UNIVERSITÉ PARIS 7-DENIS DIDEROT
UFR DE MATHÉMATIQUES

DOCTORAT

Spécialité:Mathématiques

Présenté par

Idrisse KHEMAR

Systèmes intégrables intervenant en géométrie différentielle et en physique mathématique

Thèse dirigée par: Frédéric HÉLEIN
Soutenue le 1 mars 2006 devant le jury composé de

M. Daniel BENNEQUIN
M. Olivier BIQUARD
M. Frédéric HÉLEIN
M. François LABOURIE
M. Pascal ROMON
M. Volodya ROUBTSOV

Table des matières

Résumé

Notre thèse est divisée en 2 chapitres indépendants correspondant chacun à un article.

Dans le premier chapitre, nous définissons une notion de surfaces isotropes dans $\mathbb{O}$, i.e. sur lesquelles certaines formes symplectiques canoniques s'annulent. En utilisant le produit vectoriel dans $\mathbb{O}$, nous définissons une application $\rho\colon Gr_2(\mathbb{O}) \to S^6$ de la grassmanienne des plans de $\mathbb{O}$ dans S^6. Cela nous permet d'associer à chaque surfaces Σ de $\mathbb{O}$ une fonction $\rho_\Sigma\colon \Sigma \to S^6$. Alors, nous montrons que les surfaces isotropes de $\mathbb{O}$ telles que ρ_Σ est harmonique sont solutions d'un système complètement intégrable. En utilisant les groupes de lacets, nous construisons une représentation de type Weierstrass de ces surfaces. Par restriction à $\mathbb{H} \subset \mathbb{O}$, nous retrouvons comme cas particulier les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$. Par restriction à $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, nous retrouvons les surfaces CMC de $\mathbb{R}^3$.

Dans le second chapitre, nous étudions les applications supersymétriques harmoniques définies sur $\mathbb{R}^{2|2}$ et à valeurs dans un espace symétrique, du point de vue des systèmes intégrables. Il est bien connu que les applications harmoniques de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans un espace symétrique sont solutions d'un système intégrable. Nous montrons que les applications superharmoniques de $\mathbb{R}^{2|2}$ dans un espace symétrique sont solutions d'un système intégrable, et que l'on a une représentation de type Weierstrass en termes de potentiels holomorphes (ainsi qu'en termes de potentiels méromorphes). Nous montrons également que les applications supersymétriques primitives de $\mathbb{R}^{2|2}$ dans un espace 4-symétrique donnent lieu, par restriction à $\mathbb{R}^2$, à des solutions du système elliptique du second ordre associé à l'espace 4-symétrique considéré (au sens de C.L. Terng). Ceci nous permet d'obtenir, de manière conceptuelle, une sorte d'interprétation supersymétrique de tous les systèmes elliptiques du second ordre associés à un espace 4-symétrique, en particulier du système intégrable construit au chapitre 1 (et plus particulièrement des surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires dans un espace symétrique).

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier certains systèmes intégrables issus de la géométrie différentielle et de la physique mathématique.

Au cours des dernières décennies la liste des systèmes complètement intégrables s'est considérablement enrichie par des exemples fournis par la géométrie différentielle : surfaces à courbure moyenne constante, applications harmoniques à valeurs dans les espaces symétriques, surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires dans les espaces hermitiens symétriques, etc. pour les systèmes à deux variables ; connexions autoduales de Yang-Mills et métriques d'Einstein auto-duales, ou encore métriques hyperkählériennes pour des systèmes à 4 variables et plus. Parallèlement le rôle important que semblent jouer ces systèmes intégrables dans les théories quantiques des champs s'est confirmé, grâce notamment aux progrès importants qui ont été réalisés dans la compréhension des diverses dualités entre "quanta" et "solitons" depuis la dualité entre sin-Gordon et Thiring massif en dimension deux jusqu'aux théories des supercordes en dimention 10, en passant par les monopoles de 't Hooft-Polyakov en dimension 4.

Ces résultats constituent un encouragement à rechercher d'autres systèmes intégrables, et surtout ceux qui possèdent une signification géométrique.

Notre thèse est divisée en 2 chapitres indépendants correspondant chacun à un article. Le premier concerne l'étude de certaines surfaces isotropes de $\mathbb{R}^8$ solutions d'un système intégrable et généralisant les surfaces hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$. Le second concerne l'étude des applications supersymétriques harmoniques définies sur $\mathbb{R}^{2|2}$ et à valeurs dans un espace symétrique, du point de vue des systèmes intégrables.

Dans cette thèse, nous utilisons la méthode « DPW », pour obtenir une representation de type Weierstrass des systèmes intégrables que nous construisons. C'est la méthode développée par J. Dorfmeister, F. Pedit et H.-Y. Wu, pour les applications harmoniques à valeurs dans un espace symétrique ([8]). Cette méthode permet à l'aide de l'utilisation des groupes de lacets (cf. [26]) d'obtenir une représentation de type Weierstrass des applications harmoniques à valeurs dans un espace symétrique en fonction de données holomorphes. Concrètement, on a un algorithme qui permet à partir de donneés holomorphes (*i.e.* un certain nombre de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ à valeurs dans un espace vectoriel) de construire toutes les applications harmoniques à valeurs dans un espace

symétrique. Ces applications sont donc solutions d'un système intégrable, plus précisèment du système elliptique intégrable d'ordre 1 associé à l'espace symétrique considéré, au sens de Terng (cf. [29]). Expliquons ce que cela veut dire.
Une fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans un espace symétrique G/H admet un relèvement $U\colon \mathbb{R}^2 \to G$ qui a une forme de Maurer-Cartan $\alpha = U^{-1}.dU$ qui vérifie alors l'équation de Maurer-Cartan (qui caractérise les formes de Maurer-Cartan *i.e.* les 1-formes qui peuvent s'ecrire $U^{-1}.dU$ pour un certain U) :

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0.$$

Ensuite, écrivant la décomposition de α suivant la décomposition de Cartan de l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ (où $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie de H), $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, on introduit la forme de Maurer-Cartan prolongée

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-1}\alpha_1' + \alpha_0 + \lambda\alpha_1''$$

pour $\lambda \in S^1$, avec $\alpha_1' = \alpha_1(\frac{\partial}{\partial z})dz, \alpha_1'' = \alpha_1(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})d\bar{z}$. Alors $u\colon \mathbb{R}^2 \to G/H$ est harmonique si, et seulement si, α_λ vérifie l'équation de courbure nulle :

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0.$$

Ainsi on obtient l'équation de courbure nulle pour une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie de dimension infinie $\Lambda\mathfrak{g}_\tau$ (lacets twistés de $\mathfrak{g}$). On dit alors – suivant Terng (cf. [29]) – que les applications harmoniques à valeurs dans l'espace symétrique G/H sont solutions du système elliptique du premier ordre associé à l'espace symétrique G/H (car dans le développement de α_λ en puissances du paramètre spectral λ, $\alpha_\lambda = \sum_{|k|\leq n} \lambda^k \hat{\alpha}_k$, on a $n = 1$). Et on peut alors appliquer la méthode « DPW » pour obtenir une représentation de type Weierstrass (cf. [8]).

Il y a quelques années, F. Hélein et P. Romon ont montré que les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires dans dans un espace symétrique hermitien G/H sont également solutions d'un système intégrable (cf. [19]).
Les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires dans une variété kählérienne sont des surfaces lagrangiennes qui sont des points critiques de la fonctionnelle d'aire pour une classe particulière de variation infinitésimale préservant la contrainte lagrangienne, à savoir les champs de vecteurs hamiltoniens à support compact. L'équation d'Euler-Lagrange peut être formulée en fonction de l'angle lagrangien β, une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ définie le long de la surface lagrangienne. Une surface lagrangienne est hamiltonienne stationnaire si, et seulement si, β est harmonique. (Cette fonction β permet notamment de retrouver la forme de Maslov par $\Theta = \frac{1}{\pi}d\beta$.)
F. Hélein et P. Romon ont alors montré que : si $\tau\colon G \to G$ est l'involution symétrique associée à G/H alors il existe un automorphisme d'ordre 4 du groupe G, σ, tel que $\tau = \sigma^2$, et les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires dans G/H sont les solutions du (G,σ)-système elliptique intégrable du second ordre (toujours au sens de Terng). Précisons cela.

Soit u une application d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans G/H. On la relève par un relèvement $U\colon \Omega \to G$. Ecrivant la décomposition de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ en somme directe de sous-espaces propres de $T_1\sigma$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}_4}\mathfrak{g}_k$ ($\mathfrak{g}_k$ étant le sous-espace propre associé à la valeur propre $e^{ik\pi/4}$), on décompose la forme de Maurer-Cartan $\alpha = U^{-1}.dU$, $\alpha = \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ et on introduit la forme de Maurer-Cartan prolongée

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\alpha_2' + \lambda^{-1}\alpha_{-1} + \alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_2''.$$

Alors u est une immersion conforme lagrangienne et U est un relèvement lagrangien de u (*i.e.* U et u ont le même angle lagrangien) si, et seulement si, $\alpha''_{-1} = 0$ et α_1' ne s'annule pas. De plus u est hamiltonienne stationnaire si, et seulement si,

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0.$$

C'est le premier exemple de système elliptique intégrable d'ordre 2. De plus on peut construire, là aussi, une représentation de type Weierstrass (cf. [19]).

Dans le premier chapitre, nous construisons des généralisations plus complexes dans $\mathbb{R}^8$ du système intégrable précédent dans $\mathbb{R}^4$. Dans un premier temps, nous procédons par analogie. Nous montrons que la formulation du problème dans $\mathbb{R}^4$ à l'aide des quaternions, peut être reproduite dans $\mathbb{R}^8$ à l'aide des octonions. Cela donne lieu à un système plus complexe car l'équation linéaire $\triangle\beta = 0$ est remplacée par l'équation non linéaire $\triangle\rho + |\nabla\rho|^2\rho = 0$, où ρ est à valeurs dans S^3. Plus précisément après avoir défini une famille $\{\omega_i, 1 \leq i \leq 7\}$ de formes symplectiques canoniques de $\mathbb{O}$, nous considérons les surfaces isotropes pour les 3 formes symlectiques ω_1, ω_2, ω_3, que nous appelons *surfaces* Σ_V ; et à chacune d'elle, Σ, nous associons de manière naturelle une fonction $\rho_\Sigma\colon \Sigma \to S^3$. Alors on montre que les surfaces Σ_V telles que ρ_Σ est harmonique sont solutions d'un système complètement intégrable (un système elliptique du second ordre). Nous construisons une représentation de type Weierstrass pour ces surfaces.

Dans un deuxième temps, on montre que nous pouvons aller plus loin dans notre généralisation. En effet, en considérant le produit vectoriel de $\mathbb{O}$, nous définissons une application $\rho\colon Gr_2(\mathbb{O}) \to S^6$, de la grassmanienne des plans de $\mathbb{O}$ dans S^6. Alors nous montrons que les surfaces immergées Σ de $\mathbb{O}$ telles que $\rho_\Sigma\colon z \in \Sigma \mapsto \rho(T_z\Sigma) \in S^6$ est harmonique (surfaces $\rho - harmoniques$) forment un système complètement intégrable. Plus généralement, soit $I \subsetneqq \{1, ..., 7\}$ alors les surfaces $\omega_I - isotropes$ (i.e. isotropes pour chaque forme canonique ω_i,$i \in I$) dont le ρ_Σ (qui est alors à valeurs dans $S^I = S(\oplus_{i\notin I, i>0}\mathbb{R}e_i) \simeq S^{6-|I|}$) est harmonique, forment un système complètement intégrable. Pour $I = \{1, 2, 3\}$, on retrouve les surfaces Σ_V. Nous construisons donc une famille $(\mathcal{S}_I)$ paramétrée par I, d'ensembles de surfaces solutions d'un système intégrable, tous inclus dans $\mathcal{S}_\emptyset$, telle que $I \subset J$ implique $\mathcal{S}_J \subset \mathcal{S}_I$. Par restriction à $\mathbb{H}$ de cette théorie, nous obtenons les surfaces $\rho - harmoniques$, $\omega_I - isotropes$ de $\mathbb{H}$. Alors $\rho(Gr_2(\mathbb{H})) = S^2$ et $|I| = 0, 1$ ou 2. Pour $|I| = 1$ on retrouve les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$ et pour $|I| = 2$, les surfaces spéciales lagrangiennes. Par restriction à $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, on retrouve les surfaces CMC de $\mathbb{R}^3$.

Dans le deuxième chapitre, on étudie les applications supersymétriques harmoniques du point de vue des systèmes intégrables.
Nous noterons $(x, y, \theta_1, \theta_2)$ les coordonnées du super espace $\mathbb{R}^{2|2}$, (x, y) étant les coordonneés paires et (θ_1, θ_2) les coordonnées impaires. Alors si M est une variété riemannienne nous écrirons un superchamp $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ (*i.e.* une application paire de $\mathbb{R}^{2|2}$ dans M) sous la forme

$$\Phi = u + \theta_1\psi_1 + \theta_2\psi_2 + \theta_1\theta_2 F' \tag{1}$$

u, ψ_1, ψ_2, F' sont les composantes de champs (cf. [7]) ; u est une application paire de $\mathbb{R}^2$ dans M, ψ_1, ψ_2 sont des sections impaires de $u^*(TM)$ et F' est une section paire de $u^*(TM)$. Ainsi u, F' sont paires tandis que ψ_1, ψ_2 sont impaires (donc leurs coordonnées anticommutent).
Tout au long de ce deuxième chapitre, nous utiliserons à chaque fois, d'une part la formulation en termes de super espace et de superchamps, d'autre part la formulation en termes des composantes de champs, en nous efforcant pour chaque résultat de donner les deux formulations.
L'équation des superchamps harmoniques $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$, que nous dérivons à partir d'un lagrangien supersymétrique (qui peut être obtenu par restriction à $\mathbb{R}^{2|2}$ du lagrangien supersymmétrique du σ-modèle sur $\mathbb{R}^{3|2}$, cf. [7]) est alors

$$\bar{D}^{\nabla} D\Phi = 0, \tag{2}$$

où $D, \bar{D}$ sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^{2|2}$ (en fait des sections de $(T\mathbb{R}^{2|2})^{\mathbb{C}}$) donnés par

$$D = \frac{1}{2}(D_1 - iD_2),\ \bar{D} = \frac{1}{2}(D_1 + iD_2),$$

D_1, D_2 étant les champs de vecteurs invariants à gauche de $\mathbb{R}^{2|2}$, obtenus (par translation à gauche) à partir de $\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_2}$. On peut expliciter cette équation en termes des composantes de champs, nous obtenons alors un système qui laisse apparaitre un couplage entre les champs u et ψ. Par exemple dans le cas d'une sphère, $M = S^n$, ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} 4\frac{\partial^{\nabla}}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \left(\psi\left\langle\psi, \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\right\rangle + \bar{\psi}\left\langle\bar{\psi}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle\right) \\ \frac{\partial^{\nabla}\psi}{\partial\bar{z}} &= \frac{1}{4}\langle\bar{\psi}, \psi\rangle\bar{\psi} \\ F' &= 0 \end{aligned}$$

où évidemment $\frac{\partial^{\nabla}\cdot}{\partial z} = \frac{\partial\cdot}{\partial z} - \langle u, \frac{\partial\cdot}{\partial z}\rangle$. On remarque que si l'on se restreint aux superchamps tels que $\psi = 0, F' = 0$, on retrouve l'équation classique des applications harmoniques à valeurs dans S^n.
Nous montrons alors que les applications supersymétriques harmoniques définies sur $\mathbb{R}^{2|2}$ à valeurs dans un espace symétrique sont solutions d'un système intégrable, plus précisèment d'un système elliptique intégrable du premier ordre (au

sens supersymétrique), et nous construisons une représentation de type Weierstrass pour ces applications, en termes de potentiels holomorphes sur $\mathbb{R}^{2|2}$ (ainsi qu'en termes de potentiels méromorphes). Pour ce faire, nous devons surmonter, entre autres, deux difficultées. La première consiste à savoir caractériser les formes de Maurer-Cartan sur $\mathbb{R}^{2|2}$, c'est ce qui est fait dans le théorème 2.5. A notre connaissance, ce théorème n'avait encore jamais été démontré dans la littérature. Nous n'en avons trouvé qu'un énoncé sans preuve dans [25]. La deuxième difficultée réside dans le fait que pour démontrer la surjectivité de la représentation de Weierstrass on a besoin de résoudre un $\bar{D}$-problème (dans le cas classique – non supersymmétrique – on a besoin de résoudre un $\bar{\partial}$-problème, cf. [8]), c'est ce qui est fait dans la démonstration du théorème 2.9.
En comparant le cas classique avec le cas supersymétrique, nous remarquons deux choses. Premièrement, si l'on choisit de représenter les formes de Maurer-Cartan sur $\mathbb{R}^{2|2}$, α, par le couple $(\alpha(D), \alpha(\bar{D}))$ comme cela est permis d'après le théorème 2.5, alors on obtient une formulation des résultats analogue à celle du cas classique où l'on choisit de représenter les formes de Maurer-Cartan par $(\alpha(\frac{\partial}{\partial z}), \alpha(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}))$. Deuxièmement, les deux cas présentent un différence essentielle : alors que dans $\mathbb{R}^2$ les 2-formes alternées sont engendrées par $dz \wedge d\bar{z}$, dans $\mathbb{R}^{2|2}$ l'espace vectoriel des 2-formes alternées est de dimension 8. Par exemple, $d\theta_1 \wedge d\theta_1$ n'est pas nulle. Ceci a pour conséquence que la forme de Maurer-Cartan prolongée α_λ a des termes en λ^2 et λ^{-2}. On peut faire disparaitre ces termes en représentant une forme de Maurer-Cartan par le couple $(\alpha(D), \alpha(\bar{D}))$, mais comme nous le verrons en explicitant la représentation de Weierstrass en termes des composantes de champs on ne peut pas se débarrasser complètement de ces termes. Ainsi ils constituent une différence essentielle entre le cas classique et le cas supersymétrique.
D'ailleurs c'est justement l'existence de ces termes qui nous permet d'obtenir, de manière conceptuelle, une sorte d'interprétation supersymétrique de tous les systèmes elliptiques du second ordre associés à un espace 4-symétrique, en particulier du système intégrable construit au chapitre 1 (et plus particulièrement des surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires dans un espace symétrique).
En effet, nous montrons que les fonctions super primitives à valeurs dans un espace 4-symétrique donnent lieu par restriction à $\mathbb{R}^2$ à des solutions du système elliptique du second ordre associé à cet espace 4-symétrique. Pour cela nous avons besoin de construire une représentation de Weierstrass pour les applications primitives. A notre connaissance, on ne trouve pas une telle construction dans la littérature où l'on se restreint (pour la représentation de Weierstrass) aux applications primitives de type fini (cf. [3]). Ensuite nous en déduisons une représentation de Weierstrass pour les applications super primitives.

Chapitre 1

Surfaces isotropes de $\mathbb{O}$ et systèmes intégrables.

1.1 Introduction

Dans cet article, nous étudions certaines surfaces isotropes de $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$. L'idée de s'intéresser à de telles surfaces vient de la volonté de chercher des analogues aux surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$, dans $\mathbb{R}^8$. Ces surfaces de $\mathbb{R}^4$ forment un système complètement intégrable présentant une structure inédite (cf.[17]) et il est naturel d'en chercher des généralisations dans $\mathbb{R}^8$. (cf. [29].)
Considérons une surface Σ lagrangienne de $\mathbb{R}^4$. On peut localement trouver une paramétrisation conforme de Σ par des coordonnées $(u, v) \in \Omega$, Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$, i.e. une immersion $X : \Omega \to \mathbb{R}^4$ telle que

$$dX = e^f (e_1 du + e_2 dv)$$

avec (e_1, e_2) base hermitienne de $\mathbb{C}^2$ pour tout $(u, v) \in \Omega$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. L'identification entre $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{C}^2$ est donnée par $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$. A la surface Σ est associé *l'angle lagrangien* β défini par $e^{i\beta} = \det(e_1, e_2)$ (qui ne dépend pas de la paramétrisation choisie car il ne dépend que du plan tangent $T_{X(u,v)}\Sigma = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$).
Maintenant considérons la fonctionnelle d'aire $\mathcal{A}(\Sigma) = \int_\Sigma dv$ sur l'ensemble des surfaces orientées lagrangiennes de $\mathbb{R}^4$. Un point critique pour cette fonctionnelle est une surface lagrangienne Σ telle que $\delta\mathcal{A}(\Sigma)(X) = 0$ pour tout champ de vecteur X à support compact sur $\mathbb{R}^4$ avec la condition supplémentaire que X doit être lagrangien i.e. son flot preserve les surfaces lagrangiennes ; si on suppose que cela n'est vrai que si X est hamiltonien, i.e. $X = -i\nabla h$ avec $h \in C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ alors Σ est dite hamiltonienne stationnaire. On montre alors, cf.[17], que Σ est hamiltonienne stationnaire si, et seulement si, $\triangle\beta = 0$ où $\triangle$ est le laplacien sur Σ défini à l'aide de la métrique induite.
Dans [17], il est montré que les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$ sont solutions d'un système complètement intégrable. Dans le langage des systèmes complètement intégrables on construit une famille de

connexions de courbure nulle α_λ, $\lambda \in S^1$ qui s'écrit :

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\alpha'_2 + \lambda^{-1}\alpha'_{-1} + \alpha_0 + \lambda\alpha''_1 + \lambda^2\alpha''_2 \tag{1.1}$$

cf. [17].
Nous nous proposons ici de trouver des surfaces de $\mathbb{R}^8$ isotropes telles qu'à chacunes d'elle, Σ, corresponde une fonction $\rho_\Sigma : \Sigma \to S^3$ (analogue de $e^{i\beta} : \Sigma \to S^1$) et que les surfaces pour lesquelles ρ_Σ est harmonique forment un système complètement intégrable. Pour ce faire nous allons procéder par analogie avec les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$. Commençons par formuler le problème dans $\mathbb{R}^4$ à l'aide des quaternions. Ensuite nous procèderons par analogie en utilisant les octonions (section 1.3). Le rappel des définitions et connaissances nécessaires sur les octonions est fait dans la section 1.2.
Pour $x, y \in \mathbb{H}$, on a

$$x \cdot \bar{y} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^4} - \omega(x,y)i - \det_{\mathbb{C}^2}(x,y)j = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^2} - \det_{\mathbb{C}^2}(x,y)j$$

où $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$. Ainsi pour (e_1, e_2) base orthonormée d'un plan lagrangien de $\mathbb{R}^4$ on a

$$e_1 \cdot \bar{e}_2 = -e^{i\beta}j$$

où β est l'angle lagrangien du plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. On voit que l'on peut exprimer la contrainte lagrangienne ainsi que l'angle lagrangien à l'aide du produit dans $\mathbb{H}$. Plus précisemment, nous avons appliqué la procédure suivante : on forme le produit $x \cdot \bar{y}$, avec x, y de norme 1, puis on suppose que les deux premiers termes de $x \cdot \bar{y} \in \mathbb{H}$ dans la décomposition $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$, sont nuls et alors on a $x \cdot \bar{y} \in S^1 j$ ce qui nous permet de recupérer $e^{i\beta} \in S^1$.
Nous procèderons de même dans $\mathbb{R}^8$ en utilisant le produit des octonions (section 1.3). Pour $q, q' \in \mathbb{O} = \mathbb{H}^2$ on a

$$q \cdot \overline{q'} = \langle q, q'\rangle + \sum_{i=1}^{7} \omega_i(q, q')e_i$$

où $(e_i)_{0 \leq i \leq 7}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^8$, $\omega_i = \langle \cdot, L_{e_i} \cdot\rangle$, et L_{e_i} designe la multiplication à gauche par e_i. Nous introduisons la décomposition

$$q.\overline{q'} = (B(q, q'), -\rho(q, q')) \in \mathbb{H}^2.$$

Alors nous regardons les surfaces isotropes pour ω_1, ω_2, ω_3, que nous appelons *surfaces* Σ_V. Nous nous interessons donc à l'ensemble Q des plans de $\mathbb{O}$ isotropes pour ces 3 formes symplectiques. L'ensemble V des bases orthonormées de ces plans est l'ensemble des couples normées $(q, q') \in S^7 \times S^7$ qui vérifient $B(q, q') = 0$ (V est l'analogue de l'ensemble des bases hermitiennes de $\mathbb{C}^2$). On a alors $Q = V/SO(2)$, et $\rho(q, q') \in S^3$ pour tout $(q, q') \in V$ (la norme est multiplicative dans $\mathbb{O}$: $|qq'| = |q||q'| = 1$). On a ainsi défini une fonction $\rho : V \to S^3$ analogue à $e^{i\beta}$ et cette fonction passe au quotient en une application $\rho : Q \to S^3$.

D'autre part dans le cas de $\mathbb{R}^4$ on a le groupe $U(2)$ qui agit librement et transitivement sur l'ensemble des bases hermitiennes et on peut écrire l'action de $U(2)$ à l'aide des quaternions : on a le morphisme surjectif de groupe de noyau ± 1 :

$$\begin{array}{rcl} S^3 \times S^3 & \to & SO(4) \\ (p,q) & \mapsto & L_p R_{\bar{q}} = R_{\bar{q}} L_p = (x \mapsto px\bar{q}) \end{array}$$

et on peut écrire

$$x.\bar{y} = \langle x, y\rangle + \langle x, iy\rangle i + \langle x, jy\rangle j + \langle x, ky\rangle k$$

Ainsi $U(2)$ est le sous-groupe de $SO(4)$ qui commute avec L_i d'où $U(2) = \{L_p R_{\bar{q}}\,,\, p \in S^1,\, q \in S^3\}$. Quant à $SU(2)$ c'est le sous-groupe de $SO(4)$ qui commute avec L_i, L_j, L_k d'où $SU(2) = \{R_q\,,\, q \in S^3\}$. D'une manière générale, pour $g = L_p R_{\bar{q}} \in SO(4)$ on a $(gx)(\overline{gy}) = p(x\bar{y})\bar{p}$.
Par analogie nous allons chercher le groupe qui conserve B, i.e. le sous-groupe de $SO(8)$ qui conserve ω_1, ω_2, ω_3. Nous trouverons le groupe $SU(2) \times SU(2)$. Le résultat est très différent de ce qui ce passe dans $\mathbb{H}$ mais c'est le bon groupe de symétrie. En effet comme ρ_Σ est à valeurs dans S^3 et que nous voulons lui imposer d'être harmonique, nous allons utiliser la théorie des applications harmoniques du point de vue des systèmes intégrables (cf. [8]) et donc écrire S^3 comme un espace symétrique : $S^3 = S^3 \times S^3/\triangle$ où $\triangle$ est la diagonale de $S^3 \times S^3$, $\triangle = \{(a,a)\,,\, a \in S^3\}$ (et est l'analogue de $SU(2)$). Cependant nous nourrissons l'espoir d'avoir un groupe qui agit transitivement sur V (ce qui n'est pas le cas de $S^3 \times S^3$) ainsi qu'il en est pour $U(2)$ et les bases hermitiennes de $\mathbb{C}^2$. Nous allons donc chercher à grossir le groupe en prenant le sous-groupe de $SO(8)$ qui conserve la nullité de B : nous trouvons alors un groupe G de dimension 9 (V est de dimension 10) qui n'agit donc pas transitivement. Alors nous regardons l'action de G sur Q, qui lui est de dimension 9. Malheureusement nous trouvons que l'action n'est toujours pas transitive. Nous calculons alors les orbites : nous trouvons que toutes les orbites sont de dimension 8 sauf deux orbites dégénérées l'une de dimension 7, l'autre de dimension 6. En outre nous construisons une fonction $p\colon Q \to [0\,,\,1/2]$ dont les fibres sont les orbites de G, les orbites dégénérées étant $p^{-1}(\{0\})$ et $p^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$ respectivement. Ensuite nous arrivons à trouver un moyen simple de passer d'une orbite à une autre (cf. théorème 1.6). Enfin nous terminons la section 1.3 en étudiant algébriquement le groupe G et son algèbre de Lie.
Dans la section 1.4 nous étudions les surfaces Σ_V. Nous montrons que celle dont le ρ_Σ est harmonique forment un système complètement intégrable : nous contruisons une famille de connexion de courbure nulle α_λ comme dans (1.1).
Ensuite nous montrons que les surfaces Σ_V sont solutions de deux équations l'une linéaire, l'autre non linéaire. (En fait c'est la même équation où on représente la surface de manière différente).
Dans la section 1.5, nous exposons la méthode des groupes de lacets, en se référant à [8] et [17] pour les détails. Puis nous obtenons une représentation de type Weierstrass pour les surfaces Σ_V.
Dans la section 1.6, nous calculons le vecteur courbure moyenne d'une surface

Σ_V (dans l'espoir d'obtenir une interprétation variationnelle).
Dans la section 1.7, nous montrons que ce que nous avons fait pour les surfaces Σ_V est en fait un cas particulier de quelque chose de plus général. En effet, en considérant le produit vectoriel de $\mathbb{O}$, nous définissons une application $\rho\colon Gr_2(\mathbb{O}) \to S^6$. Alors nous montrons que les surfaces immergées Σ de $\mathbb{O}$ telles que $\rho_\Sigma\colon z \in \Sigma \mapsto \rho(T_z\Sigma) \in S^6$ est harmonique (surfaces $\rho - harmoniques$) forment un système complètement intégrable. Le groupe de symétrie est alors $Spin(7)$. Plus généralement, soit $I \subsetneqq \{1, ..., 7\}$ alors les surfaces $\omega_I - isotropes$, i.e. isotropes pour ω_i, $i \in I$, dont le ρ_Σ (qui est alors à valeurs dans $S^I = S(\oplus_{i\notin I, i>0}\mathbb{R}e_i) \simeq S^{6-|I|}$) est harmonique, forment un système complètement intégrable. Le groupe de symétrie est alors $G_I \simeq Spin(7-|I|)$. Pour $I = \{1, 2, 3\}$, on retrouve les surfaces Σ_V. Nous construisons donc une famille $(\mathcal{S}_I)$ paramétrée par I, d'ensembles de surfaces solutions d'un système intégrable, tous inclus dans $\mathcal{S}_\emptyset$, telle que $I \subset J$ implique $\mathcal{S}_J \subset \mathcal{S}_I$. Par restriction à $\mathbb{H}$ on obtient les surfaces $\rho - harmoniques$, $\omega_I - isotropes$ de $\mathbb{H}$. Alors $\rho(Gr_2(\mathbb{H})) = S^2$ et $|I| = 0, 1$ ou 2. Pour $|I| = 1$ on retrouve les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires de $\mathbb{R}^4$ et pour $|I| = 2$, les surfaces spéciales lagrangiennes. Par restriction à $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$, on retrouve les surfaces CMC de $\mathbb{R}^3$. Nous terminons l'article par le calcul du vecteur courbure moyenne d'une surface quelconque de $\mathbb{O}$ en fonction de ρ (nous pensons qu'il existe une interprétation variationnelle des surfaces ρ − harmoniques).

1.2 L'algèbre des octonions

1.2.1 Définitions

On rappelle ici les définitions et propriétés sur les octonions qui nous seront utiles pour la suite. Pour avoir plus de détails et pour les démonstrations on pourra consulter [12],[13]. On appelle algèbre des octonions l'espace vectoriel :

$$\mathbb{O} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}, \, x, y \in \mathbb{H} \right\} \subset M_2(\mathbb{H})$$

muni de la multiplication (i.e. application bilinéaire sur $\mathbb{O}$) :

$$\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' & -\bar{y}' \\ y' & \bar{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - y'\bar{y} & -\bar{y}\bar{x}' - \bar{y}'x \\ x'y + \bar{x}y' & \bar{x}'\bar{x} - y\bar{y}' \end{pmatrix}$$

On voit que l'on peut identifier $\mathbb{O}$ à $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$ muni de la multiplication

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - y'\bar{y}, \, x'y + \bar{x}y')$$

On définit une conjugaison $q \mapsto \bar{q}$ à l'aide de la conjugaison sur les matrices : $\overline{(x, y)} = (\bar{x}, -y)$. On remarque la présence d'un élément neutre pour la multiplication : $\mathbf{1} = (1, 0)$ et $\mathbb{O}$ est ainsi une $\mathbb{R}$-algèbre unitaire. En particulier, $\mathbb{R}.\mathbf{1}$ est une sous-algèbre dont les éléments seront dits réels et caractérisés par $\bar{q} = q$.
On définit sur $\mathbb{O}$ la norme $N(q) = q.\bar{q} = \bar{q}.q = x\bar{x} + y\bar{y} \in \mathbb{R}$ qui n'est autre

que la norme euclidienne standard de $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$. *Cette norme est multiplicative* : $N(qq') = N(q)N(q')$. En particulier S^7 est stable par multiplication. Les octonions orthogonaux à $\mathbf{1}$, $\mathbb{R}^\perp$, pour la norme N seront dits : *octonions pures*, et caractérisés par $\bar{q} = -q$, ou encore $q^2 \in \mathbb{R}^-$. Si on se restreint à la sphère $S^7 = \{q \in \mathbb{O}\,,\, \bar{q}.q = 1\}$ alors le sous-ensemble des octonions purs de S^7 est caractérisé par $q^2 = -1$.
La base canonique de $\mathbb{R}^8$ correspond en écriture matricielle à la base des octonions :

$$E^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I^\uparrow = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J^\uparrow = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix},\ K^\uparrow = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$E^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ I^\downarrow = E^\downarrow I^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ J^\downarrow = E^\downarrow J^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^\downarrow = E^\downarrow K^\uparrow = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite il nous arrivera aussi de noter cette base $(e_i)_{0\le i\le 7}$ (l'ordre des vecteurs étant toujours le même).
$\mathbb{O}$ n'est pas associative : $I^\downarrow(J^\downarrow K^\downarrow) = I^\downarrow(-I^\uparrow) = E^\downarrow$ tandis que $(I^\downarrow J^\downarrow)K^\downarrow = (-K^\uparrow)K^\downarrow = -E^\downarrow$.

