Espaces de modules de faisceaux semi-stables sur le plan projectif

J. Le Potier

Introduction

L'objectif de ce cours est de donner un aperçu des techniques qui conduisent aux théorèmes fondamentaux, maintenant bien connus, de la théorie des espaces de modules de faisceaux semi-stables de rang et de classes de Chern fixés, sur le plan projectif : conditions d'existence [5], irréductibilité ([7] , [5]), calcul du groupe de Picard [4] . Ces résultats seront donnés aux chapitres 8, 9, 10. Il ne contient pas de résultat nouveau. Toutefois, la méthode utilisée pour le calcul du groupe de Picard est nouvelle, et inspirée d'un exemple que nous avions étudié dans notre exposé de Bowdoin pour illustrer le théorème de Drézet [13] . Cette démonstration n'a été possible que grâce à l'aide de Gottsche et Hirschowitz qui ont établi pour nous une version du théorème de Brill-Noether sur le plan projectif suffisante pour l'application que nous avions en vue.

Dans la démonstration de tous ces résultats, un rôle essentiel est joué par la stratification de Shatz des familles complètes de faisceaux sans torsion, associée à la filtration de Harder-Narasimhan. Il s'agit en fait de donner une formule permettant d'évaluer la codimension des strates. Ceci repose sur une étude différentielle qui sera donnée au chapitre 7. Les résultats que nous présentons aux chapitres 3, 4, 5 sont en fait pour la plupart valables sur une surface quelconque, mais les démonstrations se ramènent plus ou moins aux mêmes énoncés sur le plan projectif. Il en est ainsi du théorème de restriction des faisceaux semi-stables, du théorème de Bogomolov ou du fait que la famille des faisceaux semi-stables sur une surface algébrique est limitée. Nous donnerons aussi une esquisse de la construction de l'espace de modules sur toute surface algébrique. Dans cette construction, nous suivons la méthode de Simpson qui s'étend en fait à toute variété projective, même singulière ; elle s'appuie sur une majoration de la dimension de l'espace vectoriel des sections d'un faisceau semi-stable, estimation que nous n'avons vérifié ici qu'en dimension 2 en utilisant le théorème de restriction à une courbe de degré assez grand.

Sommaire

1. Filtrations
2. Morphismes finis
3. Restriction aux courbes
4. Théorème de Bogomolov
5. Familles limitées
6. Construction de l'espace de modules
7. Etude différentielle de la stratification de Shatz
8. Les conditions d'existence
9. L'irréductibilité
10. Le groupe de Picard

1. Filtrations

Faisceaux semi-stables sur une courbe

Soit F un faisceau algébrique cohérent de rang $r > 0$, de classe de Chern c_1, sur une courbe projective et lisse C. Le groupe $\mathrm{H}^2(\mathrm{C}, \mathbb{Z})$ s'identifie à $\mathbb{Z}$. Le degré de F est le nombre deg(F) défini par $< [\mathrm{C}], c_1 >$, [C] désignant la classe fondamentale de C. La pente de F est le rapport

$$\mu(\mathrm{F}) = \frac{\deg(\mathrm{F})}{r}.$$

Définition 1.1. — *Un tel faisceau algébrique cohérent* F *sur* C *est dit semi-stable (resp. stable) si*
(1) *il est localement libre ;*
(2) *pour tout sous-faisceau cohérent* $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ *de rang* $0 < r' < r$ *on a* $\mu(\mathrm{F}') \leq \mu(\mathrm{F})$ (resp. $<$).

Les faisceaux semi-stables de pente fixée constituent une catégorie abélienne. Les faisceaux stables sont parmi ceux-ci les objets simples de cette catégorie ; ceci implique que si F est un faisceau stable, on a $\mathrm{End}(\mathrm{F}) = \mathbb{C}$.

Faisceaux semi-stables sur une surface

La notion de semi-stabilité et stabilité définie ci-dessus pour les courbes s'étend à toute variété projective. Nous nous limitons cependant ici au cas des surfaces.

Soit X une surface algébrique projective et lisse, connexe, munie d'un faisceau inversible très ample $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(1)$, dont on désigne par h la classe de

Chern dans $H^2(X,\mathbb{Z})$. Le groupe $H^4(X,\mathbb{Z})$ sera identifié à $\mathbb{Z}$, et le groupe $H^2(X,\mathbb{Z})$ est muni de la forme d'intersection $(u,v) \mapsto u.v$. Etant donné un faisceau algébrique cohérent F sur X, de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2, on désigne par P_F le polynôme de Hilbert de F ; il est donné par

$$P_F(m) = \frac{1}{2}m(m+1)r\deg X + \chi_1 m + \chi$$

où r est le rang de F, $\chi = \sum_i (-1)^i h^i(F)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de F et $\chi_1 = \chi(F|_Y) = c_1 h + r(1-g)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de la restriction de F à une section hyperplane générale $Y \in |\mathscr{O}_X(1)|$. La caractéristique d'Euler-Poincaré est donnée par la formule de Riemann-Roch

$$\chi = r\chi(\mathscr{O}_X) + \frac{1}{2}c_1(c_1 - \omega_X) - c_2$$

Enfin $\deg(X) = h^2$.

On appelle *degré* de F le nombre $\deg(F) = c_1.h$; si $r > 0$ on introduit les rapports

$$\mu(F) = \frac{\deg(F)}{r} \quad ; \quad p_F = \frac{P_F}{r}$$

appelés respectivement *pente* et *polynôme de Hilbert réduit* de F.

Définition 1.2. — *Un faiceau algébrique cohérent* F *de rang* $r > 0$ *sur la surface* X *est dit semi-stable (resp. stable) si*

(1) *il est sans torsion ;*

(2) *pour tout sous-faisceau cohérent* $F' \subset F$ *de rang* $0 < r' < r$ *on a*

$$p_{F'} \leq p_F \quad (\text{resp.} <)$$

Dans cette définition, les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique. Ainsi la dernière inégalité signifie que $\mu(F') \leq \mu(F)$ et en cas d'égalité,

$$\frac{\chi(F')}{r'} \leq \frac{\chi(F)}{r}.$$

Si dans cette définition on remplace le polynôme de Hilbert réduit par la pente, on obtient les notions de faisceau $\mu-$semi-stable et de faisceau $\mu-$stable. On a les implications suivantes

$$\begin{array}{ccc} \text{semi}-\text{stable} & \Longrightarrow & \mu-\text{semi}-\text{stable} \\ & & \Downarrow \\ \text{stable} & \Longleftarrow & \mu-\text{stable} \end{array}$$

Exemple

Sur le plan projectif, les classes de Chern s'identifient à des nombres.

Proposition 1.3. — *Soit* F *un faisceau sans torsion de rang 2 sur le plan projectif, de classes de Chern* $c_1 = 0$ *et* c_2.

(1) *Si* F *est semi-stable, et non trivial,* $c_2 \geq 2$ *et* F *n'a pas de section non nulle.*

(2) *Si* F *est localement libre et n'a pas de section non nulle, il est* μ*-stable.*

Démonstration. La condition de semi-stabilité implique pour tout sous-faisceau cohérent $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ $c_1(\mathrm{F}') \leq \mu(\mathrm{F}) = 0$ et en cas d'égalité, $c_2(\mathrm{F}') \geq \frac{1}{2}c_2(\mathrm{F})$. Cette condition implique en particulier $h^0(\mathrm{F}(-1)) = 0$, et on a aussi $h^2(\mathrm{F}(-1)) = 0$ parce que $\mathrm{H}^2(\mathrm{F}(-1))$ est dual de $\mathrm{Hom}(\mathrm{F}, \mathscr{O}(-2))$ par dualité de Serre. Alors $\chi(\mathrm{F}(-1)) = -c_2 \leq 0$. Si $c_2 > 0$, on voit en outre que la deuxième éventualité ne peut jamais se produire pour $\mathrm{F}' = \mathscr{O}$: ainsi, $h^0(\mathrm{F}) = 0$, et on aussi $h^2(\mathrm{F}) = 0$ par dualité de Serre. Puisque $\chi(\mathrm{F}) = 2 - c_2$, on obtient $c_2 \geq 2$. Si $c_2 = 0$ il existe puisque $\chi(\mathrm{F}) = 2$ un sous-fibré trivial F' de rang un, et le quotient F/F' est encore un faisceau trivial de rang un. Il en résulte que F est lui-même trivial. Ceci démontre (1). Pour démontrer l'assertion (2), il suffit de remarquer que si F est localement libre, un sous-faisceau F' de rang 1 est forcément contenu dans un sous-faisceau inversible ; la condition $h^0(\mathrm{F}) = 0$ implique $h^2(\mathrm{F}) = 0$, par dualité de Serre, et par suite $c_2 \geq 2$; enfin elle implique la μ-stabilité parce que pour un faisceau inversible F' la classe de Chern c_2 est nulle. □

Remarque 1.4. — Le même argument montre qu'il n'existe pas de faisceau semi-stable de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 1$ sur le plan projectif. Par contre, il est facile de trouver des faisceaux localement libres $\mu-$semi-stables de rang 2 de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = 1$: il suffit de considérer l'idéal $\mathscr{I}_a$ d'un point $a \in \mathbf{P}_2$ et les extensions génériques

$$0 \to \mathscr{O} \to \mathrm{F} \to \mathscr{I}_a \to 0$$

Ces extensions sont classées par $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_a, \mathscr{O}) = \mathbb{C}$. Une extension non triviale correspond à un faisceau localement libre. Un tel faisceau est $\mu-$semi-stable.

On montre de même :

Proposition 1.5. — *Soit* F *un faisceau cohérent sans torsion de rang 2 sur le plan projectif, de classes de Chern* $c_1 = -1$ *et* c_2. *Alors* $c_2 \geq 1$ *et les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *le faisceau* F *est* μ*-semi-stable ;*
(2) *le faisceau* F *est* μ*-stable ;*
Si F *est localement libre, ces conditions sont en outre équivalentes à la condition suivante :*
(3) *le faisceau* F *n'a pas de section non nulle.*

Filtration de Harder-Narasimhan.

Soit X une surface. Etant donné un faisceau algébrique cohérent F sur X, un point $x \in$ X tel que F_x n'est pas un module libre est dit singulier pour F. Si F est sans torsion, les points singuliers de F sont en nombre fini. Le degré des sous-faisceaux cohérents $F' \subset F$ est alors majoré : pour l'observer, il suffit de se restreindre à une courbe qui ne passe pas par les points singuliers de F ; de plus, si on fixe le degré de F', la caractéristique d'Euler-Poincaré de F' est aussi majorée. Ainsi, parmi les sous-faisceaux de F, on peut en trouver un dont le polynôme de Hilbert réduit soit maximal. Si on prend parmi ceux-ci un sous-faisceau $F' \subset F$ de rang maximal on obtient la notion de sous-faisceau maximal de F. Ce sous-faisceau est semi-stable ; le quotient F/F' est encore un faisceau cohérent sans torsion auquel on peut appliquer à nouveau la contruction ci-dessus. On obtient

Proposition 1.6. — *Tout faisceau cohérent sans torsion* F *a une filtration croissante par des sous-modules non nuls*

$$\{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\ell = F$$

telle que si p_i *désigne le polynôme de Hilbert réduit de* $gr_i = F/F_{i-1}$ *on ait*
(1) *la suite* p_i *est strictement décroissante*
(2) *le quotient* gr_i *est semi-stable.*
Cette filtration est unique.

Cette filtration s'appelle la filtration de Harder-Narasimhan de F. Elle généralise celle qui avait été introduite par Harder-Narasimhan sur les courbes. La suite p_i s'appelle la suite des polynômes de Harder-Narasimhan de F. On note $p_1 = p_{max}$ et $p_{min} = p_\ell$; de même la suite des pentes $\mu_i = \mu(gr_i)$ s'appelle la suite de Harder-Narasimhan. On posera $\mu_{max} = \mu_1$ et $\mu_{min} = \mu_\ell$.

Proposition 1.7. —
Soient F *et* G *deux faisceaux cohérents sans torsion sur la surface* X. *Si* $\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \neq 0$, *on a* $p_{min}(\mathrm{F}) \leq p_{max}(\mathrm{G})$

Exemple

Lemme 1.8. — *Soit* Z *le noyau du morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d)$$

Alors Z *est un fibré semi-stable de rang* $\frac{1}{2}d(d+3)$.

Démonstration. Pour $d = 1$, le noyau est le fibré est un fibré vectoriel de rang 2 noté Q^* de classes de Chern $(-1, 1)$; il n'a pas de section non nulle, et par suite, il est $\mu-$stable. Dans le cas général, on utilise le fait que le fibré Z est un fibré homogène sous l'action de $\mathrm{G}l(3)$; il existe une filtration de Z par une suite croissante de sous-fibrés homogènes Z_i $(i = 0, \ldots, d-1)$ et le gradué associé est $gr_i = \mathrm{S}^{d-i}\mathrm{Q}^* \otimes \mathscr{O}(i)$. Chacun de ces gradués est irréductible. Le sous-fibré Z_i est le noyau de l'épimorphisme $\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d)) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{P}2} \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d-i-1)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(i+1)$. De plus, la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Z}_{i-1} \to \mathrm{Z}_i \to gr_i \to 0$$

n'est pas scindée : en effet, on a aussi une suite exacte

$$0 \to gr_i \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}(d-i)) \otimes \mathscr{O}(i) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}(d-i-1)) \otimes \mathscr{O}(i+1) \to 0$$

et un morphisme non nul $gr_i \to \mathrm{Z}_i \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}$ devrait s'étendre à $\mathrm{H}^0(\mathscr{O}(d-i)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(i)$: ceci n'est possible que si $i = 0$.

Un sous-fibré homogène non nul $\mathrm{G} \subset \mathrm{Z}$ est obligatoirement de la forme Z_i : en effet, G contient Z_0 sinon il existerait un entier i tel que $\mathrm{G} \cap \mathrm{Z}_{i-1} = \{0\}$ et $\mathrm{G} \cap \mathrm{Z}_i \neq \{0\}$, et $\mathrm{G} \cap \mathrm{Z}_i$ réaliserait alors un scindage de la suite exacte ci-dessus. Si $\mathrm{Z}_{i-1} \subset \mathrm{G}$ et $\mathrm{Z}_{i-1} \neq \mathrm{G}$, le quotient $\mathrm{G}/\mathrm{Z}_{i-1}$ s'identifie un sous-fibré homogène non nul de

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d-i)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(i)$$

et d'après ce qu'on vient de dire (en remplaçant d par $d-i$) devrait contenir $gr_i = \mathrm{S}^{d-i}\mathrm{Q}^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(i)$. Mais ceci implique alors que $\mathrm{Z}_i \subset \mathrm{G}$. Par suite si i est le plus grand entier tel que $\mathrm{Z}_i \subset \mathrm{G}$ on voit que $\mathrm{Z}_i = \mathrm{G}$.

Maintenant, si Z n'était pas semi-stable, tous les termes de la filtration de Harder-Narasimhan devraient être invariants sous l'action de $\mathrm{G}l(3)$, et

donc de la forme Z_i. Pour terminer la démonstration, il suffit de de vérifier que $\mu(Z_i) < \mu(Z)$: on a $\mu(gr_i) = \frac{-d+3i}{2}$. Cette pente est strictement croissante, et donc aussi la pente $\mu(Z_i)$. Ainsi, aucun des faisceaux Z_i n'est déstabilisant pour Z, et donc Z est semi-stable. □

Filtrations de Jordan-Hölder

Les faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert réduit donné constituent une catégorie abélienne. Dans cette catégorie abélienne, les suites croissantes et les suites décroissantes sont stationnaires. Il en résulte qu'étant donné un faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert réduit p on peut trouver une filtration croissante

$$\{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\ell = F$$

telle que $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit stable de polynôme de Hilbert réduit p. Une telle filtration n'est pas en général unique mais le faisceau $gr(F) = \oplus_{i=1}^{\ell} gr_i(F)$ est bien déterminé à isomorphisme près. Une telle filtration s'appelle filtration de Jordan-Hölder, et le faisceau $gr(F)$ le gradué de Jordan-Hölder. Deux faisceaux semi-stables F et F′ sont dits S−équivalents si les gradués de Jordan-Hölder sont isomorphes.

2. Morphismes finis

On considère ici un morphisme fini $f : C' \to C$ de courbes projectives lisses.

Théorème 2.1. — *Soit* F *est un fibré vectoriel sur* C. *Alors* F *est semi-stable si et seulement si son image réciproque* $f^*(F)$ *est semi-stable.*

Démonstration. Soit d le degré de f. Supposons d'abord que $f^*(F)$ soit semi-stable. On a $\mu(f^*(F)) = d\mu(F)$ et pour tout sous-fibré vectoriel $F' \subset F$ on a aussi $\mu(f^*(F')) = d\mu(F')$. Puisque $\mu(f^*(F')) \leq \mu(f^*(F))$, on obtient $\mu(F') \leq \mu(F)$.

Pour la réciproque, on peut supposer en changeant au besoin f, supposer que le revêtement $C' \to C$ est galoisien ; le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(C'/C)$ opère alors sur l'ensemble des sous-fibrés de $f^*(F)$, et le sous-fibré maximal de $f^*(F)$ doit être invariant par ce groupe de Galois. Ceci signifie que ce sous-fibré maximal provient de C. Si F est semi-stable, ce sous-fibré est F : ainsi, $f^*(F)$ est semi-stable.

Théorème 2.2. — *Soient* E *et* F *deux fibrés vectoriels semi-stables de pente* $\mu(\mathrm{F})$ *et* $\mu(\mathrm{G})$ *sur la courbe* C. *Alors*

(1) *le produit tensoriel* $\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}$ *est semi-stable de pente*

$$\mu(\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}) = \mu(\mathrm{F}) + \mu(\mathrm{G}).$$

(2) *la puissance symétrique* $\mathrm{S}^p\mathrm{F}$ *et la puissance extérieure* $\wedge^p\mathrm{F}$ *sont semi-stables de pente* $p\mu(\mathrm{F})$.

Démonstration.

a) On se ramène en se plaçant au besoin sur un revêtement ramifié de C au cas où $\mu(\mathrm{F})$ et $\mu(\mathrm{G})$ sont des entiers. Soient $r(\mathrm{F})$ et $r(\mathrm{G})$ les rangs de F et G. On peut alors trouver des fibrés de rang un $\mathrm{L_F}$ et $\mathrm{L_G}$ tels que $\mathrm{L_F}^{\otimes r(\mathrm{F})} = \det(\mathrm{F})$ et $\mathrm{L_G}^{\otimes r(\mathrm{G})} = \det(\mathrm{G})$ et écrire

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}' \otimes \mathrm{L_F} \quad ; \quad \mathrm{G} = \mathrm{G}' \otimes \mathrm{L_G}$$

où F′ et G′ sont des faisceaux semi-stables de degré 0. Puisque la notion de semi-stabilité sur les courbes est invariante par produit tensoriel par des fibrés inversibles, on est ramené au cas où F et G sont de degré 0.

b) Dans le cas où F et G sont de degré 0 on se ramène en considérant une filtration de Jordan-Hölder au cas où ils sont stables.

Considérons le groupe fondamental π de C, et le revêtement universel $\tilde{\mathrm{C}} \to \mathrm{C}$. A toute représentation unitaire $\rho : \pi \to \mathrm{U}(r)$ du groupe fondamental, on associe un fibré vectoriel analytique de rang r et de degré 0

$$\mathrm{E}_\rho = \tilde{\mathrm{C}} \times_\pi \mathbb{C}^r$$

en quotientant le fibré trivial $\tilde{\mathrm{C}} \times \mathbb{C}^r$ par l'action naturelle du groupe fondamental : le groupe fondamental agit par la formule $(g, (x, v)) \mapsto (xg^{-1}, gv)$ où $g \in \pi, (x, v) \in \tilde{\mathrm{C}} \times \mathbb{C}^r$. En vertu des théorèmes de comparaison de Serre, le fibré E_ρ est en fait algébrique.

Théorème 2.3. — *(Narasimhan et Seshadri)*

(i) *Soit* ρ *une représentation unitaire du groupe fondamental de* π. *Alors le fibré vectoriel* E_ρ *associé sur* C *est semi-stable.*

(ii) *Soit* F *un fibré stable de degré* 0 *sur une courbe* C. *Alors* F *provient d'une représentation irréductible du groupe fondamental.*

Dès lors on voit dans notre situation que les fibrés F et G proviennent d'une représentation du groupe fondamental. Mais alors il en est de même du produit tensoriel $\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}$ et des puissances extérieures $\wedge^p\mathrm{F}$ qui sont donc semi-stables.

Corollaire 2.4. — *Soient* F *et* G *deux fibrés vectoriels sur la courbe* C. *Alors*

$$\mu_{max}(\mathrm{F} \otimes \mathrm{G}) = \mu_{max}(\mathrm{F}) + \mu_{max}(\mathrm{G})$$

3. Restriction aux courbes

Il est évident que si la restriction d'un faisceau cohérent F sans torsion F à une courbe générale du système linéaire $|\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(d)|$ est semi-stable, le faisceau F est lui-même μ-semi-stable. On montre ici la réciproque. L'énoncé qu'on donne ici est un cas particulier d'un énoncé obtenu par Flenner [10] sur une variété de dimension quelconque. Il généralise le résultat classique d'abord obtenu par Grauert et Mülich pour les fibrés de rang 2, et amélioré successivement par Barth, Forster, Hirschowitz, Schneider, Spindler, Maruyama, Hirschowitz, Mehta et Ramanathan. La démonstration présentée s'inspire à la fois du travail d'Hirschowitz [11] et de l'article de Flenner.

Théorème 3.1. — *Soient* $(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(1))$ *une surface algébrique polarisée,* F *un faisceau* μ*-semi-stable de rang* r. *Soit* d *un entier tel que*

$$d \geq \frac{r^2}{2} \deg \mathrm{X}$$

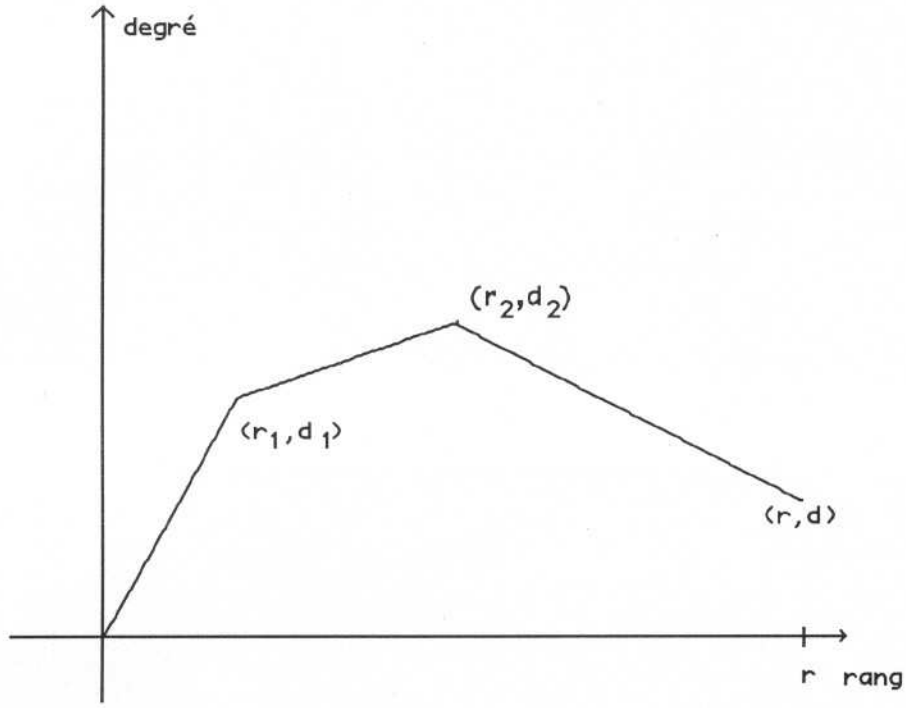
et Y *une courbe générale dans le système linéaire* $|\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(d)|$. *Alors* $\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}}$ *est un fibré semi-stable.*

3.1. Stratification de Shatz

Soit E un fibré vectoriel de rang r et degré d sur une courbe. Considérons une filtration croissante

$$0 \subset \mathrm{F}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{F}_\ell = \mathrm{E}$$

par des sous-faisceaux de rang strictement croissant, et désignons par (r_i, d_i) le rang et le degré du sous-faisceau F_i. L'entier ℓ sera appelé la longueur de la filtration. A une telle filtration, on associe la fonction linéaire par morceaux $\mathfrak{p}_{\mathrm{F}} : [0, r] \to \mathbb{R}$ dont le graphe est la courbe polygonale de $\mathbb{R}^2$ obtenue en joignant les points de coordonnée (r_i, d_i) dans le plan :



Cette courbe polygonale à $\ell + 1$ sommets détermine le rang et degré de chacun des termes F_i de la filtration. L'ordre naturel sur les fonctions $[0, r] \to \mathbb{R}$ induit une relation de préordre sur les filtrations de E.

