**Hommage à Pierre Lelong**

**par Pierre Dolbeault**

J'ai rencontré Pierre Lelong, pour la pemière fois, probablement au printemps 1946, à la garden-party de l'ENS. Bien qu'il ait déjà obtenu des résultats importants sur les fonctions entières et les fonctions plurisousharmoniques et une expérience de l'enseignement universitaire, il se comportait cordialement, comme un ancien, mais pas comme un maître. Cette même année, il devint professeur titulaire à l'Université de Lille. Il a commencé un séminaire d'Analyse à Paris, avec G. Choquet vers cette époque. J'ai suivi le séminaire en 1950-51 et, à la séance de rentrée de 1951, j'ai proposé un titre d'exposé sur un résultat publié en juin. J'ai fait une dizaine d'exposés dans l'un ou l'autre de ces séminaires, ou bien sur commande ou bien pour des résultats personnels jusqu'en 1972.

A cette époque (1950-51), P. Lelong avait des responsabilités à la S.M.F. et il y organisait aussi des conférences. Je me souviens, en particulier, d'un exposé de Lars Hörmander portant sur la division d'une distribution par un polynôme.

Parmi les résultats les plus marquants de Pierre Lelong, je pense d'abord à son théorème d'intégration sur un ensemble analytique puis à la notion qui lui est étroitement associée, de courant positif [Le1 57], [Le2 57].

Il convient avant tout, me semble-t-il, de replacer ici ces travaux de P. Lelong dans la mouvance des préoccupations communes à plusieurs mathématiciens des années 50.

Les points réguliers d'un ensemble analytique complexe, i.e. ceux au voisinage desquels l'ensemble analytique est une variété, constituent une partie dense. Les points singuliers, i.e. non réguliers, forment un sous-ensemble analytique de dimension inférieure.

Un ensemble analytique (réel ou complexe) est triangulable: on a cherché à démontrer cette propriété dans les années 30, mais elle n'a été établie complètement qu'en 1962, par Łojasiewicz.

Par ailleurs, une étude fine de la géométrie des ensembles analytiques a été faite parallèlement par H. Whitney en 1965, à l'aide d'une stratification très élaborée.

Le problème de l'intégration sur un ensemble analytique complexe $W$ paraissait plus abordable car il ne faisait intervenir que la théorie de la mesure et n'exigeait donc pas *a priori* un étude complète ou trop poussée des points singuliers; il a été résolu effectivement par P. Lelong en 1957 en montrant qu'au voisinage des points singuliers, l'aire de la partie régulière *Reg* $W$ de $W$ est localement finie. La démonstration est maintenant très courte, compte tenu de l'inégalité de Wirtinger (1936) (qui fournit, en particulier, une propriété locale de minimalité de l'aire d'une variété analytique complexe). Alors, $W$ définit un courant d'intégration $[W] = \int_{Reg\ W}$. Le courant $[W]$ est $d$-fermé; P. Lelong le démontrait directement mais maintenant cela résulte aussi facilement de la théorie géométrique de la mesure, développée ultérieurement par Federer et Fleming (voir [F 69]) en utilisant les propriétés des courants plats et, particulièrement des courants rectifiables. En outre la démonstration de P. Lelong a introduit de manière naturelle la notion très importante de courant positif.

P. Lelong m'avait donné les épreuves de son article; j'ai passé l'été '57 à le comprendre et à le comparer aux courants résidus qui ne sont, en général, ni positifs, ni même d'ordre 0 (i.e. courants à coefficients mesures). Cela a été l'origine d'une discussion sans fin sur les intérêts respectifs de ces deux types de courants, mais qui n'a pas empêché P. Lelong d'accepter de nombreux exposés sur les résidus.

Rappelons d'abord quelques définitions sur les courants positifs.

Dans $\mathbb{C}^n$ $(z_1, \ldots, z_n)$ ou dans un voisinage de coordonnées d'une variété analytique complexe, on considère les formes différentielles

$$\pi_J = \frac{i}{2} dz_{j_1} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \frac{i}{2} dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{j_p}, \text{pour } J = (j_1, \ldots, j_p) \subset (1, \ldots, n), j_1 < \ldots < j_p$$

Une $(p,p)$-forme différentielle $\alpha$ est dite fortement positive si, localement,

$$\alpha = \sum \lambda_J \pi_J, \text{où } \lambda_J \geq 0$$

Ces formes constituent un cône $S^{p,p}$ dans l'espace des formes de type $(p,p)$.

