Fonctions de Morse associées à l'action d'un tore.

Joseph Le Potier

Introduction

On considère une variété symplectique (M, ω) munie d'une action d'un tore T, d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, laissant invariante la structure symplectique et d'une application moment $\mu : \mathrm{M} \longrightarrow \mathfrak{t}^*$. On montre facilement que les points fixes de T constituent une sous-variété M^{T} dont on désigne par C_ν les composantes connexes.

Soit $\xi \in \mathfrak{t}$. A ξ est associée une fonction T−invariante $\mu_\xi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points critiques coïncide avec M^{T}, pourvu que ξ soit générique. De plus, la fonction μ_ξ est alors une fonction de Morse non dégénérée au sens de Bott, ce qui signifie que le long de M^{T} le noyau du Hessien de f est l'espace vectoriel tangent à C. A l'élément ξ on sait alors associer pour chaque composante C_ν un indice $2d_\nu$: pour tout point $x \in \mathrm{C}_\nu$, c'est la dimension maximale des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ sur lesquels le Hessien de μ_ξ est une forme quadratique négative non dégénérée ; on vérifiera que cette dimension est effectivement paire.

Le but de l'exposé est de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *(Kirwan) On suppose que μ_ξ n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques, et que pour tout m, le fermé de* M *défini par $\mu_\xi(x) \leq m$ est compact. Alors le polynôme de Poincaré de* M *est donné par*

$$\mathrm{P}_t(\mathrm{M}) = \sum_\nu t^{2d_\nu} \mathrm{P}_t(\mathrm{C}_\nu)$$

La théorie de Morse classique pour les fonctions de Morse non dégénérées au sens de Bott fournit une inégalité $\mathrm{P}_t(\mathrm{M}) \leq \sum_\nu t^{2d_\nu} \mathrm{P}_t(\mathrm{C}_\nu)$: ce sont les inégalités de Morse, que nous démontrerons pour les fonctions μ_ξ ci-dessus. L'utilisation de l'action du tore et le fait que ces fonctions de Morse soient parfaites en cohomologie équivariante permettent en fait d'obtenir l'égalité. L'argument repose sur la suite spectrale de cohomologie T−équivariante de M.

Il sera commode d'introduire sur M une métrique riemannienne T−invariante ; on pourra de plus supposer que g est compatible avec la forme symplectique ω, ce qui signifie que l'endomorphisme antisymétrique i de TX défini par

$$g(iu, v) = \omega(u, v)$$

pour u et v vecteurs tangents en $x \in \mathrm{M}$ est de carré -1; ainsi, l'opérateur i définit une structure presque complexe sur X.

1. Application moment

Soit G un groupe de Lie compact, d'élément neutre e, agissant sur M en préservant ces structures. Pour $x \in \mathrm{M}$, on désigne par ϕ_x l'application $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{M}$ définie par $g \mapsto gx$. Un élément $\xi \in \mathfrak{g}$ fournit un champ de vecteurs sur M, qui sera noté ξ_*, défini par $\xi_*(x) = \mathrm{T}_e\phi_x(\xi)$. Rappelons qu'une application moment est une application différentiable $\mu : M \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire en la deuxième variable et telle que si on pose $\mu_\xi(x) = \mu(x, \xi)$ pour $\xi \in \mathfrak{t}$ les deux conditions suivantes soient satisfaites :

(1) Pour tout $g \in G$, $g^*(\mu_\xi) = \mu_{g^{-1}\xi g}$

(2) $d\mu_\xi = i(\xi_*)\omega$.

LEMME 2. — *Si* M *est simplement connexe, il existe toujours une application moment. Deux applications moment diffèrent par un élément de* $(\mathfrak{g}^*)^G$ *, c'est-à-dire par un élément de* $\mathfrak{g}^*$ *invariant sous l'action coadjointe.*

Démonstration. On considère le complexe $A^\bullet(M, \mathfrak{g}^*)^G$ des formes différentielles équivariantes à valeurs dans $\mathfrak{g}^*$. L'inclusion de ce complexe dans le complexe $A^\bullet(M, \mathfrak{g}^*)$ identifie la cohomologie $H^*(A^\bullet(M, \mathfrak{g}^*)^G)$ au sous-espace de $H^*(M, \mathfrak{g}^*)$ des classes de cohomologie invariantes sous l'action de G. (En fait, si le groupe G est connexe, elles sont toutes G−invariantes par homotopie). On voit donc que si M est simplement connexe, $H^1(A^\bullet(M, \mathfrak{g}^*)^G) = 0$. Ainsi, il suffit de vérifier que la forme différentielle $i(\xi_*)\omega$ est fermée pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$. Mais d'après la formule de Cartan

$$\theta_\xi(\omega) = [d, i(\xi_*)]\omega$$

et puisque ω est G−invariante, et que $d\omega = 0$, on voit que $d(i(\xi_*)\omega) = 0$.

