Pierre Lelong : une œuvre fondatrice en analyse complexe et en géométrie analytique

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I, Institut Fourier
et Académie des Sciences

Ma première rencontre avec Pierre Lelong remonte à 1977, année où j'ai commencé à suivre son "Séminaire d'Analyse" parisien, coorganisé avec Henri Skoda à partir de 1976. C'est aussi en 1977 que j'ai bénéficié de quelques-uns de ses cours sur la théorie des fonctions plurisousharmoniques et des courants positifs, à la suite d'un premier enseignement de DEA sur l'analyse complexe donné l'année précédente par Henri Skoda. Ces premiers contacts ont, c'est le moins qu'on puisse dire, orienté durablement toute ma carrière ultérieure. En réalité, je n'ai presque jamais quitté ces théories fondamentales initiées par Pierre Lelong au cours des années 1940 et 1950 ([Lel42], [Lel57]) : elles s'appliquent merveilleusement à de vastes domaines des mathématiques comme la théorie des nombres ou la géométrie algébrique, et même si de nombreux spécialistes mondiaux les ont explorées intensivement depuis des décennies, la plupart des experts s'accordent à dire qu'il reste encore beaucoup à faire !

Quelques années plus tard, lorsque j'ai passé ma thèse d'État en 1982, j'ai eu le privilège d'être invité au domicile privé de Pierre Lelong, et c'est là sans doute que j'ai fait plus ample connaissance avec un autre aspect important de sa carrière : la mise en place de la réforme de l'enseignement supérieur et de la recherche, en tant que conseiller scientifique auprès du Général de Gaulle (1959–1961). J'ai été très impressionné par la culture politique de Pierre Lelong – tout autant que par le nombre inhabituel d'ouvrages de sciences politiques qui figuraient dans sa bibliothèque personnelle. À l'heure ou l'Université connaît une période très difficile dans notre pays, je ne peux m'empêcher de penser que la France a eu beaucoup de chance au début des années 1960, dans une période certes économiquement bien plus favorable, de bénéficier des conseils éclairés de personnalités scientifiques aussi éminentes que Pierre Lelong. La France a connu alors une phase de développement scientifique et technologique prolongée, en même temps qu'une forte progression de ses universités ; on aimerait que les gouvernements européens d'aujourd'hui aient la volonté et la sagesse de redonner à la science le rôle primordial qui est de guider la société – et de s'appuyer en conséquence sur l'expertise de la communauté scientifique plutôt que sur une technocratie souvent repliée sur elle-même et chaque année plus envahissante !

Même s'il ne s'agit peut-être pas de la partie la plus centrale de son œuvre mathématique, je voudrais ici évoquer un article de Pierre Lelong qui me semble avoir eu beaucoup de retombées. Il s'agit d'un texte intitulé *Éléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés*, paru dans le Séminaire d'Analyse 1971/1972 [Lel71]. En voici le premier résultat principal.

Théorème 1. *Soit M un ensemble analytique de codimension complexe p, irréductible, sur une variété analytique connexe X, dénombrable à l'infini. Alors le courant d'intégration $[M]$ est extrémal dans le cône des courants positifs fermés de bidegré (p, p) sur X.*

À la suite de cet énoncé, Pierre Lelong observait que la plupart des autres exemples classiques connus de courants n'étaient pas extrémaux, notamment ceux issus des fonctions convexes ou des fonctions jauge lisses, et il concluait: "*Il est probable que le Théorème* 1 *ne donne pas tous les éléments extrémaux dans le cône des courants positifs fermés ; c'est là une question importante de géométrie complexe encore ouverte*". Je me rappelle encore un échange intervenu à Jussieu où Pierre Lelong a évoqué oralement cette question. Stimulé par ces observations et par une conversation ultérieure avec Jean-Louis Verdier, je devais me rendre compte au début des années 1980 qu'un énoncé aussi restrictif sur les éléments extrémaux aurait entraîné une formulation "trop forte" de la conjecture de Hodge, via le théorème de représentation de Choquet ; il en résulte qu'il devait exister des éléments extrémaux autres que les courants d'intégration sur les ensembles analytiques irréductibles, et j'ai trouvé peu après un exemple explicite de tel courant de bidegré $(1,1)$ dans le plan projectif complexe [De82]. D'autres contre-exemples apparurent ensuite dans la théorie des systèmes dynamiques holomorphes de plusieurs variables : beaucoup de courants positifs invariants produits par voie dynamique sont des courants extrémaux, et leur support est en général seulement un ensemble fractal ; c'est le cas par exemple pour le courant $\lim_{k\to+\infty} d^{-k}\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|P^k(z)|$, où P^k est l'itéré k-ième d'un endomorphisme polynomial P de degré $d>1$ de l'espace projectif, le support d'un tel courant étant un ensemble de type Julia [Sib99]. La dynamique des endomorphismes "hyperboliques" de certaines surfaces algébriques, surfaces K3 en particulier, donne également lieu à de tels courants invariants [Ca03].

Un autre énoncé fondamental de l'article précité [Lel71] est le suivant.

