Dualité étrange, sur les surfaces.

Joseph Le Potier

Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7
2, Place Jussieu, Case Postale 7012
75251 Paris Cedex 05

Version provisoire 18.11.05

Les phénomènes dits de dualité étrange mettent en relation des espaces de sections de fibrés vectoriels inversibles sur les espaces de modules de fibrés vectoriels (ou faisceaux algébriques cohérents) semi-stables sur une variété algébrique projective X. Le premier exemple connu est dû à Beauville [2], pour les fibrés de rang 2 sur une courbe algébrique, puis à Beauville, Narasimhan et Ramanan [3] en rang supérieur : si on désigne par $\mathrm{SU}(r)$ l'espace de modules des classes d'équivalence de fibrés vectoriels semi-stables de rang r de déterminant trivial sur une courbe algébrique projective lisse C, on sait d'après un célèbre théorème de Drézet et Narasimhan [6] que le groupe de Picard de $\mathrm{SU}(r)$ est un groupe abélien libre de rang un ; le générateur ample de $\mathrm{Pic}(\mathrm{SU}(r))$ s'appelle le fibré déterminant et est noté $\mathcal{D}$. Ces auteurs ont ainsi mis en évidence une dualité entre l'espace vectoriel des sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{SU}(r), \mathcal{D})$ des sections du fibré déterminant $\mathcal{D}$ sur l'espace de modules $\mathrm{SU}(r)$ et l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathrm{J}^{g-1}, \mathcal{O}(r\Theta))$ des sections du fibré associé au diviseur $r\Theta$ sur la jacobienne J^{g-1} des fibrés inversibles de degré $g-1$: on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{J}^{g-1}, \mathcal{O}(r\Theta))^* \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{SU}(r), \mathcal{D})$$

Cet isomorphisme, dit étrange, peut être décrit en considérant l'application rationnelle

$$\varphi : \mathrm{SU}(r) \dashrightarrow |r\Theta|$$

qui associe à la classe d'équivalence d'un fibré vectoriel semi-stable E le diviseur des fibrés inversibles $\mathrm{L} \in \mathrm{J}^{g-1}$ tels que $\mathrm{H}^0(\mathrm{E} \otimes \mathrm{L}) \neq 0$. Par ce morphisme, l'image réciproque du fibré hyperplan $\mathcal{O}(1)$ est la restriction du fibré déterminant $\mathcal{D}$, ce qui fournit le morphisme ci-dessus. Une telle dualité devrait pouvoir s'étendre en une dualité

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{U}(k, k(g-1)), r\Theta)^* \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{SU}(r), \mathcal{D}^{\otimes k})$$

où $\mathrm{U}(k, k(1-g))$ désigne l'espace de modules des classes de fibrés semi-stables de rang k et de degré $k(1-g)$ (avec déterminant variable) et Θ le diviseur theta généralisé sur $\mathrm{U}(k, k(g-1))$, défini par les classes de fibrés vectoriels F tels que $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}) \neq 0$. La formule de Verlinde permet de calculer la dimension de chacun des deux membres et de vérifier que ces deux dimensions sont bien égales, mais à ma connaissance, ceci n'est pas démontré dans le cas général.

On examine ici le cas des espaces de modules de faisceaux semi-stables sur une surface projective complexe lisse X. La construction du morphisme étrange n'est pas nouvelle : dans le cas particulier du plan projectif, elle est décrite dans l'article de Danila [8] ; la construction dans le cas général en est très proche, aussi nous limitons ici à une esquisse cette construction. Nous ferons cependant usage, contrairement à l'article [8] des catégories dérivées et des foncteurs dérivés, notamment pour les foncteurs produits tensoriels et images directes.

On supposera en outre que la surface X est simplement connexe : dans ce cas, quand on fixe les classes de Chern des faisceaux semi-stables F considérés, ou ce qui revient au même la classe de Grothendieck $c = c(\mathrm{F})$ dans le groupe de Grothendieck $\mathrm{K_{top}(X)}$, la classe d'isomorphisme du fibré inversible défini par le déterminant $\det \mathrm{F}$ reste inchangée, ce qui simplifie beaucoup la présentation. Dans le cas des surfaces projectives quelconques, il devient nécessaire pour la construction des fibrés inversibles sur l'espace de modules M_c d'introduire pour $c \in \mathrm{K_{top}(X)}$ la notion de polarisation $c-$générique, et on ne considère ici que des modules M_c de faisceaux semi-stables pour une telle polarisation.

1. Contexte général

Soit X une surface algébrique complexe, projective et lisse ; on suppose que X est muni d'un fibré inversible ample $\mathrm{H} = \mathcal{O}_\mathrm{X}(1)$ qu'on appellera polarisation. Comme on l'a déjà dit, on suppose en outre, pour simplifier, que X est simplement connexe.

1.1. La forme quadratique sur $\mathrm{K_{top}(X)}$

Soit $\mathrm{K_{top}(X)}$ l'algèbre de Grothendieck associée aux fibrés vectoriels topologiques complexes sur X ; en tant que groupe abélien, on a un isomorphisme

$$\mathrm{K_{top}(X)} = \mathbb{Z} \times \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$$

l'isomorphisme étant donné par le rang, la première classe de Chern et la caractéristique d'Euler-Poincaré (r, c_1, χ), la caractéristique d'Euler-Poincaré étant donnée en termes des classes de Chern par la formule

$$\chi = r(1 + p_g) + \frac{1}{2}(c_1^2 - \omega_\mathrm{X} c_1) - c_2$$

Le groupe $\mathrm{K_{top}(X)}$ est muni d'une forme quadratique entière définie par

$$\begin{aligned} u \mapsto\ & \chi(u^2) \\ & = 2r\chi + c_1^2 - r^2(1 + p_g) \end{aligned}$$

On désigne par $\langle u, v\rangle = \chi(uv)$ la forme polaire. Si E est un faisceau algébrique cohérent sur X, $c(\mathrm{E})$ désigne la classe de Grothendieck de E.

1.2. Le fibré déterminant $\mathcal{D}_{c,u}$

Soit $c \in \mathrm{K_{top}(X)}$. On désigne par M_c l'espace de modules des classes d'équivalence faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c, relatif à la polarisation fixée $\mathrm{H} = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(1)$. C'est un schéma projectif. Il existe une méthode générale pour construire des fibrés inversibles sur M_c. Considérons une famille plate $(\mathrm{F}(s))_{s\in \mathrm{S}}$ de faisceaux algébriques cohérents paramétrée par un schéma S, et considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}\times\mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{X} \\ \mathrm{S} & \end{tikzcd}$$

On désigne par D(X) (resp. D(S)) la catégorie dérivée des complexes de faisceaux algébriques sur X (resp. S) à cohomologie bornée et cohérente ; cette catégorie est équivalente à la catégorie des complexes bornés de faisceaux algébriques cohérents. Soit $\mathrm{G} \in \mathrm{D(X)}$ un complexe de faisceaux algébriques cohérents sur X. On considère dans la catégorie dérivée D(S) le complexe

$$\mathrm{R\,pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathrm{G})$$

Le complexe produit tensoriel dérivé $\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{G}$ se calcule en choisissant une résolution $\mathrm{L}^\bullet \longrightarrow \mathrm{G}$ de G par un complexe fini de faisceaux localement libres de rang fini : c'est la classe du complexe $\mathrm{K}^\bullet = \mathrm{F} \otimes \mathrm{L}^\bullet$. L'image directe $\mathrm{R\,pr}_{1*}(\mathrm{K}^\bullet)$ se calcule à partir d'une résolution injective $\mathrm{K}^\bullet \longrightarrow \mathrm{I}^\bullet$ et en considérant le complexe $\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{I}^\bullet)$. On obtient ainsi un complexe de faisceaux algébriques à cohomologie cohérente et bornée. En fait, dans la catégorie dérivée D(S), ce complexe est isomorphe à un complexe fini de fibrés vectoriels algébriques sur S. Ceci résulte de l'énoncé suivant :

Lemme 1. — *Soit* $\mathrm{Y} \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$ *un morphisme projectif et lisse, de dimension relative* n, *et* $\mathrm{O_Y}(1)$ *un faisceau inversible relativement ample sur* Y. *Soit* $\mathrm{K}^\bullet$ *est un complexe borné de faisceaux cohérents* S$-$*plats sur* Y. *Dans la catégorie dérivée* D(S), *l'image directe* $\mathrm{R}\pi_*(\mathrm{K}^\bullet)$ *est isomorphe à un complexe borné de fibrés vectoriels sur* S.

Démonstration. Elle se fait en plusieurs étapes.

1. On peut supposer que les faisceaux K^i sont localement libres, que les images directes $\mathrm{R}^q\pi_*(\mathrm{K}^i)$ sont nulles en degré $q < n$, et que cette propriété subsiste après changement de base : autrement dit, étant donné un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{S}' \arrow[r, "f"] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

pour le faisceau $K'^i = O_{S'} \otimes_{O_S} K^i$ obtenu par changement de base on a $R^q\pi'_*(K'^i) = 0$ pour $q < n$.

Tout complexe fini $K^\bullet$ de faisceaux cohérents sur Y, S−plats a une résolution $R^\bullet \longrightarrow K^\bullet$ par un complexe de faisceaux localement libres de rang fini R^i, chacun de la forme $\pi^*(V) \otimes \mathcal{O}_Y(-m)$, où V est un faisceau localement libre sur S et m un entier suffisamment grand. On a alors $R^q\pi_*(R^i) = 0$ pour $q < n$ et tout i, et la même chose après changement de base. Supposons que K^i est nul pour i en dehors de l'intervalle $[a, b]$. Il résulte de l'hypothèse que le complexe $R^\bullet$ est exact en degré $< a$. Si on remplace le complexe $R^\bullet$ par le complexe tronqué $P^\bullet$ défini par $P^i = R^i$ si $i > k$ et $P^k = \ker R^{k+1} \longrightarrow R^{k+2}$ on voit que si $k < a - 1$, l'inclusion $P^\bullet \longrightarrow R^\bullet$ est un quasi-isomorphisme. Donc $P^\bullet$ permet aussi bien le calcul de $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_S}(K^\bullet, \mathbb{C})$ en un point $s \in S$. Alors pour $i > 0$ et tout point $s \in S$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_S}(P^k, \mathbb{C}) =&\mathrm{Tor}_{i-k}^{\mathcal{O}_S}(K^\bullet, \mathbb{C})\\ =&H^{k-i}(K^\bullet(s)).\end{aligned}$$

Ce faisceau est donc nul si $k \leq a$; dans ces conditions, P^k est S−plat, et en outre, en degré $k + i$, la cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow P^k(s) \longrightarrow R^{k+1}(s) \longrightarrow \ \dots \ \longrightarrow R^{k+n+1}(s)$$

sur la fibre $Y(s)$ s'identifie à $H^{k+i}(K^\bullet(s))$. Ce complexe est donc exact si $k + n < a$. Du théorème de syzygies, il résulte que $P^k(s)$ est localement libre. Il résulte de la platitude de P^k que c'est en fait est un faisceau localement libre. Enfin, on a pour $q < n$

$$R^q\pi_*(P^k) \xrightarrow{\sim} R^{q+k}\pi_*(K^\bullet)$$

et si $k < a - n$ le terme de droite est nul. Le même raisonnement vaut pour le faisceau $P'^k = P^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}'_S$ obtenu par changement de base. Ainsi, le complexe $P^\bullet$ qu'on vient de construire convient.

2. Pour tout complexe de faisceaux algébriques cohérents $K^\bullet$ sur Y, il existe un morphisme canonique dans D(S)

$$R\pi_*(K^\bullet) \longrightarrow R^n\pi_*(K^\bullet)[-n].$$

En effet, les images directes de tout faisceau algébrique cohérent B sur Y sont nulles en degré $\geq n+1$. Il en résulte que tout faisceau algébrique cohérent B sur Y a une résolution $B \longrightarrow J^\bullet$ par un complexe de longueur n de faisceaux algébriques π_*-acycliques, c'est-à-dire dont les images directes supérieures sont nulles : il suffit en effet, à partir d'une résolution injective $B \longrightarrow I^\bullet$, de tronquer à l'ordre n en posant $J^k = I^k$ pour $k \leq n-1$, et $J^n = \ker I^n \longrightarrow I^{n+1}$. Le faisceau J^n a ses images directes supérieures nulles. La construction du morphisme naturel dans la catégorie dérivée

$$R\pi_*(K^\bullet) \longrightarrow R^n\pi_*(K^\bullet)[-n]$$

s'obtient en interprétant le terme de gauche comme image directe $\pi_*(\mathrm{T}^\bullet)$ du complexe total $\mathrm{T}^\bullet$ d'un double complexe $\mathrm{J}^{\bullet,\bullet}$ construit de manière standard à partir des résolutions injectives tronquées comme ci-dessus des faisceaux de cobords $\mathrm{Im} : \mathrm{K}^{i-1} \longrightarrow \mathrm{K}^i$ et des faisceaux de cohomologie de $\mathrm{K}^\bullet$. Le morphisme ci-dessus est alors donné par la projection

$$\pi_*(\mathrm{T}^\bullet) \longrightarrow {}''\mathrm{H}^{\bullet,n}(\pi_*(\mathrm{J}^{\bullet,\bullet}))[-n]$$

3. Dans les conditions de 1, les images directes $\mathrm{R}^q\pi_*(\mathrm{K}^p)$ sont nulles pour $q < n$; le morphisme ci-dessus est un isomorphisme dans la catégorie dérivée. Ceci résulte trivialement de la suite spectrale d'hypercohomologie. De plus, pour tout point $s \in \mathrm{S}$ la cohomologie $\mathrm{H}^q(\mathrm{Y}(s), \mathrm{K}^p(s)))$ sur la fibre $\mathrm{Y}(s)$ est nulle si $q \neq n$. Alors l'image directe restante $\mathrm{R}^n\pi_*(\mathrm{K}^i)$ est un faisceau localement libre. ▫

Revenons à notre situation. Le fibré inversible sur S défini par le déterminant

$$\mathcal{D}_{\mathrm{F},\mathrm{G}} = \det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G})[1]$$

a un sens même si S est singulière. La raison du décalage apparaîtra au § 1.3 : quand G est réduit à un faisceau, le fibré inversible ci-dessus a une section naturelle dans les conditions précisées dans ce paragraphe, et non son dual.

Remarque 2. — La construction effective de ce fibré inversible $\mathcal{D}_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ nécessite un choix de résolutions précisées dans la démonstration précédente. Tout autre choix fournit un autre fibré inversible $\mathcal{D}'_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ et un isomorphisme $\mathcal{D}'_{\mathrm{F},\mathrm{G}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$. Ceci résulte du fait qu'un quasi-isomorphisme $f : \mathrm{V}^\bullet \longrightarrow \mathrm{W}^\bullet$ de complexes bornés de faisceaux localement libres de rang fini induit un isomorphisme $\det \mathrm{V}^\bullet \xrightarrow{\sim} \det \mathrm{W}^\bullet$. Ceci se voit immédiatement en remarquant que le cône de f est acyclique, donc de déterminant trivial.

Un isomorphisme $\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$ dans D(S) induit un isomorphisme de fibrés inversibles $\mathcal{D}_{\mathrm{F},\mathrm{G}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{F},\mathrm{G}'}$. De plus, si $f : \mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}$ est un changement de base, on a un isomorphisme fonctoriel en G

$$\theta : \mathcal{D}_{f^*(\mathrm{F}),\mathrm{G}} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{D}_{\mathrm{F},\mathrm{G}}).$$

Lemme 3. — *Soit* $u \in \mathrm{K}(\mathrm{X})$ *la caractéristique d'Euler-Poincaré de* G. *La classe d'isomorphisme du fibré inversible* $\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G})$ *ne dépend que de la classe de Grothendieck* $u \in \mathrm{K}(\mathrm{X})$.

Démonstration. On commence par vérifier ce lemme pour un faisceau algébrique cohérent G. Il suffit dans ce cas de vérifier qu'à une suite exacte de faisceaux algébriques cohérents $0 \longrightarrow \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'' \longrightarrow 0$ sur X est associé un isomorphisme

$$\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G}) \simeq \det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G}') \otimes \det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G}'')$$

La suite exacte ci-dessus fournit un triangle distingué de complexes de faisceaux localement libres

$$\mathrm{R\,pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G}') \xrightarrow{j} \mathrm{R\,pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{R\,pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G}'') \longrightarrow \mathrm{R\,pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G}')[1]$$

Ceci signifie que ce triangle est isomorphe au triangle associé au cône du morphisme j. L'assertion en résulte immédiatement. Dans le cas général, si G est un complexe de longueur ℓ, on se ramène à vérifier l'énoncé par récurrence sur la longueur ℓ en filtrant le complexe G par des sous-complexes de longueur plus petite. □

Remarque 4. — L'isomorphisme de fibrés inversibles associé à la suite exacte courte $0 \longrightarrow \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'' \longrightarrow 0$ ci-dessus est canonique. En effet, elle fournit en fait une suite exacte courte de complexes de faisceaux localement libres sur S, et le cône de j est alors canoniquement isomorphe (dans la catégorie dérivée) à $\mathrm{R\,pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{G}'')$.

Pour $u \in \mathrm{K(X)}$ la construction ci-dessus donne un sens à la formule

$$\lambda_\mathrm{F}(u) = \det(-\,\mathrm{pr}_{1!}(\mathrm{F}.\,\mathrm{pr}_2^*(u)))$$

dans Pic(S). En effet, le produit $\mathrm{F}.\,\mathrm{pr}_2^*(u)$ est la classe dans $\mathrm{K(S{\times}X)}$ du complexe $\mathrm{F}\otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}}\mathrm{G}$, où $\mathrm{G} \in \mathrm{D(X)}$ est un complexe fini de caractéristique d'Euler-Poincaré u de faisceaux algébriques cohérents sur X et $\mathrm{pr}_{1!}(\mathrm{F}.\,\mathrm{pr}_2^*(u)))$ est son image directe dans K(S). La construction ci-dessus montre que cette classe de K(S) provient d'une classe bien déterminée du groupe de Grothendieck $\mathrm{K}^0(\mathrm{S})$ associé aux faisceaux localement libres sur S, de sorte que son déterminant a bien un sens. Par définition, la classe $\lambda_\mathrm{F}(u)$ est la classe d'isomorphisme du fibré inversible $\mathcal{D}_{\mathrm{F,G}}$.

