# Pierre Lelong : un mathématicien et un homme au service de l'État

Henri Skoda

J'ai rencontré pour la première fois Pierre Lelong peu avant les événements de mai 1968 au séminaire qu'il organisait déjà à l'Institut Henri Poincaré avec François Norguet. Alors étudiant en 3ème cycle, j'y venais sur le conseil de mon directeur de thèse, André Martineau, y voir "l'état de l'art" dans le domaine des fonctions holomorphes de plusieurs variables. A l'époque, les ordinateurs individuels et internet n'existaient pas. Les textes étaient tapés sur des machines à écrire avec un double au papier carbone. Le téléphone et la télévision étaient encore un luxe. Le rôle des séminaires pour la communication entre mathématiciens et la diffusion des résultats était donc infiniment plus important qu'il ne l'est à l'heure actuelle. Leur nombre était réduit et l'audience du Séminaire de P. Lelong et F. Norguet était impressionnante pour le tout jeune chercheur que j'étais, à la fois par la qualité et le nombre de ses participants. Henri Cartan, par exemple, y venait régulièrement. Dès octobre 1968, j'abordais pour mon travail de thèse l'étude des travaux de Pierre Lelong, tout particulièrement ceux sur les zéros des fonctions entières dans $\mathbb{C}^{\mathbf{n}}$. J'y découvris, d'une part, l'étude détaillée des propriétés de la famille des fonctions plurisousharmoniques ([Le 45]) (i.e. les fonctions semi-continues supérieurement dont la restriction à chaque droite complexe est sousharmonique) qui englobait à la fois les fonctions convexes et les fonctions $\log|f|$ où $f$ est une fonction holomorphe et, d'autre part, la notion de courant positif fermé ([Le 69]) (i.e toutes les mesures associés naturellement à ce courant par la structure complexe sont positives). Dès 1953, P. Lelong ([Le 57]) avait démontré qu'on pouvait intégrer une forme différentielle sur un ensemble analytique complexe comme sur une variété. Le courant d'intégration sur un ensemble analytique devenait ainsi l'exemple fondamental de courant positif fermé et justifiait l'intérêt de ce nouveau concept. Comme pour les distributions de L. Schwartz et les courants de G. de Rahm, la régularisation par convolution de ces courants positifs fermés fournissait alors des formes différentielles que l'on pouvait traiter par l'outil souple et puissant du calcul différentiel extérieur. Pour tout courant positif fermé, P. Lelong définissait la densité du courant en un point qui coïncidait avec la notion usuelle de multiplicité dans le cas d'un courant d'intégration sur un ensemble analytique. Cela permettait de traiter les ensembles analytiques de la géométrie complexe par des méthodes d'analyse totalement complémentaires des méthodes algébriques de la théorie des faisceaux et de l'algèbre locale et particulièrement bien adaptées à l'étude des propriétés métriques et quantitatives des ensembles analytiques. La plus grande partie de mes travaux de recherches sont directement liés aux concepts introduits par P. Lelong. J'ai déjà longuement expliqué, dans le texte de la conférence inaugurale du Colloque Européen en l'honneur de Pierre Lelong de septembre 1997 [Sk 00], l'impact considérable de ces concepts sur les développements de l'Analyse Complexe à plusieurs variables et sur la Géométrie Algébrique sur le corps des complexes de 1940 à 1997. Je voudrais insister ici sur certains points. Les concepts de fonction plurisousharmonique et de courant positif fermé de P. Lelong ne pouvaient être pleinement efficaces que si l'on disposait de moyens performants permettant d'approcher une fonction plurisousharmonique par des fonctions holomorphes et, de même, un courant positif fermé par des ensembles analytiques. Les estimations $L^2$ de Lars Hörmander pour l'opérateur $\bar{\partial}$ en 1965 ([Hör 65], [Hör 66]), basées elles-mêmes sur la notion de fonction plurisousharmonique, fournirent ce moyen en prouvant qu'on pouvait approcher de manière très précise une fonction plurisousharmonique donnée $\phi$ sur un domaine pseudoconvexe $\Omega$ par des fonctions holomorphes $F$ telles que $\int_\Omega |F|^2 e^{-\phi}(1+|z|^2)^{-(n+1)} d\lambda < +\infty$ et traiter la plupart des problèmes de l'Analyse Complexe à plusieurs variables par ces estimations $L^2$. Leur efficacité fut décuplée par une remarque fondamentale d'Enrico Bombiéri ([Bom 70]) : la fonction $\phi$ était autorisée à ne plus être nécessairement de classe $C^2$ mais à prendre la valeur $-\infty$ et à avoir des singularités arbitraires. De ce fait, la fonction $F$ s'annulait automatiquement en tous les points où la fonction $\phi$ était suffisamment singulière. A la fonction $\phi$, on pouvait donc associer l'ensemble analytique défini comme l'ensemble des zéros communs aux différentes fonctions $F$ vérifiant l'estimation $L^2$ d'Hörmander et cet ensemble analytique était, en un certain sens, une bonne approximation du courant $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\phi$. On disposait désormais d'une machine extrêmement efficace : à un courant positif fermé, on pouvait associer, à l'aide d'un noyau intégral convenable, une fonction plurisousharmonique, puis un ensemble an-