Lemme 3.2. — *Soit* F *une filtration maximale de* E *; alors* F *est la filtration de Harder-Narasimhan.*

Démonstration. Si F_i est une filtration maximale, la courbe associée est obligatoirement concave, ce qui signifie que le gradué gr_i satisfait à la condition suivante :

$$i \mapsto \mu(gr_i)$$

est strictement décroissante. Il reste à prouver que chaque gradué gr_i est localement libre et semi-stable. Vérifions que E/F_i est sans torsion. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une autre filtration F'_i de même longueur telle que $\mathrm{F}_i \subset \mathrm{F}'_i$ pour tout i et où les sous-faisceaux F_i et F'_i sont de même rang ; on aurait alors $\mathfrak{p}_{\mathrm{F}'} > \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}$ ce qui contredit la maximalité.

Il en résulte chacun des termes gr_i est sans torsion, donc localement libre, et semi-stable. Mais alors la filtration obtenue est la filtration de Harder-Narasimhan. □

Considérons maintenant un morphisme $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ propre et lisse de dimension relative 1, au-dessus d'une variété algébrique lisse S, connexe,

et E un fibré vectoriel de rang r sur Y ; pour tout $s \in \mathrm{S}$, on désigne par Y_s la fibre de Y au-dessus de s, par E_s la restriction de E à Y_s, et par d le degré de E_s (lequel est constant).

Considérons le schéma de Hilbert

$$\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}/\mathrm{S}, r_1, d_1) \to \mathrm{S}$$

des paires (s, F_1) formées d'un point $s \in \mathrm{S}$ et d'un sous-faisceau $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{E}_s$, de rang r_1 et degré d_1. Ce schéma est relativement projectif au-dessus de S. Plus généralement, étant donnée une courbe polygonale $\mathfrak{p}$ à $\ell + 1$ sommets, on peut considérer le schéma de Hilbert

$$\mathbf{Drap}(\mathrm{E}/\mathrm{S}, \mathfrak{p}) \to \mathrm{S}$$

des paires formées d'un point $s \in \mathrm{S}$ et d'un drapeau $\mathrm{F} = (\mathrm{F}_i)$

$$0 \subset \mathrm{F}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{F}_\ell = \mathrm{E}_s$$

tel que $\mathfrak{p}_{\mathrm{F}} = \mathfrak{p}$. Ce schéma est encore propre au-dessus de S. Par conséquent, l'image de ce schéma est un fermé $\mathrm{S}_{\mathfrak{p}}$ de S.

Proposition 3.3. —

(1) *Il existe un ouvert non vide* S' *de* S *sur lequel le polygône de Harder-Narasimhan de* E_s *est constant.*

(2) *Au-dessus de cet ouvert* S', *il existe une filtration croissante de* E *par des sous-fibrés* $\mathrm{F}_i \subset \mathrm{E}$ *telle que pour tout* $s \in \mathrm{S}'$, *la filtration induite* $\mathrm{F}_{i,s}$ *soit la filtration de Harder-Narasimhan de* E_s.

Démonstration. Considérons les polygones $\mathfrak{p}$ tels que $\mathrm{S}_{\mathfrak{p}} = \mathrm{S}$. Choisissons $\mathfrak{p}$ maximal parmi ces polygones. Soit S' le complémentaire de la réunion des fermés $\cup \mathrm{S}_{\mathfrak{p}'}$ avec $\mathfrak{p}' > \mathfrak{p}$. Cette réunion est évidemment une réunion finie, et par conséquent c'est aussi un fermé. Donc S' est un ouvert de S. Sur l'ouvert S', le fibré E_s a une filtration de polygone $\mathfrak{p}$ et cette filtration est maximale : cette filtration est obligatoirement la filtration de Harder-Narasimhan de E_s d'après le lemme ci-dessus. Au-dessus de S', le morphisme

$$\mathbf{Drap}(\mathrm{E}/\mathrm{S}', \mathfrak{p}) \to \mathrm{S}'$$

est bijectif, et propre donc fini ; la variété S étant supposée lisse, la propriété de normalité de S implique qu'il existe une section. Par la propriété universelle du schéma de drapeaux, on obtient au-dessus de S' une filtration de E par des sous-faisceaux qui induit sur chaque fibre la filtration de Harder-Narasimhan. Par platitude, les quotients successifs sont localement libres, et ces sous-faisceaux sont forcément des sous-fibrés.

Remarque 3.4. — La même démonstration prouve que les points $s \in \mathrm{S}$ pour lesquels $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}_s} = \mathfrak{p}$ constituent un sous-ensemble localement fermé de S. C'est la stratification de Shatz.

3.2. La suite de Harder-Narasimhan de $\mathrm{F}|_{\mathrm{C}}$

On considère dans la suite un morphisme fini $\pi : \mathrm{X} \to \mathbf{P}_2$ tel que $\pi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(1)) = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(1)$. Ce morphisme est plat de degré $\deg(\mathrm{X})$. La famille des courbes de degré d du plan fournit par image réciproque un système linéaire de courbes $\mathrm{R} \subset |\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(d)|$ de dimension $\frac{1}{2}d(d+3)$. Le théorème 3.1 est une conséquence de l'énoncé suivant :

Théorème 3.5. — *Soient d un entier, et C une courbe générale dans le système linéaire $\mathrm{R} \subset |\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(d)|$. Si F est un faisceau $\mu-$semi-stable sur X, la suite de Harder-Narasimhan de $\mathrm{F}|_{\mathrm{C}}$ satisfait à la condition suivante :*

$$\mu_i - \mu_{i+1} \leq \frac{2d}{d+1} \deg \mathrm{X}.$$

Les singularités de F sont en nombre fini. On désigne par E la restriction de F à l'ouvert sur lequel il est localement libre. On considère la famille $\mathrm{S} \subset \mathrm{R}$ des courbes lisses de R, et qui ne passent par aucun point singulier de F et on désigne par $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ la courbe universelle au-dessus de S. On a alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Y} & \xrightarrow{p_2} & \mathrm{X} \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathrm{S} & & \end{array}$$

On considère le fibré $\mathscr{E} = p_2^*(\mathrm{F})$ auquel on applique la proposition précédente. On peut supposer, quitte au besoin à diminuer S, que les conclusions de la proposition précédente sont satisfaites au-dessus de S. Considérons le sous-fibré F_i de $\mathscr{E}$. Par la propriété universelle du schéma en grassmannienne relative, on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Y} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{Grass}(r_i, \mathrm{E}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathrm{X} & \end{array}$$

Le morphisme p_2 identifie Y à un ouvert d'un fibré en espaces projectifs, au-dessus de X; il a des sections locales. On va montrer que si

$$\mu_i - \mu_{i+1} > \frac{2d}{d+1} \deg \mathrm{X}$$

le sous-fibré F_i provient d'un sous-fibré de E. Il suffit pour ceci de vérifier que φ reste constante le long des fibres de la projection p_2. Pour ceci, on montre que la différentielle verticale

$$d\varphi : T(Y/X) \to \underline{\mathrm{Hom}}(F_i, \mathscr{E}/F_i)$$

est nulle en tout point de Y. Considérons une courbe $C \subset X$ dans le système linéaire, correspondant à un point $s \in S$. Au-dessus de C le point s définit une section de p_2 . On peut considérer la restriction de $d\varphi$ le long de cette section. On obtient un morphisme de fibrés vectoriels sur la courbe C

$$T(Y/X)|_C \to \underline{\mathrm{Hom}}(F_{i,s}, E_s/F_{i,s})$$

où E_s est la restriction de E à la courbe C. Or, on a

$$\mu_{max}(\underline{\mathrm{Hom}}(F_{i,s}, E_s/F_{i,s})) = \mu_{i+1} - \mu_i.$$

Pour voir que cette différentielle est nulle, il suffit d'établir que

$$\mu_{min}(T(Y/X)|_C) > \mu_{i+1} - \mu_i.$$

Théorème 3.6. — *(Flenner) Si* C *est une courbe générale dans le système linéaire* R, *on a*

$$\mu_{min}(T(Y/X)|_C) \geq -\frac{2d}{d+1} \deg X.$$

Fin de la démonstration du théorème 3.5 :

Supposons $\mu_i - \mu_{i+1} > \frac{2d}{d+1} \deg X$. Alors, d'après le théorème ci-dessus, on voit que

$$\mu_{i+1} - \mu_i < -\frac{2d}{d+1} \deg X \leq \mu_{min}(T(Y/X)|_C).$$

Ainsi, le sous-fibré F_i provient d'un sous-fibré de E défini au voisinage de C. Evidemment, ce sous-fibré s'étend en un sous-faisceau cohérent de F, noté encore F_i, défini sur la surface X elle-même et on a

$$\mu(E|_C) = d\mu(E) \quad ; \quad \mu(F_{i,s}) = d\mu(F_i)$$

Il en résulte que ce sous-faisceau contredit la μ-semi-stabilité de E.

Fin de la démonstration du théorème 3.1 :

Commençons par un lemme qui apporte une précision sur la suite de Harder-Narasimhan de la restriction à une courbe générale, et qui nous sera très utile dans la suite :

Lemme 3.7. — *Soient, dans le système linéaire* R, *une courbe générale* C, *et* gr_i *le gradué de Harder-Narasimhan de* $\mathrm{E}|_{\mathrm{C}}$. *Alors le fibré inversible* $\det gr_i$ *est la restriction à* C *d'un fibré d'un fibré inversible de* X.

Démonstration. Considérons le système linaire $\mathrm{R} \subset |\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(d)|$ et notons encore $\mathrm{Y} \to \mathrm{R}$ la courbe universelle au-dessus de R. C'est un fibré en espaces projectifs au-dessus de X, et par conséquent son groupe de Picard est $\mathrm{Pic}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Pic}(\mathrm{X}) \oplus \mathbb{Z}\ell$ où ℓ est le générateur de $\mathrm{Pic}(\mathrm{R}) = \mathbb{Z}$. L'isomorphisme est induit par le plongement $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{R} \times \mathrm{X}$. Les couples $(s, x) \in \mathrm{Y}$ où s représente une courbe évitant un point x_0 donné constituent un ouvert U qui est le complémentaire d'une section hyperplane provenant de R. Par suite le morphisme de restriction $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{U})$ est surjectif. Si on prend pour x_0 un point qui n'appartient pas à la courbe C, le fibré inversible $\det gr_i$ s'étend à U, et donc provient de X. D'où le lemme. □

Supposons que $\mathrm{F}|_{\mathrm{C}}$ ne soit pas semi-stable. Alors il y a au moins deux termes dans la filtration de Harder-Narasimhan, et on a $0 < \mu_i - \mu_{i+1} \leq \frac{2d}{d+1} \deg \mathrm{X}$. Soit r_i le rang de gr_i. D'après le lemme ci-dessus on peut écrire $\mu_i = \frac{\alpha_i d}{r_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, et l'inégalité ci-dessus entraîne

$$0 < \frac{\alpha_i}{r_i} - \frac{\alpha_{i+1}}{r_{i+1}} \leq \frac{2}{d+1} \deg \mathrm{X}$$

$$\frac{4}{r^2} \leq \frac{2}{d+1} \deg \mathrm{X}$$

Ceci entraîne $d + 1 \leq \frac{r^2}{2} \deg \mathrm{X}$ ce qui contredit l'hypothèse $d \geq \frac{r^2}{2} \deg \mathrm{X}$. □

Démonstration du théorème 3.6 :

La courbe C provient d'une courbe Γ de $\mathbf{P}_2$ de degré d. L'espace tangent à R au point s défini par Γ s'identifie à $\mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\Gamma)$, où $\mathrm{N}_\Gamma = \mathscr{O}_\Gamma(d)$ est le fibré normal à Γ dans le plan projectif. Le tangent vertical $\mathrm{T}(\mathrm{Y}/\mathrm{X})|_{\mathrm{C}}$ est l'image réciproque par la projection $\pi : \mathrm{C} \to \Gamma$ du noyau K du morphisme d'évaluation :

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\Gamma) \otimes \mathscr{O}_\Gamma \xrightarrow{ev} \mathrm{N}_\Gamma.$$

Lemme 3.8. — *Soit* Z *le noyau du morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d)$$

Alors Z *est un fibré semi-stable.*

Ce lemme a déjà été démontré au § 1.

Lemme 3.9. — *Soit* K *le noyau du morphisme d'évaluation*

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{N}_\Gamma) \otimes \mathscr{O}_\Gamma \xrightarrow{ev} \mathrm{N}_\Gamma.$$

Alors, pour Γ *générale, on a*

$$\mu_{min}(\mathrm{K}) \geq -\frac{2d}{d+1}.$$

Démonstration. On a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_\Gamma \to \mathrm{Z}|_\Gamma \to \mathrm{K} \to 0$$

et $\mathscr{O}_\Gamma$ est le premier terme de la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathrm{Z}|_\Gamma$: on a donc $\mu_{min}(\mathrm{K}) = \mu_{min}(\mathrm{Z}|_\Gamma)$. On a vu que la filtration de Harder-Narasimhan de la restriction à une courbe générale d'un fibré vectoriel s'étend à la courbe universelle, $\mathrm{Y} \to \mathrm{S}$ de X. Alors le déterminant de chaque gr_i provient de $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$: si on applique ceci au cas où $\mathrm{X} = \mathbf{P}_2$ et au fibré Z on obtient en particulier que le déterminant du dernier quotient de Harder-Narasimhan provient de $\mathbf{P}_2$: $\det gr_\ell = \mathscr{O}_\Gamma(s)$, avec s entier convenable. Si p est le rang de gr_ℓ on a donc

$$\mu_{min}(\mathrm{K}) = \frac{sd}{p}.$$

et on a

$$-1 \geq s \geq -\frac{2(p+1)}{d+3}$$

En effet, la première inégalité est évidente, puisque le degré de $\mathrm{Z}|_\Gamma$ est négatif ; pour la seconde, on observe que $\mathrm{Hom}(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}_\Gamma(s)) \neq 0$ et on calcule $\mathrm{Hom}(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}_\Gamma(s)) \neq 0$, en utilisant les suites exactes

$$0 \to \mathscr{O}(-d) \to \mathscr{O} \to \mathscr{O}_\Gamma \to 0 \tag{1}$$

$$0 \to \wedge^{p+1}\mathrm{Z} \to \wedge^{p+1}\mathrm{H} \otimes \mathscr{O} \to \wedge^p \mathrm{Z}(d) \to 0 \tag{2}$$

où l'on a posé $\mathrm{H} = \mathrm{H}^0(\mathscr{O}(d))$. On obtient le diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathrm{Hom}(\wedge^{p+1}\mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(s)) \\
 & & & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(s)) & \to & \mathrm{Hom}(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}_\Gamma(s)) & \to & \mathrm{Ext}^1(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(s-d)) \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & 0
\end{array}$$

Or, on a le lemme suivant :

Lemme 3.10. — *Les puissances extérieures du fibré* Z *sont semi-stables.*

L'un des termes $\mathrm{Hom}(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(s))$ et $\mathrm{Hom}(\wedge^{p+1}\mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(s))$ devant être non nul, on obtient que

$$\frac{(p+1)d}{\mathrm{N}-1} + s \geq 0,$$

où $\mathrm{N} = h^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(d)) = \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$. Ceci conduit à la minoration annoncée, et ces inégalités entraînent $2p \geq d+1$. On obtient alors

$$\mu_{min}(\mathrm{K}) \geq -d(1+\frac{1}{p})\frac{2}{d+3} \geq -\frac{2d}{d+3},$$

ce qui achève la démonstration du lemme 3.9.

Démonstration du lemme 3.10
On a évidemment pour tout entier p la minoration

$$\mu_{min}(\wedge^p \mathrm{Z}) \geq -d,$$

d'après la suite exacte (2) ci-dessus, mais le résultat espéré est plus précis. Il suffit de trouver une courbe $\Gamma' \subset \mathbf{P}_2$ sur laquelle le fibré Z se restreint en un fibré semi-stable, et d'appliquer sur cette courbe le résultat du 2. Considérons une courbe de degré d', et le dernier terme gr_ℓ de la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathrm{Z}|_{\Gamma'}$. Si la courbe Γ' est suffisamment générale, le fibré inversible $\det gr_\ell$ provient du plan :

$$\det gr_\ell = \mathscr{O}_{\Gamma'}(s)$$

et on a $s < 0$. On obtient donc, si $p = r_\ell$ est le rang de ce gradué, un morphisme $\omega : \wedge^p \mathrm{Z} \to \mathscr{O}_{\Gamma'}(s)$ surjectif le long de Γ'. Le morphisme de restriction

$$\mathrm{Hom}(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}(s)) \to \mathrm{Hom}(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\Gamma'}(s)) \tag{3}$$

a alors pour noyau $\mathrm{Hom}(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}(s-d'))$ et son conoyau se plonge dans

$$\mathrm{Ext}^1(\wedge^p \mathrm{Z}, \mathscr{O}(s-d')) \simeq \mathrm{Hom}(\wedge^{p+1}\mathrm{Z}, \mathscr{O}(s+d-d')).$$

Ainsi, si on choisit d' assez grand ($d' \geq 2d$ suffit), le morphisme de restriction ci-dessus est un isomorphisme. Ceci signifie en particulier que ω s'étend de manière unique au plan projectif. Considérons le morphisme induit

$$\varphi : \mathrm{Z} \to \wedge^{p-1}\mathrm{Z}^*(s) \hookrightarrow \wedge^p \mathrm{H}^* \otimes \mathscr{O}(s+d).$$

Ce morphisme est de rang p le long de Γ'; ceci implique que la puissance extérieure $\wedge^{p+1}\varphi$ s'annule sur la courbe Γ'. Posons $s' = (p+1)(s+d)$. Si d' est assez grand ($d' \geq (\mathrm{N}+1)d$ suffit), le morphisme de restriction analogue à (3)

$$\mathrm{Hom}(\wedge^{p+1}\mathrm{Z}, \mathscr{O}(s')) \to \mathrm{Hom}(\wedge^{p+1}\mathrm{Z}, \mathscr{O}_{\Gamma'}(s')) \tag{4}$$

est injectif. On obtient donc

$$\wedge^{p+1}\varphi = 0$$

ce qui signifie que le morphisme φ est de rang $\leq p$. Alors l'image de φ est un faisceau cohérent sans torsion de rang p qui prolonge gr_ℓ, de pente $\mu(\mathrm{Im}\,\varphi) \leq \mu(\mathrm{Z})$. Puisque Z est semi-stable, on obtient $\mathrm{Z} = \mathrm{Im}\,\varphi$ et par suite $\mathrm{Z}|_{\Gamma'} = gr_\ell$. Ainsi, $\mathrm{Z}|_{\Gamma'}$ est semi-stable. □

Remarque 3.11. — L'argument utilisé dans le lemme ci-dessus est voisin de celui qui est invoqué par Mehta et Ramanathan ; il permet de montrer, sans argument de descente, que la restriction d'un faisceau μ−semi-stable quelconque à une courbe générale du système linéaire $|\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(d)|$ est encore semi-stable pourvu que d soit assez grand. Toutefois, il ne permet pas de calculer le degré d qui convient.

4. Le théorème de Bogomolov

On rappelle que le groupe de Néron-Séveri NS(X) de X est le noyau de l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}).$$

La classe de Chern c_1 de tout fibré vectoriel algébrique appartient à NS(X). Réciproquement, on sait, d'après un théorème classique dû à Schwarzenberger qu'étant donnés un entier $r \geq 2$, une classe $c_1 \in \mathrm{NS}(\mathrm{X})$ et un entier $c_2 \in \mathbb{Z}$ il existe sur X un fibré vectoriel algébrique de rang r et de classes

de Chern c_1 et c_2. Si on demande à F d'être semi-stable, il faut imposer d'autres condtions aux classes de Chern de F.

Plus généralement, on considère sur une surface projective lisse polarisée $(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(1))$, un faisceau algébrique cohérent F de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2. On pose

$$\nu = \frac{c_1}{r}$$

dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbb{Q})$ et

$$\Delta = \frac{1}{2r}(2rc_2 - (r-1)c_1^2).$$

Ce nombre rationnel est appelé discriminant de F.

(1) Si F est un fibré inversible, on a $\Delta = 0$.

(2) Si F′ et F″ sont des fibrés vectoriels de discriminant Δ' et Δ'', on a

$$\Delta(\mathrm{F}' \otimes \mathrm{F}'') = \Delta' + \Delta''.$$

En fait, cette formule est vraie dès que l'un des faisceaux F′ et F″ est localement libre. En particulier, Δ est invariant quand on tensorise F par un fibré inversible.

(3) Soit F un faisceau algébrique cohérent de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2; la formule de Riemann-Roch s'écrit

$$\chi = r(\mathrm{P}(\nu) - \Delta)$$

où $\mathrm{P}(\nu) = \chi(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}) + \frac{1}{2}(\nu^2 - \nu.\omega_{\mathrm{X}})$

Théorème 4.1. — *(Bogomolov) Soit* F *un faisceau semi-stable de rang* $r > 0$, *de discrimant* $\Delta > 0$ *sur la surface* X. *Alors* $\Delta \geq 0$.

Lemme 4.2. — *Soit* F *un fibré semi-stable, de rang* r, *de pente* μ *sur une courbe projective lisse* Y. *Alors*

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \begin{cases} \mu + 1 & \text{si} \quad \mu \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \mu < 0. \end{cases}$$

Démonstration. L'énoncé est évident pour $\mu < 0$. On raisonne par récurrrence sur le degré de F. Supposons $\mu > 0$ et l'énoncé démontré pour tout faisceau semi-stable de pente $< \mu$. On considère un point $a \in \mathrm{Y}$, d'idéal $\mathfrak{m}_a$ et on écrit la suite exacte

$$0 \to \mathrm{F}(-a) \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}_a \to 0$$

où F_a est le faisceau gratte-ciel $F/\mathfrak{m}_a F$; il en résulte que

$$\frac{h^0(F)}{r} \leq \frac{h^0(F(-a))}{r} + 1$$

Le fibré $F(-a)$ est de pente $\mu - 1$: on lui applique l'hypothèse de récurrence. Ceci entraîne

$$\frac{h^0(F)}{r} \leq \mu + 1.$$

ce qui donne l'énoncé. □

On note ω_X le faisceau dualisant sur X et on pose dans la suite $k = \omega_X.h$

Lemme 4.3. — *Soit* F *un faisceau* $\mu-$*semi-stable de pente* 0, *de rang* $r > 0$ *; soit* d *un entier satisfaisant aux conditions suivantes :*
(1) *il existe une courbe* $Y \in |\mathscr{O}_X(d)|$ *telle* $F|_Y$ *soit semi-stable.*
(2) $d \deg X > k$.
Alors la caractéristique d'Euler-Poincaré de F *satisfait à l'inégalité*

$$\frac{\chi(F)}{r} \leq \begin{cases} dk + 2 & \text{si} \quad k \geq 0 \\ 1 & \text{si} \quad k < 0 \end{cases}$$

Démonstration. On a la suite exacte $0 \to F(-Y) \to F \to F|_Y \to 0$ et par semi-stabilité, $F(-Y)$, qui est de pente < 0 n'a pas de section non nulle. Il résulte du lemme ci-dessus appliqué au fibré vectoriel $F|_Y$

$$\frac{h^0(F)}{r} \leq 1$$

Considérons maintenant $h^2(F)$. Par dualité de Serre, ce nombre est aussi $\dim \mathrm{Hom}(F, \omega_X)$. Le faisceau $G = \mathrm{Hom}(F, \omega_X)$ est encore $\mu-$semi-stable, de pente k, et sa restriction à Y est elle aussi semi-stable. Le faisceau $G(-Y)$ est de pente $k - d \deg X < 0$; par suite, l'argument déjà utilisé ci-dessus montre que

$$\frac{h^2(F)}{r} \leq \begin{cases} dk + 1 & \text{si} \quad k \geq 0 \\ 1 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Puisque $\chi(F) = \sum_i (-1)^i h^i(F)$, on obtient l'inégalité attendue. □

Démonstration du théorème 4.1

Le bidual F^{**} est encore $\mu-$semi-stable et on a

$$\Delta(F) \geq \Delta(F^{**})$$

Ce bidual étant localement libre, on est donc ramené à démontrer l'énoncé pour un faisceau localement libre.

Supposons d'abord que F soit localement libre de classe de Chern $c_1 = 0$. On peut choisir une courbe $Y \in |\mathscr{O}_X(d)|$ satisfaisant aux conditions du lemme ci-dessus ; alors le faisceau $F^{\otimes \ell}$ est encore un faisceau localement libre de classe de Chern $c_1 = 0$ et $\mu-$semi-stable, parce que c'est vrai en restriction à la courbe Y. On peut donc appliquer le résultat du lemme à ce fibré vectoriel : compte-tenu du fait que $\Delta(F^{\otimes \ell}) = \ell\Delta(F)$ on obtient pour tout $\ell > 0$

$$\chi(\mathscr{O}_X) - \ell\Delta \leq \sup(k+2, 2)$$

ce qui entraîne $\Delta \geq 0$.

