GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Joseph Le Potier

Université Denis Diderot - Paris 7
1995-1996

TABLE DES MATIÈRES

1. Théorème d'inversion locale 5
1.1. Applications de classe C^r 5
1.2. Difféomorphismes 7
1.3. Théorème des fonctions implicites 12
2. Théorème du rang 13
2.1. Le rang 13
2.2. Théorème de submersion 14
2.3. Théorème d'immersion 16
2.4. Subimmersion 16
3. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ 18
3.1. La notion de sous-variété 18
3.2. Espaces tangents 20
3.3. Sous-variétés définies par des équations 21
3.4. Sous-variétés définies par un paramétrage 24
3.5. Le lemme de Morse 27
4. Variétés abstraites 30
4.1. Cartes locales et atlas 31
4.2. Morphismes de variétés 37
4.3. Recollement de variétés 40
4.4. Partitions de l'unité 46
4.5. Espace tangent en un point 48
4.6. Sous-variétés d'une variété donnée 52
5. Fibré tangent 61
5.1. Fibré tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ 61
5.2. Fibré tangent à une variété abstraite 63
5.3. Fibrés vectoriels 64
6. Champs de vecteurs 73
6.1. Champs de vecteurs et difféomorphismes 73
6.2. Dérivée de Lie 73
7. Equations différentielles 82
7.1. Existence et unicité locales des solutions 82
7.2. Le flot global d'un champ de vecteurs 88
7.3. Variétés de dimension 1 96
7.4. Interprétation géométrique du crochet 101

7.5. Application exponentielle 104
7.6. Le théorème d'Ereshmann 107
8. Formes différentielles 117
8.1. Algèbre extérieure 117
8.2. Formes différentielles de degré un 121
8.3. Les p-formes différentielles 124
9. Le complexe de de Rham 126
9.1. Dérivation extérieure 126
9.2. Homotopies 136
9.3. Formule de Stokes 141
9.4. Cohomologie de de Rham des G—variétés 145
10. Le degré 149
10.1. L'espace vectoriel $H_c^n(M)$ 149
10.2. Le degré de Brouwer 151
10.3. Le théorème de Poincaré-Hopf 154

Chapitre 1

Variétés différentielles

Le but de ce chapitre est d'introduire les variétés différentielles : il s'agit d'espaces topologiques sur lesquels on dispose de fonctions différentiables. En raison de leur importance, nous commençons par rappeler les notions de base de calcul différentiel sur lesquelles repose toute la géométrie différentielle : il s'agit du théorème d'inversion locale, du théorème des fonctions implicites, et du théorème du rang constant. Comme illustration du théorème des fonctions implicites, nous donnons une démonstration du lemme de Morse, lemme qui a par ailleurs une grande importance dans la description de la structure des variétés à partir des points critiques des fonctions de Morse. En ce qui concerne les variétés, nous commencerons par rappeler la définition des sous-variétés de l'espace affine $\mathbb{R}^n$, avant d'introduire la notion générale d'atlas et de variété abstraite. D'après un théorème dû à Whitney, toute variété de classe C^∞ est difféomorphe à une sous-variété de l'espace affine ; cependant, souvent elles ne se présentent pas de façon naturelle comme sous-variété de l'espace affine.

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

1. Théorème d'inversion locale

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie. Ces espaces vectoriels seront munis de normes et des topologies associées ; on rappelle que les normes dans un espace vectoriel de dimension finie sont toutes équivalentes. Dans tout le chapitre, r est entier ≥ 1.

1.1. Applications de classe C^r

Soit $f : U \to F$ une application définie sur un ouvert U de E, et à valeurs dans F. On dit que f est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application

linéaire $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que la différence $f(a+h) - f(a) - u(h)$ définie pour $h \in \mathrm{E}$ assez petit, soit négligeable devant $\| h \|$ quand $h \to 0$; ceci signifie que

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \epsilon(h) \| h \|$$

où $\epsilon(h)$ est une fonction à valeurs dans F, définie au voisinage de 0, et qui tend vers 0 quand $h \to 0$. L'application linéaire u est définie de manière unique par cette condition ; on la note $d_a f$ ou $df(a)$; on l'appelle la différentielle de f en a.

On dit que f est de classe C^1 sur U si f est différentiable en tout point de U, et si l'application $df : a \mapsto d_a f$ de U dans l'espace vectoriel $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ des applications linéaires de E dans F est continue. On définit par récurrence la notion d'application de classe C^r : on dit qu'une application est de classe C^r si df est de classe C^{r-1}. Si f est de classe C^r pour tout r, on dit que f est de classe C^∞.

Composition des applications de classe C^r

Soient $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une application de classe C^r d'un ouvert U de E à valeurs dans un ouvert V de F, et $g : \mathrm{V} \to \mathrm{G}$ une application de classe C^r de V à valeurs dans un espace vectoriel G. Alors $g \circ f$ est de classe C^r, et on a

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$$

Différentielles partielles

Supposons données des sommes directes

$$\mathrm{E} = \oplus_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i \text{ et } \mathrm{F} = \oplus_{1 \leq j \leq m} \mathrm{F}_j .$$

La fonction f est donnée par k composantes $f_j : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_j(x_1, \ldots, x_n)$ définies sur U et prenant leurs valeurs dans F_j. On dit que f a une différentielle partielle dans la direction E_i au point x si la fonction, définie au voisinage de 0 dans E_i par $t \mapsto f(x+t)$ est différentiable en $t = 0$; sa différentielle est notée $\partial_i f(x)$. On rappelle que pour $r \geq 1$ la fonction f est de classe C^1 sur U si est seulement si pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$, la fonction f_j a des différentielles partielles $\partial_i f_j$ en tout point de U, et si les applications $\partial_i f_j : \mathrm{U} \to \mathrm{L}(\mathrm{E}_i, \mathrm{F}_j)$ sont continues. La matrice d'applications linéaires

$$((\partial_i f_j)(x))$$

est alors la matrice de $df(x)$ dans les sommes directes considérées. On dit que c'est la matrice jacobienne de f dans les sommes directes ci-dessus. Si on veut que l'application f soit de classe C^r, il faut exiger que les différentielles partielles $x \to \partial_i f_j(x) \in L(E_i, F_j)$ soient de classe C^{r-1}.

Quand les espaces vectoriels E et F sont de rapportés à des bases, $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(\epsilon_j)_{j=1,\dots,m}$ respectivement, on peut prendre pour E_i (resp.F_j) la droite engendrée par e_i (resp. ϵ_j). La fonction f_j à valeurs dans F_j s'identifie à une fonction scalaire g_j. La différentielle partielle $\partial_i f_j(x) \in L(E_i, F_j)$ est donnée par un nombre : c'est la dérivée partielle de g_j dans la direction e_i au point x; autrement dit, si $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées dans la base e_i on a

$$\partial_i f_j(x).e_i = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)\epsilon_j$$

de sorte que que la matrice jacobienne ci-dessus n'est autre, écrite dans les bases, que la matrice jacobienne standard

$$(\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x))$$

Exercice 1.1

Soit E un espace vectoriel de dimension n, GL(E) l'ouvert de L(E, E) des applications linéaires inversibles. L'application ϕ : GL(E) $\to$ GL(E) définie par $u \mapsto u^{-1}$ est différentiable, de classe C^∞. Trouver la différentielle de ϕ en un point $u \in$ GL(E).

1.2. Difféomorphismes

Dans ce qui suit, r est un entier ≥ 1, ou $r = \infty$.

DÉFINITION 1.1. — *Soient* U $\subset$ E *et* V $\subset$ F *deux ouverts, et* f : U $\to$ V *une application. On dit que* f *est un difféoméorphisme de classe* C^r *si* f *est inversible et si* f *et* f^{-1} *sont de classe* C^r.

PROPOSITION 1.2. — *Soient* U $\subset$ E *et* V $\subset$ F *deux ouverts des espaces vectoriels* E *et* F, *et* f : U $\to$ V *un difféomorphisme de classe* C^r. *Alors* E *et* F *sont de même dimension, et* $d_a f$ *est inversible en tout point de* U.

Démonstration. Soit $b = f(a)$. D'après la règle de composition, on a $d_{fb}f^{-1} \circ d_a f = \mathrm{id}_E$, et $d_a f \circ d_b f^{-1} = \mathrm{id}_F$. Donc $d_a f$ est inversible, d'inverse $d_b f^{-1}$. □

Exemples

(1) Soit $f : E \to F$ une application de classe C^r d'un ouvert $U \subset E$ à valeurs dans F. Alors l'application $\phi : U \times F \to U \times F$ définie par $(x, y) \mapsto (x, y - f(x))$ est un difféomorphisme.

Exercice 1.2

Ecrire la matrice des différentielles partielles de ϕ.

(2) Considérons l'application $\phi :]0, \infty[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 - \{(x, y), y = 0, x \leq 0\}$ définie par

$$(r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$$

C'est un difféomorphisme de classe C^∞; son inverse est donné par

$$\phi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, 2\mathrm{Arctg}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x})$$

Même si la différentielle d'une fonction $f : U \to F$ est inversible en tout point, ceci n'entraîne pas que f est injective : par exemple l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $(r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ est de différentielle inversible en tout point. Pourtant, cette application n'est pas injective. Le théorème d'inversion locale va nous dire que localement cette application est injective, pourvu que f soit au moins de classe C^1. Plus précisément :

THÉORÈME 1.3. —*(Théorème d'inversion locale) Soit r un entier ≥ 1. Soit $f : U \subset E \to F$ une application de classe C^r et a un point de U. Si $d_a f$ est inversible, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de a satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *l'image $W = f(V)$ est un ouvert de F ;*

(ii) *l'application $f_V : V \to W$ induite par f est un difféomorphisme de classe C^r.*

Avant de démontrer cet énoncé, donnons quelques conséquences immédiates.

COROLLAIRE 1.4. — *Soit* $f : \mathrm{U} \subset \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application de classe* C^r.

(i) *Si la différentielle* $d_a f$ *est inversible en tout point de* U, f *est une application ouverte.*

(ii) *Si en outre* f *est injective,* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V} = f(\mathrm{U})$ *est un difféomorphisme de classe* C^r.

Exercice 1.3

Montrer que l'application $]-1,1[\times\mathbb{R} \to]-1,1[\times\mathbb{R}$ définie par $(t,x) \mapsto (t, x - \sin tx)$ est un difféomorphisme de classe C^∞.

Exercice 1.4

On propose dans cet exercice une démonstration du théorème de d'Alembert. Soit $f(z)$ un polynôme complexe de degré n, et Z l'ensemble des zéros du polynôme dérivé. Soit $\mathrm{V} = \mathbb{C} \setminus f(\mathrm{Z})$, et U l'ouvert $f^{-1}(\mathrm{V})$.

1) Démontrer que l'application $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ induite par f est ouverte.

2) Démontrer qu'il existe des constantes $\mathrm{C} > 0$ et $\mathrm{R} > 0$ telles que pour $|z| \geq \mathrm{R}$ on ait $|\mathrm{P}(z)| \geq \mathrm{C}|z|^n$. En déduire que f est propre, et par suite que $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ est propre, donc fermée (*cf.* proposition 3.13).

3) En déduire que f est surjective. En particulier, f a au moins un zéro.

La démonstration du théorème d'inversion locale repose sur le théorème des points fixes que nous commençons par rappeler.

THÉORÈME 1.5. — *Soit* X *un espace métrique complet,* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *une application contractante de rapport* $\lambda < 1$, *c'est-à-dire que pour tout* x *et* $y \in \mathrm{X}$ *on a* $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \lambda d(x,y)$. *Alors* ϕ *a un point fixe et un seul.*

Démonstration.

Soit x_0 un point de X. Considérons la suite x_n de points de X définie par récurrence par $x_{n+1} = \phi(x_n)$. Alors $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$ et par conséquent la série $\sum_n d(x_n, x_{n+1})$ est convergente. Alors $d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{n \leq i \leq n+p-1} d(x_i, x_{i+1})$ et par conséquent la suite x_n est de Cauchy. Puisque X est un espace métrique complet, cette suite converge vers une limite ℓ. Puisque ϕ est continue, l'égalité $\phi(x_n) = x_{n+1}$ donne par passage à la limite $\phi(\ell) = \ell$. Ceci montre l'existene d'un point fixe. L'unicité est évidente. □

Démonstration du théorème d'inversion locale

Nous utiliserons sur l'espace L(E, F) des applications linéaires E $\to$ F la norme définie par

$$\| u \| = \sup_{\|x\| \leq 1} \| u(x) \|$$

En particulier, pour $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$, $\| u^k \| \leq \| u \|^k$ de sorte que toute application linéaire E $\to$ E de la forme $\mathrm{id}_\mathrm{E} + v$, avec $\| v \| < 1$ est inversible.

a) On peut bien sûr supposer, en faisant éventuellement des translations que $a = 0$, $f(a) = 0$. D'autre part, en remplaçant f par $(d_a f)^{-1} \circ f$, on peut supposer que E = F et que $d_a f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

b) On écrit dans ce cas

$$f(x) = x + u(x)$$

avec $u(x)$ négligeable devant x quand $x \to 0$. Bien sûr u est encore de classe C^r, et $d_0 u = 0$. Montrons d'abord qu'on peut trouver un voisinage ouvert de 0 contenu dans U sur lequel f est injective. Par continuité de la différentielle, on voit qu'il existe une boule B(0, r) telle que pour $x \in \mathrm{B}(0, r)$ on ait

$$\| d_x u \| \leq \frac{1}{2}$$

Il résulte du théorème des accroissements finis que pour x' et $x'' \in \mathrm{B}(0, r)$ on a

$$\| u(x') - u(x'') \| \leq \frac{1}{2} \| x' - x'' \| \tag{1.1}$$

Il en résulte que

$$\| f(x') - f(x'') \| \geq \frac{1}{2} \| x' - x'' \| \tag{1.2}$$

ce qui prouve l'injectivité de f sur B(0, r).

c) Montrons maintenant que $f(\mathrm{B}(0, r))$ est un voisinage de 0. Ainsi, il s'agit de montrer que si y est suffisamment voisin de 0, que l'équation

$$x + u(x) = y \tag{1.3}$$

a une solution $x \in \mathrm{B}(0, r)$. Nous écrivons cette équation sous la forme

$$x = y - u(x)$$

Remarquons que si $\| x \| \leq \frac{r}{2}$ et $\| y \| \leq \frac{r}{4}$, on a d'après (1.1) $\| u(x) \| \leq \frac{1}{2} \| x \|$ et par conséquent $\| \phi(x) \| \leq \frac{r}{2}$. Considérons l'application $\phi : \overline{\mathrm{B}}(0, \frac{r}{2}) \to \overline{\mathrm{B}}(0, \frac{r}{2})$ définie par $\phi(x) = y - u(x)$. L'application ϕ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ d'après (1.1), et le fermé $\overline{\mathrm{B}}(0, \frac{r}{2})$ est un espace métrique complet. Il en résulte que l'application ϕ a un point fixe, et donc que l'équation (1.3) a une solution $x \in \mathrm{B}(0, r)$ si $\| y \| \leq \frac{r}{4}$.

d) Soit V l'ouvert défini par $\| x \| < r$, et $\| f(x) \| < \frac{r}{4}$. L'application induite par f

$$f_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{B}(0, \frac{r}{4})$$

est alors bijective. On va montrer que $g = (f_{\mathrm{V}})^{-1}$ est encore de classe C^r, ce qui prouvera le théorème. En vertu de l'inégalité (1.2), elle est Lipchitzienne de rapport 2, et par suite continue. Donc, f_{V} est un homéomorphisme. Montrons maintenant que g est différentiable.

En tout point $x \in \mathrm{V}$, la différentielle $d_x f$ est donnée par $d_x f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} + d_x u$. La majoration $\| d_x u \| \leq \frac{1}{2}$ montre que $d_x f$ est inversible pour tout $x \in \mathrm{V}$. On est ramené à prouver le lemme suivant :

LEMME 1.6. — *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ *un homéomorphisme d'un ouvert* U *d'un espace vectoriel* E *dans un ouvert* V *d'un espace vectoriel* F. *On suppose que* f *est de classe* C^r *et que pour tout* $x \in \mathrm{U}$, *la différentielle* $d_x f$ *est inversible. Alors* f *est un difféomorphisme de classe* C^r

Démonstration. a) Soit $a \in \mathrm{U}$. Montrons que g est différentiable au point $b = f(a)$. Comme dans la démontration ci-dessus, on peut supposer que $a = b = 0$, et que $d_0 f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. On écrit comme ci-dessus, $f(x) = x + u(x)$ ce qui s'écrit encore pour $y \in \mathrm{V}$

$$g(y) = y - u(g(y))$$

avec $u(x)$ négligeable devant $\| x \|$ quand $x \to 0$. Comme ci-dessus, g est lipchitzienne de rapport 2 au voisinage de 0 et donc $\| g(y) \| \leq 2 \| y \|$ au voisinage de 0. Maintenant, $\epsilon > 0$ étant donné, il existe un voisinage ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ de 0 sur lequel on a $\| u(x) \| \leq \epsilon \| x \|$. Il existe alors un voisinage ouvert W de 0 tel que pour $y \in \mathrm{W}$ on ait

$$\| u(g(y)) \| \leq \epsilon \| g(y) \| \leq 2\epsilon \| y \|$$

ce qui prouve que $u(g(y))$ est négligeable devant $\| y \|$ quand $y \to 0$. Ainsi, l'application g est différentiable en 0.

b) Ceci montre que g est différentiable en tout point, et sa différentielle est donnée par

$$d_y g = (d_x f)^{-1}$$

Ainsi, dg s'obtient en composant df avec l'application $u \mapsto u^{-1}$. Compte-tenu de l'exercice 1.1 et du fait que df est de classe C^{r-1}, on obtient que dg est de classe C^{r-1}, et par suite que g est de classe C^r. Ceci achève la démonstration. □

Exercice 1.5

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est dérivable, et que $f'(0) = 1$. Vérifier qu'il n'existe pas de voisinage de 0 sur lequel la fonction f est injective. Expliquer pourquoi ceci ne contredit pas le théorème s'inversion locale.

1.3. Théorème des fonctions implicites

Grossièrement parlant, le problème des fonctions implicites est étant donnée une équation $f(x, y) = c$ de pouvoir exprimer la variable y en fonctions de x. Les données précises sont les suivantes : on se donne E et F deux espaces vectoriels, et $f : U \to F$ une application de classe C^r sur un ouvert U de $E \times F$. On considère dans U l'équation $f(x, y) = Cte$. A condition de faire une hypothèse sur la différentielle partielle $\partial_2 f$ dans la direction F, on va pouvoir exprimer y en fonction de x au voisinage d'un point de U.

THÉORÈME 1.7. — *Soit (a, b) un point de* U, *et $f(a, b) = c$. On suppose que la différentielle partielle $\partial_2 f(a, b)$ dans la direction* F *est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert* U′ *de (a, b) tel que la trace dans* U′ *du fermé $f(x, y) = c$ soit le graphe d'une application $u : V \to F$ de classe C^r sur un voisinage ouvert* V *de a à valeurs dans* F.

Autrement dit, on a l'équivalence

$$(x, y) \in U', \text{ et } f(x, y) = c \iff x \in V \text{ et } y = u(x).$$

Démonstration. Considérons l'application $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ définie par

$$(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$$

L'application ϕ est de classe C^r, et sa différentielle $d_{(a,b)}\phi$ au point (a, b), est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_\mathrm{E} & 0 \\ \partial_1 f(a,b) & \partial_2 f(a,b) \end{pmatrix}$$

Puisque $\partial_2 f(a, b)$ est inversible, cette application linéaire est aussi inversible. Donc, il existe un voisinage ouvert U' de (a, b) tel que ϕ induise un difféomorphisme $\phi_{\mathrm{U}'}$ de U' sur un voisinage ouvert V' de (a, c). Soit $\Psi : \mathrm{V}' \to \mathrm{U}' \subset \mathrm{E} \times \mathrm{F}$ l'inverse de $\phi_{\mathrm{U}'}$; cette application inverse est de la forme $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto (\mathrm{X}, \psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))$, avec ψ de classe C^r. La trace G' du fermé d'équation $f(x, y) = c$ sur U' est l'image par le difféomorphisme Ψ du fermé de V' défini par les couples (X, Y) tels que $\mathrm{Y} = c$. Soit V l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que $(x, c) \in \mathrm{V}'$. C'est un ouvert de E, et l'application $u : \mathrm{V} \to \mathrm{F}$ définie par $u(x) = \psi(x, c)$ a pour graphe G'. L'application u est de classe C^r, ce qui termine donc la démonstration. □

Exemple

Considérons l'équation $x^3 - x + y^2 = 0$. Au voisinage du point (1,0), cette équation peut se résoudre sous la forme $x = u(y)$, avec u de classe C^∞.

2. Théorème du rang

2.1. Le rang

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r d'un ouvert U de E à valeurs dans F. On appelle rang de f en a, et on note $\mathrm{rg}_a f$ le rang de la différentielle $d_a f$.

LEMME 2.1. — *La fonction* $\mathrm{U} \to \mathbb{N}$ *définie par*

$$x \mapsto \mathrm{rg}_x f$$

est semi-continue inférieurement.

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{U}$ et ρ le rang de $d_a f$. Désignons par N le noyau de $d_a f$ et par I son image. Considérons des supplémentaires S et T de N et I, de sorte que l'on a des sommes directes $\mathrm{E} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{S}$ et $\mathrm{F} = \mathrm{I} \oplus \mathrm{T}$. Alors f s'écrit dans la dernière somme directe $f = (f_1, f_2)$ et la différentielle partielle $\partial_2 f_1(x)$ est inversible au point $x = a$, et de rang ρ. Par continuité, elle reste inversible au voisinage de a, de sorte qu'au voisinage de a le rang de $d_x f$ est $\geq \rho$. □

Exercice 2.1

Retrouver le résultat en choisissant des bases de E et F et en considérant les mineurs de la matrice jacobienne de f au point a.

DÉFINITION 2.2. — *Soient* U *et* U′ *deux ouverts de* E, *et* V *et* V′ *deux ouverts de* F; *enfin, soient* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V} \subset \mathrm{F}$ *et* $f' : \mathrm{U}' \subset \mathrm{V}'$ *deux applications de classe* C^r.

On dit que f *et* f' *sont* C^r-*conjuguées s'il existe des difféomorphismes* $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ *et* $\psi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ *tels que*

$$f' = \psi f \phi^{-1}.$$

LEMME 2.3. — *Si* f *est conjuguée à une application* $g : \mathrm{U}' \to \mathrm{V}'$ *induite par une application linéaire, le rang de* f *est constant.*

Démonstration. Soient comme ci-dessus des difféomorphismes ϕ et ψ tels que $g = \psi f \phi^{-1}$. Soient $a \in \mathrm{E}$, $b = f(a)$ et $a' = \phi(a)$ et $b' = \psi(b)$ les points correspondants de U′ et V′. La différentielle de g en $a' \in \mathrm{U}'$ est donnée par

$$d_{a'} g = d_b \psi \circ d_a f \circ d_a \phi^{-1}$$

Par suite, $d_{a'} g$ et $d_a f$ on même rang. Puisque g est induite par une application linéaire, sa différentielle est constante. D'où le lemme. □

Le but de la section est de montrer la réciproque ; cependant, le résultat ne sera vrai que localement, au voisinage d'un point : autrement dit, il faudra éventuellement diminuer la taille des ouverts U et V. On commence par deux cas particuliers, qui en fait seront suffisants pour la plupart des exemples. Le théorème du rang est une combinaison de ces deux cas particuliers.

2.2. Théorème de submersion

Une application $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ de classe C^r de différentielle $d_a f$ surjective en un point a reste de rang maximum au voisinage de a. On dit que c'est une submersion au voisinage de a.

THÉORÈME 2.4. — *Soit* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ *une application de classe* C^r *sur un ouvert* U *de* E *et a un point de* U.

On suppose que la différentielle $d_a f$ *est surjective.*

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ *de* a *et un difféomorphisme* $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W} \subset \mathrm{E}$ *de classe* C^r *tel que l'application* $f \circ \phi^{-1}$ *soit induite par une application linéaire* $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

Démonstration. On pose $b = f(a)$. Soit $\mathrm{N} = \ker d_a f$, et S un supplémentaire de N, de sorte que dans la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{S}$ la différentielle partielle $\partial_2 f(a) = d_a f|_{\mathrm{S}}$ est, en raison de l'hypothèse, un isomorphisme. On considère l'application $\phi : \mathrm{E} \to \mathrm{N} \oplus \mathrm{F}$ de classe C^r définie par

$$\phi(x, y) = (x, f(x, y))$$

La matrice jacobienne de f au point a dans les sommes directes ci-dessus est donnée par

$$d_a f = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{\mathrm{N}} & 0 \\ \partial_1 f(a) & \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$$

Cette application linéaire est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ de a, un voisinage ouvert W de $(0, b)$ tels que ϕ induise un difféomorphisme, noté encore $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{W} \\ & {\scriptstyle f}\searrow & \downarrow {\scriptstyle p_2} \\ & & \mathrm{F} \end{array}$$

où p_2 est la seconde projection, est commutatif, de sorte que $f \circ \phi^{-1} : \mathrm{W} \to \mathrm{F}$ est induit par la seconde projection, qui est évidemment linéaire. Puisque $\mathrm{E} \simeq \mathrm{N} \oplus \mathrm{F}$, ceci conduit au résultat. □

DÉFINITION 2.5. — *Une application* $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ *de classe* C^r *sur un ouvert* U *de* E *est appelée une submersion si la différentielle* $d_a f$ *est surjective en tout point de* U.

2.3. Théorème d'immersion

Une application $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ de classe C^r sur un ouvert U d'un espace vectoriel de dimension n dont la différentielle est injective en un point a reste de rang n au voisinage de a. On dit que c'est une immersion au voisinage de a. Cette notion est justifiée par le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6. — *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r sur un ouvert* U *de* E. *Soit $a \in \mathrm{E}$ et $b = f(a)$. On suppose que la différentielle $d_a f$ est injective.*

Alors il existe un voisinage ouvert $\mathrm{R} \subset \mathrm{U}$ de a, un voisinage ouvert V *de b tels que $f(\mathrm{R}) \subset \mathrm{V}$ et un difféomorphisme $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W} \subset \mathrm{F}$ de classe C^r tels que l'application $\phi \circ f|_{\mathrm{R}}$ soit induite par une application linéaire $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$.*

Démonstration. Soit I l'image de $d_a f$, et S un supplémentaire de I. Considérons l'application $\Phi : \mathrm{U} \times \mathrm{S} \to \mathrm{F}$ définie sur l'ouvert $\mathrm{U} \times \mathrm{S}$ de $\mathrm{E} \oplus \mathrm{S} = \mathrm{E} \times \mathrm{S}$ par

$$(x, y) \mapsto f(x) + y$$

La différentielle de ϕ en $(a, 0)$ est la matrice

$$d_a \Phi = \begin{pmatrix} d_a f & \mathrm{id}_{\mathrm{S}} \end{pmatrix}$$

Puisque la différentielle $d_a f$ est injective, cette application linéaire est inversible. Donc il existe un voisinage ouvert $\mathrm{W} \subset \mathrm{U} \times \mathrm{S}$ de $(a, 0)$ et un voisinage ouvert V de b tel que Φ induise un difféomorphisme $\mathrm{W} \to \mathrm{V}$. Soit ι l'inclusion $\mathrm{E} \hookrightarrow \mathrm{E} \times \mathrm{S}$, et $\mathrm{R} = \iota^{-1}(\mathrm{W})$. On a alors $f(\mathrm{R}) \subset \mathrm{W}$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R} & & \\ {\scriptstyle \iota}\downarrow & \searrow^{f} & \\ \mathrm{W} & \overset{\Phi}{\longrightarrow} & \mathrm{V} \end{array}$$

est commutatif. Considérons le difféomorphisme $\phi = \Phi^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. Alors $\phi \circ f|_{\mathrm{R}}$ est induit par l'application linéaire ι. □

DÉFINITION 2.7. — *Une application $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ de classe C^r sur un ouvert* U *de* E *est appelée une immersion si la différentielle $d_a f$ est injective en tout point de* U.

2.4. Subimmersion

THÉORÈME 2.8. — *(Théorème du rang) Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r ; soit a un point de* U, *et $b = f(a)$. On suppose que le rang de f est constant au voisinage de a. Alors il existe des difféomorphismes ϕ et ψ définies au voisinage de a et b respectivement, de classe C^r, tels que l'application composée*

$$g = \psi \circ f \circ \phi^{-1},$$

soit, au voisinage de a, induite par une application linéaire.

Bien entendu, l'application composée ci-dessus n'a de sens qu'au voisinage de a. Il s'agit uniquement d'un théorème local. Ce théorème va s'obtenir en combinant le théorème de submersion et le théorème d'immersion.

Démonstration. Soit I l'image de $d_a f$, et S un supplémentaire de I. Dans la somme directe $\mathrm{F} = \mathrm{I} \oplus \mathrm{S}$ on écrit $f = (f_1, f_2)$ de sorte que $d_a f_1$ est surjective. D'après le théorème de submersion, il existe un difféomorphisme ϕ de classe C^r défini sur un voisinage ouvert de a tel que $f_1 \circ \phi^{-1}$ soit, au voisinage de a, induite par une application linéaire (obligatoirement surjective).

On peut donc supposer que $\mathrm{E} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{I}$ et que f_1 est donné au voisinage de a par la projection $(x, y) \mapsto y$; l'application f s'écrit, sur un voisinage ouvert de $a = (a', a'')$ qu'on peut supposer de la forme $\mathrm{U}' \times \mathrm{U}'' \subset \mathrm{U}$

$$(x, y) \mapsto (y, f_2(x, y))$$

On peut en outre supposer que U′ est connexe, et que le rang de f est constant sur $\mathrm{U}' \times \mathrm{U}''$. La matrice jacobienne de f en (x, y) s'écrit dans les sommes directes ci-dessus

$$d_a f = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id}_\mathrm{I} \\ \partial_1 f(x,y) & \partial_2 f(x,y) \end{pmatrix}$$

L'hypothèse sur le rang montre que $\partial_1 f(x, y) = 0$ ce qui implique que l'application f_1 ne dépend pas de x. Posons pour $y \in \mathrm{U}'' \subset \mathrm{I}$, $g(y) = f(a', y)$. Alors g est de classe C^r. Sur l'ouvert $\mathrm{U}' \times \mathrm{U}''$, l'application f est la composée de la projection $(x, y) \mapsto y$ et de l'application $\mathrm{G} : \mathrm{U}'' \to \mathrm{F}$ définie par

$$y \mapsto (y, g(y))$$

D'après le théorème d'immersion, il existe un difféomorphisme ψ de classe C^r défini au voisinage de $b = G(a'')$ dans F tel que $\psi \circ G$ soit, au voisinage de a'', induit par une application linéaire v. Il en résulte qu'au voisinage $\psi \circ f$ est au voisinage de a, induit par l'application linéaire $(x, y) \mapsto v(y)$. □

3. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Le concept de sous-variété de E généralise celui de courbe ou de surface. Il s'agit de parties de E qu'on peut décrire localement par de bonnes équations.

3.1. La notion de sous-variété

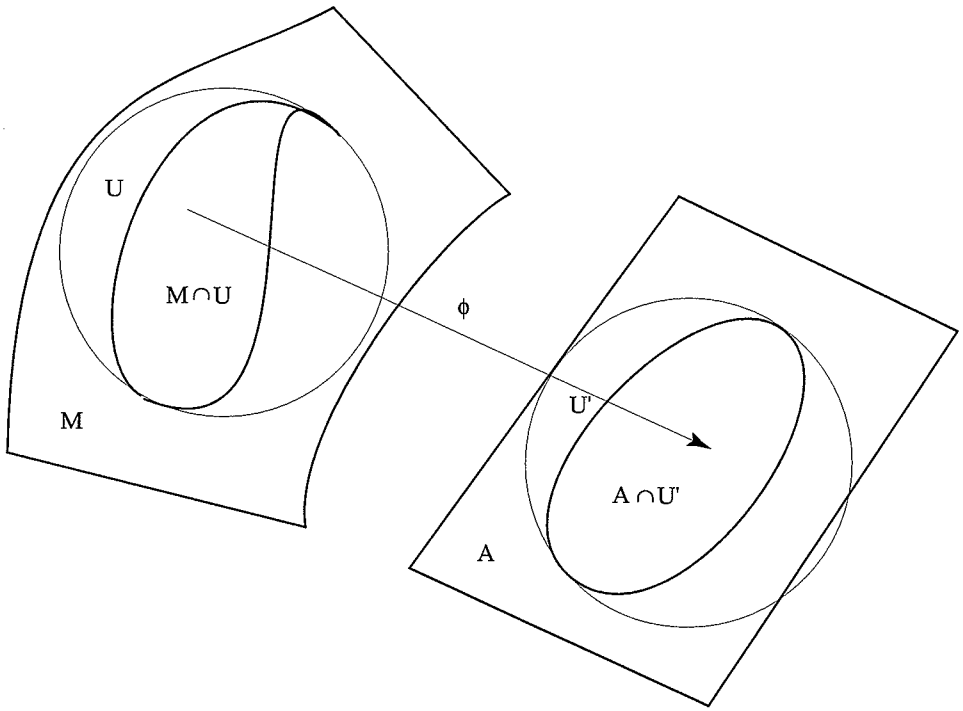
DÉFINITION 3.1. — *Une partie* $A \subset E$ *s'appelle sous-espace affine de* E *si elle est l'image d'un sous-espace vectoriel* F *de* E *par une translation.*

Soit A un sous-espace affine de E. Si a est un point de A, le sous-espace vectoriel F est alors l'image réciproque de A par la translation $x \to a + x$. On l'appelle espace vectoriel tangent à A. La dimension de cet espace tangent est par définition la dimension de A.

Exemple

Soit G un autre espace vectoriel de dimension p. Soit $f : E \to G$ une application linéaire, et b un point de G; alors l'ensemble $A = f^{-1}(b)$ est, s'il n'est pas vide, un sous-espace affine de E d'espace tangent $\ker f$.

DÉFINITION 3.2. — *Soit* M *une partie de* E. *On dit que* M *est une sous-variété de classe* C^r *de* E *si pour tout point* $a \in M$ *il existe un voisinage ouvert* U *de* a *dans* E *et un difféomorphisme* $\phi : U \to U' \subset E$ *tel que* $\phi(M \cap U)$ *soit la trace sur* U′ *d'un sous-espace affine* A *de* E.



On peut bien sûr, quitte à composer ϕ par une translation, supposer que A contient 0, ce qui signifie alors que A un sous-espace vectoriel de E. On peut alors trouver une base $(e_i)_{i=1...,m}$ de A qu'on complète pour obtenir une base $(e_i)_{i=1...,n}$ de E. On désigne par $(\phi_i)_{i=1,...,n}$ les composantes dans cette base. Alors, dans l'ouvert U de E, l'intersection $M \cap U$ est définie par les équations

$$\phi_{m+1} = \ldots = \phi_n = 0.$$

Remarquons que la différentielle de l'application $(\phi_{m+1}, \ldots, \phi_n)$ est surjective en tout point de a. On verra au paragraphe 3.3 que si M peut être définie localement par de telles équations, alors M est une sous-variété de E.

Il résulte de la définition une sous-variété de E est localement fermée dans E, c'est-à-dire intersection d'un ouvert et d'un fermé. Les ouverts de E sont des cas particuliers de sous-variétés de E.

Exemple

Considérons le graphe $G \subset E \times F$ d'une application $f : U \to F$ de classe C^r d'un ouvert U de E à valeurs dans un espace vectoriel F. Alors le difféomorphisme

$\phi : \mathrm{U} \times \mathrm{F} \to \mathrm{U} \times \mathrm{F}$ défini par

$$\phi(x, y) = (x, y - u(x))$$

transforme le graphe de u en $\mathrm{U} \times \{0\}$. C'est la trace sur $\mathrm{U} \times \mathrm{F}$ d'un sous-espace vectoriel de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$. Donc le graphe G est une sous-variété de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

3.2. Espaces tangents

DÉFINITION 3.3. — *Soit* M *une partie de* E, *et a un point de* M. *Un vecteur* $t \in \mathrm{E}$ *est dit tangent à* M *en a s'il existe un chemin* $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathrm{E}$ *défini sur un petit intervalle ouvert contenant* 0, *dérivable en* 0, *tel que*

(i) *l'image de* α *est contenu dans* M

(ii) *le vecteur vitesse* $\alpha'(0)$ *est égal à* t.

On désigne par $\mathrm{T}_a\mathrm{M}$ l'ensemble des vecteurs tangents à M en a.

Exercice 3.1

Soit $\mathrm{M} \subset \mathbb{R}^2$ le fermé défini par les points (x, y) définis par l'équation $xy = 0$. Déterminer l'ensemble $\mathrm{T}_0\mathrm{M}$ et vérifier que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.2

Soit $\phi = \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ un difféomorphisme de classe C^1 d'un ouvert U de E sur un ouvert V de E. Soit M une sous-variété de E. Montrer que $\phi(\mathrm{M} \cap \mathrm{U})$ est une sous-variété de E et que l'on a

$$d_a\phi(\mathrm{T}_a\mathrm{M}) = \mathrm{T}_{\phi(a)}(\phi(\mathrm{M})).$$

PROPOSITION 3.4. — *Soit* M *une sous-variété de classe* C^1 *de* E. *Alors l'ensemble des vecteurs tangents* $\mathrm{T}_a\mathrm{M}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration. Au voisinage U de a, il existe un difféomorphisme $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ de classe C^1 tel que $\phi(\mathrm{U} \cap \mathrm{M})$ soit la trace sur V d'un sous-espace vectoriel $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. En vertu de l'exercice 3.2 qui précède, on est ramené à vérifier qu'en un point quelconque de F on a $\mathrm{T}_b\mathrm{F} = \mathrm{F}$, ce qui est évident. □

DÉFINITION 3.5. — *Soit* M *une sous-variété de* E. *On appelle dimension de* M *en* $a \in \mathrm{M}$ *la dimension de l'espace tangent* $\mathrm{T}_a\mathrm{M}$.

Ainsi, la dimension d'une sous-variété est une fonction localement constante. Si elle est constante, on dit que la sous-variété est équidimensionnelle ; cette constante est la dimension de M. Chacune des composantes connexes d'une sous-variété est équidimensionnelle. Dans la pratique, on se limitera souvent aux sous-variétés équidimensionnelles de dimension m : ceci revient à imposer que dans la définition 3.2, le sous-espace affine A est de dimension m. Une sous-variété de dimension 1 (resp. 2) s'appelle une courbe (resp. une surface) de E ; une sous-variété de dimension $n-1$ s'appelle une hypersurface de E. Une sous-variété M de E de dimension 0 de E est un ensemble discret, c'est-à-dire que la topologie induite sur M est la topologie discrète.

Exercice 3.3

Soient M et N deux sous-variétés d'espaces vectoriels E et F respectivement. Soit U un ouvert contenant M et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r telle que $f(\mathrm{M}) \subset \mathrm{N}$. Démontrer que

$$d_a f(\mathrm{T}_a\mathrm{M}) \subset \mathrm{T}_{f(a)}\mathrm{N}.$$

3.3. Sous-variétés définies par des équations

Soient E et F deux espaces vectoriels, et $\Omega \subset \mathrm{E}$ un ouvert de E.

THÉORÈME 3.6. — *Soit $f : \Omega \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r et de rang constant sur un ouvert Ω d'un espace vectoriel* E .

Soit $b \in \mathrm{F}$ un point de F. *L'ensemble $\mathrm{M} = \{x \in \Omega, f(x) = b\}$ est une sous-variété de Ω de classe C^r, dont l'espace tangent en un point $a \in \mathrm{M}$ est*

$$\mathrm{T}_a\mathrm{M} = \ker d_a f$$

Démonstration. Soit $a \in \mathrm{M}$. D'après le théorème du rang, on peut trouver des voisinages $\mathrm{U} \subset \Omega$ et V de a et b respectivement, et des difféomorphismes $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ et $\psi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ tels que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et tels que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit induite par une application linéaire. Soit $a' = \phi(a)$, et $b' = \psi(b)$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \xrightarrow{f} & \mathrm{V} \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathrm{U}' & \xrightarrow{g} & \mathrm{V}' \end{array}$$

On voit que $x \in \mathrm{M} \cap \mathrm{U}$ si et seulement si $x' = \phi(x)$ satisfait à l'équation $g(x') = b'$. Puisque g est la restriction à U′ d'une application linéaire, $\phi(\mathrm{M} \cap \mathrm{U})$ est la trace sur U′ d'un sous-espace affine : ainsi, M est une sous-variété de classe C^r de E. L'espace tangent à $\phi(\mathrm{M} \cap \mathrm{U})$ en a' est le noyau de dg. En vertu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \xrightarrow{d_a f} & \mathrm{F} \\ {\scriptstyle d_a\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_b\psi} \\ \mathrm{E} & \xrightarrow{dg} & \mathrm{F} \end{array}$$

on obtient que $\mathrm{T}_a\mathrm{M} = \ker d_a f$.

DÉFINITION 3.7. — *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r. Un point $a \in \mathrm{U}$ est appelé un point critique de f si*

$$\mathrm{rg}_a f < \dim \mathrm{F}$$

La valeur de f en un point critique s'appelle valeur critique.

COROLLAIRE 3.8. — *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r. Si b est un point de F qui n'est pas valeur critique, le fermé de U défini par $\mathrm{M} = \{x \in \mathrm{U}, f(x) = b\}$ est une sous-variété de E, dont l'espace tangent en un point $a \in \mathrm{M}$ est $\ker d_a f$.*

Exercice 3.4

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^d + \ldots + x_n^d$$

Vérifier que la seule valeur critique de f est 0.

Il en résulte que l'équation

$$x_1^d + \ldots + x_n^d = 1$$

définit une hypersurface de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3.5

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit End(E) l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Pour $u \in \mathrm{End(E)}$, on désigne par u^* l'adjointe de u. On considère l'application $f : \mathrm{End(E)} \to \mathrm{End(E)}$

$$f : u \mapsto uu^*$$

1) Vérifier que f est de rang constant sur l'ouvert GL(E) des applications linéaires inversibles.

2) En déduire que le groupe O(E) des applications orthogonales est une sous-variété de End(E). Préciser la dimension et l'espace tangent en un point.

Exercice 3.6

1) Trouver les valeurs critiques de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^3 + y^3 + z^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

Vérifier que l'ensemble des valeurs critiques est de mesure nulle.

2) En déduire que les équations

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

définissent une courbe compacte de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.7

On considère deux espaces vectoriels E et F de dimensions respectives n et m. Soit $\mathrm{M} \subset \mathrm{L(E, F)}$ l'ensemble des applications linéaires de rang ρ.

1) Soit $u \in \mathrm{M}$. On désigne par N le noyau de u et par I son image. On choisit des supplémentaires S et T de N et I respectivement, de sorte que l'on dispose de sommes directes $\mathrm{E} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{S}$ et $\mathrm{F} = \mathrm{I} \oplus \mathrm{T}$. On écrit dans ces sommes directes, pour $v \in \mathrm{End(E)}$

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Démontrer que dans l'ouvert U défini par les v tels que b soit inversible, $\mathrm{M} \cap \mathrm{U}$ est défini par l'équation à valeurs dans $\mathrm{L(N, T)}$

$$c - db^{-1}a = 0$$

2) En déduire que M est une sous-variété localement fermée de dimension $(n-\rho)(m-\rho)$ de l'espace vectoriel End(E), et que son espace tangent au point u est l'espace vectoriel noyau de l'application linéaire canonique

$$\mathrm{End(E)} \to \mathrm{L}(\ker u, \mathrm{coker}\ u)$$

définie par composition avec l'inclusion $\ker u \hookrightarrow \mathrm{E}$ et la projection $\mathrm{F} \to \mathrm{coker}\ u$.

3.4. Sous-variétés définies par un paramétrage

On considère une application $f : \Omega \to \mathrm{F}$ de classe C^r définie sur un ouvert Ω d'un espace vectoriel E. Alors qu'il n'y a pas de précaution particulière, en dehors de conditions portant sur le rang, pour vérifier que les fibres de f sont des sous-variétés, il faut être beaucoup plus prudent pour affirmer que l'image de f une sous-variété. Par exemple, en général, même si f est une immersion injective, l'image de f n'est pas toujours une sous-variété de F.

