Variétés invariantes et applications.

Abbaci Brahim

5 août 2002

Introduction.

Lorsque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

est commutatif, on dit que h est une *semi-conjugaison* entre f et g. C'est le cas si et seulement si l'application $f \times g : (x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ envoie le graphe W de h dans lui-même. En d'autres termes, dans le cas différentiable, la recherche de la semi-conjugaison h équivaut à celle d'une sous-variété W invariante par $f \times g$.

Cette remarque a amené Marc Chaperon à prouver dans un premier temps une généralisation du théorème de la variété stable [Cha93] entraînant le théorème de Sternberg sur la conjugaison différentiable des contractions locales. Nous en donnons une version C^{1+Lip} dans le premier chapitre de cette thèse (paragraphe 1.3.1, Théorème 3).

Le point de vue adopté dans [Cha93] présente un double avantage : d'une part, ce théorème de variété invariante n'est pas plus difficile à prouver, au contraire, que le résultat de Sternberg. D'autre part, il permet la solution de plusieurs autres problèmes, par exemple la mise sous forme normale d'un germe de champ de vecteurs ou de difféomorphisme le long de sa variété stable [CC97].

Dans le premier chapitre, nous appliquons cette stratégie au théorème suivant de Hartman : tout germe inversible $h : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ de contraction stricte $C^{1+Lipschitz}$ est $C^{1+Hölder}$–linéarisable.

La démonstration reprend les grandes lignes de celle de Hartman, en les simplifiant : une des étapes cruciales devient une simple application du théorème de variété pseudo-instable, dans la version précise essentiellement due à de la Llave et Wayne [LW95, Cha98]. Pour le reste, le point de vue initial est remplacé, comme dans [Cha93], par l'obtention de variétés invariantes suivant la méthode de Perron-Irwin : appliquer un théorème de fonctions implicites dans un espace de suites. La clé est le théorème 4 du paragraphe 1.3.3.

Sur le plan de l'énoncé proprement dit, nous généralisons (paragraphe 1.2.1, théorème 1 et paragraphe 1.2.2, théorème 2) le théorème de Hartman en dimension infinie, pourvu qu'il y ait des "trous" bien placés dans l'ensemble des modules d'éléments du spectre de $Dh(0)$.

Cette hypothèse est automatiquement vérifiée quand $Dh(0)$ est un opérateur compact, donc en dimension finie. Lorsque $Dh(0)$ n'est pas inversible, le résultat obtenu (théorème 1) est la "semi-linéarisation" de h par une fibration locale. Cela permet par exemple d'obtenir des semi-conjugaisons de semi-groupes à un paramètre "paraboliques" à des groupes à un paramètre linéaires. De telles applications seront développées dans une publication ultérieure.

Le deuxième chapitre forme un tout relativement cohérent avec les trois suivants. Il porte sur un théorème de prolongement de variétés invariantes (paragraphe 2.1.2, théorème 5) impliquant entre autres, dans le cas des tores, le théorème de prolongement de conjugaisons locales qui figure en appendice 6 dans [Cha86]. Celui-ci joue un rôle fondamental dans la linéarisation des germes d'actions hyperboliques de $\mathbf{Z}^k \times \mathbf{R}^m$, utilisée par Dufour dans sa linéarisation locale de structures de Poisson [Duf89].

Le théorème 5 implique aussi un autre des résultats utilisés par Dufour, et qui porte sur la résolution près de 0 d'un système d'équations

$$\mathscr{L}_{U_j} f = \Theta_j \, , \ 1 \leq j \leq p$$

lorsque les U_j sont des champs de vecteurs linéaires sur $\mathbf{R}^n$ commutant deux à deux, les germes en $0 \in \mathbf{R}^n$ de fonctions réelles Θ_j vérifiant les conditions de compatibilité évidentes. Le chapitre 3 explique comment "marche" la démonstration de ce résultat dans un cas particulier (où $n = p + 1$). Le cas général, qui fera l'objet d'une publication ultérieure, se traite de la même façon en utilisant les "quasi-quotients" introduits dans le chapitre 3 de [Cha86]. C'est une autre situation où le point de vue "variétés invariantes" permet de ne pas démontrer plusieurs fois essentiellement la même chose.

Pour revenir au chapitre 2, le théorème 5 est un énoncé un peu technique dont la nature apparaît bien dans un cas simple : si l'on a un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbf{R}^3$ de la forme $\lambda x \partial_x + \mu y \partial_y + \nu z \partial_z$ avec $\lambda, \mu > 0$ et $\nu < 0$, son flot laisse invariant chacun des trois plans de coordonnées. Le théorème de la variété instable entraîne que $\{z = 0\}$ est le seul germe en 0 de sous-variété invariant par le flot et transverse à l'axe des z. Cette unicité ne vaut pas pour les autres plans de coordonnées, car le théorème 5 fournit par exemple une famille "de dimension infinie" de surfaces invariantes C^∞ ayant un contact infini le long des axes avec $\{x = 0\}$: l'intersection du germe le long des axes d'une telle surface avec $\{|y| = 1\}$ est n'importe quel germe de courbe ayant un contact infini avec $\{x = 0\}$; en effet, la réunion des orbites issues d'une telle courbe est une surface de $\{y \neq 0\}$ contenant l'axe des y sauf 0, et le théorème 5 affirme que cette surface se prolonge en un unique germe de surface invariante par le flot et passant par 0, qui contient le germe de l'axe des z.

Le chapitre 4 est une introduction aux variétés de Poisson.

Dans le chapitre 5, nous revenons sur le théorème de linéarisation locale de structures de Poisson démontré par Dufour dans [Duf89], en traitant (paragraphe 5.7) le cas $n = p + 1$ qui n'y figurait pas—mais que Dufour a annoncé par la suite—et en insistant (paragraphe 5.6) sur le "domaine de Poincaré", où tout est beaucoup plus simple.

La principale nouveauté est une version très explicite (paragraphe 5.6.1, lemme 20 et paragraphe 5.7.1, lemme 23) d'un résultat que Dufour déduisait du théorème de division de Saïto. Ce calcul simplifie bien les choses ...à tel point qu'on n'a plus besoin, dans les cas considérés, du théorème de prolongement du chapitre 2 (paragraphe 2.1.2, théorème 5). Celui-ci intervient néanmoins dans le cas général considéré dans [Duf89], sur lequel nous comptons revenir dans une publication prochaine.

Chapitre 1

Théorème de Hartman et variétés invariantes.

1.1 Introduction.

Soit $H : (X, a) \longrightarrow (X, a)$ un germe en a de difféomorphisme de classe $C^r (r \geq 1)$ d'une variété X dans elle même. On note T_aH l'application linéaire tangente à H en a et T_aX l'espace tangent à X en a. On dit que H est C^k–linéarisable s'il existe un germe de difféomorphisme $\Phi : (X, a) \longrightarrow (T_aX, 0)$ de classe C^k tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X,a) & \xrightarrow{H} & (X,a) \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ (T_aX,0) & \xrightarrow[T_aH]{} & (T_aX,0). \end{array}$$

P. Hartman a montré [Har60] qu'en dimension finie, un germe de difféomorphisme $H : (X, a) \longrightarrow (X, a)$ de classe C^{1+Lip} est $C^{1+Höld}$–linéarisable si le rayon spectral de T_aH est strictement inférieur à 1 (contraction stricte).
Partant du fait que le diagramme précédent est commutatif, si et seulement si le graphe de Φ est invariant par le difféomorphisme

$$\begin{aligned} H \times T_aH : (X, a) \times (T_aX, 0) &\longrightarrow (X, a) \times (T_aX, 0) \\ (x, y) &\longmapsto (H(x), T_aH(y)) , \end{aligned}$$

on peut obtenir des théorèmes de conjugaison ou de semi-conjugaison à des formes normales, voire de linéarisation, à partir de théorèmes d'existence de variétés invariantes. En outre, comme l'étude de certaines équations aux dérivées partielles se ramène à celle d'un flot où d'un semi-flot $f^t : (E, 0) \longrightarrow (E, 0)$ d'un espace de Banach E de dimension infinie, il est très souhaitable de ne pas se borner à la dimension finie.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la semi-linéarisation différentiable d'un germe de contraction stricte. Sous une hypothèse portant sur le spectre de sa partie linéaire, on va démontrer un théorème de semi-linéarisation qui admet comme corollaire une généralisation du résultat de P. Hartman à la dimension infinie.

1.2 Théorème de semi-linéarisation.

1.2.1 Hypothèses et énoncé du théorème.

Soit $h : (M, p) \longrightarrow (M, p)$ un germe en p d'application de classe C^{1+Lip} d'une variété M modelée sur un espace de Banach dont la topologie peut être définie par une norme C^{1+Lip} en dehors de 0. On note $L := T_p h$ l'application linéaire tangente à h en p et $\rho(L)$ son rayon spectral. On suppose que h est une contraction stricte et que le spectre de L est la réunion d'un nombre fini de compacts non vides

$$\mathrm{Spec}(L) = \sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_n \cup \sigma_{n+1}$$

tels que si on note

$$a_i = \min\{|z|; z \in \sigma_i\} \text{ et } b_i = \max\{|z|; z \in \sigma_i\} \text{ pour } 0 \leq i \leq n+1$$

on ait

$$0 \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} < a_n \leq b_n < \cdots < a_0 \leq b_0 = \rho(L) < 1$$

et

$$a_{i+1} \leq b_i b_0 < a_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

Remarque. Cette hypothèse est toujours vérifiée lorsque la contraction stricte $L \neq 0$ est un opérateur compact, par exemple quand M est de dimension finie. En effet, on groupe alors dans σ_0 les valeurs propres λ de L avec $|\lambda| > b_0^2 = \rho(L)^2$, puis on prend éventuellement pour b_1 le maximum des modules des valeurs propres non nulles restantes et l'on groupe dans σ_1 les valeurs propres λ de L avec $b_1 b_0 < |\lambda| \leq b_0^2$, etc. (en dimension infinie, il faut choisir le n où s'arrête le processus).

Théorème 1 *Sous les hypotheses précédentes, h est $C^{1+Höld}$–semi-linéarisable : si l'on écrit la décomposition de $E = T_pM$ en somme directe de sous-espaces L-invariants*

$$E = E_0 \oplus \cdots \oplus E_n \oplus E_{n+1}$$

tels que

$$Spec\,(L|_{E_i}) = \sigma_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n+1,$$

il existe un germe en p de submersion de classe $C^{1+Höld}$

$$\varphi_n : (M,p) \longrightarrow (E_0 \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_n, 0) = (F_n, 0)$$

tangente à la projection de E sur F_n, qui semi-conjugue h à $L|_{F_n}$, c'est-à-dire :

$$\varphi_n \circ h = L|_{F_n} \circ \varphi_n.$$

1.2.2 Un théorème de linéarisation.

Si le compact σ_{n+1} est vide, le germe de h est un germe de difféomorphisme local. Dans ce cas, la démonstration de la semi-linéarisation qu'on exposera dans la suite donne un théorème de linéarisation d'une contraction stricte en dimension éventuellement infinie :

Hypothèses et énoncé du théorème.

Soit $h : (M,p) \longrightarrow (M,p)$ un germe en p de difféomorphisme de classe C^{1+Lip} d'une variété M modelée sur un espace de Banach dont la topologie peut être définie par une norme C^{1+Lip} en dehors de 0. On suppose que h est une contraction stricte et que le spectre de $L := T_ph$ est la réunion d'un nombre fini de compacts non vides

$$\mathrm{Spec}(L) = \sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_n$$

tels que si on note

$$a_i = \min\{|z|; z \in \sigma_i\} \text{ et } b_i = \max\{|z|; z \in \sigma_i\} \text{ pour } 0 \leq i \leq n$$

on ait

$$0 < a_n \leq b_n < \cdots < a_0 \leq b_0 = \rho(L) < 1$$

et

$$b_i b_0 < a_i \text{ pour } 0 \leq i \leq n$$
$$a_{i+1} \leq b_i b_0 \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1.$$

Théorème 2 *Sous ces hypothèses, h est $C^{1+Höld}$–linéarisable : en posant $E = T_pM$, il existe un germe $\varphi : (M, p) \longrightarrow (E, 0)$ de difféomorphisme de classe $C^{1+Höld}$ tangent en p à l'identité de E qui conjugue h à L, c'est-à-dire*

$$\varphi^* h := \varphi \circ h \circ \varphi^{-1} = L : (E, 0) \longrightarrow (E, 0).$$

1.2.3 Remarques.

Remarque 1. La classe de Hölder que nous obtenons pour la dérivée de h dépend du spectre de L.

Remarque 2. On a fait une hypothèse de régularité C^{1+Lip} sur la norme de E en dehors de l'origine car le théorème de la variété pseudo-instable, qui joue un rôle crucial dans nos démonstrations, s'obtient par une procédure d'extension qui nécessite une telle hypothèse [LW95, Cha98].

1.3 Démonstration : variétés invariantes.

La démonstration du théorème de semi-linéarisation se fait par élimination de proche en proche des termes “non linéaires” correspondant à la partition du spectre. Pour éliminer le terme non linéaire correspondant à la partie σ_0 du spectre, on a besoin d'un premier théorème de variété invariante.

1.3.1 Premier théorème de variété invariante.

Ce théorème, démontré par M. Chaperon [Cha93], généralise le théorème de la variété stable ; il est valable dans les classes C^r, (r réel positif), analytique et holomorphe. On en donnera la démonstration dans le cas C^{1+Lip}, dont on a besoin, pour mettre en évidence la force de la méthode d'Irwin [Irw80a] : appliquer le théorème des fonctions implicites dans des espaces de suites naturels.

Théorème 3 *Soit $h : (M, a) \longrightarrow (M, a)$ un germe en a d'application de classe C^{1+Lip} tel que $L := T_ah$ laisse invariant un sous espace facteur direct S de $E := T_aM$ et soit A (resp. B) l'endomorphisme de S (resp. E/S) induit par L. On suppose $\rho(A) < 1$, B inversible et*

$$\rho\left(B^{-1}\right)^{-1} > \rho(A)^2.$$

Alors il existe un unique germe en a de sous-variété W de classe C^{1+Lip}, invariant par h et tel que $T_aW = S$.

1.3.2 Première étape de la semi-linéarisation.

À l'aide d'une carte, on peut se ramener à $h : (E,0) \longrightarrow (E,0)$. D'après les hypothèses sur le spectre de L, il existe une décomposition de E en somme directe de deux espaces L-stables $E = E_0 \times E^{'}$ telle que h soit donné par

$$\begin{aligned} h : (E_0 \times E^{'},0) &\longrightarrow (E_0 \times E^{'},0) \\ (u,v) &\longmapsto \Big(A_0 u + e_0(u,v), A'v + e^{'}(u,v)\Big), \end{aligned}$$

où $A_0 = L|_{E_0}$ et donc

$$\mathrm{Spec}(A_0) = \sigma_0,$$

$A' = L|_{E'}$, $E' = E_1 \oplus \cdots \oplus E_{n+1}$ et donc

$$\mathrm{Spec}(A') = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_n \cup \sigma_{n+1}$$

et les application e_0 et $e^{'}$ sont de classe C^{1+Lip} et nulles à l'ordre 1 en 0.
On applique le *premier théorème de variété invariante* au germe en $(0,0)$ d'application $h_0 := h \times A_0$ donné par

$$\begin{aligned} h_0 := h \times A_0 : (E \times E_0, 0) &\longrightarrow (E \times E_0, 0) \\ (u,x) &\longmapsto (h(u), A_0 x), \end{aligned}$$

en prenant pour S le graphe (invariant par $Dh_0(0)$) de la projection pr_0 de E sur E_0. Il est clair que A s'identifie à L et B à A_0, d'où

$$\rho(B^{-1})^{-1} = a_0 > b_0^2 = \rho(A)^2$$

comme souhaité. Il existe donc un germe en 0 de variété h_0-invariant W de classe C^{1+Lip} tel que $T_0 W = S$, qui est le graphe d'un germe de submersion $\phi_0 : E \longrightarrow E_0$ tangente à pr_0 en 0. L'invariance de W par h_0 signifie que ϕ_0 *semi-conjugue* h à A_0, c'est-à-dire que

$$\phi_0 \circ h = A_0 \circ \phi_0,$$

ce qui donne le résultat cherché :

Corollaire 1 *Le germe d'application donné par*

$$\begin{aligned} \varphi_0 : (E,0) &\longrightarrow (E_0 \times E^{'},0) \\ u &\longmapsto (\phi_0(u), pr_{E'}(u)) \end{aligned}$$

où $pr_{E'}$ *est la projection de* E *sur* $E^{'}$*, est un germe de difféomorphisme local* C^{1+Lip} *qui* conjugue h *à un germe d'application* $\varphi_0^* h := \varphi_0 \circ h \circ \varphi_0^{-1}$ *de la forme*

$$\begin{aligned} \varphi_0^* h : (E_0 \times E^{'}, 0) &\longrightarrow (E_0 \times E^{'}, 0) \\ (x, y) &\longmapsto \Big(A_0 x, A' y + \tilde{e}^{'}(x, y) \Big) \end{aligned}$$

où l'application $\tilde{e}^{'}$ *est de classe* C^{1+Lip} *et nulle à l'ordre 1 en 0.*

On déduit immédiatement de ce qui précède (pour $E^{'} = \{0\}$) le

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du théorème de linéarisation, si* $n = 0$*, alors* h *est* C^{1+Lip}*–linéarisable.*

Remarque. La condition $n = 0$, qui s'écrit aussi $\rho(L^{-1})^{-1} > \rho(L)^2$, exclut en dimension finie l'apparition de "résonances" $\mu = \lambda^2$, $\lambda, \mu \in \mathrm{Spec}(L)$, rendant formellement impossible la linéarisation C^2 et même C^{1+Lip}.

1.3.3 Deuxième théorème de variété invariante.

Pour éliminer les autres termes non-linéaires, on procède par récurrence en utilisant le résultat suivant :

Théorème 4 *Soit* $\tilde{E} = I \times J \times K$ *un produit d'espaces de Banach dont les normes sont* C^{1+Lip} *en dehors de 0 et* $\tilde{h}$ *un germe d'application donné par*

$$\begin{aligned} \tilde{h} : (I \times J \times K, 0) &\longrightarrow (I \times J \times K, 0) \\ (\theta, x, y) &\longmapsto \tilde{h}(\theta, x, y) = (\Lambda\theta, f(\theta, x, y), g(\theta, x, y)) . \end{aligned}$$

On suppose les conditions suivantes vérifiées :
i) Les applications f *et* g *sont de classe* C^1*.*
ii) Les dérivées partielles $\partial_x f$*,* $\partial_y f$*,* $\partial_x g$*,* $\partial_y g$ *sont lipschitziennes par rapport à* (θ, x, y)*.*
iii) Les dérivées partielles $\partial_\theta f$*,* $\partial_\theta g$ *sont lipschitziennes par rapport à* (x, y) *et* α*-höldériennes par rapport à* θ*, avec* $\alpha \in (0, 1)$*.*
iv) La différentielle de $\tilde{h}$ *en 0 est donnée par*

$$D\tilde{h}(0)(\theta, x, y) = (\Lambda\theta, Bx + Dy, Cy)$$

avec Λ un automorphisme de I, B un endomorphisme de J, D une application linéaire continue de K dans J et C un automorphisme de K tels qu'on ait

$$\rho(C) = \rho(B) < \rho\left(\Lambda^{-1}\right)^{-1} \leq \rho(\Lambda) < 1 \text{ et } \rho\left(C^{-1}\right)\rho(B)\rho(\Lambda) < 1.$$

Alors, il existe un germe en 0 de variété $\tilde{h}$-invariante $\tilde{V}$ de classe $C^{1+Hölder}$ tangente en 0 à $I \times J \times \{0\}$, qui est donc le graphe d'un germe

$$\begin{aligned} (I \times J, 0) &\longrightarrow (K, 0) \\ (\theta, x) &\longmapsto \Phi_0(\theta, x). \end{aligned}$$

Ce germe est de classe C^1, tangent à 0, sa dérivée partielle $\partial_x \Phi_0$ est lipschitzienne par rapport à (θ, x) et sa dérivée partielle $\partial_\theta \Phi_0$ est lipschitzienne par rapport à x et höldérienne par rapport à θ.

1.3.4 Deuxième étape de la semi-linéarisation.

On identifie E à $E_0 \times \cdots \times E_{n+1}$, on pose $A_j = L|_{E_j}$ et l'on cherche à prouver par récurrence le

Lemme 1 *Pour $0 \leq k \leq n$, le germe h est conjugué, par un germe de transformation $C^{1+Hölder}$ tangente à l'identité, à un germe $h_k : (E, 0) \to (E, 0)$ de la forme*

$$h_k(x_0, \ldots, x_{n+1}) = (A_0 x_0, \ldots, A_k x_k, g_k(x_0, \ldots, x_{n+1}))$$

où $\partial_{x_j} g_k$ est
- *lipschitzienne pour $j > k$*
- *hölderienne par rapport aux x_ℓ avec $\ell < k$ et lipschitzienne par rapport aux autres variables pour $j \leq k$.*

Pour $k = n$, on en déduit le théorème. Comme le cas où $k = 0$ résulte de notre première étape, il ne reste qu'à expliquer le passage de k à $k+1$ pour $0 \leq k < n$.

Il s'agit de conjuguer h_k à un h_{k+1} convenable par une transformation φ_k tangente à l'identité, c'est-à-dire en fait de semi-conjuguer h_k à A_{k+1} par un germe de submersion π_{k+1} tangente à la projection pr_{k+1} de E sur E_{k+1} : on obtiendra ainsi la composante intéressante de φ_k, les autres étant celles de l'identité.

Il revient au même de trouver un germe W_{k+1} de sous-variété de $E \times E_{k+1}$ (le graphe de π_{k+1}) invariant par $h_k \times A_{k+1}$ et tangent au graphe V_{k+1} de

pr_{k+1}. On ne peut pas appliquer immédiatement le second théorème de variété invariante tel que nous l'avons énoncé, car V_{k+1} n'est pas $E \times \{0\}$, mais on s'y ramène par l'automorphisme $\tau_k : (x, y) \mapsto (x, y - x_{k+1})$ de $E \times E_{k+1}$.

Appliquons le second théorème de variété invariante à $I = E_0 \times \cdots \times E_k$, $J = E_{k+1} \times \cdots \times E_{n+1}$, $K = E_{k+1}$ et $\tilde{h} = \tau_k \circ (h_k \times A_{k+1}) \circ \tau_k^{-1}$: on obtient une variété invariante $\tilde{V}$ qui est le graphe d'un germe $f_{k+1}(= \Phi_0) : E \to E_{k+1}$ de classe C^1, tangent à 0 et dont les dérivées partielles $\partial_{x_j} f_{k+1}$ sont

- lipschitziennes pour $j > k$
- lipschitziennes par rapport aux x_ℓ avec $\ell > k$ et höldériennes par rapport aux autres pour $j \leq k$.

Il en résulte que $W_{k+1} = \tau_k^{-1}(\tilde{V})$ est une sous-variété invariante par $h_k \times A_{k+1}$, graphe de $\pi_{k+1} : x \mapsto x_{k+1} + f_{k+1}(x)$.

Des propriétés de f_{k+1} résultent immédiatement celles que l'on souhaitait pour $h_{k+1} = \varphi_k \circ h_k \circ \varphi_k^{-1}$.

