FONCTIONS ANALYTIQUES

Joseph Le Potier

UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT - PARIS 7
1995-1996

TABLE DES MATIÈRES

1. Formes différentielles 6
1.1. Formes différentielles de degré 1 6
1.2. Image réciproque d'une forme différentielle 7
1.3. Intégrales curvilignes 8
2. Théorème de Poincaré 12
2.1. Formes bilinéaires alternées 12
2.2. Formes différentielles de degré 2 13
2.3. Existence d'une primitive 14
3. Propriété d'homotopie 16
3.1. Formes différentielles localement exactes 17
3.2. Intégrale d'une forme localement exacte le long d'un chemin continu 17
4. Fonctions holomorphes 21
4.1. Formes $\mathbb{C}$-linéaires 21
4.2. Définition des fonctions holomorphes 22
4.3. Les équations de Cauchy-Riemann 23
4.4. Théorème de Cauchy 24
5. Indice d'un lacet 26
5.1. Détermination du logarithme 26
5.2. Indice d'un lacet par rapport à un point 30
6. Formule intégrale de Cauchy 33
6.1. Fonctions holomorphes en dehors d'un point 33
6.2. La formule intégrale de Cauchy 34
6.3. Développement en série entière 35
6.4. Le principe du maximum 38
6.5. Fonctions holomorphes et fonctions harmoniques 41
7. Séries de Laurent et calcul des résidus 42
7.1. Séries de Laurent 42
7.2. Points singuliers 46
7.3. Théorème des résidus 48
7.4. Application au calcul de certaines intégrales 53
8. Topologie sur l'espace des fonctions holomorphes 61
8.1. Suites de fonctions holomorphes 61
8.2. Compacts de fonctions holomorphes 64

Chapitre 1

Fonctions holomorphes

Les fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ sont les fonctions $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ dérivables au sens complexe. Par exemple, la somme d'une série entière $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est une fonction holomorphe à l'intérieur du disque de convergence. Le but principal du chapitre est de démontrer qu'une fonction holomorphe f est $\mathbb{C}-$analytique, ce qui signifie que pour tout point $a \in \mathrm{U}$ la fonction f peut s'écrire au voisinage de a comme somme d'une série entière

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n.$$

Ce résultat sera obtenu dans la section 6 à partir d'une généralisation de l'énoncé suivant : soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^n$ et ω une forme différentielle de classe C^1, de degré 1, et fermée. Alors l'intégrale $\int_\gamma \omega$ le long d'un lacet de classe C^1 de U est nulle. Cet énoncé, dont une démontration possible avec ces hypothèses serait d'utiliser la formule de Stokes, n'est pas tout-à-fait suffisant pour l'application que nous avons en vue, puisque que nous avons besoin d'étudier sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ la forme différentielle $\omega = f(z)dz$, où f est une fonction holomorphe sur U. C'est la raison qui nous a conduit à introduire dans la section 3 la notion de forme localement exacte ω, ce qui permet de définir une telle intégrale pour un lacet seulement continu, et d'obtenir une propriété d'invariance de ces intégrales par homotopie qui conduit à la généralisation de l'énoncé pour de telles formes différentielles. Le théorème principal est alors le théorème de Cauchy, qui dit que si $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ la forme différentielle

$\omega = f(z)dz$ est localement exacte : la principale conséquence est que si γ est un lacet homotope à un lacet constant, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

De cet énoncé, démontré dans la section 4, découlent tous les résultats essentiels sur les fonctions holomorphes : l'existence d'une primitive pour f si l'ouvert U est simplement connexe (section 4), la formule intégrale de Cauchy (section 6) ; c'est encore cet énoncé qui conduira dans la section 7 au théorème des résidus. La section 8 est consacrée à l'étude de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact sur l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Le principal résultat de cette section est la caractérisation des compacts de fonctions holomorphes : c'est un résultat qui sera utile dans la section 9 dans l'étude des transformations conformes.

1. Formes différentielles

1.1. Formes différentielles de degré 1

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On rappelle que toutes les normes sur E sont équivalentes. On munit E de la topologie définie par l'une de ces normes. On désigne par $\check{\mathrm{E}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des formes $\mathbb{R}$-linéaires à valeurs complexes. On appelle forme différentielle (complexe) sur un ouvert U de E une application $\omega : \mathrm{U} \to \check{\mathrm{E}}$. Si cette application est de classe C^r nous dirons que la forme différentielle ω est de classe C^r.

Exemple
Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une application de classe C^{r+1}. Alors la différentielle $\omega = df$

$$x \to \omega(x) = d_x f \in \check{\mathrm{E}}$$

définit une forme différentielle de classe C^r sur l'ouvert U.

On désigne par $\Omega^{1,r}(\mathrm{U})$ l'espace vectoriel (complexe) des formes différentielles de classe C^r. Soit $\mathrm{C}^r(\mathrm{U})$ l'algèbre des fonctions de classe C^r sur U. On dispose

d'une multiplication $C^r(U) \times \Omega^{1,r}(U) \to \Omega^{1,r}(U)$ qui associe à la fonction f et la forme différentielle ω la forme différentielle notée $f\omega$ définie par

$$f\omega(x) = f(x)\omega(x)$$

On obtient ainsi une structure de $C^r(U)-$module sur $\Omega^{1,r}(U)$ (*cf.* [Lang, 1984], Chapitre 3).

PROPOSITION 1.1. — *Soient $e_1, \ldots, e_n$ une base de* E, *et $(x_1, \ldots, x_n)$ les fonctions coordonnées dans cette base. Toute forme différentielle $\omega \in \Omega^{1,r}(U)$ s'écrit de manière unique*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$$

où ω_i est une fonction de classe C^r sur U.

Cet énoncé signifie donc que le module $\Omega^{1,r}(U)$ est un module libre de base $(dx_1, \ldots, dx_n)$.

Démonstration. On sait que la différentielle dx_i est constante, et sa valeur en un point x est la forme $\mathbb{R}-$linéaire $E \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ donnée par la projection $e^i : u = \sum_{i=1}^{r} u_i e_i \mapsto u_i$. Les formes $\mathbb{R}-$linéaires $(e^i)_{i=1,\ldots,n}$ constituent une base de l'espace vectoriel complexe $E^{\vee}$. Par suite, les formes différentielles dx_i constituent une base du $C^r(U)-$module $\Omega^{1,r}(U)$. D'où l'énoncé. □

1.2. Image réciproque d'une forme différentielle

Soit $\varphi : U \to V$ une aplication de classe C^{r+1} d'un ouvert U d'un espace vectoriel réel E dans un ouvert V d'un autre espace vectoriel F. On désigne par $d_x\varphi : E \to F$ la différentielle de φ au point $x \in U$.

On considère pour $\omega \in \Omega^{1,r}(V)$ la forme différentielle sur U définie par

$$\varphi^*(\omega)(x) = \omega(\varphi(x)) \circ d_x\varphi.$$

pour $x \in U$. C'est l'image réciproque de la forme différentielle ω par φ.

Exercice 1.1

Montrer que $\varphi^*(\omega)$ est de classe C^r.

Exercice 1.2

Soit $f : \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^r sur V. L'image réciproque de la fonction f par φ est définie par $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Montrer que

$$\varphi^*(df) = d(\varphi^*(f))$$

Exercice 1.3

Etant donnée une application $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ de classe C^{r+1}, sur $\Omega^{1,r}(\mathrm{U})$, on a une structure naturelle de $\mathrm{C}^r(\mathrm{V})-$module. Vérifier que l'application $\varphi^* : \Omega^{1,r}(\mathrm{V}) \to \Omega^{1,r}(\mathrm{U})$ est $\mathrm{C}^r(\mathrm{V})$-linéaire.

Exercice 1.4

Soit $\psi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ une application de classe C^{r+1} de l'ouvert V dans un ouvert W d'un espace vectoriel G. Démontrer que

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

DÉFINITION 1.2. — *Soit $\omega \in \Omega^{1,r}(\mathrm{U})$ une forme différentielle de classe C^r sur l'ouvert* U. *Une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ de classe C^{r+1} telle que $df = \omega$ s'appelle une primitive de ω. Une forme différentielle ω qui a une primitive est dite exacte.*

Si l'ouvert U est connexe, deux primitives de ω différent par une constante.

1.3. Intégrales curvilignes

Soit $\gamma : [0,1] \to \mathrm{U}$ une application de classe C^1 dans un ouvert U de E. On dit que γ est un chemin de U de classe C^1. Le point $\gamma(0)$ s'appelle l'origine du chemin, et le point $\gamma(1)$ l'extrémité. Soit ω une forme différentielle de classe C^1 sur U. L'application γ peut s'étendre en une application de classe C^1, notée encore γ sur un intervalle ouvert contenant $[0,1]$. La forme différentielle $\gamma^*(\omega)$ est alors continue sur cet intervalle ouvert, et par suite sur $[0,1]$. Elle s'écrit $\gamma^*(\omega)(t) = a(t)dt$ où $t \mapsto a(t)$ est une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs complexes. Par suite l'intégrale

$$\int_0^1 \gamma^*(\omega) = \int_0^1 a(t)dt$$

a un sens. Elle sera notée $\int_\gamma \omega$.

Ainsi, si dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, on écrit $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$ et $\gamma(t) = \sum_i \gamma_i(t) e_i$ on a $\int_\gamma \omega = \int_0^1 (\sum_{i=1}^r \omega_i(t)\gamma_i'(t))dt$

Propriétés

(i) L'intégrale ne dépend pas du paramétrage mais seulement du sens de parcours. En effet, si $\tau : [0,1] \to [0,1]$ est une application C^1 telle que $\tau(0) = 0$ et $\tau(1) = 1$ on a

$$\int_{\gamma \circ \tau} \omega = \int_\gamma \omega.$$

(ii) Etant donnés deux chemins $\alpha : [0,1] \to U$ et $\beta : [0,1] \to U$ de classe C^1 tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ on définit le chemin composé $\alpha.\beta$ par la formule

$$\alpha.\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) \text{ si } 0 \leq 2t \leq 1 \\ \beta(2t-1) \text{ si } 1 \leq 2t \leq 2 \end{cases}$$

Ce chemin n'est pas en général de classe C^1. S'il est de classe C^1 on a la formule

$$\int_{\alpha.\beta} \omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$$

La loi de composition qu'on obtient ainsi n'est pas définie sur l'ensemble des chemins de U; de plus elle n'est pas associative : si α, β, γ sont trois chemins qu'on peut composer, les chemins $(\alpha.\beta).\gamma$ et $\alpha.(\beta.\gamma)$ ne sont pas égaux en général. Cependant, on a quand même

$$\int_{(\alpha.\beta).\gamma} \omega = \int_{\alpha.(\beta.\gamma)} \omega.$$

DÉFINITION 1.3. — *On appelle chemin de* U *de classe* C^1 *par morceaux une application* $[0,1] \to U$ *telle qu'il existe une subdivision* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 1$ *telle que la restriction* $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ *soit de classe* C^1.

Considérons le chemin $\gamma_i : [0,1] \to U$ défini par $\gamma_i(s) = \gamma(st_i + (1-s)t_{i+1})$. On pose

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^m \int_{\gamma_i} \omega$$

Exercice 1.5

Vérifier que la somme de droite est indépendante de la subdivision choisie.

(iii) Soit γ un chemin de U. On appelle chemin opposé à γ le chemin défini par $\check{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$.

Exercice 1.6

Vérifier que

$$\int_{\check{\gamma}} \omega = -\int_{\gamma} \omega.$$

DÉFINITION 1.4. — *Un chemin de* U *dont l'origine coïncide avec l'extrémité s'appelle un lacet de* U.

Dans l'énoncé qui suit, r est un entier ≥ 0.

THÉORÈME 1.5. — *Soit* U *un ouvert connexe de* E. *Une forme différentielle* ω *de classe* C^r *sur* U *a une primitive si et seulement si pour tout lacet* γ *de classe* C^1 *par morceaux de* U *on a*

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Exercice 1.7

Soit ω une forme différentielle ω de classe C^r sur U. Montrer que si f est une primitive de classe C^1 de ω, la fonction f est de classe C^{r+1}.

Exercice 1.8

Démontrer que si pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux de U on a

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

l'intégrale le long de deux chemins de U de classe C^1 de même origine et même extrémité est la même.

Démonstration. Vérifions d'abord que la condition est nécessaire. Soit f une primitive de ω, et γ un lacet de classe C^1 par morceaux. Soit une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 1$ telle que $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ soit de classe C^1, et γ_i le chemin défini ci-dessus ; on a

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{m} \int_{\gamma_i} df = \sum_{i=0}^{m} f(\gamma(t_{i+1})) - f(\gamma(t_i)) = 0$$

Montrons que la condition est suffisante. En vertu de l'exercice 1.7 ci-dessus, il suffit d'établir le résultat pour $r = 0$. On se fixe un point $a \in U$. Pour tout point $x \in U$, on choisit un chemin γ_x de classe C^1 par morceaux d'origine a et d'extrémité x : un tel chemin existe, vu la connexité de U. Considérons l'intégrale

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

L'hypothèse implique que l'intégrale de droite ne dépend pas du chemin γ_x choisi. Montrons que l'on a ainsi obtenu une primitive de ω. Pour ceci, on va montrer que f est différentiable, de différentielle $\omega(x)$ au point x. Soit $B(x, r)$ une boule ouverte centrée en x et contenue dans U. Considérons un vecteur h tel que $\| h \| \leq r$, et le chemin de classe C^1 par morceaux composé de γ_x et du chemin $t \mapsto x + th$ qui joint x à $x + h$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \int_0^1 \omega(x+th)(h)dt \\ &= (\int_0^1 \omega(x+th)dt)h \end{aligned}$$

Mais la fonction $(h, t) \to \omega(x + th)$ est une fonction continue sur $B(x, r) \times [0, 1]$ à valeurs dans $E^\vee$ et d'après les résultats connus sur les intégrales dépendant d'un paramètre, l'intégrale $\int_0^1 \omega(x+th)dt$ est une fonction continue de h, à valeurs dans $E^\vee$. On a donc

$$\lim_{h \to 0} \int_0^1 \omega(x+th)dt = \omega(x)$$

Il en résulte que la fonction f est différentiable en x et que l'on a $d_x f = \omega(x)$. Ceci implique bien sûr que f est de classe C^1. □

2. Théorème de Poincaré

2.1. Formes bilinéaires alternées

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On désigne par $\wedge^2(\mathrm{E},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des formes $\mathbb{R}$-bilinéaires alternées $\mathrm{E}\times\mathrm{E}\to\mathbb{C}$. Etant deux formes linéaires α et $\beta\in\check{\mathrm{E}}$ on désigne par $\alpha\wedge\beta$ la forme bilinéaire alternée définie par

$$\alpha\wedge\beta(u,v)=\det\begin{pmatrix}\alpha(u) & \alpha(v)\\ \beta(u) & \beta(v)\end{pmatrix}$$

Exercice 2.1

L'application $\check{\mathrm{E}}\times\check{\mathrm{E}}\to\wedge^2(\mathrm{E},\mathbb{C})$ définie par $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\wedge\beta$ est $\mathbb{C}$-bilinéaire alternée.

