Un théorème de Wu

Joseph Le Potier

Introduction

Etant donnés un groupe de Lie G, et une variété différentiable M, on désigne par $\mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{G})$ la cohomologie de M à valeurs dans le faisceau des fonctions différentiables à valeurs dans G. Cet ensemble est muni d'un point distingué et s'identifie à l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés principaux de groupe structural G.

Etant donnée une variété différentiable M, un fibré vectoriel hermitien W de rang r sur M fournit par oubli un fibré vectoriel euclidien orienté $\mathrm{F} = \mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ de rang $2r$. Ceci donne un morphisme

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{U}(r)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{SO}(2r))$$

Cette application est un isomorphisme pour $r = 1$; il n'en est plus de même dans le cas $r = 2$. L'espace homogène $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2)$ est isomorphe à la sphère S_2. Voir qu'un fibré vectoriel euclidien orienté F de rang 4 provient d'un fibré hermitien de rang 2 revient à vérifier qu'un fibré naturel de fibre S_2 associé à F a une section partout non nulle. Dans le cas où M est une variété compacte orientée de dimension 4, ceci va se traduire en termes des classes caractéristiques associées au fibré F : la classe de Stiefel-Whitney $w_2(\mathrm{F}) \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M},\mathbb{Z}_2)$, la classe d'Euler $e(\mathrm{F}) \in \mathrm{H}^4(\mathrm{M},\mathbb{Z})$ la classe de Pontryagin $p_1(\mathrm{F}) \in \mathrm{H}^4(\mathrm{M},\mathbb{Z})$.

THÉORÈME 0.1. — *(Wu) Soit* M *une variété compacte orientée de dimension 4. Soit* F *un fibré vectoriel euclidien orienté de rang 4 sur* M.

(i) *Il existe une structure complexe sur* F, *compatible avec la structure euclidienne et l'orientation, si et seulement si la classe de Stiefel-Whitney* $w_2(\mathrm{F})$ *se relève en cohomologie entière en une classe* $c \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M},\mathbb{Z})$ *satisfaisant à l'équation*

$$c^2 = p_1(\mathrm{F}) + 2e(\mathrm{F}).$$

(ii) *Plus précisément, le quotient de l'ensemble de ces structures complexes par l'action du groupe des automorphismes orientés* $\mathrm{SO}(\mathrm{F})$ *est isomorphe à l'ensemble des relèvements* $c \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M},\mathbb{Z})$ *de* $w_2(\mathrm{F})$ *qui satisfont à cette condition.*

Une structure complexe sur F, compatible avec la structure euclidienne et l'orientation, définit un fibré hermitien W de rang 2 et les classes caractéristique de $\mathrm{F} = \mathrm{W}_{\mathbb{R}}$ sont données, en fonction des classes de Chern c_1 et c_2 de W, par les formules suivantes

$$w_2(\mathrm{F}) = c_1 \bmod 2; e(\mathrm{F}) = c_2; p_1(\mathrm{F}) = c_1^2 - 2c_2$$

On associe donc à une telle structure complexe la classe de Chern $c = c_1(\mathrm{W})$. Si une autre structure complexe fournit la même classe c, le fibré hermitien associé W′ aura les mêmes classes de Chern, et sera donc isomorphe à W d'après la classification, due elle aussi à Wu, des fibrés vectoriels complexes sur les CW−complexes de dimension ≤ 4. Ceci implique qu'il existe un automorphisme $g \in \mathrm{SO}(\mathrm{F})$ qui fait passer d'une de ces structures complexes à l'autre.

L'objet principal de cet exposé est de prouver que tous les relèvements c satisfaisant à la condition $c^2 = p_1(\mathrm{F}) + 2e(\mathrm{F})$ provienne d'une telle structure complexe.

