UN CRITERE DE LISSITE POUR LE MODULE DE DOUADY- GROTHENDIECK

Par J. Le Potier

Soient X une variété analytique complexe compacte de dimension n, E un $\mathcal{O}_X$-module cohérent . Pour tout espace analytique S, on désigne par E_S l'image réciproque de E par la projection $pr_2 : S \times X \to X$. Le foncteur qui à S associe l'ensemble des sous-modules cohérents $F \subset E_S$ tels que le quotient E_S / F soit S-plat est représentable par un espace analytique D(E) ; les points de D(E) sont donc les sous-modules cohérents de E [1] .

Lorsque X est projective et munie d'un faisceau inversible ample $\mathcal{O}_X(1)$ les sous-modules cohérents $F \subset E$ tels que $E/_F$ ait pour polynôme de Hilbert un polynôme donné H , constituent un ouvert de D(E) , qui n'est autre que le schéma de Grothendieck $\mathrm{Quot}^H(E)$.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

THEOREME. <u>Supposons</u> X <u>projective</u> . <u>Si</u> $\mathrm{Ext}^1(F,E/_F) = 0$, <u>alors</u> D(E) <u>est lisse au voisinage de</u> $F \in D(E)$.

Cet énoncé est sans doute bien connu , bien qu'il ne se ramène pas au critère que propose Grothendieck dans [2] . D'autre part, Douady certifie qu'il reste vrai sans hypothèse projective , et qu'il devrait se vérifier de façon plus ou moins formelle . La démonstration donnée ici consiste , par un choix convenable de résolutions, à ramener le problème à un énoncé analogue pour l'espace $\mathbb{C}(K.)$ des sous-complexes de fibrés vectoriels holomorphes d'un complexe fini K. donné .

1. RESOLUTIONS

Soit X une variété projective de dimension n, munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_X(1)$. On a donc

$$H^q(\mathcal{O}_X(-m)) = 0 \quad \text{si } q < n \text{ et } m \geq 1 \tag{1.1}$$

Soit $m_o < m_1 < \dots < m_{n-1}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. Pour chaque $\mathcal{O}_X$-module F, on définit le complexe de chaînes $K. = K.(F,m_o,\dots,m_{n-1})$:

$$0 \to K_n \to \dots \to K_i \xrightarrow{d_i} K_{i-1} \to \dots \to K_o \to 0$$

par récurrence sur i, en posant

$$K_o = \Gamma(F(m_o)) \otimes \mathcal{O}(-m_o)$$

$$K_{i+1} = \Gamma((\operatorname{Ker} d_i)(m_{i+1})) \otimes \mathcal{O}(-m_{i+1})$$

la différentielle d_{i+1} étant le morphisme composé $K_{i+1} \xrightarrow{ev} \operatorname{Ker} d_i \subset K_i$

$$K_n = \operatorname{Ker} d_{n-1}$$

Il résulte des théorèmes A et B de Serre que pour chaque $\mathcal{O}_X$-module cohérent F on peut choisir $m_o,\dots,m_{n-1}$ de sorte que le complexe $K.$ soit une résolution de F. D'après le théorème de syzygies, K_n est localement libre, et satisfait en outre à la condition suivante :

LEMME 1.- <u>Si</u> $K.$ <u>est une résolution de</u> F

(1) $H^q(K_n(m_p)) = 0$ <u>si</u> $p+q \leq n$, $0 \leq p < n$ <u>et</u> $0 \leq q < n$

(2) <u>le morphisme induit par</u> d_n : $H^n(K_n(m_o)) \to H^n(K_{n-1}(m_o))$ <u>est injectif</u>.