Exemple

On considère l'action de $U(1) \simeq S_1$ sur $S_1 \times S_1$ muni de la métrique riemannienne standard, donnée par $\lambda.(u, v) = (\lambda u, v)$. Désignons par $d\theta$ la forme volume sur S_1 et posons $\theta_i = \mathrm{pr}_i^*(\theta)$. L'orientation définit une structure symplectique sur $S_1 \times S_1$, donnée par $\omega = d\theta_1 \wedge d\theta_2$ et le groupe U(1) préserve la structure symplectique et la métrique. Soit $\xi = \frac{\partial}{\partial\theta} \in \mathfrak{u}(1)$. Alors $i(\xi)\omega = \theta_2$, et ce n'est pas une forme exacte. Donc il n'existe pas d'application moment.

On peut donner d'autres conditions qui assurent l'existence d'une application moment. C'est par exemple le cas si G est un groupe compact semi-simple. Dans ce cas, l'appplication moment est unique.

2. Points critiques de $f = \mu_\xi$

On suppose désormais données une action d'un tore T sur M qui préserve à la fois la structure symplectique et la métrique riemannienne, et une application moment pour l'action de T. La condition d'équivariance (1) signifie simplement que μ_ξ est invariante sous l'action de T.

Pour un élément $\xi \in \mathfrak{t}$ (algèbre de Lie de T) on considère la fonction

$$f(x) = \mu_\xi(x).$$

Les points critiques de f sont les points $x \in M$ tels que $\omega(\xi_*(x), -) = 0$ c'est-à-dire tels que $\xi_*(x) = 0$. Ce sont donc les points fixes du groupe à un paramètre $\exp(\mathbb{R}\xi)$. Si ξ est générique, ce groupe est dense dans T, et donc les points fixes par ce groupe à un paramètre sont exactement les points fixes de T.

3. Nature des points critiques.

Soit M^T le fermé des points fixes de T, et $M^T = \cup_\nu C_\nu$ la décomposition de M^T en composantes connexes. On sait que T préserve la structure symplectique et la structure riemannienne sur M. Pour $x \in C_\nu$, les éléments de T définissent des endomorphismes unitaires de l'espace tangent T_x. On a une décomposition en somme directe orthogonale de sous-espaces complexes

$$T_x M = \oplus_{\lambda \in P_\nu} V_\lambda,$$

où P_ν est l'ensemble des caractères $\lambda : T \longrightarrow U(1)$ qui apparaissent dans cette décomposition. Soit x un point de C_ν ; l'application exponentielle permet de trouver un voisinage ouvert T−équivariant U et un isomorphisme T−équivariant $\varphi : (T_x, 0) \simeq (U, x)$. Un tel isomorphisme étant choisi, on note $x + v$ le point de U correspondant au vecteur v.

Lemme 3. — *Dans cet isomorphisme, l'application f s'écrit, en posant $v = \sum_\lambda v_\lambda$ dans la décomposition ci-dessus*

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in P_\nu} \langle id\lambda, \xi \rangle |v_\lambda|^2 + \text{ termes d'ordre supérieur}$$

Démonstration. Dans l'isomorphisme équivariant $\varphi : T_x \simeq U$ défini par $v \mapsto x + v$ ci-dessus, g et ω deviennent des métriques g_v et des formes symplectique ω_v qui varient avec le point $v \in T_x$; ces métriques sont invariantes sous l'action du tore. Alors

$$\begin{aligned} f(x+v) &= f(x) + \int_0^1 d_{tv} f.v dt \\ &= f(x) + \int_0^1 \omega_{tv}(\xi_*(tv), v) dt \end{aligned}$$

Considérons, pour $v = \sum_{\lambda \in P_\nu} v_\lambda \in T_x$ le diagramme commutatif qui décrit l'action du tore T sur l'espace tangent T_x :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{t} \arrow[r, "d\lambda"] \arrow[d, "\xi \mapsto \exp(\xi)(v)"'] & i\mathbb{R} \arrow[d, "\eta \mapsto \exp(\eta) v_\lambda"] \\ T_x \arrow[r, "\mathrm{pr}_\lambda"] & V_\lambda \end{tikzcd}$$

