RATIONALITE DE CERTAINS ESPACES DE MODULES DE FIBRES STABLES SUR $\mathbb{P}_2$

J. Le Potier

1. Introduction

Soit $M = M(r,c_1,c_2)$ l'espace de modules des fibrés vectoriels stables de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2 sur $\mathbb{P}_2$; c'est un espace de modules grossier pour le foncteur Φ qui associe à la variété algébrique S l'ensemble $\Phi(S)$ des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels $F \to S\times\mathbb{P}_2$ de rang r, tels que pour tout $s \in S$, $F(s)$ soit stable de classes de Chern c_1 et c_2. Cette variété de modules a les propriétés suivantes :

(1) la variété M est quasi-projective, lisse, irréductible de dimension $2rc_2 - (r-1)\,c_1^2 - r^2 + 1$.

(2) l'application naturelle $\Phi(.) \to M$ est bijective.

(3) il n'y a pas en général de fibré universel. On peut cependant trouver une variété algébrique lisse S et $F \in \Phi(S)$ tel que le morphisme $f_F : S \to M$ associé à F soit le passage au quotient de S par l'action propre et libre d'un groupe réductif.

On examine ici la question de la rationalité de M. Le résultat n'est pas connu en général ; on sait cependant que M est rationnnelle dans les cas suivants :

- $r = 2$, $4c_2 - c_1^2 \neq 0 \bmod 8$: Hulek (cas c_1 impair) Strømme (cas c_1 pair) (cf. théorèmes 1 et 2).

- $c_1 = 0$, $c_2 = r$, pour $r = 2, 3, 4$; ceci est une conséquence d'un résultat de Formanek.

Nous donnerons ici la démonstration de la rationalité de $M(2,0,c_2)$ si $c_2=4,10$. Il semble que la rationalité ait été obtenue pour $M(2,0,2n)$ pour tout n par Maeda . Nous commençons par expliquer les résultats de Hulek et Strømme .

2. Stratification de Shatz

Soit C une courbe propre et lisse , $E \to C$ un fibré vectoriel sur C . Un tel fibré a une filtration par des sous-fibrés

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_\ell = E$$

telle que $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit semi-stable et telle que $\mu(gr_i) > \mu(gr_{i+1})$. Cette filtration est unique et s'appelle la filtration de Harder-Narasimhan.

Soit $E \to S \times C$ une famille de fibrés vectoriels paramétrée par une variété lisse S , complète, c'est-à-dire satisfaisant à la condition suivante: pour tout $s \in S$, le morphisme de déformation infinitésimal de Kodaira et Spencer

$$T_s S \to \mathrm{Ext}^1(E(s),E(s))$$

est surjectif . Alors l'ensemble des points $s \in S$ tels que la filtration de Harder-Narasimhan de $E(s)$ soit de longueur ℓ et telle que

$$\mu(gr_i(E(s)) = \mu_i$$

est une sous-variété localement fermée lisse de codimension (s'il n'est pas vide)

$$\sum_{i<j} r_i r_j (\mu_i - \mu_j + g - 1)$$

Corollaire(2.1). Soit $E \to S \times \mathbb{P}_1$ une famille complète de fibrés vectoriels de rang r, de pente $-1 < \mu \leq 0$. Alors $E(s)$ est rigide pour tout $s \in S$, sauf si s appartient à un fermé de codimension

$$\geq 2 \quad \text{si} \quad c_1 \neq 0$$

$$\geq 1 \quad \text{si} \quad c_1 = 0$$

De plus, si $c_1 = 0$, $h^1(E(s)) = 0$ en dehors d'un fermé de codimension ≥ 3.

Corollaire(2.2). Soit $E \to S \times \mathbb{P}_2$ une famille complète de fibrés vectoriels stables de rang r, de pente $-1 < \mu \leq 0$, et $\mathbb{P}_1$ le pinceau des droites passant par un point fixé a. Alors l'ouvert U de S défini par les conditions

$h^0(E(s)(-1)|_d) = 0$ pour tout $d \in \mathbb{P}_1$ (sauf pour un nombre fini de d dans le cas $c_1 = 0$)

$h^1(E(s)|_d) = 0$ pour tout $d \in \mathbb{P}_1$

est non vide.

Démonstration. On utilise le fait que si F est un fibré stable sur $\mathbb{P}_2$, $\mathrm{Ext}^2(F,F(-1)) = 0$, d'où il découle que le morphisme canonique, pour toute droite $d \subset \mathbb{P}_2$

$$\mathrm{Ext}^1(F,F) \to \mathrm{Ext}^1_d(F|_d, F|_d)$$

est surjectif. Il en résulte que la famille $F \mid S \times d$ est complète.