Si c_1 n'est pas nul, on peut appliquer le résultat ci-dessus au fibré des endomorphismes $G = \underline{\mathrm{Hom}}(F, F)$ lequel est encore $\mu-$semi-stable de classe de Chern $c_1 = 0$, et de discriminant $2\Delta(F)$. Ceci achève la démonstration. □

Corollaire 4.4. — *Soient* $\mathrm{sign}(X)$ *la signature de* X, *et* $k = \omega_X.h$. *Soit* F *un faisceau semi-stable sur* X, *de rang* r, *pente* μ *et de caractéristique d'Euler-Poincaré* χ. *Alors*

$$\frac{\chi}{r} \leq \frac{1}{2\deg(X)}(\mu - \frac{k}{2})^2 - \frac{1}{8}\mathrm{sign}(X).$$

Démonstration. On a d'après la formule de Riemann-Roch et le théorème de Bogomolov $\frac{\chi}{r} = P(\nu) - \Delta \leq P(\nu)$. On a

$$P(\nu) = \frac{1}{2}(\nu - \frac{\omega_X}{2})^2 - \frac{1}{8}\mathrm{sign}(X).$$

On sait d'après le théorème de l'indice que cette forme d'intersection est négative sur l'orthogonal de h dans $NS(X) \otimes \mathbb{R}$. La composante de $\nu - \frac{\omega_X}{2}$ sur $\frac{h}{\sqrt{h^2}}$ est

$$\frac{\mu - \frac{k}{2}}{\sqrt{h^2}}$$

et par conséquent

$$(\nu - \frac{\omega_{\mathrm{X}}}{2})^2 \leq \frac{1}{\deg(\mathrm{X})}(\mu - \frac{k}{2})^2$$

ce qui entraîne évidemment l'énoncé. □

Pour la construction de l'espace de modules des faisceaux semi-stables, il est important de disposer d'une majoration analogue pour $\frac{h^0(\mathrm{F})}{r}$. Une telle majoration a été obtenue par Simpson (en dimension quelconque). Cette majoration généralise celle qui a été obtenue sur les courbes dans le lemme 4.2.

Pour tout réel x, on pose $[x]_+ = \sup(x, 0)$.

Théorème 4.5. — *(Simpson) Soient r un entier > 0. Il existe une constante C ne dépendant que de r, du degré de X tel que pour tout faisceau semi-stable F de rang r sur X on ait la majoration suivante*

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \frac{1}{2\deg(\mathrm{X})}([\mu + \mathrm{C}]_+)^2$$

Démonstration. On utilise le fait que la fonction $x \mapsto [x]_+$ est une fonction croissante. Choisissons une courbe générale $\mathrm{Y} \in |\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(1)|$, et considérons la filtration de Harder-Narasimhan de la restriction $\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}}$ et le gradué associé $\sum_{i=1}^{\ell} gr_i$. Soit r_i et μ_i le rang et et la pente du gradué gr_i. On a alors d'après le lemme 4.2

$$h^0(\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}}) \leq \sum_i h^0(gr_i) \leq \sum_i r_i[\mu_i + 1]_+$$

et d'après le résultat 3.5 on a $\mu_i - \mu_{i+1} \leq \deg(\mathrm{X})$. Par suite $\mu_i \leq \mu + r\deg(\mathrm{X})$. Il en résulte

$$\frac{h^0(\mathrm{F}|_{\mathrm{Y}})}{r} \leq [\mu + r\deg(\mathrm{X}) + 1]_+$$

On applique cette majoration aux faisceaux $\mathrm{F}(-j)$, qui sont de même rang, et de pente $\mu - j\deg(\mathrm{X})$. Puisque F est sans torsion, $h^0(\mathrm{F}(-j)) = 0$ pour j assez grand, et la même chose pour la restriction à la courbe Y. On a alors

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h^0(\mathrm{F}(-j)|_{\mathrm{Y}})}{r}$$

L'inégalité ci-dessus entraîne

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \sum_{j=0}^{\infty} [\mu + (r-j)\deg(\mathrm{X}) + 1]_+$$

En comparant la somme ci-dessus avec une intégrale, on obtient

$$\frac{h^0(\mathrm{F})}{r} \leq \frac{1}{2\deg(\mathrm{X})}([\mu + \mathrm{C}]_+)^2$$

avec $\mathrm{C} = (r+1)\deg(\mathrm{X}) + 1$, ce qui achève la démonstration. □

Evidemment, si on examine attentivement la démonstration ci-dessus, on peut améliorer un peu la constante C.

5. Familles limitées

Une famille $\mathscr{F}$ de faisceaux cohérents sur une surface algébrique projective lisse X est dite limitée s'il existe une variété algébrique S et un faisceau algébrique cohérent $\mathscr{G}$ sur $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$ tels que tout faisceau F de la famille soit isomorphe à l'un des faisceaux $\mathscr{G}_s$ pour $s \in \mathrm{S}$.

Théorème 5.1. — *Soient* H *un polynôme, et* C *une constante. La famille* $\mathscr{F}$ *des faisceaux cohérents sans torsion de polynôme de Hilbert* H *sur le plan projectif et satisfaisant à la condition suivante :*

$$\mu_{max}(\mathrm{F}) \leq \mathrm{C}$$

est limitée.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 5.2. — *Soit* H *un polynôme. La famille des faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert* H *sur le plan projectif est limitée.*

Montrons d'abord comment ce lemme entraîne le théorème :

Démonstration du théorème 5.1

Puisque le polynôme de Hilbert des faisceaux F de la famille est fixé, la condition $\mu_{max}(\mathrm{F}) \leq \mathrm{C}$ entraîne que $\mu_{min}(\mathrm{F})$ est minoré, et par conséquent la pente $\mu_i = \mu(gr_i)$ des faisceaux qui apparaissent dans le gradué de Harder-Narasimhan des faisceaux de $\mathscr{F}$ est aussi bornée. Il suffit en vertu du lemme ci-dessus de montrer que les polynômes de Hilbert des faisceaux gr_i sont en nombre fini. Il s'agit donc de vérifier que le discriminant $\Delta_i = \Delta(gr_i)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Mais d'après la formule de Riemann-Roch, si $r_i = r(gr_i)$ on a $\sum_i r_i(\mathrm{P}(\mu_i) - \Delta_i) = \chi(\mathrm{F})$ et par conséquent, la somme $\sum_i r_i \Delta_i$ est bornée. Mais on sait d'après le théorème de Bogomolov que $\Delta_i \geq 0$. Par conséquent les Δ_i sont bornés. □

Démontration du lemme 5.2

Sur le plan projectif, se fixer le polynôme de Hilbert revient à se fixer le rang r, et les classes de Chern c_1 et c_2. On peut alors supposer que la pente μ satisfait à la condition suivante :

$$-1 < \mu \leq 0.$$

Si F n'est pas le fibré trivial de rang r, pour $i \leq 0$, les nombres de Hodge $h^0(\mathrm{F}(i))$ sont nuls ; par dualité de Serre, l'espace vectoriel $\mathrm{H}^2(\mathrm{F}(i))$ est dual de $\mathrm{Hom}(\mathrm{F}, \mathscr{O}(-i-3))$ et donc nul pour $q = 2$ et $i \geq -2$. Pour $i = -2, -1, 0$ les seuls espaces vectoriels de cohomologie éventuellement non nuls sont les espaces $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}(i))$, dont la dimension, calculée par la formule de Riemann-Roch est donnée par

$$\begin{aligned} h^1(\mathrm{F}) &= -\chi \\ h^1(\mathrm{F}(-1)) &= c_1 + r - \chi \\ h^1(\mathrm{F}(-2)) &= 2c_1 + r - \chi. \end{aligned}$$

On désigne par Q^* le sous-fibré canonique de rang 2 sur le plan projectif défini par le noyau du morphisme d'évaluation

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(1)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(1).$$

La fibre Q^*_x au-dessus d'un point $x \in \mathbf{P}_2$ s'identifie à l'espace vectoriel des sections de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$ qui s'annulent en x.

Lemme 5.3. — *(Monade de Beilinson) Soit* F *un faisceau semi-stable de rang* r *et de classes de Chern* (c_1, c_2) *sur le plan projectif. On suppose que* $-r < c_1 \leq 0$. *Posons* $\mathrm{H}_i = \mathrm{H}^1(\mathrm{F}(i-1))$ *pour* $i = -1, 0, 1$ *et considérons le complexe naturel de faisceaux localement libres*

$$0 \to \mathrm{H}_{-1} \otimes \wedge^2 \mathrm{Q}^* \xrightarrow{u} \mathrm{H}_0 \otimes \mathrm{Q}^* \xrightarrow{v} \mathrm{H}_1 \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2} \to 0$$

Alors u *est génériquement injectif,* v *est surjectif, et le faisceau de cohomologie* $\ker v / \mathrm{Im} u$ *est isomorphe à* F.

Sur le plan projectif, il revient au même de se fixer le rang et les classes de Chern, ou le polynôme de Hilbert. Ainsi, cet énoncé implique évidemment que la famille des faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert fixé sur le plan projectif est limitée.

Démonstration. La démonstration repose sur la résolution de la diagonale de $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2$. Considérons le produit tensoriel externe $\mathrm{Q} \boxtimes \mathscr{O}(1)$ sur ce produit. Si V est l'espace vectoriel des sections de $\mathscr{O}(1)$, l'espace vectoriel des sections de Q s'identifie au dual V^* de V. Alors le fibré vectoriel $\mathrm{E} = \mathrm{Q} \boxtimes \mathscr{O}(1)$ a une section canonique dont le schéma des zéros s'identifie à la diagonale. On peut alors écrire la résolution de Koszul $\mathrm{K}_.$ du faisceau structural $\mathscr{O}_\Delta$ de la diagonale :

$$0 \to \wedge^2 \mathrm{E}^* \to \mathrm{E}^* \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2} \to 0$$

Considérons les projections

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2 & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{P}_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathbf{P}_2 & & \end{array}$$

Le morphisme p_2 étant plat, le complexe $\mathrm{K}_. \otimes p_2^*(\mathrm{F})$ est encore une résolution gauche de $\mathscr{O}_\Delta \otimes p_2^*(\mathrm{F})$. Par image directe par la projection p_1, la suite spectrale des foncteurs dérivés fournit une suite spectrale (dite suite spectrale de Beilinson) dont le terme $\mathrm{E}_1^{p,q}$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_2^{p,q} &= \mathrm{R}^q p_{1*}(\wedge^{-p} \mathrm{Q}^* \boxtimes \mathrm{F}(p)) \\ &= \wedge^{-p} \mathrm{Q}^* \otimes \mathrm{H}^q(\mathrm{F}(p)) \end{aligned}$$

et dont l'aboutissement est F en degré 0 et 0 en degré non nul. Compte-tenu des conditions obtenues sur les nombres de Hodge $h^q(\mathrm{F}(i))$ pour

$i = -2, -1, 0$ cette suite spectrale dégénère et se réduit au niveau E_1 au complexe ci-dessus, ce qui donne le résultat annoncé. □

Théorème 5.4. — *Soit* X *une surface algébrique projectives lisse. Soient* H *un polynôme, et* C *une constante. La famille* $\mathscr{F}$ *des faisceaux algébriques cohérents sans torsion sur* X, *de polynôme de Hilbert* H *et tels que*

$$\mu_{max}(F) \leq C \qquad (*)$$

est limitée.

Cet énoncé est dû à Maruyama.

Démonstration. On considère un morphisme fini

$$\pi : X \to \mathbf{P}_2$$

tel que $\pi^*(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(1)) = \mathscr{O}_X(1)$. Si F est un faisceau algébrique cohérent sans torsion sur X l'image directe $G = \pi_*(F)$ est encore un faisceau cohérent sans torsion sur le plan projectif $\mathbf{P}_2$ et son polynôme de Hilbert est encore H. On va montrer que ce module satisfait encore à la condition $(*)$, quitte à changer éventuellement la constante C. D'après le théorème 5.1 ceci suffira pour montrer que la famille des images directes est limitée.

Lemme 5.5. — *Il existe une constante* C′ *telle que pour tout faisceau* F *de* $\mathscr{F}$ *on ait pour l'image directe* $G = \pi_*(F)$

$$\mu_{max}(G) \leq C'$$

Démonstration. Considérons l'algèbre $\mathscr{A} = \pi_*(\mathscr{O}_X)$. Le morphisme π est plat parce que c'est un morphisme fini et que la surface X est lisse. Ceci entraîne que $\mathscr{A}$ est un module localement libre sur $\mathbf{P}_2$, de rang deg(X). On peut donc introduire les nombres rationnels $\mu_{min}(\mathscr{A})$ et $\mu_{max}(\mathscr{A})$. D'autre part, il y a correspondance bijective entre l'ensemble des sous-modules cohérents de F et l'ensemble des sous-$\mathscr{A}$−modules cohérents de G; cette correspondance est obtenue par image directe et donc conserve le polynôme de Hilbert.

Démonstration du lemme 5.5

Soit G_1 le premier terme de la filtration de Harder-Narasimhan de G ; par définition c'est un sous-faisceau semi-stable de G tel que $\mu(G_1) = \mu_{max}(G)$. Alors l'image G_1' du morphisme canonique

$$G_1 \otimes_{\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}} \mathscr{A} \to G$$

est un sous-$\mathscr{A}$-module cohérent de G ; c'est donc l'image directe par π d'un sous-module F_1 de F. Le faisceau cohérent F_1 a même polynôme de Hilbert que G'_1, et par conséquent l'hypothèse du lemme entraîne que $\mu(G'_1) \leq C'$. Considérons le faisceau cohérent sans torsion défini par $G_1 \otimes \mathscr{A}$ sur l'algèbre $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}$. Puisque G'_1 est un quotient de $G_1 \otimes \mathscr{A}$ on a les majorations $\mu_{min}(G_1 \otimes \mathscr{A}) \leq \mu(G'_1) \leq C$. Maintenant le faisceau G_1 étant semi-stable, on a évidemment

$$\mu_{min}(G_1 \otimes \mathscr{A}) = \mu(G_1) + \mu_{min}(\mathscr{A}),$$

comme on le voit par restriction à une courbe de degré assez grand. On obtient donc $\mu(G_1) \leq C' - \mu_{min}(\mathscr{A})$.

Compte-tenu du théorème 5.1 ceci entraîne que la famille des images directes G ainsi construite est limitée. Il reste à montrer que la famille des faisceaux F est elle-même limitée. Mais il suffit de remarquer que se donner un tel faisceau F revient à se donner un faisceau sans torsion G sur $\mathbf{P}_2$ et une structure de $\mathscr{A}-$module sur G, c'est-à-dire un morphisme de faisceaux algébriques cohérents sur le plan projectif $\nu : \mathscr{A} \otimes G \to G$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) si $m : \mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ est la multiplication définissant la structure d'algèbre sur $\mathscr{A}$, on a dans $\mathrm{Hom}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \otimes G, G)$

$$\nu \circ (id_{\mathscr{A}} \otimes \nu) = \nu(m \otimes id_G))$$

(b) on a, dans $\mathrm{Hom}(G, G)$, $\nu \circ (1 \otimes id_G) = id_G$.

Ainsi, on peut paramétrer les structures de $\mathscr{A}-$algèbres sur G par le sous-schéma fermé de $\mathrm{Hom}(\mathscr{A} \otimes G, G)$, image réciproque du point $(id_G, 0)$ par le morphisme

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{A} \otimes G, G) \to \mathrm{Hom}(G, G) \times \mathrm{Hom}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \otimes G, G)$$

qui associe à ν le couple de morphismes de faisceaux algébriques cohérents sur le plan $(\nu \circ (1 \otimes id_G), \nu \circ (id_{\mathscr{A}} \otimes \nu) - \nu(m \otimes id_G))$.

Considérons une variété algébrique réduite S et un faisceau algébrique cohérent $\mathscr{G}$ sur $S \times \mathbf{P}_2$ tels que tout faisceau G ainsi obtenu soit isomorphe à l'un des faisceaux $\mathscr{G}_s$. On peut supposer que le faisceau $\mathscr{G}$ est S$-$plat. On peut alors d'après le théorème de semi-continuité stratifier S par un nombre fini de sous-variétés S_i localement fermées sur lesquelles la dimension des espaces vectoriels $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}_s, \mathscr{G}_s)$, $\mathrm{Hom}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{G}_s, \mathscr{G}_s)$ et $\mathrm{Hom}(\mathscr{A} \otimes \mathscr{A} \otimes \mathscr{G}_s, \mathscr{G}_s)$ reste constante. Soit $S' = \coprod_i S_i$. Il existe alors un sous-schéma fermé d'un fibré vectoriel $\mathscr{V} \to S'$ (de rang variable) qui permet de permet de

paramétrer les structures de $\mathscr{A}$−modules sur les faisceaux G. Ceci montre que la famille des faisceaux F est limitée. □

6. La construction de l'espace de modules

On ne donne ici qu'une esquisse de la construction. Pour plus de détails on peut consulter l'article original de Simpson [16] , ou l'exposé que j'en ai donné à Paris en 1992. La construction n'est d'ailleurs pas beaucoup plus difficile en toute dimension, mais elle nécessite alors une généralisation de l'estimation 4.5.

Soient X une surface algébrique projective, polarisée, H un polynôme de degré 2. On considère pour toute variété algébrique S l'ensemble $\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})(\mathrm{S})$ des classes d'isomorphisme de familles S−plates de faisceaux semi-stables sur X de polynôme de Hilbert H, paramétrées par la variété algébrique S.

Théorème 6.1. — *Il existe pour le foncteur* $\underline{\mathrm{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ *un espace de modules grossier* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$. *Cet espace de modules a les propriétés suivantes :*

(i) *La variété algébrique* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ *est projective.*

(ii) *Les points de* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ *sont les classes de* S−*équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert* H.

(iii) *L'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux stables s'identifie à un ouvert de la variété* $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$.

La propriété de module grossier de $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ signifie qu'il existe un morphisme fonctoriel $f : \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})(\mathrm{S}) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H}))$, dit morphisme modulaire, satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute autre variété algébrique $\mathbf{M}'$, et tout morphisme fonctoriel $g : \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})(\mathrm{S}) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{M}')$ il existe un morphisme et un seul $\varphi : \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H}) \to \mathbf{M}'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{M}}_{\mathrm{X}}(\mathrm{P})(\mathrm{S}) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})) \\ & {}_{g}\searrow & \downarrow \varphi \\ & & \mathrm{Mor}(\mathrm{S}, \mathbf{M}') \end{array}$$

Evidemment, cette propriété caractérise la variété $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$. Cet énoncé, d'abord démontré par Gieseker sur les surfaces, a été ensuite étendu par Maruyama sur toute variété projective lisse polarisée, puis par Simpson [16] pour les faisceaux de dimension d. La construction dûe à Simpson est la plus naturelle.

La démonstration repose sur la théorie invariante de Mumford.

6.1. Géométrie invariante

Soit G un groupe algébrique affine opérant sur une variété algébrique X.

Définition 6.2. — *Un morphisme de variétés algébriques $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est appelé bon quotient de* X *par* G *si f est* G*−équivariant et les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *le morphisme f est affine et surjectif ;*

(ii) *le morphisme canonique d'algèbres $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})^{\mathrm{G}}$ est un isomorphisme ;*

(iii) *l'image d'un fermé* G*−invariant est un fermé de* Y*, et le morphisme f sépare les fermés* G*−invariants disjoints.*

Il est facile de voir qu'un bon quotient $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, il satisfait à la propriété universelle qu'on attend des quotients. Ainsi, un tel quotient, s'il existe, est unique. De plus, on peut voir que chaque fibre de f contient une et une seule orbite fermée ; il en résulte que l'ensemble des points fermés de Y s'identifie à l'ensemble des orbites fermées.

Définition 6.3. — *Un bon quotient est dit quotient géométrique si les orbites sont fermées de* G *dans* X.

Exemples

(a) On suppose que G est un groupe réductif. Soit $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ une variété affine, définie par une algèbre de type fini A. Alors A^{G} est une algèbre de type fini, et le morphisme canonique associé à l'inclusion $\mathrm{A}^{\mathrm{G}} \hookrightarrow \mathrm{A}$

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A}^{\mathrm{G}})$$

est un bon quotient.

(b) Soient G un groupe réductif opérant linéairement sur un espace vectoriel W, P(W) l'espace projectif des hyperplans de W. C'est donc un quotient (géométrique) de $\mathrm{W}^* - \{0\}$ par $\mathbb{C}^*$.

Définition 6.4. — *Un point $x \in \mathrm{P}(\mathrm{W})$ est dit semi-stable sous l'action de* G *s'il existe un polynôme homogène* G*−invariant sur* W^* *non nul en x. Les points $x \in \mathrm{P}(\mathrm{W})$ semi-stables sous l'action de* G *constituent un ouvert* P^{ss}*. Un point $x \in \mathrm{P}(\mathrm{W})$ est dit stable s'il est semi-stable et si le morphisme $g \mapsto gx : \mathrm{G} \to \mathrm{P}^{ss}$ est propre.*

On peut alors construire une variété projective Z et un bon quotient $P^{ss} \to Z$. Cette variété est définie de la manière suivante : soit $Y = W^*/G$ le bon quotient affine défini ci-dessus ; on note encore 0 l'image de 0 dans ce quotient. Soit W^{*ss} l'image réciproque du complémentaire de 0 dans Y. C'est un ouvert $\mathbb{C}^*$–invariant. Sur l'ouvert $Y - \{0\}$ le groupe $\mathbb{C}^*$ opère proprement, et il existe un quotient géométrique $Z = Y - \{0\}/\mathbb{C}^*$. Cette variété est une variété projective et le morphisme composé $W^{ss} \to Z$ passe au quotient pour donner un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W^{*ss} & \to & Y - \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P^{ss} & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

et le morphisme f ainsi obtenu est le morphisme cherché, qui fait de Z un bon quotient de P^{ss}. Les points stables constituent un ouvert P^s de P^{ss} sur lequel le groupe G opère proprement ; cet ouvert est l'image réciproque d'un ouvert Z^s de Z et le morphisme $P^s \to Z^s$ est un quotient géométrique.

(c) Plaçons nous dans la situation (b) et considérons un sous-schéma fermé $X \subset P(W)$ invariant sous l'action de G. Alors $X^{ss} = X \cap P^{ss}$ est l'image réciproque d'un sous-schéma fermé de $T \subset Z$, et le morphisme induit

$$X^{ss} \to T$$

est un bon quotient de X^{ss} par G.

Critère de Mumford

Il existe un critère commode, dû à Mumford, pour déterminer quels sont les points semi-stables et les points stables de P(W) sous l'action de G. Soit $\lambda : \mathbf{C}^* \to G$ un sous-groupe à un paramètre de G ; on peut alors écrire

$$W^* = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n,$$

où W_n est le sous-espace vectoriel des vecteurs $v \in W$ tels que $\lambda(t).v = t^n v$ pour tout $t \in \mathbb{C}^*$. Un point $x \in \mathbf{P}(W)$ se représente par une forme linéaire $v = \sum_n v_n$, avec $v_n \in W_n$; soit $\mu(\lambda, x) = \inf\{n, v_n \neq 0\}$.

Théorème 6.5. — *On a l'équivalence :*

$$x \text{ est semi-stable (resp. stable)} \Leftrightarrow \text{pour tout } \lambda,\ \mu(\lambda, x) \leq 0 \quad (\text{resp.} < 0)$$

Ce critère permet par exemple d'établir les résultats suivants :

Exemple 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; considérons la grassmannienne $\mathbf{Grass}(\mathrm{E} \otimes \mathbb{C}^k)$ des espaces vectoriels quotients de dimension r de $\mathrm{E} \otimes \mathbb{C}^k$, sur laquelle agit de manière naturelle le groupe réductif $\mathrm{S}l(\mathrm{E})$. Cette grassmannienne est plongée par le plongement de Plucker dans l'espace projectif $\mathrm{P}(\wedge^r(\mathrm{E}\otimes\mathbb{C}^k)$, et ce plongement est équivariant pour l'action induite par l'action naturelle de $\mathrm{S}l(\mathrm{E})$ sur l'espace vectoriel $\wedge^r(\mathrm{E} \otimes \mathbb{C}^k)$.

Proposition 6.6. — *Les points semi-stables de la grassmannienne* $\mathbf{Grass}(\mathrm{E} \otimes \mathbb{C}^k)$ *pour l'action naturelle de* $\mathrm{S}l(\mathrm{E})$ *correspondent aux espaces vectoriels quotients* F *de* $\mathrm{E} \otimes \mathbb{C}^k$ *satisfaisant à la condition suivante : pour tout sous-espace vectoriel non nul* $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$, *l'image* F' *de* $\mathrm{E}' \otimes \mathbb{C}^k$ *dans* F *satisfait à l'inégalité*

$$\frac{\dim\ \mathrm{F}'}{\dim\ \mathrm{E}'} \geq \frac{\dim\ \mathrm{F}}{\dim\ \mathrm{E}}.$$

Exemple 2

Soient $\mathrm{E} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}^r$ le fibré trivial de rang r sur une variété projective irréductible X, et H un polynôme. On considère le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{H})$ des faisceaux cohérents quotients $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ de polynôme de Hilbert $\mathrm{P}_{\mathrm{F}} = \mathrm{H}$. Si ℓ est un entier assez grand, l'espace vectoriel des sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\ell))$ est de dimension $\mathrm{H}(\ell)$, et c'est un quotient de $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell))$ de sorte que l'on obtient un morphisme de variétés

$$\varphi_\ell : \mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{H}) \hookrightarrow \mathbf{Grass}(\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell)), \mathrm{H}(\ell))$$

en associant au faisceau quotient F cet espace vectoriel quotient $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}(\ell))$. Ce morphisme est en fait un plongement fermé : c'est ainsi que Grothendieck construit le schéma de Hilbert. Pour l'action naturelle de $\mathrm{S}l(r) \subset \mathrm{Aut}(\mathrm{E})$, le morphisme est équivariant, et l'action linéaire de $\mathrm{S}l(r)$ sur $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(\ell))$ permet de considérer les points semi-stables comme dans l'exemple précédent. On obtient alors

Proposition 6.7. — *Si* ℓ *est assez grand, les points semi-stables de* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{H})$ *pour l'action de* $\mathrm{S}l(r)$ *sont les points qui représentent les quotients* $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *satisfaisant à la condition suivante : pour tout sous-fibré trivial non nul* $\mathrm{E}' \subset \mathrm{E}$, *de rang* r', F' *désignant l'image de* E' *on a*

$$\frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}'}}{r'} \geq \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{F}}}{r}$$

Remarquons que l'ouvert des points semi-stables ne dépend pas de ℓ, pourvu que ℓ ait été choisi assez grand.