1.2.2 Propriétés de la multiplication

Proposition 1.1

(i) $\langle xz, yz\rangle = N(z)\langle x,y\rangle,\ \langle zx, zy\rangle = N(z)\langle x,y\rangle$

(ii) $\langle xz, yw\rangle + \langle yz, xw\rangle = 2\langle x,y\rangle\langle z,w\rangle$

(iii) *si* $x \notin \mathbb{R}1$, $\mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}x$ *est une algèbre isomorphe (isométrique) à* $\mathbb{C}$.

Proposition 1.2

(i) $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$, $\bar{\bar{x}} = x$, $\langle x,y\rangle = Re(x\bar{y}) = Re(\bar{x}y)$

(ii) $x(\bar{x}y) = N(x)y$, $(x\bar{y})y = N(y)x$

(iii) $x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) = 2\langle x,y\rangle z$, $(z\bar{y})x + (z\bar{x})y = 2\langle x,y\rangle z$

(iv) *si* $\langle x,y\rangle = 0$, *alors* $x\bar{y} = -y\bar{x}$ *et* $x(\bar{y}z) = -y(\bar{x}z)$, $(z\bar{y})x = -(z\bar{x})y$.

Définition 1.1 *On dira d'un élément* $x \neq 0$ *d'une algèbre* A *non associative qu'il est inversible s'il existe* $x' \in A$ *tel que* $\forall y \in A$, $x'(xy) = x(x'y) = (yx)x' = (yx')x = y$. *Ceci revient à dire que* $L_x\colon y \mapsto xy$ *et* $R_x\colon y \mapsto yx$ *sont inversibles d'inverses respectives* $L_{x'}$ *et* $R_{x'}$.

Proposition 1.3 *Tout* $x \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$ *est inversible d'inverse* $N(x)^{-1}\bar{x}$. *En outre on a* ${}^tL_x = L_{\bar{x}}$, ${}^tR_x = R_{\bar{x}}$.

Proposition 1.4 *On a les propriétés d'associativité suivantes :*

(i)

$$\begin{aligned}(ax)(ya) &= a((xy)a)\\ a(x(ay)) &= (a(xa))y\\ x(a(ya)) &= ((xa)y)a\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}(xy)x &= x(yx)\\ x(xy) &= x^2y\\ (xy)y &= xy^2\end{aligned}$$

(iii) $R_xL_x = L_xR_x$, $L_x^2 = L_{x^2}$, $R_x^2 = R_{x^2}$, $L_{axa} = L_aL_xL_a$, $R_{aya} = R_aR_yR_a$.

Proposition 1.5 *L'application trilinéaire* $\{x, y, z\} = (xy)z - x(yz)$ *est alternée donc antisymétrique.*

Proposition 1.6

(i) $x, y \in \mathbb{O}$ *commutent si, et seulement si,* $(1, x, y)$ *est liée et alors la sous-algèbre (unitaire) engendrée par* x *et* y *est isomorphe à* $\mathbb{C}$ *(on suppose que* $\{x, y\} \not\subseteq \mathbb{R}1$*).*

(ii) *s'ils ne commutent pas alors la sous-algèbre qu'il engendrent est isomorphe (isométrique) au corps* $\mathbb{H}$ *des quaternions.*

(iii) *si* D *est une sous-algèbre (unitaire) de* $\mathbb{O}$ *de dimension 4 (i.e.* $\simeq \mathbb{H}$*) et si* $a \in D^\perp \setminus \{0\}$ *alors* $\mathbb{O} = D \oplus a.D$ *et on a*

$$(x + ay)(x' + ay') = (xx' - \lambda y'\bar{y}) + a(x'y + \bar{x}y')$$

avec $\lambda = -N(a)$.

(iv) *soit* $a, b \in (\mathbb{R}1)^\perp$ *unitaires et orthogonaux (alors comme* $ab = -ba$*) la sous-algèbre* D *engendrée par* a, b *est de dimension 4, et soit* $c \in D^\perp$ *unitaire alors* $\{1, a, b, ab, c, ca, cb, c(ab)\}$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{O}$ *qui a la même table de multiplication que la base canonique.*

Proposition 1.7 *Si* x, y *ne commutent pas i.e.* $(1, x, y)$ *est libre alors* $z \mapsto \{x, y, z\}$ *n'est pas identiquement nulle autrement dit* $L_{xy} \neq L_xL_y$ *ou encore par antisymétrie* $R_{yx} \neq R_xR_y$ *, ou encore* $L_xR_y \neq R_yL_x$.

Théorème 1.1 *Si* $L_xL_y = L_z$ *alors obligatoirement* $z = xy$ *et donc* x, y *commutent, et de même* $R_xR_y = R_z \Longrightarrow z = yx$*. Ainsi* $\{L_x,\ x \in \mathbb{O}^*\}$ *et* $\{R_x,\ x \in \mathbb{O}^*\}$ *ne sont pas des sous-groupes de* $GL(\mathbb{O}) = GL(\mathbb{R}^8)$.

Proposition 1.8 $L_xL_y = L_yL_x \Longleftrightarrow xy = yx$ *(idem pour R).*

1.3 Plans isotropes et Groupes opérants

1.3.1 Analogie à l'aide des octonions

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, on va étudier l'expression $q.\overline{q'}$ dans $\mathbb{O}$ par analogie avec $\mathbb{H}$. Soit donc $q=(x,y)$, $q'=(x',y')\in\mathbb{O}$, alors on a

$$q.\overline{q'}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\overline{x'}\\ -y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\overline{x'}+y'.\overline{y}\\ \overline{x'}y-\overline{x}y'\end{pmatrix}.$$

On peut aussi écrire en notant $(e_i)_{0\leq i\leq 7}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8=\mathbb{O}$ définie à la section 1.2 :

$$q\cdot\overline{q'}=\langle q,q'\rangle+\sum_{i=1}^{7}\langle q,\ e_i\cdot q'\rangle e_i\ .$$

Posons $\omega_i(q,q')=\langle q,\ e_i\cdot q'\rangle$, $0\leq i\leq 7$, alors ω_i est la forme symplectique sur $\mathbb{R}^8$ associée à l'endomorphisme L_{e_i} $((L_{e_i})^2=-Id)$. On a alors

$$q\cdot\overline{q'}=\langle q,q'\rangle+\sum_{i=1}^{7}\omega_i(q,q')\,e_i\ .$$

On notera

$$B(q,q')=x\,\overline{x'}+y'\overline{y}=\langle q,q'\rangle+\sum_{i=1}^{3}\omega_i(q,q')\,e_i$$

et

$$\rho(q,q')=\overline{x}y'-\overline{x'}y=-\sum_{i=4}^{7}\omega_i(q,q')\,e_{i-4}\ .$$

Soit alors $V=\{(q,q')\in S^7\times S^7/\ B(q,q')=0\}$. On a alors pour tout $(q,q')\in V$

$$q\cdot\overline{q'}=\begin{pmatrix}0\\ -\rho\end{pmatrix}$$

avec $\rho\in S^3$. Ceci s'écrit encore

$$q'=\begin{pmatrix}0\\ \rho\end{pmatrix}\cdot q.$$

On a ainsi défini une fonction $\rho\colon (q,q')\in V\mapsto\rho(q,q')\in S^3$. On peut calculer les coordonnées de q' en fonction de celles de q d'après l'expression précédente :

$$q'=\begin{pmatrix}-y\bar{\rho}\\ x\rho\end{pmatrix}.$$

En particulier on voit que V est une sous variété de $S^7\times S^7$ difféomorphe à $S^7\times S^3$, le difféomorphisme étant évidemment $(q,q')\mapsto(q,\rho)$. Enfin on remarque que ρ ne dépend que du plan orienté engendré par (q,q').

1.3.2 A la recherche de groupes agissant sur V

Cherchons le sous-groupe de $GL(8)$ qui conserve B, i.e. le groupe des éléments $g \in SO(8)$ qui commutent avec $L_{I^\uparrow}, L_{J^\uparrow}, L_{K^\uparrow}$, i.e. avec les $L_{(x,0)}$, $x \in \mathbb{H}$. On a $L_{(x,0)} = \begin{pmatrix} L_x & 0 \\ 0 & L_{\bar{x}} \end{pmatrix}$ ainsi en posant $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ on a pour tout $x \in \mathbb{H}$:

$$\begin{pmatrix} L_x & 0 \\ 0 & L_{\bar{x}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_x & 0 \\ 0 & L_{\bar{x}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_xA - AL_x & L_xB - BL_{\bar{x}} \\ L_{\bar{x}}C - CL_x & L_{\bar{x}}D - DL_{\bar{x}} \end{pmatrix}.$$

En égalant la dernière matrice à 0 on obtient : $\forall x \in \mathbb{H}\ [L_x, A] = [L_x, D] = 0$, $BL_x = L_{\bar{x}}B$, $CL_x = L_{\bar{x}}$. Les équations sur A, D signifient que $A = R_a$, $D = R_d$ avec $a, d \in \mathbb{H}$. Pour B, C on a $B(x.1) = \bar{x}B(1)$ d'où $B(ax) = \overline{ax}B(1)$ mais on a aussi $B(ax) = B(L_a x) = \bar{a}B(x) = \bar{a}\bar{x}B(1)$ or comme $\overline{ax} \neq \bar{a}\bar{x}$ en général on a donc $B(1) = 0$ et donc $B = 0$ et de même pour C. D'où

Théorème 1.2 *$g \in SO(8)$ conserve B si, et seulement si,*

$$g = \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_d \end{pmatrix}$$

avec $a, d \in S^3$, ainsi le groupe conservant B est $SU(2) \times SU(2)$.

Remarque 1.1 Le groupe obtenu n'agit pas transitivement. D'autre part, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{H}$, ici, comme on l'a vu dans la section 1.2, R_q et L_p ne commutent pas, $\{R_q L_p,\ q, p \in S^7\}$ n'est pas un groupe et on n'a pas : $(qb)\overline{(q'b)} = q\overline{q'}$.
On peut se demander pourquoi le résultat est très différent de ce qui se passe avec les quaternions où le groupe qui conserve $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$, i.e. $U(2)$, agit transitivement sur les bases hermitiennes. Cela s'explique par l'absence d'associativité. Dans $\mathbb{H}$, si $g \in SO(4)$ commute avec L_i et L_j, il commute alors avec $L_k = L_i L_j$ tandis que dans $\mathbb{O}$ le fait de commuter avec $L_{K^\uparrow}$ est une condition supplémentaire. D'ailleurs, on peut voir que le sous-groupe de $SO(8)$ qui commute avec $L_{I^\uparrow}, L_{J^\uparrow}$ est de dimension 10 (car isomorphe à $Sp(2) = U(2, \mathbb{H})$) et donc la condition de commutativité avec $L_{K^\uparrow}$, fait passer la dimension de 10 à 6 . Le groupe, $S^3 \times S^3$, ainsi obtenu est le bon groupe de symétrie recherché pour obtenir un système complètement intégrable, car pour écrire S^3 sous la forme d'un espace symétrique , on peut écrire $S^3 = S^3 \times S^3/\triangle$ où $\triangle$ est la diagonale. De même dans [17], il suffirait de se restreindre au groupe S^1, or les auteurs y utilisent le groupe $U(2)$ tout entier qui agit transitivement sur les bases hermitiennes, en écrivant que $S^1 = U(2)/SU(2)$. On voudrait ici de la même manière trouver un groupe (contenant $S^3 \times S^3$) qui agisse transitivement (ou du moins "le plus transitivement possible") sur V. Car dans le cas où G agit transitivement sur V on peut toujours relever un couple $(q, q') \in V$ en un élément de G, et le fait de travailler sur G permet de représenter une surface par un élément

de $\mathbb{R}_+^*.G$ (dans [18] on obtient ainsi une équation de Dirac). D'autre part, on veut comprendre la géométrie de V, i.e., la géométrie des plans isotropes pour les trois formes symplectiques ω_i, $i = 1, 2, 3$ de la même façon que la géométrie des plans lagrangiens de $\mathbb{C}^2$ est étudiée (ou rappelée) dans [17].

Le plus gros groupe qui conserve V est le sous groupe de $SO(8)$ qui conserve la nullité de B. Il est donné par :

Théorème 1.3 *Soit $G = \{g \in SO(8)/B(q, q') = 0 \iff B(g.q, g.q') = 0\}$, c'est le plus grand sous-groupe de $GL(8)$ qui stabilise V. Il existe un morphisme surjectif $\theta \colon G \to O(3) \subset O(4)$ à valeurs dans le groupe des isométries de $\mathbb{H}$ qui fixent 1, tel que $\theta^{-1}(SO(3)) = G^0$, la composante neutre de G, et $\theta^{-1}(O^-(3)) = L_{E^\downarrow}G^0$, donc*

$$G = G^0 \sqcup L_{E^\downarrow}G^0 \ ,$$

et tel que tout $g \in G^0$ s'écrit $g = \begin{pmatrix} R_a\theta(g) & 0 \\ 0 & R_b\theta(g) \end{pmatrix}$. Plus Précisement

$$G^0 = \left\{ \begin{pmatrix} R_aL_c & 0 \\ 0 & R_bL_c \end{pmatrix}, \ a, b, c \in S^3 \right\}$$

De plus on a $\forall q, q' \in \mathbb{O}$, $B(g.q, g.q') = \theta(g)(B(q, q'))$ pour tout $g \in G$. En outre pour tout $g \in G^0$, on a $\theta(L_{E^\downarrow}g) = \theta(g)* = *\theta(g)$ où $*$ désigne la conjuguaison de $\mathbb{H}$ qui est aussi l'élément $-I_3$ de $O(\operatorname{Im}\mathbb{H}) = O(3)$. Enfin dans G^0, on a $\theta(Diag(R_aL_c, R_bL_c)) = Int_c = (x \in \operatorname{Im}\mathbb{H} \mapsto cxc^{-1})$.

Démonstration — Dire que $g \in GL(8)$ vérifie $B(q, q') = 0 \Longrightarrow B(g.q, g.q') = 0$ revient à dire que $(\langle q, L_{e_i}q'\rangle = 0, \ 0 \le i \le 3) \Longrightarrow (\langle g.q, L_{e_i}g.q'\rangle = 0, \ 0 \le i \le 3)$ ce qui équivaut à

$$^tgL_{e_i}g = \sum_{j=0}^{3} \theta_{ij}L_{e_i}, \quad 0 \le i \le 3. \tag{1.2}$$

avec $\theta_{ij} \in \mathbb{R}$. Alors en posant $\theta(g) = (\theta_{ij})_{0 \le i,j \le 3}$, on a $\theta(gg') = \theta(g)\theta(g')$ pour tout $g, g' \in G' = \{g \in GL(8)/ \ B(q, q') = 0 \iff B(g.q, g.q') = 0\}$. En effet on a

$$\begin{aligned} {}^t(gg')L_{e_i}(gg') = {}^tg'(\sum_{j=0}^{3} \theta_{ij}(g)L_{e_j})g' &= \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} \theta_{ij}(g)\theta_{jk}(g')L_{e_k} \\ &= \sum_{k=0}^{3} (\theta(g)\theta(g'))_{ik}L_{e_k} \end{aligned}$$

d'où le résultat. Ainsi $\theta \colon G' \mapsto GL(4)$ est un morphisme de groupe. Prenons $i = 0$ dans (1.2), comparons l'équation obtenue avec sa transposée, alors en utilisant que ${}^tL_{e_j} = -L_{e_j}$ pour $j \ge 1$, on voit que l'on doit avoir ${}^tgg = \theta_{00}Id$ et $\theta_{0j} = 0$ pour $1 \le j \le 3$. En procédant de même pour $i \ge 1$ on obtient $\theta_{i\,0} = 0$ pour $1 \le i \le 3$; il en résulte que $\theta = Diag(\theta_{00}, \ \mu)$ avec $\mu \in Gl(3)$. De plus comme ${}^tgg = \theta_{00}Id$, on doit avoir $\theta_{00} > 0$ et donc $G' = \mathbb{R}_+^*.G$ avec, rappelons le, $G = G' \bigcap SO(8)$. Maintenant en écrivant (1.2) pour $i \geq 1$ et $g \in G$, et en utilisant le fait que les $L_{e_i},\ i \geq 1$, anticommutent deux à deux, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} -2\delta_{ik} Id & = & g^{-1}(L_{e_i}L_{e_k} + L_{e_k}L_{e_i})g \\ & = & (g^{-1}L_{e_i}g)(g^{-1}L_{e_k}g) + (g^{-1}L_{e_k}g)(g^{-1}L_{e_i}g) \\ & = & \displaystyle\sum_{1\leq j,l\leq 3} \mu_{ij}\mu_{kl}(L_{e_j}L_{e_l} + L_{e_l}L_{e_j}) \\ & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \mu_{ij}\mu_{kj}(-2Id) \end{array}$$

d'où $\mu(g) \in O(3)$ si $g \in G$.
Cherchons, ensuite à quelles conditions $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$. Pour cela , on utilise toujours (1.2), et le fait que $L_{e_i} = \begin{pmatrix} L_{e'_i} & 0 \\ 0 & -L_{e'_i} \end{pmatrix}$ avec $(e'_1, e'_2, e'_3) = (i, j, k)$ la base canonique de $\operatorname{Im}\mathbb{H}$, cela donne :

$$\begin{pmatrix} L_{e'_i}A & L_{e'_i}B \\ -L_{e'_i}C & -L_{e'_i}D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AL_{\mu^i} & -BL_{\mu^i} \\ CL_{\mu^i} & -DL_{\mu^i} \end{pmatrix}$$

où $\mu^i = \sum_{j=0}^{3} \mu_{ij}e'_j \in \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k = \operatorname{Im}\mathbb{H}$. Ainsi pour A par exemple, on a $L_{e'_i}A = AL_{\mu^i}$, d'où $e'_i.A(1) = A(\mu^i)$ ce qui imlique que

$$A. \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & {}^t\mu & \\ 0 & & & \end{array} \right) = (a,\ e'_1.a,\ e'_2.a,\ e'_3.a) = R_a$$

avec $a = A(1)$. Finalement on a donc $A = R_a.Diag(1,\ \mu) = R_a.\theta$ et de même $D = R_d.Diag(1,\ \mu)$, $B = R_b.Diag(1, -\mu)$, $C = R_c.Diag(1, -\mu) = R_c.Diag(1,\ \mu)*$, où $* = Diag(1, -I_3)$ est la conjuguaison dans $\mathbb{H}$.
Ensuite on écrit qu'on doit avoir $L_{e'_i}.A(e'_j) = A(\mu^i.e'_j)$ pour $1 \leq i, j \leq 3$ en utilisant l'expression de A que l'on vient d'obtenir. On trouve, après calcul, que :

$$(L_{e'_i} = AL_{\mu^i},\ 1 \leq i \leq 3\,) \Longleftrightarrow (\mu = com(\mu) \text{ ou } a = 0\,)$$

(com désigne la comatrice), comme $\mu \in O(3)$ cela veut dire $\det\mu = 1$ ou $a = 0$. On trouve la même chose pour D. Pour B on a aussi :

$$(L_{e'_i} = -BL_{\mu^i},\ 1 \leq i \leq 3\,) \Longleftrightarrow (\det(\mu) = -1 \text{ ou } b = 0\,)$$

et de même pour C. On achève la démonstration en remarquant que $L_{E^\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$, et que le groupe des automorphismes de $\mathbb{H}$ est égal au groupe des automorphismes intérieurs de $\mathbb{H}$ qui n'est autre que $SO(\operatorname{Im}\mathbb{H})$. ■

Ce théorème permet de voir comment $\rho\colon (q,q') \mapsto \rho(q,q') = \bar{x}y' - \bar{x'}y$ se transforme sous l'action de G :

$$\rho(g.q, g.q') = \bar{a}\rho(q,q')b \quad \text{pour} \quad g = Diag(R_a L_c,\ R_b L_c)\ .$$

Ainsi l'action de G^0 sur $V \cong \{(q,\rho) \in S^7 \times S^3\}$ s'écrit $g \cdot (q,\rho) = (g.q,\ \bar{a}\rho\, b)$. En outre, on voit que l'action de G sur ρ définit une action transitive de G^0 sur S^3. Si l'on oublie les L_c qui n'ont aucun effet sur ρ, et que l'on se restreint au groupe $S^3 \times S^3$, cette action n'est autre que le revêtement universel de $SO(4)$. Maintenant pour $g' = Diag(R_a L_c, R_b L_c).L_{E^\downarrow}$ on a

$$\rho(g'.q, g'.q') = \bar{a}\,\overline{\rho(q,q')}\,b\ .$$

On a donc trouvé un groupe G de dimension 9 agissant sur V qui est de dimension 10. Cette action ne peut donc pas être transitive. On est donc amené à étudier l'action de G sur les plans engendrés par les éléments de V, en espérant qu'elle soit transitive.

1.3.3 Action de G sur les plans de $V/SO(2)$

Considérons l'ensemble des plans orientés de $\mathbb{R}^8$ engendrés par les $(q,q') \in V$:

$$Q = \{\text{Plans orientés annulant } \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}.$$

Q est une sous-variété compact de $Gr_2(\mathbb{R}^8) = \{\text{plans orientés de } \mathbb{R}^8\}$, difféomorphe à $V/SO(2)$, l'action de $SO(2)$ sur V étant donnée par $(q,q') \mapsto (q,q')\cdot R_\theta = (\cos\theta\, q + \sin\theta\, q', -\sin\theta\, q + \cos\theta\, q')$. En effet, comme V est fermé dans $Y = \{(q,q') \text{ orthonormées de } \mathbb{R}^8\}$, le graphe R_V de l'action de $SO(2)$ sur V, $R_V = R_Y \cap (V \times V)$, est fermé, puisque R_Y, le graphe de Y modulo $SO(2)$ est fermé ($Y/SO(2) = Gr_2(\mathbb{R}^8)$ a une structure de variété quotient) donc $V/SO(2)$ admet une structure de variété quotient et munie de cette structure c'est une sous-variété de $Gr_2(\mathbb{R}^8)$ de dimension 9.
Lorsqu'on identifie V à $S^7 \times S^3$ l'action de $SO(2)$ s'écrit

$$R_\theta \cdot (q,\rho) = (\cos\theta\, q + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \end{pmatrix} \cdot q,\ \ \rho\ )\ .$$

G agit sur Q : si on note $[q,q']$ le plan engendré par (q,q') on a $g.[q,q'] = [g.q, g.q']$. Cette action n'est pas transitive. En effet, considérons $P_0 = [1, E^\downarrow]$ alors $G^0.P_0 = \{[\binom{ca}{0}, \binom{0}{cb}], a,b,c \in S^3\} = \{[\binom{x}{0}, \binom{0}{y}], |x| = |y| = 1\}$ est de dimension au plus $6 < 9$. De plus $L_{E^\downarrow}[1, E^\downarrow] = [E^\downarrow, -1] = [1, E^\downarrow]$. Finalement $G.P_0 = G^0.P_0$ est de dimension 6.

Calcul du stabilisateur d'un point

Soit $P_0 = [q_0, q_0'] \in Q$ et $Stab(P_0)$ le stabilisateur de P_0 , alors comme G est compact , on sait que $O(P_0) = G.P_0$ est une sous-variété compacte de Q

et $G/Stab(P_0) \cong G.P_0$. Ainsi si on avait $\dim(Stab(P_0)) = 0$, alors $O(P_0)$ serait une sous variété de dimension égale à $\dim(G) = \dim(Q)$, donc un ouvert de Q mais aussi un fermé car elle est compact, donc comme Q est connexe (car $V \simeq S^7 \times S^3$ est connexe) on aurait que $O(P_0) = Q$ donc G agirait transitivement or ce n'est pas le cas. Donc $\forall P_0 \in Q$, $\dim(Stab(P_0)) > 0$ et $\dim O(P_0) \leq 8$.

Les orbites sont en fait données par :

Théorème 1.4 *Q admet la partition suivante :*

$$Q = G.P_1 \sqcup G.P_2 \sqcup U$$

où

- $P_1 = [1, E^{\downarrow}]$, $P_2 = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right]$
- $U = \{P = \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right] \in Q, /(x, x')$ *est libre et* $|\langle x, x' \rangle| + ||x| - |x'|| \neq 0\}$ *est un ouvert de Q.*

De plus on a $G.P_1 = \{P \in Q/(x, x')$ est liée$\}$, $G.P_2 = \{P \in Q/\langle x, x' \rangle = 0, |x| = |x'|\}$ et enfin $\forall P \in U$, $G.P$ est une sous-variété compacte de dimension 8. Ainsi, il y a deux orbites dégénérées $G.P_1$, et $G.P_2$, et toutes les autres orbites sont de dimensions 8.
On peut ajouter que $\forall P \in Q$, $G^0.P = G.P$ et que

- *si $P \in G.P_1$, alors $Stab(P)_{|P} = \{\pm Id_P\}$*
- *si $P \in GP_2$, alors $Stab(P)_{|P} = SO(P)$*
- *si $P \in U$, alors $Stab(P)_{|P} = \{\pm Id_P\}$.*

Démonstration — Dans un premier temps, on se restreint à l'action de G^0. Soit donc $P = [q, q'] \in Q$ et posons $q = (x, y)$, $q' = (x', y') = (-y\bar{\rho}, x\rho)$. Soit $g \in Stab(P)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$g.(q, q') = (q, q') \cdot R_\theta \quad i.e. \quad g_{|P} = R_\theta$$

ce qui s'écrit

$$\begin{cases} cx\, a = \cos\theta\, x + \sin\theta\, x' \\ cx'a = -\sin\theta\, x + \cos\theta\, x' \end{cases} \quad et \quad \bar{a}\rho\, b = \rho. \tag{1.3}$$

Si (x, x') est libre alors cela implique que $\mathrm{Mat}_{(x,x')}(R_a L_{c|[x,x']}) = R_\theta$, ce qui nécessite que ou bien $\langle x, x' \rangle = |x'| - |x| = 0$ ou bien $\theta = 0 \bmod \pi$. Ceci nous amène à différencier trois cas :

1. (x, x') est libre et ($\langle x, x' \rangle \neq 0$ ou $|x'| - |x| \neq 0$)
2. (x, x') est libre et $\langle x, x' \rangle = |x'| - |x| = 0$
3. (x, x') est liée.

Dans chaque cas, on détermine le sous-groupe de $SO(4)$, $\{R_a L_c \in SO(4)$ vérifiant les 2 premières équations de (1.3)$\}$, ce qui nous donne alors $\dim Stab(P)$ et $Stab(P)_{|P}$. On trouve alors que $\dim Stab(P) = 1, 2, 3$ dans les cas 1,2,3 respectivement. Ceci nous donne $\dim O(P)$ dans chaque cas. Ensuite, dans les cas 2 et 3, respectivement, on détermine facilement un élément $g = Diag(R_a L_c, R_b L_c) \in G^0$ tel que $P = g.P_2$ et $P = g.P_1$ respectivement. Enfin, on vérifie que $L_{E\downarrow} P_1 = P_1$, $L_{E\downarrow} P_2 = P_2$ et que $\forall P \in U$, $L_{E\downarrow} P \in G^0.P$ d'où $G.P = G^0.P$, $\forall P \in Q$. Ceci achève la démonstration. ■

Caractérisation des orbites

On cherche une fonction $p \colon Q \to \mathbb{R}$ dont les fibres soient les orbites de G^0 (et donc de G). Elle est donnée par le :

Théorème 1.5 *Soit* $p \colon [q, q'] \in Q \mapsto |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| \in [0, \frac{1}{2}]$. *Alors les orbites de G sont les fibres de p :*

1. $p^{-1}(0) = G.P_1 = \{P \in Q/(x, x')$ *est liée*$\}$
2. $p^{-1}(\frac{1}{2}) = G.P_2 = \{P \in Q/\langle x, x'\rangle = |x'| - |x| = 0\}$
3. $p^{-1}(]0, \frac{1}{2}[) = U$ *et* $\forall P, P' \in U$, $p(P) = p(P') \Longleftrightarrow G.P = G.P'$.

Démonstration — D'abord p est bien définie car $\mathrm{Im}(x.\bar{x'})$ ne dépend que du plan $[q, q']$. Ensuite, elle est bien à valeurs dans $[0, \frac{1}{2}]$ puisque $|x'|^2 + |x|^2 = 1$. Elle est invariante sous l'action de G^0 : pour $g = Diag(R_a L_c, R_b L_c)$ on a $p([g.q, g.q']) = |c\mathrm{Im}(x.\bar{x'})c^{-1}| = |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| = p([q, q'])$, et sous l'action de $L_{E\downarrow}$ on a $p(L_{E\downarrow}[q, q']) = \mathrm{Im}(-y.\overline{(-y')})| = |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})|$.
Montrons réciproquement que toute fibre est incluse dans une orbite. On a $p([q, q']) = 0 \Longleftrightarrow x.\bar{x'} = \alpha \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow |x'|^2 x = \alpha x' \Longleftrightarrow (x, x')$ est liée, d'où $p^{-1}(0) = G.P_1$. Pour la suite on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1 *Pour tout* $P \in Q$, *il existe un représentant* $(q, q') \in Q$ *tel que* $\langle x, x'\rangle = 0$.

Démonstration du lemme — On suppose que $\langle x, x'\rangle \neq 0$ alors on a

$$\begin{aligned}\langle \cos\theta\, x + \sin\theta\, x', -\sin\theta\, x + \cos\theta\, x'\rangle &= \cos(2\theta)\langle x, x'\rangle \\ &\quad + \frac{|x'|^2 - |x|^2}{2}\sin(2\theta) \\ &= A\cos(2\theta + \phi)\end{aligned}$$

et cette dernière fonction de θ s'annule pour certaines valeurs de θ, ce qui veut dire qu'il existe un représentant de P tel que $\langle x, x'\rangle = 0$.

Démonstration du théorème — Dorénavant, on suppose que $\langle x, x'\rangle = 0$ et donc $\mathrm{Im}(x.\bar{x'}) = x.\bar{x'}$. Ainsi si $|x.\bar{x'}| = \frac{1}{2}$, alors $|x||x'| = \frac{1}{2}$ et comme $|x|^2 + |x'|^2 = 1$ on a donc $|x| = |x'| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ainsi comme $\langle x, x'\rangle = 0$, on a $P \in G.P_2$. On a bien

$p^{-1}(\{\frac{1}{2}\}) = G.P_2$.
Soit $P, P' \in U$ tel que $p(P) = p(P')$ avec $P = [q, q']$, $P' = [q_1, q_1']$. Alors $p(P) = p(P') \iff \exists \mu \in SO(3)$ tel que $\mathrm{Im}(x_1.\bar{x_1'}) = \mu(\mathrm{Im}(x.\bar{x'})) = c\mathrm{Im}(x.\bar{x'})c^{-1}$, alors quitte à remplacer (q, q') par $(g.q, g.q')$, avec $g = Diag(L_c, L_c)$, on est ramené au cas où

$$\mathrm{Im}(x_1.\bar{x_1'}) = \mathrm{Im}(x.\bar{x'})$$

et en prenant des représentants convenables, ceci s'écrit encore

$$x_1'.\bar{x_1'} = x.\bar{x'}$$

i.e.

$$x_1\rho_1\,\bar{y_1} = x\rho\,\bar{y} \tag{1.4}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} |x||y| = |x_1||y_1| \\ |x|^2 + |y|^2 = |x_1|^2 + |y_1|^2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x| = |x_1| \\ |y| = |y_1| \end{array}\right. \quad ou \quad \left\{\begin{array}{l} |x| = |y_1| \\ |y| = |x_1| \end{array}\right. .$$

On peut se ramener à la première des 2 possibilitées quitte à remplacer (q, q') par $(-q', q)$, on peut alors poser $\left\{\begin{array}{l} x_1 = x.a \\ y_1 = y.b \end{array}\right.$, avec $a, b \in S^3$, et en revenant à (1.4), on obtient $\bar{a}\rho\, b = \rho_1$, donc $g.(q, q') = (q_1, q_1')$ avec $g = Diag(R_a, R_b)$ et finalement

$$G.P = G.P'.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

Théorème 1.6 *Soit* $V_1 = \mathbb{R}_+^*.\pi_{SO(2)}^{-1}(U) = \{(q, q') \in \mathbb{O}^* \times \mathbb{O}^* / |q| = |q'|,\, B(q, q') = 0$ *et* $0 < |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| < \frac{1}{2}|q|^2\}$. *Alors considérons l'action de* $(\mathbb{R}_+^*)^2$ *sur* V_1 *définie par :*

$$(\alpha, \beta) \cdot (q, q') = \left(\begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta x' \\ \alpha y' \end{pmatrix} \right)$$

Alors l'action de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ *commute avec celle de* G^0. *Soit* $(q_0, q_0') \in V_1$ *tel que* $\langle x_0, x_0' \rangle = 0$ *alors*

$$\forall (q, q') \in V_1,\ \exists (g, (\alpha, \beta)) \in G^0 \times (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que}$$

$$(g \cdot (\alpha, \beta) \cdot (q_0, q_0')) \cdot R_\theta = (q, q')$$

Il y a exactement deux possibilitées pour (α, β), *l'une tel que* $\alpha < |q|/(\sqrt{2}|x_0|)$, *l'autre tel que* $\alpha > |q|/(\sqrt{2}|x_0|)$. R_θ *peut être changé en* $-R_\theta$ *(et donc* g *en* $-g$*),* g *peut varier dans* $g.Stab([q_0, q_0'])$.