LEMME 2.1. — *Soit $e_1,\dots,e_n$ une base de* E, *et $e^1,\dots,e^n$ la base duale. Les formes bilinéaires alternées $e^i\wedge e^j$ avec $i<j$ constituent une base de l'espace vectoriel complexe $\wedge^2(\mathrm{E},\mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit $\phi\in\wedge^2(\mathrm{E},\mathbb{C})$. Soient u et v deux vecteurs de E qu'on écrit dans la base $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ $u=\sum_i u^ie_i$ et $v=\sum_j v^je_j$. Soit $\phi_{i,j}=\phi(e_i,e_j)$. On a alors

$$\begin{aligned}\phi(u,v)&=\sum_{i<j}\phi_{i,j}(u^iv^j-u^jv^i)\\&=\sum_{i<j}\phi_{i,j}e^i\wedge e^j(u,v)\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\phi=\sum_{i<j}\phi_{i,j}e^i\wedge e^j.$$

Ainsi, les formes bilinéaires alternées $e^i\wedge e^j$ (avec $i<j$) engendrent l'espace vectoriel complexe $\wedge^2(\mathrm{E},\mathbb{C})$. Montrons maintenant qu'elles sont indépendantes : étant donnée une relation linéaire

$$\sum_{i<j}\phi_{i,j}e^i\wedge e^j=0$$

il s'agit de vérifier que $\phi_{i,j}=0$ pour tout (i,j) tel que $i<j$. En appliquant cette forme bilinéaire alternée au couple (e_k,e_ℓ), avec $k<\ell$ on obtient $\phi_{k,\ell}=0$. D'où le résultat. □

COROLLAIRE 2.2. — *On a* $\dim_{\mathbb{C}} \wedge^2(\mathrm{E}, \mathbb{C}) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

2.2. Formes différentielles de degré 2.

DÉFINITION 2.3. — *Soient* E *un espace vectoriel réel de dimension* n, *et* U *un ouvert de* E. *On appelle forme différentielle (complexe) de degré 2 et de classe* C^r *sur* U *une application* ω *de classe* C^r

$$\mathrm{U} \to \wedge^2(\mathrm{E}, \mathbb{C}).$$

Ici encore, l'ensemble $\Omega^{2,r}(\mathrm{U})$ des formes différentielles de degré 2 et de classe C^r est muni d'une structure naturelle de module sur l'algèbre $\mathrm{C}^r(\mathrm{U})$; le produit $f\omega$ d'une fonction $f \in \mathrm{C}^r(\mathrm{U})$ et d'une forme différentielle ω est défini par

$$f\omega(x) = f(x)\omega(x)$$

En plus, on dispose d'une application $\mathrm{C}^r(\mathrm{U})$-bilinéaire alternée

$$\Omega^{1,r}(\mathrm{U}) \times \Omega^{1,r}(\mathrm{U}) \to \Omega^{2,r}(\mathrm{U})$$

qui associe au couple (α, β) de formes différentielles de degré 1 la forme différentielle $\alpha \wedge \beta$ définie par $x \mapsto \alpha(x) \wedge \beta(x)$. Cette forme différentielle $\alpha \wedge \beta$ s'appelle le produit extérieur des formes différentielles α et β.

PROPOSITION 2.4. — *Soit* $(x_1, \ldots, x_n)$ *les fonctions coordonnées sur l'ouvert* U, *relatives à une base* $(e_1, \ldots, e_n)$. *Alors toute forme différentielle* $\phi \in \Omega^{2,r}$ *s'écrit de manière unique*

$$\phi = \sum_{i<j} \phi_{i,j} dx_i \wedge dx_j.$$

où $\phi_{i,j}$ *sont des fonctions de classe* C^r *sur* U.

Autrement dit le $\mathrm{C}^r(\mathrm{U})-$module $\Omega^{2,r}(\mathrm{U})$ est un module libre ayant pour base les formes différentielles $dx_i \wedge dx_j$ avec $i < j$.

Démonstration. Evidemment, les formes différentielles $dx_i \wedge dx_j$ sont constantes sur U et pour $i < j$ leurs valeurs constituent une base de l'espace vectoriel complexe $\wedge^2(\mathrm{E}, \mathbb{C})$ d'après le lemme 2.1 ci-dessus. L'énoncé en résulte. □

PROPOSITION 2.5. — *Soit r un entier ≥ 1. Il existe une application $\mathbb{C}-$linéaire et une seule $d : \Omega^{1,r}(\mathrm{U}) \to \Omega^{2,r-1}$ satisfaisant aux conditions suivantes*

(i) *Pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^{r+1}(\mathrm{U})$, on a $d(df) = 0$.*

(ii) *Pour tout $f \in \mathrm{C}^r(\mathrm{U})$ et $\omega \in \Omega^{1,r}(\mathrm{U})$, on a*

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega.$$

Démonstration. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ les fonctions coordonnées associées à une base de E. On écrit $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$, de sorte que s'il existe un tel opérateur d, on a obligatoirement

$$d\omega = \sum_i d\omega_i \wedge dx_i.$$

Ceci montre l'unicité d'un tel opérateur. Pour l'existence, on définit d par cette formule. □

Exercice 2.2

Vérifier que l'opérateur d défini par cette formule est $\mathbb{C}-$linéaire et qu'il satisfait aux conditions (i) et (ii).

Exercice 2.3

Montrer que l'on a

$$d\omega = \sum_{i<j} (\frac{\partial \omega_j}{\partial \omega_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial \omega_j}) dx_i \wedge dx_j.$$

Exercice 2.4

Désignons par $\mathrm{D}_x\omega : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^{\vee}$ la différentielle de l'application ω au point x. Démontrer que pour u et $v \in \mathrm{E}$, on a au point $x \in \mathrm{U}$

$$d\omega(x)(u, v) = \mathrm{D}_x\omega(u)(v) - \mathrm{D}_x\omega(v)(u)$$

2.3. Existence d'une primitive

THÉORÈME 2.6. — *(Poincaré) On suppose que r est un entier ≥ 1. Soit* U *un ouvert convexe de* E. *Une forme différentielle $\omega \in \Omega^{1,r}(\mathrm{U})$ a une primitive si et seulement si $d\omega = 0$.*

DÉFINITION 2.7. — *Soit* U *un ouvert de* E. *Une forme différentielle* $\omega \in \Omega^{1,r}(\mathrm{U})$ *est dite fermée si* $d\omega = 0$.

Ainsi le théorème ci-dessus peut s'énoncer :*si l'ouvert* U *est convexe, une forme différentielle est exacte si et seulement si elle est fermée.*

Démonstration. Par définition, si ω a une primitive f, on a $d\omega = d(df) = 0$. Montrons la réciproque. On peut bien sûr supposer que $0 \in \mathrm{U}$. Puisque U est convexe, le chemin $t \mapsto tx$ est contenu dans U, et par conséquent l'intégrale de ω le long de ce chemin

$$f(x) = \int_0^1 \omega(tx)x dt$$

a un sens. Maintenant, par hypothèse, l'application $x \mapsto \omega(x)$ est de classe C^1, et par conséquent l'application $[0,1] \times \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ définie par $(t,x) \to \mathrm{F}(t,x) = \omega(tx)x$ est de classe C^1. Il en résulte que l'intégrale $f(x)$ est aussi de classe C^1. On va calculer la différentielle en calculant les dérivées partielles ; soit donc $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées associé au choix d'une base de E. On pose $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$. On a alors

$$\mathrm{F}(t,x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(tx)x_i$$

et par conséquent

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(t,x) = \omega_i(tx) + \sum_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(tx)tx_j$$

Par dérivation sous le signe somme, on obtient, compte-tenu de l'hypothèse $d\omega = 0$, lue en termes de dérivée partielles (*cf.* exercice 2.3)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 [\omega_i(tx) + \sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx)tx_j]dt$$

Remarquons que la quantité entre crochets est la dérivée par rapport à t de la fonction $t \to t\omega_i(tx)$. Il en résulte

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x)$$

Autrement dit,

$$df = \omega.$$

Ainsi, f est une primitive de ω. Du fait que ω est de classe C^r, il résulte que f est de classe C^{r+1}. □

Exercice 2.5

Ecrire la différentielle de la fonction $x \mapsto F(t,x)$ en termes intrinsèques. Retrouver le théorème ci-dessus en utilisant l'interprétation de $d\omega$ donnée dans l'exercice 2.4.

REMARQUE 2.8. — Si l'ouvert U n'est plus convexe, le résultat n'a aucune raison d'être vrai. Considérons par exemple sur l'ouvert $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la forme différentielle $\omega = \dfrac{dz}{z}$. On a évidemment $d\omega = 0$. Pourtant l'intégrale le long du lacet $\gamma : t \mapsto e^{2i\pi t}$ n'est pas nulle :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

et par conséquent, la forme différentielle n'a pas de primitive sur U. Pourtant si on écrit pour $z \in \mathbb{C}$ sur chacun des ouverts U_i définis par

$$U_1 = \{y < 0\}, U_2 = \{x > 0\}, U_3 = \{y > 0\}, U_4 = \{x < 0\}$$

la forme différentielle ω a une primitive f_i. Si on pose $U_{i,j} = U_i \cap U_j$, on peut de plus choisir f_i de sorte que sur $U_{i,i+1}$ on ait pour $i = 1, 2, 3$

$$f_i|_{U_{i,i+1}} = f_{i+1}|_{U_{i,i+1}}.$$

Obligatoirement, sur l'ouvert $U_{1,4}$ les primitives f_1 et f_4 diffèrent.

3. Propriété d'homotopie

On se propose d'étendre la notion d'intégrale des formes différentielles aux chemins continus. Pour ceci, on aura besoin d'une hypothèse supplémentaire sur la forme différentielle ω.

3.1. Formes différentielles localement exactes

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel réel de dimension n.

DÉFINITION 3.1. — *Une forme différentielle $\omega \in \Omega^{1,0}(\mathrm{U})$ est dite localement exacte si tout point $x \in \mathrm{U}$ a un voisinage ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ sur lequel la forme différentielle ω a une primitive.*

Si ω est de classe C^1, d'après le théorème 2.6 ci-dessus, ω est localement exacte si et seulement si $d\omega = 0$.

Dans la suite, on aura besoin d'un lemme de topologie qui ne présente aucune difficulté.

LEMME 3.2. — *(Lemme de Lebesgue) Soit* K *un espace métrique compact et $\mathscr{U} = (\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un recouvrement de* K *par des ouverts. Alors il existe un nombre réel $r > 0$ tel que toute boule ouverte $\mathrm{B}(x, r)$ centrée en $x \in \mathrm{K}$ soit contenue dans un des ouverts U_i.*

Démonstration. Sinon, il existerait pour tout entier n une boule $\mathrm{B}(a_n, \frac{1}{n})$, centrée en $a_n \in \mathrm{K}$, qui n'est contenue dans aucun des ouverts U_i. La suite a_n a une valeur d'adhérence $a \in \mathrm{K}$. Choisissons i tel que le point a appartienne à l'ouvert U_i; soit $\rho > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, \rho) \subset \mathrm{U}_i$. Choisissons n tel que $\frac{1}{n} < \frac{\rho}{2}$ et $d(a_n, a) < \frac{\rho}{2}$. Alors $\mathrm{B}(a_n, \frac{\rho}{2}) \subset \mathrm{B}(a, \rho)$ et par suite, $\mathrm{B}(a_n, \frac{1}{n}) \subset \mathrm{U}_i$ ce qui contredit la définition de a_n. □

3.2. Intégrale d'une forme localement exacte le long d'un chemin continu.

Soit ω une forme différentielle de degré 1 localement exacte sur un ouvert U. Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{U}$ un chemin continu. Il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 1$ telle que ω ait une primitive f_i sur un ouvert $\mathrm{U}_i \subset \mathrm{U}$ (supposé connexe) contenant $\gamma([t_i, t_{i+1}]$. On pose

$$\int_\gamma \omega = \sum_{0\leq i\leq m} f_i(\gamma(t_{i+1})) - f_i(\gamma(t_i))$$

Exercice 3.1

Vérifier que le membre de droite ne dépend pas du choix de la subdivision, ni des primitives f_i.

Si γ est de classe C^1, la définition coïncide avec la définition donnée dans la section 1.3 : en effet, la fonction $f_i(\gamma(t))$ est alors dérivable sur $[t_i, t_{i+1}]$ de dérivée $\omega(\gamma(t))\gamma'(t)$. Par conséquent

$$f_i(\gamma(t_{i+1})) - f_i(\gamma(t_i)) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \omega(\gamma(t)\gamma'(t)dt.$$

D'où l'assertion.

Les propriétés sont identiques à celle qui ont été données dans la section 1.3 : elle ne dépend pas du paramétrage, mais seulement du sens de parcours ; d'autre part, le résultat est additif par composition des chemins continus. On va établir une propriété d'invariance importante qui entraîne que si on déforme continûment le chemin, en gardant fixes l'origine et l'extrémité, l'intégrale reste inchangée (*cf.* exercice 3.4). En fait, on va établir une propriété d'invariance par homotopie pour l'intégrale d'une forme différentielle localement exacte le long d'un lacet, ce qui sera suffisant pour les applications en vue.

Lacets homotopes

DÉFINITION 3.3. — *Soit* U *un ouvert de* E. *Deux lacets continus* α *et* β *sont homotopes s'il existe une famille continue* $h_s : [0,1] \to U$ *de lacets paramétrée par* $s \in [0,1]$ *telle que*

$$h_0 = \alpha \ ; \ h_1 = \beta$$

Par famille continue, on entend que l'application $h : [0,1] \times [0,1] \to U$ définie par $(s,t) \mapsto h_s(t)$ est continue. L'application h est appelée une homotopie entre α et β.

Exemples

— Soit U un ouvert convexe. Si a est un point de U, tout lacet β de U est homotope au lacet constant $t \mapsto a$. En effet, il suffit de considérer l'homotopie

$$h(s,t) = (1-s)\beta(t) + sa$$

qui prend ses valeurs dans U parce que U est convexe.

— Dans $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, le lacet $t \mapsto e^{2i\pi t}$ n'est pas homotope au lacet constant. Ceci résultera de la propriété d'invariance par homotopie démontrée ci-dessous.

— Dans $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, le cercle $\alpha(t) = e^{2i\pi t}$ et le lacet β défini par $\beta(t) = a\cos 2\pi t + ib\sin 2\pi t$ sont homotopes si $a > 0$ et $b > 0$.

DÉFINITION 3.4. — *Un ouvert* U *de* E *est dit simplement connexe s'il est connexe, et si tout lacet de* U *est homotope à un lacet constant.*

Exemples

— Tout ouvert convexe est simplement connexe.

— L'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est pas simplement connexe.

Exercice 3.2

L'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy, x \leq 0, y = 0\}$ est simplement connexe.

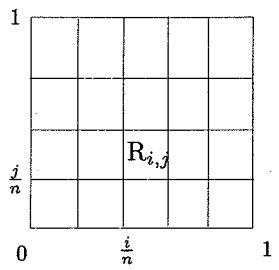
Exercice 3.3

L'union de deux ouverts simplement connexes U_1 et U_2 de E tels que l'intersection $\mathrm{U}_{1,2} = \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$ soit connexe est encore simplement connexe.

THÉORÈME 3.5. — *(Invariance par homotopie) Soit ω une forme différentielle continue localement exacte dans l'ouvert* U. *Si α et β sont deux lacets homotopes de* U, *on a*

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

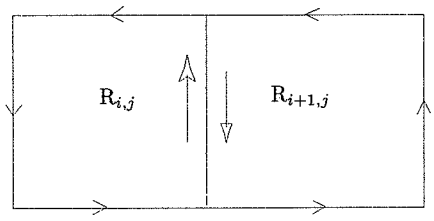
Démonstration. Soit h une homotopie entre α et β. D'après le lemme de Lebesgue, on peut quadriller le carré $\mathrm{R} = [0,1] \times [0,1]$ de sorte que sur un ouvert de E contenant l'image du rectangle $\mathrm{R}_{i,j}$ la forme différentielle ω ait une primitive.



Soit $\partial \mathrm{R}_{i,j}$ le lacet obtenu en paramétrant le bord du rectangle $\mathrm{R}_{i,j}$ dans le sens direct. Alors

$$\int_{h \circ \partial \mathrm{R}_{i,j}} \omega = 0$$

et cette propriété se propage au carré R tout entier comme on le voit de proche en proche :



Remarquons d'autre part que les chemins $s \mapsto h_s(0)$ et $s \mapsto h_s(1)$ sont les mêmes. Il en résulte que $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$. □

Exemple

Sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ la forme différentielle $\omega = \frac{dz}{z}$ est localement exacte. Soit $\alpha : t \mapsto e^{2i\pi t}$ le lacet qui paramètre le cercle de rayon 1. On a déjà vu que

$$\int_\alpha \frac{dz}{z} = 2i\pi$$

Il en résulte que ce lacet n'est pas homotope à un lacet constant. □

COROLLAIRE 3.6. — *Soit* U *un ouvert simplement connexe, et* ω *une forme différentielle de degré* 1, *continue, localement exacte. Alors* $\int_\gamma \omega = 0$ *pour tout lacet continu de* U.

En effet, tout lacet est homotope à un lacet constant, et donc l'intégrale ci-dessus est nulle d'après le théorème 3.5

COROLLAIRE 3.7. — *Soit* U *un ouvert simplement connexe, et* ω *une forme différentielle de degré 1, de classe* C^1 *et fermée. Alors* ω *a une primitive sur* U.