Une famille F paramétrée par S de faisceaux semi-stables sur X (relativement à la polarisation H), S$-$plate, de classe de Grothendieck $c \in \mathrm{K_{top}(X)}$ définit un morphisme dit modulaire $f_\mathrm{F} : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{M}_c$. En général, il n'y aucune raison pour que ce fibré inversible soit isomorphe à l'image réciproque par f_F d'un fibré inversible sur M_c. En effet, si A est un fibré inversible sur S, on a

$$\lambda_{\mathrm{F}\otimes\mathrm{pr}_1^*(\mathrm{A})}(u) = \lambda_\mathrm{F}(u) \otimes \mathrm{A}^{-\langle c,u\rangle}.$$

Puisque le morphisme modulaire associé à la famille $\mathrm{F} \otimes \mathrm{pr}_1^*(\mathrm{A})$ coïncide avec f_F, on voit que ceci impose que le fibré $\mathrm{A}^{\langle c,u\rangle}$ soit trivial.

Théorème 5. — *Soient* $c \in \mathrm{K_{top}(X)}$ *et* $u \in \mathrm{K(X)}$. *On suppose que*

(i) *les classes c et u sont orthogonales*

(ii) *la polarisation est c$-$générique.*

Il existe un fibré inversible $\mathcal{D}_{c,u}$ *sur* M_c *et pour toute famille plate* F *de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c paramétrée par* S, *et tout complexe* $\mathrm{G} \in \mathrm{D(X)}$ *de classe de Grothendieck u un isomorphisme de fibrés inversibles sur* S

$$\alpha : \mathcal{D}_{\mathrm{F,G}} \xrightarrow{\sim} f_\mathrm{F}^*(\mathcal{D}_{c,u})$$

compatible avec les changements de base $\mathrm{S}' \longrightarrow \mathrm{S}$. *A isomorphisme près, le couple* $(\mathcal{D}_{c,u}, \alpha)$ *est caractérisé par cette propriété.*

Pour construire ce fibré inversible, du fait qu'il n'existe pas en général de faisceau universel paramétré par M_c on doit revenir à la construction de l'espace de modules M_c. Ce schéma s'obtient en application la théorie géométrique des invariants de Mumford à un schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}(\mathrm{W}, c)$ où W est un fibré vectoriel polystable convenable sur X sur lequel agit de façon naturelle le groupe réductif $\mathrm{Aut}(\mathrm{W})$; les points de $\mathrm{Hilb}(\mathrm{W}, c)$ sont les faisceaux cohérents quotients de W de classe de Grothendieck c. On dispose sur $\mathrm{Hilb}(\mathrm{W}, c) \times \mathrm{X}$ d'un faisceau universel F paramétré par $\mathrm{Hilb}(\mathrm{W}, c)$ muni d'une action de $\mathrm{Aut}(\mathrm{W})$, ce qui permet de construire un fibré inversible $\mathcal{D}_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ sur ce schéma de Hilbert : si $\mathrm{G} \in \mathrm{D}(\mathrm{X})$ est un complexe borné de caractéristique d'Euler-Poincaré u, ce fibré inversible est défini par $\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{pr}_2^* \mathrm{G})[1]$ et donc muni d'une action naturelle de $\mathrm{Aut}(\mathrm{W})$. L'espace de module M_c est un bon quotient de l'ouvert $\mathrm{Hilb}^{ss}(\mathrm{W}, c)$ des points semi-stables : on est alors confronté alors à un problème de descente à M_c : il faut examiner l'action du stabilisateur d'un point semi-stable, et montrer que cette action est triviale sous les deux hypothèses mentionnées ci-dessus [20].

Pour expliquer ce que signifie générique, plaçons-nous par exemple dans le cas des faisceaux de rang > 0. Rappelons qu'un faisceau algébrique cohérent F de classe de Grothendieck c, de rang[1] $r = r(c) > 0$ est semi-stable relativement à la polarisation H si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

— F est sans torsion

— pour tout sous-faisceau $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ de classe de Grothendieck c', de rang $r' > 0$ on a

$$\frac{\mathrm{P}_{c'}}{r'} \leq \frac{\mathrm{P}_c}{r}$$

où P_c désigne le polynôme de Hilbert [2] de c . Si F est un tel faisceau semi-stable, les faisceaux déstabilisants de F sont les sous-faisceaux F' tels que

$$\frac{\mathrm{P}_{c'}}{r'} = \frac{\mathrm{P}_c}{r}.$$

Parmi ceux-ci, on trouve les sous-faisceaux tels que $\dfrac{c'}{r'} = \dfrac{c}{r}$, mais en général, on ne peut pas affirmer que $\dfrac{c_1'}{r'} = \dfrac{c_1}{r}$. Dire que polarisation est $c-$générique signifie qu'il n'y en a pas d'autre : la situation quand on veut résoudre le problème de descente qui permet de construire le fibré inversible $\mathcal{D}_{c,u}$. n'est pas alors pire que celle qui se présente dans le cas de l'espace projectif.

Quand c est une classe algébrique donnée, il est toujours possible si c est de rang > 0 de trouver une polarisation $c-$générique (*cf.* O'Grady [23]). C'est encore le cas pour les

[1] Pour un faisceau F de dimension un, on demande que F soit pur de dimension un, et on doit remplacer le rang par la multiplicité $\langle c, h\rangle$, où h désigne la classe de Grothendieck d'une section hyperplane

[2] Les polynômes sont ordonnés suivant les puissances décroissantes.

classes de Grothendieck c des faisceaux de dimension 1, si $\chi \neq 0$. Ce n'est plus le cas si $\chi = 0$, et pour définir les faisceaux $\mathcal{D}_{c,u}$, il ne suffit plus de choisir la classe u orthogonale à c, parce que dans ce cas l'espace de modules ne dépend pas de la polarisation. Mais si on choisit en outre u tel que son image dans $\mathrm{K}_{\mathrm{top}}(\mathrm{X})$ soit dans la sous-algèbre engendrée par la classe de la section hyperplane, la construction est encore possible [20].

Proposition 6. — *La classe d'isomorphisme du fibré inversible $\mathcal{D}_{c,u}$ ne dépend que de l'image c^* de u dans $\mathrm{K}_{\mathrm{top}}(\mathrm{X})$.*

Le point clé de la démonstration consiste à vérifier la formule suivante, pour tout cycle $\mathrm{D} \in \mathrm{A}^2(\mathrm{X})$ et toute famille F de faisceaux semi-stables paramétrée par S

$$\lambda_{\mathrm{F}}(\mathrm{D}) = \lambda_{\det \mathrm{F}}(\mathrm{D})$$

où $\det \mathrm{F}$ est la famille de faisceaux inversibles définie par le déterminant : ceci se ramène par dévissage au cas d'une famille F de faisceaux localement libres, et d'un cycle effectif de degré 1. Du fait que la surface est simplement connexe, le fibré inversible $\det \mathrm{F}$ est de la forme $\mathrm{L} \boxtimes \mathrm{M}$ où L et M sont des fibrés inversibles sur S et X respectivement. Ceci entraîne $\lambda_{\det \mathrm{F}}(\mathrm{D}) = \mathrm{L}^{\otimes \deg \mathrm{D}}$. Il en découle la proposition (voir [17]).

1.3. Le morphisme étrange D_{c,c^*}

On considère maintenant deux classes c et $c^* \in \mathrm{K}_{\mathrm{top}}(\mathrm{X})$. On suppose choisie une polarisation à la fois c et c^* générique. Dans les exemples que nous présenterons, la situation est plutôt rassurante, car les espaces de modules M_c et M_{c^*} sont des variétés normales : c'est le cas par exemple pour les espaces de modules de rang > 0 si $p_g = 0$, ou sur une surface quelconque si les classes de Chern c_2 sont assez grandes par rapport au rang et aux premières classes de Chern d'après un théorème de Gieseker et Li. Pourtant, le théorème de de Gieseker et Li n'est pas effectif et ne permet pas de s'assurer que ce choix est compatible avec l'hypothèse (1) ci-dessous. Cette condition de normalité n'est en fait pas indispensable pour définir le morphisme dit étrange.

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) les classes c et c^* sont orthogonales.

(2) Pour tout faisceau semi-stable F de classe de Grothendieck c et pour tout faisceau semi-stable G de classe de Grothendieck c^*, les faisceaux F et G sont transverses, c'est-à-dire

$$\underline{\mathrm{Tor}}_i(\mathrm{F}, \mathrm{G}) = 0$$

pour $i \geq 1$.

(3) Pour tout faisceau semi-stable F de classe de Grothendieck c et pour tout faisceau semi-stable G de classe de Grothendieck c^*, on a

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}) = 0.$$

La condition (2) est toujours satisfaite sauf si l'une des classes c et c^* est de dimension 0. Les conditions (1) et (2) entraînent que

$$\sum_i (-1)^i \dim \mathrm{H}^i(\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}) = 0.$$

La condition (3) est évidemment satisfaite si le faisceau G est de dimension un.

On désigne par $\mathcal{D}_{c,c^*}$ le fibré inversible construit ci-dessus sur M_c associé à un faisceau cohérent fixé G_0 de classe de Grothendieck c^*. D'après la proposition 6, tout autre faisceau cohérent de classe de Grothendieck c^* définit un fibré inversible isomorphe à $\mathcal{D}_{c,c^*}$; alors si les conditions ci-dessus sont satisfaites, chaque point $\mathrm{G} \in \mathrm{M}_{c^*}$ définit une section canonique de $\mathcal{D}_{c,c^*}$ dont le schéma des zéros est porté par les classes des faisceaux F tels que $\mathrm{H}^1(\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}) \neq 0$. Plus précisément, considérons sur le produit $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_{c^*}$ le fibré inversible $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c^*,c}$. Ce fibré satisfait à la propriété universelle suivante, qui le caractérise à isomorphisme près :

Proposition 7. — *Pour toute famille plate* $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_s)_{s \in \mathrm{S}}$ *de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck* c *et toute famille plate* $\mathrm{G} = (\mathrm{G}_s)_{s \in \mathrm{S}}$ *de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck* c^* *paramétrées par* S *on a un isomorphisme*

$$(f_{\mathrm{F}}, f_{\mathrm{G}})^*(\mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c^*,c}) \xrightarrow{\sim} \det(\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}))^*$$

compatible avec les changements de base.

Pour vérifier cette propriété, on commence par construire un fibré inversible $\mathcal{D}$ sur $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_{c^*}$ et un isomorphisme

$$(f_{\mathrm{F}}, f_{\mathrm{G}})^*(\mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \det(\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}))^*$$

compatible aux changements de base.

On prend pour S est le produit des ouverts $\mathrm{Hilb}^{ss}(\mathrm{W}, c) \times \mathrm{Hilb}^{ss}(\mathrm{V}, c^*)$ de points semi-stables qui ont servi à construire M_c et M_{c^*}. On peut alors construire par descente par l'action de $\mathrm{Aut}(\mathrm{V}) \times \mathrm{Aut}(\mathrm{W})$ un faisceau inversible $\mathcal{D}$ sur $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_{c^*}$ tel que

$$(\pi, \pi^*)^*(\mathcal{D}) = \det(\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F} \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{G}))^*$$

où F et G sont les familles universelles paramétrées par ce produit d'ouverts du schéma de Hilbert, et où $\pi : \mathrm{Hilb}^{ss}(\mathrm{W}, c) \longrightarrow \mathrm{M}_c$ et $\pi^* : \mathrm{Hilb}^{ss}(\mathrm{V}, c^*) \longrightarrow \mathrm{M}_{c^*}$ sont les projections canoniques. Le fibré inversible $\mathcal{D}$ obtenu par descente sur $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_{c^*}$ satisfait à la propriété universelle attendue.

Il reste à identifier ce faisceau inversible avec le produit tensoriel externe. Pour ceci, on constate que le morphisme $\mathrm{M}_c \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathrm{M}_{c^*})$ associé à $\mathcal{D}$ est un morphisme constant en choisissant pour F une famille constante : il résulte du théorème 5 que sur les fibres de la projection canonique $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_c^* \longrightarrow \mathrm{M}_c$, la restriction de $\mathcal{D}$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{c^*,c}$. De même sur les fibres de la projection canonique $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_c^* \longrightarrow \mathrm{M}_{c^*}$ la restriction de $\mathcal{D}$ est isomorphe à $\mathcal{D}_{c,c^*}$. Il résulte du lemme suivant que $\mathcal{D}$ est isomorphe au produit tensoriel externe $\mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c^*,c}$.

Lemme 8. — *Soient* M *et* N *deux schémas projectifs complexes et* $\mathcal{D}$ *un fibré inversible sur* $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$ *tel que les morphismes induits* $\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathrm{N})$ *et* $\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathrm{M})$ *soient constants. Alors* $\mathcal{D}$ *est isomorphe au produit tensoriel externe* $\mathrm{A}\boxtimes\mathrm{B}$ *de deux fibrés inversibles sur* M *et* N *respectivement.*

Démonstration. Soit Y un schéma complexe. Le faisceau des éléments inversibles $\mathcal{O}^*_{\mathrm{Y}_{\mathrm{red}}}$ du sous-schéma réduit $\mathrm{Y}_{\mathrm{red}}$ sous-jacent à un schéma Y coïncide avec le faisceau $\mathcal{O}^*_{\mathrm{Y}}$ des éléments inversibles de $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$. Puisque l'espace topologique sous-jacent est le même, le groupe de Picard de Y coïncide avec celui de $\mathrm{Y}_{\mathrm{red}}$. Il en résulte qu'on peut supposer que M et N sont réduits. De plus, on peut supposer que M et N sont connexes. Si B est le fibré inversible induit sur les fibres de la projection $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{M}\times\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{M}$, le faisceau $\mathrm{pr}_{1*}\,\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{pr}_2^*(\mathrm{B}),\mathcal{D})$ est un faisceau inversible A d'après le théorème de semi-continuité. Alors le morphisme canonique $\mathrm{A}\boxtimes\mathrm{B} \longrightarrow \mathcal{D}$ est un isomorphisme sur chaque fibre. Le lemme de Nakayama implique la surjectivité en au voisinage d'un point. Par suite, c'est un isomorphisme. ▫

Proposition 9. — *Le fibré inversible* $\mathcal{D}$ *est muni d'une section canonique* σ_{c,c^*} *dont le schéma des zéros est porté par le fermé des couples* $([\mathrm{F}],[\mathrm{G}])$ *tels que* $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}\otimes\mathrm{G}) \neq 0$.

Démonstration. On se place encore sur le produit $\mathrm{S} = \mathrm{Hilb}^{ss}(\mathrm{W},c)\times\mathrm{Hilb}^{ss}(\mathrm{V},c^*)$, et on considère sur $\mathrm{S}\times\mathrm{X}$ des résolutions à gauche par des complexes de faisceaux localement libres de rang fini, chacun d'eux somme directe de fibrés inversibles suffisamment négatifs le long des fibres de la projection sur S des familles universelles F et G paramétrées par S, équivariante pour l'action de $\mathrm{Aut}(\mathrm{W})\times\mathrm{Aut}(\mathrm{V})$,

$$\mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{F}\ ,\ \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{G}$$

Par platitude, au-dessus de chaque point $s\in\mathrm{S}$ on obtient des résolutions gauches de F_s et G_s respectivement. Les faisceaux F et G sont encore transverses, et le complexe $\mathcal{K} = \mathcal{R}\otimes\mathcal{S}$ est une résolution gauche de $\mathrm{F}\otimes\mathrm{G}$. Le complexe image directe $\mathrm{R}^2\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{R}\otimes\mathcal{S})[-2]$ est un complexe de faisceaux localements libres de rang fini qui est isomorphe dans la catégorie dérivée à $\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F}\otimes\mathrm{G})$. De plus, cette résolution est compatible avec le changement de base : au-dessus de chaque point $s\in\mathrm{S}$, le complexe induit $\mathrm{H}^2(\mathrm{X},\mathcal{R}(s)\otimes\mathcal{S}(s))[-2]$ et isomorphe à $\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X},\mathrm{F}(s)\otimes\mathrm{G}(s))$. Il résulte de la condition (3) que l'on peut construire sur S un complexe équivariant de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_0 \xrightarrow{f} \mathcal{V}_1 \longrightarrow 0$$

isomorphe à $\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{F}\otimes\mathrm{G})[-2]$ dans la catégorie dérivée. En particulier, au-dessus de chaque point $s\in\mathrm{S}$, le noyau de $f(s)$ est isomorphe à $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(s)\otimes\mathrm{G}(s))$ et le conoyau de $f(s)$ à $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}(s)\otimes\mathrm{G}(s))$. Le fibré inversible $\det\mathcal{V}_1\otimes(\det\mathcal{V}_0)^{-1}$ est isomorphe à l'image réciproque de $\mathcal{D}_{c,c^*}\boxtimes\mathcal{D}_{c^*,c}$ par $\pi\times\pi^*$, en tant que fibrés équivariants, et le morphisme $\det f$ en fournit une section invariante ; par suite on obtient une section canonique σ_{c,c^*} de $\mathcal{D}_{c,c^*}\boxtimes\mathcal{D}_{c^*,c}$.

Au-dessus d'un point $s \in \mathrm{S}$, $\det f(s)$ s'annule si et seulement si $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}(s) \otimes \mathrm{G}(s)) \neq 0$, ou ce qui revient au même $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(s) \otimes \mathrm{G}(s)) \neq 0$. ▫

Ceci fournit un élément de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})$ et par suite une application linéaire

$$\mathrm{D}_{c,c^*} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*})$$

appelée *morphisme étrange*.

Question : Ce morphisme est inversible ?

1.4. Interprétation géométrique

Désignons par [1] $|\mathcal{D}_{c^*,c}| = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c}))$ le système linéaire complet associé au fibré inversible $\mathcal{D}_{c^*,c}$. Supposons que les propriétés suivantes soient satisfaites :

(a) les espaces de modules M_c et M_c^* sont intègres ;

(b) la section σ_{c,c^*} n'est pas identiquement nulle.

La section σ_{c,c^*} définit une section du faisceau localement libre $\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c^*,c}) = \mathcal{D}_{c,c^*} \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})$ sur M_c. Par suite on obtient un morphisme de fibrés vectoriels sur M_c

$$\mathcal{D}_{c,c^*}^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{M}_c} \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})$$

et son morphisme transposé

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c^*, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{M}_c} \longrightarrow \mathcal{D}_{c,c^*}.$$

Evidemment, les morphismes de fibrés vectoriels obtenus ne sont pas identiquement nuls.

Définition 10. — *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{M}_c$. *Si la section de* $\mathcal{D}_{c^*,c}$ *définie par* $\sigma_{c,c^*}(\mathrm{F})$ *n'est pas identiquement nulle, l'hypersurface de* M_c^* *définie par son schéma de zéros s'appelle le diviseur de saut de* F.