Démonstration — Posons $(\tilde{q}_0, \tilde{q}_0') = \frac{1}{|q_0|}(q_0, q_0')$ et $(\tilde{q}, \tilde{q}') = \frac{1}{|q|}(q, q')$. Alors on a $p((\alpha', \beta') \cdot (\tilde{q}_0, \tilde{q}_0')) = \alpha'\beta' p(\tilde{q}_0, \tilde{q}_0')$. On choisit α', β' tel que $\alpha'^2|\tilde{x}_0|^2 + \beta'^2|\tilde{y}_0|^2 = 1$ et $\alpha'\beta' p([\tilde{q}_0, \tilde{q}_0']) = p([\tilde{q}, \tilde{q}'])$, on montre que ceci est possible et qu'il y a exactement deux solutions par l'étude de la fonction $\alpha' \mapsto \frac{\alpha'(1-\alpha'^2|\tilde{x}_0|^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-|\tilde{x}_0|^2)^{\frac{1}{2}}}$ dont la

valeur maximale est $\frac{1}{2|\tilde{x}_0||\tilde{y}_0|} = \frac{1}{2p(\tilde{q}_0,\tilde{q}_0')}$.
Ensuite, on pose $(\alpha,\beta) = (\alpha' \frac{|q|}{|q_0|}, \beta' \frac{|q|}{|q_0|})$. Alors $(\alpha,\beta)\cdot(q_0,q_0')$ est de norme $|q|$ et $[\frac{1}{|q|}(\alpha,\beta)\cdot(q_0,q_0')]$ est dans l'orbite de $[\tilde{q},\tilde{q}']$ donc il existe $g \in G^0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(g\cdot(\alpha,\beta)\cdot(q_0,q_0'))\cdot R_\theta = (q,q')$. ■

Remarque 1.2 L'action de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ permet de passer d'une orbite à l'autre tandis que G^0 agit transitivement sur chaque orbite. Cependant, l'action de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ n'est pas compatible avec celle de $SO(2)$: elle n'envoie pas un plan sur un autre plan. Comme on le voit sur la démonstration, le théorème est valable pour les éléments de $G.P_2$, i.e. on aurait pu prendre $\mathbb{R}_+^*.\pi_{SO(2)}^{-1}(Q \setminus G.P_1) = \{(q,q') \in \mathbb{O}^* \times \mathbb{O}^*/|q| = |q'|, B(q,q') = 0 \; et \; \mathrm{Im}(x.\bar{x'}) \neq 0\}$ au lieu de $\mathbb{R}_+^*.\pi_{SO(2)}^{-1}(U)$. Dans le cas où $[q,q'] \in G.P_2$, (α,β) est unique et donné par $(\alpha,\beta) = (|q|/(\sqrt{2}|x_0|), |q|/(\sqrt{2}|y_0|\ ))$. En ce qui concerne le point de référence (q_0,q_0'), on ne peut pas le prendre quelconque ; comme on le voit sur la démonstration on a besoin de $|\tilde{x}_0||\tilde{y}_0| = p(\tilde{q}_0,\tilde{q}_0')$, i.e. $\langle x_0, x_0'\rangle = 0$. On peut prendre par exemple

$$(q_0,q_0') = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right)$$

et alors $\rho(q_0,q_0') = 1$. On a alors $\alpha^2+\beta^2 = 2|q|^2$ et les deux possibilitées pour (α,β) dans le cas de U sont $\alpha < |q|$ et $\alpha > |q|$ tandis que pour $G.P_2$ on a $\alpha = \beta = |q|$. On voit aussi que le théorème est encore valable pour $(q,q') \in G.P_1$ et on alors $\alpha\beta = 0$ et $\alpha^2+\beta^2 = 2|q|^2$, mais évidemment on ne peut pas prendre $(q_0,q_0') \in G.P_1$.

Remarque 1.3 L'angle θ a une définition intrinsèque. En effet, soit $P \in U$, alors il existe un couple $(q_1,q_1') \in P$ unique à ± 1 près tel que $\langle x_1, x_1'\rangle = 0$, alors θ est l'angle défini modulo π tel que $(q,q') = (q_1,q_1')\cdot R_\theta$ pour $[q,q'] = P$. On a donc défini une fonction

$$(q,q') \in V_1 \mapsto \theta(q,q') \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$$

Ainsi dans chaque plan $P \in U$, il existe un axe privilégié. Cette axe permet de mesurer des angles de droites dans P.

1.3.4 Décomposition de G et de son algèbre de Lie.

On a défini l'application ρ par analogie avec le déterminant sur les bases hermitiennes de $\mathbb{C}^2$. On voudrait définir l'analogue du déterminant sur le groupe $U(2)$, i.e., une fonction définie sur G à valeurs dans S^3 qui corresponde d'une certaine manière à ρ.
Soit $(q_0,q_0') \in V$ tel que $\rho(q_0,q_0') = 1$. Considérons $\rho(g.q_0, g.q_0')$ pour $g \in G^0$, on a

$$\rho(g.q_0, g.q_0') = \bar{a}.1.b = \bar{a}.b \; .$$

On se demande à quelle condition a-t-on $\rho(g.q_0, g.q'_0) = \rho(g'.q_0, g'.q'_0)$. C'est le cas si, et seulement si, $a^{-1}.b = a'^{-1}b' \Longleftrightarrow a'a^{-1} = b'b^{-1} \Longleftrightarrow \exists d \in S^3 / \left\{ \begin{array}{l} b' = db \\ a' = da \end{array} \right.$ i.e. $g^{-1}g' = \begin{pmatrix} R_dL_c & 0 \\ 0 & R_dL_c \end{pmatrix}$. Donc si $g_0 \in G^0$ est tel que $\rho(g_0.q_0, g_0.q'_0) = \rho_0$ alors $\rho(g.q_0, g.q'_0) = \rho_0$ si, et seulement si, $g = g_0.\begin{pmatrix} R_dL_c & 0 \\ 0 & R_dL_c \end{pmatrix}$. Pour g_0, on peut prendre par exemple $g_0 = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & R_{\rho_0} \end{pmatrix}$. On a en fait le théorème suivant :

Théorème 1.7 *Soit*

$$G^0_0 = \left\{ \begin{pmatrix} R_aL_c & 0 \\ 0 & R_aL_c \end{pmatrix}, \, a, c \in S^3 \right\}, \; G^0_2 = \left\{ \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & R_\rho \end{pmatrix}, \, \rho \in S^3 \right\}$$

Alors :

(i) *G^0_2 est un sous-groupe distingué dans G^0 : $G^0_2 \lhd G^0$.*

(ii) *G^0 est le produit semi-direct de G^0_2 et G^0_0 : $G^0 = G^0_2 \rtimes G^0_0$.*

(iii) *Ceci permet de définir une application $\tilde{\rho}\colon G^0 \to S^3$ définie par*

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & R_\rho \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} R_aL_c & 0 \\ 0 & R_aL_c \end{pmatrix} \mapsto \rho \; .$$

En outre si $(q_0, q'_0) \in V$ est tel que $\rho(q_0, q'_0) = 1$ alors $\tilde{\rho}$ est aussi donnée par $\tilde{\rho}\colon g \in G^0 \mapsto \rho(g.q_0, g.q'_0)$. De plus $\tilde{\rho}$ est invariante par multiplication à droite par G^0_0 : $\tilde{\rho}(g.h) = \tilde{\rho}(g) \; \forall g \in G^0, \forall h \in G^0_0$.

(iv) *$\rho(g^{-1} \cdot q, \, g^{-1} \cdot q') = 1 \Longleftrightarrow \tilde{\rho}(g) = \rho(q, \, q')$, pour $g \in G^0$, $(q, q') \in V$.*

Démonstration — Pour (i),(ii) et (iii), c'est un simple calcul. Pour (iv) il suffit d'utiliser $\rho(g.q, g.q') = \bar{a}\rho(q, q')b$. ■

Remarque 1.4 On voit que les L_c ne jouent aucun rôle dans le théorème précédent. Il résulte en particulier de ce dernier que l'on a :

$$S^3 = G^0/G^0_0 = S^3 \times S^3/\triangle$$

où $\triangle$ est la diagonale.

Soit $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_2$ les algèbres de Lie respectives de G^0, G^0_0 et G^0_2. Alors on $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_2$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ (on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2] \subset \mathfrak{g}_2$) et est stable sous l'action adjointe de G^0. On a $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} R_\alpha + L_\delta & 0 \\ 0 & R_\beta + L_\delta \end{pmatrix}, \alpha, \, \beta, \, \delta \in \operatorname{Im} \mathbb{H} \right\}$, $\mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} R_\alpha + L_\delta & 0 \\ 0 & R_\alpha + L_\delta \end{pmatrix}, \alpha, \, \delta \in \operatorname{Im} \mathbb{H} \right\}$, $\mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_\gamma \end{pmatrix}, \gamma \in \operatorname{Im} \mathbb{H} \right\}$.

Considérons le groupe $\mathcal{G}$, composante neutre du groupe des isométries affines de $\mathbb{R}^8$ conservant la nullité de B, que l'on représente comme $G^0 \ltimes \mathbb{R}^8$ muni du produit

$$(G,T)\cdot(G',T') = (GG', GT' + T).$$

Alors l'algèbre de lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de $\mathcal{G}$ s'écrit $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}^8 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathbb{R}^8$, le crochet étant donné par

$$[(\eta,t),(\eta',t')] = ([\eta,\eta'], \eta t' - \eta' t)$$

On a alors les relations suivantes : $[\mathfrak{g},\mathbb{R}^8] = \mathbb{R}^8$, $[\mathbb{R}^8,\mathbb{R}^8] = 0$, $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0] = \mathfrak{g}_0$, $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_2] = \mathfrak{g}_2$, $[\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2] = \mathfrak{g}_2$.

1.4 Surfaces Σ_V

1.4.1 Immersions conformes Σ_V

Définition 1.2 *On dira qu'une surface immergée, Σ, de $\mathbb{O}$ est* ***une surface Σ_V*** *si $\forall z \in \Sigma$, $T_z\Sigma \in Q$. En outre à Σ est associée la fonction ρ_Σ à valeurs dans S^3 définie par*

$$\rho_\Sigma(z) = \rho(T_z\Sigma)\ .$$

En particulier, soit $X\colon \Omega \to \mathbb{O}$ une immersion conforme d'un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{O}$, alors on dira que c'est une immersion conforme Σ_V si

$$\forall z = (u,v) \in \Omega, \quad dX = e^f(q\,du + q'dv)$$

avec $(q,q') \in V$, i.e. $|q| = |q'| = 1$ et $B(q,q') = 0$. En outre on dira que $z \in \Sigma$ est ***un point régulier*** *de Σ si $T_z\Sigma \in U$ (i.e. $0 < |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| < \frac{1}{2}$ avec $q = (x,y)$, $q' = (x',y')$, pour une immersion conforme Σ_V). Dans le cas contraire, on dira que Σ admet* ***un point singulier*** *en z. On dira alors que c'est* ***un point singulier de type*** *P_1 si $T_z\Sigma \in G.P_1$, et de* ***type*** *P_2 si $T_z\Sigma \in G.P_2$ (i.e. $|\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| = 0$ et $|\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| = \frac{1}{2}$ respectivement).*

Définition 1.3 *On appellera relèvement Σ_V une application $U = (F,X)\colon \Omega \to \mathcal{G}$ telle que X soit une immersion conforme Σ_V et que $\tilde{\rho}\circ F = \rho_X$.*

Le groupe de gauge $C^\infty(\Omega, G_0^0)$ agit sur l'ensemble $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ des relèvements Σ_V : $(F,X)\cdot(K,0) = (FK,X)$. L'orbite de (F,X) est l'ensemble des relèvements correspondants au même X. Dans chaque orbite, on peut prendre par exemple

$$F = \mathcal{R}_{\rho_X} := \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & R_{\rho_X}\end{pmatrix}$$

alors tout relèvement de X est de la forme $(\mathcal{R}_{\rho_X}M, X)$ avec $M \in C^\infty(\Omega, G_0^0)$.

Forme de Maurer-Cartan

Soit $U = (F, X) = (\mathcal{R}_\rho M, X)$ un relèvement Σ_V alors sa forme de Maurer-Cartan est donnée par $U^{-1}.dU = (F^{-1}.dF, F^{-1}.dX)$ avec

$$\bullet\ F^{-1}.dF = M^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & R_{d\rho.\rho^{-1}}\end{pmatrix}M + M^{-1}.dM \tag{1.5}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & R_{a(d\rho.\rho^{-1})a^{-1}}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}R_{da.a^{-1}} + L_{c^{-1}dc} & 0\\ 0 & R_{da.a^{-1}} + L_{c^{-1}dc}\end{pmatrix}$$

en posant $M = Diag(R_a L_c, R_a L_c)$ ((a, c) n'est défini qu'à ± 1 près mais Ω est simplement connexe.),

• $F^{-1}.dX = e^f(E_1 du + E_2 dv)$ avec $\rho(E_1, E_2) = 1$ (d'après $\tilde{\rho} \circ F = \rho_X$ et le théorème 1.7-(iv)). Ainsi $E_2 = \binom{0}{1}.E_1 = E^{\downarrow}.E_1$ d'où

$$F^{-1}.dX = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}du + \begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}dv \quad \text{avec} \quad |x|^2 + |y|^2 = e^{2f}.$$

Reciproquement, si $F^{-1}.dX$ est de cette forme, alors X est une immersion conforme Σ_V et d'après le théorème 1.7-(iv), $U = (F, X)$ est un relèvement Σ_V, i.e. $\rho_X = \tilde{\rho} \circ F$. D'où le théorème suivant et son corollaire :

Théorème 1.8 *Soit $U = (F, X) \colon \Omega \to \mathcal{G}$, alors $U \in \mathcal{G}(\Sigma_V)$ (i.e. X est une immersion conforme Σ_V et $\rho_X = \tilde{\rho} \circ F$) si, et seulement si,*

$$F^{-1}.dX = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}du + \begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}dv \quad \textit{avec} \quad (x, y) \neq 0.$$

En outre z_0 est un point régulier si, et seulement si, $0 < |\mathrm{Im}(x.\bar{x'})| < \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$, un point singulier de type P_1 ou P_2 si, et seulement si, $|\mathrm{Im}(x.y)| = 0$ ou $|\mathrm{Im}(x.y)| = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$ respectivement.

Corollaire 1.1 *Soit $\alpha \in T^*\Omega \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$, alors α est la forme de Maurer-Cartan d'un élément $U \in \mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, :*

(i) $d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$

(ii) *si on pose $\alpha = (\eta, t)$ alors $t = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}du + \begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}dv$ avec $(x, y) \neq 0$.*

Dans ce cas, suivant les valeurs de $|\mathrm{Im}(x.y)|$, on peut connaitre le type du point $z \in \Omega$ pour l'immersion X.

Posons

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{O}\right\} \subset \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$$
$$\mathfrak{g}_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{O}\right\} \subset \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}.$$

Ce sont des sous-espaces complexes de $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$: ce sont les sous-espaces propres associés aux valeurs propres i et $-i$ respectivement pour l'endomorphisme de $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$: $L_{E\downarrow}$. En particulier $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}=\overline{\mathfrak{g}_1}$.
Les actions respectives de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $SO(2)$ stabilisent l'ensemble des couples $(\binom{x}{y},\binom{-y}{x})$:

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta)\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right) &= \left(\begin{pmatrix}\alpha x\\\beta y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\beta y\\\alpha x\end{pmatrix}\right)\\ \left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right)\cdot R_\theta &= \left(R_\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},R_\theta\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on peut faire agir ces deux groupes sur $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_1$ respectivement et donc sur $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C}$. En particulier, on a

$$\begin{aligned}R_\theta\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right) &= e^{i\theta}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right)\\ R_\theta\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right) &= e^{-i\theta}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{-1}^* &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}/0<|\mathrm{Im}(x.y)|<\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)\right\}\\ \mathfrak{g}_1^* &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}/0<|\mathrm{Im}(x.y)|<\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)\right\}.\end{aligned}$$

Ce sont des ouverts, stables par homothétie complexe, de $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_1$ respectivement. Posons aussi $F_1=\{q-iL_{E\downarrow}q/\,\mathrm{Im}(x.y)=0\}$ et $F_2=\{q-iL_{E\downarrow}q/\,|\mathrm{Im}(x.y)| =\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)\}$.
Soit $\alpha\in T^*\Omega\otimes\tilde{\mathfrak{g}}$, $\alpha=(\eta,t)$, tel que $d\alpha+\alpha\wedge\alpha=0$ et écrivons $t=\alpha_{-1}+\alpha_1$ la décomposition de t suivant $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_1$. Alors on a $\alpha_1=\overline{\alpha_{-1}}$ car t est réelle. Alors α est la forme de Maurer-Cartan d'un élément de $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, $\alpha_{-1}=\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z})dz$ (et donc $\alpha_1=\alpha_1(\frac{\partial}{\partial\bar z})d\bar z$). Ceci permet de réécrire le corrollaire sous la forme :

Théorème 1.9 *Soit $\alpha\in T^*\Omega\otimes\tilde{\mathfrak{g}}$, tel que $d\alpha+\alpha\wedge\alpha=0$. Alors α correspond à un élément $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial\bar z})=0$ et $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z})$ ne s'annule pas . Dans ce cas X a un point régulier en z_0 si, et seulement si, $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z})(z_0)\in\mathfrak{g}_{-1}^*$, un point singulier de type P_1 ou P_2 si, et seulement si, $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z})(z_0)\in F_1$ ou F_2 respectivement.*

Remarque 1.5 1. L'action du groupe de gauge $C^\infty(\Omega,G_0^0)$ sur $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ induit une action sur les formes de Maurer-Cartan :

$$(\eta,t)\mapsto(K\eta K^{-1}-dK.K^{-1},\,K.t)$$

2. $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C} = \mathbb{H}^2\otimes\mathbb{C}$ est un $\mathbb{H}$-espace vectoriel (à gauche ou à droite au choix). Il en est de même de $\mathfrak{g}_{-1}$ et de $\mathfrak{g}_1$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{-1} &= \{x.\epsilon + y.(L_{E^\downarrow}.\epsilon),\ (x,y)\in\mathbb{H}^2\} = \mathbb{H}.\epsilon\oplus\mathbb{H}.(L_{E^\downarrow}.\epsilon)\\ \mathfrak{g}_1 &= \{x.\bar\epsilon + y.(L_{E^\downarrow}.\bar\epsilon),\ (x,y)\in\mathbb{H}^2\} = \mathbb{H}.\bar\epsilon\oplus\mathbb{H}.(L_{E^\downarrow}.\bar\epsilon)\end{aligned}$$

où $\epsilon = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$.

3. On a aussi $\mathbb{O}\otimes\mathbb{C} = (\mathbb{H}\otimes\mathbb{C})^2$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{-1} &= \{(x+iy).\epsilon\,/(x+iy)\in\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\} = (\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}).\epsilon\\ \mathfrak{g}_1 &= \{(x+iy).\bar\epsilon\,/(x+iy)\in\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\} = (\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}).\bar\epsilon.\end{aligned}$$

1.4.2 Décomposition de l'algèbre de Lie.

Considérons l'automorphisme intérieur τ de G défini par $(-L_{E^\downarrow},0)$:

$$\tau(G,T) = (-L_{E^\downarrow},0)(G,T)(-L_{E^\downarrow},0)^{-1} = (-L_{E^\downarrow}GL_{E^\downarrow}, -L_{E^\downarrow}T)$$

τ induit un automorphisme de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ $(= Ad_{(-L_{E^\downarrow},0)})$ qui vérifie $\tau^4 = Id$, donc τ est diagonalisable dans $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}} = \tilde{\mathfrak{g}}\otimes\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont les i^k, $0\le k\le 3$. On notera $\tilde{\mathfrak{g}}_k^{\mathbb{C}}$ les espaces propres. On a alors :

- $\tilde{\mathfrak{g}}_{-1}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{-1}$
- $\tilde{\mathfrak{g}}_1^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_1$
- $\tilde{\mathfrak{g}}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0\otimes\mathbb{C}$
- $\tilde{\mathfrak{g}}_2^{\mathbb{C}} = \tilde{\mathfrak{g}}_2\otimes\mathbb{C}$, où $\tilde{\mathfrak{g}}_2 = \{Diag(-R_\gamma,\, R_\gamma),\ \gamma\in\mathrm{Im}\,\mathbb{H}\}$ n'est pas une algèbre de Lie.

Comme τ est un automorphisme on a $[\tilde{\mathfrak{g}}_k^{\mathbb{C}}, \tilde{\mathfrak{g}}_l^{\mathbb{C}}]\subset\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_{(k+l)\bmod 4}$ et de plus on a aussi $[\tilde{\mathfrak{g}}_{\pm1}^{\mathbb{C}}, \tilde{\mathfrak{g}}_{\pm1}^{\mathbb{C}}] = 0$.
On notera $[.]_k\colon \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}\to\tilde{\mathfrak{g}}_k^{\mathbb{C}}$ la projection sur $\tilde{\mathfrak{g}}_k^{\mathbb{C}}$ suivant la décomposition $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}^{\mathbb{C}}\oplus\tilde{\mathfrak{g}}_0^{\mathbb{C}}\oplus\tilde{\mathfrak{g}}_1^{\mathbb{C}}\oplus\tilde{\mathfrak{g}}_2^{\mathbb{C}}$, et $\alpha_k = [\alpha]_k$. Alors on a

$$\alpha = \alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2$$

En substituant cette expression de α dans l'équation $d\alpha+\alpha\wedge\alpha = 0$ on obtient en projetant le résultat sur chaque espace propre :

$$\left\{\begin{aligned} d\alpha_{-1} + [\alpha_{-1}\wedge\alpha_0] + [\alpha_1\wedge\alpha_2] &= 0\\ d\alpha_0 + \tfrac12[\alpha_0\wedge\alpha_0] + \tfrac12[\alpha_2\wedge\alpha_2] &= 0\\ d\alpha_1 + [\alpha_1\wedge\alpha_0] + [\alpha_{-1}\wedge\alpha_2] &= 0\\ d\alpha_2 + [\alpha_0\wedge\alpha_2] &= 0\end{aligned}\right. \tag{1.6}$$

Posons $\alpha'_k = \alpha_k(\frac{\partial}{\partial z})dz$, $\alpha''_k = \alpha(\frac{\partial}{\partial\bar z})d\bar z$. On a vu que α est la forme de Maurer-Cartan d'un élément de $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, $\alpha_{-1} = \alpha'_{-1}$ et $\alpha_1 = \alpha''_1$. Ainsi $\alpha = \alpha'_2+\alpha'_{-1}+\alpha_0+\alpha''_1+\alpha''_2$. Les équations (1.6) s'écrivent alors :

$$\left\{\begin{aligned} d\alpha'_{-1} + [\alpha'_{-1}\wedge\alpha_0] + [\alpha''_1\wedge\alpha'_2] &= 0\\ d\alpha_0 + \tfrac12[\alpha_0\wedge\alpha_0] + \tfrac12[\alpha'_2\wedge\alpha''_2] &= 0\\ d\alpha''_1 + [\alpha''_1\wedge\alpha_0] + [\alpha'_{-1}\wedge\alpha''_2] &= 0\\ d\alpha_2 + [\alpha_0\wedge\alpha_2] &= 0\end{aligned}\right. \tag{1.7}$$

Posons pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}\alpha_\lambda &= \lambda^{-2}\alpha'_2 + \lambda^{-1}\alpha'_{-1} + \alpha_0 + \lambda\alpha''_1 + \lambda^2\alpha''_2 \\ &= \lambda^{-1}\alpha'_{-1} + \alpha_0 + \lambda\alpha''_1 + \frac{\lambda^2+\lambda^{-2}}{2}\,\alpha_2 + \frac{\lambda^2-\lambda^{-2}}{2i}(*\alpha_2).\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda &= \lambda^{-1}(d\alpha'_{-1} + [\alpha'_{-1}\wedge\alpha_0] + [\alpha''_1\wedge\alpha'_2]) \\ &\quad +(d\alpha_0 + \frac{1}{2}[\alpha_0\wedge\alpha_0] + \frac{1}{2}[\alpha'_2\wedge\alpha''_2]) \\ &\quad +\lambda(d\alpha''_1 + [\alpha''_1\wedge\alpha_0] + [\alpha'_{-1}\wedge\alpha''_2]) \\ &\quad +\frac{\lambda^2+\lambda^{-2}}{2}(d\alpha_2 + [\alpha_0\wedge\alpha_2]) \\ &\quad +\frac{\lambda^2-\lambda^{-2}}{2i}(d(*\alpha_2) + [\alpha_0\wedge(*\alpha_2)]) \\ &= \frac{\lambda^2-\lambda^{-2}}{2i}(d(*\alpha_2) + [\alpha_0\wedge(*\alpha_2)])\end{aligned}$$

On peut maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.10 *On suppose Ω simplement connexe. Soit $\alpha \in T^*\Omega \otimes \tilde{\mathfrak{g}}$. Alors*

- *α est la forme de Maurer-Cartan d'un élément de $\mathcal{G}(\Sigma_V)$ si, et seulement si, $d\alpha + \alpha\wedge\alpha = 0$, $\alpha''_{-1} = \alpha'_1 = 0$ et α'_{-1}, α''_1 ne s'annule pas.*
- *Dans ce cas, α correspond à une immersion conforme Σ_V telle que ρ_X est harmonique si, et seulement si, la forme de Maurer-Cartan prolongée $\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\alpha'_2 + \lambda^{-1}\alpha'_{-1} + \alpha_0 + \lambda\alpha''_1 + \lambda^2\alpha''_2$ vérifie*

$$d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda\wedge\alpha_\lambda = 0,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}^*. \tag{1.8}$$

Démonstration — On a déjà vu le premier point. Quand au second, il s'agit d'après le calcul précédent de montrer que : ρ_X est harmonique si, et seulement si, $d(*\alpha_2) + [\alpha_0\wedge(*\alpha_2)] = 0$. Or on a

$$\alpha_0 + \alpha_2 = F^{-1}.dF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{a(d\rho.\rho^{-1})a^{-1}} \end{pmatrix} + M^{-1}.dM$$

d'où

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -R_{a(d\rho.\rho^{-1}).a^{-1}} & 0 \\ 0 & R_{a(d\rho.\rho^{-1}).a^{-1}} \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} -R_{\gamma/2} & 0 \\ 0 & R_{\gamma/2} \end{pmatrix} M$$

avec $\gamma = d\rho.\rho^{-1}$, et

$$\alpha_0 = M^{-1}dM + M^{-1}.\begin{pmatrix} R_{\gamma/2} & 0 \\ 0 & R_{\gamma/2} \end{pmatrix} M$$

Posons $\beta = \begin{pmatrix} -R_{\gamma/2} & 0 \\ 0 & R_{\gamma/2} \end{pmatrix}$. Alors ρ est harmonique si, et seulement si, $d(*\gamma) = (\triangle\rho + |d\rho|^2\rho)\rho^{-1}du\wedge dv = 0$ si, et seulement si, $d(*\beta) = 0$. Or

$$d(*\beta) = d(M(*\alpha_2)M^{-1}) = M(\,d(*\alpha_2) + \ [(M^{-1}.dM)\wedge(*\alpha_2)]\ )M^{-1}$$

De plus on a $[(M^{-1}.dM)\wedge(*\alpha_2)] = [\alpha_0\wedge(*\alpha_2)]$ puisque

$$[(M^{-1}\begin{pmatrix} R_{\gamma/2} & 0 \\ 0 & R_{\gamma/2}\end{pmatrix}M)\wedge(*\alpha_2)] = \frac{1}{4}M^{-1}\begin{pmatrix} -R_{[\gamma\wedge(*\gamma)]} & 0 \\ 0 & R_{[\gamma\wedge(*\gamma)]}\end{pmatrix}M = 0$$

car $[\gamma\wedge(*\gamma)] = 0$. Finalement on a

$$d(*\beta) = M(\,d(*\alpha_2) + [\alpha_0\wedge(*\alpha_2)]\,)M^{-1}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Remarque 1.6 Chaque point de la surface sera régulier, respectivement singulier de type P_1, ou P_2 si, et seulement si, $\alpha_{-1}(\frac{\partial}{\partial z}) \in \mathfrak{g}^*_{-1}$, F_1 ou F_2 respectivement. En outre il suffit que (1.8) soit vrai pour tout $\lambda \in S^1$ pour que ρ_X soit harmonique.

Corollaire 1.2 *Supposons que Ω soit simplement connexe. Soit $\alpha \in T^*\Omega\otimes\tilde{\mathfrak{g}}$ la forme de Maurer-Cartan associée à une immersion conforme Σ_V dont le ρ_X est harmonique, et $z_0 \in \Omega$. Alors pour tout $\lambda \in S^1$, il existe un unique relèvement Σ_V, $U_\lambda \in C^\infty(\Omega,\mathcal{G})$ tel que*

$$dU_\lambda = U_\lambda\alpha_\lambda \quad \textit{et} \quad U_\lambda(z_0) = \mathbf{1}.$$

Ainsi il existe un famille $(X_\lambda)_{\lambda\in S^1}$ d'immersions Σ_V dont le ρ_X est harmonique donnée par $U_\lambda = (F_\lambda, X_\lambda)$, tel que $X = X_1$ (en supposant que $X(z_0) = 0$). En outre si X admet un point régulier (resp. singulier de type P_1 ou P_2) en $z \in \Omega$, il en est de même pour X_λ pour tout $\lambda \in S^1$. Autrement dit le type d'un point $z \in \Omega$ est le même pour toutes les immersions X_λ.