1.4 Démonstration des théorèmes de variété invariante.

1.4.1 Preuve du premier théorème de variété invariante.

Soit $U = E/S$. Avec une carte, on se ramène à

$$M = E = S \times U$$

l'application linéaire tangente est donnée par

$$L(x, y) = (Ax + Cy, By)$$

pour un $C \in L(U, S)$, $a = 0$ et $V = S \times \{0\}$. Soit λ un nombre réel tel que

$$\mu := \lambda^2 < \rho\left(B^{-1}\right)^{-1} \text{ et } \rho(A) < \lambda < 1.$$

On choisit la norme sur E telle que

$$\mu < \left|B^{-1}\right|^{-1} \text{ et } |A| < \lambda$$

et on note $\mathcal{E}_{\lambda,\mu} = \{\underline{z} = (z_n)_{n\in\mathbf{N}}; z_n = (x_n, y_n) \in E\}$ l'espace de Banach des suites $\underline{z}$ d'éléments de E telles que

$$|\underline{z}| = \sup\left\{\max\left\{\lambda^{-n}|x_n|, \mu^{-n}|y_n|\right\}; n \in \mathbf{N}\right\} < \infty$$

$\mathcal{S}_\lambda = \{\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}; x_n \in S\}$ l'espace de Banach des suites $\underline{x}$ d'éléments de S telles que

$$|\underline{x}| = \sup\left\{\lambda^{-n}|x_n|; n \in \mathbf{N}\right\} < \infty$$

$\mathcal{U}_\mu = \left\{\underline{y} = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}; y_n \in U\right\}$ l'espace de Banach des suites $\underline{y}$ d'éléments de U telles que

$$\left|\underline{y}\right| = \sup\left\{\mu^{-n}|y_n|; n \in \mathbf{N}\right\} < \infty$$

et $\mathcal{S}_{\lambda,0}$ le sous-espace de $\mathcal{S}_\lambda$ formé des suites $\underline{x}$ telles que $x_0 = 0$.
On va montrer que les termes z_0 des suites $\underline{z}$ dans $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$ telles que

$$F(\underline{z}) := (z_{n+1} - h(z_n))_{n\in\mathbf{N}} = \underline{0}$$

forment près de 0 le graphe W d'une application $y_0 = \psi(x_0)$ de classe C^{1+Lip} nulle à l'ordre 1 en 0. Le germe de la variété invariante est donc celui de W.

Lemme 2 *Le germe en $\underline{0}$ de l'application donnée par*

$$\begin{aligned} F : (\mathcal{E}_{\lambda,\mu}, \underline{0}) &\longrightarrow (\mathcal{E}_{\lambda,\mu}, \underline{0}) \\ \underline{z} &\longmapsto F(\underline{z}) = (z_{n+1} - h(z_n))_{n\in\mathbf{N}} \end{aligned}$$

est de classe C^{1+Lip} et sa dérivée partielle par rapport à $(y_0, (z_n)_{n>0})$ en $\underline{0}$ est un isomorphisme du sous-espace $\mathcal{E}_{\lambda,\mu,0} = \{\underline{z} \in \mathcal{E}_{\lambda,\mu}/x_0 = 0\}$ sur $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$.

D'après le théorème des fonctions implicites, au voisinage de $\underline{0}$, l'ensemble $F^{-1}(\underline{0})$ est donc le graphe d'une fonction implicite

$$x_0 \longmapsto \Psi(x_0) = (y_0, (z_n)_{n>0})$$

de classe C^{1+Lip} ; la variété invariante W, graphe de la composante

$$y_0 = \psi(x_0)$$

de Ψ, est de classe C^{1+Lip}. Pour voir qu'elle est tangente à S en 0, on va montrer que

$$D\psi(0) = 0.$$

En posant

$$(x_0, D\psi(0)x_0) = (x_n, y_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

l'identité

$$DF(\underline{0})\,(x_0, D\psi(0)x_0) = \underline{0}$$

signifie que

$$(x_{n+1} - Ax_n - Cy_n, y_{n+1} - By_n) = (0, 0) \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

L'automorphisme

$$\mathcal{B} : \underline{y} \longmapsto (y_{n+1} - By_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

envoie donc $\underline{y}$ sur $\underline{0}$, d'où en particulier

$$y_0 = D\psi(0)x_0 = 0.$$

Preuve du lemme. On montre d'abord que la dérivée partielle de F en $\underline{0}$ par rapport à $(y_0, (z_n)_{n>0})$ est inversible.
En supposant que F est C^1, la différentielle de F en $\underline{0}$ est forcément donnée par

$$\begin{aligned} DF(\underline{0})\underline{z} &= (z_{n+1} - Lz_n)_{n\in\mathbf{N}} \\ &= (x_{n+1} - Ax_n - Cy_n, y_{n+1} - By_n)_{n\in\mathbf{N}}\,, \end{aligned}$$

car chacune des projections $\underline{z} \mapsto z_n$ de $\mathcal{E}_{\lambda,\mu}$ sur E est continue. On doit donc montrer que le morphisme $\mathcal{A}$ donné par

$$\mathcal{A} : \underline{x} \longmapsto (x_{n+1} - Ax_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}_{\lambda,0}$ sur $\mathcal{S}_\lambda$, que le morphisme $\mathcal{C}$ donné par

$$\mathcal{C} : \underline{y} \longmapsto (Cy_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

est linéaire continu de $\mathcal{U}_\mu$ dans $\mathcal{S}_\lambda$ et que le morphisme $\mathcal{B}$ donné par

$$\mathcal{B} : \underline{y} \longmapsto (y_{n+1} - By_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

est un automorphisme de $\mathcal{U}_\mu$.
— $\mathcal{A}$ est le composé de l'isomorphisme de $\mathcal{S}_{\lambda,0}$ sur $\mathcal{S}_\lambda$ donné par

$$\underline{x} \longmapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$$

et de l'endomorphisme de $\mathcal{S}_\lambda$ donné par

$$\underline{x} \longmapsto (x_0, (x_n - Ax_{n-1})_{n>0})$$

et qui est de la forme “Id + contraction stricte”, puisque

$$\lambda^{-n}\,|Ax_{n-1}| \leq \lambda^{-1}|A|\left(\lambda^{-(n-1)}|x_{n-1}|\right) \leq \lambda^{-1}|A|\,|\underline{x}| \;\text{ et }\; \lambda^{-1}|A| < 1.$$

— $\mathcal{C}$ est linéaire continu de $\mathcal{U}_\mu$ dans $\mathcal{S}_\lambda$ car

$$\lambda^{-n}\,|Cy_n| \leq \lambda^{-2n}\,|Cy_n| \leq |C|\left(\mu^{-n}|y_n|\right) \leq |C|\,\left|\underline{y}\right|.$$

— $\mathcal{B}$ est le composé de l'automorphisme de $\mathcal{U}_\mu$ donné par

$$\underline{y} \longmapsto (-By_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

et de l'endomorphisme de $\mathcal{U}_\mu$ donné par

$$\underline{y} \longmapsto \left(y_n - B^{-1}y_{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

et qui est de la forme "Id + contraction stricte", puisque

$$\mu^{-n}\left|B^{-1}y_{n+1}\right| \leq \mu\left|B^{-1}\right|\left(\mu^{-(n+1)}|y_{n+1}|\right) \leq \mu\left|B^{-1}\right|\left|\underline{y}\right| \text{ et } \mu\left|B^{-1}\right| < 1.$$

Pour montrer que F est de classe C^{1+Lip}, il suffit de montrer que les germes d'applications suivants sont de classe C^{1+Lip} :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{E}_{\lambda,\mu},\underline{0}) \ni \underline{z} &\longmapsto \tilde{f}(\underline{z}) = (f(z_n))_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathcal{S}_\lambda,\underline{0})\\
(\mathcal{E}_{\lambda,\mu},\underline{0}) \ni \underline{z} &\longmapsto \tilde{g}(\underline{z}) = (g(z_n))_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathcal{U}_\mu,\underline{0}).
\end{aligned}$$

Le cas de $\tilde{f}$. Les inégalités suivantes montrent que $\tilde{f}$ est bien définie.

$$\begin{aligned}
\lambda^{-n}|f(z_n)| &\leq \mathrm{Lip}(Df)\left|\lambda^{-n}z_n\right|\\
&\leq \mathrm{Lip}(Df)\left|\underline{z}\right|.
\end{aligned}$$

Les inégalités suivantes montrent que $\tilde{f}$ est différentiable :

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-n}\big|f(z_n+\delta z_n) - f(z_n) - Df(z_n)\delta z_n\big|\\
&\qquad\qquad \leq \lambda^{-n}\left|\int_0^1\big(Df\left(z_n+t\delta z_n\right) - Df(z_n)\big)dt\right||\delta z_n|\\
&\qquad\qquad \leq \lambda^{-n}\mathrm{Lip}(Df)\,|\delta z_n|\,|\delta z_n|\\
&\qquad\qquad \leq \mathrm{Lip}(Df)\left(\lambda^{-n}|\delta z_n|\right)^2\\
&\qquad\qquad \leq \mathrm{Lip}(Df)\,|\underline{\delta z}|^2.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\lambda^{-n}\left|\big(Df(z_n+\delta z_n) - Df(z_n)\big)Z_n\right| &\leq \mathrm{Lip}(Df)\left|\lambda^{-n}\delta z_n\right|\left|\lambda^{-n}Z_n\right|\\
&\leq \mathrm{Lip}(Df)\,|\underline{\delta z}|\,|\underline{Z}|\,;
\end{aligned}$$

puisque

$$\left|D\tilde{f}(\underline{z}+\delta\underline{z}) - D\tilde{f}(\underline{z})\right| = \sup_{|\underline{Z}|\leq 1}\sup_{n\in\mathbf{N}}\left|\lambda^{-n}\big(Df(z_n+\delta z_n) - Df(z_n)\big)Z_n\right|,$$

on a donc montré que $D\tilde{f}$ est lipschitzienne :

$$\begin{aligned}\left|D\tilde{f}(\underline{z}+\delta\underline{z})-D\tilde{f}(\underline{z})\right| &\leq \sup_{|\underline{Z}|\leq 1}\operatorname{Lip}(Df)\,|\delta\underline{z}|\,|\underline{Z}| \\ &\leq \operatorname{Lip}(Df)\,|\delta\underline{z}|\,.\end{aligned}$$

Le cas de $\tilde{g}$. On a $\partial_x g(0,0)=0$, donc les inégalités suivantes montrent que $\tilde{g}$ est bien définie.

$$\begin{aligned}&\mu^{-n}|g(x_n,y_n)| \\ &\qquad\leq \mu^{-n}\left|\Big(\int_0^1(\partial_x g(tx_n,0)-\partial_x g(0,0))dt\Big)x_n+\Big(\int_0^1\partial_y g(x_n,ty_n)dt\Big)y_n\right| \\ &\qquad\leq \operatorname{Lip}(\partial_x g)\left|\lambda^{-n}x_n\right|\left|\lambda^{-n}x_n\right|+\sup|\partial_y g|\left|\mu^{-n}y_n\right| \\ &\qquad\leq \operatorname{Lip}(\partial_x g)\,|\underline{x}|^2+\sup|\partial_y g|\left|\underline{y}\right|\end{aligned}$$

Les inégalités suivantes montrent que $\tilde{g}$ est différentiable :

$$\begin{aligned}&\mu^{-n}\left|g(z_n+\delta z_n)-g(z_n)-Dg(z_n)\delta z_n\right| \\ &\qquad\qquad\leq \mu^{-n}\left|\int_0^1\big(Dg(z_n+t\delta z_n)-Dg(z_n)\big)dt\right||\delta z_n| \\ &\qquad\qquad\leq \operatorname{Lip}(Dg)\left|\lambda^{-n}\delta z_n\right|\left|\lambda^{-n}\delta z_n\right| \\ &\qquad\qquad\leq \operatorname{Lip}(Dg)\,|\delta\underline{z}|^2\,.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\mu^{-n}\left|\big(Dg(z_n+\delta z_n)-Dg(z_n)\big)Z_n\right| &\leq \operatorname{Lip}(Dg)\left|\lambda^{-n}\delta z_n\right|\left|\lambda^{-n}Z_n\right| \\ &\leq \operatorname{Lip}(Dg)\,|\underline{\delta z}|\,|\underline{Z}|\,.\end{aligned}$$

Comme on a

$$|D\tilde{g}(\underline{z}+\delta\underline{z})-D\tilde{g}(\underline{z})|=\sup_{|\underline{Z}|\leq 1}\sup_{n\in\mathbf{N}}\left|\mu^{-n}\big(Dg(z_n+\delta z_n)-Dg(z_n)\big)Z_n\right|$$

les inégalités suivantes montrent que $D\tilde{g}$ est lipschitzienne :

$$\begin{aligned}|D\tilde{g}(\underline{z}+\delta\underline{z})-D\tilde{g}(\underline{z})| &\leq \sup_{|\underline{Z}|\leq 1}\operatorname{Lip}(Dg)\,|\delta\underline{z}|\,|\underline{Z}| \\ &\leq \operatorname{Lip}(Dg)\,|\delta\underline{z}|\,.\end{aligned}$$

1.4.2 Preuve du deuxième théorème de variété invariante.

On va se ramener au cas où $f(\theta,0,0)=0$ et $g(\theta,0,0)=0$ en utilisant le théorème de variété pseudo-instable [LW95, Cha98] :

Théorème 5 *Soit $\overline{h} : (\overline{M},p) \longrightarrow (\overline{M},p)$ un germe d'application différentiable en p d'une variété banachique $\overline{M}$. On supose que le spectre $\sigma(\overline{L})$ de $\overline{L} := T_p\overline{h}$ est la réunion de deux compacts disjoints non vides σ_1 et σ_2 avec*

$$\max_{\lambda_2\in\sigma_2} |\lambda_2| < \min_{\lambda_1\in\sigma_1} |\lambda_1|;$$

et l'on note $\overline{I}$ (resp. $\overline{S}$) le sous-espace $\overline{L}$-stable de $\overline{E} := T_p\overline{M}$ associé à la partie σ_1 (resp. σ_2).
Alors quels que soient l'entier $r \geq 1$ et le réel $\alpha \in]0,1]$ tels que l'on ait

$$\max_{\lambda_2\in\sigma_2} |\lambda_2| < \min_{\lambda_1\in\sigma_1} |\lambda_1|^{r+\alpha},$$

si $\overline{h}$ est $C^{r+\alpha}$ et que la topologie de $\overline{E}$ peut être définie par une norme $C^{r+\alpha}$ en dehors de l'origine, il existe un germe $\overline{h}$-invariant $\overline{V}$ en p de sous-variété $C^{r+\alpha}$ de $\overline{M}$ tel que $T_p\overline{V} = \overline{I}$.

D'après le théorème de la variété pseudo-instable, pour tout $\beta \in (0,\alpha]$ tel que $\rho\left(\Lambda^{-1}\right)^{-(1+\beta)} > \rho(B)$, il existe un germe en 0 de variété $\tilde{h}$-invariante de classe $C^{1+\beta}$ tangente en 0 à $I \times \{0\} \times \{0\}$. Cette variété est localement le graphe d'une application $\chi : (I,0) \longrightarrow (J \times K, 0)$ de classe $C^{1+\beta}$ telle que

$$\chi(0) = 0 \text{ et } D\chi(0) = 0.$$

Le difféomorphisme local donné par

$$(\theta,x,y) \longmapsto (\theta,(x,y)-\chi(\theta))$$

est un *changement de variables* qui permet de supposer en plus des hypothèses du théorème que

$$f(\theta,0,0) = 0 \text{ et } g(\theta,0,0) = 0.$$

On choisit deux nombres réel positifs a et b assez proches pour qu'on ait

$$b < \rho\left(C^{-1}\right)^{-1} \leq \rho(B) < a \text{ et } a\rho(\Lambda)/b < 1$$

et on choisit la norme sur $\tilde{E}$ de sorte que les normes des applications linéaires A, B, C et D soient proches de leurs rayons spectraux.
On note $\mathcal{E}_{a,b} = \{\underline{z} := (z_n)_{n\in\mathbf{N}}; z_n = (x_n, y_n) \in J \times K\}$ l'espace de Banach des suites $\underline{z}$ d'éléments de $J \times K$ telles que

$$|\underline{z}| := \sup\big\{\max\{a^{-n}|x_n|, b^{-n}|y_n|\}; n \in \mathbf{N}\big\} < \infty$$

$\mathcal{J}_a = \{\underline{x} := (x_n)_{n\in\mathbf{N}}; x_n \in J\}$ l'espace de Banach des suites $\underline{x}$ d'éléments de J telles que

$$|\underline{x}| := \sup\big\{a^{-n}|x_n|; n \in \mathbf{N}\big\} < \infty$$

et $\mathcal{K}_b = \big\{\underline{y} := (y_n)_{n\in\mathbf{N}}; y_n \in K\big\}$ l'espace de Banach des suites $\underline{y}$ d'éléments de K telles que

$$\big|\underline{y}\big| := \sup\big\{b^{-n}|y_n|; n \in \mathbf{N}\big\} < \infty.$$

On considère le germe d'application donné par

$$\begin{aligned} F : (I \times \mathcal{E}_{a,b}, (0, \underline{0})) &\longrightarrow (\mathcal{E}_{a,b}, \underline{0}) \\ (\theta, \underline{z}) &\longmapsto (x_{n+1} - f(\Lambda^n\theta, x_n, y_n), y_{n+1} - g(\Lambda^n\theta, x_n, y_n))_{n\in\mathbf{N}} \end{aligned}$$

et on va montrer que la variété invariante $\tilde{V}$ est le germe en 0 de l'ensemble des couples (θ, z_0) où les z_0 sont les termes d'indice 0 des suites $\underline{z} \in \mathcal{E}_{a,b}$ telles que $F(\theta, \underline{z}) = \underline{0}$.

Lemme 3 *(i) F définit un germe en $(0, \underline{0})$ d'application de classe C^1.*
(ii) $\partial_{\underline{z}}F$ est lipschitzienne par rapport à $(\theta, \underline{z})$.
(iii) $\partial_\theta F$ est lipschitzienne par rapport à $\underline{z}$ et höldérienne par rapport à θ.
(iv) la dérivée partielle de F en $(0, \underline{0})$ par rapport à $\big(y_0, (x_n, y_n)_{n>0}\big)$ est un isomorphisme du sous espace $\mathcal{E}'_{a,b} := \{\underline{z} \in \mathcal{E}_{a,b} : x_0 = 0\}$ de $\mathcal{E}_{a,b}$ sur $\mathcal{E}_{a,b}$.

D'après le théorème des fonctions implicites, l'ensemble $F^{-1}(\underline{0})$ est donc au voisinage de $(0, \underline{0})$ dans $I \times \mathcal{E}_{a,b}$, le graphe d'une fonction implicite

$$\begin{aligned} \Phi : (I \times J, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathcal{E}'_{a,b}, \underline{0}) \\ (\theta, x) &\longmapsto \Phi(\theta, x). \end{aligned}$$

Cette fonction est de classe C^1, sa dérivée partielle $\partial_x\Phi$ est lipschitzienne par rapport à (θ, x), sa dérivée partielle $\partial_\theta\Phi$ est lipschitzienne par rapport à x et höldérienne par rapport à θ. Donc, au voisinage de 0 dans $I \times J$, la variété $\tilde{h}$-invariante $\tilde{V}$ est le graphe du germe

$$\begin{aligned} \Phi_0 : (I \times J, 0) &\longrightarrow (K, 0) \\ (\theta, x) &\longmapsto (\Phi(\theta, x))_0 \text{ la composante } y_0 \text{ de } \Phi(\theta, x). \end{aligned}$$

Ce germe est de classe C^1, sa dérivée partielle $\partial_x\Phi_0$ est lipschitzienne par rapport à (θ, x) et sa dérivée partielle $\partial_\theta\Phi_0$ est lipschitzienne par rapport à x et est höldérienne par rapport à θ.

Preuve du lemme. On va d'abord montrer (iv) en supposant (i). On note

$$\mathcal{J}_a' := \{\underline{x} \in \mathcal{J}_a : x_0 = 0\} \text{ et } \mathcal{K}_b' := \left\{\underline{y} \in \mathcal{K}_b : y_0 = 0\right\}.$$

La différentielle de F en $(0, \underline{0})$ est donnée par

$$DF(0, \underline{0})(\theta, (x_n, y_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (x_{n+1} - Bx_n - Dy_n, y_{n+1} - Cy_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

On doit montrer que le morphisme $\mathcal{B}$ donné par

$$\mathcal{B} : \underline{x} \longmapsto (x_{n+1} - Bx_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{J}_a'$ sur $\mathcal{J}_a$, que le morphisme $\mathcal{D}$ donné par

$$\mathcal{D} : \underline{y} \longmapsto (Dy_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

est linéaire continue et que le morphisme $\mathcal{C}$ donné par

$$\mathcal{C} : \underline{y} \longmapsto (y_{n+1} - Cy_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

est un automorphisme de $\mathcal{K}_b$.

Le cas de $\mathcal{B}$. Il est le composé de l'isomorphisme de $\mathcal{J}_a'$ sur $\mathcal{J}_a$ donné par

$$\underline{x} \longmapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$$

et de l'endomorphisme de $\mathcal{J}_a$ donné par

$$\underline{x} \longmapsto \big(x_0, (x_n - Bx_{n-1})_{n>0}\big)$$

et qui de la forme "Id + contraction stricte", puisque

$$a^{-n}|Bx_{n-1}| \leq a^{-1}|B|(a^{-(n-1)}|x_{n-1}|) \leq a^{-1}|B||\underline{x}| \text{ et } a^{-1}|B| < 1.$$

Le cas de $\mathcal{D}$. Il est linéaire continu puisque

$$a^{-n}|Dy_n| \leq |D|(b^{-n}|y_n|) \leq |D||\underline{y}|.$$

Le cas de $\mathcal{C}$. Il est le composé de l'automorphisme de $\mathcal{K}_b$ donné par

$$\underline{y} \longmapsto (-Cy_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

et de l'endomorphisme de $\mathcal{K}_b$ donné par

$$\underline{y} \longmapsto (y_n - C^{-1}y_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$$

et qui est de la forme "Id + contraction stricte", puisque

$$b^{-n}|C^{-1}y_{n+1}| \leq b|C^{-1}|(b^{-(n+1)}|y_{n+1}|) \leq b|C^{-1}||\underline{y}| \text{ et } b|C^{-1}| < 1.$$

Pour montrer les autres points du lemme, on va montrer que les germes

$$\begin{aligned} \tilde{f} : (I \times \mathcal{E}_{a,b}, (0, \underline{0})) &\longrightarrow (\mathcal{J}_a, \underline{0}) \\ (\theta, \underline{z}) &\longmapsto \tilde{f}(\theta, \underline{z}) = (f(\Lambda^n \theta, z_n))_{n \in \mathbf{N}} \\ \tilde{g} : (I \times \mathcal{E}_{a,b}, (0, \underline{0})) &\longrightarrow (\mathcal{K}_b, \underline{0}) \\ (\theta, \underline{z}) &\longmapsto \tilde{g}(\theta, \underline{z}) = (g(\Lambda^n \theta, z_n))_{n \in \mathbf{N}} \end{aligned}$$

sont des germes d'applications de classe C^1, leurs dérivées partielles $\partial_{\underline{z}}\tilde{f}$, $\partial_{\underline{z}}\tilde{g}$ sont lipschitziennes et leurs dérivées partielles $\partial_\theta \tilde{f}$, $\partial_\theta \tilde{g}$ sont lipschitziennes en $\underline{z}$ et höldériennes en θ.