Un courant $T$ est dit *faiblement positif* ou simplement *positif* si, pour toute forme test $\varphi$ fortement positive, $T(\varphi) \geq 0$.
Exemples:

1) $\varphi$ est une fonction plurisousharmonique équivaut à: le courant $T = id'd''\varphi$ est positif.

2) Pour un ensemble analytique complexe de dimension $p$, le courant $[W]$ est positif.

3) De même, pour une $p$-chaîne holomorphe, (i.e. un courant $T = \sum n_j[W_j]$, où $W_j$ est un ensemble analytique complexe, irréductible, de dimension complexe $p$, $n_j \in \mathbb{Z}$, la somme étant localement finie), la positivité de $T$ est vérifiée si les $n_j$ sont $\geq 0$.

Les succès de la théorie des courants positifs fermés ont déjà été longuement commentés ailleurs. Je voudrais souligner ici un aspect, peut-être moins connu de l'oeuvre de P. Lelong, l'importance de son théorème d'intégration pour le développement de théories voisines apparentées en particulier pour les théorèmes de structure des ensembles analytiques et des chaînes holomorphes.

Le théorème d'intégration sur un ensemble analytique complexe $W$ de dimension $p$ de P. Lelong montre que le courant d'intégration $[W]$ sur $W$ est un courant localement rectifiable (i.e. un courant d'ordre nul, limite pour la masse de chaînes de classe $C^1$), $d$-fermé, de bidimension $(p,p)$ et positif. Plus généralement, il en est de même d'une $p$-chaîne holomorphe $T = \sum n_j[W_j]$ , $n_j \in \mathbb{Z}$, (positivité mise à part).

On désigne par $\mathcal{R}^{loc}_{(p,p)}(\Omega)$ l'espace des courants localement rectifiables de $\Omega$, de bidimension $(p,p)$. La réciproque du théorème de P. Lelong a été établie, en 1971 par J. King [K 71]: soit $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(p,p)}(\Omega)$ un courant positif, avec $dT = 0$, alors $T$ est une $p$-chaîne holomorphe positive.

Plus généralement, R. Harvey et B. Shiffman [HS 74] ont établi : soit $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(p,p)}(\Omega)$, avec $dT = 0$, tel que $\mathcal{H}^{2p+1}(spt\ T) = 0$, (où $\mathcal{H}^{2p+1}$ est la mesure de Haussdorff $(2p+1)$-dimensionnelle ), alors $T$ est une $p$-chaîne holomorphe. B. Shiffman [S 86] a pu supprimer la condition sur la mesure du support dans le cas d'une hypersurface, ce qui ramène la condition à $\mathcal{H}^{2p+3}(spt\ T) = 0$.

H. Alexander a éliminé la condition sur la mesure du support, obtenant ainsi le résultat définitif :

Théorème.- *Soit* $T \in \mathcal{R}^{loc}_{(p,p)}(\Omega)$, *avec* $dT = 0$, *alors* $T$ *est une* $p$*-chaîne holomorphe.*

Les démonstrations de Harvey et Shiffman consistent à se ramener, par projection, au cas d'une hypersurface, puis à construire la chaîne holomorphe à l'aide d'une fonction méromorphe multiforme.

La démonstration d'Alexander porte d'abord sur le cas $p = 1$, ce qui permet de traiter *spt* $T$ à l'aide des techniques des algèbres uniformes ([Bi 64], [Wr 76]), d'utiliser, pour $p = 1$, le théorème de structure de Federer [F 69] pour les courants entiers de dimension réelle 1, puis d'achever la démonstration par récurrence sur $p$, en utilisant le tranchage des courants rectifiables.

Une autre suite au théorème de Lelong a été la démonstration d'un résultat semblable pour les ensembles semi-analytiques par Miguel Herrera [H 65].

Mais P. Lelong, en plus de ses activités mathématiques, aimait tout particulièrement la "Chose Publique" et, en conséquence, assumer des responsablités collectives.

Je citerai en premier la création de la Commission des thèses. Dans les années '50, quand une thèse d'état était déposée, l'annonce en était affichée pendant deux mois, avec la possibilité d'en consulter le texte intégral et de le critiquer éventuellement; une thèse de troisième cycle était soutenue dès que le jury le décidait. A la suite d'une difficulté qu'il avait constatée dans une thèse non encore soutenue, Pierre Lelong a proposé la création d'une commission chargée d'examiner les textes présentés en vue du doctorat d'État avant d'autoriser la soutenance. Cette mesure est entrée en vigueur dans les universités françaises, à partir des années '80 sous la forme de *commission de formation doctorale*, en charge des thèses et des habilitations à diriger des recherches.