alytique. Simultanément E. Bombiéri ([Bom 70]) confirmait la profondeur et l'efficacité des idées de P. Lelong en les utilisant comme outil central pour démontrer un théorème important de théorie des nombres dans lequel on construisait l'ensemble algébrique recherché précisément comme ensemble de densité d'un courant (i.e. l'ensemble des points où la densité du courant est supérieure à une constante donnée c). Yum Tong Siu ([Siu 74]) lui aussi perçut immédiatement la portée de ces méthodes et les utilisa pour démontrer son théorème profond de structure d'un courant positif fermé : les ensembles de densité d'un tel courant sont des ensembles analytiques. Les résultats bien meilleurs obtenus ensuite grâce au théorème d'extension holomorphe d'Ohsawa-Takegoshi [Ohs 88] et à celui de cohérence de A. M. Nadel [Nad 89] ont peut-être, quelque peu, occulté le rôle décisif de ce tournant "stratégique" des années 70. Avant les résultats de L. Hörmander et d'E. Bombiéri qui court-circuitaient dans une certaine mesure le théorème de cohérence d'Oka, il paraissait impensable de résoudre par des méthodes $L^2$ et de fonctions plurisousharmoniques, des problèmes intimement liés au singularités locales des idéaux de fonctions analytiques.
Ces idées de P. Lelong avaient été accueillies avec un certain scepticisme dans les années 50-60 : on attendait qu'elles fassent vraiment leurs preuves par rapport aux méthodes algébriques de la théorie des faisceaux. On avait déjà demandé à Pierre Lelong (il aimait le dire) dans les années 30 : "Pourquoi considérer deux variables complexes plutôt qu'une seule comme tout le monde?" J'ignore si quelqu'un lui a demandé dans les années 50, 60, 70 :"Pourquoi utiliser les fonctions plurisousharmoniques, les courants positifs fermés et les estimations $L^2$, alors que la théorie des faisceaux, l'algèbre locale et homologique, les espaces vectoriels topologiques ont déjà tant réalisé et pourront sans doute tout faire?" P. Lelong pensait que l'avenir seul déciderait. Je mis à profit toutes ces idées. D'abord dans ma thèse en 1972 ([Sk 72]), j'étendais aux ensembles analytiques quelconques le travail de P. Lelong relatifs aux hypersurfaces de $\mathbb{C}^\mathbf{n}$. Lui-même avait construit dès 1953 ([Le 64]), l'équivalent dans $\mathbb{C}^\mathbf{n}$ du produit canonique de Weierstrass (i.e une fonction holomorphe F à croissance minimale s'annulant sur un ensemble donné à l'avance de zéros) sous la forme d'un potentiel plurisousharmonique en résolvant dans $\mathbb{C}^\mathbf{n}$, de manière très moderne et originale, l'équation dite désormais de Lelong-Poincaré : $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\log|F| = [X]$ où $[X]$ est le courant d'intégration sur l'hypersurface $X$. Puis en 1975, reprenant la résolution de cette même équation, je caractérisais, en même temps que Gennadi Henkin, les zéros des fonctions de la classe de Nevanlinna dans les domaines stricte-