THÉORÈME 3.9. — *Soit Ω un ouvert de* E, *et $f : \Omega \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r de rang constant. On suppose que l'application induite $f : \Omega \to \mathrm{Im}\, f$ est ouverte. Alors*

(i) *l'image* $\mathrm{Im}\, f$ *est une sous-variété de* F *de classe* C^r;

(ii) *pour $a \in \Omega$, l'espace tangent à* $\mathrm{Im}\, f$ *au point $b = f(a)$ est donné par*

$$\mathrm{T}_b \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, d_a f$$

L'hypothèse $f : \Omega \to \mathrm{Im}\, f$ est très restrictive : elle impose que l'image de $d_a f$ est indépendante de a quand a parcourt la fibre $f^{-1}(b)$.

DÉFINITION 3.10. — *Soit Ω un ouvert de* E, *et $f : \Omega \to \mathrm{F}$ une application de classe C^r. On dit que f est un plongement de classe C^r si c'est une immersion et si $f : \Omega \to f(\Omega)$ est un homéomorphisme.*

COROLLAIRE 3.11. — *Soit $f : \Omega \to \mathrm{F}$ un plongement de classe C^r. L'image* $\mathrm{Im}\, f$ *est une sous-variété de* F *de classe* C^r.

Vérifier qu'une application injective $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ est un homéomorphisme sur son image revient à vérifier qu'elle induit une application fermée : $\mathrm{U} \to \mathrm{Im}\, f$. Pour ceci, il est souvent utile d'introduire la notion de propreté.

DÉFINITION 3.12. — *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques localement compacts ; une application continue* $f : X \to Y$ *est dite propre si l'image réciproque d'un compact de* Y *est un compact.*

Si $f : X \to Y$ est une application propre, les fibres de f sont évidemment compactes.

PROPOSITION 3.13. — *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques localement compacts et* $f : X \to Y$ *une application propre. Alors* f *est fermée.*

Démonstration. Soit F un fermé de X ; il s'agit de vérifier que $f(F)$ est fermé. Soit $y \in Y$ appartenant à l'adhérence de $f(F)$. Considérons un voisinage compact K de y. Alors $f^{-1}(K)$ est un compact, qui rencontre F. Pour tout voisinage compact $W \subset K$ le fermé $F \cap f^{-1}(W)$ est non vide ; ces parties sont fermées dans le compact $F \cap f^{-1}(K)$, et cette famille de fermés est stable par intersection finie. Il en résulte que

$$\cap_W f^{-1}(W) \cap F \neq \emptyset$$

Si x est un point de cette intersection, le point $f(x)$ appartient à tous les voisinages W et par suite, puisque Y est séparé, $f(x) = y$. Donc y appartient à $f(F)$. □

Exercice 3.8

Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $t \mapsto e^{(1+i)t}$ est un plongement.

Exercice 3.9

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ définie par

$$f(x, y) = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$$

1) Montrer que f est une immersion propre.

2) Démontrer que f est ouverte sur son image. En déduire que l'image M de f est une sous-variété de classe C^∞ de $\mathbb{R}^4$, de dimension 2.

3) Trouver des équations locales pour M au voisinage du point $(1, 0, 0, 0)$.

Exercice 3.10

1) Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f : t \mapsto e^{it} \cos 2t$$

est une immersion et que l'image n'est pas une sous-variété de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

2) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $-]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ est une immersion injective. Vérifier que l'image de g n'est pas une sous-variété de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $\mathrm{N} \subset \mathrm{End(E)}$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de degré exactement n. On considère l'action naturelle de GL(E) sur End(E) par conjugaison.

1) Soit $v \in \mathrm{N}$. Démontrer qu'il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de E telle que $v(e_i) = e_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $v(e_n) = 0$. En déduire que N est une orbite de GL(E).

2) Soit $v \in \mathrm{N}$. Démontrer que l'application $\phi : \mathrm{GL(E)} \to \mathrm{N}$ définie par $\phi(g) = gvg^{-1}$ est de classe C^∞, et qu'elle a des sections locales continues. En déduire que N est une sous-variété de End(E).

3) Préciser l'espace tangent en un point et la dimension de N.

Démonstration du théorème 3.9.

Soit $a \in \Omega$ et $b = f(a)$. D'après le théorème du rang, on peut trouver des voisinages ouverts $\mathrm{U} \subset \Omega$ et V de a et b respectivement, et des difféomorphismes $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ et $\psi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ tels que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$ et tels que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit induite par une application linéaire. Soit $a' = \phi(a)$, et $b' = \psi(b)$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U} & \xrightarrow{f} & \mathrm{V} \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathrm{U}' & \xrightarrow{g} & \mathrm{V}' \end{array}$$

Par hypothèse, f est ouverte sur son image : ainsi, il existe un ouvert W de F tel que $f(\mathrm{U}) = \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{W}$. Remarquons que $g(\mathrm{U}') \subset \psi(\mathrm{V} \cap \mathrm{W})$. Quitte à remplacer au besoin V par $\mathrm{V} \cap \mathrm{W}$, et ψ par sa restriction : $\mathrm{V} \cap \mathrm{W} \to \psi(\mathrm{V} \cap \mathrm{W})$, on peut supposer que $f(\mathrm{U}) = \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{V}$. L'image de $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{V}$ par ψ est alors $g(\mathrm{U}')$, et, d'après l'exercice 3.2, il s'agit de vérifier que $g(\mathrm{U}')$ est une sous-variété de F.

On est donc ramené à vérifier que l'image d'un ouvert de E par une application linéaire G : E → F est une sous-variété. Mais Im G est un sous-espace vectoriel, et l'application linéaire surjective G : E → Im G est ouverte. L'image d'un ouvert de E est donc un ouvert d'un espace vectoriel.

Pour trouver l'espace tangent à Im f en $b = f(a)$, il suffit de contempler le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \xrightarrow{d_a f} & \mathrm{F} \\ {\scriptstyle d_a\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_b\psi} \\ \mathrm{E} & \xrightarrow{dg} & \mathrm{F} \end{array}$$

et de remarquer que l'espace tangent à Im g en un point est l'image de dg. Ceci achève la démonstration. □

3.5. Le lemme de Morse

On suppose dans ce qui suit que r est un entier ≥ 2. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^r définie sur un ouvert U d'un espace vectoriel E. Les points critiques de f sont les points $a \in \mathrm{U}$ tels que $d_a f = 0$. On sait que si $a \in \mathrm{U}$ n'est pas un point critique, une telle application est conjuguée à une application linéaire $\mathrm{E} \to \mathbb{R}$, modulo l'action d'un difféomorphisme défini au voisinage de a. On se préoccupe dans cette section d'examiner ce qui se passe au voisinage des points critiques raisonnables.

Rappelons que la différentielle seconde $d_a^2 f$ au point $a \in \mathrm{U}$ est par définition la forme bilinéaire sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ définie par $d_a(df) \in \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}))$; autrement dit, pour u et $v \in \mathrm{E}$ on a $d_a^2 f(u, v) = d_a(df)(u)(v)$. Le lemme de Schwarz dit que cette forme bilinéaire est symétrique. En termes de dérivées partielles, si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées dans une base e_i on a

$$d_a^2 f(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

On désigne encore par $\mathrm{H}_a f$ la forme quadratique associée à cette forme bilinéaire symétrique : c'est le Hessien de f en a. On a donc par définition pour $x \in \mathrm{E}$

$$\mathrm{H}_a f(x) = d_a^2 f(x, x)$$

DÉFINITION 3.14. — *Soit a un point critique de f. On dit que f est un point critique non dégénéré si le Hessien $\mathrm{H}_a f$ est une forme quadratique non dégénérée.*

DÉFINITION 3.15. — *Un point critique non dégénéré a est dit d'indice p si la forme quadratique $\mathrm{H}_a f$ est de signature $(n-p,p)$.*

Exercice 3.12

Soit $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ un difféomorphisme et $a' = \phi(a)$. Démontrer que si a est un point critique non dégénéré d'indice p pour f, le point a' est un point critique non dégénéré d'indice p pour la fonction $f' = f \circ \phi^{-1}$.

Exercice 3.13

Démontrer que si $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ n'a que des points critiques non dégénérés, l'ensemble des points critiques de f est un ensemble discret.

Au voisinage d'un point critique $a \in \mathrm{U}$ la formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\mathrm{H}_a f(h) + \epsilon(h) \parallel h \parallel^2$$

où $\epsilon(h)$ est une fonction réelle définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. On va montrer que si a est un point critique non dénégénéré, il existe un difféomorphisme qui transforme f en son développement de Taylor à l'ordre 2 : c'est le lemme de Morse.

LEMME 3.16. — *(Lemme de Morse)*

Soit U *un voisinage ouvert de* 0 *dans* E *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^∞. *On suppose que* a *point critique non dégénéré pour* f. *Alors il existe un difféomorphisme* $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *défini sur voisinage ouvert de* 0 *satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) $\phi(0) = 0$ *et* $d_0\phi = \mathrm{id}_\mathrm{E}$;

(ii) *au voisinage de* 0 *on a*

$$f(a+\phi(x)) = f(a) + \frac{1}{2}\mathrm{H}_a f(x).$$

Démonstration. Commençons par rappeler la petite formule de Taylor avec reste sous forme intégrale pour une fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt.$$

Cette formule s'obtient de façon évidente en calculant l'intégrale par intégration par parties. Considérons une boule ouverte $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{U}$. On applique cette formule à la fonction $t \mapsto f(a+tx)$ pour $\| x \| < r$. Du fait que a est un point critique, on obtient

$$f(a+x) = f(a) + \int_0^1 (1-t)\mathrm{H}_{a+tx} f(x) dt.$$

Considérons la forme quadratique $q_x = \int_0^1 (1-t)\mathrm{H}_{a+tx} f dt$. Du fait f est de classe C^∞, il résulte que l'application définie sur $\mathrm{B}(0,r)$ et à valeurs dans l'espace vectoriel des formes quadratiques $x \mapsto q_x$ est de classe C^∞. La formule ci-dessus s'écrit

$$f(a+x) = f(a) + q_x(x)$$

pour $x \in \mathrm{B}(0,r)$.

On munit E de la forme quadratique non dégénérée $q_0 = \frac{1}{2}\mathrm{H}_a f$, et on désigne par $(u,v) \mapsto \langle u,v \rangle$ la forme polaire de q_0. On désigne par $\mathrm{Sym(E)} \subset \mathrm{End(E)}$ l'espace vectoriel des applications linéaire $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$, symétriques pour cette forme quadratique. On désigne d'autre part par $\mathrm{S}^2\mathrm{E}^*$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E. L'application linéaire $\mathrm{Sym(E)} \to \mathrm{S}^2\mathrm{E}^*$ qui associe à un endomorphisme symétrique α la forme quadratique Q_α définie par

$$\mathrm{Q}_\alpha(x) = \langle \alpha(x), x \rangle$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Tout endomorphisme $\alpha \in \mathrm{End(E)}$ définit à partir de q_0 une nouvelle forme quadratique $\alpha^*(q_0) = q_0 \circ \alpha$. Considérons l'équation à valeurs dans l'espace vectoriel des formes quadratiques $\mathrm{S}^2\mathrm{E}^*$

$$\alpha^*(q_0) = q_x$$

où $\alpha \in \mathrm{Sym(E)}$ est l'inconnue. L'application $\mathrm{F} : \mathrm{B}(0,r) \times \mathrm{Sym(E)} \to \mathrm{S}^2\mathrm{E}^*$ définie par $(x,\alpha) \mapsto \alpha^*(q_0) - q_x$ est de classe C^∞. La différentielle partielle $\partial_2 \mathrm{F}(0, \mathrm{id_E})$ est donnée par $\alpha \mapsto 2\mathrm{Q}_\alpha$. Cette différentielle partielle est donc inversible. Il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe une application $x \mapsto \alpha(x)$ de classe C^∞, définie au voisinage de 0 dans E et à valeurs dans Sym(E) telle que $\alpha(0) = \mathrm{id_E}$ et telle que

$$\alpha(x)^*(q_0) = q_x$$

Cette égalité entraîne en particulier $q_x(x) = q_0(\alpha(x)x)$, et donc

$$f(a+x) = f(a) + \frac{1}{2}\mathrm{H}_a f(\alpha(x)x).$$

Considérons l'application $\beta : x \mapsto \alpha(x)x$, définie au voisinage de 0 dans E et à valeurs dans E. Cette application est de classe C^∞, et sa différentielle en $x = 0$ est $d_0\beta = \mathrm{id}_\mathrm{E}$. Ainsi, β induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un voisinage ouvert de 0. Le difféomorphisme inverse ϕ satisfait aux conditions demandées. □

On peut formuler le lemme de Morse de manière plus concrète :

COROLLAIRE 3.17. — *Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ ayant en a un point critique non dégénéré d'indice p. Il existe au voisinage de a des fonctions scalaires $u_1, \ldots, u_n$ de classe C^∞ s'annulant en a, telles que*

(i) $f(x) = f(a) + \sum_{1 \le i \le n-p} u_i^2 - \sum_{n-p < j \le n} u_j^2$

(ii) *L'application $x \mapsto (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ induit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de a sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Il suffit de choisir une base $e_1, \ldots, e_n$ orthogonale pour la forme quadratique $q_0 = \frac{1}{2}\mathrm{H}_a f$ et telle $q_0(e_i) = 1$ si $1 \le i \le n-p$ et $q_0(e_i) = -1$ si $n-p+1 \le i \le n$. Une telle base orthogonale existe d'après le théorème de réduction des formes quadratiques réelles de signature $(n-p, p)$. Si β est l'application introduite dans la démonstration ci-dessus, on peut prendre pour fonctions u_i les composantes de l'application $a + x \mapsto \beta(x)$ dans cette base. □

Exercice 3.14

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ n'ayant qu'un nombre fini de points critiques non dégénérés. On considère un point critique a d'indice p, et on désigne par c la valeur critique correspondante. Etudier, au voisinage de a, l'allure de l'hypersurface de niveau définie par l'équation $f(x) = y$ quand y est voisin de la valeur critique c.

4. Variétés abstraites

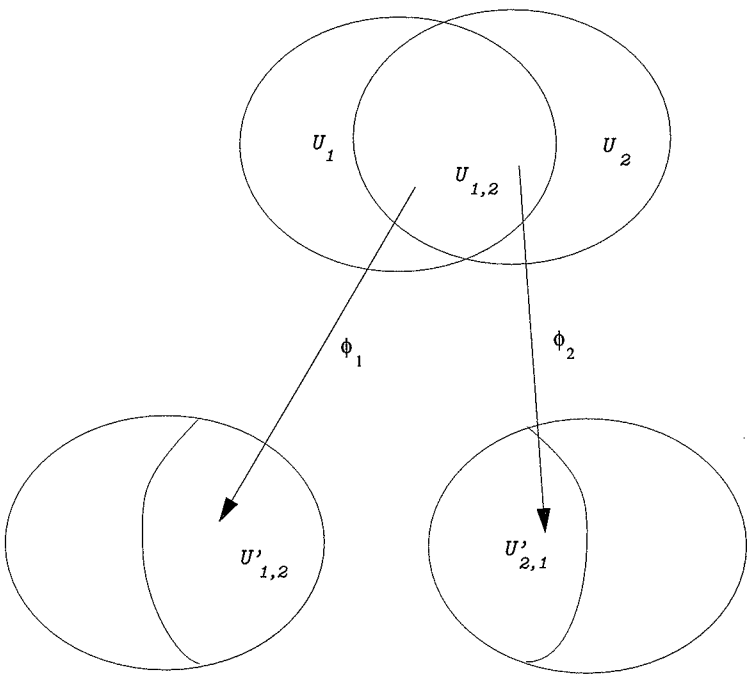
On ne définit ici que les variétés différentielles de dimension n de classe C^∞. On dira souvent plus rapidement variétés quand il n'y a pas de confusion

possible. Le but est de mettre une structure de variété sur des objets qui ne se présentent pas de façon naturelle comme des parties de $\mathbb{R}^m$, comme par exemple l'espace projectif (ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel E donné) ou plus généralement la grassmanienne $\mathrm{Grass}(d, \mathrm{E})$ des sous-espaces de dimension d d'un espace vectoriel E, ou les variétés obtenues comme quotient d'une variété donnée par l'action d'un groupe. Sur le même principe, on peut définir les variétés $\mathbb{C}-$analytiques.

4.1. Cartes locales et atlas

Soit X un espace topologique. Une carte locale de dimension n pour X est la donnée d'un homéomorphisme $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}' \subset \mathrm{E}$ d'un ouvert U de X sur un ouvert U′ d'un espace vectoriel E de dimension n. L'ouvert U s'appelle la source de la carte locale, l'ouvert U′ s'appelle le but. On désignera souvent une telle carte locale par (U, φ). Etant données deux cartes locales $\varphi_1 : \mathrm{U}_1 \to \mathrm{U}'_1$ et $\varphi_2 : \mathrm{U}_2 \to \mathrm{U}'_2$, on désigne par $\mathrm{U}_{1,2}$ l'intersection $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$; on appelle changement de cartes locales l'homéomorphisme $\varphi_{1,2}$, défini sur l'ouvert $\mathrm{U}'_{1,2} = \phi_1(\mathrm{U}_{1,2})$ et à valeurs dans l'ouvert $\mathrm{U}'_{2,1} = \varphi_2(\mathrm{U}_{1,2})$ défini par

$$x \mapsto \varphi_2 \varphi_1^{-1}(x)$$



On dit que les deux cartes φ_1 et φ_2 sont $C^\infty-$compatibles si l'homéomorphisme $\varphi_{1,2} : U'_{1,2} \to U'_{2,1}$ est un difféomorphisme de classe C^∞.

DÉFINITION 4.1. — *Soit* X *un espace topologique. On appelle atlas de classe* C^∞ *et de dimension* n *la donnée d'un ensemble de cartes locales* $\mathscr{A} = \{\varphi_i\}_{i\in I}$ *deux à deux* $C^\infty-$*compatibles et dont les sources* U_i *recouvrent* X.

Les atlas (de classe C^∞ et de dimension n) sur X sont ordonnés par inclusion.

DÉFINITION 4.2. — *Soit* X *un espace topologique. Une structure de variété différentielle sur* X *de dimension* n *est la donnée d'un atlas de classe* C^∞ *et de dimension* n *qui soit maximal.*

On définit de même la notion d'atlas $\mathbb{C}-$analytique de dimension n, en demandant que les buts des cartes locales soient des ouverts d'espaces vectoriels complexes de dimension n, et que les changements de cartes soient $\mathbb{C}-$analytiques. Une variété $\mathbb{C}-$analytique de dimension n est la donnée d'un espace topologique X et d'un atlas $\mathbb{C}-$analytique maximal.

PROPOSITION 4.3. — *Soit* X *un espace topologique et* $\mathscr{A}$ *un atlas de classe* C^∞, *de dimension* n *sur* M. *Il existe un plus grand atlas contenant* $\mathscr{A}$ *: c'est l'ensemble des cartes locales sur* X *qui sont compatibles avec toutes les cartes locales de* $\mathscr{A}$.

Ainsi, tout atlas $\mathscr{A}$ de classe C^∞, de dimension n définit une structure de variété différentielle de classe C^∞. Deux tels atlas définissent la même structure de variété si ils sont contenus dans un même atlas.

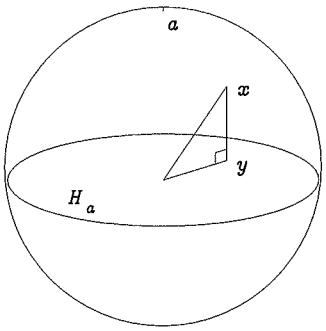
Si U est un ouvert de X, et $\mathscr{A} = \{\varphi_i\}_{i\in I}$ l'atlas maximal définissant la structure de variété sur X. Alors les restrictions $\varphi_i|_{U_i\cap U} : U_i\cap U \to \varphi_i(U_i \cap U)$ définissent un atlas maximal sur U. Ainsi, tout ouvert de X hérite d'une structure de variété différentielle.

Exemple 1 : La sphère S_n.

Considérons la sphère S(E) d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n+1$. Pour tout point $a \in S(E)$, on considère l'ouvert $U_a \subset S(E)$ des points x tels que $\langle x, a\rangle > 0$. Alors l'application $\varphi_a : x \mapsto x - \langle x, a\rangle$ est un homéomorphisme de U_a sur la boule ouverte $B(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1 dans l'hyperplan H_a

des vecteurs orthogonaux à a. L'inverse est donné par l'application $\mathrm{B}(0,1) \to \mathrm{U}_a$ définie par

$$y \mapsto y + \sqrt{1 - \| y \|^2} a$$



Remarquons que φ_a^{-1} est induite par une application de classe C^∞ : $\mathrm{B}(0,1) \to \mathrm{E}$. Pour $b \in \mathrm{S(E)}$, le changement de cartes $\varphi_{a,b}$, défini sur l'ouvert $\mathrm{U}'_{a,b}$ des vecteurs $y \in \mathrm{B}(0,1)$ tels que

$$\langle y + \sqrt{1 - \| y \|^2} a, b \rangle > 0$$

est alors de classe C^∞ comme composée d'applications de classe C^∞. Par suite, Puisque $\varphi_{b,a}$ est l'inverse de $\varphi_{a,b}$, ces cartes sont deux à deux compatibles. Donc, on obtient ainsi un atlas de classe C^∞ et de dimension n sur la sphère S(E). Cette structure de variété est souvent notée S_n.

Ainsi, la structure de variété différentielle sur la sphère S_2 peut être définie par un atlas contenant 6 cartes locales.

Exercice 4.1

Trouver, sur la sphère S_n un atlas à 2 éléments fournissant la même structure de variété différentielle que celle qu'on vient de définir.

Exemple 2 : Sous-variétés de l'espace affine.

Considérons une sous-variété M de dimension m, de classe C^∞, d'un espace vectoriel E de dimension n. Appelons carte locale de M un homémorphisme φ_i défini sur ouvert V_i de M à valeurs dans un ouvert V'_i d'un espace vectoriel F de dimension m et satisfaisant à la propriété suivante :

L'ouvert V_i *est la trace sur* M *d'un ouvert* U_i *de* E *sur lequel il existe un difféomorphisme* $\phi_i : \mathrm{U}_i \to \mathrm{U}'_i$ *de classe* C^∞, *sur un ouvert* U'_i *de* $\mathrm{F} \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ *tel que* $\phi_i|_{\mathrm{V}} = \varphi_i$.

Autrement dit, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_i & \hookrightarrow & U_i \\ {\scriptstyle \varphi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_i} \\ V_i' & \hookrightarrow & U_i' \end{array}$$

est commutatif. Les sources des cartes locales ainsi définies recouvrent M; de plus, elles sont deux à deux compatibles, car si φ_1 et φ_2 sont deux telles cartes locales, le changement de cartes locales $\varphi_2\varphi_1^{-1}$ est induit par l'application $\phi_2\phi_1^{-1}$, qui est de classe C^∞ sur un ouvert de $F \oplus \mathbb{R}^{n-m}$. On a donc obtenu sur M un atlas de classe C^∞ et de dimension m, qui définit donc une structure de variété de classe C^∞ et de dimension m sur M.

Exemple 3 : L'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

Considérons un espace vectoriel E de dimension $n+1$. L'ensemble des droites vectorielles de E s'appelle l'espace projectif réel de dimension n, et est noté $\mathbb{P}(E)$, ou $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Considérons maintenant une structure euclidienne sur E. Toute droite vectorielle rencontre la sphère en 2 points diamétralement opposés. Il en résulte qu'en tant qu'ensemble, l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est en bijection avec le quotient $S(E)/\{\pm 1\}$. Cet ensemble sera lui ausi équipé de la topologie quotient : une partie $V \subset \mathbb{P}(E)$ est ouverte si et seulement si son image réciproque dans S(E) par la projection canonique $S(E) \to \mathbb{P}(E)$ est un ouvert de S(E).

LEMME 4.4. — *La projection* $\pi : S(E) \to \mathbb{P}(E)$ *est ouverte.*

C'est en fait un cas particulier d'un phénomène tout à fait général :

Exercice 4.2

Soit X un espace topologique et G un groupe d'homéomorphismes de X. On munit l'espace des orbites X/G de la topologie quotient. Alors la projection $\pi : X \to X/G$ est ouverte. (Etudier le saturé d'un ouvert pour la relation d'équivalence définie par G.)

Exercice 4.3

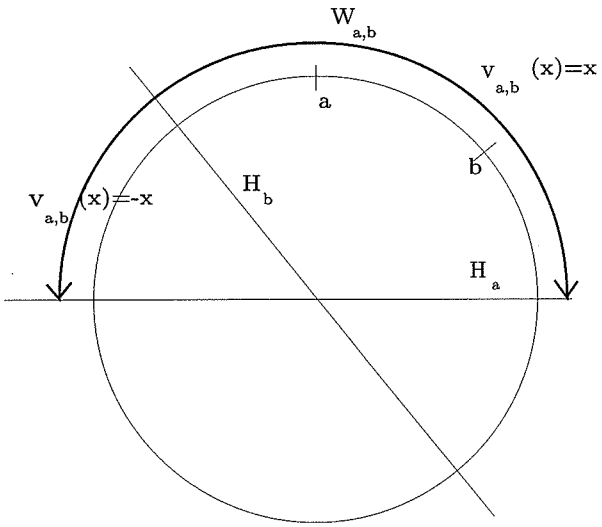
On désigne par $Y = X/G$ l'espace topologique quotient d'un espace topologique X par un groupe G d'homéomorphismes.

1) On consière l'action naturelle de G×G sur X×X. Montrer que le morphisme naturel (X × X/G × G → Y × Y, où le premier membre est équipé de la topologie quotient, est un homéomorphisme.

2) En déduire que si le graphe de la relation d'équivalence définie par G (c'est-à-dire l'image de G × X → X × X par l'application $(g, x) \mapsto (gx, x)$) est fermée dans X × X, l'espace topologique Y est séparé.

3) Utiliser ce résultat pour montrer que que $\mathbb{P}(E) = S(E)/\pm 1$ est un espace topologique séparé. Montrer qu'en fait, la topologie de $\mathbb{P}(E)$ est métrisable.

On garde les notations de l'exemple 1, et on considère l'atlas $\mathscr{A} = \{\varphi_a\}_{a \in S(E)}$ de S(E) introduit ci-dessus. L'application $u_a = \pi|_{U_a} : U_a \to \mathbb{P}(E)$ est un homéomorphisme de U_a sur un ouvert V_a de $\mathbb{P}(E)$. De plus, $v_{a,b} = u_b^{-1} u_a$ est de classe C^∞ sur l'ouvert $W_{a,b} = u_a^{-1}(V_b)$; cet ouvert est le complémentaire, dans U_a, de l'hyperplan H_b. Il a donc, si $a \neq \pm b$, 2 composantes connexes, séparées par l'hyperplan H_b. On a $v_{a,b}(x) = \pm x$ suivant que x appartient à l'une ou à l'autre des composantes connexes.



Considérons l'homéomorphisme $\phi_a = \varphi_a \circ u_a^{-1} : V_a \to B(0,1) \subset H_a$, qu'on prend pour carte locale. Le changement de cartes est défini sur un ouvert de B(0, 1) à deux composantes connexes ; il est donné par la formule

$$\phi_{a,b} = \phi_b \phi_a^{-1} = \varphi_b u_b^{-1} u_a \varphi_a^{-1}$$

et par suite, ce changement de cartes est de classe C^∞ : il coïncide avec le changement de cartes $\varphi_b \varphi_a^{-1}$ sur une des composantes connexes, et est égal à

$-\varphi_b\varphi_a$ sur l'autre. Puisque les cartes locales ainsi définies recouvrent $\mathbb{P}(E)$, on obtient ainsi un atlas de classe C^∞ et de dimension n sur l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$.

Exercice 4.4

On suppose que $\mathbb{P}(E)$ est équipé de la topologie quotient de $E\setminus\{0\}$ par l'action de $\mathbb{R}^{*\cdot}$ Montrer que ce quotient est séparé, et que l'application $S(E) \to \mathbb{P}(E)$ est fermée. En déduire que les deux topologies ainsi obtenues sur $\mathbb{P}(E)$ coïncident.

Exercice 4.5

Démontrer que la structure de variété obtenue sur $\mathbb{P}(E)$ est indépendante du choix de la métrique euclidienne.

Pour ceci, on va construire un atlas indépendamment de toute métrique. Pour toute forme linéaire non nulle λ sur E, on considère l'ouvert U_λ de $\mathbb{P}(E)$ défini par les classes $[x]$ telles que $\langle\lambda, x\rangle \neq 0$. Cet ouvert est homéomorphe au sous-espace affine A_λ de E défini par $\langle\lambda, x\rangle = 1$: un tel homéomorphisme est donné par $[x] \mapsto \dfrac{x}{\langle\lambda, x\rangle}$. On choisit un point $a \in A_\lambda$, et on désigne par H_λ le noyau de λ. On considère l'homéomorphisme $\varphi_{\lambda,a} : U_\lambda \to H_\lambda$ défini par

$$\varphi_{\lambda,a} : [x] \mapsto \frac{x}{\langle\lambda, x\rangle} - a.$$

Vérifier que ces homéomorphismes définissent un atlas sur $\mathbb{P}(E)$. Démontrer que la structure de variété ainsi construite est la même que celle qui a été construite en utilisant un produit scalaire sur E.

Exemple 4 : La droite projective complexe $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$.

Par droite projective complexe, on entend l'ensemble des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^2$. Cet ensemble est donc en bijection avec l'ensemble des orbites de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ pour l'action induite par la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$. On munit ce quotient $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}/\mathbb{C}^*$ de la topologie quotient ; on le note $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. La classe d'un point $(u, v) \in \mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ est notée $[u : v]$. Le point $[0, 1]$ est habituellement noté 0 ; le point $[1, 0]$ est habituellement noté ∞.

On va définir un atlas sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Le complémentaire dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ du point $\{\infty\}$ est un ouvert U_0 homéomorphe à $\mathbb{C}$; cet homéomorphisme est donné par $\varphi_0 : [u, v] \mapsto \dfrac{u}{v}$. De même, le complémentaire de $\{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}$, l'homéomorphisme étant donné par $[u, v] \mapsto \dfrac{v}{u}$. Ces deux cartes recouvrent $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$

et sont compatibles : le changement de cartes est l'application $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ définie par

$$z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Ainsi, ce changement de cartes est de classe C^∞. En fait, ce changement de cartes est en fait un difféomorphisme $\mathbb{C}-$analytique. On obtient ainsi une structure plus fine que celle de variété différentielle de classe C^∞ : c'est une variété $\mathbb{C}-$analytique de dimension 1.

On remarquera que la construction est identique à celle qui a été donnée dans l'exercice ci-dessus pour l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.6

Soient X et Y deux variétés. Montrer qu'il existe une structure naturelle de variété sur l'espace topologique produit $X \times Y$.

Exercice 4.7

Soit X une variété différentielle. Montrer que X est réunion dénombrable de compacts si et seulement si on peut définir sa structure de variété par un atlas dénombrable.

Exercice 4.8

Soit X une variété différentielle, définie par un atlas $\mathscr{A} = \{\varphi_i\}_{i \in I}$. On désigne par U_i la source de φ_i, par U'_i le but de φ_i, et par $U'_{i,j}$ l'ouvert $\varphi_i(U_{i,j})$. Montrer que X est séparée si et seulement si pour tout $(i,j) \in I \times I$, le graphe du changement de cartes

$$\varphi_{i,j} : U'_{i,j} \to U'_{j,i}$$

est fermé dans $U'_i \times U'_j$.

Exercice 4.9

Utiliser ce résultat pour montrer que $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est une variété séparée. Montrer que c'est une variété compacte.

4.2. Morphismes de variétés

Soient X et Y deux variétés différentielles de classe C^∞, de dimension n et m respectivement, équipées d'atlas maximaux $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. Soit $f : X \to Y$ une application continue. Etant données deux cartes locales $\varphi \in \mathscr{A}$ et $\psi \in \mathscr{B}$ de

sources respectives $U \subset X$ et $V \subset Y$, on appelle expression de f dans les cartes locales φ et ψ l'application définie par

$$fx \mapsto \psi f \varphi^{-1}(x)$$

sur l'ouvert $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$.

DÉFINITION 4.5. — *On dit que f est différentiable de classe C^∞ si on peut recouvrir X par des cartes locales (U_i, φ_i) et Y par des cartes locales (V_j, ψ_j) telles que l'expression de f dans les cartes φ_i et ψ_j soit différentiable de classe C^∞.*

On dira souvent seulement «f est différentiable» pour «différentiable de classe C^∞» ou «f est un morphisme de variétés» quand il n'y a pas de risque de confusion. Si f est différentiable, l'expression de f est alors différentiable de classe C^∞ pour tout carte (U, ϕ) de X et toute carte (V, ψ) de Y.

Composition des morphismes de variétés

Soient X, Y et Z trois variétés différentielles, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications différentiables de classe C^∞. Alors $g \circ f : X \to Z$ est différentiables de classe C^∞.

DÉFINITION 4.6. — *Soient X et Y deux variétés différentielles de classe C^∞. Un difféomorphisme $f : X \to Y$ de classe C^∞ est une application inversible telle que f et f^{-1} soient de classe C^∞.*

Exemple 1

Soit X une variété différentielle. Une carte locale $\varphi : U \to U' \subset E$ de source $U \subset X$ est un difféomorphisme de la variété U sur la variété U'. (Bien sûr ceci n'avait pas de sens au départ, quand X était seulement un espace topologique ; cela a maintenant un sens puisque U et U' sont des variétés différentielles.)

Exemple 2

Soit $M \subset E$ une sous-variété de classe C^∞ d'un espace vectoriel E.

PROPOSITION 4.7. —

(i) *L'inclusion $\iota : M \hookrightarrow E$ est de classe C^∞.*

(ii) *Une fonction* $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^∞ *si et seulement si pour chaque point* $x \in \mathrm{M}$ *on peut trouver un voisinage ouvert* U *de* x *dans* E *et une application* $\Phi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *telle que*

$$\Phi|_{\mathrm{M}\cap\mathrm{U}} = f|_{\mathrm{M}\cap\mathrm{U}}.$$

Démonstration. (i) Soit $a \in \mathrm{M}$ et $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}' \subset \mathrm{F}$ une carte locale de M définie sur $\mathrm{V} = \mathrm{M} \cap \mathrm{U}$, induite par un difféomorphisme $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}' \subset \mathrm{E}$ d'ouverts de l'espace ambiant E. Alors l'expression de ι dans les cartes φ de M et ϕ de E est l'inclusion $\mathrm{V}' \hookrightarrow \mathrm{U}'$ qui est évidemment de classe C^∞.

(ii) Soit $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ ; considérons au voisinage d'un point $a \in \mathrm{M}$ dans E un difféomorphisme $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ tel que $\phi(\mathrm{M} \cap \mathrm{U})$ soit la trace sur U' d'un sous-espace vectoriel $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$; soit $\varphi = \phi|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{M}}$ la carte locale de M associée. Alors $g = f \circ \phi^{-1}$ est de classe C^∞ sur $\mathrm{U}' \cap \mathrm{F}$. Considérons la projection $\pi : \mathrm{U}' \to \mathrm{F}$ associée au choix d'un supplémentaire de F dans E. Au voisinage de $a' = \varphi(a)$ l'application $g \circ \pi$ est de classe C^∞ et prolonge g. Par suite, l'application de classe C^∞ définie par $\Phi = g \circ \pi \circ \phi$ sur un voisinage ouvert convenable W de a dans E, est de classe C^∞ ; de plus, $\Phi|_{\mathrm{W}\cap\mathrm{M}}$ et f coïncident au voisinage de a dans M.

Réciproquement, supposons qu'il existe, sur un voisinage ouvert de a dans E une application $\Phi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\Phi|_{\mathrm{M}\cap\mathrm{U}} = f|_{\mathrm{M}\cap\mathrm{U}}.$$

Cette égalité signifie que $f|_{\mathrm{M}\cap\mathrm{U}}$ est la composée de l'inclusion $\mathrm{M} \cap \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, qui est de classe C^∞ d'après (i) et de Φ qui est aussi de classe C^∞. Donc f est de classe C^∞. □

Exemple 3

Soit E un espace vectoriel euclidien. Considérons la projection canonique $\pi : \mathrm{S}(\mathrm{E}) \to \mathbb{P}(\mathrm{E})$. Cette projection π est de classe C^∞. En effet, avec les notations déjà employées, l'expression de π dans les cartes φ_a de S(E) et ϕ_a de $\mathbb{P}(\mathrm{E})$ est l'identité de la boule $\mathrm{B}(0,1)$ de l'hyperplan H_a.

Exercice 4.10

Montrer que la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ est difféomorphe à la sphère S_2.

Exercice 4.11

La cubique de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^3 - x + y^2 = 0$ a deux composantes connexes, dont l'une est difféomorphe au cercle S_1, et l'autre à $\mathbb{R}$.

Exercice 4.12

Le tore de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$(\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 + z^2 = 1$$

est difféomorphe à $S_1 \times S_1$.

Exercice 4.13

La droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est difféomorphe au cercle S_1.

Exercice 4.14

La droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est difféomorphe à la sphère S_2. La sphère S_2 étant considérée comme sous-variété de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ définie par les couples (z,t) satisfaisant à l'équation $|z|^2 + t^2 = 1$, l'application $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \to S_2$ définie par

$$[u,v] \mapsto (z = \frac{2u\overline{v}}{|u|^2+|v|^2}, t = \frac{|v|^2-|u|^2}{|u|^2+|v|^2})$$

est un difféomorphisme.

Pour cette raison, la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est souvent appelée sphère de Riemann.

4.3. Recollement de variétés

Soit X un ensemble. On se donne des parties U_i de X qui recouvrent X et des bijections $\phi_i : U_i \to Y_i$ sur des variétés Y_i de dimension n. Pour tout couple (i,j) on note $U_{i,j}$ l'intersection $U_i \cap U_j$, et par $Y_{i,j}$ l'image $\phi_i(U_{i,j})$.

THÉORÈME 4.8. — *On suppose que*

(1) *les parties* $Y_{i,j}$ *sont des ouverts de* Y_i;

(2) *pour tout (i,j), l'application* $\phi_{i,j} : Y_{i,j} \to Y_{i,j}$ *est un difféomorphisme de classe* C^∞.

Il existe sur X *une structure de variété de dimension n et une seule telle que*

— *les* U_i *soient des ouverts de* X

— *les applications* $\phi_i : U_i \to Y_i$ *soient des difféomorphismes.*

On dit que la variété X ainsi obtenue est le recollement des variétés Y_i suivant les difféomorphismes $\phi_{i,j}$.

Démonstration.
Commençons par construire la topologie de X.

LEMME 4.9. — *Il existe une et une seule topologie sur* X, *telle que les* U_i *soient des ouverts de* X *et les* ϕ_i *des homéomorphismes.*

Démonstration. Unicité :
S'il existe une topologie sur X satisfaisant aux conditions du lemme, une partie V de X est ouverte si et seulement si pour tout $i \in I$ l'image $\phi(V \cap U_i)$ est un ouvert de Y_i. D'où l'unicité.
Existence :
Par transport, la bijection ϕ_i permet d'obtenir une structure d'espace topologique sur U_i : une partie $V \subset U_i$ est ouverte si et seulement si $\phi_i(V)$ est un ouvert de U_i. Ainsi, $U_{i,j}$ est ouvert dans U_i et U_j, et donc les topologies induites par U_i et U_j sur $U_{i,j}$ coïncident. On obtient une topologie sur X telle que U_i soit ouvert dans X, en prenant comme ouverts de X les parties $W \subset X$ telles que pour tout i l'intersection $W \cap U_i$ soit ouverte dans U_i. Les applications $\phi_i : U_i \to Y_i$ sont alors des homéomorphismes. □

La même méthode permet d'obtenir sur l'ouvert U_i une structure de variété telle que l' application $\phi_i : U_i \to Y_i$ soient des difféomorphismes : les cartes locales sont construites à partir des cartes locales $f : W \to W'$ de Y_i comme applications composées $f\phi_i$, définies sur l'ouvert $\phi_i^{-1}(W)$. Les structures de variété induites par U_i et par U_j coïncident sur les intersections $U_{i,j}$: en effet, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_{i,j} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & U_{j,i} \\ {\scriptstyle \phi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_j} \\ Y_{i,j} & \xrightarrow{\phi_{i,j}} & Y_{j,i} \end{array}$$

montre que l'identité $\mathrm{id} : U_{i,j} \to U_{i,j}$ est un difféomorphisme quand on munit la source de la structure induite par U_i et le but de la structure induite par U_j. Ceci signifie que les cartes locales de U_i et celles de U_j sont compatibles entre elles. On obtient donc un atlas sur X qui définit la structure de variété attendue. □

Ainsi, l'ensemble des bijections $(\phi_i)_{i\in \mathrm{I}}$ joue le même rôle qu'un atlas. Bien entendu, il n'y aucune raison qu'on obtienne de la sorte une variété séparée.

Exercice 4.15

Montrer que la variété X construite par recollement des Y_i est séparée si et seulement si les Y_i sont des variétés séparées, et si le graphe des difféomorphismes

$$\phi_{i,j} : \mathrm{Y}_{i,j} \to \mathrm{Y}_{j,i}$$

est fermé dans $\mathrm{Y}_i \times \mathrm{Y}_j$.

Exercice 4.16

Montrer que si I est dénombrable et si pour tout i la variété Y_i est réunion dénombrable de compacts, la variété X est réunion dénombrable de compacts.

Exercice 4.17

On considère le quotient $\mathrm{X} = \mathbb{R} \times \{0,1\}/\mathrm{R}$ par la plus fine des relations d'équivalence R qui identifient $(x,0)$ avec $(x,1)$ chaque fois que $x \neq 0$, et on note $[x,t]$ la classe d'équivalence de (x,t). On considère les injections

$$\psi_i : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{X}$$

définies par $\psi_i(x) = [x,i]$, dont on désigne par U_i les images. Montrer que les bijections $\phi_i = \psi_i^{-1}$ satisfont aux hypothèses du théorème. Montrer que la structure de variété ainsi obtenue n'est pas séparée.

Exercice 4.18

On considère le quotient $\mathrm{X} = \mathbb{R} \times \{0,1\}/\mathrm{R}$ par la plus fine des relations d'équivalence qui identifient $(x,0)$ avec $(\frac{1}{x},1)$ chaque fois que $x \neq 0$, et on procède comme ci-dessus. Montrer que la variété X est alors une variété compacte de dimension 1 difféomorphe au cercle S_1.

Quotient d'une variété par un groupe de difféomorphismes

Soit X un espace topologique localement compact, et G un groupe d'homéomorphismes. Ce groupe sera muni de la topologie discrète. L'application graphe

$$\sigma : \mathrm{X} \times \mathrm{G} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$$

définie par $(x,g) \mapsto (x,gx)$ est alors continue.

DÉFINITION 4.10. — *On dit que l'action de* G *sur* X *est propre si l'application graphe* $\sigma : X \times G \to X \times X$ *définie par*

$$(x, g) \mapsto (x, gx)$$

est propre.

PROPOSITION 4.11. — *L'action de* G *sur* X *et propre si et seulement si pour tout compact* $K \subset X$ *l'ensemble des* $g \in G$ *tels que* $K \cap g(K) \neq \emptyset$ *est fini.*

Démonstration. Montrons que si pour tout compact $K \subset X$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $K \cap g(K) \neq \emptyset$ est fini, l'application σ est propre. Il suffit de vérifier que l'image réciproque d'un compact L de $X \times X$ par σ est compacte. Il suffit évidemment de le faire pour un compact de la forme $L = K \times K$, où K est un compact de X. Mais alors $\sigma^{-1}(L)$ est l'ensemble des couples $(x, g) \in X \times G$ tels que $x \in K$, et $gx \in K$. Ainsi, l'hypothèse entraîne que $\sigma^{-1}(L)$ est contenu dans $K \times F$, où F est un ensemble fini. Donc c'est un compact.

Réciproquement, supposons que l'action de G sur X soit propre. Soit K un compact de X. Soit p_2 la projection canonique $X \times G \to G$. L'ensemble des points $g \in G$ tels que $K \cap g^{-1}(K) \neq \emptyset$ n'est autre que $p_2(\sigma^{-1}(K \times K))$ et par conséquent c'est l'image d'un compact par une application continue. C'est donc un compact de G, donc un ensemble fini. □

COROLLAIRE 4.12. — *Si* G *est un groupe fini d'homéomorphismes de* X, *l'action de* G *sur* X *est propre.*

PROPOSITION 4.13. — *On suppose que* X *est localement compact. Soit* G *un groupe de difféomorphismes de* X. *On suppose que l'action de* G *sur* X *est propre. Alors l'espace topologique quotient* $Y = X/G$ *est séparé.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que la diagonale de $Y \times Y$ est fermée. D'après l'exercice 4.3, ceci est équivalent au fait que l'image réciproque dans $X \times X$ est un fermé. Mais cette image réciproque est exactement l'image de σ. Puisque σ est propre, son image est fermée. □

DÉFINITION 4.14. — *On dit que l'action de* G *sur* X *est libre si le stabilisateur de chaque point est réduit à l'identité.*

THÉORÈME 4.15. — *Soit* X *une variété séparée, et* G *un groupe discret de difféomorphismes agissant proprement et librement sur* X. *Alors il existe sur* X/G *une structure de variété et une seule telle que*

(i) *la projection* $X \to X/G$ *est de classe* C^∞;

(ii) *Pour toute variété* Y *et toute application* $f : X \to Y$ *de classe* C^∞ *constante sur les orbites se factorise de manière unique suivant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \searrow^{f} & \\ X/G & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

où g *est de classe* C^∞.