<u>Démonstration</u>. Remarquons d'abord que par définition de K_i, on a

$$\Gamma(K_i(m)) = 0 \quad \text{si } m < m_i \tag{1.2}$$

et la suite exacte pour $i \geqq 2$

$$0 \to \Gamma(K_i(m_i)) \to \Gamma(K_{i-1}(m_i)) \to \Gamma(K_{i-2}(m_i)) \qquad (1.3)$$

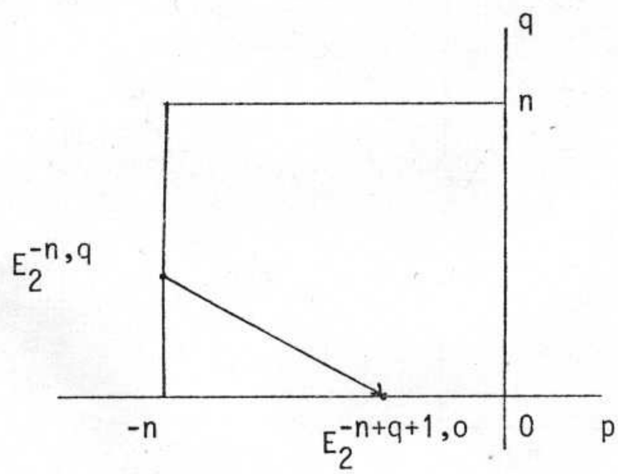
Pour $i=1$, cette suite exacte doit être remplacée par la suite exacte

$$0 \to \Gamma(K_1(m_1)) \to \Gamma(K_o(m_1)) \to \Gamma(F(m_1))$$

Considérons la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_2^{p,q} = H_{-p}(H^q(X,K.(m)))$$

d'aboutissement $H^{\cdot}(X,F(m))$. D'après la propriété (1.1), on a $E_2^{p,q} = 0$ si $0 < q < n$ et $p > -n$.



Soit $1 \leqq i < n$. La suite spectrale ci-dessus ayant son aboutissement nul en degré < 0, et égal à $\Gamma(F(m))$ en degré 0, on obtient, compte-tenu de (1.2) et (1.3)

$$H^q(K_n(m_i)) = 0 \quad \text{pour} \quad q < n-i \ .$$

D'autre part, pour $i=0$, on a encore la suite exacte

$$0 \to H^{n-1}(K_n(m_o)) \to \Gamma(K_o(m_o)) \xrightarrow{ev} \Gamma(F(m_o))$$
$$\to H^n(K_n(m_o)) \to H^n(K_{n-1}(m_o))$$

Par définition de K_o , le morphisme ev ci-dessus est un isomorphisme; ceci complète le lemme.

2. L'ESPACE ANALYTIQUE $\mathfrak{C}(K.)$

Soit K. un complexe fini de fibrés vectoriels holomorphes sur une variété analytique complexe compacte X. On désigne par $\mathfrak{C}(K.)$ l'espace $\mathbb{C}$-analytique des sous-complexes $K' \subset K.$ de fibrés vectoriels holomorphes. Pour $K' \in \mathfrak{C}(K.)$, désignons par $K'' = K./_{K'}$ le complexe quotient, par $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(K',K'')$ le complexe des fibrés d'homomorphismes, et par $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{\geq o}(K',K'')$ le sous-complexe de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(K',K'')$ tronqué en degrés négatifs.

LEMME 2.- <u>Au voisinage de</u> K', <u>l'espace</u> $\mathfrak{C}(K.)$ <u>est défini localement par une équation</u> f = 0 , <u>où</u>

$$f : \mathfrak{v} \longrightarrow H^1(X,\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{\geq o}(K',K''))$$

<u>est une application analytique sur un voisinage</u> $\mathfrak{v}$ <u>de</u> 0 <u>dans l'espace</u> $H^o(X,\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{\geq o}(K',K''))$.