Le cas de $\tilde{f}$. Les inégalités suivantes montrent que $\tilde{f}$ est bien définie.

$$a^{-n}\left|f(\Lambda^n\theta, z_n)\right| \leq a^{-n}\left|z_n\right| \leq \left|\underline{z}\right|.$$

Les inégalités suivantes montrent que $\tilde{f}$ est de classe C^1.

$$\begin{aligned} a^{-n}\big|f(\Lambda^n\theta, z_n{+}\delta z_n) - f(\Lambda^n\theta, z_n) - \partial_z f(\Lambda^n\theta, z_n)\delta z_n\big| \\ \leq a^{-n}\left|\int_0^1 \big(\partial_z f(\Lambda^n\theta, z_n + t\delta z_n) - \partial_z f(\Lambda^n\theta, z_n)\big)dt\right| |\delta z_n| \\ \leq \mathrm{Lip}(\partial_z f)\, |\underline{\delta z}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{-n}\big|f(\Lambda^n(\theta+\delta\theta), z_n) - f(\Lambda^n\theta, z_n) - \partial_\theta f(\Lambda^n\theta, z_n)\Lambda^n\delta\theta\big| \\ \leq a^{-n}\left|\int_0^1 \big(\partial_\theta f(\Lambda^n(\theta+t\delta\theta), z_n) - \partial_\theta f(\Lambda^n(\theta+t\delta\theta), 0)\big)dt\right| |\Lambda^n\delta\theta| \\ + a^{-n}\left|\int_0^1 \big(\partial_\theta f(\Lambda^n\theta, z_n) - \partial_\theta f(\Lambda^n\theta, 0)\big)dt\right| |\Lambda^n\delta\theta| \\ \leq 2\mathrm{Lip}_z(\partial_\theta f)\left|a^{-n}z_n\right| |\Lambda|^n |\delta\theta| \\ \leq 2\mathrm{Lip}_z(\partial_\theta f)\, |\underline{z}|\, |\delta\theta|. \end{aligned}$$

Les inégalités suivantes montrent que $\partial_{\underline{z}}\tilde{f}$ est lipschitzienne.

$$\begin{aligned} a^{-n}\big|\big(\partial_z f(\Lambda^n(\theta+\delta\theta), z_n+\delta z_n) - \partial_z f(\Lambda^n\theta, z_n)\big)Z_n\big| \\ \leq \mathrm{Lip}(\partial_z f)\, |(\Lambda^n\delta\theta, \delta z_n)|\, \left|a^{-n}Z_n\right| \\ \leq \mathrm{Lip}(\partial_z f)\, \big|\big(\delta\theta, a^{-n}\delta z_n\big)\big|\, |\underline{Z}| \\ \leq \mathrm{Lip}(\partial_z f)\, |(\delta\theta, \delta\underline{z})|\, |\underline{Z}| \end{aligned}$$

d'où

$$\left|\partial_{\underline{z}}\tilde{f}\,(\theta+\delta\theta,\underline{z}+\delta\underline{z})-\partial_{\underline{z}}\tilde{f}\,(\theta,\underline{z})\,\right|\leq \mathrm{Lip}(\partial_z f)\,|(\delta\theta,\delta\underline{z})|\,.$$

Les inégalités suivantes montrent que $\partial_\theta\tilde{f}$ est lipschitzienne par rapport à $\underline{z}$.

$$\begin{aligned} a^{-n}\left|\partial_\theta f(\Lambda^n\theta,z_n+\delta z_n)\Lambda^n-\partial_\theta f(\Lambda^n\theta,z_n)\Lambda^n\right| &\leq \mathrm{Lip}_z(\partial_\theta f)\,|\Lambda^n|\,\left|a^{-n}\delta z_n\right| \\ &\leq \mathrm{Lip}_z(\partial_\theta f)\,|\delta\underline{z}|\,. \end{aligned}$$

Pour voir que $\partial_\theta\tilde{f}$ est höldérienne par rapport à θ, on remarque que pour tout $(\theta,\underline{z})$ tel que $\mathrm{Max}\,\{|\theta|,|\underline{z}|\}\leq r$, r assez petit, on a

$$a^{-n}\left|\left(\partial_\theta f(\Lambda^n(\theta+\delta\theta),z_n)-\partial_\theta f(\Lambda^n\theta,z_n)\right)\Lambda^n\right|\leq\begin{cases}\mathrm{Höld}_\beta(\partial_\theta f)\left(\frac{|\Lambda|^{1+\beta}}{a}\right)^n|\delta\theta|^\beta\\ 2\mathrm{Lip}_z(\partial_\theta f)|\Lambda|^n r.\end{cases}$$

On pose

$$K_1:=\mathrm{Höld}_\beta(\partial_\theta f)\ \text{et}\ K_2:=2\mathrm{Lip}_z(\partial_\theta f)$$

et on cherche le premier entier n tel que

$$K_2|\Lambda|^n r\geq K_1\left(\frac{|\Lambda|^{1+\beta}}{a}\right)^n|\delta\theta|^\beta$$

on trouve alors

$$n\leq\frac{\log\left(\frac{K_2 r}{K_1|\delta\theta|^\beta}\right)}{\log\left(\frac{|\Lambda|^\beta}{a}\right)}$$

d'où

$$a^{-n}\left|\left(\partial_\theta f(\Lambda^n(\theta+\delta\theta),z_n)-\partial_\theta f(\Lambda^n\theta,z_n)\right)\Lambda^n\right|\leq C^{ste}|\delta\theta|^{\beta-\beta\left(\frac{\log|\Lambda|^{1+\beta}-\log a}{\log|\Lambda|^\beta-\log a}\right)}$$

$\partial_\theta\tilde{f}$ est donc höldérienne par rapport à θ, puisque

$$0<\left(\frac{\log|\Lambda|^{1+\beta}-\log a}{\log|\Lambda|^\beta-\log a}\right)<1.$$

Le cas de $\tilde{g}$. Pour $\max\{|\theta|,|\underline{z}|\}\leq r$, (r assez petit), les inégalités

$$\begin{aligned} b^{-n}\left|g(\Lambda^n\theta,z_n)\right| &\leq b^{-n}\left|\int_0^1\partial_x g(\Lambda^n\theta,tx_n,ty_n)dt\right||x_n| \\ &\quad+b^{-n}\left|\int_0^1\partial_y g(\Lambda^n\theta,tx_n,ty_n)dt\right||y_n| \\ &\leq \mathrm{Lip}(\partial_x g)\left(b^{-1}|\Lambda|a\right)^n r\,|\underline{x}|+C^{ste}\left|\underline{y}\right| \end{aligned}$$

montrent que $\tilde{g}$ est bien définie . Les suivantes montrent que $\tilde{g}$ est C^1.

$$\begin{aligned}
b^{-n}\big|g(\Lambda^n\theta, z_n+\delta z_n) - g(\Lambda^n\theta, z_n) - \partial_z g(\Lambda^n\theta, z_n)\delta z_n\big| \\
&\leq b^{-n}\left|\int_0^1 \big(\partial_z g(\Lambda^n\theta, z_n+t\delta z_n) - \partial_z g(\Lambda^n\theta, z_n)\big)dt\right| |\delta z_n| \\
&\leq \mathrm{Lip}(\partial_z g)\left(\frac{a^2}{b}\right)^n |\underline{\delta z}|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^{-n}\big|g(\Lambda^n(\theta+\delta\theta), z_n) - g(\Lambda^n\theta, z_n) - \partial_\theta g(\Lambda^n\theta, z_n)\Lambda^n\delta\theta\big| \\
&\leq b^{-n}\left|\int_0^1 \big(\partial_\theta g(\Lambda^n(\theta+t\delta\theta), z_n) - \partial_\theta g(\Lambda^n\theta, z_n)\big)dt\right| |\Lambda^n\delta\theta| \\
&\leq b^{-n}\left|\int_0^1 \big(\partial_\theta g(\Lambda^n(\theta+t\delta\theta), z_n) - \partial_\theta g(\Lambda^n(\theta+t\delta\theta), 0)\big)dt\right| |\Lambda^n\delta\theta| \\
&+ b^{-n}\left|\int_0^1 \big(\partial_\theta g(\Lambda^n\theta, z_n) - \partial_\theta g(\Lambda^n\theta, 0)\big)dt\right| |\Lambda^n\delta\theta| \\
&\leq 2\mathrm{Lip}_z(\partial_\theta g)\left(\frac{a|\Lambda|}{b}\right)^n \big|a^{-n}z_n\big|\,|\delta\theta| \\
&\leq 2\mathrm{Lip}_z(\partial_\theta g)\left(\frac{a|\Lambda|}{b}\right)^n |\underline{z}|\,|\delta\theta|.
\end{aligned}$$

Les inégalités suivantes montrent que $\partial_{\underline{z}}\tilde{g}$ est lipschitzienne.

$$\begin{aligned}
b^{-n}\big|\big(\partial_z g(\Lambda^n(\theta+\delta\theta), z_n+\delta z_n) - \partial_z g(\Lambda^n\theta, z_n)\big)Z_n\big| \\
&\leq \mathrm{Lip}(\partial_z g)\left(\frac{a|\Lambda|}{b}\right)^n \big|\big(\delta\theta, |\Lambda|^{-n}\delta z_n\big)\big|\,\big|a^{-n}Z_n\big| \\
&\leq \mathrm{Lip}(\partial_z g)\left(\frac{a|\Lambda|}{b}\right)^n \big|\big(\delta\theta, a^{-n}\delta z_n\big)\big|\,\big|a^{-n}Z_n\big| \\
&\leq \mathrm{Lip}(\partial_z g)\,|(\delta\theta, \delta\underline{z})|\,|\underline{Z}|
\end{aligned}$$

d'où

$$|\partial_z\tilde{g}(\theta+\delta\theta, \underline{z}+\delta\underline{z}) - \partial_z\tilde{g}(\theta, \underline{z})| \leq \mathrm{Lip}(\partial_z g)\,|(\delta\theta, \delta\underline{z})|\,.$$

Les inégalités suivantes montrent que $\partial_\theta\tilde{g}$ est lipschitzienne par rapport à $\underline{z}$.

$$\begin{aligned}
b^{-n}\big|\partial_\theta g(\Lambda^n\theta, z_n+\delta z_n)\Lambda^n - \partial_\theta g(\Lambda^n\theta, z_n)\Lambda^n\big| &\leq \left(\frac{a|\Lambda|}{b}\right)^n \mathrm{Lip}_z(\partial_\theta g)\,\big|a^{-n}\delta z_n\big| \\
&\leq \mathrm{Lip}_z(\partial_\theta g)\,|\delta\underline{z}|
\end{aligned}$$

d'où

$$|\partial_\theta \tilde{g}(\theta, \underline{z}+\delta\underline{z}) - \partial_\theta \tilde{g}(\theta, \underline{z})| \le \mathrm{Lip}_z(\partial_\theta g)\,|\delta\underline{z}|\,.$$

Pour voir que $\partial_\theta \tilde{g}$ est höldérienne par rapport à θ, on remarque que

$$b^{-n}\Big|\big(\partial_\theta g(\Lambda^n(\theta+\delta\theta), z_n) - \partial_\theta g(\Lambda^n\theta, z_n)\big)\Lambda^n\Big| \le \begin{cases} \mathrm{H\ddot{o}ld}_\beta(\partial_\theta g)\left(\frac{|\Lambda|^{1+\beta}}{b}\right)^n |\delta\theta|^\beta \\ 2\mathrm{Lip}_z(\partial_\theta g)\left(\frac{a|\Lambda|}{b}\right)^n r. \end{cases}$$

On note

$$L_1 := \mathrm{H\ddot{o}ld}_\beta(\partial_\theta g) \text{ et } L_2 := 2\mathrm{Lip}_z(\partial_\theta g)$$

et on cherche le premier entier n tel que

$$L_2\left(\frac{a|\Lambda|}{b}\right)^n r \ge L_1\left(\frac{|\Lambda|^{1+\beta}}{b}\right)^n |\delta\theta|^\beta$$

on trouve

$$n \le \frac{\log\left(\frac{L_2 r}{L_1|\delta\theta|^\beta}\right)}{\log\left(\frac{|\Lambda|^\beta}{a}\right)}$$

d'où

$$b^{-n}\Big|\big(\partial_\theta g(\Lambda^n(\theta+\delta\theta), z_n) - \partial_\theta g(\Lambda^n\theta, z_n)\big)\Lambda^n\Big| \le C^{ste}|\delta\theta|^{\beta-\beta\left(\frac{\log|\Lambda|^{1+\beta}-\log b}{\log|\Lambda|^\beta-\log a}\right)}.$$

$\partial_\theta \tilde{g}$ est donc höldérienne par rapport à θ, puisque

$$0 < \left(\frac{\log|\Lambda|^{1+\beta}-\log b}{\log|\Lambda|^\beta-\log a}\right) < 1.$$

On a donc obtenu un germe de variété $\tilde{h}$-invariante qui est le graphe de

$$(I\times J, 0) \ni (\theta, x) \longmapsto \Phi_0(\theta, x) := (\Phi(\theta, x))_0 \in (K, 0).$$

Pour montrer qu'elle est tangente à $I\times J$ en 0, on va montrer que

$$D\Phi_0(0,0) = 0.$$

On pose

$$\big((\theta, x_0), D\Phi_0(0,0)(\theta, x_0)\big) = (x_n, y_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

l'identité

$$DF(0,\underline{0})((\theta, x_0), D\Phi_0(0,0)(\theta, x_0)) = \underline{0}$$

donne

$$(x_{n+1} - Bx_n - Dy_n, y_{n+1} - Cy_n) = (0,0) \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

L'automorphisme de $\mathcal{K}_b$ donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{K}_b &\longrightarrow \mathcal{K}_b \\ \underline{y} &\longmapsto (y_{n+1} - Cy_n)_{n\in\mathbf{N}} \end{aligned}$$

envoie donc $\underline{y}$ sur $\underline{0}$, d'où

$$\underline{y} = \underline{0} \text{ et en particulier } y_0 = 0$$

c'est-à-dire

$$D\phi(0,0) = 0.$$

Chapitre 2

Prolongement des variétés invariantes.

2.1 Le cas de la différentiabilité infinie.

On note $\mathbf{T}^k = \mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k$, le tore de dimension k muni de la métrique plate obtenue par relèvement de la métrique standard de l'espace euclidien $\mathbf{R}^k$ et $M := \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$. Soit $h : (M, \Sigma) \longrightarrow (M, \Sigma)$ un germe en

$$\Sigma := \mathbf{T}^k \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$$

de difféomorphisme de classe C^∞ de la forme

$$(\theta, x, y, z) = u \longmapsto h(u) = (e(\theta, x, y), f_+(\theta, x, y), f_-(\theta, x, y), g(\theta, x, y, z)).$$

En d'autres termes, h "fibre" au-dessus du germe f de difféomorphisme de $M_0 := \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ qui a pour composantes e, f_+ et f_-.

2.1.1 Hypothèses et notations.

On suppose que les germes en Σ des sous-variétés

$$W^+ := \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^n \times \{0\} \times \{0\} \text{ et } W^- := \mathbf{T}^k \times \{0\} \times \mathbf{R}^p \times \{0\}$$

de M sont invariants par h et que le germe en Σ de la sous-variété

$$W := \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \{0\}$$

de M a un contact infini avec son image par h le long de $W^+ \cup W^-$. Sous l'hypothèse d'"hyperbolicité normale", on a le théorème de prolongement de variété invariante suivant.

2.1.2 Le théorème de prolongement.

Théorème 6 *On suppose que les automorphismes linéaires* $A_\theta \in GL(\mathbf{R}^n)$ *et* $B_\theta \in GL(\mathbf{R}^p)$ *définis par*

$$A_\theta := \frac{\partial f_+}{\partial x}(\theta, 0, 0) \text{ et } B_\theta := \frac{\partial f_-}{\partial y}(\theta, 0, 0)$$

vérifient

$$\text{(HN)} \qquad \sup_\theta |A_\theta| = c < 1 \text{ et } \sup_\theta \left|B_\theta^{-1}\right| = c' < 1.$$

Alors tout germe en Σ *de sous-variété* V *de* $M \setminus W^-$ *de classe* C^∞*, invariant par* h *et ayant un contact infini avec* W *le long du germe en* Σ *de* W^+ *se prolonge de manière unique en un germe en* Σ *invariant par* h *de sous-variété* $\tilde{V}$ *de* M *de classe* C^∞*, ayant un contact infini avec* W *le long du germe en* Σ *de* W^-.

2.1.3 Traduction du théorème.

Dans la suite on désigne les germes en Σ de tous les objets qu'on étudie par leur représentants. Dans un voisinage de "$\{y = 0\}$" dans $M \setminus W^-$, la sous-variété V est donnée par le graphe d'une application ϕ de classe C^∞

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p &\longrightarrow \mathbf{R}^q \\ (\theta, x, y) &\longmapsto z = \phi(\theta, x, y) \end{aligned}$$

telle que

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial y^k}(\theta, x, 0) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

On déduira le théorème de sa formulation suivante :

Lemme 4 *Dans un voisinage de "*$\{(x, y) = (0, 0)\}$*" dans* M*, l'application* ϕ *se prolonge de manière unique en une application de classe* C^∞ *(qu'on notera encore* ϕ*) dont le graphe est invariant par* h*, et on a*

$$\frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}(\theta, 0, y) = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

2.1.4 Remarque.

L'adhérence du domaine de définition de l'application ϕ initiale ne contient *à priori* aucun ouvert de W^-. L'unicité vient donc de l'invariance par h.

2.1.5 Preuve de l'enoncé équivalent du théorème.

Première étape.

Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits, on note $r = (r_+, r_-)$ et

$$\begin{aligned} B_r &= \{(\theta, x, y) \in M_0; |x| \leq r_+ \text{ et } |y| \leq r_-\} \\ W_r^{\pm} &= W^{\pm} \cap B_r \text{ (en identifiant } M_0 \text{ à } M_0 \times \{0\}) \\ D_r &= B_r \setminus f(B_r). \end{aligned}$$

A r_- fixé, pour r_+ assez petit on a $D_r \subset \mathrm{dom}(\phi)$, ce que nous supposerons. On note $C_r^{\pm}$, $c_r^{\pm}$ les constantes optimales telle que pour tout $v \in B_r$, on ait

$$e^{-C_r^+}|x| \leq |f_+(v)| \leq e^{-c_r^+}|x| \tag{2.1}$$

$$e^{c_r^-}|y| \leq |f_-(v)| \leq e^{C_r^-}|y|. \tag{2.2}$$

On désigne par e^{-1}, f_+^{-1}, f_-^{-1} les trois composantes de f^{-1} et on pose

$$\begin{aligned} -c^+ &= \max\left\{\log\left|\frac{\partial f_+}{\partial x}(v)\right| : v \in \Sigma\right\} \\ -c^- &= \max\left\{\log\left|\frac{\partial f_-^{-1}}{\partial y}(v)\right| : v \in \Sigma\right\} \\ C^+ &= \max\left\{\log\left|\frac{\partial f_+^{-1}}{\partial x}(v)\right| : v \in \Sigma\right\} \\ C^- &= \max\left\{log\left|\frac{\partial f_-}{\partial y}(v)\right| : v \in \Sigma\right\} \end{aligned}$$

et, pour $R > 0$,

$$\begin{aligned} K &= \max\left\{\log|Dh(u)| : u \in \Sigma\right\} \\ L &= \max\left\{\log\left|D(f^{-1})(u)\right| : u \in \Sigma\right\} \\ K_{r,R} &= \log\left(\mathrm{Lip}\left(h|_{B_r \times \{|z| \leq R\}}\right)\right) \\ L_r &= \log\left(\mathrm{Lip}\left(f^{-1}|_{B_r}\right)\right). \end{aligned}$$

On a par hypothèse

$$0 < c^- \leq C^- \leq K \qquad\qquad 0 < c^+ \leq C^+ \leq L \tag{2.3}$$

et

$$\lim_{r \to 0} C_r^{\pm} = C^{\pm} \qquad \lim_{r \to 0} c_r^{\pm} = c^{\pm} \qquad \lim_{(r,R) \to (0,0)} K_{r,R} = K \qquad \lim_{r \to 0} L_r = L \tag{2.4}$$

On définit deux applications $m_r : B_r \setminus W^- \longrightarrow \mathbf{N}$ et $Y_r : B_r \setminus W^- \longrightarrow D_r$ par la relation

$$Y_r(v) = f^{-m_r(v)}(v) \tag{2.5}$$

et on a alors d'après (2.1) et (2.2)

$$\frac{\log\left(\frac{r_+}{|x|}\right)}{C_r^+} - 1 < m_r(v) \leq \frac{\log\left(\frac{r_+}{|x|}\right)}{c_r^+} \tag{2.6}$$

$$|y| \left(\frac{|x|}{r_+}\right)^{\frac{C_r^-}{c_r^+}} \leq \left| f_-^{-m_r(v)}(v) \right| \leq e^{c_r^-} |y| \left(\frac{|x|}{r_+}\right)^{\frac{c_r^-}{C_r^+}}. \tag{2.7}$$

En effet, on a d'une part

$$e^{-m_r(v)C_r^+} \left| f_+^{-m_r(v)}(v) \right| \leq |x| \leq e^{-m_r(v)c_r^+} \left| f_+^{-m_r(v)}(v) \right|$$

et d'autre part

$$e^{-C_r^+} r_+ < \left| f_+^{-m_r(v)}(v) \right| \leq r_+,$$

on en déduit donc (2.6). On a aussi

$$e^{m_r(v)c_r^-} \left| f_-^{-m_r(v)}(v) \right| \leq |y| \leq e^{m_r(v)C_r^-} \left| f_-^{-m_r(v)}(v) \right|,$$

on en déduit donc que

$$|y| e^{-m_r(v)C_r^-} \leq \left| f_-^{-m_r(v)}(v) \right| \leq |y| e^{-m_r(v)c_r^-}$$

et d'après (2.6)

$$|y| e^{-\log\left(\frac{r_+}{|x|}\right)\frac{C_r^-}{c_r^+}} \leq \left| f_-^{-m_r(v)}(v) \right| < |y| e^{-\left(\frac{\log\left(\frac{r_+}{|x|}\right)}{C_r^+} + 1\right)c_r^-}$$

d'où (2.7). On note

$$u := (\theta, x, y, z) := (v, z) \text{ et } h(u) := h(v, z) := (f(v), g(v, z)).$$

La variété V étant h-invariante, on a donc

$$\Big(f(v), g\big(v, \phi(v)\big)\Big) = \Big(f(v), \phi\big(f(v)\big)\Big),$$

lorsque les deux membres ont un sens. Cela permet déjà d'étendre ϕ à B_r par la formule

$$\phi(v) = g\left(f^{-m_r(v)}(v), \phi\left(f^{-m_r(v)}(v)\right)\right).$$

Si on pose

$$v_n := f^{-n}(v) \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}$$

on a alors

$$\phi(v_n) = g\big(v_{n+1}, \phi(v_{n+1})\big).$$

Par hypothèse, on a pour tout $j \in \mathbf{N}$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} g(\theta, 0, y, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(\theta, x, 0, 0) = 0, \tag{2.8}$$

on peut donc écrire pour tout entier k

$$g(\theta, x, y, z) = \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \partial_x^{k+1} g(\theta, tx, y, 0) dt\right) x^{k+1} + \left(\int_0^1 \partial_z g(\theta, x, y, tz) dt\right) z$$

$$g(\theta, x, y, z) = \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \partial_y^{k+1} g(\theta, x, ty, 0) dt\right) y^{k+1} + \left(\int_0^1 \partial_z g(\theta, x, y, tz) dt\right) z$$

et si l'on pose

$$K_R = \max\left\{0, \max\left\{\log|\partial_z g(\theta, x, y, z)| : \ (\theta, x, y) \in B_r, |z| \leq R\right\}\right\},$$

il existe donc, pour tout $\alpha > 0$, une constante k_α telle que, pour $|z| \leq R$, on ait

$$|g(\theta, x, y, z)| \leq k_\alpha \min\{|x|, |y|\}^\alpha + e^{K_R}|z|. \tag{2.9}$$

Si on note

$$v_n := (\theta_n, x_n, y_n) \text{ et } m := m_r(v),$$

on va faire l'hypothèse *a priori* que l'on a $|\phi(v_n)| \leq R$ *fixé* assez petit pour $0 \leq n \leq m$, ce qui donne d'après (2.9)

$$|\phi(v_n)| \leq k_\alpha \min\left\{|x_{n+1}|, |y_{n+1}|\right\}^\alpha + e^{K_R}|\phi(v_{n+1})|$$

d'où, pour $0 \leq n \leq m$,

$$\begin{aligned} |\phi(v_n)| \leq{}& k_\alpha \min\left\{|x_{n+1}|, |y_{n+1}|\right\}^\alpha + k_\alpha e^{K_R} \min\left\{|x_{n+2}|, |y_{n+2}|\right\}^\alpha \\ &+ \cdots + k_\alpha e^{(m-n-1)K_R} \min\left\{|x_m|, |y_m|\right\}^\alpha + e^{(m-n)K_R}|\phi(v_m)|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