On a déjà vu que l'espace topologique X/G est séparé. La propriété universelle énoncée en (ii) caractérise la structure de variété ainsi obtenue sur X/G.

Démonstration. L'hypothèse signifie que l'application graphe $\sigma : X \times G \to X \times X$ est un homéomorphisme sur un sous-espace R fermé de $X \times X$. L'image de l'ouvert $X \times \{id_X\}$ est un ouvert de R. En particulier, si $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de X tel que $R \cap (V \times V)$ soit contenu dans $\sigma(X \times id_X)$. Ceci signifie que les orbites de G rencontrent V en au plus un point.

Ainsi, on peut recouvrir X par des ouverts V_i tels que la restriction de la projection canonique $\pi : V_i \to X/G$ soit injective, et donc un homéomorphisme sur un ouvert U_i de X/G. Soit $\phi_i : U_i \to V_i$ l'homéomorphisme inverse. L'ouvert $V_{i,j} = \phi_i(U_{i,j})$ est l'ensemble des points $x \in V_i$ tels que $\pi(x)$ peut s'écrire $\pi(y)$, avec $y \in V_j$. Montrons que sur cet ouvert, l'application $\phi_{i,j}$ définie par $x \mapsto \phi_j \phi_i^{-1}(x)$ est de classe C^∞. Soit $x \in V_{i,j}$. On a $\pi(x) = \pi(y)$, avec $y = V_j$ et alors $y = \phi_{i,j}(x)$. Il existe $g \in G$ tel que $y = g(x)$, et alors, au voisinage de x, on a

$$\phi_{i,j}(x') = g(x')$$

Par suite, $\phi_{i,j}$ est de classe C^∞ au voisinage de x. (Remarquons que l'ouvert $U_{i,j}$ n'est pas forcément connexe, et que g peut changer en changeant de composantes, comme on l'a vu dans l'exemple du quotient de la sphère S_n par $\{\pm 1\}$.) On peut maintenant appliquer le théorème de recollement pour obtenir une structure de variété sur X/G. Pour cette structure, les applications $\pi : V_i \to U_i$ sont des difféomorphismes, et par suite π est de classe C^∞. Supposons maintenant que $f : X \to Y$ soit une application différentiable de classe C^∞ constante sur les

orbites, c'est-à-dire que f s'écrit de manière unique $f = g \circ \pi$, où $g : X/G \to Y$ est une application. Ceci entraine $f\phi_i = g|_{U_i}$ et par conséquent l'application g ainsi obtenue obtenue est de classe C^∞. □

Exercice 4.19

On considère l'involution de $S_1 \times \mathbb{R}$ définie par $(x,t) \to (-x,-t)$. Montrer que l'action de $\mathbb{Z}_2$ sur $S_1 \times \mathbb{R}$ ainsi définie est propre et libre.

La structure de variété obtenue sur $M = (S_1 \times \mathbb{R})/\{\pm 1\}$ s'appelle la bande de Moebius.

Exercice 4.20

On considère le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agissant sur le demi-plan de Poincaré P défini par les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire > 0 de la manière suivante : si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

On désigne par Γ le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ des matrices g telles que $g \equiv 1 \bmod 2$. Montrer que le groupe $\Gamma/\{\pm 1\}$ opère proprement et librement sur P. Le quotient P/Γ est une variété $\mathbb{C}-$analytique de dimension 1.

Exercice 4.21

On considère l'involution de $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \to -(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; on désigne par M l'espace topologique quotient.

(1) Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$ induit un homéomorphisme $\mathbb{R}^2/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{R}^2$.

(2) En déduire qu'il existe sur M une structure naturelle de variété de classe C^∞ telle que la projection $\pi : \mathbb{R}^2 \to M$ soit de classe C^∞, mais que cette structure de variété ne satisfait pas à la propriété universelle des quotients.

(3) Montrer que M est en fait une variété $\mathbb{C}-$analytique de dimension un $\mathbb{C}-$difféomorphe à $\mathbb{C}$, et que la projection $\pi : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to M$ satisfait à la proprité universelle des quotients dans la catégorie des variétés $\mathbb{C}-$analytiques.

Exercice 4.22

On considère l'espace topologique quotient M de $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ par l'involution $z \mapsto \overline{z}$. Montrer qu'il n'existe pas de structure de variété sur M, même seulement topologique.

4.4. Partitions de l'unité

Soit X une variété séparée et réunion dénombrable de compacts. Etant donné une fonction continue $\mu : X \to \mathbb{R}$ on appelle support de μ la fermeture de l'ouvert des points de X où elle est non nulle.

THÉORÈME 4.16. — *Soit $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de* X. *Il existe des fonctions $\mu_i : X \to [0, \infty[$ de classe C^∞ satisfaisant aux propriétés suivantes*

(i) *le support de μ_i est contenu dans U_i;*

(ii) *la famille des supports des fonctions μ_i est localement finie ;*

(iii) *on a $\sum_{i\in I} \mu_i = 1$*

La propriété (ii) signifie qu'étant donnée un compact $K \subset X$, il n'existe qu'un nombre fini d'indices i tels que le support de μ_i rencontre K. En particulier, étant donné $x \in X$, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans la famille $\mu_i(x)$ ce qui donne un sens au membre de gauche dans la somme figurant dans (iii).

DÉFINITION 4.17. — *Une famille de fonctions μ_i satisfaisant aux conditions* (i), (ii) *et* (iii) *s'appelle une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathscr{U}$.*

La démonstration de la proposition 4.16 demande plusieurs étapes.

LEMME 4.18. — *Etant donné un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$, il existe un recouvrement ouvert $\mathscr{V} = (V_j)_{j\in J}$ de* X *plus fin que $\mathscr{U}$ et localement fini.*

On dit que X est paracompact.

Démonstration. Pour toute partie $K \subset X$ on désigne par K° l'intérieur de K. Puisque X est localement compact et réunion dénombrable de compacts, on peut trouver une suite de compacts K_n tels que $K_n \subset K_{n+1}^\circ$, qui recouvrent X. On peut recouvrir le compact $K_{n+1} \setminus K_n^\circ$ par un nombre fini d'ouverts $(V_j)_{j\in J_n}$ satisfaisant aux conditions suivantes

— tout ouvert V_j est contenu dans un des ouverts U_i;

— l'ouvert V_j ne rencontre pas le compact K_{n-1}.

Soit $J = \cup_n J_n$. La famille d'ouverts V_j ainsi obtenue constitue un recouvrement ouvert localement fini de X.

Construction de la partition de l'unité :

On peut bien sûr supposer qu'il existe une carte $\phi_j : W_j \to B(0,2) \subset E$ prenant ses valeurs dans la boule de centre 1 et de rayon 2, dans un espace vectoriel euclidien E de dimension n, telle que $V_j = \phi_j^{-1}(B(0,1))$. On considère la fonction $\mu : B(0,1) \to [0,1[$ définie par

$$\mu(x) = \exp(-\frac{1}{1- \| x \|^2})$$

et on pose

$$\lambda_j = \begin{cases} \mu \circ \phi_j \text{ sur } V_j \\ \\ 0 \text{ en dehors de } V_j \end{cases}$$

Cette fonction est de classe C^∞ sur X, et > 0 sur V_j.

On considère une fonction $\alpha : J \to I$ telles que $V_j \subset U_{\alpha(j)}$ pour tout $j \in J$. La somme $\lambda = \sum_{j \in J} \lambda_j$ définit une fonction de classe C^∞, partout > 0 puisque tout point a un voisinage sur lequel toutes les fonctions λ_j, sauf un nombre fini, s'annulent.

Posons, pour $i \in I$

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j, \alpha(j)=i} \lambda_j$$

Exercice 4.23

Vérifier que la famille des supports des μ_i est localement finie.

On a bien sûr $\sum_{i \in I} \mu_i(x) = 1$. On a donc obtenu une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$. Ceci achève la construction. □

Exercice 4.24

Soit M une sous-variété fermée de classe C^∞ d'un ouvert U d'un espace vectoriel. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Alors il existe une fonction $F = M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $F|_M = f$.

Pour établir ce résultat, choisir un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ de U tel qu'il existe une fonction $F_i : U_i \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ qui prolonge $f|_{M \cap U_i}$. Soit μ_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\mathscr{U}$. Alors la fonction

$$F = \sum_{i \in I} \mu_i F_i$$

a un sens ; c'est une fonction de classe C^∞ sur U qui prolonge f.

4.5. Espace tangent en un point

Alors que la définition de l'espace vectoriel tangent est évidente pour les sous-variétés d'un espace vectoriel E, il est plus délicat de définir la notion de vecteur tangent pour les variétés abstraites.

Soit X une variété, définie par un atlas maximal $\mathscr{A}$, et a un point de X. On considère l'ensemble $\mathscr{C}_a(\mathrm{X})$ des chemins $\alpha : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ définis sur un intervalle ouvert I contenant 0, dérivables en 0, et tels que $\alpha(0) = a$. On dit que deux tels chemins α et β sont tangents en 0 s'il existe une carte locale φ dont la source contient a, et telle que $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \beta)'(0)$.

Exercice 4.25

Vérifier que si α et β sont tangentes en 0, la propriété ci-dessus est vraie pour toute autre carte locale ψ dont la source contient a.

Exercice 4.26

Sur l'ensemble $\mathscr{C}_a(\mathrm{X})$ la relation R définie par $\alpha \mathrm{R} \beta$ si α et β sont tangentes en 0 est une relation d'équivalence.

DÉFINITION 4.19. — *On appelle vecteur tangent en a une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence ainsi définie.*

On désigne par $\mathrm{T}_a\mathrm{X}$ l'ensemble des vecteurs tangents à X au point a. Si φ est une carte locale dont la source contient a, et dont le but est un ouvert U′ d'un espace vectoriel E, l'application $\varphi_* : \mathrm{T}_a\mathrm{X} \to \mathrm{E}$ qui associe à la classe de $\alpha \in \mathscr{C}_a(\mathrm{X})$ la dérivée $(\varphi \circ \alpha)'(0)$ est une bijection. On transporte la structure d'espace vectoriel de E à l'aide de cette bijection.

Exercice 4.27

Vérifier que la structure d'espace vectoriel ainsi obtenue sur $\mathrm{T}_a\mathrm{X}$ est indépendante du choix de la carte φ.

Soient X et Y deux variétés différentielles, et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés. Soit $a \in \mathrm{X}$, et $b = f(a)$. Alors f induit une application

$$\mathscr{C}_a(f) : \mathscr{C}_a(\mathrm{X}) \to \mathscr{C}_b(\mathrm{Y})$$

définie par $\alpha \mapsto \beta = f \circ \alpha$.

PROPOSITION 4.20. — *L'application $\mathscr{C}_a f$ est compatible avec la relation d'équivalence* R, *et l'application induite :* $\mathrm{T}_a f : \mathrm{T}_a \mathrm{X} \to \mathrm{T}_b \mathrm{Y}$ *est linéaire.*

Démonstration. Si φ et ψ sont des cartes locales de X et Y dont la source contient a et b respectivement, prenant leurs valeurs dans des ouverts d'espaces vectoriels E et F respectivement, et g l'expression locale de f dans ces cartes, on a $\beta = g(\varphi \circ \alpha)$ au voisinage de 0, de sorte que

$$(\psi \circ \beta)'(0) = d_{\varphi(a)} g((\varphi \circ \alpha)'(0))$$

Il en résulte que l'application $\mathscr{C}_a(f)$ est compatible avec la relation d'équivalence et donc induit une application $\mathrm{T}_a f : \mathrm{T}_a \mathrm{X} \to \mathrm{T}_b \mathrm{Y}$. D'autre part, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_a \mathrm{X} & \overset{\mathrm{T}_a f}{\longrightarrow} & \mathrm{T}_b \mathrm{Y} \\ {\scriptstyle \varphi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} \\ \mathrm{E} & \overset{d_{\varphi(a)}}{\longrightarrow} & \mathrm{F} \end{array}$$

est commutatif. Par défintion de la structure d'espace vectoriel sur $\mathrm{T}_a \mathrm{X}$ et $\mathrm{T}_b \mathrm{Y}$ les bijections verticales sont linéaires. Donc $\mathrm{T}_a f$ est linéaire. □

DÉFINITION 4.21. — *L'application linéaire* $\mathrm{T}_a f : \mathrm{T}_a \mathrm{X} \to \mathrm{T}_b \mathrm{Y}$ *s'appelle application tangente à f en a.*

Exemple

Soit M une sous-variété d'un espace vectoriel E. L'application $\mathscr{C}_a(\mathrm{M}) \to \mathrm{T}_a \mathrm{M}$ définie par $\alpha \to \alpha'(0)$ passe au quotient et permet d'identifier canoniquement l'espace vectoriel $\mathscr{C}_a(\mathrm{M})/\mathrm{R}$ qu'on vient de définir avec l'espace tangent $\mathrm{T}_a \mathrm{M}$ défini dans la section 3.2. On retrouve donc l'ancienne définition.

Exemple

Soit φ une carte pour X au voisinage de a. On a vu que φ est différentiable ; l'application linéaire φ_* n'est autre que l'application linéaire tangente $\mathrm{T}_a \varphi$ à φ au point a.

Propriétés

1) Soient X, Y et Z trois variétés, a un point de X ; on considère des applications différentiables $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ et on pose $b = f(a)$. Alors

$$\mathrm{T}_a(g \circ f) = \mathrm{T}_b g \circ \mathrm{T}_a f$$

2) Soient $f : X \to Y$ un difféomorphisme, a un point de X et $b = f(a)$. Alors $T_a f$ est inversible, et $T_b(f^{-1}) = (T_a f)^{-1}$.

3) Pour une fonction différentiable $f : X \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ l'application linéaire tangente $T_a f : T_a X \to \mathbb{R}$ est plutôt notée $d_a f$, et appelée différentielle de f au point a. Les fonctions différentiables sur X constituent une algèbre $C^\infty(X)$; on a les règles habituelles de dérivation

— l'application $C^\infty(X) \to T_a^*(X)$ définie par $f \mapsto d_a f$ est linéaire ;

— formule de Leibniz : si f et $g \in C^\infty(X)$, on a dans l'espace des formes linéaires sur $T_a X$

$$d_a(fg) = f(a)d_a g + g(a)d_a f$$

PROPOSITION 4.22. — *Soit $f : X \to Y$ une application différentiable dont l'application linéaire tangente est inversible en un point a. Alors il existe un voisinage ouvert U de a tel que $f(U)$ soit ouvert dans Y et que l'application induite $f : U \to f(U)$ soit un difféomorphisme.*

Démonstration. Soient φ et ψ des cartes locales de X et Y au voisinage de a et $f(a)$ respectivement. Alors l'expression locale g de f dans les cartes φ et ψ a sa différentielle inversible en $f(a)$. On peut lui appliquer le théorème d'inversion locale : puisque les cartes φ et ψ sont des difféomorphismes, il en résulte l'énoncé. □

Applications étales et revêtements

DÉFINITION 4.23. — *Soient X et Y deux variétés. Une application différentiable $f : X \to Y$ est étale si son application linéaire tangente est inversible en tout point.*

DÉFINITION 4.24. — *Soient $X \to Y$ deux variétés. Une application différentiable $f : X \to Y$ est un revêtement si f est surjective et si pour tout point y de Y on peut trouver un voisinage ouvert V, une variété D de dimension 0, et un difféomorphisme $V \times D \simeq f^{-1}(V)$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \longrightarrow & f^{-1}(V) \\ & {\scriptstyle pr_1}\searrow & \downarrow f \\ & & V \end{array}$$

Dans ce diagramme pr_1 désigne la première projection. Cet énoncé signifie que l'ouvert $f^{-1}(\mathrm{V})$ est réunion disjointes d'ouverts U_i tels que l'application induite $f|_{\mathrm{U}_i} : \mathrm{U}_i \to \mathrm{V}$ soit un difféomorphisme. Si Y est connexe, le nombre de points dans la fibre $f^{-1}(y)$ est constant : si ce nombre est fini, on dit que le revêtement est fini ; ce nombre s'appelle le degré du revêtement.

Exercice 4.28

Soit G un groupe discret opérant proprement et librement sur une variété X. Alors la projection $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{G}$ est un revêtement.

Exemples

— L'application $\mathbb{R} \to \mathrm{S}_1$ définie par $t \mapsto e^{it}$ est un revêtement.

— La projection canonique $\pi : \mathrm{S}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un revêtement de degré 2.

PROPOSITION 4.25. — *Soit* X *et* Y *des variétés séparées, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application étale et propre. On suppose que* Y *est connexe. Alors* f *est un revêtement fini.*

Démonstration. Vérifions d'abord que f est surjective : en effet son image est ouverte et fermée, donc par connexité, c'est Y. La fibre $f^{-1}(b)$ au-dessus d'un point b est un espace topologique discret et compact, donc fini. Pour tout $a \in f^{-1}(b)$, il existe un ouvert U_a tel que $f|_{\mathrm{U}_a}$ soit un difféomorphisme sur un ouvert $f(\mathrm{U}_a)$ de Y ; la propriété de séparation de X permet de supposer que les ouverts U_a sont disjoints, quitte au besoin à les diminuer. Considérons alors le fermé $f(\mathrm{X} \setminus \cup_a \mathrm{U}_a)$. Ce fermé ne contient pas b. Soit V un voisinage ouvert de b qui ne le rencontre pas. Alors

$$f^{-1}(\mathrm{V}) \subset \cup_a \mathrm{U}_a$$

Posons $\mathrm{W}_a = \mathrm{U}_a \cap f^{-1}(\mathrm{V})$. Alors les ouverts W_a recouvrent $f^{-1}(\mathrm{V})$ et sont disjoints ; si, de plus, on choisit V contenu dans l'ouvert $\cap_{a \in f^{-1}(b)} f(\mathrm{U}_a)$, l'application f induit un difféomorphisme $\mathrm{W}_a \to \mathrm{V}$ ce qui achève la démonstration. □

Exercice 4.29

L'application $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ définie par $z \mapsto z^n$ est un revêtement fini de degré n.

Exercice 4.30

Si f est un polynôme à coefficients complexes, de degré $n \geq 2$, et Z le fermé des zéros du polynôme dérivé f'.

1) L'application induite $f : \mathbb{C} \setminus Z \to \mathbb{C}$ est étale, mais ce n'est pas un revêtement.

2) Soit V complémentaire de $f(Z)$ et $U = f^{-1}(V)$. L'application induite $f : U \to V$ est un revêtement de degré n.

4.6. Sous-variétés d'une variété donnée

Toutes les variétés considérées dans la suite seront supposées séparées et réunion dénombrables de compacts. L'objet de cette section est d'étendre les résultats de la section 3. La définition d'une sous-variété est analogue à celle de sous-variété d'un espace vectoriel.

DÉFINITION 4.26. — *Soit* X *une variété de classe* C^∞ *et de dimension* n. *Une partie* Y *de* X *est une sous-variété de* X *de classe* C^∞ *et de dimension* m *si pour tout point* $a \in Y$ *il existe une carte locale* φ *de* X *à valeurs dans un ouvert* U′ *d'un espace vectoriel* E *dont la source* U *contient* a *et telle que* $\varphi(M \cap U)$ *soit une sous-variété de* E *de dimension* m.

Evidemment, quitte au besoin à composer à nouveau par une carte locale de E, on peut en fait supposer que $\varphi(M \cap U)$ est la trace sur U′ d'un sous-espace vectoriel F de dimension m de E. On emploie souvent une terminologie un peu différente. Un système de n fonctions réelles $(u_1, \ldots, u_n)$ définies sur un ouvert U de X est appelé système de coordonnées sur U si l'application $u = (u_1, \ldots, u_n) : U \to \mathbb{R}^n$ est une carte locale de X. Dire qu'une partie $Y \subset X$ est une sous-variété de X signifie donc qu'il existe au voisinage U de tout point $y \in Y$ un système de coordonnées $(u_1, \ldots, u_n)$ telles que $U \cap Y$ soit l'ensemble des points x de U satisfaisant aux équations

$$u_{m+1}(x) = \ldots = u_n(x) = 0.$$

Etant donnée une sous-variété Y de dimension m de X, on lui associe de façon naturelle une structure de variété. En effet, considérons les cartes locales φ_i définies sur un ouvert U_i de X, à valeurs dans un ouvert U′ d'un esapce vectoriel E, et telles que $\varphi_i(Y \cap U_i)$ soit une sous-variété Z_i de E. Considérons les homéomorphismes $\psi_i : U_i \cap Y \to Z_i$ restrictions des φ_i. Alors les conditions (1) et (2) du théorème

4.8 sont satisfaites. Il existe donc une structure de variété et une seule sur Y, dont la topologie sous-jacente est la topologie induite, telle que les ψ_i soient des difféomorphismes.

Exercice 4.31

Si Y est une sous-variété d'une variété X, l'inclusion $\iota : Y \to X$ est différentiable, et l'application linéaire tangente $T_a\iota : T_aY \to T_aX$ est une application linéaire injective qui nous permet d'identifier T_aY à un sous-espace vectoriel de X.

Si Y est une sous-variété d'une variété X, l'espace vectoriel quotient $N_{Y/X,a} = T_aX/T_aY$ s'appelle l'espace normal à Y au point a. Lorsque T_aX est équipé d'une métrique euclidienne, il est canoniquement isomorphe à l'orthogonal de T_aY dans T_aX. Ceci arrive par exemple quand X est une sous-variété d'un espace vectoriel euclidien E.

Rang d'un morphisme

DÉFINITION 4.27. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés de classe C^∞. On appelle rang de f en $a \in X$, et on note $\mathrm{rg}_a(f)$ le rang de l'application linéaire tangente T_af.*

La fonction $a \mapsto \mathrm{rg}_a(f)$ est semi-continue inférieurement. Ceci résulte du fait que le rang est localement le rang de l'expression de f dans des cartes locales de X et Y.

L'énoncé suivant est l'analogue du théorème 3.6.

THÉORÈME 4.28. — *Soit X et Y deux variétés, et $f : X \to Y$ une application différentiable. On suppose que le rang de f est constant. Alors la fibre $X_b = f^{-1}(b)$ de f au-dessus d'un point $b \in Y$ est une sous-variété de X, dont l'espace tangent en un point a est donné par $T_aX_b = \ker T_af$.*

Démonstration. On considère une carte locale φ de X dont la source U contient $a \in X_b$, une carte locale ψ de Y dont la source V contient b, telles que $f(U) \subset V$. On sait que le rang de l'expression locale $g : U' \to V'$ de f dans ces cartes locales est constant. Donc la fibre de g au-dessus de $b' = \psi(b)$ est une sous-variété de U' d'après le théorème 3.6. Mais on a $\varphi(X_b \cap U) = U' \cap (g^{-1}(b'))$ ce qui montre que

X_b est une sous-variété de X. D'autre part, par l'isomorphisme $T_a\varphi$, l'image de $\ker T_a f$ est $\ker d_{\varphi(a)}(g^{-1}(b'))$. Donc l'espace tangent $T_a X_b$ s'identifie à $\ker T_a f$. □

DÉFINITION 4.29. — *Un morphisme de variétés $f : X \to Y$ est une submersion si son application linéaire tangente est surjective en tout point de* X.

L'énoncé ci-dessus s'applique en particulier aux submersions ; il existe toutefois une version qui est souvent utile, avec des hypothèses plus faibles : il suffit, pour vérifier la fibre $X_b = f^{-1}(b)$ est une sous-variété de X, de vérifier que f n'a pas de point critique le long de X_b :

DÉFINITION 4.30. — *On dit qu'un point a est un point critique pour f si* $\mathrm{rg}_a(f) < \dim Y$. *Une valeur critique est l'image d'un point critique.*

COROLLAIRE 4.31. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés et $b \in Y$ un point qui n'est pas valeur critique de f. Alors la fibre X_b est une sous-variété de* X.

Le théorème de Sard affirme que l'ensemble A des valeurs critiques est de mesure nulle, ce qui signifie qu'on peut le recouvrir par des cartes (φ, U) telles que $\varphi(A \cap U)$ soit de mesure nulle. Ceci implique que A n'a pas de point intérieur.

Exercice 4.32

Soient $(a_i)_{=0,\ldots,n}$ une suite de réels > 0. On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ équipé de sa métrique euclidienne canonique, l'ellipsoïde M d'équation $\sum_{i=0}^{n} a_i x_i^2 = 1$. Déterminer les points critiques et les valeurs critiques de la fonction $M \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \| x \|^2$.

Application aux actions de groupes de Lie

DÉFINITION 4.32. — *Un groupe de Lie* G *est un groupe muni d'une structure de variété telle que la multiplication* $G \times G \to G$ *définie par* $(x, y) \to xy$ *soit de classe* C^∞.

Exercice 4.33

Soit G un groupe de Lie, d'élément neutre e.

1) Les translations $x \to xy$ et $y \mapsto xy$ sont des difféomorphismes de G.

2) Démontrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un difféomorphisme de G. (Appliquer au voisinage de (e, e) le théorème des fonctions implicites pour l'équation $xy = e$, où y est l'inconnue.)

DÉFINITION 4.33. — *Une action d'un groupe de Lie* G *sur une variété* X *est la donnée d'un morphisme de variétés* $G \times X \to X$ *noté* $(g,x) \mapsto gx$ *qui soit ensemblistement une action du groupe* G *sur* X.

Exercice 4.34

Soit X une variété, munie d'une action d'un groupe de Lie G. Soit $x \in X$.

1) L'application $G \to X$ définie par $g \mapsto gx$ est de rang constant.

2) Le stabilisateur de x, est un sous-groupe de Lie de G (c'est-à-dire que c'est à la fois un sous-groupe et une sous-variété de G.)

3) Retrouver, en appliquant ce résultat, le fait que le groupe orthogonal O(E) d'un espace vectoriel euclidien E est un sous-groupe de Lie de GL(E).

DÉFINITION 4.34. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de variétés, et* Z *une sous-variété de* Y. *On dit que* f *est transverse à* Z *en un point* a *si ou bien* $f(a) \notin Z$, *ou bien* $f(a) \in Z$ *et l'application linéaire composée*

$$T_aX \to T_aY \to N_{Z/Y,a}$$

est surjective, autrement dit $T_aY = \operatorname{Im} T_af + T_aZ$. *Si cette propriété est vraie pour tout* $a \in X$, *on dit que* f *est transverse à* Z.

COROLLAIRE 4.35. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de variétés, transverse à une sous-variété* $Z \subset Y$. *Alors l'image réciproque* $f^{-1}(Z)$ *est une sous-variété de* X; *son espace tangent en un point* a *est l'image réciproque de* $T_{f(a)}Z$ *par l'application linéaire tangente* T_af.

Démonstration. Soit $a \in X$ tel que $f(a) \in Z$. Soit r la codimension de Z. Il résulte de la définition d'une sous-variété que l'on peut trouver une application $g : V \to \mathbb{R}^r$ de classe C^∞ de rang r au voisinage V de $f(a)$ telle que $g^{-1}(0) = Z \cap V$. Dans l'ouvert $f^{-1}(V)$, le fermé $f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(V)$ est donc l'image réciproque de 0 par l'application composée $g \circ f$; cette application est de rang r le long de ce fermé. Autrement dit, 0 n'est pas valeur critique de $g \circ f$. Donc $f^{-1}(Z)$ est une sous-variété, dont l'espace tangent est l'espace vectoriel $\ker T_a(g \circ f)$: c'est exactement l'image réciproque de $T_{f(a)}Z$ par l'application linéaire tangente T_af. □

Exercice 4.35

Soient Y et Z deux sous-variétés d'une variété X ; on suppose que pour tout $a \in \mathrm{Y} \cap \mathrm{Z}$ on a

$$\mathrm{T}_a\mathrm{Y} + \mathrm{T}_a\mathrm{Z} = \mathrm{T}_a\mathrm{X}.$$

Alors $\mathrm{Y} \cap \mathrm{Z}$ est une sous-variété de X dont l'espace tangent en un point a est l'intersection $\mathrm{T}_a\mathrm{Y} \cap \mathrm{T}_a\mathrm{Z}$.

Exercice 4.36

Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ un difféomorphisme d'une variété compacte. On suppose que pour tout point fixe a de f, 1 n'est pas valeur propre de $\mathrm{T}_a f$. Montrer que l'application $\mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ définie par $x \mapsto (x, f(x))$ est transverse à la diagonale de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. En déduire que f n'a qu'un nombre fini de points fixes.

THÉORÈME 4.36. — *Soit* X *et* Y *deux variétés, et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application différentiable. On suppose que le rang de* f *est constant, et que* f *est ouverte sur son image. Alors l'image* $\mathrm{Im}\, f$ *est une sous-variété de* Y, *dont l'espace tangent en un point* $f(a)$ *est donné par* $\mathrm{T}_a\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, \mathrm{T}_a f$.

Démonstration. Cet énoncé se démontre comme le théorème 3.9, en remarquant l'expression g de f dans des cartes locales φ de X, de source U et ψ de Y de source V satisfait aux hypothèses de ce théorème. L'application f étant ouverte sur son image, on peut supposer que $f(\mathrm{U}) = \mathrm{V} \cap f(\mathrm{X})$: on voit alors que $\psi(\mathrm{V} \cap f(\mathrm{X}))$, qui n'est autre que $g(\varphi(\mathrm{U}))$ est une sous-variété du but de ψ. L'assertion concernant l'espace tangent résulte du fait que si on pose $b = f(a)$ et $a' = \varphi(a)$, on a

$$\mathrm{T}_b\psi(\mathrm{Im}\, \mathrm{T}_a f) = \mathrm{Im}\, d_{a'} g.$$

□

DÉFINITION 4.37. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés. On dit que* f *est une immersion si l'application linéaire tangente est injective en tout point.*

DÉFINITION 4.38. — *On dit qu'un morphisme* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *est un plongement si* $f(\mathrm{X})$ *est une sous-variété de* Y *et si* $f : \mathrm{X} \to f(\mathrm{X})$ *est un difféomorphisme de variétés.*

Ainsi, vérifier que f soit un plongement, revient à vérifier que f est un homéomorphisme sur son image, et que f est une immersion.

Exercice 4.37

Soit $f : S_2 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie par

$$(x, y, z) \to \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

est une immersion dont l'image est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ difféomorphe au plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4.38

1) Soit G un groupe de Lie compact opérant sur une variété X. Démontrer que les orbites de G sont des sous-variétés de X.

2) Vérifier que ce résultat n'est plus vrai si le groupe G n'est plus compact. On pourra considérer l'action de $\mathbb{R}$ dans l'action sur $X = S_1 \times S_1$ définie par

$$(t, (u, v)) \mapsto (e^{it}u, e^{i\alpha t}v)$$

et montrer que α n'est pas rationnel, les orbites sont partout denses.

Exercice 4.39

1) Soient Y une sous-variété d'une variété X, et Z une sous-variété de Y. Montrer que Z est une sous-variété de X.

2) Soient Y et Z deux sous-variétés d'une variété X, telles que $Y \subset Z$. Démontrer que X est une sous-variété de Y.

Exercice 4.40

Soient E un espace vectoriel de dimension $m + 1$, et $f : E \to \mathbb{R}$ un polynôme homogène de degré n.

1) Vérifier que $nf(x) = d_x f.x$.

2) On suppose que la différentielle $d_x f$ est non nulle en tout point $x \neq 0$. Soit V l'hypersurface de $E \setminus \{0\}$ définie par l'équation $f = 0$. On se propose de montrer que l'image W de V par la projection $\pi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(E)$ est une sous-variété de codimension 1 de $\mathbb{P}(E)$.

On considère pour ceci une métrique euclidienne sur E. Montrer que $\Sigma = V \cap S(E)$ est une sous-variété compacte de codimension 2 de E. Vérifier que son image dans $\mathbb{P}(E)$ par l'application naturelle $S(E) \to \mathbb{P}(E)$ est W, et que

l'application induite : $\Sigma \to \mathrm{W}$ est une ouverte. En déduire que W est une sous-variété de $\mathbb{P}(\mathrm{E})$ de codimension 1.

Ces sous-variétés de $\mathbb{P}(\mathrm{E})$ s'appellent hypersurfaces algébriques de degré n. Pour $n = 1$, les hypersurfaces ainsi obtenues s'appellent des hyperplans projectifs ; elles sont difféomorphes à $\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R})$. Pour $n = 2$, il s'agit des hyperquadriques : la condition sur la différentielle signifie que la forme quadratique f est non dégénérée. Elles sont non vides si la signature est différente de $(m+1, 0)$ ou $(0, m+1)$.

Exercice 4.41

Si $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on désigne par $[v]$ sa classe dans le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. On considère le plongement $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ défini par $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$. L'image de $\mathbb{R}^2$ est le complémentaire d'une droite projective, dite droite de l'infini.

1) L'adhérence de l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$ est la conique définie par l'équation homogène $\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 - \mathrm{T}^2 = 0$. Cette conique est difféomorphe au cercle S_1.

2) L'adhérence $\overline{\mathrm{C}}$ de la cubique d'équation $y^2 = x(x^2 - 1)$ dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ a 2 composantes connexes, chacune difféomorphe au cercle S_1.

On verra en fait au chapitre suivant que toute variété connexe de dimension 1 est difféomorphe au cercle S_1 si elle est compacte, et à $\mathbb{R}$ si elle n'est pas compacte.

Exercice 4.42

Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Soient $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ des polynômes homogènes tels que les différentielles $d_x\mathrm{P}_i$ soient indépendantes pour tout point $x \in \mathrm{E}$ non nul.

1) Vérifier que les équations $\mathrm{P}_1 = \ldots = \mathrm{P}_m = 0$ définissent une sous-variété X de codimension m de $\mathbb{P}(\mathrm{E})$.

2) Pour tout point $p \in \mathrm{X}$, on écrit $p = [a]$. Soit λ une forme linéaire sur E telle que $\langle \lambda, a \rangle = 1$, et H_λ le noyau de λ. Montrer que $\mathrm{T}_p\mathrm{X}$ s'identifie au sous-espace vectoriel de E défini par les vecteurs $v \in \mathrm{H}_\lambda$ satisfaisant aux équations

$$d_a\mathrm{P}_1(v) = 0, \ldots, d_a\mathrm{P}_m(v) = 0.$$

3) On suppose choisie une forme linéaire λ comme dans la question 2, de sorte que l'espace tangent $\mathrm{T}_p\mathrm{X}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de E. Soit $\mathrm{Tan}_p\mathrm{X}$

le sous-espace projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{E})$ défini par les équations

$$d_a \mathrm{P}_1 = 0, \ldots, d_a \mathrm{P}_m = 0.$$

Montrer que l'application $\mathrm{T}_p\mathrm{X} \to \mathrm{Tan}_p\mathrm{X}$ définie par $v \mapsto [a + v]$ est une injection qui identifie l'espace vectoriel tangent $\mathrm{T}_p\mathrm{X}$ au complémentaire de l'hyperplan $\mathbb{P}(\mathrm{T}_p\mathrm{X})$ dans $\mathrm{Tan}_p\mathrm{X}$. Montrer que cette inclusion dépend du choix de λ.

Chapitre 2

Champs de vecteurs

Les champs de vecteurs sur une variété M et les équations différentielles qui leur sont associées fournissent, au moins dans le cas des champs de vecteurs complets, une famille à un paramètre de difféomorphismes : cette famille est définie par une application $\mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ de classe C^∞ qui peut être vue comme une action du groupe additif $\mathbb{R}$ sur M. Cette famille permet d'interpréter géométriquement le crochet de deux champs de vecteurs, introduit ici à partir de la dérivée de Lie ; elle conduit à la généralisation à tous les groupes de Lie de l'application exponentielle, et à la démonstration du théorème de trivialité locale des submersions propres, dû à Ereshman ; cet énoncé généralise le théorème 4.25 qui affirme qu'un morphisme étale et propre est un revêtement.

Toutes les variétés considérées sont de classe C^∞, afin d'éviter les pertes de différentiabilité ; elles sont supposées séparées et réunions dénombrables de compacts. Les morphismes de variétés seront de classe C^∞.

5. Fibré tangent

5.1. Fibré tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

On considère une sous-variété $\mathrm{M} \subset \mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ de dimension m d'un espace vectoriel E de dimension n. On désigne par $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ l'ensemble des couples $(x, t) \in \mathrm{M} \times \mathrm{E}$, tels que $t \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$, et par $\pi : \mathrm{T}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ la projection $(x, t) \mapsto x$. Enfin, pour tout ouvert U de M, on pose souvent

$$\mathrm{TM}|_\mathrm{U} = \pi^{-1}(\mathrm{U}).$$

PROPOSITION 5.1. —

(i) *L'ensemble* $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ *est une sous-variété de* $\mathrm{M} \times \mathrm{E}$.

(ii) *Pour tout point* $x \in \mathrm{M}$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x *dans* M *et un difféomorphisme* $\varphi : \pi^{-1}(\mathrm{U}) \simeq \mathrm{U} \times \mathbb{R}^m$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathrm{U}) & \simeq & \mathrm{U} \times \mathbb{R}^m \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ & & \mathrm{U} \end{array}$$

où pr_1 *désigne la première projection.*

La variété TM ainsi définie, munie de la projection π, s'appelle le fibré tangent à M. La fibre de la projection π au-dessus du point $a \in \mathrm{M}$ s'identifie à l'espace vectoriel tangent $\mathrm{T}_a\mathrm{M}$.

Démonstration. La question est locale. Soit $a \in \mathrm{M}$. On peut trouver une submersion $f : \mathrm{V} \to \mathrm{F}$, définie sur un voisinage ouvert V de a dans E et à valeurs dans $\mathrm{F} = \mathbb{R}^{n-m}$ telle que $\mathrm{M} \cap \mathrm{V}$ soit définie dans V par l'équation $f = 0$ à valeurs dans F. Alors $\mathrm{TM} \cap (\mathrm{V} \times \mathrm{E})$ est défini dans l'ouvert $\mathrm{V} \times \mathrm{E}$ de $\mathrm{M} \times \mathrm{E}$ par les couples (x, t) satisfaisant aux équations

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ d_x f(t) = 0 \end{cases}$$

Il suffit donc de vérifier que l'application $\phi : \mathrm{V} \times \mathrm{E} \to \mathrm{F} \times \mathrm{F}$ définie par $(x, t) \mapsto (f(x), d_x f(t))$ est une submersion. Mais la différentielle de ϕ en (x, t) est l'application linéaire $\mathrm{E} \oplus \mathrm{E} \to \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}$ définie dans ces sommes directes par la matrice

$$\begin{pmatrix} d_x f & 0 \\ d_x^2 f(t, -) & d_x f \end{pmatrix}$$

Ainsi, ϕ est une submersion. Par suite, TM est une sous-variété de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, contenue dans $\mathrm{M} \times \mathrm{E}$. Il résulte de l'exercice 4.39 que c'est une sous-variété de $\mathrm{M} \times \mathrm{E}$. Ceci démontre l'assertion (i).

Considérons maintenant une carte locale $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}' \subset \mathbb{R}^m$ pour la variété M. L'application $\theta : \mathrm{TM}|_{\mathrm{U}} \mapsto \mathrm{U} \times \mathbb{R}^m$ définie par

$$(x, t) \mapsto (x, \mathrm{T}_x\varphi(t))$$

est de classe C^∞ car φ est induite par un difféomorphisme ψ d'un ouvert V de E à valeurs dans un ouvert de E, et cette application θ est induite par $\mathrm{U} \times \mathrm{E} \to \mathrm{U} \times \mathrm{E}$

définie par $(x,t) \mapsto (x, d_x\psi(t))$ qui est évidemment de classe C^∞. L'application θ est inversible : son inverse est donné par

$$(x,u) \mapsto (x, (T_x\varphi)^{-1}(u)$$

et induite par l'application de C^∞ sur $V \times E$ définie par $(x,u) \mapsto (u, (d_x\varphi)^{-1}(u))$; elle est donc de classe C^∞. Par suite θ est un difféomorphisme. □

5.2. Fibré tangent à une variété abstraite.

Soit maintenant M une variété quelconque de dimension m. On considère la réunion (disjointe) des espaces tangents : il s'agit donc de l'ensemble TM des couples (x,t), où $x \in M$, et $t \in T_xM$. Cet ensemble est encore muni de la projection $\pi : TM \to M$ définie par $(x,t) \mapsto x$: la fibre au-dessus du point x s'identifie à l'espace vectoriel tangent T_xM. Si U est un ouvert de M, on note souvent $TM|_U$ l'image réciproque de U par la projection π.

On se propose de munir comme ci-dessus cet ensemble TM d'une structure naturelle de variété. Pour ceci, on considère pour toute carte locale φ_i de M de source U_i prenant ses valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^m$, l'application

$$\varphi_{i,*} : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^m$$

définie par $(x,t) \mapsto (x, T_x\varphi(t))$. Cette application est bijective, et linéaire sur chaque fibre.

PROPOSITION 5.2. — *Il existe une structure de variété et une seule sur* TM *satisfaisant aux conditions suivantes*

(i) *la projection* $\pi : TM \to M$ *est de classe* C^∞

(ii) *les bijections* $\varphi_{i,*}$ *sont des difféomorphismes. Cette variété est séparée et réunion dénombrable de compacts.*

Démonstration. Existence :

On va construire cette variété en utilisant le théorème de recollement 4.8. Considérons une deuxième carte locale φ_j pour M et désignons par $\varphi_{i,j}$ le changement de cartes. L'application $\varphi_{j,*}(\varphi_{i,*})^{-1} : U_{i,j} \times \mathbb{R}^m \to U_{i,j} \times \mathbb{R}^m$ est définie sur un ouvert de $U_i \times \mathbb{R}^m$; elle est est donnée par $(x,t) \mapsto (x, d_{\varphi_i(x)}(\varphi_{i,j})(t))$ et par suite, c'est un difféomorphisme de classe C^∞. Il existe donc une structure

de variété pour laquelle les $\pi^{-1}(U_i)$ sont des ouverts, et les bijections φ_i des difféomorphismes. Evidemment, il résulte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \simeq & U_i \times \mathbb{R}^m \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ & & U \end{array}$$

que la projection π est de classe C^∞.

Unicité :

Pour toute structure de variété satisfaisant aux conditions (i) et (ii) de l'énoncé, la projection π est en particulier continue, et les parties $\pi^{-1}(U_i)$ sont donc des ouverts de TM. Donc d'après le théorème 4.8 il n'y a qu'une structure de variété satisfaisant aux conditions (i) et (ii).

Vérifions la séparation. Soient (x,t) et (x',t') deux points distincts de TM. Si $x \neq x'$ on peut séparer les points x et x' par des ouverts disjoints U et U', et les ouverts $\pi^{-1}(U)$ et $\pi^{-1}(U')$ sont alors des voisnages ouverts disjooints de (x,t) et (x',t') respectivement. Si $x = x'$, alors $t \neq t'$. Si (U,φ) est une carte locale dont la source U contient x, l'ouvert $\pi^{-1}(U)$ est homéomorphe à $U \times \mathbb{R}^m$ donc séparé. On peut donc séparer les point (x,t) et (x,t') par deux ouverts disjoints.

Vérifions enfin que TM est réunion dénombrable de compacts, ou ce qui revient au même que l'on peut recouvrir TM par un ensemble dénombrable de cartes locales. Mais c'est le cas pour M : on peut définir M par un ensemble dénombrable de cartes locales $(U_i,\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Alors TM est la réunion des ouverts $\pi^{-1}(U_i)$, dont chacun est réunion dénombrable de compacts. Il en est de même de TM.

5.3. Fibrés vectoriels

Il s'agit de donner un sens à la notion de famille d'espaces vectoriels.

DÉFINITION 5.3. — *Soit* M *une variété. Une fibration vectorielle (réelle) au-dessus de* M *est la donnée d'une variété* E, *d'un morphisme surjectif de variétés* $\pi : E \to M$ *et pour chaque* $x \in M$ *d'une structure d'espace vectoriel réel sur la fibre* $\pi^{-1}(x)$.

