectrale (8.2.13) pour $t = 3$

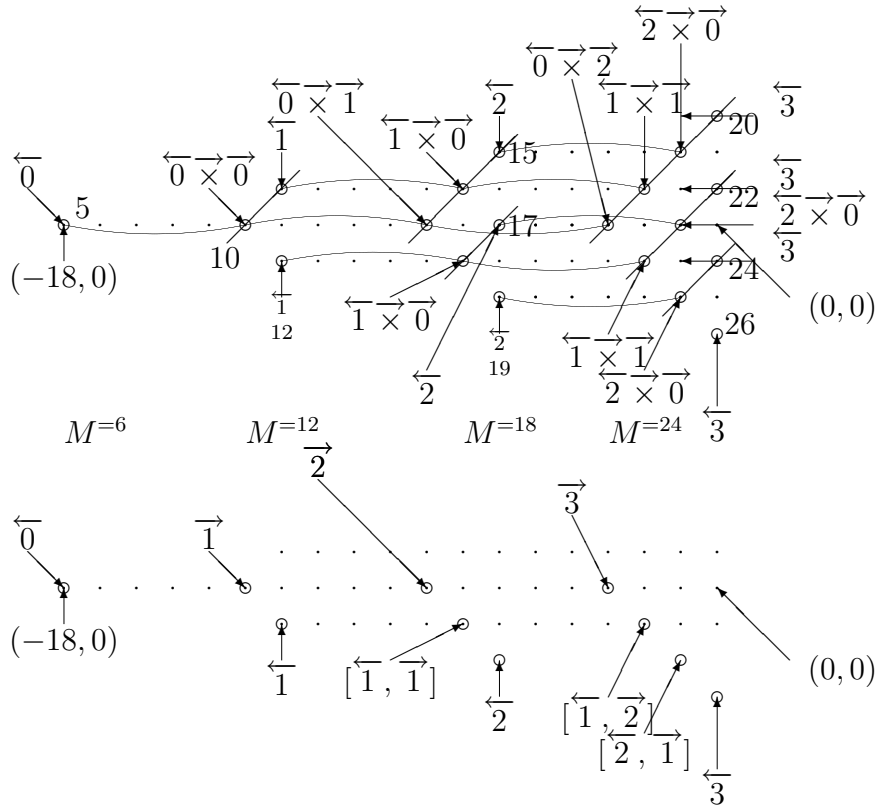


FIGURE 9. La figure illustre les théorèmes (5.4.4) et (5.4.7) dans le cas $g = 6$ et $s = 4$, où on représente en (i, k) les $h^i gr_k$ en indiquant le support de la forme $\overline{X}_{U^p, m}^{(24-6r)}$ avec $1 \leq r \leq 4$, la représentation associée et le poids. Concrètement quand on écrit en (i, k) , π , il faut lire $j_1^{\geq 6r} HT(6, r, \pi_v) \pi \otimes \text{rec}_{F_v}^{\vee}(\pi_v) | \cdot |^{-(23+i+k)/2}$. Le dessin du bas est le terme E_2 et donc l'aboutissement de la suite spectrale (5.1.10).