1. La classe de Stiefel-Whitney w_2

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. On considère la suite exacte de groupes

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(\mathrm{E}) \xrightarrow{s} \mathrm{SO}(\mathrm{E}) \to 1$$

Le morphisme s est défini de la manière suivante : l'algèbre de Clifford Cl(E) est définie par le quotient de l'algèbre tensorielle par la relation $x^2 = -|x|^2$ pour $x \in \mathrm{E}$. C'est une algèbre graduée par $\mathbb{Z}_2$; on note $x \mapsto x^*$ l'unique involution qui coïncide avec l'identité sur E et qui satisfait à la condition $(xy)^* = y^*x^*$. Soit S(E) la sphère des vecteurs de norme 1. Pour $x \in \mathrm{S}(\mathrm{E})$, l'application $s_x : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par

$$s_x(y) = xyx^*$$

est la symétrie orthogonale qui envoie x sur $-x$. Le groupe pin(E) est le sous-groupe du groupe des éléments inversibles de Cl(E) engendré par la sphère S(E). Le groupe Spin(E) est le sous-groupe $\mathrm{pin}(\mathrm{E}) \cap \mathrm{Cl}^{pair}(\mathrm{E})$. L'application $x \mapsto s_x$ s'étend à Spin(E) et définit le morphisme s qui est un revêtement de degré 2.

LEMME 1.1. — *Considérons le morphisme de liaison*

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{SO}(\mathrm{E})) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)$$

Ce morphisme associe à un fibré vectoriel euclidien orienté F *la classe de Stiefel-Whitney* $w_2(\mathrm{F})$.

Démonstration. Etant donné un fibré en sphères de dimension ≥ 2

$$f : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$$

le morphisme $f^* : \mathrm{H}^q(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{M}', \mathbb{Z}_2)$ est injectif en degré $q \leq 2$. Il en résulte que la formule de l'énoncé peut se vérifier sur M'. Il en résulte que ce résultat est encore vrai quand on prend pour M' la variété de Stiefel des vecteurs $e_1, \ldots, e_{n-2}$ orthogonaux deux à deux, et de norme 1 ; on voit qu'on est ramené à prouver le résultat quand on a une somme directe orthogonale

$$\mathrm{F} = \mathbb{R}_{\mathrm{M}}^{n-2} \oplus \mathrm{B}$$

où B est un fibré euclidien orienté de rang 2. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathbb{Z}_2 & \to & \mathrm{S}_1 & \xrightarrow{z \mapsto z^2} & \mathrm{S}_1 & \to 1 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & i \downarrow & \\
0 \to & \mathbb{Z}_2 & \to & \mathrm{Spin}(\mathrm{E}) & \xrightarrow{s} & \mathrm{SO}(\mathrm{E}) & \to 1
\end{array}$$

On voit que la classe de cohomologie définie par F est l'image par i de la classe définie par B. On a d'autre part $w_2(\mathrm{F}) = w_2(\mathrm{B})$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{S}_1) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2) \\
\downarrow & & \| \\
\mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{Spin}(\mathrm{E}) & \to & \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)
\end{array}$$

montre qu'il suffit de vérifier que la classe $\delta(\mathrm{B})$ est la classe $w_2(\mathrm{B})$. Mais ceci résulte du fait évident que $\delta(\mathrm{B}) = c_1(\mathrm{B}) \bmod 2 = w_2(\mathrm{B})$. □

2. Fibrés euclidiens de rang 3.

Soit M une variété compacte connexe orientée de dimension 4.

THÉORÈME 2.1. — *Soit* F *un fibré vectoriel réel orienté de rang 3 sur* M. *Alors* F *a une section partout non nulle si et seulement si il existe un relèvement* $x \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$ *de* $w_2(\mathrm{F})$ *tel que*

$$x^2 = p_1(\mathrm{F}).$$

Etant donné un fibré vectoriel hermitien W de rang 2 sur M, on lui associe le fibré vectoriel $\mathrm{F} = \mathfrak{su}(\mathrm{W})$ des endomorphismes anti-hermitiens de trace nulle de W; c'est un fibré vectoriel orienté de rang 3, muni d'une métrique euclidienne naturelle donnée par $f \mapsto \mathrm{tr}\, ff^*$. L'application $\mathrm{W} \mapsto \mathfrak{su}(\mathrm{W})$ est invariante sous l'action naturelle du groupe des fibrés hermitiens de rang 1.