Démonstration — Il suffit d'appliquer le théorème précédent et de remarquer que pour $\lambda \in S^1$, α_λ est à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{g}}$, et qu'on a $(\alpha_\lambda)'_{-1} = \lambda^{-1}\alpha'_{-1}$. ■

1.4.3 Equations associées (linéaire et non linéaire)

Soit X une immersion Σ_V sur Ω simplement connexe. Posons $(E_1, E_2) = e^f\mathcal{R}_\rho^{-1}(q,q')$. Alors $E_2 = E^{\downarrow}.E_1$ i.e. en posant $E_1 = \binom{x}{y} \neq 0$ on a $E_2 = \binom{-y}{x}$. Alors écrivons que $dX = \mathcal{R}_\rho(E_1du + E_2dv)$ est fermée, on obtient

$$0 = \frac{\partial E_1}{\partial v} - \frac{\partial E_2}{\partial u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_v}\end{pmatrix}E_1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_u}\end{pmatrix}E_2 \tag{1.9}$$

où $\gamma = \gamma_u du + \gamma_v dv = d\rho.\rho^{-1}$, ce qui s'écrit encore

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u} = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} - \dfrac{\partial x}{\partial v} + y.\gamma_v - x.\gamma_u = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

On va essayer de retrouver cette équation en utilisant le relèvement $U = (\mathcal{R}_\rho, X)$. Alors on a

$$\alpha = U^{-1}.dU = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_\gamma \end{pmatrix}, E_1 du + E_2 dv \right).$$

Posons $E = \frac{1}{2}(E_1 - iE_2) = \frac{1}{2}(\binom{x}{y} - i\binom{-y}{x}) = x.\epsilon + y.(L_{E^{\downarrow}}.\epsilon) = (x+iy).\epsilon$. On a alors :

$$\alpha'_{-1} = Edz,\ \alpha''_1 = \bar{E}.d\bar{z},\ \alpha_0 = Diag\left(\frac{1}{2}R_\gamma, \frac{1}{2}R_\gamma\right),\ \alpha_2 = Diag\left(-\frac{1}{2}R_\gamma, \frac{1}{2}R_\gamma\right).$$

Projetons l'équation $d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$ sur $\mathfrak{g}_{-1}$, on obtient :

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})} & 0 \\ 0 & R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})} \end{pmatrix}.E + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial z})} & 0 \\ 0 & -R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial z})} \end{pmatrix}.\bar{E} = 0\ . \qquad (1.11)$$

On vérifie facilement que cette équation est équivalente à (1.9). Nous allons maintenant utiliser le théorème 1.6 pour réécrire cette équation.
Soit $g : \Omega \to G$, $\alpha, \beta : \Omega \to (\mathbb{R}_+^*)^2$, et $\theta : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que

$$(E_1, E_2) = (g \cdot (\alpha, \beta) \cdot (q_0, q'_0)) \cdot R_\theta$$

où $(q_0, q'_0) = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{I}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-I}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)$ par exemple, et où on écrit $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I \oplus \mathbb{R}J \oplus \mathbb{R}K$ pour ne pas confondre le i des complexes provenant de la complexification avec celui de $\mathbb{H}$. Comme $\rho(q_0, q'_0) = \rho(E_1, E_2) = 1$, on a $\tilde{\rho}(g) = 1$ i.e. $g = Diag(R_a L_c, R_a L_c)$. On peut aussi écrire que $E = \frac{1}{2}(E_1 - iE_2) = e^{i\theta} g.((\alpha x_0 + i\beta y_0).\epsilon)$ alors (1.11) s'écrit

$$\begin{gathered} e^{i\theta}\left[i\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}}\, g \cdot ((\alpha x_0 + i\beta y_0) \cdot \epsilon) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \cdot ((\alpha x_0 + i\beta y_0) \cdot \epsilon) + \right. \\ \left. g \cdot \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} x_0 + i\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} y_0 \right) \cdot \epsilon \right) \right] + \frac{1}{2}e^{i\theta}\begin{pmatrix} R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})} & 0 \\ 0 & R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})} \end{pmatrix} \cdot g \cdot ((\alpha x_0 + i\beta y_0) \cdot \epsilon) \\ + \frac{1}{2}e^{-i\theta}\begin{pmatrix} R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial z})} & 0 \\ 0 & -R_{\gamma(\frac{\partial}{\partial z})} \end{pmatrix} \cdot g \cdot ((\alpha x_0 - i\beta y_0) \cdot \bar{\epsilon}) = 0 \end{gathered}$$

ce qui s'écrit encore, tout calcul fait et en factorisant par $e^{i\theta}.g$:

$$\begin{gathered} i\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}} A + \delta(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}})A + A\,\tilde{\alpha}(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}) + \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} \\ + \frac{1}{2}A\left(a\gamma(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}})a^{-1}\right) + \frac{e^{-2i\theta}}{2}\bar{A}\left(a\gamma(\tfrac{\partial}{\partial z})a^{-1}\right) = 0. \end{gathered} \qquad (1.12)$$

où on a posé $A = \alpha x_0 + i\beta y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + iI\beta)$, $\tilde{\alpha} = da.a^{-1}$, $\delta = c^{-1}.dc$. Les inconnues $\tilde{\alpha}$, δ et $\gamma' = a\gamma a^{-1}$ sont les paramétres qui interviennent dans la forme de Maurer-Cartan, $F^{-1}.dF$, du relèvement F de ρ_X, donnée par (1.5). Ainsi, on peut considérer que l'on construit ρ_X à partir de la représentation de Weierstrass pour l'espace symétrique $S^3 = G^0/G_0^0$ (cf. [8]), alors cela nous donne la forme de Maurer-Cartan, $F^{-1}.dF$, et on peut donc considérer $\tilde{\alpha}$, δ et γ' comme des paramètres, les inconnues étant alors θ et A. Cependant, il y a alors un problème de compatibilité puisque $A \in (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}I) \otimes \mathbb{C}$.

1.5 Groupe de lacets

1.5.1 Définitions et notations

Définition 1.4 *Soit G un groupe de Lie, on appellera groupe de lacets sur G, le groupe $C^\infty(S^1, G)$ que l'on notera ΛG (cf.* [26]*).*

Dans notre cas, les groupes considérés sont $\mathcal{G}$, G^0, G^0_0, G^0_2. On définit les groupes suivants :

$$\begin{aligned}
\Lambda\mathcal{G}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}/U_{i\lambda} = \tau(U_\lambda)\} \\
\Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}/U_{i\lambda} = \tau(U_\lambda)\} \\
\Lambda^-_*\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau/U_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe sur} \\
&\quad\ \text{le complémentaire du disque unité et } U_\infty = 1\} \\
\Lambda^+\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau/U_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe sur} \\
&\quad\ \text{le disque unité }\} \\
\Lambda^+_{\mathcal{B}}\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda\mathcal{G}^{\mathbb{C}}_\tau/U_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe sur} \\
&\quad\ \text{le disque unité et } U_0 \in (\mathcal{B}, 0)\}
\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}$ est un sous-groupe de G^0. De manière analogue, on définit les algèbres de Lie suivantes :

$$\begin{aligned}
\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}/\alpha_{i\lambda} = \tau(\alpha_\lambda)\} \\
\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau/\alpha_\lambda \in \tilde{\mathfrak{g}},\ \forall\lambda \in S^1\} \\
\Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau/\alpha_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe sur} \\
&\quad\ \text{le complémentaire du disque unité et } \alpha_\infty = 0\} \\
\Lambda^+\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau/\alpha_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe sur} \\
&\quad\ \text{le disque unité }\} \\
\Lambda^+_{\mathfrak{b}}\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto \alpha_\lambda] \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau/\alpha_\lambda \text{ se prolonge en une fonction holomorphe sur} \\
&\quad\ \text{le disque unité et } \alpha_0 \in (\mathfrak{b}, 0)\}.
\end{aligned}$$

où $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_0$.
On voit que la condition $\alpha_{i\lambda} = \tau(\alpha_\lambda),\ \forall\lambda \in S^1$ est équivalente à $\hat{\alpha}_k \in \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_{k \bmod 4}$ avec $\alpha_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\alpha}_k \lambda^k$. En outre, on a $\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau = \Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau \oplus \Lambda^+\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau$, ce qui permet de définir une projection :$[.]_{\Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau} : \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau \to \Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau$. On peut alors réecrire le résultat de la section précédente :

Corollaire 1.3 *Soit α une 1-forme sur Ω à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{g}}$ qui donne lieu à une immersion Σ_V dont le ρ_X est harmonique. Il lui correspond alors une 1-forme à valeurs dans $\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau$, α_λ , qui vérifie l'équation de courbure nulle (1.8), et telle que*

$$\begin{aligned}
\left[\alpha_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]_{\Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau} &= \lambda^{-2}\hat{\alpha}_{-2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) + \lambda^{-1}\hat{\alpha}_{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
\left[\alpha_\lambda\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\right]_{\Lambda^-_*\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}_\tau} &= 0
\end{aligned}$$

et
$$\hat{\alpha}_{-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \neq 0.$$
Réciproquement, à toute 1-forme $\alpha_\lambda \in \Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau$ *vérifiant ces conditions correspond la 1-forme* $\alpha = \alpha_1$ *qui donne lieu à une immersion* Σ_V *dont le* ρ_X *est harmonique. En outre, il existe une unique fonction* $U_\lambda\colon \Omega \to \Lambda\mathcal{G}_\tau$ *tel que* $dU_\lambda = U_\lambda\alpha_\lambda$ *et* $U_\lambda(z_0) = \mathbf{1}$. U_λ *sera appelée une extention* Σ_V *de* $U = U_1$.

Démonstration — C'est une conséquence immédiate du théorème 1.10 et du fait que, comme α est réelle, on a $\hat{\alpha}_k = \overline{\hat{\alpha}_{-k}}$. ∎

1.5.2 Théorèmes de décomposition de groupe

Ecrivons les décompositions d'Iwasawa des différents groupes que l'on a rencontrés :
$$\begin{aligned}\{R_a,\, a \in S^3\}^{\mathbb{C}} &= \{R_a,\, a \in S^3\}.\mathcal{B}_R\\ \{L_c,\, c \in S^3\}^{\mathbb{C}} &= \{L_c,\, c \in S^3\}.\mathcal{B}_L.\end{aligned}$$
On remarque que $\mathcal{B}_R$ et $\mathcal{B}_L$ commutent. Ensuite, on a
$$SO(4)^{\mathbb{C}} = \{R_aL_c,\, a, c \in S^3\}^{\mathbb{C}} = SO(4).(\mathcal{B}_R\mathcal{B}_L).$$
Alors on en déduit $G^{0\,\mathbb{C}} = G^0.\mathcal{B}$ et $G_0^{0\,\mathbb{C}} = G_0^0.\mathcal{B}_0$ avec
$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \left\{\begin{pmatrix} AC & 0\\ 0 & BC\end{pmatrix},\, A, B \in \mathcal{B}_R,\, C \in \mathcal{B}_L\right\}\\ \mathcal{B}_0 &= \left\{\begin{pmatrix} AC & 0\\ 0 & AC\end{pmatrix},\, A \in \mathcal{B}_R,\, C \in \mathcal{B}_L\right\}.\end{aligned}$$
Soit $F = Diag(A,\, B) \in G^{0\,\mathbb{C}}$, $(A, B \in SO(4)^{\mathbb{C}})$ alors on a $\tau(F) = -L_{E^\downarrow}FL_{E^\downarrow} = Diag(B,\, A)$. Ainsi si $(\lambda \mapsto F_\lambda) \in \Lambda G^{0\,\mathbb{C}}$, alors $F_\lambda \in \Lambda G_\tau^{0\,\mathbb{C}}$ si, et seulement si, en écrivant $F_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{F}_{2k}\lambda^{2k}$ on a $\hat{F}_{4k} \in \{Diag(R_aL_c,\, R_aL_c),\, a, c \in \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\}$ et $\hat{F}_{2k} \in \{Diag(R_aL_c,\, -R_aL_c),\, a, c \in \mathbb{H}\otimes\mathbb{C}\}$. En particulier, si $(\lambda \mapsto F_\lambda) \in \Lambda^+_{\mathcal{B}}G_\tau^{0\,\mathbb{C}}$ alors , comme $F_0 \in \mathcal{B}$, on en déduit que $F_0 \in \mathcal{B}_0$, donc $\Lambda^+_{\mathcal{B}}G_\tau^{0\,\mathbb{C}} = \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}G_\tau^{0\,\mathbb{C}}$.
On va utiliser le théorème suivant (cf. [26]) sur les groupes de lacets.

Théorème 1.11 *Soit* G *un groupe de Lie compact,* $G^{\mathbb{C}}$ *son complexifié et* $G^{\mathbb{C}} = G.\mathcal{B}_G$ *sa décomposition d'Iwasawa. Alors*

(i) *La fonction produit*
$$\begin{aligned}\Lambda G \times \Lambda^+_{\mathcal{B}_G}G^{\mathbb{C}} &\longrightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}\\ (\phi_\lambda, \beta_\lambda) &\longmapsto \phi_\lambda.\beta_\lambda\end{aligned}$$
est un difféomorphisme.

(ii) *Il existe un ouvert C_G de $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ tel que la fonction produit*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_*^- G^{\mathbb{C}} \times \Lambda^+ G^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & C_G \\ (\phi_\lambda^-, \phi_\lambda^+) & \longmapsto & \phi_\lambda^- . \phi_\lambda^+ \end{array}$$

est un difféomorphisme.

On va en déduire :

Théorème 1.12 **(i)** *La fonction produit*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda G_\tau^0 \times \Lambda_{\mathcal{B}_0}^+ G_\tau^{0\mathbb{C}} & \longrightarrow & \Lambda G_\tau^{0\mathbb{C}} \\ (F_\lambda, B_\lambda) & \longmapsto & F_\lambda . B_\lambda \end{array}$$

est un difféomorphisme.

(ii) *Il existe un ouvert $\overrightarrow{C}$ de $\Lambda G_\tau^{0\mathbb{C}}$ tel que la fonction produit*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_*^- G_\tau^{0\mathbb{C}} \times \Lambda^+ G_\tau^{0\mathbb{C}} & \longrightarrow & \overrightarrow{C} \\ (F_\lambda^-, F_\lambda^+) & \longmapsto & F_\lambda^- . F_\lambda^+ \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Démonstration du théorème 1.12 — (i) D'après le théorème 1.11 , l'application $(F_\lambda, B_\lambda) \in \Lambda G^0 \times \Lambda_{\mathcal{B}}^+ G^{0\mathbb{C}} \longmapsto F_\lambda . B_\lambda \in \Lambda G^{0\mathbb{C}}$ est un difféomorphisme. Soit $U_\lambda \in \Lambda G_\tau^{0\mathbb{C}}$ alors $U_\lambda = F_\lambda . B_\lambda$ avec $(F_\lambda, B_\lambda) \in \Lambda G^0 \times \Lambda_{\mathcal{B}}^+ G^{0\mathbb{C}}$ et $F_{i\lambda} . B_{i\lambda} = \tau(F_\lambda)\tau(B_\lambda)$ or $\tau(G^0) \subset G^0$ et $\tau(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ donc $\tau(F_\lambda) \in \Lambda G^0$, $\tau(B_\lambda) \in \Lambda_{\mathcal{B}}^+ G^{0\mathbb{C}}$ or d'après le théorème 1.11, il y a unicité de la décomposition d'où $F_{i\lambda} = \tau(F_\lambda), B_{i\lambda} = \tau(B_\lambda)$, finalement $F_\lambda \in \Lambda G_\tau^0$, $B \in \Lambda_{\mathcal{B}}^+ G_\tau^{0\mathbb{C}} = \Lambda_{\mathcal{B}_0}^+ G_\tau^{0\mathbb{C}}$ ce qui démontre (i).
(ii) $\overrightarrow{C} = \Lambda_*^- G_\tau^{0\mathbb{C}} . \Lambda^+ G_\tau^{0\mathbb{C}}$ est l'image par un difféomorphisme (celui donné par le théorème 1.11) de $\Lambda_*^- G_\tau^{0\mathbb{C}} \times \Lambda^+ G_\tau^{0\mathbb{C}}$ donc c'est une sous-variété de $\Lambda G_\tau^{0\mathbb{C}}$ difféomorphe à $\Lambda_*^- G_\tau^{0\mathbb{C}} \times \Lambda^+ G_\tau^{0\mathbb{C}}$. En outre $\overrightarrow{C} = C_{G^0} \cap \Lambda G_\tau^{0\mathbb{C}}$ donc c'est un ouvert de $\Lambda G_\tau^{0\mathbb{C}}$. ■

Passons maintenant aux applications affines :

Théorème 1.13 **(i)** *On a la décomposition suivante :*

$$\Lambda \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}} = \Lambda \mathcal{G}_\tau . \Lambda_{\mathcal{B}_0}^+ \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$$

(ii) *Il existe un ouvert C de $\Lambda \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ tel qu'on ait la décomposition suivante :*

$$C = \Lambda_*^- \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}} . \Lambda^+ \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$$

Démonstration — Il suffit de reprendre mot pour mot la démonstration faite dans [17], en remplacant L_j par $L_{E^\downarrow}$. ■

1.5.3 Représentation de Weierstrass

Nous allons suivre la même procédure que dans [17] (i.e. utiliser les méthodes de [8] en les adaptant).

Potentiel holomorphe

Définition 1.5 *Soit μ une 1-forme sur Ω à valeurs dans $\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau^{\mathbb{C}}$, alors on dira de μ que c'est un potentiel holomorphe si on a*

$$\mu_\lambda = \sum_{n\geq -2} \hat{\mu}_n \lambda^n$$

avec $\hat{\mu}_n = \hat{\mu}_n(\frac{\partial}{\partial z})dz$ où $\hat{\mu}_n(\frac{\partial}{\partial z})$ est holomorphe.

Théorème 1.14 *Soit $U = (F, X)$ un relèvement Σ_V dont le ρ_X est harmonique et $U_\lambda = (F_\lambda, X_\lambda) \colon \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau$ son extension Σ_V (Ω est simplement connexe, on a choisi $z_0 \in \Omega$ et $U_\lambda(z_0) = Id\ \forall\lambda \in S^1$). Alors :*

- *Il existe une fonction holomorphe $H_\lambda \colon \Omega \to \Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ et une fonction $B_\lambda \colon \Omega \to \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ tel que $U_\lambda = H_\lambda.B_\lambda$.*
- *En outre la forme de Maurer-Cartan $\mu_\lambda = H_\lambda^{-1}.dH_\lambda$ est un potentiel holomorphe : on dira que c'est un potentiel holomorphe pour U_λ .*

démonstration — L'existence de H_λ et B_λ est reliée à la résolution de l'équation :

$$0 = \frac{\partial U_\lambda B_\lambda^{-1}}{\partial \bar{z}} = U_\lambda \left(\alpha_\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) - B_\lambda^{-1} \frac{\partial B_\lambda}{\partial \bar{z}} \right) B_\lambda^{-1}$$

qui est équivalente à

$$\frac{\partial B_\lambda}{\partial \bar{z}} = B_\lambda \left(\alpha_0 + \lambda\alpha_1 + \lambda^2\alpha_2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),$$

avec la contrainte que $(\lambda \longmapsto B_\lambda(z)) \in \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ pour tout $z \in \Omega$. L'existence de B_λ s'obtient en suivant les mêmes arguments que [8]. Pour montrer que μ_λ est un potentiel holomorphe, il suffit d'écrire :

$$\mu_\lambda = H_\lambda^{-1}.dH_\lambda = B_\lambda(\alpha_\lambda - B_\lambda^{-1}.dB_\lambda).B_\lambda^{-1}$$

et d'utiliser le fait que $(\lambda \longmapsto B_\lambda(z)) \in \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ et que $z \mapsto H_\lambda(z)$ est holomorphe. ∎

Inversement tout potentiel holomorphe produit une surface Σ_V dont le ρ_X est harmonique :

Théorème 1.15 *Soit μ_λ un potentiel holomorphe, $z_0 \in \Omega$ et H_λ^0 une constante dans $\Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ (par exemple $H_\lambda^0 = Id$). Alors*

- *Il existe une unique fonction holomorphe $H_\lambda \colon \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$, tel que*

$$dH_\lambda = H_\lambda\mu_\lambda \quad et \quad H_\lambda(z_0) = H_\lambda^0.$$

– *En appliquant la décomposition* $\Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}} = \Lambda\mathcal{G}_\tau.\Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau$ *à* $H_\lambda(z)$ *pour chaque* z*, on obtient deux fonctions* $U_\lambda\colon \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau$ *et* $B_\lambda\colon \Omega \longrightarrow \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau$ *tel que* $H_\lambda(z) = U_\lambda(z).B_\lambda(z)\ \forall z \in \Omega$*. Alors* U_λ *est une extension* Σ_V *d'une surface* Σ_V *dont le* ρ_X *est harmonique (pourvu que* $\hat\alpha_{-1} \neq 0$*).*
– *De plus* μ_λ *est un potentiel holomorphe pour* U_λ*.*

Démonstration — On a $d\mu_\lambda = 0$, de plus $\mu_\lambda(\frac{\partial}{\partial\bar z}) = 0$ implique $\mu_\lambda \wedge \mu_\lambda = 0$ d'où

$$d\mu_\lambda + \mu_\lambda \wedge \mu_\lambda = 0,$$

et il existe donc une unique fonction holomorphe $H_\lambda\colon \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ tel que

$$dH_\lambda = H_\lambda.\mu_\lambda \tag{1.13}$$

et $H_\lambda(z_0) = H^0_\lambda$. Ecrivons la décomposition du théorème 1.13 pour $H_\lambda(z)$, $z \in \Omega$: il existe un unique couple $(U_\lambda, B_\lambda) \in \Lambda\mathcal{G}_\tau \times \Lambda^+_{\mathcal{B}_0}\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ tel que $H_\lambda(z) = U_\lambda(z).B_\lambda(z)$. Alors en utilisant (1.13), on a

$$U_\lambda^{-1}.dU_\lambda = B_\lambda(\mu_\lambda - B_\lambda^{-1}.dB_\lambda)B_\lambda^{-1} \tag{1.14}$$

Posons $\alpha = U_\lambda^{-1}.dU_\lambda$. Alors (1.14) nous dit que α_λ doit s'écrire sous la forme

$$\alpha_\lambda = \sum_{n\geq -2} \hat\alpha_n \lambda^n$$

Mais comme α_λ est réelle par définition, on a $\overline{\hat\alpha_n} = \hat\alpha_{-n}$ et donc

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\hat\alpha_{-2} + \lambda^{-1}\hat\alpha_{-1} + \hat\alpha_0 + \lambda\hat\alpha_1 + \lambda^2\hat\alpha_2.$$

De plus, en utilisant $B_\lambda^{-1} = \hat B_0^{-1} - \lambda\hat B_0^{-1}\hat B_1\hat B_0^{-1} + \cdots$, il résulte d'après (1.14) que

$$\hat\alpha_{-2} = \hat B_0\hat\mu_{-2}\hat B_0^{-1} \quad \text{et} \quad \hat\alpha_{-1} = \hat B_0\hat\mu_{-1}\hat B_0^{-1} + \hat B_1\hat\mu_{-2}\hat B_0^{-1} - \hat B_0\hat\mu_{-2}\hat B_0^{-1}\hat B_1\hat B_0^{-1},$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \hat\alpha_{-2} &= \hat B_0\hat\mu_{-2}\hat B_0^{-1} \\ \hat\alpha_{-1} &= \hat B_0\hat\mu_{-1}\hat B_0^{-1} + [\hat B_1\hat B_0^{-1}, \hat B_0\hat\mu_{-2}\hat B_0^{-1}]\ . \end{aligned}$$

Ainsi on voit que $\hat\alpha_{-1}$ et $\hat\alpha_{-2}$ sont des (1,0)-formes. De plus comme α_λ vérifie automatiquement la condition $d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0$ alors le corollaire 1.3 implique -pourvu que $\hat\alpha_{-1} \neq 0$ - que U_λ est une extension Σ_V dont le ρ_X est harmonique. Enfin comme $U_\lambda = H_\lambda.B_\lambda^{-1}$, on voit que μ_λ est un potentiel holomorphe pour U_λ. ■

1.5.4 Potentiel méromorphe

Le potentiel holomorphe construit au théorème 1.15 est loin d'être unique. On peut remédier à cela en incluant les potentiels méromorphes.

Définition 1.6 *Un potentiel méromorphe est une 1-forme méromorphe sur Ω à valeurs dans $\Lambda\tilde{\mathfrak{g}}_\tau^{\mathbb{C}}$ qui s'écrit*

$$\mu_\lambda = \lambda^{-2}\hat{\mu}_{-2} + \lambda^{-1}\hat{\mu}_{-1}.$$

Théorème 1.16 *Soit $U_\lambda : \Omega \longrightarrow \Lambda\mathcal{G}_\tau$ une extension Σ_V (dont le ρ_X est harmonique). Alors il existe une suite de points isolés de Ω , $S = \{a_n,\, n \in I\}$ tel que :*

- $\forall z \in \Omega \setminus \{a_n,\, n \in I\}, \quad U_\lambda(z) \in C = \Lambda_*^- \mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}.\Lambda^+\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}.$
- *De plus les fonctions $U_\lambda^- : \Omega \setminus \{a_n,\, n \in I\} \longrightarrow \Lambda_*^-\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ et $U_\lambda^+ : \Omega \setminus \{a_n,\, n \in I\} \longrightarrow \Lambda^+\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ ainsi définies sont holomorphes .*
- *En outre U_λ^- s'étend en un fonction méromorphe sur Ω.*
- *Sa forme de Maurer-Cartan $\mu_\lambda = (U_\lambda^-)^{-1}dU_\lambda^-$ est un potentiel méromorphe.*

Démonstration — C'est une simple adaptation de la démonstration de [8]. ■

Remarque 1.7 Le potentiel holomorphe est unique par unicité de la décomposition $U_\lambda = U_\lambda^-.U_\lambda^+$. D'autre part, on peut retrouver X_λ en appliquant la méthode du théorème 1.15 à μ_λ. En effet, comme on peut toujours supposer que $U_\lambda(z_0) = Id$, on a $U_\lambda^-(z_0) = Id$ donc U_λ^- est solution de $\mu_\lambda = (U_\lambda^-)^{-1}.dU_\lambda^-$, $U_\lambda^-(z_0) = Id$. En outre, on peut écrire $U_\lambda^+ = B_\lambda H$ avec $H \in C^\infty(\Omega \setminus S, G_0^0)$ et $B_\lambda \in C^\infty(\Omega \setminus S, \Lambda_{\mathcal{B}_0}^+\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}})$, alors on a $U_\lambda^- = U_\lambda(U_\lambda^+)^{-1} = (U_\lambda H^{-1})B_\lambda^{-1}$ mais $U_\lambda H^{-1}$ est la partie $\Lambda\mathcal{G}_\tau$ dans la décomposition de U_λ^- suivant $\Lambda\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}} = \Lambda\mathcal{G}_\tau.\Lambda_{\mathcal{B}_0}^+\mathcal{G}_\tau^{\mathbb{C}}$ sur $\Omega \setminus S$ et $U_\lambda H^{-1}$ est un relèvement de X_λ.

1.6 Le vecteur courbure moyenne

On se propose de calculer le vecteur courbure moyenne d'une surface Σ_V. Soit $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^8$ une immersion conforme Σ_V. Alors on a

$$H = \frac{e^{-2f}}{2}\triangle X = \frac{e^{-f}}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q'}{\partial v} + f_u q + f_v q'\right).$$

Posons $(E_1, E_2) = \mathcal{R}_\rho^{-1}(q, q')$, alors

$$H = \frac{e^{-f}}{2}\mathcal{R}_\rho\left[\frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{\partial E_2}{\partial v} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_u}\end{pmatrix} E_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_v}\end{pmatrix} E_2 + f_u E_1 + f_v E_2\right]$$

avec comme d'habitude $\gamma = d\rho.\rho^{-1}$. En outre, en écrivant que $d(dX) = 0$, on a

$$\frac{\partial E_1}{\partial v} - \frac{\partial E_2}{\partial u} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_v}\end{pmatrix} E_1 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{\gamma_u}\end{pmatrix} E_2 + f_v E_1 - f_u E_2 = 0\ ,$$

appliquons l'endomorphisme $L_{E^\downarrow}$ à cette équation

$$\frac{\partial E_1}{\partial u} + \frac{\partial E_2}{\partial v} + \begin{pmatrix} -y.\gamma_v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x.\gamma_u \\ 0 \end{pmatrix} + f_v E_2 + f_u E_1 = 0.$$

Injectons cela dans l'expression de H :

$$\begin{aligned} H &= \frac{e^{-f}}{2} \mathcal{R}_\rho \begin{pmatrix} y.\gamma_v - x.\gamma_u \\ y.\gamma_u + x.\gamma_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{-f}}{2} \mathcal{R}_\rho \left[\begin{pmatrix} -R_{\gamma_u} & 0 \\ 0 & R_{\gamma_u} \end{pmatrix} E_1 + \begin{pmatrix} -R_{\gamma_v} & 0 \\ 0 & R_{\gamma_v} \end{pmatrix} E_2 \right]. \end{aligned}$$

En posant $\gamma^d = d\rho.\rho^{-1}$ et $\gamma^g = \rho^{-1}.d\rho$, on peut réécrire cela sous la forme

$$H = \frac{e^{-f}}{2} \mathcal{R}_\rho \left[\begin{pmatrix} -R_{\gamma^d_u} & 0 \\ 0 & R_{\gamma^g_u} \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} -R_{\gamma^d_v} & 0 \\ 0 & R_{\gamma^g_v} \end{pmatrix} q' \right].$$

1.7 Surfaces ω_I-isotropes, ρ-harmoniques

1.7.1 Le produit vectoriel de $\mathbb{O}$ et le groupe $Spin(7)$

Considérons l'application $A\colon u \in \operatorname{Im}\mathbb{O} \mapsto \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & -L_u \end{pmatrix} \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$. On vérifie que $A(u)^2 = -|u|^2 Id$. Ainsi, A est une application de Clifford et on montre qu'elle se prolonge en un isomorphisme d'algèbre $Cl(7) \cong \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \oplus \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ (cf. [12]). On a de plus $Cl(7)^{\text{paire}} \cong \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{O})$ et $Spin(7)$ est le groupe engendré par $\{L_u,\, u \in S(\operatorname{Im}\mathbb{O})\}$. D'autre part, $g \in SO(8)$ appartient à $Spin(7)$ si, et seulement si,

$$\forall u \in \operatorname{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R}^7,\, \exists w \in \operatorname{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R}^7 /$$

$$g\, L_u\, g^{-1} = L_w$$

Cette propriété nous donne aussi la représentation vectoriel de $Spin(7)$, $\chi\colon Spin(7) \longrightarrow SO(7)$ (revêtement universel de $SO(7)$) : $\forall g \in Spin(7)$, $\forall u \in \operatorname{Im}\mathbb{O}$

$$L_{\chi_g(u)} = g\, L_u\, g^{-1} \tag{1.15}$$

ce qui donne $\chi_g(u) = g(ug^{-1}(1))$. On a alors que $g \in O(\mathbb{O})$ est dans $Spin(7)$ si, et seulement si,

$$g(uv) = \chi_g(u) g(v) \tag{1.16}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{O}$ (on pose $\chi_g(1) = 1$).

Considérons maintenant le produit vectoriel de $\mathbb{O}$:

$$q \times q' = -\operatorname{Im}(q.\bar{q'}) = \operatorname{Im}(q'.\bar{q})$$

pour $q, q' \in \mathbb{O}$. C'est une application antisymétrique de $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$ dans $\operatorname{Im}\mathbb{O}$. Ainsi elle définit une application

$$\begin{aligned} \rho\colon \quad Gr_2(\mathbb{O}) &\longrightarrow S(\operatorname{Im}\mathbb{O}) \\ q \wedge q' &\longmapsto q \times q' \end{aligned}$$

de la grassmanienne des plans orientés de $\mathbb{O}$ dans $S^6 \subset \operatorname{Im}\mathbb{O}$. La propriété fondamentale qui va nous permettre de faire dans un cadre plus général ce que l'on a déjà fait pour les surfaces Σ_V est la suivante

$$\forall g \in Spin(7),\ (g.q) \times (g.q') = \chi_g(q \times q'). \tag{1.17}$$

Elle veut dire que le produit vectoriel est $Spin(7)-$équivariant (lorsque $Spin(7)$ agit sur $\mathbb{O}\times\mathbb{O}$ de manière naturelle et sur $\operatorname{Im}\mathbb{O} = \mathbb{R}^7$ par l'intermédiaire de χ). En particulier lorsque l'on se restreint aux actions de $Spin(7)$ sur $Gr_2(\mathbb{O})$ et sur $S^6 = S(\operatorname{Im}\mathbb{O})$ alors ρ est $Spin(7)-$équivariante.
Pour tout couple orthonormé de $\mathbb{O}$, on a $\rho(q,q') = -q.\bar{q'}$ et donc $q' = \rho.q$. Ainsi l'ensemble des couples orthonormés de $\mathbb{O}$ est difféomorphe à $S^6 \times S^7$. De plus, on rappelle que l'on a pour tout $(q,q') \in \mathbb{O}^2$

$$q \times q' = -\sum_{i=1}^{7} \omega_i(q,q')e_i\ .$$

Considérons maintenant, pour $I \subsetneqq \{1,2,\dots 7\}$, les ensembles

$$\begin{aligned} V_I &= \{(q,q') \in S^7 \times S^7 / \langle q,q'\rangle = \omega_i(q,q') = 0,\ i \in I\} \\ Q_I &= \{P \in Gr_2(\mathbb{O}) /\ \omega_i(P) = 0,\ i \in I\}. \end{aligned}$$

On a $Q_I = V_I/SO(2)$; et $\rho(Q_I) = S^I = S(\bigoplus_{i\notin I}\mathbb{R}e_i)$. En particulier $V_I \cong S^7 \times S^{6-|I|}$. Pour $I = \varnothing$, on a $Q_\varnothing = Gr_2(\mathbb{O})$. Pour $I = \{1,2,3\}$ on retrouve l'ensemble Q étudié dans la section 1.3.

Cherchons le sous-groupe, G_I, de $Spin(7)$ qui conserve les ω_i, $i \in I$. $g \in Spin(7)$ conserve ω_i si, et seulement si, il commute avec L_{e_i}, $gL_{e_i}g^{-1} = L_{e_i}$, ce qui veut dire que $\chi_g(e_i) = e_i$, c'est à dire qu'il conserve e_i par son action sur S^6. Il en résulte que $G_I = \chi^{-1}(SO(\bigoplus_{i\notin I}\mathbb{R}e_i)) \simeq \chi^{-1}(SO(7-|I|)) = Spin(7-|I|)$. Ainsi G_I agit sur Q_I ainsi que que sur S^I et le produit vectoriel $\rho\colon Q_I \to S^I$ est G_I-équivariant. De plus, G_I agit transitivement sur S^I. En outre le stabilisateur d'un point de S^6 pour l'action de $Spin(7)$ s'identifie à $\chi^{-1}(SO(6)) = Spin(6)$ et donc $S^6 = Spin(7)/Spin(6)$. Plus généralement on a $S^I = G_I/G_{I\cup\{k\}} \simeq Spin(7-|I|)/Spin(6-|I|)$.