Ceci fournit une application rationnelle

$$\beta_{c,c^*} : \mathrm{M}_c - - \rightarrow |\mathcal{D}_{c,c^*}|$$

régulière sur l'ouvert U de M_c des points F tels que $\sigma_{c,c^*}(\mathrm{F})$ n'est pas identiquement nulle, qui associe à F son diviseur de saut dans M_c^*. En tant que fibrés quotients sur l'ouvert U du fibré trivial de fibre $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})^*$, on a par définition $\beta^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{D}_{c,c^*}|_{\mathrm{U}}$. Le morphisme obtenu par image réciproque sur les sections

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1)) = \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c^*, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathcal{D}_{c,c^*})$$

[1] Espace projectif des droites de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})$ ou si l'on préfère, espace projectif des hyperplans de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})^*$.

se factorise par le morphisme étrange suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c^*, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \arrow[r, "\mathrm{D}_{c,c^*}"] \arrow[dr] & \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}) \arrow[d] \\ & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathcal{D}_{c,c^*}) \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est le morphisme de restriction. On voit que D_{c,c^*} est injectif si et seulement si l'image de U par β_{c,c^*} n'est pas contenu dans un hyperplan. En échangeant les rôles de c et c^* on obtient en considérant l'application rationnelle

$$\mathrm{M}_{c^*} \dashrightarrow |\mathcal{D}_{c^*,c}|$$

régulière sur un ouvert $\mathrm{U}^* \subset \mathrm{M}_{c^*}$ l'énoncé suivant :

Corollaire 11. — *Le morphisme étrange* D_{c,c^*} *est un isomorphisme si et seulement si l'image de* U *par* β_{c,c^*} *et l'image de* U^* *par* $\beta_{c^*,c}$ *ne sont pas contenus dans un hyperplan.*

La proposition suivante sera utile dans la section 5.

Proposition 12. — *Supposons que le morphisme étrange* D_{c,c^*} *soit inversible. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *Pour tout* $i > 0$*, le morphisme canonique*

$$\mathrm{S}^i\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}) \xrightarrow{\text{can}} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}^{\otimes i})$$

est injectif.

(ii) *L'application rationnelle* $\beta_{c,c^*} : \mathrm{M}_c \dashrightarrow |\mathcal{D}_{c,c^*}|$ *est dominante.*

Démonstration. Sur M_c on a un diagramme commutatif de fibrés vectoriels

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \arrow[d, "\mathrm{D}_{c,c^*}"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}) \arrow[r, "ev"] & \mathcal{D}_{c,c^*} \end{tikzcd}$$

L'application rationnelle β_{c,c^*} est induite par la flèche oblique. Dire que β_{c,c^*} est dominante signifie qu'il n'existe pas de polynôme homogène non nul s'annulant sur son image, autrement dit que le morphisme induit $\mathrm{S}^i\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}^{\otimes i})$ est injectif pour tout $i > 0$. Mais le diagramme commutatif ci-dessus entraîne que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^i\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \arrow[d, "\mathrm{S}^i\mathrm{D}_{c,c^*}"'] \arrow[dr] & \\
\mathrm{S}^i\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}) \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}^{\otimes i})
\end{tikzcd}$$

est lui aussi commutatif. La flèche verticale est un isomorphisme par hypothèse. Donc β_{c,c^*} est dominante si et seulement si le morphisme canonique $\mathrm{S}^i\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}) \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{c,c^*}^{\otimes i})$ est injectif. □

1.5. Exemple

On considère sur le plan projectif l'espace de modules M_n des faisceaux semi-stables de rang 2, et de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = n$: c'est notre espace de modules M_c. On prend pour M_{c^*} l'espace de modules des faisceaux G semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif, tels que $c_1 = 1$ et $\chi = 0$. Un tel faisceau est forcément isomorphe à $\mathcal{O}_\ell(-1)$, où ℓ est une droite de $\mathbb{P}_2$, de sorte que l'espace de modules M_{c^*} est isomorphe au plan projectif dual. Les trois conditions (1), (2), (3) sont satisfaites. Le fibré inversible $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{c,c^*}$ est appelé le fibré déterminant de Donaldson sur M_n. Le fibré $\mathcal{D}_{c^*,c}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(n)$. Le morphisme de dualité étrange fournit donc une application linéaire

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$$

Cette application linéaire a l'interprétation géométrique suivante. Si F est un faisceau semi-stable de rang 2, de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = n$ sur le plan projectif, une droite de saut pour F est une droite ℓ telle que $\mathrm{F}|_\ell \neq \mathcal{O}_\ell^2$; cohomologiquement, ceci signifie que $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}(-1)|\ell) \neq 0$. L'ensemble des droites de saut constitue une courbe β_F de degré n dans le plan projectif dual ; on obtient ainsi un morphisme

$$\beta : \mathrm{M}_n \longrightarrow \mathcal{C}_n = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n)))$$

appelé morphisme de Barth, qui associe à la classe de F la courbe de ses droites de saut. L'image réciproque de $\mathcal{O}(1)$ par le morphisme de Barth est le fibré déterminant de Donaldson ; le morphisme D_{c,c^*} ci-dessus n'est autre que le morphisme transposé

$$\beta^* : \mathrm{H}^0(\mathcal{C}_n, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$$

Théorème 13. — (G. Danila [8]) *Le morphisme étrange* $\beta^* = \mathrm{D}_{c,c^*}$ *est un isomorphisme pour* $n \leq 19$.

2. Le schéma de Hilbert $X^{[n]}$

On suppose que X est une surface projective lisse, simplement connexe. On se fixe un fibré inversible L sur X tel que $L \otimes \omega_X^{-1}$ soit ample. Dans ces conditions, le théorème d'annulation de Kodaira montre que $H^1(L) = H^2(L) = 0$. On considère deux entiers n et $m > 0$ tels que $n + m = \dim H^0(L) = \chi(L)$.

2.1. Les espaces de modules M_c et M_{c^*}

On désigne par $X^{[n]}$ le schéma de Hilbert des sous-schémas de longueur n de X. Le schéma $X^{[n]}$ est propre lisse, irréductible de dimension $2n$. On peut voir aussi ce schéma de Hilbert comme l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 1, de classe de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = n$; semi-stable signifie ici sans torsion. Tous ces faisceaux sont en fait stables pour n'importe quelle polarisation. Cette identification s'obtient en associant au sous-schéma $z \subset X$ l'idéal I_z de z. C'est notre espace de modules M_c : la classe $c \in K_{\mathrm{top}}(X)$ est donc la classe de Gothendieck des faisceaux de rang 1, de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = n$. L'espace de modules M_{c^*} est l'espace de modules des faisceaux sans torsion de rang un de classe de Chern $c_1 = c_1(L)$, $c_2 = m$. Les points sont donc les classes d'isomorphisme des faisceaux $I_{z'}(L)$, où $z' \in X^{[m]}$.

Lemme 14. — *Les conditions* (1), (2) *et* (3) *du* § 1.3 *sont satisfaites.*

Démonstration. Pour $z \in X^{[n]}$ et $z' \in X^{[m]}$, on a $\chi(I_z) = 1 + p_g - n$ et $\chi(I_{z'}(L)) = \chi(L) - m$. La condition (1) résulte de la formule du §1.1 donnant la forme quadratique sur $K_{\mathrm{top}}(X)$. Pour vérifier la condition (2) on considère une résolution localement libre $0 \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_0 \longrightarrow 0$ de I_z ; si G est un faisceau algébrique sur X les faisceaux $\mathrm{Tor}_i(I_z, G)$ sont les faisceaux d'homologie du complexe

$$0 \longrightarrow R_1 \otimes G \longrightarrow R_0 \otimes G \longrightarrow 0$$

et si G est sans torsion, le faisceau $R_1 \otimes G$ n'a pas de sous-faisceau de torsion non trivial. Donc $\mathrm{Tor}_i(I_z, G) = 0$ si $i \geq 2$. Pour vérifier la condition (3), on remarque que si z et z' sont deux sous-schémas de longueur n et m respectivement, le noyau et le conoyau du morphisme canonique

$$I_z \otimes I_{z'} \longrightarrow \mathcal{O}$$

sont des faisceaux de dimension 0. Donc ce morphisme induit un isomorphisme

$$H^2(I_z \otimes I_{z'}(L)) \xrightarrow{\sim} H^2(L).$$

Donc cet espace vectoriel est nul. □

Considérons le sous-schéma universel $\Xi \subset \mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}$ paramétré par $\mathrm{X}^{[n]}$. Ce sous-schéma est plat de degré n au-dessus de $\mathrm{X}^{[n]}$. Considérons les projections canoniques

$$\begin{tikzcd} \Xi \arrow[r, "\mathrm{p}_2"] \arrow[d, "\mathrm{p}_1"'] & \mathrm{X} \\ \mathrm{X}^{[n]} & \end{tikzcd}$$

La transformation de Fourier-Mukai de centre Ξ associe au fibré inversible L un fibré de rang n un faisceau localement libre $\mathrm{L}^{[n]}$ de rang n sur $\mathrm{X}^{[n]}$ défini par

$$\mathrm{L}^{[n]} = \mathrm{p}_{1*}\,\mathrm{p}_2^*(\mathrm{L})$$

La fibre vectorielle au-dessus du point z est l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_z(\mathrm{L}))$.

Lemme 15. — *On a des isomorphismes*

$$\mathcal{D}_{c,c^*} \xrightarrow{\sim} \det \mathrm{L}^{[n]}$$

$$\mathcal{D}_{c^*,c} \xrightarrow{\sim} \det \mathrm{L}^{[m]}$$

Démonstration. Vérifions la première des formules. On dispose ici d'une famille universelle donnée par l'idéal $\mathcal{I}_\Xi$ de sorte que par définition

$$\mathcal{D}_{c,c^*} = \det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{I}_\Xi \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{I}_{z'}(\mathrm{L}))^*$$

où z' est un point fixé de $\mathrm{X}^{[m]}$. On vérifie d'abord que le fibré $\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{I}_\Xi \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathcal{O}_{z'}(\mathrm{L}))$ est trivial. Le fibré $\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}^{[n]}} \boxtimes \mathcal{O}_{z'}(\mathrm{L}))$ est trivial. Le calcul de $\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{I}_\Xi \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathcal{O}_{z'}(\mathrm{L}))$ se ramène à celui de $\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathcal{O}_{z'}(\mathrm{L}))$. Par dévissage on se ramène au cas où z' est un point $a \in \mathrm{X}$. Par définition, $\mathcal{O}_\Xi \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathcal{O}_a = \mathrm{R}^\bullet(a)$ où $\mathrm{R}^\bullet$ est une résolution localement libre finie de $\mathcal{O}_\Xi$. Le complexe $\mathrm{R}^\bullet(a)$ est exact en des points (z,a) tels que $a \in z$. L'image de ce fermé par la projection pr_1 est un fermé de $\mathrm{X}^{[n]}$ de codimension 2. Par suite, le complexe $\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{R}^\bullet(a)) = \mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{R}^\bullet(a))$ est exact en dehors d'un fermé de codimension 2, et donc son déterminant est trivial.

Le fibré $\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathrm{X}^{[n]}}) \boxtimes \mathrm{L}) = \mathcal{O}_{\mathrm{X}^{[n]}} \otimes \det \mathrm{H}^0(\mathrm{L})$ est trivial. Il en résulte que dans $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}^{[n]})$

$$\mathcal{D}_{c,c^*} = \det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{L}) = \det \mathrm{L}^{[n]}.$$

La démontration de l'isomorphisme $\mathcal{D}_{c^*,c} \xrightarrow{\sim} \det \mathrm{L}^{[m]}$ est analogue. Remarquons que les isomorphismes obtenus entre les fibrés inversibles ci-dessus ne sont pas canoniques. En effet, il nécessite le choix d'un élément non nul de la droite vectorielle $\det \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes (\det \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{z'}(\mathrm{L}))^*$.

2.2. Dualité étrange

En vertu du lemme 15 ci-dessus, la théorie générale fournit une section $\sigma_{c,c^*} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[m]})$ dont le schéma des zéros a pour fermé sous-jacent l'ensemble des couples (z, z') tels que $\mathrm{H}^0(\mathrm{I}_z \otimes \mathrm{I}_{z'}(\mathrm{L})) \neq 0$. On en déduit un morphisme étrange

$$\mathrm{D}_{c,c^*} : (\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]})^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]})$$

La section obtenue σ_{c,c^*} dépend du choix des isomorphismes introduits dans le lemme 15. Le morphisme étrange D_{c,c^*} n'est donc pas canonique, mais il est canonique à inversibles près.

THÉORÈME 16. —*Le morphisme étrange* D_{c,c^*} *est un isomorphisme.*

Cet énoncé résulte de la description de l'espace des sections du fibré inversible $\det \mathrm{L}^{[n]}$, et de la description du morphisme étrange D_{c,c^*}. Nous allons décrire plus précisément toute la cohomologie de $\det \mathrm{L}^{[n]}$.

3. La cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]})$

On suppose dans cette section que X est une surface lisse quasi-projective ; on se donne un fibré inversible quelconque L sur la surface X. On désigne par $\mathrm{H}^*(\mathrm{L})$ l'espace vectoriel gradué $\oplus_i \mathrm{H}^i(\mathrm{L})$. On a un morphisme canonique

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{[n]}, \mathrm{L}^{[n]}).$$

Il en résulte un morphisme canonique d'espaces vectoriels gradués

$$\varphi : \wedge^n \mathrm{H}^*(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]})$$

où le membre de gauche est le produit extérieur de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^*(\mathrm{L})$ en tant qu'espace vectoriel gradué : dans l'algèbre graduée $\oplus_n \wedge^n \mathrm{H}^*(\mathrm{L})$ la règle de commutation est donnée par $u \wedge v = -(-1)^{pq} v \wedge u$ pour u et $v \in \mathrm{H}^*(\mathrm{L})$ homogènes de degré p et q.

THÉORÈME 17. — *L'application* φ *est un isomorphisme.*

Cet résultat généralise l'énoncé de [10], lemme 5.1.

3.1. Les résultats de Haiman [13]

Dans X^m, on désigne par $\Delta_{i,j}$ la diagonale définie par $\mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_j$. On considère dans $\mathrm{X}^n \times \mathrm{X} = \mathrm{X}^{n+1}$ le sous-schéma réduit $\mathrm{D} = \cup_{1\leq i\leq n}\Delta_{i,n+1}$. Ce sous-schéma est fini de degré n au-dessus de X^n, mais il n'est pas plat : en un point général de $\Delta = \cup_{i<j}\Delta_{i,j}$ la fibre de la projection $\nu : \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{X}^n$ est de longueur $\geq n+1$. Pour obtenir une famille plate de sous-schéma de longueur n, on considère l'éclaté $p : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{X}^n$ de Δ dans X^n et le sous-schéma réduit $\mathrm{Z} = (\mathrm{B} \times_{\mathrm{X}^n} \mathrm{D})_{\mathrm{red}}$ de $\mathrm{B} \times \mathrm{X}$. Le schéma B est évidemment intègre de dimension $2n$. Haiman démontre que c'est une variété normale, de Cohen-Macaulay. De plus, la projection $\mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{B}$ est un morphisme plat de degré n. La propriété universelle du schéma de Hilbert $\mathrm{X}^{[n]}$ fournit alors un morphisme $q : \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{X}^{[n]}$ tel que

$$\mathrm{Z} = \mathrm{B} \times_{\mathrm{X}^{[n]}} \Xi$$

On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{X}^n \\ \mathrm{X}^{[n]} & \end{tikzcd}$$

Le groupe symétrique $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_n$ agit sur X^n par permutation des facteurs et cette action laisse le sous-schéma Δ globalement invariant. Il agit alors sur B, de sorte que les morphismes p et q sont équivariants pour cette action. On obtient, en introduisant la puissance symétrique $\mathrm{S}^n\mathrm{X} = \mathrm{X}^n/\mathrm{G}$ un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \mathrm{X}^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{X}^{[n]} \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{S}^n\mathrm{X} \end{tikzcd}$$

où π est la projection canonique et μ le morphisme de Hilbert-Chow, qui associe au point $z \in \mathrm{X}^{[n]}$ le cycle $\sum \mathrm{lg}(\mathrm{O}_{z,x})x$. Ce diagramme n'est pas cartésien, mais Haiman démontre que le morphisme induit

$$\mathrm{B} \longrightarrow (\mathrm{X}^{[n]} \times_{\mathrm{S}^n\mathrm{X}} \mathrm{X}^n)_{\mathrm{red}}$$

est un isomorphisme. En particulier, le morphisme q est fini ; du fait que B est Cohen-Macaulay, il résulte que le morphisme q est plat de longueur $n!$. De plus, localement sur $\mathrm{X}^{[n]}$ on a un isomorphisme de G$-$faisceaux $q_*(\mathcal{O}_\mathrm{B}) = \mathcal{O}_{\mathrm{X}^n}[\mathrm{G}]$. En particulier, q identifie $\mathrm{X}^{[n]}$ au quotient de B par le groupe G.

3.2. Transformée de Fourier-Mukai de $\det \mathrm{L}^{[n]}$

On désigne par $\mathrm{D_G}(\mathrm{X}^n)$ la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux algébriques cohérents sur X^n, munis d'une action du groupe symétrique $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_n$ au-dessus de l'action naturelle sur X^n.