On considère alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \subset M \times \mathbb{P}_1 & \xrightarrow{pr_2} & \mathbb{P}_1 \\ pr_1 \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

où Σ est le fermé des couples (s,d) tels que $E(s)|_d$ ne soit pas rigide. Supposons $c_1 \neq 0$. D'après le corollaire (2.1), Σ est de codimension $\geqq 2$; par la projection pr_1, son image est de codimension $\geqq 1$. Si $c_1 = 0$, $\operatorname{codim} \Sigma \geqq 1$, et la fibre de $\Sigma \to M$ est finie au-dessus d'un ouvert non vide. On fait de même pour la seconde condition.

3. Description d'un fibré stable général

On se fixe un point $a \in \mathbb{P}_2$, et on désigne par $\mathbb{P}_1$ le pinceau des droites passant par a, par D la surface réglée éclatée du point a, de sorte que l'on a un diagramme, dit standard

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}_2 \\ q \downarrow & & \\ \mathbb{P}_1 & & \end{array}$$

La surface D est aussi le fibré en droite projective $\mathbb{P}(V)$ associé au fibré vectoriel $V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$, et le fibré quotient canonique $\mathcal{O}_D(1)$ s'identifie au fibré $p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$. Le groupe de Picard Pic(D) est isomorphe à $H^2(D,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; on prendra pour générateurs

$$k = c_1(q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1))) \quad , \quad h = c_1(p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)))$$

On note $\mathcal{O}(m,n)$ le fibré $q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(m)) \otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n))$. Le fibré

associé au diviseur exceptionnel e est donc $\mathcal{O}(-1,1)$.

<u>Lemme</u> (3.1). <u>Soient</u> $Y = D \times_{\mathbb{P}_1} D$; <u>le faisceau structural de</u> D , <u>considéré comme sous-espace de</u> Y <u>par l'application diagonale, est donné par la suite exacte</u>

$$0 \to \mathcal{O}_D(1,-1) \boxtimes \mathcal{O}_D(0,-1) \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_D \to 0 \qquad (1)$$

En effet, on a un morphisme canonique $q^*(V) \to \mathcal{O}_D(0,1)$, qui fournit un morphisme

$$q^*(V \otimes V^*) \to \mathcal{O}(-1,1) \boxtimes \mathcal{O}(0,1)$$

A l'identité de V correspond une section canonique du fibré inversible $\mathcal{O}(-1,1) \boxtimes \mathcal{O}(0,1)$ dont le schéma des zéros coïncide exactement avec la diagonale de Y . D'où le lemme .

Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{pr_2} & D \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ D & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}_1 \end{array}$$

Soit E un fibré vectoriel stable sur $\mathbb{P}_2$ suffisamment général, de pente $-1 < \mu \leq 0$, c'est-à-dire satisfaisant aux conditions suivantes : $h^0(E(-1)|_d)=0$ pour tout $d \in \mathbb{P}_1$ (sauf pour un nombre fini de d dans le cas $\mu = 0$) , et $h^1(E|_d) = 0$ pour tout $d \in \mathbb{P}_1$. On pose $E_D = p^*(E)$. On a alors

$$q_*(E(-1)_D) = 0 \quad , \quad R^1q_*(E_D) = 0$$

Par application des foncteurs $\cdot \otimes pr_2^*(E_D)$, puis pr_{1*} à la suite exacte du lemme (3.1) , on obtient, compte-tenu du théorème de changement de base , la suite exacte

$$0 \to q^*(q_*(E_D)) \to E_D \to R^1q_*(E(-1)_D) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}} \mathcal{O}_D(-e) \to 0 \qquad (2)$$

D'après le théorème de semi-continuité, le faisceau $q_*(E_D)$ est évidemment localement libre ; il en est de même de $R^1q_*(E(-1)_D)$ dans le cas où $c_1 \neq 0$. Le rang et le degré de ces faisceaux se calculent facilement; par exemple la formule de Riemann-Roch donne le degré :

	$q_*(E_D)$	$R^1q_*(E(-1)_D)$
rang	c_1+r	$-c_1$
degré	$\chi(-1)$	$c_1 - \chi(-1)$

où $\chi(-1) = \frac{c_1(c_1+1)}{2} - c_2$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré du fibré $E(-1)$.

4. Le résultat de Hulek

Théorème 1. L'espace de modules $M(2,-1,c_2)$ est une variété rationnelle .