Ce diagramme signifie que dans l'espace vectoriel T_x on a $\exp(\xi)(v) = \sum_\lambda \exp(\langle d\lambda, \xi \rangle) v_\lambda$. Cette formule montre que dans T_x le champ de vecteur $\xi_*(v)$ est donné par $\xi_*(v) = \sum_\lambda \langle d\lambda, \xi \rangle v_\lambda$. Compte-tenu de la relation entre g_0 et ω_0, on a $\omega_0(v_\lambda, i v_\lambda) = |v_\lambda|^2$. Il en résulte que le développement limité de $v \mapsto f(x+v)$ est à l'ordre 2

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2} \sum_\lambda \langle id\lambda, \xi \rangle |v_\lambda|^2 + \epsilon(v)|v|^2$$

avec $lim_{v \to 0} \epsilon(v) = 0$. □

DÉFINITION 4. — *Soit* M *une variété lisse. On dit qu'une fonction lisse* $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Morse non dégénérée au sens de Bott si*

(1) *l'ensemble* Σ *des points singuliers de* f *est une sous-variété lisse. Le Hessien de* f *définit alors une forme quadratique dont le noyau contient l'espace tangent à* Σ.

(2) *En un point singulier, le noyau du Hessien est exactement l'espace tangent à* Σ.

PROPOSITION 5. — *Si* ξ *est générique, la fonction* $f = \mu_\xi$ *est une fonction de Morse non dégénérée au sens de Bott.*

Démonstration. On a déjà vu qu'au voisinage d'un point $x \in \mathrm{M}^{\mathrm{T}}$, il existe un voisinage ouvert T−invariant U et un T−difféomorphisme $\varphi : \mathrm{T}_x \to \mathrm{U}$. Il suffit donc d'étudier la variété des points critiques dans T. Mais dans la décomposition $\mathrm{T}_x = \oplus_\lambda \mathrm{V}_\lambda$, les points T-invariants correspondent au sous-espace V_0. C'est donc une sous-variété de T_x. L'espace normal s'identifie à $\mathrm{N}_x = \oplus_{\lambda \neq 0} \mathrm{V}_\lambda$. En raison de l'hypothèse de généricité, la proposition précédente montre que le Hessien est non dégénéré dans cette direction. □

L'hypothèse de généricité signifie que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) l'ensemble des points fixes de $\exp(\xi)$ coïncide avec M^{T};

(2) pour tout $\lambda \in \mathrm{P}_\nu$ non nul, on a $\xi_\lambda = \langle id\lambda, \xi \rangle \neq 0$.

La condition (2) signifie que l'on doit éviter dans $\mathfrak{g}$ les hyperplans correspondant aux noyaux des formes linéaires $d\lambda$, pour $\lambda \in \mathrm{P}_\nu$. Par exemple, si $\mathrm{T} = \mathrm{U}(1)$, elle est satisfaite pour $\xi \neq 0$. La condition (2) n'implique pas (1). Considérons par exemple l'action de $\mathrm{T} = \mathrm{U}(1)$ sur $\mathrm{M} = \mathbb{C}^2$, muni de sa structure kählérienne standard, donnée par $\lambda(x, y) = (\lambda^2 x, \lambda y)$. Alors $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \{0\}$ et si l'on prend $\xi = i\pi$, la condition (2) est satisfaite. Pourtant, l'ensemble des points fixes sous $\exp(i\pi) = -1$ est $\mathbb{C} \times \{0\}$.

4. La stratification W_ν

On considère sur une variété M munie d'une action d'un tore une fonction de Morse non dégénérée au sens de Bott et T-équivariante. Nous utiliserons la variante équivariante du lemme de Morse :

LEMME 6. — *Soit* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de Morse non dégénérée au sens de Bott, T−invariante. Soit* C *la variété critique, et* N *le fibré normal de* C *dans* M. *Il existe un voisinage ouvert* U *de* C *qui soit T−invariant et un difféomorphisme T-équivariant* $\varphi : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{U}$ *laissant fixe* C *qu'on écrira* $(x, v) \mapsto x + v$, *tel que pour* $v \in \mathrm{N}_x$

$$f(x + v) = f(x) + \frac{1}{2}\mathrm{H}_x f(v)$$

où $\mathrm{H}_x f$ *est le Hessien de* f *au point* x.

Ce lemme se démontre sans problème par application du théorème des fonctions implicites, en calquant la démonstration du lemme de Morse classique.

Revenons à notre fonction de Morse $f = \mu_\xi$ sur la variété symplectique M.