Démonstration. Une telle forme différentielle est localement exacte d'après le théorème de Poincaré. Puisque U est simplement connexe, on obtient d'après le corollaire précédent $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout lacet continu de U. Le théorème 1.5 montre alors que ω a une primitive. □

COROLLAIRE 3.8. — *Soit* U *un ouvert simplement connexe, et* ω *une forme localement exacte. Si* α *et* β *sont deux chemins continus de* U *de même origine et même extrémité, on a* $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$

Exercice 3.4

Soit U un ouvert de E, et ω une forme différentielle localement exacte sur U. Soient α et β deux chemins de même origine a et même extrémité b. On suppose qu'il existe une famille continue h_s de chemins d'origine a et extrémité b telle que $h_0 = \alpha$ et $h_1 = \beta$. Montrer que le lacet $\alpha.\beta^{\check{}}$ est homotope à un lacet constant. En déduire que $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$.

4. Fonctions holomorphes

4.1. Formes $\mathbb{C}$-linéaires

On considère maintenant un espace vectoriel complexe E de dimension m. L'espace vectoriel E^* des formes $\mathbb{C}$-linéaires est un sous-espace vectoriel complexe de $E^{\check{}}$; de même, les applications de la forme $z \mapsto \overline{f}(z)$, où f est une forme $\mathbb{C}$-linéaire constituent un sous-espace vectoriel complexe $\overline{E^*}$ de $E^{\check{}}$, évidemment de même dimension : la conjugaison $f \mapsto \overline{f}$ établit un isomorphisme anti-linéaire de E^* sur $\overline{E^*}$.

LEMME 4.1. — *On a* $E^{\check{}} = E^* \oplus \overline{E^*}$.

Démonstration. Considérons pour $f \in E^{\check{}}$ l'application $I(f) \in E^{\check{}}$ définie par

$$I(f)(h) = -if(ih)$$

pour $h \in E$. L'application $f \mapsto I(f)$ est $\mathbb{C}$-linéaire et c'est une involution. Le sous-espace propre corrrespondant à la valeur propre 1 est E^* et le sous-espace propre correspondant à la valeur propre -1 est $\overline{E^*}$. D'où l'énoncé. □

On applique ceci dans le cas où $E = \mathbb{C}$. Dans ce cas, l'espace E^* est de dimension 1, engendré par l'application identité : $h \mapsto h$, et $\overline{E^*}$ est engendré par $h \mapsto \overline{h}$. L'énoncé signifie que toute forme $\mathbb{R}$-linéaire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f(h) = \lambda h + \mu \overline{h}$$

avec λ et $\mu \in \mathbb{C}$.

4.2. Définition des fonctions holomorphes

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 4.2. — *On dit qu'une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U.*

PROPOSITION 4.3. — *Une application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ est holomorphe si f est $\mathbb{R}$-différentiable en tout point $z \in \mathrm{U}$, et si la différentielle $d_z f$ est $\mathbb{C}-$linéaire.*

Démonstration. Supposons f holomorphe. Soit z un point de U. On peut alors écrire

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + \epsilon(h)|h|$$

où $h \mapsto \epsilon(h)$ est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. Il en résulte que f est $\mathbb{R}$-différentiable en z, avec pour différentielle l'application $h \to f'(z)h$, qui est donc $\mathbb{C}$-linéaire. Réciproquement, si f est $\mathbb{R}$-différentiable en z, avec pour différentielle $d_z f$ une application $\mathbb{C}-$linéaire, cette différentielle s'écrit sous la forme $d_z f(h) = \lambda h$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors

$$f(z+h) = f(z) + \lambda h + \epsilon(h)|h|$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. Ceci implique que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z avec pour dérivée λ.

Exemples

— La fonction $f(z) = z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et sa différentielle dz est constante. La fonction $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas holomorphe. Sa différentielle en un point $d\overline{z}$ (elle aussi indépendante du point où l'on se place) est anti-linéaire. Les différentielles dz et $d\overline{z}$ constituent, d'après le lemme 4.1, une base de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$

— Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On sait que f est $\mathbb{C}$-dérivable sur le disque $|z| < \mathrm{R}$, et par conséquent c'est une fonction holomorphe sur ce disque. Rappelons que sa dérivée en z s'obtient en dérivant terme à terme :

$$f'(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$$

— Les fonctions holomorphes sur un ouvert U constituent une algèbre. De plus, si f est une fonction holomorphe, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est holomorphe en dehors du fermé de U où f s'annule.

— Si $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V} \subset \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe à valeurs dans un ouvert V, et $g : \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, la composée $g \circ f$ est une fonction holomorphe sur U.

4.3. Les équations de Cauchy-Riemann

On désigne par x la partie réelle de $z \in \mathbb{C}$, et par y sa partie imaginaire. Le module des formes différentielles de degré 1 sur U à valeurs complexes est équipé de 2 bases : (dx, dy) et $(dz, d\bar{z})$. Considérons une fonction $\mathbb{R}-$différentiable sur un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}$, à valeurs complexes. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\bar{z} \end{aligned}$$

Ainsi, f est holomorphe dans U si et seulement si elle est $\mathbb{R}-$différentiable, et si on a la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{(CR)}$$

Cette équation est appelée équation de Cauchy-Riemann. Si on désigne par P et Q respectivement la partie réelle et partie imaginaire de f, cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} &= \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} &= -\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \end{cases}$$

Un des résultats principaux de la théorie des fonctions holomorphes est qu'une fonction holomorphe f sur un ouvert U est $\mathbb{C}$-analytique (*cf.* section 6) : ceci signifie que pour tout point $z \in \mathrm{U}$, il existe une boule ouverte $\mathrm{B}(z, r) \subset \mathrm{U}$ et une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n h^n$ de rayon de convergence $\geq r$ telle que pour $|h| < r$ on ait

$$f(z + h) = \sum_{n \geq 0} a_n h^n.$$

Ceci entraîne que la fonction f est en particulier de classe C^∞. Nous sommes donc autorisé à prendre les dérivées partielles d'ordre 2, et ces dérivées partielles

sont continues, donc on peut appliquer le lemme de Schwarz. Des équations de Cauchy-Riemann, on déduit, compte-tenu du lemme de Schwarz :

$$\Delta P = 0 \; ; \; \Delta Q = 0$$

où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ désigne le laplacien.

DÉFINITION 4.4. — *Une fonction $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique si $\Delta g = 0$*

On a donc obtenu, en anticipant sur les résultats de la section 6 :

COROLLAIRE 4.5. — *La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont des fonctions harmoniques.*

4.4. Théorème de Cauchy

THÉORÈME 4.6. — *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert U. Alors la forme différentielle $\omega = f dz$ est localement exacte.*

On démontrera cet énoncé en faisant l'hypothèse supplémentaire que la dérivée f' de f est une fonction continue, et en traitant le cas général sous forme d'exercice.

Démonstration. Si f' est continue sur U, ω est de classe C^1, et il suffit donc, d'après le théorème de Poincaré, de vérifier que $d\omega = 0$. Mais on a alors

$$d\omega = df \wedge dz = f' dz \wedge dz = 0.$$

□

Considérons un chemin $\gamma : [0,1] \to U$ de classe C^1 de l'ouvert U de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe dans l'ouvert U, l'intégrale de f le long de γ est par définition l'intégrale

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Cette définition s'étend bien sûr au cas des chemins C^1 par morceaux.

Exercice 4.1

Soit γ un chemin C^1 par morceaux dans U, et ℓ sa longueur. Démontrer que si $|f(z)| \leq M$ sur l'image de γ

$$|\int_\gamma f dz| \leq M\ell.$$

Pour démontrer le théorème de Cauchy 4.6 dans le cas où la dérivée f' n'est plus supposée continue au départ, on peut supposer, la question étant locale, que U est une boule ouverte B.

Exercice 4.2

Montrer que si ω est une forme différentielle de degré 1 continue sur B telle que pour tout rectangle $R \subset B$ on ait $\int_{\partial B} \omega = 0$, alors ω a une primitive sur B. (Procéder comme dans la démonstration du théorème 1.5 pour définir cette primitive.)

Pour tout rectangle $R \subset B$, on pose $\alpha(R) = \int_{\partial R} f dz$, où ∂R désigne le chemin C^1 par morceaux obtenu en choisissant un paramétrage pour le bord de R parcouru dans le sens direct. Comme on l'a vu, l'intégrale $\int_{\partial R} \omega$ ne dépend pas de ce paramétrage. Pour vérifier que $\omega = f dz$ est exacte sur B, il suffit, d'après l'exercice 4.2 ci-dessus, de vérifier que $\alpha(R) = 0$.

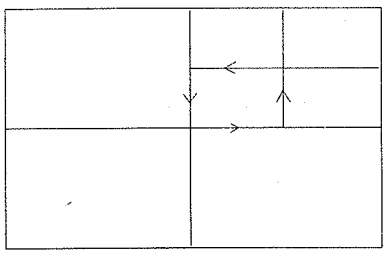
Exercice 4.3

Soit f une fonction holomorphe sur la boule ouverte B, et $R \subset B$ un rectangle, de périmètre ℓ.

1) Démontrer qu'il existe une suite décroissante de rectangles R_n de périmètre $\ell/2^n$ telle que

$$|\alpha(R_n)| \geq \frac{1}{4^n}|\alpha(R)|$$

(partager R en quatres rectangles égaux, et choisir convenablement l'un d'eux pour fabriquer R_1, puis recommencer avec R_1).



2) Montrer qu'il existe un point commun z à tous les R_n. Montrer qu'étant donné $\epsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour $n \geq \mathrm{N}$ on ait

$$|\alpha(\mathrm{R}_n)| \leq \epsilon \frac{\ell^2}{4^n}$$

(Utiliser l'hypothèse que f est dérivable en z).

3) En déduire que pour tout réel $\epsilon > 0$, on a $|\alpha(\mathrm{R})| \leq \epsilon \ell^2$. En déduire que $\alpha(\mathrm{R}) = 0$.

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U. Puisque la forme différentielle $\omega = f dz$ est localement exacte, on peut maintenant étendre la définition l'intégrale $\int_\gamma f dz$ aux chemins qui sont seulement continus.

COROLLAIRE 4.7. — *Soient γ_1 et γ_2 deux lacets de* U *homotopes. Alors*

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

COROLLAIRE 4.8. — *Soit γ un lacet de* U *homotope au lacet constant. Alors*

$$\int_\gamma f dz = 0.$$

COROLLAIRE 4.9. — *Soit* U *un ouvert simplement connexe, et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors la forme différentielle $\omega = f dz$ a une primitive dans* U.

Une telle primitive est évidemment une fonction holomorphe.

5. Indice d'un lacet

5.1. Détermination du logarithme

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'équation

$$e^\zeta = z$$

a une infinité de solutions $\zeta \in \mathbb{C}$: si $z = re^{i\theta}$, où r est un réel> 0 et $\theta \in \mathbb{R}$, $\zeta = \operatorname{Log} r + i\theta \subset \theta$ est une solution, et l'ensemble des solutions est donné par $\zeta + 2i\pi\mathbb{Z}$.

Problème :

Soit U un ouvert de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Existe-t-il une fonction continue $\phi : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ telle que on ait

$$e^{\phi(z)} = z$$

pour tout $z \in \mathrm{U}$? Autrement dit, peut-on choisir continûment une solution de l'équation ci-dessus sur l'ouvert U?

DÉFINITION 5.1. — *On appelle détermination du logarithme sur l'ouvert* $\mathrm{U} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *une fonction continue* $\phi : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ *telle que pour tout* $z \in \mathrm{U}$ *on ait*

$$e^{\phi(z)} = z.$$

THÉORÈME 5.2. — *Toute détermination du logarithme sur l'ouvert* $\mathrm{U} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *est une primitive de la forme différentielle* $\omega = \dfrac{dz}{z}$. *En particulier :*

(i) *Une telle détermination du logarithme est une fonction holomorphe.*

(ii) *Si l'ouvert* U *est connexe, deux déterminations du logarithme sur l'ouvert* U *qui coïncident en un point coïncident sur* U.

(iii) *Sur tout ouvert simplement connexe, il existe une détermination du logarithme.*

Evidemment, toute les primitives de la forme différentielle $\omega = \dfrac{dz}{z}$ ne sont pas des déterminations du logarithme. Cependant, on a la propriété suivante :

LEMME 5.3. — *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, *et* $\phi : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ *une primitive de* $\omega = \dfrac{dz}{z}$ *sur l'ouvert* U. *Alors, sur l'ouvert* U, *la fonction* $f(z) = \dfrac{e^{\phi(z)}}{z}$ *est constante sur l'ouvert* U.

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse que la fonction ϕ est holomorphe, et donc f est aussi holomorphe. On peut alors calculer la différentielle logarithmique de f :

$$\frac{df}{f} = d\phi - \frac{dz}{z} = 0.$$

Par suite, $df = 0$ sur U. L'ouvert U étant connexe, ceci implique que fonction f est constante. □

Démonstration du théorème 5.2

Montrons d'abord (iii), c'est-à-dire que si U est simplement connexe, il existe une détermination du logarithme sur U. La forme $\omega = \dfrac{dz}{z}$ étant localement exacte, on sait qu'il existe une primitive ϕ de ω sur l'ouvert U. Quitte à rajouter au besoin une contante à ϕ, on peut de plus imposer qu'en un point $z_0 \in$ U, on a $\phi(z_0) = \zeta_0$, où ζ_0 est une des solutions de l'équation $e^{\zeta} = z_0$. Alors, le lemme ci-dessus implique $e^{\phi(z)} = z$ pour tout $z \in$ U; autrement dit, la fonction ϕ ainsi construite est une détermination du logarithme.

Montrons maintenant (ii). Soient ϕ et ψ deux déterminations du logarithme sur l'ouvert U, qui coincident en un point $z_0 \in$ U. Alors la fonction $z \mapsto \phi(z) - \psi(z)$ prend ses valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$, et est continue. L'ensemble des points où elle est nulle est alors à la fois un ouvert, un fermé et contient z_0 ; donc par connexité, elle est identiquement nulle.

Reste à voir (i). La question étant locale, on peut supposer que l'ouvert U est une boule. Cette boule est un ouvert simplement connexe, et on sait, par la construction (iii) ci-dessus, qu'il existe sur cette boule une détermination du logarithme qui est une fonction holomorphe. Toute autre détermination du logarithme ϕ diffère de celle-ci par une constante d'après l'assertion (ii) : ainsi, la fonction ϕ est encore holomorphe, et c'est une primitive de $\omega = \dfrac{dz}{z}$ comme on le voir en prenant la différentielle de $e^{\phi(z)} = z$. □

Exemples

(1) Considérons sur l'ouvert U $= \{z \in \mathbb{C}, |z-1] < 1\}$ la fonction

$$\phi(z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{(1-z)^n}{n}.$$

Cette série est convergente et définit une fonction holomorphe de dérivée $1/z$, telle que $\phi(1) = 0$. Il en résulte que c'est une détermination du logarithme sur l'ouvert U. C'est la seule détermination du logarithme qui coïncide avec la fonction $x \mapsto \operatorname{Log} x$ sur l'axe réel.

(2) Si un ouvert rencontre l'axe des réels > 0, si une détermination du logarithme sur U est réelle en un point de l'axe réel, elle est réelle sur $\mathrm{U} \cap \mathbb{R}_+^*$, pourvu que cet ouvert soit connexe.

Exercice 5.1

Montrer que ce n'est pas toujours le cas si cette intersection n'est pas connexe.

Considérons sur l'ouvert $\mathrm{V} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, z \leq 0\}$. Alors la détermination du logarithme qui coïncide sur l'axe des réels > 0 avec la fonction $x \mapsto \operatorname{Log} x$ est donnée pour $-\pi < \theta < \pi$ par

$$\phi(re^{i\theta}) = \operatorname{Log} r + i\theta$$

En effet, $\phi(re^{i\theta})$ se calcule par exemple par intégration de la forme différentielle $\omega = \dfrac{dz}{z}$ sur l'arc de cercle $t \mapsto re^{it\theta}$. On obtient

$$\begin{aligned}\phi(re^{i\theta}) &= \operatorname{Log} r + \int_0^1 i\theta dt \\ &= \operatorname{Log} r + i\theta.\end{aligned}$$

Cette détermination s'appelle la détermination principale du logarithme sur l'ouvert V.

Exercice 5.2

Montrer directement que l'application $\mathrm{V} \to \mathbb{C}$ définie par $re^{i\theta} \mapsto \operatorname{Log} r + i\theta$ est continue, et donc définit une détermination du logarithme sur l'ouvert $\mathrm{V} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, z \leq 0\}$.

Exercice 5.3

Soit ϕ la détermination du logarithme sur l'ouvert ci-dessus. Soit W l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $\mathrm{W} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$. Montrer qu'il existe une détermination du logarithme ψ sur W qui vaut π au point $z = -1$. Calculer, sur l'ouvert $\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$ la fonction $\phi - \psi$.