THÉORÈME 18. — *Soit ϵ_n la représentation alternée de dimension 1 de $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_n$. On a dans $\mathrm{D_G}(\mathrm{X}^n)$*

$$\mathrm{R}p_*(q^*(\det \mathrm{L}^{[n]})) = \mathcal{I}_\Delta(\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}) \otimes \epsilon_n$$

Démonstration. L'énoncé signifie que les images directes supérieures sont nulles, et que

$$p_*(q^*(\det \mathrm{L}^{[n]})) = \mathcal{I}_\Delta(\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}) \otimes \epsilon_n.$$

Le fait que les images supérieures soient nulles est une conséquence du théorème d'annulation de Haiman [14]. Il reste seulement à examiner l'image directe $p_*(q^*(\det \mathrm{L}^{[n]}))$. Le sous-schéma Z de $\mathrm{B} \times \mathrm{X}$ a n composantes irréductibles Z_i isomorphes à B : la composante Z_i est le graphe du morphisme composé $\mathrm{p}_i : \mathrm{B} \xrightarrow{p} \mathrm{X}^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} \mathrm{X}$. Ces composantes sont de codimension 2, mais ne se coupent pas transversalement : les intersections $\mathrm{Z}_{i,j} = \mathrm{Z}_i \cap \mathrm{Z}_j$ s'identifient (via la section ci-dessus) aux composantes $\mathrm{E}_{i,j}$ du diviseur exceptionnel E. On peut cependant écrire une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_\mathrm{Z} \longrightarrow \oplus_i \mathcal{O}_{\mathrm{Z}_i} \longrightarrow \oplus_{i<j} \mathcal{O}_{\mathrm{Z}_{i,j}}$$

Considérons le fibré vectoriel sur B défini par $\mathrm{L}_\mathrm{B}^{[n]} := q^*(\mathrm{L}^{[n]})$. Soit $\rho : \mathrm{Z} \longrightarrow \mathrm{B}$ la projection canonique. Par changement de base plat, on a

$$\mathrm{L}_\mathrm{B}^{[n]} = \rho_*(\mathcal{O}_\mathrm{Z} \otimes_{\mathrm{O_X}} \mathrm{L})$$

de sorte que l'on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{L}_\mathrm{B}^{[n]} \longrightarrow \oplus_i \mathrm{L}_i \longrightarrow \oplus_{i<j} \mathrm{L}_{i,j}$$

où $\mathrm{L}_i = \mathrm{p}_i^*(\mathrm{L})$ et où $\mathrm{L}_{i,j}$ est le faisceau inversible sur la composante $\mathrm{E}_{i,j}$ du diviseur exceptionnel au-dessus de $\Delta_{i,j}$ image réciproque de L par le morphisme $\mathrm{p}_i = \mathrm{p}_j : \mathrm{E}_{i,j} \longrightarrow \mathrm{X}$. On se place au-dessus de l'ouvert X_*^n de X^n complémentaire de la réunion des diagonales de codimension ≥ 4, et on désigne par B_* l'image réciproque $p^{-1}(\mathrm{X}_*^n)$. Sur cet ouvert, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{L}_\mathrm{B}^{[n]} \longrightarrow \oplus_i \mathrm{L}_i \longrightarrow \oplus_{i<j} \mathrm{L}_{i,j} \longrightarrow 0$$

On obtient donc un isomorphisme $\det \mathrm{L}_\mathrm{B}^{[n]} \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}_1 \otimes \ldots \otimes \mathrm{L}_n(-\mathrm{E}) = p^*(\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L})(-\mathrm{E})$. Le fibré exceptionnel est muni d'une action naturelle de G, et ce groupe opère donc sur l'espace vectoriel des sections de $\mathcal{O}(\mathrm{E})$. La section canonique f de $\mathrm{O}(\mathrm{E})$ satisfait à la condition suivante, pour $g \in \mathrm{G}$

$$g^*(f) = \epsilon_g f$$

où ϵ_g est la signature de g de sorte qu'en tant que faisceaux équivariants sur B_* on a

$$\det \mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{[n]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\mathrm{E}}(p^*(\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L})) \otimes \epsilon_n$$

Par image directe, sur l'ouvert $\mathrm{U} = \mathrm{X}_*^n$ on obtient

$$p_*(\det \mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{[n]}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\Delta}(\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}) \otimes \epsilon_n$$

Il reste à vérifier que la formule est encore vraie sur X^n. Soit $i : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{X}^n$ l'inclusion cnaonique . Du fait que l'image réciproque du complémentaire de U est de codimension 2 et que B est normale, on obtient un isomorphisme

$$p_*(\det \mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{[n]}) \xrightarrow{\sim} i_* i^*(p_*(\det \mathrm{L}_{\mathrm{B}}^{[n]}))$$

Il suffit donc de vérifier la même formule pour le second membre. On écrit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\Delta} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{X}^n} \longrightarrow \oplus_{i,j}\, \mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$$

Chacun des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathrm{X}^n}$ et $\mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$ satisfait à la même condition. Par suite, $\mathcal{I}_{\Delta}$ satisfait aussi à cette condition, et ceci reste vrai quand on tensorise par un faisceau localement libre. ▫

Pour tout faisceau algébrique cohérent sur X^n, muni d'une action de $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_n$ au-dessus de l'action naturelle de G sur X^n, désignons par F^{G} le faisceau algébrique cohérent sur la puissance symétrique $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ des invariants par le groupe symétrique $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_n$ du faisceau algébrique cohérent $\pi_*(\mathrm{F})$.

Corollaire 19. — *Soit* $\mu : \mathrm{X}^{[n]} \longrightarrow \mathrm{S}^n\mathrm{X}$ *le morphisme de Hilbert-Chow. Sur* $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$, *on a*

$$\mathrm{R}\mu_*(\det \mathrm{L}^{[n]}) = ((\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}) \otimes \epsilon_n)^{\mathrm{G}}$$

Démonstration. Il suffit en effet de constater que le faisceau $\mathcal{O}_{\Delta}(\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}) \otimes \epsilon_n$ n'a pas d'invariants. Mais le faisceau $\mathcal{O}_{\Delta}$ se plonge dans $\oplus_{i,j}\mathcal{O}_{\Delta_{i,j}}$. Visiblement, ce faisceau n'a pas d'invariants. ▫

Corollaire 20. — *En tant que modules gradués, on a*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]}) \xrightarrow{\sim} \wedge^n \mathrm{H}^*(\mathrm{X}, \mathrm{L})$$

En effet, la cohomologie $H^*(X^n, L\boxtimes\ldots\boxtimes L)$ est isomorphe d'après la formule de Kunneth au produit tensoriel $\otimes^n H^*(X, L)$. On doit prendre les anti-invariants par le groupe symétrique $G = \mathfrak{S}_n$. D'où le corollaire.

Fin de la démonstration du théorème 17

Considérons le morphisme canonique $H^*(X, L) \longrightarrow H^*(X^{[n]}, L^{[n]})$. La description de l'image directe est donnée par Danila

$$R\mu_*(L^{[n]}) = (L_1 \oplus \ldots \oplus L_n)^G$$

où L_i désigne ici l'image réciproque $pr_i^*(L)$ sur X^n. Elle permet d'identifier $H^*(X^{[n]}, L^{[n]})$ à la cohomologie $G-$équivariante de X^n à valeurs dans le fibré vectoriel $V := L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$; cette cohomologie équivariante s'identifie alors à l'espace vectoriel gradué $H^*(L) \otimes S^{n-1}H^*(\mathcal{O}_X)$ et le morphisme ci-dessus est alors est donné par $u \mapsto u \otimes 1$.

Le produit extérieur fournit alors une application linéaire naturelle compatible avec la graduation

$$\wedge^n H^*(L) \xrightarrow{\phi} H^*(X^n, \det(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n))^G$$

Lemme 21. — *On a un isomorphisme de* $G-$*fibrés inversibles sur* X^n

$$\det(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n) \xrightarrow{\sim} (L \boxtimes \ldots \boxtimes L) \otimes \epsilon_n$$

Démonstration. On peut recouvrir X^n par des ouverts de la forme U^n, où U est un ouvert de X sur lequel L est trivial. Soit e une section de L sur l'ouvert U qui ne s'annule pas. Soit e_i la section de L_i image réciproque de e par la projection pr_i. Soit R la représentation naturelle de dimension n de G. On a alors un isomorphisme $G-$équivariant sur U^n

$$\mathcal{O}_{X^n} \otimes R \xrightarrow{\sim} L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$$

et par suite un isomorphisme de $G-$fibrés inversibles

$$\mathcal{O}_{X^n} \otimes \epsilon_n \xrightarrow{\sim} \det(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n)$$

défini par $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Quand on change la section e en fe où f est une fonction régulière inversible sur l'ouvert U, la section de $\det(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n)$ ci-dessus est changée en $f_1 \ldots f_n e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Ceci montre que l'isomorphisme obtenu sur U^n est en fait canonique. Par suite ces isomorphismes se recollent pour donner un isomorphisme canonique. □

En tenant compte de cette identification, on en déduit un morphisme

$$\begin{tikzcd}
\wedge^n H^*(L) \arrow[r, "\phi"] & (H^*(X^n, \det(L_1 \oplus \ldots \oplus L_n)))^G \arrow[d] \\
& (H^*(X^n, L \boxtimes \ldots \boxtimes L) \otimes \epsilon_n)^G
\end{tikzcd}$$

D'après le corollaire 20, le membre de droite s'identifie à la cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]})$; c'est l'espace vectoriel des tenseurs anti-invariants du produit tensoriel $\mathrm{H}^*(\mathrm{L}) \otimes \ldots \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{L})$. Ce morphisme composé est exactement le morphisme φ décrit dans l'énoncé du théorème 17 : il suffit pour s'en convaincre de remarquer que le morphisme naturel sur la puissance symétrique $\mathrm{S}^n\mathrm{X}$ donné par le produit extérieur $\mu_*(\mathrm{L}^{[n]}) \otimes \ldots \otimes \mu_*(\mathrm{L}^{[n]}) \longrightarrow \mu_*(\det \mathrm{L}^{[n]})$ est déterminé par sa restriction aux ouverts qui ne rencontrent pas la diagonale. Ces ouverts sont quotients d'ouverts invariants de X^n qui ne rencontrent pas la diagonale Δ, et sur ces ouverts, le morphisme est déterminé par le produit extérieur sur X^n

$$\mathrm{V} \otimes \ldots \otimes \mathrm{V} \longrightarrow \det \mathrm{V}$$

où $\mathrm{V} = \mathrm{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{L}_n$.

Le morphisme φ est alors donné par

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_n \mapsto \sum_{\nu \in \mathrm{G}} \epsilon_\nu u_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes u_{\nu_n}$$

et c'est donc un isomorphisme.

Corollaire 22. — (i) *On a pour tout entier* $n > 0$

$$\wedge^n \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]})$$

(ii) *Supposons que* X *soit une surface projective, et que* $\mathrm{L} \otimes \omega_{\mathrm{X}}^{-1}$ *soit ample. Alors* $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]}) = 0$ *pour* $q > 0$.

Corollaire 23. — *On suppose que* X *est une surface projective. Soit* $d = \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{L})$. *Si* $f_1, \ldots, f_d$ *est une base de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{L})$. *La section de* $\underbrace{\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}}_{d}$ *définie sur* X^d *par*

$$(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_d} \epsilon_\nu f_{\nu_1}(x_1) \otimes \ldots \otimes f_{\nu_d}(x_d)$$

n'est pas identiquement nulle.

Cette section correspond en effet, dans l'isomorphisme ci-dessus, à la section de $\det \mathrm{L}^{[d]}$ définie par l'élément $f_1 \wedge \ldots \wedge f_d$ de $\wedge^d \mathrm{H}^0(\mathrm{L})$.

Remarque 24. — Si $d = \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{L})$, l'énoncé ci-dessus implique qu'il existe $z \in \mathrm{X}^{[d]}$ tel que $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{I}_z(\mathrm{L})) = 0$. Ceci peut bien sûr se voir directement. Considérons le système linéaire complet $|\mathrm{L}|$ défini par le fibré inversible L et l'ensemble $\mathrm{Y} \subset |\mathrm{L}| \times \mathrm{X}^{[d]}$ des couples $([s], z)$ tels que $z \subset \mathrm{C}_s$, où C_s est le schéma des zéros de $s \in \mathrm{H}^0(\mathrm{L})$. Puisque $\mathrm{H}^0(\mathrm{L})^* \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathrm{L}^{[d]})$ le fibré de rang d défini par $\mathcal{O}(1) \boxtimes \mathrm{L}^{[d]}$ a une section canonique dont le schéma des zéros est Y. On a $\dim \mathrm{Y} = 2d - 1$ et par suite la projection canonique $\mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}^{[d]}$ n'est pas surjective.

4. Dualité étrange pour $\det \mathrm{L}^{[n]}$

On se propose de démontrer dans cette section le théorème 16. On rappelle que X est une surface algébrique lisse, et que L est un fibré inversible fixé sur X tel que $\mathrm{L} \otimes \omega_{\mathrm{X}}^{-1}$ soit ample. Enfin, n et m sont deux entiers > 0 tels que $n + m = \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) = \chi(\mathrm{L})$.

Soit $\mathrm{U}_{n,m} \subset \mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[m]}$ l'ouvert des couples (z, z') tels que z et z' soient disjoints. Le complémentaire de $\mathrm{U}_{n,m}$ est de codimension 2. Considérons l'application régulière

$$\phi : \mathrm{U}_{n,m} \longrightarrow \mathrm{X}^{[n+m]}$$

qui associe au couple (z, z') de sous-schémas de X de longueur n et m respectivement la réunion $z \cup z'$.

Lemme 25. — (i) *On a un isomorphisme canonique*

$$\phi^*(\det \mathrm{L}^{[m+n]}) \xrightarrow{\sim} (\det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[m]})|_{\mathrm{U}_{n,m}}$$

(ii) *L'image réciproque par ϕ de la section canonique de* $\det \mathrm{L}^{[m+n]}$ *associée à une base de* $\mathrm{H}^0(\mathrm{L})$ *est, à inversibles près, la restriction de σ_{c,c^*} à l'ouvert* $\mathrm{U}_{n,m}$.

Démonstration. Considérons les sous-schémas universels $\Xi_n \subset \mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}$ et $\Xi_m \subset \mathrm{X}^{[m]} \times \mathrm{X}$ paramétrés par $\mathrm{X}^{[n]}$ et $\mathrm{X}^{[m]}$ respectivement, ainsi que le sous-schéma universel $\Xi_d \subset \mathrm{X}^{[n+m]}$ Sur l'ouvert $\mathrm{U}_{n,m} \times \mathrm{X}$ de $\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[m]} \times \mathrm{X}$, le schéma $\phi^{-1}(\Xi_{n+m})$ est réunion disjointe des sous-schémas $\mathrm{pr}_{13}^{-1}(\Xi_n)$ et $\mathrm{pr}_{23}^{-1}(\Xi_m)$. Ainsi,

$$\phi^*(\mathcal{O}_{\Xi_{n+m}}) = \mathrm{pr}_{13}^*(\mathcal{O}_{\Xi_n}) \oplus \mathrm{pr}_{23}^*(\mathcal{O}_{\Xi_m})$$

Il en résulte, par changement de base plat

$$\phi^*(\mathrm{L}^{[n+m]}) = (\mathrm{L}^{[n]} \boxplus \mathrm{L}^{[m]})|_{\mathrm{U}_{n,m}}$$

et par suite $\phi^*(\det \mathrm{L}^{[n+m]}) \xrightarrow{\sim} (\det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[m]})|_{\mathrm{U}_{n,m}}$. Ceci démontre l'assertion (i). Pour constater que l'image réciproque de la section canonique de $\det \mathrm{L}^{[n+m]}$ s'identifie à la restriction de la section σ_{c,c^*} on introduit les idéaux $\mathcal{I}_{n+m}$, $\mathcal{I}_n$, $\mathcal{I}_m$ de Ξ_{n+m}, Ξ_n et Ξ_m respectivement. Sur $\mathrm{U}_{n,m} \times \mathrm{X}$, on a $\phi^*(\mathcal{I}_{n+m}) = \mathrm{pr}_{13}^*(\mathcal{I}_n) \otimes \mathrm{pr}_{23}^*(\mathcal{I}_m)$ et par suite

$$\phi^*(\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1^*}(\mathcal{I}_{n+m} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{L}))[1] = \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{pr}_{13}^*((\mathcal{I}_n) \otimes \mathrm{pr}_{23}^*(\mathcal{I}_m) \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{L}))[1].$$

La section canonique du déterminant du premier membre s'identifie à la section canonique du déterminant du second membre. Par définition, cette dernière n'est autre que la restriction à l'ouvert $\mathrm{U}_{n,m}$ de la section σ_{c,c^*}; compte-tenu des isomorphismes du lemme 15 on peut voir cette section comme une section, bien définie à inversibles près de $\det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[m]}$. Le choix d'une base $f_1, \dots f_{n+m}$ de $\mathrm{H}^0(\mathrm{L})$ fournit un isomorphisme de fibrés inversibles

$$\det \mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{I}_{n+m} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{L})[1] \xrightarrow{\sim} \det \mathrm{L}^{[m+n]}$$

et dans cet isomorphisme, la section canonique a pour image la section associée à l'élément $f_1 \wedge \ldots \wedge f_{n+m}$ de $\wedge^{n+m}\mathrm{H}^0(\mathrm{L})$. $\square$

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\wedge^{n+m}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \arrow[r, "\mathrm{D}"] \arrow[d] & \wedge^{n}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \wedge^{m}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n+m]}, \det \mathrm{L}^{[n+m]}) \arrow[r, "\phi^*"] & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}_{n,m}, \det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[m]})
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Dans ce diagramme, la première flèche verticale est l'isomorphisme du corollaire 22 ; la seconde flèche verticale s'obtient en composant le morphisme produit tensoriel des isomorphismes de ce corollaire

$$\begin{aligned}
\wedge^{n}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \wedge^{m}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \longrightarrow\ & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]}) \\
&= \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[m]})
\end{aligned}$$

avec le morphisme de restriction à l'ouvert $\mathrm{U}_{n,m}$; ce morphisme de restriction est évidemment un isomorphisme puisque le complémentaire de $\mathrm{U}_{n,m}$ est de codimension 2. La flèche horizontale D est donnée par

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_{n+m} \mapsto \sum_{\substack{\nu_1 < \ldots < \nu_n \\ \nu_{n+1} < \ldots < \nu_{n+m}}} \epsilon_\nu f_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge f_{\nu_n} \otimes f_{\nu_{n+1}} \wedge \ldots \wedge f_{\nu_{n+m}}$$

Lemme 26. — *Le diagramme* (1) *ci-dessus est commutatif.*

Démonstration. Soit $f_1, \ldots, f_{n+m}$ une base de $\mathrm{H}^0(\mathrm{L})$. La section de $\det \mathrm{L}^{[n+m]}$ associée à $f_1 \wedge \ldots \wedge f_{n+m}$ est définie par la section de $\underbrace{\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}}_{n+m}$ donnée par

$$(x_1, \ldots, x_{n+m}) \mapsto \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{n+m}} \epsilon_\nu f_{\nu_1}(x_1) \otimes \ldots \otimes f_{\nu_{n+m}}(x_{n+m}).$$

Soit $\mathrm{V}_{n,m}$ l'ouvert de X^{n+m} défini par le complémentaire de la réunion des diagonales $\Delta_{i,j}$, pour $1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m$. La section de $\det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[m]}$ sur $\mathrm{U}_{n,m}$ est associée à la section de $\underbrace{\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}}_{n+m}$ définie au point $(x_1, \ldots, x_{n+m}) \in \mathrm{V}_{n,m}$ par la formule

$$\sum_{\substack{\nu_1 < \ldots < \nu_n, \nu_{n+1} < \ldots < \nu_{n+m} \\ (\alpha,\beta) \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}} \epsilon_\nu f_{\nu\alpha_1}(x_1) \otimes \ldots \otimes f_{\nu\alpha_n}(x_n) \otimes f_{\nu\beta_{n+1}}(x_{n+1}) \otimes \ldots \otimes f_{\nu\beta_{n+m}}(x_{n+m})$$

Evidemment, ces deux sections coïncident sur $\mathrm{V}_{n,m}$, ce qui signifie que le diagramme (4.1) est commutatif. $\square$

Remarque 27. — Soit U un ouvert de X sur lequel le fibré inversible L est trivial et muni d'une section e qui ne s'annule pas sur U. Ecrivons $f_i = u_i e$, où u_i est une fonction régulière sur U. Sur l'ouvert $\mathrm{U}^{n+m} \cap \mathrm{V}_{n,m}$ de X^{n+m} la section de $\underbrace{\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}}_{n+m}$ associée à $f_1 \wedge \ldots \wedge f_{n+m}$ est donnée par

$$\det(f_i(x_j))\, \underbrace{e \boxtimes \ldots \boxtimes e}_{n+m}(x_1, \ldots, x_{n+m})$$

La formule ci-dessus est la formule du développement du déterminant par blocs.