La variété M s'appelle la base de la fibration ; la variété E s'appelle l'espace total de la fibration. La fibre $\pi^{-1}(x)$ au-dessus du point x sera notée E_x. Pour tout ouvert $U \subset M$ la projection $\pi^{-1}(U) \to U$ est encore une fibration vectorielle,

souvent notée $E|_U$. Le plus simple exemple de fibration est la fibration triviale $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^r \to M$.

DÉFINITION 5.4. — *Soient* $E \to M$ *et* $F \to M$ *deux fibrations vectorielles de même base* M. *Un morphisme de variétés* $f : E \to F$ *est un morphisme de fibrations vectorielles si*

(i) *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \pi\searrow & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

est commutatif, (ce qui signifie que l'image de la fibre E_x *au-dessus du point* x *est contenue dans la fibre* F_x*)*

(ii) *L'application* $f_x : E_x \to F_x$ *induite par* f *est linéaire.*

Un tel morphisme f de fibrations est un isomorphisme si f est inversible, et si f^{-1} est encore de classe C^∞.

DÉFINITION 5.5. — *Une fibration* $\pi : E \to M$ *est un fibré vectoriel de rang* r *si la condition suivante est satisfaite :*

Pour tout point $a \in M$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* x, *et un isomorphisme de fibrations au-dessus de* U :

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^r \\ & \pi\searrow & \downarrow \mathrm{pr}_1 \\ & & U \end{array}$$

Un tel isomorphisme φ s'appelle une trivialisation locale pour le fibré $E \to M$.

L'exemple le plus simple de fibré vectoriel de rang r est le produit $M \times \mathbb{R}^r$, muni de la projection $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^r \to M$. C'est ce qu'on appelle le fibré trivial de rang r sur M; il sera souvent noté $\mathbb{R}^r_M$. Un isomorphisme de fibrés vectoriels est un isomorphisme des fibrations sous-jacentes.

Exercice 5.1

Soient $E = M \times \mathbb{R}^r$ et $F = M \times \mathbb{R}^s$ deux fibrés vectoriels triviaux M et $f : E \to F$ un morphisme de fibré vectoriels. Montrer qu'un tel morphisme est de

la forme

$$(x,t) \mapsto (x, g(x)t)$$

où $g : \mathrm{M} \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s)$ est une application de classe C^∞. En déduire que le morphisme f est un isomorphisme si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application linéaire $g(x)$ est inversible.

Il résulte de cet exercice que si $\varphi_i : \mathrm{E}|_{\mathrm{U}_i} \to \mathrm{U}_i \times \mathbb{R}^r$ et $\varphi_j : \mathrm{E}|_{\mathrm{U}_j} \to \mathrm{U}_j \times \mathbb{R}^r$ sont deux trivialisations pour le fibré vectoriel $\mathrm{E} \to \mathrm{M}$, l'application $\varphi_{i,j} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$, définie sur $\mathrm{U}_{i,j} \times \mathbb{R}^r$ est de la forme $(x,t) \mapsto (x, g_{i,j}(x)t)$, où $g_{i,j} : \mathrm{U}_{i,j} \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ est une application de classe C^∞. Les fonctions matricielles $g_{i,j}$ s'appellent des *fonctions de transition* pour le fibré E.

Exercice 5.2
Un morphisme bijectif de fibrés vectoriels est un isomorphisme.

PROPOSITION 5.6. — *Un morphisme $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ de fibrés vectoriels sur* M *qui est un un isomorphisme au-dessus d'un point $a \in \mathrm{M}$ est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage* U *de ce point.*

Démonstration. Ceci se voit en écrivant l'expression locale $(x,t) \mapsto (x, g(x)t$ de f dans des trivialisations de E et F au voisinage de a. L'hypothèse signifie que $g(a)$ est inversible ; le fait que $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ est un ouvert dans l'espace vectoriel $\mathrm{End}(\mathbb{R}^r)$ montre que $g(x)$ est inversible au-dessus d'un voisinage ouvert de a, ce qui permet de construire au-dessus de ce voisinage un inverse pour f. □

Exemples de fibrés vectoriels
Par construction, le fibré tangent $\mathrm{TM} \to \mathrm{M}$ à une variété M de dimension n est un fibré vectoriel de rang n.

Exercice 5.3
La bande de Moebius $\mathrm{E} = \mathrm{S}_1 \times \mathbb{R}/\{\pm 1\}$ est un fibré vectoriel sur $\mathrm{S}_1/\{\pm 1\} \simeq \mathrm{S}_1$.

Exercice 5.4
Soit G un groupe discret agissant librement et proprement sur une variété X; on désigne par $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\mathrm{G}$ la variété quotient. Soit $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ une

représentation linéaire de G. On considère l'action de G sur $X \times \mathbb{R}^r$ définie par $(g,(x,t)) \mapsto (gx, \gamma(g)t)$

1) Montrer que cette action est encore propre et libre. Soit E_ρ la variété quotient, et $\pi : E_\rho \to Y$ le morphisme obtenu par passage au quotient.

2) Trouver une structure naturelle d'espace vectoriel sur les fibres de $\pi : E \to Y$ et montrer que $\pi : E \to Y$ est un fibré vectoriel.

Exercice 5.5

Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ des droites d'un espace vectoriel V de dimension $n+1$. Soit $H \subset \mathbb{P}(V) \times V$ l'ensemble des couples (h,v) tels que $v \in V$.

1) Vérifier que H est une sous-variété de $\mathbb{P}(V) \times V$.

2) Montrer que le projection $\pi : H \to \mathbb{P}(V)$ est un fibré vectoriel de rang 1.

Ce fibré vectoriel s'appelle le fibré de Hopf.

Exercice 5.6

Soit M une sous-variété de dimension m d'un espace vectoriel euclidien de dimension n. Montrer que l'ensemble N des couples $(x,t) \in M \times E$ tels que t soit orthogonal à T_xM est une sous-variété de $M \times E$, et que la projection $\mathrm{pr}_1 : N \to M$ définie par $(x,t) \mapsto x$ fait de N un fibré vectoriel de rang $r = n - m$ sur M. Ce fibré vectoriel s'appelle le fibré normal à M.

Fibrés associés à un fibré donné.

Nous prendrons l'exemple du fibré dual. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel de rang r. Il s'agit de construire un fibré E^* dont la fibre au-dessus d'un point x est l'espace vectoriel dual E_x^*. On considère donc l'ensemble E^* des couples (x,u), avec $u \in E_x^*$, muni de la projection $\pi : E^* \to M$ définie par $(x,u) \mapsto x$.

Soit V un espace vectoriel de dimension r. Considérons une trivialisation locale de E

$$\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V$$

au-dessus d'un ouvert U_i; désignons par $\varphi_{i,x}$ la restriction de φ à la fibre E_x pour $x \in U_i$. Considérons la bijection $\psi_i : E^*|_{U_i} \to U_i \times V^*$ définie par $(x,u) \mapsto (x, {}^t\varphi_{i,x}^{-1}(u))$ pour $u \in E_x$. Ces bijections sont évidemment compatibles avec la projection sur M et linéaires sur chaque fibre.

PROPOSITION 5.7. — *Il existe une et une seule structure de variété sur* E^* *telle que la projection* π *soit de classe* C^∞ *et que les bijections* ψ_i *soient des difféomorphismes.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 4.8. Considérons une autre trivialisation φ_j, et la bijection ψ_j associée. Soit $g_{i,j} : \mathrm{U}_{i,j} \to \mathrm{GL(V)}$ les fonctions de transitions associées. Alors l'application $\mathrm{U}_{i,j} \times \mathrm{V}^* \to \mathrm{U}_{i,j} \times \mathrm{V}^*$ définie par

$$\psi_{i,j} = \psi_j \psi_i^{-1}$$

s'écrit

$$(x, u) \to (x, {}^t g_{i,j}(x)^{-1}(u)$$

et par conséquent, c'est un difféomorphisme. On obtient donc une structure de variété sur E^*, qui satisfait aux conditions de l'énoncé, et c'est la seule qui satisfait à ces conditions. Les difféomorphismes φ_i sont alors des isomorphismes de fibrations, et donc on a une structure de fibré vectoriel sur le dual de E. □

Exercice 5.7

Soit $\mathrm{Quad}(\mathrm{E}_x)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E_x. Montrer que $\mathrm{Quad(E)} = \coprod_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{Quad}(\mathrm{E}_x)$ peut être muni d'une structure naturelle de fibré vectoriel au-dessus de M.

Exercice 5.8

Soient $\mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $\mathrm{F} \to \mathrm{M}$ deux fibrés vectoriels sur la même base M. Montrer que

$$\mathrm{E} \oplus \mathrm{F} = \coprod_{x \in \mathrm{M}} (\mathrm{E}_x \oplus \mathrm{F}_x)$$

$$\mathrm{L(E, F)} = \coprod_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{L}(\mathrm{E}_x, \mathrm{F}_x)$$

peuvent être munis d'une structure naturelle de fibré vectoriel au-dessus de M.

Sous-fibrés vectoriels

DÉFINITION 5.8. — *Soit* $\mathrm{E} \mapsto \mathrm{M}$ *un fibré vectoriel. Considéons une sous-variété* $\mathrm{F} \hookrightarrow \mathrm{E}$ *munie de la projection* $\pi|_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \to \mathrm{M}$. *On dit que* $\mathrm{F} \to \mathrm{M}$ *est un sous-fibré vectoriel de rang* m *de* E *si*

(i) *chaque fibre* F_a *est un sous-espace vectoriel de dimension* m *de* E_a;

(ii) *la fibration vectorielle* $\pi|_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \to \mathrm{M}$ *est localement triviale.*

Un sous-fibré vectoriel est en particulier un fibré vectoriel. Le fibré de Hopf H, sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ est un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel trivial $\mathbb{P}(V) \times V$. Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, le fibré tangent $TM \to M$ est un sous-fibré du fibré trivial $M \times \mathbb{R}^n$.

Un autre exemple est fourni par la proposition suivante, souvent utile :

PROPOSITION 5.9. — *Soit* $f : E \to F$ *un morphisme surjectif de fibrés vectoriels, et* $\ker f$ *l'ensemble des vecteurs* $e \in E$ *tels que* $f(e) = 0$. *Alors* $\ker f$ *est un sous-fibré vectoriel de* E.

Démonstration. La question est locale sur M. On peut donc supposer que E est le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^r$. Soit $a \in E$. Considérons le noyau $V = \ker f_a = \{e \in \mathbb{R}^r, f_a(t) = 0\}$, et un sous-espace vectoriel W supplémentaire de V. Dans la somme directe

$$E|_U = V_U \oplus W_U$$

le morphisme f s'écrit $f = (g\ h)$, et le morphisme $h : W_U \to F$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels au voisinage U' de a. Alors le noyau $\ker f$ est donné au-dessus de U' par les triplets $(x, (u, v)) \in U' \times (V \oplus W)$ tels que $v = -h^{-1}g(u)$. Alors l'application $U' \times V \to E|_{U'}$ définie par $(x, u) \to (x, (u, -h^{-1}g(u))$ est un plongement dont l'image $\ker f|_{U'}$ est une sous-variété ; de plus le difféomorphisme $U' \times V \to \ker f|_{U'}$ ainsi obtenu est compatible avec la projection sur U' et linéaire sur chaque fibre ; ainsi, ceci fournit une trivialisation locale de la fibration vectorielle $\ker f|_{U'}$. Il en résulte que $\ker f$ est un sous-fibré vectoriel de E. □

Exercice 5.9

Soit $f : E \to F$ un morphisme de fibrés vectoriels. On suppose que le rang de f_x est constant. Démontrer que $\ker f = \{e \in E, f(e) = 0\}$ est un sous-fibré vectoriel de E.

Sections d'un fibré vectoriel

DÉFINITION 5.10. — *Soit* $\pi : E \to M$ *un fibré vectoriel de rang* r *sur* M. *On appelle section de* E *un morphisme de variétés* $s : M \to E$ *tel que* $\pi s = \mathrm{id}_M$.

L'ensemble $\Gamma(E)$ de toutes les sections de E est muni d'une structure de $C^\infty(M)-$module en posant pour s et $t \in \Gamma(E)$ et $f \in C^\infty(M)$

$$(s+t)(x) = s(x) + t(x) \ ; \ fs(x) = f(x)s(x)$$

Si E le fibré trivial $\mathbb{R}^r_M$, le module des sections s'identifie au module libre $C^\infty(M)^r$. Si $\varphi : E \to F$ est un morphisme de fibré vectoriels sur M, on en déduit un morphisme de $C^\infty(M)-$modules qui associe à une section s la section $\varphi(s)$ définie par $x \mapsto \varphi(s(x))$.

Exercice 5.10

Soient E et F deux fibrés vectoriels au-dessus de M. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Hom}(E,F)$ des morphismes de fibrés vectoriels $E \to F$ peut être muni d'une structure naturelle de module sur $C^\infty(M)$, et que l'application ci-dessus fournit un isomorphisme de $C^\infty(M)-$modules

$$\mathrm{Hom}(E,F) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(E),\Gamma(F))$$

Exercice 5.11

Montrer que le fibré normal $N \to S(E)$ à la sphère S(E) d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n+1$ est un fibré trivial de rang 1.

Exercice 5.12

Soient G un groupe discret agissant proprement et librement sur une variété X, et Y la variété quotient X/G. Le groupe G opère sur l'algèbre $C^\infty(X)$, et l'algèbre des fonctions invariantes est $C^\infty(Y)$. Soit E_ρ le fibré vectoriel sur Y associé (*cf.* exercice 5.4) à une représentation linéaire $\rho : G \to GL(r,\mathbb{R})$ de G. Montrer que $\Gamma(E_\rho)$ est isomorphe au $C^\infty(Y)-$module des morphismes $X \to \mathbb{R}^r$ satisfaisant à la condition suivante, pour tout $x \in X$:

$$s(g(x)) = \rho(g)(s(x))$$

Exercice 5.13

Montrer que la bande de Moebius $M = S_1 \times \mathbb{R}/\{\pm 1\} \to S_1$ définit un fibré vectoriel de rang 1 qui n'est pas trivial.

Exercice 5.14

Soit G un groupe de Lie. Montrer que le fibré tangent à G est un fibré trivial. En déduire que le fibré tangent à S_1 et à S_3 est un fibré trivial.

Exercice 5.15

Le but de l'exercice est de montrer que le fibré tangent de la sphère S_7 est trivial. La méthode est semblable à celle de l'exercice précédent, et consiste à identifier la sphère S_7 avec l'ensemble des octaves de Cayley de norme 1, bien que ce ne soit pas un groupe.

Soit W un espace vectoriel complexe hermitien de dimension 2. On désigne pour $u \in \mathrm{End(W)}$ par u^* l'adjointe de u. On considère l'ensemble des endomorphismes $u : \mathrm{W} \to \mathrm{W}$ satisfaisant à la condition

$$uu* = \det u \, \mathrm{id_W}$$

1. Montrer que la matrice de u une base orthonormale est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

où a et $b \in \mathbb{C}$. En déduire que H en une sous-algèbre réelle (non commutative) de dimension 4 de l'algèbre des endomorphismes de W, invariante par la conjugaison $u \mapsto u^*$. Vérifier que tout élément non nul de H est inversible. On munit H de la métrique euclidienne définie par $|u|^2 = \det u = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(uu^*)$. Le produit scalaire associé est donc $\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re\,tr}\,(uv^*)$.

L'algèbre H s'appelle l'algèbre des quaternions. On note 1 l'élément unité $\mathrm{id_W}$.

2. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{K} = \mathrm{H}^2$, équipé de la métrique euclidienne $|z|^2 = |x|^2 + |y|^2$ pour $z = (x, y) \in \mathrm{K}$. Les éléments de K s'appellent des octaves de Cayley. Le conjugué d'un octave de Cayley $w = (u, v)$ est l'octave de Cayley $\overline{w} = (u^*, -v)$.

On considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire $g_w : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ définie par

$$g_w(z) = (xu - v^*y, vx + yu^*)$$

pour $z = (x, y) \in \mathrm{K}$. Vérifier que pour tout w et $z \in \mathrm{K}$, on a $g_{\overline{w}} \circ g_w = |w|^2 \mathrm{id_K}$ et $|g_w(z)|^2 = |w|^2|z|^2$. En déduire que si $|w|^2 = 1$, l'application linéaire g_w appartient à SO(K).

3. Soit S_7 la sphère des octaves de Cayley $w \in \mathrm{K}$ tels que $|w|^2 = 1$.

a) On pose $e = (1, 0)$; vérifier que si $w \in S_7$ et $t \in \mathrm{T}_e S_7$, $g_w(t) \in \mathrm{T}_w S_7$.

b) On considère l'application $\phi : S_7 \times \mathrm{T}_e S_7 \mapsto \mathrm{T}S_7$ définie par

$$(w, t) \mapsto (w, g_w(t)).$$

Montrer que ϕ : est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Image réciproque d'un fibré vectoriel

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés et $\pi : F \to Y$ un fibré vectoriel sur Y. Considérons l'ensemble $E = X \times_Y F$ des couples $(x, t) \in X \times F$ tels que $f(x) = \pi(t)$, muni de la projection $E \to X$ induite par la première projection pr_1. Au-dessus d'un point $x \in X$, la fibre E_x de cette projection s'identifie à la fibre $F_{f(x)}$ et est donc munie d'une structure d'espace vectoriel.

PROPOSITION 5.11. —

(i) *L'ensemble* E *est une sous-variété fermée de* $X \times F$.

(ii) *La fibration vectorielle* π *est un fibré vectoriel localement trivial.*

(iii) *L'espace vectoriel des sections* $\Gamma(E)$ *est l'espace vectoriel* $\mathrm{Mor}_f(X, F)$ *des applications* $s : X \to F$ *de classe* C^∞ *telles que* $f = \pi \circ s$.

DÉFINITION 5.12. — *Le fibré* $E \to X$ *ainsi construit s'appelle le fibré image réciproque de* F *par le morphisme* f.

Démonstration.

(i) Considérons l'application $(f, \pi) : X \times F \to Y$. Puisque π est une submersion, cette application est tranverse à la diagonale de Y. Donc l'image réciproque E de cette diagonale est une sous-variété de $X \times F$.

(ii) Soit V un ouvert de Y au-dessus duquel F est trivial, et soit $t \mapsto (\pi(t), g(t))$ une trivialisation

$$F|_V \to V \times \mathbb{R}^m$$

au-dessus de V. Alors, au-dessus de l'ouvert $U = f^{-1}(V)$, l'application $E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$ définie par $(x, t) \mapsto (x, g(t))$ est une trivialisation de E.

(iii) Soit $\mathrm{pr}_2 : E \to F$ le morphisme induit par la seconde projection. Soit s une section de E. Alors $s' = \mathrm{pr}_2 \circ s$ est un morphisme $X \to F$ tel que $\pi \circ s' = f$. On a ainsi obtenu une application linéaire

$$\Gamma(E) \to \mathrm{Mor}_f(X, F).$$

On en construit un inverse de la manière suivante : soit $s' : X \to F$ un morphisme tel que $\pi \circ s' = f$. Alors l'application $s : X \to X \times F$ définie par $x \mapsto (x, s'(x))$ prend ses valeurs dans E et définit une section de E. L'application $s' \mapsto s$ est bien l'inverse attendu. □

6. Champs de vecteurs

6.1. Champs de vecteurs et difféomorphismes

Soit M une variété de dimension n. On désigne par $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur M.

DÉFINITION 6.1. — *On appelle champ de vecteurs sur* M *une section du fibré tangent.*

Comme pour tout fibré vectoriel, l'ensemble $\Theta(M) = \Gamma(TM)$ des champs de vecteurs sur M est équipé d'une structure naturelle de module sur l'algèbre $C^\infty(M)$. Quand M est une sous-variété d'un espace vectoriel E, un champ de vecteurs correspond à un morphisme $\xi : M \to E$ tel que pour tout $x \in M$, on ait $\xi(x) \in T_xM$.

Considérons maintenant un champ de vecteurs ξ sur une variété X, et un difféomorphisme de variétés $\varphi : M \to N$. On va construire à partir du champ de vecteurs ξ sur M un champ de vecteurs sur N. On considère l'application $M \to TN$ définie par $x \mapsto T\varphi(\xi(x))$. Cette application est évidemment un morphisme de variétés. En composant avec φ^{-1}, on obtient un champ de vecteurs sur N :

DÉFINITION 6.2. —
On appelle image de ξ par φ le champ de vecteurs $\eta \in \Theta(N)$ défini pour $y \in N$ par $\eta(y) = T\varphi(\xi(\varphi^{-1}(y))$.

On note $\eta = \varphi_*(\xi)$ le champ de vecteurs ainsi obtenu.

Exercice 6.1
1) L'application $\xi \mapsto \varphi_*(\xi)$ est $\mathbb{R}-$linéaire.
2) Pour toute fonction $f \in C^\infty(N)$, on pose $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$. Vérifier que $\varphi_*(\varphi^*(f)\xi) = f\varphi_*(\xi)$.

6.2. Dérivée de Lie

Etant donné un champ de ξ sur M, et une fonction $f \in C^\infty(M)$ la fonction $x \mapsto d_x f.\xi(x)$; est encore de classe C^∞. On la note $\theta_\xi(f)$. On obtient ainsi une application $\mathbb{R}-$linéaire $\theta_\xi : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ qui satisfait à la formule de Leibniz : pour $f \in A$ et $g \in A$

$$\theta_\xi(fg) = \theta_\xi(f)g + f\theta_\xi(g).$$

DÉFINITION 6.3. — *Soit* A *une* $\mathbb{R}-$*algèbre. Une application* $\mathbb{R}-$*linéaire* $D : A \to A$ *qui satisfait à la condition* $D(uv) = (Du)v + u(Dv)$ *pour* u *et* $v \in A$ *s'appelle une dérivation de* A.

Ainsi, θ_ξ est une dérivation de l'algèbre $A = C^\infty(M)$.

Exercice 6.2

Soit E un espace vectoriel. On muni l'espace vectoriel End(E) des endomorphismes de E du crochet $[u, v] = uv - vu$. Vérifier que $[u, v] = -[v, u]$ et que l'on a l'identité de Jacobi : pour tout $u, v, w \in \mathrm{End}(E)$ on a

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

L'espace vectoriel $\mathrm{End}_R(E)$, muni de l'opération crochet, s'appelle l'algèbre de Lie des endomorphismes de E.

Exercice 6.3

Soient D_1 et D_2 deux dérivations d'une algèbre A. Alors le crochet $[D_1, D_2]$ est encore une dérivation.

Il en résulte que l'ensemble des dérivations de A constitue une sous-algèbre Der(A) de l'algèbre de Lie des endomorphismes de A. De plus, c'est aussi un module sur A : si $a \in A$, et $D \in \mathrm{Der}(A)$, l'application aD définie par $u \mapsto a(Du)$ est encore une dérivation. Cependant, les deux opérations ne sont pas compatibles entre elles : l'application $D_1 \mapsto [D_1, D_2]$ n'est pas A−linéaire.

Exercice 6.4

Vérifier que $f \in A$, on a

$$[D_1, fD_2] = D_1(f)D_2 + f[D_1, D_2]$$

THÉORÈME 6.4. — *Soit* M *une variété de dimension* n.

(i) *L'application* $\Theta(M) \mapsto \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ *définie par*

$$\xi \mapsto \theta_\xi$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M)-$*modules.*

(ii) *Cette application est compatible aux restrictions aux ouverts de* M *et aux difféomorphismes.*

La démonstration de ce théorème va occuper tout le reste de la section. Il convient de préciser d'abord l'assertion (ii), et ce qu'on entend par restriction d'une dérivation à un ouvert U de M, ainsi que l'image d'une dérivation de $C^\infty(M)$ par un difféomorphisme $\varphi : M \to N$.

Restriction d'une dérivation à un ouvert U *de* M

LEMME 6.5. — *Soit* D *une dérivation de* $C^\infty(M)$, *et* $f \in C^\infty(M)$. *Si* f *s'annule sur un ouvert* U, *il en est de même de* Df.

Cet énoncé entraîne en particulier que la valeur de Df ne dépend que de la restriction $f|_U$. On dit que l'opérateur D est un opérateur local.

Démonstration. Soit $a \in U$. Il existe une fonction g de classe C^∞ sur M qui vaut 1 au voisinage de a, et dont le support est contenu dans U. Alors $gf = 0$, et par la propriété de Leibniz $D(fg) = f(Dg) + (Df)g$. Si on prend la valeur au point a, obtient $Df(a) = 0$. D'où le résultat. □

PROPOSITION 6.6. — *Soit* D *une dérivation de* $C^\infty(M)$. *Il existe une dérivation et une seule* $D_U \in \mathrm{Der}(C^\infty(U))$ *telle que pour tout* $f \in C^\infty(M)$, *on ait la formule*

$$D_U(f|_U) = Df|_U.$$

Démonstration. Soit D une dérivation de $C^\infty(M)$, et $f \in C^\infty(U)$. Pour tout point $a \in U$, il existe une fonction $g \in C^\infty(M)$ qui coïncide avec f sur voisinage ouvert V de a. Il résulte du lemme 6.5 ci-dessus que $Dg|_V$ ne dépend pas du choix de g. On pose $D_U f(a) = Dg(a)$. L'application $a \mapsto D_U f(a)$ est une fonction $D_U f \in C^\infty(U)$.

Exercice 6.5

Vérifier que $D_U : f \mapsto D_U f$ est une dérivation de $C^\infty(U)$.

On obtient ainsi pour chaque ouvert U de M une dérivation D_U ; cette dérivation est appelée la restriction de D à l'ouvert U. La propriété fondamentale est la compatiblité aux restrictions : pour tout $f \in C^\infty(M)$, on a la formule

$$D_U(f|_U) = Df|_U.$$

Montrons que D_U est la seule dérivation qui satisfait à cette condition. Soit $\tilde{D}_U$ une autre telle dérivation. Soit $f \in C^\infty(U)$, et a un point de U; choisissons

une fonction $g \in C^\infty(M)$ qui coïncide avec f sur un voisinage ouvert V de a. Alors $\tilde{D}_U(f)(a) = \tilde{D}_U(g)(a)$ d'après le lemme 6.5 appliqué à $\tilde{D}_U$, et alors $\tilde{D}_U(f)(a) = Dg(a)$, ce qui montre que $\tilde{D}_U(f)$ et $D_U f$ coïncident en tout point a. □

LEMME 6.7. — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Theta(M) & \to & \mathrm{Der}(C^\infty(M)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Theta(U) & \to & \mathrm{Der}(C^\infty(U)) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les morphismes de restriction est commutatif.

Démonstration. Soit $\xi \in \Theta(M)$. Il s'agit de comparer les dérivations $\theta_{\xi|_U}$ et $(\theta_\xi)_U$ de l'algèbre $C^\infty(U)$. D'après la proposition ci-dessus, l'égalité entre ces deux dérivations signifie que pour tout $f \in C^\infty(M)$ on a $\theta_{\xi|_U}(f|_U) = \Theta_\xi(f)|_U$. Ceci est vrai trivialement d'après la définition de la dérivation de Lie associée au champ de vecteurs ξ.

Transport par difféomorphisme

Soit $\psi : A \to B$ un isomorphisme de $\mathbb{R}-$algèbres. On en déduit une application $\mathbb{R}-$linéaire $\psi_* : \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Der}(B)$ et compatible avec le crochet, qui associe à une dérivation D de A la dérivation $\psi_*(D)$ définie par $\psi_*(D) = \psi \circ D \circ \psi^{-1}$

Considérons maintenant un difféomorphisme de variétés $\varphi : M \to N$, auquel correspond un isomorphisme d'algèbres $\varphi_* : C^*(M) \to C^*(N)$ qui associe à $f \in C^*(M)$ la fonction $f \circ \varphi^{-1}$. On en déduit un isomorphisme noté encore

$$\varphi_* : \mathrm{Der}(C^\infty(M)) \to \mathrm{Der}(C^\infty(N)).$$

On peut maintenant énoncer la propriété de compatibilité aux difféomorphismes :

LEMME 6.8. — *Pour tout champ de vecteurs ξ sur* M, *on a $\theta_{\varphi_*(\xi)} = \varphi_*(\theta_\xi)$. En d'autres mots, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Theta(M) & \overset{\theta}{\longrightarrow} & \mathrm{Der}(C^\infty(M)) \\ {\scriptstyle \varphi_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ \Theta(N) & \overset{\theta}{\longrightarrow} & \mathrm{Der}(C^\infty(N))) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que pour $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{N})$, on a

$$\theta_{\varphi_*(\xi)}(g) = \varphi_*(\theta_\xi(g \circ \varphi)).$$

Soient $x \in \mathrm{M}$, et $y = \varphi(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}(\theta_{\varphi_*(\xi)}g)(y) =& d_y g.\varphi_*(\xi)(y)\\ =& d_y g \circ \mathrm{T}\varphi(\xi(x))\\ =& d_x(g \circ \varphi)(\xi(x))\\ =& \theta_\xi(g \circ \varphi)(x)\\ =& \varphi_*(\theta_\xi(g \circ \varphi))(y)\end{aligned}$$

ce qui entraîne l'énoncé. □

Démontration du théorème 6.4

Il reste seulement à vérifier l'assertion (i).

LEMME 6.9. — *Soit* $\mathscr{U} = (\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *un recouvrement ouvert de* M, *et* $\mathrm{D} \in \mathrm{Der}(\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}))$ *une dérivation telle que* $\mathrm{D}_{\mathrm{U}_i} = 0$. *Alors* $\mathrm{D} = 0$.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$. Alors $\mathrm{D}f|_{\mathrm{U}_i} = \mathrm{D}_{\mathrm{U}_i}(f|_{\mathrm{U}_i}) = 0$, et par suite $\mathrm{D}f = 0$. □

Cet énoncé implique que deux dérivations de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ coïncident si et seulement si leur restriction à chaque ouvert du recouvrement coïncident. Si on prend un recouvrement ouvert de M par des cartes locales, on est ramené à vérifier (i) pour les sources des cartes locales. Après transport par difféomorphisme, on est ramené à vérifier (i) pour un ouvert U d'un espace vectoriel E de dimension n. On peut supposer, si cela arrange, que cet ouvert est convexe.

Cas d'un ouvert d'un espace vectoriel

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, à laquelle correspond un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur l'ouvert U. Un champ de vecteurs est identifié à une application $\xi : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ de classe C^∞. On l'écrit

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

Soit D une dérivation de $C^\infty(U)$. L'équation $\theta_\xi = D$ est équivalente à

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = Df$$

pour tout $f \in C^\infty(U)$. Elle a au plus une solution, donnée par $\xi_i = Dx_i$. Réciproquement, considérons le champ de vecteurs donné par $\xi = \sum_{i=1}^n (Dx_i)e_i$. Montrons que pour tout $f \in C^\infty(U)$, on a $\theta_\xi f = Df$. Cette condition est satisfaite pour les fonctions coordonnées x_i. Il suffit donc de vérifier le lemme suivant :

LEMME 6.10. — *Soit* $D \in \mathrm{Der}(C^\infty(U))$ *une dérivation qui s'annule sur les fonctions coordonnées. Alors* $D = 0$.

Démonstration. On peut supposer que U est convexe. Evidemment, D s'annule sur les fonctions constantes. Soit $f \in C^\infty(M)$ et $a \in U$, de coordonnées a_i. Soit $a \in U$. On va montrer que $Df(a) = 0$. On peut écrire

$$f(x) = f(a) + g_x(x - a)$$

où g_x est une forme linéaire dépendant de façon C^∞ de x : on a

$$g_x = \int_0^1 d_{(1-t)a+tx} f dt$$

et le fait que l'application $x \mapsto g_x$ soit de classe C^∞ s'obtient par dérivation sous le signe intégrale. Ceci s'écrit encore

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - a_i).$$

où les fonctions g_i sont de classe C^∞ sur U. Du fait que $Dx_i = 0$, on obtient en utilisant la formule de Leibniz $Df = \sum_{i=1}^n Dg_i(x_i - a_i)$ et donc $Df(a) = 0$. Par suite $Df = 0$. Ceci achève la démontration. □

DÉFINITION 6.11. — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $(x_1, \ldots, x_n)$ *les coordonnées dans la base canonique. Le champ de vecteurs correspondant à la dérivation* $f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *est noté* $\frac{\partial}{\partial x_i}$, *ou plus rapidement* ∂_i.

Sur un tel ouvert U, tout champ de vecteur ξ s'écrit de façon unique

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i.$$

Autrement dit, le module des champs de vecteurs $\Theta(U)$ est un module libre de base ∂_i. Si $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ est une carte locale, il arrive souvent que l'on désigne encore par ∂_i le champ de vecteurs sur l'ouvert U obtenu par transport par le difféomorphisme φ^{-1}. Si $f \in C^\infty(U)$ et si $\tilde{f}$ est l'expression de f dans la carte φ, la formule de compatibilité entre θ et le difféomorphisme φ se lit :

$$\theta_{\partial_i}(f) = \varphi^*(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}).$$

Crochet de deux champs de vecteurs

On rappelle que le crochet de deux dérivations est encore une dérivation. Par transport de structure par l'isomorphisme θ, on obtient la notion de crochet de deux champs de vecteurs.

DÉFINITION 6.12. — *Soit* M *une variété, et* ξ *et* η *deux champs de vecteurs sur* M. *Le crochets* $[\xi, \eta]$ *est défini par*

$$\theta_{[\xi,\eta]} = [\theta_\xi, \theta_\eta].$$

Evidemment, on $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$ et le crochet satisfait à l'identité de Jacobi : on a ainsi obtenu une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel des champs de vecteurs.

Exercice 6.6

Vérifier que pour tout ouvert $U \subset M$, on a $[\xi, \eta]|_U = [\xi|_U, \eta|_U]$

Exercice 6.7

Soit $\varphi : M \to N$ un difféomorphisme de variétés. Vérifier que l'application $\varphi_* : \Theta(M) \to \Theta(N)$ est compatible avec le crochet.

Expression locale du crochet.

En vertu des deux exercices ci-dessus, il suffit pour calculer l'expression locale du crochet $[\xi, \eta]$ de deux champs de vecteurs sur une variété M de calculer le crochet pour deux champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 6.13. — *Considérons deux champs de vecteurs ξ et η sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$, *rapporté aux coordonnées* $(x_1, \ldots, x_n)$. *On écrit*

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial_i \ ; \ \eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \partial_i.$$

Alors

$$[\xi, \eta] = \sum_{i,j} (\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}) \partial_j$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les deux membres à la fonction x_j, et d'utiliser la définition du crochet.

Exercice 6.8

Soient ξ et η deux champs de vecteurs sur M, et $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$. Vérifier que

$$[\xi, f\eta] = \theta_\xi(f)\eta + f[\xi, \eta].$$

Exercice 6.9

Soit G un groupe de Lie agissant à gauche sur une variété M. On désigne par $\Theta(\mathrm{M})^{\mathrm{G}}$ le sous-espace des champs de vecteurs invariants par G. Montrer que ce sous-espace est stable par le crochet. Ceci définit donc une structure d'algèbre de Lie sur $\Theta(\mathrm{M})^{\mathrm{G}}$.

Exercice 6.10

Soit G un groupe de Lie, d'élément neutre e. On considère l'action de G sur lui-même par les translations $h \mapsto gh$. Démontrer que l'application $\Theta(\mathrm{G})^{\mathrm{G}} \to \mathrm{T}_e\mathrm{G}$ définie par $\xi \mapsto \xi(e)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. En déduire une structure naturelle d'algèbre de Lie sur $\mathrm{T}_e\mathrm{G}$.

Cette structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_e\mathrm{G}$ s'appelle l'algèbre de Lie du groupe de Lie G.

Exercice 6.11

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Le but de l'exercice est d'expliciter cette structure d'algèbre de Lie dans le cas du groupe $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

1. Soit $u \in \mathrm{End(E)}$, et $\xi_u : \mathrm{GL(E)} \mapsto \mathrm{End(E)}$ le champ de vecteurs invariant à gauche associé, défini par l'application $\xi_u(x) = xu$ pour $x \in \mathrm{GL(E)}$. Soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{GL(V)})$. Montrer que pour u et $v \in \mathrm{End(E)}$ et $x \in \mathrm{GL(E)}$ on a

$$\theta_{\xi_u}\theta_{\xi_v}(f)(x) = d_x^2 f(xu, xv) + d_x f(xuv).$$

2. En déduire que $[\xi_u, \xi_v] = \xi_{uv-vu}$, et donc que la structure d'algèbre de Lie sur $\mathrm{T}_{\mathrm{id_E}}\mathrm{GL(E)} = \mathrm{End(E)}$ est donnée par le crochet habituel $[u, v] = uv - vu$.

Exercice 6.12

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$, et O(E) le groupe orthogonal.

1) Déterminer les champs de vecteurs O(E)-invariants sur la sphère S_n.

2) Démontrer que l'algèbre des champs de vecteurs sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{E})$ s'identifie à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur la sphère S(E), invariants par l'involution $x \mapsto -x$.

Exercice 6.13

Soit $\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un morphisme de variétés. Soient $\xi \in \Theta(\mathrm{M})$ et $\eta \in \Theta(\mathrm{N})$ deux champs de vecteurs. On dit que ξ et η sont $\varphi-$liés si pour tout $x \in \mathrm{M}$ on a $\eta(f(x)) = \mathrm{T}\varphi(\xi(x))$.

1. Montrer que η et ξ sont φ-liés, si et seulement si pour tout $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{N})$ $\theta_\xi(\varphi^*(g)) = \varphi^*(\theta_\eta(g))$.

2. Vérifier que la relation de $\varphi-$liaison ainsi définie entre les champs de vecteurs sur M et les champs de vecteurs sur N est compatible avec la structure d'algèbre de Lie. De manière précise, soient ξ et $\xi' \in \Theta(\mathrm{M})$ deux champs de vecteurs sur M, η et $\eta' \in \Theta(\mathrm{N})$ deux champs de vecteurs sur N tels que ξ et η, d'une part, et ξ' et η' d'autre part, soient $\varphi-$liés. Vérifier que les crochets $[\xi, \xi']$ et $[\eta, \eta']$ sont $\varphi-$liés.

Exercice 6.14

Soient M une sous-variété d'une variété N, ξ et $\eta \in \Theta(\mathrm{N})$ deux champs de vecteurs sur N tels les restrictions que $\xi|_\mathrm{M}$ et $\eta|_\mathrm{M}$ soient des champs de vecteurs tangents à M.

1. Démontrer que pour $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{N})$ on a

$$\theta_{[\xi,\eta]}(f)|_\mathrm{M} = \theta_{[\xi|_\mathrm{M}, \eta|_\mathrm{M}]}(f|_\mathrm{M})$$

2. En déduire que la restriction $[\xi,\eta]|_M$ est un champ de vecteurs tangent à M et que l'on a

$$[\xi,\eta]|_M = [\xi|_M, \eta|_M].$$

Exercice 6.15

Soient G et K deux groupes de Lie, d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$. Soit $\varphi : G \to K$ un morphisme de groupes de Lie.

1) Soit $v \in \mathfrak{g}$, et $w = T_e\varphi(v)$, et $\xi \in \Theta(G)$ et $\eta \in \Theta(K)$ les champs de vecteurs invariants à gauche déterminés par v et w. Montrer que ξ et η sont $\varphi-$liés.

2) En déduire que l'application linéaire $T_e\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{k}$ est compatible avec le crochet, c'est-à-dire que c'est un morphisme d'algèbres de Lie.

7. Equations différentielles

Soit M une variété. Pour toute application $u = I \to M$ de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on considère l'application linéaire tangente $T_t u : \mathbb{R} \to T_{u(t)}M$; on désigne par $u'(t) \in T_{u(t)}M$ l'image de 1 par cette application linéaire tangente : si on pense que le paramètre t est le temps, et $u(t)$ représente le mouvement d'un point matériel qui se déplace sur M, ce vecteur représente le vecteur vitesse à l'instant t.

Soit $\xi \in \Theta(M)$ un champ de vecteurs. Par solution de l'équation différentielle

$$u' = \xi(u) \tag{7.1}$$

on entend une application $u : I \to M$ dérivable sur un intervalle $I \subset M$ telle que pour tout $t \in I$ on ait $u'(t) = \xi(u(t))$. On s'interroge sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle satisfaisant à la condition initiale $u(0) = x$, et à leur dépendance par rapport à la condition initiale x.

7.1. Existence et unicité locales des solutions

On commence par l'existence et l'unicité des solutions locales. Le théorème fondamental qu'il s'agit de prouver est le suivant :

THÉORÈME 7.1. — *Soit ξ un champ de vecteurs sur une variété* M. *Pour tout $a \in M$, il existe un voisinage ouvert* V *de a et un intervalle $]-\delta,\delta[$ tel que*

(i) *pour* $x \in \mathrm{V}$ *l'équation différentielle*

$$u' = \xi(u)$$

a une solution et une seule $t \mapsto u(t,x)$ *sur l'intervalle* $]-\delta,\delta[$ *satisfaisant à la condition initiale* $u(0,x) = x$;

(ii) *l'application* $(t,x) \mapsto u(t,x)$ *est de classe* C^∞ *sur* $]-\delta,\delta[\times\mathrm{V}$.

L'application $(t,x) \mapsto v(t,x)$ sera appelée le flot (local) du champ de vecteurs η. On commencera par résoudre ce problème en classe C^ν : on obtiendra un voisinage de a, et pour tout ν un intervalle $\mathrm{I} =]-\delta,\delta[$ sur lequel on a une unique solution $t \mapsto u(t,x)$ satisfaisant à la condition initiale $u(0,x) = x$ et telle que le flot $(t,x) \mapsto u(t,x)$ soit de classe C^ν sur $\mathrm{I} \times \mathrm{V}$. La méthode choisie fait intervenir pour construire l'intervalle I de nouvelles équations différentielles pour montrer que u est de classe C^ν ce qui nous oblige à diminuer probablement l'intervalle I quand ν augmente. Ce n'est que dans la section suivante qu'on obtiendra que u est de classe C^∞.

Pour résoudre ce problème, on choisit une carte locale $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}' \subset \mathbb{R}^n$ dont la source contient a, et on transporte le champ de vecteurs $\xi|_\mathrm{U}$ par ce difféomorphisme. On obtient un champ de vecteurs $\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \partial_i$ sur U', auquel est associé une équation différentielle

$$v' = \eta(v) \tag{7.2}$$

dont les solutions s'obtiennent à partir des solutions u de (7.1) en considérant les applications $t \to \varphi(u(t))$; réciproquement, à toute solution v de l'équation différentielle (7.2) correspond une solution $u(t) = \varphi^{-1}(v(t))$ de l'équation différentielle (7.1). Ainsi, on est ramené à étudier les fonctions v de classe C^ν sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans U' solutions de l'équation différentielle $v' = \eta(v)$, solutions auxquelles on impose une condition initiale.

On va donc se placer dans le cas où M est un ouvert V de $\mathbb{R}^n$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est supposé muni d'une métrique euclidienne. Le champ de vecteurs η est assimilé à une application de classe C^∞ de $\mathrm{V} \to \mathbb{R}^n$; par conséquent on peut considérer la différentielle $d\eta : \mathrm{V} \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

THÉORÈME 7.2. — *Soit* $\mathrm{V} = \mathrm{B}(a,2r)$ *la boule ouverte de centre* a *et de rayon* $2r$ *dans* $\mathbb{R}^n$, *et* η *un champ de vecteurs de classe* C^∞ *sur* V. *Soit* M *un nombre*

réel > 0 *tel que*

$$\| \eta \| \leq \mathrm{M} \text{ et } \| d\eta \| \leq \mathrm{M}.$$

Soit $0 < \delta \leq \mathrm{Min}(\frac{r}{\mathrm{M}}, \frac{1}{2\mathrm{M}})$.

(i) *Pour* $\| x - a \| < r$, *l'équation différentielle*

$$u' = \eta(u) \tag{7.3}$$

a, sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-\delta, \delta[$ *une solution et une seule* $t \to u(t,x)$ *satisfaisant à la condition initiale* $u(0,x) = x$.