Exercice 5.4

On se donne un entier $n \geq 2$. Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur U. Montrer qu'il existe exactement n fonctions continues $\phi : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ telles que $\phi(z)^n = f$. Montrer que ces fonctions sont holomorphes.

Exercice 5.5

1) Soit U l'ouvert de $\mathbb{C}$ défini par le complémentaire du fermé des nombres complexes $z = x + iy$ (où x et y sont réels) tels que $x^2 = 1$ et $y \leq 0$. Démontrer que U est simplement connexe.

2) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe et une seule $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ telle que $e^{f(z)} = 1 - z^2$ et $f(0) = 0$. (On pourra construire f comme primitive d'une forme différentielle).

3) Soit Log la détermination principale du logarithme sur l'ouvert $\mathrm{V} = \mathbb{C}\backslash[0, \infty[$ (*i.e.* la détermination du logarithme dont la partie imaginaire θ appartient à l'intervalle $]0, 2\pi[)$. Montrer que si $z \in \mathrm{U}$, on a $i(z+1) \in \mathrm{V}$ et $i(z-1) \in \mathrm{V}$. Démontrer que pour $z \in \mathrm{U}$, on a

$$f(z) = \mathrm{Log}\,(i(z+1)) + \mathrm{Log}\,(i(z-1)) - 2i\pi$$

Détermination de l'argument

DÉFINITION 5.4. — *Soit* U *un ouvert* $\mathbb{C}$ *qui ne contient pas l'origine. On appelle détermination de l'argument sur l'ouvert* U *une fonction continue* $g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $z \in \mathrm{U}$ *on ait*

$$e^{ig(z)} = \frac{z}{|z|}$$

Deux telles déterminations de l'argument diffèrent d'un multiple entier de 2π si l'ouvert U est connexe. Si l'ouvert U est simplement connexe, il en existe : la partie imaginaire d'une détermination du logarithme sur l'ouvert U est en effet une détermination de l'argument. Réciproquement, si $z \mapsto g(z)$ est une détermination de l'argument sur l'ouvert U, la fonction $z \to \mathrm{Log}\,|z| + ig(z)$ est une détermination du logarithme sur l'ouvert U.

Exercice 5.6

Démontrer que si $g : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est une détermination de l'argument, g est de classe C^∞, et que l'on a $dg = \mathrm{Im}\,\dfrac{dz}{z}$.

5.2. Indice d'un lacet par rapport à un point

Soit $a \in \mathbb{C}$. On considère un lacet continu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{a\}$ qui évite le point a. L'indice de γ par rapport au point a est un entier relatif qui mesure le nombre de fois que le lacet tourne autour de a dans le sens direct. De manière précise :

DÉFINITION 5.5. — *On appelle indice de γ par rapport au point a l'intégrale*

$$\mathrm{I}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

Remarquons que la forme différentielle $\omega = \dfrac{dz}{z-a}$ est localement exacte sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ et par conséquent l'intégrale ci-dessus a bien un sens pour tout lacet continu.

Exercice 5.7

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Calculer l'indice du lacet $t \mapsto e^{i2\pi nt}$ par rapport au point $z = 0$, et par rapport au point $z = 2$.

PROPOSITION 5.6. —

(i) *L'indice* $\mathrm{I}(\gamma, a)$ *est un entier relatif.*

(ii) *Soient α et β deux lacets homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Alors* $\mathrm{I}(\alpha, a) = \mathrm{I}(\beta, a)$. *En particulier, si γ est un lacet dont l'image est contenue dans un ouvert simplement connexe $\mathrm{U} \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, on a* $\mathrm{I}(\gamma, a) = 0$.

(iii) *Soit γ un lacet continu de $\mathbb{C}$. Sur les composantes connexes de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$, la fonction*

$$a \mapsto \mathrm{I}(\gamma, a)$$

est constante.

Démonstration.

(i) Quitte à remplacer le lacet γ par le lacet $t \mapsto \gamma(t) - a$, on peut supposer que $a = 0$. Sur toute boule qui évite l'origine, il existe une détermination du logarithme, et sur l'intersection de deux telles boules, deux telles déterminations diffèrent par un multiple entier de $2i\pi$. Il existe d'après le lemme de Lebesgue une subdivision de $[0, 1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = 1$$

telle que sur un ouvert contenant $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ il existe une détermination du logarithme g_i. Par définition, on a

$$\mathrm{I}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=0}^{m} g_i(\gamma(t_{i+1})) - g_i(\gamma(t_i)).$$

Puisque $g_i(t_{i+1})) = g_{i+1}(t_{i+1}) \bmod 2i\pi$, et que $g_0(\gamma(0)) = g_m(\gamma(1)) \bmod 2i\pi$, on voit que la somme ci-dessus est un entier.

(ii) Cette assertion résulte du corollaire 4.7.

(iii) On peut toujours trouver un lacet de classe C^1, aussi proche que l'on veut d'un lacet γ, et ces deux lacets sont alors homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. D'après l'assertion (ii), il suffit de vérifier l'assertion (iii) quand γ est de classe C^1. Mais on a pour un lacet de classe C^1

$$\mathrm{I}(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt$$

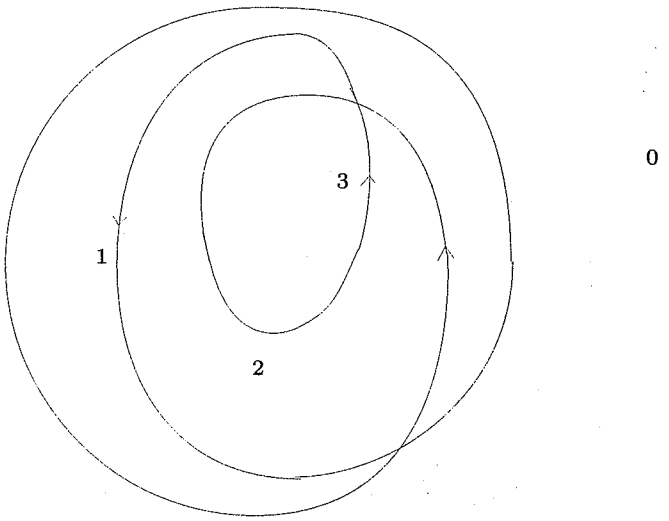
Considérons l'ouvert $\mathrm{W} = \mathbb{C} \setminus \operatorname{Im} \gamma$. L'application $\mathrm{W} \times [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par

$$(a, t) \mapsto \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$$

est continue ; le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre montre que $a \mapsto \mathrm{I}(\gamma, a) : \mathrm{W} \to \mathbb{Z}$ est une fonction continue à valeurs entières ; elle est donc localement constante.

Signification de $\mathrm{I}(\gamma, a)$.

La différence $\operatorname{Im}(g_i(\gamma(t_{i+1})) - g_i(\gamma(t_i)))$ représente la variation de l'argument de $\gamma(t) - a$ quand t varie de t_i à t_{i+1}. Par suite, la quantité $2\pi\mathrm{I}(\gamma, a)$ représente la variation de l'argument de $\gamma(t) - a$ quand t varie de 0 à 1. Ainsi, l'indice $\mathrm{I}(\gamma, a)$ représente le «nombre de tours», comptés algébriquement, que fait le lacet γ autour de a, le plan étant orienté dans le sens direct.



6. Formule intégrale de Cauchy

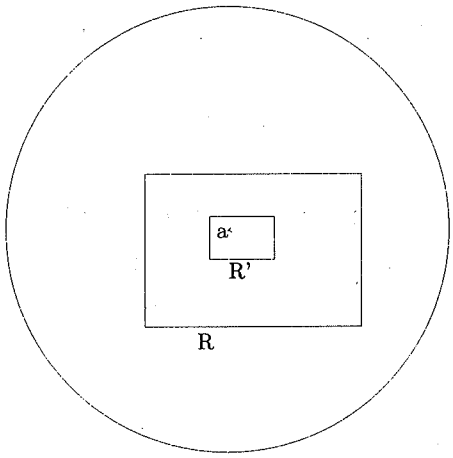
6.1. Fonctions holomorphes en dehors d'un point

On commence par étendre le théorème de Cauchy aux formes différentielles $\omega = g(z)dz$, où g est une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, holomorphe en dehors d'un point $a \in \mathrm{U}$. On verra plus tard que ces hypothèses impliquent en fait que g est holomorphe sur U.

LEMME 6.1. — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$, *et* $g : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ *une fonction continue sur* U, *et holomorphe sur l'ouvert* $\mathrm{U} \setminus \{a\}$. *Alors la forme différentielle* $\omega = g(z)dz$ *est localement exacte.*

Démonstration. D'après l'exercice 4.2, il suffit de vérifier que pour tout rectangle $\mathrm{R} \subset \mathrm{U}$, de côtés parallèles aux axes, on a $\int_{\partial \mathrm{R}} \omega = 0$. Si $a \in \mathrm{R}$, le lacet $\partial \mathrm{R}$ obtenu en paramétrant le bord de R est homotope dans $\mathrm{U} \setminus \{a\}$ à un lacet réduit à un point. Donc cette intégrale est nulle d'après le théorème de Cauchy.

Supposons maintenant que a appartient à l'intérieur de R. Soit h_λ l'homothétie de centre a, de rapport $0 < \lambda \leq 1$ et R' le rectangle $\mathrm{R}' = h_\lambda(\mathrm{R})$.



Par homotopie, on a d'après le théorème de Cauchy

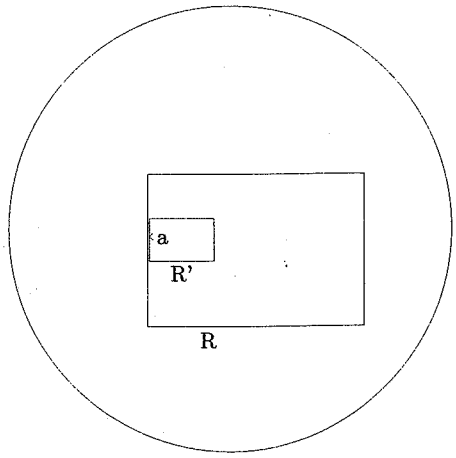
$$\int_{\partial \mathrm{R}} g(z)dz = \int_{\partial \mathrm{R}'} g(z)dz \tag{1}$$

Soit $\mathrm{M} = \sup_{z \in \mathrm{R}} |g(z)|$, et ℓ le périmètre du rectangle R. L'exercice 4.1 conduit à la majoration

$$\left| \int_{\partial \mathrm{R}} \omega \right| \leq \mathrm{M}\lambda\ell$$

pour tout $0 < \lambda \leq 1$, et par suite $\int_{\partial \mathrm{R}} \omega = 0$.

Il reste à examiner le cas où a appartient au bord de R.



On peut faire le même raisonnement, en constatant que le lacet que le bord de R et le bord de R′ on une partie commune ; le reste de ces lacets peut être paramétré de façon à obtenir deux chemins de même origine et même extrémité, contenus dans un ouvert simplement connexe V contenu dans $\mathrm{U} \setminus \{a\}$, ce qui montre que l'égalité (1) est encore vraie. On termine de la même façon.

6.2. La formule intégrale de Cauchy

THÉORÈME 6.2. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$, *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur* U. *Soit* γ *un lacet de* U *homotope à un lacet constant, et* a *un point de* U *n'appartenant pas à l'image de* γ. *Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \mathrm{I}(\gamma, a) f(a)$$

Démonstration. On considère la fonction, définie sur U

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} \text{ si } z \neq a \\ f'(a) \text{ si } z = a \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur U, et holomorphe en dehors du point a. Par conséquant la forme différentielle $\omega = g(z)dz$ est localement exacte et par suite,

puisque γ est un lacet de U homotope au lacet constant, on obtient

$$\int_\gamma g(z)dz = 0.$$

Comptenu de la définition de l'indice $\mathrm{I}(\gamma, a)$, ceci conduit immédiatement à la formule attendue. □

Exemple

Soit D un disque de centre 0, de rayon r et f une fonction holomorphe sur un ouvert U contenant $\overline{\mathrm{D}}$. Soit γ le lacet défini par $\gamma(t) = re^{2i\pi t}$ qui paramètre le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct. Ce lacet de U est homotope au lacet constant. Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = \begin{cases} f(a) \text{ si } a \in \mathrm{D} \\ 0 \text{ si } a \notin \overline{\mathrm{D}} \end{cases}$$

Si le point a appartient au cercle $|z| = r$, l'intégrale ci-dessus n'a pas de sens.

6.3. Développement en série entière.

THÉORÈME 6.3. — *Soit f une fonction holomorphe dans un disque $\mathrm{D}(a, r)$ de centre a et de rayon r. Alors f est développable en série entière dans ce disque.*

Cet énoncé signifie qu'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ telle que, pour $|z| < r$ on ait

$$f(a+z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

Ceci implique que le rayon de convergence de la série entière est $\geq r$.

Démonstration. On peut bien sûr supposer que $a = 0$. On choisit un nombre réel $0 < \rho < r$ et on écrit la formule intégrale de Cauchy ci-dessus relative au lacet γ défini par $\gamma(t) = \rho e^{2i\pi t}$ qui paramètre le cercle de centre 0 et de rayon ρ. Pour $|z| < \rho$, on a alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}du$$

Considérons, pour z fixé tel que $|z| < \rho$, la fonction $u \mapsto \frac{1}{u-z}$ sur le cercle $\partial \mathrm{D}(0, \rho)$. On a

$$\frac{1}{u-z} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{u^{n+1}}$$

et on a la majoration

$$|\frac{z^n}{u^{n+1}}| \leq \frac{|z|^n}{\rho^{n+1}}$$

Par suite, la série est normalement convergente sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ. Puique f est bornée sur ce cercle, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n f(u)}{u^{n+1}}$ est aussi normalement convergente sur ce cercle. Il en résulte que la série

$$\sum_{n \geq 0} \int_\gamma \frac{z^n f(u)}{u^{n+1}} du$$

est convergente, de somme $f(z)$. On a donc $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, avec $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u^{n+1}} du$. Remarquons que a_n est en fait indépendant de γ : en effet, la fonction f est infiniment dérivable au voisinage de 0, et on a

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Il en résulte que la formule ci-dessus est en fait vraie pour $|z| < r$. □

COROLLAIRE 6.4. — *Si f est holomorphe, la dérivée f' est holomorphe.*

COROLLAIRE 6.5. — *Si $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, holomorphe en dehors d'un point, elle est holomorphe sur* U.

Démonstration. D'après le lemme 6.1, la forme différentielle $\omega = f dz$ est localement exacte, et admet en fait une primitive F sur toute boule B $\to$ U. Cette primitive est évidemment une fonction holomorphe, et d'après le corollaire précédent, sa dérivée $\mathrm{F}' = f$ est holomorphe. □

COROLLAIRE 6.6. — *Soient $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe* U, *et a un point de* U. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la fonction f s'annule au voisinage de a;*

(ii) *toutes les dérivées $f^{(i)}(a)$ de f sont nulles ;*

(iii) *la fonction f est identiquement nulle.*

Démonstration. Les implications (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) sont évidentes. Il reste à voir que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Considérons l'ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ des points $z \in \mathrm{U}$ tels que $f^{(i)}(z) = 0$ pour tout i. Cet ensemble est une intersection de fermés de U, donc c'est un fermé de U. D'autre part, c'est un ouvert, car si $z \in \mathrm{A}$, la fonction f est développable en série entière au voisinage de a; d'après l'hypothèse, les coefficients de cette série sont tous nuls, donc la fonction f est identiquement nulle au voisinage de a, et il en est de même de ses dérivées. Par hypothèse, A n'est pas vide. Puisque U est supposé connexe, $\mathrm{A} = \mathrm{U}$. □

COROLLAIRE 6.7. — *Soit* U *un ouvert connexe. Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe, non nulle. L'ensemble des points où* f *s'annule est un ensemble discret.*

COROLLAIRE 6.8. — *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$. *L'algèbre des fonctions holomorphes sur* U *est intègre.*

COROLLAIRE 6.9. — *(Inégalités de Cauchy)*

Soit $f : \mathrm{D}(0, r) \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur le disque de centre* 0 *et de rayon* r. *On pose, pour* $0 < \rho < r$, $\mathrm{M}_\rho = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$. *Alors les coefficients de la série entière*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

satisfont à l'inégalité $|a_n| \leq \dfrac{\mathrm{M}_\rho}{\rho^n}$.