Fin de la démonstration du théorème 16

Le morphisme ϕ^* se factorise par $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]}$, et d'après le lemme 25 la section associée à un élément non nul ω de $\wedge^{n+m}\mathrm{H}^0(\mathrm{L})$ n'est autre, à inversibles près, que la section σ_{c,c^*}. Le choix d'un tel élément non nul fournit donc un diagramme commutatif à inversibles près

$$\begin{tikzcd}
\wedge^m \mathrm{H}^0(\mathrm{L})^* \arrow[r] & \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \arrow[d] \\
\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]})^* \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{D}_{c,c^*}"] & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]})
\end{tikzcd}$$

La première flèche horizontale est le produit intérieur par ω; c'est donc un isomorphisme. Par suite, le morphisme étrange D_{c,c^*} est un isomorphisme. ◻

5. Faisceaux semi-stables de rang 2

On considère à nouveau une surface algébrique projective lisse X simplement connexe. Comme dans la section précédente, on considère un fibré inversible L sur X tel que $\mathrm{L} \otimes \omega_{\mathrm{X}}^{-1}$ soit ample ; on suppose en outre $\chi(\mathrm{L}) = \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \geq 2$ et on considère deux entiers naturels non nuls n et m tels que $n + m = \chi(\mathrm{L})$. On désigne encore par $c \in \mathrm{K}_{\mathrm{top}}(\mathrm{X})$ la classe de Grothendieck des faisceaux algébriques cohérents de rang 1, et de classes de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = n$; c'est la classe de Grothendieck des idéaux I_z , où $z \in \mathrm{X}^{[n]}$. On considère cette fois l'espace de modules M_{2c} des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables F de rang 2 et de classes de Chern $(0, 2n)$ relatif à une polarisation H $c-$générique ; M_{c^*} est encore l'espace de modules des faisceaux sans torsion de rang 1 de classes de Chern $(c_1 = c_1(\mathrm{L}), c_2 = m)$, isomorphe au schéma de Hilbert $\mathrm{X}^{[m]}$.

Lemme 28. — (i) *Les conditions* (1),(2) *et* (3) *sont évidemment satisfaites.*

(ii) *On a un isomorphisme de fibrés inversibles sur* $\mathrm{X}^{[m]}$

$$\mathcal{D}_{c^*,2c} \xrightarrow{\sim} \det(\mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2}.$$

Démonstration. La condition (1) est évidente ; la vérification de (2) est identique à celle qui a été donnée dans le lemme 14 : cette démonstration montre en fait qu'un faisceau algébrique cohérent de profondeur ≥ 1 sur X est toujours transverse à un faisceau sans torsion. Vérifions (3). Il suffit de montrer que si F est un faisceau semi-stable de classe de Grothendieck c, si $z' \in \mathrm{X}^{[m]}$, on a $\mathrm{H}^2(\mathrm{F} \otimes \mathrm{I}_{z'}(\mathrm{L})) = 0$. Puisque le morphisme canonique

$$\mathrm{F} \otimes \mathrm{I}_{z'}(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{F} \otimes \mathrm{L}$$

est de noyau et conoyau de dimension 0, il suffit de vérifier que $\mathrm{H}^2(\mathrm{F} \otimes \mathrm{L}) = 0$. Par dualité de Serre,

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{F} \otimes \mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{F} \otimes \mathrm{L}, \mathcal{O})^*$$

S'il existait un morphisme non nul $\mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{L}^*$, on aurait puisque F est semi-stable $0 = \deg \mathrm{F} \leq -2 \deg \mathrm{L}$. Mais puisque L a des sections non nulles, on a obligatoirement $\deg \mathrm{L} > 0$. Donc $\mathrm{H}^2(\mathrm{F} \otimes \mathrm{L}) = 0$.

Vérifions (2). Par définition, si F est un faisceau semi-stable de classe de Grothendieck $2c$, on a un isomorphisme

$$\mathcal{D}_{c^*,2c} \xrightarrow{\sim} \det \mathrm{F} \otimes \mathcal{I}_m \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} (\mathrm{L})[1])$$

où $\mathcal{I}_m$ est l'idéal du sous-schéma universel $\Xi_m \subset \mathrm{X}^{[m]} \times \mathrm{X}$. Si $z \in \mathrm{X}^{[n]}$ on peut prendre pour F la somme directe $\mathrm{I}_z \oplus \mathrm{I}_z$. Il en résulte un isomorphisme $\mathcal{D}_{c^*,2c} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{c^*,c}^{\otimes 2}$. Compte-tenu du lemme 15, ceci fournit le résultat attendu. ▫

On a donc un morphisme étrange

$$\mathrm{D}_{2c,c^*} : \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{2c}, \mathcal{D}_{2c,c^*}).$$

On sait que si n est assez grand [12], l'espace de modules M_{2c} est une variété algébrique projective irréductible et normale de dimension $8n - 3(1 + p_g)$. C'est encore vrai sur des surfaces particulières pour tout n, par exemple sur le plan projectif. Ce morphisme étrange a l'interprétation suivante. On a une application rationnelle

$$\phi : \mathrm{M}_{2c} - - \to \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})$$

régulière sur un ouvert dont le complémentaire est de codimension ≥ 2, telle que $\phi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{D}_{2c,c^*}$. L'application linéaire induite sur l'espace vectoriel des sections n'est autre que le morphisme étrange.

On se propose ici de donner des exemples de dualité étrange pour l'espace de module M_{2n} des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de rang 2, et classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 2n$ sur le plan projectif. Si L est un fibré inversible sur $\mathrm{X} = \mathbb{P}_2$, il est important de comprendre ce qu'est l'espace vectoriel des sections $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})$. C'est facile pour $\mathrm{L} = \mathcal{O}(1)$, mais beaucoup plus délicat en degré supérieur. On désigne dans la suite par $\chi := \chi(\mathrm{L})$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de L.

5.1. Un critère d'injectivité

On se place dans les conditions du préambule ci-dessus.

Théorème 29. — *On suppose que l'application canonique*

$$\mathrm{S}^2\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]}) \xrightarrow{\mu} \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})$$

est surjective. Alors le morphisme étrange

$$\mathrm{D}_{2c,c^*} : \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{2c}, \mathcal{D}_{2c,c^*}).$$

est injectif.

Démonstration. Considérons la sous-variété fermée SM_{2c} des points strictement semi-stables. Du fait que la polarisation est $c-$générique, elle est constituée des points $\mathrm{I}_z \oplus \mathrm{I}_{z'}$ où z et $z' \in \mathrm{X}^{[n]}$. Elle s'identifie à la puissance symétrique $\mathrm{S}^2\mathrm{X}^{[n]}$.

Lemme 30. — (i) *La restriction du faisceau inversible $\mathcal{D}_{2c,c^*}$ à SM_{2c} est isomorphe à $\mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c,c^*}/\mathfrak{S}_2$.*

(ii) *Soit σ_{c,c^*} la section canonique de $\mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c^*,c}$. Considérons le changement de base $\nu : \mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[n]} \longrightarrow \mathrm{M}_{2c}$ défini par $(z, z') \mapsto \mathrm{I}_z \oplus \mathrm{I}_{z'}$. L'image réciproque $\nu^*(\sigma_{2c,c^*})$ de la section canonique sur $\mathrm{M}_{2c} \times \mathrm{X}^{[m]}$ de $\mathcal{D}_{2c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c^*,2c}$ s'identifie à la section $\mathrm{pr}_{13}^*(\sigma_{c,c^*}) \otimes \mathrm{pr}_{23}^*(\sigma_{c,c^*})$ sur le produit $\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[m]}$ du fibré inversible $\mathrm{pr}_{12}^*(\mathcal{D}_{c,c^*}) \otimes \mathrm{pr}_{23}^*(\mathcal{D}_{c,c^*})$.*

Démonstration. Soit $\Xi \subset \mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}$ le sous-schéma universel, d'idéal $\mathcal{I}_\Xi$, et Ξ' le sous-schéma universel de $\mathrm{X}^{[m]} \times \mathrm{X}$. L'espace de paramètres $\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[n]}$ est muni du faisceau de rang 2 sur $\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}$ défini par $\mathrm{pr}_{13}^*(\mathcal{I}_\Xi) \oplus \mathrm{pr}_{23}^*(\mathcal{I}_\Xi)$, qui définit une famille de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c ; le morphisme modulaire associé n'est autre que ν. L'image réciproque du fibré inversible $\mathcal{D}_{2c,c^*}$ est le déterminant du complexe sur $\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[m]}$

$$\mathrm{pr}_{13}^*(\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{12_*}(\mathcal{I}_\Xi \boxtimes \mathcal{I}_{\Xi'} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{L}))[1] \oplus \mathrm{pr}_{23}^*(\mathrm{R}\,\mathrm{pr}_{23_*}(\mathcal{I}_\Xi \boxtimes \mathcal{I}_{\Xi'} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathrm{L}))[1]$$

Son déterminant est bien le produit tensoriel externe $\mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c,c^*}$ et la section induite $\nu^*(\sigma_{2c,c^*})$ est bien la section canonique $\mathrm{pr}_{13}^*(\sigma_{c,c^*}) \otimes \mathrm{pr}_{23}^*(\sigma_{c,c^*})$. D'où le lemme. □

Ceci implique que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})^* \arrow[r, "\mathrm{D}_{2c,c^*}"] \arrow[d, "\mu^*"'] & \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{2c}, \mathcal{D}_{2c,c^*}) \arrow[d] \\ \mathrm{S}^2\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]})^* \arrow[r, "\mathrm{S}^2\mathrm{D}_{c,c^*}"] & \mathrm{H}^0(\mathrm{SM}_{2c}, \mathcal{D}_{2c,c^*}) = \mathrm{S}^2\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]}) \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

dans lequel le morphisme vertical de droite est le morphisme de restriction, est commutatif. En effet, considérons une base v_i de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]})$ et la base duale v_i^*. On écrit $\sigma_{c,c^*} = \sum_i u_i \otimes v_i$, où $u_i \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]})$. On a alors

$$\nu^*(\sigma_{2c,c^*}) = \sum_{i,j} (u_i \otimes u_j) \otimes v_i v_j$$

dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[n]}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})$. Ceci s'écrit encore

$$\nu^*(\sigma_{2c,c^*}) = \sum_{i,j}(u_i \otimes u_j) \otimes \mu(v_i.v_j)$$

où $v_i.v_j$ est le produit dans l'algèbre symétrique. Soit $w \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})^*$. Ecrivons

$$\mu^*(w) = \sum_{i,j} a_{i,j} v_i^* v_j^*.$$

où $a_{i,j} \in \mathbb{C}$, et $a_{i,j} = a_{j,i}$. Alors

$$\nu^*(\mathrm{D}_{2c,c^*}(w)) = \sum_{i,j} a_{i,j} u_i \otimes u_j.$$

D'autre part $\mathrm{D}_{c,c^*}(v_i^*) = u_i$. Par suite, $\nu^*(\mathrm{D}_{2c,c^*}(w)) = \mathrm{S}^2\mathrm{D}_{c,c^*}(\mu^*(w))$ dans l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{[n]} \times \mathrm{X}^{[n]}, \det \mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[n]})$. Les deux membres prennent en fait leurs valeurs dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{SM}_{2c}, \mathcal{D}_{2c,c^*})$: c'est en effet le sous-espace vectoriel des invariants par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_2$.

Par hypothèse, la flèche verticale μ^* est injective. D'autre part, par dualité étrange, le morphisme $\mathrm{S}^2\mathrm{D}_{c,c^*}$ est un isomorphisme. Donc le morphisme étrange D_{2c,c^*} est injectif. □

5.2. Puissance symétrique d'une courbe

On considère dans cette section une courbe algébrique lisse projective C et un fibré inversible L de degré d sur C. La variété $\mathrm{Div}^n\mathrm{C}$ des diviseurs effectifs de degré n s'identifie à la puissance symétrique $\mathrm{S}^n\mathrm{C}$. Considérons le diviseur universel $\mathrm{Z} \subset \mathrm{S}^n\mathrm{C} \times \mathrm{C}$ et les projections

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Z} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathrm{C} \\ \mathrm{S}^n\mathrm{C} & \end{tikzcd}$$

On désigne par $\mathrm{L}^{[n]}$ le fibré de rang n défini par $\mathrm{L}^{[n]} = \mathrm{pr}_1 *(\mathrm{pr}_2^*(\mathrm{L}))$. L'énoncé suivant est apparenté au théorème 18, mais nettement plus facile, car il n'est plus nécessaire d'éclater.

Lemme 31. — *Considérons la projection canonique* $\pi : \mathrm{C}^n \longrightarrow \mathrm{S}^n\mathrm{C}$. *Soit* Δ *l'hypersurface de* C^n *définie par la diagonale* $\cup_{i<j}\Delta_{i,j}$ *de* C^n.

(i) *On a un isomorphisme canonique de* $\mathfrak{S}_n$*−faisceaux inversibles*

$$\pi^*(\det \mathrm{L}^{[n]}) = \mathcal{I}_\Delta(\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}) \otimes \epsilon_n$$

où ϵ_n *est la représentation alternée de dimension 1 de* $\mathfrak{S}_n$.

(ii) *On a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués*

$$\wedge^n\mathrm{H}^*(\mathrm{C}, \mathrm{L}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{C}, \det \mathrm{L}^{[n]})$$

(iii) *Soient* $\omega \in \mathrm{H}^2(\mathrm{C}, \mathbb{Q})$ *la classe fondamentale d'un point, et* $\omega_i = \mathrm{pr}_i^*(\omega)$. *La classe* $\Omega = \sum_i \omega_i$ *est kählérienne, et la classe de Chern de* $\det \mathrm{L}^{[n]}$ *est* $(d+1-n)\Omega$.

Démonstration. La diagonale Δ de C^n est globalement invariante par $\mathfrak{S}_n$. L'idéal de Δ est engendré sur les ouverts affines invariants par une fonction régulière anti-invariante sous l'action de $\mathfrak{S}_n$. Il en résulte que le fibré associé $\mathcal{O}(\Delta)$ est muni d'une action de $\mathfrak{S}_n$ et d'une section f anti-invariante dont le schéma des zéros est Δ. En dehors de la réunion des diagonales de codimension ≥ 2, on a une suite exacte de $\mathfrak{S}_n$−modules sur C^n

$$0 \longrightarrow \pi^*(\mathrm{L}^{[n]}) \longrightarrow \oplus_i \mathrm{L}_i \longrightarrow \oplus_{i<j} \mathrm{L}_{i,j} \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{L}_i = \mathrm{pr}_i^*(\mathrm{L})$ est l'image réciproque de L par la i-ème projection $\mathrm{pr}_i : \mathrm{C}^n \longrightarrow \mathrm{C}$ et où $\mathrm{L}_{i,j}$ est le fibré inversible sur la diagonale $\Delta_{i,j}$ image réciproque du fibré inversible L placé sur la diagonale de $\mathrm{C} \times \mathrm{C}$, par la projection $\mathrm{pr}_i = \mathrm{pr}_j : \Delta_{i,j} \longrightarrow \mathrm{C}^2$. Il en résulte un isomorphisme de fibrés inversibles $\pi^*(\det \mathrm{L}^{[n]}) \longrightarrow \mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}(-\Delta)$ sur C^n et par suite un isomorphisme équivariant de faisceaux localement libres de rang 1

$$\pi^*(\det \mathrm{L}^{[n]}) \longrightarrow \mathcal{I}_\Delta(\mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}) \otimes \epsilon_n$$

Ceci démontre l'assertion (i). La démonstration de (ii) est identique à celle du corollaire 20. Pour (iii), remarquons d'abord que si on pose $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_n$, on a un isomorphisme de la cohomologie équivariante rationnelle

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{S}^n\mathrm{C}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^*_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}^n, \mathbb{Q}) = \mathrm{H}^*(\mathrm{C}^n, \mathbb{Q})^{\mathrm{G}}.$$

La classe ω est la classe de Chern du fibré inversible associé à un point $a \in \mathrm{C}$. La classe Ω est la classe de Chern du fibré $\mathcal{O}(a) \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{O}(a)$. Cette classe provient de la classe de Chern dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{S}^n\mathrm{C}, \mathbb{Q})$ du fibré inversible $\mathcal{O}(a) \boxtimes \ldots \boxtimes \mathcal{O}(a)/\mathrm{G}$ et ce fibré est évidemment ample. La classe de Chern de $\mathcal{O}(\Delta)$ est

$$\sum_{i<j} \omega_i + \omega_j = (n-1)\Omega$$

Par suite, celle de $\pi^*(\det \mathrm{L}^{[n]}) = \mathrm{L} \boxtimes \ldots \boxtimes \mathrm{L}(-\Delta)$ est $(d+1-n)\Omega$.

Corollaire 32. — *On a* $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^n\mathrm{C}, \det \mathrm{L}^{[n]})) \neq 0$ *si et seulement si* $n \leq \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{L})$. *En particulier, le fibré* $\det \mathrm{L}^{[n]}$ *n'a pas de section non nulle si* $n > d+1$.

Corollaire 33. — *Le fibré* $\det \mathrm{L}^{[n]}$ *est ample si et seulement si* $n \leq d$.

Exemple.