6.2. Critère de semi-stabilité

Il est nécessaire de traduire la notion de semi-stabilité en termes de sections, et d'avoir un énoncé qui permet de reconnaître pour un faisceau semi-stable donné les sous-faisceaux cohérents de même polynôme de Hilbert réduit. Soit H un polynôme. Pour tout entier m, on considère l'ensemble $\mathrm{S}_m(\mathrm{H})$ des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents F sans torsion sur X, de polynôme de Hilbert H et qui satisfont aux conditions suivantes

(i) $\mathrm{H}(m) \leq h^0(\mathrm{F}(m))$

(ii) Pour tout sous-module cohérent non nul $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ de rang r' on a

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r}$$

Considérons d'autre part l'ensemble $\mathrm{S}^*_m(\mathrm{H})$ des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sans torsion F de polynôme de Hilbert H qui satisfont à la propriété en quelque sorte duale :

(ii)* Pour tout module cohérent quotient sans torsion $\mathrm{F} \to \mathrm{F}''$ de rang r'', on a

$$\frac{\mathrm{H}(m)}{r} \leq \frac{h^0(\mathrm{F}''(m))}{r''}.$$

Il est clair que pour tout m, on a $\mathrm{S}_m(\mathrm{H}) \subset \mathrm{S}^*_m(\mathrm{H})$. Pour m assez grand, on peut dire beaucoup plus :

Proposition 6.8. — *(Critère de semi-stabilité)*
Le polynôme H *étant fixé, il existe un nombre* m_0 *tel que pour tout* $m \geq m_0$ *les ensembles* $\mathrm{S}_m(\mathrm{H})$ *et* $\mathrm{S}^*_m(\mathrm{H})$ *coïncident avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert* H.

Remarque 6.9. — On peut se demander s'il ne serait pas plus naturel d'introduire simplement l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sans torsion de polynôme de Hilbert H qui satisfont seulement à la condition (ii). Sur les courbes la condition (i) est effectivement automatique. Par contre, en dimension 2 cette condition n'entraîne pas la semi-stabilité, même en choisissant m très grand.

Venons-en à la description des filtrations de Jordan-Hölder. Etant donné un faisceau semi-stable F de rang r et un entier m, désignons par $\mathrm{Max}_m(\mathrm{F})$ l'ensemble des sous-faisceaux cohérents $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ non nuls de rang r' satisfaisant à la condition suivante :

$$\frac{h^0(\mathrm{F}'(m))}{r'} = \frac{h^0(\mathrm{F}(m))}{r}$$

Proposition 6.10. — *Soit* H *un polynôme. Il existe un nombre* m_0 *tel que pour tout* $m \geq m_0$ *et tout faisceau semi-stable* F *de polynôme de Hilbert* H *l'ensemble* $\mathrm{Max}_m(\mathrm{F})$ *coïncide avec l'ensemble* $\mathrm{Max}(\mathrm{F})$ *des sous-faisceaux cohérents* $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ *ayant même polynôme de Hilbert réduit que* F.

La démonstration de ces deux énoncés fait intervenir bien sûr de façon essentielle le théorème B de Serre, une fois acquis le fait que certaines familles de faisceaux et de sous-faisceaux sont limitées. C'est le cas par exemple de la famille $\cup_{m \geq m_0} \mathrm{S}^*_m(\mathrm{H})$ pour m_0 assez grand. Pour obtenir cette information on utilise le théorème 5.1 et l'estimation 4.5, qui permet de minorer la pente $\mu_{min}(\mathrm{F})$ d'un faisceau de cette famille.

6.3. La construction

Pour démontrer le théorème 6.1, on choisit m assez grand pour que les propriétés suivantes soient vraies :

(a) pour tout faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert H, le faisceau $\mathrm{F}(m)$ est engendré par ses sections, et $\mathrm{H}^q(\mathrm{F}(m)) = 0$, pour $q > 0$, et la même chose pour tout sous-faisceau $\mathrm{F}' \in \mathrm{Max}(\mathrm{F})$.

(b) les conclusions des énoncés 6.8 et 6.10 sont vraies.

On considère le fibré vectoriel $\mathrm{E} = \mathbb{C}^{\mathrm{H}(m)} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(-m)$, dont le groupe des automorphismes s'identifie à $\mathrm{G}l(\mathrm{H}(m))$. Tout faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert H, muni d'un isomorphisme $\mathbb{C}^{\mathrm{H}(m)} \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$, définit un point du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{H})$, et le morphisme induit $\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$ est un isomorphisme. La proposition 6.7 appliquée à ce schéma de Hilbert et les critères ci-dessus permettent de voir sans difficulté qu'un tel point est semi-stable sous l'action du groupe $\mathrm{S}l(\mathrm{H}(m))$. La réciproque est plus délicate, car il n'est pas évident qu'un point de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}, \mathrm{P})$ semi-stable pour l'action de $\mathrm{S}l(\mathrm{H}(m))$ définisse un faisceau quotient semi-stable, ni même sans torsion, et on doit se placer dans l'adhérence (schématique) $\mathbf{Hilb}_0(\mathrm{E}, \mathrm{H})$ de l'ouvert des quotients sans torsion. Cette difficulté se retrouve aussi que ce soit dans la construction de Gieseker, ou celle de Maruyama.

Théorème 6.11. — *Soit* $q \in \mathbf{Hilb}_0(\mathrm{E},\mathrm{H})$, *définissant un faisceau cohérent quotient* $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *le faisceau* F *est semi-stable, et le morphisme canonique*

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{E}(m)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(m))$$

est un isomorphisme ;

(ii) *le point* q *est semi-stable sous l'action de* $\mathrm{S}l(\mathrm{H}(m))$.

Soit $\mathbf{Hilb}^{ss}(\mathrm{E},\mathrm{H})$ l'ouvert de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{H})$ des points qui satisfont à la condition (i) ci-dessus. L'espace de modules est le quotient de Mumford

$$\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H}) = \mathbf{Hilb}^{s,s}(\mathrm{E},\mathrm{H})/\mathrm{S}l(\mathrm{H}(m))$$

Par construction, c'est le quotient de Mumford de l'ouvert des points semi-stables d'une sous-variété fermée de $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{H})$: c'est donc une variété projective, et il n'est pas bien difficile, en utilisant la propriété universelle du schéma de Hilbert, de vérifier que c'est un espace de modules grossier, et d'identifier les orbites fermées : il s'agit des quotients $\mathrm{E} \to \mathrm{F}$ avec F polystable, c'est-à-dire somme directe

$$\mathrm{F} = \oplus_i \mathrm{F}_i,$$

avec F_i stable de même polynôme de Hilbert réduit. Ceci conduit au théorème 6.1.

6.4. Points de lissité.

Théorème 6.12. — *Soit* F *un faisceau stable sur* X *tel que*

$$\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F}) = 0.$$

Alors l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ *est lisse au voisinage du point* p *défini par* F.

Démonstration. Par construction, avec les notations utilisées ci-dessus, l'ouvert des points stables $\mathbf{M}^s_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ de $\mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ est le quotient géométrique de l'ouvert $\mathbf{Hilb}^s(\mathrm{E},\mathrm{H})$ des points stables par l'action du groupe $\mathrm{G}l(\mathrm{H}(m))$. Le stabilisateur d'un point de $\mathbf{Hilb}^s(\mathrm{E},\mathrm{H})$ s'identifie au groupe des automorphismes du faisceau quotient correspondant F, c'est-à-dire à $\mathbb{C}^*$: il en

résulte facilement que l'action de $Gl(\mathrm{H}(m))$ se factorise à travers $\mathrm{P}Gl(\mathrm{H}(m))$ en une action propre et libre sur l'ouvert $\mathbf{Hilb}^s(\mathrm{E},\mathrm{H})$.

Il suffit donc de montrer que le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}^s(\mathrm{E},\mathrm{H})$ est lisse le long de l'orbite correspondant au point F. Mais on dispose du critère de Grothendieck qui permet de décider si le schéma de Hilbert est lisse au voisinage d'un point :

Théorème 6.13. — *Soit* $\mathrm{F} = \mathrm{E}/\mathrm{F}'$ *un point du schéma de Hilbert* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{H})$.

(i) *L'espace tangent de Zariski à* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{H})$ *au point* F *est isomorphe à* $\mathrm{Hom}(\mathrm{F}',\mathrm{F})$.

(ii) *Si* $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}',\mathrm{F}) = 0$ *le schéma de Hilbert* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{H})$ *est lisse au voisinage du point* F.

Dès lors, la suite exacte

$$0 \to \mathrm{F}' \to \mathrm{E} \to \mathrm{F} \to 0$$

et le fait que $\mathrm{Ext}^q(\mathrm{E},\mathrm{F}) = 0$ pour $q > 0$ fournit un isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}',\mathrm{F}) \simeq \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F})$. Ainsi le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E},\mathrm{H})$ est lisse au voisinage du point F dès que $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F}) = 0$.

Exemple.

Si X est le plan projectif, l'ouvert de Hilbert $\mathbf{Hilb}^{ss}(\mathrm{E},\mathrm{H})$ est lisse. Il suffit en effet de vérifier que si F est un faisceau semi-stable on a $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F}) = 0$. Mais ceci résulte de la définition de la semi-stabilité, et du théorème de dualité de Serre pour les Ext :

Lemme 6.14. — *Soit* F *et* G *deux faisceaux algébriques cohérents sur une variété projective lisse* X *de dimension* n. *Soit* ω_{X} *le faisceau dualisant. Alors on a un accouplement naturel*

$$\mathrm{Ext}^p(\mathrm{F},\mathrm{G}) \times \mathrm{Ext}^{n-p}(\mathrm{G},\mathrm{F}\otimes\omega_{\mathrm{X}}) \to \mathbb{C}$$

qui fait de l'un de ces espaces vectoriels le dual de l'autre.

Dans le cas du plan projectif, le faisceau dualisant est isomorphe à $\mathscr{O}(-3)$; si F est semi-stable, $\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F}(-3)) = 0$, et par suite $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F}) = 0$. Il en résulte que l'ouvert $\mathbf{Hilb}^{ss}(\mathrm{E},\mathrm{H})$ du schéma de Hilbert, s'il n'est pas vide, est lisse de dimension $r^2(2\Delta - 1) + (\mathrm{H}(m))^2$.

Corollaire 6.15. — *Soit* $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$ *l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif. On désigne par* χ *la caractéristique d'Euler-Poincaré, et on suppose* r, c_1 *et* χ *premiers entre eux. Alors* $\mathbf{M}$ *est une variété projective lisse de dimension* $r^2(2\Delta - 1) + 1$.

En effet, si r, c_1 et χ sont premiers entre eux, tout faisceau semi-stable est stable.

En général, l'espace de modules $\mathbf{M}$ est singulier aux points non stables. Cependant, dans quelques cas particuliers, cette assertion n'est pas vraie : par exemple, l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2, 0, 2)$ est isomorphe à $\mathbf{P}_5$, mais il contient des points non stables.

6.5. Faisceau universel

Définition 6.16. — *Soit* X *une surface algébrique irréductible lisse polarisée. Soit* $f : \mathrm{S} \to \mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ *un morphisme de variétés algébriques. Une famille plate* F *de faisceaux semi-stables sur* X, *paramétrée par une variété algébrique* S *est appelée faisceau universel (relatif à* f*) si le morphisme modulaire associé* f_{F} *est égal à* f.

Si $\mathrm{S} = \mathbf{M}_{\mathrm{X}}(\mathrm{H})$ *et* $f = id$ *on dira simplement que* F *est un faisceau universel.*

Un tel faisceau universel n'existe pas toujours. Sur le plan projectif, on a le résultat suivant :

Théorème 6.17. — *On considère, sur le plan projectif, l'espace de modules* $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$ *et on désigne par* χ *la caractéristique d'Euler-Poincaré.*

(i) *Si* (r, c_1, χ) *sont premiers entre eux, il existe un faisceau universel sur* $\mathbf{M}$.

(ii) *Supposons* (r, c_1, χ) *ne soient pas premiers entre eux, et considérons un ouvert* U *non vide de* $\mathbf{M}$. *Alors il n'existe pas de faisceau universel paramétré par* U.

La démontration de ce résultat fait appel au mêmes techniques que celles qui seront développées au chapitre 10 pour le calcul du groupe de Picard, et au théorème d'existence qui permettent de décrire pour quelles classes de Chern l'espace de modules n'est pas vide. La partie (i) résulte d'un énoncé général dû à Maruyama ; la partie (ii) est due à Drézet et Narasimhan [6] .

6.6. Variante de la construction, sur le plan projectif

Posons $V^* = H^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(1))$. On suppose que les faisceaux considérés sont normalisés c'est-à-dire tels que que $-r < c_1 \leq 0$, et on pose

$$n = c_2 - \frac{1}{2}c_1(c_1+1).$$

où r est le rang, et c_1 et c_2 les classes de Chern. On a alors $n + c_1 \geq 0$ et $n \geq r + c_1$, et on sait d'après le lemme 5.3 qu'un faisceau semi-stable F normalisé sur le plan projectif s'obtient comme cohomologie d'une monade de Beilinson. Soit $H_0 = H^1(F(-1)$. Avec les notations de ce lemme, cette monade permet d'identifier l'espace vectoriel $H_1 = H^1(F(-2))$ à un sous-espace vectoriel de $H_0 \otimes V$, de dimension $n + c_1$ et l'espace vectoriel $H_1 = H^1(F)$ à un quotient $H_0 \otimes V^*$ de dimension $n - (c_1 + r)$.

Réciproquement, fixons un espace vectoriel H_0 de dimension n. A tout point (K, L) de la variété

$$\mathfrak{P} = \mathbf{Grass}_{n+c_1}(H_0 \otimes V) \times \mathbf{Grass}^{n-(r+c_1)}(H_0 \otimes V^*)$$

où le premier facteur est la grassmannienne des sous-espaces de dimension $n+c_1$ et le second la grassmannienne des quotients de dimension $n-(r+c_1)$ on associe des morphismes

$$K \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(-1) \xrightarrow{u} H_0 \otimes Q^* \xrightarrow{v} L \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}. \qquad (*)$$

Soit $\mathfrak{M}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{P}$ défini par l'équation $vu = 0$.

Le groupe de Picard de $\mathfrak{P}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}^2$, les générateurs obtenus étant induits par le fibré $\mathscr{O}(1)$ quand on plonge chacune des grassmanniennes dans un espace projectif par le plongement de Plücker. On considère pour m assez grand la polarisation de $\mathfrak{P}$ définie par le fibré inversible $\mathscr{O}((r+c_1)m-n, -c_1m+n)$, et les points semi-stables sous l'action du groupe $Sl(H_0)$. Le théorème suivant donne une autre description de l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$ des classes de S−équivalence de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 sur le plan projectif.

Théorème 6.18. — [14] *On suppose que $\mathfrak{M}$ est muni de la polarisation $\mathscr{O}((r+c_1)m-n, -c_1m+n)$, avec m suffisamment grand.*

(i) *Si (K, L) est un point $\mathfrak{M}$, semi-stable sous l'action de $Sl(H_0)$, le complexe (*) ci-dessus est une monade et son faisceau de cohomologie F est semi-stable de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2.*

(ii) *Soit $\mathfrak{M}^{ss}$ l'ouvert de $\mathfrak{M}$ des points semi-stables. La famille universelle des faisceaux* F *ainsi obtenus, paramétrée par l'ouvert $\mathfrak{M}^{ss}$ fournit un isomorphisme*

$$\mathfrak{M}^{ss}/\mathrm{S}l(\mathrm{H}_0) \to \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$$

où le premier membre est le quotient de Mumford.

Dans cette description, la variété $\mathfrak{M}$ a remplacé le schéma de Hilbert. Sa structure est beaucoup plus simple et permet par exemple de comprendre immédiatement quels sont les générateurs de l'anneau de Chow (au moins quand r, c_1 et χ sont premiers entre eux) ce qui n'était pas évident sur la description générale. Elle devrait aussi être utile pour trouver les relations entre ces générateurs [9] .

7. Etude différentielle de la stratification de Shatz [5]

Le morphisme de Kodaira et Spencer

Soient S une variété lisse, X une variété projective lisse. Considérons un faisceau algébrique cohérent E sur $\mathrm{Y} = \mathrm{S} \times \mathrm{X}$, S−plat ; pour tout $s \in \mathrm{S}$, on désigne par E_s le faisceau induit sur la fibre $\mathrm{Y}_s \simeq \mathrm{X}$ de $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$ au-dessus du point s. Soit m_s l'idéal de s. Considérons le voisinage infinitésimal d'ordre 1 de la fibre Y_s dans Y, noté Y_{s^2}, défini par l'idéal m_s^2. La suite exacte de modules sur Y_{s^2}

$$0 \to \mathrm{T}_s^*\mathrm{S} \otimes \mathrm{E}_s \to \mathrm{E}/m_s^2\mathrm{E} \to \mathrm{E}_s \to 0$$

peut être considérée comme une suite exacte de modules sur Y_s, via la projection $\mathrm{Y}_{s^2} \to \mathrm{Y}_s$. Cette extension définit donc un élément $\omega \in \mathrm{Ext}^1(\mathrm{E}_s, \mathrm{T}_s^*\mathrm{S} \otimes \mathrm{E}_s)$, c'est-à-dire une application linéaire

$$\omega : \mathrm{T}_s\mathrm{S} \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{E}_s, \mathrm{E}_s)$$

qui s'appelle le *morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer* au point $s \in \mathrm{S}$.

Définition 7.1. — *On dit que le faisceau* E *définit une famille complète paramétrée par* S *si en tout point de* S *le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer est surjectif.*

Le schéma de Hilbert relatif

Considérons le schéma de Hilbert relatif $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}/\mathrm{S},\mathrm{H}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{S}$ des paires (s,F) d'un point $s \in \mathrm{S}$ et d'un faisceau cohérent quotient E_s/F de polynôme de Hilbert fixé H. Ainsi, ce schéma représente le foncteur qui associe à la variété algébrique $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ au-dessus de S l'ensemble des faisceaux algébriques cohérents quotient $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{F}$, plats au-dessus de S' et tels que pour tout $s' \in \mathrm{S}'$ le quotient induit soit de polynôme de Hilbert H. Ici le faisceau $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}$ désigne le faisceau cohérent sur $\mathrm{S}' \times \mathrm{X}$ obtenu à partir de E par le changement de base $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

Proposition 7.2. — *Considérons un point $t = (s,\mathrm{F})$ du schéma de Hilbert* $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}/\mathrm{S},\mathrm{H}) \to \mathrm{S}$. *On a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{E}/\mathrm{F}) \to \mathrm{T}_t\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}/\mathrm{S},\mathrm{H}) \xrightarrow{\mathrm{T}_t\pi} \mathrm{T}_s\mathrm{S} \xrightarrow{\omega_+} \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F},\mathrm{E}/\mathrm{F})$$

dans lequel le morphisme ω_+ est l'application linéaire composée

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_s\mathrm{S} & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{E}_s,\mathrm{E}_s) \\ & \omega_+ \searrow & \downarrow \mathrm{can} \\ & & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F},\mathrm{E}_s/\mathrm{F}) \end{array}$$

du morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer au point s, et du morphisme canonique associé à l'inclusion $\mathrm{F} \hookrightarrow \mathrm{E}$ *et à la projection* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}/\mathrm{F}$.

La première partie de la suite exacte provient du fait que la fibre de π au-dessus du point s n'est autre que le schéma de Hilbert absolu $\mathbf{Hilb}(\mathrm{E}_s,\mathrm{H})$, et de la description habituelle de l'espace tangent de Zariski à un tel schéma de Hilbert. Pour l'exactitude au niveau $\mathrm{T}_s\mathrm{S}$, on utilise le point double $\mathrm{D} = Spec(\mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2)$, et on interprète un vecteur tangent à une variété Z en un point $z \in \mathrm{Z}$ comme morphisme $u : \mathrm{D} \to \mathrm{Z}$ tels que $u(0) = z$, où 0 désigne le point fermé de D.

Les espaces de cohomologie $\mathrm{Ext}^q_+(\mathrm{E},\mathrm{E})$ *d'un faisceau filtré*

On a besoin de généraliser ce résultat au variétés de drapeaux. On va d'abord définir ce qui, dans le cas des drapeaux, va jouer le rôle de l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^q(\mathrm{F},\mathrm{E}/\mathrm{F})$. On se fixe dans la suite un entier $\ell \geq 2$. Considérons sur une variété X deux complexes de faisceaux algébriques, munis de filtrations finies

$$0 \subset \mathrm{F}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{F}_\ell = \mathrm{K}$$

et

$$0 \subset \mathrm{F}'_1 \subset \ldots \subset \mathrm{F}'_\ell = \mathrm{K}',$$

de même longueur ; on suppose que tel que le gradué associé $gr_i(\mathrm{K}')$ est un complexe de faisceaux algébriques injectifs. Considérons le complexe des homomorphismes $\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$; on a une suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{Hom}^{\cdot}_{-}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') \to \mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') \to \mathrm{Hom}^{\cdot}_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') \to 0$$

où le sous-complexe $\mathrm{Hom}^{\cdot}_{-}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ est constitué des homomorphismes $f \in \mathrm{Hom}^p(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ qui respectent la filtration, c'est-à-dire tel que $f(\mathrm{F}_i) \subset (\mathrm{F}'_i)$. Le complexe $\mathrm{Hom}^{\cdot}_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ est défini comme quotient de $\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ par ce sous-complexe.

Définition 7.3. — *On pose*

$$\mathrm{Ext}^q_{-}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') = \mathrm{H}^q(\mathrm{Hom}^{\cdot}_{-}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')) \ ; \ \mathrm{Ext}^q_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') = \mathrm{H}^q(\mathrm{Hom}^{\cdot}_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}'))$$

Dans ces définitions les H^q sont les espaces vectoriels de cohomologie. On a donc une suite exacte

$$\ldots \to \mathrm{Ext}^q_{-}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') \to \mathrm{Ext}^q(\mathrm{K}, \mathrm{K}') \to \mathrm{Ext}^q_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') \to \mathrm{Ext}^{q+1}_{-}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') \to \ldots$$

De plus, on peut définir sur chacun des complexes d'homomorphismes $\mathrm{Hom}^{\cdot}_{-}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ et $\mathrm{Hom}^{\cdot}_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ des filtrations croissantes canoniques : sur $\mathrm{Hom}^{\cdot}_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ par exemple, le gradué est donné par

$$gr_p \mathrm{Hom}^{\cdot}_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}') = \begin{cases} \oplus_i \mathrm{Hom}^{\cdot}(gr_i(\mathrm{K}), gr_{i+p}(\mathrm{K}')) & \text{si } \mathrm{p} > 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad p \leq 0 \end{cases}$$

On peut alors écrire en cohomologie, la suite spectrale d'un complexe filtré : ainsi, on a une suite spectrale dont le terme E_1 est donné par

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \begin{cases} \oplus_i \mathrm{Ext}^{p+q}(gr_i(\mathrm{K}), gr_{i-p}(\mathrm{K}')) \text{ si } p < 0 \\ 0 \text{ si } p \geq 0 \end{cases}$$

et qui a pour aboutissement $\mathrm{Ext}^{p+q}_{+}(\mathrm{K}, \mathrm{K}')$ en degré $p + q$.