(ii) *Le flot* $(t,x) \mapsto u(t,x)$, *défini sur* $]-\delta,\delta[\times \mathrm{B}(a,r)$ *et à valeurs dans* V, *est une application continue.*

Démonstration. Soit $\mathrm{I} =]-\delta, \delta[$. Dire qu'une $u : \mathrm{I} \to \mathrm{V}$ est une solution de l'équation différentielle (7.3) satisfaisant à la condition initiale $u(0) = x$ équivaut à dire que u est continue et satisfait à l'équation intégrale

$$u(t) = x + \int_0^t \eta(u(s))ds. \tag{7.4}$$

Soit $\mathrm{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach des applications continues et bornées $v :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$, muni de la norme

$$\| v \| = \sup \| v(t) \| .$$

Soit $\mathscr{B}$ la boule fermée définie par $\| v - x \| \leq r$. On considère l'application $\mathrm{F} : \mathscr{B} \to \mathrm{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}^n)$ qui associe à v l'application w définie par

$$w(t) = x + \int_0^t \eta(v(s))ds.$$

Pour $\| x-a \| < r$, on a $\| v(s)-a \| < 2r$, et l'intégration est possible ; cette formule a donc bien un sens. Par définition, on a $\| \eta \| \leq \mathrm{M}$; on déduit de l'hypothèse $\mathrm{M}\delta \leq r$ que $\mathrm{F}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{B}$.

LEMME 7.3. — *L'application* $\mathrm{F} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ *définie par* $v \mapsto \mathrm{F}(v)$ *est contractante de rapport* $\frac{1}{2}$.

Démonstration. D'après le théorème des accroissements finis, on a pour tout $s \in \mathrm{I}$

$$\| \eta(v(s)) - \eta(w(s)) \| \leq \| d\eta \| \, \| v(s) - w(s) \|$$

et par suite $\| \mathrm{F}(v) - \mathrm{F}(w) \| \leq \mathrm{M}\delta \, \| v - w \|$. Puisque par hypothèse $\mathrm{M}\delta \leq \frac{1}{2}$ ceci démontre le lemme. □

Ceci entraîne que l'application F a un point fixe et un seul u, ce qui fournit l'existence d'une solution $t \mapsto u(t,x)$ de l'équation différentielle (7.3) satisfaisant à la condition initiale $u(0,x) = x$, et son unicité. Ceci démontre (i).

Dépendance des conditions initiales

Il suffit d'incorporer les conditions initiales dans la démonstration ci-dessus. Considérons pour ceci l'espace de Banach $\mathrm{C}(\mathrm{I} \times \mathrm{B}(a,r), \mathbb{R}^n)$ des fonctions continues et bornées sur $\mathrm{I} \times \mathrm{B}(a,r)$. On considère dans cet espace le point défini par la fonction $(t,x) \to x$ et la boule fermée centrée en x, de rayon r, notée encore $\mathscr{B}$, définie par les fonctions $v : \mathrm{I} \times \mathrm{B}(a,r) \to \mathbb{R}^n$ telles que $\| v - x \| \leq r$. L'application qui associe à $v \in \mathscr{B}$ l'application w définie par

$$w(t,x) = x + \int_0^t \eta(v(s,x))ds$$

définit encore une application contractante $\mathrm{F} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ de rapport $\frac{1}{2}$. Elle a un point fixe u ; l'application $t \mapsto u(t,x)$ n'est autre que la solution de l'équation différentielle (7.3) qui satisfait à la condition initiale $u(0,x) = x$. □

Le problème de voir que le flot $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est de classe C^ν relève du même principe ; on pourrait travailler dans un espace de Banach de fonctions de classe C^ν et appliquer le théorème des points fixes sur un fermé convenable mais ceci impose pour obtenir une application contractante des majorations un peu compliquées, faisant intervenir les différentielles d'ordre $\leq \nu + 1$ de η (*cf.* exercice 7.1). On va préférer appliquer le résultat ci-dessus à un autre champ de vecteurs.

THÉORÈME 7.4. — *Soit* $\mathrm{V} = \mathrm{B}(a,2r)$ *la boule de centre a et de rayon* $2r$ *dans* $\mathbb{R}^n$, *et* η *un champ de vecteurs de classe* C^∞ *sur* $\mathrm{V} = \mathrm{B}(a,2r)$; *on suppose que* φ *et toutes les différentielles* $d^i\eta$ *sont bornées sur* V. *Pour tout entier* ν, *il existe un réel* $\delta > 0$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *Pour* $\| x - a \| < r$, *l'équation différentielle*

$$u'(t) = \eta(u(t)) \tag{7.5}$$

a, sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-\delta, \delta[$ *une solution et une seule* $t \to u(t,x)$ *satisfaisant à la condition initiale* $u(0,x) = x$.

(ii) *Le flot* $(t,x) \mapsto u(t,x)$, *défini sur* $]-\delta,\delta[\times \mathrm{B}(a,r)$ *et à valeurs dans* V, *est de classe* C^ν.

L'hypothèse sur le champ de vecteurs est satisfaite par exemple si le champ de vecteurs η s'étend à un voisinage ouvert V de la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}(a,2r)$.

Démonstration. Evidemment, l'assertion (i) résulte de l'énoncé 7.2 ci-dessus, mais dans ce paragraphe, on va obtenir seulement que le flot u est de classe C^ν sur un ouvert $]-\delta,\delta[\times \mathrm{V}$ probablement plus petit que celui qui est proposé dans l'énoncé 7.2. Dans un premier temps, on va montrer que le flot u est de classe C^1 sur $\mathrm{I} \times \mathrm{B}(a,r)$. On considère le champ de vecteurs ζ sur $\mathrm{V} \times \mathrm{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ défini par $(x,w) \mapsto (\eta(x), d\eta(x) \circ w)$ auquel est associé l'équation différentielle

$$\begin{cases} v' = & \eta(v) \\ w' = & d\eta(v) \circ w \end{cases}$$

Cette équation différentielle a d'après ce qui précède pour $\| x - a \| < r$ une unique solution $t \to (v(t,x), w(t,x))$ satisfaisant à la condition initiale $v(0,x)) = x, w(0,x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ sur un intervalle $]-\rho,\rho[$, où ρ est un nombre réel > 0 qui peut se calculer en termes des normes $\| \eta \|, \| d\eta \|, \| d^2\eta \|$. Cette solution s'obtient par itération comme limite uniforme de la suite (v_n, w_n) définie par récurrence par $v_0(t,x) = x, w_0(t,x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ et

$$\begin{cases} v_{n+1}(t,x) = x + \int_0^t \eta(v_n(s,x))ds \\ w_{n+1}(t,x)) = id_{\mathbb{R}^n} + \int_0^t d\eta(v_n(s,x)) \circ w_n(s,x)ds \end{cases}$$

Alors v_n est de classe C^∞, et on a $w_n = \partial_2 v_n$. Ceci se voit par récurrence sur n, en calculant la différentielle partielle $\partial_2 v_{n+1}$ par différentiation sous le signe somme dans la première équation. On a d'autre part, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\begin{aligned} \| \frac{\partial v_n}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \| &\leq \| \eta(v_n) - \eta(v) \| \\ &\leq \| d\eta \| \| v_n - v \| \end{aligned}$$

Ainsi, la suite v_n converge dans la topologie de la convergence C^1 uniforme sur $]-\rho;\rho[\times B(a,r)$. Il en résulte que la limite v est de classe C^1, et que l'on a la relation $\partial_2 v = w$. Donc v est de classe C^1.

Montrons maintenant par récurrence que pour tout champ de vecteur η comme ci-dessus, le flot v est de classe C^ν sur $]-\delta,\delta[\times B(a,\frac{r}{2})$, où $\delta > 0$ est un nombre convenable. On applique l'hypothèse de récurrence à l'équation différentielle ci-dessus, associée au champ de vecteurs ζ : il existe donc un nombre $\delta > 0$ tel que la solution (v,w) trouvée ci-dessus soit de classe $C^{\nu-1}$ sur $]-\delta,\delta[\times B(a,r)$. Les équations

$$\begin{cases} v' = & F(v) \\ w' = & dF(v)\circ w \end{cases}$$

impliquent que la différentielle $dv = (v', w)$ est de classe $C^{\nu-1}$, ce qui signifie exactement que le flot v du champ de vecteur η est de classe C^ν sur l'ouvert $]-\delta,\delta[\times B(a,r)$. □

REMARQUE 7.5. — Une estimation de ρ dans la démontration ci-dessus fait intervenir $\| \eta \|, \| d\eta \|$ et $\| d^2\eta \|$. Dans la première étape, pour obtenir que w est aussi de classe C^1, on doit appliquer ce résultat au champ de vecteurs ζ, ce qui impose éventuellement de remplacer le nombre ρ par un nombre δ dont une estimation pourra s'obtenir en faisant intervenir la différentielle $d^2\zeta$, et donc la différentielle $d^3\eta$. Ainsi, chaque fois qu'on veut un résultat en classe supérieure, il peut être nécessaire de diminuer l'intervalle sur lequel on travaille.

Exercice 7.1

Soit ξ un champ de vecteurs sur la boule ouverte $B(a,2r)$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour $i = 0,1,2$

$$\| d^i\eta \| \leq M$$

On considère l'espace vectoriel $C^1(I \times B(a,r), \mathbb{R}^n)$ des fonctions $v : I \times B(a,r) \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, telles que v et dv soient bornées sur cet ouvert. C'est un espace de Banach quand on l'équipe de la norme

$$\| v \|_1 = \sup(\| v \|, \| dv \|).$$

On désigne par $\mathscr{B}$ le fermé de $\mathrm{C}^1(\mathrm{I}\times\mathrm{B}(a,r),\mathbb{R}^n)$ défini par les fonctions v telles que $v(0,x)=x$ et satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$\| v-x \|\leq r;\ \| \frac{\partial v}{\partial t} \|\leq \mathrm{M};\ \| \partial_2 v - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \|\leq \mathrm{M}.$$

Considérons l'application

$$\mathrm{F}:\mathscr{B}\to \mathrm{C}^1(\mathrm{I}\times\mathrm{B}(a,r),\mathbb{R}^n)$$

définie $v\mapsto w=\mathrm{F}(v)$, où w est définie par

$$w(t,x)=x+\int_0^t \eta(v(s,x))ds$$

Cette application a bien un sens, et $w(0,x)=x$.

1) Calculer $\partial_2(\mathrm{F}(v))$. Vérifier que si δ est assez petit, on a $\mathrm{F}(\mathscr{B})\subset\mathscr{B}$.

2) Vérifier que

$$\begin{aligned}\| \frac{\partial(\mathrm{F}(v))}{\partial t} - \frac{\partial(\mathrm{F}(w))}{\partial t} \| &\leq \| \eta(v)-\eta(w) \| \\ &\leq (\mathrm{M}^2+\mathrm{M})\delta \| v-w \|_1\end{aligned}$$

(Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $s\mapsto \eta(v(t,x))-\eta(w(t,x))$).

3) Vérifier que $\| \partial_2(\mathrm{F}(v))-\partial_2(\mathrm{F}(w)) \|\leq (\mathrm{M}^2+\mathrm{M})\delta \| v-w \|_1$. En déduire que si δ est assez petit, l'application F est contractante de rapport $\frac{1}{2}$. En déduire une autre démonstration du théorème 7.4 ci-dessus, dans le cas $\nu=1$.

7.2. Le flot global d'un champ de vecteurs

Soit ξ un champ de vecteurs sur une variété M. Considérons l'ensemble $\mathscr{S}$ des couples (I,u) formé d'un intervalle $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$ et d'une solution u de l'équation différentielle

$$u'=\xi(u) \tag{7.1}$$

sur l'intervalle I. Cet ensemble est ordonné par la relation d'ordre définie par $(\mathrm{I},u)\leq(\mathrm{J},v)$ si $\mathrm{I}\subset\mathrm{J}$ et $v|_{\mathrm{I}}=u$. Un élément maximal de cet ensemble s'appelle une solution maximale. Etant donnée une solution maximale $u:\mathrm{I}\to\mathrm{M}$, pour tout $t_0\in\mathbb{R}$, la solution $t\mapsto u(t_0+t)$, définie sur l'intervalle translaté $-t_0+\mathrm{I}$ est encore maximale.

LEMME 7.6. — *Si deux solutions u et v de l'équation différentielle (7.1) sur un intervalle* I *coïncident en un point, elles coïncident sur* I.

Démonstration. L'ensemble des point $t \in \mathrm{I}$ tels que $u(t) = v(t)$ est un fermé. C'est aussi un ouvert de I : en effet, si u et v coïncident en t_0, les solutions $t \mapsto u(t_0 + t)$ et $t \mapsto v(t_0 + t)$ coïncident au voisinage de 0 d'après l'unicité dans le théorème 7.1. Donc $u = v$ sur I. □

LEMME 7.7. — *Etant donné un point $x \in \mathrm{M}$, il existe une solution maximale et une seule $u : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ définie sur un intervalle contenant 0 et telle que $u(0) = x$.*

Démonstration. Considérons les solutions $u_\alpha : \mathrm{I}_\alpha \to \mathrm{M}$ définies sur un intervalle ouvert I_α contenant 0 et telles que $u_\alpha(0) = x$. Alors u_α et u_β coïncident sur l'intersection $\mathrm{I}_\alpha \cap \mathrm{I}_\beta$, et donc il existe une solution $u : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ définie sur l'intervalle ouvert $\cup_\alpha \mathrm{I}_\alpha$ telle que $u|_{\mathrm{I}_\alpha} = u_\alpha$. Cette solution est évidemment maximale. Si $v : \mathrm{J} \to \mathrm{M}$ est une solution sur un intervalle J contenant l'origine, telle que $v(0) = x$, on a $u = v$ sur $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ et donc, par maximalité, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. En particulier, si $v : \mathrm{J} \to \mathrm{M}$ est aussi maximale, elle coïncide avec $u : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$. □

THÉORÈME 7.8. —

(i) *Une solution maximale est définie sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$.

(ii) *Soit $u : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ une solution maximale, telle que $\mathrm{I} \neq \mathbb{R}$. Soit $a \in \partial\mathrm{I}$. Alors*

$$\lim_{t \in \mathrm{I}, t \to a} u(t) = \infty$$

La deuxième assertion signifie que pour tout compact $\mathrm{K} \in \mathrm{M}$, il existe un voisinage V de a dans $\mathbb{R}$ tel que pour $t \in \mathrm{V} \cap \mathrm{I}$ on ait $u(t) \notin \mathrm{K}$.

Démonstration. Considérons une solution maximale (I, u). On peut supposer, par translation, que I contient 0 : si on pose $u(0) = x$ alors u est la seule solution maximale telle que $u(0) = x$, elle est donc définie sur un intervalle ouvert d'après le lemme qui précède.

Montrons la deuxième assertion. Si cette condition n'était pas satisfaite, on pourrait trouver un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{M}$ et une suite t_n de points de I telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = a$ et $u(t_n) \in \mathrm{K}$. Alors la suite $u(t_n)$ aurait une valeur d'adhérence b. D'après le théorème d'existence 7.1 on peut trouver un réel δ et un voisinage ouvert V de b telle que pour $x \in \mathrm{V}$, l'équation différentielle (7.1) a une solution $t \mapsto v(t, x) :]-\delta, \delta[\to \mathrm{M}$ telle que $v(0) = x$. Choisissons n assez grand pour

que $|t_n - a| \leq \frac{\delta}{2}$ et $u(t_n) \in \mathrm{V}$. Les solutions $t \mapsto u(t)$ et $t \mapsto v(t - t_n, u(t_n))$ coïncident pour $t = t_n$, et donc sur l'intersection des intervalles sur lesquelles ces deux solutions sont définies. Elles définissent alors une solution sur un intervalle strictement plus grand que I. Ceci contredit la maximalité de la solution u. □

COROLLAIRE 7.9. — *Si* M *est une variété compacte, les solutions maximales sont définies sur* $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 7.10. — *On dit qu'un champ de vecteurs est complet si les solutions maximales de l'équation différentielle associée sont définies sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 7.2

On considère sur $\mathbb{R}$ le champ de vecteur défini par $x \mapsto \xi(x) = x^2$. La solution maximale de l'équation différentielle $u' = \xi(u)$ satisfaisant à la condition initiale $u(0, x) = x$ est

$$\begin{cases} u(t,x) = & \dfrac{x}{1-tx} & \text{si } x > 0, \text{ sur }]-\infty, \frac{1}{x}[\\ u(t,0) = & 0 & \text{sur } \mathbb{R} \\ u(t,x) = & \dfrac{x}{1-tx} & \text{si } x < 0, \text{ sur }]\frac{1}{x}, \infty[\end{cases}$$

Exercice 7.3

Montrer que $u : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$ est une solution maximale si et seulement si l'application $\mathrm{I} \to \mathbb{R} \times \mathrm{M}$ définie par $t \mapsto (t, u(t))$ est propre.

Exercice 7.4

Soit ξ un champ de vecteurs borné sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que ξ est complet.

Exercice 7.5

Soit ξ un champ de vecteurs à support compact sur une variété M; montrer que ξ est complet.

Exercice 7.6

Soit $x \mapsto \xi(x)$ un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que ξ est complet.

PROPOSITION 7.11. — *Soit* ξ *un champ de vecteurs sur une variété* M . *Alors il existe une fonction strictement positive* $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ *telle que le champ de vecteurs* $f\xi$ *soit complet.*

Ceci repose sur le lemme suivant :

LEMME 7.12. — *Il existe une fonction* $g : \mathrm{M} \to [0, \infty[$ *de classe* C^∞ *et propre.*

Démonstration. On considère un recouvrement dénombrable $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de M par des ouverts relativement compactes, et une partition de l'unité μ_n subordonnée à ce recouvrement (*cf.* §4.4). On considère la la fonction

$$g = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mu_n$$

C'est une fonction de classe C^∞, et en dehors de $\mathrm{U}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{U}_n$ on a $g(x) \geq n$. Par suite g est propre. □

Démonstration de la proposition 7.11

On considère le champ de vecteurs $\eta = e^{-\theta_\xi(g)^2}\xi$. Considérons une solution maximale de l'équation différentielle $u' = \eta(u)$, telles que $u(0) = x$. Supposons qu'une telle solution soit définie sur un intervalle $\mathrm{I} \neq \mathbb{R}$. Soit $a \in \partial\mathrm{I}$. Considérons la fonction définie sur I par $t \mapsto g(u(t))$ pour dérivée au point t

$$\begin{aligned} dg(u(t)).u'(t) =& dg(u(t))\eta(u(t)) = \theta_\eta(g)(u(t)) \\ =& \theta_\xi(g)e^{-\theta_\xi(g)^2}(u(t)) \end{aligned}$$

Il en résulte que $t \mapsto g(u(t))$ a sa dérivée bornée par 1. Par suite, la fonction $t \mapsto g(u(t))$ reste bornée quand $t \to a$; puisque $g : \mathrm{M} \to [0, \infty[$ est propre, $u(t)$ devrait rester dans un compact quand $t \to a$, ce qui contredit le fait que u est une solution maximale. □

Le flot d'un champ de vecteurs complet

Soit ξ un champ de vecteurs complet sur la variété M. On note $u(t, x)$ l'unique solution de l'équation différentielle qui vaut x à l'instant $t = 0$. On obtient ainsi une application $u : \mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ qu'on appelle le flot (global) du champ de vecteur ξ. Le théorème d'existence local nous dit qu'il existe un voisinage ouvert U (dépendant de ν) de $\{0\} \times \mathrm{M}$ sur lequel le flot est de classe C^ν.

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$u_t(x) = u(t, x).$$

C'est une famille d'applications $M \to M$ dépendant du temps.

Voici le complément attendu pour terminer la démonstration du théorème 7.1 (dans le cas d'un champ de vecteurs complet) :

THÉORÈME 7.13. — *Soit ξ un champ de vecteurs complet sur* M, *et* $u : \mathbb{R} \times M \to M$ *le flot associé.*

(i) *On a pour tout* t *et* $t' \in \mathbb{R}$

$$u_{t+t'} = u_t u_{t'} \tag{7.6}$$

(ii) *Le flot* $u : \mathbb{R} \times M \to M$ *est de classe* C^∞.

Il en résulte que u_t est un difféomorphisme de classe C^∞ de M, que l'application $(t, x) \mapsto u(t, x)$ définit une action du groupe de Lie $\mathbb{R}$ sur la variété M. On pourra donc adopter le langage usuel utilisé dans le cadre des variétés muni d'une action de groupe. Ainsi, l'image de $t \to u(t, x)$ est souvent appelée orbite, ou trajectoire du champ de vecteurs. L'application $t \mapsto u_t$ est un homomorphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans le groupe Diff(M) des difféomorphismes de M qu'on appelle le groupe à un paramètre associé au champ de vecteurs ξ.

Démonstration. (i) La relation (7.6) s'écrit aussi

$$u(t + t', x) = u(t, u(t', x)).$$

Pour la vérifier, on considère chacun des deux membres comme des fonctions de t, à valeurs dans M. Ce sont deux solutions de l'équation différentielle $u' = \xi(u)$ qui prennent la même valeur $u(t', x)$ pour $t = 0$, donc elles coïncident pour tout t.

(ii) Soit ν un entier. Il s'agit de montrer que u est de classe C^ν sur $\mathbb{R} \times M$. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$; il s'agit de vérifier que le flot u est de classe C^ν au voisinage de (t_0, x_0). On sait déjà d'après le théorème 7.4 que le flot u est de classe C^ν au voisinage de $(0, x_0)$. La relation $u(t_0, u_(t - t_0, x)) = u(t, x)$ nous ramène à démontrer que $x \mapsto u_{t_0}(x)$ est de classe C^ν.

Le théorème7.4 dit en fait qu'il existe un voisinage ouvert U de $\{0\} \times M$ sur lequel u est de classe C^ν. Ceci entraîne en particulier que pour tout compact $K \subset M$, il existe un nombre $\delta > 0$ et un voisinage ouvert V de K tel que u soit de classe C^ν sur $]-\delta, \delta[\times V$. On applique ceci à l'image K de l'intervalle compact de $\mathbb{R}$ d'extrémités 0 et t_0 par l'application continue $t \mapsto u(t, x_0)$: ceci détermine un nombre $\delta > 0$, et un voisinage ouvert V de K, tels que u soit de classe C^ν sur

$]-\delta,\delta[\times$V. On choisit un entier n assez grand pour que $\frac{|t_0|}{n} < \delta$. De (i), il résulte que

$$u_{t_0} = (u_{\frac{t_0}{n}})^n$$

Il résulte du choix de n que $u_{\frac{t_0}{n}}$ est de classe C^ν au voisinage de $u_{\frac{kt_0}{n}}(x_0)$. La relation

$$u_{\frac{(k+1)t_0}{n}} = u_{\frac{t}{n}} u_{\frac{kt_0}{n}}$$

montre, par récurrence sur k que pour $k \leq n$, l'application $u_{\frac{kt_0}{n}}$ est de classe C^ν au voisinage de x_0. Ceci vaut en particulier pour $k = n$, ce qui signifie que u_{t_0} est de classe C^ν au voisinage de x_0.

On a donc démontré que pour tout ν, le flot u est de classe C^ν. Ainsi, il est de classe C^∞. □

Exercice 7.7

Soit $\{u_t\}$ un groupe de difféomorphismes à un paramètre de M : on entend par là que $\mapsto u_t$ est un homomorphisme de groupes, et que l'application $\mathbb{R} \times M \to M$ définie par $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est de classe C^∞. On considère le champ de vecteurs ξ sur M défini par $\xi(x) = u'(0,x)$.

1) Montrer que le champ de vecteur ξ est complet.

2) Soit Mor($\mathbb{R}$, Diff(M)) l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de M. Montrer que l'application Mor($\mathbb{R}$, Diff(M)) $\to \Theta$(M)

$$\{u_t\} \mapsto \xi$$

définie ci-dessus est une application injective qui a pour image l'ensemble des champs de vecteurs complets.

Exercice 7.8

Soient g : M $\to$ M un difféomorphisme, et ξ un champ de vecteurs complet sur M. Soit $\{u_t\}$ le groupe à un paramètre associé à ξ.

1) Montrer que le champ de vecteurs $\eta = g_*(\xi)$ est complet et que le groupe à un paramètre associé à η est $v_t = g u_t g^{-1}$.

2) En déduire que ξ est invariant par g si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g \circ u_t = u_t \circ g$.

Cas d'un champ de vecteurs quelconque

Considérons un champ de vecteurs ξ quelconque sur M. Pour $x \in \mathrm{M}$ désignons par $(t \mapsto u(t,x))$ la solution maximale qui passe par x, définie sur un intervalle I_x. On désigne par Ω l'ensemble des points $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{M}$ tels que $t \in \mathrm{I}_x$. On verra que c'est un ouvert. Le flot $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est défini sur Ω. Le point essentiel est de démontrer que ce flot est encore de classe C^∞. Une méthode possible, bien que délicate, est de vérifier que toutes les relations écrites dans la preuve ci-dessus, qui reposent sur l'égalité

$$u(t+t',x) = u(t',u(t,x))$$

sont encore vraies dès que l'un des membres a un sens : plus précisément, ceci signifie que si $(t,x) \in \Omega$, alors $(t',u(t,x)) \in \Omega$ si et seulement si $(t+t',x) \in \Omega$ et alors l'égalité est vraie. Nous préférons une méthode plus instructive, qui va dire que se ramener à un champ de vecteurs complet revient à changer d'horloge, le réglage de l'horloge variant en fonction de la position initiale. Nous commençons par l'étude d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ dépendant d'un paramètre, pour laquelle on peut en principe faire tous les calculs.

LEMME 7.14. — *Soit $(s,x) \to g(s,x)$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$ strictement positive. Soit $t \mapsto s(t,x)$ la solution maximale, définie sur un intervalle I_x, de l'équation différentielle*

$$s' = g(s,x) \tag{7.6}$$

qui satisfait à la condition initiale $s(0) = 0$.

(i) *L'ensemble des couples $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{M}$ tels que $t \in \mathrm{I}_x$ est un ouvert Ω.*

(ii) *L'application $(t,x) \mapsto (s(t,x),x)$ est un défféomorphisme de classe C^∞ de Ω sur $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$.*

Démonstration. Par intégration de l'équation différentielle, on trouve que la solution maximale $t \mapsto s(t,x)$ de l'équation (7.6) satisfait à l'équation

$$\int_0^{s(t,x)} \frac{du}{g(u,x)} = t \tag{7.7}.$$

Considérons l'application définie sur $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$ par

$$(s,x) \mapsto \Big(\int_0^s \frac{du}{g(u,x)}\ ,\ x\Big).$$

Il est clair que cette application est injective, et que son application linéaire tangente est inversible. Son image est un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$ qui contient $\{0\} \times \mathrm{M}$; considérons l'application inverse $(t, x) \to (r(t, x), x)$. On a $r(0, x) = x$, et

$$\int_0^{r(t,x)} \frac{du}{g(u, x)} = t$$

ce qui montre par dérivation que $\dfrac{\partial r}{\partial t}(t, x) = g(r(t, x), x)$ pour $(t, x) \in \mathrm{U}$. Ainsi, $t \mapsto r(t, x)$ est solution de l'équation différentielle (7.6), et cette solution est clairement maximale, car elle tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle de définition. Il en résulte que $\Omega = \mathrm{U}$ et que $s(t, x) = r(t, x)$ est de classe C^∞. □

Exercice 7.9

Soit x un nombre réel. On considère la fonction $g(s, x) = 1 + s^2 + x^2$

Montrer que la solution maximale ci-dessus est définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ des couples (t, x) satisfaisant à l'inégalité $|t| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{1+x^2}}$ et donnée par la formule

$$s(t, x) = \sqrt{1 + x^2}\mathrm{tg}(t\sqrt{1 + x^2}).$$

PROPOSITION 7.15. — *Soit η un champ de vecteurs sur* M. *Le flot global v de η est défini sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$, et de classe C^∞ sur cet ouvert.*

Démonstration. D'après la proposition 7.11 on peut trouver un champ de vecteurs complet ξ et une fonction de classe C^∞ partout positive f tels que $\eta = f\xi$. Considérons le flot u de ξ, et la fonction $g(t, x) = f(u(t, x))$; elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$ et strictement positive. Considérons la solution $(t, x) \mapsto s(t, x)$ de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs sur $\mathbb{R}$ défini par g, fournie par le lemme 7.14 ci-dessus. Ce champ de vecteurs dépend du paramètre x. Cette solution est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$ et de classe C^∞. Nous affirmons que le flot du champ de vecteurs η est défini sur l'ouvert Ω par l'application $(t, x) \mapsto v(t, x) = u(s(t, x), x)$. En effet, on a bien $v(0, x) = x$, et de plus, en prenant la dérivée partielle par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned} v'(t, x) =& u'(s(t, x), x)s'(t, x) \\ =& \xi(u(s(t, x), x))f(u(s(t, x))) \\ =& \eta(v(t, x)) \end{aligned}$$

ce qui montre que $t \mapsto v(t,x)$ est bien solution de l'équation différentielle associée à η. Il reste à montrer que pour $x \in \mathrm{M}$, fixé, cette solution est bien la solution maximale qui vaut x pour $t = 0$. Soit I_x l'intervalle sur lequel est défini $t \mapsto s(t,x)$, et supposons que $\mathrm{I}_x \neq \mathbb{R}$. Soit $a \in \partial \mathrm{I}_x$. Supposons par exemple $a > 0$. Il s'agit de démontrer que $\lim_{t \to a} v(t,x) = \infty$. Sinon on pourrait, comme dans le le théorème 7.8, prolonger la solution $t \mapsto v(t,x)$ sur un intervalle contenant $[0,a]$ et par conséquent l'image de $[0,a[$ par cette application serait relativement compacte. Alors l'intégrale $\int_0^a f(v(t,x))dt$ serait finie pour chaque x. 0r, par définition $s'(t,x) = f(v(t,x))$; on obtient donc

$$\int_0^t f(v(\theta,x))d\theta = s(t,x)$$

D'après la définition de s (*cf.* lemme 7.14 ci-dessus), on a $\lim_{t \to a} s(t,x) = +\infty$. Il en résulte que l'intégrale $\int_0^a f(v(t,x))dt$ n'est pas finie, ce qui fournit une contradiction. On laisse au lecteur le soin de faire les modifications qui s'imposent quand $a < 0$.

Ainsi, l'application v qu'on a obtenue est bien le flot du champ de vecteurs η. Il est défini sur l'ouvert Ω, et de classe C^∞ comme composé d'applications de classe C^∞.

7.3. Variétés de dimension 1

On se propose de démontrer dans ce paragraphe l'énoncé suivant :

THÉORÈME 7.16. — *Soit* M *une variété connexe de dimension 1. Alors* M *est difféomorphe à* $\mathbb{R}$ *ou au cercle* S_1.

Soit M une variété connexe de dimension 1. Supposons construit un champ de vecteurs ξ partout non nul sur M. D'après la proposition 7.11 ci-dessus, on peut supposer que ce champ de vecteurs est complet. Le flot $u : \mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ de ce champ de vecteurs définit alors une action de $\mathbb{R}$ sur M, et pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $t \to u(t,x)$ est un difféomorphisme local ; ainsi les orbites sont ouvertes, donc fermées. Puisque M est connexe, il n'y a donc qu'une orbite. Le stabilisateur d'un point x est alors un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, et donc la forme $\mathbb{Z}\omega$ avec $\omega \geq 0$. Si $\omega = 0$ l'application $t \mapsto u(t,x)$ est un difféomorphisme $\mathbb{R} \to \mathrm{M}$. Si $\omega \neq 0$, cette application se factorise en un difféomorphisme

$$v : \mathbb{R}/\mathbb{Z}\omega \to \mathrm{M}.$$

La variété quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\omega$ est difféomorphe au cercle S_1. Puisque le stabilisateur est indépendant de x, le nombre ω ainsi déterminé est indépendant de x : c'est la période du champ de vecteur ω le long de M.

Toute la difficulté est donc de construire un champ de vecteurs partout non nul sur M.

Exercice 7.10

Considérons la cubique $C \subset \mathbb{R}^2$ définie par $y^2 = x(1-x^2)$. Cette cubique est une variété de dimension 1 qui a deux composantes connexes, dont l'une C' est compacte, et l'autre C'' ne l'est pas. Sur cette cubique, considérons le champ de vecteurs partout non nul défini par

$$\xi : (x, y) \mapsto (2y, 1 - 3x^2)$$

Soit u_t le groupe à un paramètre associé.

1. Soit $\sigma : C \to C$ l'involution $(x, y) \to (x, -y)$. Montrer que $\sigma_*(\xi) = -\xi$.

2. Soit le groupe à un paramètre associé au champ de vecteurs $\xi|_{C'}$. Montrer que $\sigma \circ u_t \circ \sigma = u_{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Soit ω la période de ξ sur la composante C'. Montrer que

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}}$$

4. Démontrer que le champ de vecteurs $\xi|_{C''}$ n'est pas complet, et que la solution maximale v telle que $v(0) = (-1, 0)$ est définie sur l'intervalle $]-\tau, \tau[$ où τ est donné par

$$\tau = \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-1)}}$$

5. Soit $\overline{C}$ l'adhérence de C dans le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $\overline{C}$ est une variété de dimension 1, et que le champ de vecteurs ξ s'étend à $\overline{C}$ en un champ de vecteurs η dont la période sur $\overline{C''}$ est 2τ.

Structures euclidiennes

DÉFINITION 7.17. — *Soit* $E \to M$ *un fibré vectoriel sur une variété* M. *Une métrique euclidienne sur* E *est une section* $q : M \to \mathrm{Quad}(E)$ *du fibré des formes quadratiques sur* M, *telle que pour tout* $x \in M$, *la forme quadratique* $q(x) : E_x \to \mathbb{R}$ *soit positive non dégénérée.*

Un fibré équipé d'une métrique euclidienne q sera dit euclidien. On dispose alors dans chaque fibre E_x d'un produit scalaire $\langle , \rangle$, et d'une norme appelée norme euclidienne, souvent notée $| \, |$. Localement, à une trivialisation de E sur un ouvert U, définie par des sections locales $(e_1, \ldots, e_r)$ définissant en chaque point x de M un repère local de E_x, les coefficients de la matrice de la forme quadratique q

$$q_{i,j}(x) = \langle e_i, e_j \rangle$$

sont de classe C^∞.

DÉFINITION 7.18. — *Soit* M *une variété. La donnée d'une métrique euclidienne sur le fibré tangent* $\mathrm{TM} \to \mathrm{M}$ *définit une structure riemannienne sur* M.

PROPOSITION 7.19. — *Soit* $\mathrm{E} \to \mathrm{M}$ *un fibré vectoriel sur* M. *Alors il existe une métrique euclidienne sur* E.

Démonstration. Si E est le fibré trivial $\mathrm{M} \times \mathbb{R}^r \to \mathrm{M}$, une structure euclidienne sur $\mathbb{R}^r$ définit une structure euclidienne sur E. Dans le cas général, localement, on peut trivialiser E et obtenir ainsi un recouvrement de M par des ouverts U_i sur lesquels on dispose pour $\mathrm{E}|_{\mathrm{U}_i}$ d'une métrique euclidienne q_i. Soit μ_i un partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (\mathrm{U}_i)$. On considère la section de $\mathrm{Quad}(\mathrm{E}) \to \mathrm{M}$ définie par

$$q = \sum_i \mu_i q_i$$

Cette formule définit évidemment une section de classe C^∞, et en chaque point $x \in \mathrm{M}$, la forme quadratique $q(x)$ est positive non dégénérée, puisque c'est une somme finie de formes quadratiques positives, dont l'une au moins est positive non dégénérée.

PROPOSITION 7.20. — *Soit* $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ *un fibré vectoriel de rang* r, *équipé d'une métrique euclidienne* q. *L'ensemble des vecteurs* $e \in \mathrm{E}$ *tels que* $q(e) = 1$ *est une sous-variété* $\mathrm{S}(\mathrm{E})$ *de* E, *et la projection* $\pi : \mathrm{S}(\mathrm{E}) \to \mathrm{M}$ *est un fibré en sphères de dimension* $r - 1$ *localement trivial.*

La dernière assertion signifie qu'il existe recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (\mathrm{U}_i)$ et pour chaque $i \in \mathrm{I}$ un difféomorphisme $\varphi_i : \mathrm{U}_i \times \mathrm{S}_{r-1} \to \mathrm{S}(\mathrm{E})|_{\mathrm{U}}$ rendant commutatif

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}_i \times \mathrm{S}_{r-1} & \to & \mathrm{S(E)}|_{\mathrm{U}} \\ & \mathrm{pr}_1 \searrow & \downarrow \pi \\ & & \mathrm{U}_i \end{array}$$

LEMME 7.21. — *Localement, il existe un repère orthonormal de* E.

Démonstration. La démonstration est calquée sur la construction habituelle d'un repère orthonormal pour une forme quadratique positive non dégénérée.

On procède par récurrence sur r. Soit $x \in \mathrm{M}$, et e_1 une section locale de E sur un voisinage ouvert U de x, partout non nulle. En considérant $\frac{e_1}{|e_1|}$ on obtient une section de norme 1. Ceci termine la démonstration pour $r = 1$. Supposons maintenant $r > 1$, et considérons l'application $\pi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times \mathbb{R}$ définie par $f \mapsto (x, \langle f, e_1 \rangle)$. Ce morphisme de fibrés vectoriels est surjectif et l'image réciproque F de 0 par ce morphisme est d'après le lemme ci-dessus est un sous-fibré vectoriel de $\mathrm{E}|_{\mathrm{U}}$ de rang $r - 1$; il sera équipé de la métrique euclidienne induit par q. Il existe par hypothèse de récurrence un repère orthonormal local $e_2, \ldots, e_n$ pour F sur un voisinage ouvert $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ de x. Alors $(e_1, \ldots, e_r)$ est un repère orthonormal pour $q|_{\mathrm{V}}$.

Exercice 7.11

Soit $x \mapsto q(x)$ une famille de classe C^∞ de formes quadratiques positives non dégénérées sur $\mathbb{R}^r$, définissant une structure euclidienne sur le fibré trivial $\mathrm{M} \times \mathbb{R}^r$. Retrouver le résultat ci-dessus en utilisant le procédé de diagonalisation de Schmidt.

Démonstration de la proposition 7.20

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ un repère orthonormal local pour E au-dessus de U. Dans la trivialisation $\mathrm{E}|_{\mathrm{U}} \simeq \mathrm{U} \times \mathbb{R}^r$ associée, S(E) correspond aux couples (x, t) tels que $|t|^2 = 1$, où $|t|^2$ désigne la métrique euclidienne standard sur $\mathbb{R}_r$. Ainsi, l'image de $\mathrm{S(E)}|_{\mathrm{U}}$ est exactement le produit $\mathrm{U} \times \mathrm{S}_{r-1}$. D'où l'énoncé. □

Application aux variétés de dimension un

Considérons sur une variété M de dimension 1, une structure riemannienne. D'après la proposition ci-dessus, le fibré en sphères $\mathrm{S} \hookrightarrow \mathrm{TM}$ est un revêtement de degré 2 de M : c'est en particulier une variété de dimension 1, et le morphisme $\mathrm{S} \to \mathrm{M}$ est propre. En particulier, S est compacte si et seulement si M est compacte.

Pour chaque point $e \in \mathrm{S}$ d'image $x = \pi(e)$, la projection $\mathrm{T}\pi : \mathrm{T}_e\mathrm{S} \to \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ est un isomorphisme, et le morphisme canonique $\mathrm{S} \to \mathrm{TM}$ permet de définir sur S un champ de vecteurs ξ partout non nul tel que pour tout $e \in \mathrm{S}$ on ait

$$\mathrm{T}\pi(\xi(e)) = e.$$

On déduit du préambule que les composantes connexes de S sont difféomorphes à S_1 ou $\mathbb{R}$ suivant que M est compacte ou non. On va montrer que S a toujours deux composantes connexes, et que la restriction de π à l'une de ces composantes est un difféomorphisme, ce qui achèvera la démonstration. Nous allons utiliser le lemme suivant :

LEMME 7.22. — *Soit* $\mathrm{C} = \mathrm{S}_1$ *ou* $\mathbb{R}$. *Un difféomorphisme* $f : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ *qui renverse l'orientation a obligatoirement un point fixe.*

Démonstration. Dans le cas $\mathrm{C} = \mathbb{R}$, l'hypothèse signifie que f est une fonction de classe C^∞ à dérivée < 0. Le théorème des valeurs intermédiaire conduit au résultat.

Précisons ce que signifie l'énoncé dans le cas où $\mathrm{C} = \mathrm{S}_1$. Choisir une orientation dans un espace vectorien réel V de dimension 1 est par définition choisir une des composantes connexes de $\mathrm{V} \setminus \{0\}$. On dispose ici d'un champ de vecteurs partout non nul η sur S_1, donné par l'application $z \mapsto iz \in \mathbb{C}$. Dans chaque espace tangent ce champ de vecteurs définit donc une orientation. Ainsi, l'hypothèse signifie que pour tout $z \in \mathrm{S}_1$ on a $\mathrm{T}_z f(\eta(z)) = \mu i \eta(f(z))$ avec μ réel < 0. On va relever f en un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ qui renverse l'orientation, ce qui donnera le résultat.

LEMME 7.23. — *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{S}_1$ *une application de classe* C^∞; *il existe une application* ψ *de classe* $\mathrm{C}^\infty : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$e^{2i\pi\psi} = \varphi.$$

Deux tels relèvement ψ *différents par une constante entière.*

Démonstration. Considérons un réel ψ_0 tel que $e^{2i\pi\psi_0} = \varphi(0)$. On considère l'équation différentielle

$$\psi' = \frac{\varphi'}{2i\pi\varphi}$$

Cette équation différentielle a une solution unique sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à la condition initiale $\psi(0) = \psi_0$, donnée par

$$\psi(t) = \psi_0 + \int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds$$

On vérifie sans difficulté que cette application ψ satisfait aux conditions attendues. □

On considère alors l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{S}_1$ définie par $\varphi(t) = f(e^{2i\pi t})$. Il est clair que l'application ψ construite est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ qui renverse l'orientation, donc a un point fixe. Alors f a aussi un point fixe.

Fin de la démonstration

LEMME 7.24. — *La variété* S *a deux composantes connexes.*

Démonstration. Soit C une composante connexe de S. Alors C rencontre toute fibre de $\pi : \mathrm{S} \to \mathrm{M}$. En effet, C est à la fois un ouvert et un fermé de C et son image $\pi(\mathrm{C})$ est aussi un ouvert et un fermé de M. Puisque M est connexe, $\pi(\mathrm{C}) = \mathrm{M}$. On voit alors que S a au plus deux composantes connexes. Supposons que S soit connexe. Alors l'involution $\sigma : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ donnée par $\sigma(e) = -e$ renverse l'orientation : en effet, l'identité $\pi\sigma = \pi$ et la définition de ξ montre que $\mathrm{T}\sigma(\xi(e)) = -\xi(-e)$. Mais cette involution n'a pas de point fixe : ceci contradit le lemme 7.22.

Donc S a deux composantes connexes. Si C est l'une de ces composantes connexes, la projection $\pi : \mathrm{C} \to \mathrm{M}$ est alors bijective, c'est un difféomorphisme local : donc c'est un difféomorphisme. D'où le théorème. □

7.4. Interprétation géométrique du crochet

Soit ξ un champ de vecteurs sur une variété M; on suppose pour simplifier, que ξ est complet et on désigne par $u : \mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ le flot associé, et par $\{u_t\}$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes associé.

LEMME 7.25. — *Pour* $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ *, on a dans* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$

$$\frac{d}{dt}(u_t^* f)|_{t=0} = \theta_\xi(f).$$

Démonstration. Cette égalité signifie que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u_t^* f - f) = \theta_\xi(f)$$

au sens de la convergence uniforme C^∞ sur les compacts de M. La fonction $(t,x)\mapsto g(t,x) = u_t^* f(x)$, définie sur $\mathbb{R}\times M$ est de classe C^∞ puisqu'elle coïncide avec $u^* f$. Ainsi, la limite ci-dessus existe et n'est autre que la dérivée partielle $x\mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(0,x)$. Mais puisque $g(t,x) = f(u(t,x))$ cette dérivée partielle est donnée en $(0,x)$ par $\theta_\xi(f)(x)$. D'où l'énoncé. □

PROPOSITION 7.26. — *Soient ξ un champ de vecteurs complet sur* M, $\{u_t\}$ *le groupe à un paramètre associé, et η un autre champ de vecteurs sur* M. *On a au sens de la topologie de la convergence uniforme* C^∞ *sur les compacts de* M

$$\frac{d}{dt}u_{t*}(\eta)|_{t=0} = -[\xi,\eta].$$

Autrement dit

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u_{t*}(\eta) - \eta) = -[\xi,\eta].$$

Avant de démontrer cet énoncé, on doit étendre le lemme 7.259.27 précédent au cas d'une famille g_t de fonctions de $C^\infty(M)$.