On pose pour $x \in \mathrm{C}_\nu$,

$$\mathrm{N}_x^+ = \oplus_{\lambda,\langle id\lambda,\xi\rangle>0}\mathrm{V}_\lambda \quad ; \quad \mathrm{N}_x^- = \oplus_{\lambda,\langle id\lambda,\xi\rangle<0}\mathrm{V}_\lambda$$

On pose encore $d_\nu = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{N}_\nu^-$: l'entier $2d_\nu$ est l'indice de la variété critique C_ν.

LEMME 7. — *On peut trouver une métrique hermitienne* T−*équivariante sur* M *telle qu'au voisinage de* C *le gradient de* f *soit donné dans l'isomorphisme* φ *du lemme de Morse par*

$$\mathrm{grad}_{x+v} f = \sum_{\lambda\in \mathrm{P}_\nu} \xi_\lambda v_\lambda.$$

Démonstration. Il suffit en effet d'utiliser le voisinage tubulaire ci-dessus. Soit $\pi : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{C}$ la projection canonique ; on scinde la suite exacte équivariante

$$0 \longrightarrow \pi^*\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{TN} \longrightarrow \pi^*(\mathrm{TC}) \longrightarrow 0$$

On transporte alors par image réciproque, puis par l'isomorphisme φ la métrique hermitienne sur le fibré normal et sur le fibré tangent à TC ; on obtient ainsi une métrique hermitienne sur un voisinage T−invariant de C. Il reste seulement en utiliser une partition de l'unité convenable pour construire une métrique sur M qui coïncide avec la précédente sur un voisinage convenable de C, et à rendre la métrique ainsi obtenue équivariante. Alors la fonction f s'écrit pour $v \in \mathrm{N}_x$

$$f(x+v) = f(x) + \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in \mathrm{P}_\nu} \xi_\lambda |v_\lambda|^2$$

où $\xi_\lambda = \langle id\lambda, \xi\rangle$. Le champ de gradient est vertical relativement à la projection $\pi : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{C}$, et donné par la formule ci-dessus. □

On se fixe une telle métrique hermitienne dans la suite. *On suppose désormais que pour tout réel* m*, le fermé* $f(x) \leq m$ *est compact.*

Soit $(t,z) \mapsto \phi_t(z)$ le flot défini par le gradient de f. Au voisinage de la sous-variété critique C_ν on a donc pour $x \in \mathrm{C}_\nu$ et $v \in \mathrm{N}_x$ dans l'isomorphisme ci-dessus :

$$\phi_t(x+v) = x + \sum_{\lambda\in \mathrm{P}_\nu} e^{t\xi_\lambda} v_\lambda$$

Si z est un point de M la fonction $t \longrightarrow f(\phi_t(z))$ est croissante. Vue l'hypothèse de proprété sur f, il en résulte que $t \mapsto \phi_t(z)$ est définie sur $]-\infty, 0]$ et $t \mapsto \phi_t(z)$ a une limite qui appartient à l'un des C_ν. Par contre, il n'y a aucune raison que la trajectoire $t \mapsto \phi_t(z)$ soit définie sur $[0,\infty[$.

On désigne par W_ν^+ la sous-variété des points stables relatifs à C_ν : il s'agit des points $x \in \mathrm{M}$ tels que $\lim_{t\to-\infty} \phi_t(x) \in \mathrm{C}_\nu$; c'est une variété lisse localement fermée T−difféomorphe au fibré normal N_ν^+ à C_ν. Ces sous-variétés lisses constituent une partition de M. De même la variété des points instables W_ν^- relative à la composante C_ν, est définie par les points tels que $t \mapsto \phi_t(x)$ soit définie sur $[0,\infty[$ et tels que $\lim_{t\to-\infty}\phi_t(x)$ existe et appartienne à C_ν. C'est une variété localement fermée qui est difféomorphe au fibré normal N_ν^-. Bien sûr, il n'a aucune raison si M n'est pas compacte pour que ces sous-variétés constituent une partition de M.

Soit f_ν la valeur de f sur C_ν. On définit une relation de préordre sur les composantes de M^T de la manière suivante : on décide que $\nu \leq \mu$ si $f_\nu \leq f_\mu$.