Considérons maintenant deux faisceaux algébriques sur X munis de filtrations finies croissantes comme ci-dessus

$$0 \subset \mathrm{F}_1 \subset \ldots \subset \mathrm{E}_\ell = \mathrm{E}$$

et

$$0 \subset \mathrm{F}'_1 \subset \ldots \subset \mathrm{F}'_\ell = \mathrm{E}',$$

de même longueur ℓ. On peut trouver une résolution filtrée injective de E' : il s'agit d'un complexe filtré K' comme ci-dessus, dont le gradué est formé de faisceaux injectifs, munis d'un morphisme $\mathrm{E}' \to \mathrm{K}'$ compatible avec les filtrations et tel que les morphismes induits sur les gradués ($i = 1, \ldots, \ell$)

$$gr_i(\mathrm{E}') \to gr_i(\mathrm{K}')$$

soient des quasi-isomorphismes. On définit alors les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^q_-(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ et $\mathrm{Ext}^q_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ en posant :

$$\mathrm{Ext}^q_-(\mathrm{E}, \mathrm{E}') = \mathrm{Ext}^q_-(\mathrm{E}, \mathrm{K}') \quad ; \quad \mathrm{Ext}^q_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}') = \mathrm{Ext}^q_+(\mathrm{E}, \mathrm{K}')$$

On peut démontrer que ceci ne dépend pas de la résolution. Tous les résultats énoncés ci-dessus en termes de complexes filtrés s'étendent aux faisceaux algébriques cohérents filtrés. Ainsi, on a par exemple une suite spectrale dont le terme E_1 est donné par

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \begin{cases} \oplus_i \mathrm{Ext}^{p+q}(gr_i(\mathrm{E}), gr_{i-p}(\mathrm{E})) \text{ si } p < 0 \\ 0 \text{ si } p \geq 0 \end{cases}$$

et qui a pour aboutissement $\mathrm{Ext}^{p+q}_+(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ en degré $p + q$. De même, on a une suite spectrale dont le terme E_1 est donné par

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad p < 0 \\ \oplus_i \mathrm{Ext}^{p+q}(gr_i(\mathrm{E}), gr_{i-p}(\mathrm{E})) \quad \text{si} \quad p \geq 0 \end{cases}$$

et d'aboutissement $\mathrm{Ext}^{p+q}_-(\mathrm{E}, \mathrm{E})$ en degré $p + q$.

Proposition 7.4. — *Soit* E *un faisceau localement libre sur une courbe algébrique projective lisse* X *de genre* g, *muni de sa filtration de Harder-Narasimhan. On désigne par* r_i *et* μ_i *le rang et la pente du gradué de Harder-Narasimhan. Alors*

$$\mathrm{Ext}^0_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = 0$$

et

$$\dim \mathrm{Ext}^1_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = \sum_{i<j} r_i r_j (\mu_i - \mu_j + g - 1)$$

Démonstration. On a $\mathrm{Hom}(gr_i(\mathrm{E}), gr_j(\mathrm{E})) = 0$ pour $i < j$. Par suite, dans la première des suites spectrales ci-dessus, $\mathrm{E}_1^{p,q} = 0$ si $p + q = 0$. Il en résulte que la suite spectrale ci-dessus dégénère, et

$$\dim \mathrm{Ext}^1_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = \sum_{i<j} \dim \mathrm{Ext}^1(gr_i(\mathrm{E}), gr_j(\mathrm{E}))$$

Ce dernier terme se calcule par la formule de Riemann-Roch. D'où l'énoncé.
□

Proposition 7.5. — *Soit* E *un faisceau cohérent de rang* r *sans torsion sur le plan projectif* $\mathrm{X} = \mathbf{P}_2$, *muni de sa filtration de Harder-Narasimhan. On désigne par* (r_i, μ_i, Δ_i) *le rang, la pente et le discriminant de* $gr_i(\mathrm{E})$. *On suppose que* $\mu_{max}(\mathrm{E}) - \mu_{min}(\mathrm{E}) < 3$. *Alors*

$$\mathrm{Ext}^0_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = \mathrm{Ext}^2_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = 0$$

$$\dim \mathrm{Ext}^1_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = \sum_{i<j} r_i r_j (\Delta_i + \Delta_j - \mathrm{P}(\mu_j - \mu_i))$$

où P *est le polynôme de Hilbert du fibré trivial de rang 1 sur* $\mathbf{P}_2$.

Démonstration. C'est encore la première des suites spectrales ci-dessus. Evidemment, si $i < j$ on a $\mathrm{Hom}(gr_i(\mathrm{E}), gr_j(\mathrm{E})) = 0$, donc $\mathrm{E}_1^{p,q} = 0$ si $p + q = 0$. D'autre part, par le théorème de dualité de Serre pour les Ext, l'hypothèse de la proposition entraîne que $\mathrm{Ext}^2(gr_i(\mathrm{E}), gr_j(\mathrm{E})) = 0$ pour $i < j$. Ceci entraîne que dans la suite spectrale tous les termes $\mathrm{E}_1^{p,q}$ sont nuls si $p + q \neq 1$. Par suite $\dim \mathrm{Ext}^1_+(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = \sum_{i<j} \dim \mathrm{Ext}^1(gr_i(\mathrm{E}), gr_j(\mathrm{E}))$. Le calcul de ce dernier terme peut s'obtenir par le théorème de Riemann-Roch :

Lemme 7.6. — *Soient* F′ *et* F″ *deux faisceaux algébriques cohérents de rang* r' *et* r'', *de pente* μ' *et* μ'', *de discriminant* Δ' *et* Δ'' *respectivement sur le plan projectif. On pose*

$$\chi(\mathrm{F}', \mathrm{F}'') = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Ext}^i(\mathrm{F}', \mathrm{F}'')$$

Alors, P *désignant le polynôme de Hilbert du fibré trivial de rang 1 sur* $\mathbf{P}_2$:

$$\chi(\mathrm{F}', \mathrm{F}'') = r' r'' (\mathrm{P}(\mu'' - \mu') - \Delta' - \Delta'').$$

Démonstration. D'après le paragraphe 4, la formule est vraie si F' est localement libre : c'est la formule de Riemann-Roch appliquée au faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(F', F'')$. Lorsque F' n'est pas localement libre, on se ramène à cette situation en utilisant les propriétés évidentes d'additivité et en choisissant une résolution gauche finie de F' par des faisceaux localement libres. □

Le schéma de drapeaux relatif

Considérons maintenant une variété algébrique $Y \to S$ projective au-dessus d'une variété algébrique S et un faisceau algébrique cohérent E plat au-dessus de S. Soient P_i des polynômes ; on considère pour toute variété algébrique $S' \to S$ le foncteur qui associe à S' l'ensemble des drapeaux

$$0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_\ell = E_{S'}$$

de sous-faisceaux cohérents satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) le gradué associé gr_i est un faisceau S'−plat ;

(ii) pour tout $s \in S'$, le faisceau $gr_{i,s}$ induit sur la fibre Y_s est de polynôme de Hilbert P_i.

Ce foncteur est représentable par une variété algébrique projective au-dessus de S

$$\mathbf{Drap}(E/S; P_1, \ldots, P_\ell) \xrightarrow{\pi} S.$$

La fibre au-dessus d'un point s est le schéma absolu des drapeaux de E_s, dont le gradué associé gr_i a P_i pour polynôme de Hilbert. L'espace tangent vertical en un point correspondant à une filtration F de E_s s'identifie à l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^0_+(E_s, E_s)$ associé à cette filtration.

Dans la proposition qui suit, on se place dans l'hypothèse $Y = S \times X$, où X est une variété projective, de façon à ce que le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer ait un sens. Il généralise la proposition 7.2, qui correspond au cas $\ell = 2$:

Proposition 7.7. — *Soit $t = (s, (F_1, \ldots, F_\ell))$ un point du schéma de Hilbert des drapeaux $\mathbf{Drap}(E/S; P_1, \ldots, P_\ell)$. Le faisceau E_s étant muni de cette filtration, on a une suite exacte naturelle*

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_+(E_s, E_s) \to T_t\mathbf{Drap}(E/S; P_1, \ldots, P_\ell) \xrightarrow{T_t\pi} T_sS \xrightarrow{\omega_+} \mathrm{Ext}^1_+(E_s, E_s)$$

où le morphisme ω_+ est le morphisme composé

$$\begin{array}{ccc} T_sS & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Ext}^1(E_s, E_s) \\ & \omega_+ \searrow & \downarrow \mathrm{can} \\ & & \mathrm{Ext}^1_+(E_s, E_s) \end{array}$$

On va appliquer cette suite exacte pour calculer la codimension des strates de Shatz. Donnons d'abord un critère permettant d'affirmer que certains schémas de drapeaux introduits sont lisses ; cela permettra de trouver des conditions pour que les strates de Shatz soient lisses, et de déterminer la dimension exacte des strates. On peut si on veut éviter le recours à ce critère dans la suite, mais alors on obtient seulement une majoration pour la dimension des strates. Ce critère est démontré dans [5] ; il repose sur le critère habituel de Grothendieck déjà utilisé, généralisé aux schémas de drapeaux, qui permet de décider que certains schémas de Hilbert sont lisses :

Proposition 7.8. — *On garde les notations de la proposition 7.7. On suppose que* S *est lisse, et que les conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) *on a* $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{E}_s, \mathrm{E}_s) = 0$
(ii) *le morphisme* ω_+ *associé au drapeau* $(\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_\ell)$ *de* E_s *est surjectif.*

Alors le schéma $\mathbf{Drap}(\mathrm{E}/\mathrm{S}, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\ell)$ *est lisse au voisinage du point* $(s, (\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_\ell))$.

Dans le cas des courbes, on obtientle corollaire suivant dont l'idée est essentiellement due à Atiyah et Bott [1] .

Corollaire 7.9. — *Considérons une courbe projective* X *et une famille complète de fibrés vectoriels* E_s *paramétrée par une variété lisse* S. *Soient* ℓ *un entier,* $r_i > 0$ *et* d_i *des entiers ; posons*

$$\mu_i = \frac{d_i}{r_i}.$$

S'il en existe, les points $s \in \mathrm{S}$ *tels que la filtration de Harder-Narasimhan soit de longueur* ℓ *et tels que pour* $i = 1, \ldots, \ell$ *le gradué de Harder-Narasimhan* $gr_i(\mathrm{E}_s)$ *de* E_s *soit de rang* r_i *et degré* d_i *constituent une sous-variété localement fermée lisse de codimension*

$$\sum_{i<j} r_i r_j (\mu_i - \mu_j + g - 1).$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ la ligne polygonale définie par les entiers r_i et d_i ; on peut la supposer concave. On a déjà vu que les points $s \in \mathrm{S}$ tels que la ligne polygonale $\mathfrak{p}_\mathrm{F}$ associée à la filtration de Harder-Narasimhan F de

E_s est $> \mathfrak{p}$ est un ensemble $S_{\mathfrak{p}}$ fermé ; soit S' l'ouvert complémentaire. Alors l'image du morphisme induit

$$\pi : \mathbf{Drap}(E/S'; P_1, \ldots, P_\ell) \to S'$$

est exactement $S_{\mathfrak{p}}$. Les hypothèse de la proposition 7.8 sont satisfaites : cette variété des drapeaux est lisse, et le morphisme π est propre, injectif et non ramifié, et par suite $S_{\mathfrak{p}}$ est elle-même une sous-variété fermée lisse de S' ; son espace normal en un point s'identifie d'après la suite exacte ci-dessus à l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_+(E_s, E_s)$ associé à la filtration de Harder-Narasimhan de E_s.

Exemple

Un fibré vectoriel F sur $X = \mathbf{P}_1$ est dit rigide (resp. quasi-rigide) si $\mu_{max}(F) - \mu_{min}(F) \leq 1$ (resp. ≤ 2) ; ceci signifie aussi que $\mathrm{Ext}^1(F, F) = 0$. Si on considère une famille complète de fibrés vectoriels $E_s \to X$ de rang r et degré d paramétrée par une variété lisse S, le corollaire ci-dessus entraîne en particulier que

(1) les points $s \in S$ tels que F_s ne soit pas rigide constituent un fermé de codimension 1 si $d = 0 \bmod r$ et de codimension ≥ 2 si $d \neq 0 \bmod r$.

(2) les points $s \in S$ tels que F_s ne soit pas quasi-rigide constituent un fermé de codimension ≥ 2.

Corollaire 7.10. — *Considérons une famille complète de faisceaux cohérents sans torsion F_s sur le plan projectif, paramétrée par une variété algébrique lisse S et satisfaisant à la condition suivante*

$$\text{(P)} \qquad \text{Pour tout } s \in S,\ \mathrm{Ext}^2(F_s, F_s(-1)) = 0$$

Alors l'ensemble des points $s \in S$ tels que $\mu_{max}(F_s) - \mu_{min}(F_s) > 2$ constituent un fermé de S de codimension ≥ 2.

Démonstration. Soit d une droite de $\mathbf{P}_2$. Considérons l'ouvert $S_d \subset S$ corespondant aux faisceaux F_s tels que F_s soit non singulier sur d. On obtient ainsi une famille $F_s|_d$ de fibrés sur la droite d et cette famille est encore complète : en effet, le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer n'est autre que l'application linéaire composée

$$T_sS \to \mathrm{Ext}^1(F_s, F_s) \to \mathrm{Ext}^1_d(F_s|_d, F_s|d)$$

où la première flèche est surjective du fait que la famille est complète, et la seconde le morphisme de restriction : pour vérifier que ce morphisme de

restriction est surjectif, il suffit d'écrire la suite exacte longue dérivée de la suite exacte

$$0 \to \mathrm{F}_s(-1) \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}_s|_d \to 0$$

à laquelle on applique le foncteur $\mathrm{Hom}(\mathrm{F}_s, -)$. Il suffit de constater que $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s(-1)) = 0$ ce qui est l'hypothèse (P). On peut alors appliquer à cette famille les conclusions de l'exemple ci-dessus. Puisque les ouverts S_d recouvrent évidemment S, on obtient en particulier que les points $s \in \mathrm{S}$ tels que $\mu_{max}(\mathrm{F}_s) - \mu_{min}(\mathrm{F}_s) \leq 2$ constituent un fermé de S de codimension ≥ 2.

Exemple

L'hypothèse (P) est satisfaite en particulier pour une famille de faisceaux semi-stables, en raison du théorème de dualité de Serre.

Corollaire 7.11. — *On considère une famille complète de faisceaux algébriques cohérents sans torsion* F_s *sur le plan projectif, paramétrée par une variété lisse* S, *et on fait l'hypothèse supplémentaire suivante :*

$$\text{(R)} \qquad \mu_{max}(\mathrm{F}_s) - \mu_{min}(\mathrm{F}_s) < 3$$

Soit $\ell \geq 2$ *un entier, et* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\ell$ *des polynômes. Considérons l'ensemble* $\mathrm{S}(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\ell)$ *des point* $s \in \mathrm{S}$ *tels que la filtration de Harder-Narasimhan soit de longueur* ℓ *et que le gradué de Harder-Narasimhan* $gr_i(\mathrm{F}_s)$ *de* F_s *ait* P_i *pour polynôme de Hilbert pour* $i = 1, \ldots, \ell$ *; ceci détermine à partir de* P_i *le rang* r_i*, la pente* μ_i *et le discriminant* Δ_i *de* gr_i*. Alors si elle n'est pas vide,* $\mathrm{S}(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\ell)$ *est une sous-variété localement fermée lisse de codimension*

$$\sum_{i<j} r_i r_j (\Delta_i + \Delta_j - \mathrm{P}(\mu_j - \mu_i))$$

Démonstration. La preuve est quasiment identique à celle qui a été donnée dans le cas des courbes : la seule nouveauté est que l'on doit s'assurer que $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s) = 0$, et que le morphisme ω_+ qui figure dans la suite exacte 7.7 est surjective. Mais, compte-tenu de la proposition 7.5 il suffit de constater que les hypothèses entraînent, pour la filtration de Harder-Narasimhan $\mathrm{Ext}^2_-(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s) = 0$. On utilise pour ceci la suite spectrale dont le terme $\mathrm{E}_1^{p,q}$ est donné par

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \begin{cases} \oplus_i \mathrm{Ext}^{p+q}(gr_i(\mathrm{F}_s), gr_{i-p}(\mathrm{F}_s)) \text{ si } p \geq 0 \\ 0 \text{ si } p < 0 \end{cases}$$

et qui a pour aboutissement $\mathrm{Ext}_-^{p+q}(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s)$ en degré $p+q$. Il suffit donc de vérifier que pour $j \leq i$

$$\mathrm{Ext}^2(gr_i(\mathrm{F}_s), gr_j(\mathrm{F}_s)) = 0$$

ce qui résulte trivialement du théorème de dualité de Serre. L'hypothèse (R) permet d'appliquer la proposition 7.5 qui permet le calcul de la dimension de l'espace normal. □

Corollaire 7.12. — *Considérons une famille complète* F_s *de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert fixé sur le plan projectif, paramétrée par une variété algébrique lisse* S *de dimension* n. *Soit* Δ *le discriminant de ces faisceaux.*

Si $\Delta > \frac{1}{2}$, *les points* $s \in \mathrm{S}$ *tels que* F_s *soit stable constituent un ouvert dont le complémentaire est de codimension* ≥ 1.

Démonstration. On applique la proposition 7.7 au drapeau correspondant à une filtration de Jordan-Hölder de $\mathrm{E} = \mathrm{F}_s$. On a encore pour une telle filtration $\mathrm{Ext}^2(gr_i(\mathrm{E}), gr_j(\mathrm{E})) = 0$ pour tout (i,j). Donc la flèche ω_+ est surjective et on a

$$\dim \mathrm{Ext}_+^1(\mathrm{E}, \mathrm{E}) \geq -\sum_{i<j} \chi(gr_i(\mathrm{E}), gr_j(\mathrm{E})) = (2\Delta - 1) \sum_{i<j} r_i r_j$$

L'hypothèse $2\Delta > 1$ entraîne que l'application linéaire tangente ω_+ est de rang $< n$; donc l'image de π est un fermé de dimension $< n$. D'où l'énoncé. □

8. Les conditions d'existence

On répond ici à la question suivante : quelles sont les classes de Chern des faisceaux semi-stables sur le plan projectif ? Le théorème de Bogomolov donne une condition nécessaire : on doit avoir $\Delta \geq 0$. Mais cette condition n'est pas suffisante pour assurer l'existence de tels faisceaux : on a déjà vu par exemple pour $r = 2$, qu'il n'existe pas de faisceau semi-stable de classe de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$.

8.1. Fibrés exceptionnels

Proposition 8.1. — *Soit* F *un faisceau stable sur le plan projectif, de discriminant* Δ. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *Le faisceau* F *est rigide, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F},\mathrm{F}) = 0$$

(ii) $\Delta < \frac{1}{2}$
(iii) $\chi(\mathrm{F},\mathrm{F}) > 0$.

Démonstration. La dualité de Serre montre que $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F}) = 0$. Un fibré stable n'a pas d'autres endomorphismes que les homothéties. Donc

$$\chi(\mathrm{F},\mathrm{F}) = 1 - \dim \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F},\mathrm{F}) = r^2(1-2\Delta)$$

Ceci conduit à l'équivalence attendue. □

Définition 8.2. — *On appelle faisceau exceptionnel (resp. semi-exceptionnel) sur le plan projectif un faisceau stable (resp. semi-stable)* F *satisfaisant à l'une des conditions* (i), (ii), (iii).

Exemples
(i) Tous les fibrés inversibles sont exceptionnels.
(ii) Le noyau du morphisme d'évaluation

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(i)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(i)$$

est un fibré exceptionnel si et seulement si $i = 1$ ou $i = 2$. Pour $i = 1$ c'est le fibré $\mathrm{Q}^* \simeq \mathrm{T}(-2)$, de rang 2, et de classes de Chern $(-1, 2)$. Pour $i = 2$, c'est un fibré de rang 5, de classes de Chern $(-2, 4)$.

(iii) Si F est un faisceau exceptionnel, le fibré $\mathrm{F}(i)$ est encore exceptionnel.

Proposition 8.3. — *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{Q}$, *il existe au plus un faisceau exceptionnel de pente* α. *Ce faisceau est localement libre. Son rang* r *est le plus petit entier* > 0 *tel que* $r\alpha \in \mathbb{Z}$; *son discriminant* Δ *est donné par la formule*

$$\Delta = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r^2})$$

Démonstration. Soit (r, c_1, c_2) le rang et les classes de Chern d'un faisceau exceptionnel F. On a alors

$$\chi(\mathrm{F},\mathrm{F}) = 1 = r^2 - 2rc_2 + (r-1)c_1^2 = r^2(1-2\Delta)$$

et par suite les entiers r et c_1 sont premiers entre eux. Ainsi, r et c_1 sont déterminés par la pente $\alpha = \frac{c_1}{r}$, et le discriminant Δ se calcule à partir du rang . Si F′ est un autre faisceau exceptionnel de même pente α, alors F et F′ ont mêmes classes de Chern, et alors $\chi(\mathrm{F},\mathrm{F}') = 1$. On a alors $\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F},\mathrm{F}') = 0$ et par suite $\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F}') \neq 0$; la propriété de stabilité entraîne $\mathrm{F} \simeq \mathrm{F}'$. En particulier, si $g \in \mathrm{Aut}(\mathbf{P}_2)$ le faisceau $g^*(\mathrm{F})$ est encore un faisceau exceptionnel de même pente, donc isomorphe à F. Par suite, le faisceau $g^*(\mathrm{F})$ est isomorphe à F. Ainsi, le faisceau F est invariant sous l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}_2)$, donc localement libre. □

Corollaire 8.4. — *Le dual d'un fibré exceptionnel est un fibré exceptionnel.*

Remarquons que si F est un fibré exceptionnel, il n'existe pas de faisceau semi-stable et non stable de même classes de Chern que F. Ainsi :

Corollaire 8.5. — *S'il existe un fibré exceptionnel de rang r et classes de Chern c_1 et c_2, l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$ est réduit à un point.*

Corollaire 8.6. — *Un faisceau semi-exceptionnel de pente μ est somme directe de fibrés exceptionnels de pente μ.*

Démonstration. On considère une filtration de Jordan-Hölder de F. Alors, d'après la proposition 8.3 tous les gradués gr_i sont isomorphe à un fibré exceptionnel E_α. Alors $\mathrm{Ext}^1(gr_i, gr_j) = 0$, et donc la filtration de Jordan-Hölder est scindée. □

8.2. Le théorème d'existence [5]

On désigne par $\mathfrak{E}$ l'ensemble des nombres rationnels qui sont pente de fibrés exceptionnels. Cet ensemble est invariant par translation par les entiers, et par symétrie par rapport à l'origine. Pour $\alpha \in \mathfrak{E}$, on désigne par r_α et Δ_α le rang et le discriminant du fibré exceptionnel déterminé à isomorphisme près par α.

Théorème 8.7. — *Soient r un entier, μ et Δ deux nombres rationnels. Pour qu'il existe un faisceau stable de rang r, de pente μ et discriminant Δ sur le plan projectif, il est nécessaire et suffisant que les conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) $c_1 = r\mu \in \mathbb{Z}$; $\chi = r(\mathrm{P}(\mu) - \Delta) \in \mathbb{Z}$

(ii) *Pour tout $\alpha \in \mathfrak{E}$, tel que $r_\alpha < r$ et $|\mu - \alpha| < 3$ on a*

$$\text{(S)} \qquad \Delta + \Delta_\alpha \geq \mathrm{P}(-|\mu - \alpha|)$$

Remarque 8.8. — On va voir que les conditions (i) et (ii) sont en fait satisfaites pour les faisceaux semi-stables de pente μ et discriminant $\Delta \geq \frac{1}{2}$. La condition (ii) est en défaut pour les faisceaux semi-exceptionnels.

Démonstration.

Les conditions sont nécessaires :

La condition (i) exprime bien sûr que la classe de Chern c_1 et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ sont des entiers. Soit F un faisceau semi-stable de pente μ et discriminant Δ ; on se place sous l'une des hypothèse suivantes :

(a) $\Delta \geq \frac{1}{2}$

(b) le faisceau F est stable.

Pour tout $\alpha \in \mathfrak{E}$ tel que $|\mu - \alpha| < 3$ on a alors

$$\text{(S*)} \qquad \Delta + \Delta_\alpha \geq \mathrm{P}(-|\mu - \alpha|)$$

En effet, désignons par E_α un fibré exceptionnel de pente α. Si $0 < \alpha - \mu < 3$, la condition de semi-stabilité et le théorème de dualité de Serre imposent

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{E}_\alpha, \mathrm{F}) = 0 \quad ; \quad \mathrm{Ext}^2(\mathrm{E}_\alpha, \mathrm{F}) = 0$$

Si $\mu = \alpha$, on a encore la même chose, car si $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}_\alpha, \mathrm{F}) \neq 0$ on aurait $\Delta_\alpha \geq \Delta$, et alors F serait somme directe de fibrés isomorphes à Δ_α, ce qui est exclus par l'une des hypothèses (a) ou (b). Par suite $\chi(\mathrm{E}_\alpha, \mathrm{F}) \leq 0$. On raisonne de même pour $0 < \mu - \alpha < 3$, en considérant $\chi(\mathrm{F}, \mathrm{E}_\alpha)$.

Les conditions sont suffisantes :

Le résultat est évident pour $r = 1$. On suppose donc que $r \geq 2$. On va en fait construire une famille de fibrés semi-stables.