LEMME 2.2. —*La classe de Pontryagin et la classe de Stiefel-Whitney de* $\mathrm{F} = \mathfrak{su}(\mathrm{W})$ *sont donnés par les formules suivantes*

$$p_1(\mathrm{F}) = c_1^2 - 4c_2$$
$$w_2(\mathrm{F}) = c_1(\mathrm{W}) \bmod 2.$$

Démonstration. En effet, ceci se voit en utilisant le principe de scindage : par changement de base, on peut supposer que $\mathrm{W} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$, où A et B sont des fibrés vectoriels complexes de rang 1. Alors

$$\mathrm{F} \simeq \mathbb{R}_{\mathrm{M}} \oplus \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}^{\otimes -1}$$

Soient a et b les classes de Chern de A et B. On a alors $c_1(\mathrm{W}) = a + b \bmod 2$ et $p_1 = (a-b)^2 = c_1^2 - 4c_2$. D'où le résultat. □

LEMME 2.3. — *Soit* F *est un fibré vectoriel euclidien orienté de rang 3, dont la classe de Stiefel-Whitney* w_2 *se relève en cohomologie entière. Soit* $c \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$ *un relèvement de* $w_2(\mathrm{F})$. *Il existe un fibré vectoriel hermitien* W *de rang 2 tel que* $\mathfrak{su}(\mathrm{W}) = \mathrm{F}$ *et* $c_1(\mathrm{W}) = c$.

Si M *est simplement connexe, ce fibré est unique.*

Démonstration. On considère la suite exacte de groupes

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{U}(2) \xrightarrow{(u,v)} \mathrm{S}_1 \times \mathrm{SO}(3) \to 1$$

où la flèche u associe à $f \in \mathrm{U}(2)$ son déterminant ; l'application v associe à $f \in \mathrm{U}(2)$ l'application $\mathbb{R}-$linéaire $\mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ définie par $\mathrm{ad}(f) : g \mapsto fgf^{-1}$; cette

application linéaire conserve la métrique et l'orientation. A cette application on associe une application

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{U}(2)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{S}_1) \times \mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{SO}(3))$$

qui n'est autre que l'application qui associe au fibré vectoriel hermitien W la paire de fibrés vectoriels $(\det \mathrm{W}, \mathfrak{su}(\mathrm{W}))$. On a alors la suite exacte

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathbb{Z}_2) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{U}(2)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{S}_1) \times \mathrm{H}^1(\mathrm{M},\mathrm{SO}(3)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(\mathrm{M},\mathbb{Z}_2)$$

L'application de liaison δ est donnée par $(\mathrm{L},\mathrm{F}) \mapsto c_1(\mathrm{L}) \bmod 2 + w_2(\mathrm{F})$. Le lemme en résulte immédiatement. □

Soit W un fibré vectoriel hermitien de rang 2 sur la variété M et $\mathrm{F} = \mathfrak{su}(\mathrm{W})$ le fibré euclidien de rang 3 associé. Les sections partout non nulles de norme 2 de F correspondent aux sous-fibrés de rang 1 de W : en effet, une telle section définit en chaque point un endomorphisme anti-hermitien de valeurs propres i et $-i$. Les sous-fibrés correspondants définissent une décomposition en somme directe orthogonale