ment pseudoconvexes de $\mathbb{C}^{\mathbf{n}}$.
Le hasard ou le destin (sans doute aidé par Jean Louis Verdier, directeur des études et Michel Hervé, directeur adjoint de l'Ecole Normale Supérieure) fit que l'un de mes premiers étudiants à mon premier cours de 3e cycle en 1976 fut le tout jeune Jean-Pierre Demailly à qui j'enseignais, à mon tour, les méthodes de Pierre Lelong et de Lars Hörmander. Il reprit immédiatement le flambeau, en étendant et assouplissant la notion de nombre de Lelong ([Dem 87]) et en faisant le lien avec d'autres grands problèmes du moment comme la conjecture de Hodge [Dem 82] et les théorèmes d'annulation numérique.
J'ai assisté depuis à l'épanouissement des idées de P. Lelong. Un nombre sans cesse croissant de mathématiciens s'intéressa à ses travaux qui eurent aussi un impact dans d'autres domaines comme la Géométrie Algébrique avec, par exemple, les résultats profonds de J.P. Demailly sur la conjecture de Fujita ([Dem 93]) et celui de Y.T. Siu ([Siu 98]) sur l'invariance des plurigenres. Citons encore l'apparition de courants positifs fermés dans la théorie des systèmes dynamiques holomorphes à plusieurs variables, à la suite des travaux de Nessim Sibony [Sib 99]. Je suis reconnaissant à Pierre Lelong d'avoir en toute simplicité posé les fondements de tous ces développements mathématiques qui, à mon avis, sont loin d'être achevés.
Je voudrais insister sur le rôle joué par son séminaire. Beaucoup de jeunes chercheurs français ou étrangers y furent invités et purent bénéficier de son audience et de la diffusion de leurs exposés publiés dans les Actes du séminaire chez Springer entre 1957 et 1986, dans la série des Lecture Notes.
J'ai partagé avec Pierre Lelong et Pierre Dolbeault la direction du séminaire d'Analyse Complexe qui, sous des formes diverses, s'est poursuivi jusqu'à nos jours. Puis Gennadi Henkin et Jean-Marie Trépreau se sont associés à la direction du séminaire. A partir d'octobre 2006, avec l'arrivée d'Olivier Bicquard et de Tien Cong Dinh, le séminaire s'est transformé en Séminaire de Géométrie et d'Analyse Complexe et s'est davantage orienté vers la Géométrie Différentielle tout en maintenant une composante importante d'Analyse Complexe.
De temps à autres, il était fréquenté par Henri Cartan et Laurent Schwartz et plus régulièrement par Paul Malliavin et Michel Hervé. L'organisation du séminaire fut l'occasion d'échanges non seulement sur les mathématiques, la Recherche, l'Université mais aussi sur le rôle de l'Administration et de l'Etat dans la Recherche. J'ai immédiatement reconnu dans les propos et la personnalité de Pierre Lelong l'empreinte profonde de la tradition humaniste, renforcée par des études de lettres classiques au lycée, qui donne la priorité