On a en effet obtenu une suite exacte de fibrés sur D , pourvu que E soit suffisamment général :

$$0 \to \mathcal{O}_D(-c_2,0) \to E_D \to \mathcal{O}_D(c_2+2,-1) \to 0$$

Comme E est stable , il n'a pas d'autre endomorphisme que les homothéties, et il en est de même de E_D . Désignons par U l'ouvert de M défini par les conditions $h^0(E(-1)|_d) = 0$ et $h^1(E|_d) = 0$ pour tout $d \in \mathbb{P}_1$. On a ainsi obtenu une application

$$\phi : U \to \mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_D(c_2+2,-1),\mathcal{O}_D(-c_2,0)))$$

La construction donnée passe aux familles, ce qui permet de vérifier que ϕ est régulière en utilisant par exemple la description de M comme quotient (cf. introduction) . L'espace vectoriel Ext^1 ci-dessus s'identifie encore à $H^1(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2c_2-2))$, et par suite est de dimension $4c_2 - 3$. Il est clair que l'application ϕ est injective , car si les extensions définies par les fibrés E et E' sont proportionnelles , les fibrés E_D et $E_{D'}$ sont isomorphes, et, par suite, E et E' le sont aussi . L'image de ϕ est alors un ouvert , qu'on peut d'ailleurs facilement décrire : si F_θ désigne le fibré sur D associé à l'extension $\theta \in \mathrm{Ext}^1$,$\theta \neq 0$, les conditions

$$F_\theta|_e \text{ est trivial , et } p_*(F_\theta) \text{ est un fibré stable}$$

définissent un ouvert de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1)$, qui est exactement l'image de ϕ . Ainsi , ϕ est birationnelle (*) .

(*) Soit $f : X \to Y$ un morphisme quasi-projectif de variétés algébriques lisses de même dimension ; si f est injectif, c'est un isomorphisme de X sur un ouvert de Y .

5. Le théorème de Strømme

Théorème 2. L'espace de modules $M = M(2,0,2n+1)$ est une variété rationnelle .

On sait que E est un fibré stable suffisamment général de classes de Chern $c_1 = 0$, c_2 , le fibré $q_*(E_D)$ est de rang 2 , et de degré $-c_2$.

Lemme (5.1) . Soit U l'ouvert de M défini par les fibrés E tels que $h^0(E(-1)|_d) = 0$ pour tout $d \in \mathbb{P}_1$, sauf pour un nombre fini , et $h^1(E|_d) = 0$. Dans U, la condition

$$q_*(E_D) = \mathcal{O}(-n) \oplus \mathcal{O}(-n-1)$$

(avec $c_2 = 2n+1$) définit un ouvert dont le complémentaire est de codimension 2.

Démonstration. Il suffit de voir que si $F \to S \times \mathbb{P}_2$ est une famille complète telle que pour tout $s \in S$, $F(s)$ définisse un point de U, la famille de fibrés sur $\mathbb{P}_1$ définie par $(q_*(F(s)))_{s \in S}$ est encore complète. Mais ceci résulte du fait que le morphisme composé

$$T_sS \to \mathrm{Ext}^1(F(s),F(s)) \simeq \mathrm{Ext}^1(F(s)_D,F(s)_D) \overset{*}{\to} \mathrm{Ext}^1(q_*(F(s)),q_*(F(s)))$$

dans laquelle la flèche (*) est associée à la suite exacte (2) , s'identifie au morphisme de déformation infinitésimal de Kodaira et Spencer . La flèche (*) est évidemment surjective ; le corollaire (2.1) conduit alors à l'énoncé .

Désignons par U' l'ouvert défini par le lemme (5.1) . Si E est un fibré sur $\mathbb{P}_2$ définissant un point de U', on a un morphisme non identiquement nul sur D $\sigma:\mathcal{O}(-n,0) \to E_D$, qui ne s'annule qu'en codimension 2: en effet, s'il existait un morphisme non identiquement nul $\mathcal{O}(\alpha,\beta) \to E_D$, par restriction à une fibre générale de q on obtient $\beta \leq 0$; si $\beta = 0$, on obtient par image directe sur $\mathbb{P}_1$ un morphisme non identiquement nul $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(\alpha) \to q_*(E_D)$, et par suite , $\alpha \leq -n$. Le conoyau du morphisme σ est un faisceau sans torsion de rang un, dont le nombre de points singuliers est donné par $c_2(E_D(n,0)) = c_2$. On a donc une suite exacte sur D

$$0 \to \mathcal{O}_D(-n,0) \xrightarrow{\sigma} E_D \to \mathcal{J}_Z(n,0) \to 0 \qquad (3)$$