Si $\mathrm{C} = \mathbb{P}_1$, considérons le fibré $\mathrm{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d)$. Si $\mathrm{W} = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$, l'espace vectoriel des sections de L est $\mathrm{S}^d\mathrm{W}$. Soient n et m sont deux entiers > 0 tels que $n + m = d + 1$;

la $\mathrm{SL(W)}-$ représentation de dimension un $\wedge^{d+1}\mathrm{S}^d\mathrm{W}$ est triviale et la dualité extérieure fournit un isomorphisme de $\mathrm{SL(W)}-$représentations

$$(\wedge^m \mathrm{S}^d\mathrm{W})^* \xrightarrow{\sim} \wedge^n \mathrm{S}^d\mathrm{W}$$

Par ailleurs, la puissance symétrique $\mathrm{S}^n\mathbb{P}_1$ est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(n))^*) = \mathbb{P}(\mathrm{S}^n\mathrm{W}^*)$, et d'après le corollaire ci-dessus, $\det \mathrm{L}^{[n]} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(m)$. Son espace vectoriel de sections est isomorphe à $\mathrm{S}^m\mathrm{S}^n\mathrm{W}^*$ et d'après le lemme 31 ci-dessus on obtient l'isomorphisme

$$\wedge^n\mathrm{S}^d\mathrm{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^m\mathrm{S}^n\mathrm{W}^*$$

Puisque $\mathrm{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}^*$ comme $\mathrm{SL(W)}-$représentation, il en résulte l'isomorphisme

$$\mathrm{S}^n(\mathrm{S}^m\mathrm{W}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^m(\mathrm{S}^n\mathrm{W}).$$

Cet isomorphisme est connu sous le nom de loi de réciprocité d'Hermite [11].

5.3. Morphismes projectifs à fibres connexes

Le lemme suivant sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite.

Lemme 34. — *Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ un morphisme projectif de variétés intègres. On suppose que*

(i) *le morphisme f est lisse à fibres connexes au-dessus d'un ouvert non vide de* Y *;*

(ii) *la variété* Y *est normale.*

Alors $f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}) = \mathcal{O}_\mathrm{Y}$ et toutes les fibres de f sont connexes.

Démonstration. Considérons la factorisation de Stein du morphisme projectif f

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathrm{Z} = \operatorname{Spec} f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X}) \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathrm{Y} \end{tikzcd}$$

Puisque X est intègre, il en est de même de Z. Le morphisme canonique $\mathcal{O}_\mathrm{Z} \longrightarrow g_*(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ est un isomorphisme puisque les deux membres sont des $\mathcal{O}_\mathrm{Z}$-modules qui ont même image directe par π. Le morphisme vertical π est fini, et birationnel ; en effet, le faisceau $f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ est d'après l'hypothèse (i) et le théorème de semi-continuité localement libre de rang un sur un ouvert non vide de Y, et le morphisme canonique $\mathcal{O}_\mathrm{Y} \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ est un isomorphisme sur un ouvert non vide de Y. Ainsi, le morphisme canonique $\mathcal{O}_\mathrm{Y} \longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_\mathrm{Z})$ est un isomorphisme sur un ouvert non vide de Y. Puisque Y est normal, le morphisme $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}} \longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Z}})$ est un isomorphisme et par suite π est un isomorphisme. $\square$

5.4. L'espace des sections de $(\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2}$

On se place ici dans le cas particulier $\mathrm{L} = \mathcal{O}(1)$ sur le plan projectif.

PROPOSITION 35. — *Soit* $\mathrm{L} = \mathcal{O}(1)$ *sur le plan projectif* $\mathrm{X} = \mathbb{P}_2$. *Pour* $i \geq 0$, *le morphisme canonique*

$$\mathrm{S}^i(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]})) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes i})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le résultat est évident pour $m = 1$. Si $m = 2$, on considère le morphisme canonique

$$\phi : \mathbb{P}_2^{[2]} \longrightarrow \mathbb{P}_2^* = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathrm{L}))$$

qui associe à $z \in \mathbb{P}_2^{[2]}$ l'unique droite portée par z. C'est le morphisme associé à la dualité étrange entre $\mathbb{P}_2^{[2]}$ et $\mathbb{P}_2$ relative à $\mathrm{L} = \mathcal{O}(1)$. On a $\phi^*(\mathcal{O}(1)) = \det \mathrm{L}^{[2]}$. Le morphisme ϕ est un fibré localement trivial de fibre $\mathbb{P}_2$. Il résulte du fait que $\mathrm{R}\phi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^{[2]}}) = \mathcal{O}^*_{\mathbb{P}_2}$

$$\mathrm{H}^*(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(i)) = \mathrm{H}^*(\mathbb{P}_2^{[2]}, \det \mathrm{L}^{[2]})^{\otimes i})$$

L'espace vectoriel des sections de $\mathcal{O}(1)$ sur le plan projectif dual est isomorphe à $\mathrm{H}^0(\mathrm{L})^*$ et donc à $\wedge^2 \mathrm{H}^0(\mathrm{L})$ par dualité.

Pour $m = 3$, le sous-schéma $\mathrm{A}^{[3]}$ des $z \in \mathbb{P}_2^{[3]}$ contenus dans une droite est une hypersurface dont le fibré inversible associé est $\det \mathrm{L}^{[3]}$. Les sections de $(\det \mathrm{L}^{[3]})^i$ s'annulent sur $\mathrm{A}^{[3]}$ car elles s'annulent sur les fibres de la projection canonique $\mathrm{A}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ d'après le corollaire 32. Donc l'application linéaire induite par la section canonique du fibré inversible $\det \mathrm{L}^{[3]}$

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[3]}, (\det \mathrm{L}^{[3]})^{\otimes i}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[3]}, (\det \mathrm{L}^{[3]})^{\otimes i+1})$$

est inversible. Le résultat s'obtient donc par récurrence sur i.

Si $m > 3$, le membre de gauche est nul. Montrons que le membre de droite est nul. On utilise le diagramme classique

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{B} & \longrightarrow & \mathbb{P}_2^{[m+1]} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{P}_2^{[m]} \times \mathbb{P}_2 & & \end{array}$$

dans lequel le morphisme horizontal est surjectif, et où B est l'éclaté du sous-schéma universel relatif à $\mathbb{P}_2^{[m]}$. L'image réciproque du fibré $\det \mathrm{L}^{[m+1]}$ coïncide avec l'image réciproque du fibré $\det \mathrm{L}^{[m]} \boxtimes \mathrm{L}$ en dehors du diviseur universel. Ceci fournit une application linéaire injective

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m+1]}, (\det \mathrm{L}^{[m+1]})^{\otimes i}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes i}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{L}^{\otimes i})$$

Par récurrence on se ramène à prouver que $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[4]}, (\det \mathrm{L}^{[4]})^{\otimes i})$ est nul. On considère pour ceci la variété d'incidence I des couples $(\mathrm{C}, z) \in |\mathcal{O}(2)| \times \mathbb{P}_2^{[4]}$ formés d'une conique et d'un sous-schéma z tels que $z \subset \mathrm{C}$. Ce schéma est irréductible de dimension 9. Considérons les projections

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathbb{P}_2^{[4]} \\ |\mathcal{O}(2)| & \end{tikzcd}$$

La projection pr_2 est surjective. En vertu du corollaire 32 l'image réciproque d'une section de $\det \mathrm{L}^{[4]}$ s'annule sur les fibres lisses de pr_1 . Donc elle s'annulent sur un ouvert dense de I, donc partout. Par suite une telle section est nulle. ▫

5.5. Sections de $(\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2}$ pour $m = \chi - 1$.

On considère maintenant un fibré inversible L de degré d quelconque sur le plan projectif $\mathrm{X} = \mathbb{P}_2$, dont on désigne par χ la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Lemme 36. — *Pour $m = \chi - 1$ et pour tout entier i le morphisme canonique*

$$\mathrm{S}^i(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]})) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes i})$$

est injectif.

Démonstration. Considérons l'application rationnelle $\phi : \mathbb{P}_2^{[m]} - - \to \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L}))$ qui associe à z la courbe c de degré d contenant z. Elle est régulière sur l'ouvert V des $z \in \mathbb{P}_2^{[m]}$ tels que le morphisme d'évaluation $\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{L}^{[m]}$ soit surjectif. Le complémentaire de cet ouvert est de codimension 2. C'est le morphisme associé à la dualité étrange pour le fibré inversible L . Cette application rationnelle est évidemment dominante. Donc le morphisme ci-dessus est bien injectif d'après la proposition 12. ▫

Proposition 37. — *On suppose $m = \chi - 1$. Le morphisme canonique*

$$\mathrm{S}^i(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, \det \mathrm{L}^{[m]})) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes i})$$

est un isomorphisme pour $d = 1$ ou 2.

Démonstration. L'injectivité n'est autre que le lemme 36 ci-dessus. Pour $d = 1$ l'isomorphisme a été obtenu dans le lemme 35. Il s'agit donc de prouver que si $d = 2$, le morphisme

$$\mathrm{S}^i(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[5]}, \det \mathrm{L}^{[5]})) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[5]}, \det \mathrm{L}^{[5]})^{\otimes i})$$

est un isomorphisme.

Revenons à la situation générale, avec $m = \chi - 1$. Considérons le schéma d'incidence I des couples $(z, c) \in \mathbb{P}_2^{[m]} \times \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L}))$ des couples tels que $z \subset c$. C'est le schéma des zéros de la section canonique de $\mathrm{L}^{[n]} \boxtimes \mathcal{O}(1)$. Ses composantes irréductibles sont de dimension $\geq \chi - 1 + m$ d'après le lemme de Krull. Mais il est clair que ces composantes sont de dimension $\chi + m - 1$. En effet, soit $\rho : \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L}))$ la courbe universelle. L'ouvert $\mathcal{U}$ des (z, c) tels que z soit contenu dans l'ouvert de U où ρ est lisse est de dimension $\leq \chi + m - 1$. De plus, $\mathcal{U}$ est lisse. L'ensemble de ramification est de dimension $\chi - 2$, et les sous-schémas de longueur n de support un point forment un fermé de dimension $m - 1$ d'après un résultat de Briançon. Par suite, le fermé des (z, c) tels que z rencontre le fermé des points de ramification est de dimension $\chi + m - 3$. Par suite, I n'a qu'une composante de dimension $\chi + m - 1$. Il en résulte que le schéma I est localement intersection complète ; du fait que son ensemble singulier est de codimension ≥ 2 on voit que I est non seulement irréductible, mais normal. Considérons les projection canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L})) \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \\ \mathbb{P}_2^{[m]} & & \end{array}$$

Le morphisme pr_1 est birationnel et projectif ; de plus $\mathbb{P}_2^{[m]}$ est lisse, donc normal. Par suite, $\mathrm{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\mathrm{I}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2{}^{[m]}}$ (*cf.* Hartshorne [5] corollaire 11.4 page 280). Si on applique le lemme 34 à la projection pr_2, on obtient $\mathrm{pr}_{2*}(\mathcal{O}_\mathrm{I}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L}))}$. On a sur I un morphisme canonique $\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathrm{L}^{[m]}$ qui s'annule sur le sous-fibré de Hopf, et donc un morphisme $\mathrm{pr}_2^*(\mathrm{Q}) \longrightarrow \mathrm{pr}_1^*(\mathrm{L}^{[m]})$ du fibré quotient canonique Q de rang m sur $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{L}))$ inversible en dehors de l'image réciproque du fermé des points où $\mathrm{L}^{[m]}$ n'est pas engendré par ses sections. Par suite on a un morphisme canonique $\mathrm{pr}_2^*(\det \mathrm{Q}) \longrightarrow \mathrm{pr}_1^*(\det \mathrm{L}^{[m]})$ qui ne s'annule que sur le diviseur exceptionnel ; on en déduit un morphisme canonique non identiquement nul $\mathrm{pr}_2^*(\mathcal{O}(i)) \longrightarrow \mathrm{pr}_1^*((\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes i})$. Compte-tenu du lemme 34, la formule de projection conduit à nouveau au lemme 36. Il s'agit ici de vérifier dans le cas $d = 2$, et $m = 5$ que toutes les sections de $(\det \mathrm{L}^{[5]})^{\otimes i}$ s'annulent à l'ordre i sur le diviseur exceptionnel.

Le diviseur exceptionnel de I est l'éclaté de la sous-variété $\Sigma \subset \mathbb{P}_2^{[5]}$ de codimension 2 des z qui contiennent un sous-schéma fini de longueur 4 porté par une droite. Il a deux composantes irréductibles et réduites dont l'une est l'éclatement de la sous-variété $\mathrm{Y} = \mathrm{A}^{[5]}$ de codimension 3 des points z alignés et l'autre l'adhérence de l'éclaté de $\mathrm{U} = \Sigma \setminus \mathrm{Y}$. D'après la démonstration ci-dessus, il s'agit de prouver que toute section de $(\det \mathrm{L}^{[5]})^{\otimes i}$ s'annule à l'ordre i le long de Y et le long de U.

Soit Q le fibré canonique quotient de rang 2 de $\mathrm{V}^* = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$ sur le plan projectif dual, dont la fibre en un point ℓ est $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\ell(1))$. Soit $\mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ la variété d'incidence des couples (ℓ, x) où x est un point appartenant à la droite ℓ. Considérons pour $n \geq 2$ la sous-variété des $z \in \mathbb{P}_2^{[n]}$ contenus dans une droite ; elle s'identifie au fibré en espaces projectifs $\mathbb{P}(\mathrm{S}^n\mathrm{Q}^*)$.

Lemme 38. — *Le fibré conormal de* $\mathrm{A}^{[n]}$ *dans* $\mathbb{P}_2^{[n]}$ *est isomorphe à une somme directe de fibrés inversibles* $\mathcal{O}(1)$ *le long des fibres de* $\mathrm{A}^{[n]} \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$.

Démonstration. La sous-variété $\mathrm{A}^{[n]}$ est la variété déterminantielle des mineurs maximaux associée au morphisme d'évaluation $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{[n]}$. Déterminons le noyau $\mathcal{N}$ et le conoyau $\mathcal{Q}$ de ce morphisme le long de $\mathrm{A}^{[n]}$. Dans l'identification $\mathrm{A}^{[n]} = \mathrm{P}(\mathrm{S}^n\mathrm{Q}^*)$, le conoyau est l'image directe de $\mathcal{O}(-1, -n+1)$ par la projection $\pi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{Y}$, où $\mathrm{I} = \mathrm{Y} \times_{\mathbb{P}_2^*} \mathrm{D}$ est la variété d'incidence. Par suite, il s'identifie à $\mathcal{O}(-1) \otimes (\det \mathrm{Q})^* \otimes \mathrm{S}^{n-3}\mathrm{Q}^*$. On a alors

$$\mathcal{N} = \det \mathcal{Q} \otimes (\det \mathcal{O}(1)^{[n]})^* = \mathcal{O}(2-n) \otimes (\det \mathrm{Q})^{\otimes - \frac{(n-1)(n-2)}{2}} \otimes (\det \mathcal{O}(1)^{[n]})^*.$$

L'espace conormal N_Y^* à $\mathrm{Y} = \mathrm{A}^{[n]}$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N})$. Puisque $(\det \mathcal{O}(1)^{[n]})$ est isomorphe à $\mathcal{O}(2-n)$ le long des fibres de $\mathrm{Y} = \mathrm{A}^{[n]} \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$, on voit que ce fibré conormal est isomorphe à une somme directe de $\mathcal{O}(1)$ le long de ces fibres. □

Montrons que les sections de $(\det \mathrm{L}^{[5]})^{\otimes i}$ s'annulent à l'ordre i le long de U. On a une application rationnelle

$$\mathrm{A}^{[4]} \times \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \Sigma$$

qui est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert (dense) $\mathrm{U} \subset \Sigma$ des points z qui ne pas contenus dans une droite. L'image réciproque du fibré inversible $\det \mathrm{L}^{[5]}$ est en dehors du diviseur universel $\det(\mathrm{L}^{[4]}) \boxtimes \mathcal{O}(1)$. En restriction à $\mathrm{A}^{[4]}$, le fibré $\det(\mathrm{L}^{[4]})$ sur $\mathrm{A}^{[4]}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(-1, 1)$. Par suite, pour tout entier $i > 0$ les sections de $(\det \mathrm{L}^{[5]})^{\otimes i})$ s'annulent le long de Σ.

On doit prouver que ces sections s'annulent à l'ordre i. On a besoin pour ceci d'une description de l'espace normal de Σ le long de l'ouvert U. Dans l'ouvert U, le schéma Σ coïncide (au moins ensemblistement) avec la variété déterminantielle des points où le morphisme d'évaluation

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \mathcal{O}_\mathrm{U} \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathrm{L}^{[5]}|_\mathrm{U}$$

est de rang 4, et Σ est une variété déterminantielle, et de sorte qu'on dispose d'une différentielle

$$\mathrm{N}_\Sigma \longrightarrow \mathrm{Hom}(\ker \mathrm{ev}_\Sigma, \mathrm{coker}\ \mathrm{ev}_\Sigma).$$

Il suffit donc de déterminer sur cet ouvert le noyau et le conoyau de ev_Σ, et de vérifier que sur U ce morphisme est un isomorphisme. Soit $z = (\zeta, a) \in \Sigma$, où ζ est de longueur 4 porté par une droite ℓ d'équation $u = 0$ qui évite le point a. Alors le noyau est au dessus de z le plan des coniques $ua^\perp$. Compte-tenu du fait que l'application linéaire $\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{L}|_\ell) \oplus \mathrm{L}_a$ est surjective, le conoyau est aussi le conoyau du morphisme

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{L}|_\ell) \longrightarrow (\mathrm{L}^{[4]})_\zeta.$$

Il en résulte que coker ev_Σ est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)$ sur chaque fibre du fibré en espaces projectifs $\mathbb{P}(\mathrm{S}^4\mathrm{Q}^*)$. Soit R le fibré quotient canonique de rang 2 du fibré trivial de fibre V sur $\mathbb{P}_2$. L'espace vectoriel tangent en $z = (\zeta, a)$ à $\mathbb{P}_2^{[5]}$ est isomorphe à $\mathrm{R}_a \oplus \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\zeta)$ et le morphisme ci-dessus est induit par l'application linéaire

$$(\mathrm{R}_a \oplus \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\zeta)) \otimes \ker ev_\Sigma \longrightarrow \mathrm{L}_a \oplus (\mathrm{L}^{[4]})_\zeta$$

définie par $(\dot{a} + \dot{\zeta}) \otimes uv) \mapsto (u(a)v(\dot{a}), d(uv)|_\zeta)$. Soit $\delta : \mathrm{L}_\zeta^{[4]} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)_\zeta = \mathbb{C}$ la forme linéaire canonique. Il s'agit de voir que l'application linéaire induite $v \mapsto \delta(d(uv)|_\zeta.\dot{\zeta})$

$$\ker ev_\Sigma \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\zeta)^*$$

est injective.