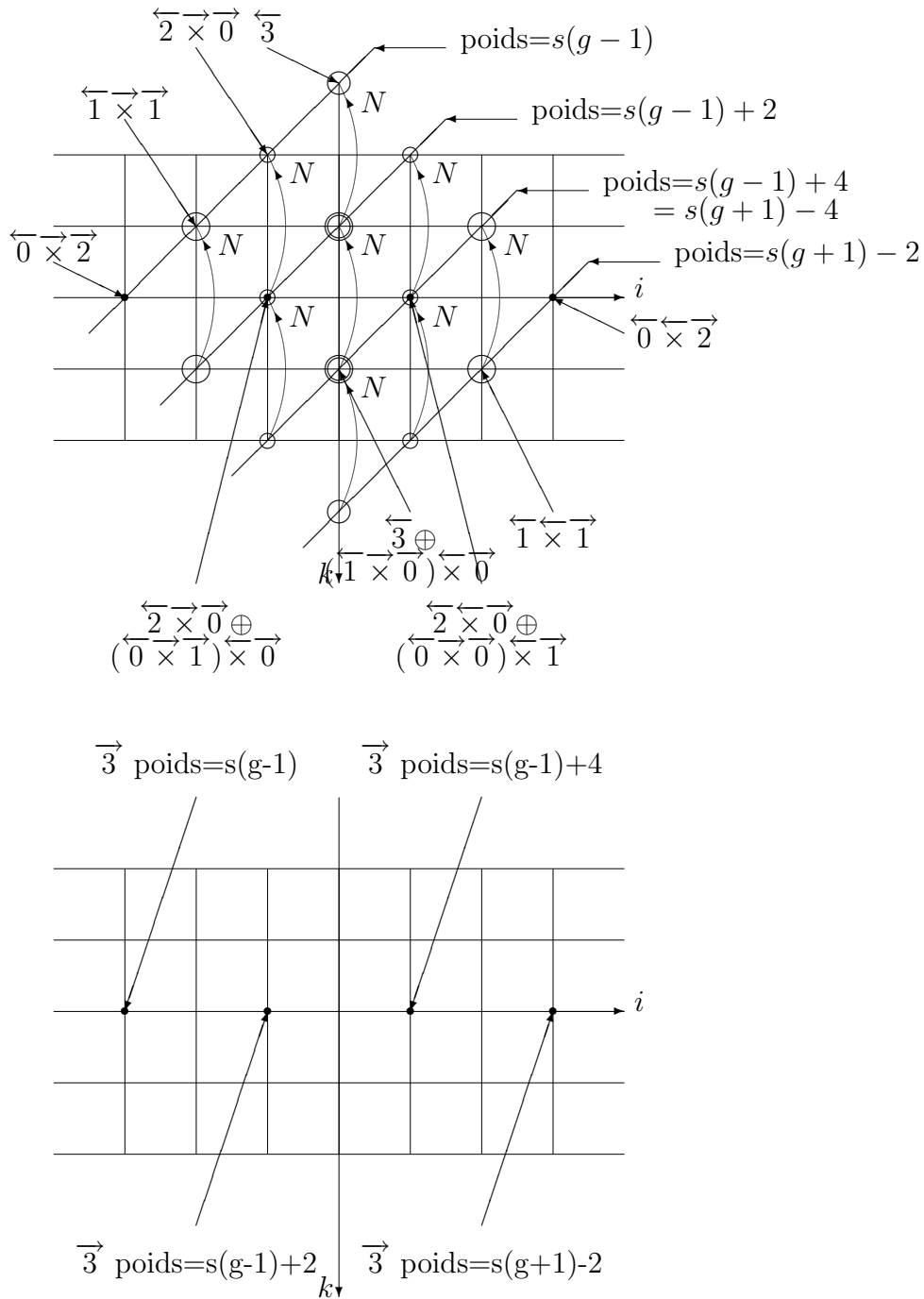


FIGURE 10. $H^i(\text{gr}_{k,\rho_\infty})[\Pi^{\infty,v}]$ pour $\Pi_v \simeq \text{Speh}_4(\pi_v)$ avec π_v une représentation cuspidale de $GL_g(F_v)$. Le dessin du bas représente le terme E_2 et donc l'aboutissement de la suite spectrale.

Références

- [1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [2] P Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3) :573–629, 1999.
- [3] H. Carayol. Nonabelian Lubin-Tate theory. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, volume 11 of *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [4] V. G. Drinfel’d. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 136(94) :594–627, 1974.
- [5] Gerd Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 of *Contemp. Math.*, pages 115–129. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [6] M. Harris, R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [7] Michael Harris and Jean-Pierre Labesse. Conditional base change for unitary groups. *Asian J. Math.*, 8(4) :653–683, 2004.
- [8] Guy Henniart. Sur la conjecture de Langlands locale pour GL_n . *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 13(1) :167–187, 2001. 21st Journées Arithmétiques (Rome, 2001).
- [9] Tetsushi Ito. Weight-monodromy conjecture for p -adically uniformized varieties. *Invent. Math.*, 159(3) :607–656, 2005.
- [10] R.E. Kottwitz. Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.*, 275(3) :365–399, 1986.
- [11] R.E. Kottwitz. Points on some Shimura varieties over finite fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(2) :373–444, 1992.
- [12] G. Laumon, M. Rapoport, and U. Stuhler. \mathcal{D} -elliptic sheaves and the Langlands correspondence. *Invent. Math.*, 113(2) :217–338, 1993.
- [13] J. Lubin. Canonical subgroups of formal groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 251 :103–127, (1979).
- [14] P. Schneider and U. Stuhler. The cohomology of p -adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105(1) :47–122, 1991.
- [15] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l’Université de Nancago, No. VIII.
- [16] Yoshida T. Taylor R. Compatibility of local and global langlands correspondences. *Preprint*, 2005.
- [17] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. II. On irreducible representations of $GL(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2) :165–210, 1980.