Démonstration. Soit γ le lacet $t \mapsto \rho^{2i\pi t}$. On a

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u^{n+1}} du.$$

La majoration est une conséquence immédiate de l'exercice 4.17. □

COROLLAIRE 6.10. — *(Théorème de Liouville)*

Une fonction holomorphe bornée $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est constante.*

Application : Démonstration du théorème de d'Alembert.

Soit f un polynôme de degré ≥ 1. Il s'agit de montrer que f s'annule. Si f ne s'annulait pas, la fonction $\frac{1}{f}$ serait une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et cette fonction serait bornée. D'après le théorème de Liouville, cette fonction devrait être constante, et donc f devrait être constante, ce qui est absurde.

6.4. Le principe du maximum

LEMME 6.11. — *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe de partie réelle nulle. Alors f est constante sur chacune des composantes connexes de* U.

Démonstration. On écrit $f = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$, où P et Q sont des fonctions réelles de classe C^∞. D'après les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} & = & \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} & = & -\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \end{cases}$$

D'après l'hypothèse, $\mathrm{P} = 0$. Il en résulte que $d\mathrm{Q} = 0$. Donc Q est constante sur chaque composante connexe de U. □

COROLLAIRE 6.12. — *Soit* U *un ouvert connexe, et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, telle que $|f(z)| = \mathrm{Cte}$. Alors f est constante dans* U.

Démonstration. On peut supposer $|f| = 1$. Soit $z_0 \in \mathrm{U}$, et $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ l'ouvert des $z \in \mathrm{U}$ tels que $|f(z) - f(z_0)| < 1$. Considérons une détermination du logarithme $z \mapsto \log z$ sur la boule ouverte $\mathrm{B}(f(z_0), 1)$ de centre 1 et de rayon 1. Alors la fonction holomorphe sur V définie par $z \mapsto \log(f(z))$ est de partie réelle nulle, donc constante sur la composante connexe de V qui contient z_0 d'après le lemme ci-dessus. En prenant l'exponentielle, on voit que f est constante au voisinage de z_0. Par connexité, on obtient $f(z) = f(z_0)$ pour tout $z \in \mathrm{U}$.

THÉORÈME 6.13. — *(Principe du maximum) Soient* U *un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$, et $f : \overline{\mathrm{U}} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur* U. *Soit $\partial\mathrm{U} = \overline{\mathrm{U}} \setminus \mathrm{U}$ la frontière de* U.

(i) *Le maximum de $|f(z)|$ est atteint en un point de la frontière $\partial\mathrm{U}$.*

(ii) *S'il est aussi atteint en un point de* U, *la fonction f est obligatoirement constante.*

Démonstration. Puisque $\overline{\mathrm{U}}$ est compact, le maximum de $|f|$ est forcément atteint en un point de $\overline{\mathrm{U}}$. On a donc seulement à vérifier (ii). Soit z_0 un point de U tel que $|f(z_0)| = \sup_{z\in\overline{\mathrm{U}}} |f(z)|$. Soit $\mathrm{B}(z_0, r)$ une boule ouverte de centre z_0 et rayon r contenue dans U, et $\mathrm{M}_r = \sup_{|u|=r} |f(z_0 + u)|$. La formule intégrale de Cauchy montre que $|f(z_0)| \leq \mathrm{M}_r$, l'inégalité étant stricte dès qu'il existe un point u tel que $|u| = r$ et $|f(z_0 + u)| < \mathrm{M}_r$. Puisque par hypothèse $\mathrm{M}_r \leq |f(z_0)|$, on obtient $|f(z_0 + u)| = |f(z_0)|$ pour $|u| = r$. En faisant varier r, on en déduit que la fonction $z \mapsto f(z)|$ est constante au voisinage de z_0. Il résulte du corollaire 6.12 ci-dessus que la fonction $z \mapsto f(z)$ est aussi constante au voisinage de z_0. Par connexité, on obtient que f est constante sur l'ouvert U. □

Applications

1) Lemme de Schwarz

LEMME 6.14. — *Soit* D *le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* 1, *et* $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ *une fonction holomorphe s'annulant en* 0. *Alors*

(i) *Pour tout* $z \in \mathrm{D}$, *on a* $|f(z)| \leq |z|$.

(ii) *S'il existe un point* $z_0 \neq 0$ *tel que* $|f(z_0)| = |z_0|$, *la fonction* f *est une homothétie* $z \mapsto \lambda z$.

Démonstration. La fonction $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ est encore holomorphe sur $\mathrm{D}\setminus\{0\}$, et se prolonge en une fonction holomorphe sur D. Alors pour $|z| < r$, le principe du maximum montre que $|\dfrac{f(z)}{z}| \leq \dfrac{1}{r}$. Par suite, pour $|z| < 1$, on obtient $|\frac{f(z)}{z}| \leq 1$. De plus, si on a égalité en un point $z_0 \neq 0$ la fonction g doit être constante. (Evidemment, cette constante λ est de module 1). □

2) Automorphismes du disque D

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 6.15. — *Une application inversible* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *est un difféomorphisme holomorphe, ou une tranformation holomorphe de* U *sur* V *si* f *et* f^{-1} *sont inversibles.*

Les transformations holomorphes $\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ forment évidemment un groupe, appelé le groupe des automorphismes de U, et noté Aut(U).

PROPOSITION 6.16. — *Soit* D *le disque de centre* 0 *et de rayon 1. Le groupe* Aut(D) *est le groupe des homographies*

$$h : z \mapsto \lambda \frac{z + z_0}{1 + z\overline{z}_0}$$

où λ *est un nombre complexe de module* 1 *et* z_0 *un point de* D.

Exercice 6.1

Soit $z_0 \in \mathrm{D}$. Soit h_{z_0} l'homographie définie par

$$h_{z_0}(z) = \frac{z + z_0}{1 + z\overline{z}_0}$$

1) Vérifier que $h_{z_0}(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$.

2) Montrer que h_{-z_0} est l'inverse de h_{z_0}. En déduire que h_{z_0} induit un automorphisme du disque.

3) Vérifier que l'ensemble de ces homographies est un sous-groupe de Aut(D).

4) Démontrer que les applications

$$z \mapsto \lambda \frac{z + z_0}{1 + z\overline{z}_0}$$

où λ est un nombre complexe de module 1 et $|z_0| < 1$ forment un sous-groupe G du groupe des automorphismes Aut(D).

Démonstration. Soit $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ un automorphisme du disque. Posons $z_0 = f(0)$. Considérons l'homographie $h : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ définie par

$$h(z) = \frac{z + z_0}{1 + z\overline{z}_0}$$

On a évidemment $h(0) = z_0$. Mais alors, l'automorphisme $g = h^{-1} \circ f$ laisse fixe le point 0. Du lemme 6.14 ci-dessus, on déduit que $|g(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathrm{D}$, et la même chose pour l'application inverse g^{-1}. Donc $|g(z)| = |z|$. Le lemme 6.14 implique alors que g est une homothétie de rapport λ de module 1. Ainsi, g appartient au sous-groupe $\mathrm{G} \subset \mathrm{Aut(D)}$ considéré dans l'exercice ci-dessus. Par suite, f appartient à G. On a donc démontré que $\mathrm{Aut(D)} = \mathrm{G}$. □

6.5. Fonctions holomorphes et fonctions harmoniques

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On désigne par $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur U et Harm(U) l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et harmoniques. On rappelle que la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U est harmonique.

PROPOSITION 6.17. — *On suppose que l'ouvert* U *est simplement connexe. L'application* $\mathbb{R}-$*linéaire* $\mathscr{H}(\mathrm{U}) \to \mathrm{Harm}(\mathrm{U})$ *qui associe à une fonction holomorphe sa partie réelle est surjective, de noyau* $i\mathbb{R}$.

Démonstration. Que le noyau de cette application linéaire soit $i\mathbb{R}$ résulte du lemme 6.11 ci-dessus. Pour vérifier la surjectivité, on doit étant donnée une fonction harmonique P, trouver une fonction réelle Q satisfaisant aux équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = -\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \end{cases}$$

Considérons la forme différentielle de classe C^1 sur U définie par

$$\omega = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} dx + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} dy$$

Il résulte du fait que P est harmonique que cette forme différentielle est fermée. Donc, elle a une primitive Q sur l'ouvert simplement connexe U. Alors la fonction $f = \mathrm{P} + i\mathrm{Q}$ est une fonction holomorphe sur U. □

L'hypothèse que U est simplement connexe est indispensable :

Exercice 6.2
La fonction définie sur $\mathrm{U} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ par

$$\mathrm{P}(x, y) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(x^2 + y^2)$$

est harmonique. Montrer que ce n'est pas la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U.

COROLLAIRE 6.18. — *Une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, harmonique, est de classe C^∞.*

DÉFINITION 6.19. — *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que f satisfait à la propriété de la moyenne si pour tout disque fermé $\overline{\mathrm{D}} \subset \mathrm{U}$ centré en $z \in \mathrm{U}$, de rayon r, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

Evidemment, d'après la formule intégrale de Cauchy, une fonction holomorphe vérifie la propriété de la moyenne. Il en est de même de sa partie réelle et sa partie imaginaire.

COROLLAIRE 6.20. — *Une fonction harmonique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ satisfait à la propriété de la moyenne.*

Exercice 6.3

Montrer qu'une fonction qui satisfait à la propriété de la moyenne vérifie le principe du maximum.

7. Séries de Laurent et calcul des résidus

7.1. Séries de Laurent

On est en présence d'une série de Laurent quand on cherche à définir la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ d'une famille de fonctions $a_n z^n$ indexée par $\mathbb{Z}$, où $a_n \in \mathbb{C}$. A proprement parler, il n'agit donc pas d'une série.

DÉFINITION 7.1. — *On dit que la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ est convergente si les deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 1} a_{-n} z^{-n}$ convergent.*

Ainsi, la première des séries est une série entière, la seconde une série entière en $\dfrac{1}{z}$. Par suite, si R' et R'' sont les rayons de convergence respectifs de ces deux séries entières, la série de Laurent converge dans la couronne ouverte $\frac{1}{\mathrm{R}''} < |z| < \mathrm{R}'$ et définit une fonction holomorphe dans cette couronne. C'est la réciproque qui nous intéresse ici :

THÉORÈME 7.2. — *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne* $\mathrm{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho' < |z| < \rho''\}$.

(i) *Il existe une série de Laurent qui converge vers f dans la couronne* C.

(ii) *Cette série est unique. Les coefficients a_n sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

où γ_r désigne le lacet $t \mapsto re^{2i\pi t}$, où le rayon r est tel que $\rho' < r < \rho''$.

Démonstration. Unicité :

Puisque la série de Laurent converge dans la couronne C, ceci impose que les rayons de convergence R' et R'' ci-dessus satisfont aux inégalités $\rho'' \leq \mathrm{R}'$ et $\frac{1}{\mathrm{R}''} \leq \rho'$; il en résulte que chacune des deux séries

$$\frac{1}{z^{p+1}} \sum_{n \geq 0} a_n z^n \ ; \ \frac{1}{z^{p+1}} \sum_{n \geq 1} a_{-n} z^{-n}$$

converge normalement sur le cercle $|z| = r$. Il en résulte que l'on peut, pour intégrer la somme de ces séries sur le lacet γ_r, intégrer terme à terme. Puisque pour $m \in \mathbb{Z}$ les formes différentielles $z^m dz$ admettent une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sauf pour $m = -1$, tous les termes obtenus sont nuls, sauf pour $n = p$. Il en résulte

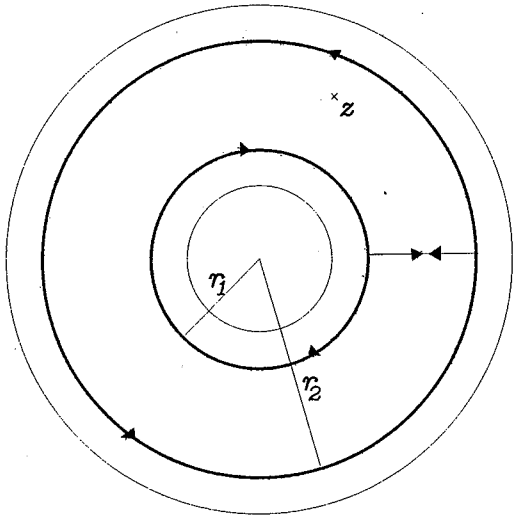
$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{p+1}} dz = 2i\pi a_p$$

ce qui montre l'unicité.

Existence :

Commençons par choisir des réels r_1 et r_2 tels que $\rho' < r_1 < r_2 < \rho''$. On va démontrer que la série de Laurent dont les coefficients a_n sont donnés par la formule ci-dessus converge et a pour somme $f(z)$ pour $r_1 < |z| < r_2$. Puisque tout $z \in \mathrm{C}$ appartient à une telle couronne pour un choix convenable de r_1 et r_2, ceci

impliquera l'énoncé.



Le lacet γ qui est dessiné dans la couronne C ne passe pas par z ; il est homotope dans C au lacet constant et l'indice $\mathrm{I}(\gamma, z)$ est 1. Par application de la formule intégrale de Cauchy on obtient

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(u)du}{u-z} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1}\frac{f(u)du}{u-z}$$

où γ_i est le cercle de rayon r_i, parcouru dans le sens direct. Désignons par $f_i(z)$ chacune de ces intégrales. En procédant comme dans la section 6.3, on voit que

$$\begin{aligned} f_2(z) =& \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}\frac{f(u)du}{u-z} \\ =& \sum_{n\geq 0} a_n z^n \end{aligned}$$

où $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_i}\frac{f(u)}{u^{n+1}}du$. De même, pour le calcul de $f_1(z) = -\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{f(u)du}{u-z}$ on écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{u-z} =& -\frac{1}{z(1-\frac{u}{z})} \\ =& -\sum_{n\geq 1}\frac{u^{n-1}}{z^n} \end{aligned}$$

Cette série est normalement convergente quand u parcourt le cercle $|u| = r_1$, et par suite on peut intégrer terme à terme. On obtient

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{z^n}$$

avec

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} f(u) u^{n-1} du \\ =& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{f(u)}{u^{-n+1}} du \end{aligned}$$

Il en résulte que la série entière $\sum_{n\geq 1} b_n v^n$ est de rayon de convergence $\geq \frac{1}{r_1}$. Pour m entier ≤ -1, posons $a_m = b_{-m}$. On a obtenu que la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ converge dans la couronne $r_1 < |z| < r_2$ et que sa somme est $f(z)$. Remarquons que la fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u^{n+1}}$ est holomorphe dans la couronne C, donc les coefficients a_n peuvent se calculer en utilisant n'importe quel cercle γ_r de rayon r paramétré dans le sens direct pourvu que $\rho' < r < \rho''$: ainsi

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(u)}{u^{n+1}}.du$$

Les coefficients a_n sont donc indépendants du choix de r_i. Alors la série de Laurent est convergente pour tout $z \in$ C : en effet, si z est donné, il suffit comme on l'a déjà dit de choisir $r_1 < |z| < r_2$ et d'appliquer le résultat ci-dessus. □

COROLLAIRE 7.3. — *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne* $\mathrm{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho' < |z| < \rho''\}$. *Il existe une fonction holomorphe f_1 dans le disque $|z| < \rho''$ et une fonction holomorphe f_2 dans la couronne $|z| > \rho'$ telles que*

$$f = f_1|_{\mathrm{C}} - f_2|_{\mathrm{C}}$$

et $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = 0$. *Cette décomposition est unique.*

Démonstration. L'existence résulte trivialement du développement en série de Laurent. Montrons l'unicité. Il suffit de montrer que si $f = 0$, on a obligatoirement $f_1 = f_2 = 0$. Mais on a alors sur C l'égalité $f_1 = f_2$ et par conséquent il existe une fonction holomorphe φ sur $\mathbb{C}$ qui coïncide avec f_1 sur le disque $|z| < \rho''$ et

f_2 sur la couronne $|z| > \rho'$. Cette fonction holomorphe φ est bornée à cause de la condition $\lim_{z\to\infty} f_2(z) = 0$. D'après le théorème de Liouville elle est constante et cette constante est obligatoirement nulle. □

7.2. Points singuliers

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, et a un point de U. Soit $f : \mathrm{U}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Il existe un disque $\mathrm{D}(a,r) \subset \mathrm{U}$ et sur la couronne $0 < |z-a| < r$ on peut écrire le développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n.$$

Remarquons que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_{-n} u^n$ est dans cas infini.