LEMME 7.27. — *Soit $g : \mathbb{R}\times M\to\mathbb{R}$ une fonction de classe* C^∞. *On pose $g_t(x) = g(t,x)$. Alors*

$$\frac{d}{dt}(u_t^*(g_t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(g_t)|_{t=0} + \theta_\xi(g_0)$$

Démonstration. La fonction $(t,x)\mapsto u_t^* g_t(x) = g(t,u(t,x))$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times M$. Il s'agit de calculer sa dérivée partielle par rapport à t au point $(0,x)$. Le résultat est donc évident. □

Démonstration de la proposition 7.26

Si $D\in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ l'application $C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ définie par $f\mapsto Df$ est continue, pour la topologie de la convergence uniforme C^∞ sur les compacts de M. On munit l'espace vectoriel $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ de la topologie suivante. Pour tout

voisinage W de 0 dans $C^\infty(M)$ et $f \in C^\infty(M)$ on considère les parties $\mathscr{V}_{W,f}$ de $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ formées des dérivations D telles que $Df \in W$; ces parties constituent un base de voisinages de 0 d'une topologie invariante par translation. Pour cette topologie l'isomorphisme $\Theta(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ est un homéomorphisme. Il suffit alors de montrer que pour tout $f \in C^\infty(M)$ la fonction $t \to \theta_{u_{t*}(\eta)}(f)$ est dérivable pour $t = 0$, et a pour dérivée $-\theta_{[\xi,\eta]}(f)$. On sait que la dérivation associée au champ de vecteurs $u_{t*}(\eta)$ est donnée par $f \mapsto u_{t*}\theta_\eta u_t^*(f)$. Considérons la famille de fonctions C^∞ sur M définie par

$$g_t = \theta_\eta(u_t^*(f))$$

à laquelle on applique le lemme ci-dessus. On obtient, compte-tenu du lemme 7.259.27

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u_{t*}\theta_\eta u_t^*(f))|_{t=0} &= \theta_\eta\theta_\xi(f) - \theta_\xi\theta_\eta(f) \\ &= -\theta_{[\xi,\eta]}(f)\end{aligned}$$

D'où la proposition. □

COROLLAIRE 7.28. — *Soient ξ et η deux champs de vecteurs complets, et $\{u_t\}$ et $\{v_s\}$ les groupes à un paramètre associés. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *le crochet $[\xi, \eta]$ est nul ;*

(ii) *Pour tout t et $s \in \mathbb{R}$, on a $u_t v_s = v_s u_t$.*

Démonstration. On a $u_{t+h} = u_t \circ u_h$, et par suite la dérivée de $t \mapsto u_{t*}(\eta)$ à l'instant t est $-u_{t*}([\xi, \eta])$. Il en résulte que $[\xi, \eta] = 0$ si et seulement si $t \mapsto u_{t*}(\eta)$ est constant. Or, d'après l'exercice 7.8, le groupe à un paramètre associé à ce champ de vecteurs est $s \mapsto u_t v_s u_t^{-1}$. Ainsi, la condition (i) est équivalente à $u_t v_s u_t^{-1} = v_s$ pour tout s et $t \in \mathbb{R}$. □

Exercice 7.12

Soient ξ et η deux champs de vecteurs complets sur $\mathbb{R}^n$, de groupes à un paramètre associés $\{u_t\}$ et $\{v_s\}$. Soit x un point de $\mathbb{R}^n$. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$F(s,t) = v_{-s}u_{-t}v_s u_t(x)$$

1. Montrer que $\dfrac{\partial F}{\partial t}(s,0) = (\xi - v_{-s*}(\xi))(x)$.

2. En déduire que

$$\mathrm{F}(s,t) = x + st[\xi,\eta](x) + \epsilon(s,t)(s^2+t^2)$$

où $\epsilon(s,t)$ tend vers 0 quand $(s,t) \to (0,0)$.

Exercice 7.13

Soient M une variété de dimension n, et ξ un champ de vecteurs sur M non nul en un point $a \in \mathrm{M}$.

1. Soit Z une petite sous-variété de X de codimension 1, passant par a et transverse à la trajectoire de ξ passant par a. Soit $u(t,x)$ le flot local au voisinage de a. Montrer que $(t,x) \to u(t,x)$ est un difféomorphisme local au voisinage de $(0,a)$

2. Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ au voisinage U de a tel que

$$\varphi_*(\xi|_{\mathrm{U}}) = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Exercice 7.14

Soit M une variété de dimension n, et ξ et η deux champs de vecteurs sur M tels que $[\xi,\eta] = 0$. On suppose que ces champs de vecteurs sont indépendants en un point a. Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ au voisinage U de a tel que

$$\varphi_*(\xi|_{\mathrm{U}}) = \frac{\partial}{\partial x_1} \ ; \ \varphi_*(\eta|_{\mathrm{U}}) = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

7.5. Application exponentielle

Soit G un groupe de Lie, d'élément neutre e, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{T}_e\mathrm{G}$. Les champs de vecteurs invariants à gauche constituent une sous-algèbre de Lie $\Theta(\mathrm{G})^{\mathrm{G}}$ de $\Theta(\mathrm{G})$, et l'application $\Theta(\mathrm{G})^{\mathrm{G}} \to \mathfrak{g}$ définie par $\xi \mapsto \xi(e)$ est, par définition de la structure d'algèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ un isomorphisme : un vecteur $v \in \mathfrak{g} = \mathrm{T}_e\mathrm{G}$ définit un champ de vecteurs invariant à gauche ξ de la manière suivant : soit γ_g la translation $x \mapsto gx$; on pose

$$\xi(g) = \mathrm{T}_e\gamma_g(v)$$

Plus rapidement, on notera $g.v = \mathrm{T}_e\gamma_g(v)$.

Exercice 7.15
Démontrer que $g \mapsto \xi(g) = g.v$ est de classe C^∞.

PROPOSITION 7.29. — *Tout champ de vecteurs invariant à gauche sur* G *est complet.*

Démonstration. Soit $t \mapsto u(t,x)$ la solution maximale telle que $u(0,x) = x$, définie sur un intervalle I_x contenant l'origine. Alors $t \mapsto g^{-1}u(t,gx)$ coïncide avec cette solution maximale : ainsi $I_{gx} = I_x$ le flot de ξ est défini sur $I \times G$, où $I = I_e$. Chaque fois que t et $t' \in I$, on a $t + t' \in I$ et la relation $u(t', u(t,x)) = u(t+t', x)$ est alors vraie. Ceci implique que I doit être stable par addition, et donc $I = \mathbb{R}$.

DÉFINITION 7.30. — *Soit $(t,x) \to u(t,x)$ le flot associé au champ de vecteurs invariant à gauche $g \mapsto g.v$ défini par le vecteur $v \in \mathfrak{g}$. On pose, pour*

$$\exp(v) = u(1,e)$$

Exemple
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Considérons sur le groupe de Lie $G = GL(E)$, le champ de vecteurs invariant à gauche ξ associé à $v \in End(E)$ est donné par $g \mapsto gv \in End(E)$. La solution maximale qui passe par $e = id_E$ à l'instant $t = 0$ est donnée par

$$u(t,e) = \sum_{n \geq 0} t^n \frac{v^n}{n!}$$

et par conséquent, on a

$$\exp(v) = \sum_{n \geq 0} \frac{v^n}{n!}$$

Propriétés de l'application exponentielle

1. On a pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\exp(sv) = u(s,e)$ En effet, le champ de vecteurs associé à sv est $s\xi$. Alors le flot associé est $t \mapsto u(ts,x)$. D'où le résultat en faisant $t = 1$.

2. Le flot associé au champ de vecteurs ξ est donné par

$$u(t,x) = x \exp(tv).$$

En effet, puisque ξ est invariant par translation à gauche, on a pour le flot associé $x^{-1}u(t,xy) = u(t,y)$ pour tout $x \in \mathrm{G}$ et $y \in \mathrm{G}$. On obtient le résultat en faisant dans cette égalité $y = e$.

3. L'application $t \mapsto \exp(tv)$ est un homomorphisme de groupes $\mathbb{R} \to \mathrm{G}$. En effet, d'après la propriété 2, $u(t+t',e) = u(t,u(t',e)) = u(t',e)u(t,e)$.

4. L'application $\mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ définie par $v \mapsto \exp(v)$ est de classe C^∞, et sa différentielle en 0 est $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

Cet énoncé résulterait d'un énoncé général portant sur les équations différentielles dépendant d'un paramètre. On le montre ici directement : considérons sur la variété produit $\mathrm{G} \times \mathrm{T}_e\mathrm{G}$ le champ de vecteurs $(g,v) \mapsto (g.v, 0)$. Ce champ de vecteurs a pour flot $(t,(g,v)) \mapsto (g\exp(tv), v)$; il est donc complet de classe C^∞. Il en résulte en particulier que $v \mapsto \exp(v)$ est de classe C^∞. Pour trouver l'pplication linéaire tangente en 0 de cette application, il suffit de calculer la dérivée de $t \mapsto \exp(tv)$: on obtient que $d_0\exp.v$ est la vitesse à l'instant $t = 0$ de la trajectoire $t \mapsto \exp(tv)$, c'est-à-dire v.

5. Fonctorialité : si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est un homomorphisme de groupes de Lie, d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\mathrm{T}_e f} & \mathfrak{g}' \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathrm{G} & \xrightarrow{f} & \mathrm{G}' \end{array}$$

est commutatif. En effet, pour tout $g \in \mathrm{G}$ on a $f(g).\mathrm{T}_e f(v) = \mathrm{T}_g f(g.v)$. L'application $\mathbb{R} \to \mathrm{G}$ définie par $t \mapsto f(\exp(tv))$ vaut e pour $t = 0$ et a pour dérivée à l'instant t

$$\mathrm{T}_{\exp(tv)}(\exp(tv)v) = f(\exp(tv)).\mathrm{T}_e g(v)$$

et par suite $f(\exp(tv)) = \exp(t\mathrm{T}_e f.v)$.

Exercice 7.16

Soit E un espace vectoriel. Soient v et $w \in \mathrm{End}(\mathrm{E})$, de champs de vecteurs invariants à gauche associés ξ et η. Soit $u_t(x) = x\exp(tv)$.

1. Montrer que $u_{t*}(\eta)(x) = x\exp(-tv)w\exp(tv)$.

2. Déduire de la proposition 7.26 que le crochet sur l'algèbre de Lie End(E) de GL(E) est le crochet habituel $[v,w] = vw - wv$.

PROPOSITION 7.31. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe. Alors* G *est abélien si et seulement si l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *de* G *est de crochet nul.*

Démonstration. Soient ξ et η deux champs de vecteurs invariants à gauche, de groupes à 1 paramètre associés $\{u_t = \exp(tv)\}$ et v_s. D'après la propriété 2 ci-dessus, on

$$u(t, v(s,x)) = xv(s,e)u(t,e)$$

pour tout $x \in \mathrm{G}$ et tout s et $t \in \mathbb{R}$. Si G est abélien, ces deux groupes à un paramètre commutent. Il résulte du corollaire 7.28 que le crochet $[\xi, \eta]$ est nul.

Réciproquement, supposons que le crochet soit nul. Alors, pour v et $w \in \mathfrak{g}$ on a d'après le corollaire 7.28 $\exp(tv)\exp(tw) = \exp(tw)\exp(tv)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et v et $w \in \mathfrak{g}$. Puisque $d_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, d'après le théorème d'inversion locale, l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage V de e. Pour x et $y \in \mathrm{V}$, on a donc $xy = yx$. Considérons, pour $x \in \mathrm{G}$, l'automorphisme intérieur défini par $\varphi_x : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ défini par $y \mapsto yxy^{-1}$. Pour $x \in \mathrm{V}$, on a φ_x coïncide avec l'identité sur V. Mais l'ensemble des points $y \in \mathrm{G}$ tels que $\varphi_x(y) = y$ est un sous-groupe de G, qui contient V. Ce sous-groupe est alors à la fois ouvert et fermé, et donc, en raison de la connexité de G, c'est G. Mais alors le noyau de l'homomorphisme $x \mapsto \varphi_x$ est aussi un sous-groupe à la fois ouvert et fermé. Donc $\varphi_x = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ pour tout $x \in \mathrm{G}$. Ceci signifie que G est un groupe abélien. □

Exercice 7.17

1. Soit G un groupe de Lie abélien, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Montrer que l'application $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ a pour image la composante connexe G^0 de l'élément neutre. Montrer que $\exp : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}^0$ est un revêtement.

2. Démontrer que la composante connexe de l'élément neutre de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ est le groupe $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de déterminant > 0.

3. Montrer que la matrice $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ n'appartient pas à l'image de l'application exponentielle.

7.6. Le théorème d'Ereshmann

On a déjà démontré dans la section 4 qu'une application étale et propre est un revêtement. Le théorème d'Ereshman étend ce résultat à toutes les submersions propres. On va définir la notion de fibré localement trivial.

DÉFINITION 7.32. — *Un morphisme de variétés $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$ est appelé un fibré localement trivial si f est surjective, et si pour tout $b \in \mathrm{B}$ il existe un voisinage ouvert V de b dans B, une variété F et un difféomorphisme $f^{-1}(\mathrm{V}) \to \mathrm{V} \times \mathrm{F}$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\mathrm{V}) & \to & \mathrm{V} \times \mathrm{F} \\ & f\searrow & \downarrow \mathrm{pr}_1 \\ & & \mathrm{B} \end{array}$$

Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$ est un fibré localement trivial, et F la fibre au-dessus d'un point fixé $b_0 \in \mathrm{B}$. Si B est connexe, les autres fibres $f^{-1}(b)$ sont difféomorphes à F.

THÉORÈME 7.33. — *Une submersion propre $f : \mathrm{X} \to \mathrm{B}$ est un fibré localement trivial sur* B.

Démonstration.

Relèvement des champs de vecteurs

On munit la variété X d'une structure riemanienne. Considérons l'image réciproque $\mathrm{X} \times \mathrm{TB}$ du fibré tangent à B : rappelons que l'espace total de ce fibré vectoriel est la sous-variété $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{TB}$ des couples $(x, t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{TB}$ tels que $f(x) = \pi(t)$. On a un morphisme surjectif de fibrés vectoriels $\mathrm{T}f : \mathrm{TX} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{TB}$ défini par $(x, t) \mapsto (x, \mathrm{T}_x f(t))$ dont le noyau N, restreint à une fibre de f, s'identifie au fibré tangent à cette fibre. Considérons le sous-fibré orthogonal $\mathrm{S} = \ker \mathrm{T}f$: c'est bien un sous-fibré d'après la proposition 5.9 parce que c'est le noyau du morphisme surjectif $\mathrm{TX} \to \mathrm{N}^*$ qui associe à un vecteur tangent $t \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ la forme linéaire sur N_x définie

$$u \mapsto \langle t, u \rangle$$

pour $u \in \mathrm{N}_x$. De plus, la restriction $\mathrm{T}f|_{\mathrm{S}} : \mathrm{S} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{TB}$ est alors un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Considérons un champ de vecteurs η sur B. Alors il existe un unique champ de vecteurs ξ sur X tel que $\xi(x) \in \mathrm{S}_x$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tel que

$$\mathrm{T}_x f(\xi(x)) = \eta(f(x)).$$

En effet, le champ de vecteurs η fournit une section $\eta \circ f$ du fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{B}} \mathrm{TB}$ et donc, via l'isomorphisme ci-dessus une section ξ de S qui est le champ de vecteurs

attendu. C'est bien entendu le seul qui satisfait aux conditions imposées. On dit que ξ est le relèvement du champ de vecteurs η.

LEMME 7.34. — *Soit η un champ de vecteurs complet sur* B, *et v $\mathbb{R} \times \mathrm{B}$ le flot associé. Soit ξ le relèvement du champ de vecteurs η. Alors le flot u de ξ est complet et on a pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathrm{X}$*

$$f(u(t,x)) = v(t, f(x)).$$

Démonstration. Considérons le flot u de ξ. L'application $t \mapsto f(u(t,x))$ vaut $f(x)$ pour $t = 0$ et a pour dérivée à l'instant t

$$\mathrm{T}_x f(\xi(u(t,x)) = \eta(f(u(t,x)).$$

Soit I_x l'intervalle sur laquelle est définie $t \to u(t,x)$, et supposons $\mathrm{I}_x \neq \mathbb{R}$. Soit $a \in \partial \mathrm{I}_x$. Alors $\lim_{t \to a} u(t,x) = \infty$; puisque f est propre on a aussi $\lim_{t \to a} f(u(t,x)) = \infty$. Ainsi, $t \to f(u(t,x))$ est bien la solution maximale $t \subset v(t, f(x))$ de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs η. Ceci contredit l'hypothèse que ce champ de vecteur est complet. Donc $\mathrm{I}_x = \mathbb{R}$. □

Fin de la démonstration.

La question est locale sur B ; on peut donc supposer que $\mathrm{B} = \mathbb{R}^n$. On désigne par e_i la base de $\mathbb{R}^n$, et les coordonnées par $(x_1, \ldots, x_m)$. Considérons les champs de vecteurs $\eta_i = \partial_i$ sur $\mathbb{R}^m$. Ces champs de vecteurs sont complets : le flot associé à ∂_i est $(t,x) \mapsto x + te_i$. Considérons les relèvements $\xi_1, \ldots, \xi_m$ de ces champ de vecteurs. Ces champs de vecteurs sont encore complets ; désignons par $u_1, \ldots, u_m$) les flots associés ; et $u_{i,t}$ les groupes à un paramètre associés. Soit F la fibre de f au-dessus de 0. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathrm{F} \to \mathrm{X}$ définie par

$$(t_1, \ldots, t_m) \to (u_{m,t_m} \circ \ldots \circ u_{1,t_1}(x)).$$

On a d'après le lemme précédent $f(\varphi(t,x)) = t$, ce qui signifie que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m \times \mathrm{F} & \to & \mathrm{X} \\ & \mathrm{pr}_1 \searrow & \downarrow f \\ & & \mathrm{B} \end{array}$$

est commutatif. D'autre part, φ est un difféomorphisme : si on désigne par $t_i = f_i(x)$ les composantes de f, l'inverse de φ est donnée par l'application $X \to \mathbb{R}^m \times F$ définie par

$$x \mapsto (f(x), u_{1,-f_1(x)} \circ \ldots \circ u_{m,-f_m(x)}(x)).$$

Ceci achève la démonstration. □

Hypersurfaces de niveau, et fonctions de Morse

Considérons sur une variété compacte M de dimension n une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On rappelle que si $c \in \mathbb{R}$ n'est pas une valeur critique de f, la fibre $M_c = f^{-1}(c)$ est une sous-variété de M appelée hypersurface de niveau. Le fermé de M défini par l'inégalité $f \leq c$ est une variété à bord (*cf.* §9.2).

PROPOSITION 7.35. — *Considérons deux nombres réels $c < c'$; on suppose que f n'a pas de valeurs critiques entre c et c'. Alors les hypersurfaces de niveau M_c et $M_{c'}$ sont difféomorphes.*

Démonstration. L'ensemble des valeurs critiques est un fermé. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas de valeurs critiques et contenant c et c'. Soit U l'image réciproque de I. Alors $f : U \to I$ est une submersion propre. Donc les fibres $f^{-1}(c)$ et $f^{-1}(c')$ sont difféomorphes. □

Exercice 7.18

Montrer, sur un exemple, que le type topologique des hypersurfaces de niveau change au passage des valeurs critiques.

DÉFINITION 7.36. — *Soit une métrique riemannienne sur* M, *et f une fonction de classe* C^∞ *sur* M. *Le champ de gradient* grad f *sur* M *est défini par l'image réciproque de la section df par l'isomorphisme de fibrés vectoriels* $TM \to T^*M$ *associé à la structure riemannienne; autrement dit, pour tout* $t \in T_xM$,

$$\langle \operatorname{grad}_x f, t \rangle = d_x f.t.$$

Exercice 7.19

Soit $\frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs canonique sur $\mathbb{R}$. Montrer que le champ de vecteurs

$$\xi(x) = \frac{\operatorname{grad}_x f}{|\operatorname{grad}_x f|^2}$$

est le relèvement de $\frac{\partial}{\partial t}$ sur le complémentaire du fermé des points critiques de f.

Exercice 7.20

On suppose que $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ n'a pas de valeurs critiques entre c et c'.

1. Soit I un intervalle ouvert contenant $[c, c']$ et ne contenant pas de valeurs critiques. Trouver un champ de vecteurs complet sur M qui coïncide avec η sur $[c, c']$, et qui soit nul en dehors de I.

2. En déduire qu'il existe un groupe à un paramètre de difféomorphismes $\phi_t : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ tel que pour tout $0 \leq t \leq c' - c$

$$\phi_t(\{x \in \mathrm{M}, f(x) \leq c\}) = \{x \in \mathrm{M}, f(x) \leq c + t\},$$

et $\phi(\mathrm{M}_c) = \mathrm{M}_{c+t}$.

Passage des valeurs critiques

Rappelons que le Hessien d'une fonction $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ a un sens en un point critique a de f. En effet, soit g l'expression locale de f dans une carte locale $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}' \subset \mathbb{R}^n$ au voisinage de a. Soit $\varphi(a) = b$; la forme quadratique $\mathrm{H}_b g \circ \mathrm{T}_a \varphi$ est indépendante du choix de la carte locale : en effet, si $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathrm{M}$ est un chemin dérivable tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$ on a

$$f(\gamma(t)) = f(a) + \frac{t^2}{2}\mathrm{H}_b g(\mathrm{T}_a \varphi(v)) + \epsilon(t)|t|^2$$

avec $\lim_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$. Le premier membre ne dépendant pas de φ, il en est de même du second membre. Le Hessien de f au point critique a est par définition la forme quadratique $\mathrm{T}_a\mathrm{M} \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{H}_a f = \mathrm{H}_b g \circ \mathrm{T}_a \varphi.$$

Si cette forme quadratique est non dégénérée, on dit que a est point critique non dégénéré. Un point critique a non dégénéré est dit d'indice p si $\mathrm{H}_a f$ est de signature $(n-p, p)$ Il revient au même de dire que $b = \varphi(a)$ est un point critique non dégénéré pour l'expresion g de f dans la carte φ.

DÉFINITION 7.37. — *Soit* M *une variété compacte. Une fonction de Morse sur* M *est une fonction qui n'a que des points critiques non dégénérés, et qui prend des valeurs différentes aux points critiques.*

Si f est une fonction de Morse sur M, elle a un nombre fini de valeurs critiques. On peut démontrer qu'il existe toujours des fonctions de Morse.

Exercice 7.21

Soit M une variété compacte de dimension n, et f une fonction de Morse sur M. On suppose que c est valeur critique, et que le point critique a correspondant est d'indice p. Soit $x \mapsto \varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ une carte locale sur un voisinage ouvert U de a, telle que $\varphi(a) = 0$ et

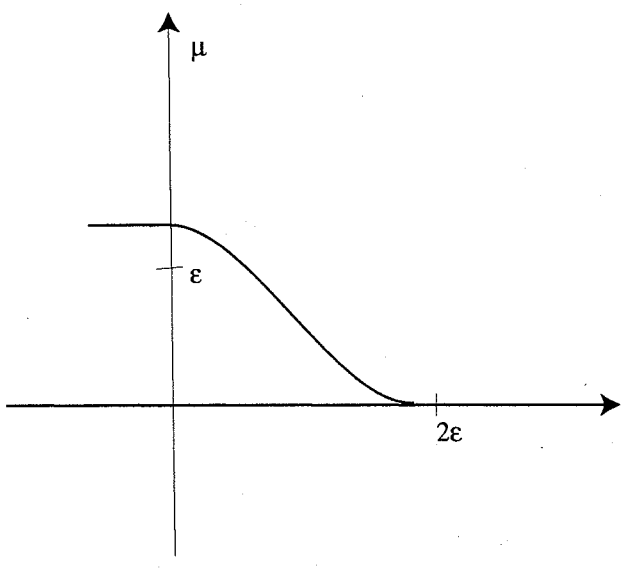
$$f(x) = c - x_1^2 - \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

Un telle carte locale existe d'après le lemme de Morse. On pose $\xi = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ et $\eta = x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2$, de sorte que sur U, on a $f = c - \xi + \eta$. On choisit un réel $\epsilon > 0$ assez petit pour que c soit la seule valeur critique de f dans l'intervalle $[c - \epsilon, c + \epsilon]$ et pour que l'image de U par φ contienne la boule fermée définie par $\xi + \eta \leq 2\epsilon$. Choisissons une fonction $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que

a) $\mu(0) > \epsilon$;

b) $-1 < \mu'(t) \leq 0$;

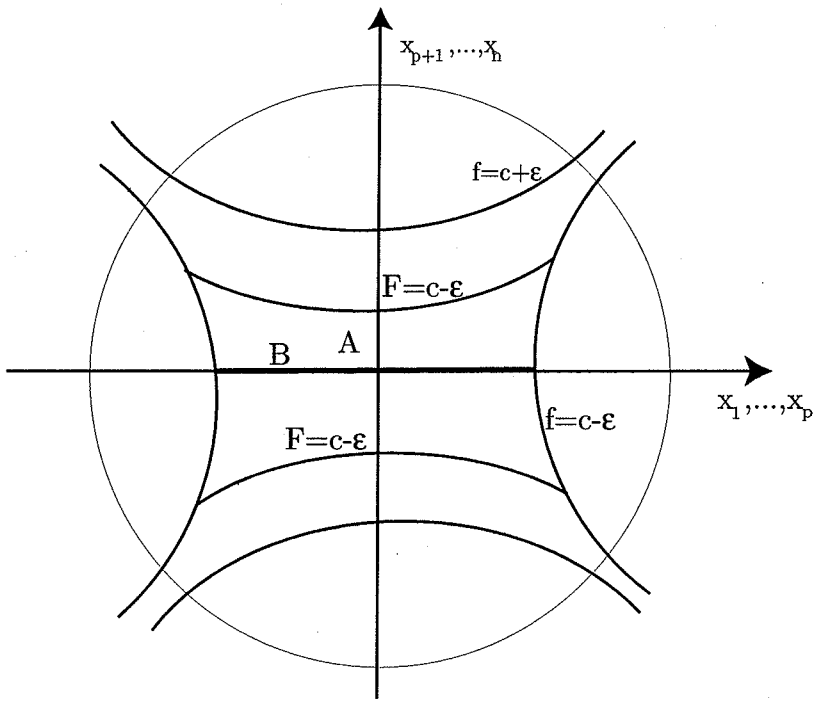
c) $\mu(t) = 0$ pour $t \geq 2\epsilon$.



On pose sur U

$$\mathrm{F} = f - \mu(\xi + 2\eta)$$

La fonction F coïncide avec f en dehors de l'ellipsoïde $\xi + 2\eta \leq 2\epsilon$ et par suite elle se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur M, notée encore F.



Attachement d'une anse, dans les coordonnées de Morse

1. Démontrer que a est le seul point critique de F dans U. La valeur critique de F en a est $\mathrm{F}(a) = c - \mu(0) < c - \epsilon$.

2. En déduire qu'il existe un groupe à un paramètre de difféomorphismes (ϕ_t) de M tel que pour $0 \leq t \leq 1$

$$\phi_t(\{\mathrm{F} \leq c - \epsilon\}) = \{\mathrm{F} \leq c + (2t - 1)\epsilon\}$$

Montrer que pour $t = 1$ le membre de droite est aussi la variété à bord $\mathrm{M}_+ = \{f \leq c + \epsilon\}$.

3. Vérifier que la variété à bord $\{\mathrm{F} \leq c - \epsilon\}$ est la réunion de la variété à bord $\mathrm{M}_- = \{f \leq c - \epsilon\}$ et de la région $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ définie par

$$-\epsilon \leq -\xi + \eta \leq \mu(\xi + 2\eta) - \epsilon.$$

Soit B la boule de dimension p définie par $\{\xi \leq \epsilon, \eta = 0\}$. Démontrer qu'il existe une application continue $h : [0,1] \times \mathrm{M}_+ \to \mathrm{M}_+$ satisfaisant aux conditions suivantes

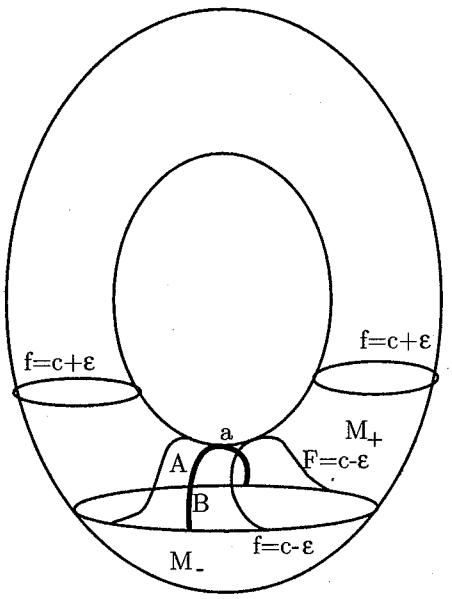
a) Pour tout $x \in \mathrm{M}_+$, $h(1,x) = x$

b) Pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in \mathrm{M}_- \cup \mathrm{B}$, $h(t,x) = x$.

On dit que h est une rétraction par déformation de M_+ sur $\mathrm{M}_- \cup \mathrm{B}$. L'espace topologique $\mathrm{M}_- \cup \mathrm{B}$ est obtenu à partir de M_- en attachant une boule de dimension p suivant la sphère de dimension $p-1$ définie par les équations

$$\xi = \epsilon, \eta = 0.$$

On dit que l'on a attaché à M_- une cellule de dimension p. La variété à bord $\mathrm{F} \leq c - \epsilon$ est obtenue à partir de M_- en attachant le fermé A qui est appelé anse d'indice p. Dans le cas particulier $p = 0$, la variété à bord $\mathrm{F} \leq c_\epsilon$ est un disque compact de dimension m, disjoint de M_-. Dans le cas où $p = n$, cette variété à bord s'obtient en attachant à M_- un disque compact le long de la sphère S_{n-1} ci-dessus.



Attachement d'une anse d'indice 1

On peut ainsi, en procédant point critique après point critique, reconstruire la variété M à homotopie près ; par exemple, il suffit de se donner, pour reconstruire M_+ à homotopie près à partir de M_-, l'application $\mathrm{S}_{p-1} \to \mathrm{M}_-$ qui permet d'attacher la cellule B de dimension p à M_-. Soit $\mathrm{C}(f)$ l'ensemble des points critiques de f, et $\mathrm{I}(f,a)$ l'indice du point critique $a \in \mathrm{C}(f)$. Un peu de topologie

algébrique permet de déduire facilement de là (*cf.* [3],chapitre 13, ou [7]) que la somme

$$\sum_{a \in C(f)} (-1)^{I(f,a)}$$

est un invariant qui ne dépend pas de la fonction de Morse choisie. C'est en fait un invariant topologique appelé caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ dont nous verrons la définition au chapitre 3.

Chapitre 3

Le fibré cotangent

On aborde ici l'étude des formes différentielles extérieures, et du complexe de de Rham. Il permet d'associer à une variété M des invariants topologiques, appelés nombres de Betti. La formule de Stokes sera démontrée pour les variétés à bord ; il existe des versions voisines, qui découlent de celle qui est présentée ici. Elles font intervenir l'intégration sur des simplexes différentiables, qui généralise l'intégration sur les chemins pour les formes différentielles de degré 1. Comme application, nous introduisons le degré des morphismes de variétés compactes connexes orientées de même dimension, et nous démontrons le théorème de Poincaré-Hopf reliant l'indice des zéros des champs de vecteurs à la caractéristique d'Euler-Poincaré, en nous servant du résultat concernant l'existence des fonctions de Morse, et du calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré en fonction de l'indice des points critiques d'une telle fonction de Morse. Les applications de la formule de Stokes abondent dans la littérature. Celle qui est présentée ici, inspirée de [6] peut être considérée comme une introduction à la théorie des classes caractéristiques. Nous commençons par introduire l'algèbre extérieure associée à un espace vectoriel.

8. Formes différentielles

8.1. Algèbre extérieure

Puissance extérieure

DÉFINITION 8.1. — *Soit* E *un espace vectoriel réel de dimension n. On appelle puissance extérieure p−ième de* E *un couple* $(\Lambda^p \mathrm{E}, \phi)$ *formé d'un espace vectoriel* $\Lambda^p \mathrm{E}$ *et d'une application p−linéaire alternée* $\phi : \mathrm{E} \times \ldots \times \mathrm{E} \to \Lambda^p \mathrm{E}$, *satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute application p−linéaire alternée* $f : \mathrm{E} \times \ldots \times \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *il existe une application linéaire et une seule* $g : \Lambda^p \mathrm{E} \to \mathrm{F}$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}\times\ldots\times\mathrm{E} & & \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & \searrow^{f} & \\ \Lambda^p\mathrm{E} & \xrightarrow{g} & \mathrm{F} \end{array}$$

Construction :

On considère l'espace vectoriel $\mathrm{F} = \mathbb{R}^{(\mathrm{E}^p)}$ des applications $\mathrm{E}^p \to \mathbb{R}$ nulles en dehors d'un nombre fini de points. On a une injection $\mathrm{E}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^{(\mathrm{E}^p)}$ qui associe à un point $x \in \mathrm{E}^p$ l'application δ_x nulle en dehors de x et qui vaut 1 a au point x. On identifie E^p à son image dans F, de sorte que E^p est une base de l'espace vectoriel $\mathrm{F} = \mathbb{R}^{(\mathrm{E}^p)}$. On note $[x]$ l'image de $x \in \mathrm{E}^p$ par δ. Le groupe $\mathfrak{S}_p$ opère sur E^p par permutation des facteurs. Soit J le sous-espace vectoriel de F engendré par les éléments

$$[\lambda u + \mu v, z] - \lambda[u, z] - \mu[v, z]$$

où λ et μ sont des scalaires, u et $v \in \mathrm{E}$ et $z \in \mathrm{E}^{p-1}$, et par les éléments et

$$[\tau x] + [x]$$

où τ est une transposition, et x un point de E^p. Soit $\wedge^p\mathrm{E}$ l'espace vectoriel quotient F/J. L'inclusion $\mathrm{E}^p \hookrightarrow \mathrm{F}$ fournit une application multilinéaire $\phi : \mathrm{E}\times\ldots\times\mathrm{E} \to \mathrm{F}/\mathrm{J} = \wedge^p\mathrm{E}$.

Exercice 8.1

1) Vérifier que le couple $(\Lambda^p\mathrm{E}, \phi)$ ainsi construit satisfait à la propriété universelle attendue.

2) En utilisant la propriété universelle, montrer qu'un tel couple est unique à isomorphisme près.

L'application $p-$linéaire alternée ϕ sera notée $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ pour $x_i \in \mathrm{E}$. Cet espace vectoriel s'appelle la puissance extérieure $p-$ième de E, et ses éléments s'appellent les $p-$vecteurs. On dispose d'un accouplement $\Lambda^p\mathrm{E} \times \Lambda^q\mathrm{E} \to \Lambda^{p+q}\mathrm{E}$, noté $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ satisfaisant à la propriété d'anticommutativité suivante :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha.$$

Par convention, on pose $\Lambda^0 \mathrm{E} = \mathbb{R}$. La somme directe $\Lambda \mathrm{E} = \oplus_{p\in\mathbb{N}} \Lambda^p \mathrm{E}$, est alors munie naturellement d'une structure d'algèbre unitaire qu'on appelle algèbre extérieure de E.

Propriétés

(i) Si $(e_1, ..., e_n)$ est un système de générateurs de E alors les $p-$vecteurs $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, où $i_1 < \ldots < i_p$ engendrent $\Lambda^p \mathrm{E}$. Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, ces $p-$vecteurs constituent une base de $\Lambda^p \mathrm{E}$.

(ii) Il existe une application linéaire

$$\Phi : \Lambda^p \mathrm{E}^* \to (\Lambda^p \mathrm{E})^*$$

caractérisée par la propriété suivante : $\Phi(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p)(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = \det(f_i(x_j))$. Le membre de droite n'est autre que l'espace vectoriel $\mathscr{F}^p$ des formes $p-$linéaires alternées sur E. Cet isomorphisme permet de munir de manière naturelle la somme directe

$$\mathscr{F} = \oplus_{p\in\mathbb{N}} \mathscr{F}^p$$

d'une structure d'algèbre unitaire anticommutative.

(iii) Si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ est une application linéaire, on lui associe une application linéaire

$$\Lambda^p u : \Lambda^p \mathrm{E} \to \Lambda^p \mathrm{E}'$$

caractérisée par la propriété suivante $\Lambda^p u(x_1 \wedge \ldots \wedge x_p) = u(x_1) \wedge \ldots \wedge u(x_p)$.

Si u est un endomorphisme de E, $\Lambda^n u$ est l'homothétie de rapport $\det u$.

Exercice 8.2

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, muni d'une métrique euclienne et orienté. Montrer qu'il existe dans $\wedge^n \mathrm{E}$ un élément canonique Ω associé à ces données.

Exercice 8.3

Soit E un espace vectoriel de dimension 4. On considère la grassmannienne $\mathrm{G} = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{E})$ des sous-espaces vectoriels h de dimension 2 de E.

1. Démontrer que l'application

$$\phi : \mathrm{Grass}(2, \mathrm{E}) \to \mathrm{P}(\wedge^2 \mathrm{E})$$

qui associe à h la droite vectorielle $\wedge^2 h$ de $\wedge^2 \mathrm{E}$ est un morphisme de variétés de rang constant. Montrer qu'en fait ϕ est un plongement. Montrer que l'image réciproque de G par la projection $\wedge^2 \mathrm{E} \to \mathrm{P}(\wedge^2 \mathrm{E})$ correspond au cône des 2-vecteurs non nuls décomposables.

2. Soit $q : \wedge^2 \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $\alpha \wedge \alpha = q(\alpha)\Omega$. Trouver le rang et la signature de cette forme quadratique. Montrer que l'image de ϕ coincide avec l'hypersurface de $\mathrm{P}(\wedge^2 \mathrm{E})$ définie par l'équation $q = 0$.

3. Démontrer que la grassmannienne $\mathrm{G} = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{E})$ est difféomorphe la variété quotient de $\mathrm{S}_2 \times \mathrm{S}_2$ par l'involution $(\xi, \eta) \mapsto (-\xi, -\eta)$. En déduire que G est un fibré localement trivial de fibre S_2 au-dessus du plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (Utiliser par exemple le théorème d'Ereshman).

4. Cette question utilise les exercices 9.2 et 9.3. Montrer que G est une variété orientable (*cf.* définition 9.5). En déduire que le fibré ci-dessus n'est pas un fibré trivial.

5. Démontrer que la grassmannienne $\mathrm{G}_+ = \mathrm{Grass}_+(2, \mathrm{E})$ des plans orientés de E est difféomorphe à $\mathrm{S}_2 \times \mathrm{S}_2$.

Exercice 8.4

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et $\Omega \in \wedge^n \mathrm{E}$ l'élément canonique associé, défini par $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, où $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormée directe.

1. Montrer qu'il existe une application linéaire et une seule $* : \wedge^p \mathrm{E} \to \wedge^{n-p} \mathrm{E}$ caractérisée par la propriété suivante

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \Omega$$

pour α et $\beta \in \wedge^p \mathrm{E}$, où $\langle \alpha, \beta \rangle$ désigne le produit scalaire associé sur $\Lambda^p \mathrm{E}$. L'application $*$ est appelée opérateur de Hodge.

Vérifier que $*^2 = (-1)^{p(n-p)} \mathrm{id}_{\wedge^p \mathrm{E}}$

2. Soit $h \mapsto h^\perp$ l'application $\mathrm{Grass}(p, \mathrm{E}) \to \mathrm{Grass}(n-p, \mathrm{E})$ qui associe à un sous-espace vectoriel h son orthogonal. Montrer que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Grass}(p, \mathrm{E}) & \to & \mathrm{Grass}(n-p, \mathrm{E}) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \mathrm{P}(\wedge^p \mathrm{E}) & \xrightarrow{*} & \mathrm{P}(\wedge^{n-p} \mathrm{E}) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont les plongements qui généralisent le plongement de l'exercice 8.3.

8.2. Formes différentielles de degré un.

Fibré cotangent

Soit M une variété de classe C^∞. On désigne par A(M), ou simplement A, l'algèbre $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur M. Rappelons que si $E \to M$ est un fibré vectoriel de rang r sur M, l'ensemble $\Gamma(E)$ des sections de classe C^∞ de E est muni d'une structure de A−module en posant pour s et $t \in \Gamma(E)$, et $f \in A$

$$(s+t)(x) = s(x) + t(x) \ ; \ (fs)(x) = f(x)s(x)$$

Exercice 8.5

Soit E un fibré vectoriel de rang r sur une variété compacte M.

1. Démontrer qu'il existe un morphisme surjectif de fibrés vectoriels $\mathbb{R}^m_M \to E$.

2. En déduire que le A-module $\Gamma(E)$ est un A−module de type fini. (Cette propriété est vraie en fait sans hypothèse de compacité, mais la démonstration est alors beaucoup plus délicate).

3. Montrer que $\Gamma(E)$ est un A−module libre si et seulement si E est un fibré trivial (Utiliser l'exercice 5.10).

4. Démontrer que $\Gamma(E)$ est un A−module projectif (*i.e.* facteur direct d'un module libre) de type fini.

5. Réciproquement, soit Γ un A−module projectif de type fini. Démontrer qu'il existe un fibré vectoriel sur M dont le A−module des sections est isomorphe à Γ. (Par définition, Γ est facteur direct d'un module libre A^m. Soit $f : A^m \to A^m$ un projecteur d'image Γ. Démontrer que f définit un morphisme de fibrés vectoriel $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de rang constant. Utiliser alors l'exercice 5.9.

Considérons maintenant le fibré cotangent $T^*M \to M$: rappelons que c'est un fibré vectoriel dont la fibre au-dessus d'un point x s'identifie à l'espace vectoriel des formes linéaires sur l'espace tangent T_xM. L'espace total T^*M est défini par $\cup_{x\in M}\{x\} \times T^*_xM$, et la projection sur M est donnée par $(x, \phi) \mapsto x$ pour $\phi \in T^*_xM$. La structure de variété qui définit ce fibré vectoriel se décrit par recollement de la manière suivante : considérons un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$

sur un ouvert U de M ; les différentielles $dx_1, \ldots, dx_n$ définissent un système de n sections au-dessus de l'ouvert U, qui sont indépendantes en tout point. Ces n sections induisent une bijection

$$\mathrm{T}^*\mathrm{M}|_\mathrm{U} \simeq \mathrm{U} \times \mathbb{R}^n,$$

compatible avec la projection sur U, et linéaire sur chaque fibre. Ces bijections définissent par recollement une structure de variété sur $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$, et font de $\mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel de rang r (*cf.* section 5).

DÉFINITION 8.2. — *On appelle forme différentielle de degré 1 sur* M *la donnée d'une section de classe* C^∞ *du fibré cotangent* $\mathrm{T}^*\mathrm{M} \to \mathrm{M}$.

Les formes différentielles de degré 1 sur M constituent un module $\mathrm{A}^1(\mathrm{M})$ sur A. Si $\omega \in \mathrm{A}^1(\mathrm{M})$, sur un ouvert U où on dispose de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$, la restriction $\omega|_\mathrm{U}$ s'écrit de manière unique

$$\omega|_\mathrm{U} = \sum_{i=1}^{n} w_i dx_i$$

où les ω_i sont des fonctions de classe C^∞ sur U. Autrement dit, $\mathrm{A}^1(\mathrm{U})$ est un $\mathrm{A}(\mathrm{U})-$module libre de base $dx_1, \ldots, dx_n$.

Exemple :

Si f est une fonction de classe C^∞, la différentielle $df : x \mapsto d_x f$ définit une forme différentielle de degré 1 sur M. Dans l'ouvert U, les coefficients w_i sont les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de f considérée comme fonction de $(x_1, \ldots, x_n)$.

Relation entre champs de vecteurs et formes différentielles

Etant donnée une forme différentielle ω et un champ de vecteur ξ, sur M, la fontion $x \mapsto \langle \omega(x), \xi(x) \rangle$, notée $\langle \omega, \xi \rangle$, est de classe C^∞ sur M.

PROPOSITION 8.3. — *Soient* $\Theta(\mathrm{M})$ *le* A*-module des champs de vecteurs sur* M, *et* $\mathrm{A}^1(\mathrm{M})$ *le* $\mathrm{A}-$*module des formes différentielles de degré* 1. *La forme bilinéaire* $\mathrm{A}^1(\mathrm{M}) \times \Theta(\mathrm{M}) \to \mathrm{A}$ *définie par* $(\omega, \xi) \mapsto \langle \omega, \xi \rangle$ *fait d'un de ces* $\mathrm{A}-$*modules le dual de l'autre.*

Ceci signifie que

(1) l'application linéaire

$$\mathrm{A}^1(\mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\Theta(\mathrm{M}), \mathrm{A})$$

qui associe à la forme différentielle ω la forme linéaire $\xi \mapsto \langle \omega, \xi \rangle$ est bijective ;

(2) l'application linéaire

$$\Theta(\mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}^1(\mathrm{M}), \mathrm{A})$$

qui associe au champ de vecteurs ξ l'application linéaire $\omega \mapsto \langle \omega, \xi \rangle$ est bijective.