<u>Démonstration</u>. Soit ν un réel assez grand et non entier pour que les complexes de Dolbeault qui interviennent dans la suite soient directs [3] . Soit $D = d + (-1)^p d''$ la différentielle du complexe total $\mathfrak{A}^{\cdot} = \mathfrak{A}^{\cdot}(K.)$ de Dolbeault des formes différentielles de type (o,.) , de classe $C^{\nu-\cdot}$, à valeurs dans K. :

$$\mathfrak{A}^i = \bigoplus_{p+q=i} {}^{\nu-q}A^{o,q}(K_{-p})$$

Considérons pour chaque i, la grassmannienne de Banach $\mathrm{Grass}^{\nu}(K_i)$ des sous-fibrés de classe C^{ν} , et le produit

$$\mathbb{G} = \prod_i \mathrm{Grass}^{\nu}(K_i)$$

On va interpréter $\mathbb{C} = \mathbb{C}(K.)$ comme sous-espace de $\mathbb{G}$. Posons, pour $K' = (K'_i) \in \mathbb{G}$, $K''_i = K_{i/K'_i}$, $K'' = (K''_i)$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\ell}(K',K'') = \prod_i \underline{\mathrm{Hom}}\,(K'_i\,,\,K''_{i-\ell})$$

Soit d'autre part $j\colon K'_i \to K_i$ et $p\colon K_i \to K''_i$ les morphismes canoniques. Considérons l'opérateur $p \circ D \circ j$. Cet opérateur est l'accouplement par un élément

$$\omega_{K'} \in {}^{\nu-1}A^{0,1}(\underline{\mathrm{Hom}}^{0}(K',K'')) \oplus {}^{\nu}A^{0,0}(\underline{\mathrm{Hom}}^{1}(K',K''))$$

Dire que $K' \in \mathbb{C}$ équivaut à dire que $\omega_{K'} = 0$.

Choisissons un scindage de classe C^{ν}

$$K_i = K'_i \oplus K''_i$$

A ce scindage sont associés des scindages sur les espaces de Banach de formes différentielles, ce qui permet d'écrire D sous forme matricielle:

$$D = \begin{pmatrix} D' & \theta_{K'} \\ \omega_{K'} & D'' \end{pmatrix}$$

et l'équation $D \circ D = 0$ entraîne $D'' \circ \omega_{K'} + \omega_{K'} \circ D' = 0$.

Considérons le fibré analytique banachique $\mathbb{A}^{1} \to \mathbb{G}$ dont la fibre au-dessus de $K' \in \mathbb{G}$ est l'espace de Banach

$$\mathbb{A}^{1}(K',K'') = {}^{\nu-1}A^{0,1}(\underline{\mathrm{Hom}}^{0}(K',K'')) \oplus {}^{\nu}A^{0,0}(\underline{\mathrm{Hom}}^{1}(K',K''))$$

Alors $\mathfrak{C}$ s'obtient comme espace analytique des zéros de la section $\omega : K' \mapsto \omega_{K'}$ de $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{G}$. En fait, cette section se factorise à travers un sous-espace analytique $\mathbb{Z}^1 \subset \mathbb{A}^1$ dont l'espace tangent de Zariski relatif au-dessus du point $K' \in \mathbb{G}$ est donné par

$$T_{K'}(\mathbb{Z}^1/_{\mathbb{G}}) = \{ w \in \mathbb{A}^1(K',K'') \ , \ D'' \circ w + w \circ D' = 0 \}$$

où les opérateurs D' et D'' sont les opérateurs de Dolbeault associés respectivement au sous-complexe K' et au complexe quotient K'' .

L'espace tangent à $\mathbb{G}$ en K' est l'espace de Banach

$$\mathbb{A}^0(K',K'') = {}^{\nu}A^{0,0}(\underline{\mathrm{Hom}}^0(K',K''))$$

et la différentielle de la section ω: $K' \mapsto \omega_{K'}$ en un point $K' \in \mathfrak{C}$ est donnée par la différentielle totale

$$D_{K',K''} : \mathbb{A}^0(K',K'') \to \mathbb{A}^1(K',K'')$$

$$u \mapsto d_{K',K''}\, u + d''\, u$$

où $d_{K',K''}$ désigne la différentielle du complexe de fibrés vectoriels holomorphes $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(K',K'')$. Si on préfère, on a aussi pour $\alpha \in {}^{\nu}A^{0,0}(K'_i)$