LEMME 8. — *On a*

$$\overline{W_\nu^+} \leq \cup_{\nu\leq\mu} W_{\mu+}.$$

Démonstration. Soit $x \in \overline{W_\nu^+}$. Ce point appartient à W_μ^+ avec μ convenable. Toute la trajectoire $\phi_t(x)$ pour $t \geq 0$ est certainement contenue dans $\overline{W_\nu^+}$ et puisque $f(z) \geq f_\nu$ pour tout $z \in W_\nu^+$ on a encore $f(\phi_t(x)) \geq f_\nu$ et par suite x puisque appartient à W_μ^+ on a $f_\mu \geq f_\nu$. □

Soit c une valeur critique; on pose $M_{c,-} = \cup_{\mu, f_\mu < c} W_\mu^+$ et $M_{c,+} = \cup_{\mu, f_\mu \leq c} W_\nu^+$. Alors $M_{c,-}$ et $M_{c,+}$ sont des ouverts de M, et $\cup_{\nu, f_\nu = c} W_\nu^+$ est une sous-variété fermée dans $M_{c,+}$ dont les composantes connexes sont les sous-variétés W_ν^+ correspondant aux indices ν tels que $f_\nu = c$. Soit $N_{c,\nu}$ le fibré normal de cette sous-variété dans $M_{c,+}$ sur la composante connexe correspondant à ν; en restriction à C_ν il s'identifie à la variété instable W_ν^-. Alors l'inclusion $(W_\nu^-, W_\nu^- \setminus C_\nu) \hookrightarrow (N_{c,\nu}, N_{c,\nu} \setminus W_\nu^+)$ est une équivalence d'homotopie. Il résulte du théorème d'isomorphisme de Thom et du théorème d'excision que

$$H^q(M_{c,+}, M_{c,-}) = \oplus_{\nu, f_\nu = c} H^{q-2d_\nu}(C_\nu).$$

On obtient alors pour le polynôme de Poincaré

$$P_t(M_{c,+}) \leq P_t(M_{c,-}) + \sum_{\nu, f_\nu = c} t^{2d_\nu} P_t(C_\nu)$$

ce qui signifie que la différence entre le membre de droite et celui de gauche est un polynôme à coefficients positifs. Si on suppose que f n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques, on obtient en particulier l'inégalité de Morse

$$P_t(M) \leq \sum_\nu t^{2d_\nu} P_t(C_\nu)$$

THÉORÈME 9. — *(F. Kirwan) On suppose que pour tout réel m le fermé de M défini par $f(x) \leq m$ est compact, et que f n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques. La fonction de Morse f est parfaite, autrement dit*

$$P_t(M) = \sum_\nu t^{2d_\nu} P_t(C_\nu).$$

Ceci signifie que pour tout ν et le morphisme canonique (qu'on peut voir comme morphisme de Gysin pour l'inclusion $\cup_{f_\nu=c} \mathrm{W}_\nu^+ \hookrightarrow \mathrm{M}_{c,+}$)

$$\oplus_{\nu, f_\nu = c} \mathrm{H}^{q-2d_\nu}(\mathrm{C}_\nu) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{M}_{c,+})$$

est injectif. Dans le cas où tous les C_ν sont réduits à un point, ou plus généralement si les C_ν n'ont que de la cohomologie paire, la suite exacte de cohomologie relative se scinde parce que $\mathrm{M}_{c,-}$ n'a que de la cohomologie paire. Le résultat est donc évident dans ce cas ; mais il est vrai en toute généralité, comme nous allons le voir.

Exemple

Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}_2$ muni de l'action de $\mathrm{U}(1)$ définie par $\alpha.[u,v,w] = [u,v,\alpha w]$ pour $\alpha \in \mathrm{U}(1)$. Alors la variété des points fixes a deux composantes connexes, qui sont donnés par $w = 0$, ce qui donne la droite à l'infini, et par l'origine $[0,0,1]$. Le plan projectif est simplement connexe ; il existe donc pour cette action une application moment ; à une constante près, elle donnée pour $x = (u,v,w) \in \mathrm{S}_5 \subset \mathbb{C}^3$ par

$$\mu_\xi([u,v,w]) = \frac{i}{2}\xi|w|^2.$$

pour $\xi \in \mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R}$. En effet, soit ω la forme symplectique standard sur $\mathbb{P}_2$, et $\widetilde{\omega}$ la forme symplectique standard sur $\mathbb{C}^3$. Considérons l'application moment $\widetilde{\mu}$ sur $\mathbb{C}^3$ associée à l'action de $\mathrm{U}(1)$ sur $\mathbb{C}^3$ donnée par $\alpha.(u,v,w) = (u,v,\alpha w)$. On a

$$\widetilde{\mu}_\xi(x) = \frac{i}{2}\xi|w|^2$$

La structure symplectique sur $\mathbb{P}_2$ est définie de la manière suivante : considérons $\mathbb{P}_2$ comme quotient de la sphère $\mathrm{S}_5 \subset \mathbb{C}^3$. Pour $x \in \mathrm{S}_5$, l'espace vectoriel tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{S}_5$ est l'orthogonal $(ix)^{\perp\widetilde{\omega}}$ pour $\widetilde{\omega}$ du vecteur ix. L'espace tangent au point $[x] \in \mathbb{P}_2$ s'identifie au quotient $(ix)^{\perp\widetilde{\omega}}/ix$, et la forme symplectique en $[x]$ est la forme symplectique induite sur ce quotient. On a donc pour v et $w \in (ix)^{\perp\widetilde{\omega}}$