Puis j'évoquerai le laboratoire d' Analyse Complexe et Géométrie. P. Lelong a fait des cours d'été au CIME, à Varenna en 1963 et au Séminaire de l'Université de Montréal en 1967, sur les courants positifs et ce qu'il fallait savoir sur les fonctions plurisousharmonique, ce qui a donné lieu à plusieurs traités. Peu après, il a parlé plusieurs fois à l'Université de Poitiers de ces sujets et des densités, préliminaires aux "nombres de Lelong". Il avait, à titre personnel une secrétaire du CNRS qui préparait des textes mathématiques, en particulier, pour la publication du séminaire d'Analyse. Depuis longtemps, il souhaitait obtenir du CNRS un laboratoire associant des équipes de province. Au début des années '70, cela sembla possible, un laboratoire de Paris 7 associé au CNRS ayant été créé en 1973. Pierre Lelong, Paul Malliavin et moi avons proposé la création d'un laboratoire d'Analyse Complexe et Géométrie pour l'Analyse en dimension infinie qui occupait beaucoup Lelong et ses élèves, la Géométrie Riemannienne qui intéressait Paul Malliavin et la Géométrie Analytique réelle ou complexe, sujets de mon groupe de recherche. Le laboratoire a été créé le 01.01.1974; j'en fus directeur jusqu'en 1982, avant M. Hervé, puis C. Peskine qui fédéra les formations de recherche mathématique de Paris 6 et Paris 7 associées au CNRS en ce qui devint l'Institut de Mathématiques de Jussieu actuel.

Je terminerai par le rappel de souvenirs qu'il racontait volontiers : vers la la fin des années 30 probablement, il disait avoir été très malade avec processus vital engagé et avoir voulu fréquenter l'Institut des Sciences Politiques de Paris.

Bien des années après, il fut Conseiller technique (Recherche scientifique, Education nationale et Santé publique) au Secrétariat général de la Présidence de la République (08.01.59-08.01.61). Il avait été introduit par son camarade de l'Ecole Normale Supérieure, Georges Pompidou. Il a alors présenté un projet de conventionnement de l'enseignement libre qui fut adopté par le général de Gaulle et qui est encore appliqué.

Il présida plusieurs Commissions nationales importantes dont la Commmission de la recherche scientifique du IVe Plan (1962-1963-04.04.1964) et le Comité Mathématiques pour la préparation du Ve Plan, 1964-1966.

Dans ces fonctions, il a participé à la création de grands organismes comme l'IRIA de la plus haute importance encore aujourd'hui pour les Mathématiques Appliquées et l'Informatique.

Avec Pierre Lelong disparaît à la fois un grand mathématicien et un universitaire profondément attaché au service de l'Etat.

## Références


[Al 97] H. Alexander, Holomorphic chains and the support hypothesis conjecture, J. of the Am. Math. Soc., **10** (1997), 123-138.

[Bi 64] E. Bishop, Conditions for the analyticity of certain sets, Mich. Math. J. **11** (1964), 289-304.

[F 69] F. Federer, Geometric measure theory, Grundlehren der Math. Wiss., **285**, Sringer Verlag,

[K 71] J. King, The currents defined by analytic varieties, Acta Math. **127** (1971), 185-220.

[HS 74] R. Harvey and B. Shiffman, A characterization of holomorphic chains, Ann. of Math. **99** (1974), 553-587.

[H 65] M. Herrera, Intégration sur un ensemble semi-analytique. (French) C. R. Acad. Sci. Paris 260 1965 763-765. (Reviewer: L. Bungart), 32.25 (32.50)

[L 57] P. Lelong, Integration of a differential form on an analytic complex subvariety, Proc. Nat. Ac. of Sciences **43**,(Fev.1957) 246-248.

[Le 57] P. Lelong, Intégration sur un ensemble analytique complexe, Bull. S.M.F., **85**, (1957), 239-262.

[S 86] B. Shiffman, Complete characterization of holomorphic chains of codimension one, Math. Ann. **274** (1986), 233-256.

[Wr 76]) J. Wermer, Banach Algebras and several complex variables, $2^{nd}$ ed., Springer Verlag, New York; 1976.