$$D_{K',K''}(u)\,\alpha = D''\,(u\,\alpha) - u\,(D'\alpha)$$

Soit $K' \in \mathfrak{C}$; choisissons, au voisinage de K' , un sous-fibré vectoriel direct $\mathfrak{S} \subset \mathbb{A}^1$ dont la fibre en K' soit un facteur direct de $\mathrm{Im}\, D_{K',K''}$ dans $\mathbb{A}^1(K',K'')$. D'après le théorème de submersion, $\mathfrak{S}' = \omega^{-1}(\mathfrak{S})$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{G}$ dont l'espace tangent de Zariski n'est autre, en K', que

$$\mathrm{Ker}\, D_{K',K''} = H^0(X, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{\geq 0}(K',K''))$$

Considérons la section $\omega|_{\mathfrak{S}'} : \mathfrak{S}' \to \mathfrak{S} \cap \mathbb{Z}^1$. L'espace tangent de

Zariski vertical de $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{Z}^1$ s'identifie au groupe de cohomologie du complexe de Dolbeault total à valeurs dans $\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\geq 0}(K',K'')$

$$\mathbb{A}^0(K',K'') \to \mathbb{A}^1(K',K'') \to \mathbb{A}^2(K',K'')$$

c'est-à-dire à $H^1(X,\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\geq 0}(K',K''))$. En trivialisant, et en plongeant les espaces obtenus dans leur tangent de Zariski, la section $\omega|_{\mathfrak{S}'}$ permet de construire la section f voulue , d'où le lemme.

LEMME 3.- <u>On suppose</u> $K_i = 0$, <u>sauf peut-être si</u> $0 \leq i \leq n$. <u>Soit</u> $K' \in \mathfrak{C}(K.)$, $K'' = K./_{K''}$; <u>on fait les hypothèses suivantes:</u>

(2.1) $H^q(X,\underline{\mathrm{Hom}}^p(K',K'')) = 0$ <u>si</u> $p+q \leq 0$, $q < n$ <u>et</u> $p < 0$

(2.2) <u>Le morphisme canonique</u>

$$H^n(X,\underline{\mathrm{Hom}}^{-n}(K',K'')) \to H^n(X,\underline{\mathrm{Hom}}^{-n+1}(K',K''))$$

<u>est injectif</u> .

<u>Alors, au voisinage de</u> K', <u>l'espace</u> $\mathfrak{C}(K.)$ <u>est défini localement par une équation</u> f = 0 , <u>où</u>

$$f : \mathfrak{V} \to \mathrm{Ext}^1(K',K'')$$

<u>est une application analytique définie sur un voisinage</u> $\mathfrak{V}$ <u>de</u> 0 <u>dans</u> $\mathrm{Ext}^0(K',K'')$.

<u>Démonstration.</u> Soit $\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{<0}(K',K'')$ le complexe obtenu à partir de $\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(K',K'')$ en tronquant les termes de degré ≥ 0 , de sorte que l'on a la suite exacte

$$0 \to \underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\geq 0}(K',K'') \to \underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}(K',K'') \to \underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{<0}(K',K'') \to 0$$

Elle conduit à la suite exacte d'hypercohomologie

$$\to H^0(X,\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\geq 0}(K',K'')) \to \mathrm{Ext}^0(K',K'') \to H^0(X,\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{<0}(K',K''))$$
$$\to H^1(X,\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\geq 0}(K',K'')) \to \mathrm{Ext}^1(K',K'') \to$$

D'après les hypothèses (2.1) et (2.2) on a $H^q(X, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{<0}(K',K'')) = 0$ si $q < 0$. Il en résulte

$$H^0(X, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{\geq 0}(K',K'')) \cong \mathrm{Ext}^0(K',K'')$$
$$H^1(X, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}_{\geq 0}(K',K'')) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(K',K'')$$

Le lemme 3 résulte donc du lemme 2.