(a) *Construction d'une grande famille de fibrés vectoriels*

L'hypothèse (i) assure que le polynôme $\mathrm{H}(i) = r(\mathrm{P}(\mu + i) - \Delta)$ (qui représentera le polynôme de Hilbert) est à coefficients entiers. La suite $i \mapsto \mathrm{H}(i) = r(\mathrm{P}(\mu + i) - \Delta)$ est croissante pour $\mu + i \geq -\frac{3}{2}$, et ≤ 0 pour $-3 < \mu + i \leq 0$, d'après la condition (ii). Ceci entraîne que si on considère le premier entier m tel que $\mathrm{H}(m) > 0$, on aura $\mathrm{H}(m-1) \leq 0$ et $\mathrm{H}(m-2) \leq 0$. On pose $\mathrm{N}_0 = \mathrm{H}(m)$; $\mathrm{N}_1 = -\mathrm{H}(m-1)$; $\mathrm{N}_2 = -\mathrm{H}(m-2)$ et on considère la famille des morphismes de fibrés vectoriels

$$s : \mathscr{V} = \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(-1)^{\mathrm{N}_2} \to \mathscr{W} = (\mathrm{Q}^*)^{\mathrm{N}_1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}^{\mathrm{N}_1}$$

Cette famille est paramétrée par l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$. La différence des rangs des fibrés vectoriels $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ est $\mathrm{H}(m) - 2\mathrm{H}(m-1) + \mathrm{H}(m-2) = r$, et le fibré des homomorphismes $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ est engendré par ses sections. Par une variante du théorème de Bertini-Sard, on voit que le fermé des morphismes s qui ne sont pas injectifs en au moins un point de $\mathbf{P}_2$ est de codimension $r-1$. Soit S l'ouvert complémentaire. Pour $s \in \mathrm{S}$, le faisceau conoyau G_s de s est un faisceau localement libre, dont le polynôme de Hilbert est $\mathrm{H}(m+i)$. Par suite, la famille de faisceaux localement libres $\mathrm{F}_s = \mathrm{G}_s(-m)$, paramétrée par S a H pour polynôme de Hilbert : ainsi, ces fibrés vectoriels sont de rang r, de pente μ et discriminant Δ. Cette famille est évidemment complète et satisfait à la condition (P) du chapitre précédent.

(b) *Construction de fibrés vectoriels semi-stables*

Il s'agit d'enlever à la famille ci-dessus les fibrés qui ne sont pas semi-stables, et de vérifier que l'ouvert qui reste n'est pas vide. Il résulte du corollaire 7.10 qu'il existe un fermé $\Sigma \subset \mathrm{S}$ de codimension ≥ 2, en dehors duquel on a $\mu_{max}(\mathrm{F}_s) - \mu_{min}(\mathrm{F}_s) \leq 2$. Considérons, sur l'ouvert $\mathrm{S}' = \mathrm{S} - \Sigma$, les strates de Shatz, correspondant aux faisceaux $\mathrm{E} = \mathrm{F}_s$ dont la filtration de Harder-Narasimhan est de longueur $\ell \geq 2$ et dont le gradué gr_i a pour polynôme de Hilbert $r_i(\mathrm{P}(\mu_i + m) - \Delta_i)$. On sait d'après le corollaire 7.11 que ces strates sont de codimension

$$\sum_{i<j} r_i r_j (\Delta_i + \Delta_j - \mathrm{P}(\mu_j - \mu_i))$$

d'après le corollaire 7.11. Montrons que cette codimension est > 0 si $\ell > 1$. Chacun des termes dans cette somme est ≥ 0, et si cette somme était nulle, ceci entraînerait pour tout $i < j$, $\chi(gr_i, gr_j) = 0$, c'est-à-dire

$$\Delta_i + \Delta_j = \mathrm{P}(\mu_j - \mu_i)$$

Cette égalité entraînerait en particulier $\mathrm{P}(\mu_\ell - \mu_1) = \Delta_1 + \Delta_\ell \geq 0$ et donc en fait $0 \leq \mu_1 - \mu_\ell \leq 1$. Supposons $\mu_1 - \mu_\ell > 0$. Alors $\Delta_1 + \Delta_\ell < 1$, et donc soit Δ_1, soit $\Delta_\ell < \frac{1}{2}$. Si $\mu_1 = \mu_\ell$ on a encore $\Delta_1 < \Delta_\ell$ par définition de la filtration de Harder-Narasimhan. Dans les deux cas, l'un des faisceaux gr_1, gr_ℓ est semi-exceptionnel.

Supposons par exemple que gr_1 soit semi-exceptionnel. On aurait alors

$$\begin{aligned}\chi(gr_1, \mathrm{E}) =& \chi(gr_1, gr_1) + \sum_{j>1} \chi(gr_1, gr_j) \\ =& \chi(gr_1, gr_1) > 0\end{aligned}$$

Ceci signifie que $\Delta + \Delta_1 < \mathrm{P}(\mu - \mu_1)$ ce qui contredit la condition (ii). Dans le cas où c'est gr_ℓ qui est semi-exceptionnel, on obtient à nouveau une contradiction en étudiant $\chi(\mathrm{F}, gr_\ell)$.

(c) *Construction de fibrés stables*

Si $\Delta < \frac{1}{2}$, on sait que le faisceau F_s est obligatoirement semi-exceptionnel. Mais alors si F_s n'est pas stable, ceci contredit la condtion (ii).

Si $\Delta > \frac{1}{2}$, on applique le corollaire 7.12 à la famille complète de fibrés semi-stables ci-dessus $(\mathrm{F}_s)_{s \in \mathrm{S}''}$ construite ci-dessus, qui nous reste après avoir enlevé à S' les strates de Shatz de codimension > 0. Ce corollaire donne l'existence de fibrés stables.

Le cas $\Delta = \frac{1}{2}$ est exclus à partir de la condition (S^*) : il n'existe pas de faisceau semi-stable de discriminant $\frac{1}{2}$. Mais établir ce résultat nécessite une étude arithmétique soignée de $\mathfrak{E}$.

8.3. Description de $\mathfrak{E}$

Définition 8.9. — *Etant donné un rationnel α, on appelle rang r_α de α le plus entier $r > 0$ tel que $r\alpha$ soit entier ; les nombres rationnels*

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r_\alpha^2}) \quad ; \quad \chi_\alpha = r_\alpha(\mathrm{P}(\alpha) - \Delta_\alpha)$$

seront appelés respectivement discriminant et caractéristique de α.

Etant donnés deux nombres rationnels $\alpha \in \mathfrak{E}$ et $\beta \in \mathfrak{E}$ tels que $0 < \beta - \alpha < 3$, le discriminant Δ d'un nombre $t \in \mathfrak{E}$ tels que $\alpha < t < \beta$ vérifie les conditions suivantes :

$$\Delta \geq \mathrm{P}(\alpha - t) - \Delta_\alpha \quad ; \quad \Delta \geq \mathrm{P}(t - \beta) - \Delta_\beta$$

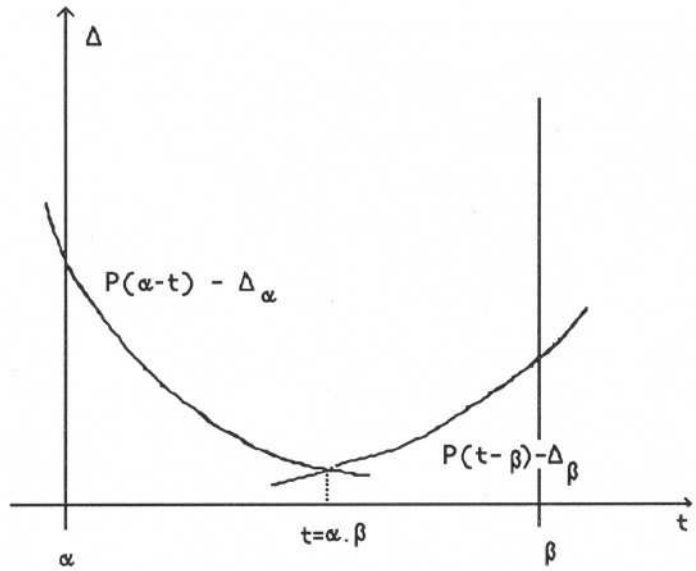
Considérons le point d'intersection des paraboles d'équation

$$\Delta = \mathrm{P}(\alpha - t) - \Delta_\alpha \quad \text{et } \Delta = \mathrm{P}(t - \beta) - \Delta_\beta$$

dont l'abscisse est donnée par

$$t = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\Delta_\beta - \Delta_\alpha}{3 + \alpha - \beta}.$$

Cette unique solution sera notée $\alpha.\beta$.



Définition 8.10. — *Un couple de nombres rationnels (α, β) est dit admissible si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} 0 < \beta - \alpha < 3 \\ \mathrm{P}(\alpha - \beta) = \Delta_\alpha + \Delta_\beta \\ \chi_\alpha \in \mathbb{Z} \quad ; \quad \chi_\beta \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Par exemple $(0, 1)$ et $(0, 2)$ sont des couples admissibles.

Proposition 8.11. —
Soit (α, β) est un couple admissible de nombres rationnels. Alors
(i) $\alpha < \alpha.\beta < \beta$
(ii) *le rationnel $\alpha.\beta$ est de rang $r_{\alpha.\beta} = r_\alpha r_\beta (3 + \alpha - \beta)$*
(iii) *les couples $(\alpha, \alpha.\beta)$ et $(\alpha.\beta, \beta)$ sont admissibles.*

Cette proposition, dont la vérification est un calcul arithmétique tout à fait élémentaire va nous permettre de construire l'ensemble $\mathfrak{E}$. On considère pour ceci l'ensemble $\mathfrak{D}$ des nombres de la forme $\frac{p}{2^q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, et on construit une application croissante

$$\epsilon : \mathfrak{D} \to \mathbb{Q}$$

par récurrence sur q, en posant

$$\begin{cases} \epsilon(n) = n \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z} \\ \epsilon(\frac{2p+1}{2^{q+1}}) = \epsilon(\frac{p}{2^q}).\epsilon(\frac{p+1}{2^q}) \end{cases}$$

L'application ϵ est bien définie et strictement croissante ; il résulte de la proposition précédente que la paire $(\epsilon(\frac{p}{2^q}), \epsilon(\frac{p+1}{2^q}))$ est admissible. En particulier, $\epsilon(\frac{p}{2^q})$ est de caractéristique entière, et si p est impair, son rang est $\geq 2^q$. On vérifie de plus que ϵ commute à aux translations par des entiers, et à la symétrie par rapport à 0. Ainsi, pour connaître ϵ, il suffit de le connaître sur $[0, \frac{1}{2}]$. Le calcul donne par exemple

$\frac{p}{2^q}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon(\frac{p}{2^q})$	0	$\frac{5}{13}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{29}$	$\frac{1}{2}$

Théorème 8.12. — *L'ensemble $\mathfrak{E}$ est l'image de $\mathfrak{D}$ par l'application ϵ définie ci-dessus.*

Les fibrés exceptionnels sont ainsi parfaitement déterminés à isomorphisme près.

Démonstration. (1) Montrons l'inclusion $\epsilon(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{E}$. On raisonne par récurrence sur q. Posons $\alpha = \epsilon(\frac{p}{2^q})$ et $\beta = \epsilon(\frac{p+1}{2^q})$. Par hypothèse de récurrence, ces éléments appartiennent à $\mathfrak{E}$. Montrons que $\mu = \alpha.\beta$ est la pente d'un fibré stable : il suffit de vérifier les conditions (i) et (ii) du théorème d'existence 8.7. Les conditions d'intégralité ont déjà été vues. Il reste seulement à vérifier les inégalités (ii) : elles concernent les $\alpha' \in \mathfrak{E}$ tels que $|\mu - \alpha'| < 3$, et telles que $r_{\alpha'} < r_\mu$. Elles sont évidentes pour si $\alpha' = \alpha$ ou β. Si $\alpha < \alpha' < \beta$, on a $\Delta_{\alpha'} \geq \Delta_\mu$ d'où il résulte $r_{\alpha'} \geq \rho_\mu$. On doit donc seulement vérifier les inégalités (ii) pour les $\alpha' \in \mathfrak{E}$ qui n'appartiennent pas à $[\alpha, \beta]$.

Supposons par exemple $\alpha' < \alpha$. Pour $t \leq \beta$ on a l'inégalité

$$\mathrm{P}(\alpha' - t) - \Delta_{\alpha'} \leq \mathrm{P}(\alpha - t) - \Delta_\alpha$$

En effet, cette inégalité est satisfaite au point $t = \beta$ du fait que le couple (α, β) est admissible, et des conditions nécessaires (S*) d'existence ; le reste découle du fait que la fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t-\alpha) - \mathrm{P}(t-\alpha')$ de dérivée $\alpha' - \alpha$ est décroissante. Puisque (α, μ) est un couple admissible, on obtient pour $t = \mu$ l'inégalité $\mathrm{P}(\alpha' - t) \leq \Delta_{\alpha'} + \Delta_\mu$ qui était attendue. L'étude pour $\alpha' > \beta$ est analogue.

(2) Montrons l'inclusion $\mathfrak{E} \subset \epsilon(\mathfrak{D})$. Soit $\mu \in \mathfrak{E}$; considérons un entier q tel que $r_\mu \leq 2^q$. Considérons l'ensemble $\mathfrak{D}_q \subset \mathfrak{D}$ des nombres rationnels de dénominateur 2^q. L'image de $\mathfrak{D}_q$ étant localement finie, on peut trouver un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\epsilon(\frac{p}{2^q}) \leq \mu < \epsilon(\frac{p+1}{2^q})$$

Supposons que l'on ait inégalité stricte. Alors $\epsilon(\frac{2p+1}{2^{q+1}})$ est de rang 2^{q+1}, et μ serait de rang supérieur à 2^{q+1}. Ceci contredit la définition de q. Ainsi, $\mu = \epsilon(\frac{p}{2^q})$ et $\mu \in \epsilon(\mathfrak{E})$. □

Remarque 8.13. — Les fibrés exceptionnels sont munis d'une action naturelle du groupe projectif $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}_2)$. On peut en donner une construction récurrente plus explicite, calquée sur la façon dont on a construit le fibré exceptionnel de pente $-\frac{2}{5}$, comme noyau du morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(i)) \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(i).$$

(*cf.* [2]).

8.4. La fonction $\mu \mapsto \delta(\mu)$

Pour écrire les conditions d'existence des fibrés stables de rang r et classes de Chern c_1, et c_2, énoncées dans le théorème 8.7 on a simplement un nombre fini d'inégalités à écrire, portant sur la pente μ et le discriminant Δ. On vérifie en fait, par un raisonnement analogue à celui qui a été vu ci-dessus qu'il suffit d'écrire les inégalités concernant les $\alpha \in \mathfrak{E}$ de rang $r_\alpha \leq \frac{r}{2}$ qui encadrent μ. Si on recherche seulement les faisceaux semi-stables non rigides, c'est-à-dire de discriminant $\Delta \geq \frac{1}{2}$, ces conditions sont équivalentes aux conditions S*. Si on introduit la fonction $\delta = \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ définie par

$$\delta(\mu) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{E} \\ |\mu - \alpha| < 3}} \mathrm{P}(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha$$

les conditions nécessaires et suffisantes d'existence des faisceaux stables non exceptionnels s'écrivent aussi

$$\Delta \geq \delta(\mu).$$

La fonction $\mu \mapsto \delta(\mu)$ est périodique de période 1. Considérons pour $\alpha \in \mathfrak{E}$ l'intervalle I_α de $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels μ tel que $\mathrm{P}(-|\alpha-\mu|)-\Delta_\alpha > \frac{1}{2}$. Une étude arithmétique élémentaire (*cf.* [3]) montre que les intervalles I_α sont disjoints, et recouvrent $\mathbb{Q}$. Sur l'intervalle I_α la fonction δ est aussi définie par

$$\delta(\mu) = \mathrm{P}(-|\alpha - \mu|) - \Delta_\alpha.$$

La courbe $\Delta = \delta(\mu)$ a l'allure suivante :

Il en résulte en particulier que $\delta(\mu) > \frac{1}{2}$.

Corollaire 8.14. — *Il n'y a pas de faisceau semi-stable sur* $\mathbf{P}_2$ *de discriminant* $\frac{1}{2}$.

9. L'irréductibilité.

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème 9.1. — *L'espace de modules* $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$ *des faisceaux semi-stables de rang* r, *de classes de Chern* c_1 *et* c_2 *est irréductible.*

On supposera $r > 1$; le cas $r = 1$ se ramène à l'étude du schéma de Hilbert des points de $\mathbf{P}_2$ et doit se traiter à part, même si on peut envisager pour le traiter une méthode voisine. La démonstration consiste dans un premier temps à montrer que l'ouvert des classes de faisceaux polystables localement libres est dense. Pour montrer que cet ouvert est irréductible, on projette sur une droite à partir d'un centre a, après éclatement de ce point, pour se ramener à l'étude de fibrés vectoriels sur $\mathbf{P}_1$. La démonstration que nous donnons ici est essentiellement la démonstration que donne Ellingsrud [7] pour les fibrés stables, dans le cas $c_1 \neq 0 \bmod r$; une simple variante permet de traiter le cas $c_1 = 0 \bmod r$. En raison du fait qu'il n'existe pas toujours de faisceau universel paramétré par $\mathbf{M}$, on aura besoin de travailler avec une famille paramétrée par un ouvert convenable du schéma de Hilbert.

Soit H le polynôme de Hilbert des faisceaux de rang r et de classes de Chern (c_1, c_2), et m un entier assez grand pour que les conditions du § 6.3 soient satisfaites ; en particulier, pour tout faisceau semi-stable F de polynôme de H :

(i) le faisceau $\mathrm{F}(m)$ est engendré par ses sections ;

(ii) on a $\mathrm{H}^q(\mathrm{F}(m)) = 0$ pour $q = 1$ et 2.

Considérons le fibré vectoriel $\mathrm{B} = \mathbb{C}^{\mathrm{H}(m)} \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(-m)$. Par construction, l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables est le quotient de Mumford d'un ouvert lisse et équidimensionnel $\mathrm{S} = \mathbf{Hilb}^{ss}(\mathrm{B}, \mathrm{H})$ du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B}, \mathrm{H})$, schéma de Hilbert des faisceaux cohérents, quotients de B, de polynôme de Hilbert H. Cet ouvert S paramètre une famille plate et complète F_s de faisceaux semi-stables, quotients de B. On se propose de montrer que cette variété S est irréductible ; il en résultera que l'espace de modules $\mathbf{M}$ est lui-même irréductible.

9.1. Densité des classes de faisceaux localement libres

Commençons par examiner les faisceaux singuliers en un point $a \in \mathbf{P}_2$ fixé.

Proposition 9.2. — *Soit $a \in \mathbf{P}_2$. L'ensemble des points $s \in \mathrm{S}$ tels que F_s soit singulier en a est, s'il n'est pas vide, de codimension $r+1$.*

Pour ceci on a besoin d'énoncer quelques faits concernant les variétés déterminantielles.

Variétés déterminantielles

Considérons sur une variété algébrique lisse Z et un morphisme de fibrés vectoriels sur Z de rang m et n respectivement

$$f : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$$

Considérons le sous-schéma Z^k de Z défini localement par l'idéal des mineurs d'ordre $m-k+1$, dont le fermé sous-jacent correspond aux points $x \in \mathrm{X}$ tels que $\dim \ker f(x) \geq k$. Cette suite de sous-schémas est décroissante. En un point $x \in \mathrm{Z}^k - \mathrm{Z}^{k+1}$ l'espace tangent de Zariski est le noyau de la différentielle naturelle, dite différentielle de Petri

$$d_x f : \mathrm{T}_x\mathrm{X} \to \mathrm{L}(\ker f(x), \operatorname{coker} f(x))$$

Cette différentielle se calcule de la manière suivante : on trivialise localement les fibrés $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ au voisinage de x, et on calcule la différentielle de l'expression de f dans les trivialisations choisies ; on compose alors avec l'inclusion $\ker f(x) \hookrightarrow \mathscr{V}_x$ et la projection $\mathscr{W}_x \to \operatorname{coker} f(x)$. L'application linéaire ainsi obtenue ne dépend pas des trivialisations choisies.

Lemme 9.3. — *Si la différentielle de Petri est surjective au point x, alors le sous-schéma Z^k est lisse de codimension $k(m-n+k)$ au voisinage de x.*

Démonstration de la proposition 9.2

Soit A le noyau de la projection $\mathscr{O}_\mathrm{S} \boxtimes \mathrm{B} \to \mathrm{F}$. C'est un faisceau localement libre, sur $\mathrm{S} \times \mathrm{X}$, et, par platitude, on a pour chaque point $s \in \mathrm{S}$ une suite exacte

$$0 \to \mathrm{A}_s \xrightarrow{j_s} \mathrm{B} \to \mathrm{F}_s \to 0$$

Considérons le morphisme induit au-dessus de $\mathrm{S} \times \{a\}$

$$s \mapsto j_s(a) : \mathrm{A}|\mathrm{S} \times \{a\} \to \mathscr{O}_\mathrm{S} \otimes \mathrm{B}(a).$$

Au-dessus de s, le conoyau de $j_s(a)$ s'identifie à la fibre vectorielle $\mathrm{F}_s(a)$ du faisceau F_s au point a. Le noyau $\ker j_s(a)$ est isomorphe à $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(\mathrm{F}_s, \mathbb{C})$, où Λ est l'anneau local de $\mathbf{P}_2$ au point a, et donc l'injectivité de $j_s(a)$ signifie que le faisceau F_s est non singulier au point a.

Lemme 9.4. — *La différentielle de Petri de j en $s \in \mathrm{S}$ s'identifie à l'application linéaire naturelle*

$$\mathrm{T}_s\mathrm{S} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{A}_s, \mathrm{F}_s) \to \mathrm{L}(\ker j_s(a), \mathrm{F}_s(a)).$$

Par conséquent, si on prouve que cette différentielle est surjective, on obtiendra que les strates associées sont lisses et ont la bonne codimension ; en particulier, le fermé des points s tels que F_s soit singulier en a est de codimension $r+1$, à moins qu'il ne soit vide. Pour obtenir la surjectivité, il suffit évidemment de vérifier que le lemme suivant :

Lemme 9.5. — *Le faisceau* $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{A}_s, \mathrm{F}_s)$ *est engendré par ses sections globales.*

Démonstration. Pour vérifier cette assertion, on considère la suite exacte de faisceaux sur X

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{B}, \mathrm{F}_s) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{A}_s, \mathrm{F}_s) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s) \to 0$$

Le choix de m impose que le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{B}, \mathrm{F}_s)$ est engendré par ses sections globales. Il suffit donc de vérifier que le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s)$ est lui-même engendré par ses sections globales, ce qui est évident parce que ce faisceau est de dimension 0 et que ses sections globales proviennent de $\mathrm{Hom}(\mathrm{A}_s, \mathrm{F}_s)$. Des relations entre Ext^1 globaux et $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ locaux, il résulte que l'on a une suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s) \to \mathrm{H}^0(\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s)) \to \mathrm{H}^2(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s))$$

On sait, d'après le choix de B, que $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{B}, \mathrm{F}_s) = 0$. Le morphisme de liaison

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{A}_s, \mathrm{F}_s) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s)$$

est donc surjectif. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{A}_s, \mathrm{F}_s) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^0(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{A}_s, \mathrm{F}_s)) & \to & \mathrm{H}^0(\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s)) \end{array}$$

montre que l'on est ramené à prouver que $\mathrm{H}^2(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s)) = 0$. Posons $\mathrm{E} = \mathrm{F}_s$, et considérons le bidual $\mathrm{G} = \mathrm{E}^{**}$ de E. C'est un faisceau localement libre qui est encore $\mu-$semi-stable. Le morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E}, \mathrm{E}) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}, \mathrm{G})$$

est injectif, et surjectif en dehors d'un nombre fini de points ; il induit un isomorphisme au niveau du H^2. Donc il suffit de vérifier que $H^2(\underline{\mathrm{Hom}}(G,G)) = 0$. Mais ceci s'identifie à $\mathrm{Ext}^2(G,G)$ et puisque G est $\mu-$semi-stable, il est nul par dualité de Serre.

Corollaire 9.6. — *L'ensemble des points $s \in S$ tels que F_s soit localement libre est un ouvert dont le complémentaire, s'il n'est pas vide, est de codimension $r-1$.*

Démonstration. Considérons le fermé Σ des paires $(s,a) \in S \times \mathbf{P}_2$ telles que le faisceau universel F soit singulier en (s,a). On suppose qu'il n'est pas vide. Considérons les projections

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{pr_2} & \mathbf{P}_2 \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

Au-dessus de $s \in S$, la fibre Σ_s représente les points singuliers de F_s, et le morphisme $\Sigma \to S$ est donc fini. Au-dessus de $\mathbf{P}_2$ les fibres sont non vides, deux à deux isomorphes, et de codimension $r+1$ dans S. Par suite, l'image de Σ dans S est de codimension $r-1$.