Pour $v \in \mathrm{R}_a$ non nul, l'application linéaire $d(uv) : \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\zeta) \longrightarrow (\mathrm{L}^{[4]})_\zeta$ est surjective si la droite d'équation $v = 0$ ne rencontre pas ζ. Donc il existe $\dot{\zeta} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\zeta)$ tel que $\delta(d(uv)(\dot{\zeta})) \neq 0$. Si v s'annule en un point $b \in \zeta$, l'image de $d(uv)$ sur ζ est constituée des sections de $\mathrm{H}^0(\mathrm{L}|_\zeta)$ s'annulant en b. Ceci détermine un hyperplan transverse à $\ker \delta$ d'après le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1)|_{\zeta'}) \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(2)|_\zeta) \arrow[r] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

où ζ' est le diviseur de degré 3 défini par $\zeta' = \zeta - b$. Donc il existe encore $\dot{\zeta} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\zeta)$ tel que $\delta(d(uv)(\dot{\zeta})) \neq 0$.

Il en résulte que la variété déterminantielle ci-dessus est lisse et coïncide avec Σ sur l'ouvert U. Sur les fibres de $\mathbb{P}(\mathrm{S}^4\mathrm{Q}^*)$, le faisceau $\mathrm{S}^j\mathrm{N}_\Sigma^* \otimes (\det \mathrm{L}^{[5]})^i$ est isomorphe à une somme directe de fibrés inversibles $\mathcal{O}(-i + j)$. Ainsi, toute section $(\det \mathrm{L}^{[5]})^{\otimes i}$ s'annule à l'ordre i le long de U.

Il reste à prouver que ces sections s'annulent aussi à l'ordre i le long de $\mathrm{Y} = \mathrm{A}^{[5]}$. Le long des fibres de $\mathrm{A}^{[5]} \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ le fibré $\mathrm{S}^j\mathrm{N}_\mathrm{Y}^* \otimes (\det \mathrm{L}^{[5]})^{\otimes i}$ est isomorphe à une somme directe de fibrés inversibles $\mathcal{O}(-2i + j)$. Pour $j < i$, les sections de ce fibré sont donc nulles. D'où la proposition. □

La situation est différente en degré $d \geq 3$.

Proposition 39. — *Considérons le fibré inversible* $\mathrm{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$ *sur le plan projectif.*

(i) *On a* $\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[9]}, (\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes 2}) = 56$.

(ii) *Soit* $\Sigma \subset \mathbb{P}_2^{[2]}$ *la sous-variété du schéma de Hilbert* $\mathbb{P}_2^{[9]}$ *des points* z *où* $\mathrm{L}^{[9]}$ *n'est pas engendré par ses sections. Le sous-espace des sections qui s'annulent sur* Σ *s'identifie* $\mathrm{S}^2\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[9]}, \det \mathrm{L}^{[9]})$.

Démonstration de la proposition 39

Considérons le morphisme d'évaluation sur $\mathbb{P}_2^{[9]}$

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathrm{L}^{[9]}$$

et la variété des mineurs maximaux Σ. Ses composantes irréductibles sont de codimension ≤ 2.

Lemme 40. — *La variété* Σ *est intègre, Cohen-Macaulay et normale de codimension 2.*

Démonstration. Considérons la grassmannienne $\mathrm{G} = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}^0(\mathrm{L}))$, de dimension 16, des sous-espaces vectoriels de codimension 2. On a une application rationnelle

$$\varphi : \Sigma - - \to \mathrm{G}$$

qui est régulière sur l'ouvert des points z où le morphisme ev est de rang 8, qui associe au point z le noyau de $\mathrm{ev}(z)$ quand il est de dimension 2. Si le rang est ≤ 7, soit z contient un sous-schéma de longueur ≥ 6 contenu dans une droite, ce qui représente un fermé B_1 irréductible de dimension 14, soit z est contenu dans une conique ce qui représente aussi un fermé irréductible B_2 de dimension 14. Soit $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2$. Le morphisme induit $\psi : \Sigma \setminus \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{G}$ est inversible au-dessus de l'ouvert de G des sous-espaces $h \subset \mathrm{H}^0(\mathrm{L})$ dont le lieu de base est fini. Les pinceaux de cubiques qui contiennent une droite forment un fermé A_1 de dimension 10. Ceux qui contiennent une conique forment un fermé A_2 de dimension 7. Le morphisme φ contracte le fermé E_1 des z qui contiennent un sous-schéma de longueur 5 contenu dans une droite, et le fermé E_2 des sous-schémas qui contiennent un sous-schéma de longueur 8 contenu dans une conique. Evidemment, on a $\dim \mathrm{E}_1 = \dim \mathrm{E}_2 = 15$.

Il en résulte que Σ a une seule composante irréductible et donc Σ est de dimension attendue. Par suite Σ est de Cohen-Macaulay.

Pour voir que Σ est normale, il suffit d'après le critère Serrre de vérifier qu'elle est lisse en dehors de B. Il suffit pour ceci de vérifier que la différentielle

$$\mathrm{T}_z\mathbb{P}_2^{[9]} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\ker\ \mathrm{ev}(z), \mathrm{coker}\ \ \mathrm{ev}(z))$$

est surjective. La démonstration est semblable à celle qui a été donnée dans le lemme 38 au paragraphe 5.5. Soit $z = (z', z'') \in \mathbb{P}_2^{[5]} \times \mathbb{P}_2^{[4]}$ un point de E_1. Le noyau est formé des cubiques uq, où q est le pinceau des coniques contenant z'', et u l'équation de la droite ℓ contenant z'. Le morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{L}|_\ell) \oplus (\mathrm{L}^{[4]})_{z''}$$

est surjectif. Donc le conoyau coker $ev(z))$ est le conoyau de $\mathrm{H}^0(\mathrm{L}|_\ell) \longrightarrow (\mathrm{L}^{[5]})_{z'}$. Il en résulte que coker ev est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)$ le long des fibres du fibré $\mathrm{A}_5 \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$. L'espace tangent de Zariski en z est isomorphe à $\mathrm{H}^0(\mathrm{N}_{z'}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_{z''})$. La différentielle ci-dessus est induite par l'application linéaire

$$(\mathrm{H}^0(\mathrm{N}_{z'}) \oplus \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_{z''})) \otimes \ker \mathrm{ev}(z) \longrightarrow (\mathrm{L}^{[9]})_z.$$

définie par

$$((\dot{z}', \dot{z}'') \otimes uq) \mapsto d(uq)|_z(((\dot{z}', \dot{z}'')$$

Soit $\delta : \mathrm{L}_{z'}^{[5]} \longrightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire canonique. Il s'agit de voir que l'application linéaire

$$\ker(\mathrm{ev}(z)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_{z'})*$$

définie par $q \mapsto (\dot{z}' \mapsto \delta(d(uq)|_{z'}(\dot{z}')))$ est injective. Si $q \in \ker ev(z)$ la différentielle $d(uq)|_{z'}) : \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_{z'}) \longrightarrow (\mathrm{L}^{[5]})_{z'}$ est de rang ≥ 3, et son image est transverse à $\ker \delta$. Par suite, il existe $\dot{z}' \in \mathrm{H}^0(\mathrm{N}_{z'})$ tel que $\delta(d(uq)(\dot{z}') \neq 0$. Ceci prouve l'injectivité. On procède de même en un point de E_2. □

Lemme 41. — *Le groupe de Picard de* $\Sigma \setminus \mathrm{B}$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}^3$.

Démonstration. Considérons le morphisme $\psi : \Sigma \setminus \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{G}$. Il est clair que les fermés A_1 et A_2 sont lisses en dehors de l'intersection $\mathrm{A}_{12} = \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2$ et que l'image réciproque de A_1 (resp. A_2) est le diviseur lisse E_1 (resp. E_2). Soit E_{12} l'intersection de E_1 et E_2. Le morphisme $\Sigma \setminus (\mathrm{B} \cup \mathrm{E}_{12})$ est l'éclatement de $\mathrm{G} \setminus \mathrm{A}_{12}$ le long de $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$. Par suite $\mathrm{Pic}(\Sigma \setminus \mathrm{B} \cup \mathrm{E}_{12}) = \mathbb{Z}^3$. Puisque E_{12} est de codimension ≥ 2 dans la variété lisse $\Sigma \setminus \mathrm{B}$, on obtient $\mathrm{Pic}(\Sigma\setminus) = \mathbb{Z}^3$. □

Lemme 42. — *Pour* $i \geq 0$, *l'espace vectoriel* $\mathrm{H}^0(\Sigma, (\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes i})$ *des sections du fibré inversible* $(\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes i}|_\Sigma$ *est de dimension 1.*

Démonstration. Considérons le morphisme $\psi : \Sigma \setminus \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{G}$. Désignons par $\mathrm{U} \subset \mathrm{G} \times \mathrm{H}^0(\mathrm{L})$ le sous-fibré universel de rang 2. Soit $\mathrm{W} = \mathrm{G} \setminus \mathrm{A}$. Sur $\mathrm{W} \times \mathbb{P}_2$ le fibré $\mathrm{U}^* \boxtimes \mathrm{L}$ a une section canonique ; considérons le schéma des zéros de cette section : c'est un sous-schéma Z de codimension 2, plat de longueur 9 au-dessus de W. Il définit un morphisme $s : \mathrm{W} \longrightarrow \Sigma$

qui n'est autre que l'inverse de ψ. De la résolution de Koszul on tire la suite exacte sur $\mathrm{W} \times \mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow \det \mathrm{U} \boxtimes \mathrm{L}^* \longrightarrow \mathrm{U} \boxtimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O} \boxtimes \mathrm{L} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{L}) \longrightarrow 0$$

et par conséquent par image directe sur W, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{W}} \longrightarrow \mathrm{L}^{[9]}|_{\mathrm{W}} \longrightarrow \det \mathrm{U}|_{\mathrm{W}}.$$

Il en résulte que $\det \mathrm{L}^{[9]}|_{\mathrm{W}}$ est trivial. Il en résulte que $\det \mathrm{L}^{[9]}$ est trivial en dehors de E. Par suite, $\det \mathrm{L}^{[9]}$ est isomorphe sur $\Sigma \backslash \mathrm{B}$ au fibré inversible associé à un diviseur $r_1\mathrm{E}_1 + r_2\mathrm{E}_2$, où r_1 et r_2 sont des entiers relatifs. De plus, le long des fibres des fibrés en espaces projectifs $\mathrm{E}_1 \longrightarrow \mathrm{A}_1$ et de $\mathrm{E}_2 \longrightarrow \mathrm{A}_2$ le fibré $\det \mathrm{L}^{[9]}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)$. Par conséquent $r_1 = r_2 = 1$ et $\det \mathrm{L}^{[9]} = \mathcal{O}(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2)$. Puisque Σ est normale, une section de $(\det \mathrm{L}^{9]})^{\otimes i}$ sur $\Sigma \setminus \mathrm{B}$ se prolonge en une section sur Σ. Il en résulte $\dim \mathrm{H}^0(\Sigma \setminus \mathrm{B}, (\det \mathrm{L}^{[9]})^i = 1$ pour $i \geq 0$. □

Démonstration de la proposition 39

On a la résolution de Eagon-Northcott de la variété déterminantielle Σ (*cf.* [1], page 257)

$$0 \longrightarrow (\mathrm{L}^{[9]})^* \otimes \wedge^{10}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \longrightarrow \wedge^9 \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \det \mathrm{L}^{[9]} \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma(\det \mathrm{L}^{[9]}) \longrightarrow 0$$

En tensorisant cette suite exacte par $\det \mathrm{L}^{[9]}$ on obtient la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \wedge^8 \mathrm{L}^{[9]} \otimes \wedge^{10}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \longrightarrow \wedge^9 \mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \det \mathrm{L}^{[9]} \longrightarrow (\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes 2} \\ \longrightarrow \mathcal{O}_\Sigma((\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes 2} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Mais on a le lemme suivant

Lemme 43. — *Soit* X *une surface algébrique projective lisse telle que* $q = p_g = 0$, *et* L *un fibré inversible sur* X *tel que* $\mathrm{L} \otimes \omega_{\mathrm{X}}^{-1}$ *soit ample. Pour* $q > 0$ *et* $i \geq 0$ *on a*

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{X}^{[n]}, \wedge^i \mathrm{L}^{[n]}) = 0$$

Nous admettrons ce lemme, dont la rédaction est en cours. Plus précisément, on espère si $q = p_g = 0$ un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$\wedge^i \mathrm{H}^*(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^*(\mathrm{X}^{[n]}, \wedge^i \mathrm{L}^{[n]}$$

Cet isomorphisme est facile pour $i = 0$; il est établi pour $i = 1$ par G. Danila dans [5] et pour $i = 2$ par L. Scala dans sa thèse [24] ; nous l'avons établi ici pour $i = n$ (lemme (22)).

Il en résulte la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{S}^2\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[9]}, \det \mathrm{L}^{[9]}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[9]}, (\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes 2}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\Sigma, (\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes 2}) \longrightarrow 0.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 39.

5.6. Sections de $(\det L^{[4]})^{\otimes i}$ **pour** $L = \mathcal{O}(2)$

Soit W un espace vectoriel de dimension ℓ ; le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$ opère à gauche sur la puissance tensorielle $\otimes^m W$. A toute partition $\lambda = \{\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_\ell > 0\}$ de m, on associe un tableau de Young dont on numérote les cases ; soit P_λ (resp Q_λ) le sous-groupe de $\mathfrak{S}_m$ laissant invariant les colonnes (resp. les lignes) du tableau de Young. La représentation $S^\lambda W$ de GL(W) est l'image du symétriseur $c_\lambda \in \operatorname{End}(\otimes^m W)$ de Young défini par $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$, où

$$a_\lambda = \sum_{g \in P_\lambda} \; ; \; b_\lambda = \sum_{g \in Q_\lambda} \epsilon_g g$$

et où ϵ_g est la signature de g. Cette représentation est isomorphe à l'espace vectoriel des sections sur la variété des drapeaux complets D(W) du fibré inversible $L^\lambda = \otimes_i L_i^{\lambda_i}$ défini de la manière suivante : on considère la filtration décroissante canonique du fibré trivial sur D(W)

$$0 \subset W_\ell \subset \ldots \subset W_2 \subset W_1 = W \otimes \mathcal{O}$$

dont les quotients successifs $L_i = W_i / W_{i+1}$ sont des fibrés inversibles. Alors $L^\lambda = \otimes_i L_i^{\otimes \lambda_i}$ La dimension de la représentation irréductible $S^\lambda W$ est donnée par la formule de Giambelli [11]

$$\dim S^\lambda W = \det((\dim S^{\lambda_i + j - i} W))_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq j \leq \ell}})$$

La formule de Pieri (duale) montre que la représentation irréductible $S^{i,i,i,i}W$ est un facteur irréductible de $S^i \wedge^4 W$.

Proposition 44. — *On prend* $L = \mathcal{O}(2)$ *sur le plan projectif. Le morphisme canonique*

$$S^i H^0(\mathbb{P}_2, \det L^{[4]}) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}_2^{[4]}, (\det L^{[4]})^{\otimes i})$$

se factorise par $S^{i,i,i,i}H^0(L)$ *par un isomorphisme*

$$S^{i,i,i,i}H^0(L) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}_2^{[4]}, (\det L^{[4]})^{\otimes i})$$

Démonstration. On considère le morphisme d'évaluation $H^0(L) \longrightarrow L^{[4]}$. Ce morphisme est génériquement de rang 4, et il est de rang 3 au-dessus du sous-schéma $A^{[4]}$. Soit U l'ouvert complémentaire. On dispose d'un morphisme $\phi : U \longrightarrow G = \operatorname{Grass}(2, H^0(L))$ dans la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 2 associé au fibré noyau du morphisme d'évaluation. Considérons la variété Z des couples (h, z) des couples formés d'un point $z \in \mathbb{P}_2^{[4]}$ et d'un sous-espace de dimension 2 de $H^0(L)$ s'annulant sur z. La variété B est le schéma des zéros de la section canonique de $H^* \boxtimes L^{[4]}$ où H est le sous-fibré universel de rang 2 sur la grassmannienne. Il a deux composantes irréductibles de dimension 8, dont l'une B est l'éclaté $B = B_{A^{[4]}}(\mathbb{P}_2^{[4]})$ de $\mathbb{P}_2^{[4]}$ le long de $A^{[4]}$. On dispose d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & \mathbb{P}_2^{[4]} \\ G & \end{tikzcd}$$

où le morphisme pr_1 est birationnel. Soit R le fibré quotient universel de rang 4 sur la grassmanienne G. Sur B, le morphisme d'évaluation ev : $\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \otimes \mathcal{O}_\mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{pr}_2^*(\mathrm{L}^{[4]})$ s'annule sur le sous-fibré universel par définition et donc se factorise par R. On obtient une section de $\det \mathrm{Q} \boxtimes \det \mathrm{L}^{[4]}$ dont le schéma des zéros est le diviseur universel. Ceci fournit un morphisme canonique injectif $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, (\det \mathrm{R})^{\otimes i}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_4, (\det \mathrm{L}^{[4]})^{\otimes i})$ dont l'image est l'espace vectoriel des sections qui s'annulent à l'ordre i le long de $\mathrm{A}^{[4]}$. D'après la section 5.6, les sections s'annulent le long de $\mathrm{A}^{[4]}$. Montrons que ces sections s'annulent à l'ordre i le long de $\Sigma = \mathrm{A}^{[4]}$.

La sous-variété $\Sigma = \mathrm{A}^{[4]}$ est la variété déterminantielle associée au morphisme d'évaluation $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1)) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{[4]}$. On a vu dans le lemme 38 que le fibré conormal N^*_Σ à Σ est isomorphe à

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{Q}, \mathcal{N}) = \mathcal{O}(-1)) \otimes \mathrm{Q} \otimes \det \mathrm{Q} \otimes (\det \mathcal{O}(1)^{[4]})^*$$

Sur les fibres de $\Sigma = \mathbb{P}(\mathrm{S}^4\mathrm{Q}^*) \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ le fibré inversible $(\det \mathcal{O}(1)^{[4]})^*$ est isomorphe à $\mathcal{O}(2)$, et le fibré $\det \mathrm{L}^{[4]}$ à $\mathcal{O}(-1)$. Par suite, le fibré $(\det \mathrm{L}^{[4]})^{\otimes i} \otimes \mathrm{S}^j \mathrm{N}^*_\Sigma$ est isomorphe sur les fibres de à une somme directe de fibrés $\mathcal{O}(j-i))$ sur chaque fibre. Par suite, les sections s'annulent à l'ordre i le long de Σ.