On peut toujours considérer en toute généralité que $I = \{1,2...,|I|\}$. En effet, le groupe $SO(7)$ agit transitivement sur les S^I avec I de même cardinal. Donc en prenant l'image réciproque par χ, et ρ, on voit que $Spin(7)$ agit transitivement sur les V_I avec I de cardinal fixé. Ainsi quitte à faire agir un élément de $Spin(7)$ on peut toujours considérer que $I = \{1,2,...,|I|\}$, $S^I = S^{6-|I|}$, et $G_I = Spin(7-|I|)$.

Exemple 1.1 *Prenons $I = \{1,2,3\}$, on retrouve le cas étudié dans les sections précédentes. On a $Q_I = Q$, $G_I = Spin(4) = S^3 \times S^3$ et $S^3 \simeq S^3 \times S^3/S^3 = Spin(4)/Spin(3)$. Plus précisément, on a vu que* $G_I = \left\{ \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_b \end{pmatrix},\ a,b \in S^3 \right\}$

et $Stab_{G_I}(E^{\downarrow}) = G_{I\cup\{4\}} = \left\{\begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{pmatrix},\ a \in S^3\right\}$. *En outre, on a vu que l'action de* G_I *sur* S^3 *s'écrit*

$$\chi_g(u) = \bar{a}u\,b \qquad i.e.$$

$$\chi\colon Diag(R_a, R_b) \in Spin(4) \mapsto L_{\bar{a}}R_b \in SO(4)$$

Nous allons maintenant passer en revue les autres cas possibles.

0. Si $I = \varnothing$, alors $G_I = Spin(7)$ et $V_I = St_2(\mathbb{O})$ l'ensemble des couples orthonormés de $\mathbb{O}$. L'action de $Spin(7)$ sur S^6 est donnée par $\chi_g(u) = g(u)\overline{g(1)}$ d'après (1.16). $Spin(7)$ agit transitivement sur les couples orthonormés de $\mathbb{O}$. En effet, l'action de $Spin(7)$ sur S^7 est transitive et $Stab(1) = G_2$, et donc $S^7 = Spin(7)/G_2$. Ensuite l'action de G_2 sur $S(\{1\}^{\perp}) = S^6$ est transitive et $Stab_{G_2}(e_1) = SU(\bigoplus_{i>1}\mathbb{R}e_i,\, L_{e_1}) \simeq SU(3)$ et donc $S^6 = G_2/SU(3)$. On déduit alors facilement de cela que $Spin(7)$ agit transitivement sur $St_2(\mathbb{O})$ et $Stab_{Spin(7)}(1, e_1) = SU(3)$ et donc $St_2(\mathbb{O}) = Spin(7)/SU(3)$, $Gr_2(\mathbb{O}) = Spin(7)/(SO(2)\times SU(3))$.
1. Si $I = \{1\}$ alors $G_I = Spin(6) = SU(4)$. En effet, c'est le sous-groupe de $Spin(7)$ qui commute avec la structure complexe L_{e_1}, il est donc inclus dans $U(4)$. D'autre part comme $Spin(6)$ est engendré , dans $Cl(6)$, par les $u{\cdot}v$, (u,v) couple orthonormé de $\mathbb{R}^6$, alors comme $(u{\cdot}v)^2 = -1$, si on note A la représentation de $Spin(6)$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$ alors on a $A(u{\cdot}v)^2 = -Id$, donc $A(u\cdot v)$ est une structure complexe de $\mathbb{C}^4$ donc $\det_{\mathbb{C}}(A(u\cdot v)) \in \{\pm1, \pm i\}$, ainsi $\det_{\mathbb{C}}(A(Spin(6))) \subset \{\pm1, \pm i\}$. Enfin la connexité de $Spin(6)$ et un calcul des dimensions nous donne $A(Spin(6)) = SU(4)$.
   En outre, $Spin(6) = SU(4)$ agit transitivement sur V_I qui n'est autre que l'ensemble des couples hermitiens de $(\mathbb{O}, L_{e_1}) = \mathbb{C}^4$, et donc il agit transitivement sur Q_I. Le stabilisateur d'un couple (q, q') est isomorphe à $SU(2)$. Ainsi $V_{\{1\}} = SU(4)/SU(2)$, $Q_{\{1\}} = SU(4)/(SO(2)\times SU(2))$.
2. Si $I = \{1,2\}$, alors $G_I = Spin(5) \simeq U(2,\mathbb{H})$. En effet, c'est le sous-groupe de $Spin(7)$ qui commute avec $I_1 = L_{I^{\uparrow}}$ et $I_2 = L_{J^{\uparrow}}$ donc avec $I_3 = I_1I_2$ aussi. Il est donc inclus dans le groupe des automorphismes $\mathbb{H}-$linéaires pour la structure de $\mathbb{H}-$espace vectoriel sur $\mathbb{O}$ définie par I_1, I_2, I_3 ; mais il est aussi inclus dans $SO(8)$, il est donc inclus dans le groupe des $\mathbb{H}-$automorphismes de $\mathbb{O}$ qui conservent la forme hermitienne quaternionique $C = \langle\cdot,\cdot\rangle + \langle\cdot, I_1\cdot\rangle i + \langle\cdot, I_2\cdot\rangle j + \langle\cdot, I_3\cdot\rangle k$, qui est un conjugué de $U(2,\mathbb{H})$. Ensuite un calcul des dimensions et la connexité des deux groupes permettent de conclure que $Spin(5) \simeq U(2,\mathbb{H})$. $Spin(5)$ n'agit pas transitivement sur $V_{\{1,2\}}$ car $Spin(5)$ conserve la forme C et agit librement et transitivement sur les fibres de C, tandis que $C(V_{\{1,2\}}) = [-1,1]k$. Ainsi les orbites sont caractérisées par la fonction C qui sur $V_{\{1,2\}}$ vaut $C(q,q') = \langle q, I_3.q'\rangle k$ et chaque orbite est difféomorphe à $Spin(5)$.
3. Le cas $I = \{1,2,3\}$ a déjà été longuement étudié dans les sections précédentes. On l'a rappelé dans l'exemple 1. En outre rajoutons que d'après la section 1.3 (cf. la démonstration du théorème 1.5), le groupe $Spin(4)$

n'agit pas transitivement sur Q, et que les orbites sont caractérisées par la fonction $r\colon q\wedge q'\mapsto Im(x.\bar{x'})$. Il y a alors une orbite de dimension 6 : $G.P_1=r^{-1}(0)$, une S^2-famille d'orbites de dimension 5, dont la réunion est $G.P_2$: $\{P/r(P)=u/2\}$, u décrivant S^2, et enfin une famille d'orbite de dimension 6, celles tel que $0<|r|<1/2$.

4. Si $|I|=4$, on a vu que $G_I=Spin(3)=\{Diag(R_a,R_a),\, a\in S^3\}$. L'action de $Spin(3)$ sur S^2 s'écrit $\chi_g(\rho)=\bar{a}\rho\, a$ i.e $\chi\colon Diag(R_a,R_a)\in Spin(3)\mapsto L_{\bar{a}}R_a\in SO(3)$.
5. Si $|I|=5$ alors $G_I=Spin(2)=\{Diag(R_{e^{i\theta}},R_{e^{i\theta}}),\,\theta\in\mathbb{R}\}$. L'action de $Spin(2)$ sur S^1 est donnée par
$$\chi_g(e^{i\beta})=e^{-2i\theta}.e^{i\beta}$$
l'identification entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}e_6\oplus\mathbb{R}e_7$ étant $ae_6+be_7\mapsto a+ib$.
6. Si $|I|=6$, alors $G_I=\{\pm Id\}$, $S_I=\{\pm e_7\}$ et $V_I=\{(q,\pm L_{e_7}q),\, q\in S^7\}$.

On a besoin, pour refaire dans le cas général ce que l'on a fait précédemment, de définir un application $\tilde{\rho}\colon G_I\to S^I$. Soit donc $I\subsetneqq\{1,...7\}$ et $e\in S(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})\setminus\{e_i,\, i\in I\}$, disons pour que les choses soient fixées une fois pour toutes que $e=e_{|I|+1}$ (en supposant comme on en a le droit que $I=\{1,...,|I|\}$). Posons alors
$$\tilde{\rho}_I(g)=\chi_g(e)$$
pour tout $g\in G_I$, alors $\tilde{\rho}_I(G_I)=S^I$ et par passage au quotient $\tilde{\rho}_I$ définit l'isomorphisme $G_I/G_{I\cup\{k\}}\simeq S^I$. De plus on a
$$\rho(g^{-1}.q,g^{-1}.q')=e\Longleftrightarrow\tilde{\rho}_I(g)=\rho(q,q').$$
En outre $\rho(q,q')=e\Longleftrightarrow q'=L_eq$.

1.7.2 Algèbres de Lie

L'automorphisme intérieur de $Spin(7)$, int_{L_e}, stabilise G_I. En effet, soit $g\in G_I$, alors pour $i\in I$ on a
$$\begin{array}{rclcl} L_{e_i}(L_e\, g\, L_e^{-1})L_{e_i}^{-1} & = & L_{e_i}(L_e\, g\, L_e)L_{e_i} & = & (-L_eL_{e_i})\, g\,(-L_{e_i}L_e)\\ & = & L_e(L_{e_i}\, g\, L_{e_i}^{-1})L_e^{-1} & = & L_e\, g\, L_e^{-1}\end{array}$$
ainsi $L_e\, g\, L_e^{-1}$ commute avec L_{e_i}, $i\in I$ d'où $L_e(G_I)L_e^{-1}\subset G_I$. L'algèbre de Lie de G_I, $\mathfrak{g}_I=spin(7-|I|)$ est stable par $Ad\, L_e$ et on a $(Ad\, L_e)^2=Id$ donc elle se décompose en somme directe des deux sous-espaces propres associés aux valeurs propres ±1 respectivement :
$$\mathfrak{g}_I=\mathfrak{g}_0(I)\oplus\mathfrak{g}_2(I)$$
avec
$$\mathfrak{g}_0(I)=\ker(Ad\, L_e-Id)\,,\quad \mathfrak{g}_2(I)=\ker(Ad\, L_e+Id).$$

On posera $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}_k(\varnothing)$, $k = 0, 2$, ainsi $spin(7) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$. Pour $|I| = 5$, on a $int_{L_e} = -Id$ d'où $\mathfrak{g}_2(I) = 0$. Pour $|I| = 6$, on a $\mathfrak{g}_I = 0$.
Considérons maintenant le groupe $\mathcal{G} = \mathcal{A}Spin(7)$ des isométries affines de $\mathbb{O}$ dont la partie linéaire est dans $Spin(7)$ et plus généralement $\mathcal{G}_I = \mathcal{A}G_I$ et $\mathfrak{g}(I)$ son algèbre de Lie. Soit τ_e l'automorphisme intérieur de $\mathcal{G}_I$ défini par $(-L_e, 0)$. Il induit un automorphisme d'ordre 4 de $\mathfrak{g}(I)$ (il est d'ordre 4 pour tout $|I|$ même pour $|I| = 5$ et 6, car sur $\mathbb{O}$, L_e est d'ordre 4) ce qui donne une décomposition de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(I) = \mathfrak{g}(I) \otimes \mathbb{C}$ suivant les espaces propres de τ_e associés aux valeurs propres i^k, $-1 \leq k \leq 2$. On notera $\mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}(I)$ ces espaces propres. Les espaces propres associés aux valeurs propres ± 1 ne dépendent pas de I, on les notera simplement $\mathfrak{g}_{\pm 1}^{\mathbb{C}}$. On a alors

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathfrak{g}_{-1}^{\mathbb{C}} & = & \ker(L_e - iId) & , & \mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}} & = & \ker(L_e + iId) \\ \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}(I) & = & \mathfrak{g}_0(I) \otimes \mathbb{C} & , & \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}(I) & = & \mathfrak{g}_2(I) \otimes \mathbb{C} \end{array}$$

On a $[\mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}(I), \mathfrak{g}_l^{\mathbb{C}}(I)] \subset \mathfrak{g}_{k+l \bmod 4}^{\mathbb{C}}(I)$, puisque τ_e est un automorphisme.

1.7.3 Surfaces ω_I−isotropes et ρ−harmoniques

Définition 1.7 *Soit Σ une surface immergée de $\mathbb{O}$, alors il lui est associée une application $\rho_\Sigma \colon \Sigma \to S^6$ définie par $\rho_\Sigma(z) = \rho(T_z\Sigma)$ i.e. si $X \colon \Sigma \to \mathbb{O}$ est une immersion alors $\rho_\Sigma = X^*\rho$. On dira que Σ est ρ−harmonique si ρ_Σ est harmonique. Soit $I \subsetneq \{1, ..., 7\}$ alors on dira que Σ est ω_I−isotrope si $\forall z \in \Sigma$, $T_z\Sigma \in Q_I$ (si $I = \varnothing$ il n'y a aucune condition). Dans ce cas, ρ_Σ est à valeurs dans $S^I \subset S^6$.*

Définition 1.8 *On appellera relèvement ω_I−isotrope (si $I = \varnothing$ on dira seulement relèvement) une application $U = (F, X) \colon \Sigma \to \mathcal{G}_I$ tel que X soit une immersion conforme ω_I−isotrope et $\tilde{\rho}_I \circ F = \rho_\Sigma$*

Théorème 1.17 *Soit Ω un ouvert simplement connexe, $\alpha \in T^*\Omega \otimes \mathfrak{g}(I)$, alors*

- *α est la forme de Maurer-Cartan d'un relèvement ω_I−isotrope si, et seulement si,*

$$d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0, \quad \alpha''_{-1} = 0 \text{ et } \alpha'_{-1} \text{ ne s'annule pas,}$$

- *dans ce cas, α correspond à une immersion conforme ω_I−isotrope, ρ−harmonique si, et seulement si, la forme de Maurer-Cartan prolongée $\alpha_\lambda = \lambda^{-2}\alpha'_2 + \lambda^{-1}\alpha'_{-1} + \alpha_0 + \lambda\alpha''_1 + \lambda^2\alpha''_2$ vérifie*

$$d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Démonstration — Pour le premier point cf. la section 1.4. Pour le second on remarque que l'on a

$$d\alpha_\lambda + \alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda = d\beta_{\lambda^2} + \beta_{\lambda^2} \wedge \beta_{\lambda^2}$$

où $\beta_\lambda = \lambda^{-1}\alpha'_2 + \alpha_0 + \lambda\alpha''_2$ est la forme de Maurer-Cartan prolongée associée à $\beta = F^{-1}.dF$, la forme de Maurer-Cartan du relèvement $F \in G_I$ de $\rho_X \in S^I$.

D'après [8] (cf. aussi [14], ou [15]) on sait que ρ_X est harmonique si, et seulement si, $d\beta_\lambda + \beta_\lambda \wedge \beta_\lambda = 0\ \forall \lambda \in S^1$ ce qui achève la démonstration. ■

On peut maintenant faire ce que l'on a fait dans la section 1.5 à l'aide des groupes de lacets et obtenir une représentation de Weierstrass par des potentiels holomorphes à valeurs dans $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(I)_\tau$.

Remarque 1.8 On a choisi $e = e_{|I|+1}$. Avec ce choix le groupe de symétrie $G_{I\cup\{|I|+1\}}$ n'est autre que le groupe d'isotropie pour l'action de G_I. Donc c'est pratique lorsqu'on fait une étude théorique où on envisage successivement les différents cas possibles. Mais ce choix n'est pas pratique si l'on veut que les décompositions des algèbres de Lie se corespondent i.e. la décomposition du sous-cas soit la "trace" de la décomposition du cas plus général. Pour cela il faut donc prendre le même e. Il suffit de le prendre compatible avec le sous-cas alors il sera compatible avec le cas plus général. Exemple : Si on veut étudier le cas $|I| = 2$ ainsi que le sous-cas $|I| = 3$, alors le choix de $e = E^{\downarrow}$ pour les deux convient bien et les décompositions se correspondent : $\mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}(\{1,2,3\}) = \mathfrak{g}_k^{\mathbb{C}}(\{1,2\}) \cap \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(\{1,2,3\})$. Donc on peut faire une étude simultanée des deux (on a le même automorphisme τ_e) et la représentation de Weierstrass du sous-cas s'obtiendra tout simplement en prenant dans la représentation de Weierstrass du cas plus général, des potentiels holomorphes à valeurs dans une sous algèbre de Lie, $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(J)_\tau$, de l'algèbre de Lie du cas plus général, $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}(I)_\tau$.

Remarque 1.9 On peut évidemment envisager le cas plus général des surfaces ω_E-isotropes où E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$: on dira qu'un plan P de $\mathbb{O}$ est ω_E-isotrope s'il est isotrope pour $\omega_e = \langle \cdot, L_e \cdot \rangle$ pour tout $e \in S(E)$. Pour tout E, il existe $g \in Spin(7)$ qui envoie l'ensemble des plans ω_E-isotropes sur l'ensemble des plans ω_I-isotropes avec $|I| = \dim E$. En effet, soit $h \in SO(7)$ tel que $h.E = \mathrm{Vect}(e_i,\, i \in I)$ alors pour $g \in \chi^{-1}(\{h\})$ on a $g^*\omega_I = \omega_E$ avec $\omega_E = \mathrm{Vect}(\omega_e,\, e \in E)$, $\omega_I = \mathrm{Vect}(\omega_i,\, i \in I)$. Donc quitte à faire agir un élément fixe de $Spin(7)$ on est ramené au cas que l'on a étudié.

Remarque 1.10 Ce que l'on vient de faire dans $\mathbb{O}$ peut être fait dans $\mathbb{H}$. On définit le produit vectoriel $x \times y = -\mathrm{Im}\,(x.\bar{y})$ pour $x, y \in \mathbb{H}$. On a $x \times y = -\sum_{i=1}^{3} \omega_i(x,y)e_i$ avec $\omega_i = \langle \cdot, e_i \cdot \rangle$ et $(e_1, e_2, e_3) = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$. Alors on a pour $g = R_a L_b \in SO(4)$, $(gx) \times (gy) = -\mathrm{Im}\,(bx\bar{y}\bar{b}) = b(x \times y)b^{-1}$. Ainsi la représentation vectorielle de $Spin(3) = \{L_b,\, b \in S^3\}$, $\chi \colon Spin(3) \to SO(3)$ est donnée par $L_b \in Spin(3) \mapsto int_b = L_b R_{b^{-1}} \in SO(\mathrm{Im}\,\mathbb{H})$. En procédant comme on l'a fait dans $\mathbb{O}$, on montre que les surfaces de $\mathbb{R}^4$ $\rho-$harmoniques sont un système complètement intégrable. Plus généralement, les surfaces $\omega_I -$ isotropes, $\rho-$harmoniques de $\mathbb{R}^4$ sont un système complètement intégrable. Ici on a $|I| = 0, 1$ ou 2. Pour $|I| = 1$ on retrouve les surfaces lagrangiennes hamiltoniennes stationnaires. Pour $|I| = 2$ on trouve les surfaces spéciales lagrangiennes.

D'ailleurs une surface ω_I-isotrope, $\rho-$harmonique de $\mathbb{H}$ n'est autre qu'une surface ω_I-isotrope, $\rho-$harmonique de $\mathbb{O}$ contenue dans le sous-espace $\mathbb{H}$ de

$\mathbb{O}$. D'autre part, on voit que si l'immersion X est à valeurs dans $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ alors X est $\rho-$harmonique si, et seulement si, elle est à courbure moyenne constante. Ainsi l'ensemble des CMC de $\mathbb{R}^3$ n'est autre que l'ensemble des surfaces $\rho-$harmoniques de $\mathbb{H}$ incluses dans $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$.

1.7.4 Calcul du vecteur courbure moyenne

Dans le cas des surfaces Σ_V ($|I| = 3$) on disposait du relèvement $\mathcal{R}\colon \rho \in S^3 \mapsto \mathcal{R}_\rho \in Spin(4)$, en particulier la fibration $Spin(4) \to S^3$ est triviale (on a vu que c'est un produit semi-direct). Ceci nous a permis d'écrire l'équation linéaire (1.11) qui caractérise les surfaces Σ_V et de calculer le vecteur courbure moyenne en utilisant le fait que le fibré $Q \to S^3$ est trivial : on a représenté (q, q') par $(\rho, (E_1, E_2))$. Dans le cas général, ce n'est pas possible : $SO(n+1) \to SO(n+1)/SO(n) = S^n$ n'est pas trivialisable sinon la sphère S^n serait parallélisable or on sait que ce n'est le cas que pour $n = 1, 3, 7$. On retrouve donc le cas $n = 3$ et le cas évident $n = 1$ (dans ce cas $Spin(2) = S^1$). Dans le cas général donc on ne peut pas faire la séparation précédente. Cependant, on peut toujours calculer le vecteur courbure moyenne en fonction de ρ et la formule obtenue est valable pour n'importe quelle surface de $\mathbb{O}$ sans aucune hypothèse. Soit $X\colon \Omega \to \mathbb{O}$ une immersion conforme alors par définition de $\rho\colon Gr_2(\mathbb{O}) \to \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ on a

$$*dX = -\rho_X.dX$$

et cette équation détermine le $\rho_X = X^*\rho$ de l'immersion (i.e. si on a $*dX = -\sigma.dX$ alors $\sigma = \rho_X$). Prenons la différentielle de cette équation, on obtient

$$\triangle X = (\partial_v \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} - (\partial_u \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial v} = \rho\cdot\left((\partial_u \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} + (\partial_v \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} H = \frac{e^{-2f}}{2}\triangle X &= \frac{e^{-2f}}{2}\left((\partial_v \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} - (\partial_u \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}\right) \\ &= \frac{e^{-2f}}{2}\,\rho\cdot\left((\partial_u \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial u} + (\partial_v \rho)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Chapitre 2

Supersymmetric Harmonic Maps into Symmetric Spaces

2.1 Introduction

In this paper we study supersymmetric harmonic maps from the point of view of integrable system. It is well known that harmonic maps from $\mathbb{R}^2$ into a symmetric space are solutions of a integrable system (see [8, 4, 3, 14, 15]). We show here that the superharmonic maps from $\mathbb{R}^{2|2}$ into a symmetric space are solutions of a integrable system, more precisely of a first elliptic integrable system in the sense of C.L. Terng (see [29]) and that we have a Weierstrass-type representation in terms of holomorphic potentials (as well as of meromorphic potentials). In the end of the paper we show that superprimitive maps from $\mathbb{R}^{2|2}$ into a 4-symmetric space give us, by restriction to $\mathbb{R}^2$, solutions of the second elliptic system associated to the previous 4-symmetric space. This leads us to conjecture that any second elliptic system associated to a 4-symmetric space has a geometrical interpretation in terms of surfaces with values in a symmetric spaces, (such that a certain associated map is harmonic) as this is the case for Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in Hermitian symmetric spaces (see [19]) or for ρ-harmonic surfaces of $\mathbb{O}$ (see [21]).
Our paper is organized as follows. In section 2.2, we define superfields $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ from $\mathbb{R}^{2|2}$ to a Riemannian manifold, and component fields. Then we recall the functor of points approach to supermanifolds, we define the writing of a superfield and study its behaviour when we embedd the manifold M in a Euclidiean space $\mathbb{R}^N$. Lastly, we recall the derivation on $\mathbb{R}^{2|2}$. In section 2.3 we introduce the supersymmetric Lagrangian on $\mathbb{R}^{2|2}$, define the supersymmetric maps and derive the Euler-Lagrange equations in terms of the component fields. Next, we study the case $M = S^n$: we write the Euler-Lagrange equations in this case and we derive from them the superharmonic maps equation in this case. Then we introduce the superspace formulation of the Lagrangian and derive the superharmonic maps equation for the general case of a Riemannian manifold M. In section 2.4, we introduce the lift of a superfield with values in a symmetric space, then we express the superharmonic maps equation in terms of the

Maurer-Cartan form of the lift. Once more, in order to make the comprehension easier, we first treat the case $M = S^n$, before the general case. In section 2.5, we study the zero curvature equation (i.e. the Maurer-Cartan equation) for a 1-form on $\mathbb{R}^{2|2}$ with values in a Lie algebra. This allows to formulate the superharmonic maps equation as the zero curvature equation for a 1-form on $\mathbb{R}^{2|2}$ with values in a loop space $\Lambda\mathfrak{g}_\tau$. Then we precise the extended Maurer-Cartan form, and characterize the superharmonic maps in terms of extended lifts. The section 2.6 deals with the Weierstrass representation: we define holomorphic functions and 1-forms in $\mathbb{R}^{2|2}$, and then we define holomorphic potentials. We show that we have a Weierstrass-type representation of the superharmonic maps in terms of holomorphic potentials. Lastly, we deal with meromorphic potentials. In section 2.7, we precise the Weierstrass representation in terms of the component fields. In section 2.8, we study the superprimitive maps with values in a 4-symmetric spaces, and we precise their Weierstrass representation. This allows us in the last section to show that the restrictions to $\mathbb{R}^2$ of superprimitive maps are solutions of a second elliptic integrable system in the even part of a super Lie algebra.

2.2 Definitions and Notations

We consider the superspace $\mathbb{R}^{2|2}$ with coordinates $(x, y, \theta_1, \theta_2)$; (x, y) are the even coordinates and (θ_1, θ_2) the odd coordinates. Let M be a Riemannian manifold. We will be interested in maps $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ (which are even) i.e. morphisms of sheaves of super $\mathbb{R}-$algebras from $\mathbb{R}^{2|2}$ to M (see [6, 1, 23, 24]). We call these maps *superfields*. We write such a superfield:

$$\Phi = u + \theta_1\psi_1 + \theta_2\psi_2 + \theta_1\theta_2 F' \tag{2.1}$$

u, ψ_1, ψ_2, F' are the component fields (see [7]). We view these as maps from $\mathbb{R}^2$ into a supermanifold: u is a map from $\mathbb{R}^2$ to M, ψ_1, ψ_2 are odd sections of $u^*(TM)$ and F' is a even section of $u^*(TM)$. So u, F' are even whereas ψ_1, ψ_2 are odd. The supermanifold of superfields Φ is isomorphic to the supermanifold of component fields $\{u, \psi_1, \psi_2, F'\}$ (see [7]). Besides the component fields can be defined as the restriction to $\mathbb{R}^2$ of certain derivatives of Φ:

$$\begin{aligned} u &= i^*\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to M \\ \psi_a &= i^*D_a\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to u^*(\Pi TM) \\ F' &= i^*(-\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}D_aD_b\Phi)\colon \mathbb{R}^2 \to u^*(TM)\ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

where $i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2|2}$ is the natural inclusion, Π is the functor which reverses the parity, and the left-invariant vector fields D_a are defined below. This is the definition of the component fields used in [7]. We use another definition based on the morphism interpretation of superfields, which is equivalent to the previous one, given by (2.2). Moreover as in [7] we use the functor of points approach to supermanifolds (see [6]). If B is a supermanifold, then a $B-$point of $\mathbb{R}^{2|2}$ is a morphism $B \to \mathbb{R}^{2|2}$. It can be viewed as a family of points of $\mathbb{R}^{2|2}$ parametrized by B, i.e. a section of the projection $\mathbb{R}^{2|2} \times B \to B$. Then a map Φ from $\mathbb{R}^{2|2}$ to M is a functor from the categoy of supermanifolds, which to each B associates a map $\Phi_B \colon \mathbb{R}^{2|2}(B) \to M(B)$ from the set of $B-$points of $\mathbb{R}^{2|2}$ to the set $M(B)$ of $B-$points of M. For example, if we take $B = \mathbb{R}^{0|L}$, which is the topogical space $\mathbb{R}^0$ endowed with the Grassman algebra $B_L = \mathbb{R}[\eta_1, \ldots, \eta_L]$ over $\mathbb{R}^L$, then a $\mathbb{R}^{0|L}-$point of $\mathbb{R}^{2|2}$ is in the form $(x, y, \theta_1, \theta_2)$ where $x, y \in B_L^0$, the even part of B_L, and $\theta_1, \theta_2 \in B_L^1$, the odd part of B_L. Hence the set of $\mathbb{R}^{0|L}-$points of $\mathbb{R}^{2|2}$ is $B_L^{2|2} := (B_L^0)^2 \times (B_L^1)^2$. Thus if we restrict ourself to the category of supermanifolds $\mathbb{R}^{0|L}$, $L \in \mathbb{N}$, then a map $\Phi \colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ is a sequence (Φ_L), of G^∞ functions defined by Rogers ([27]), such that Φ_L is a G^∞ function from $B_L^{2|2}$ to the G^∞ supermanifold over B_L, $M(\mathbb{R}^{0|L})$, and such that ${\Phi_{L'}}_{|B_L^{2|2}} = \Phi_L$, if $L \leq L'$. Hence, in this case, if we suppose $M = \mathbb{R}^n$, we have $M(\mathbb{R}^{0|L}) = B_L^{n|0} = (B_L^0)^n$ and the writing (2.1) is the z expansion of Φ_L (see [27]). Further following [9], we can say equivalently that if we denote by $\mathcal{F}$ the infinite dimensional supermanifold of morphisms: $\mathbb{R}^{2|2} \to M$, then the functor defined by Φ is a functor $B \mapsto \mathrm{Hom}(B, \mathcal{F})$: to each B corresponds a $B-$point of $\mathcal{F}$, i.e. a morphism $\Phi_B \colon \mathbb{R}^{2|2} \times B \to M$. It means that the map Φ is a functor which to each B associates a morphism of algebras $\Phi_B^* \colon C^\infty(M) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2|2} \times B)$. In concrete terms, in all the paper, when we say: "Let $\Phi \colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ be a map", one can consider that it means "Let B be a supermanifold and let $\Phi_B \colon \mathbb{R}^{2|2} \times B \to M$ be a morphism" (omitting the additional condition that $B \mapsto \Phi_B$ is functorial in B). B can be viewed as a "space of parameters", and Φ_B as a family of maps: $\mathbb{R}^{2|2} \to M$, parametrized by B. We will never mention B though it is tacitly assumed to always be there. Moreover, when we speak about morphisms, these are even morphisms, i.e. which preserve the parity, that is to say morphisms of super $\mathbb{R}-$algebras. Thus as said above, a superfield is even. But we will also be led to consider odd maps $A \colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$, these are maps which give morphisms that reverse the parity.

Let us now precise the writing (2.1) and give our definition of the component fields.

In the general case (M is not an Euclidiean space $\mathbb{R}^N$) the formal writing (2.1) does not permit to have directly the morphism of super $\mathbb{R}-$algebras Φ^* as it happens in the case $M = \mathbb{R}^N$, where the meaning of the writing (2.1) is clear:

it is the writing of the morphism Φ^*. Indeed, if $M = \mathbb{R}^N$ we have

$$
\begin{aligned}
&\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^N),\\
&\Phi^*(f) = f\circ\Phi \;=\; f(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}\cdot(\theta_1\psi_1 + \theta_2\psi_2 + \theta_1\theta_2 F')^k\\
&\qquad\qquad\quad\;=\; f(u) + \sum_{k=1}^{2} \frac{f^{(k)}(u)}{k!}\cdot(\theta_1\psi_1 + \theta_2\psi_2 + \theta_1\theta_2 F')^k\\
&\qquad\qquad\quad\;=\; f(u) + \theta_1 df(u).\psi_1 + \theta_2 df(u).\psi_2\\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \theta_1\theta_2(df(u).F' - d^2 f(u)(\psi_1,\psi_2))
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

(we have used the fact that ψ_1, ψ_2 are odd). Then we define the component fields as the the coefficient maps a_I in the decomposition $\Phi = \sum \theta^I a_I$ in the morphism writing, and as we will see below the equations (2.2) follow from this definition.
In the general case, we must use local coordinates in M, to write the morphism of algebras Φ^* in the same way as (2.3) (see [1, 23, 24]). But the coefficient maps which appear in each chart in the equations (2.3) written in each chart, do not transform, through a change of chart, in such a way that they define some unique functions u, ψ, F', which would allow us to give a sense to (2.1) (in fact the coefficients corresponding to u, ψ tranform correctely but not the one corresponding to F'). So the writing (2.1) does not have any sense if we do not precise it. We will do it now. To do this we use the metric of M, more precisely its Levi-Civita connection (it was already used in the equation (2.2), taken in [7] as definition of the component fields, where the outer (leftmost) derivative in the expression of F' is a covariant derivative). We will show that for any $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ there exist u, ψ, F' which satisfy the hypothesis above (u, F' even, ψ odd and ψ, F' are tangent) such that

$$
\begin{aligned}
&\forall f \in C^\infty(M),\\
&\qquad \Phi^*(f) \;=\; f(u) + \theta_1 df(u).\psi_1 + \theta_2 df(u).\psi_2\\
&\qquad\qquad\qquad + \theta_1\theta_2(df(u).F' - (\nabla df)(u)(\psi_1,\psi_2))
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

where ∇df is the covariant derivative of df (i.e. the covariant Hessian of f): $(\nabla df)(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y\rangle = \langle X, \nabla_Y(\nabla f)\rangle$. First, we remark that if (2.4) is true, then u, ψ, F' are unique. Then we can define the component fields as being u, ψ, F'; and (2.1) have a sense: it means that the morphism Φ^* is given by (2.4).