On montrera alors que, pour r_+, r_- assez petits, cette hypothèse *a priori* est justifiée. D'après (2.1) à (2.4), la suite $(|x_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et

la suite $(|y_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement décroissante, si on note $\mu(v) = \min\{|x|, |y|\}$, alors on a l'un des trois cas suivant.
Premier cas. Si $|x_0| > |y_0|$, on a alors

$$\max_{0\leq n\leq m} \mu(v_n) = |y_0|$$

et d'après (2.10), on a

$$\begin{aligned}|\phi(v_0)| &\leq k_\alpha \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} e^{jK_R}\right) |y_0|^\alpha + e^{(m-n)K_R}\, |\phi(v_m)| \\ &\leq k_\alpha \left(\frac{e^{(m-n)K_R} - 1}{e^{K_R} - 1}\right) |x_0|^\alpha + e^{(m-n)K_R} |\phi(v_m)|\end{aligned}$$

d'où

$$|\phi(v_n)| \leq C^{ste}|x_0|^{\alpha - \frac{K_R}{c^+}} + C^{ste}|x_0|^{-\frac{K_R}{c^+}}|\phi(v_m)|. \tag{2.11}$$

Deuxième cas. Si $|y_m| \geq |x_m|$, on a alors

$$\max_{0\leq n\leq m} \mu(v_n) = |x_m| \leq |y_m|$$

et d'après (2.10), on a

$$|\phi(v_n)| \leq k_\alpha \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} e^{jK_R}\right) |y_m|^\alpha + e^{(m-n)K_R}\, |\phi(v_m)|\,.$$

d'où

$$|\phi(v_n)| \leq C^{ste}|x_0|^{\alpha\frac{c^-}{C^+} - \frac{K_R}{c^+}} + C^{ste}|x_0|^{-\frac{K_R}{c^+}}|\phi(v_m)|. \tag{2.12}$$

Troisième cas. Il existe un unique $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ tel que

$$|x_{k-1}| \leq |y_{k-1}| \text{ et } |x_k| > |y_k|$$

alors d'après (2.1) à (2.7), on a

$$\begin{gathered}\frac{\log(|y_0|/|x_0|)}{C^+ + C^-} < k \leq \frac{\log(|y_0|/|x_0|)}{c^+ + c^-} + 1 \\ \max_{0\leq n\leq m} \mu(v_n) \leq |y_{k-1}| \leq e^{c^-(1-k)}|y_0|.\end{gathered}$$

Si on pose $\lambda = c^-/(C^+ + C^-)$, on a alors

$$\max_{0\leq n\leq m} \mu(v_n) \leq e^{c^-}|x_0|^\lambda|y_0|^{1-\lambda}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
|\phi(v_n)| &\leq k_\alpha \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} e^{jK_R} \right) \left(\max_{n\leq k\leq m} \mu(v_k) \right)^\alpha + e^{(m-n)K_R} \, |\phi(v_m)| \\
&\leq k_\alpha \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} e^{jK_R} \right) e^{\alpha c^-} |x_0|^{\alpha\lambda} |y_0|^{\alpha(1-\lambda)} + e^{(m-n)K_R} \, |\phi(v_m)| \\
&\leq k_\alpha \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} e^{jK_R} \right) e^{\alpha c^-} r_-^{\alpha(1-\lambda)} |x_0|^{\alpha\lambda} + e^{(m-n)K_R} \, |\phi(v_m)| \, ,
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire

$$
|\phi(v_n)| \leq C^{ste} |x_0|^{\alpha\lambda - \frac{K_R}{c^+}} + C^{ste} |x_0|^{-\frac{K_R}{c^+}} |\phi(v_m)|. \tag{2.13}
$$

Comme la fonction donnée par

$$
(\theta, x, y) \longmapsto |\phi(\theta, x, y)| / |y|^\alpha
$$

est bornée sur D_r pour tout $\alpha > 0$, on déduit de (2.6), (2.11), (2.12) et (2.13) l'inégalité

$$
|\phi(v_n)| \leq C^{ste} |x_0|^{\alpha\lambda - \frac{K_R}{c^+}}, \ 0 \leq n \leq m
$$

avec une constante dépendant de r, R et α et diminuant quand r_+, r_- diminuent. Notre hypothèse *a priori* est donc justifiée et l'on a alors le lemme suivant.

Lemme 5 *Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits, le réel $\alpha > 0$ assez grand, et pour tout réel β tel que $0 < \beta < \alpha\lambda - \frac{K_R}{c^+}$, la fonction donnée par*

$$
(\theta, x, y) \longmapsto |\phi(\theta, x, y)| / |x|^\beta
$$

est bornée sur $B_r \setminus W^-$.

Deuxième étape.

Le lemme précédent montre qu'on peut prolonger par continuité l'application ϕ en tout point de W_r^-, par 0. Il reste à montrer qu'on peut le faire de manière C^∞. On commence par la première dérivée. De l'identité

$$
\phi(v_n) = g\Big(f^{-1}(v_n), \phi\big(f^{-1}(v_n)\big) \Big)
$$

on déduit que

$$D\phi(v_n) = \partial_1 g\Big(f^{-1}(v_n), \phi\big(f^{-1}(v_n)\big)\Big) Df^{-1}(v_n) \\ + \partial_2 g\Big(f^{-1}(v_n), \phi\big(f^{-1}(v_n)\big)\Big) D\phi\big(f^{-1}(v_n)\big) Df^{-1}(v_n). \tag{2.14}$$

On a

$$\big|Df^{-1}(v_n)\big| \leq e^{L_r} \tag{2.15}$$

$$\Big|\partial_2 g\Big(f^{-1}(v_n), \phi\big(f^{-1}(v_n)\big)\Big)\Big| \leq e^{K_r}. \tag{2.16}$$

Pour majorer $\partial_1 g(v,z)$, on utilise le fait que pour tout $j \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\partial_1 g(\theta,0,y,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial^j}{\partial y^j}\partial_1 g(\theta,x,0,0) = 0 \tag{2.17}$$

on a donc pour tout entier k

$$\partial_1 g(v,z) = \Big(\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\partial_x^{k+1}\partial_1 g(\theta,tx,y,0)dt\Big)x^{k+1} + \Big(\int_0^1 \partial_z\partial_1 g(v,tz)dt\Big)z$$

$$\partial_1 g(v,z) = \Big(\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!}\partial_y^{k+1}\partial_1 g(\theta,x,ty,0)dt\Big)y^{k+1} + \Big(\int_0^1 \partial_z\partial_1 g(v,tz)dt\Big)z.$$

et si l'on pose

$$K_{1R} = \max\left\{\log|\partial_z\partial_1 g(\theta,x,y,z)| :\ (\theta,x,y) \in B_r, |z| \leq R\right\},$$

il existe donc pour tout $\alpha > 0$, une constante $k_{1\alpha}$ telle que

$$|\partial_1 g(v,z)| \leq k_{1\alpha}\min\left\{|x|,|y|\right\}^\alpha + K_{1R}|z|. \tag{2.18}$$

De (2.14) à (2.18), on obtient donc l'inégalité

$$|D\phi(v_n)| \leq e^{K_r+L_r}\left|D\phi(v_{n+1})\right| \\ + e^{L_r}k_{1\alpha}\min\left\{|x_{n+1}|,|y_{n+1}|\right\}^\alpha + e^{L_r}K_{1R}\left|\phi(v_{n+1})\right|.$$

D'après la preuve du premier lemme, il existe une constante $C_{r,\alpha}$ telle que

$$|D\phi(v_n)| \leq e^{K_r+L_r}\left|D\phi(v_{n+1})\right| + C_{r,\alpha}|x_0|^\alpha,$$

d'où finalement

$$|D\phi(v_0)| \leq e^{m(K_r+L_r)}\left|D\phi(v_m)\right| + C^{ste}_{r,\alpha}\left|x_0\right|^\alpha. \tag{2.19}$$

Du fait que pour tout $\alpha > 0$, la fonction donnée par

$$(\theta,x,y) \longmapsto |D\phi(\theta,x,y)|/|y|^\alpha$$

est bornée sur D_r et de (2.6), (2.19), on déduit le lemme suivant.

Lemme 6 *Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits, et le réel $\beta > 0$, la fonction donnée par*

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D\phi(\theta, x, y)|/|x|^\beta$$

est bornée sur $B_r \setminus W^-$.

Dernière étape.

Le lemme précédent montre qu'on peut prolonger par continuité l'application $D\phi$ en tout point de W_r^-, par 0. Pour montrer que c'est le cas des dérivées d'ordre supérieur, on raisonne par récurrence. On suppose que le lemme suivant est vrai pour $1 \le \ell \le (k-1)$ et on montre qu'il est vrai pour $\ell = k \ge 2$.

Lemme 7 *Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits, le réel $\alpha > 0$ et pour tout entier $\ell \in \{1, \dots, (k-1)\}$, la fonction donnée par*

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D^\ell\phi(\theta, x, y)|/|x|^\alpha$$

est bornée sur $B_r \setminus W^-$.

On pose $\tilde{\phi}(v) := (v, \phi(v))$, on a alors

$$\phi(v_n) = g(\tilde{\phi}(v_{n+1})).$$

D'après la formule de Faa-di Bruno, on a

$$\begin{aligned}
D^k\phi(v_n) &= D^k\left[g(\tilde{\phi}(v_{n+1}))\right] \\
D^k\phi(v_n) &= Dg(\tilde{\phi}(v_{n+1})) \cdot D^k\tilde{\phi}(v_{n+1}) \cdot Df^{-1}(v_n)^{\odot k} \\
&\quad + Dg(\tilde{\phi}(v_{n+1})) \cdot \left[\sum_{j=1}^{k-1} D^j[\tilde{\phi}(v_{n+1})]\right] \\
&\quad + \sum_{j=2}^{k} D^j(\tilde{\phi}(v_{n+1})) \cdot \left[\sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\in\mathbf{N}^*}^{i_1+\cdots+i_j=k} \bigodot_{\ell=1}^{j} D^{i_\ell}[\tilde{\phi}(v_{n+1})]\right]
\end{aligned}$$

on déduit donc que

$$\left|D^k\phi(v_n)\right| \le \left|Dg(\tilde{\phi}(v_{n+1})\right| \left|D^k\tilde{\phi}(v_{n+1})\right| \left|Df^{-1}(v_n)\right|^k + R_n(x_0)$$

c'est-à-dire

$$\left|D^k\phi(v_n)\right| \leq e^{K_r+kL_r}\left|D^k\phi(v_{n+1})\right| + R_n(x_0) \tag{2.20}$$

où les $R_n(x_0)$ sont des fonctions telles que les

$$R_n(x_0)/|x_0|^\beta \text{ pour } 0 \leq n \leq (m-1)$$

sont majorées par la même constante $K_{r,\beta}$ sur $B_r \setminus W^-$ pour tout $\beta > 0$. On obtient donc de (2.20) l'inégalité

$$\left|D^k\phi(v_0)\right| \leq e^{m(K_r+kL_r)}\left|D^k\phi(v_m)\right| + C^{ste}_{r,\beta}\,|x_0|^\beta\,. \tag{2.21}$$

Du fait que la fonction donnée par

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D^k\phi(\theta, x, y)|/|y|^\alpha$$

est bornée sur D_r pour tout α et de (2.6), (2.21), on déduit le lemme pour $\ell = k$.

Lemme 8 *Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits et le réel $\beta > 0$, la fonction donnée par*

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D^k\phi(\theta, x, y)|/|x|^\alpha$$

est bornée sur $B_r \setminus W^-$.

2.2 Le cas de la différentiabilité finie.

Dans cette partie, on va montrer le même théorème de prolongement de variétés invariantes dans le cadre de la différentiabilité finie.

2.2.1 Le théorème de prolongement.

On considère donc $h : (M, \Sigma) \longrightarrow (M, \Sigma)$ un germe en

$$\Sigma := \mathbf{T}^k \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$$

de difféomorphisme de classe C^∞ donné par

$$(\theta, x, y, z) = u \longmapsto h(u) = (e(\theta, x, y), f_+(\theta, x, y), f_-(\theta, x, y), g(\theta, x, y, z))\,.$$

On suppose que les germes en Σ des sous-variétés

$$W^+ := \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^n \times \{0\} \times \{0\} \text{ et } W^- := \mathbf{T}^k \times \{0\} \times \mathbf{R}^p \times \{0\}$$

de M sont invariants par h. On va montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe un entier $s(k)$ dépendant de k et de h tel que si on suppose que le germe en Σ de la sous-variété

$$W := \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \times \{0\}$$

de M a un contact d'ordre $s(k)$ avec son image par h le long du germe en Σ de $W^+ \cup W^-$ et que l'hypothèse d'"hyperbolicité normale" est vérifiée, on a alors le théorème de prolongement de variété invariante suivant.

Théorème 7 *On suppose que les automorphismes linéaires $A_\theta \in GL(\mathbf{R}^n)$ et $B_\theta \in GL(\mathbf{R}^p)$ définis par*

$$A_\theta := \frac{\partial f_+}{\partial x}(\theta, 0, 0) \text{ et } B_\theta := \frac{\partial f_-}{\partial y}(\theta, 0, 0)$$

vérifient

$$\text{(HN)} \qquad \sup_\theta |A_\theta| = c < 1 \text{ et } \sup_\theta \left|B_\theta^{-1}\right| = c' < 1.$$

Alors tout germe en Σ de sous-variété V de $M \backslash W^-$ de classe $C^{s(k)}$, invariant par h et ayant un contact d'ordre $s(k)$ avec W le long du germe en Σ de W^+ se prolonge de manière unique en un germe en Σ de sous-variété $\tilde{V}$ de M de classe C^k, invariant par h et ayant un contact d'ordre k avec W le long du germe en Σ de W^-.

2.2.2 Énoncé équivalent.

Comme dans la première partie, dans un voisinage de "$\{y = 0\}$" dans $M \setminus W^-$, la sous variété V est donnée par le graphe d'une application ϕ de classe $C^{s(k)}$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p &\longrightarrow \mathbf{R}^q \\ (\theta, x, y) &\longmapsto z = \phi(\theta, x, y) \end{aligned}$$

telle que

$$\frac{\partial^j \phi}{\partial y^j}(\theta, x, 0) = 0 \text{ pour tout } j \in \{0, \dots, s(k)\}.$$

Si on choisit $s(k)$ tel que

$$s(k)\frac{c^-}{C^+ + C^-} - \frac{K + kL}{c^+} - k > 0$$

on déduira le théorème du

Lemme 9 *Dans un voisinage de "$\{(x,y) = (0,0)\}$" dans M, l'application ϕ se prolonge de manière unique en une application de classe C^k (qu'on notera encore ϕ) dont le graphe est invariant par h, et on a*

$$\frac{\partial^j \phi}{\partial x^j}(\theta, 0, y) = 0 \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, k\}.$$

2.2.3 Preuve de l'énoncé équivalent.

Première étape.

comme dans la première partie, on note

$$u := (\theta, x, y, z) := (v, z) \text{ et } h(u) := h(v, z) := (f(v), g(v, z)).$$

La variété V étant h-invariante, on a donc

$$\Big(f(v), g\big(v, \phi(v)\big)\Big) = \Big(f(v), \phi\big(f(v)\big)\Big).$$

Si on pose

$$v_n := f^{-n}(v) \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}$$

on a alors

$$\phi(v_n) = g\big(v_{n+1}, \phi(v_{n+1})\big).$$

Par hypothèse, on a pour $0 \leq j \leq s(k)$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} g(\theta, 0, y, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(\theta, x, 0, 0) = 0, \tag{2.22}$$

on peut donc écrire pour tout $j \in \{0, \ldots, s(k)\}$

$$g(\theta, x, y, z) = \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^j}{j!} \partial_x^{j+1} g(\theta, tx, y, 0) dt\right) x^{j+1} + \left(\int_0^1 \partial_z g(\theta, x, y, tz) dt\right) z$$

$$g(\theta, x, y, z) = \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^j}{j!} \partial_y^{j+1} g(\theta, x, ty, 0) dt\right) y^{j+1} + \left(\int_0^1 \partial_z g(\theta, x, y, tz) dt\right) z$$

et si l'on pose

$$K_R = \max\left\{\log|\partial_z g(\theta,x,y,z)| : \ (\theta,x,y,z)\in B_r, |z|\leq R\right\},$$

il existe donc, pour tout $0<\alpha\leq s(k)$, une constante k_α telle que

$$|g(\theta,x,y,z)|\leq k_\alpha \min\{|x|,|y|\}^\alpha + e^{K_R}|z|. \tag{2.23}$$

Si on note

$$v_n := (\theta_n, x_n, y_n) \text{ et } m := m(u)$$

et que l'on suppose *a priori* $|\phi(v_n)|\leq R$ donné petit pour $0\leq n\leq m(u)$, on a alors

$$|\phi(v_n)|\leq k_\alpha \min\left\{|x_{n+1}|, |y_{n+1}|\right\}^\alpha + e^{K_R}\left|\phi(v_{n+1})\right|$$

d'où

$$\begin{aligned}|\phi(v_0)| &\leq k_\alpha \min\left\{|x_1|, |y_1|\right\}^\alpha + k_\alpha e^{K_R}\min\left\{|x_2|, |y_2|\right\}^\alpha \\ &\quad + \cdots + k_\alpha e^{(m-1)K_R}\min\left\{|x_m|, |y_m|\right\}^\alpha + k_{1\alpha}^m\left|\phi(v_m)\right|.\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|\phi(v_0)|\leq k_\alpha\left(\sum_{j=0}^{m-1} e^{jK_R}\min\{|x_{j+1}|,|y_{j+1}|\}^\alpha\right) + e^{mK_R}|\phi(v_m)|. \tag{2.24}$$

On déduit donc de (2.24) et des trois cas de la première partie le

Lemme 10 *Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits et α tel que $0<\alpha\leq k$, d'après le choix de $s(k)$, la fonction donnée par*

$$(\theta,x,y)\longmapsto |\phi(\theta,x,y)|/|x|^\alpha$$

est bornée sur $B_r\backslash W^-$.

Deuxième étape.

Le lemme précédent montre qu'on peut prolonger par continuité l'application ϕ en tout point de W_r^-, par 0. On va montrer la même chose pour ses dérivées.
On commence par $D\phi$, on suppose donc que $k\geq 1$. De l'identité

$$\phi(v_n) = g\Big(f^{-1}(v_n), \phi\big(f^{-1}(v_n)\big)\Big)$$

on déduit que

$$D\phi(v_n) = \partial_1 g\Big(f^{-1}(v_n), \phi\big(f^{-1}(v_n)\big)\Big) Df^{-1}(v_n) \\ + \partial_2 g\Big(f^{-1}(v_n), \phi\big(f^{-1}(v_n)\big)\Big) D\phi\big(f^{-1}(v_n)\big) Df^{-1}(v_n). \tag{2.25}$$

On a par hypothèse

$$\big|Df^{-1}(v_n)\big| \leq e^{L_r} \tag{2.26}$$

$$\Big|\partial_2 g\Big(f^{-1}(v_n), \phi\big(f^{-1}(v_n)\big)\Big)\Big| \leq e^{K_r}. \tag{2.27}$$

Pour majorer $\partial_1 g(v,z)$, on utilise le fait que pour tout $j \in \{0, \ldots, (s(k)-1)\}$

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}\partial_1 g(\theta, 0, y, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial^j}{\partial y^j}\partial_1 g(\theta, x, 0, 0) = 0. \tag{2.28}$$

Comme dans la première section, il existe donc pour tout réel β tel que $0 < \beta \leq s(k) - 1$, deux constantes k_β et $k_{1\beta}$ dépendant de r et β, telles que

$$|\partial_1 g(v,z)| \leq k_\beta \min\{|x|, |y|\}^\beta + k_{1\beta}|z| \text{ pour tout } (v,z) \in B_r. \tag{2.29}$$

De (2.25) à (2.29), on obtient donc l'inégalité

$$|D\phi(v_n)| \leq e^{K_r + L_r}\,|D\phi(v_{n+1})| \\ + e^{L_r} k_\beta \min\{|x_{n+1}|, |y_{n+1}|\}^\beta + e^{L_r} k_{1\beta}\,|\phi(v_{n+1})|\,.$$

D'aprés la preuve du lemme précédent, il existe une constante $C_{r,\alpha}$ telle que

$$|D\phi(v_n)| \leq e^{K_r + L_r}\,|D\phi(v_{n+1})| + C_{r,\alpha}|x_0|^\alpha \text{ pour } 0 < \alpha \leq k$$

d'où finalement, pour tout α tel que $0 < \alpha \leq k$, on a

$$|D\phi(v_0)| \leq e^{m(K_r + L_r)}\,|D\phi(v_m)| + C^{ste}_{r,\alpha}\,|x_0|^\alpha. \tag{2.30}$$

Du fait que pour tout réel β tel que $0 < \beta \leq (s(k)-1)$, la fonction donnée par

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D\phi(\theta, x, y)|/|y|^\beta$$

est bornée sur D_r et du choix de $s(k)$, on déduit de (2.30) le lemme suivant.

Lemme 11 *Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits et α tel que $0 < \alpha \leq (k-1)$, la fonction donnée par*

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D\phi(\theta, x, y)/|x|^\alpha$$

est bornée sur $B_r \backslash W^-$.

Dernière étape.

Le lemme précédent montre qu'on peut prolonger par continuité l'application $D\phi$ en tout point de W_r^-, par 0. Pour montrer que c'est le cas des dérivées d'ordre supérieur, on raisonne par récurrence. On suppose que le lemme suivant est vrai pour $1 \leq \ell \leq (k-1)$ et on montre qu'il est vrai pour $\ell = k \geq 2$.

Lemme 12 *Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits, l'entier $\ell \in \{1, \ldots, (k-1)\}$ et le réel α tel que $0 < \alpha < (k-\ell)+1$, la fonction donnée par*

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D^\ell \phi(\theta, x, y)|/|x|^\alpha$$

est bornée sur $B_r \backslash W^-$.

Comme dans la première section, on note $\tilde{\phi}(v) := (v, \phi(v))$, on a alors

$$\phi(v_n) = g(\tilde{\phi}(v_{n+1}))$$

et de la formule de Faa-di Bruno, on déduit que

$$\left|D^k \phi(v_n)\right| \leq \left|Dg(\tilde{\phi}(v_{n+1})\right| \left|D^k \tilde{\phi}(v_{n+1})\right| \left|Df^{-1}(v_n)\right|^k + R_n(x_0)$$

c'est-à-dire

$$\left|D^k \phi(v_n)\right| \leq e^{K_r + kL_r} \left|D^k \phi(v_{n+1})\right| + R_n(x_0) \tag{2.31}$$

où les $R_n(x_0)$ sont des fonctions telles que les

$$R_n(x_0)/|x_0|^\beta \text{ pour } 0 \leq n \leq (m-1)$$

sont majorées par la même constante $K_{r,\beta}$ sur $B_r \setminus W^-$ pour tout réel β tel que $0 < \beta < 1$. On obtient donc de (2.31) l'inégalité

$$\left|D^k \phi(v_0)\right| \leq e^{m(K_r + kL_r)} \left|D^k \phi(v_m)\right| + C^{ste}_{r,\beta} \left|x_0\right|^\beta. \tag{2.32}$$

Du fait que pour tout réel β tel que $0 < \beta \leq (s(k) - k)$, la fonction donnée par

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D^k \phi(\theta, x, y)|/|y|^\beta$$

est bornée sur D_r et du choix de $s(k)$, on déduit de (2.32) le lemme pour $\ell = k$.

Lemme 13 *Quels que soient les réels r_+, $r_- > 0$ assez petits α tel que $0 < \alpha < 1$, la fonction donnée par*

$$(\theta, x, y) \longmapsto |D^k \phi(\theta, x, y)|/|x|^\alpha$$

est bornée sur $B_r \setminus W^-$.

Chapitre 3

Application du théorème de prolongement des variétés invariantes.