$$\pi^*(\omega)(v,w) = \widetilde{\omega}(v,w)$$

Il s'agit de vérifier que $d\mu_\xi = i(\xi_*)\omega$. Par image réciproque, il suffit de vérifier que l'égalité $d\widetilde{\mu}_\xi = i(\xi_*)\widetilde{\omega}$ est vraie en restrition à S_5. Mais ceci résulte de la définition du fait que $\widetilde{\mu}$ est une application moment.

On sait alors que si $\xi \neq 0$, l'application $f = \mu_\xi$ est une fonction de Morse non dégénérée au sens de Bott. Prenons par exemple $\xi = -2i$, alors $f = |w|^2$. Le long de la droite de l'infini, l'indice est évidemment 0, puisque f est minimum le long de cette droite de l'infini. Au voisinage de $0 = [0,0,1]$, c'est maximum et donc l'indice est 4 ; on peut d'ailleurs pour le confirmer utiliser la carte locale définie par $(u,v) \in \mathbb{C}^2 \mapsto [u,v,1]$ pour calculer l'expression locale de μ_ξ : dans cette carte

$$f = \frac{1}{1+|u|^2+|v^2|} = 1 - |u|^2 - |v|^2 + \dots$$

ce qui montre bien que l'indice est 4. D'après le théorème 9, on a donc

$$P_t(\mathbb{P}_2) = P_t(\mathbb{P}_1) + t^4 P_t(\{0\})$$

et par suite $P_t(\mathbb{P}_2) = 1 + t^2 + t^4$.

On aurait pu bien entendu considérer l'action de $T = U(1) \times U(1)$ sur $\mathbb{P}_2$ donnée par

$$(\alpha, \beta)[u, v, w] = [\alpha u, \beta v, w].$$

On obtient dans ce cas pour $\xi \in \mathfrak{t}$ générique que μ_ξ a trois points singuliers isolés non dégénérés d'indices respectifs $(0, 2, 4)$; c'est le calcul standard des nombres de Betti de $\mathbb{P}_2$.

5. Démonstration du théorème de Kirwan

Tout ce que qui a été dit pour la cohomologie ordinaire peut se dire en cohomologie équivariante.

5.1. Cohomologie équivariante

Soit G un groupe topologique. Soit B un espace topologique. Un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de B est admissible s'il existe une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$. Un G–fibré principal de base B est la donnée d'un espace topologique X et d'une action propre et libre (à droite) de G sur X, et d'un morphisme équivariant $f : X \longrightarrow B$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(1) le morphisme $f : X \longrightarrow B$ induit un isomorphisme $X/G \simeq B$;

(2) il existe un recouvrement ouvert admissible $\mathcal{U} = (U_i)$ tel que f ait une section locale sur U_i.

Il existe un fibré principal $EG \longrightarrow BG$ satisfaisant à la propriété suivante : pour tout G–fibré principal $X \longrightarrow B$ il existe un morphisme, unique à homotopie près,

$$u : B \longrightarrow BG$$

tel que l'image réciproque de $EG \longrightarrow BG$ par u soit isomorphe à $X \longrightarrow B$. Le fibré principal $EG \longrightarrow BG$ s'appelle un classifiant de G. L'espace total EG est alors contractile. Réciproquement, un G–fibré principal $X \longrightarrow B$ dont l'espace total X est contractile est un classifiant pour G.

Supposons que G opère continûment (à gauche) sur un espace topologique X. Alors G opère librement à gauche sur l'espace topologique $EG \times X$ par la formule $g(e, x) = (eg^{-1}, gx)$ pour $g \in G$ et $(e, x) \in EG \times X$. On considère le quotient $X_G = EG \times_G X$ et la projection $X_G \longrightarrow BG$: c'est le fibré de base BG de fibre X associé à l'action de G sur X.

Définition 10. — *On appelle cohomologie* G*–équivariante de* X *et on note* $H^*_G(X)$ *la cohomologie* $H^*(X_G)$.

Définition 11. — *Si* E *est un fibré vectoriel complexe équivariant sur* X*, les classes de Chern dans* $H_G(X)$ *du fibré vectoriel* $E_G = EG \times_G E \longrightarrow X_G$ *s'appellent les classes de Chern équivariantes de* E.