où $\mathcal{J}_Z$ est l'idéal d'un sous-espace ponctuel de D de longueur c_2 . Désignons par $\mathrm{Hilb}^{c_2}(D)$ le schéma de Hilbert des sous-espaces de D de dimension 0 , de longueur c_2 , et par $\mathcal{Z} \subset \mathrm{Hilb}^{c_2}(D) \times D$ le sous-schéma universel , d'idéal $\mathcal{J}_{\mathcal{Z}}$. Le faisceau sur $\mathrm{Hilb}^{c_2}(D)$ défini par

$$\mathcal{E} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{pr_1}(\mathcal{J}_{\mathcal{Z}}, pr_2^*(\mathcal{O}_D(-2n,0)))$$

est , d'après le théorème de semi-continuité , un faisceau localement libre de rang $2c_2 - 2$. La section σ étant unique à homothétie près, la suite exacte ci-dessus fournit un morphisme

$$\phi : U' \to \mathbb{P}.(\mathcal{E})$$

qui est évidemment injectif . Les variétés U' et $\mathbb{P}.(\mathcal{E})$ ayant même dimen-

sion, l'image de ϕ est un ouvert , et ϕ est un isomorphisme de U' sur cet ouvert . Le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^{c_2}(D)$ étant rationnel , il en est de même de M ; d'où le théorème .

6. Le cas $r = 2$, $4c_2 - c_1^2 = 0$ mod. 8

L'espace de modules $M(2,0,2)$ s'identifie à l'espace des coniques lisses de $\mathbb{P}_2^\vee$ d'après Barth , en associant à chaque fibré la conique de ses droites de saut . On examine ici le cas $r=2$, $c_1 = 0$, $c_2 = i(i+3)$, avec $i \geq 1$. Pour un tel fibré, on a alors $\chi(E(i)) = 2$, et $\chi(E(j)) \leq 0$ pour $0 \leq j < i$.

Lemme (6.1). Si E est un fibré stable de rang 2 , de classes de Chern $(0,i(i+3))$ suffisamment général, on a

(1) $h^0(E(j)) = 0$ si $j < i$

(2) $h^0(E(i)) = 2$ et $h^1(E(i)) = 0$

(3) le déterminant du morphisme d'évaluation $ev : H^0(E(i)) \otimes \mathcal{O} \to E(i)$ est non nul et définit une courbe lisse C de degré $2i$.

Pour un tel fibré, le conoyau $L = \mathrm{coker}\ ev$ est un fibré inversible sur la courbe C , de degré $2i^2 - 3i = g-1$, g désignant le genre de C, satisfaisant aux conditions suivantes

$$h^0(L) = h^1(L) = 0$$

autrement dit, L n'est pas spécial . La suite exacte

$$0 \to H^0(E(i)) \otimes \mathcal{O} \to E(i) \to L \to 0$$

fournit une application linéaire injective $H^0(E(i))^* \to \mathrm{Ext}^1(L,\mathcal{O})$. On a $\mathrm{Ext}^1(L,\mathcal{O}) = H^0(L^*(2i))$; par suite , on obtient sur la courbe C un pinceau de diviseurs de degré $2i^2 + 3i = g-1 + 6i$.

Réciproquement, considérons sur une courbe lisse plane de degré 2i, C , un fibré inversible de degré $2i^2 + 3i$, et $|W| \subset |L'|$ un pinceau de diviseurs. On pose $L = L'^*(2i)$, et on suppose que L n'est pas spécial . Le pinceau définit un sous-espace vectoriel de dimension 2 $W \subset \mathrm{Ext}^1(L,\mathcal{O})$, et par suite un élément $\omega \in \mathrm{Ext}^1(L, W^* \otimes \mathcal{O})$. D'où une suite exacte

$$0 \to W^* \otimes \mathcal{O} \to F \to L \to 0 \qquad (4)$$

<u>Lemme</u> (6.2). a) <u>Le faisceau</u> F <u>est sans torsion de classes de Chern</u> $c_1 = 2i$, $c_2 = 2i^2+3i$.

b) <u>Le faisceau</u> F <u>est localement libre si et seulement si le pinceau</u> $|W|$ <u>n'a pas de point de base . Dans ce cas, il est stable</u> .

<u>Démonstration du lemme</u> (6.1) : On peut choisir le fibré L' ci-dessus de sorte que les fibrés L et L'(-3) soient non spéciaux ; alors, pour tout point $p \in C$, $H^1(L'(-p)) = 0$, ce qui prouve que L' est engendré par ses sections . On peut alors trouver un pinceau $|W| \subset |L'|$ sans point de base. Le lemme (6.2) fournit alors un fibré $E = F(-i)$ stable de rang 2 , de classes de Chern $(0,i(i+3))$ satisfaisant aux conditions demandées dans le lemme (6.1) .