3.1 Hypothèses.

On considère p champs de vecteurs $U_1, \ldots, U_p$ linéaires diagonaux sur $\mathbf{R}^n$; ils vérifient donc

$$[U_i, U_j] = 0 \text{ pour } 1 \leq i, j \leq p.$$

Si l'on note $U : \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathrm{gl}_n(\mathbf{R})$ l'application linéaire

$$v \longmapsto \sum_{i=1}^{p} v_i U_i,$$

on a

$$U(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v) x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On suppose $n = p + 1$ et que les formes linéaires réelles $\lambda_i : \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ ainsi définies vérifient les hypothèses suivantes :

(H1) L'action U est "hyperbolique", c'est-à-dire que les λ_i sont p à p indépendantes sur $\mathbf{R}$.

(H2) Les λ_i sont dans "le domaine de Siegel", c'est-à-dire que l'enveloppe convexe des λ_i contient l'origine ($0 \in \mathrm{Conv}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$).

On va appliquer le "théorème de prolongement des variétés invariantes" à la résolution des équations

$$(\mathrm{E}_j) \qquad \mathscr{L}_{U_j}(f) = \theta_j \text{ pour } 1 \leq j \leq p,$$

où les $\theta_j : (\mathbf{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbf{R}$ sont des germes de fonctions C^∞.

3.2 Le théorème.

Théorème 8 *Si les θ_j sont formellement nuls à tous les ordres le long des hyperplans de coordonnées et tels que*

$$\mathscr{L}_{U_j}\theta_i = \mathscr{L}_{U_i}\theta_j \textit{ pour } 1 \leq i, j \leq p,$$

alors il existe un germe de fonction de classe C^∞

$$f : (\mathbf{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0)$$

qui vérifie les équations (E_j) pour $1 \leq j \leq p$.

Remarque importante. On en déduit le même théorème pour des germes U_j nuls en 0 de champs de vecteurs commutant deux à deux et "génériques", M. Chaperon ayant montré [Cha86] qu'ils étaient C^∞-linéarisables.

3.3 Le lien avec le théorème de prolongement.

Il s'agit de résoudre les équations

$$\mathscr{L}_{U(v)}(f) = \sum_{j=1}^{p} v_j \mathscr{L}_{U_j}(f) = \sum_{j=1}^{p} v_j \theta_j = \Theta(v)$$

c'est-à-dire, si on note $\Theta(v)(x) := \Theta_v(x)$, on doit résoudre

$$\frac{d}{dt} f\left(e^{tU(v)}x\right) = \Theta_v\left(e^{tU(v)}x\right)$$

où encore

$$f\left(e^{tU(v)}x\right) = f(x) + \int_0^t \Theta_v\left(e^{sU(v)}x\right) ds.$$

Le graphe de f sera donc une variété invariante par les difféomorphismes

$$h_v^t : (x, y) \longmapsto \left(g_v^t(x), y + \int_0^t \Theta_v\left(g_v^s(x)\right) ds\right)$$

où

$$g_v^t(x) = e^{tU(v)}$$

est le flot du champ de vecteurs $U(v)$. Cette variété invariante s'obtient par une suite d'applications du théorème de prolongement. Pour ce faire, on utilise les techniques introduites par M. Chaperon pour l'étude des germes d'actions de groupes élémentaires [Cha86].

3.4 Le “quasi-quotient” de $\mathbf{R}^n$ par l'action.

Comme $0 \in \mathrm{Conv}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et que l'action est hyperbolique, on a

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \text{ avec } 0 < \alpha_i \leq 1.$$

On choisit alors la base $\{e_1, \ldots, e_p\}$ de $\mathbf{R}^p$ de la manière suivante.
On détermine e_1 par

$$\begin{aligned} \lambda_3(e_1) = \cdots = \lambda_n(e_1) = 0 \\ \lambda_1(e_1) = 1 \text{ d'où } \lambda_2(e_1) < 0 \end{aligned}$$

pour $2 \leq k \leq p-1$, on détermine e_k par

$$\begin{aligned} \lambda_{k+2}(e_k) &= \cdots = \lambda_n(e_k) = 0 \\ \lambda_1(e_k) &= \cdots = \lambda_k(e_k) = 1 \text{ d'où } \lambda_{k+1}(e_k) < 0 \end{aligned}$$

et on détermine e_p par

$$\lambda_1(e_p) = \cdots = \lambda_p(e_p) = 1 \text{ d'où } \lambda_n(e_p) < 0.$$

les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ sont linéairement indépendants, car si on a

$$\sum_{j=1}^{p} \mu_j e_j = 0$$

alors

$$\begin{aligned} \lambda_n\left(\sum_{j=1}^{p} \mu_j e_j\right) &= \mu_p \lambda_n(e_p) = 0 \text{ ie } \mu_p = 0 \\ \lambda_p\left(\sum_{j=1}^{p-1} \mu_j e_j\right) &= \mu_{p-1} \lambda_p(e_{p-1}) = 0 \text{ ie } \mu_{p-1} = 0 \end{aligned}$$

et de proche en proche jusqu'à

$$\lambda_2(\mu_1 e_1) = \mu_1 \lambda_2(e_2) = 0 \text{ ie } \mu_1 = 0$$

On va étudier maintenant la structure du “quotient” de $Q_0 := \mathbf{R}^n$ par cette action. Soit $\epsilon > 0$, on remarque que toute orbite du champ de vecteurs

$$U_p = U(e_p) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(e_p) x_k \partial_{x_k}$$

dans $K_1 = Q_0 \setminus \{x_n = 0\}$ coupe la sous-variété

$$Q_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_n| = \epsilon\}$$

transversalement en un point unique ; l'espace *quotient* de K_1 par les orbites de U_p est donc difféomorphe à Q_1. le champ de vecteurs

$$U_{p-1} = U(e_{p-1}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(e_{p-1}) x_k \partial_{x_k}$$

est tangent à Q_1 et toute orbite de U_{p-1} dans $K_2 = Q_1 \setminus \{x_{n-1} = 0\}$ coupe la sous-variété

$$Q_2 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_{n-1}| = |x_n| = \epsilon\}$$

transversalement en un point unique. Le *quotient* de K_2 par les orbites de U_{p-1} est donc difféomorphe à Q_2. Ainsi de proche en proche on voit que le champs de vecteurs $U_1 = U(e_1)$ est tangent à la sous-variété

$$Q_{p-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_3| = \cdots = |x_n| = \epsilon\}$$

et toute orbite de U_1 dans $K_p = Q_{p-1} \setminus \{x_2 = 0\}$ coupe la sous-variété

$$Q_p = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_2| = \cdots = |x_n| = \epsilon\}$$

transversalement en un unique point. Le *quotient* de K_p par les orbites de U_1 est donc difféomorphe à la sous-variété Q_p. Comme les U_j commutent, ils engendrent une action linéaire

$$(t, x) \longmapsto e^{U(t)} x$$

de $\mathbf{R}^p$ sur $\mathbf{R}^n$, et Q_p est le quotient de $\mathbf{R}^n \setminus \{x_2 x_3 \cdots x_n = 0\}$ par cette action.

3.5 Preuve du théorème.

3.5.1 Première étape.

On commence donc par la résolution dans Q_{p-1} de l'équation

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \mathscr{L}_{U_1}(f) = \Theta_{e_1} := \Theta_1.$$

Comme Q_{p-1} est la réunion disjointe des 2-plans affines de $\mathbf{R}^n$ parallèles à $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ et passant par les points de l'ensemble fini

$$\Sigma_{p-1} := \{(0, 0, \pm\epsilon, \dots, \pm\epsilon)\}$$

on va résoudre l'équation (E_1) au voisinage de Σ_{p-1}.
On choisit ϵ assez petit, pour que Θ_1 soit définie dans un voisinage O_{p-1} de chaque point $o_{p-1} \in \Sigma_{p-1}$ dans Q_{p-1}, et on applique le théorème de *prolongement de variétés invariantes* à

$$\begin{aligned} h = h_1^t : (Q_{p-1} \times \mathbf{R}, (o_{p-1}, 0)) &\longrightarrow (Q_{p-1} \times \mathbf{R}, (o_{p-1}, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto h_1^t(x, y) = \left(g_1^t(x), y + \int_0^t \Theta_1 \left(g_1^s(x) \right) ds \right) \end{aligned}$$

avec $t > 0$, où $g_1^t(x)$ est le flot de U_1 dans la variété Q_{p-1}. Dans la carte (x_1, x_2) centrée en o_{p-1}, ce flot est donné par

$$g_1^t(x) = \left(e^{t\lambda_1(e_1)} x_1, e^{t\lambda_2(e_1)} x_2 \right).$$

On est donc dans la situation du théorème de prolongement, avec

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{R}^3 \\ \Sigma &= \{0\} \\ W^+ &= \{0\} \times \mathbf{R} \times \{0\} \\ W^- &= \mathbf{R} \times \{(0, 0)\} \\ W &= \mathbf{R}^2 \times \{0\} \\ A_\theta &= e^{t\lambda_1(e_1)} \text{ et } B_\theta = e^{t\lambda_2(e_1)}. \end{aligned}$$

On prend pour germe en Σ de sous-variété de $M \setminus W^-$, invariant par h et ayant un contact infini avec V le long du germe en Σ de W^+, la sous-variété donnée localement par le graphe de l' application

$$\phi_1 : (K_p = Q_{p-1} \setminus \{x_2 = 0\}, o_{p-1}) \to (\mathbf{R}, 0)$$

solution du *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{U_1}\phi_1 = \Theta_1 \\ \phi_1 \big|_{Q_p} = 0. \end{cases}$$

Cette sous-variété se prolonge de manière unique en une sous-variété de M invariante par h et ayant un contact infini avec V le long de W^-, elle est localement le graphe d'une application

$$f_1 : (Q_{p-1}, o_{p-1}) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0)$$

solution de l'équation (E_1) au voisinage de o_{p-1}.

3.5.2 Deuxième étape.

Le champ de vecteurs U_2 est tangent à la sous-variété

$$Q_{p-2} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_4| = \cdots = |x_n| = \epsilon\}$$

et toute orbite du champ U_2 dans $K_{p-1} = Q_{p-2} \setminus \{x_3 = 0\}$ coupe la sous variété Q_{p-1} transversalement en un unique point. Pour tout $z \in K_{p-1}$, il existe donc $t \in \mathbf{R}$ et $x \in Q_{p-1}$ uniques tels que $z = e^{tU_2}x$ et dans un voisinage O_{p-2} de chaque point

$$o_{p-2} \in \Sigma_{p-2} = \{(0, 0, 0, \pm\epsilon, \ldots, \pm\epsilon)\}$$

dans Q_{p-2}, l'application définie par

$$\phi_2\left(e^{tU_2}x\right) = f_1(x) + \int_0^t \Theta_2\left(e^{sU_2}x\right) ds$$

dans $O_{p-2} \cap K_{p-1}$ vérifie l'équation

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \mathscr{L}_{U_2}(f) = \Theta_2.$$

Pour obtenir une solution f_2 de (E_2) dans Q_{p-2}, on applique le théorème de *prolongement de variétés invariantes* à

$$\begin{aligned} h = h_2^t : (Q_{p-2} \times \mathbf{R}, (o_{p-2}, 0)) &\longrightarrow (Q_{p-2} \times \mathbf{R}, (o_{p-2}, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto h_2^t(x, y) = \left(g_2^t(x), y + \int_0^t \Theta_2\left(g_2^s(x)\right) ds\right) \end{aligned}$$

où $g_2^t(x)$ est le flot de U_2 dans la variété Q_{p-2}. Dans la carte (x_1, x_2, x_3) centrée en o_{p-2}, ce flot est donné par

$$g_2^t(x) = \left(e^{t\lambda_1(e_2)}x_1, e^{t\lambda_2(e_2)}x_2, e^{t\lambda_3(e_2)}x_3\right).$$

On est donc dans la situation du théorème de prolongement avec

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{R}^4 \\ \Sigma &= \{0\} \\ W^+ &= \{(0,0)\} \times \mathbf{R} \times \{0\} \\ W^- &= \mathbf{R}^2 \times \{(0,0)\} \\ W &= \mathbf{R}^3 \times \{0\} \\ A_\theta &= \left(e^{t\lambda_1(e_2)}, e^{t\lambda_2(e_2)}\right) \text{ et } B_\theta = e^{t\lambda_3(e_2)}. \end{aligned}$$

On prend pour germe en Σ de sous-variété de $M \setminus W^-$, invariant par h et ayant un contact infini avec V le long du germe en Σ de W^+, la sous-variété donnée localement par le graphe de l' application

$$\phi_2 : (K_{p-1} = Q_{p-2} \setminus \{x_3 = 0\}, o_{p-2}) \to (\mathbf{R}, 0)$$

solution du *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{U_2}\phi_2 = \Theta_2 \\ \phi_2 \big|_{Q_{p-1}} = f_1. \end{cases}$$

Cette sous-variété se prolonge de manière unique en une sous-variété de M invariante par h et ayant un contact infini avec V le long de W^-, elle est localement le graphe d'une application

$$f_2 : (Q_{p-2}, o_{p-2}) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0)$$

solution de l'équation (E_2) au voisinage de o_{p-2}.

3.5.3 Troisième étape.

On montre maintenant que l'on a dans O_{p-2} l'égalité

$$(\mathrm{C}_{1,2}) \qquad \mathscr{L}_{U_1}(f_2) = \Theta_1.$$

En effet, d'une part, l 'application $\mathscr{L}_{U_1}(f_2) - \Theta_1$ est constante le long des orbites de U_2 dans O_{p-2}, car

$$\mathscr{L}_{U_2}\mathscr{L}_{U_1}(f_2) = \mathscr{L}_{U_1}\mathscr{L}_{U_2}(f_2) = \mathscr{L}_{U_1}(\Theta_2) = \mathscr{L}_{U_2}(\Theta_1)$$

d'autre part, U_1 est tangent à Q_{p-1}, on a donc

$$\mathscr{L}_{U_1}(f_2)|_{Q_{p-1}\cap O_{p-2}} = \mathscr{L}_{U_1}\left(f_2|_{Q_{p-1}\cap O_{p-2}}\right) = \mathscr{L}_{U_1}(f_1) = \Theta_1.$$

Comme tout $z \in K_{p-1}$ appartient à une unique orbite de U_2 passant par Q_{p-1}, on a l'égalité ($\mathrm{C}_{1,2}$) dans $O_{p-2} \cap K_{p-1}$.
Or U_1 est tangent à $Q_{p-2} \cap (\{x_3 = 0\})$ aussi, f_2 et Θ_1 y sont nulles, on a donc ($\mathrm{C}_{1,2}$) dans $O_{p-2} \cap (\{x_3 = 0\})$ et par suite ($\mathrm{C}_{1,2}$) est vraie dans O_{p-2}.

3.5.4 Dernière étape.

Maintenant, par récurrence sur k, on suppose que pour $2 \leq k \leq p-1$, on a une solution f_k de l'équation

$$(\mathrm{E}_k) \qquad \mathscr{L}_{U_k}(f_k) = \Theta_k$$

dans un voisinage O_{p-k} de tout point

$$o_{p-k} \in \Sigma_{p-k} := \big\{(\underbrace{0,\ldots,0}_{k+1}, \pm\epsilon, \ldots, \pm\epsilon)\big\}$$

dans Q_{p-k} telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, on ait

$$(\mathrm{C}_{j,k}) \qquad \mathscr{L}_{U_j}(f_k) = \Theta_j$$

et que f_k est nulle à tout ordre dans $O_{p-k} \cap (\{x_{k+1} = 0\})$.
On va montrer que dans un voisinage $O_{p-(k+1)}$ de tout point

$$o_{p-(k+1)} \in \Sigma_{p-(k+1)} := \big\{(\underbrace{0,\ldots,0}_{(k+1)+1}, \pm\epsilon, \ldots, \pm\epsilon)\big\}$$

dans $Q_{p-(k+1)}$, f_k se prolonge en une application f_{k+1} qui s'annule à tous les ordres dans

$$O_{p-(k+1)} \cap (\{x_{(k+1)+1} = 0\})$$

et telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, k+1\}$ on ait

$$(\mathrm{C}_{j,k+1}) \qquad \mathscr{L}_{U_j}(f_{k+1}) = \Theta_j.$$

Le champ de vecteurs U_{k+1} est tangent à la sous-variété

$$Q_{p-(k+1)} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : |x_{(k+1)+2}| = \cdots = |x_n| = \epsilon\big\}$$

et toute orbite de U_{k+1} dans $K_{p-k} = Q_{p-(k+1)} \setminus \{x_{(k+1)+1} = 0\}$ coupe la sous variété Q_{p-k} transversalement en un unique point. Pour tout $z \in K_{p-k}$, il existe donc $t \in \mathbf{R}$ et $x \in Q_{p-k}$ uniques tels que $z = e^{tU_2}x$ et dans un voisinage $O_{p-(k+1)}$ de chaque point $o_{p-(k+1)} \in \Sigma_{p-(k+1)}$ dans $Q_{p-(k+1)}$, l'application définie par

$$\phi_{k+1}\left(e^{tU_{k+1}}x\right) = f_k(x) + \int_0^t \Theta_{k+1}\left(e^{sU_{k+1}}x\right) ds$$

dans $O_{p-(k+1)} \cap K_{p-k}$ vérifie l'équation

$$(\mathrm{E}_{k+1}) \qquad \mathscr{L}_{U_{k+1}}(f) = \Theta_{k+1}.$$

Pour obtenir une solution f_{k+1} de (E_{k+1}) dans $Q_{p-(k+1)}$, on applique le théorème de *prolongement de variétés invariantes* à

$$\begin{aligned} h = h^t_{k+1} : \left(Q_{p-(k+1)} \times \mathbf{R}, (o_{p-(k+1)}, 0)\right) &\longrightarrow \left(Q_{p-(k+1)} \times \mathbf{R}, (o_{p-(k+1)}, 0)\right) \\ (x, y) \longmapsto h^t_{k+1}(x, y) &= \left(g^t_{k+1}(x), y + \int_0^t \Theta_{k+1}\left(g^s_{k+1}(x)\right) ds\right) \end{aligned}$$

avec $t > 0$, où $g^t_{k+1}(x)$ est le flot de U_{k+1} dans la variété $Q_{p-(k+1)}$. Dans la carte $(x_1, \ldots, x_{(k+1)+1})$ centrée en $o_{p-(k+1)}$, ce flot est donné par

$$g^t_{k+1}(x) = \left(e^{t\lambda_1(e_{k+1})}x_1, \ldots, e^{t\lambda_{(k+1)+1}(e_{k+1})}x_{(k+1)+1}\right).$$

On est donc dans la situation du théorème de prolongement avec

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{R}^{k+3} \\ \Sigma &= \{0\} \\ W^+ &= \{(0, \ldots, 0)\} \times \mathbf{R} \times \{0\} \\ W^- &= \mathbf{R}^{k+1} \times \{(0, 0)\} \\ W &= \mathbf{R}^{k+2} \times \{0\} \\ A_\theta &= \left(e^{t\lambda_1(e_{k+1})}, \ldots, e^{t\lambda_{k+1}(e_{k+1})}\right) \text{ et } B_\theta = e^{t\lambda_{(k+1)+1}(e_{k+1})}. \end{aligned}$$

On prend pour germe en Σ de sous-variété de $M \setminus W^-$, invariant par h et ayant un contact infini avec V le long du germe en Σ de W^+, la sous-variété donnée localement par le graphe de l' application

$$\phi_{k+1} : \left(K_{p-k} = Q_{p-(k+1)} \setminus \{x_{(k+1)+1} = 0\}, o_{p-(k+1)}\right) \to (\mathbf{R}, 0)$$

solution du *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{U_{k+1}}\phi_{k+1} = \Theta_{k+1} \\ \phi_{k+1}\big|_{Q_{p-k}} = f_k. \end{cases}$$

Cette sous-variété se prolonge de manière unique en une sous-variété de M invariante par h et ayant un contact infini avec V le long de W^-, elle est localement le graphe d'une application

$$f_{k+1} : \big(Q_{p-(k+1)}, o_{p-(k+1)}\big) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0)$$

solution de l'équation (E_{k+1}) au voisinage de $o_{p-(k+1)}$.
On montre maintenant que l'on a dans $O_{p-(k+1)}$ les égalités

$$(\mathrm{C}_{j,k+1}) \qquad \mathscr{L}_{U_j}(f_{k+1}) = \Theta_j.$$

En effet, d'une part l'application $\mathscr{L}_{U_j}(f_{k+1}) - \Theta_j$ est constante le long des orbites de U_{k+1} dans $O_{p-(k+1)}$, car

$$\mathscr{L}_{U_{k+1}}\mathscr{L}_{U_j}(f_{k+1}) = \mathscr{L}_{U_j}\mathscr{L}_{U_{k+1}}(f_{k+1}) = \mathscr{L}_{U_j}(\Theta_{k+1}) = \mathscr{L}_{U_{k+1}}(\Theta_j)$$

d'autre part, U_j est tangent à Q_{p-j}, donc aussi à Q_{p-k}, d'où

$$\mathscr{L}_{U_j}(f_{k+1})|_{Q_{p-k}\cap O_{p-(k+1)}} = \mathscr{L}_{U_j}\Big(f_{k+1}|_{Q_{p-k}\cap O_{p-(k+1)}}\Big) = \mathscr{L}_{U_j}(f_k) = \Theta_j.$$

Comme tout $z \in K_{p-k}$ appartient à une unique orbite de U_{k+1} passant par Q_{p-k}, on a donc l'égalité ($\mathrm{C}_{j,k+1}$) dans $O_{p-(k+1)} \cap K_{p-k}$.
Or U_j est tangent à $Q_{p-(k+1)} \cap (\{x_{(k+1)+1} = 0\})$ aussi, f_{k+1} et Θ_j y sont nulles, on a donc ($\mathrm{C}_{j,k+1}$) dans $O_{p-(k+1)} \cap (\{x_{(k+1)+1} = 0\})$ et par suite ($\mathrm{C}_{j,k+1}$) est vraie dans $O_{p-(k+1)}$.

3.6 Remarque finale.

Ce qui précède se généralise au cas où les U_i sont des champs de vecteurs linéaires "diagonaux" sur $\mathbf{C}^c \times \mathbf{R}^{n-c}$, c'est-à-dire de la forme

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (\lambda_1(e_i)x_1, \ldots, \lambda_n(e_i)x_n)$$

avec des λ_j complexes pour $1 \le j \le c$, réelles sinon. L'hypothèse d'hyperbolicité est que les $\mathrm{Re}\lambda_j$ sont linéairement indépendantes, et on est dans le domaine de Siegel si l'origine est dans leur enveloppe convexe. La démonstration est exactement la même que précédemment, sauf que $|z| = \epsilon$ définit un cercle dans $\mathbf{C}$, ce qui va faire apparaître des $\Sigma = \mathbf{T}^k$ avec $k > 0$.

Chapitre 4

Introduction aux variétés de Poisson.