$$\mathrm{W} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$$

Démonstration du théorème 2.1

Supposons qu'il existe une section partout non nulle de F. Alors la classe $w_2(\mathrm{F})$ se relève en une classe entière ; donc il existe un fibré vectoriel hermitien de rang 2 sur M tel que $\mathrm{F} = \mathfrak{su}(\mathrm{W})$. Le sous-fibré correspondant A et définit une section non nulle de $\mathrm{W} \otimes \mathrm{A}^{-1}$. Comme on ne change pas $\mathfrak{su}(\mathrm{W})$ quand on tensorise W par un fibré inversible de rang 1, on peut supposer que W a une section partout non nulle. Alors $c_2(\mathrm{W}) = 0$, et par suite

$$p_1(\mathrm{F}) = c_1(\mathrm{W})^2.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un relèvement x de $w_2(\mathrm{F})$ tel que $x^2 = p_1(\mathrm{F})$. On peut alors trouver W tel que $\mathfrak{su}(\mathrm{W}) = \mathrm{F}$ et $c_1(\mathrm{W}) = x$. Le fibré W a évidemment une section non nulle sur le complémentaire d'une boule ouverte. L'obstruction au prolongement est $c_2(\mathrm{W}) = \frac{1}{4}(x^2 - p_1(\mathrm{F})) = 0$. Par suite, on obtient une décomposition $\mathrm{W} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$ en somme directe orthogonale de 2 sous-fibrés vectoriels complexes de rang 1. Par suite, le fibré F associé a une section partout non nulle. □

3. Fibrés euclidiens de rang 4

3.1. Le groupe $\mathrm{Spin}^c(4)$

On va d'abord étendre le lemme 2.3 au cas des fibrés euclidiens orientés de rang 4. On introduit pour ceci l'extension centrale

$$\mathrm{Spin}^c(4) = \mathrm{S}_1 \times \mathrm{Spin}(4)/\mathbb{Z}_2.$$

On a une suite exacte de groupes

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}^c(4) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{S}_1 \times \mathrm{SO}(4) \to 1$$

où la flèche φ est associe à la classe de (α, β) l'élément $(\alpha^2, s(\beta))$.

PROPOSITION 3.1. — *Soit* F *un fibré vectoriel euclidien orienté de rang 4. Alors* F *peut être muni d'une* $\mathrm{Spin}^c(4)$*−structure si et seulement si la classe de Stiefel-Whitney* $w_2(\mathrm{F})$ *se relève en une classe de cohomologie entière. Un telle structure est déterminée de façon unique par un tel relèvement si* M *est simplement connexe.*

Démonstration. En effet, du lemme 1.1, il découle immédiatement que l'homomorphisme de liaison

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{S}_1) \times \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{SO}(4)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)$$

est donné par $((\mathrm{L}, \mathrm{F}) \mapsto c_1(\mathrm{L}) \bmod 2 + w_2(\mathrm{F}))$. La proposition en résulte. □

On se propose d'interpréter l'application

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{Spin}^c(4)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{SO}(4)).$$

Commençons par donner une description concrète de $\mathrm{Spin}^c(4)$.

LEMME 3.2. — *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{Spin}(4)$$

Démonstration. Puisque $\mathrm{Spin}(4)$ est le revêtement universel de $\mathrm{SO}(4)$, il suffit de montrer que $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ est un revêtement de $\mathrm{SO}(4)$. Considérons un

espace vectoriel complexe W de dimension 2, muni d'une métrique hermitienne. L'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathrm{W},\mathrm{W})$ est muni d'une métrique hermitienne $f \mapsto \mathrm{tr}\, ff^*$ et d'une forme quadratique complexe non dégénérée $f \mapsto \det f$. On désigne par $(u,v) \mapsto u \wedge v$ la forme polaire de cette forme quadratique. Ces deux structures définissent une involution anti-linéaire $\#$ telle que