Démonstration du lemme (6.2). Pour voir que le faisceau F est sans torsion , il suffit de vérifier que $\underline{\mathrm{Ext}}^2(F,\mathcal{O}) = 0$ et que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(F,\mathcal{O})$ est nul en dehors d'un nombre fini de points . Mais la suite exacte (4) fournit la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} W \otimes \mathcal{O} & \to & \underline{\mathrm{Ext}}^1(L,\mathcal{O}) & \to & \underline{\mathrm{Ext}}^1(F,\mathcal{O}) & \to & 0 \\ & & \downarrow\wr & & & & \\ & & L' = L^*(2i) & & & & \end{array}$$

et $\underline{\mathrm{Ext}}^2(F,\mathcal{O}) = 0$. Pour calculer la classe de Chern, on remarque que l'on a une suite exacte de modules sur $\mathbb{P}_2$

$$0 \to H(-2) \to K(-1) \to L \to 0$$

où $H = H^1(L(-1))$ et $K = H^0(L(1))$ sont des espaces vectoriels de dimension 2i . Alors

$$c(L) = \left(\frac{1-h}{1-2h}\right)^{2i} = 1 + 2ih + (2i^2+3i)\, h^2$$

où $h = c_1(\mathcal{O}(1))$. Bien entendu, F a les mêmes classes de Chern que L . Si $|W|$ n'a pas de point de base , on a $\underline{\mathrm{Ext}}^1(F,\mathcal{O}) = 0$, ce qui prouve que F est localement libre ; la stabilité s'obtient en remarquant que l'on a d'après la suite exacte (4) , $h^0(F(-1)) = 0$, et a fortiori $h^0(F(-i)) = 0$. D'où le lemme .

Désignons par B l'ouvert des courbes planes lisses de degré 2i , par $C \to B$ la courbe universelle , par $\mathrm{Hilb}^d(C/B)$ le schéma de Hilbert relatif

des diviseurs effectifs de degré d sur les fibres de $C \to B$, par $\mathrm{Pic}^d(C/B)$ la variété de Picard relative des fibrés inversibles de degré d sur les fibres de $C \to B$. On a un morphisme canonique

$$\mathrm{Hilb}^d(C/B) \to \mathrm{Pic}^d(C/B)$$

dont les fibres sont des espaces projectifs de dimension $\geq d-g$. Au dessus de l'ouvert $\mathrm{Pic}^{d,o}(C/B)$ des fibrés L' tels que $h^1(L') = 0$, ce morphisme est lisse de dimension relative d-g . Désignons par $\mathrm{Hilb}^{d,o}(C/B)$ l'image réciproque de cet ouvert, et par

$$N_{i,d} = \mathrm{grass}_1(\mathrm{Hilb}^{d,o}(C/B)/\mathrm{Pic}^{d,o}(C/B))$$

la grassmannienne relative des pinceaux de diviseurs .

Proposition (6.3) . <u>La variété de modules</u> $M(2,0,i(i+3)) = M$ <u>est birationnellemnt équivalente à</u> $N_{i,2i^2+3i}$.

<u>Démonstration</u>. On considère l'ouvert U de M correspondant aux fibrés stables E de rang 2 , de classes de Chern $(0,i(i+3))$ tels que $h^o(E(i)) = 2$, et tels que le morphisme det (ev) associé à E définisse une courbe lisse . La construction précédente associe à E la courbe C, et sur C un pinceau de diviseurs de degré $2i^2 + 3i$. Elle passe aux familles , ce qui permet d'obtenir un morphisme

$$\phi : U \to N_{i,2i^2+3i}$$

qui est évidemment injectif ; on a $\dim N_{i,2i^2+3i} = 4i^2+1 + 2(6i-2) = 4c_2 - 3 = \dim U$. Par suite, ϕ est un isomorphisme sur un ouvert de $N_{i,2i^2+3i}$. D'après la construction du fibré stable associé à un pinceau de diviseurs, on constate d'ailleurs que l'image de ϕ est l'ouvert des pinceaux $|W| \subset |L'|$ sans point de base et tels que $L = L'^*(2i)$ soit non spécial .

Rationalité de $\mathrm{Pic}^{g-1}(C/B)$?

Pour i=1, on a pour tout d $\mathrm{Pic}^d(C/B) \cong B$, ce qui donne trivialement la rationalité .