Corollaire 9.7. — *Si $r > 1$, dans l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}(r, c_1, c_2)$ l'ouvert des points qui représentent des faisceaux polystables et localement libres est dense.*

Démontration du lemme 9.4

L'identification de l'espace tangent en s au schéma de Hilbert peut s'obtenir de la manière suivante : sur un voisinage W de (s,x) on choisit un isomorphisme $\varphi : pr_2^*(A_s) \simeq A$ qui coïncide avec l'identité sur la fibre W_s au-dessus de $s \in S$; la différentielle partielle $\partial_1(j\varphi)$ induit un morphisme $T_sS \to H^0(W_s, \underline{\mathrm{Hom}}(A_s, F_s)$ indépendant de φ, et les morphismes de faisceaux obtenus se recollent quand on change l'ouvert W. Ainsi, on obtient l'isomorphisme $T_sS \simeq \mathrm{Hom}(A_s, F_s)$. En restriction au point a, la différentielle de Petri de $j(a)$ est par définition induite par la différentielle partielle $\partial_1(j\varphi)(s,a)$, ce qui implique évidemment le résultat annoncé. □

9.2. Restriction à un pinceau de droites

On suppose $r > 1$, et on considère l'ouvert S' de $\mathrm{S} = \mathbf{Hilb}^{ss}(\mathrm{B}, \mathrm{H})$ correspondant à des faisceaux localement libres. Cette famille de faisceaux satisfait à la condition (P)

$$\mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s(-1)) = 0$$

Si d est une droite, la famille $(\mathrm{F}_s|_d)_{s \in \mathrm{S}'}$ est complète, ce qui nous autorise à appliquer le corollaire 7.9. Ceci donne, suivant que $c_1 = 0 \bmod r$ ou non :

Proposition 9.8. — *Soit d une droite de $\mathbf{P}_2$. Alors le fermé des points $s \in \mathrm{S}$ tels que le fibré $\mathrm{F}_s|_d$ ne soit pas rigide est de codimension 2 si $c_1 \neq 0 \bmod r$, et de codimension 1 si $c_1 = 0 \bmod r$.*

On se fixe maintenant un pinceau $\mathbf{P}_1 \subset |\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(1)|$ de droites passant par un point a donné de $\mathbf{P}_2$. On obtient alors la conséquence suivante :

Corollaire 9.9. —

(i) *Si $c_1 \neq 0 \bmod r$, l'ouvert U de S' défini par les points $s \in \mathrm{S}'$, tels que le fibré $\mathrm{F}_s|_d$ soit rigide pour tout $d \in \mathbf{P}_1$ est dense dans S.*

(ii) *On suppose $c_1 = 0 \bmod r$. L'ouvert U de S' défini par les points $s \in \mathrm{S}'$ tels que $\mathrm{F}_s|_d$ soit quasi-rigide pour toute droite $d \in \mathbf{P}_1$, et rigide pour au moins une droite $d \in \mathbf{P}_1$ est dense dans S.*

Soit U l'ouvert défini dans le corollaire ci-dessus. On va montrer que les fibrés de la famille F_s pour $s \in \mathrm{U}$ ont une description simple.

Désignons par $\mathrm{D} \subset \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ la surface obtenue à partir de $\mathbf{P}_2$ par éclatement du point a, c'est-à-dire la "droite universelle " au-dessus de $\mathbf{P}_1$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D} & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{P}_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathbf{P}_1 & & \end{array}$$

L'image directe $\mathrm{V} = p_{1*}(p_2^*(\mathscr{O}(1))$ sur $\mathbf{P}_1$ est un fibré vectoriel de rang 2, isomorphe à $\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(1)$ et le fibré en droites projectives $\mathrm{P}(\mathrm{V})$ est isomorphe à D. Sur ce fibré en droites projectives, le fibré inversible tautologique $\mathscr{O}_{\mathrm{P}(\mathrm{V})}(1)$ s'identifie à l'image réciproque de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$ par la projection p_2. L'inclusion

$\mathrm{D} \hookrightarrow \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ induit un isomorphisme sur les groupes de Picard et par conséquent un isomorphisme

$$\mathbb{Z}^2 \simeq \mathrm{Pic}(\mathrm{D})$$

On note $\mathscr{O}(i,j)$ le fibré inversible associé au couple $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi, le diviseur exceptionnel e apparaît comme schéma des zéros de la section canonique du fibré inversible $\mathscr{O}(-1,1)$.

Lemme 9.10. — *Soit* $\mathrm{Y} = \mathrm{D} \times_{\mathbf{P}_1} \mathrm{D}$. *Considérons la diagonale* $\mathrm{D} \subset \mathrm{Y}$. *On a alors une résolution sur* Y

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(-e) \boxtimes \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(0,-1) \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{D}} \to 0$$

Démonstration. Soit V_{D} l'image réciproque de V par la projection $p_1 : \mathrm{D} \to \mathbf{P}_1$. Considérons la projection canonique $\mathrm{V}_{\mathrm{D}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(0,1)$; ce morphisme fournit, sur Y, un morphisme

$$\mathrm{V}_{\mathrm{D}}^* \boxtimes \mathrm{V}_{\mathrm{D}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(-1,1) \boxtimes \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(0,1)$$

A l'identité de V correspond une section canonique de $\mathscr{O}_{\mathrm{D}}(e) \boxtimes \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(0,1)$ dont le schéma des zéros est exactement la diagonale. □

On suppose désormais $-r < c_1 \leq 0$.

On peut toujours se ramener à ce cas en tensorisant par un fibré inversible convenable. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Y} & \xrightarrow{p_2} & \mathrm{D} \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{D} & \longrightarrow & \mathbf{P}_1 \end{array}$$

Pour $s \in \mathrm{U}$, on pose $\mathrm{E} = \mathrm{F}_s$, et on désigne par E_{D} l'image réciproque de E par la projection $p_2 : \mathrm{D} \to \mathbf{P}_2$. On a alors

$$p_{1*}(\mathrm{E}(-1)_{\mathrm{D}}) = 0 \quad ; \quad \mathrm{R}^1 p_{1*}(\mathrm{E}_{\mathrm{D}}) = 0$$

Par application du foncteur $- \otimes p_2^*(\mathrm{E}_{\mathrm{D}})$ puis du foncteur p_{1*} à la suite exacte du lemme ci-dessus, on obtient, compte-tenu du théorème de changement de base, une présentation de E_{D} comme extension :

$$0 \to p_1^*(p_{1*}(\mathrm{E}_{\mathrm{D}})) \to \mathrm{E}_{\mathrm{D}} \to \mathrm{R}^1 p_{1*}(\mathrm{E}(-1)_{\mathrm{D}}) \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(-e) \to 0$$

D'après le théorème de semi-continuité, le faisceau $\mathrm{K} = p_{1*}(\mathrm{E_D})$ est localement libre. Il en est de même du faisceau $\mathrm{L} = \mathrm{R}^1 p_{1*}(\mathrm{E_D}(-1))$ dans le cas $c_1 \neq 0 \bmod r$. Si $c_1 = 0 \bmod r$, ce dernier faisceau est de dimension 0. Le rang et le degré de ces faisceaux se calculent facilement en utilisant la caractéristique d'Euler-Poincaré : si on pose

$$n = -\mathrm{H}(-1) = c_2 - \frac{1}{2}c_1(c_1+1)$$

on obtient

	K	L
rang	$c_1 + r$	$-c_1$
degré	$-n$	$c_1 + n$

Quand s varie, on obtient un famille de faisceaux localement libres K_s, et une famille de faisceaux L_s encore localement libres, sauf si $c_1 = 0$, auquel cas ces faisceaux L_s sont de dimension 0.

Proposition 9.11. — *Les deux familles de faisceaux* K_s *et* L_s *ci-dessus sont complètes.*

Démonstration. Considérons un point $s \in \mathrm{U}$, et la suite exacte sur D

$$0 \to \mathrm{K}_s \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_\mathrm{D} \to \mathrm{E_D} \to \mathrm{L}_s \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_\mathrm{D}(-e) \to 0$$

On a évidemment $\mathrm{Ext}^q(\mathrm{K}_s \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_\mathrm{D}, \mathrm{L}_s \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_\mathrm{D}(-e)) = 0$ pour tout q, de sorte qu'avec les notations du chapitre 6 l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_-(\mathrm{E_D}, \mathrm{E_D})$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{E_D}, \mathrm{E_D})$. On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_s\mathrm{S} & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{E_D}, \mathrm{E_D}) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{K}_s, \mathrm{K}_s) \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathrm{L}_s, \mathrm{L}_s) \end{array}$$

dans lequel l'application linéaire ω désigne le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer. On a de plus

$$\mathrm{Ext}^2(\mathrm{L}_s \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}(-e), \mathrm{K}_s \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_\mathrm{D}) = 0,$$

ce qui implique que la flèche verticale est surjective. Notre famille de fibrés F_s de départ est complète et par image réciproque par $p_2 : \mathrm{D} \to \mathbf{P}_2$ elle

le reste. Ainsi, la famille de fibrés E_D obtenue sur D est encore complète, autrement dit la flèche de déformation infinitésimale ω est surjective. Les flèches composées $\omega_1 : T_sS \to \mathrm{Ext}^1(K_s, K_s)$ et $\omega_2 : T_sS \to \mathrm{Ext}^1(L_s, L_s)$ sont naturellement les morphismes de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer. Ces morphismes de déformation infinitésimale sont a fortiori surjectifs.

Fin de la démonstration du théorème 9.1

Cas $c_1 \neq 0$.

D'après le corollaire 7.9, il existe un ouvert partout dense $U' \subset U$ tel que pour $s \in U'$, les fibrés vectoriels K_s et L_s soient rigides. Puisque l'on connaît leur rang et leur degré, ces fibrés sont bien déterminés à isomorphisme près.

On se fixe de tels fibrés rigides, qu'on note encore K et L. On considère dans l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(L, K \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_D(e))$ qui paramètre les extensions

$$0 \to K \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_D \to G_w \to L_s \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_D(-e) \to 0$$

l'ouvert Ω défini par les points $w \in \mathrm{Ext}^1(L, K \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_D(e))$ qui fournissent des fibrés G_w satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) le fibré G_w est trivial sur le diviseur exceptionnel ;

(ii) ce fibré est l'image réciproque par p_2 d'un fibré semi-stable F_w sur $\mathbf{P}_2$.

Ces fibrés F_w sont évidemment de rang r, de classes de Chern c_1 et c_2 ; si m est l'entier défini dans l'introduction de ce chapitre, considérons la variété des repères R, constituée des paires (w, φ) formées d'un point $w \in \Omega$ et d'une trivialisation $\varphi : \mathbb{C}^{H(m)} \simeq H^0(F_w(m))$. La propriété universelle du schéma de Hilbert fournit un morphisme

$$f : R \to S$$

dont l'image contient l'ouvert U', d'après ce qui a été dit ci-dessus. L'ouvert Ω est évidemment irréductible, et par suite R est irréductible. Par conséquent U' est lui-même irréductible, et donc **M** est lui-même irréductible.

Cas $c_1 = 0$.

On peut alors comme ci-dessus trouver un ouvert partout dense $U' \subset U$ tel que K_s soit rigide, donc bien déterminé à isomorphisme près. Les faisceaux L_s sont de dimension 0 et de degré n ; un tel faisceau est isomorphe au conoyau d'un morphisme génériquement injectif

$$z : \mathbb{C}^n \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}(-1) \to \mathbb{C}^n \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_1}.$$

Réciproquement, on se fixe un tel faisceau rigide K et on considère l'ouvert Z des morphismes z ci-dessus, génériquement injectifs. En considérant le morphisme universel sur Z, on obtient sur $\mathrm{Z} \times \mathbf{P}_1$ un conoyau $\mathfrak{L}$ plat sur Z, qui induit au-dessus de chaque z le faisceau L_z. Considérons la première projection $p_1 : \mathrm{Z} \times \mathrm{D} \to \mathrm{Z}$, et le fibré vectoriel sur Z

$$\mathscr{W} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{p_1}(\mathfrak{L} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(-e), \mathrm{K} \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_{\mathrm{D}})$$

dont la fibre au-dessus de $z \in \mathrm{Z}$ est l'espace vectoriel qui paramètre les extensions sur D

$$0 \to \mathrm{K} \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_{\mathrm{D}} \to \mathrm{G}_w \to \mathrm{L}_z \otimes_{\mathbf{P}_1} \mathscr{O}_{\mathrm{D}}(-e) \to 0$$

Dès lors, on considère comme dans le cas $c_1 \neq 0$ l'ouvert $\Omega \subset \mathscr{W}$ des points $w \in \mathscr{W}$ tels que le faisceau G_w soit localement libre et satisfasse aux conditions (i) et (ii). Les variétés Z et Ω étant irréductibles, on peut terminer la démonstration exactement de la même manière que dans le cas $c_1 \neq 0$. □

Remarque 9.12. — Cette présentation est aussi très utile pour les questions de rationalité :

Théorème 9.13. — *(Hulek, Ellingsrud et Strømme, Maeda) L'espace de modules* $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(2, c_1, c_2)$ *est une variété rationnelle.*

C'est essentiellement la présentation ci-dessus qui permet de démontrer la rationalité dans le cas où $4c_2 - c_1^2 \neq 0 \bmod 8$ (Ellingsrud et Strømme [8]) ; en particulier elle permet de traiter le cas où c_1 est impair, étudié aussi par Hulek par d'autres méthodes. La démonstration est beaucoup plus délicate et fait appel à d'autres descriptions si $4c_2 - c_1^2 = 0 \bmod 8$: c'est le résultat de Maeda.

10. Le groupe de Picard

On considère l'espace de modules $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$ des classes de S−équivalence de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 sur le plan projectif. On désigne par μ la pente, et par Δ le discriminant de ces faisceaux. Si P est le polynôme de Hilbert du fibré trivial de rang 1, on pose comme au paragraphe 8.4

$$\delta(\mu) = \sup_{\substack{\alpha \in \mathfrak{C} \\ |\mu - \alpha| < 3}} \mathrm{P}(-|\mu - \alpha|) - \Delta_\alpha$$

L'espace de modules **M** est non vide et non réduit à un point si et seulement si $\Delta \geq \delta(\mu)$. Dans ce cas, cette variété de modules M est une variété projective irréductible de dimension $r^2(2\Delta - 1) + 1$, quotient de Mumford d'une variété lisse par l'action d'un groupe réductif : elle est normale. On se propose ici de montrer le théorème suivant [4] :

Théorème 10.1. — *(Drezet)*
(i) *Si $\Delta > \delta(\mu)$, le groupe de Picard de* **M** *est un groupe abélien libre à 2 générateurs.*
(ii) *Si $\Delta = \delta(\mu)$ le groupe de Picard est un groupe cyclique infini.*

La démonstration que nous donnons ici repose sur une version faible du théorème de Brill-Noether démontrée pour nous par Gottsche et Hirschowitz ; elle permet essentiellement de montrer que la famille de faisceaux semi-stables qui nous a permis d'établir le théorème d'existence fournit un gros ouvert de **M**.

10.1. Brill-Noether faible

On sait d'après le théorème de dualité de Serre que si $\mu > -3$, on a $\mathrm{H}^2(\mathrm{F}) = 0$ pour tout faisceau semi-stable F de rang r de classe de Chern c_1 et c_2.

Théorème 10.2. — *(Gottsche et Hirschowitz) On suppose $\mu > -3$ et on désigne par χ la caractéristique d'Euler-Poincaré.*
(i) *Si $\chi > 0$ (resp. < 0) le fermé de* **M** *défini par les classes des faisceaux semi-stables* F *satisfaisant à la condition* $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}) \neq 0$ *(resp.* $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}) \neq 0$*) est de codimension ≥ 2.*
(ii) *Si $\chi = 0$, le sous-schéma de* **M** *défini par la condition déterminantielle* $\mathrm{H}^1(\mathrm{F}) \neq 0$ *est, s'il n'est pas vide, une hypersurface intègre.*

Cette hypersurface est en fait un diviseur de Cartier. Plus généralement, un théorème de Drézet établit que l'espace de modules **M** est une variété localement factorielle, ce qui signifie que tout diviseur de Weil est un diviseur de Cartier [4] .

10.2. L'homomorphisme $\lambda_{\mathbf{M}} : \mathrm{K}(\mathbf{P}_2) \to \mathrm{Pic}(\mathbf{M})$

Si Y est une variété algébrique lisse, on désigne par K(Y) l'algèbre de Grothendieck des classes de faisceaux algébriques cohérents sur Y, ou ce qui

revient au même, des classes de fibrés vectoriels algébriques sur Y. Dans ce qui suit, on aura à considérer en particulier le groupe de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$: c'est un groupe abélien libre de rang 3 ; on obtient par exemple un isomorphisme

$$\mathrm{K}(\mathbf{P}_2) \simeq \mathbb{Z}^3$$

donné par le rang r, la classe de Chern c_1 et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ. Sur $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ on a une forme quadratique entière

$$u \mapsto \chi(u^2) = 2r\chi + c_1^2 - r^2$$

On désigne par $<,>$ la forme polaire associée. Visiblement cette forme quadratique a pour signature (2,1). On a aussi sur $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ une involution $u \mapsto u^*$ qui associe à la classe d'un fibré vectoriel celle de son dual ; cette involution laisse invariante la forme quadratique ci-dessus. La dimension de l'espace de modules est encore donnée par

$$\dim \mathbf{M}(r, c_1, c_2) = 1 - < c^*, c >$$

où $c \in \mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ est la classe des faisceaux semi-stables de rang r et de classe de Chern c_1 et c_2. Ainsi, les fibrés exceptionnels sont les fibrés stables dont la classe $c \in \mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ satisfait à la condition $< c^*, c >= 1$.

Considérons une variété algébrique S munie d'une action d'un groupe algébrique G, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S} \times \mathbf{P}_2 & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{P}_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathrm{S} & & \end{array}$$

Le groupe G agit naturellement sur $\mathrm{S} \times \mathbf{P}_2$. Soit F un G−faisceau algébrique cohérent sur $\mathrm{S} \times \mathbf{P}_2$, c'est-à-dire muni d'une action de G, et S−plat. On considère pour $u \in \mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ le G-faisceau inversible sur S

$$\lambda_{\mathrm{F}}(u) = \det p_{1!}(\mathrm{F}(u))$$

Dans cette formule, $\mathrm{F}(u)$ désigne la classe dans le groupe de Grothendieck $\mathrm{K}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S} \times \mathbf{P}_2)$ des classes de G−faisceaux algébriques cohérents le produit de la classe de F par l'image réciproque de u par la projection p_2. Le morphisme

$$p_{1!} : \mathrm{K}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S} \times \mathbf{P}_2) \to \mathrm{K}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$$

est le morphisme qui associe à la classe d'un G-faisceau algébrique cohérent $\mathscr{F}$ la classe de $\sum_q (-1)^q \mathrm{R}^q p_{1*}(\mathscr{F})$. On a ainsi obtenu un homorphisme de groupes

$$\mathrm{K}(\mathbf{P}_2) \to \mathrm{Pic}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$$

dans le groupe de Picard des fibrés inversibles sur S munis d'une action de G.

Lemme 10.3. —

(i) *La formation de* $\lambda_{\mathrm{F}}(u)$ *est compatible aux changements de base* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$.

(ii) *Etant donnée une suite exacte de* G*-faisceaux cohérents sur* $\mathrm{S} \times \mathbf{P}_2$ *plats sur* S

$$0 \to \mathrm{F}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}'' \to 0$$

on a dans $\mathrm{Pic}^{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$

$$\lambda_{\mathrm{F}}(u) = \lambda_{\mathrm{F}'}(u) \otimes \lambda_{\mathrm{F}''}(u)$$

(iii) *Si* A *est un* G*-fibré inversible sur* S, *on a*

$$\lambda_{\mathrm{F} \otimes p_1^*(\mathrm{A})}(u) = \lambda_{\mathrm{F}}(u) \otimes \mathrm{A}^{\otimes <c,u>}$$

On applique ceci au cas où S est l'ouvert $\mathbf{Hilb}^{ss}(\mathrm{B}, \mathrm{H})$ du schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B}, \mathrm{H})$, défini au § 6.3, muni de l'action du groupe algébrique $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathrm{B})$, qui nous a permis de construire $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2}(r, c_1, c_2)$. Cet ouvert est équipé d'un faisceau quotient universel F. On obtient pour chaque $u \in \mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ un G−fibré inversible $\lambda_{\mathrm{F}}(u)$ sur S, bien défini à isomorphisme près. On désigne par $\pi : \mathrm{S} \to \mathrm{M}$ la projection canonique.

Théorème 10.4. — *Si* $< c, u >= 0$, *le fibré inversible* $\lambda_{\mathrm{F}}(u)$ *provient d'un élément bien déterminé de* $\mathrm{Pic}(\mathbf{M})$, *noté* $\lambda_{\mathbf{M}}(u)$.

Cet élément est caractérisé par la propriété universelle suivante : pour toute famille F′ *de faisceaux semi-stables de rang* r, *de classes de Chern* c_1 *et* c_2, *paramétrée par une variété lisse* S′, *on a, si* $f_{\mathrm{F}'} : \mathrm{S}' \to \mathbf{M}$ *désigne le morphisme modulaire associé à* F′,

$$f_{\mathrm{F}'}^*(\lambda_{\mathbf{M}}(u)) = \lambda_{\mathrm{F}'}(u)$$

La démonstration repose sur un lemme de géométrie invariante, dû à Kempf, Drézet et Narasimhan [6] .

Lemme 10.5. — *Soit* G *un groupe algébrique agissant sur une variété algébrique* X, *et* $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un bon quotient de* X *par l'action de* G. *Le morphisme image réciproque*

$$\pi^* : \mathrm{Pic}(\mathrm{Y}) \to \mathrm{Pic}^{\mathrm{G}}(\mathrm{X})$$

est injectif et a pour image le groupe des classes de G*—fibrés inversibles* L *satisfaisant à la propriété suivante : pour tout point* $x \in \mathrm{X}$ *d'orbite fermée, le stabilisateur* G_x *de* x *agit trivialement sur la fibre* $\mathrm{L}(x)$ *de* L *au point* x.

Démonstration du théorème 10.4

Les points d'orbite fermée correspondent aux faisceaux F_s qui sont polystables, c'est-à-dire somme directe de faisceaux stables de même polynôme de Hilbert réduit. Un tel faisceau s'écrit

$$\mathrm{F}_s = \mathrm{F}_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{F}_\ell^{k_\ell}$$

où les F_i sont des faisceaux stables de même polynôme de Hilbert réduit, et deux à deux non isomorphes. En un tel point $s \in \mathrm{S}$, le stabilisateur $\mathrm{Stab}(s)$ du point s s'identifie au groupe produit $\mathrm{G}l(k_1) \times \ldots \times \mathrm{G}l(k_\ell)$; compte-tenu du lemme ci-dessus, on peut calculer l'action du stabilisateur sur la fibre en s, c'est-à-dire l'espace vectoriel $\lambda_{\mathrm{F}_s}(u)$: si on désigne par $c(\mathrm{F}_i)$ la classe de F_i dans $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ on constate qu'elle est donnée, pour $(g_1, \ldots, g_\ell) \in \mathrm{Stab}(s)$ par

$$(g_1, \ldots, g_\ell) \mapsto \prod_{i=1,\ldots,\ell} (\det g_i)^{<c(\mathrm{F}_i),u>}.$$

Or, dans $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$, le fait que F et F_i aient même polynôme de Hilbert réduit signifie que

$$\frac{c}{r} = \frac{c(\mathrm{F}_i)}{r_i}$$

où r_i désigne le rang de F_i. Par suite, l'hypothèse entraîne que l'action du stabilisateur est triviale. On obtient ainsi la construction de $\lambda_{\mathrm{M}}(u)$. La propriété universelle de ce fibré inversible résulte évidemment de la construction du morphisme modulaire $f_{\mathrm{F}'}$. □

Remarque 10.6. — L'énoncé 10.4 ci-dessus ne s'étend pas tel quel à d'autres surfaces algébriques : il faudrait imposer pour pouvoir construire le fibré inversible $\lambda_{\mathrm{M}}(u)$ des conditions plus restrictives à u [12] . Toutefois, on peut le construire sur l'ouvert des points stables. Ce phénomène permet

d'expliquer pourquoi certaines variétés de modules, par exemple sur une quadrique, sont normales, mais ne sont pas localement factorielles. Pour le plan projectif, ces variétés de modules sont localement factorielles [4] .

Désignons par $c^{\perp}$ le sous-groupe orthogonal de c dans $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$. On a ainsi obtenu un homomorphisme de groupes $u \mapsto \lambda_{\mathbf{M}}(u)$:

$$\lambda_{\mathbf{M}} : c^{\perp} \to \mathrm{Pic}(\mathbf{M})$$

Nous allons préciser au moyen de cet homomorphisme le théorème de Drézet.

Définition 10.7. — *Soit $c \in \mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$, de rang $r > 0$, de pente μ et discriminant Δ tel que $\Delta = \delta(\mu)$. On appelle fibré exceptionnel associé à c l'unique fibré exceptionnel, de pente $\alpha \in \mathfrak{E}$ dont la classe a dans $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ satisfait aux conditions suivantes*

$$-3 < \mu + \alpha < 0 \quad ; \quad < a, c >= 0$$

L'existence d'un tel fibré exceptionnel est garantie, par un passage au dual, et un éventuel twist par $\mathscr{O}(3)$, de la définition de δ ; l'unicité résulte de la description de δ donnée au chapitre 8.

L'énoncé suivant précise le théorème 10.1.

Théorème 10.8. — *Soit c la classe dans $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ des faisceaux algébriques cohérents de rang $r > 0$ et classes de Chern c_1 et c_2 ; on note μ la pente, et Δ le discriminant.*

(i) *Si $\Delta > \delta(\mu)$ l'homomorphisme $\lambda_{\mathbf{M}}$ ci-dessus est un isomorphisme.*

(ii) *Si $\Delta = \delta(\mu)$ l'homomorphisme $\lambda_{\mathbf{M}}$ est un épimorphisme dont le noyau est le sous-groupe engendré par la classe a du fibré exceptionnel associé à c.*

On rappelle que $< a^*, a >= 1$. Il en résulte, dans le cas (ii), que $c^{\perp}$ est somme directe du sous-groupe engendré par a et de l'orthogonal de a^* dans $c^{\perp}$; cet orthogonal est un groupe cyclique infini isomorphe au groupe quotient $c^{\perp}/(a)$. Ceci conduit à l'énoncé 10.1.