Ainsi, le morphisme $\mathrm{H}^0(\mathrm{G}, (\det \mathrm{R})^{\otimes i}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_4, (\det \mathrm{L}^{[4]})^{\otimes i})$ est un isomorphisme. Considérons le plongement $i : \mathrm{G} \hookrightarrow \mathbb{P}^*(\wedge^4(\mathrm{H}^0(\mathrm{L})))$, (espace projectif des hyperplans) induit par le fibré inversible $\det \mathrm{R}$. On en déduit un morphisme

$$\mathrm{S}^i(\wedge^4 \mathrm{H}^0(\mathrm{L})) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{G}, (\det \mathrm{R})^i) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[4]}, (\det \mathrm{L}^{[4]})^{\otimes i}))$$

qui n'est autre que le morphisme canonique. Par construction, ce morphisme se factorise par le quotient $\mathrm{S}^{i,i,i,i}\mathrm{H}^0(\mathrm{L})$ de $\mathrm{S}^i(\wedge^4 \mathrm{H}^0(\mathrm{L}))$. □

5.7. L'espace de modules M_2

Soit L un fibré inversible de degré d sur le plan projectif $\mathrm{X} = \mathbb{P}_2$. donc de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = \binom{d+2}{2}$. On prend $n = 1$ et donc $m = \chi - 1$. L'espace de modules M_{c^*} considéré est l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 1, de classes de Chern $c_1 = d, c_2 = m$, donc $\mathrm{M}_{c^*} = \mathbb{P}_2^{[m]}$ et $\mathcal{D}_{c^*,2c} = (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2}$.

Théorème 45. — *Soit* L *un fibré inversible de degré* $d \geq 1$ *sur le plan projectif* $\mathrm{X} = \mathbb{P}_2$, *de caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi = \binom{d+2}{2}$. *Soit* $m = \chi - 1$.

(i) *L'espace de modules* M_2 *s'identifie à* $\mathbb{P}_5$, *et le fibré inversible* $\mathcal{D}_{2c,c^*}$ *à* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(d)$.

(ii) *Le morphisme étrange*

$$\mathrm{D}_{2c,c^*} : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_2, \mathcal{D}_{2c,c^*})$$

est un isomorphisme pour $d \leq 3$.

Démonstration. On sait que l'espace de modules M_2 des classes de faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $(0, 2)$ sur le plan projectif s'identifie à l'espace projectif des coniques $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(2)))$ par le morphisme qui associe à la classe d'un faisceau semi-stable F de classe c la courbe de ses droites de saut. Considérons dans M_2 le fermé SM_2 des points strictement semi-stables. Il s'identifie à l'hypersurface des coniques singulières. Cette hypersurface est aussi la puissance symétrique $\mathrm{S}^2\mathbb{P}_2$; le plongement $\mathrm{S}^2\mathbb{P}_2 \hookrightarrow \mathbb{P}_5$ s'identifie au plongement de Segré, et on a vu que le faisceau induit sur cette hypersurface par $\mathcal{D}_{2c,c^*}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(d, d)/\mathfrak{S}_2$. Par suite $\mathcal{D}_{c,c^*} = \mathcal{O}(d)$. Il résulte du lemme ci-dessus que si $d = 1$ ou $d = 2$ le morphisme μ est un isomorphisme. D'après le critère 29, le morphisme étrange D_{c,c^*} est injectif. Dans le diagramme (5.7) toutes les flèches sont alors des isomorphismes.

Si $d > 2$, on sait seulement que dans le diagramme (5.1) ci-dessus la première flèche verticale est surjective. Il en est évidemment de même de la seconde, mais il est plus compliqué d'en déduire que D_{2c,c^*} est un isomorphisme. Pour $d = 3$ cela repose sur l'énoncé 39 qui nous permet déjà de constater que les deux membres sont de même dimension.

Fin de la démonstration pour $d = 3$.

On considère une base $v_2, \ldots, v_{56}$ de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[9]}, (\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes 2})$, qu'on complète pour obtenir une base $v_1, \ldots, v_{56}$ de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[9]}, (\det \mathrm{L}^{[9]})^{\otimes 2}$. Ainsi, la section v_1 est non nulle au point générique de Σ.

On écrit

$$\sigma_{2c,c^*} = \sum_i u_i \otimes v_i$$

où $u_i \in \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_2, \mathcal{D}_{2c,c^*})$. D'après le diagramme (5.7) ci-dessus, les sections $u_2, \ldots, u_{56}$ de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_2, \mathcal{D}_{2c,c^*})$ sont indépendantes puisqu'elles se restreignent à SM_2 en une base de $\mathrm{H}^0(\mathrm{SM}_2, \mathcal{D}_{2c,c^*})$. Montrons que la section u_1 est indépendantes des suivantes. Soit $z \in \Sigma$ tel que $v_1(z) \neq 0$. Par tout point général $z' \in \mathbb{P}_2$, il existe une cubique qui contient à la fois z et z'. Par suite, la section u_1 s'annule sur SM_2. On a d'autre part une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-6) \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^2 \longrightarrow \mathrm{I}_z \longrightarrow 0$$

et par suite pour tout fibré vectoriel F stable de rang 2 et de classes de Chern $(0, 2)$ sur le plan projectif on a la suite exacte

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{F})^2 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(3) \otimes \mathrm{I}_z) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{F}(-3)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathrm{F})^2$$

On a $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}) = \mathrm{H}^1(\mathrm{F}) = 0$. D'autre part, puisque F est localement libre de classe de Chern $c_1 = 0$, on a $\mathrm{F} = \mathrm{F}^*$ et par dualité de Serre $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}(-3)) = \mathrm{H}^1(\mathrm{F})^* = 0$. Par suite $\mathrm{H}^0(\mathrm{I}_z\mathrm{F}(3)) = \mathrm{H}^1(\mathrm{I}_z\mathrm{F}(3)$. Ceci signifie que la fonction thêta associée au point z, qui à homothétie près est u_1, n'est pas nulle sur le complémentaire de SM_2. Autrement dit, u_1 est une équation de l'hypersurface SM_2. Il en résulte que les sections $u_1, \ldots, u_{56}$ constituent une base de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_2, \mathcal{D}_{2c,c^*})$.

5.8. L'espace de modules M_4

Soit L un fibré inversible de degré d sur le plan projectif ; sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donc de caractéristique $\chi = \binom{d+2}{2}$; on prend cette fois $n = 2$ et $m = \chi - 2$. L'espace de modules M_{c^*} considéré est encore l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 1, de classes de Chern $c_1 = d, c_2 = m$, donc $\mathrm{M}_{c^*} = \mathbb{P}_2^{[m]}$ et $\mathcal{D}_{c^*,2c} = (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2}$.

Théorème 46. — *On suppose* L *de degré* $d = 1$ *ou* $d = 2$. *Le morphisme étrange*

$$\mathrm{D}_{2c,c^*} : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, (\det \mathrm{L}^{[m]})^{\otimes 2})^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_4, \mathcal{D}_{2c,c^*})$$

associé à la classe c^* *des faisceaux sans torsion de rang un et classes de Chern* $c_1 = d, c_2 = \chi - 2$ *est un isomorphisme.*

Les conditions du critère 29 sont satisfaites. Il suffit donc de montrer que les deux membres ont même dimension. Pour $d = 1$, le premier membre est $\mathrm{S}^2\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathrm{L})$ donc de dimension 6. Reste à calculer la dimension du second membre. L'espace de modules M_4 contient la sous-variété Σ de codimension 3, des classes de faisceaux stables E tels que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1)) = 3$; on les appelle spéciaux [19] ; pour les autres, cette dimension est 2. Cette sous-variété évite l'ensemble singulier.

Lemme 47. — *Pour tout faisceau semi-stable* E *non spécial de rang 2, et classes de Chern* $c_1 = 0, c_2 = 4$, *il existe un point* a *tel que si l'on prend* $\mathrm{F} = \mathcal{I}_a(1)$ *on ait*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}) = 0.$$

Si E *est spécial, on a* $\mathrm{H}^*(\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}) \neq 0$ *quel que soit le choix de* a.

Démonstration. Un tel faisceau E a une présentation comme extension de faisceaux $0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^2 \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \Theta(-1) \longrightarrow 0$ où Θ est un faisceau pur de dimension 1 dont le support schématique est une conique C, de caractéristique d'Euler Poincaré $\chi = 0$; puisque $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1)) \leq 3$, pour tout sous-faisceau de $\Theta' \subset \Theta$, la caractéristique $\chi(\Theta') \leq 1$. Dire que E n'est pas spécial signifie que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{E}(1)) = 2$; il revient au même de dire que Θ est semi-stable : alors $\mathrm{H}^0(\Theta) = 0$. On choisit $a \notin \mathrm{C}$, de sorte que $\mathrm{H}^0(\Theta \otimes \mathcal{I}_a) = \mathrm{H}^0(\Theta) = 0$, et $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_a \otimes \mathbb{C}^2) = 0$. Il en résulte l'énoncé. Par contre, si a est ainsi choisi, on a $\mathrm{H}^0(\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}) \neq 0$ si E est spécial. □

Corollaire 48. — *On suppose* $d = 1$.

(i) *le fibré inversible* $\mathcal{D}_{c,c^*}$ *sur* M_4 *est engendré par ses sections en dehors de la sous-variété* Σ *des faisceaux spéciaux par les fonctions thêtas.*

(ii) *Le système linéaire complet* $|\mathcal{D}_{c,c^*}|$ *a pour points de base la sous-variété* Σ.

Démonstration. L'assertion (i) résulte trivialement du lemme ci-dessus, qui entraîne aussi que les fonctions thêta s'annulent sur Σ. On doit montrer que c'est le cas pour toutes les sections de $\mathcal{D}_{c,c^*}$. On utilise la description de Σ donnée dans [19] : c'est la variété des extensions

$$0 \longrightarrow \mathrm{Q}^* \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-3) \longrightarrow 0$$

Soit $\pi : \mathrm{D} \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ la variété d'incidence des couples $(\ell, x) \in \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$ tels que $x \in \ell$. Soit $\mathcal{E} = \pi_*(\mathcal{O}_\mathrm{D}(\mathrm{Q}(3))$. On a alors $\Sigma = \mathbb{P}(\mathcal{E})$; désignons par $\mathcal{O}(u)$ le fibré tautologique quotient de rang 1 sur $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. On alors une suite exacte canonique sur $\Sigma \times \mathbb{P}_2$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(u) \boxtimes \mathrm{Q}^* \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_\mathrm{D}(0, -3) \longrightarrow 0.$$

Sur les fibres de $\Sigma \longrightarrow \mathbb{P}_2^*$ le fibré inversible $\mathcal{D}_{c,c^*}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(-u)$. Par conséquent, toute section de $\mathcal{D}_{c,c^*}$ s'annule sur Σ. □

Fin de la démonstration, pour $d = 1$.

On utilise la présentation de M_4 décrite dans [19] : l'éclaté S_4 de M_4 le long de Σ est isomorphe à l'espace de modules des classes d'équivalence de systèmes cohérents semi-stables (Γ, Θ), où Θ est un faisceau de dimension 1, de degré 2 et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 6$ et Γ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathrm{H}^0(\Theta)$. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}_4 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{P}_5 \\ \mathrm{M}_4 & \end{tikzcd}$$

où π est l'éclatement, et σ le morphisme qui associe à la classe de (Γ, Θ) la conique support schématique de Θ. Soit $\mathfrak{e}$ le fibré associé au diviseur exceptionnel dans S_4, et $\mathfrak{k}$ le générateur de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_5)$. On a dans $\mathrm{Pic}(\mathrm{S}_4)$

$$\pi^*(\mathcal{D}_{2c,c^*}) = \sigma^*(\mathfrak{k}) \otimes \mathfrak{e}$$

Soit f la section canonique de $\mathfrak{e}$. On a évidemment $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{S}_4}) = \mathcal{O}_{\mathrm{M}_4}$ et $\sigma_*(\mathcal{O}_{\mathrm{S}_4}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}$ d'après le lemme 34 ci-dessus. Il résulte de cette description que pour toute section s de $\mathcal{D}_{c,c^*}$ l'image réciproque $\pi^*(s)$ est de la forme $f\sigma^*(g)$, où g est une section de $\mathfrak{k}$. Il en résulte que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_4, \mathcal{D}_{c,c^*}) = 6$.

Fin de la démonstration, dans le cas $d = 2$.

On sait que le morphisme étrange D_{2c,c^*} est injectif. Pour obtenir le corollaire, il suffit de prouver que espaces vectoriels $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[4]}, (\det \mathrm{L}^{[4]})^{\otimes 2})$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_4, \mathcal{D}_{2c,c^*})$ ont même dimension. D'après la section 5.6, l'application linéaire canonique

$$\mathrm{S}^{2,2,2,2}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[4]}, (\det \mathrm{L}^{[4]})^{\otimes 2})$$

est un isomorphisme et $\dim \mathrm{S}^{2,2,2,2}\mathrm{H}^0(\mathrm{L}) = 105$ d'après la formule de Giambelli. Il suffit donc pour obtenir la dualité étrange de vérifier que $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_4, \mathcal{D}_{2c,c^*}) = 105$. Ce calcul a été effectué par Yann Sépulcre [25]. $\square$

Remarquons que dans ce cas, le faisceau inversible $\mathcal{D}_{2c,c^*}$ est engendré par ses sections. Considérons le faisceau $\mathrm{F} = \mathcal{I}_z(2)$, où $z \in \mathbb{P}_2^{[4]}$.

Proposition 49. — *Pour tout faisceau semi-stable* E *de rang 2 et de classes de Chern* $(0,4)$, *il existe* $z \in \mathrm{Hilb}^4(\mathbb{P}_2)$ *tel que* $\mathrm{H}^*(\mathrm{E} \otimes \mathcal{I}_z(2)) = 0$

Démonstration. Si E n'est pas spécial, on utilise la même présentation de E

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2 \longrightarrow \mathrm{E}(1) \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

où Θ est semi-stable de dimension 1, degré 2 et caractéristique $\chi(\Theta) = 0$. On choisit Z non contenu dans une droite et évitant le support de Θ. Alors $\mathrm{H}^0(\mathrm{E} \otimes \mathcal{I}_\mathrm{Z}(2)) = 0$. Si E spécial, il a une droite de saut ℓ d'ordre 3 ; on peut écrire E comme extension

$$0 \longrightarrow \mathrm{Q}^* \longrightarrow \mathrm{E} \longrightarrow \mathcal{O}_\ell(-3) \longrightarrow 0$$

On choisit Z tel que $\mathrm{H}^0(\mathrm{Q}^* \otimes \mathrm{I}_\mathrm{Z}(2)) = 0$. En effet $\mathrm{Q}^*(2)$ est le fibré tangent ; choisissons pour Z un schéma formé de 4 points distincts formant un repère. Un champ de vecteurs $\xi \neq 0$ qui s'annule en dimension 1 s'annule forcément le long d'une droite d'équation $z = 0$, et alors il s'écrit $\xi = z\eta$ où η est une section non nulle du fibré canonique. Alors Z est contenu dans l'union d'une droite et d'un point, et trois d'entre eux devraient être alignés. D'autre part, un champ de vecteur dont le schéma des zéros est de dimension 0 s'annule au plus en 3 points distincts. Si on choisit d'autre part z évitant la droite ℓ, on aura évidemment $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_\ell(-3) \otimes \mathcal{I}_z(2)) = 0$. Par suite $\mathrm{H}^*(\mathrm{E} \otimes \mathcal{I}_z(2)) = 0$. $\square$

Références

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Springer (1984)

[2] A. Beauville,*Fibrés de rang 2, fibré déterminant et fonctions theta*, Bull. Soc. Math. France, 116, (1988) p. 431-448 .

[3] A. Beauville, M.S. Narasimhan, S. Ramanan, *Spectral curves and the generalized theta divisor*, J. reine angew. Math. 398 (1989) p. 169-179.

[4] G. Danila, *Formule de Verlinde et dualité étrange sur le plan projectif*, Thèse Université Paris 7, 1999.

[5] G. Danila, *Sur la cohomologie d'un fibré tautologique sur le schéma de Hilbert d'une surface, Journal of algebraic geometry*, 10 (2001) p. 247-280.

[6] G. Danila, *Sections du fibré déterminant sur l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sur le plan projectif* , Annales de l'Institut Fourier, 50.5 (2000), p. 1323-1374.

[7] G. Danila, *Sur la cohomologie de la puissance symétrique du fibré tautologique sur le schéma de Hilbert ponctuel d'une surface*, Journal of algebraic geometry 13 (2004) p. 81-113.

[8] G. Danila, *Résultats sur la conjecture de dualité étrange sur le plan projectif*, Bull. Soc. math. France, 130(1), 2002 p. 1-33.

[9] J.M. Drézet et M.S. Narasimhan, *Groupe de Picard des variétés de modules des fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Invent. math. 97 (1989) p. 53-94.

[10] G. Ellingsrud, L. Göttsche, M. Lehn, *On the cobordism class of the Hilbert scheme of a surface*, J. Algebraic. Geome. 10 (2001) p.81-100.

[11] W. Fulton, Joe Harris, *Representation theory* , Springer (1996)

[12] D. Gieseker and J. Li, *Moduli of high rank vector bundles over surfaces,* J. Amer. Math. Soc.9(1996) p.107-151.

[13] M. Haiman,*Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture* , Journal of the American Mathematical Society 14 (2001) p. 941-1006.

[14] M. Haiman, *Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane,* Inventiones math. 149 (2002) p. 371-407.

[15] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry* , Graduate texts in Mathematics. Springer-Verlag (1977)49

[16] J. Le Potier, *Faisceaux semi-stables de dimension un sur le plan projectif.* Revue roumaine de Math. Pures et appliquées (dédicacé à la mémoire de Constantin Banica) 38 (1993), p. 635-678.

[17] J. Le Potier, *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques*, Proceedings de la Conférence de géométrie algébrique de Bergen (juillet 1989). Complex projective geometry, London Mathematical Society, Lecture Notes Series 179, (1992) p. 213-240.

[18] J. Le Potier, *Critère de lissité*, Exposé à Luminy (novembre 1995).

[19] J. Le Potier, *Systèmes cohérents et structures de niveau*, Astérisque n^0 214, 143 p. (1993).

[20] J. Le Potier, *Faisceaux semi-stables et systèmes cohérents,* Proceedings de la Conférence de Durham, Cambridge University Press (1995) p.179-239.

[21] S. Mori (1979), *Projective manifolds with ample tangent bundles,* Ann. of Math (2) 110 (1979) 593-606.

[22] D. Mumford et J. Fogarty, *Geometric Invariant theory.* Springer-Verlag (1982).

[23] K. O'Grady, *Moduli of vector bundles on surfaces*, Proc. Sympos. Pure math., 62, Part 1, Amer. math. Soc., Providence (1977)

[24] Luca Scala, Thèse, Université Paris 7 (2005)

[25] Yann Sépulcre, Thèse, Université Paris 7 (2004).