Exemples

1. Si G opère proprement et librement sur X, on a $H^*_G(X) = H^*(X/G)$. En effet, le morphisme canonique $X_G \longrightarrow X/G$ est une fibration dont la fibre est EG, donc contractile.

2. Supposons que G opère trivialement sur X. Alors $EG = BG \times X$, et donc $H^*_G(X) = H^*(BG \times X)$. En particulier si X est un point, c'est la cohomologie de BG.

3. Si $G = U(1)$, on construit le classifiant à partir de l'espace projectif $\mathbb{P}(H)$ des sous-espaces vectoriels fermés de codimension 1 d'une espace de Hilbert complexe H séparable. Soit S(H) la sphère des vecteurs de norme 1 dans H. Cette sphère est contractile. et l'action de U(1) sur cette sphère est propre et libre. La projection $S(H) \longrightarrow \mathbb{P}(H)$ qui associe à $a \in H \setminus \{0\}$ l'hyperplan d'équation $\langle a, x\rangle = 0$ est un fibré classifiant. Soit $u = c_1(\mathcal{U})$ la classe de Chern du fibré vectoriel $\mathcal{U}$ de rang un associé. On a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbb{Z}[u] \simeq H^*(BU(1)).$$

4. Supposons maintenant que G soit un tore $T = \underbrace{U(1) \times \ldots \times U(1)}_{r \text{ fois}}$. Alors

$$BT = \underbrace{BU(1) \times \ldots \times BU(1)}_{r \text{ fois}}$$

et par conséquent d'après la formule de Künneth

$$\mathbb{Z}[u_1, \ldots, u_r] \simeq H(BT)$$

où u_i est l'image réciproque $\mathrm{pr}_i^*(u)$ de u par la i-ième projection.

Lemme 12. — *Soit* T *un tore. L'homomorphisme* $\mathrm{Hom}(T, U(1)) \longrightarrow H^2(BT)$ *qui associe à un caractère* λ *la classe de Chern du fibré vectoriel complexe de rang 1*

$$ET \times_T \mathbb{C} \longrightarrow BT$$

associé à la représentation définie par λ *est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est évidemment un homomorphisme de groupes. D'après la description de $H^*(BT)$ il envoie la base de $\mathrm{Hom}(T, U(1))$ associée à une décomposition $T = \underbrace{U(1) \times \ldots \times U(1)}_{r \text{ fois}}$ sur une base de $H^*(BG)$. □

5.2. Le morphisme de Gysin équivariant

Revenons à notre situation. On a un isomorphisme en cohomologie T−équivariante

$$H^q_T(M_{c,+}, M_{c,-}) = \oplus_{f_\nu = c} H_T^{q-2d_\nu}(C_\nu).$$

d'où il résulte un morphisme de Gysin en cohomologie équivariante

$$\oplus_{\nu, f_\nu = c} H_T^{q-2d_\nu}(C_\nu) \to H^q_T(M_{c,+})$$

Proposition 13. — *En cohomologie équivariante, le morphisme de Gysin est injectif.*

Démonstration. Il suffit de prouver que le morphisme obtenu après restriction à C_ν $H_T^{q-2d_\nu}(C_\nu) \longrightarrow H_T^q(C_\nu)$ est injectif. Ce morphisme est le cup-produit par la classe de Chern équivariante $c_{d_\nu}(N_\nu^-)$.

On désigne par P_ν^- les poids $\lambda \in P_\nu$ tels que $\langle id\lambda, \xi \rangle$ soit négatif ; ce sont les poids qui interviennent dans la décomposition de N_ν^-. Le tore T agit trivialement sur C_ν. Par suite $C_{\nu,T} = BT \times C_\nu$ et $H_T^*(C_\nu) = H^*(BT) \otimes H^*(C_\nu)$. Considérons la décomposition en somme directe du fibré équivariant $N_\nu^- = \oplus_{\lambda \in P_\nu^-} N_\lambda$ où N_λ est le sous-fibré correspondant au poids λ. On a donc dans $H_T^*(C_\nu)$

$$c_{d_\nu}(N_\nu^-) = \prod_{\lambda \in P_\nu^-} c_{r_\lambda}(N_\lambda)$$

où r_λ est le rang du fibré N_λ, de sorte qu'il suffit de prouver que $c_{r_\lambda}(N_\lambda)$ n'est pas diviseur de zéro pour $\lambda \in P_\nu^-$. Considérons un point $x \in C_\nu$ et le morphisme T−équivariant