Now, to prove (2.4), let us embedd isometrically M in an Euclidiean space $\mathbb{R}^N$. Suppose first that M is defined by a implicit equation in $\mathbb{R}^N$: $f(x) = 0$, with $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-n}$ ($n = \dim M$). Then we have an isomorphism between $\{$superfields $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M\}$ and $\{$superfields $\Phi'\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{R}^N / \Phi'^*(f) = 0\}$, the isomorphism is

$$
\Phi \longmapsto \Phi' = j\circ\Phi = (\, g \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \mapsto \Phi^*(g_{|M})\,)
\tag{2.5}
$$

where $j\colon M \to \mathbb{R}^N$ is the natural inclusion. In particular, a superfield $\Phi'\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{R}^N$ is a superfield Φ from $\mathbb{R}^{2|2}$ into M if and only if $\Phi'^*(f) = f \circ \Phi' = 0$. It means that if we write $\Phi' = u + \theta_1\psi_1 + \theta_2\psi_2 + \theta_1\theta_2 F$ then we have by (2.3)

$$0 = f(u) + \theta_1 df(u).\psi_1 + \theta_2 df(u).\psi_2 + \theta_1\theta_2(df(u).F - d^2f(u)(\psi_1, \psi_2))$$

hence $f(u) = 0$, $df(u).\psi_a = 0$, $df(u).F = d^2f(u)(\psi_1,\psi_2)$ i.e.

$$\begin{cases} u \text{ takes values in } M \\ \psi_a \text{ takes values in } u^*(TM) \\ df(u).F = d^2f(u)(\psi_1,\psi_2)\ . \end{cases} \tag{2.6}$$

Thus a superfield $\Phi'\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{R}^N$ is "with values" in M if and only if $\Phi' = u + \theta_1\psi_1 + \theta_2\psi_2 + \theta_1\theta_2 F$ with (u,ψ,F) satisfying (2.6).
In the general case, there exists a family (U_α) of open sets in $\mathbb{R}^N$ such that $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$ and C^∞ functions $f_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^{N-n}$ such that $M \cap U_\alpha = f_\alpha^{-1}(0)$. Then $\Phi \mapsto j\circ\Phi$ is a isomorphism between $\{\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M\}$ and $\{\Phi'\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{R}^N/\ \Phi'^*(f_\alpha) = 0,\ \forall\alpha\}$. When we write $\Phi'^*(f_\alpha) = 0$, it means that we consider $V_\alpha = \Phi'^{-1}(U_\alpha)$ (it is the open submanifold of $\mathbb{R}^{2|2}$ associated to $u^{-1}(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$, i.e. $u^{-1}(U_\alpha)$ endowed with the restriction to $u^{-1}(U_\alpha)$ of the structural sheaf of $\mathbb{R}^{2|2}$) and that $(\Phi'_{|V_\alpha})^*(f_\alpha) = f_\alpha \circ \Phi'_{|V_\alpha} = 0$. (see [6].) Hence a superfield $\Phi'\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{R}^N$ is with values in M if and only if $\Phi' = u+\theta_1\psi_1+\theta_2\psi_2+\theta_1\theta_2 F$ with (u,ψ,F) satisfying (2.6) for each f_α. Now , we write that we have $\Phi^*(g_{|M}) = \Phi'^*(g)$, $\forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\Phi^*(g_{|M}) = g(u) + \theta_1 dg(u).\psi_1 + \theta_2 dg(u).\psi_2 + \theta_1\theta_2(dg(u).F - d^2g(u)(\psi_1,\psi_2)).$$

Let $\mathrm{pr}(x)\colon \mathbb{R}^N \to T_xM$ be the orthogonal projection on T_xM for $x \in M$, and $\mathrm{pr}^\perp(x) = Id - \mathrm{pr}(x)$; then set $F' = \mathrm{pr}(u).F$, $F^\perp = \mathrm{pr}^\perp(u).F$, so that $F = F' + F^\perp$. Let also $(e_1,\dots,e_{N-n})$ be a local moving frame of $TM^\perp$. Then we have

$$dg(u).F - d^2g(u)(\psi_1,\psi_2) = \langle\nabla(g_{|M})(u), F'\rangle + \langle\nabla g(u), F^\perp\rangle - \langle D_{\psi_1}\nabla g(u), \psi_2\rangle$$

(where $D_{\psi_1} = \iota(\psi_1)d$). Now using that ψ_1,ψ_2 are tangent to M at u

$$\begin{aligned}
\langle D_{\psi_1}\nabla g(u), \psi_2\rangle &= \langle \mathrm{pr}(u).(D_{\psi_1}\nabla g(u)), \psi_2\rangle \\
&= \langle \mathrm{pr}(u).\left[D_{\psi_1}\left(\mathrm{pr}(\,).\nabla g\right)(u) + D_{\psi_1}\left(\mathrm{pr}^\perp(\,).\nabla g\right)(u)\right], \psi_2\rangle \\
&= \langle \nabla_{\psi_1}\nabla(g_{|M}), \psi_2\rangle + \left\langle \mathrm{pr}(u).\left(D_{\psi_1}\sum_{i=1}^{N-n}\langle\nabla g, e_i\rangle e_i\right), \psi_2\right\rangle \\
&= \nabla d(g_{|M})(u)(\psi_1,\psi_2) + \sum_{i=1}^{N-n}\langle\nabla g(u), e_i\rangle\langle de_i(u).\psi_1, \psi_2\rangle
\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
dg(u).F - d^2g(u)(\psi_1,\psi_2) &= d(g_{|M})(u).F' - \nabla d(g_{|M})(u)(\psi_1,\psi_2) \\
&\quad + \langle \mathrm{pr}^\perp(u).\nabla g(u), F^\perp - \sum_{i=1}^{N-n}\langle de_i(u).\psi_1,\psi_2\rangle e_i\rangle.
\end{aligned}$$

But, as $\Phi^*(g_{|M})$ depends only on $h = g_{|M} \in C^\infty(M)$, we have

$$F^\perp = \sum_{i=1}^{N-n} \langle de_i(u).\psi_1, \psi_2\rangle e_i \tag{2.7}$$

and finally we obtain

$$\begin{aligned}
&\forall h \in C^\infty(M),\\
&\qquad \Phi^*(h) \;=\; h(u) + \theta_1 dh(u).\psi_1 + \theta_2 dh(u).\psi_2\\
&\qquad\qquad\qquad + \theta_1\theta_2(dh(u).F' - (\nabla dh)(u)(\psi_1, \psi_2))
\end{aligned} \tag{2.8}$$

which is (2.4). And we have remarked that the coefficient maps $\{u, \psi, F'\}$ are unique, so in particular they do not depend on the embedding $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. So we can define the multiplet of the component fields of Φ in the general case: it is the multiplet $\{u, \psi, F'\}$ which is defined by (2.4). It is an intrinsec definition. The isomorphism (2.5) leads to a isomorphim between the component fields

$$\{u, \psi, F'\} \longmapsto \{u, \psi, F\}.$$

The only change is in the third component field. We have $F' = \mathrm{pr}(u).F$, and the orthogonal component $F^\perp$ of F can be expressed in terms of (u, ψ) as we can see it on (2.7) or on (2.6).
In the following when we consider a manifold M with a natural embedding $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, we will identify Φ and Φ', and we will talk about the two writings of Φ: its writing in M and its writing in $\mathbb{R}^N$. But when we refer to the component fields it will be always in M: $\{u, \psi, F'\}$. We will in fact use only the writing in $\mathbb{R}^N$ because it is more convenient to do computations, for example computations of derivatives or multiplication of two superfields with values in a Lie group, and because the meaning of the writing (2.1) in $\mathbb{R}^N$ is clear and well known as well as how to use it to do computations. So we will not use the writing in M. Our aim was, first, to show that it is possible to generalize the writing (2.1) in the general case of a Riemannian manifold, then to give a definition of the component fields which did not use the derivatives of Φ (as in (2.2)), and above all to show how to deduce the component fields of Φ from its writing in $\mathbb{R}^N$: u, ψ are the same and $F' = \mathrm{pr}(u).F$.

Example 2.1 $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
A superfield $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{R}^{n+1}$ is a superfield $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to S^n$ if and only if $\Phi^*(|\cdot|^2 - 1) = (|\cdot|^2 - 1) \circ \Phi = 0$ ($|\cdot|$ being the Euclidiean norm in $\mathbb{R}^{n+1}$). It means that

$$0 = \langle \Phi, \Phi\rangle - 1 = |u|^2 - 1 + 2\theta_1\langle\psi_1, u\rangle + 2\theta_2\langle\psi_2, u\rangle + 2\theta_1\theta_2(\langle F, u\rangle - \langle\psi_1, \psi_2\rangle)$$

Thus $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{R}^{n+1}$ takes values in S^n if and only if

$$\begin{cases} u \text{ takes values in } S^n\\ \psi_a \text{ is tangent to } S^n \text{ at } u\\ \langle F, u\rangle = \langle\psi_1, \psi_2\rangle \end{cases}$$

In particular, in the case of S^n we have

$$F^\perp = \langle\psi_1, \psi_2\rangle u.$$

Derivation on $\mathbb{R}^{2|2}$.

Let us introduce the left-invariant vector fields of $\mathbb{R}^{2|2}$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial\theta_1} - \theta_1\frac{\partial}{\partial x} - \theta_2\frac{\partial}{\partial y} \\ D_2 &= \frac{\partial}{\partial\theta_2} - \theta_1\frac{\partial}{\partial y} + \theta_2\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

These vectors fields induce odd derivations acting on superfields $D_a\Phi = \iota(D_a)d\Phi$. Consider the case of superfields with values in $\mathbb{R}^N$. Write $\Phi = u+\theta_1\psi_1+\theta_2\psi_2+\theta_1\theta_2 F$ a superfield $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2}\to\mathbb{R}^N$. Then we have

$$D_1\Phi = \psi_1 - \theta_1\frac{\partial u}{\partial x} + \theta_2\left(F - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \theta_1\theta_2(\not{D}\psi)_1 \tag{2.9}$$

$$D_2\Phi = \psi_2 - \theta_1\left(\frac{\partial u}{\partial y} + F\right) + \theta_2\frac{\partial u}{\partial x} + \theta_1\theta_2(\not{D}\psi)_2 \tag{2.10}$$

where

$$\not{D}\psi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} & -\dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

Hence

$$\begin{aligned} D_1D_1\Phi &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad &,\quad D_1D_2\Phi &= -R(\Phi) - \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ D_2D_1\Phi &= R(\Phi) - \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad &,\quad D_2D_2\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} R(\Phi) &:= F + \theta_1\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right) + \theta_2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) + \theta_1\theta_2(\triangle u) \\ &:= F - \theta_1(\not{D}\psi)_1 - \theta_2(\not{D}\psi)_2 + \theta_1\theta_2(\triangle u). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Thus

$$D_1D_2 - D_2D_1 = -2R \quad,\quad [D_1,D_2] = D_1D_2 + D_2D_1 = -2\frac{\partial}{\partial y}$$

$$[D_1,D_1] = 2D_1^2 = -2\frac{\partial}{\partial x} \quad,\quad [D_2,D_2] = 2\frac{\partial}{\partial x}$$

(In all the paper, we denote by [,] the superbracket in the considered super Lie algebra).
Let us set

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}(D_1 - iD_2) = \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{D} &= \frac{1}{2}(D_1 + iD_2) = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \bar{\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} \end{aligned}$$

where $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, $\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial\theta_1} - i\frac{\partial}{\partial\theta_2})$. Setting $\psi = \psi_1 - i\psi_2$, we can write $\Phi = u + \frac{1}{2}(\theta\psi + \bar\theta\bar\psi) + \frac{i}{2}\theta\bar\theta F$, thus

$$\begin{aligned} D\Phi &= \frac{1}{2}\psi - \theta\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{i}{2}\bar\theta F - \frac{1}{2}\theta\bar\theta\frac{\partial\bar\psi}{\partial z} &(2.12)\\ \bar D\Phi &= \frac{1}{2}\bar\psi - \bar\theta\frac{\partial u}{\partial\bar z} - \frac{i}{2}\theta F + \frac{1}{2}\theta\bar\theta\frac{\partial\psi}{\partial\bar z} &(2.13)\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} D\bar D &= \frac{1}{4}(D_1 - iD_2)(D_1 + iD_2) &&= \frac{1}{4}(D_1^2 + D_2^2 + i(D_1D_2 - D_2D_1))\\ &= \frac{i}{4}(D_1D_2 - D_2D_1) &&= -\frac{i}{2}R\end{aligned}$$

hence

$$D\bar D = -\bar D D = -\frac{i}{2}R.$$

We have also $D^2 = -\frac{\partial}{\partial z}$, $\bar D^2 = -\frac{\partial}{\partial\bar z}$. Let us compute $\bar D D\Phi$:

$$\begin{aligned} \bar D D\Phi &= \bar D\left(\frac{1}{2}\psi - \theta\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{i}{2}\bar\theta F - \frac{1}{2}\theta\bar\theta\frac{\partial\bar\psi}{\partial z}\right)\\ &= \frac{i}{2}F + \frac{\theta}{2}\frac{\partial\bar\psi}{\partial z} - \frac{\bar\theta}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\bar z} - \theta\bar\theta\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\ &= \frac{i}{2}F + i\,\mathrm{Im}\left(\theta\frac{\partial\bar\psi}{\partial z}\right) - \frac{\theta\bar\theta}{4}(\triangle u). \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Let us denote by $i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2|2}$ the natural inclusion, then using (2.9)-(2.10) and (2.11) we have

$$\begin{aligned} u &= i^*\Phi\\ \psi_a &= i^*D_a\Phi\\ F &= i^*(-\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}D_aD_b\Phi)\end{aligned}$$

and we recover (2.2) for $M = \mathbb{R}^N$.
Let us return to the general case of superfields with values in M. In order to write (2.2) in M, we need a covariant derivative in the expression of F' to define the action of D_a on a section of the bundle Φ^*TM. In order to do this we use the pullback of the Levi-Civita connection. Suppose that M is isometrically embedded in $\mathbb{R}^N$. Let X be a section of Φ^*TM (for example $X = D_b\Phi$) then using the writing in $\mathbb{R}^N$ (i.e. considering that a map with values in M takes values in $\mathbb{R}^N$) we have

$$\nabla_{D_a}X = \mathrm{pr}(\Phi).D_aX\ .$$

Let us precise the expression $\mathrm{pr}(\Phi).D_aX$. The projection pr is a map from M into $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, the algebra of endomorphisms of $\mathbb{R}^N$. We consider $\mathrm{pr}\circ\Phi$ which we write $\mathrm{pr}(\Phi)$. Then considering the maps $\mathrm{pr}(\Phi)\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, $D_aX\colon \mathbb{R}^{2|2} \to$

$\mathbb{R}^N$, and $B\colon (A, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N \mapsto A.v$, we form $B(\mathrm{pr}(\Phi), D_a X)\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{R}^N$. Now, since $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ is a finite dimensional vector space we can write from (2.4):

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}(\Phi) = \Phi^*(\mathrm{pr}) \quad &= \quad \mathrm{pr}(u) + \theta_1 d\mathrm{pr}(u).\psi_1 + \theta_2 d\mathrm{pr}(u).\psi_2 \\ &\qquad + \theta_1\theta_2(d\mathrm{pr}(u).F' - (\nabla d\mathrm{pr})(u)(\psi_1, \psi_2))\end{aligned}$$

(we can not use (2.3) because pr is only defined on M). This is the writing of the superfield $\mathrm{pr} \circ \Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, so we can write

$$i^*(\nabla_{D_a} D_b \Phi) = i^*(\mathrm{pr}(\Phi).D_a D_b \Phi) = \mathrm{pr}(u).i^*(D_a D_b \Phi)$$

thus $i^*(-\frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\nabla_{D_a} D_b\Phi) = \mathrm{pr}(u).F = F'$. So we have (2.2) in the general case.

Example 2.2 $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
We have $\mathrm{pr}(x) = Id - \langle \cdot, x\rangle x$ *for* $x \in S^n$. *So for* X *a section of* $\Phi^* TS^n$, *we have*

$$\nabla_{D_a} X = D_a X - \langle D_a X, \Phi\rangle \Phi.$$

2.3 Supersymmetric Lagrangian

2.3.1 Euler-Lagrange equations

We consider the following supersymmetric Lagrangian (see [7]):

$$L = -\frac{1}{2}|du|^2 + \frac{1}{2}\langle \psi \not{D}_u \psi\rangle + \frac{1}{12}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{cd}\langle \psi_a, R(\psi_b, \psi_c)\psi_d\rangle + \frac{1}{2}|F'|^2 \tag{2.15}$$

where $\langle \psi \not{D}_u \psi\rangle = \langle \psi_1, (\not{D}_u\psi)_2\rangle - \langle \psi_2, (\not{D}_u\psi)_1\rangle$, R is the curvature of M and

$$\not{D}_u \psi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y}\end{pmatrix}$$

($\frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}$ is of course a covariant derivative). This Lagrangian can be obtained by reduction to $\mathbb{R}^{2|2}$ of the supersymmetric $\sigma-$model Lagrangian on $\mathbb{R}^{3|2}$ (see [7]). We associate to this Lagrangian the action $\mathcal{A}(\Phi) = \int L(\Phi)dxdy$. It is a functional on the multiplets of components fields $\{u, \psi, F'\}$ of superfields $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$, which is supersymmetric.

Definition 2.1 *A superfield* $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ *is superharmonic if it is a critical point of the action* $\mathcal{A}$

Theorem 2.1 *If we suppose that* $\nabla R = 0$ *in* M *(the covariant derivative of the curvature vanishes) then the Euler-Lagrange equations associated to the action* $\mathcal{A}$ *are:*

$$\boxed{\begin{aligned} \triangle u \quad &= \quad \frac{1}{2}(R(\psi_1, \psi_1) - R(\psi_2, \psi_2))\frac{\partial u}{\partial x} + R(\psi_1, \psi_2)\frac{\partial u}{\partial y} \\ \not{D}_u \psi \quad &= \quad \begin{pmatrix} R(\psi_1, \psi_2)\psi_1 \\ -R(\psi_1, \psi_2)\psi_2 \end{pmatrix} \\ F' \quad &= \quad 0 \end{aligned}} \tag{2.16}$$

Proof. We compute the variation of each term in the Lagrangian, keeping in mind that ψ_1, ψ_2 are odd (so their coordinates anticommutate $\psi_1^i\psi_2^j = -\psi_2^j\psi_1^i$):

- $\delta(\frac{1}{2}|du|^2) = \langle -\triangle u, \delta u\rangle + \mathrm{div}(\langle du, \delta u\rangle)$

- $$\begin{aligned}\delta(\frac{1}{2}\langle\psi \not{D}_u\psi\rangle) &= \frac{1}{2}(\langle\delta_\nabla\psi_1, (\not{D}_u\psi)_2\rangle + \langle\psi_1, \delta_\nabla(\not{D}_u\psi)_2\rangle \\ &\quad -\langle\delta_\nabla\psi_2, (\not{D}_u\psi)_1\rangle - \langle\psi_2, \delta_\nabla(\not{D}_u\psi)_1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ \langle\delta_\nabla\psi_1, (\not{D}_u\psi)_2\rangle - \langle\delta_\nabla\psi_2, (\not{D}_u\psi)_1\rangle \\ &\quad + \left\langle\psi_1, -\frac{\partial}{\partial x}\delta_\nabla\psi_1 - \frac{\partial}{\partial y}\delta_\nabla\psi_2\right\rangle - \left\langle\psi_2, \frac{\partial}{\partial y}\delta_\nabla\psi_1 - \frac{\partial}{\partial x}\delta_\nabla\psi_2\right\rangle \\ &\quad + \left\langle\psi_1, R\left(\delta u, -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_1 - R\left(\delta u, -\frac{\partial u}{\partial y}\right)\psi_2\right\rangle \\ &\quad - \left\langle\psi_2, R\left(\delta u, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\psi_1 + R\left(\delta u, -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\psi_2\right\rangle\Big]\end{aligned}$$

we have used $\delta_\nabla\frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\delta_\nabla\psi_k = R(\delta u, \frac{\partial u}{\partial x_i})\psi_k$. Then we write that

$$\begin{aligned}\left\langle\psi_a, \frac{\partial}{\partial x_i}\delta_\nabla\psi_b\right\rangle &= -\left\langle\frac{\partial\psi_a}{\partial x_i}, \delta_\nabla\psi_b\right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle\psi_a, \delta_\nabla\psi_b\rangle \\ &= \left\langle\delta_\nabla\psi_b, \frac{\partial\psi_a}{\partial x_i}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle\psi_a, \delta_\nabla\psi_b\rangle\end{aligned}$$

and that

$$\left\langle\psi_a, R\left(\delta u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\psi_b\right\rangle = \left\langle\ R(\psi_b, \psi_a)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \delta u\right\rangle$$

thus we obtain

$$\begin{aligned}&\delta(\frac{1}{2}\langle\psi \not{D}_u\psi\rangle) = \\ &\frac{1}{2}\left[\left\langle\delta_\nabla\psi_1, (\not{D}_u\psi)_2 + \left(-\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)\right\rangle - \left\langle\delta_\nabla\psi_2, (\not{D}_u\psi)_1 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)\right\rangle\right. \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\langle\psi_1, \delta_\nabla\psi_1\rangle + \langle\psi_2, \delta_\nabla\psi_2\rangle\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\langle\psi_1, \delta_\nabla\psi_2\rangle - \langle\psi_2, \delta_\nabla\psi_1\rangle\right) \\ &\left.-\left\langle\left(R(\psi_1, \psi_1)\frac{\partial u}{\partial x} + R(\psi_2, \psi_1)\frac{\partial u}{\partial y} + R(\psi_1, \psi_2)\frac{\partial u}{\partial y} - R(\psi_2, \psi_2)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \delta u\right\rangle\right]\end{aligned}$$

and finally

$$\begin{aligned}\delta(\frac{1}{2}\langle\psi \not{D}_u\psi\rangle) &= \langle\delta_\nabla\psi_1, (\not{D}_u\psi)_2\rangle - \langle\delta_\nabla\psi_2, (\not{D}_u\psi)_1\rangle \\ &\quad - \left\langle\left[\frac{1}{2}(R(\psi_1, \psi_1) - R(\psi_2, \psi_2))\frac{\partial u}{\partial x} + R(\psi_1, \psi_2)\frac{\partial u}{\partial y}\right], \delta u\right\rangle \\ &\qquad + \mathrm{div}(\cdots)\end{aligned}$$

$$\bullet\ \delta\left(\frac{1}{12}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{cd}\langle\psi_a, R(\psi_b,\psi_c)\psi_d\rangle\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{12}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{cd}\left(\nabla_{\delta u}R(\psi_b,\psi_c,\psi_d,\psi_a) + R(\delta\psi_a,\psi_b,\psi_c,\psi_d)\right.\\
&\quad \left. + R(\psi_a,\delta\psi_b,\psi_c,\psi_d) + R(\psi_a,\psi_b,\delta\psi_c,\psi_d) + R(\psi_a,\psi_b,\psi_c,\delta\psi_d)\right)\\
&= \frac{1}{12}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{cd}(0 + \langle\delta\psi_a, R(\psi_b,\psi_c)\psi_d\rangle + \langle\delta\psi_b, R(\psi_d,\psi_a)\psi_c\rangle\\
&\qquad + \langle\delta\psi_c, R(\psi_d,\psi_a)\psi_b\rangle + \langle\delta\psi_d, R(\psi_b,\psi_c)\psi_a\rangle\\
&\qquad\qquad \text{(using the symmetries of } R\text{)}\\
&= \frac{1}{12}(\langle\delta\psi_1, R(\psi_2,\psi_1)\psi_2 - R(\psi_2,\psi_2)\psi_1 - R(\psi_2,\psi_2)\psi_1 + R(\psi_1,\psi_2)\psi_2\\
&\quad + R(\psi_2,\psi_1)\psi_2 - R(\psi_2,\psi_2)\psi_1 - R(\psi_2,\psi_2)\psi_1 + R(\psi_1,\psi_2)\psi_2\rangle\\
&\quad + \langle\delta\psi_2, -R(\psi_1,\psi_1)\psi_2 + R(\psi_1,\psi_2)\psi_1 + R(\psi_2,\psi_1)\psi_1 - R(\psi_1,\psi_1)\psi_2\\
&\quad - R(\psi_1,\psi_1)\psi_2 + R(\psi_1,\psi_2)\psi_1 + R(\psi_2,\psi_1)\psi_1 - R(\psi_1,\psi_1)\psi_2\rangle)\\
&= \frac{1}{12}(\langle\delta\psi_1, -4R(\psi_2,\psi_2)\psi_1 + 4R(\psi_1,\psi_2)\psi_2\rangle\\
&\qquad + \langle\delta\psi_2, 4R(\psi_2,\psi_1)\psi_1 - 4R(\psi_1,\psi_1)\psi_2\rangle)\\
&= \frac{1}{3}(\langle\delta\psi_1, R(\psi_1,\psi_2)\psi_2 - R(\psi_2,\psi_2)\psi_1\rangle\\
&\qquad + \langle\delta\psi_2, R(\psi_2,\psi_1)\psi_1 - R(\psi_1,\psi_1)\psi_2\rangle).
\end{aligned}$$

Finally, by using the Bianchi identity we obtain:

$$\delta\left(\frac{1}{12}\varepsilon^{ab}\varepsilon^{cd}\langle\psi_a, R(\psi_b,\psi_c)\psi_d\rangle\right) = \langle\delta_\nabla\psi_1, R(\psi_1,\psi_2)\psi_2\rangle + \langle\delta_\nabla\psi_2, R(\psi_2,\psi_1)\psi_1\rangle.$$

$$\bullet\ \delta\left(\frac{1}{2}|F'|^2\right) = \langle F', \delta_\nabla F'\rangle$$

Hence the first variation of the Lagrangian is:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = \int \Bigg[&\left\langle \triangle u - \frac{1}{2}(R(\psi_1,\psi_1) - R(\psi_2,\psi_2))\frac{\partial u}{\partial x} - R(\psi_1,\psi_2)\frac{\partial u}{\partial y}, \delta u\right\rangle\\
&+ \langle\delta_\nabla\psi_1, (\not{D}_u\psi)_2 + R(\psi_1,\psi_2)\psi_2\rangle - \langle\delta_\nabla\psi_2, (\not{D}_u\psi)_1 - R(\psi_1,\psi_2)\psi_1\rangle\\
&+ \langle F', \delta_\nabla F'\rangle \Bigg] dxdy
\end{aligned}$$

This completes the proof of the theorem. ■

Remark 2.1 In any symmetric space, $\nabla R = 0$, so that the preceding result holds. Moreover in the general case of a Riemannian manifold M the Euler-Lagrange equations are obtained by adding to the right hand side of the first equation of (2.16) the term $-\frac{1}{2}(\nabla_{\psi_1}R)(\psi_1,\psi_2)\psi_2$.

2.3.2 The case $M = S^n$.

The curvature of S^n is given by

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,T) &= \langle X,T\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle T,Y\rangle\\
&= (\delta^{il}\delta^{jk} - \delta^{ik}\delta^{jl})X_iY_jZ_kT_l
\end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned} R(V_1,V_2)V_3 &= \langle V_2,V_3\rangle V_1 + \langle V_1,V_3\rangle V_2 \\ R(V_1,V_2)Z &= -\langle V_2,Z\rangle V_1 - \langle V_1,Z\rangle V_2 \end{aligned}$$

where V_1, V_2, V_3 are odd and Z is even.
Thus the Euler-Lagrange equations for S^n are :

$$\begin{aligned} \triangle u + |du|^2 u &= -\left\langle \psi_1, \frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle \psi_1 + \left\langle \psi_2, \frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle \psi_2 \\ &\quad - \left(\left\langle \psi_2, \frac{\partial u}{\partial y}\right\rangle \psi_1 + \left\langle \psi_1, \frac{\partial u}{\partial y}\right\rangle \psi_2\right) \\ \not{D}_u \psi &= \begin{pmatrix} \langle \psi_2,\psi_1\rangle \psi_1 \\ \langle \psi_2,\psi_1\rangle \psi_2 \end{pmatrix} \\ F &= \langle \psi_1,\psi_2\rangle u \end{aligned}$$

Let us now rewrite these equations by using the complex variable and setting $\psi = \psi_1 - i\psi_2$:

$$\boxed{\begin{aligned} 4\frac{\partial^\nabla}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= \left(\psi \left\langle \psi, \frac{\partial u}{\partial \bar z}\right\rangle + \bar\psi \left\langle \bar\psi, \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle\right) \\ \frac{\partial^\nabla \psi}{\partial \bar z} &= \frac{1}{4}\langle \bar\psi,\psi\rangle \bar\psi \\ F &= \frac{1}{2i}\langle \psi,\bar\psi\rangle u \end{aligned}} \tag{2.17}$$

Theorem 2.2 *Let* $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to S^n$ *be a superfield, then* Φ *is superharmonic if and only if*

$$\bar D D\Phi + \langle \bar D\Phi, D\Phi\rangle \Phi = 0 \tag{2.18}$$

in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Proof. According to (2.14), we have

$$\bar D D\Phi = \frac{i}{2}F + i\,\mathrm{Im}\left(\theta \frac{\partial \bar\psi}{\partial z}\right) - \theta\bar\theta \frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Moreover, by using (2.12),(2.13)

$$\begin{aligned} \langle \bar D\Phi, D\Phi\rangle \Phi = \frac{1}{4}\langle \bar\psi,\psi\rangle &+ \theta\left(\frac{1}{2}\left\langle \bar\psi, \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle - \frac{i}{4}\langle F,\psi\rangle\right) \\ &+ \bar\theta\left(-\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial u}{\partial \bar z}, \psi\right\rangle - \frac{i}{4}\langle \bar\psi, F\rangle\right) \\ &+ \theta\bar\theta\left(-\frac{1}{4}\left\langle \bar\psi, \frac{\partial \bar\psi}{\partial z}\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \bar z}, \psi\right\rangle + \frac{1}{4}|F|^2 - \left\langle \frac{\partial u}{\partial \bar z}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle\right). \end{aligned}$$

But since $\langle\psi, u\rangle = \langle\bar{\psi}, u\rangle = 0$ we have $\langle\bar{\psi}, \frac{\partial u}{\partial z}\rangle = -\langle\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}, u\rangle$ and $\langle\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}, \psi\rangle = -\langle u, \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\rangle$ so

$$\begin{aligned}\langle\bar{D}\Phi, D\Phi\rangle\Phi = \frac{1}{4}\langle\bar{\psi},\psi\rangle - \theta\left(\frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}, u\right\rangle + \frac{i}{4}\langle F,\psi\rangle\right) \\ + \bar{\theta}\left(\frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}, u\right\rangle - \frac{i}{4}\langle\bar{\psi}, F\rangle\right) \\ + \theta\bar{\theta}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}},\psi\right\rangle\right) + \frac{1}{4}|F|^2 - \left\langle\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle\right).\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}&\bar{D}D\Phi + \langle\bar{D}\Phi, D\Phi\rangle\Phi \\ &\quad= \bar{D}D\Phi + \langle\bar{D}\Phi, D\Phi\rangle\left(u + \frac{1}{2}(\theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi}) + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}F\right) \\ &\quad= \left(\frac{i}{2}F + \frac{1}{4}\langle\bar{\psi},\psi\rangle u\right) \\ &\qquad+ \frac{\theta}{2}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z} - \left\langle\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial z}, u\right\rangle u + \frac{1}{4}\langle\bar{\psi},\psi\rangle\psi - \frac{i}{2}\langle F,\psi\rangle u\right) \\ &\qquad+ \frac{\bar{\theta}}{2}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}} + \left\langle\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}, u\right\rangle u + \frac{1}{4}\langle\bar{\psi},\psi\rangle\bar{\psi} - \frac{i}{2}\langle\bar{\psi}, F\rangle u\right) \\ &\quad+ \theta\bar{\theta}\left(-\left[\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\frac{\partial u}{\partial z} + \left\langle\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle\right] + \frac{1}{4}\left[\psi\left\langle\psi, \frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\right\rangle + \bar{\psi}\left\langle\bar{\psi}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle\right]\right. \\ &\qquad\qquad+ \frac{i}{8}\langle F,\psi\rangle\bar{\psi} - \frac{i}{8}\langle\bar{\psi}, F\rangle\psi \\ &\qquad\qquad\left.+ \left[\frac{1}{4}|F|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}},\psi\right\rangle\right)\right]u + \frac{i}{8}\langle\bar{\psi},\psi\rangle F\right).\end{aligned}$$

So we see that if Φ satisfies (2.17) then this expression vanishes because $\langle F,\psi\rangle = \langle F,\bar{\psi}\rangle = 0$ and $\mathrm{Re}\left(\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}},\psi\right\rangle\right) = \mathrm{Re}\langle\bar{\psi},\psi\rangle^2 = -4|F|^2$ by using (2.17).
Conversely, if this expression vanishes then the vanishing of the first term gives us the third equation of (2.17), thus we have $\langle F,\psi\rangle = 0$ and so the vanishing of the therm in θ gives us the second equation of (2.17). Lastly the first equation of (2.17) is given by the vanishing of the term in $\theta\bar{\theta}$ and by using the second and third equation of (2.17). This completes the proof. ■

Remark 2.2 The equation (2.18) is the analogue of the equation for harmonic maps $u\colon \mathbb{R}^2 \to S^n$:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left\langle\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\rangle = 0.$$

In fact, equation (2.18) means that

$$\nabla_{\bar{D}}D\Phi = 0.$$

Indeed we have $\nabla_{\bar{D}} D\Phi = \mathrm{pr}(\Phi).\bar{D}D\Phi = \bar{D}D\Phi - \langle \bar{D}D\Phi, \Phi\rangle\Phi$ but

$$\begin{array}{rcccl} \langle \bar{D}D\Phi, \Phi\rangle\Phi & = & \bar{D}(\langle D\Phi, \Phi\rangle) & + & \langle D\Phi, \bar{D}\Phi\rangle \\ & = & 0 & - & \langle \bar{D}\Phi, D\Phi\rangle \end{array}$$

because $\langle \Phi, \Phi\rangle = 1 \Longrightarrow \langle D\Phi, \Phi\rangle = 0$. So

$$\nabla_{\bar{D}} D\Phi = \bar{D}D\Phi + \langle \bar{D}\Phi, D\Phi\rangle\Phi.$$

It is a general result that $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ (Riemannian without other hypothesis) is superharmonic if and only if $\nabla_{\bar{D}} D\Phi = 0$. To prove it we need to use the superspace formulation for the supersymmetric Lagrangian. This is what we are going to do now.