Démonstration. Démontrons par exemple (1) ; la démonstration de (2) est tout à fait identique. Etant donnée une forme linéaire $u : \Theta(\mathrm{M}) \to \mathrm{A}$, on peut construire une forme différentielle ω de la manière suivante : soit e un vecteur tangent en $x \in \mathrm{M}$; il existe un champ de vecteurs ξ tel que $\xi(x) = e$. Alors $u(\xi)(x)$ ne dépend que de e, et non de ξ. Ceci définit une forme linéaire sur l'espace tangent en x ; en faisant maintenant varier x, on obtient une section du fibré cotangent. Il est facile de vérifier que cette section est C^∞ et donc définit une forme différentielle ω telle que $\langle \omega(x), \xi(x) \rangle = u(\xi)(x)$ pour tout champ de vecteurs et tout point $x \in \mathrm{M}$. Ainsi $\langle \omega, \xi \rangle = u(\xi)$. Ceci démontre la surjectivité.

Voyons maintenant l'injectivité : supposons que l'image de ω soit nulle. Soit $x \in \mathrm{M}$, $e \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$, et ξ un champ de vecteurs sur M tel que $\xi(x) = e$. Alors $\langle \omega, \xi \rangle = 0$ et donc $\langle \omega(x), e \rangle = 0$. Par suite, pour tout $x \in \mathrm{M}$, on a $\omega(x) = 0$. Ainsi $\omega = 0$. □

Exercice 8.6

Retrouver ce résultat en utilisant l'exercice 5.10.

Exercice 8.7

Démontrer que le A−module $\mathrm{A}^1(\mathrm{M})$ est engendré par les formes différentielles $\omega = df$, avec $f \in \mathrm{A}$. (On pourra utiliser le théorème de Whitney : toute variété se plonge dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.)

Exercice 8.8

1. Démontrer que les A−modules $\Theta(\mathrm{M})$ et $\mathrm{A}^1(\mathrm{M})$ sont projectifs de type fini.

2. On prend $\mathrm{M} = \mathrm{S}_2$. Démontrer que le A−module $\mathrm{A}^1(\mathrm{S}_2)$ n'est pas libre. (Utiliser le fait qu'un champ de vecteurs sur la sphère S_2 s'annule.) Montrer que $\mathrm{A}^1(\mathrm{S}_2) \oplus \mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}_2)$ est un $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}_2)$−module libre.

8.3. Les p-formes différentielles

Considérons un fibré vectoriel $E \to M$ de rang r au-dessus de M. A un tel fibré vectoriel, on peut associer le fibré vectoriel

$$\Lambda^p E \to M$$

dont la fibre au-dessus du point $x \in M$ s'identifie à $\Lambda^p E_x$. En effet, considérons l'ensemble $\Lambda^p E = \cup_{x \in M} \{x\} \times \Lambda^p E_x$, muni de sa projection canonique sur M. Si U est un ouvert de M au-dessus duquel on a une trivialisation

$$\phi : E|_U \simeq U \times \mathbb{R}^r,$$

on obtient au-dessus de ce même ouvert une bijection

$$\Lambda^p E|_U \simeq U \times \wedge^p \mathbb{R}^r$$

compatible avec la projection sur U, linéaire sur chaque fibre, donnée par $(x, v) \mapsto (x, \Lambda^p \phi_x(v))$. Ceci définit par recollement une structure de variété sur $\wedge^p E$ qui fournit la structure de fibré vectoriel attendue. Ce fibré vectoriel est de rang C_n^p.

On peut appliquer ceci au fibré cotangent $T^*M \to M$.

DÉFINITION 8.4. — *On appelle forme différentielle de degré p sur* M *(ou p−forme différentielle) une section du fibré vectoriel* $\Lambda^p T^*M \to M$.

Pour $p = 0$, il s'agit simplement des fonctions de classe C^∞ sur M. L'espace des formes différentielles de degré p constituent alors un A-module noté $A^p(M)$. On définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ de deux formes différentielles α et β de degré p et q respectivement en posant pour tout $x \in M$

$$\alpha \wedge \beta(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x).$$

On a alors $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$. Sur la somme directe

$$\mathscr{A}(M) = \oplus_{p \in \mathbb{N}} A^p(M)$$

la multiplication extérieure définit une structure d'algèbre graduée anticommutative et unitaire. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système de coordonnées locales, l'espace

$A^p(U)$ des $p-$formes différentielles au-dessus de U est un module libre sur l'algèbre A(U) des fonctions C^∞ sur l'ouvert U, qui a pour base les $p-$formes différentielles

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$$

La proposition suivante est l'analogue, pour les formes différentielles de degré p, de la proposition 8.3. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_p$ des champs de vecteurs sur M. Si ω est une forme différentielle de degré p sur M, en chaque point x de M, la valeur $\omega(x)$ peut être vue comme une $p-$forme linéaire alternée sur l'espace vectoriel tangent T_xM. On obtient alors une fonction $\omega(\xi_1, \ldots, \xi_p) : x \mapsto \omega(x)(\xi_1(x), \ldots, \xi_p(x))$ et l'application

$$\underline{\omega} : (\xi_1, \ldots, \xi_p) \mapsto \omega(\xi_1, \ldots, \xi_p) \in A$$

est une forme $p-$linéaire et alternée sur $\Theta(M) \times \ldots \times \Theta(M)$.

PROPOSITION 8.5. — *Soit* $\mathscr{F}^p(M)$ *le* $A-$*module des p-formes* $A-$*linéaires alternées sur* $\Theta(M)$. *L'application* $A-$*linéaire*

$$A^p(M) \to \mathscr{F}^p(M)$$

définie par $\omega \mapsto \underline{\omega}$ *est bijective.*

Exercice 8.9

Démontrer cette proposition.

Exercice 8.10

Etant donné un $A-$module E (sur n'importe quel anneau commutatif et unitaire A) on peut définir la puissance extérieure $\Lambda^p_A E$: c'est un $A-$module, muni d'une application $p-$linéaire alternée $E \times \ldots \times E \to A$, satisfaisant à la propriété universelle que tout le monde attend, analogue à celle qui a été écrite dans le cas des espaces vectoriels.

1. Donner une construction de cette puissance extérieure.

2. Etablir un isomorphisme de $A-$modules

$$\mathscr{F}^p(M) \simeq \mathrm{Hom}_A(\wedge^p_A(\Theta(M)), A).$$

3. Montrer qu'il existe des fonctions $f_1, \ldots f_m \in A$ telles que le $A-$module $A^p(M)$ soit engendré par les formes différentielles

$$df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_p}$$

avec $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq m$.

4. Comparer les A−modules $\Lambda^p_{\mathrm{A}} \mathrm{A}^1(\mathrm{M})$ et $\mathrm{A}^p(\mathrm{M})$.

Images réciproques des formes différentielles

On se donne un morphisme de variétés $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$. En chaque point $x \in \mathrm{M}$ on dispose de l'application linéaire tangente $\mathrm{T}_x f : \mathrm{T}_x \mathrm{M} \to \mathrm{T}_{f(x)} \mathrm{N}$ et par suite, par transposition, de l'application linéaire cotangente

$$\mathrm{T}^*_x f : \mathrm{T}^*_{f(x)} \mathrm{N} \to \mathrm{T}^*_x \mathrm{M},$$

dont on peut prendre la puissance extérieure p−ième $\wedge^p \mathrm{T}^*_x f$.

DÉFINITION 8.6. — *Soit ω une forme différentielle de degré p sur* N. *L'image réciproque $f^*(w)$ de ω par f est la forme différentielle sur* M *définie pour $x \in \mathrm{M}$*

$$f^*(w)(x) = \wedge^p \mathrm{T}^*_x f(\omega(f(x))$$

Exercice 8.11

1. Etablir la propriété suivante : pour $\alpha \in \mathrm{A}^p(\mathrm{N})$ et $\beta \in \mathrm{A}^q(\mathrm{N})$, on a $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$.

2. Vérifier que si $g \in \mathrm{A}(\mathrm{N})$, on a $f^*(dg) = df^*(g)$.

3. Montrer que $f^*(\omega)$ définit une section de classe C^∞ du fibré vectoriel $\Lambda^p \mathrm{T}^* \mathrm{M} \to \mathrm{M}$.

Ainsi, f^* est un homomorphisme d'algèbres unitaires $f^* : \mathscr{A}(\mathrm{N}) \to \mathscr{A}(\mathrm{M})$, compatible avec la graduation.

9. Le complexe de de Rham

9.1. Dérivation extérieure

Soit M une variété de classe C^∞, $\mathscr{A}(\mathrm{M}) = \oplus_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$ l'algèbre graduée des formes différentielles sur M. On note A ou A(M) l'algèbre des fonctions de classe C^∞.

THÉORÈME 9.1. — *Il existe une application $\mathbb{R}-$linéaire et une seule d : $\mathscr{A}(\mathrm{M}) \to \mathscr{A}(\mathrm{M})$ satisfaisant aux conditions suivantes*

(i) *l'opérateur d est une dérivation de degré 1, c'est-à-dire que l'on a $d\mathrm{A}^p(\mathrm{M}) \subset \mathrm{A}^{p+1}(\mathrm{M})$ et que d satisfait à la condition de Leibniz, pour $\alpha \in \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta;$$

(ii) *Si f est une fonction de classe C^∞ sur M, $df \in \mathrm{A}^1(\mathrm{M})$ est la différentielle au sens habituel de f.*

(iii) $d^2 = 0$.

DÉFINITION 9.2. — *L'opérateur d ainsi défini s'appelle dérivation extérieure. Le complexe d'espaces vectoriels $\mathscr{A}^\cdot(\mathrm{M})$*

$$0 \to \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) \xrightarrow{d} \mathrm{A}^1(\mathrm{M}) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathrm{A}^n(\mathrm{M}) \to 0$$

s'appelle le complexe de de Rham de M.

Démonstration.

Unicité

On sait (*cf.* exercice 8.10) que $\mathrm{A}^p(\mathrm{M})$ est engendré, comme espace vectoriel, par les formes différentielles $f_0 df_1 \wedge \ldots df_p$, où les f_i sont des fonctions globales. Ainsi, il suffit de vérifier que si $f \in \mathrm{A}$, les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus permettent de calculer $d(f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_p)$. De la propriété (iii), on obtient $d(d(f_j) = 0$. Il résulte alors de (i) et (ii)

$$d(f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_p) = df_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_p$$

ce qui démontre l'unicité.

Existence

Considérons d'abord un ouvert U de M dans lequel on dispose de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$; une forme différentielle $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{U})$ s'écrit de manière unique

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

où les coefficients $\omega_{i_1,\ldots,i_p}$ sont des fonctions C^∞ sur U. On pose alors

$$dw = \sum_{i_1<\ldots<i_p\leq n} d\omega_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

On obtient ainsi une forme différentielle $dw \in \mathrm{A}^{p+1}(\mathrm{U})$.

Exercice 9.1

1. Vérifier que l'opérateur $d : \mathscr{A}(\mathrm{U}) \to \mathscr{A}(\mathrm{U})$ satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 9.1. En particulier, en vertu de l'unicité, il ne dépend pas du choix des coordonnées locales dans U.

2. Si $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, l'opérateur d est défini pour l'ouvert U et pour l'ouvert V. Si $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{U})$, on a $d(\omega|_\mathrm{V}) = dw|_\mathrm{V}$.

Recouvrons maintenant M par des cartes locales U_i. Posons $\mathrm{U}_{i,j} = \mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$. Si $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$, la forme différentielle $d(\omega|_{\mathrm{U}_i}) \in \mathrm{A}^{p+1}(\mathrm{U}_i)$ a un sens. De plus, d'après l'exercice 9.1, on a $d(\omega|_{\mathrm{U}_i})|_{\mathrm{U}_{i,j}} = d(\omega|_{\mathrm{U}_j})|_{\mathrm{U}_{i,j}}$. On peut donc trouver une unique forme différentielle $dw \in \mathrm{A}^{p+1}(\mathrm{M})$ caractérisée par

$$d\omega|_{\mathrm{U}_i} = d(\omega|_{\mathrm{U}_i})$$

L'opérateur $\omega \mapsto dw$ est celui qui convient : pour vérifier les conditions (i), (ii), et (iii), il suffit en effet de restreindre les égalités voulues aux ouverts U_i. Le résultat est alors une conséquence de l'exercice 9.1. □

Fonctorialité.

PROPOSITION 9.3. — *Soit* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un morphisme de variété. Pour* $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{N})$ *on a* $df^*(\omega) = f^*d(w)$.

Démonstration. La formule a déjà été vue pour les fonctions (*cf.* exercice 8.11). Il suffit, d'après l'exercice 8.10, de vérifier la formule pour une forme différentielle $\omega = g_0 dg_1 \wedge \ldots dg_p$, où les g_i sont des fonctions sur N. Mais on a alors d'après l'exercice 8.11, $f^*(w) = f^*(g_0) \wedge f^*(dg_1) \wedge \ldots \wedge f^*(dg_p)$. L'égalité $f^*(dg_i) = df^*(g_i)$ entraîne $df^*(dg_i) = 0$.

$$\begin{aligned} df^*(\omega) =& f^*(dg_0) \wedge f^*(dg_1) \ldots \wedge f^*(dg_p) \\ =& f^* d\omega \end{aligned}$$

D'où la proposition. □

Gradient, rotationnel et divergence

On consière une variété riemannienne de dimension n. Alors la métrique induit un isomorphisme de fibrés vectoriels $\mathrm{TM} \simeq \mathrm{T}^*\mathrm{M}$, et par conséquent un isomorphisme de A−modules

$$\beta : \Theta(\mathrm{M}) \simeq \mathrm{A}^1(\mathrm{M})$$

DÉFINITION 9.4. — *Soit $f \in \mathrm{A}$. On appelle gradient de f le champ de vecteurs défini par*

$$\beta(\mathrm{grad}f) = df.$$

Autrement dit, en chaque point $x \in \mathrm{M}$, le vecteur $\mathrm{grad}f(x)$ est caractérisé par la condition

$$\langle \mathrm{grad}f(x), u \rangle = df(x)(u)$$

pour tout $u \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$.

DÉFINITION 9.5. — *Une variété* M *de dimension n est orientable s'il existe une forme différentielle de degré n partout non nulle.*

Une telle forme différentielle définit en chaque point une orientation pour l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$. Deux telles formes différentielles ω et ω' définissent la même orientation s'il existe une fonction $\lambda > 0$ telle que $\omega' = \lambda\omega$.

Exercice 9.2

Montrer que M est une variété orientable si et seulement si on peut trouver un atlas $\mathscr{A}$ contenu dans l'atlas maximal définissant la structure de variété de M et tel que les changements de cartes $\phi_{i,j}$ soit de jacobien > 0 en tout point.

On rappelle que la bande de Moebius est le quotient de $\mathrm{E} = \mathrm{S}_1 \times \mathbb{R}$ par l'involution σ définie par $(x, v) \to (-x, -v)$. C'est l'espace total d'un fibré vectoriel $\mathrm{F} \to \mathrm{S}_1$ au-dessus de S_1. On considère le cercle S_1 plongé dans F par la section nulle.

1. Montrer que le fibré vectoriel $\wedge^2\mathrm{T}(\mathrm{M})|_{\mathrm{S}_1}$ est isomorphe à F.
2. En déduire que F n'est pas une variété orientable (Utiliser l'exercice 5.13).

Exercice 9.3

1. Montrer que le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ n'est pas orientable. Plus généralement, l'espace projectif réel est orientable si et seulement si sa dimension est impaire.

2. Démontrer qu'une quadrique non singulière de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est orientable si n est impair.

DÉFINITION 9.6. — *Soit* M *une variété riemannienne orientée. L'unique forme différentielle canonique* Ω *de degré* n *donnée au-dessus de* $x \in \mathrm{M}$ *par*

$$\Omega(x) = e^1 \wedge \ldots \wedge e^n$$

où $(e^1, \ldots, e^n)$ *est une base orthonormée de* $\mathrm{T}_x^*\mathrm{M}$ *compatible avec l'orientation, s'appelle la forme volume.*

Sur une variété riemannienne, on dispose d'un produit scalaire sur chaque espace vectoriel $\Lambda^p \mathrm{T}_x^*\mathrm{M}$. Si M est en outre orientée, on dispose en outre des opérateurs de Hodge sur le fibré tangent et le fibré cotangent : ces opérateurs fournissent un diagramme commutatif dans lequel toutes les flèches sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^p \mathrm{T} & \stackrel{*}{\longrightarrow} & \Lambda^{n-p} \mathrm{T} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^p \mathrm{T}^* & \stackrel{*}{\longrightarrow} & \Lambda^{n-p} \mathrm{T}^* \end{array}$$

Dans ce diagramme les flèches verticales sont induites par l'isomorphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{T}^*$ associé à la métrique. Bien entendu, ces isomorphismes induisent des isomorphismes A−linéaires sur les espaces de sections globales. Par exemple, on obtient un opérateur de Hodge sur les espaces de formes différentielles,

$$* : \mathrm{A}^p(\mathrm{M}) \simeq \mathrm{A}^{n-p}(\mathrm{M})$$

caractérisé par la propriété suivante : pour α et $\beta \in \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$ on a

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \Omega$$

où $\langle \alpha, \beta \rangle$ désigne la fonction $x \mapsto \langle \alpha(x), \beta(x) \rangle$.

Cas où M *est de dimension* 2

Si M est une variété riemannienne orientée de dimension 2, l'opérateur de Hodge $* : \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ satisfait à $*^2 = -1$: c'est la rotation d'angle $+\pi/2$. Ceci définit une structure d'espace vectoriel complexe de dimension 1 sur chaque espace vectoriel tangent. En fait, on peut démontrer qu'il existe une structure de variété analytique complexe de dimension 1 sur M pour laquelle l'opérateur $*$ est la multiplication par i.

On a vu que l'on a un isomorphisme de A−modules $\Theta(\mathrm{M}) \simeq \mathrm{A}^1(\mathrm{M})$, et que le module des formes différentielles de degré 2 s'identifie à $\mathrm{A} = \mathrm{A}^0(\mathrm{M})$. Ainsi, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) & \xrightarrow{d} & \mathrm{A}^1(\mathrm{M}) & \xrightarrow{d} & \mathrm{A}^2(\mathrm{M}) \to 0 \\ & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ 0 \to & \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\text{grad}} & \Theta(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) \to 0 \end{array}$$

qui définit l'opérateur divergence $\mathrm{div} : \Theta(\mathrm{M}) \to \mathrm{A}^0(\mathrm{M})$. L'égalite $d^2 = 0$ se traduit par l'identité, pour $f \in \mathrm{A}$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)) = 0.$$

Cas où M *est de dimension 3*

Considérons le complexe de de Rham d'une variété riemannienne orientée de dimension 3. Les A-modules $\mathrm{A}^1(\mathrm{M})$ et $\mathrm{A}^2(\mathrm{M})$ s'identifient donc au A-module des champ de vecteurs $\Theta(\mathrm{M})$. Ainsi, le complexe de de Rham devient

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) & \xrightarrow{d} & \mathrm{A}^1(\mathrm{M}) & \xrightarrow{d} & \mathrm{A}^2(\mathrm{M}) & \xrightarrow{d} & \mathrm{A}^3(\mathrm{M}) \to 0 \\ & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ 0 \to & \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\text{grad}} & \Theta(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\text{rot}} & \Theta(\mathrm{M}) & \xrightarrow{\text{div}} & \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) \to 0 \end{array}$$

Ce diagramme définit sur une telle variété le rotationnel d'un champ de vecteurs, et la divergence d'un champ de vecteurs. L'identité $d^2 = 0$ se lit, pour $f \in \mathrm{A}^0(\mathrm{M})$ et $\xi \in \Theta(\mathrm{M})$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0 \quad ; \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}(\xi)) = 0$$

La formule de Cartan.

DÉFINITION 9.7. — *Soit* $\mathscr{A} = \oplus_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{A}^p$ *une* $\mathbb{R}-$*algèbre graduée. Une dérivation* ∇ *de degré* d *de* $\mathscr{A}$ *dans* $\mathscr{A}$ *est une application* $\mathbb{R}-$*linéaire* $\nabla : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ *telle que*

(i) $\nabla(\mathrm{A}^p) \subset \mathrm{A}^{p+d}$

(ii) *pour* $\alpha \in \mathrm{A}^p$ *et* $\beta \in \mathrm{A}^q$, *on a*

$$\nabla(\alpha\beta) = \nabla(\alpha)\beta + (-1)^{dp}\alpha\nabla\beta.$$

Exemple

La dérivation extérieure $d : \mathscr{A}(\mathrm{M}) \to \mathscr{A}(\mathrm{M})$ est une dérivation de degré 1.

Exercice 9.4

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $\Lambda\mathrm{E}^*$ l'algèbre extérieure de E. Si $u \in \mathrm{E}$, l'application linéaire $i(v) : \Lambda^p\mathrm{E} \to \Lambda^{p-1}\mathrm{E}$ définie sur les covecteurs décomposables par

$$i(v)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_r) = \sum_{1\leq i\leq p} \langle u, v_i\rangle v_1 \wedge \ldots \wedge \check{v}_i \wedge \ldots \wedge v_p$$

où le symbole $\check{v}_i$ signifie que l'on enlève v_i, est une dérivation de degré -1. Cette dérivation s'appelle produit intérieur par v.

Exercice 9.5

Soit ξ est un champ de vecteurs sur M. Définir, suivant le même principe, une dérivation $i(\xi)$ de degré -1 sur l'algèbre $\mathscr{A}(\mathrm{M})$, produit intérieur par ξ. Vérifier que l'application $\xi \mapsto i(\xi)$ est A$-$linéaire.

Exercice 9.6

Si ∇_1 et ∇_2 sont deux dérivations de degrés respectifs d_1 et d_2 d'une algèbre graduée $\mathscr{A}$, le crochet

$$[\nabla_1, \nabla_2] = \nabla_1\nabla_2 - (-1)^{d_1 d_2}\nabla_2\nabla_1$$

est une dérivation de degré $d_1 + d_2$ de $\mathscr{A}$.

Le théorème suivant est une variante du théorème 9.1.

THÉORÈME 9.8. — *Soit* $\mathrm{D} : \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) \to \mathrm{A}^d(\mathrm{M})$ *une application* $\mathbb{R}-$*linéaire satisfaisant à la condition de Leibniz, pour* f *et* $g \in \mathrm{A}^0(\mathrm{M})$:

$$\mathrm{D}(fg) = f\mathrm{D}g + g\mathrm{D}f$$

Alors il existe une dérivation de degré d *et une seule* $\nabla : \mathscr{A}(\mathrm{M}) \to \mathscr{A}(\mathrm{M})$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) $[\nabla, d] = 0$

(ii) *Si* $f \in \mathrm{A}^0(\mathrm{M})$, $\nabla(f) = \mathrm{D}f$.

Exercice 9.7

Démontrer ce théorème.

Exemple

On considère un champ de vecteurs ξ sur M. L'opérateur de dérivée de Lie suivant le champ de vecteur ξ

$$\theta_\xi : \mathrm{A}^0(\mathrm{M}) \to \mathrm{A}^0(\mathrm{M})$$

satisfait à la condition de Leibniz. Par conséquent, cet opérateur s'étend en une dérivation de degré 0, appelé encore dérivée de Lie, et notée θ_ξ.

PROPOSITION 9.9. — *(Formule de Cartan)*

Soit $i(\xi)$ *la dérivation de* $\mathscr{A}(\mathrm{M})$ *donnée par le produit intérieur par* ξ, *et* d *la dérivation extérieure. Alors*

$$\theta_\xi = [i(\xi), d]$$

Démonstration. Les deux membres sont deux dérivations de degré 0 ; ces dérivations commutent avec d et coïncident sur les fonctions. Donc elles coïncident d'après le théorème 9.1. □

Interprétation géométrique de la dérivée de Lie

Supposons pour simplifier que M soit une variété compacte. Considérons le flot $u : \mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ défini par ξ, et le groupe à un paramètre u_t associé ξ. Pour $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$ la forme différentielle $\omega_t = u_t^*\omega$ est induite par une forme différentielle la forme différentielle $u^*(\omega)$ sur $\mathbb{R} \times \mathrm{M}$. Il en résulte que pour chaque

point $x \in \mathrm{M}$ le covecteur $u_t^*(\omega)(x) \in \wedge^p \mathrm{T}^*\mathrm{M}$ dépend différentiablement de t. On peut en particulier calculer sa dérivée à l'instant $t = 0$.

Exercice 9.8

Vérifier que la dérivée $\dfrac{d}{dt}(u_t^*\omega)|_{t=0}$ définit une $p-$forme différentielle de classe C^∞ sur M.

PROPOSITION 9.10. — *On a*

$$\theta_\xi(\omega) = \frac{d}{dt}(u_t^*\omega)|_{t=0}$$

Démonstration. Posons pour $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$,

$$\mathrm{L}(\omega) = \frac{d}{dt}(u_t^*\omega)|_{t=0}.$$

Alors l'application L est une dérivation de degré 0 de $\mathscr{A}(\mathrm{M})$. Pour vérifier la condition $[\mathrm{L}, d] = 0$, il suffit d'appliquer cet opérateur à une forme différentielle $g_0 dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p$. On est ramené à vérifier cette condition pour des fonctions. Pour une fonction $g : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ on a

$$\mathrm{L}(g)(x) = \frac{\partial}{\partial t}(g \circ u)(0, x)$$

Mais si $v : \mathbb{R} \times \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 , on a d'après l'identité de Schwarz

$$d_\mathrm{M} \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial}{\partial t} d_\mathrm{M} v$$

Dans cette formule, d_M désigne, pour éviter toute confusion, la différentielle partielle le long de M. Cette formule entraîne l'identité $[d, \mathrm{L}] = 0$. D'autre part, il est évident que coïncide avec θ_ξ sur les fonctions. L'unicité du théorème 9.8 entraîne alors le résultat.

Formule de Maurer-Cartan

On a vu que toute forme différentielle pouvait s'exprimer comme forme $p-$linéaire alternée sur $\Theta(\mathrm{M}) \times \ldots \times \Theta(\mathrm{M})$. L'objet de la formule de Maurer -Cartan est d'exprimer la différentielle extérieure dw d'une forme différentielle $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$ en tant que forme $p+1-$linaire alternée.

PROPOSITION 9.11. — *(Formule de Maurer-Cartan) Soient* $(\xi_0, \ldots \xi_p)$ *des champs de vecteurs, et* $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$. *Alors*

$$d\omega(\xi_0, \ldots, \xi_p) = \sum_i (-1)^i \theta_{\xi_i}(\omega(\xi_0, \ldots, \check{\xi}_i, \ldots, \xi_p)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \ldots, \check{\xi}_i, \ldots, \check{\xi}_j, \ldots, \xi_p)$$

Exemple

Si ξ et η sont deux champs de vecteurs et $\omega \in \mathrm{A}^1(\mathrm{M})$, la formule de Maurer-Cartan prend la forme suivante :

$$d\omega(\xi, \eta) = \theta_\xi(\langle \omega, \eta \rangle) - \theta_\eta(\langle \omega, \xi \rangle) - \langle \omega, [\xi, \eta] \rangle.$$

Exercice 9.9

Soient ξ et η deux champs de vecteurs sur M, et $f \in \mathrm{A}$.

1. Vérifier que $[f\xi, \eta] = f[\xi, \eta] - \theta_\xi(f)\eta$.

2. En déduire que le second membre de la formule de Maurer-Cartan en une forme $p+1-$ linéaire alternée en $(\xi_0, \ldots, \xi_p)$ sur l'algèbre A.

Démonstration de la proposition 9.11

On peut se contenter de vérifier localement la formule de Maurer-Cartan. On peut donc supposer que M est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que l'on dispose de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$. Les A−modules $\Theta(\mathrm{M})$ et $\mathrm{A}^p(\mathrm{M})$ sont alors des modules libres sur A, et il suffit de vérifier la formule pour la forme différentielle $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$, où $f \in \mathrm{A}$. On a alors

$$dw = (-1)^p \sum_{j>p} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p \wedge dx_j.$$

On considère les champs de vecteurs $\xi_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$: ils constituent une base pour $\Theta(\mathrm{M})$. Pour $i_1 < \ldots < i_{p+1}$, on a alors

$$dw(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{p+1}}) = \begin{cases} (-1)^p \dfrac{\partial f}{\partial x_{i_{p+1}}} & \text{si} \quad (i_1, \ldots, i_p) = (1, \ldots, p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le crochet $[\xi_i, \xi_j]$ étant nul, il est clair que le second membre appliqué à $(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{p+1}})$ donne le même résultat. On applique l'exercice 9.9 pour obtenir le résultat pour des champs de vecteurs $(\xi_0, \ldots, \xi_p)$ quelconques. □

Exercice 9.10

Soit G un groupe de Lie de dimension n. Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathrm{A} = \mathrm{A}^0(\mathrm{G})$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur G.

1. Montrer que $\mathrm{A}^p(\mathrm{G})$ est un A-module libre isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Lambda^p\mathfrak{g}, \mathrm{A})$. Décrire une base de $\mathrm{A}^p(\mathrm{G})$.

2. Soit $\mathrm{A}^p(\mathrm{G})^{\mathrm{G}} \subset \mathrm{A}^p(\mathrm{G})$ le sous-espace vectoriel des formes différentielles sur G-invariantes par le groupe des translations à gauche. Montrer que $\mathrm{A}^p(\mathrm{G})^{\mathrm{G}}$ est un espace vectoriel de dimension finie isomorphe à $\Lambda^p\mathfrak{g}^*$. Montrer que $d(\mathrm{A}^p(\mathrm{G})^{\mathrm{G}}) \subset \mathrm{A}^{p+1}(\mathrm{G})^{\mathrm{G}}$ et vérifier que l'application linéaire induite

$$d : \mathrm{A}^p(\mathrm{G})^{\mathrm{G}} \to \mathrm{A}^{p+1}(\mathrm{G})^{\mathrm{G}}$$

se calcule en termes de l'application linéaire $\Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ associée à la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

9.2. Homotopies

Soit M une variété de classe C^∞.

Cohomologie de de Rham

DÉFINITION 9.12. — *Une forme différentielle ω de degré p sur* M *est dite fermée si $d\omega = 0$. Une p-forme différentielle est dite exacte s'il existe une forme différentielle $\phi \in \mathrm{A}^{p-1}(\mathrm{M})$ telle que $\omega = d\phi$.*

Les formes différentielles de degré p exactes forment un sous-espace vectoriel $\mathrm{B}^p(\mathrm{M})$ de l'espace vectoriel $\mathrm{Z}^p(\mathrm{M})$ des formes différentielles fermées de degré p. Deux formes différentielles fermées de degré p sont dites cohomologues si leur différence est exacte :

DÉFINITION 9.13. — *L'espace vectoriel quotient*

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{DR}}(\mathrm{M}) = \mathrm{Z}^p(\mathrm{M})/\mathrm{B}^p(\mathrm{M})$$

s'appelle le p−ième espace vectoriel de cohomologie de de Rham de M.

Exemple

L'espace vectoriel $\mathrm{H}^0_{\mathrm{DR}}(\mathrm{M})$ est l'espace des fonctions localement constantes sur M. Il est de dimension finie si M n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, en particulier si M est une variété compacte.

Si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un morphisme de variétés, l'aplication f induit un morphisme des complexes de de Rham $f^* : \mathscr{A}^\cdot(\mathrm{N}) \to \mathscr{A}^\cdot(\mathrm{M})$ *i.e.* $df^* = f^*d$. Il en résulte que l'image réciproque par f d'une forme fermée est une forme fermée, et l'image réciproque d'une forme exacte est exacte. Ainsi, f induit une application linéaire

$$f^* : \mathrm{H}^p_{\mathrm{DR}}(\mathrm{N}) \to \mathrm{H}^p_{\mathrm{DR}}(\mathrm{M})$$

Evidement, si $f : \mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2$ et $g : \mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_3$ sont des morphismes de variétés, on a $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ en cohomologie de de Rham, parce que cette formule est déjà vraie pour les formes différentielles.

Variétés à bord

Les variétés à bord ne sont pas des variétés au sens qui a été vu jusqu'ici. Par exemple, la boule fermée définie par les $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_i x_i^2 \leq 1$ constituera une variété à bord ; ce n'est évidemment pas une variété.

DÉFINITION 9.14. — *Soit* U *un ouvert du demi-espace* $[0, \infty[\times\mathbb{R}^{n-1}$. *Une fonction* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *est dite de classe* C^∞ *si* f *s'étend en une fonction* f_1 *de classe* C^∞ *sur un ouvert* U_1 *de* $\mathbb{R}^n$.

En tout point a de $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ la différentielle $d_a f_1$ ne dépend pas du choix du prolongement, mais seulement de f.

Par variété à bord M (de classe C^∞) on entend la donnée d'un atlas maximal dont les cartes, définies sur des parties $\mathrm{U}_i \subset \mathrm{M}$ prennent leurs valeurs dans un ouvert de $[0, \infty[\times\mathbb{R}^{n-1}$; on demande bien sûr que les cartes soient deux à deux C^∞−compatibles, et donnent à M une structure d'espace topologique séparé et dénombrable à l'infini. Si M est une variété à bord, l'intérieur de M est défini par l'ensemble des points qui ont un voisinage homéomorphe à une boule de $\mathbb{R}^n$; le complémentaire $\partial\mathrm{M}$ s'appelle le bord. C'est une variété de classe C^∞ au sens habituel.

Exemples

(i) Soient X une variété de classe C^∞ (sans bord) et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ n'ayant pas 0 pour valeur critique. Alors, si f s'annule, $M = \{x \in X, f(x) \geq 0\}$ est une variété à bord, dont le bord est la sous-variété donnée par l'équation $f = 0$.

(ii) Si M est une variété de classe C^∞, le produit $[0,1] \times M$ est une variété à bord, dont le bord est $\{0,1\} \times M$.

Sur une variété à bord, l'espace vectoriel tangent a un sens en tout point, y compris les points du bord ; l'espace des $p-$formes différentielles globales a lui aussi un sens, ainsi que le complexe de de Rham.

DÉFINITION 9.15. — *Soient f et $g : M \to N$ deux morphismes de variétés (avec ou sans bord). On dit que f et g sont différentiablement homotopes s'existe une application différentiable $h : [0,1] \times M \to N$ telle que pour tout $x \in M$ on ait $h(0,x) = f(x)$ et $h(1,x) = g(x)$.*

Une telle application h s'appelle une homotopie différentiable entre f et g.

THÉORÈME 9.16. — *Si f et $g : M \to N$ sont différentiablement homotopes, les application linéaires f^* et g^* induites en cohomologie de de Rham*

$$H^p_{DR}(N) \to H^p_{DR}(M)$$

sont égales.

DÉFINITION 9.17. — *Une variété M est dite (différentiablement) contractile si id_M est homotope à une application constante.*

Exemple

Un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ est différentiablement contractile.

COROLLAIRE 9.18. — *(Poincaré) Si une variété M est contractile, pour $p > 0$, toute $p-$forme différentielle fermée est exacte.*

En effet, la cohomologie de de Rham est alors celle d'un point.

DÉFINITION 9.19. — *Soit $M \subset N$ une sous-variété de N et $j : M \hookrightarrow N$ l'inclusion canonique ; on dit que M est rétracte de N par déformation s'il existe une application $r : N \to M$ de classe C^∞ telle que*

(i) $r|_M = \mathrm{id}_M$

(ii) *$j \circ r$ est différentiablement homotope à id_N.*

COROLLAIRE 9.20. — *Si* $M \subset N$ *est une sous-variété de* N *rétracte par déformation, l'application canonique*

$$j^* : H^p_{DR}(N) \to H^p_{DR}(M)$$

est un isomorphisme.

Exemple

L'inclusion $S_n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ induit un isomorphisme sur les groupes de cohomologie de de Rham.

On peut en fait démontrer que si deux applications différentiables f et $g : M \to N$ sont homotopes c'est-à-dire qu'il existe une application continue $h : [0,1] \times M \to N$ telle que $h(0,x) = f(x)$ et $h(1,x) = g(x)$, elles sont différentiablement homotopes. De plus, toute application continue : $f : M \to N$ est homotope à une application différentiable ; ces résultats se démontrent par des théorèmes d'approximation [3]. Ceci entraîne par exemple que si $f : M \to N$ est une équivalence d'homotopie (au sens topologique) elle induit un isomorphisme $H^p(M) \simeq H^p(N)$. Ainsi, on peut oublier le mot «différentiable »dans les énoncés ci-dessus. En particulier, deux variétés différentiables qui ont même espace topologique sous-jacent ont même espace vectoriel de cohomologie.

On peut également démontrer que si M est une variété compacte, les espaces vectoriels $H^p(M)$ sont de dimension finie : une démonstration possible, dans l'esprit de ce cours, serait d'utiliser l'existence de fonctions de Morse. Le nombre $b_p = \dim H^p(M)$ s'appelle le $p-$ième nombre de Betti ; il ne dépend que de l'espace topologique sous-jacent à M (théorème de de Rham). Le nombre $\chi(M) = \sum_p (-1)^p b_p$ s'appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré.

La formule d'homotopie

On pose $I = [0,1]$.

PROPOSITION 9.21. — *(Formule d'homotopie) Soit* $j_t : M \hookrightarrow I \times M$ *l'inclusion* $x \mapsto (t,x)$. *Pour tout entier* $p \geq 0$, *il existe une application linéaire* $H : A^p(I \times M) \to A^{p-1}(M)$ *satisfaisant à la propriété suivante : pour toute forme* $p-$*forme différentielle* ϕ *sur* $I \times M$ *on a*

$$j_1^*(\phi) - j_0^*(\phi) = dH(\phi) + Hd(\phi).$$

Démonstration. Considérons le champ de vecteurs horizontal $\xi = \dfrac{\partial}{\partial t}$. Une forme différentielle $\phi \in \mathrm{A}^p(\mathrm{I} \times \mathrm{M})$ s'écrit de manière unique $\phi = dt \wedge \alpha + \beta$ où α et β sont des formes différentielles de degrés respectifs $p-1$ et p sur $\mathrm{I} \times \mathrm{M}$ telles que $i(\xi)\alpha = 0$ et $i(\xi)\beta = 0$. Si U étant un ouvert de M où l'on dispose de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ ces formes différentielles s'écrivent localement,

$$\alpha|_{\mathrm{I}\times\mathrm{U}} = \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}} \alpha_{i_1,\ldots,i_{p-1}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{p-1}}$$

$$\beta|_{\mathrm{I}\times\mathrm{U}} = \sum_{i_1<\ldots<i_{p}} \beta_{i_1,\ldots,i_{p}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{p}}$$

où $\alpha_{i_1,\ldots,i_{p-1}}$ et $\beta_{i_1,\ldots,i_p}$ sont des fonctions de classes C^∞ sur $\mathrm{I} \times \mathrm{U}$: autrement dit, les formes différentielles α et β peuvent être vues comme formes différentielles sur M dépendant différentiablement du paramètre $t \in \mathrm{I}$. Remarquons que $\beta(t) = j_t^*(\phi)$. Il en résulte que

$$j_1^*(\phi) - j_0^*(\phi) = \int_0^1 \frac{\partial \beta}{\partial t} dt$$

On a $\theta_\xi(\phi) = dt \wedge \theta_\xi(\alpha) + \theta_\xi(\beta)$ et $\theta_\xi(\beta) = \dfrac{\partial \beta}{\partial t}$. Par application de la formule de Cartan, il en résulte

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial t}(t) &= j_t^*(\theta_\xi \phi) \\ &= j_t^* i(\xi) d\phi + d j_t^* i(\xi)\phi \end{aligned}$$

Posons, pour $\psi \in \mathrm{A}^p(\mathrm{I} \times \mathrm{M})$

$$\mathrm{H}(\psi) = \int_0^1 j_t^* i(\xi)\psi dt.$$

Le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant de paramètres montre que $\int_0^1 d j_t^* i(\xi)(\phi) dt = d\mathrm{H}(\phi)$. Ceci conduit à la formule attendue. □

COROLLAIRE 9.22. — *Les applications linéaires j_0^* et j_1^* induites en cohomologie de de Rham :*

$$\mathrm{H}^p_{\mathrm{DR}}(\mathrm{I} \times \mathrm{M}) \to \mathrm{H}^p_{\mathrm{DR}}(\mathrm{M})$$

sont égales.

En effet, si ϕ est une $p-$forme différentielle fermée sur $\mathrm{I} \times \mathrm{M}$,

$$j_1^*(\phi) - j_0^*(\phi) = d\mathrm{H}(\phi)$$

et par conséquent les formes différentielles $j_0^*(\phi)$ et $j_1^*(\phi)$ sont cohomologues, et donc définissent la même classe en cohomologie de de Rham.

Démonstration du théorème 9.16

Soit $h : \mathrm{I} \times \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une homotopie différentiable entre f et g. Considérons l'application $h_t = h \circ j_t : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$. En cohomologie de de Rham on a $h_t^* = j_t^* \circ h^*$ et par suite $h_0^* = h_1^*$. D'où l'énoncé. □

9.3. Formule de Stokes

Intégration

Soit M une variété de classe C^∞, avec ou sans bord, orientable et orientée, de dimension n. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{A}_c^n(\mathrm{M})$ des formes différentielles de degré n à support compact. On se propose de définir, pour $\omega \in \mathrm{A}_c^n(\mathrm{M})$ l'intégrale $\int_\mathrm{M} \omega$.

Supposons d'abord que le support de ω est contenu dans un ouvert U où on dispose de coordonnées $x \mapsto (x_1, \ldots, x_n) = \phi(x)$; on suppose que ces coordonnées sont compatibles avec orientation de M, c'est-à-dire qu'en chaque point de U, les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ définissent une base directe. Alors

$$\omega|_\mathrm{U} = f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où $f(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction de classe C^∞ à support compacte dans $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\int_\mathrm{M} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

Pour voir que ceci a un sens, on doit constater qu'on trouve le même résultat quand on change de coordonnées. Si $(y_1, \ldots y_n) = \psi(x)$ est un autre système de coordonnées compatible avec l'orientation, les changement de cartes $\nu = \phi\psi^{-1}$ $(x_1, \ldots, x_n) = \nu(y_1, \ldots, y_n)$ est de classe C^∞ sur $\psi(\mathrm{U})$. Soit $\mathrm{J}\nu$ le jacobien de ν. D'après la formule du changement de variables dans les intégrales, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \nu(y_1, \ldots y_n) |\mathrm{J}\nu(y_1, \ldots, y_n)| dy_1 \ldots dy_n$$

Dans les coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ on a

$$\omega|_{\mathrm{U}} = f\phi(y_1, \ldots, y_n)\mathrm{J}\nu(y_1, \ldots y_n)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n.$$

Puisque les deux systèmes de coordonnées sont compatibles avec l'orientation, on a $\mathrm{J}\nu > 0$, ce qui montre que la formule calculée en utilisant les coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ est la même.

Si le support de U n'est pas contenu dans une carte locale, on utilise une partition de l'unité. Soit en effet un recouvrement U_i par des cartes locales ; considérons une partition de l'unité (μ_i) subordonnée au recouvrement U_i. On pose

$$\int_{\mathrm{M}} \omega = \sum_i \int_{\mathrm{M}} \mu_i \omega$$

Remarquons que le membre de droite a bien un sens, puisque la forme différentielle $\mu_i\omega$ est à support compact contenu dans la carte locale U_i, et qu'il n'existe qu'un nombre fini d'indices i tels que le support de μ_i rencontre le support de ω.

Exercice 9.11

Montrer que le membre de droite est indépendant du choix du recouvrement U_i et de la partition de l'unité.

Exercice 9.12

Considérons la variété orientée $\overline{\mathrm{M}}$ obtenue à partir de M en changeant l'orientation. Vérifier que $\int_{\overline{\mathrm{M}}} \omega = -\int_{\mathrm{M}} \omega$.

Exercice 9.13

Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ un difféomorphisme de M conservant l'orientation. Montrer que pour $\omega \in \mathrm{A}^n_c(\mathrm{M})$ on a

$$\int_{\mathrm{M}} f^*(\omega) = \int_{\mathrm{M}} \omega$$

Exercice 9.14

On suppose M connexe. Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un revêtement fini de degré d. Montrer que pour $\omega \in \mathrm{A}^n_c(\mathrm{M})$ on a

$$\int_{\mathrm{M}} f^*(\omega) = \pm d \int_{\mathrm{M}} \omega$$

le signe dépendant du fait que f change ou non l'orientation.