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\, ff^* = f \wedge \#f.$$

Soit (e_1, e_2) une base orthonormale de W. L'involution $\#$ est donnée par

$$f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \#f = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{b} \\ -\bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que l'espace vectoriel $\mathrm{F} = \mathrm{Hom}(\mathrm{W},\mathrm{W})^{\#}$ des point fixes est un espace vectoriel de dimension 4, muni de la métrique euclidienne

$$\det f = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\, ff^*,$$

et on a une décomposition $\mathrm{Hom}(\mathrm{W},\mathrm{W}) = \mathrm{F} \oplus i\mathrm{F}$. Ces deux structures sont invariantes par l'action à droite ou à gauche du groupe SU(2). Si on choisit une base orthonormée de W, cet espace vectoriel s'identifie à l'espace vectoriel des matrices complexes de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Le groupe $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ opère sur $\mathrm{Hom}(\mathrm{W},\mathrm{W})$ par la formule

$$(u,v) \mapsto ufv^{-1}$$

et cette action commute avec $\#$; par suite on obtient une action sur F, ce qui définit un homomorphisme de groupes $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$ dont le noyau est constitué des couples (u,v) tels que $u = v$, où u commute avec tous les $f \in \mathrm{F}$. Il s'agit en fait du centre de SU(2). Il en résulte que le morphisme qu'on vient de définir fait de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ un revêtement de SO(4). □

LEMME 3.3. — *Le groupe* $\mathrm{Spin}^c(4)$ *s'identifie au sous-groupe de* $\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2)$ *des paires de matrices* (u,v) *telles que* $\det u = \det v$.

Démonstration. En effet, si on identifie Spin(4) avec SU(2) × SU(2), l'homomorphisme

$$\mathrm{S}_1 \times \mathrm{Spin}(4) \mapsto \mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(2)$$

est donné par $(\alpha, (u, v)) \mapsto (\alpha u, \alpha v)$ dont l'image est le sous-groupe des paires de matrices de même déterminant, et le noyau $\mathbb{Z}_2$. D'où le résultat. □

On peut maintenant interpréter l'application

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{Spin}^c(4)) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathrm{SO}(4)).$$

Le premier ensemble s'interpréte comme l'ensemble des couples $(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-)$ de fibrés vectoriels hermitiens de rang 2, munis d'un isomorphisme hermitien $\varphi : \det \mathrm{W}_+ \simeq \det \mathrm{W}_-$. Sur le fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-)$ on a alors une métrique hermitienne $f \mapsto \mathrm{tr}\ ff^*$ et une forme quadratique complexe $f \mapsto \det f$, ce qui définit une involution # anti-linéaire. Le fibré vectoriel réel des points fixes

$$\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-)^{\#}$$

est de rang 4, et muni de la métrique euclidienne

$$f \mapsto \det f = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ ff^*.$$

La proposition 3.1 s'interprète de la manière suivante : un fibré euclidien orienté de rang 4 est de la forme $\mathrm{Hom}(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-)^{\#}$ si et seulement si sa classe de Stiefel-Whitney $w_2(\mathrm{F})$ se relève en cohomologie entière ; si c est un tel relèvement, et on peut choisir le triplet $(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-, \varphi)$ de sorte que $c_1(\mathrm{W}_+) = c_1(\mathrm{W}_-) = c$.

3.2. Les fibrés Λ_+ et Λ_-

Ils sont associés à l'homomorphisme de groupes $\mathrm{SO}(4) \mapsto \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3)$. De manière concrète, étant donné un fibré vectoriel euclidien orienté de rang 4, on a sur le fibré euclidien orienté $\Lambda^2\mathrm{F}$ (de rang 6) un opérateur de Hodge $*$, dont les valeurs propres sont ± 1. Les sous-espaces propres sont des fibrés euclidiens orientés de rang 3, et on a décomposition orthogonale

$$\Lambda^2\mathrm{F} = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$$

LEMME 3.4. — *Soient e et p_1 la classe d'Euler et la classe de Pontryagin de* F, *et w_2 sa classe de Stiefel-Whitney. On a*

$$p_1(\Lambda_+) = p_1 + 2e$$
$$p_1(\Lambda_-) = p_1 - 2e$$
$$w_2(\Lambda_+) = w_2(\Lambda_-) = w_2$$