DÉFINITION 7.4. — *On dit que a est un point singulier pour f si l'un des nombres a_n, pour $n < 0$, est non nul.*

Si a n'est pas un point singulier pour f, alors la fonction f se prolonge (de manière unique) en une fonction holomorphe sur U.

PROPOSITION 7.5. — *Le point a est un point singulier pour f si et seulement si la fonction f n'est pas bornée au voisinage du point a.*

Démonstration. Supposons f bornée au voisinage de a : il existe donc un disque $\mathrm{D}(a,\rho) \subset \mathrm{U}$ tel que sur $\mathrm{D}(a,r)$ on ait $|f(z)| \leq \mathrm{M}$. L'expresion des coefficients a_n de f donnée dans le théorème 7.2 montre qu'on peut encore écrire les inégalités de Cauchy

$$|a_n| \leq \frac{\mathrm{M}}{r^n}$$

pour tout $0 < r < \rho$, et ceci entraîne $a_n = 0$ si $n < 0$. Donc a n'est pas un point singulier pour f. Dans l'autre sens, il est clair que si a n'est pas un point singulier pour f, la fonction f est bornée au voisinage de a puisqu'elle s'étend au voisinage de ce point en une fonction holomorphe. □

Nature des singularités

On distingue deux cas :

— ou bien les entiers $m < 0$ tels que $a_m \neq 0$ sont en nombre fini. Dans ce cas, on peut écrire dans la couronne ci-dessus

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^\ell}$$

où g est une fonction holomorphe sur U, telle que $g(a) \neq 0$ et ℓ un entier relatif. Ainsi, f est un quotient de fonctions holomorphes sur U. L'entier $\ell \in \mathbb{Z}$ et la fonction g sont alors déterminé de manière unique par cette condition. Si $\ell \leq 0$, le point a n'est pas un point singulier pour f : la fonction f se prolonge par continuité en une fonction holomorphe, notée encore f, au voisinage de a. Si $\ell < 0$, la fonction f s'annule au point a, et $-\ell$ est l'ordre du zéro a : c'est le premier entier $k \geq 0$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$. Si $\ell > 0$, on dit que f a un pôle d'ordre ℓ en a.

DÉFINITION 7.6. — *Soit* U *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$. *On appelle fonction méromorphe sur* U *le quotient de deux fonctions holomorphes sur* U, *c'est-à-dire un élément du corps des quotients de l'algèbre (intègre) des fonctions holomorphes sur* U.

Evidemment, les valeurs d'une telle fonction n'ont de sens qu'en dehors des zéros du dénominateur ; en dehors de ces zéros, la fonction est holomorphe. En un de ces zéros, la fonction f a un pôle si le numérateur ne s'annule pas en ce point.

— si l'ensemble des entiers m négatifs tels que $a_m \neq 0$ est infini, on dit que a est un point singulier essentiel pour la fonction f.

Exemple : la fonction $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ a un point singulier essentiel à l'origine.

THÉORÈME 7.7. — *(Weirstrass) Soit* D *le disque de centre* 0 *et de rayon* ρ *et* $f : \mathrm{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe dans le disque* D *privé de son centre* 0. *On suppose que* 0 *est un point singulier essentiel de* f. *L'image par* f *de la couronne* $0 < |z| < \epsilon$ *par est partout dense.*

Démonstration. Sinon, on pourrait trouver un point $b \in \mathbb{C}$ et un réel $r > 0$ tel que $0 < |z| < \epsilon$ entraîne $|f(z) - b| > r$. Alors la fonction

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

est holomorphe et bornée dans la couronne $0 < |z| < \epsilon$. Par suite, elle s'étend au voisinage de 0 en une fonction holomorphe. Mais alors f serait une fonction méromorphe sur le disque, contrairement à l'hypothèse. □

Il existe une version plus précise de cet énoncé, due à Picard.

THÉORÈME 7.8. — *Soit* D *le disque de centre* 0 *et de rayon* ρ *et* $f : \mathrm{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe dans le disque* D *privé de son centre* 0. *Si* 0 *est un point singulier essentiel de* f *l'image de la couronne* $0 < |z| < \epsilon$ *est* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Nous ne démontrerons pas cet énoncé.

DÉFINITION 7.9. — *Soit* $f : \mathrm{U} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur le complémentaire d'un point* a *dans un ouvert* U *de* $\mathbb{C}$. *On appelle résidu au point* a *de la forme différentielle* $\omega = f(z)dz$ *le coefficient* a_{-1} *dans le développement en série de Laurent de* f *au voisinage de* a. *Ce résidu sera noté* $\mathrm{Res}(\omega, a)$.

7.3. Théorème des résidus

On se donne une fonction holomorphe f sur le complémentaire d'un ensemble fini de points $z_1, \ldots, z_n$ dans un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathbb{C}$, et un lacet γ de U qui évite les points z_k. Le problème est de calculer l'intégrale $\int_\gamma \omega$ de la forme différentielle $\omega = f(z)dz$.

THÉORÈME 7.10. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$, *et* $f : \mathrm{U} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe sur le complémentaire d'un ensemble fini* $\{z_1, \ldots, z_n\}$ *de* U. *Soit* γ *un lacet de* U, *homotope dans* U *à un lacet constant, et qui évite les points* z_k. *Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(\omega, z_k) \mathrm{I}(\gamma, z_k)$$

Démonstration. On peut trouver pour $i = 1, \ldots, k$ des fonctions holomorphes φ_i sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ telles que la fonction $f - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$ se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur U : en effet, si on écrit au voisinage de z_k la série de Laurent de f

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{k,n} (z - z_k)^n$$

il suffit de prendre $\varphi_k = \sum_{n\leq -1} a_{k,n}(z-z_k)^n$. Puisque le lacet γ de U est homotope à un lacet constant, le théorème de Cauchy montre que

$$\int_\gamma (f - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k)dz = 0.$$

Il reste à calculer l'intégrale $\int_\gamma \varphi_k dz$. Puisque la série qui définit φ_k converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ qui évite le point z_k, on peut intégrer cette série terme à terme sur le lacet γ, et donc

$$\int_\gamma \varphi_k dz = \sum_{m>0} a_{k,-m} \int_\gamma \frac{dz}{(z-z_k)^m}$$

Or, la forme différentielle $\dfrac{dz}{(z-z_k)^m}$ a une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ pour $m \neq 1$. Il en résulte

$$\begin{aligned}\int_\gamma \varphi_k dz =& a_{k,-1} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_k} \\ =& 2i\pi \mathrm{Res}(\omega, z_k)\mathrm{I}(\gamma, z_k)\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Calcul des résidus des fonctions méromorphes

Soit $f = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ une fonction méromorphe sur un ouvert U. On peut supposer que A est non nulle en tout point où B s'annule. Les pôles de f sont les zéros de B.

— Si a est un pôle simple, on a $\mathrm{Res}(f(z)dz, a) = \dfrac{\mathrm{A}(a)}{\mathrm{B}'(a)}$

Exemple

$$\mathrm{Res}(\frac{e^{iz}dz}{z^2+1}, i) = \frac{1}{2ie}$$

— Supposons que a soit un pôle d'ordre ℓ. On a alors au voisinage de a $\mathrm{B}(z) = (z-a)^\ell \mathrm{C}(z)$ avec $\mathrm{C}(a) \neq 0$. En écrivant le développement en série entière de $g = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ au voisinage de $z = a$, on obtient,

$$\mathrm{Res}(f(z)dz, a) = \frac{g^{(\ell-1)}(a)}{(\ell-1)!}$$

Exemple

Considérons la fonction méromorphe $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Cette fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ a un pôle d'ordre 2 au point $z = i$. Pour trouver le développement en série de Laurent de f au voisinage de $z = i$, il suffit d'écrire le développement en série entière de la fonction $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$ au voisinage du point $z = i$. En fait, on a seulement besoin du deuxième terme pour trouver la dérivée $g'(a)$: on écrira donc seulement le développement limité de g à l'ordre 1 au point i. En posant $z = i + t$, on obtient

$$\begin{aligned} g(i+t) =& \frac{1}{e}\frac{e^{it}}{(i+t)(2i+t)^2} \\ =& -\frac{1}{4ei}\frac{1+it+\dots}{(1-it)(1-\frac{i}{2}t)^2} \\ =& \frac{i}{4e}(1+3it+\dots) \end{aligned}$$

Par suite, $\mathrm{Res}(f(z)dz, i) = -\dfrac{3}{4e}$.

Application : changement de variable

PROPOSITION 7.11. — *Soit $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ un difféomorphisme holomorphe, a un point de U et $b = \varphi(a)$. Soit $f : \mathrm{V} \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe en dehors de b, et $\omega = f(z)dz$. Alors*

$$\mathrm{Res}(\omega, b) = \mathrm{Res}(\varphi^*(\omega), a))$$

Démonstration. Soit γ un lacet dont l'image est un cercle contenu dans U, parcouru dans le sens direct, centré en a. La forme différentielle $\varphi^*(\omega)$ est encore holomorphe en dehors de a, et d'après le théorème des résidus, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(\varphi^*(\omega), a) =& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \varphi^*(\omega) \\ =& \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(\varphi(u))\varphi'(u)du \\ =& \int_{\varphi\circ\gamma} f(z)dz \\ =& \mathrm{Res}(\omega, b)\mathrm{I}(\varphi\circ\gamma, b) \end{aligned}$$

On doit donc prouver que $\mathrm{I}(\varphi \circ \gamma, b) = 1$. Si on applique le résultat qu'on vient d'obtenir à la forme différentielle $\omega = \dfrac{dz}{z-b}$ on obtient

$$\mathrm{I}(\varphi \circ \gamma, b) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - a} du$$

Puisque φ est un difféomorphisme holomorphe, la dérivée $\varphi'(a)$ est non nulle. La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\varphi(u) - a}$ est méromorphe sur U et a pour seul pôle le point $u = a$; c'est un pôle simple. Il en résulte que $\mathrm{Res}(\dfrac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - a} du, a) = 1$. Par suite, $\mathrm{I}(\varphi \circ \gamma, a) = 1$. D'où l'énoncé. □

Exemple

$$\mathrm{Res}(\frac{e^{2z} dz}{e^{2z} - 1}, 0) = \frac{1}{2} \mathrm{Res}(\frac{dt}{t}, 0)$$

Zéros et pôles d'une fonction méromorphe

Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U. On désigne par Z l'ensemble des zéros de f, et par P l'ensemble des pôles de f. On peut écrire au voisinage d'un point $z \in \mathrm{U}$

$$f(u) = g(u)(u - z)^\nu$$

où g est une fonction holomorphe au voisinage de z telle que $g(z) \neq 0$, et $\nu \in \mathbb{Z}$. Si $\nu > 0$, la fonction f est holomorphe au voisinage de z, le point z est un zéro de f et l'entier ν est l'ordre du zéro z. Si $\nu < 0$, le point z est un pôle de f, et $-\nu$ est la multiplicité du pôle z. Si $\nu = 0$ la fonction f est holomorphe et inversible au voisinage de z.

PROPOSITION 7.12. — *Soit γ un lacet de* U, *homotope dans* U *à un lacet constant ; on suppose que γ évite* $\mathrm{Z} \cup \mathrm{P}$. *On écrit au voisinage du point $z \in \mathrm{Z} \cup \mathrm{P}$*

$$f(u) = g(u)(u - z)^{\nu(z)}$$

où g est une fonction holomorphe au voisinage de z telle que $g(z) \neq 0$, où $\nu(z)$ est un entier représentant l'ordre du zéro si $z \in \mathrm{Z}$, ou l'opposé de la multiplicité du pôle si $z \in \mathrm{P}$.

(i) *L'ensemble des points* $z \in \mathrm{P} \cup \mathrm{Z}$ *tel que* $\mathrm{I}(\gamma, z) \neq 0$ *est fini.*

(ii) *On a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(u)}{f(u)} du = \sum_{z \in \mathrm{Z} \cup \mathrm{P}} \mathrm{I}(\gamma, z) \nu(z)$$

Démonstration. Soit $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathrm{U}$ une homotopie entre le lacet γ et un lacet constant. L'image de γ est un compact contenu dans U, et on peut alors trouver un ouvert V relativement compact contenant l'image de γ dans lequel γ est encore homotope à un lacet constant. Pour $z \notin \mathrm{V}$, on a $\mathrm{I}(\gamma, z) = 0$. De plus, dans l'ouvert V, la fonction méromorphe f a au plus un nombre fini de zéros et de pôles : en effet, puisque ces zéros et ces pôles sont isolés, $\mathrm{Z} \cup \mathrm{P}$ est, pour la topologie induite, discret, et $\mathrm{Z} \cup \mathrm{P}$ est fermé dans U, donc son intersection avec $\overline{\mathrm{V}}$ est compact ; c'est donc un ensemble fini.

On applique alors le théorème des résidus : la fonction $\dfrac{f'}{f}$ est holomorphe en dehors de $\mathrm{Z} \cup \mathrm{P}$, et on a pour $z \in \mathrm{Z} \cup \mathrm{P}$

$$\mathrm{Res}(\frac{f'(u)}{f(u)} du, z) = \nu(z)$$

Ceci achève la démonstration. □

COROLLAIRE 7.13. — *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe ayant en* a *un zéro d'ordre* k, *et* $\mathrm{D}(a, r) \subset \mathrm{U}$ *un disque de centre* a, *de rayon* r. *Pour* $b \neq 0$ *assez petit, l'équation* $f(z) = b$ *a exactement* k *zéros simples dans la boule* $\mathrm{B}(a, r)$ *pourvu que* r *soit assez petit.*

Démonstration. Soit γ le lacet $t \mapsto a + re^{2i\pi t}$. On choisit r assez petit, de sorte que f et f' ne s'annulent pas dans $\overline{\mathrm{D}}(a, r)$, sauf au point a : c'est possible parce que les zéros de f et de f' sont isolés. La fonction f est alors non nulle sur l'image de γ. Soit $\rho = \inf_{|z-a|=r} |f(z)|$. Ce nombre est > 0, et pour $|z| < b$ la fonction $f(z) - b$ ne s'annule pas sur l'image du lacet γ. Il résulte de la proposition ci-dessus que le nombre de zéros, comptés avec multiplicité, de la fonction holomorphe $z \mapsto f(z) - b$ dans le disque $\mathrm{D}(a, r)$ est l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(u) du}{f(u) - b}$$

Cette intégrale est aussi l'indice $\mathrm{I}(f\circ\gamma, b)$, et la fonction $b \mapsto \mathrm{I}(f\circ\gamma, b)$ est constante sur le disque $\mathrm{D}(0,\rho)$. Par suite, le nombre de zéros comptés avec multiplicité de $f(z) - b$ est k. Mais, si $b \neq 0$, et les racines de l'équation $f(z) = b$ dans le disque $\mathrm{D}(a,r)$ sont simples en raison du choix de r. □

7.4. Application au calcul de certaines intégrales

1. Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$$

où R est une fraction rationnelle à coefficients complexes en 2 variables n'ayant pas de pôle sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. Soit γ le lacet $t \mapsto e^{2i\pi t}$. On a aussi

$$\mathrm{I} = \frac{1}{i}\int_\gamma \mathrm{R}(\frac{1}{2}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))\frac{dz}{z}.$$

On est ramené à un calcul de résidus pour une fonction rationnelle qui n'a pas de pôle sur le lacet γ.

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. On considère l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \dfrac{dt}{a + \sin t}$. On a

$$\mathrm{I} = 2\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2iaz - 1}$$

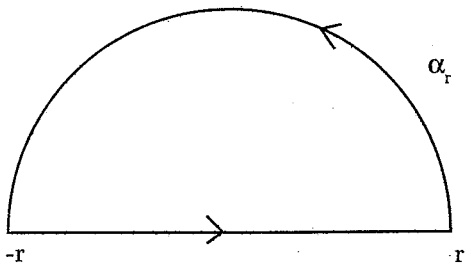
La fonction méromorphe $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 2iaz - 1}$ a un seul pôle z_0 dans le disque $\mathrm{D}(0,1)$, donné par $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$, et on a $\mathrm{Res}(fdz, z_0) = \dfrac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$. Il en résulte que $\mathrm{I} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

2. Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{R}(x)dx$$

où R est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle réel, de degré ≤ -2, de sorte que l'intégrale est absolument convergente. Pour calculer cette intégrale, on utilise

le lacet γ_r composé du demi-cercle α_r de rayon r parcouru dans le sens direct et du segment $[-r, r]$ contenu dans l'axe réel.