2.3.3 The superspace formulation

We consider the Lagrangian density on $\mathbb{R}^{2|2}$ (see [7]):

$$L_0 = dxdyd\theta_1 d\theta_2 \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\langle D_a\Phi, D_b\Phi\rangle.$$

Φ is a superfield $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$, and $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is the metric on M pulled back to a metric on Φ^*TM. Then, according to [7] the supersymmetric Lagrangian L, given in (2.15), is obtained by integrating over the θ variables the Lagrangian density:

$$L = \int d\theta_1 d\theta_2 \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}\langle D_a\Phi, D_b\Phi\rangle.$$

Let us compute the variation of L_0 under an arbitrary even variation $\delta\Phi$ of the superfield Φ. We will set $\nabla_{D_a} = D_a^{\nabla}$. Then, following [7], we have

$$\begin{aligned} \delta L_0 &= dxdyd\theta_1 d\theta_2 \frac{1}{4}\varepsilon^{ab}(\langle \delta_\nabla D_a\Phi, D_b\Phi\rangle + \langle D_a\Phi, \delta_\nabla D_b\Phi\rangle) \\ &= dxdyd\theta_1 d\theta_2 \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\langle \delta_\nabla D_a\Phi, D_b\Phi\rangle \\ &= dxdyd\theta_1 d\theta_2 \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\langle D_a^{\nabla}\delta_\nabla\Phi, D_b\Phi\rangle \\ &= dxdyd\theta_1 d\theta_2 \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}(D_a\langle \delta\Phi, D_b\Phi\rangle - \langle \delta\Phi, D_a^{\nabla} D_b\Phi\rangle) \\ &= d\left[\iota(D_a)\left(dxdyd\theta_1 d\theta_2 \frac{1}{2}\varepsilon^{ab}\langle D_b\Phi, \delta\Phi\rangle\right)\right] \\ &\qquad - dxdyd\theta_1 d\theta_2 \frac{1}{2}\langle \delta\Phi, (D_1^{\nabla} D_2 - D_2^{\nabla} D_1)\Phi\rangle. \end{aligned}$$

we have used at the last stage the fact that the density $dxdyd\theta_1 d\theta_2$ is invariant under D_a and the Cartan formula for the Lie derivative. So the Euler-Lagrange equation in superspace is

$$(D_1^{\nabla} D_2 - D_2^{\nabla} D_1)\Phi = 0$$

or equivalently,

$$\bar{D}^{\nabla} D\Phi = 0 \tag{2.19}$$

2.4 Lift of a superharmonic map into a symmetric space

2.4.1 The case $M = S^n$

We consider the quotient map $\pi\colon \mathrm{SO}(n+1) \to S^n$ defined by $\pi(v_1, \ldots, v_{n+1}) = v_{n+1}$. We will say that $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathrm{SO}(n+1)$ is a lift of $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to S^n$ if $\pi \circ \mathcal{F} = \Phi$. Let

$$\mathcal{F} = U + \theta_1 \Psi_1 + \theta_2 \Psi_2 + \theta_1 \theta_2 f$$

be the writing of $\mathcal{F}$ in $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ (the algebra of $(n+1)\times(n+1)-$matrices) and write that ${}^t\mathcal{F}\mathcal{F} = \mathbf{1}$ (it means that if $h := A \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAA - \mathbf{1} \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, then $\mathcal{F}^*(h) = h \circ \mathcal{F} = 0$), we get

$$\begin{array}{l} {}^tUU = Id \\ A_i = U^{-1}\Psi_i \text{ is antisymmetric: } {}^tA_i = -A_i \\ {}^tUf + {}^tfU - {}^t\Psi_1\Psi_2 + {}^t\Psi_2\Psi_1 = 0 \end{array}$$

The third equation can be rewritten, setting $B = U^{-1}f$ and using ${}^tA_i = -A_i$,

$$B + {}^tB + A_1A_2 - A_2A_1 = 0.$$

Now we consider the Maurer-Cartan form of $\mathcal{F}$:

$$\alpha = \mathcal{F}^{-1}d\mathcal{F} = {}^t\mathcal{F}d\mathcal{F}.$$

We can write

$$0 = d({}^t\mathcal{F}\mathcal{F}) = (d\,{}^t\mathcal{F})\mathcal{F} + {}^t\mathcal{F}d\mathcal{F} = {}^t\alpha + \alpha\,,$$

so α is a 1-form on $\mathbb{R}^{2|2}$ with values in $\mathrm{so}(n+1)$.
Take the exterior derivative of $d\mathcal{F} = \mathcal{F}\alpha$, we get

$$0 = d(d\mathcal{F}) = d\mathcal{F} \wedge \alpha + \mathcal{F}d\alpha = \mathcal{F}(\alpha \wedge \alpha + d\alpha).$$

Hence since $\mathcal{F}$ is invertible (${}^t\mathcal{F}\mathcal{F} = \mathbf{1}$)

$$d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0.$$

We write $\mathrm{so}(n+1) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ the Cartan decomposition of $\mathrm{so}(n+1)$. We have $\mathfrak{g}_0 = \mathrm{so}(n)$ and $\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{O} & v \\ -{}^tv & 0 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^n \right\}$. We will write $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ the decomposition of α.

We want to write the Euler-Lagrange equation (2.18) in terms of α. Setting $X = \mathcal{F}^{-1}D\Phi$ then $\alpha_1(D) = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & X \\ -{}^tX & 0 \end{pmatrix}$ and so we have

$$\begin{aligned} \bar{D}X = \bar{D}(\mathcal{F}^{-1}D\Phi) &= (\bar{D}\,{}^t\mathcal{F})\mathcal{F}X + \mathcal{F}^{-1}(\bar{D}D\Phi) \\ &= {}^t\alpha(D)X + \mathcal{F}^{-1}(\bar{D}D\Phi) \end{aligned}$$

i.e.

$$\mathcal{F}^{-1}(\bar{D}D\Phi) = \bar{D}X + \alpha(\bar{D})X. \tag{2.20}$$

Moreover

$$\mathcal{F}^{-1}(\langle \bar{D}\Phi, D\Phi\rangle\Phi) = \langle \bar{D}\Phi, D\Phi\rangle e_{n+1} = \langle \bar{X}, X\rangle e_{n+1} \tag{2.21}$$

the last equality results from the fact that $\mathcal{F}$ is a map into $\mathrm{SO}(n+1)$; $(e_i)_{1\le i\le n+1}$ is the canonical basis of $\mathbb{R}^{n+1}$. Besides we have

$$\alpha(\bar{D})X = \begin{pmatrix} \alpha_0(\bar{D}) & \bar{X} \\ -{}^t\bar{X} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0(\bar{D})X \\ -\langle \bar{X}, X\rangle \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Hence, combining (2.20), (2.21) and (2.22), we obtain that the equation (2.18) is written in terms of α:

$$\bar{D}X + \alpha_0(\bar{D})X = 0\,,$$

or equivalently

$$\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_1(D)] = 0$$

where $[\,,\,]$ is the supercommutator. Thus, we have the following:

Theorem 2.3 *Let $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to S^n$ be a superfield with lift $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to SO(n+1)$, then Φ is superharmonic if and only if the Maurer-Cartan form $\alpha = \mathcal{F}^{-1}d\mathcal{F} = \alpha_0 + \alpha_1$ satisfies*

$$\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_1(D)] = 0.$$

2.4.2 The general case

We suppose that $M = G/H$ is a Riemannian symmetric space with symmetric involution $\tau\colon G \to G$ so that $G^\tau \supset H \supset (G^\tau)_0$. Let $\pi\colon G \to M$ be the canonical projection and let $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ be the Lie algebras of G and H respectively. Write $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ the Cartan decomposition, with the commutator relations $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j \bmod 2}$.
Recall that the tangent bundle TM is canonically isomorphic to the subbundle $[\mathfrak{g}_1]$ of the trivial bundle $M \times \mathfrak{g}$, with fiber $\mathrm{Ad}g(\mathfrak{g}_1)$ over the point $x = g.H \in M$. Under this identification the Levi-Civita connection of M is just the flat differentiation in $M \times \mathfrak{g}$ followed by the projection on $[\mathfrak{g}_1]$ along $[\mathfrak{g}_0]$ (which is defined in the same way as $\mathfrak{g}_1$) (see [4] and [8]). Let $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ be a superfield with lift $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G$ so that $\pi \circ \mathcal{F} = \Phi$. Consider the Maurer-Cartan form of $\mathcal{F}$: $\alpha = \mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F}$. It is the pullback by $\mathcal{F}$ of the Maurer-Cartan form of the group G. It is a 1-form on $\mathbb{R}^{2|2}$ with values in the Lie algebra $\mathfrak{g}$. We decompose it in the form $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, following the Cartan decomposition. Then the canonical isomorphism of bundle between TM and $[\mathfrak{g}_1]$ leads to a isomorphism between $\Phi^*(TM)$ and $\Phi^*[\mathfrak{g}_1]$ and the image of $D\Phi$ by this isomorphism is $\mathrm{Ad}\mathcal{F}(\alpha_1(D))$. Thus the Euler-Lagrange equation (2.19) is written

$$[\bar{D}(\,\mathrm{Ad}\mathcal{F}(\alpha_1(D))\,)]_{\Phi^*[\mathfrak{g}_1]} = 0$$

where $[\cdot]_{\Phi^*[\mathfrak{g}_1]}$ is the projection on $[\mathfrak{g}_1]$ along $[\mathfrak{g}_0]$, pulled back by Φ to the projection on $\Phi^*[\mathfrak{g}_1]$ along $\Phi^*[\mathfrak{g}_0]$. Using the fact that

$$A\colon (g, \eta) \in G \times \mathfrak{g} \mapsto \mathrm{Ad}g(\eta)$$

satisfies

$$dA = \mathrm{Ad}g(d\eta + [g^{-1}.dg, \eta])\,,$$

where $g^{-1}.dg$ is the Maurer-Cartan form of G, this equation becomes

$$\begin{aligned} 0 &= [\,\mathrm{Ad}\mathcal{F}\left(\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha(\bar{D}), \alpha_1(D)]\right)]_{\Phi^*[\mathfrak{g}_1]} \\ &= \mathrm{Ad}\mathcal{F}[\,\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha(\bar{D}), \alpha_1(D)]\,]_1 \\ &= \mathrm{Ad}\mathcal{F}\left(\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_1(D)]\right). \end{aligned}$$

So we arrive at the same characterization as in the particular case $M = S^n$.

Theorem 2.4 *A superfield $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ with lift $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G$ is superharmonic if and only if the Maurer-Cartan form $\alpha = \mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F} = \alpha_0 + \alpha_1$ satisfies*

$$\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_1(D)] = 0.$$

2.5 The zero curvature equation

Lemma 2.1 *Each 1-form α on $\mathbb{R}^{2|2}$ can be written in the form:*

$$\alpha = d\theta\,\alpha(D) + d\bar{\theta}\,\alpha(\bar{D}) + (dz + (d\theta)\theta)\,\alpha(\tfrac{\partial}{\partial z}) + (d\bar{z} + (d\bar{\theta})\bar{\theta})\,\alpha(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}).$$

Proof. The dual basis of $\left\{D, \bar{D}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\}$ is $\left\{d\theta, d\bar{\theta}, dz + (d\theta)\theta, d\bar{z} + (d\bar{\theta})\bar{\theta}\right\}$. ■

We consider now that α is a 1-form on $\mathbb{R}^{2|2}$ with values in the Lie algebra $\mathfrak{g}$, then using the writing given by the lemma, we have

$$\begin{aligned} & d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = \\ & \quad -d\theta \wedge d\theta \left\{ D\alpha(D) + \frac{1}{2}[\alpha(D), \alpha(D)] + \alpha(\tfrac{\partial}{\partial z}) \right\} \\ & \quad -d\bar{\theta} \wedge d\bar{\theta} \left\{ \bar{D}\alpha(\bar{D}) + \frac{1}{2}[\alpha(\bar{D}), \alpha(\bar{D})] + \alpha(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}) \right\} \\ & \quad -d\theta \wedge d\bar{\theta} \left\{ \bar{D}\alpha(D) + D\alpha(\bar{D}) + [\alpha(\bar{D}), \alpha(D)] \right\} \\ & \quad +(dz + (d\theta)\theta) \wedge (d\bar{z} + (d\bar{\theta})\bar{\theta}) \left\{ \partial_z\alpha(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}) - \partial_{\bar{z}}\alpha(\tfrac{\partial}{\partial z}) + \left[\alpha(\tfrac{\partial}{\partial z}), \alpha(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}})\right] \right\} \\ & \quad +(d\theta) \wedge (dz + (d\theta)\theta) \left\{ D\alpha(\tfrac{\partial}{\partial z}) - \partial_z\alpha(D) + \left[\alpha(D), \alpha(\tfrac{\partial}{\partial z})\right] \right\} \\ & \quad + \text{conjugate expression} \\ & \quad +d\theta \wedge (d\bar{z} + (d\bar{\theta})\bar{\theta}) \left\{ D\alpha(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}) - \partial_{\bar{z}}\alpha(D) + \left[\alpha(D), \alpha(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}})\right] \right\} \\ & \quad + \text{conjugate expression.} \end{aligned} \tag{2.23}$$

In the following, we will write the terms like $\frac{1}{2}[\alpha(D), \alpha(D)]$ in the form $\alpha(D)^2$. It is justified by the fact that if we embedd $\mathfrak{g}$ in a matrices algebra or more intrinsically in its universal enveloping algebra, so that we can write $[a, b] = ab - ba$, then the supercommutator is given by

$$[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba\,,$$

p being the parity, and thus $[a, a] = 2a^2$ if a is odd.
The following theorem characterizes the 1-forms on $\mathbb{R}^{2|2}$ which are Maurer-Cartan forms.

Theorem 2.5
• *Let α be a 1-form on $\mathbb{R}^{2|2}$ with values in the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the Lie group G. Then there exists $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G$ such that $d\mathcal{F} = \mathcal{F}\alpha$ if and only if*

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$$

Moreover, if $U(z_0)$ is given then $\mathcal{F}$ is unique ($z_0 \in \mathbb{R}^2$, $U = i^*\mathcal{F}$).

• *Let A_D, $A_{\bar{D}}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ be odd maps, then the two following statements are equivalent*

$$\begin{array}{llr} (i) & \exists \mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G^{\mathbb{C}}/D\mathcal{F} = \mathcal{F}A_D,\ \bar{D}\mathcal{F} = \mathcal{F}A_{\bar{D}} & (2.24) \\ (ii) & \bar{D}A_D + DA_{\bar{D}} + [A_{\bar{D}}, A_D] = 0. & (2.25) \end{array}$$

Moreover $\mathcal{F}$ is unique if we give ourself $U(z_0)$, and $\mathcal{F}$ is with values in G if and only if $A_{\bar{D}} = \overline{A_D}$. In particular, the natural map

$$\begin{array}{rcl} I_{(D,\bar{D})}\colon \{\alpha \text{ 1-form}/d\alpha + \alpha\wedge\alpha = 0\} & \longrightarrow & \{(A_D, A_{\bar{D}}) \text{ odd which satisfy (ii)}\} \\ \alpha & \longmapsto & (\alpha(D), \alpha(\bar{D})) \end{array}$$

is a bijection.

Remark 2.3 • Suppose that $A_{\bar{D}} = \overline{A_D}$. If we embedd $\mathfrak{g}$ in a matrices algebra then (ii) means that:

$$\bar{D}A_D + DA_{\bar{D}} + A_{\bar{D}}A_D + A_D A_{\bar{D}} = 0$$

i.e.

$$\mathrm{Re}(\bar{D}A_D + A_{\bar{D}}A_D) = 0.$$

• We can see according to (2.23) that if $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha] = 0$ then $\alpha(\frac{\partial}{\partial z})$ (resp. $\alpha(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$) can be expressed in terms of $\alpha(D)$ (resp. $\alpha(\bar{D})$):

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -(\, D\alpha(D) + \alpha(D)^2\,). \tag{2.26}$$

Proof of the theorem 2.5. The first point follows from the Frobenius theorem (which holds in supermanifolds, see [6, 23, 24]), for the existence. For the uniqueness, if $\mathcal{F}$ and $\mathcal{F}'$ are solution then $d(\mathcal{F}'\mathcal{F}^{-1}) = 0$ so $\mathcal{F}'\mathcal{F}^{-1}$ is a constant $C \in G$, and $C = U'(z_0)U^{-1}(z_0)$.
For the second point, the implication (i)$\Longrightarrow$(ii) follows from (2.23) (see the term in $d\theta\wedge d\bar{\theta}$). Let us prove (ii)$\Longrightarrow$(i).
A_D and $A_{\bar{D}}$ are odd maps from $\mathbb{R}^{2|2}$ into $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}$ so let us write

$$\begin{array}{rcl} A_D & = & A_D^0 + \theta A_D^\theta + \bar{\theta}A_D^{\bar{\theta}} + \theta\bar{\theta}A_D^{\theta\bar{\theta}} \\ A_{\bar{D}} & = & A_{\bar{D}}^0 + \theta A_{\bar{D}}^\theta + \bar{\theta}A_{\bar{D}}^{\bar{\theta}} + \theta\bar{\theta}A_{\bar{D}}^{\theta\bar{\theta}} \end{array}$$

then we have

$$\begin{aligned}\bar{D}A_D &= A_D^{\bar\theta} - \theta A_D^{\theta\bar\theta} - \bar\theta\frac{\partial A_D^0}{\partial\bar z} + \theta\bar\theta\frac{\partial A_D^\theta}{\partial\bar z}\\ DA_{\bar D} &= A_{\bar D}^{\theta} + \bar\theta A_{\bar D}^{\theta\bar\theta} - \theta\frac{\partial A_{\bar D}^0}{\partial z} - \theta\bar\theta\frac{\partial A_{\bar D}^{\bar\theta}}{\partial z}.\end{aligned}$$

Thus the equation (2.25) splits into 4 equations:

$$\begin{aligned}&A_D^{\bar\theta} + A_{\bar D}^{\theta} + [A_{\bar D}^0, A_D^0] = 0\\ &-A_D^{\theta\bar\theta} - \frac{\partial A_{\bar D}^0}{\partial z} + [A_{\bar D}^\theta, A_D^0] + [A_D^\theta, A_{\bar D}^0] = 0\\ &A_{\bar D}^{\theta\bar\theta} - \frac{\partial A_D^0}{\partial \bar z} + [A_D^{\bar\theta}, A_{\bar D}^0] + [A_{\bar D}^{\bar\theta}, A_D^0] = 0\\ &\frac{\partial A_D^\theta}{\partial\bar z} - \frac{\partial A_{\bar D}^{\bar\theta}}{\partial z} + [A_D^0, A_{\bar D}^{\theta\bar\theta}] + [A_{\bar D}^0, A_D^{\theta\bar\theta}] + [A_D^\theta, A_{\bar D}^{\bar\theta}] + [A_{\bar D}^\theta, A_D^{\bar\theta}] = 0.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Now, let us embedd $\mathfrak{g}$ in a matrices algebra $\mathfrak{M}_m(\mathbb{R})$, then the Lie bracket in $\mathfrak{g}$ is given by $[a,b] = ab - ba$. Let us define $A, \underline{A}, \beta, B, \underline{B}$ by:

$$\begin{aligned}A = A_D^0 \quad , \quad \underline{A} = A_{\bar D}^0 \quad , \quad &A_D^\theta = -\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) - A^2 \quad , \quad A_{\bar D}^{\bar\theta} = -\beta(\tfrac{\partial}{\partial \bar z}) - \underline{A}^2,\\ &A_D^{\bar\theta} = B - \underline{A}A \qquad\quad , \quad A_{\bar D}^{\theta} = \underline{B} - A\underline{A}\,,\end{aligned}\tag{2.28}$$

then the four previous equations (2.27) are written:

$$B + \underline{B} = 0 \tag{2.29}$$

$$A_D^{\theta\bar\theta} = -\frac{\partial\underline{A}}{\partial z} + [-B - A\underline{A}, A] + [-\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) - A^2, \underline{A}] \tag{2.30}$$

$$A_{\bar D}^{\theta\bar\theta} = \frac{\partial A}{\partial\bar z} + [\underline{A}, B - \underline{A}A] + [A, -\beta(\tfrac{\partial}{\partial\bar z}) - \underline{A}^2] \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial z}\beta(\tfrac{\partial}{\partial\bar z}) - \frac{\partial}{\partial\bar z}\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) + \frac{\partial\underline{A}^2}{\partial z} - \frac{\partial A^2}{\partial\bar z}\\ &+\left[A, \frac{\partial A}{\partial\bar z} + [\underline{A}, B - \underline{A}A] + [A, -\beta(\tfrac{\partial}{\partial\bar z}) - \underline{A}^2]\right]\\ &+\left[\underline{A}, -\frac{\partial\underline{A}}{\partial z} + [-B - A\underline{A}, A] + [-\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) - A^2, \underline{A}]\right]\\ &+\left[-\beta(\tfrac{\partial}{\partial\bar z}) - \underline{A}^2, -\beta(\tfrac{\partial}{\partial\bar z}) - \underline{A}^2\right] + [-B - A\underline{A}, B - \underline{A}A] = 0.\end{aligned}\tag{2.32}$$

The last equation becomes after simplification

$$\frac{\partial}{\partial z}\beta(\tfrac{\partial}{\partial\bar z}) - \frac{\partial}{\partial\bar z}\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) + [\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}), \beta(\tfrac{\partial}{\partial\bar z})] = 0$$

so since β is even and with values in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (resp. in $\mathfrak{g}$ if $A_{\bar D} = \overline{A_D}$), according to (2.28) , we deduce from this that there exists $U\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G^{\mathbb{C}}$ such that $U^{-1}dU = \beta$ and U is unique if $U(z_0)$ is given, and with values in G if $A_{\bar D} = \overline{A_D}$. Then we set[1]

$$\frac{1}{2}\Psi = UA,\ \ \frac{1}{2}\underline{\Psi} = U\underline{A},\ \ f = \frac{2}{i}UB \tag{2.33}$$

[1]See remark 2.4.

and

$$\mathcal{F} = U + \frac{1}{2}(\,\theta\Psi + \bar{\theta}\underline{\Psi}\,) + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}f. \tag{2.34}$$

The result $\mathcal{F}$ is a superfield from $\mathbb{R}^{2|2}$ into $\mathfrak{M}_m(\mathbb{C})$ and according to (2.6) (with $\mathbb{R}^N = \mathfrak{M}_m(\mathbb{C})$, $M = \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, $f_\alpha = 0$, $U_\alpha = M$) since U is invertible and hence with values in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, $\mathcal{F}$ takes values in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Besides it takes values in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ if $A_{\bar{D}} = \overline{A_D}$. We compute that

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1} &= \left(U + \left[\frac{1}{2}(\,\theta\Psi + \bar{\theta}\underline{\Psi}\,) + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}f\right]\right)^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{2}(-1)^k\left[U^{-1}\left(\frac{1}{2}(\,\theta\Psi + \bar{\theta}\underline{\Psi}\,) + \frac{i}{2}\theta\bar{\theta}f\right)\right]^k U^{-1} \\
&= \left[\mathbf{1} - (\theta A + \bar{\theta}\underline{A}) - \theta\bar{\theta}B + \theta A\bar{\theta}\underline{A} + \bar{\theta}\underline{A}\theta A\right]U^{-1} \\
&= \left[\mathbf{1} - \theta A - \bar{\theta}\underline{A} - \theta\bar{\theta}(B + A\underline{A} - \underline{A}A)\right]U^{-1}
\end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}.D\mathcal{F} &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2}\Psi - \theta\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i}{2}\bar{\theta}f - \theta\bar{\theta}\frac{\partial\underline{\Psi}}{\partial z}\right) \\
&= A + \theta(-\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) - A^2) + \bar{\theta}(B - \underline{A}A) \\
&\quad + \theta\bar{\theta}\left(-\frac{\partial\underline{A}}{\partial z} - \beta(\tfrac{\partial}{\partial z})\underline{A} - (B + A\underline{A} - \underline{A}A)A + AB + \underline{A}\beta(\tfrac{\partial}{\partial z})\right) \\
&= A + \theta(-\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) - A^2) + \bar{\theta}(B - \underline{A}A) \\
&\quad + \theta\bar{\theta}\left(-\frac{\partial\underline{A}}{\partial z} + [-B - A\underline{A}, A] + [-\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) - A^2, \underline{A}]\right)
\end{aligned}$$

thus according to (2.28) and (2.30) we conclude that

$$\mathcal{F}^{-1}.D\mathcal{F} = A_D.$$

We can check in the same way that $\mathcal{F}^{-1}.\bar{D}\mathcal{F} = A_{\bar{D}}$. Moreover if we consider $\alpha = \mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F}$ the Maurer-Cartan form of $\mathcal{F}$ then $(\alpha(D), \alpha(\bar{D})) = (A_D, A_{\bar{D}})$ is with values in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, and hence it holds also for $\alpha(\frac{\partial}{\partial z}), \alpha(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$ according to (2.26). So α takes values in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. But, according to the first point of the theorem, the equation $\mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F} = \alpha$ has a unique solution if $U(z_0)$ is given, and this solution is with values in $G^{\mathbb{C}}$ since α takes values in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ and $U(z_0)$ is in $G^{\mathbb{C}}$. So $\mathcal{F}$ takes values in $G^{\mathbb{C}}$. Moreover, $\mathcal{F}$ takes values in G if $A_{\bar{D}} = \overline{A_D}$. Hence, the map $I_{(D,\bar{D})}$ is surjective. Besides it is injective by the second point of the remark 2.3: according to (2.26), α is completely determined by $(\alpha(D), \alpha(\bar{D}))$. We have proved the theorem. ■

Remark 2.4 In general, G is not embedded in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$. But since $\mathfrak{g}$ is embedded in $\mathfrak{M}_m(\mathbb{R})$, there exists a unique morphism of group, which is a immersion, $j\colon G \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, the image of which is the subgroup generated by $\exp(\mathfrak{g})$. In

other words G is an integral subgroup of $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ (and not a closed subgroup). In the demonstration we use the abuse of language consisting in identifying G and $j(G)$. For example in (2.33) and (2.34) we must use $j \circ U$ instead of U; and in the end of the demonstration, when we use the first point of theorem, we must say that there exists a unique solution with values in G, $\mathcal{F}_1$, and by the uniqueness of the solution (in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$) we have $j \circ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$.
However, in the case which interests us, G is semi-simple so it can be represented as a subgroup of $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ via the adjoint representation, and so there is no ambiguity in this case.

Remark 2.5 To our knowledge, this theorem (more precisely the implication (ii)$\Longrightarrow$(i)) has never be demonstrated in the literature. We have only found a statement without any proof, of this one, in [25].

Now we are able to prove:

Theorem 2.6 *Let $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M = G/H$ be a superfield into a symmetric space with lift $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G$ and Maurer-Cartan form $\alpha = \mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F}$, then the following statements are equivalent:*

(i) Φ is superharmonic.

(ii) Setting $\alpha(D)_\lambda = \alpha_0(D) + \lambda^{-1}\alpha_1(D)$ and $\alpha(\bar{D})_\lambda = \overline{\alpha(D)_\lambda} = \alpha_0(\bar{D}) + \lambda\alpha_1(\bar{D})$, we have

$$\bar{D}\alpha(D)_\lambda + D\alpha(\bar{D})_\lambda + [\alpha(\bar{D})_\lambda, \alpha(D)_\lambda] = 0, \qquad \forall\lambda \in S^1.$$

(iii) There exists a lift $\mathcal{F}_\lambda\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G$ such that $\mathcal{F}_\lambda^{-1}.D\mathcal{F}_\lambda = \alpha_0(D)+\lambda^{-1}\alpha_1(D)$, for all $\lambda \in S^1$.

Then, in this case, for all $\lambda \in S^1$, $\Phi_\lambda = \pi \circ \mathcal{F}_\lambda$ is superharmonic.

Proof. Let us split the equation (2.25) into the sum $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$:

$$\begin{cases} \bar{D}\alpha_0(D) + D\alpha_0(\bar{D}) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_0(D)] + [\alpha_1(\bar{D}), \alpha_1(D)] = 0 \\ \mathrm{Re}(\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_1(D)]\,) = 0 \end{cases}$$

so (ii) means that

$$\forall\lambda \in S^1, \quad \mathrm{Re}\left(\lambda^{-1}(\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_1(D)])\,\right) = 0$$

which means that

$$\bar{D}\alpha_1(D) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_1(D)] = 0$$

hence (i) $\Longleftrightarrow$ (ii), according to theorem 2.4. Moreover according to the theorem 2.5 (ii) and (iii) are equivalent. That completes the proof. ■

We know that the extended Maurer-Cartan form, α_λ given by the previous theorem is defined by $\alpha_\lambda(D) = \alpha_0(D) + \lambda^{-1}\alpha_1(D)$ and (so) $\alpha_\lambda(\bar{D}) = \alpha_0(\bar{D}) +$

$\lambda\alpha_1(\bar{D})$. However we want to know how the other coefficients of α are transformed into coefficients of α_λ. From (2.26) we deduce

$$\begin{array}{rcccl} D\alpha_0(D) & + & \alpha_0(D)^2 + \alpha_1(D)^2 & = & -\alpha_0(\frac{\partial}{\partial z}) \\ D\alpha_1(D) & + & [\alpha_0(D), \alpha_1(D)] & = & -\alpha_1(\frac{\partial}{\partial z}) \end{array}$$

hence

$$\begin{array}{rcccl} (\alpha_\lambda)_0(\frac{\partial}{\partial z}) & = & \alpha_0(\frac{\partial}{\partial z}) & + & (1-\lambda^{-2})\,\alpha_1(D)^2 \\ (\alpha_\lambda)_1(\frac{\partial}{\partial z}) & = & \lambda^{-1}\alpha_1(\frac{\partial}{\partial z}). & & \end{array}$$

Finally we have

$$\alpha_\lambda = -\lambda^{-2}\alpha_1(D)^2(dz + (d\theta)\theta) + \lambda^{-1}\alpha_1' + \alpha_0 + 2\mathrm{Re}\left(\alpha_1(D)^2(dz + (d\theta)\theta)\right) \\ + \lambda\alpha_1'' - \lambda^2\alpha_1(\bar{D})^2(d\bar{z} + (d\bar{\theta})\bar{\theta}) \quad (2.35)$$

where

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1' & = & d\theta\alpha_1(D) + (dz + (d\theta)\theta)\,\alpha_1(\frac{\partial}{\partial z}) \\ \alpha_1'' & = & d\bar{\theta}\alpha_1(\bar{D}) + (d\bar{z} + (d\bar{\theta})\bar{\theta})\,\alpha_1(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}). \end{array} \quad (2.36)$$

So, we remark that contrary to the classical case of harmonic maps $u\colon \mathbb{R}^2 \to G/H$, where the extended Maurer-Cartan form is given by $\alpha_\lambda = \lambda^{-1}\alpha_1' + \alpha_0 + \lambda\alpha_1''$ (see [8]), here in the supersymmetric case we obtain terms on λ^{-2} and λ^2, and the term on λ^0 is $\alpha_0 + 2\mathrm{Re}\left(\alpha(D)^2(dz + (d\theta)\theta)\right)$ instead of α_0. Moreover, since $\alpha_1(D)^2 = \frac{1}{2}[\alpha_1(D), \alpha_1(D)]$ takes values in $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$, we conclude that $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in S^1}$ is a 1-form on $\mathbb{R}^{2|2}$ with values in

$$\Lambda\mathfrak{g}_\tau = \{\xi\colon S^1 \to \mathfrak{g} \text{ smooth}/\xi(-\lambda) = \tau(\xi(\lambda))\}$$

(see [8] or [26] for more details for loop groups and their Lie algebras). And so the extended lift $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in S^1}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G$ leads to a map $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in S^1}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau$. As in [8], for the classical case, this yields the following characterization of superharmonic maps $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H$.