Démonstration. Soit $\mathrm{Grass}^+(2, \mathrm{F}) \to \mathrm{M}$ la grassmanienne relative des plans orientés. C'est un fibré dont la fibre est isomorphe à la grassmannienne des plans orientés de $\mathbb{R}^4$ c'est-à-dire à $\mathrm{S}_2 \times \mathrm{S}_2$. Les homomorphismes

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{Grass}^+(2, \mathrm{F}), \mathbb{Z}_2)$$
$$\mathrm{H}^4(\mathrm{M}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^4(\mathrm{Grass}^+(2, \mathrm{F}), \mathbb{Z})$$

sont injectifs. Par conséquent, il suffit de vérifier les formules ci-dessus sur la variété $\mathrm{Grass}^+(2, \mathrm{F})$. Sur la variété $\mathrm{Grass}^+(2, \mathrm{F})$, le fibré image réciproque de F est somme directe orthogonale de deux fibrés euclidiens orientés de rang 2 ; ainsi, la classe w_2 se relève en une classe de cohomologie entière.

On peut donc supposer que le fibré F est muni d'une $\mathrm{Spin}^c(4)$−structure, donnée par deux fibrés hermitiens W_+ et W_- de même déterminant, de classe de Chern $c_1 = c$. On alors

$$\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-)^{\#}$$

Pour $f \in \mathrm{F}$, on a $\det f = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ ff^*$.

LEMME 3.5. — *On a une isométrie canonique*

$$\wedge^2\mathrm{F} \to \mathfrak{su}(\mathrm{W}_+) \oplus \mathfrak{su}(\mathrm{W}_-)$$

qui envoie Λ_+ sur $\mathfrak{su}(\mathrm{W}_+)$ et Λ_- sur $\mathfrak{su}(\mathrm{W}_-)$.

Démonstration. L'assertion concernant la classe de Stiefel-Whitney est alors évidente. On a alors $\mathrm{F} \otimes \mathbb{C} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-)$. En calculant le caractère de Chern $ch(\mathrm{F} \otimes \mathbb{C}) = ch(\mathrm{W}_-)ch(\mathrm{W}_+)^*$ on obtient $p_1 = c^2 - 2(c_2(\mathrm{W}_+) + c_2(\mathrm{W}_-))$, d'où il résulte la formule

$$2p_1 = p_1(\Lambda_+) + p_1(\Lambda_-)$$

Considérons d'autre part la classe d'Euler $e = e(\mathrm{F})$. Pour la calculer, on peut supposer que W_+ est décomposé en somme directe orthogonale $\mathrm{W}_+ = \mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$ de deux fibrés hermitiens de rang 1. Alors $\mathrm{F} \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{A}, \mathrm{W}_-)$ est muni d'une structure naturelle de fibré complexe de rang 2, et on a, en posant $a = c_1(\mathrm{A})$

$$\begin{aligned} e &= c_2(\mathrm{W}_-) - ac + a^2 \\ &= c_2(\mathrm{W}_-) - c_2(\mathrm{W}_+) \\ 4e &= p_1(\Lambda_+) - p_1(\Lambda_-) \end{aligned}$$

Il en résulte que $p_1(\Lambda_+) = p_1 + 2e$; $p_1(\Lambda_-) = p_1 - 2e$. □

Démonstration du lemme 3.5

On travaille au-dessus d'un point. Posons $\mathrm{W} = \mathrm{W}_+ \oplus \mathrm{W}_-$ Considérons l'application linéaire $\gamma : \mathrm{F} \to \mathrm{End}(\mathrm{W})$ $\gamma : \mathrm{F} \to \mathrm{End}(\mathrm{W})$ définie par

$$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & f^* \\ f & 0 \end{pmatrix}$$