$$\bullet \longrightarrow C_\nu$$

défini par ce point. On obtient ainsi un morphisme image réciproque

$$H_T^*(C_\nu) \longrightarrow H_T^*(\bullet) = H(BT)$$

dont le noyau est l'idéal des classes qui s'écrivent $\sum_i \alpha_i \times \beta_i$, où $\alpha_i \in H^*(BT)$ et $\beta_i \in H^*(C_\nu)$, et α_i sans terme de degré 0. Il suffit alors de démontrer que la classe de Chern équivariante du fibré inversible sur BT associé à la représentation $N_{\lambda,x}$ n'est pas diviseur de 0 dans H(BT). Cette représentation est égale à $r_\lambda \rho_\lambda$, où $\rho_\lambda : U(1) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est la représentation définie par le caractère λ, et la classe de Chern équivariante de degré maximal du fibré vectoriel associé est égale à $c_1(L_\lambda)^{r_\lambda}$, où L_λ est le fibré vectoriel inversible $EG \times_{BG} \mathbb{C}$ associé au caractère λ. Puisque λ n'est pas trivial, d'après le lemme 12 sa classe de Chern équivariante est non nulle dans $H^2(BT)$. L'algèbre $H^*(BT)$ est une algèbre intègre, cette classe n'est pas diviseur de zéro. □

Remarquons que si T est de rang r la série de Poincaré de $BT = BU(1)^r$ est

$$P_t(BT) = \frac{1}{(1-t^2)^r}$$

COROLLAIRE 14. — *Soit $P_t^T(M)$ la série de Poincaré équivariante de* M. *On a*

$$\begin{aligned} P_t^T(M) &= \sum_\nu t^{2d_\nu} P_t^T(C_\nu) \\ &= \frac{1}{(1-t^2)^r} (\sum_\nu t^{2d_\nu} P_t(C_\nu)) \end{aligned}$$

5.3. La fonction de Morse f est parfaite.

Le classifiant BT est simplement connexe. Considérons la suite spectrale de cohomologie équivariante : c'est la suite spectrale de Cartan-Serre de la fibration localement triviale $M_G \longrightarrow BG$, de fibre M. Cette suite spectrale a son terme E_2 donné par

$$E_2^{p,q} = H^p(BT, H^q(M))$$

et pour aboutissement $H_G^k(M)$ en degré $p+q=k$. Le théorème des coefficients universels en cohomologie (*cf.* Spanier, page 246, théorème 10) ne pose pas de problèmes, par exemple parce que la cohomologie de BT est nulle en degré impair). Il fournit un isomorphisme

$$H^p(BT)\otimes H^q(M)\simeq H^p(BT,H^q(M)).$$

On en déduit que $P_t(M_T)\leq P_t(BT)P_t(M)$. Compte-tenu du corollaire 14, ceci s'écrit

$$P_t(BT)(\sum_\nu t^{2d_\nu}P_t(C_\nu))\leq P_t(BT)P_t(M).$$

En multipliant les inégalités de Morse classiques $\sum_\nu t^{2d_\nu}P_t(C_\nu)\geq P_t(M)$ par la fonction rationnelle $P_t(BG)$ qui se développe en une série à termes positifs, on obtient l'inégalité en sens inverse, et par suite l'égalité. Il en résulte en simplifiant que

$$\sum_\nu t^{2d_\nu}P_t(C_\nu)=P_t(M).$$

Ceci achève la démonstration.

6. Une variante

Visiblement c'est seulement pour montrer que la fonction $f=\mu_\xi$ est non dégénérée au sens de Bott qu'on a utilisé la structure symplectique. On peut donc adapter le théorème de Kirwan ci-dessus dans un contexte un peu plus général :

THÉORÈME 15. — *Soit* M *une variété munie d'une action d'un tore* T. *On se donne sur* M *une fonction de Morse non dégénérée au sens de Bott, satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *la variété critique de f coïncide avec l'ensemble M^T des points fixes de* M *sous l'action du tore* T.

(ii) *pour tout m, le fermé $f(x)\leq m$ est relativement compact.*

(iii) *la fonction f n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques.*

Alors la fonction f est parfaite.

Bien entendu, dans cette situation M n'a pas à priori de structure presque complexe ; cependant on peut mettre une structure complexe sur le fibré normal de C_ν. Dans le lemme 6, il faut seulement chercher une métrique riemannienne dans laquelle le gradient de f ait une écriture simple, ce qui est possible en raison du lemme de Morse équivariant.

RÉFÉRENCES

[1] F. KIRWAN, Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1985.

[2] J. LE POTIER, Variétés de modules de fibrés stables sur une surface de Riemann : résultats d'Atiyah et Bott, Progress in Mathematics, Birkhaüser vol. 54 (1984).

[3] H. NAKAJIMA, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces, Preliminary version (Octobre 1996).