4.1 Introduction.

Ce chapitre est une introduction aux variétés de Poisson. On définit la structure de Poisson, le champ hamiltonien engendré par une fonction, le crochet de Schouten, le morphisme de Poisson, la sous-variété de Poisson, le rang de la structure de Poisson en un point et la structure de Poisson induite sur une sous-variété puis on donne un théorème de décomposition et on pose le problème de linéarisation. [Wei83]

4.2 Structure de Poisson.

Une structure de Poisson sur une variété M est une structure d'algèbre de Lie $\{,\}$ sur $C^\infty(M)$, l'ensemble des fonctions réelles indéfiniment différentiables sur M, qui satisfait l'identité de Liebniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

Le crochet $\{,\}$ est donc une dérivation en chaque facteur et en particulier, pour toute fonction $h \in C^\infty(M)$, il existe un champ de vecteurs ξ_h sur M tel qu'on ait pour tout $f \in C^\infty(M)$

$$\xi_h.f := \mathscr{L}_{\xi_h}(f) = \{f, h\}.$$

ξ_h est le champ de vecteur *hamiltonien* engendré par h. Comme $\{f, h\}(x)$ et $\xi_h(x)$ ne dépendent que de $T_x h$, il existe donc un morphisme de fibrés vectoriels

$$B : T^*M \longrightarrow TM$$

au dessus de M tel que

$$\xi_h = B \circ dh \text{ pour tout } h \in C^\infty(M).$$

On peut voir B comme une forme bilinéaire anti-symétrique

$$\Pi : T^*M \oplus_M T^*M \longrightarrow \mathbf{R}$$

telle que

$$\Pi(df, dg) = \{f, g\}.$$

On peut voir aussi Π comme un champ de bi-vecteurs et l'identité de Jacobi pour $\{,\}$ est alors équivalente à $[\Pi, \Pi] = 0$ où $[,]$ est le *crochet de Schouten* défini de la manière suivante[LM79] :
il associe à tout champ de p-vecteurs A et tout champ de q-vecteurs B un champ de $(p+q-1)$-vecteurs qu'on note $[A, B]$ tel que pour toute forme différentielle fermée β de degré $(p+q-1)$ on ait

$$\iota_{[A,B]}\beta = (-1)^{pq+q}\iota_A d\left(\iota_B\beta\right) + (-1)^p \iota_B d\left(\iota_A\beta\right).$$

On a les deux cas particuliers suivants :
1) Pour tout champ de bi-vecteurs Π et toute 3-forme différentielle fermée β on a

$$\iota_{[\Pi,\Pi]}\beta = 2\iota_\Pi d\left(\iota_\Pi\beta\right).$$

2) Pour tout champ de vecteurs E et tout champ de p-vecteurs A on a

$$[E, A] = \mathscr{L}_E A.$$

Dans une carte locale $(x_1, \ldots, x_r)$, une structure de Poisson est déterminée par les composantes $\Pi_{ij} := \{x_i, x_j\}$ de Π et

$$\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^{r} \Pi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

satisfait l'anti-symétrie et l'identité de Jacobi si et seulement si

$$\Pi_{ij} = -\Pi_{ji} \text{ et } \sum_{\ell=1}^{r} (\Pi_{\ell j} \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_\ell} + \Pi_{\ell i} \frac{\partial \Pi_{kj}}{\partial x_\ell} + \Pi_{\ell k} \frac{\partial \Pi_{ji}}{\partial x_\ell}) = 0.$$

On déduit de l'identité de Jacobi que

$$[\xi_h, \Pi] = 0$$

donc le flot local de ξ_h préserve la structure de Poisson et

$$\xi_{\{f,g\}} = \xi_f \xi_g - \xi_g \xi_f = [\xi_f, \xi_g].$$

La structure de Poisson détermine donc un morphisme d'algèbres de Lie de $C^\infty(M)$ dans l'algèbre de Lie des *automorphismes infinitésimaux* de la structure de Poisson, c'est-à-dire les champs de vecteurs X tels que

$$[X, \Pi] = \mathscr{L}_X \Pi = 0.$$

Un *morphisme de Poisson* est une application $\phi : (M_1, \{,\}_1) \to (M_2, \{,\}_2)$ telle que

$$\{f \circ \phi, g \circ \phi\}_1 = \{f, g\}_2 \circ \phi \text{ pour tous } f, g \in C^\infty(M_2).$$

Une *sous-variété de Poisson* est une sous-variété N d'une variété de Poisson M, munie d'une structure de Poisson pour laquelle l'injection canonique est un morphisme de Poisson. Une telle structure, quand elle existe, est unique. On a en particulier le lemme suivant :

Lemme 14 *Une sous-variété N d'une variété de Poisson M est de Poisson si est seulement si pour tout $x \in N$, T_xN contient l'image du morphisme $B_x : T_x^*M \longrightarrow T_xM$, c'est-à-dire que tous les champs de vecteurs hamiltoniens sont tangents à N.*

Le *rang* de la structure de Poisson en un point $x \in M$ est le rang du morphisme $B_x : T_x^*M \longrightarrow T_xM$. Dans une carte locale, c'est le rang de la matrice (Π_{ij}). L'invariance de la structure de Poisson par les flots hamiltoniens implique la constance du rang le long des orbites de tels flots, à partir de là, on déduit l'existence d'une structure quotient de M en sous-variétés de Poisson telle que la dimension d'une telle sous-variété N est égale au rang de la structure de Poisson (de M où N) en chaque point de N . On appelle ces sous-variétés, les *feuilles symplectiques* de M, puisqu'elles forment un feuilletage sur le sous-ensemble ouvert (dense dans le cas analytique) formé des points où le rang est localement maximal [Kir76].

Une structure de Poisson pour laquelle le rang est égal à la dimension de M en chaque point est dite *symplectique*. La 2-forme ω qui définit la structure symplectique est donnée par

$$\omega(\xi, \eta) = \Pi(B^{-1}\xi, B^{-1}\eta).$$

Le crochet de Poisson et les champs hamiltoniens pour cette structure symplectique sont les mêmes que pour la structure de Poisson.

Dans certains cas, il est possible de définir une structure de Poisson sur une sous-variété qui n'est pas de Poisson. Cette structure est appelée *structure de Poisson induite*. Un cas particulier est le suivant.

Proposition 1 *Soit N une sous-variété d'une variété de Poisson M telle que les conditions suivantes sont vérifiées en tout point $x \in N$:*
(i) $B_x\,(Ann\,(T_xN)) \cap T_xN = \{0\}$
(ii) $Ann\,(T_xN) \cap Ker\,B_x = \{0\}$
où $Ann\,(T_xN)$ est l'annulateur de T_xN dans T_x^*M. Alors il existe une structure de Poisson induite naturelle sur N.

Preuve. La condition (ii) est équivalente à

$$T_xN + \operatorname{Im} B_x = T_xM$$

c'est-à-dire, N est transverse à toutes les feuilles symplectiques, elle est donc une réunion de variétés qui sont des sous-variétés de variétés symplectiques. la condition (i) dit que ces sous-variétés sont symplectiques. On peut donc obtenir un crochet de Poisson sur N à partir de cette réunion de variétés symplectiques. Pour voir qu'une telle structure est lisse, on remarque que les conditions (i) et (ii) impliquent que

$$B_x\,(\operatorname{Ann}\,(T_xN)) \oplus T_xN = T_xM \text{ pour tout } x \in N$$

on a donc un morphisme de fibrés vectoriels $\pi : T_NM \longrightarrow TN$. La structure de Poisson *induite* sur N est donc donnée par le morphisme composé

$$\pi^* \circ B|_N \circ \pi : T^*N \longrightarrow TN$$

.

4.3 Décomposition d'une variété de Poisson.

Le produit $M_1 \times M_2$ est muni d'une structure de Poisson telle que les projections $\pi_i : M_1 \times M_2 \longmapsto M_i$ $(i = 1, 2)$ soient des morphismes de variétés de Poisson c'est-à-dire que

$$\{f \circ \pi_i, g \circ \pi_i\}_{1\times 2} = \{f, g\}_i \circ \pi_i \text{ pour tous } f, g \in C^\infty(M_i)$$

et que les sous-algebres $\pi_1^* C^\infty(M_1)$ et $\pi_2^* C^\infty(M_2)$ de $C^\infty(M_1 \times M_2)$ commutent. Si on note Π_i le champ de bi-vecteurs qui définit la structure de

Poisson de M_i $(i = 1, 2)$, alors le crochet de Poisson sur $C^\infty(M_1 \times M_2)$ est donné par

$$\{f, g\}_{1\times 2} = \Pi_1(\partial_x f, \partial_x g) - \Pi_2(\partial_y f, \partial_y g).$$

Le théorème de décomposition dit que toute variété de Poisson est localement le produit d'une variété symplectique et d'une variété de Poisson ayant le rang zéro en un point.

4.3.1 Le théorème de décomposition.

Théorème 9 *Soit a un point d'une variété de Poisson M, il existe un voisinage U de a dans M et un isomorphisme de variétés de Poisson $\phi = \phi_S \times \phi_N$ de U dans un produit $S \times N$ où S est une variété symplectique et le rang de N en $\phi_N(a)$ est égal à zéro. Cette décomposition est unique à isomorphisme local près.*

4.3.2 Preuve du théorème de décomposition.

On a besoin d'un résultat préliminaire [LM79].

Lemme 15 *Soit a un point d'une variété de Poisson (M, Π) en lequel le rang de la structure est $2p$ $(p > 0)$. Il existe alors $2p$ fonctions $f_1, \ldots, f_p$ et $g_1, \ldots, g_p$ de classe C^∞, définies dans un voisinage ouvert U de a, telles que*

$$\{f_i, f_j\} = \{g_i, g_j\} = 0 \text{ et } \{f_i, g_j\} = \delta_{ij} \text{ pour } 1 \leq i, j \leq p.$$

Preuve du lemme.

(i) On choisit f_1 de sorte que $\xi_{f_1}(a) \neq 0$; ceci est possible car $p > 0$, puis on détermine g_1 par la résolution d'un problème de Cauchy : on impose à g_1 d'être nulle sur un germe en a d'hypersurface H transverse à $\xi_{f_1}(a)$ et de vérifier l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\mathscr{L}_{\xi_{f_1}} g_1 = 1,$$

ce qui revient à définir g_1 par

$$g_1\left(\phi^t_{f_1}(x)\right) = t \text{ pour } x \in H,$$

où $\left(\phi^t_{f_1}\right)$ est le flot de ξ_{f_1}.
(ii) Si $p = 1$ on a terminé, sinon, toujours d'après le point (i), les deux champs

de vecteurs ξ_{f_1} et ξ_{g_1} vérifient donc

$$[\xi_{f_1}, \xi_{g_1}] = 0,$$

ceci implique l'indépendance linéaire de $\xi_{f_1}(a)$ et $\xi_{g_1}(a)$, car si l'on a

$$\lambda\xi_{f_1}(a) + \mu\xi_{g_1}(a) = 0,$$

on aura

$$0 = (\lambda\xi_{f_1}(a) + \mu\xi_{g_1}(a)) \cdot (-\mu f + \lambda g) = \lambda^2 + \mu^2.$$

On détermine alors la fonction f_2 par la résolution d'un problème de Cauchy : on impose à f_2 d'être une coordonnée sur un germe en a de sous-variété V_{f_2} de codimension 2 transverse au 2-plan engendré par $\xi_{f_1}(a)$ et $\xi_{g_1}(a)$, et de vérifier

$$\mathscr{L}_{\xi_{f_1}} f_2 = \mathscr{L}_{\xi_{g_1}} f_2 = 0,$$

ce qui revient à définir f_2 par

$$f_2\left(\phi_{f_1}^{s_1} \circ \phi_{g_1}^{t_1}(x)\right) = f_2(x),\ x \in V_{f_2},$$

où $\phi_{f_1}^{s_1}$ et $\phi_{g_1}^{t_1}$ sont les flots (qui commutent) de ξ_{f_1} et ξ_{g_1} respectivement. Si $f_2|_{V_{f_2}}$ est bien choisie (c'est-à-dire si $\xi_{f_2}(a)$ n'est pas nul, ce qui est possible grâce à notre hypothèse sur le rang de la structure), on a l'indépendance linéaire de $\xi_{f_1}(a)$, $\xi_{g_1}(a)$ et $\xi_{f_2}(a)$ et on détermine g_2 par le problème de Cauchy suivant : g_2 est nulle sur un germe en a de sous-variété V_{g_2} de codimension 3 transverse au 3-plan engendré par $\xi_{f_1}(a)$, $\xi_{g_1}(a)$ et $\xi_{f_2}(a)$, et vérifie

$$\mathscr{L}_{\xi_{f_1}} g_2 = \mathscr{L}_{\xi_{g_1}} g_2 = 0 \text{ et } \mathscr{L}_{\xi_{f_2}} g_2 = 1,$$

ce qui revient à définir g_2 par

$$g_2\left(\phi_{f_1}^{s_1} \circ \phi_{g_1}^{t_1} \circ \phi_{f_2}^{s_2}(x)\right) = g_2(x) + s_2,\ x \in V_{g_2},$$

où $\phi_{f_2}^{s_2}$ est le flot de ξ_{f_2} (qui commute aux deux précédents). On continue ainsi de proche en proche pour déterminer les $2p$ fonctions du lemme.

Théorème 10 *Soit (M, Π) une variété de Poisson de dimension m et a un point de M, où le rang de la structure est $2p$ ($0 \leq 2p \leq m$). Il existe alors une carte (U, ϕ) de M en a, telle que les coordonnées locales associées, notées $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_p, z_1, \ldots, z_{m-2p}$ vérifient :*

(*) $\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = 0$ *et* $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$ *pour* $1 \leq i, j \leq p$

(**) $\{x_i, z_k\} = \{y_i, z_k\} = 0$ *pour* $1 \leq i \leq p$ *et* $1 \leq k \leq (m - 2p)$.

De plus les crochets de Poisson $\{z_k, z_\ell\}$ *pour* $1 \leq k, \ell \leq (m-2p)$*, ne sont fonctions que des coordonnées locales* $z_1, \ldots, z_{m-2p}$ *et s'annulent au point* a*. Dans le cas particulier où le rang est constant, égal à* $2p$ *dans un voisinage de* a*, quitte à réduire* U*, on a*

$$\{z_k, z_\ell\} = 0 \textit{ pour } 1 \leq k, \ell \leq (m-2p).$$

Preuve. Si $p = 0$, c'est clair. Si $p > 0$, le lemme précédent montre qu'il existe $2p$ fonctions $x_1, \ldots, x_p$ et $y_1, \ldots, y_p$ définies dans un voisinage de a, vérifiant les relations (*) de ce théorème. Les champs de vecteurs hamiltoniens associés à ces fonctions sont linéairement indépendants au point a et ont deux à deux un crochet nul, on détermine $(z_1, \ldots, z_{m-2p})$ par la résolution du problème de Cauchy suivant : on impose à $(z_1, \ldots, z_{m-2p})$ d'être un système de coordonnées sur un germe en a de sous-variété V_z de codimension $2p$ transverse au $2p$-plan engendré par les ξ_{x_j} et les ξ_{y_j} $(1 \leq j \leq p)$ et de vérifier

$$\{x_i, z_k\} = \{y_i, z_k\} = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq k \leq (m-2p),$$

ce qui revient à définir $(z_1, \ldots, z_{m-2p})$ par

$$(z_1, \ldots, z_{m-2p})\left(\phi_{x_1}^{s_1} \circ \phi_{y_1}^{t_1} \circ \cdots \circ \phi_{x_p}^{s_p} \circ \phi_{y_p}^{t_p}(u)\right) = (z_1, \ldots, z_{m-2p})(u), \ u \in V_z$$

où les $\phi_{x_j}^{s_j}$ et les $\phi_{y_j}^{t_j}$ désignent les flots des ξ_{x_j} et des ξ_{y_j} respectivement (ils commutent les uns aux autres). Pour voir que les $\{z_i, z_j\}$ ne dépendent que des z_k, il suffit de remarquer que l'on a

$$\{z_i, z_j\} = \mathscr{L}_{\xi_{z_i}} z_j$$

et on a alors

$$\mathscr{L}_{\xi_{x_k}} \mathscr{L}_{\xi_{z_i}} z_j = \mathscr{L}_{\xi_{\{x_k, z_i\}}} z_j + \mathscr{L}_{\xi_{z_i}} \{x_k, z_j\} = 0$$

et

$$\mathscr{L}_{\xi_{y_k}} \mathscr{L}_{\xi_{z_i}} z_j = \mathscr{L}_{\xi_{\{y_k, z_i\}}} z_j + \mathscr{L}_{\xi_{z_i}} \{y_k, z_j\} = 0,$$

car on a

$$\{x_k, z_i\} = \{x_k, z_j\} = \{y_k, z_i\} = \{y_k, z_j\} = 0.$$

Ces m fonctions sont définies dans un voisinage de a, ont deux à deux des crochets de Poisson qui vérifient toutes les relations du théorème et leurs différentielles sont linéairement indépendantes. Il existe donc un voisinage de a dans lequel ces m fonctions forment un système de coordonnées locales qui répond à la question, car les crochets $\{z_k, z_\ell\}$ sont tous nuls au point a

(sinon le rang dépasserait $2p$). pour la même raison, si le rang est constant au voisinage de a et égal à $2p$, ces crochets seraient identiquement nuls dans ce voisinage.

Pour montrer le théorème de décomposition, on remarque que la partie existence découle du théorème précédent : On peut trouver des coordonnées locales “canoniques” $(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k, y_1, \dots, y_s)$ telles que

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = \{q_i, y_j\} = \{p_i, y_j\} = 0\,, \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

et

$$\{y_i, y_j\} = v_{ij}(y) \text{ avec } v_{ij}(a) = 0.$$

L'unicité du “facteur symplectique” S découle du fait que sa dimension est égale au rang de M en a. Le représentant “naturel” pour S est la feuille symplectique qui passe par a.

Pour montrer l'unicité de N, on identifie les fonctions $v_{ij}(y)$ à une structure de Poisson *induite* sur une sous variété transverse à la feuille symplectique, en utilisant la proposition précédente. On suppose que les coordonnées (p, q, y) s'annulent en a, le facteur S est alors donné par “$\{y = 0\}$” et N par “$\{q = p = 0\}$”. La structure de Poisson de N est alors la structure *induite* au sens de la proposition avec N vue comme sous-variété de $\mathbf{R}^{2k+s}$: En effet, l'espace tangent TN est engendré par les champs de vecteurs ∂_{y_i} et $\mathrm{Ann}\,(TN)$ par les 1-formes dq_j et dp_j. On a $B\,(dq_j) = -\partial_{p_j}$ et $B\,(dp_j) = \partial_{q_j}$, donc les hypothèse de la proposition sont satisfaites. La projection $\pi : T_N M \longrightarrow TN$ élimine les ∂_{q_j} et les ∂_{p_j} et laisse fixes les ∂_{y_i}, par conséquent π^* laisse fixes les dy_i, donc la structure de Poisson *induite* est égale à la structure de N.
La structure induite étant canoniquement définie, le lemme suivant complète la preuve de l'unicité [Wei83].

Lemme 16 *Soient N_1 et N_2 deux sous-variétés d'une variété de Poisson M ayant des dimensions complémentaires à une feuille symplectique S. On suppose que chacune d'elle coupe S transversalement en un unique point. Alors il existe un automorphisme de Poisson de M qui envoie un voisinage de $N_1 \cap S$ dans N_1, sur un voisinage de $N_2 \cap S$ dans N_2. Cet automorphisme induit un isomorphisme de Poisson des structures induites sur ces voisinages.*

4.4 Structure de Poisson linéaire.

Une structure de Poisson sur un un espace vectoriel V est dite *linéaire* si le crochet de deux formes linéaires sur V est une forme linéaire. Le dual V^*

de V est donc une algèbre de Lie qu'on note $\mathfrak{g}$. L'espace vectoriel V est donc le dual $\mathfrak{g}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et le crochet de Poisson sur V est donné par

$$\{f,g\}(\mu) = \langle \mu, \left[\frac{\delta f}{\delta \mu}, \frac{\delta g}{\delta \mu}\right] \rangle$$

où $[,]$ est le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$, $\langle , \rangle$ est la forme bilinéaire de $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ et $\frac{\delta f}{\delta \mu}$ est la différentielle de f considérée comme élément de $\mathfrak{g}$ au lieu de $\mathfrak{g}^{**}$.
La formule ci-dessus définit une structure de Poisson linéaire sur le dual $\mathfrak{g}^*$ de toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. si $\{X_1, \ldots, X_r\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ telle que

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k$$

alors cette base vue comme systeme de coordonnées $\{x_1, \ldots, x_r\}$ sur $\mathfrak{g}^*$ vérifie

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k x_k$$

et les composantes Π_{ij} sont données par $\Pi_{ij} = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k x_k$, elles sont donc linéaires en x.

4.5 L'approximation linéaire.

D'après le théorème de décomposition, l'étude locale d'une variété de Poisson se ramène au cas où le rang en un point est nul. Pour tout $x \in M$, l'espace cotangent T_x^*M s'identifie à $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ où $\mathfrak{m}^k$ est l'idéal de $C^\infty(M)$ des fonctions nulles à l'ordre $(k-1)$ en x. Si M est une variété de Poisson dont la structure s'annule en x, alos $\mathfrak{m}_x$ est une sous-algèbre de Lie de $C^\infty(M)$, et $\mathfrak{m}_x^2$ est un idéal de Lie de $\mathfrak{m}_x$. En effet, $\mathfrak{m}_x^2$ est engendré par les produits gh d'éléments de $\mathfrak{m}_x$ et $\{f, gh\}$ est une somme de tels produits, pour $f, g, h \in \mathfrak{m}_x$, car $\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$ et les crochets sont nuls en x.
$T_x^*M = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ est donc une algèbre de Lie qu'on note $\mathfrak{g}_x$ et $T_xM = \mathfrak{g}_x^*$ est muni d'une structure de Poisson linéaire qu'on appelle *l'approximation linéaire* de la structure de Poisson en x ou la partie linéaire. Si $\{x_1, \ldots, x_r\}$ sont des coordonnées sur M qui s'annulent en x, alors les $\Pi_{ij} = \{x_i, x_j\}$ s'annulent en 0, on peut donc écrire

$$\Pi_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k x_k + o(x^2)$$

avec $c_{ij}^k = \partial\Pi_{ij}/\partial x_k(0)$. Les c_{ij}^k sont les constantes de structure de $\mathfrak{g}_x$ et les coefficients de la partie linéaire sont les

$$\Pi_{ij}^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k x_k.$$

4.6 Le problème de linéarisation.

Soit $a \in M$ un point où le rang de la structure de Poisson est nul. On dit que cette structure est *linéarisable* au voisinage de a, s'il existe un isomorphisme local de structures de Poisson qui l'envoie sur sa partie linéaire en a. Le problème de la linéarisation dépend de la partie linéaire et de la classe de différentiabilité de la structure de Poisson. On dit qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est (formellement, analytiquement, C^∞) *non dégénérée* si toute structure de Poisson dont la partie linéaire en un point de rang zéro est isomorphe à $\mathfrak{g}^*$, est elle même localement isomorphe à $\mathfrak{g}^*$ de manière (formelle, analytique, C^∞). On a le résultat suivant [Wei83].

Théorème 11 *Les algèbres de Lie semi-simples sont formellement non dégénérées.*

Le théorème de Borel sur l'existence d'une fonction C^∞ ayant un developpement de Taylor donné implique le corollaire suivant.

Corollaire 3 *Soit $a \in M$ un point où le rang de la structure de Poisson de M est nul et tel que la partie linéaire de cette structure en ce point est le dual d'une algèbre de Lie semi-simple. Alors il existe des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_r)$ au voisinage de a et des constantes c_{ij}^k telles que*

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k x_k + O(x^\infty).$$

Dans le chapitre suivant on va présenter un théorème de linéarisation C^∞.

Chapitre 5

Linéarisation d'une structure de Poisson.

5.1 Introduction.

Soit $\{,\}$ une structure de Poisson sur $\mathbf{R}^{n+p}$ de classe C^∞ et de rang nul en 0 et Π le champ de bi-vecteurs associé. Dans cette section, on va démontrer un *théorème de linéarisation* d'une telle structure dans le cas "n=p+1" et dans le cas du "domaine de Poincaré".

5.2 Hypothèses du théorème de linéarisation.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.
(H1) Le rang maximal de Π est $2p$.
(H2) Il existe p fonctions $f_1, \ldots, f_p : \mathbf{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_p \neq 0 \text{ et } \{f_i, f_j\} = 0 \text{ pour } 1 \leq i, j \leq p.$$

Donc les champs de vecteurs hamiltoniens $X_{f_1}, \ldots, X_{f_p}$ correspondant aux fonctions f_k induisent un germe d'action ρ de $\mathbf{R}^p$ sur la sous-variété

$$V = f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0) \cap \cdots \cap f_p^{-1}(0).$$

On note $U_i = X_{f_i}$ et, pour $a \in \mathbf{R}^p$, $U(a) = \sum_{i=1}^p a_i U_i$.
(H3) On suppose que le germe en 0 de ρ est "hyperbolique". C'est-à-dire que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la partie linéaire $U^{(1)} : a \mapsto D\left[U(a)\right](0)$ de

U en 0 définies par

$$\begin{aligned} &0 \neq \{v \in \mathbf{C}^{n+p} : U^{(1)}(a)v = \lambda_i(a)v \ \forall a \in \mathbf{R}^p\} \\ &\lambda_i : \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{C} \text{ linéaire sur } \mathbf{R} \end{aligned}$$

vérifient les conditions suivantes.
a) Les formes linéaires λ_i sont p à p indépendantes sur $\mathbf{C}$ (donc non nulles et, pour $p \geq 2$, deux à deux distinctes).
b) Il n'y a pas de "résonances généralisées"

$$\lambda_i + \lambda_j = \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell \lambda_\ell \text{ avec les } k_\ell \in \mathbf{N} \text{ et } \sum_{\ell=1}^{n} k_\ell \geq 2.$$

Les hypothèses précédentes impliquent $n \geq p$. Dans [Duf90] le théorème suivant est démontré dans le cas $p = 1$.