10.3. Codimension des strates de Shatz.

L'étude qui suit apporte un renseignement supplémentaire sur les strates de Shatz d'une famille plate et complète de faisceaux semi-stables sur le plan projectif dont le discriminant satisfait à l'inégalité

$$\Delta > \delta(\mu).$$

Lemme 10.9. — *Soit* F_s *une famille complète de faisceaux cohérents sans torsion sur le plan projectif, de rang* r*, de pente* μ*, de discriminant* Δ *paramétrée par une variété lisse* S *; on suppose que* $\Delta > \delta(\mu)$ *et que la condition* (P) *suivante est satisfaite pour tout* $s \in \mathrm{S}$:

$$\text{(P)} \qquad \mathrm{Ext}^1(\mathrm{F}_s, \mathrm{F}_s(-1)) = 0.$$

Alors le fermé des points $s \in \mathrm{S}$ *tels que* F_s *soit instable est de codimension* ≥ 2 *dans* S.

Démonstration. Il s'agit de montrer que les strates de Shatz sont de codimension ≥ 2. D'après le lemme 7.10, on sait qu'en dehors d'un fermé de codimension ≥ 2, on a la condition

$$\text{(R)} \qquad \mu_{max}(\mathrm{F}_s) - \mu_{min}(\mathrm{F}_s) < 3.$$

D'après le corollaire 7.11 il suffit de prouver si (R) est satisfaite pour F_s, et si F_s a une filtration de Harder-Narasimhan de longueur $\ell \geq 2$, on a, r_i, μ_i, Δ_i désignant respectivement le rang, la pente et le discriminant du gradué de Harder-Narasimhan $gr_i(\mathrm{F}_s)$

$$\sum_{i<j} r_i r_j (\Delta_i + \Delta_j - \mathrm{P}(\mu_j - \mu_i)) > 1.$$

Rappelons l'identité

$$\chi(gr_i, gr_j) = r_i r_j (\mathrm{P}(\mu_j - \mu_i) - \Delta_i - \Delta_j)$$

de sorte que la condition (R) entraîne que chacun des termes de la somme ci-dessus est ≥ 0. Supposons que la somme soit égale à 1. On va distinguer deux cas.

(a) Si $\chi(gr_1, gr_\ell) = 0$, le raisonnement fait au § 8.2 montre que $0 < \mu_1 - \mu_\ell \leq 1$ et que soit gr_1, soit gr_ℓ est semi-exceptionnel. Supposons par exemple gr_1 semi-exceptionnel. On aurait alors

$$\begin{aligned} \chi(gr_1, \mathrm{F}_s) =& \chi(gr_1, gr_1) + \sum_{i>1} \chi(gr_1, gr_i) \\ \geq& \chi(gr_1, gr_1) - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse $\Delta > \delta(\mu)$. On traite de la même façon le cas où c'est gr_ℓ qui est semi-exceptionnel, en étudiant $\chi(\mathrm{F}_s, gr_\ell)$.

(b) Si $\chi(gr_1, gr_\ell) = -1$, c'est-à-dire

$$\Delta_1 + \Delta_\ell = \frac{1}{r_1 r_\ell} + \mathrm{P}(\mu_1 - \mu_\ell)$$

Le calcul qu'on vient de faire montre que ni gr_1, ni gr_ℓ ne peuvent être semi-exceptionnels. Puisque le discriminant d'un faisceau semi-stable est $\neq \frac{1}{2}$ d'après le § 8.4 on a $r_1^2(2\Delta_1 - 1) \geq 1$; $r_\ell^2(2\Delta_\ell - 1) \geq 1$ et par suite

$$\frac{1}{r_1 r_\ell} + \mathrm{P}(\mu_\ell - \mu_1) \geq 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_\ell^2})$$

Ceci s'écrit encore

$$\mathrm{P}(\mu_\ell - \mu_1) - 1 \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_\ell})^2$$

Ceci entraîne, compte-tenu de la condition $0 \leq \mu_1 - \mu_\ell < 3$, $\mu_1 = \mu_\ell$ et $r_1 = r_\ell$. Mais l'inégalité ci-dessus ne pouvant être stricte, ceci implique

$$\Delta_1 = \Delta_\ell = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{r_1^2}).$$

Mais ceci contredit la définition de la filtration de Harder-Narasimhan. Ainsi, ni le cas (a), ni le cas (b) ne peuvent se produire. Ceci achève la démonstration. □

10.4. Le gros ouvert U

Quitte à tensoriser les faisceaux par un fibré inversible convenable, on peut supposer que les conditions suivantes sont satisfaites

$$\mu > 0 \; ; \mathrm{H}(-2) < 0 \; ; \; \mathrm{H}(-1) \geq 0$$

Ceci entraîne $\chi = \mathrm{H}(0) > 0$. On considère des espaces vectoriels $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1$ et K_2 de dimensions respectives $\mathrm{H}(0), \mathrm{H}(-1)$ et $-\mathrm{H}(-2)$. Soit $\mathrm{U} \subset \mathbf{M}$ l'ouvert des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables dont le gradué de Jordan-Hölder F satisfait aux conditions suivantes

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{F}) = 0 \quad ; \quad \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(-1)) = 0 \quad ; \quad \mathrm{H}^0(\mathrm{F}(-2)) = 0.$$

D'après l'énoncé de Gottsche et Hirschowitz, le complémentaire de cet ouvert est de codimension 2 si $\mathrm{H}(-1) \neq 0$. Si $\mathrm{H}(-1) = 0$, la variété déterminantielle

définie par $H^1(F(-1)) \neq 0$ est, si elle n'est pas vide, une hypersurface intègre. Pour un tel faisceau F, on a donc

$$h^1(F(-2) = -H(-2)\ ;\ h^0(F(-1)) = H(-1)\ ;\ h^0(F) = H(0)$$

Il résulte sans difficultés de la suite spectrale de Beilinson, qu'un tel faisceau F est le conoyau d'un morphisme de fibrés vectoriels

$$\mathscr{V} = K_2 \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(-1) \oplus K_1 \otimes Q^* \to \mathscr{W} = K_0 \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}$$

injectif en dehors d'un nombre fini de points. Cette famille de faisceaux aurait aussi pu servir pour montrer le théorème d'existence des faisceaux semi-stables.

Réciproquement, considérons la famille $\mathscr{M}$ des morphismes $s : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ injectifs sauf peut-être au-dessus d'un nombre fini de points. Dans l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{W})$ le complémentaire de cet ouvert est un fermé de codimension $r+1$. Le conoyau d'un tel morphisme s est alors un faisceau de profondeur ≥ 1 en tout point, dont l'ensemble singulier est de dimension 0 : il résulte d'un critère bien connu dû à Serre que ce faisceau $F_s = \mathrm{coker}\ s$ est sans torsion. Comme au paragraphe 8.2 cette famille de faisceaux sans torsion satisfait à la condition (P) et donc le complémentaire de l'ouvert $\mathscr{M}^{ss}$ des points s tels que F_s soit semi-stable est de codimension ≥ 2 si $\Delta > \delta(\mu)$, et de codimension ≥ 1 si $\Delta \geq \delta(\mu)$ d'après le § 10.3. Alors la propriété de module grossier fournit un morphisme

$$\pi : \mathscr{M}^{ss} \to U$$

équivariant sous l'action naturelle du groupe algébrique $G = \mathrm{Aut}(\mathscr{V}) \times \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$.

Lemme 10.10. — *Le morphisme π fait de l'ouvert* U *un bon quotient de $\mathscr{M}^{ss}$ sous l'action de* G.

La démonstration repose sur les propriétés de transitivité des bons quotients.

Lemme 10.11. — [15] *Soit* G *un groupe algébrique agissant sur une variété algébrique* X, *et* N *un sous-groupe distingué fermé. On considère un bon quotient $f : X \longrightarrow Y$ de* X *par* N, *et un morphisme* G*−équivariant $g : X \to Z$, lequel se factorise suivant le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Y} \\ & g \searrow & \downarrow h \\ & & \mathrm{Z} \end{array}$$

où h est $\mathrm{G/N}-$équivariant. Alors g est un bon quotient si et seulement si h est un bon quotient.

Démonstration du lemme 10.10

Commençons remarquer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathscr{V})$ contient comme sous-groupe distingué N le groupe des automorphismes de $\mathscr{V}$ qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & 1 \end{pmatrix}$$

avec $g \in \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_2 \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(-1), \mathrm{K}_1 \otimes \mathrm{Q}^*)$. Ce groupe agit proprement et librement sur $\mathscr{M}^{ss}$; il existe un quotient $\mathscr{M}^{ss} \to \mathscr{N}^{ss}$ qui est un fibré principal localement trivial de groupe structural N : la variété $\mathscr{N}^{ss}$ est constituée des paires (u, v) où $u : \mathrm{K}_1 \otimes \mathrm{Q}^* \to \mathrm{K}_0 \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}$ est un morphisme génériquement injectif, et $v : \mathrm{K}_2 \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(-1) \to \mathrm{coker}\ u$ un morphisme de faisceaux lui aussi génériquement injectif, telles que le conoyau de v soit semi-stable. Puisque la dimension de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{K}_2 \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2}(-1), \mathrm{coker}\ u)$$

reste constante quand u varie, la variété $\mathscr{N}^{ss}$ est un ouvert d'un fibré vectoriel au-dessus d'un ouvert de $\mathrm{Hom}(\mathrm{K}_1 \otimes \mathrm{Q}^*, \mathrm{K}_0 \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{P}_2})$. L'entier m étant choisi assez grand, comme au chapitre 9, considérons l'image réciproque V de U dans le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}(\mathrm{B}, \mathrm{H})$. Soit F le faisceau quotient universel sur $\mathrm{V} \times \mathbf{P}_2$; considérons le fibré des repères R des quadruplets $(s, (\kappa_2, \kappa_1, \kappa_0))$ où

$$\kappa_2 : \mathrm{K}_2 \simeq \mathrm{H}^1(\mathrm{F}_s(-2))\ ;\ \kappa_i : \mathrm{K}_i \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{F}_s(-i)) \text{ si } i = 0 \text{ et } i = 1$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R} & \xrightarrow{\sigma} & \mathscr{N}^{ss} \\ \rho \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \mathrm{V} & \xrightarrow{p_1} & \mathrm{U} \end{array}$$

dans lequel le morphisme σ est fourni par la propriété universelle évidente de la variété $\mathscr{N}^{ss}$. La variété R est munie d'une action de

$$\mathrm{G}l(\mathrm{H}(m)) \times \prod_i \mathrm{G}l(\mathrm{K}_i)$$

Le morphisme ρ est un fibré principal localement trivial de groupe structural $\prod_i \mathrm{G}l(\mathrm{K}_i)$. Le morphisme σ est lui aussi un fibré principal localement trivial de groupe structural $\mathrm{G}l(\mathrm{H}(m))$: ce sont donc de bons quotients. On sait que p_1 est un bon quotient, sous l'action de $\mathrm{G}l(\mathrm{H}(m))$; des propriétés de transitivité des bons quotients énoncées dans le lemme 10.11 ci-dessus, il résulte que p_2 est un bon quotient sous l'action de $\prod_i \mathrm{G}l(\mathrm{K}_i)$; en composant par la projection $\mathscr{M}^{ss} \to \mathscr{N}^{ss}$ on obtient en appliquant à nouveau le lemme 10.11 que π est un bon quotient sous l'action de G. □

10.5. Fin du calcul.

Une suite exacte

Considérons un groupe algébrique G agissant sur une variété algébrique X (intègre pour simplifier). On désigne par $\mathscr{O}^*(\mathrm{X})$ le groupe multiplicatif des fonctions régulières inversibles. Un morphisme croisé $\varphi : \mathrm{G} \to \mathscr{O}^*(\mathrm{X})$ est un morphisme de variétés $\varphi : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathbb{C}^*$ tel que pour $g, g' \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{X}$ on ait $\varphi(gg', x) = \varphi(g, g'x)\varphi(g', x)$. Un tel morphisme croisé φ est dit principal s'il existe $\psi \in \mathscr{O}^*(\mathrm{X})$ tel que pour $(g, x) \in \mathrm{G} \times \mathrm{X}$

$$\varphi(g, x) = \frac{\psi(gx)}{\psi(x)}.$$

On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathscr{O}^*(\mathrm{X})) \to \mathrm{Pic}^{\mathrm{G}}(\mathrm{X}) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{X})^{\mathrm{G}}$$

où $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathscr{O}^*(\mathrm{X}))$ est le quotient du groupe des morphismes croisés $\mathrm{G} \to \mathscr{O}^*(\mathrm{X})$ par le sous-groupe des morphismes croisés principaux, et $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})^{\mathrm{G}}$ le sous-groupe du groupe de Picard des éléments invariants sous l'action de G. Si $\mathscr{O}^*(\mathrm{X}) = \mathbb{C}^*$, le groupe des morphismes croisés s'identifie au groupe des caractères $\mathrm{G} \to \mathbb{C}^*$.

Le groupe $\mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}}(\mathscr{M}^{ss})$

Revenons à l'action du groupe $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathscr{V}) \times \mathrm{Aut}(\mathscr{W})$ sur la variété $\mathscr{M}$. Cette action se quotiente en une action du quotient $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\mathbb{C}^*$ de G par son centre.

Lemme 10.12. — *Soit* F *la famille universelle sur* $\mathscr{M} \times \mathbf{P}_2$, *paramétrée par* $\mathscr{M}$.

(i) *Le morphisme* $\lambda_{\mathrm{F}} : \mathrm{K}(\mathbf{P}_2) \to \mathrm{Pic}^{\mathrm{G}}(\mathscr{M})$ *est un épimorphisme si* $\mathrm{H}(-1) \neq 0$ *et un isomorphisme si* $\mathrm{H}(-1) \neq 0$.

(ii) *Cet homomorphisme induit un épimorphisme*

$$c^{\perp} \to \mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}}(\mathscr{M}).$$

Cet épimorphisme est un isomorphisme si $\mathrm{H}(-1) \neq 0$.

Démonstration.

On sait que $\mathscr{M}$ est le complémentaire dans un espace vectoriel d'un fermé de codimension ≥ 2, par conséquent

$$\mathscr{O}(\mathscr{M})^* = \mathbb{C}^* \quad ; \quad \mathrm{Pic}(\mathscr{M}) = 0.$$

Par conséquent le groupe $\mathrm{Pic}^{\mathrm{G}}(\mathscr{M})$ est isomorphe au groupe des caractères de G. La projection $\mathrm{G} \to \prod_{i=0,1,2} \mathrm{G}l(\mathrm{K}_i)$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Char}(\mathrm{G}) \simeq \prod_{i=0,1,2} \mathrm{Char}(\mathrm{G}l(\mathrm{K}_i))$$

et ce groupe des caractères est donc $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^3$ suivant que $\mathrm{H}(-1)$ est nul ou non. Quand K_i n'est pas nul, on prend pour générateur de $\mathrm{Char}(\mathrm{G}l(\mathrm{K}_i))$ le morphisme déterminant $\mathrm{G}l(\mathrm{K}_i) \to \mathbb{C}^*$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M} \times \mathbf{P}_2 & \xrightarrow{p_2} & \mathbf{P}_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathscr{M} & & \end{array}$$

Soit e_i la classe dans $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$ du fibré $\mathscr{O}(-i)$; ces classes constituent une base du groupe de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$. L'élément $p_{1*}(\mathrm{F}(e_i))$ est la classe dans $\mathrm{K}^{\mathrm{G}}\mathscr{M})$ du G−fibré vectoriel $\mathscr{M} \times \mathrm{K}_i$ pour $i = 0$ et $i = 1$; la classe de $p_{1*}(\mathrm{F}(u_2))$ est l'opposé de celle du G-fibré vectoriel $\mathscr{M} \times \mathrm{K}_2$. Il en résulte que le G−fibré inversible $\lambda_{\mathrm{F}}(u_i)$ est le fibré inversible qui provient du générateur de $\mathrm{Char}(\mathrm{G}l(\mathrm{K}_i))$ pour $i = 0$, et $i = 1$, et de l'opposé de ce générateur pour pour $i = 2$, via la projection $\mathrm{G} \to \mathrm{G}l(\mathrm{K}_i)$. Ceci implique l'assertion (i).

On a alors un diagramme commutatif commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}(\mathbf{P}_2) & \to & \mathrm{Char}(\mathrm{G}) \\ & {\scriptstyle (1)}\searrow & \downarrow {\scriptstyle (2)} \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

dans lequel la flèche (1) est donnée par $u \to < c, u >$ et la flèche verticale est induite par l'inclusion du centre $\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathrm{G}$. Ceci se vérifie immédiatement sur les éléments de la base e_i. Le noyau de (1) est par définition $c^\perp$ et le noyau de (2) est le groupe $\mathrm{Char}(\overline{\mathrm{G}})$. D'où l'énoncé. □

Démonstration du théorème 10.1

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}^{ss} & \hookrightarrow & \mathscr{M} \\ \pi \downarrow & & \\ \mathrm{U} & \hookrightarrow & \mathbf{M} \end{array}$$

De la propriété universelle de $\lambda_{\mathrm{M}}(u)$, il résulte que ce diagramme induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} c^\perp & & \xrightarrow{\lambda_{\mathrm{F}}} & & \mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}}(\mathscr{M}) \\ \lambda_{\mathrm{M}} \downarrow & & & & \downarrow (3) \\ \mathrm{Pic}(\mathbf{M}) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{Pic}(\mathrm{U}) & \xrightarrow{(4)} & \mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}}(\mathscr{M}^{ss}) \end{array}$$

On sait d'après le lemme précédent que le morphisme λ_{F} est surjectif, et le morphisme (3) est évidemment surjectif. De plus, le fait que U est un bon quotient de $\mathscr{M}^{ss}$ implique que la flèche (4) est injective. Il en résulte que (4) est un isomorphisme. Pour terminer la démonstration, on doit distinguer les cas $\Delta > \delta(\mu)$ et $\Delta = \delta(\mu)$.

Cas $\Delta > \delta(\mu)$

D'après le lemme 10.9 le complémentaire de $\mathscr{M}^{ss}$ est de codimension ≥ 2 dans $\mathscr{M}$. Il en résulte que le morphisme (3) est un isomorphisme.

(a) Si $\mathrm{H}(-1) \neq 0$, le morphisme λ_{F} est un isomorphisme. Il en est de même de ρ d'après le théorème 10.2. Par suite λ_{M} est un isomorphisme.

(b) Si $\mathrm{H}(-1) = 0$, la classe e_1 de $\mathscr{O}(-1)$ appartient à $c^\perp$; le noyau de λ_{F} est le sous-groupe engendré par e_1 . Le quotient $c^\perp/(e_1) \simeq \mathrm{Pic}(\mathrm{U})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Puisque e_1 appartient à $c^\perp$, on peut considérer inversible $\lambda_{\mathrm{M}}(-e_1)$. Ce fibré inversible est alors muni d'une section dont le schéma des zéros, non vide d'après le lemme qui suit, est justement l'hypersurface intègre complémentaire de U, définie par les classes des faisceaux E satisfaisant à la condition déterminantielle $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}(-1)) \neq 0$.

Lemme 10.13. — *On suppose* $\mu > 0$, et $\mathrm{H}(-1) = 0$ *et* $\Delta > \delta(\mu)$. *La sous-variété déterminantielle de* $\mathbf{M}$ *définie par la condition* $\mathrm{H}^1(\mathrm{E}(-1)) \neq 0$ *n'est pas vide.*

Il en résulte que l'élément $\lambda_{\mathrm{M}}(-e_1)$ de $\mathrm{Pic}(\mathbf{M})$, qui engendre le noyau de la flèche ρ n'est pas un élément de torsion. Ainsi λ_{M} induit un isomorphisme $\ker \lambda_{\mathrm{F}} \to \ker \rho$. Par suite λ_{M} est un isomorphisme.

Démonstration du lemme 10.13

Puisque $\Delta > \delta(\mu)$ on a obligatoirement $\mu > 1$, donc $c_1 > r$. Pour $r = 1, c_1 = 2$ on a alors $c_2 = 3$ et l'énoncé est évident : il suffit de prendre $\mathrm{E} = \mathscr{I}(2)$, où $\mathscr{I}$ est l'idéal de trois points alignés dans le plan.

On suppose donc désormais $c_1 \geq 3$. Considérons la famille $\mathscr{H}$ de morphismes injectifs, sauf peut-être en un nombre fini de points,

$$s : \mathscr{O}(-2) \oplus \mathscr{O}(-1)^{c_1-3} \to \mathscr{O}^{c_1+r-3} \oplus \mathscr{O}(1).$$

Le conoyau d'un tel morphisme s définit un faisceau cohérent E_s sans torsion de rang r et de polynôme de Hilbert H. Cette famille $\mathscr{H}$ n'est pas complète, mais l'image de l'application de déformation infinitésimale de Kodaira et Spencer

$$\omega : \mathrm{T}_s\mathscr{H} \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{E}_s, \mathrm{E}_s)$$

est de codimension ≤ 1. De plus la condition (P) du lemme 3.10 est satisfaite. Alors une variante évidente du lemme 3.10 montre que la codimension des strates de Shatz est ≥ 1. Ainsi, l'ouvert $\mathscr{H}^{ss}$ des morphismes tels le conoyau E_s soit semi-stable est partout dense. □

Cas $\Delta = \delta(\mu)$

On peut reprendre le même argument, mais il ne donne cette fois que la surjectivité de λ_{M}. Considérons le fibré exceptionnel E_α associé à c, dont la pente est α et dont on désigne par a la classe dans $\mathrm{K}(\mathbf{P}_2)$. On vérifie immédiatement que si $\mathscr{F}$ est une famille de faisceaux semi-stables paramétrée par une variété algébrique S lisse, on a alors, avec les notations du § 10.2, $\mathrm{R}^q p_{1*}(\mathrm{E}_\alpha \otimes \mathscr{F}) = 0$ pour tout q, d'où il ressort que $p_{1!}(\mathrm{E}_\alpha \otimes \mathscr{F}) = 0$. Ceci implique $\lambda_{\mathrm{M}}(a) = 0$, ce qui signifie que a appartient au noyau de λ_{M}.

Ainsi, λ_{M} induit un épimorphisme

$$c^\perp/(a) \to \mathrm{Pic}(\mathbf{M}).$$

On a déjà vu que le premier membre est un groupe cyclique. Puisque **M** est une variété projective, son groupe de Picard ne peut être un groupe fini. Ainsi, cet homomorphisme est un isomorphisme. □

Bibliographie

[1] M. F. ATIYAH ET R. BOTT. *The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces,* Phil. Trans. Roy. Soc. London **A 308** (1982) p. 523-615.

[2] J.-M. DREZET. *Fibrés exceptionnels et suite spectrale de Beilinson généralisée,* Math. Annalen **275** (1986) p. 25-48.

[3] J.-M. DREZET. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbf{P}_2$, J. reine angew. Math **380** (1987) p. 14-58.

[4] J. M. DREZET. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur* $\mathbf{P}_2(\mathbb{C})$, Ann. de l'Institut Fourier **38** (1988) p. 105-168.

[5] J. M. DREZET ET J. LE POTIER. *Fibrés stables et fibrés exeptionnels sur le plan projectif,* Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e **série, t.18** (1985) p. 193-244.

[6] J. M. DREZET ET M. S. NARASIMHAN. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques,* Invent. math. **97** (1989) p. 53-94.

[7] G. ELLINGSRUD. *Sur l'irréductibilité du module des fibrés stables sur* $\mathbf{P}_2$, Math. Z. **182** (1983) p.189-192.

[8] G. ELLINGSRUD ET S. A. STRØMME. *The rationality of the moduli space for rank-2 vector bundles on* $\mathbf{P}_2$, Singularities, representations of algebras, and vector bundles. Lecture Notes in Mathematics **1273** (1985).

[9] G. ELLINGSRUD ET S. A. STRØMME. *Towards the Chow ring of the Hilbert scheme of* $\mathbf{P}_2$, Preprint (1992).

[10] H. FLENNER. *Restrictions of semistable bundles on projective varieties,* Comment. Math. Helvetici **59** (1984) p. 635-650.

[11] A. HIRSCHOWITZ. *Sur la restriction des faisceaux semi-stables,* Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **14** (1980) p. 199-207.

[12] J. Le Potier. *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques, in Complex projective Geometry,* London mathematical Society : Bergen (1989) p. 213-240.

[13] J. Le Potier. *Variété de modules de faisceaux semi-stables de rang élevé sur* $\mathbf{P}_2$, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics Bowdoin (1985) **46** (1987) p. 87-100.

[14] J. Le Potier. *A propos de la construction de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif,* Preprint (à paraître au Bull. de la SMF) (1992).

[15] C. S. Seshadri. *Mumford's conjecture for Gl(2) and applications,* Proc. Bombay Colloquium on Algebraic Geometry, Oxford University Press (1969) p. 347-371.

[16] C. T. Simpson. *Moduli of Representations of the Fundamental Group of a Smooth Variety,* Preprint, Princeton University (1990).

J. Le Potier
UFR de Mathématiques et URA 212
Université Paris 7
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05