Formule de Stokes

Soit M une variété à bord, orientée. On va commencer par montrer comment on peut orienter de manière naturelle le bord ∂M.

Exercice 9.15

Soient U et U′ deux ouverts de $[0,\infty[\times\mathbb{R}^{n-1}$ et $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ un difféomorphisme.

a) Démontrer que $\phi(\partial \mathrm{U}) \subset \partial \mathrm{U}'$.

b) Démontrer que la matrice jacobienne $d_a\phi$ en un point $a \in \partial$U laisse invariant le sous-espace vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et que $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(a) > 0$.

Soit M une variété à bord, orientée, de dimension n. Si $a \in \partial$M, la notion de vecteur sortant en a a un sens : étant donné une carte locale $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}_1 \subset [0,\infty[\times\mathbb{R}^{n-1}$, le vecteur $u \in \mathrm{T}_a\mathrm{M}$ est dit sortant si la première composante de $d_a\phi(u)$ est < 0. Il résulte de l'exercice 9.15 que c'est le cas pour toute autre carte. Pour orienter ∂M, il suffit, pour tout point $a \in \partial$M, d'orienter l'espace vectoriel (dit normal) $\mathrm{N}_a = \mathrm{T}_a\mathrm{M}/\mathrm{T}_a\partial\mathrm{M}$. Mais les vecteurs sortant définissent une orientation de cet espace vectoriel de dimension 1. Ainsi, une base $(e_2,\ldots,e_n)$ de $\mathrm{T}_a(\partial\mathrm{M})$ est directe si pour e_1 vecteur sortant en a, la base $(e_1,e_2,\ldots,e_{n)}$ est une base directe de $\mathrm{T}_a\mathrm{M}$.

THÉORÈME 9.23. — *(Théorème de Stokes) Soit* M *une variété à bord, orientée, de dimension n. On suppose que le bord* ∂M *est orienté comme ci-dessus. Soit* $\omega \in \mathrm{A}^{n-1}(\mathrm{M})$ *une forme différentielle de degré n à support compact. On a*

$$\int_{\mathrm{M}} d\omega = \int_{\partial\mathrm{M}} \omega|_{\partial\mathrm{M}}.$$

La forme différentielle $\omega|_{\partial\mathrm{M}}$ désigne ici l'image réciproque de ω par l'inclusion $\partial\mathrm{M} \hookrightarrow \mathrm{M}$.

COROLLAIRE 9.24. — *Soit* M *une variété sans bord. Pour toute forme différentielle ω de degré $n-1$ à support compact dans* M *on a*

$$\int_{\mathrm{M}} dw = 0$$

Exemple

Soit M une variété riemannienne de dimension 2, à bord et orientée ; soit Ω la 2-forme canonique (dite élément d'aire) sur M. Considérons un champ de vecteur ξ sur M, auquel correspond une forme différentielle ω de degré 1. La circulation de ξ le long de ∂M est par définition l'intégrale $C_{\partial M}(\xi) = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}$. On a alors

$$\int_M \mathrm{div}(\xi)\ \Omega = C_{\partial M}(\xi)$$

C'est le théorème de Stokes usuel.

Exemple

Soit M une variété riemannienne de dimension 3, à bord et orientée ; soit Ω la forme volume. Si ξ est un champ de vecteurs sur M, le flux de ξ à travers ∂M est défini par l'intégrale $\Phi_{\partial M}(\xi) = \int_{\partial M} \omega|_{\partial M}$, où ω est la forme différentielle de degré 2 associée à ξ. La formule de Stokes prend la forme suivante :

$$\Phi_{\partial M}(\xi) = \int_M \mathrm{div}\xi\ \Omega.$$

C'est le théorème d'Ostrogradski habituel.

Démonstration du théorème 9.23

A l'aide d'une partition de l'unité, on se ramène au cas où $M = [0, \infty[\times \mathbb{R}^{n-1}$. La forme différentielle ω est une forme à support compact de degré $n-1$. Il suffit de faire le calcul pour la forme différentielle

$$\omega = f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \wedge \ldots \wedge \check{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

On a $d\omega = (-1)^{i-1} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. On a alors par définition

$$\int_M d\omega = (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n$$

Pour $i = 1$ on obtient en appliquant le théorème de Fubini

$$\int_M d\omega = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(0, x_2, \ldots, x_n) dx_2 \ldots dx_n$$

Compte-tenu du fait que $(x_2, \ldots, x_n)$ donne l'orientation opposée sur ∂M le membre de droite est bien $\int_{\partial M} \omega|_{\partial M}$. Pour $i > 1$, on a $\omega|_{\partial M} = 0$ et il suffit de constater que $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n = 0$, ce qui est évident d'après le théorème de Fubini. □

Réciproquement, on démontrera dans la section 10.1 le résultat suivant :

THÉORÈME 9.25. — *Soit* M *une variété sans bord, de dimension* n *et* $\omega \in A_c^n(M)$ *une forme différentielle à support compact telle que*

$$\int_M \omega = 0$$

Alors il existe une forme différentielle ϕ *de degré* $n-1$, *à support compact, sur* M *telle que* $\omega = d\phi$.

9.4. Cohomologie de de Rham des G−variétés

Soit M une variété sur laquelle agit un groupe de Lie G compact. Le groupe G agit alors sur l'espace vectoriel des p−formes différentielles, ainsi que sur la cohomologie de de Rham de M. On peut considérer le sous-complexe $\mathscr{A}^\cdot(M)^G$ du complexe de de Rham, formé des formes différentielles invariantes par l'action de G.

THÉORÈME 9.26. — *L'inclusion* $\mathscr{A}^\cdot(M)^G \to \mathscr{A}^\cdot(M)$ *induit un morphisme injectif*

$$H^p(\mathscr{A}^\cdot(M)^G) \to H^p_{DR}(M)$$

sur les espaces vectoriels de cohomologie ; son image est le sous-espace $H^p_{DR}(M)^G$ *des classes de cohomologie invariantes par* G.

COROLLAIRE 9.27. — *On suppose en outre* G *connexe. Alors les applications linéaires*

$$H^p(\mathscr{A}^\cdot(M)^G) \to H^p_{DR}(M)$$

sont des isomorphismes.

Exercice 9.16

Considérons sur la sphère S_n l'action de $G = SO(n+1)$. Montrer que $\mathscr{A}^p(S_n)^G$ est nul, sauf pour $p = 0$ et $p = n$. Pour $p = 0$ cet espace vectoriel est réduit aux fonctions constantes. Pour $p = n$ cet espace vectoriel est de dimension 1, avec pour générateur la forme volume. Il en résulte que tous les nombres de Betti de S_n sont nuls, sauf pour $b_0 = b_n = 1$.

Exercice 9.17

On prend $G = \{\pm 1\}$ agissant sur la sphère S_n. Montrer que le complexe $\mathscr{A}\cdot(M)^G)$ s'identifie au complexe de de Rham des formes différentielles sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. En déduire les nombres de Betti de l'espace projectif réel.

Exercice 9.18

1. Soit G un groupe de Lie compact et connexe. Montrer que la cohomologie de de Rham $H^p_{DR}(G)$ peut se calculer en termes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. (Utiliser l'exercice 9.10).

2. Décrire la cohomologie de de Rham de $T = S_1^n$, et trouver ses nombres de Betti.

Exercice 9.19

On considère le groupe de Lie $G = SL(2, \mathbb{R})$.

a) Montrer que G est une variété de dimension 3 difféomorphe à $S_1 \times \mathbb{R}^2$. Calculer les nombres de Betti de G.

b) Calculer la cohomologie $H^p(\mathscr{A}\cdot(G)^G)$ du complexe de de Rham des formes différentielles invariantes à gauche.

c) Montrer que l'application linéaire canonique

$$H^1(\mathscr{A}\cdot(G)^G) \to H^1_{DR}(G)$$

n'est pas surjective.

Ainsi, le corollaire ci-dessus ne s'étend pas aux actions des groupes de Lie non compacts. Les exercices 9.20 et 9.21 qui suivent fournissent la démonstration du théorème 9.26. Elle repose sur un procédé de moyenne.

Mesure de Haar

Considérons sur le groupe de Lie G le fibré tangent. On sait que ce fibré est trivial, et on peut le trivialiser en utilisant les translations à gauche de G. La variété G est orientable ; on se fixe une telle orientation, ce qui revient à se donner une orientation de l'espace tangent en l'élément neutre. Si $m = \dim \mathrm{G}$, il existe dans $\mathrm{A}^m(\mathrm{G})$ une forme volume canonique Ω, invariante par translation à gauche, et telle que Ω satisfasse la condition de normalisation $\int_{\mathrm{G}} \Omega = 1$. On peut alors intégrer les fonctions continues f sur G, en considérant la forme linéaire $f \mapsto \mu(f) = \int_{\mathrm{G}} f\Omega$. Cette mesure ne dépend pas du choix de l'orientation de G et s'appelle la mesure de Haar sur G; elle est invariante par translation à gauche. Si G est un groupe fini, cette mesure est donnée par $\mu(f) = \frac{1}{\#\mathrm{G}} \sum_{g \in \mathrm{G}} f(g)$, où #G désigne le nombre d'éléments de G : c'est donc la moyenne des valeurs de f.

Soit $\omega \in \mathrm{A}^p(\mathrm{M})$. En chaque point $x \in \mathrm{M}$, la fonction $\mathrm{G} \to \Lambda^p \mathrm{T}^*_x \mathrm{M}$ définie par $g \mapsto g^*(\omega)(x)$ est de classe C^∞. On peut donc l'intégrer sur G : on pose

$$\mathrm{I}(\omega)(x) = \mu(g^*(w)(x))$$

Exercice 9.20

1. Montrer que $\mathrm{I}(\omega)$ définit une forme différentielle invariante par l'action de G. Vérifier que $d\mathrm{I}(\omega) = \mathrm{I}d(\omega)$.

2. Montrer que si ω est G−invariante, $\mathrm{I}(\omega) = \omega$. En déduire que la flèche canonique

$$\mathrm{H}^p(\mathscr{A}^\cdot(\mathrm{M})^{\mathrm{G}}) \to \mathrm{H}^p_{\mathrm{DR}}(\mathrm{M})$$

est injective.

Reste à montrer que l'image est constituée des classes de cohomologie G−invariantes.

Exercice 9.21

Soit ω une p−forme différentielle fermée sur M dont la classe de cohomologie est G−invariante.

1. Montrer que pour tout $g \in \mathrm{G}$, la forme différentielle $\omega - g^*(w)$ est exacte.

2. Montrer qu'il existe un recouvrement ouvert U_i et une famille de formes différentielles $(\alpha_g)_{g \in \mathrm{U}_i}$ de degré $p-1$, dépendant différentiablement de g telle que pour $g \in \mathrm{U}_i$ on ait

$$\omega - g^*(w) = d\alpha_g$$

(Utiliser la formule d'homotopie).

3. En déduire qu'il existe une famille $(\beta_g)_{g\in \mathrm{G}}$ de formes différentielles dépendant différentiablement de g telle que

$$\omega - g^*(w) = d\beta_g$$

(Introduire une partition de l'unité μ_i subordonnée au recouvrement U_i. La forme différentielle $\beta_g = \sum_{i\in \mathrm{I}} \mu_i(g)\alpha_g$ convient.)

4. Soit $\beta(x) = \int_{g\in \mathrm{G}} \beta_g(x)\Omega$. Vérifier que β est une forme de classe C^∞ et que l'on a la formule

$$\omega - \mathrm{I}(w) = d\beta.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 9.26. Il existe d'autres moyens pour calculer la cohomologie de la sphère : par exemple, on peut recouvrir la sphère par deux ouverts U_0 et U_∞ contractiles ; il suffit de prendre pour U_0 le complémentaire du pôle sud, et pour U_∞ le complémentaire du pôle nord. On est ramené à décrire la cohomologie de la variété en termes de la cohomologie de ces ouverts qui est évidente), et de la cohomologie de l'intersection ; cette intersection a même cohomologie que S_{n-1}. La suite exacte de Mayer-Vietoris (*cf.* par exemple C. Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann) permet de relier ces cohomologies et de raisonner par récurrence sur la dimension. L'avantage de la méthode exposée ici est qu'elle permet trouver facilement le générateur de $\mathrm{H}^n_{\mathrm{DR}}(\mathrm{S}_n)$.

Exercice 9.22

Montrer que $\mathbb{R}^n$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Exercice 9.23

On se propose de donner une démonstration du théorème de d'Alembert reposant sur les propriétés de l'application exponentielle. Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre commutative et unitaire, de dimension finie. On équipe A d'une norme telle que pour tout $a \in \mathrm{A}$ et $b \in \mathrm{A}$ on ait $\| ab \| \leq \| a \| \| b \|$.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \exp x$ de A dans le groupe A^* des éléments inversibles de A est un homomorphisme de groupes.

2. Vérifier que l'application $x \mapsto \exp x$ est un revêtement de la composante connexe de l'élément neutre de A^*.

3. On suppose que A est une extension algébrique de degré d de $\mathbb{R}$. Montrer que $d \leq 2$. On suppose pour ceci $d \geq 3$, et on procède de la manière suivante :

a) Remarquer que si $d \geq 3$, A^* serait simplement connexe.

b) Montrer que si $\varphi : [0,1] \to A^*$ est un lacet de classe C^1 l'intégrale à valeurs dans A

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$$

appartient à ker exp. En déduire que cette intégrale ne dépend que de la classe d'homotopie de γ. Déduire de a) que cette intégrale est en fait nulle.

c) En déduire que exp : $A \to A^*$ serait un difféomorphisme. Conclure en utilisant l'exercice précédent.

10. Le degré

10.1. L'espace vectoriel $H_c^n(M)$

On considère une variété connexe M de classe C^∞, sans bord, orientée, de dimension n. Soit $\mathscr{A}_c^\cdot(M)$ le complexe de de Rham des formes différentielles sur M à support compact. On désigne par $H_c^p(M)$ les espaces vectoriels de cohomologie de ce complexe. On considère le morphisme d'intégration, sur $A_c^n(M)$

$$\omega \mapsto \int_M \omega$$

D'après le théorème de Stokes, cette application se factorise en une application linéaire

$$I : H_c^n(M) \to \mathbb{R}.$$

THÉORÈME 10.1. — *L'application linéaire ci-dessus*

$$I : H_c^n(M) \to \mathbb{R}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il est clair que cette application est surjective, puisque l'intégration d'une forme différentielle $f\Omega$, où f est une fonction de classe C^∞ positive et à support compact et Ω une forme différentielle de degré n compatible

avec l'orientation fournit un nombre > 0. Le problème est de montrer l'injectivité. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

1) Le théorème est évidemment vrai pour la sphère S_n : l'espace vectoriel de cohomologie $H^n_{DR}(S_n)$ est, comme il a été vu dans la section précédente, de dimension 1 ; donc I est un isomorphisme.

2) Démontrons l'énoncé pour $\mathbb{R}^n$. Soit $\omega \in A^n_c(\mathbb{R}^n)$ à support dans une boule $B(r)$ de centre 0 et de rayon r, et telle que $\int_M \omega = 0$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est contractile, on sait qu'il existe une forme différentielle ψ de degré $n-1$ telle que $d\psi = \omega$. Le problème est que ψ n'est pas obligatoirement à support compact. On va mofifier ψ de façon a obtenir une forme différentielle à support compact.

Considérons le cylindre C_r des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$r < \| x \| < 3r.$$

La sphère $S = \partial\overline{B}(2r)$ de rayon $2r$ est rétracte par déformation de C_r, donc le morphisme d'inclusion $S \hookrightarrow C_r$ induit un isomorphisme en cohomologie de de Rham. Sur C_r on a $d\psi = 0$. Pour connaître la classe de cohomologie définie par ψ dans $H^{n-1}_{DR}(C_r)$ il suffit de calculer l'intégrale $\int_S \psi$. D'après la formule de Stokes, cette intégrale est aussi $\int_{B(2r)} \omega$ et cette intégrale est nulle par hypothèse. On peut donc trouver une forme différentielle $\eta \in A^{n-2}(C_r)$ telle que $d\eta = \psi$. Considérons une forme différentielle ζ de degré $n-2$, à support compact dans le cylindre C_r, et qui coïncide avec η au voisinage de la sphère S. Alors $\psi - d\zeta$ s'annule au voisinage de cette sphère. Alors la forme différentielle ϕ définie par

$$\phi = \begin{cases} \psi - d\zeta & \text{pour} \quad \| x \| \leq 2r \\ 0 & \text{pour} \quad \| x \| \geq 2r \end{cases}$$

Cette forme différentielle est de classe C^∞, à support compact, et telle que $d\phi = \omega$. Ainsi, le théorème est démontré pour une variété difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

3) Considérons un recouvrement de M par deux ouverts U_1 et U_2 de M, qui se rencontrent, et posons $U_{1,2} = U_1 \cap U_2$.

Exercice 10.1

1. Montrer que l'on a une suite exacte de complexes

$$0 \to A^\cdot_c(U_{1,2}) \to A^\cdot_c(U_1) \oplus A^\cdot_c(U_2) \to A^\cdot_c(M) \to 0$$

(Utiliser une partition de l'unité).

2. En déduire que que l'on a une suite exacte

$$\mathrm{H}_c^n(\mathrm{U}_{1,2}) \xrightarrow{(1)} \mathrm{H}_c^n(\mathrm{U}_1) \oplus \mathrm{H}_c^n(\mathrm{U}_2) \to \mathrm{H}_c^n(\mathrm{M}) \to 0$$

Supposons le théorème démontré pour U_1 et U_2; le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}_c^n(\mathrm{U}_{1,2}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_c^n(\mathrm{U}_1) \\ & \mathrm{I}\searrow & \downarrow \mathrm{I} \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

montre que l'application linéaire (1) est forcément non nulle. Il en résulte que $\dim \mathrm{H}_c^n(\mathrm{M}) \leq 1$ et par suite $\mathrm{I} : \mathrm{H}_c^n(\mathrm{M}) \to \mathbb{R}$ est un isomorphisme.

4) Soit $a \in \mathrm{M}$. Pour tout $x \in \mathrm{M}$ on peut par connexité trouver un nombre un nombre fini d'ouverts $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_m$ difféomorphes à $\mathbb{R}^n$, tels que $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_{i+1}$ soit non vide pour $i = 1, \ldots, m-1$, et tels que U_m contienne x. Puisque l'énoncé est vrai pour chaque U_i on voit en appliquant successivement ce qui a été vu en 3) que l'on peut trouver un ouvert U contenant a et x pour lequel l'énoncé est vrai. Si K est un compact de M, on peut alors recouvrir K par un nombre fini d'ouverts contenant a pour lequel le théorème est vrai. Donc le théorème est vrai pour un ouvert contenant K. Ceci entraîne évidemment le résultat. □

Exercice 10.2

Soit M une variété connexe de dimension n qui n'est pas orientable. On se propose de montrer que $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{M}) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un revêtement $\pi : \tilde{\mathrm{M}} \to \mathrm{M}$ par une variété orientable et connexe $\tilde{\mathrm{M}}$. Montrer que l'involution canonique $\sigma : \tilde{\mathrm{M}} \to \tilde{\mathrm{M}}$ renverse l'orientation.

2. On suppose M compacte. Montrer que le complexe de de Rham $\mathscr{A}^\cdot(\mathrm{M})$ s'identifie au complexe des invariants $\mathscr{A}^\cdot(\tilde{\mathrm{M}})^\sigma$. Déduire du théorème 9.26 que l'on a $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{M}) = 0$.

3. Etudier le cas où M n'est plus compacte.

10.2. Le degré de Brouwer

Soient M et N deux applications de classe C^∞ compactes, connexes, orientées de dimension n et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application de classe C^∞, propre. On considère le morphisme

$$f^* : \mathrm{H}^n(\mathrm{N}) \to \mathrm{H}^n(\mathrm{M})$$

induit par l'image réciproque des formes différentielles à support compact. On rappelle que f^* ne dépend que de la classe d'homotopie de f. On sait que les espaces vectoriels $\mathrm{H}^n(\mathrm{M})$ et $\mathrm{H}^n(\mathrm{N})$ sont de dimension 1.

THÉORÈME 10.2. — *Le morphisme f^* est la multiplication par un nombre entier* $\deg(f)$.

DÉFINITION 10.3. — *L'entier* $\deg(f)$ *est appelé le degré de f.*

Si P est une autre variété de dimension n, compacte connexe et orientée, et $g : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ est une application de classe C^*, on a $\deg(g \circ f) = \deg(f)\deg(g)$. En particulier, si f est un difféomorphisme, on a $d(f) = \pm 1$; le signe dépend du fait que f conserve ou renverse l'orientation.

La démonstration qu'on va donner utilise le théorème de Sard, et donne une interprétation du degré. Rappelons d'abord le théorème de Sard :

THÉORÈME 10.4. — *Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application de classe C^∞. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle.*

Soit c un point de N qui n'est pas valeur critique. Alors $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de dimension 0, donc réduite à un nombre fini de points. Pour $x \in f^{-1}(c)$, posons

$$\mathrm{signe}(f, x) = \begin{cases} +1 \text{ si } \mathrm{T}_x f \text{ conserve l'orientation} \\ -1 \text{ si } \mathrm{T}_x f \text{ renverse l'orientation} \end{cases}$$

Le théorème 10.2 est une conséquence de l'énoncé suivant :

THÉORÈME 10.5. — *Soit $c \in \mathrm{N}$ un point qui n'est pas valeur critique. Alors*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(c)} \mathrm{signe}(f, x)$$

Remarquons que cet énoncé entraîne que le membre de droite, qui compte algébriquement le nombre de points dans une fibre de f ne dépend pas du choix de c. On peut également donner un énoncé analogue pour un morphisme de variétés connexes orientées de dimension n, à condition de supposer que le morphisme f est propre ; dans ce cas, le membre de droite s'interprète comme le morphisme $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{N}) \to \mathrm{H}^n_c(\mathrm{M})$ induit par f sur la cohomologie des formes différentielles à support compact.

Démonstration. Si c n'est pas valeur critique, il existe un voisinage ouvert V de c tel que le morphisme induit par f : $f^{-1}(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ soit un revêtement. On peut supposer que V est connexe, et $f^{-1}(\mathrm{V})$ est réunion disjointe d'ouverts $(\mathrm{U}_i)i = 1, \ldots, k$ difféomorphes par f à V. Soit ω une forme différentielle de degré n à support compact dans V et telle que $\int_{\mathrm{V}} \omega = 1$. On a alors

$$\int_{\mathrm{N}} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathrm{U}_i} f^*(\omega)$$

D'après les exercices 9.12 et 9.13, on a $\int_{\mathrm{U}_i} f^*(\omega) = \pm 1$, où le signe est $+1$ si $f|_{\mathrm{U}_i}$ conserve l'orientation et -1 sinon. Ce signe est aussi signe(f, x) au point $x \in \mathrm{U}_i \cap f^{-1}(c)$. On a donc obtenu

$$\int_{\mathrm{N}} f^*(\omega) = \sum_{x \in f^{-1}(c)} \mathrm{signe}(f, x)$$

d'où découle le résultat. □

Exemple

Soit $f : \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_1$ une application de classe C^∞. Alors il existe un relèvement $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tel que pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$e^{i\mathrm{F}(\theta)} = f(e^{i\theta}).$$

L'application $\theta \mapsto \frac{1}{2\pi}\mathrm{F}(\theta + 2\pi) - \mathrm{F}(\theta)$ est une constante entière classiquement appelé le degré de f : elle mesure la variation de l'argument de $f(e^{i\theta})$ quand θ augemente de 2π. Nous allons montrer que cet entier est $\deg(f)$.

Soient $\pi : \mathbb{R} \to \mathrm{S}_1$ l'application exponentielle $\theta \to e^{i\theta}$ et $\omega = xdy - ydx$ la forme volume sur S^1. Alors $\int_{\mathrm{S}_1} \omega = 2\pi$ et $\pi^*(\omega) = d\theta$. On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{S}_1} f^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \pi^*(f^*(\omega)) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \mathrm{F}^*(d\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} d\mathrm{F} = \mathrm{F}(2\pi) - \mathrm{F}(0).
\end{aligned}$$

Exemple

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et S(E) la sphère de E. Soit $f \in \mathrm{O(E)}$ une transformation orthogonale et $f : \mathrm{S(E)} \to \mathrm{S(E)}$ l'application induite. Alors $\deg(f) = \det f$.

En effet, puisque O(E) est engendré par les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans, il suffit de vérifier que pour une telle symétrie s on a $\deg(s) = -1$. Mais une telle symétrie renverse une orientation de E, et transforme vecteur sortant en vecteur sortant. Par suite, elle renverse l'orientation de la sphère.

10.3. Le théorème de Poincaré-Hopf

Soit $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs ne s'annulant qu'à l'origine. Soit $\mathrm{B}(r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon r. On désigne par F_ξ l'application $\partial\mathrm{B}(r) \to \mathrm{S}_{n-1}$ définie par

$$\mathrm{F}_\xi(x) = \frac{\xi}{\| \xi \|}.$$

DÉFINITION 10.6. — *On appelle indice du champ de vecteurs ξ en 0, et on note* $\mathrm{I}(\xi, 0)$ *le nombre* $\deg(\mathrm{F}_\xi)$.

Exercice 10.3

Montrer, en utilisant la propriété d'invariance du degré par homotopie, que $\mathrm{I}(\xi, 0)$ ne dépend pas du choix de r.

PROPOSITION 10.7. — *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de jacobien > 0 tel que $\varphi(0) = 0$. Soit ξ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ ne s'annulant qu'à l'origine Alors*

$$\mathrm{I}(\xi, 0) = \mathrm{I}(\varphi_*(\xi), 0)$$

On démontrera plus tard cette proposition. Considérons maintenant un champ de vecteurs ξ sur une variété orientée M de dimension n. Soit $a \in \mathrm{M}$ un zéro isolé de ξ. Choisissons une carte locale $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ de M au voisinage de a telle que $\varphi(a) = 0$, compatible avec l'orientation de M; on suppose que a est le seul zéro de ξ dans l'ouvert U. Alors l'indice $\mathrm{I}(\varphi_*(\xi), 0)$ ne dépend pas du choix de la carte locale φ d'après la proposition ci-dessus.

DÉFINITION 10.8. — *L'indice de ξ en a est défini par*

$$\mathrm{I}(\xi, a) = \mathrm{I}(\varphi_*(\xi), 0).$$

THÉORÈME 10.9. — *(Poincaré-Hopf) Soit* M *une variété compacte orientée, $\chi(\mathrm{M})$ sa caractéristique d'Euler-Poincaré, et ξ un champ de vecteurs n'ayant que des zéros isolés. Soit $\mathrm{Z}(\xi)$ l'ensemble des zéros de ξ.*

$$\sum_{a \in \mathrm{Z}(\xi)} \mathrm{I}(\xi, a) = \chi(\mathrm{M}).$$

Cet énoncé montre en particulier que le membre de gauche est un invariant topologique.

Exemple

Considérons la sphère S_n. On a $\chi(\mathrm{S}_n) = 0$ si n est impair et $\chi(\mathrm{S}_n) = 2$ si n est pair. Ainsi, tout champ de vecteurs sur une sphère de dimension paire doit s'annuler. Par contre, si n est pair, il existe sur S_n un champ de vecteurs qui ne s'annule pas.

Exemple

Soit M une variété compacte orientée de dimension, et f une fonction de Morse sur M. On équipe M d'une métrique riemannienne adaptée à f au sens suivant : au voisinage de chaque point critique, il existe une carte locale $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$: $\mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ telle que $\varphi(a) = 0$, compatible avec la métrique euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$ et telle que la fonction f s'écrive sur U sous la forme de Morse

$$f(x) = c + \sum_i \epsilon_i x_i^2,$$

avec $\epsilon_i = \pm 1$. De telle métriques adpatées à f peuvent être construite facilement en utiisant des partitions de l'unité.

Dans ces conditions, les zéros du gradient de f au voisinage du point critique a sont les points critiques de f; de plus,

$$\mathrm{grad}\,(f) = 2 \sum_i \epsilon_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

L'application $S_{n-1} \to S_{n-1}$ qui permet de calculer le degré est définie dans la base standard e_i de $\mathbb{R}^n$ par $x \to \sum_i \epsilon_i x_i e_i$. Soit $C(f)$ l'ensemble des points critiques de f, et $I(f,a)$ l'indice du point critique a. Alors

$$I(\text{grad}\, f, a) = \prod \epsilon_i = (-1)^{I(f,a)}$$

Le théorème de Poincaré-Hopf fournit la formule

$$\sum_{a \in C(f)} (-1)^{I(f,a)} = \chi(M).$$

Cette formule peut se vérifier directement à partir de la théorie de Morse, quand on dispose de quelques rudiments de topologie algébrique (*cf.* [3], [5], [7].) C'est à partir d'elle qu'on va établir le théorème de Poincaré-Hopf dans le cas général.

Démonstration de la proposition 10.7

Soit ξ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Considérons une famille φ_t de difféomorphismes $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi_t(0) = 0$ dépendant différentiablement de t, c'est-à-dire que $\phi : (t,x) \to (t, \varphi_t(x)$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ sur lui-même. On dit que ϕ est une isotopie entre φ_0 et φ_1. La fonction $t \mapsto I(\varphi_{t*}(\xi), 0)$ a un sens, et est constante : en effet, si $B(r)$ est la boule de centre O et de rayon r, l'application associée $F_{\varphi_{t*}(\xi)} : \partial B(r) \to S_{n-1}$ est induite par une homotopie différentiable, donc le degré de $F_{\varphi_{t*}(\xi)}$ reste constant.

Remarquons que toute application linéaire inversible de déterminant positif $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est isotope à l'identité, puisque le groupe $GL^+(\mathbb{R}^n)$ des matrices inversibles à déterminant positif est connexe. On est donc ramené à montrer le lemme suivant :

LEMME 10.10. — *Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme. Alors φ est isotope à $d_0\varphi$.*

Démonstration.

On pose

$$h(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{t}\varphi(tx) \text{ si } t > 0 \\ \\ d_0\varphi \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

Alors h est de classe C^∞ : en effet, on peut écrire $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$ avec g_i de classe C^∞. On a alors $h(t,x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(tx)$ et donc est de classe C^∞.

Alors $(t,x) \mapsto (t, h(t,x))$ réalise une isotopie entre $d_0\varphi$ et φ, ce qui achève la démonstration. □

Dans la démonstration du théorème de Poincaré-Hopf, on aura besoin d'étendre la notion de degré à une application $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ de classe C^∞ dans la situation suivante : les variétés M et N sont compactes, orientées ; N est connexe, mais où M ne l'est plus forcément. Dans ce cas, le degré est par définition la somme des degrés de la restriction de f à chacune des composantes. C'est bien sûr encore un invariant homotopique.

LEMME 10.11. — *Soit* N *une variété à bord de dimension n plongée dans* $\mathbb{R}^n$ *et* ξ *un champ de vecteurs sur* N, *non nul en tout point du bord, et n'ayant que des zéros isolés. Soit* $g : \partial\mathrm{N} \to \mathrm{S}_{n-1}$ *l'application de Gauss*

$$g(x) = \frac{\xi(x)}{\| \xi(x) \|}$$

Alors

$$\sum_{a \in \mathrm{Z}(\xi)} \mathrm{I}(\xi, a) = \deg(g).$$

Démonstration. Choisissons pour chaque zéro a de ξ une carte locale $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ dont la source contient a et telle que $\varphi(a) = 0$; considérons une petite boule ouverte $\mathrm{B}(a) \subset \mathrm{N}$ autour de chaque zéro a de ξ, qui évite le bord de $\partial\mathrm{N}$; considérons la variété à bord

$$\mathscr{N} = \mathrm{N}_\epsilon \setminus \cup_{a \in \mathrm{Z}(\xi)} \mathrm{B}(a)$$

obtenue en enlevant ces boules. Sur $\mathscr{N}$ le champ de vecteurs ξ ne s'annule pas. On désigne par $\mathrm{G} : \mathscr{N} \to \mathrm{S}_{m-1}$ l'application définie par

$$\mathrm{G}(x) = \frac{\xi(x)}{\| \xi(x) \|}$$

Soit ω une forme différentielle de degré maximum sur S_{n-1} et d'intégrale $\int_{\mathrm{S}_{n-1}} \omega = 1$. Alors la forme différentielle $\mathrm{G}^*(\omega)$ sur $\mathscr{N}$ est évidemment fermée. D'après la formule de Stokes, on a

$$\int_{\partial\mathscr{N}} \mathrm{G}^*(\omega) = \int_{\mathscr{N}} d\mathrm{G}^*(\omega) = 0$$

Cette égalité se lit encore

$$\sum_{a \in \mathrm{Z}(\xi)} \mathrm{I}(\xi, a) = \deg g.$$

Démonstration du théorème de Poincaré-Hopf

On utilise le résultat obtenu à partir de l'existence des fonctions de Morse : le théorème est vrai pour le champ de gradient associé à une métrique adaptée à une fonction de Morse sur M. Il s'agit de montrer donc de démontrer l'énoncé suivant :

THÉORÈME 10.12. — *Soit ξ un champ de vecteurs n'ayant que des zéros isolés sur* M. *La somme*

$$\sum_{a \in \mathrm{Z}(\xi)} \mathrm{I}(\xi, a)$$

ne dépend pas de ξ.

On va commencer par prouver ceci pour les champs de vecteurs ξ transverses à la section nulle.

Exercice 10.4

Soit ξ un champ de vecteurs sur M, et a un zéro de ξ. Soit $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ un repère local de TM au voisinage U de a. On écrit

$$\xi|_{\mathrm{U}} = \sum_i \xi_i e_i$$

au voisinage de a. Vérifier que l'application linéaire $\mathrm{T}_a\mathrm{M} \to \mathrm{T}_a\mathrm{M}$ définie par

$$\mathrm{D}_a\xi = \sum_{i=1}^{n} d_a\xi \; e_i$$

est indépendante du repère choisi.

DÉFINITION 10.13. — *On dit que ξ est transverse à la section nulle si pour tout zéro a de ξ, la différentielle $\mathrm{D}_a\xi$ est inversible.*

Ceci signifie aussi que l'application $\xi : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{TM}$ est transverse à la sous-variété de TM définie par la section nulle, au sens du chapitre 1.

Exercice 10.5

Soit ξ un champ de vecteurs sur M transverse à la section nulle. Montrer que les zéros de ξ sont isolés.

Exercice 10.6

Soit φ : M $\rightarrow$ N un difféomorphisme. Montrer que si ξ est un champ de vecteurs sur M transverse à la section nulle, il en est de même du champ de vecteurs

$$\eta = \varphi_*(\xi).$$

Démonstration du théorème 10.12

On utilise les deux résultats élémentaires suivants :

— Toute variété compacte M de dimension n est difféomorphe à une sous-variété d'un espace vectoriel E de dimension m. On suppose E munit d'une métrique euclidienne.

— Existence de voisinage tubulaire (*cf.* exercice 10.9) : soit N le fibré normal de M dans E, qu'on identifie à la variété des couples $(x, v) \in \mathrm{M} \times \mathrm{E}$ tels que v soit orthogonal à $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$. L'application $\phi : (x, v) \rightarrow \mathrm{E}$ définie par $(x, v) \mapsto x + v$ est un difféomorphisme d'un voisinage V de la section nulle dans N sur un voisinage ouvert W de M dans E. A la projection canonique π : N $\rightarrow$ M correspond une rétraction r : W $\rightarrow$ M de classe C^∞. Le vecteur $x - r(x)$ est orthogonal à $\mathrm{T}_{r(x)}\mathrm{M}$.

Exercice 10.7

Vérifier le point $r(x)$ est le seul point de M qui réalise le minimum de la fonction $y \mapsto \| x - y \|^2$ sur M.

Exercice 10.8

Vérifier que le gradient de la fonction f : W $\rightarrow [0, \infty[$ définie par

$$x \mapsto f(x) = \| x - r(x) \|^2$$

est le champ de vecteurs $x \mapsto 2(x - r(x))$ En déduire que la seule valeur critique de la fonction f est 0.

Considérons pour $\epsilon > 0$ assez petit la variété à bord W_ϵ définie pour ϵ assez petit par $\| x - r(x) \|^2 \leq \epsilon^2$. Soit ξ un champ de vecteurs n'ayant que des zéros isolés sur M. On considère le champ de vecteurs sur W

$$\eta(x) = x - r(x) + \xi(r(x))$$

Sur M, ce champ de vecteurs coïncide avec ξ. On a $\langle \eta(x), x - r(x) \rangle = \| x - r(x) \|^2$ donc ce champ de vecteurs a les mêmes zéros que ξ et c'est un champ de vecteurs sortant sur le bord $\partial \mathrm{W}_\epsilon$. Considérons l'application de Gauss

$$g : \partial \mathrm{W}_\epsilon \to \mathrm{S}_{m-1}$$

définie par $g(x) = \dfrac{\eta(x)}{\| \eta(x) \|}$. D'après le lemme 10.11 appliqué au champ de vecteurs η, on a

$$\sum_{a \in \mathrm{Z}(\eta)} \mathrm{I}(\eta, a) = \deg(g).$$

Remarquons que l'application g est homotope à l'application $\gamma : x \mapsto \frac{1}{\epsilon}(x - r(x))$ donnée en chaque point du bord par le vecteur sortant normal de norme 1. En effet, une homotopie (différentiable) entre ce champ de vecteurs normaux sur $\partial \mathrm{W}_\epsilon$ et g est donnée par

$$(t, x) \mapsto \frac{x - r(x) + t\xi(x)}{\| x - r(x) + t\xi(x) \|}.$$

Il en résulte son degré est aussi le degré de l'application de γ, donc indépendant de ξ. D'autre part, on a vu que les zéros de ξ et η sont les mêmes. Il nous reste à identifier les indices $\mathrm{I}(\xi, a)$ et $\mathrm{I}(\eta, a)$. C'est facile si ξ est transverse à la section nulle.

LEMME 10.14. — *On suppose que ξ est transverse à la section nulle. Soit a un zéro de ξ. On a $\mathrm{I}(\xi, a) = \mathrm{I}(\eta, a)$.*

Démonstration. Soit ξ un champ de vecteurs sur M, transverse à la section nulle. Pour tout $a \in \mathrm{Z}(\xi)$, choisissons une carte locale $\varphi : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ telle que a soit le seul zéro de ξ dans U, et telle que $\varphi(a) = 0$. On écrit dans les coordonnées $\varphi_*(\xi)(x) = (x, v(x))$, où v est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ qui ne s'annule qu'en 0 et tel que $d_0 v$ soit inversible. Par définition $\mathrm{I}(\varphi, a)$ est le degré de l'application $\mathrm{S}_{n-1} \to \mathrm{S}_{n-1}$ définie par

$$x \mapsto \frac{v(x)}{\| v(x) \|}$$

et cette application est homotope à l'application induite par l'application linéaire $d_0 v$. Par suite,

$$\mathrm{I}(\xi, a) = \text{signe } \det(\mathrm{D}_a \xi).$$

Considérons maintenant le champ de vecteurs η. Visiblement $\det(D_a\xi) = \det(D_a\eta)$. Par suite ce champ de vecteurs est aussi transverse à la section nulle, et $I(\xi, a) = I(\eta, a)$. □

Ceci achève la démonstration du théorème de Poincaré-Hopf pour un champ de vecteurs transverse à la section nulle. Dans le cas général, on ne sait pas que ξ est transverse à la section nulle. Pour obtenir le théorème de Poincaré-Hopf, il suffit de montrer qu'étant donné un champ de vecteurs ξ, n'ayant que des zéros isolés, il existe un champ de vecteurs ζ transverse à la section nulle tel que

$$\sum_{a\in Z(\xi)} I(\xi, a) = \sum_{a\in Z(\zeta)} I(\zeta, a).$$

En choisissant une carte locale au voisinage d'un zéro, on est ramené à vérifier le lemme suivant :

LEMME 10.15. — *Soit ξ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ qui a 0 pour seul zéro. Alors il existe un champ de vecteurs ζ sur $\mathbb{R}^n$ transverse à la section nulle qui coïncide avec ξ en dehors d'un compact et tel que*

$$\sum_{a\in Z(\zeta)} I(\zeta, a) = I(\xi, 0).$$

Démonstration. Soit $\mu : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ une fonction ≥ 0 de classe C^∞, qui vaut 1 sur la boule $B(0,1)$, nulle en dehors de la boule $B(0,2)$. Soit $w \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. On considère le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$

$$\zeta(x) = \xi(x) - \mu(x)w.$$

Soit $\delta = \inf_{1\leq\|x\|\leq 2} \| \xi(x) \|$. Si on choisit w de sorte que $\| w \| < \delta$, les zéros de ζ appartiennent à la boule $B(0,1)$, et en un tel zéro a, on a $\xi(a) = w$. Si on choisit $\| w \| < \delta$, et non valeur critique pour ξ, ce qui est possible par le théorème de Sard, on voit que le champ de vecteur ζ ainsi construit transverse à la section nulle. D'après le lemme 10.11, la somme $\sum_{a\in Z(\zeta)} I(\zeta, a)$ est encore le degré de l'application $x \mapsto \dfrac{\xi(x)}{\| \xi(x) \|}$ sur la variété à bord $\overline{B}(0,2)$; par définition, c'est aussi $I(\xi, 0)$ ce qui achève la démonstration. □

Exercice 10.9

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et M une sous-variété de E de codimension r. On dit qu'un vecteur $v \in \mathrm{E}$ est normal à M au point x de M s'il est orthogonal à l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$. On désigne par $\mathrm{N} \subset \mathrm{M} \times \mathrm{E}$ l'ensemble des couples (x, v) où v est un vecteur normal à M en $x \in \mathrm{M}$.

1. Démontrer que N est une sous-variété de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ de dimension n.

On pourra commencer par le cas où la variété M est définie comme image réciproque de 0 par une submersion $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^r$, où U est un ouvert de E. Etudier l'application

$$\mathrm{M} \times \mathbb{R}^r \to \mathrm{M} \times \mathrm{E}$$

définie par $(x, v) \mapsto (x, (d_x f)^*(v))$ où $(d_x f)^*$ désigne l'application linéaire adjointe de la différentielle $d_x f$ au point x, et vérifier que cette application est une immersion injective et propre.

2. On considère l'application $g : \mathrm{N} \to \mathrm{E}$ définie par $g(x, v) = x + v$. Montrer que g est un difféomorphisme local au voisinage de $\mathrm{M} \times \{0\}$.

3. On suppose M compacte. Soit ϵ un réel > 0 ; on désigne N_ϵ l'ensemble des points $(x, v) \in \mathrm{N}$ tels que $\| v \| \leq \epsilon$. Soit S_ϵ l'ensemble des couples $((x, v), (y, w)) \in \mathrm{N}_\epsilon \times \mathrm{N}_\epsilon$ tels que $x + v = y + w$, et $x \neq y$.

a) Montrer que si ϵ est assez petit, S_ϵ est un fermé de $\mathrm{N}_\epsilon \times \mathrm{N}_\epsilon$.

b) On pose

$$\alpha = \inf_{((x,v),(y,w)) \in \mathrm{S}_\epsilon} \| x - y \| .$$

Montrer que $\alpha > 0$. Vérifier que si ρ est un réel > 0 tel que $\rho \leq \epsilon$ et $\rho < \frac{\alpha}{2}$, la restriction de g à N_ρ est injective.

c) En déduire qu'il existe un voisinage ouvert W de $\mathrm{M} \times \{0\}$ dans N tel que $g\,|_{\mathrm{W}}$ soit un difféomorphisme sur un voisinage ouvert de M.

Références

[1] V. Arnold, *Equations différentielles ordinaires*, Ed. Mir (1974).

[2] R. Bott et L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, GTM, Springer (1982).

[3] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*, Hermann, (1971).

[4] M. Greenberg, *Lectures on algebraic topology*, Benjamin, Inc. (1967).

[5] F. Laudenbach, *Topologie différentielle*, cours de l'Ecole Polytechnique (1993).

[6] D. Leborgne, *Calcul différentiel et géométrie*, PUF (1982).

[7] J. Milnor, *Morse theory,* Princeton University Press (1963).

[8] J. Milnor, *Topology from differentiable viewpoint*, University of Virginia at Challottesville (1964).

[9] V. Rohlin et D. Fuchs, *Premier cours de topologie*, Ed. Mir (1980).

[10] M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry,* Publish or Perish, Inc. (1970).