Soient H et K deux espaces vectoriels de dimension 2i, Ω l'ouvert de l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(H(-2),K(-1))$ des morphismes $\alpha : H(-1) \to K(-1)$ sur $\mathbb{P}_2$ tels que $\det \alpha \in \Gamma(\mathcal{O}(2i))$ soit non nul et définisse une courbe lisse C_α de degré 2i . Sur Ω , le groupe $G = GL(H) \times GL(K) / \mathbb{C}^*$ opère librement et proprement ; de plus tout point $\alpha \in \Omega$ est stable pour l'action de $SL(H) \times SL(K)$, c'est-à-dire que le morphisme

$$\begin{array}{ccc} SL(H) \times SL(K) & \to & \mathrm{Hom}(H(-2),K(-1)) \\ (g,h) & \mapsto & h\,\alpha\,g^{-1} \end{array}$$

est propre . Il en résulte que le quotient Ω/G peut être muni d'une tructure de variété quasi-projective lisse .

Désignons, pour $\alpha \in \Omega$, par L_α le conoyau du morphisme α ; c'est un faisceau inversible de degré g-1 sur la courbe C_α , et non spécial .

Proposition (6.4). Le morphisme $\alpha \mapsto L_\alpha$ induit un isomorphisme

$$\Omega/G \cong \mathrm{Pic}^{g-1,o}(C/B)$$

Corollaire (6.5). Soit $M(2i)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $2i$. La variété de Picard relative $\mathrm{Pic}^{g-1}(C/B)$ est birationnellement équivalente à la variété affine quotient de $M(2i) \times M(2i)$ par l'action de $GL(2i)$ définie par

$$(g, \alpha_1, \alpha_2) \mapsto (g\, \alpha_1 g^{-1}, g\, \alpha_2 g^{-1})$$

Corollaire (6.6). Pour $i=2$, $\mathrm{Pic}^2(C/B)$ est une variété rationnelle.

Ceci résulte d'un énoncé de Formanek . Pour $i > 2$, on ignore si la variété $\mathrm{Pic}^{g-1}(C/B)$ est encore rationnelle . On peut démontrer facilement, en utilisant la description donnée dans la proposition (6.4) que cette variété est birationnellement équivalente à la variété de modules $M(r,0,r)$ ($r=2i$) relative au plan projectif dual .

Rationalité de $N_{i,2i^2+3i}$?

On pose $d = 2i^2+3i$. Si l'on sait que $\mathrm{Pic}^{g-1}(C/B)$ est rationnelle, il suffit pour répondre à la question de vérifier la locale trivialité d'un ouvert $N' \subset N_{i,d}$ au-dessus de $\mathrm{Pic}^{g-1}(C/B) \cong \mathrm{Pic}^d(C/B)$. Désignons par $\mathbb{H}$ et $\mathbb{K}$ les fibrés triviaux de fibres H et K sur l'ouvert Ω , et par

$$u : \mathbb{H} \boxtimes \mathcal{O}(-2) \to \mathbb{K} \boxtimes \mathcal{O}(-1)$$

le morphisme universel ; son déterminant définit une courbe relative $C_\Omega \subset \Omega \times \mathbb{P}_2$; le faisceau conoyau $\mathcal{L}$ s'identifie à un module inversible sur C_Ω de degré relatif $g-1$, avec $g-1 = 2i^2+3i$. On désigne par $\mathcal{E}$ le module sur Ω

$$\mathcal{E} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{pr_1}(\mathcal{L}, \mathcal{O})$$

D'après le théorème de semi-continuité, c'est un module localement libre de rang 6i sur Ω . Le groupe $GL(H) \times GL(K)$ opère sur $\mathcal{L}$, et par suite sur $\mathcal{E}$; cette action induit une action propre et libre de G sur la grassmannienne relative $\mathrm{grass}_2(\mathcal{E})$ des 2-plans de $\mathcal{E}$; en plongeant la variété $\mathrm{grass}_2(\mathcal{E})$ comme sous-variété fermée de $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathcal{E})$, G-invariante, on vérifie que le quotient $\mathrm{grass}_2(\mathcal{E})/G$ est encore une variété algébrique.

<u>Lemme</u> (6.7). <u>Le morphisme canonique</u>

$$\mathrm{grass}_2(\mathcal{E})\ /G \ \to\ N_{i,2i^2+3i}$$

<u>est un isomorphisme</u> .

<u>Démonstration</u>. Comme ci-dessus, on pose $d = 2i^2+3i$. On a un isomorphisme

$$\mathrm{grass}_2(\mathcal{E}) \ \to\ \Omega \times_{\mathrm{Pic}^d(C/B)} N_{i,d}$$

En effet , se donner un morphisme $S \to \mathrm{grass}_2(\mathcal{E})$ revient à se donner un morphisme $f : S \to \Omega$, et un sous-fibré W de rang 2 de l'image réciproque

$\mathbb{E}_S$ de $\mathbb{E}$ sur S . On a aussi

$$\mathbb{E} = pr_{1*}(\mathcal{L}^*(2i)) \otimes \det \mathbb{K} \otimes (\det \mathbb{H})^{-1}$$

Il revient donc au même de se donner f et un sous-espace de dimension et degré relatifs un $|W| \subset \mathbb{P}(pr_{1*}(\mathcal{L}^*(2i)))_S$, c'est-à-dire f et un morphisme $g : S \to N_{i,d}$ tels que les images de f et g dans l'ensemble des morphismes de S dans $Pic^d(C/B)$ coïncident .