Soit P l'ensemble des pôles de R dans le demi-plan supérieur. D'après le théorème des résidus, on a pour r assez grand

$$\int_{\gamma_r} \mathrm{R}(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in \mathrm{P}} \mathrm{Res}(\mathrm{R}(z)dz, a)$$

Puisque R est de degré ≤ -2, il existe une constante réelle $\mathrm{A} > 0$ telle que pour $|z|$ assez grand on ait $|\mathrm{R}(z)| \leq \dfrac{\mathrm{A}}{|z|^2}$. Il en résulte que pour r assez grand $|\int_{\alpha_r} \mathrm{R}(z)dz| \leq 2\pi \frac{\mathrm{A}}{r}$. Par suite, l'intégrale sur le chemin α_r tend vers 0. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_r} \mathrm{R}(z)dz \\ &= 2i\pi \sum_{a \in \mathrm{P}} \mathrm{Res}(\mathrm{R}(z)dz, a) \end{aligned}$$

Exemple

Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6}$$

La fonction rationnelle $\mathrm{R}(z) = \dfrac{1}{1+z^6}$ a pour pôles dans le demi-plan supérieur $e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}$ et en un tel pôle a, le résidu $\mathrm{Res}(\mathrm{R}(z)dz, a)$ est $\frac{1}{6a^5} = -\frac{a}{6}$. Il en résulte

$$\mathrm{I} = -\frac{i\pi}{6}(2i \sin \frac{\pi}{6} + i) = \frac{\pi}{3}.$$

3. On considère une fonction holomorphe f sur un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant le demi-plan supérieur, sauf en un nombre fini de points qui n'appartiennent pas à l'axe réel. Soit P l'ensemble des points singuliers de f dans le demi-plan supérieur. On suppose $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. On a alors

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2i\pi \sum_{a\in \mathrm{P}} \mathrm{Res}(f(z)e^{iz}dz, a)$$

Cette formule permet le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$ lorsque cette intégrale est convergente.

Démonstration. On intègre sur le même lacet γ_r que dans l'exemple ci-dessus. Soit ϵ un réel > 0. Pour $|z|$ assez grand, on a $|f(z)| \leq \epsilon$ et par suite pour r assez grand

$$|\int_{\alpha_r} f(z)e^{iz}dz| \leq \epsilon \int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta} r d\theta \leq \epsilon\pi.$$

La dernière majoration s'obtient en utilisant la minoration $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc $\lim_{r\to\infty} \int_{\alpha_r} f(z)e^{iz}dz = 0$. L'énoncé en résulte. □

Exercice 7.1

Prouver que

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e}$$

Supposons maintenant que f ait des pôles simples sur l'axe réel. On se limite ici à l'exemple suivant :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

dont on sait qu'elle est convergente, mais non absolument convergente : en effet, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité à $[0, \infty[$ et par intégration par parties, on obtient

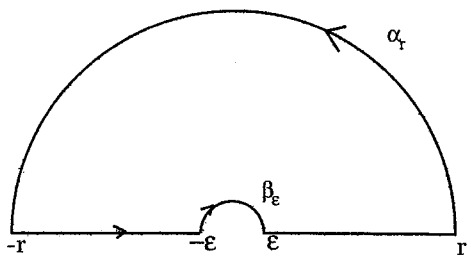
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{r} \frac{\sin x dx}{x} = -\frac{\cos r}{r} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{r} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

Evidemment, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^2}dx$ est absolument convergente. Par suite

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{r} \frac{\sin x}{x}dx$$

existe, et, par suite, l'intégrale I est convergente.

Pour calculer cette intégrale, on modifie le lacet γ_r considéré ci-dessus en contournant l'origine, par un demi-cercle de rayon ϵ parcouru dans le sens négatif :



et on calcule sur le lacet $\gamma_{\rho,\epsilon}$ ainsi obtenu l'intégrale

$$\mathrm{I}_{r,\epsilon} = \int_{\gamma_{r,\epsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

On désigne par β_ϵ le chemin $t \mapsto \epsilon e^{i\pi t}$, pour $0 \leq t \leq 1$.

LEMME 7.14. — *Soit f une fonction méromorphe au voisinage de* 0, *ayant un pôle simple à l'origine. On a*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\beta_\epsilon} f(z)dz = i\pi \mathrm{Res}(f(z)dz, 0).$$

Démonstration. Soit a_{-1} le résidu de la forme différentielle $f(z)dz$ à l'origine. On peut écrire $f(z) = \dfrac{a_{-1}}{z} + g(z)$ où g est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine. Alors

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\beta_\epsilon} g(z)dz = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\beta_\epsilon} g(z)dz = a_{-1} \int_{\beta_\epsilon} \frac{dz}{z} = i\pi a_{-1}.$$

□

Quand on applique ceci à la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$, on obtient

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\beta_\epsilon} f(z)dz = i\pi$$

D'autre part,

$$|\int_{\alpha_r} f(z)dz| \leq \int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}d\theta \leq \frac{\pi}{r}$$

et par suite

$$\lim_{r\to\infty,\epsilon\to 0}\int_{\gamma_{r,\epsilon}} f(z)dz = 2i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

Ainsi,

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

En fait, dans cet exemple, on n'a pas utilisé le théorème des résidus, mais seulement le théorème de Cauchy, puisque la fonction f était holomorphe sur un ouvert simplement connexe contenant le lacet $\gamma_{r,\epsilon}$.

Exercice 7.2

Montrer que l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x(1+x^2)}dx$$

est convergente et la calculer.

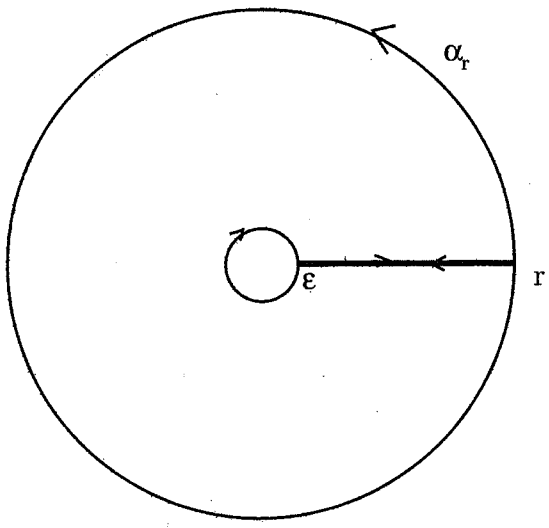
4. Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty}\frac{\mathrm{R}(x)}{x^{\alpha}}dx$$

où R est une fonction rationnelle n'ayant pas de pôles sur le demi-axe des nombres réels $x \geq 0$, de degré ≤ -1, et α un réel $0 < \alpha < 1$. Ces conditions assurent la convergence absolue de l'intégrale ci-dessus.

Pour calculer cette intégrale, on considère sur le complémentaire D du demi-axe réel ≥ 0 la détermination du logarithme dont la partie imaginaire θ appartient à $]0, 2\pi[$, qu'on note $\mathrm{Log}\, z$ et on pose $z^{\alpha} = e^{\alpha \mathrm{Log}\, z}$. On considère sur D la fonction méromorphe $z \mapsto f(z) = \dfrac{\mathrm{R}(z)}{z^{\alpha}}$ et la forme différentielle méromorphe $\omega = f(z)dz$.

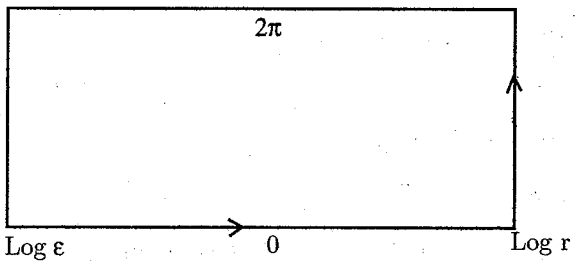
On aimerait intégrer cette forme différentielle sur le lacet suivant :



mais la forme différentielle ω n'a pas de sens sur le demi-axe des nombres réels ≥ 0. On pourrait déformer un peu ce lacet, et intégrer cette forme différentielle sur un lacet voisin. Le calcul est possible par cette méthode, mais le stratagème suivant permet de résoudre sans problème cette difficulté et d'éviter des passages à la limite demandant une soigneuse justification. On considère l'image réciproque de ω par la transformation holomorphe $\varphi : u \mapsto e^u$ définie sur l'ouvert Ω des nombres complexes $u = \rho + i\theta$ où ρ et θ sont réels, et $0 < \theta < 2\pi$; on obtient la forme différentielle méromorphe

$$\varphi^*(\omega) = \mathrm{R}(e^u)e^{(1-\alpha)u}du.$$

Cette forme différentielle méromorphe se prolonge donc à $\mathbb{C}$ en une forme différentielle ω^* et ses pôles dans Ω sont les images réciproques des pôles de R par le difféomorphisme holomorphe φ. On intègre cette forme différentielle sur le lacet $\gamma_{\epsilon,r}$ qui paramètre le bord du rectangle $\mathrm{R}_{\epsilon,r}$ défini par les inégalités $\mathrm{Log}\,\epsilon \leq \rho \leq \mathrm{Log}\,r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, parcouru dans le sens direct.



On obtient

$$\int_{\gamma_{\epsilon,r}} \omega^* = (1 - e^{2i\alpha\pi}) \int_{\epsilon \leq t \leq r} \frac{\mathrm{R}(x)}{x^\alpha} dx + \mathrm{J}_r - \mathrm{J}_\epsilon$$

où

$$\mathrm{J}_r = r^{1-\alpha} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}(re^{i\theta}) e^{i(1-\alpha)\theta} d\theta$$

Puisque R est de degré ≤ -1, il existe une constante $\mathrm{A} > 0$ telle que pour r assez grand, et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on ait $|\mathrm{R}(re^{i\theta})| \leq \frac{\mathrm{A}}{r}$. Il résulte de l'hypothèse $\alpha > 0$ que $\lim_{r\to\infty} \mathrm{J}_r = 0$. De même

$$\mathrm{J}_\epsilon = \epsilon^{1-\alpha} \int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\epsilon e^{i\theta}) e^{i(1-\alpha)\theta} d\theta$$

et l'hypothèse $\alpha < 1$ entraîne $\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{J}_\epsilon = 0$. Ainsi,

$$\lim_{r\to\infty, \epsilon\to 0} \int_{\gamma_{r,\epsilon}} \omega^* = (1 - e^{-2i\pi\alpha})\mathrm{I}$$

Soit P l'ensemble des pôles de R. En appliquant le théorème des résidus à cette forme différentielle méromorphe, on obtient pour ϵ assez petit et r assez grand, compte-tenu de la proposition 7.7

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{r,\epsilon}} \varphi^*(\omega) =& 2i\pi \sum_{b\in\Omega, \varphi(b)\in \mathrm{P}} \mathrm{Res}(\varphi^*(\omega), b) \\ =& 2i\pi \sum_{a\in \mathrm{P}} \mathrm{Res}(\omega, a).\end{aligned}$$

Ainsi

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha})\mathrm{I} = 2i\pi \sum_{a\in \mathrm{P}} \mathrm{Res}(\omega, a).$$

Exemple

Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

Le seul pôle de $f(z) = \dfrac{1}{z^\alpha(1+z)}$ dans D est $z = -1$ et le résidu de ω en ce point est $e^{-i\pi\alpha}$. Alors la formule ci-dessus montre que

$$\mathrm{I} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

5. Considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \mathrm{R}(x)\mathrm{Log}\, x dx$$

où R est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le demi-axe des nombres réels ≥ 0. On suppose que R est de degré ≤ -2, ce qui assure la convergence de l'intégrale.

On considère, sur le même ouvert D que ci-dessus, la forme différentielle méromorphe $\mathrm{R}(z)\mathrm{Log}\, z dz$; la même transformation que ci-dessus permet le calcul de l'intégrale $\int_0^\infty \mathrm{R}(x)dx$. Pour calculer l'intégrale I l'astuce est d'introduire la forme différentielle méromorphe $\omega = \mathrm{R}(z)(\mathrm{Log}\, z)^2 dz$. On obtient par la même méthode que ci-dessus, P désignant l'ensemble des pôles de R

$$\int_0^\infty \mathrm{R}(x)((\mathrm{Log}\, x)^2 - (\mathrm{Log}\, x + 2i\pi)^2)dx = 2i\pi(\sum_{a\in \mathrm{P}} \mathrm{Res}(\mathrm{R}(z)(\mathrm{Log}\, z)^2 dz, a)).$$

Si la fraction rationnelle R est réelle sur l'axe réel, ceci suffit pour calculer I : on obtient

$$\mathrm{I} = -\frac{1}{2}\sum_{a\in \mathrm{P}}(\mathrm{Res}(\mathrm{R}(z)(\mathrm{Log}\, z)^2 dz, a)).$$

Exercice 7.3

Calculer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}\, x}{(1+x)^3} dx$$

Exercice 7.4

Montrer que l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}\, x}{x^2 - 1} dx$$

a un sens et la calculer. (Attention : considérons la forme différentielle méromorphe

$$\omega = \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2 - 1} dz$$

sur D. La forme différentielle méromorphe ω^* sur $\mathbb{C}$ définie par

$$\omega^* = \frac{u^2}{\operatorname{sh} u} du$$

prolonge l'image réciproque $\varphi^*(\omega)$ et présente un pôle sur le lacet $\gamma_{\epsilon,r}$. L'intégration ne peut se faire sur ce lacet. Il faut donc modifier la démonstration présentée dans le point 4.)

8. Topologie sur l'espace des fonctions holomorphes

8.1. Suites de fonctions holomorphes

Quand on considère une suite f_n de fonctions différentiables de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ qui converge uniformément sur tout compact de U, vers une fonction f il n'y a aucune raison pour que la fonction f soit différentiable sur U : pour obtenir un tel résultat, il faut faire des hypothèses supplémentaires, par exemple supposer que la suite des différentielles d_{f_n} converge uniformément sur tout compact de U. Pour les fonctions holomorphes, la situation est bien meilleure.

PROPOSITION 8.1. — *Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur l'ouvert* U *qui converge uniformément sur tout compact* $K \subset U$ *vers la fonction f. Alors la fonction f est holomorphe sur* U.

Démonstration. La question est locale ; on peut donc supposer que U est simplement connexe. On sait que la fonction f est continue. Pour vérifier que f est holomorphe, il suffit de vérifier que la forme différentielle $\omega = f(z)dz$ a une primitive. D'après le théorème 1.5, il suffit de vérifier que pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux contenu dans U, on a $\int_\gamma \omega = 0$. Soit γ un tel lacet, et ϵ un

nombre réel > 0. Soit K l'image de γ; c'est un compact de U. Il existe un entier N tel que pour $n \geq$ N on ait

$$\| f_n - f \|_{\mathrm{K}} \leq \epsilon.$$

Or, d'après le théorème de Cauchy, on a $\int_\gamma f_n(z)dz = 0$ et donc

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (f_n(z) - f(z)).dz$$

Si on choisit $n \geq$ N, il résulte de l'exercice 4.1 que l'on a $|\int_\gamma f(z)dz| \leq \epsilon$. Ceci étant vrai quel que soit $\epsilon > 0$, on obtient $\int_\gamma f(z)dz = 0$, ce qui achève la démonstration. □

Exemple.

Soit $\mathrm{U} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{1}{(z-n)^2}$ converge uniformément sur tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$, vers une fonction holomorphe $f(z)$. En effet, soit K est un compact de U, et $r = \max\{\mathrm{Re}(z), z \in \mathrm{K}\}$. On a alors pour n entier $\geq r$ et $z \in \mathrm{K}$

$$\frac{1}{|z-n|^2} \leq \frac{1}{(n-r)^2}$$

ce qui prouve que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(z-n)^2}$ converge normalement, donc uniformément sur le compact K. Ceci entraîne que la famille de fonctions holomorphes sur U, indexée par $\mathbb{Z}$, $f_n(z) = \dfrac{1}{(z-n)^2}$ est sommable sur K : en effet, $f_n(z) = f_{-n}(-z)$, et pour toute partie finie A de $\mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{n\in\mathrm{A}} \| f_n \|_{\mathrm{K}} \leq \| f_0 \|_{\mathrm{K}} + 2\sum_{n\geq 1} \| f_n \|_{\mathrm{K}}$$

Par suite la « série » ci-dessus converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction f.