3. MODULE DE DOUADY .

Soient X une variété projective de dimension n, munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_X(1)$, et E un $\mathcal{O}_X$-module cohérent . On désigne par $S = D(E)$ le module de Douady de E, par $\mathcal{F} \subset E_S$ le sous-faisceau universel, par $\mathcal{G}$ le quotient $E_S/\mathcal{F}$.

Soient $s_\circ \in S$, $F = \mathcal{F}(s_\circ)$, $m_0 < m_1 < \cdots < m_{n-1}$ une suite strictement croissante d'entiers. Considérons le complexe $K. = K.(E, m_0, \ldots, m_{n-1})$. Le sous-faisceau $\mathcal{F}$ définit un sous-complexe $K' \subset K._S$ dont la restriction au-dessus de $\{s\} \times X$ n'est autre que le complexe $K.(\mathcal{F}(s), m_0, \ldots, m_{n-1})$. Si la suite $m_0, \ldots, m_{n-1}$ est convenablement choisie, $K.$ est une résolution de E , K' est une résolution localement libre de $\mathcal{F}$ sur un voisinage $D^\circ \times X$ de $\{s_\circ\} \times X$, et le complexe quotient $K'' = K._S/K'$ est une résolution localement libre de $\mathcal{G}$ qui au-dessus du point $s \in D^\circ$ s'identifie à $K.(\mathcal{G}(s), m_0, \ldots, m_{n-1})$.

Le sous-complexe K' définit un morphisme

$$\kappa : D^\circ \to \mathfrak{C}(K.)$$

Le lemme 1 appliqué à la résolution $K''(s_\circ)$ de $E/_F = \mathcal{G}(s_\circ)$ montre que le sous-complexe $K'(s_\circ) \subset K.$ satisfait aux hypothèses du lemme 3 . On a évidemment

$$\mathrm{Ext}^q(K'(s_\circ), K''(s_\circ)) \cong \mathrm{Ext}^q(F, E/_F)$$

et par suite, si $\mathrm{Ext}^1(F, E/_F) = 0$, l'espace $\mathbb{C}(K.)$ est lisse au voisinage du point $\kappa(s_\circ)$.

Sur $\mathbb{C}(K.) \times X$, il existe un sous-complexe universel de $K._{\mathbb{C}(K.)}$ noté $\mathbb{K}'$; par construction de κ , on a

$$(\kappa \times id_X)^* \mathbb{K}' = K' \tag{3.1}$$

D'autre part, sur un voisinage ouvert $\mathbb{C}^\circ \times X$ de $\{\kappa(s_\circ)\} \times X$, le faisceau d'homologie $\mathbb{F} = \mathcal{H}_0(\mathbb{K}')$ est un sous-faisceau de $E_{\mathcal{C}^\circ}$, et le quotient $E_{\mathcal{C}^\circ}/_{\mathbb{F}}$ est $\mathbb{C}^\circ$- plat . La propriété universelle de D(E) nous donne un morphisme

$$\pi : \mathbb{C}^\circ \to D(E)$$

tel que $(\pi \times id_X)^* \mathcal{F} = \mathbb{F}$. (3.2)

Il résulte de (3.1) que $(\kappa \times id_X)^* \mathbb{F} = \mathcal{F}$; compte-tenu de (3.2), la propriété universelle de D(E) montre que $\pi\,\kappa$ est l'identité au voisinage de $s_\circ$. L'espace $\mathbb{C}^\circ$ étant lisse au voisinage de $\kappa(s_\circ)$, il en est de même de D(E) au voisinage de $s_\circ$. Ceci démontre le théorème .

REFERENCES

[1] A. DOUADY : Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 16 , 1 (1966) p. 1-95 .

[2] A. GROTHENDIECK : Techniques de construction en Géométrie Algébrique. Séminaire Bourbaki 221 (1961) .

[3] J. LE POTIER : Annulation de la cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe positif de rang quelconque. Math. Annalen 218 (1975) p. 35-53 .