Cette application linéaire satisfait à l'identité $\gamma(f)^2 = -\det f \ \mathrm{id}_{\mathrm{W}}$. On en déduit une application linéaire $\rho : \wedge^2\mathrm{F} \to \mathrm{End}(\mathrm{W})$ qui envoie $u \wedge v$ sur l'endomorphisme

$$\rho(u \wedge v) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^*v - \langle u, v\rangle \mathrm{id}_{\mathrm{W}_+} & 0 \\ 0 & uv^* - \langle u, v\rangle \mathrm{id}_{\mathrm{W}_-} \end{pmatrix}$$

L'image de ρ est contenue dans le sous-espace vectoriel $\mathfrak{su}(\mathrm{W}_+) \oplus \mathfrak{su}(\mathrm{W}_-)$. Considérons sur cet espace vectoriel l'involution défini par $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, -\beta)$. Si $*$ est l'opérateur de Hodge, on a $\rho* = *\rho$. En effet, il suffit de vérifier ceci sur une base orthonormale $f_i, 1 \leq i \leq 4$; on pose $f_{ij} = f_i \wedge f_j$. Le choix d'un vecteur de norme 1 dans W_+ fournit une isométrie $\mathrm{F} \simeq \mathrm{W}_-$. On peut donc supposer que les bases orthonormées de W_+ et W_- sont choisies de sorte que les matrices de f_i sont données par les matrices de Pauli

$$\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ \mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \ ; \ \mathrm{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ \mathrm{P}_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\rho(f_{12}) = \frac{1}{2}(\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_2) \ ; \ \rho(f_{34}) = \frac{1}{2}(\mathrm{P}_2, -\mathrm{P}_2)$$

Puisque $f_{34} = *f_{12}$ ceci entraîne le résultat. Il en résulte que l'application linéaire ρ induit des applications linéaires

$$\rho_+ : \Lambda_+ \to su(\mathrm{W}_+) \ ; \ \rho_- : \Lambda_- \to \mathfrak{su}(\mathrm{W}_-).$$

Un calcul idiot montre que l'image de la base orthonormale $(\frac{1}{\sqrt{2}}(f_{12}+f_{34}), \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{13}-f_{24}), \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{14}+f_{23}))$ est la base orthonormale $(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{P}_i, i = 1,2,3)$ de $\mathfrak{su}(\mathrm{W}_+)$; par suite ρ_+ est une isométrie. Il en est de même de ρ_-. □

4. Le théorème de Wu

L'énoncé signifie, d'après le théorème 2.1, et le lemme 3.4 qui donne le calcul de la classe de Pontryagin $p_1(\Lambda_+)$ que le fibré Λ_+ a une section partout non nulle. En fait, on utilise une version un peu plus précise, en termes de structure Spin^c sur F.

Soit F est un fibré euclidien orienté de rang 4 sur M; désignons par p_1 et e les classes de Pontryagin et d'Euler de F. Il s'agit de prouver que si la classe de Stiefel-Whitney w_2 de F se relève en une classe de cohomologie entière c telle que

$$c^2 = p_1 + 2e$$

il existe un fibré hermitien W de rang 2 tel que $\mathrm{F} \simeq \mathrm{W}_{\mathbb{R}}$. Choisissons une $\mathrm{Spin}^c(4)$−structure sur F, donnée par deux fibrés hermitiens $(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-)$ de classe de Chern $c_1(\mathrm{W}_+) = c_1(\mathrm{W}_-) = c$: on a donc

$$\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{W}_+, \mathrm{W}_-)^{\#}$$

Par hypothèse, $c^2 = p_1(\Lambda_+)$. Puisque $\mathfrak{su}(\mathrm{W}_+) = \Lambda_+$ et $c = c_1(\mathrm{W}_+)$, on voit que $c_2(\mathrm{W}_+) = 0$. Ainsi, le fibré W_+ a une section partout non nulle : on peut supposer que cette section est de norme 1, et on a alors une isométrie (conservant l'orientation) $\mathrm{F} \simeq \mathrm{W}_-$. D'où le résultat. □

COROLLAIRE 4.1. — *Soit* M *une variété riemannienne compacte orientée de dimension 4, de caractéristique d'Euler-Poincaré* χ, *et de signature* τ. *Soit* w_2 *la classe de Stiefel-Whitney de* M.