à l'homme sur les idéologies et sur les techniques. C'est dans cet esprit que P. Lelong concevait le service de l'Etat. Pierre Lelong s'y était préparé de longue date en suivant, en complément de son activité de mathématicien, dans les années 30, les cours de l'Institut de Sciences Politiques de Paris.
Dans les années 60, il fut conseiller scientifique du Président de la République, le général Charles de Gaulle, et participa ainsi à l'effort de développement des Universités et de planification de la Recherche. Je pense que son influence fut hautement bénéfique et que nous lui devons encore beaucoup aujourd'hui.
D'autre part, il s'appliqua aussi durant les années 80, à défendre l'Institut Henri Poincaré. En effet, un vide juridique aurait pu permettre l'élimination des mathématiciens de cet institut. Il travailla à l'établissement d'un statut clair de l'IHP préservant les intérêts de toute la communauté mathématique ainsi que ceux des physiciens théoriciens en rattachant administrativement l'IHP à l'Université de Paris 6 pour assurer sa stabilité administrative, juridique et financière.
Je salue avec émotion la mémoire de Pierre Lelong. Avec lui, disparaît non seulement l'un des très grands mathématiciens du XXe siècle dont l'influence se poursuivra encore longtemps mais aussi un universitaire profondément attaché à la promotion des valeurs humanistes et républicaines.

**Références bibliographiques.**

[Bom 70] Bombieri, E., Algebraic values of meromorphic maps, *Invent. Math.*, **10**(1970), 267-287 and addendum, *Invent.Math.*,**11**(1970), 163-166.

[Dem 82] Demailly, J-P., Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge, *Invent. Math.*, **69**(1982), 457-511.

[Dem 87] Demailly, J-P., Nombres de Lelong généralisés,théorèmes d'intégralité et d'analyticité. *Acta Math.*,**159**(1987),153-169.

[Dem 93] Demailly, J-P., A numerical criterion for very ample line bundles, *J. Differential Geom.*, **37**(1993), 323-374.

[Hör 65] Hörmander, L., $L^2$ Estimates and existence theorem for the $\bar{\partial}$ operator. *Acta Math.*, **113**(1965), 89-152.

[Hör 66] Hörmander,L., *An introduction to Complex Analysis in several variables*, 1966, 3nd edition, *North Holland Math.Libr.*, Vol 7, Amsterdam, London, 1990.

[Le 45] Lelong, P., Les fonctions plurisousharmoniques. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris*, **62**(1945), 301-338.

[Le 57] Lelong, P., Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France*, **85**(1957), 239-262.

[Le 64] Lelong, P., Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbb{C}^{\mathbf{n}}$, *Jour. d'Analyse (Jerusalem)*, **12**(1964), 365-406.

[Le 69] Lelong, P., *Plurisubharmonic functions and positive differential forms,* Gordon and Breach, New-York, and Dunod, Paris, 1969.

[Nad 89] Nadel, A.M., Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **86** (1989), 7299–7300 and *Annals of Math.*, **132** (1990), 549–596.

[Ohs 88] Ohsawa, T., On the extension of $L^2$ holomorphic functions, II, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **24** (1988), 265–275.

[Sib 99] Sibony, N., Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^{\mathbf{k}}$, Dynamique et Géométrie complexe (Lyon1997), ix-x, xi-xii, 97-185, *Panor. et Synthèses* **8**, Soc.Math. France, Paris (1999).

[Siu 74] Siu, Y.T., Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Invent. Math.*, **27**(1974), 53-156.

[Siu 98] Siu, Y.T., Invariance of Plurigenera, *Invent. Math.*, **134** (1998), 662-673.

[Sk 72] Skoda, H., Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^{\mathbf{n}}$, *Bull. Soc. Math. Fr.*, **100**(1972), 353-408.

[Sk 00] Skoda, H., Présence de l'oeuvre de P. Lelong dans les grands thèmes de recherche d'aujourd'hui, *Complex Analysis and Geometry, International Conference in Honor of Pierre Lelong, (1997)*, Progres in Mathematics, vol. 188, Basel, Boston, Berlin. Birkhäuser (2000), 1-30.