Cet isomorphisme est compatible avec l'action du groupe G , et l'action de G est triviale sur le second facteur , de sorte que, compte-tenu de la proposition (6.4) , on obtient un isomorphisme $grass_2(\mathbb{E})/G \cong N_{i,d}$.

<u>Lemme</u> (6.8) . <u>Soit</u> $\alpha \in \Omega$. <u>Il existe un voisinage ouvert</u> $\mathfrak{U}$ <u>affine et</u> G-<u>invariant sur lequel le fibré</u> $\mathbb{E}$ <u>est</u> $GL(H) \times GL(K)$-<u>isomorphe au fibré</u> $\mathfrak{U} \times H^{*3}$.

<u>Démonstration</u>. En effet, par l'action de $GL(H) \times GL(K)$, le stabilisateur de α est $\mathbb{C}^*$, et les représentations de $\mathbb{C}^*$ induites par ces deux $GL(H) \times GL(K)$-fibrés vectoriels sont conjuguées . Donc ils sont $GL(H) \times GL(K)$ isomorphes sur l'orbite de α . Le groupe $GL(H) \times GL(K)$ étant réductif, cet isomorphisme se propage à un voisinage ouvert affine G -invariant $\mathfrak{U}$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème annoncé :

Théorème 3. <u>La variété de modules</u> $M(2,0,c_2)$ <u>est rationnelle pour</u> $c_2 = 4$ <u>et</u> $c_2 = 10$.

Pour $c_2 = 4$, ce théorème a aussi été prouvé, par des méthodes différentes, par Naruki. Pour i=1, il s'agit de prouver que $N_{1,7}$ est une variété rationnelle ; il suffit donc de trouver un ouvert $N' \subset N_{1,7}$ localement trivial au-dessus de $\mathrm{Pic}^7(C/B) \cong B$. D'après le lemme (6.8), la grassmannienne $\mathrm{grass}_2(\mathcal{E})$ contient un ouvert G-invariant G-isomorphe à $\mathfrak{U} \times \mathrm{grass}_2(H^{*3})$, où $\mathfrak{U} \subset \Omega$ est un ouvert affine G-invariant . Cet ouvert contient $\mathfrak{U} \times L(H^*,H^{*2})$, et , par suite , $\mathrm{grass}_2(\mathcal{E})/G \cong N_{1,7}$ contient un ouvert isomorphe à

$$\mathfrak{U} \times L(H^*,H^{*2}) \ / \ G$$

Or, $\mathfrak{U} \times L(H^*,H^{*2})$ est un G-fibré vectoriel , donc le quotient ci-dessus est aussi un fibré vectoriel sur $\mathfrak{U}/G \subset B$, donc localement trivial . Ceci démontre la rationalité de M(2,0,4).

<u>Le cas</u> M(2,0,10) .

On a vu que la variété de Picard $\mathrm{Pic}^2(C/B)$ est rationnelle si i=2. Je ne sais pas prouver la locale trivialité d'un ouvert de $N_{2,14}$ sur $\mathrm{Pic}^{14}(C/B) \cong \mathrm{Pic}^2(C/B)$. Cependant l'argument utilisé pour i=1 permet de remarquer qu'il existe un ouvert de $N_{2,14}$ qui est un fibré vectoriel de rang 16 au-dessus d'un ouvert de $N_{2,6}$. Il suffit donc pour obtenir la rationalité de $N_{2,14}$ de démontrer celle de $N_{2,6}$.