5.3 Le théorème de linéarisation.

Théorème 12 *Sous les hypothèses précédentes, si n est égal à $p+1$, ou si l'on a $n > p+1$ et que les λ_i sont dans le "domaine de Poincaré", c'est-à-dire que l'enveloppe convexe de leurs parties réelles ne contient pas 0, alors Π est linéarisable. De plus, il existe des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p$ telles que pour $1 \leq i, j \leq n$ et $1 \leq r, s \leq p$ on ait*

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= \{u_r, u_s\} = 0 \\ \{x_i, u_r\} &= \lambda_i(e_r)x_i \\ f_s &= g_s(u_1, \ldots, u_p), \end{aligned}$$

où $(e_1, \ldots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^p$.

5.3.1 Notes sur cet énoncé.

Lorsque la forme linéaire λ_i n'est pas réelle, la "coordonnée" correspondante x_i ne l'est pas non plus et, si $\lambda_j = \bar{\lambda}_j$, alors $x_j = \bar{x}_i$. Plus précisément, en supposant que les λ_i réelles sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2c}$ et que $\lambda_{j+c} = \bar{\lambda}_j$ pour $n - 2c < j \leq n - c$, l'énoncé sous-entend
(i) que $(u_1, \ldots, u_p, x_1, \ldots, x_{n-c})$ est un difféomorphisme local de $(\mathbf{R}^{n+p}, 0)$ sur $(\mathbf{R}^{p+n-2c} \times \mathbf{C}^c, 0)$,
(ii) que $x_{j+c} = \bar{x}_j$ pour $n - 2c < j \leq n - c$.
Le crochet de Poisson est complexifié de la manière évidente. Ces conventions permettent de traiter le cas où il y a des valeurs propres imaginaires exactement comme l'autre.

5.3.2 Notations.

On note (x,u) les coordonnées de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ et pour toute fonction f : $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞, on considère son développement de Taylor le long de $\{0\} \times \mathbf{R}^p$:

$$f^{(0)} + f^{(1)} + \cdots + f^{(q)} + \cdots$$

où $f^{(q)}$ est la partie homogène de degré q de f en x donnée par

$$f^{(q)} = \sum_{|K|=q} f_K(u) x^K$$

avec

$$K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n,\ |K| = \sum_{i=1}^{n} k_i \text{ et } x^K = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

On développe aussi chaque champ de vecteurs X sous la forme

$$X^{(0)} + \cdots + X^{(q)} + \cdots$$

et chaque champ de bi-vecteurs Π sous la forme

$$\Pi^{(0)} + \cdots + \Pi^{(q)} + \cdots .$$

5.4 Début de la preuve du théorème. Quelques lemmes de préparation.

On commence par quelques lemmes qui sont vrais pour $n \geq p$. [Duf89].

5.4.1 Premier lemme de préparation.

Lemme 17 *Sous les hypothèses* ***(H2)*** *et* ***(H3)****, il existe des coordonnées locales* $(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p)$ *centrées en 0 telles qu' on ait*

$$f_r = u_r + c^{ste}$$
$$\{x_i, u_r\}^{(0)} = \{x_i, x_j\}^{(0)} = \{x_i, x_j\}^{(1)} = 0$$

pour $1 \leq i, j \leq n$ *et* $1 \leq r \leq p$.

5.4.2 Preuve du premier lemme.

On choisit un premier système de coordonnées (x, u) avec $u_i = f_i + c^{ste}$. Quitte à rajouter à f_1 une combinaison linéaire des f_i $(i > 1)$, on peut supposer que $X_{f_1}|_{\{u=0\}}$ est hyperbolique en 0. Le théorème des fonctions implicites implique que

$$\left\{(x, u) \in \mathbf{R}^{n+p} : X_{f_1}(x, u) = 0\right\}$$

est au voisinage de 0 le graphe d'une application $x = g(u)$. Puisque les X_{f_i} commutent avec X_{f_1}, leurs flots préservent la variété

$$S = \left\{(x, u) \in \mathbf{R}^{n+p} : x = g(u)\right\}$$

ils sont donc tous tangents à S. De plus on a

$$X_{f_i} \cdot u_j = \{f_i, f_j\} = 0 \text{ pour } 1 \leq i, j \leq p.$$

Puisque $(u_1, \ldots, u_p)$ sont des coordonnées sur S, les X_{f_i} s'annulent sur S. Avec le changement de variables $(x, u) \longmapsto (x - g(u), u)$, on peut supposer que les X_{f_i} s'annulent sur $\{0\} \times \mathbf{R}^p$. On a donc montré que

$$\{x_i, u_r\}^{(0)} = 0.$$

Dans ces coordonnées, Π s'écrit sous la forme

$$\Pi = \sum_{i<j} \{x_i, x_j\} \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j} + \sum_{i,j} \{u_i, x_j\} \partial_{u_i} \wedge \partial_{x_j} + \sum_{i<j} (\{u_i, u_j\} = 0) \partial_{u_i} \wedge \partial_{u_j}.$$

Comme on a

$$\sum_{i,j} \{u_i, x_j\} \partial_{u_i} \wedge \partial_{x_j} = \sum_{i=1}^{p} \partial_{u_i} \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \{u_i, x_j\} \partial_{x_j} \right)$$

et

$$X_{f_i} = \sum_{j=1}^{n} \{x_j, u_i\} \partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{p} (\{u_j, u_i\} = 0) \partial_{u_j}$$

on a alors

$$\sum_{i,j} \{u_i, x_j\} \partial_{u_i} \wedge \partial_{x_j} = \sum_{i=1}^{p} \partial_{u_i} \wedge U_i \text{ avec } U_i = -X_{f_i}.$$

Finalement :

$$\Pi = \tilde{\Pi} + \sum_{i=1}^{p} \partial_{u_i} \wedge U_i \text{ avec } \tilde{\Pi} = \sum_{i<j} \{x_i, x_j\} \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}.$$

Puisque U_i est un champ hamiltonien, il est un automorphisme infinitisimal de Π, on a donc

$$0 = [U_i, \Pi] = \left[U_i, \tilde{\Pi}\right] + \left[U_i, \sum_{j=1}^{p} \partial_{u_j} \wedge U_j\right].$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\left[U_i, \sum_{j=1}^{p} \partial_{u_j} \wedge U_j\right] &= \sum_{j=1}^{p} \left([U_i, \partial_{u_j}] \wedge U_j + \partial_{u_j} \wedge ([U_i, U_j] = 0) \right) \\
&= -\sum_{j=1}^{p} \left[\partial_{u_j}, U_i\right] \wedge U_j \\
&= -\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial U_i}{\partial u_j} \wedge U_j
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\left[U_i, \tilde{\Pi}\right] = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial U_i}{\partial u_j} \wedge U_j. \tag{5.1}$$

On écrit avec les notations précédentes

$$\tilde{\Pi} = \sum_{r<s} \left(a_{rs}^{(0)} + a_{rs}^{(1)} + \cdots \right) \partial_{x_r} \wedge \partial_{x_s}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\left[U_i, \tilde{\Pi}\right] = \sum_{r<s} \Big\{ & \left(U_i^{(1)} \cdot (a_{rs}^{(1)}) + \cdots \right) \partial_{x_r} \wedge \partial_{x_s} \\
& - \left(a_{rs}^{(0)} + \cdots \right) \left([\partial_{x_r}, U_i] \wedge \partial_{x_s} + \partial_{x_r} \wedge [\partial_{x_s}, U_i] \right) \Big\}
\end{aligned}$$

et les termes d'ordre 0 dans (5.1) donnent

$$\sum_{r<s} a_{rs}^{(0)} ()_{rs} = 0$$

avec
$$()_{rs} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial U_i^{(1)\ell}}{\partial x_r} \partial_{x_\ell} \wedge \partial_{x_s} + \frac{\partial U_i^{(1)\ell}}{\partial x_s} \partial_{x_r} \wedge \partial_{x_\ell}.$$
L'hypothèse **(H3)** implique que les λ_k sont deux-à-deux distinctes, en passant aux coordonnées complexes, on peut supposer que les restrictions des $U_i^{(1)}$ à "$u = 0$" sont sous forme diagonale
$$U_i^{(1)}(x, 0) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^i x_s \partial_{x_s}.$$
On considère $U_1, \ldots, U_p$ comme des champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^n$ dépendant de $u \in \mathbf{R}^p$. Puisqu'ils commutent, pour chaque u près de 0 fixé, ils définissent un germe d'action de $\mathbf{R}^p$ sur $\mathbf{R}^n$ qui fixe 0 et qui vérifie l'hypothèse **(H3)**. Le "lemme de Lie" dit qu'avec un changement de variables linéaire en x de la forme $(x, u) \mapsto (\alpha(u) \cdot x, u)$, on peut supposer que
$$U_i^{(1)}(x, u) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^i(u) x_s \partial_{x_s}$$
on a alors
$$()_{rs} = \left(\lambda_r^i(u) + \lambda_s^i(u)\right) \partial_{x_r} \wedge \partial_{x_s} \text{ et } a_{rs}^{(0)} \left(\lambda_r^i(u) + \lambda_s^i(u)\right) = 0$$
pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et la condition de non-résonnance donne
$$a_{rs}^{(0)} = 0 \text{ pour } 1 \leq r < s \leq n.$$
Les termes d'ordre 1 dans (5.1) donnent
$$U_i^{(1)} \cdot a_{rs}^{(1)} \partial_{x_r} \wedge \partial_{x_s} = a_{rs}^{(1)} ()_{rs} \text{ avec } a_{rs}^{(1)} = \sum_j a^j x_j$$
d'où
$$a^j \left(\lambda_j^i(u) - \lambda_r^i(u) - \lambda_s^i(u)\right) = 0$$
et la condition de non-résonnance donne
$$a_{rs}^{(1)} = 0 \text{ pour } 1 \leq r < s \leq n.$$

5.4.3 Deuxième lemme de préparation.

Lemme 18 *Quitte à faire un changement de variables $(x, u) \mapsto (x, \mu(u))$, on peut supposer que $U_1^{(1)}, \ldots, U_p^{(1)}$ sont indépendants de u.*

5.4.4 Preuve du deuxième lemme.

Les termes d'ordre 2 dans (5.1) donnent

$$\sum_{r<s} U_i^{(1)} \cdot \left(a_{rs}^{(2)}\right) = \sum_{r<s} a_{rs}^{(2)}()_{rs} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial u_j} \wedge U_j^{(1)}.$$

En calculant les termes en $x_r x_s \partial_{x_r} \wedge \partial_{x_s}$ dans les deux membres de cette égalité, on trouve

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \lambda_s^i}{\partial u_j} \lambda_r^j - \frac{\partial \lambda_r^i}{\partial u_j} \lambda_s^j = 0$$

ce qui s'écrit sous la forme

$$[\Lambda_s, \Lambda_r] = 0 \text{ avec } \Lambda_m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_m^i(u) \partial_{u_i}.$$

Comme ces Λ_m sont p à p indépendants d'après l'hypothèse **(H3)**, il existe un changement de variables $u' = \mu(u)$ tel que $\Lambda_m = \partial_{u'_m}$, $m \leq p$, d'où il résulte que tous les Λ_m ont des coordonnées constantes $\lambda_m^{'j}$ dans les variables u'. La formule suivante donne alors le résultat :

$$\{x_i, u'_j\}^{(1)} = \sum_{r=1}^{p} \frac{\partial \mu_j}{\partial u_r} \lambda_i^r x_i = \sum_{r=1}^{p} \lambda_i^{'j} x_i.$$

5.4.5 Troisième lemme de préparation.

Lemme 19 *Avec un changement de variables de la forme $(x, u) \mapsto (x', u)$, on peut linéariser les champs de vecteurs $U_1, \ldots, U_p$.*

5.4.6 Preuve du troisième lemme.

On considère $U_1, \ldots, U_p$ comme une action infinitésimale de $\mathbf{R}^p$ sur $\mathbf{R}^n$ dépendant de u. D'après le lemme (2), la partie linéaire de cette action est indépendante de u et est hyperbolique. Les résultats de [Cha86] pour la linéarisation des actions de groupes de Lie élémentaires s'appliquent dans ce cas particulier, on peut donc trouver un difféomorphisme local

$$\phi^u : (\mathbf{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$$

dépendant de manière C^∞ de u tel qu'on ait pour u dans un voisinage de 0

$$\phi_*^u(U_i^u) = U_i^{(1)} \text{ pour } 1 \le i \le n.$$

Le difféomorphisme local donné par

$$(x,u) \longmapsto (\phi^u(x), u)$$

est le changement de variables qui linéarise $U_1, \ldots, U_p$.

5.5 Suite de la preuve du théorème. L'action de ρ sur les $\{x_i, x_j\}$.

Il reste donc à faire en sorte que $\{x_i, x_j\} = 0$. D'après les lemmes (2) et (3), on peut supposer que $U_1, \ldots, U_p$, vus comme champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^n$, sont linéaires en x et indépendants de u. D'après (5.1) on a

$$\left[U_i, \tilde{\Pi}\right] = 0 \text{ pour } 1 \le i \le p$$

or on a

$$\begin{aligned}
\left[U_i, \tilde{\Pi}\right] &= \left[\sum_{m=1}^n \lambda_{im} x_m \partial_{x_m}, \sum_{j<k} \{x_j, x_k\} \partial_{x_j} \wedge \partial_{x_k}\right] \\
&= \sum_{j<k} \left(\sum_{m=1}^n \lambda_{im} x_m \frac{\partial}{\partial x_m} (\{x_j, x_k\})\right) \partial_{x_j} \wedge \partial_{x_k} \\
&+ \sum_{j<k} \{x_j, x_k\} \left[\sum_{m=1}^n \lambda_{im} x_m \partial_{x_m}, \partial_{x_j} \wedge \partial_{x_k}\right] \\
&= \sum_{j<k} \left(\sum_{m=1}^n \lambda_{im} x_m \frac{\partial}{\partial x_m} (\{x_j, x_k\})\right) \partial_{x_j} \wedge \partial_{x_k} \\
&- \sum_{j<k} \{x_j, x_k\} (\lambda_{ij} + \lambda_{ik}) \partial_{x_j} \wedge \partial_{x_k}.
\end{aligned}$$

On déduit donc que

$$\mathscr{L}_{U_i}\{x_j, x_k\} = (\lambda_{ij} + \lambda_{ik}) \{x_j, x_k\}.$$

Soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$. Pour tout

$$v = \sum_{j=1}^p v_j e_j \in \mathbf{R}^p$$

on a

$$\lambda_k(v) = \sum_{j=1}^{p} v_j \lambda_k(e_j) = \sum_{j=1}^{p} v_j \lambda_{kj}.$$

Si on note

$$U(v) = \sum_{j=1}^{p} v_j U_j$$

on a

$$U(v) = \sum_{j=1}^{p} v_j \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kj} x_k \partial_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} v_j \lambda_k(e_j) x_k \partial_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(v) x_k \partial_{x_k}$$

d'où l'on déduit que

$$\mathscr{L}_{U(v)}\{x_j, x_k\} = (\lambda_j + \lambda_k)(v)\{x_j, x_k\}.$$

Comme le flot de $U(v)$ est donné par

$$\phi_v^t := e^{tU(v)}$$

on a

$$\frac{d}{dt}\left[(e^{tU(v)})^*\{x_j, x_k\}\right] = (\lambda_j + \lambda_k)(v)\{x_j, x_k\}$$

d'où

$$(e^{tU(v)})^*\{x_j, x_k\} = e^{t(\lambda_j+\lambda_k)(v)}\{x_j, x_k\}$$

si on note

$$x_{jk}(u, x) := \{x_j, x_k\}(u, x)$$

on a alors

$$x_{jk}(u, e^{t\lambda(v)}x) := x_{jk}(u, e^{t\lambda_1(v)}x_1, \ldots, e^{t\lambda_n(v)}x_n) = e^{t(\lambda_j+\lambda_k)(v)} x_{jk}(u, x). \tag{5.2}$$

On a donc pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$

$$\partial^\alpha x_{jk}(u, x) = e^{t(\alpha.\lambda - \lambda_j - \lambda_k)(v)} \partial^\alpha x_{jk}(u, e^{t\lambda(v)}x) \tag{5.3}$$

avec

$$(\alpha.\lambda)(v) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i(v).$$

5.6 Le cas du domaine de Poincaré.

On suppose que les λ_i sont dans le "domaine de Poincaré", c'est-à-dire que l'enveloppe convexe de $(Re\lambda_1, \ldots, Re\lambda_n)$ ne contient pas 0. Dans ce cas il existe $v \in \mathbf{R}^p$ tel que

$$Re\lambda_i(v) < 0 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}$$

et il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que

$$Re(\alpha.\lambda - \lambda_j - \lambda_k)(v) < 0$$

pour tout multi-indice α avec

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq K.$$

Il suffit de faire tendre t vers $+\infty$ dans

$$\partial^\alpha x_{jk}(u, x) = e^{t(\alpha.\lambda - \lambda_j - \lambda_k)(v)} \partial^\alpha x_{jk}(u, e^{t\lambda(v)} x)$$

pour avoir

$$\partial^\alpha x_{jk}(x, u) = 0 \ \forall |\alpha| \geq K.$$

Ceci montre que $x_{jk}(u, x)$ est polynômiale en x, elle est donc de la forme

$$x_{jk}(u, x) = \sum_{|\alpha| \leq K} a_\alpha(u) x^\alpha$$

et la formule suivante

$$x_{jk}(u, x) = e^{-t(\lambda_j + \lambda_k)(v)} x_{jk}\left(u, e^{t\lambda(v)} x\right)$$

donne

$$\sum_{|\alpha| \leq K} a_\alpha(u) x^\alpha = e^{-t(\lambda_j + \lambda_k)(v)} \sum_{|\alpha| \leq K} a_\alpha(u) (e^{t\lambda(v)} x)^\alpha$$

d'où

$$a_\alpha(u) = a_\alpha(u) e^{t(\alpha.\lambda - \lambda_j - \lambda_k)(v)}$$

ce qui implique que $a_\alpha(u) = 0$ sauf si $\alpha_j = \alpha_k = 1$ et $\alpha_i = 0$ pour $i \notin \{j, k\}$. Donc les x_{jk} sont de la forme

$$x_{jk}(u, x) = a_{jk}(u) x_j x_k. \tag{5.4}$$

5.6.1 Premier lemme de structure.

Lemme 20 *Il existe des champs de vecteurs* $A_1, \dots, A_p$ *de la forme*

$$A_i(x,u) = \sum_{j=1}^{n} A_i^j(u) x_j \partial_{x_j}$$

tels que

$$\Pi = \sum_{i=1}^{p} (\partial_{u_i} + A_i) \wedge U_i$$

Remarque.

On aura alors pour tout $1 \leq i, j \leq p$,

$$\begin{aligned} [A_i, U_j] &= \left[\sum_{\ell=1}^{n} A_i^\ell x_\ell \partial_{x_\ell}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_k \partial_{x_k} \right] \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} A_i^\ell x_\ell \lambda_{j\ell} \partial_{x_\ell} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_k A_i^k \partial_{x_k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} A_i^\ell \lambda_{j\ell} x_\ell \partial_{x_\ell} - \sum_{\ell=1}^{n} A_i^\ell \lambda_{j\ell} x_\ell \partial_{x_\ell} = 0. \end{aligned}$$

5.6.2 Preuve du premier lemme.

Si on pose $X_i := x_i \partial_{x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$, ces champs de vecteurs commutent avec les ∂_{u_j}, la structure de Poisson s'écrit

$$\Pi = \tilde{\Pi} + \sum_{i=1}^{p} \partial_{u_i} \wedge U_i$$

et on a

$$U_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} X_j \text{ et } \tilde{\Pi} = \sum_{i<j} a_{ij}(u) X_i \wedge X_j.$$

On cherche des champs de vecteurs $A_i = \sum_j A_i^j X_j$ tels que

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i=1}^{p} A_i \wedge U_i.$$

On remarque que l'on travaille dans le module libre de base $(X_1, \ldots, X_n)$ sur l'anneau des germes en 0 de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^p$. Les champs de vecteurs U_i $(1 \leq i \leq p)$ appartiennent a ce module et sont linéairement indépendants par hypothèse. En les complétant (par certains des X_i) en une base $(U_1, \ldots, U_n)$, le champs de bi-vecteurs $\tilde{\Pi}$ s' écrira alors

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i<j} c_{ij}(u) U_i \wedge U_j.$$

Le cas n=p+1. Dans ce cas on a

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i<j} c_{ij} U_i \wedge U_j = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=i+1}^{n} -c_{ij} U_j \right) \wedge U_i$$

et l'équation précédente admet une solution évidente :

$$A_i = \sum_{j=i+1}^{n} -c_{ij} U_j = \sum_{j=i+1}^{n} -c_{ij} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_k \partial_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} -c_{ij} \lambda_{jk} \right) x_k \partial_{x_k}.$$

Le cas n>p+1. On écrit la première hypothèse du théorème sous la forme

$$\underbrace{\Pi \wedge \Pi \wedge \cdots \wedge \Pi}_{(p+1) \text{ fois}} = 0$$

ce qui donne

$$\underbrace{\tilde{\Pi} \wedge \cdots \wedge \tilde{\Pi}}_{(p+1) \text{ fois}} + \cdots + (p+1) \tilde{\Pi} \wedge \partial_{u_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{u_p} \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_p = 0$$

d'où l'on déduit que

$$\tilde{\Pi} \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_p = 0, \tag{5.5}$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{i<j} c_{ij} U_i \wedge U_j \right) \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_p = 0.$$

On en déduit que

$$c_{ij} = 0 \text{ pour } p+1 \leq i < j \leq n$$

et on a alors

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i<j\leq p+1} c_{ij} U_i \wedge U_j = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=i+1}^{p+1} -c_{ij} U_j \right) \wedge U_i,$$

d'où une solution pour l'équation.