Exercice 8.1

La somme de la série ci-dessus est donnée par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2}.$$

Solution

La somme $f(z)$ de la série est une fonction holomorphe et périodique de période 1. Il en est de même de la fonction $g(z) = \dfrac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2}$. Au voisinage de $z = 0$, la fonction $h(z) = \sum_{n \neq 0} f_n(z)$ est holomorphe, et par suite, f est méromorphe au voisinage de $z = 0$: plus précisément

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + h(z)$$

Le développement en série de Laurent de la fonction méromorphe g au voisinage de $z = 0$ montre qu'on peut aussi écrire $g(z) = \dfrac{1}{z^2} + k(z)$ où k est une fonction holomorphe au voisinage de $z = 0$. Il en résulte que la fonction $f - g$ se prolonge au voisinage de $z = 0$ en une fonction holomorphe. Puisque cette fonction est périodique, cette fonction se prolonge sur $\mathbb{C}$ en une fonction holomorphe. Pour montrer que cette fonction est nulle, on va appliquer le théorème de Liouville : on va montrer qu'elle est bornée. Pour ceci, il suffit de constater que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre A tel que pour $|\mathrm{Im}\, z| \geq \mathrm{A}$ on ait

1) $|g(z)| \leq \epsilon$

2) $|f(z)| \leq \epsilon$

On écrit $z = x + iy$, avec x et y réels. La première assertion résulte de l'inégalité $|\sin \pi z| \geq |\mathrm{sh}\, \mathrm{y}|$. Pour la seconde, vu la périodicité, on peut évidemment supposer que $|x| \leq \frac{1}{2}$. Mais l'inégalité, pour $n > 0$,

$$\frac{1}{|z - n|^2} \leq \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2}$$

prouve que la série $\sum_{n>0} \frac{1}{(z-n)^2}$ est normalement convergente sur le fermé $|x| \leq \frac{1}{2}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors un entier N tel que pour $|x| \leq \frac{1}{2}$ on ait

$$\sum_{|n| \geq \mathrm{N}} |f_n(z)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

De l'inégalité $|z - n| \geq |y|$, il résulte qu'il existe un réel A tel que pour $|y| \geq \mathrm{A}$

$$\sum_{|n| \leq \mathrm{N}} f_n(z)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi, pour $|y| \geq A$ et $|x| \leq \frac{1}{2}$, on a $|f(z)| \leq \epsilon$. Il en résulte que la fonction $\varphi = f - g$ est holomorphe et bornée. Il résulte du théorème de Liouville que cette fonction est constante, et cette constante est obligatoirement nulle puisque $\lim_{y\to\infty} \varphi(x+iy) = 0$. D'où le résultat.

Exercice 8.2

Montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pourra remarquer que si S est la somme de la série qui figure au premier membre, la fonction méromorphe

$$z \mapsto \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} - \frac{1}{z^2}$$

s'étend en une fonction holomorphe au voisinage de l'origine, dont la valeur en $z = 0$ est 2S.

8.2. Compacts de fonctions holomorphes

On considère l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathrm{U})$ des fonctions continues sur l'ouvert U de $\mathbb{C}$. Pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$, et tout réel $\epsilon > 0$, on considère l'ensemble $\mathrm{V}_{\mathrm{K},\epsilon}$ des fonctions continues sur U telles que

$$\| f \|_{\mathrm{K}} \leq \epsilon$$

Il existe alors une topologie $\mathscr{T}$ et une seule sur $\mathscr{C}(\mathrm{U})$ pour laquelle les $\mathrm{V}_{\mathrm{K},\epsilon}$ constituent un système fondamental de voisinages de 0, et qui soit invariante par translation : les ouverts sont les parties $\mathscr{U} \subset \mathscr{C}(\mathrm{U})$ telles que pour tout $f \in \mathscr{U}$ il existe K et ϵ tels que le translaté $f + \mathrm{V}_{\mathrm{K},\epsilon}$ (*i.e.* les fonctions $f + g$, avec $g \in \mathrm{V}_{\mathrm{K},\epsilon}$) soit contenu dans $\mathscr{U}$.

DÉFINITION 8.2. — *La topologie $\mathscr{T}$ est appelée topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Cette définition trouve sa justification dans l'exercice suivant :

Exercice 8.3

Démontrer qu'une suite de fonctions continues f_n sur l'ouvert U converge uniformément sur tout compact vers $f \in \mathscr{C}(\mathrm{U})$ si et seulement si $f_n \to f$ au sens de la topologie $\mathscr{T}$.

Exercice 8.4

L'espace vectoriel $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ des fonctions holomorphes dans U est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}(\mathrm{U})$.

PROPOSITION 8.3. — *La topologie $\mathscr{T}$ est métrisable.*

Démonstration. On sait qu'il existe un ensemble dénombrable A partout dense dans U : il suffit de considérer les points à coordonnées rationnelles. Il en résulte qu'on peut trouver une suite de compact K_n de U satisfaisant aux conditions suivantes

— le compact K_n est contenu dans l'intérieur de K_{n+1};

— l'ouvert U est réunion des K_n.

Une telle suite se contruit par récurrence en considérant des réunions finies convenables de boules fermées dont le centre appartient à A, et dont le rayon est rationnel. Une telle suite de compacts de U s'appelle suite exhaustive de compacts.

Exercice 8.5

Construire une telle suite de compacts.

Si K_n est une suite exhautive de compacts de U, tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ est alors contenu dans un des compact K_n, et on a alors $\mathrm{V}_{\mathrm{K}_n,\epsilon} \subset \mathrm{V}_{\mathrm{K},\epsilon}$. Ainsi, les voisinages de 0 de la forme $\mathrm{V}_{\mathrm{K}_n,\epsilon}$ constituent un système fondamental de voisinages de 0.

Posons pour f et $g \in \mathscr{C}(\mathrm{U})$

$$\nu_i(f) = \mathrm{Min}\ \{1, \| f \|_{\mathrm{K}_i}\}$$

$$d(f,g) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^i} \nu_i(f-g)$$

Cette série est évidemment convergente.

Exercice 8.6

Vérifier que d définit une distance sur $\mathscr{C}(\mathrm{U})$.

Montrons que la topologie définie par cette distance coïncide avec $\mathscr{T}$. Considérons une boule ouverte $\mathrm{B}(0,\epsilon)$, avec $0 < \epsilon < 1$. Montrons qu'une telle boule ouverte est un voisinage de 0 dans la toplogie $\mathscr{T}$. Choisissons n tel que $\frac{1}{2^n} \leq \frac{\epsilon}{2}$, et

considérons le voisinage $V_{K_n,\epsilon}$. On a alors $V_{K_n,\epsilon} \subset B(0,\epsilon)$. En effet, si $f \in V_{K_n,\epsilon}$, pour $0 \leq i \leq n$ on a $\| f \|_{K_i} \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} d(f,0) \leq & \sum_{i=0}^{n} \frac{\nu_i(f)}{2^i} + \frac{1}{2^n} \\ \leq & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, montrons que tout voisinage $V_{K_n,\epsilon}$ contient une boule $B(0,\rho)$. Si $f \in B(0,\rho)$, on a pour tout entier i

$$\nu_i(f) \leq \rho 2^i$$

ce qui entraîne si $\rho 2^i < 1$, $\| f \|_{K_i} \leq \rho 2^i$. En particulier, si $\epsilon < 1$, le voisinage de $V_{K_n,\epsilon}$ contient la boule $B(0, \frac{\epsilon}{2^n})$. □

Exercice 8.7

Montrer que l'espace métrique $\mathscr{C}(U)$, muni de la distance d ainsi définie, est complet.

Dès lors, la notion d'ensemble borné a un sens dans $\mathscr{C}(U)$.

Exercice 8.8

Montrer qu'un ensemble $A \subset \mathscr{C}(U)$ est borné pour la distance d si et seulement si pour toute partie compacte K de U la fonction $f \to \| f \|_K$ est bornée sur A.

Cet énoncé permet de voir que la notion d'ensemble borné ne dépend du choix de la suite exhaustive de compacts K_n.

THÉORÈME 8.4. — *(Montel) Soit $\mathscr{H}(U)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur* U *muni de la topologie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Un ensemble $A \subset \mathscr{H}(U)$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

La démonstration de ce théorème occupe le reste de la section. Commençons par des préliminaires topologiques qui vont nous permettre de trouver des parties compactes dans l'espace vectoriel normé des fonctions continues $\mathscr{C}(K)$ à valeurs complexes sur un espace topologique compact K, muni de la norme

$$\| f \| = \sup_{x \in K} \| f(x) \| .$$

On utilisera le fait que cet espace vectoriel normé est complet.

Soit X un espace topologique, et $\mathscr{C}(\mathrm{X})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur X à valeurs complexes.

DÉFINITION 8.5. — *Soit* X *un espace topologique. Une partie* $\mathrm{A} \subset \mathscr{C}(\mathrm{X})$ *est dite équicontinue si pour tout* $x_0 \in \mathrm{K}$ *pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe un voisinage* V *de* x_0 *dans* X *tel que pour tout* $f \in \mathrm{A}$ *et* $x \in \mathrm{V}$ *on ait* $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

Exercice 8.9

Soit $g : [0,1] \times \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que les fonctions $f_t : \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ définies par $f_t(x) = f(t,x)$ constituent une famille équicontinue de $\mathscr{C}(\mathrm{X})$.

THÉORÈME 8.6. — *(Ascoli) Soit* K *un espace topologique compact. Une partie* $\mathrm{A} \subset \mathscr{C}(\mathrm{K})$ *est compacte si et seulement si elle est fermée, équicontinue, et si l'ensemble* $\mathrm{A}(x) = \{f(x), f \in \mathrm{A}\}$ *est borné.*

Démonstration. Une partie compacte $\mathrm{A} \subset \mathscr{C}(\mathrm{K})$ est évidemment fermée dans l'espace topologique séparé $\mathscr{C}(\mathrm{K})$. Montrons qu'elle est équicontinue : cela repose sur la remarque suivante :

Exercice 8.10

L'application $\mathrm{A} \times \mathrm{K} \to \mathbb{C}$ définie par $(f,x) \mapsto f(x)$ est continue.

Soit ϵ un réel > 0. L'image réciproque de la boule $\mathrm{B}(0,\epsilon)$ par l'application continue $(f,x) \mapsto f(x) - f(x_0)$ est un ouvert contenant $\mathrm{A} \times \{x_0\}$. Il contient donc un ouvert de la forme $\mathrm{A} \times \mathrm{V}$, où V est un voisnage ouvert de x_0 dans K. Alors, pour tout $f \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{V}$, on a $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. L'exercice ci-dessus entraîne évidemment que $\mathrm{A}(x)$ est compact.

Montrons la réciproque, qui sera la plus utile dans les applications. Soit $f_m \in \mathrm{A}$ une suite de fonctions continues de A. Montrons que que l'on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente au sens de la topologie de la convergence uniforme. On va construire cette suite extraite par un procédé de suite diagonale, en la choisissant de sorte qu'elle converge sur un ensemble dénombrable adéquat de K.

Puisque K est compact, la propriété d'équicontinuité permet de trouver pour chaque entier $p > 0$ un ensemble fini $\mathrm{D}_p \subset \mathrm{K}$ et des ouverts $\mathrm{V}_{p,x}$ qui recouvrent

K, tels que $x \in \mathrm{V}_{p,x}$ et satisfaisant à la condition suivante : pour tout $f \in \mathrm{A}$, et $y \in \mathrm{V}_{p,x}$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{p}.$$

Puisque $\mathrm{A}(x)$ est relativement compact pour tout x, la suite de $\mathbb{C}^{\mathrm{D}_p}$

$$m \mapsto (f_m(x))_{x \in \mathrm{D}_p}$$

est relativement compacte. Donc il existe une sous-suite $m \mapsto f_{1,m}$ de (f_m) qui converge sur D_1. De cette suite, on peut extraire une sous-suite $m \mapsto f_{2,m}$ qui converge sur D_2. Plus généralement, on obtient par récurrence sur p une suite $m \mapsto f_{p,m}$ qui converge sur D_p et telle que $m \mapsto f_{p,m}$ soit une suite extraite de $m \mapsto f_{p-1,m}$. A fortiori, la suite $m \mapsto f_{p,m}$ converge sur D_i pour $i \leq p$.

Considérons la suite diagonale $m \mapsto g_m = f_{m,m}$. Cette suite est extraite de $m \mapsto f_{p,m}$ (et donc de la suite initiale $m \mapsto f_m$) ; donc pour tout entier p, elle converge sur D_p. Montrons que cette suite converge uniformément sur K. Pour ceci, on va montrer que c'est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}(\mathrm{K})$. Soit $\epsilon > 0$. Choisissons un entier p tel que $\frac{1}{p} < \frac{\epsilon}{3}$. Par la propriété de Cauchy, on peut trouver un entier N tel que pour m et n entiers $\geq \mathrm{N}$ on ait pour tout $z \in \mathrm{D}_p$

$$|g_n(z) - g_m(z)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Montrons que pour tout $x \in \mathrm{K}$, et m et $n \geq \mathrm{N}$ on a

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} \tag{1}$$

Il existe $z \in \mathrm{D}_p$ tel que $x \in \mathrm{V}_{p,z}$. Alors on peut écrire, d'après la définition de $\mathrm{V}_{p,z}$ et l'inégalité (1)

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| \leq & |g_m(x) - g_m(z)| + |g_m(z) - g_n(z)| + |g_n(z) - g_n(x)| \\ \leq & \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $\| g_m - g_n \| \leq \epsilon$. □

La clé de la démontration du théorème de Montel est le lemme suivant :

LEMME 8.7. — *Un ensemble borné* A *de fonctions holomorphes sur* U *est équicontinu.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathrm{U}$, et $\mathrm{D}(z_0, r)$ un disque dont la fermeture est contenue dans U. Soit γ le lacet paramétrant le cercle $\partial\mathrm{D}$ dans le sens direct. D'après la formule intégrale de Cauchy, on a pour tout $z \in \mathrm{D}(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)du}{u - z}$$

Cette formule entraîne la majoration suivante pour $|z - z_0| \leq \frac{r}{2}$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{4 \parallel f \parallel_{\partial\mathrm{D}}}{r} |z - z_0|.$$

Puisque A est borné, il existe un réel $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $f \in \mathrm{A}$ on ait $\parallel f \parallel_{\partial\mathrm{D}} \leq \mathrm{M}$. Alors, si $\epsilon > 0$ est donné, pour obtenir $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ pour tout $f \in \mathrm{A}$, il suffit de de choisir $|z - z_0] \leq \frac{\epsilon r}{4\mathrm{M}}$. Ceci prouve le lemme. □

Exercice 8.11

Montrer que si $\mathrm{A} \subset \mathscr{C}(\mathrm{K})$ est équicontinu, il en est de même de son adhérence.

Fin de la démonstration.

Soit A un ensemble fermé et borné de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$. Il s'agit de montrer que de toute suite f_n de fonctions holomorphes de A on peut extraire une sous-suite convergente pour la topologie $\mathscr{T}$. On va construire cette suite en faisant à nouveau usage d'un procédé diagonal.

LEMME 8.8. — *Soit* K *un compact de* U. *On peut extraire de la suite* f_n *une sous-suite qui converge uniformément sur* K.

Démonstration. La famille des restrictions de fonctions holomorphes $f|_\mathrm{K}$ est équicontinue, d'après le lemme ci-dessus, et il en est de même de sa fermeture B dans $\mathscr{C}(\mathrm{K})$ d'après l'exercice 8.11 qui précède. Comme A est borné, il en est de même pour tout $x \in \mathrm{K}$ de $\mathrm{A}(x)$ et de $\mathrm{B}(x)$; ainsi, on peut appliquer le théorème d'Ascoli à B. □

Soit K_m une suite exhaustive de compacts de U. D'après le lemme ci-dessus, on peut construire une sous-suite $n \mapsto f_{1,n}$ qui converge uniformément sur K_1. De cette suite, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur K_2. Plus généralement, on obtient par récurrence sur p une suite $n \mapsto f_{p,n}$, extraite de $n \mapsto f_{p-1,n}$ qui converge uniformément sur K_p. Alors la suite diagonale $g_n = f_{n,n}$ est extraite de $n \mapsto f_{p,n}$ et donc converge uniformément sur K_p. Il en résulte que cette suite diagonale converge uniformément sur tout compact de U, et puisque A est fermé, sa limite appartient à A. Ceci démontre le théorème de Montel. □

Exercice 8.12

Montrer que l'application $\mathscr{H}(U) \to \mathscr{H}(U)$ qui associe à une fonction holomorphe f' sa dérivée f' est continue. (Utiliser la formule intégrale de Cauchy pour calculer localement la dérivée f').