(i) *La classe* w_2 *se relève en une classe de cohomologie entière.*

(ii) *Soit c une classe de cohomologie entière relevant w_2. Il existe une structure presque complexe de classe canonique c si et seulement si*

$$c^2 = 3\tau + 2\chi$$

La question (i) ne se pose que si $\mathrm{H}_1(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$ contient des éléments de 2-torsion. Avant de vérifier (i), donnons un lemme qui caractérise les classes $w \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$ qui se relèvent.

LEMME 4.2. — *Soit r le morphisme de réduction modulo 2 en cohomologie, et T le sous-groupe de torsion de $\mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$. Alors l'image de l'homomorphisme de réduction*

$$r : \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)$$

est l'orthogonal, pour la forme d'intersection sur $\mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)$, de $r(\mathrm{T})$.

Démonstration. Il est clair que l'image de r est contenu dans l'orthogonal de $r(\mathrm{T})$. Montrons la réciproque. On note $\delta : \mathrm{H}^q(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2) \to \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$ l'homomorphisme de liaison. Considérons la suite exacte

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{2} \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{r} \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^3(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$$

Pour toute classe $\varphi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)$, et $w \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)$ on a alors la formule

$$\langle \delta w, \varphi \rangle = \langle w, r(\delta\varphi) \rangle$$

L'élément $\delta\varphi$ et de torsion ; il en résulte que si w appartient à l'orthogonal de $r(\mathrm{T})$, on a $\langle \delta w, \varphi \rangle = 0$. Or, par dualité de Poincaré, δw correspond à un élément de 2−torsion de $\mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{Z})$, et si cet élément était non nul, il existerait une forme linéaire $\mathrm{H}_1(\mathrm{M}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$ non nulle sur cet élément. Cette forme linéaire définirait une classe de cohomologie $\varphi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)$, telle que $\langle \delta w, \varphi \rangle \neq 0$, ce qui est absurde. Donc $\delta w = 0$ et par suite la classe w se relève en cohomologie entière. □

Démonstration du corollaire

(i) D'après la formule de Wu, on a $x^2 = w_2 x$ pour toute classe $x \in \mathrm{H}^2(\mathrm{M}, \mathbb{Z}_2)$; ainsi, la classe de Stiefel-Whitney w_2 est orthogonale à $r(\mathrm{T})$. Donc cette classe se relève en cohomologie entière par l'argument ci-dessus.

(ii) D'après le théorème de la signature d'Hirzebruch, $p_1(\mathrm{T}(\mathrm{M})) = 3\tau$, et par le théorème de Lefchetz $\chi = e(\mathrm{T}(\mathrm{M}))$. L'assertion (ii) résulte donc du théorème de Wu. □

REMARQUE 4.3. — *Si la variété* M *est simplement connexe et a une structure presque complexe,* b_+ *est impair.*

On a en effet, si c est la classe canonique $c^2 = 3\tau + 2\chi$. Mais, puisque c un relèvement de l'élément caractéristique w_2, on a $c^2 = \tau \bmod 8$. Alors $\tau + \chi = 0 \bmod 4$. Ceci signifie que $b_+ + 1 = 0 \bmod 2$. D'où le résultat.

RÉFÉRENCES

[1] S. DONALDSON ET P. KRONHEIMER, *The geometry of four-manifolds,* Oxford University Press (1990).

[2] F. HIRZEBRUCH ET H. HOPF, *Felder von Flächenelementen in 4-dimensionalen mannigfaltigkeiten,* Math. Annalen **136** (1958), p. 156-172.