Soit Q le fibré universel quotient de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$. On considère deux espaces vectoriels H' et K' de dimension 2 , et, dans l'espace vecto-

riel des morphismes sur $\mathbb{P}_2$

$$a: \quad H' \otimes \Lambda^2 Q^* \to K' \otimes Q^*$$

l'ouvert Ω' des morphismes pour lesquels le conoyau coker a est un fibré stable de rang 2 , de classes de Chern (0,2) . Le groupe $G' = GL(H') \times GL(K')/\mathbb{C}^*$ opère librement et proprement sur Ω' , et chaque point $a \in \Omega'$ est stable sous l'action de $SL(H') \times SL(K')$. Ainsi , le quotient Ω'/G' est muni d'une structure de variété algébrique de dimension 5 . Sur $\Omega' \times \mathbb{P}_2$, on a un morphisme universel dont le conoyau $\mathcal{F}$ définit une famille de fibrés stables de rang 2 de classes de Chern (0,2) ; cette famille induit un isomorphisme

$$\Omega' / G' \cong M(2,0,2)$$

Considérons, sur Ω' , le faisceau $pr_{1*}(\mathcal{F}(2))$. D'après le théorème de semi-continuité, c'est un fibré vectoriel de rang 10 sur lequel agit le le groupe $GL(H') \times GL(K')$. Ce groupe agit encore sur la grassmannienne relative $grass_2(pr_{1*}(\mathcal{F}(2)))$, et le quotient

$$P = grass_2(pr_{1*}(\mathcal{F}(2)))/G'$$

est encore une variété algébrique lisse, de dimension 21. Si $F \to S \times \mathbb{P}_2$ est une famille de fibrés stables de rang 2 , de classes de Chern (0,2) , paramétrée par la variété algébrique S , un sous-fibré de rang 2 $W \subset pr_{1*}(F(2))$ définit canoniquement un morphisme $S \to P$.

Lemme (6.9). <u>La variété</u> P <u>ainsi définie est rationnelle.</u>

Démonstration. Comme dans le lemmme (6.8) , on voit que tout point a e Ω' a un voisinage affine G' -invariant $\mathfrak{V}$ sur lequel $pr_{1*}(\mathcal{F}(2))$ est $GL(H') \times GL(K')$ -isomorphe à $\mathfrak{V} \times K'^5$. Par conséquent, la variété P quotient est birationnellement équivalente à $\Omega' \times grass_2(K'^5)/G'$. Mais cette variété contient un ouvert qui est un fibré vectoriel de rang 16 sur $\Omega'/G' \cong M(2,0,2)$. D'où le lemme .

Lemme (6.10). La variété P est birationnellement équivalente à $N_{2,6}$.

Démonstration. Un point de $N_{2,6}$ définit une courbe lisse de degré 4, sur cette courbe un fibré inversible de degré 2 , L , et un sous-espace vectoriel de dimension 2 , $W \subset \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{P}_2}(L,\mathcal{O}(-2)) = H^0(L^*(2))$. A ces données, on associe une suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{P}_2$

$$0 \to W^*(-2) \to F \to L \to 0 \qquad (5)$$

Comme dans la démonstration du lemme (6.1) , si W est suffisamment général, il définit un pinceau de diviseurs sans point de base , d'où il résulte que le faisceau F est alors un fibré stable de rang 2 , de classes de Chern (0,2) . En outre, le fibré F(2) est muni d'un sous-espace $W^* \subset H^0(F(2))$; on obtient ainsi, sur un ouvert non vide $N'' \subset N_{2,6}$ une application

$$\psi : N'' \to P$$

dont on vérifie qu'elle est régulière en construisant une suite exacte

"universelle" sur $U \times \mathbb{P}_2$, où U est un ouvert convenable de la grassmannienne relative, sur Ω , $\mathrm{grass}_2(\underline{\mathrm{Ext}}^1_{pr_1}(\mathcal{L}, \mathcal{O}(-2)))$, induisant au-dessus de chaque point de U une suite exacte du type (5) . Cette application ψ est évidemment injective, et dim $N_{2,6} = 21 =$ dim P . Par suite le morphisme est un isomorphisme de N" sur un ouvert de P , ce qui démontre le lemme .

Il résulte des lemmes (2.9) et (2.10) que la variété $N_{2,6}$ est rationnelle , et par suite M(2,0,10) l'est aussi . Remarquons que l'on évite le recours au résultat de Formanek .

Références

W. BARTH. Moduli of vector bundles on the projective plane . Inventiones math. , 42, 63-91 (1977).

E. FORMANEK . The center of the ring of 4×4 generic matrices . Journal of algebra 62, 304-319 (1980).

A. HIRSCHOWITZ et M.S. NARASIMHAN . Fibrés de t'Hooft spéciaux et applications . Enumerative and classical alg. geometry , Progress in math. 24 (1982) .

K. HULEK . Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}_2$ with c_1 odd , math. Annalen , 242 , 241-266 (1979) .

I. NARUKI . On moduli space M(0,4) of vector bundles , Preprint R.I.M.S. Kyoto University (1986)

P.E. NEWSTEAD . Pencils on conic bundles . J. London math. Soc. 2 (27) 19-28 (1983) .

S.A. STRØMME. Ample divisors on fine moduli spaces on the projective plane . Math. Z. 405-423 (1984) .