Théorème 2. *Si G est un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, le cône positif engendré sur les rationnels par les fonctions de la forme* $\log|f|$*, où f est holomorphe dans G, est dense dans le cône des fonctions plurisousharmoniques sur G.*

Corollaire. *Si de plus $H^2(G,\mathbb{R})=0$, le cône positif engendré sur les rationnels par les courants d'intégration $[D]$ sur les diviseurs irréductibles dans G est dense dans le cône des courants positifs fermés de type $(1,1)$ sur G.*

La preuve initiale de Lelong repose sur l'usage de la théorie des fonctions holomorphes sur un ouvert de Hartogs de la forme $|w|<e^{-\varphi(z)}$. Si φ est plurisousharmonique et si z décrit un domaine pseudoconvexe, on sait que l'ouvert de Hartogs est également pseudoconvexe ; par conséquent, il existe une fonction holomorphe $F(z,w)$ dont cet ouvert est le domaine d'existence. L'approximation de la fonction φ par des logarithmes de fonctions holomorphes $f_j(z)$ s'obtient alors en appliquant la formule de Hadamard pour calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(z)w^k$ de $F(z,w)$. Le corollaire s'obtient quant à lui au moyen de l'équation fondamentale dite de "Lelong-Poincaré", qui stipule que pour toute fonction holomorphe F le courant $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|F|$ s'identifie au courant d'intégration $[Z_F]$ sur le diviseur des zéros de F.

Ces énoncés d'approximation des courants sont aujourd'hui au cœur de la géométrie analytique. En remplaçant le théorème d'existence d'une fonction définissante et la formule de Hadamard par des résultats plus puissants, à savoir le théorème de prolongement L^2 de Ohsawa-Takegoshi ([0T87]), on obtient des énoncés plus précis dans lesquels les multiplicités des diviseurs mis en jeu convergent uniformément vers les "nombres de Lelong" du courant à approximer. On dispose ainsi d'un outil très puissant qui permet de démontrer par voie analytique de nombreux résultats géométriques – par exemple, le théorème de Siu sur l'analyticité des ensembles de niveau associés aux nombres de Lelong des courants positifs fermés [Siu74]. Dans le domaine de la géométrie algébrique, une autre conséquence de ce type de techniques est l'invariance des plurigenres des variétés projectives lisses par déformation arbitraire ([Siu00], [Pa07]) ; ce dernier énoncé, s'appuie sur le théorème d'Ohsawa-Takegoshi et sur un raisonnement de compacité pour les courants positifs de type $(1,1)$; à ce jour, il ne possède d'ailleurs pas de démonstration algébrique, bien que l'énoncé ne mette en jeu que des objets algébriques ! Enfin, parmi les applications à la théorie des nombres, on peut citer par exemple le théorème de Bombieri sur les valeurs algébriques de fonctions méromorphes de plusieurs variables satisfaisant des équations différentielles algébriques [Bo70], [Sk76], [Lel79]. La preuve, là encore, exploite la compacité des courants de type $(1,1)$ dans des classes de courants d'ordre fini, en conjonction avec les estimations L^2 de Hörmander pour l'opérateur $\overline{\partial}$.

En introduisant les "objets souples"(*) que sont les fonctions plurisousharmoniques et les courants positifs, Pierre Lelong a permis l'émergence de techniques fécondes qui ont abouti à des formulations effectives fortes de nombreux énoncés de géométrie analytique, algébrique ou arithmétique, là où n'existaient souvent que des énoncés qualitatifs. Pierre Lelong était parfaitement conscient de cette dimension quasi-philosophique de son œuvre, et il a posé lui-même les jalons les plus fondamentaux de ses profondes implications.

Références

[Bo70] Bombieri, E., *Algebraic values of meromorphic maps*, Invent. Math. **10** (1970) 267–287 ; Addendum, Invent. Math. **11** (1970) 163–166.

[Ca03] Cantat, S., *Dynamique des automorphismes des surfaces* K3, Acta Math. **187** (2001) 1–57.

[De82] Demailly, J.-P., *Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge*, Invent. Math. **69** (1982) 347–374.

[Lel42] Lelong, P., *Définition des fonctions plurisousharmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **215** (1942) p. 398 et p. 454.

[Lel57] Lelong, P., *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957) 239–262.

[Lel68] Lelong, P., *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New York (1968).

[Lel71] Lelong, P., *Éléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés*, Springer Lecture Notes in Math. **332** (1973) 112–130.

[Lel73] Lelong, P., *Notice sur les titres et travaux scientifiques*, site de l'Académie des Sciences, `http://www.academie-sciences.fr/academie/membre/Lelong_notice_1973.pdf`.

[Lel79] Lelong, P., *Sur les cycles holomorphes à coefficients positifs dans* $\mathbb{C}^n$ *et un complément au théorème de E. Bombieri*, C. R. Math. Acad. Sc. Canada, vol. 1, n°4 (1979) 211–213.

[OT87] Ohsawa, T., Takegoshi, K., *On the extension of* L^2 *holomorphic functions*, Math. Zeitschrift **195** (1987) 197–204.

[Pa07] Păun, M., *Siu's invariance of plurigenera: a one-tower proof*, J. Differential Geom. **76** (2007) 485–493.

[Sib99] Sibony, N., *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbb{P}^k$, Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), ix–x, xi–xii, 97–185, Panor. Synthèses **8**, Soc. Math. France, Paris (1999).

[Siu74] Siu, Y.T., *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math. **27** (1974) 53–156.

[Siu00] Siu, Y.T., *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type*, Complex Geometry (Göttingen, 2000), Springer, Berlin (2002) 223–277.

[Sko76] Skoda, H., *Estimations* L^2 *pour l'opérateur* $\overline{\partial}$ *et applications arithmétiques*, Séminaire P. Lelong (Analyse), année 1975/76, Lecture Notes in Math. no **538**, Springer-Verlag, Berlin (1977) 314–323.

(*) Cette terminologie est celle-là même employée par Pierre Lelong dans sa notice de travaux à l'Académie des Sciences [Lel73].