5.6.3 Deuxième lemme de structure.

Lemme 21 *Si on pose* $\tilde{A}_i(x,u) = \partial_{u_i} + A_i(x,u)$*, pour* $i = 1$ *à* p*, on a les égalités suivantes :*

$$\sum_{i<j} \left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] \wedge U_i \wedge U_j = 0 \tag{5.6}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \left[\tilde{A}_j, U_i\right] \wedge U_j = 0 \tag{5.7}$$

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] = \sum_{\ell=1}^{p} \Lambda_{ij}^{\ell} U_\ell. \tag{5.8}$$

5.6.4 Preuve du deuxième lemme.

On la formule suivante [Sch53].

$$\left[\tilde{A}_i \wedge U_i, \tilde{A}_j \wedge U_j\right] = \left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] \wedge U_i \wedge U_j + \left[\tilde{A}_j, U_i\right] \wedge \tilde{A}_i \wedge U_j + \left[\tilde{A}_i, U_j\right] \wedge \tilde{A}_j \wedge U_i$$

(le terme $[U_i, U_j] \wedge \tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_j$ est nul). L'identité de Jacobi $[\Pi, \Pi] = 0$ donne

$$\sum_{i,j=1}^{p} \left[\tilde{A}_j, U_i\right] \wedge \tilde{A}_i \wedge U_j + \sum_{i<j} \left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] \wedge U_i \wedge U_j = 0. \tag{5.9}$$

Comme on a

$$\left[\tilde{A}_j, U_i\right] = \left[\partial_{u_j}, U_i\right] + [A_j, U_i] = 0$$

on a donc (5.7), quand à (5.6), elle se déduit alors de (5.9). Pour montrer (5.8), on remarque que

$$\begin{aligned} [A_i, A_j] &= \left[\sum_{\ell=1}^{n} A_i^{\ell} X_\ell, \sum_{k=1}^{n} A_j^{k} X_k\right] \\ &= \sum_{\ell,k} \left[A_i^{\ell} X_\ell, A_j^{k} X_k\right] \\ &= \sum_{\ell,k} A_i^{\ell} A_j^{k} \left[X_\ell, X_k\right] = 0, \end{aligned}$$

car les X_j commutent et les A_j ne dépendent pas de x. On a donc

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] = [\partial_{u_i}, A_j] - \left[\partial_{u_j}, A_i\right] = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial A_j^{\ell}}{\partial u_i}(u) - \frac{\partial A_i^{\ell}}{\partial u_j}(u)\right) X_\ell$$

il est donc de la forme

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] := \sum_{\ell=1}^{n} C_{ij}^{\ell}(u) X_\ell. \tag{5.10}$$

En complétant les U_i $(1 \leq i \leq p)$ en une base $(U_1, \ldots, U_n)$, on aura

$$\sum_{\ell=1}^{n} C_{ij}^{\ell}(u) X_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \Lambda_{ij}^{\ell}(u) U_\ell.$$

De l'égalité (5.6) on déduit que

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_p = 0, \tag{5.11}$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{\ell=1}^{n} \Lambda_{ij}^{\ell}(u) U_\ell\right) \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_p = 0$$

on a donc

$$\Lambda_{ij}^{\ell}(u) = 0 \text{ pour } p+1 \leq \ell \leq n$$

et (5.8) est vérifiée.

5.6.5 La fin de la linéarisation.

Lemme 22 *Il existe un changement de variables qui préserve les champs de vecteurs $U_1, \ldots, U_p$ et qui transforme A_k en 0 pour $k = 1$ à p. On aura donc*

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i=1}^{p} A_i \wedge U_i = \sum_{j<k} \{x_j, x_k\} \partial_{x_j} \wedge \partial_{x_k} = 0$$

c'est-à-dire

$$\{x_j, x_k\} = 0 \textit{ pour } 1 \leq j < k \leq n.$$

On procède par étapes : Comme on a

$$\left[U_i, \tilde{A}_1\right] = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq p$$

on peut faire un changement de variables qui préserve $U_1, \ldots, U_p$ et qui transforme $\tilde{A}_1$ en ∂_{u_1} (ie $A_1 = 0$). On suppose donc par récurrence, que

$$A_1 = \cdots = A_{q-1} = 0 \text{ ie } \tilde{A}_i = \partial_{u_i} \text{ pour } 1 \leq i < q.$$

Première étape.

On cherche un changement de variables $(x,u) \mapsto (x',u)$ qui préserve $U_1,\dots,U_p,\partial_{u_1},\dots,\partial_{u_{q-1}}$ et qui remplace $\tilde{A}_q$ par

$$\partial_{u_q} + \sum_{\ell=1}^{p} \alpha^\ell(u) U_\ell.$$

Pour cela on cherche des fonctions $\beta^1(u),\dots,\beta^p(u)$ telles que

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_q - \sum_{\ell=1}^{p} \beta^\ell U_\ell\right] = 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } q-1. \tag{5.12}$$

D'après (5.8), cette équation s'écrit sous la forme

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_q\right] = \sum_{\ell=1}^{p} \Lambda_{iq}^\ell U_\ell = \left[\partial_{u_i}, \sum_{\ell=1}^{p} \beta^\ell U_\ell\right] = \sum_{\ell=1}^{p} \frac{\partial \beta^\ell}{\partial u_i}(u) U_\ell$$

c'est-à-dire

$$\Lambda_{iq}^\ell(u) = \frac{\partial \beta^\ell}{\partial u_i}(u).$$

Comme l'identité de Jacobi s'écrit, pour $1 \le i < j < q$ sous la forme

$$\left[\tilde{A}_i, \left[\tilde{A}_j, \tilde{A}_q\right]\right] = \left[\tilde{A}_j, \left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_q\right]\right]$$

c'est-à-dire

$$\left[\partial_{u_i}, \sum_{\ell=1}^{p} \Lambda_{jq}^\ell U_\ell\right] = \left[\partial_{u_j}, \sum_{\ell=1}^{p} \Lambda_{iq} U_\ell\right]$$

d'où

$$\frac{\partial \Lambda_{jq}^\ell}{\partial u_i}(u) = \frac{\partial \Lambda_{iq}^\ell}{\partial u_j}(u)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \beta^\ell}{\partial u_i \partial u_j}(u) = \frac{\partial \beta^\ell}{\partial u_j \partial u_i}(u).$$

On peut donc trouver des solutions $\beta^\ell(u)$ pour (5.12). Ces fonctions sont constantes le long des orbites des champs U_i, d'où

$$\left[U_i, \tilde{A}_q - \sum_{\ell=1}^{p} \beta^\ell U_\ell\right] = 0 \text{ pour } 1 \le i \le p.$$

On peut donc faire un changement de variables qui préserve

$$U_1,\dots,U_p,\partial_{u_1},\dots,\partial_{u_{q-1}}$$

et qui redresse $\tilde{A}_q - \sum_{\ell=1}^{p} \beta^\ell U_\ell$ sur ∂_{u_q}. Ce changement de variables transforme $\tilde{A}_q$ en $\partial_{u_q} + \sum_{\ell=1}^{p} \alpha^\ell U_\ell$.

Deuxième étape.

Puisque on a pour toute matrice symétrique $\left(f_i^\ell(u)\right)_{i\ell}$

$$\sum_{i=1}^{p} A_i \wedge U_i = \sum_{i=1}^{p} \left(A_i + \sum_{\ell=1}^{p} f_i^\ell(u) U_\ell \right) \wedge U_i$$

on va donc remplacer chaque A_i par $A_i + \sum_{\ell=1}^{p} f_i^\ell U_\ell$ avec $\left(f_i^\ell(u)\right)_{i\ell}$ une matrice symétrique telle que

$$\left[\tilde{A}_i + \sum_{\ell=1}^{p} f_i^\ell U_\ell, \tilde{A}_j + \sum_{\ell=1}^{p} f_j^\ell U_\ell \right] = 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq q. \tag{5.13}$$

Ces équations sont de la forme

$$\frac{\partial f_j^\ell}{\partial u_i}(u) - \frac{\partial f_i^\ell}{\partial u_j}(u) = 0 \quad (1 \leq i < j < q) \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial f_q^\ell}{\partial u_i}(u) - \frac{\partial f_i^\ell}{\partial u_q}(u) = \frac{\partial \alpha^\ell}{\partial u_i}(u) \quad (1 \leq i < j = q). \tag{5.15}$$

Les équations (5.14) et (5.15) ont pour solutions respectivement

$$f_i^\ell(u) = \frac{\partial g^\ell}{\partial u_i}(u) \quad (i < q, \ell = 1, \ldots, p)$$

$$f_q^\ell(u) = \frac{\partial g^\ell}{\partial u_q}(u) - \alpha^\ell(u) \;\; (\ell = 1, \ldots, p).$$

Il faut que la matrice $\left(f_i^\ell(u)\right)_{i\ell}$ soit symétrique, c'est-à-dire

$$\frac{\partial g^\ell}{\partial u_i}(u) = \frac{\partial g^i}{\partial u_\ell}(u) \quad (i < \ell < q) \tag{*}$$

$$\frac{\partial g^q}{\partial u_\ell}(u) = \frac{\partial g^\ell}{\partial u_q}(u) - \alpha^\ell \quad (\ell < q). \tag{**}$$

En posant

$$\omega(u) = \sum_{\ell=1}^{q} g^\ell(u) du_\ell \text{ et } \alpha(u) = \sum_{\ell=1}^{q-1} \alpha^\ell(u) du_\ell$$

(*) et (**) se déduisent de $d\omega = du_q \wedge \alpha$. Pour résoudre cette équation, il suffit de montrer que

$$d\alpha = 0. \tag{5.16}$$

Pour cela, on remarque que les $U_k \wedge U_\ell \wedge U_m$ avec $1 \leq k < \ell < m \leq p$ sont linéairement indépendants et que le seul terme du premier membre de l'égalité (5.5) contenant $U_i \wedge U_j \wedge U_q$ avec $i < j < q$ est

$$\big(\frac{\partial \alpha^i}{\partial u_j}(u) - \frac{\partial \alpha^j}{\partial u_i}(u)\big) U_i \wedge U_j \wedge U_q.$$

En effet, on a

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] = 0$$

pour $i < j < q$ et pour $i < j = q$, on a

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_q\right] = \left[\partial_{u_i}, \partial_{u_q} + \sum_{\ell=1}^{p} \alpha^\ell U_\ell\right] = \sum_{\ell=1}^{p} \frac{\partial \alpha^\ell}{\partial u_i}(u) U_\ell.$$

Si on veut $U_i \wedge U_j \wedge U_q$, il faut où bien $i = i$ et $\ell = j$ et on obtient alors

$$\frac{\partial \alpha^j}{\partial u_i}(u) U_j \wedge U_i \wedge U_q = -\frac{\partial \alpha^j}{\partial u_i}(u) U_i \wedge U_j \wedge U_q$$

où bien $i = j$ et $\ell = i$ et on obtient alors

$$\frac{\partial \alpha^i}{\partial u_j}(u) U_i \wedge U_j \wedge U_q$$

on déduit donc que

$$\left(\frac{\partial \alpha^i}{\partial u_j}(u) - \frac{\partial \alpha^j}{\partial u_i}(u)\right) = 0$$

d'où

$$d\alpha = 0.$$

En remplaçant chaque A_i par $A_i + \sum_{\ell=1}^{p} f_i^\ell U_\ell$ pour $1 \leq i \leq q$, on peut donc supposer que $\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] = 0$ pour tout $1 \leq i < j \leq q$.

Troisième étape.

On fait un changement de variables qui préserve tous les U_k et qui transforme les $\tilde{A}_i$ en ∂_{u_i} pour $1 \leq i \leq q$. Pour cela on considère le système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial h_\ell}{\partial u_j}(x, u) = A_j^\ell(u) h_\ell(x, u) \\ h_\ell(x, 0) = x_\ell \quad (\ell = 1, \ldots, n) \ \ (j = 1, \ldots, q). \end{cases}$$

Ce système a pour solutions les fonctions $h_\ell(x,u)$ $(\ell = 1,\ldots,n)$ données par

$$e^{\left(\int_0^{u_1} A_1^\ell(t,u_2,\ldots,u_p)dt+\int_0^{u_2} A_2^\ell(0,t,u_3,\ldots,u_p)dt+\cdots+\int_0^{u_q} A_p^\ell(0,\ldots,t,u_{q+1},\ldots,u_p)dt\right)}x_\ell$$

et l'inverse du difféomorphisme donné par $(x,u) \mapsto (h(u,x),u) \in \mathbf{R}^{n+p}$ avec $h(u,x) = (h_1(x,u),\ldots,h_n(x,u))$ redresse toutes ses solutions, il envoie le graphe de $u \mapsto h(x,u)$ sur celui de $u \mapsto x$ pour chaque x, il transforme donc les champs de vecteurs $\tilde{A}_1,\ldots,\tilde{A}_q$ en $\partial_{u_1},\ldots,\partial_{u_q}$.

5.7 Le cas n=p+1. Le domaine de Siegel.

Dans ce cas, on remarque que si l'une des formes $\mathbf{R}-$linéaires λ_i est complexe non réelle, alors on est forcément dans le *domaine de Poincaré*, car il y aura au plus p parties réelles distinctes et par hypothèse, elle sont linéairement indépendantes. Il reste donc à étudier le cas des valeurs propres réelles. On va d'abord montrer que dans ce cas on a

$$(\mathrm{E}_{jk}) \qquad \{x_j,x_k\}(u,x) = 0 \text{ si } x_j = 0 \text{ où } x_k = 0.$$

Pour montrer (E_{jk}) dans le cas $x_k = 0$, on commence par montrer qu'il existe $v \in \mathbf{R}^p$ tel que

$$(*) \qquad \lambda_j(v) + \lambda_k(v) > 0 \text{ et } \lambda_i(v) < 0 \text{ pour tout } i \neq k.$$

En effet, du fait que $0 \in \mathrm{Conv}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ et de l'hyperbolicité, il existe $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in [0,1]$ tous non nuls tels que

$$0 = \sum_1^n \alpha_i\lambda_i.$$

On peut donc écrire λ_k sous la forme

$$\lambda_k = -\sum_{i\neq k}\beta_i\lambda_i$$

avec des $\beta_i > 0$. Comme $\lambda_j(v) + \lambda_k(v) > 0$ s' écrit sous la forme

$$(\beta_j - 1)\lambda_j(v) < -\sum_{i\neq j,k}\beta_i\lambda_i(v),$$

pour obtenir (*) si $\beta_j \geq 1$, on choisit $v \in \mathbf{R}^p$ tel que $\lambda_i(v) < 0$ pour tout $i \neq k$. Ceci est possible, car les formes λ_i sont p par p linéairement indépendantes. Si $0 < \beta_j < 1$, on choisit v tel que $\lambda_i(v) < 0$ pour tout $i \neq k$ et

$$(\beta_j - 1)^{-1}\left(-\sum_{i\neq j,k}\beta_i\lambda_i(v)\right) < \lambda_j(v) < 0.$$

Pour établir (E_{jk}), on remplace x_k par 0 et on fait tendre t vers $+\infty$ dans

$$x_{jk}(u,x) = e^{-t(\lambda_j+\lambda_k)(v)} x_{jk}\left(u, e^{t\lambda_1(v)}x_1, \ldots, e^{t\lambda_n(v)}x_n\right). \tag{5.17}$$

Dans le cas $x_j = 0$, on établit (E_{jk}) en inversant les roles de j et k dans le raisonnement précédent. On peut donc écrire les x_{jk} sous la forme

$$x_{jk}(u,x) = a_{jk}(u,x)x_j x_k. \tag{5.18}$$

On a donc d'après (5.17)

$$a_{jk}(u,x) = a_{jk}\left(u, e^{t\lambda_1(v)}x_1, \ldots, e^{t\lambda_n(v)}x_n\right)$$

c'est-à-dire

$$\mathscr{L}_{U(v)} a_{jk}(u,x) = 0. \tag{5.19}$$

5.7.1 Premier lemme de structure.

Lemme 23 *Il existe des champs de vecteurs $A_1, \ldots, A_p$ de la forme*

$$A_i(x,u) = \sum_{j=1}^{n} A_i^j(x,u) x_j \partial_{x_j}$$

tels que

$$\Pi = \sum_{i=1}^{p} (\partial_{u_i} + A_i) \wedge U_i$$

5.7.2 Preuve du premier lemme.

Il suffit encore une fois de résoudre

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i=1}^{p} A_i \wedge U_i.$$

Avec le même raisonnement que dans le cas du domaine de Poincaré, on travaille dans le module libre de base $(X_1, \ldots, X_n)$ avec $X_i = x_i\partial_{x_i}$, sur l'anneau des germes en 0 de fonctions C^∞ sur $\mathbf{R}^{n+p}$. Les champs de vecteurs U_i $(1 \leq i \leq p)$ appartiennent a ce module et sont linéairement indépendants par hypothèse, en les complétant en une base $(U_1, \ldots, U_{p+1})$, où U_{p+1} est l'un des X_i, le champ de bi-vecteurs $\tilde{\Pi}$ s' écrira alors

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i<j} c_{ij}(x,u) U_i \wedge U_j,$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=i+1}^{n} -c_{ij} U_j \right) \wedge U_i$$

et l'équation précédente admet une solution évidente :

$$A_i = \sum_{j=i+1}^{n} -c_{ij} U_j = \sum_{j=i+1}^{n} -c_{ij} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} x_k \partial_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} -c_{ij} \lambda_{jk} \right) x_k \partial_{x_k}.$$

5.7.3 Deuxième lemme de structure.

Lemme 24 *Si on pose $\tilde{A}_i(x,u) = \partial_{u_i} + A_i(x,u)$, pour $i = 1$ à p, on a les égalités suivantes :*

$$\sum_{j=1}^{p} \left[\tilde{A}_j, U_i \right] \wedge U_j = 0 \tag{5.20}$$

$$\sum_{i<j} \left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j \right] \wedge U_i \wedge U_j = 0 \tag{5.21}$$

$$\left[\tilde{A}_j, U_i \right] = 0 \tag{5.22}$$

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j \right] = \sum_{\ell=1}^{p} \Lambda_{ij}^{\ell} U_\ell \tag{5.23}$$

5.7.4 Preuve du deuxième lemme.

Les champs de vecteurs U_i sont indépendants de u, on a donc

$$\left[U_i, \tilde{\Pi} \right] = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial U_i}{\partial u_j} \wedge U_j = 0.$$

Comme on a pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$

$$[U_i, U_j] = \left[\partial_{u_j}, U_i \right] = 0$$

on a alors

$$\begin{aligned}\left[U_i, \tilde{\Pi}\right] &= \left[U_i, \sum_{j=1}^{p} A_j \wedge U_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{p} [U_i, A_j] \wedge U_j + \sum_{j=1}^{p} A_j \wedge [U_i, U_j] \\ &= -\sum_{j=1}^{p} \left[\tilde{A}_j, U_i\right] \wedge U_j = 0\end{aligned}$$

d'où (5.20). *L'identité de Jacobi* $[\Pi, \Pi] = 0$ donne [Sch53]

$$\sum_{i,j=1}^{p} \left[\tilde{A}_j, U_i\right] \wedge \tilde{A}_i \wedge U_j + \sum_{i<j} \left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] \wedge U_i \wedge U_j = 0$$

et on remarque que

$$\sum_{i,j=1}^{p} \left[\tilde{A}_j, U_i\right] \wedge \tilde{A}_i \wedge U_j = -\sum_{i=1}^{p} \tilde{A}_i \wedge \left(\sum_{j=1}^{p} \left[\tilde{A}_j, U_i\right] \wedge U_j\right) = 0$$

d'où (5.21). On a, avec les notations de 5.7.2,

$$\begin{aligned}\left[\tilde{A}_j, U_i\right] &= [A_j, U_i] \\ &= \left[\sum_{\ell=j+1}^{n} -c_{j\ell} U_\ell, U_i\right] \\ &= \sum_{\ell=j+1}^{n} \left(-c_{j\ell} \mathscr{L}_{U_\ell}(U_i) + c_{j\ell} \mathscr{L}_{U_i}(U_\ell) + \mathscr{L}_{U_i}(c_{j\ell}) U_\ell\right) \\ &= \sum_{\ell=j+1}^{n} \mathscr{L}_{U_i}(c_{j\ell}) U_\ell.\end{aligned}$$

Comme $U_1, \ldots, U_p$ commutent entre eux et avec U_{p+1} (qui est l'un des X_i), on a

$$\begin{aligned}0 &= \left[U_i, \tilde{\Pi}\right] \\ &= \left[U_i, \sum_{j<\ell} c_{j\ell} U_j \wedge U_\ell\right] \\ &= \sum_{j<\ell} \left(\mathscr{L}_{U_i}(c_{j\ell}) U_j \wedge U_\ell + c_{j\ell} [U_i, U_j] \wedge U_\ell + c_{j\ell} U_j \wedge [U_i, U_\ell]\right) \\ &= \sum_{j<\ell} \mathscr{L}_{U_i}(c_{j\ell}) U_j \wedge U_\ell\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\mathscr{L}_{U_i}(c_{j\ell}) = 0 \text{ pour } 1 \leq j < \ell \leq p+1$$

et (5.22) est vérifiée. On a

$$\begin{aligned}\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] &= \left[\partial_{u_i} + A_i, \partial_{u_j} + A_j\right] \\ &= [\partial_{u_i}, A_j] - \left[\partial_{u_j}, A_i\right] + [A_i, A_j]\end{aligned}$$

il est donc de la forme

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] := \sum_{k=1}^{n} D_{ij}^k(u,x) X_k,$$

d'où

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] = \sum_{k=1}^{n} D_{ij}^k(u,x) X_k = \sum_{k=1}^{p+1} \Lambda_{ij}^k(x,u) U_k.$$

De (5.21) on déduit que

$$\left[\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\right] \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_p = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{k=1}^{p+1} \Lambda_{ij}^k(x,u) U_k\right) \wedge U_1 \wedge \cdots \wedge U_p = 0$$

on a donc

$$\Lambda_{ij}^{p+1}(x,u) = 0$$

et (5.23) est vérifiée.

5.7.5 La fin de la linéarisation.

Lemme 25 *Il existe un changement de variables qui préserve les champs de vecteurs $U_1, \ldots, U_p$ et qui transforme A_k en 0 pour $k = 1$ à p. On aura donc*

$$\tilde{\Pi} = \sum_{i=1}^{p} A_i \wedge U_i = \sum_{j<k} \{x_j, x_k\} \partial_{x_j} \wedge \partial_{x_k} = 0$$

c'est-à-dire

$$\{x_j, x_k\} = 0 \textit{ pour } 1 \leq j < k \leq n.$$

Ce lemme se démontre de la même manière que dans le cas du domaine de Poincaré.

Références

[CC97] M. Chaperon and F. Coudray, *Invariant manifolds, conjugacies and blow-up*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **17** (1997).

[Cha86] M. Chaperon, *Géométrie différentielle et singularités des systèmes dynamiques*, Astérisque **138–139** (1986).

[Cha87] ______, *C^k-Conjugacy of holomorphic flow near a singularity*, Publ. Math. IHES **64** (1987), 144–183.

[Cha93] ______, *Variétés stables et formes normales*, C.R. Acad. Sci. Paris Série I (1993), 87–92.

[Cha98] ______, *Sur la régularité des fonctions implicites*, Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu **187** (1998).

[Con84] J.F. Conn, *Normal forms for analytic Poisson structures*, Ann. of Math. **119** (1984), no. 2, 576–601.

[Con85] ______, *Normal forms for smooth Poisson structures*, Ann. of Math. **121** (1985), no. 2, 565–593.

[Duf89] J.P. Dufour, *Hyperbolic actions of $\mathbf{R}^p$ on Poisson manifolds*, Symplectic Geometry, Groupoids, and Integrable Systems (P. Dazord and A. Weinstein, eds.), vol. 20, Math. Sci. Res. Inst. Publications, 1989, pp. 137–150.

[Duf90] ______, *Linearisation des structures de Poisson*, J. of Diff. Geom. **30** (1990), 415–428.

[Har60] P. Hartman, *On local homeomorphisms of euclidian spaces*, Bol. Soc. Mat. Mexican **5** (1960), 220–241.

[HPS77] M.W. Hirsch, C.C. Pugh, and M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer Lecture notes in Mathematics **583** (1977).

[Irw80a] M.C. Irwin, *A new proof of the pseudo-stable manifold theorem*, Jour. London. Math. Soc **21** (1980), 557–566.

[Irw80b] ______, *Smooth dynamical systems*, Academic Press, London, 1980.

[Kir76] A.A. Kirillov, *Local Lie algebras*, Russian Math. Surveys **31** (1976), 56–75.

[LM79] P. Liberman and C.M. Marle, *Geométrie symplectique, bases théoriques de la mécanique*, vol. 2,4, Publ. Mathématiques de l'Université de Paris 7, 1979.

[LW95] R. De La Llave and C.E. Wayne, *On Irwin's proof of the pseudostable manifold theorem*, Math. Z. **219** (1995), 301–321.

[Sai76] K. Saito, *On a generalization of de Rham lemma*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **26** (1976), no. 2, 165–170.

[Sch53] Schouten, *On the differential operators of first order in tensor calculus*, Convegno Intern. geom. diff. Italy (1953).

[Ste57] S. Sternberg, *Local contractions and a theorem of Poincaré*, Amer. J. of Math **79** (1957), 809–824.

[Ste58] ———, *On the structure of local homeomorphisms of euclidian n-space II*, Amer. J. of Math. **80** (1958), 623–631.

[Wei83] A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. of Diff. Geometry **18** (1983).

Table des matières