Corollary 2.1 *A map $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H$ is superharmonic if and only if there exists a map $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda\in S^1}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau$ such that $\pi\circ\mathcal{F}_1 = \Phi$ and*

$$\mathcal{F}_\lambda^{-1}.d\mathcal{F}_\lambda = -\lambda^{-2}\alpha_1(D)^2(dz + (d\theta)\theta) + \lambda^{-1}\alpha_1' + \tilde{\alpha}_0 + \lambda\alpha_1'' \\ - \lambda^2\alpha_1(\bar{D})^2(d\bar{z} + (d\bar{\theta})\bar{\theta}),$$

where $\tilde{\alpha}_0$ and α_1 are $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ resp. $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$-valued 1-forms on $\mathbb{R}^{2|2}$, and α_1', α_1'' are given by (2.36). Such a $(\mathcal{F}_\lambda)$ will be called a extended (superharmonic) lift.

Remark 2.6 Our result for the the Maurer-Cartan form (2.35) is different from the one obtained in [17, 19] or in [21]. Because in these papers, we have a decomposition $\mathfrak{g} = \oplus_{i=0}^{3}\mathfrak{g}_i$ with $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, and $\hat{\alpha}_2$, the coefficient on λ^2, is independent of $\hat{\alpha}_1$ whereas here we have $\hat{\alpha}_2 = -\hat{\alpha}_1(D)^2(dz + (d\theta)\theta)$. As we can see it in theorem 2.6, if we decide to identify all the Maurer-Cartan forms with their images by $I_{(D,\bar{D})}$, $(\alpha(D), \alpha(\bar{D}))$, then the terms on λ^2 and λ^{-2} disappear and the things are analogous to the classical case. In other words, it is possible to have the same formulation of the results as for the classical case if we choose to work on $(\alpha(D), \alpha(\bar{D}))$ instead of working on the Maurer-Cartan form α. But as we will see it in the Weierstrass representation one can not get rid completely of the terms on λ^2 and λ^{-2}. So these terms are not anecdotal and constitute an essential difference between the supersymmetric case and the classical one.

Remark 2.7 In the following, we will simply denote by $\mathcal{F}$ the extended lift $(\mathcal{F}_\lambda)\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau$, there is no ambiguity because we will always precise where $\mathcal{F}$ takes values by writing $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau$. Besides, given a superharmonic map $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H$, an extended lift $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau$ is determined only up to a gauge transformation $K\colon \mathbb{R}^{2|2} \to H$ because $\mathcal{F}H$ is also an extended lift for Φ. Then following [8], we denote by $\mathcal{SH}$ the set

$$\mathcal{SH} = \{\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H \text{ superharmonic}, \, i^*\Phi(0) = \pi(1)\}$$

and then we have a bijective correspondance between $\mathcal{SH}$ and

$$\{\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau, \text{ extended lift}, \, i^*\mathcal{F}(0) \in H\}/C^\infty(\mathbb{R}^{2|2}, H).$$

We will note $\Phi = [\mathcal{F}]$.

2.6 Weierstrass-type representation of superharmonic maps

In this section, we shall show how we can use the method of [8] to obtain every superharmonic map $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H$ from Weierstrass type data.
We recall the following (see [8, 26]):

Theorem 2.7 *Assume that G is a compact semi-simple Lie group, $\tau\colon G \to G$ a order k automorphism of G with fixed point subgroup $G^\tau = H$. Let $H^{\mathbb{C}} = H.\mathcal{B}$ be an Iwasawa decomposition for $H^{\mathbb{C}}$. Then*

(i) *Multiplication $\Lambda G_\tau \times \Lambda^+_{\mathcal{B}} G^{\mathbb{C}}_\tau \xrightarrow{\sim} \Lambda G^{\mathbb{C}}_\tau$ is a diffeomorphism onto.*

(ii) *Multiplication $\Lambda^-_* G^{\mathbb{C}}_\tau \times \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_\tau \longrightarrow \Lambda G^{\mathbb{C}}_\tau$ is a diffeomorphism onto the open and dense set $\mathcal{C} = \Lambda^-_* G^{\mathbb{C}}_\tau . \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_\tau$, called the big cell.*

The above loop groups are defined by

$$\begin{aligned}
\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda G^{\mathbb{C}}_\tau \text{ extending holomorphically in the unit disk}\} \\
\Lambda^+_{\mathcal{B}} G^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_\tau / U(0) \in \mathcal{B}\} \\
\Lambda^-_* G^{\mathbb{C}}_\tau &= \{[\lambda \mapsto U_\lambda] \in \Lambda G^{\mathbb{C}}_\tau \text{ extending holomorphically in the complement} \\
&\qquad \text{of the unit disk and } U_\infty = 0\}.
\end{aligned}$$

In analogous way one defines the corresponding Lie algebras $\Lambda\mathfrak{g}_\tau, \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau, \Lambda^-_*\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$ and $\Lambda^+_{\mathfrak{b}}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$ where $\mathfrak{b}$ is the Lie algebra of $\mathcal{B}$. Further we introduce

$$\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau := \{\xi \in \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau / \xi_\lambda = \sum_{k=-2}^{+\infty} \lambda^k \xi_k\}.$$

Definition 2.2 *We will say that a map $f\colon \mathbb{R}^{2|2} \to M$ is holomorphic if $\bar{D}f = 0$. We will say also that a 1-form μ on $\mathbb{R}^{2|2}$ is holomorphic if $\mu(\bar{D}) = 0$ and $\bar{D}\mu(D) = 0$. Moreover we will say that μ is a holomorphic potential if μ is a holomorphic 1-form on $\mathbb{R}^{2|2}$ with values in the Banach space $\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$ and if, writing $\mu = \sum_{k\geq -2} \lambda^k \mu_k$, we have $\mu_{-2}(D) = 0$. Then noticing that a holomorphic 1-form satisfies (2.25), we can say that the vector space $\mathcal{SP}$ of holomorphic potentials is*

$$\mathcal{SP} = {I_{(D,\bar{D})}}^{-1}\{(\mu(D), 0)/\mu(D)\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda_{-1,\infty}\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}} \text{ is odd, and } \bar{D}\mu(D) = 0\}.$$

Besides for a Maurer-Cartan form μ on $\mathbb{R}^{2|2}$ (in particular for a holomorphic 1-form) with values in $\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$ the condition $\mu_{-2}(D) = 0$ is equivalent to $\mu_{-2}(\frac{\partial}{\partial z}) = -(\mu_{-1}(D))^2$ according to (2.26).

As for the classical case (see [8]), we can construct superharmonic maps from holomorphic potential: if $\mu \in \mathcal{SP}$ then μ satisfies (2.25), so we can integrate it

$$g_\mu^{-1}.dg_\mu = \mu, \; i^* g(0) = 1$$

to obtain a map $g_\mu\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}$. We can decompose g_μ according to theorem 2.7

$$g_\mu = \mathcal{F}_\mu h_\mu$$

to obtain a map $\mathcal{F}_\mu\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau$ with $i^*\mathcal{F}_\mu(0) = 1$.

Theorem 2.8 *$\mathcal{F}_\mu\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau$ is an extended superharmonic lift.*

Proof. We have (forgetting the index μ)

$$\mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F} = \mathrm{Ad}h(\mu) - dh.h^{-1}.$$

But h takes values in $\Lambda_{\mathcal{B}}^+ G_\tau^{\mathbb{C}}$ so that $dh.h^{-1}$ takes values values in $\Lambda_{\mathfrak{b}}^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, hence

$$\left[\mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F}\right]_{\Lambda_*^-\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}} = [\mathrm{Ad}h(\mu)]_{\Lambda_*^-\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}}$$

is in the form

$$-\lambda^{-2}\alpha_1'(D)^2(dz + (d\theta)\theta) + \lambda^{-1}\alpha_1'$$

by using the definition 2.2 of a holomorphic potential. But according to the reality condition contained in the definition of $\Lambda\mathfrak{g}_\tau$:

$$\left[\mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F}\right]_{\Lambda_*^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}} = \overline{[\mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F}]_{\Lambda_*^-\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}}},$$

we conclude that $\mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F}$ is in the same form as in the corollary 2.1, so $\mathcal{F}$ is an extended superharmonic lift. ■

Then according to the previous theorem we have defined a map

$$\mathcal{SW}\colon \mathcal{SP} \to \mathcal{SH} : \mu \mapsto [\mathcal{F}_\mu]$$

Theorem 2.9 *The map $\mathcal{SW}\colon \mathcal{SP} \to \mathcal{SH}$ is surjective and its fibers are the orbits of the based holomorphic gauge group*

$$\mathcal{G} = \{h\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_\tau, \bar{D}h = 0,\ i^*h(0) = 1\}$$

acting on $\mathcal{SP}$ by gauge transformations:

$$h \cdot \mu = Adh(\mu) - dh.h^{-1}.$$

Proof. As in [8] it is question of solving a $\bar{D}$-problem with right hand side in the Banach Lie algebra $\Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$:

$$\bar{D}h = -(\alpha_0(\bar{D}) + \lambda\alpha_1(\bar{D})).h \tag{2.37}$$

with $i^*h(0) = 1$. Let us embedd $G^{\mathbb{C}}$ in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ (G is semi-simple). Then we set

$$h = h_0 + \theta h_\theta + \bar{\theta} h_{\bar{\theta}} + \theta\bar{\theta} h_{\theta\bar{\theta}}$$

and $C = -(\alpha_0(\bar{D}) + \lambda\alpha_1(\bar{D})) = C_0 + \theta C_\theta + \bar{\theta} C_{\bar{\theta}} + \theta\bar{\theta} C_{\theta\bar{\theta}}$. These are respectively writing in $\Lambda^+\mathfrak{M}_m(\mathbb{C})$ and in $\Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$. Then (2.37) splits into

$$\begin{aligned} h_{\bar{\theta}} &= C_0 h_0 \\ -h_{\theta\bar{\theta}} &= -C_0 h_\theta + C_\theta h_0 \\ -\frac{\partial h_0}{\partial \bar{z}} &= C_{\bar{\theta}} h_0 - C_0 h_{\bar{\theta}} \\ \frac{\partial h_\theta}{\partial \bar{z}} &= C_0 h_{\theta\bar{\theta}} + C_{\theta\bar{\theta}} h_0 + C_\theta h_{\bar{\theta}} - C_{\bar{\theta}} h_\theta. \end{aligned}$$

hence we have for h_0

$$\frac{\partial h_0}{\partial \bar{z}} = -(C_{\bar{\theta}} - C_0^2) h_0.$$

This is a $\bar{\partial}$-problem with right hand side, $C_0^2 - C_\theta$, in the Banach Lie algebra $\Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$ which can be solved (see [8]). The solutions such that $h_0(0) = 1$ are determined only up to right multiplication by elements of

$$\mathcal{G}_0 = \{h_0\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_\tau,\ h_0(0) = 1,\ \partial_{\bar{z}} h_0 = 0\}.$$

Then $h_{\bar{\theta}}$ is given by $h_{\bar{\theta}} = C_0 h_0$ so it is tangent to $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_\tau$ at h_0. $h_{\theta\bar{\theta}}$ is determined by h_0 and h_θ. So it remains to solve the equation on h_θ which can be rewritten, by expressing $h_{\theta\bar{\theta}}$ and $h_{\bar{\theta}}$ in terms of h_0 and h_θ in a first time, and by setting $h'_\theta = h_0^{-1} h_\theta$ in a second time, in the following way:

$$\frac{\partial h'_\theta}{\partial \bar{z}} = \left(\beta(\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}}) + \mathrm{Ad}h_0^{-1}(C_0^2 - C_{\bar{\theta}})\right) h'_\theta + \mathrm{Ad}h_0^{-1}\left(C_{\theta\bar{\theta}} + [C_\theta, C_0]\right)$$

where $\beta = h_0^{-1} dh_0$. Thus we obtain an equation of the form

$$\frac{\partial h'_\theta}{\partial \bar{z}} = a h'_\theta + b$$

with $a, b\colon \mathbb{R}^2 \to \Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, which can be solved. The solutions such that $h'_\theta(0) = 0$ form an affine space of which underlying vector space is

$$\left\{ h'_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}} / \frac{\partial h'_\theta}{\partial \bar{z}} = a h'_\theta,\, h'_\theta(0) = 0 \right\}.$$

So we have solved (2.37). It remains to check that h is with values in $\Lambda^+G_\tau^{\mathbb{C}}$. We know that h_0 takes values in $\Lambda^+G_\tau^{\mathbb{C}}$, h_θ, $h_{\bar{\theta}}$ are tangent to $\Lambda^+G_\tau^{\mathbb{C}}$ at h_0. It only remains to us to check that $h_{\theta\bar{\theta}}$ satisfies equation (2.7) (or (2.6)). But to do this we need to know more about the embedding $G^{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathrm{Gl}_m(\mathbb{C})$. It is possible to proceed like that (see section 2.7), but we will follow another method.
Let $\gamma = dh.h^{-1}$ be the right Maurer-Cartan form of h. Then by (2.37), we have $\gamma(\bar{D}) = C$, and C takes values in $\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, so we have to prove that $\gamma(D)$ also takes values in $\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, in order to conclude that γ takes values in $\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$ and finally that h takes values in $\Lambda^+G_\tau^{\mathbb{C}}$, according to the first point of the theorem 2.5. Now return to the demonstration of the theorem 2.5, where we put $\gamma(D) := A_D$, $\gamma(\bar{D}) := A_{\bar{D}}$. Then we can see that A_D^0, A_D^θ take values in $\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$:

$$A_D^0 = \frac{1}{2} h'_\theta,\;\; A_D^\theta = -\beta(\tfrac{\partial}{\partial z}) - (A_D^0)^2.$$

Further

$$\begin{aligned} A_D^{\theta\bar{\theta}} &= -\frac{\partial A_{\bar{D}}^0}{\partial z} + [A_{\bar{D}}^\theta, A_D^0] + [A_D^\theta, A_{\bar{D}}^0] \\ A_D^{\bar{\theta}} &= -A_{\bar{D}}^\theta - [A_{\bar{D}}^0, A_D^0] \end{aligned}$$

according to (2.27); so $A_D^{\theta\bar{\theta}}$, $A_D^{\bar{\theta}}$ are also with values in $\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$ (these equations hold for left Maurer-Cartan forms but we have of course analogous equations for right Maurer-Cartan forms). Finally we have proved that $\gamma(D)$ takes values in $\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, so we have solved (2.37) in $\Lambda^+G_\tau^{\mathbb{C}}$. This completes the proof of the surjectivity (see [8]). For the characterization of the fibres it is the same proof as in [8]. ■

Let $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H$ be superharmonic with holomorphic potential $\mu \in \mathcal{SP}$ i.e. $\Phi = [\mathcal{F}_\mu]$ where $g = \mathcal{F}_\mu h$ and $g^{-1}.dg = \mu$, $i^*g(0) = 1$. Since g is holomorphic then by using (2.13), we can see that $g_0 = i^*g\colon \mathbb{R}^2 \to \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}$ is holomorphic:

$$\partial_{\bar{z}} g_0 = 0.$$

Furthermore, as in [8], let us consider the canonical map $\mathbf{det}\colon \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}} \to Det^*$ (in [8], it is denoted by τ, see this reference for the definition of the map $\mathbf{det}$) and the set $|S| = (\mathbf{det} \circ g_0)^{-1}(0)$. Then according to [8], since g_0 is holomorphic and $\mathbf{det}\colon \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}} \to Det^*$ is holomorphic, then $|S|$ is discrete. But, once more according to [8],

$$|S| = \{z \in \mathbb{R}^2 / g_0(z) \notin \text{ big cell}\}.$$

The result of this is that if we denote by S the discrete set $|S|$ endowed with the restriction to $|S|$ of the structural sheaf of $\mathbb{R}^{2|2}$, then the restriction of

$g\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}$ to the open submanifold of $\mathbb{R}^{2|2}$, $\mathbb{R}^{2|2} \setminus S$, takes values in the big cell (according to (2.6) since the big cell is a open set of $\Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}$). Besides using the same arguments as in [8] we obtain that $S \subset \mathbb{R}^{2|2}$ depends only on the superharmonic map $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H$.

Theorem 2.10 *Let $\Phi\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H$ be superharmonic and $S \subset \mathbb{R}^{2|2}$ as defined above. There exists a $\mathfrak{g}_1^{\mathbb{C}}$-valued odd holomorphic fonction η on $\mathbb{R}^{2|2} \setminus S$ so that*

$$\Phi = [\mathcal{F}_\mu]$$

on $\mathbb{R}^{2|2} \setminus S$, where

$$\mu = {I_{(D,\bar{D})}}^{-1}(\lambda^{-1}\eta, 0) = -\lambda^{-2}(dz + (d\theta)\theta)\eta^2 + \lambda^{-1} d\theta\, \eta.$$

Proof. It is the same proof as in [8]. ■

2.7 The Weierstrass representation in terms of component fields.

Let us consider a map $f\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathbb{C}^n$, then by using (2.13), f is holomorphic if and only if $f = u + \theta\psi$ with u, ψ holomorphic on $\mathbb{R}^2$.
Further according to the definition of a holomorphic potential, we can identify $\mathcal{SP}$ with the set of odd holomorphic maps $\mu(D)\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda_{-1,\infty}\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$. Such a map is written

$$\mu(D) = \mu_D^0 + \theta\mu_D^\theta$$

where μ_D^0, μ_D^θ are holomorphic maps from $\mathbb{R}^2$ into $\Lambda_{-1,\infty}\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$, μ_D^0 being odd and μ_D^θ being even. Now, let us embedd $G^{\mathbb{C}}$ in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ so that we can work in the vector space $\mathfrak{M}_m(\mathbb{C})$. Then the holomorphic map $g\colon \mathbb{R}^{2|2} \to \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}$ which integrates

$$g^{-1}Dg = \mu(D),\ i^*g(0) = 1$$

is the holomorphic map $g = g_0 + \theta g_\theta$ such that the holomorphic maps (g_0, g_θ) are solution of

$$\begin{aligned} g_0^{-1}\frac{\partial g_0}{\partial z} &= -\left(\mu_D^\theta + (\mu_D^0)^2\right) \\ g_0^{-1}g_\theta &= \mu_D^0. \end{aligned}$$

Hence g_0 is the holomorphic map which comes from the (even) holomorphic potential $-(\mu_D^\theta + (\mu_D^0)^2)dz$ defined on $\mathbb{R}^2$ and with values in $\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$. So we can see that the terms on λ^{-2} of the potential which we got rid by working on $\mu(D)$ instead of μ, reappear now when we explicit the Weierstrass representation in terms of the component fields.
Remark also that (g_0, g_θ) are the component fields of g. Thus we see that the writing of a holomorphic map is the same for every embedding, and that the third component field is equal to zero. Hence we can write $g = g_0 + \theta g_\theta$ without

embedding $G^{\mathbb{C}}$, it is at the same time the writing of g in $\Lambda G^{\mathbb{C}}_\tau$, in $\Lambda\mathfrak{M}_m(\mathbb{C})$ and for every other embedding in a vector space $\Lambda\mathbb{C}^N$ (with $G^{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{C}^N$).
Consider, now, the decomposition $g = \mathcal{F}h$, and write

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= U + \theta_1\Psi_1 + \theta_2\Psi_2 + \theta_1\theta_2 f \\ h &= h_0 + \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \theta_1\theta_2 h_{12} \end{aligned}$$

(these are writings in $\Lambda\mathfrak{M}_m(\mathbb{C})$). Besides we have $g = g_0 + (\theta_1 + i\theta_2)g_\theta$. Hence we obtain

$$\begin{cases} g_0 = Uh_0 \\ g_\theta = \Psi_1 h_0 + Uh_1 \\ ig_\theta = \Psi_2 h_0 + Uh_2 \\ 0 = Uh_{12} + fh_0 + \Psi_2 h_1 - \Psi_1 h_2. \end{cases} \tag{2.38}$$

Thus U is obtained by decomposing g_0 which comes from a holomorphic potential, $-(\mu_D^\theta + (\mu_D^0)^2)dz$, defined on $\mathbb{R}^2$ and with values in $\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$. So $u = i^*\Phi$ is the image by the Weierstrass representation of this potential.
Then, multiplying the second and third equation of (2.38) by U^{-1} by the left and by h_0^{-1} by the right, and remembering that $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau = \Lambda\mathfrak{g}_\tau \oplus \Lambda^+_{\mathfrak{b}}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$, we obtain that

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0) &= U^{-1}\Psi_1 + h_1 h_0^{-1} \\ i\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0) &= U^{-1}\Psi_2 + h_2 h_0^{-1} \end{aligned}$$

are the decompositions of $\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0)$ resp. $i\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0)$ following the previous direct sum. In particular, we have

$$U^{-1}\Psi_1 = \left[\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0)\right]_{\Lambda\mathfrak{g}_\tau} \tag{2.39}$$

$$U^{-1}\Psi_2 = \left[i\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0)\right]_{\Lambda\mathfrak{g}_\tau}. \tag{2.40}$$

Finally, the third component fields f', h'_{12} of $\mathcal{F}$ resp. h are the orthogonal projections of f resp. h_{12} on $U.(\Lambda\mathfrak{g}_\tau)$ resp. $(\Lambda^+_{\mathfrak{b}}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau)h_0$. So by multiplying the last equation of (2.38) as above and by projecting on $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$ we obtain

$$\left[(U^{-1}\Psi_1)(h_2 h_0^{-1}) - (U^{-1}\Psi_2)(h_1 h_0^{-1})\right]_{\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau} = U^{-1}f' + h'_{12}h_0^{-1}. \tag{2.41}$$

This is once again the decomposition of the left hand side following the direct sum $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau = \Lambda\mathfrak{g}_\tau \oplus \Lambda^+_{\mathfrak{b}}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$. Let us precise the orthogonal projection

$$[\cdot]_{\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau} \colon \Lambda\mathfrak{M}_m(\mathbb{C}) \to \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau.$$

To do this it is enough to precise $[\cdot]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}} \colon \mathfrak{M}_m(\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Since $\mathfrak{g}$ is semi-simple we can consider the embedding

$$\mathrm{ad} \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{so}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{gl}(\mathfrak{g}).$$

Besides in $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$, we have the orthogonal direct sum $\mathrm{gl}(\mathfrak{g}) = \mathrm{so}(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{Sym}(\mathfrak{g})$. Then for $a, b \in \mathrm{so}(\mathfrak{g})$ the decomposition of ab is

$$ab = \frac{1}{2}[a,b] + \frac{ab + ba}{2}.$$

In particular for $a, b \in \mathfrak{g}$ this decomposition is the decomposition of ab following the direct sum $\mathrm{gl}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\perp}$. So

$$[ab]_{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2}[a,b]. \tag{2.42}$$

Now let us extend τ to $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ by taking $\mathrm{Ad}\tau$ (it is a extension because $\tau \circ \mathrm{adX} \circ \tau^{-1} = \mathrm{ad}(\tau(X))$). Then by the uniqueness of the writing $\mathcal{F} = U + \theta_1\Psi_1 + \theta_2\Psi_2 + \theta_1\theta_2 f$ in $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ and since $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g})_\tau$ is a vector subspace of $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$, which contains ΛG_τ, we conclude that the previous writing is also the writing of $\mathcal{F}$ in $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g})_\tau$. So $U^{-1}f$ takes values in $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g})_\tau$ (and in the same way $h_{12}h_0^{-1}$ is with values in $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\tau$). So, as τ commutes with the projection $[\cdot]_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ (because τ preserves the scalar product), in (2.41) it is enough to project in $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (following the direct sum $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} + \Lambda(\mathfrak{g}^{\perp})^{\mathbb{C}}$) then we automatically project in $\Lambda\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$ (following the direct sum $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\tau = \Lambda\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}} + \Lambda(\mathfrak{g}^{\perp})_\tau^{\mathbb{C}}$).
Thus returning to the left hand side of (2.41), this one is written

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[(U^{-1}\Psi_1),(h_2h_0^{-1})\right] - \frac{1}{2}\left[(U^{-1}\Psi_2),(h_1h_0^{-1})\right] = \\
\frac{1}{2}\left[\left[\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0)\right]_{\Lambda\mathfrak{g}_\tau}, \left[i\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0)\right]_{\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}}\right] \\
-\frac{1}{2}\left[\left[i\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0)\right]_{\Lambda\mathfrak{g}_\tau}, \left[\mathrm{Ad}h_0(\mu_D^0)\right]_{\Lambda^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}}\right]
\end{aligned}$$

by using (2.42) and (2.39)-(2.40). Finally $U^{-1}f'$ is obtained by projecting this expression on $\Lambda\mathfrak{g}_\tau$ following the direct sum $\Lambda\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}} = \Lambda\mathfrak{g}_\tau \oplus \Lambda_{\mathfrak{b}}^+\mathfrak{g}_\tau^{\mathbb{C}}$. If we want $U^{-1}f$ (which depends on the embedding) we can write

$$(U^{-1}\Psi_1)(h_2h_0^{-1}) - (U^{-1}\Psi_2)(h_1h_0^{-1}) = U^{-1}f + h_{12}h_0^{-1}$$

and this is the decomposition of the left hand side following the direct sum $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) = \Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g}) \oplus \Lambda^+\mathrm{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ (and this is also the decomposition following $\Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\tau = \Lambda\mathrm{gl}(\mathfrak{g})_\tau \oplus \Lambda^+\mathrm{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})_\tau$ because all terms of the equation are twisted).

Lastly, the component fields of $\Phi = \pi \circ \mathcal{F}_1$ are given by: $u = \pi(U)$,$\psi_i = d\pi(U).\Psi_i$ and $F' = 0$. For example, in the case $M = S^n$, π is just the restriction to $\mathrm{SO}(n+1)$ of the linear map which to a matrix associates its last column.

2.8 Primitive and Superprimitive maps with values in a 4-symmetric space.

2.8.1 The classical case.

Let G be a compact semi-simple Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$, $\sigma\colon G \to G$ an order four automorphism with the fixed point subgroup $G^\sigma = G_0$, and the corresponding Lie algebra $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^\sigma$. Then G/G_0 is a 4-symmetric space. The automorphism σ gives us an eigenspace decomposition of $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_4} \tilde{\mathfrak{g}}_k$$

where $\tilde{\mathfrak{g}}_k$ is the $e^{ik\pi/2}$-eigenspace of σ. We have clearly $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$, $\overline{\tilde{\mathfrak{g}}_k} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-k}$ and $[\tilde{\mathfrak{g}}_k, \tilde{\mathfrak{g}}_l] \subset \tilde{\mathfrak{g}}_{k+l}$. We define $\mathfrak{g}_2$, $\underline{\mathfrak{g}}_1$ and $\mathfrak{m}$ by

$$\tilde{\mathfrak{g}}_2 = \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}},\ \underline{\mathfrak{g}}_1^{\mathbb{C}} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_1 \text{ and } \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_4 \smallsetminus \{0\}} \tilde{\mathfrak{g}}_k,$$

it is possible because $\overline{\tilde{\mathfrak{g}}_2} = \tilde{\mathfrak{g}}_2$ and $\overline{\tilde{\mathfrak{g}}_{-1}} = \tilde{\mathfrak{g}}_1$. Let us set $\mathfrak{g}_{-1} = \tilde{\mathfrak{g}}_{-1}, \mathfrak{g}_1 = \tilde{\mathfrak{g}}_1$, $\underline{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2$. Then

$$\mathfrak{g} = \underline{\mathfrak{g}}_0 \oplus \underline{\mathfrak{g}}_1$$

is the eigenspace decomposition of the involutive automorphism $\tau = \sigma^2$. This is also a Cartan decomposition of $\mathfrak{g}$. Let $H = G^{\tau}$ then $LieH = \underline{\mathfrak{g}}_0$ and G/H is a symmetric space. We use the Killing form of $\mathfrak{g}$ to endow $N = G/G_0$ and $M = G/H$ with a G-invariant metric. For the homogeneous space $N = G/G_0$ we have the following reductive decomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{m} \tag{2.43}$$

($\mathfrak{m}$ can be written $\mathfrak{m} = \underline{\mathfrak{g}}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$) with $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. As for the symmetric space G/H, we can identify the tangent bundle TN with the subbundle $[\mathfrak{m}]$ of the trivial bundle $N \times \mathfrak{g}$, with fiber $\mathrm{Ad}g(\mathfrak{m})$ over the point $x = g.G_0 \in N$. For every $\mathrm{Ad}G_0$-invariant subspace $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, we define $[\mathfrak{l}]$ in the same way as $[\mathfrak{m}]$. Then we introduce:

Definition 2.3 *$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to G/G_0$ is primitive if $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ takes values in $[\mathfrak{g}_{-1}]$. Equivalently, it means that for any lift U of ϕ, with values in G, $U^{-1}\frac{\partial U}{\partial z}$ takes values in $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$.*

We denote by $\pi_H\colon G \to\ G/H$, $\pi_{G_0}\colon G \to G/G_0$ and $p\colon G/G_0 \to G/H$ the canonical projections. Let $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to G/G_0$, and U a lift, $\phi = \pi_{G_0} \circ U$, and $\alpha = U^{-1}.dU$. For α, we will use the following decompositions:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_{\mathfrak{m}} \tag{2.44}$$
$$\alpha = \underline{\alpha}_0 + \underline{\alpha}_1 \tag{2.45}$$
$$\alpha = \alpha_2 + \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 \tag{2.46}$$
$$\alpha_{\mathfrak{m}} = \alpha'_{\mathfrak{m}} + \alpha''_{\mathfrak{m}} \tag{2.47}$$

where $\alpha'_{\mathfrak{m}}$ is a $(1,0)$-form and $\alpha''_{\mathfrak{m}}$ its complex conjugate. Using the decomposition (2.43), we want to write the equation of harmonic maps $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to G/G_0$ in terms of the Maurer-Cartan form α, in the same way as for harmonic maps $u\colon \mathbb{R}^2 \to G/H$. Then we obtain, by using the identification $TN \simeq [\mathfrak{m}]$ (and so writing the harmonic maps equation in the form $\left[\bar{\partial}(\mathrm{Ad}U\alpha'_{\mathfrak{m}})\right]_{[\mathfrak{m}]} = 0$):

$$\bar{\partial}\alpha'_{\mathfrak{m}} + [\alpha''_0 \wedge \alpha'_{\mathfrak{m}}] + [\alpha''_{\mathfrak{m}} \wedge \alpha'_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} = 0. \tag{2.48}$$

Then if $[\alpha''_{\mathfrak{m}} \wedge \alpha'_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} = 0$, we have the same equation as for harmonic maps into a symmetric space, and in the same way, we can check (see [3]) that the extended Maurer-Cartan form

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-1}\alpha'_{\mathfrak{m}} + \alpha_0 + \lambda\alpha''_{\mathfrak{m}} \tag{2.49}$$

satisfies the zero curvature equation

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0.$$

Conversely, if the extended Maurer-Cartan form satisfies the zero curvature equation and $[\alpha''_{\mathfrak{m}} \wedge \alpha'_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} = 0$, then ϕ is harmonic (see [3]).
In particular if we suppose that ϕ is primitive then $\alpha'_{\mathfrak{m}}$ takes values in $\mathfrak{g}_{-1}$ whereas $\alpha''_{\mathfrak{m}}$ takes values in $\overline{\mathfrak{g}_{-1}} = \mathfrak{g}_1$ so $[\alpha''_{\mathfrak{m}} \wedge \alpha'_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} = 0$. Moreover let us project the Maurer-Cartan equation for α onto $\mathfrak{g}_{-1}$:

$$d\alpha'_{\mathfrak{m}} + [\alpha''_0 \wedge \alpha'_{\mathfrak{m}}] = 0$$

this is the harmonic maps equation (2.48) since $[\alpha''_{\mathfrak{m}} \wedge \alpha'_{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{m}} = 0$. So a primitive map $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to G/G_0$ is harmonic. Moreover since the extended Maurer-Cartan form satisfies the zero curvature equation, so we can find a harmonic extended lift $U_\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \Lambda G$ such that $U_\lambda^{-1}.dU_\lambda = \alpha_\lambda$. Then $\phi_\lambda = \pi_{G_0} \circ U_\lambda$ is harmonic. Besides since ϕ is primitive the decomposition

$$\alpha = \alpha'_{\mathfrak{m}} + \alpha_0 + \alpha''_{\mathfrak{m}} \tag{2.50}$$

is also the decomposition (2.46) because $\alpha'_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{g}_{-1}$ so $\alpha'_{\mathfrak{m}} = \alpha_{-1}, \alpha''_{\mathfrak{m}} = \alpha_1, \alpha_2 = 0$ then α_λ is a $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma$-valued 1-form. Furthermore, decomposition (2.44) and (2.45) are the same and so the decomposition (2.50) can be rewritten

$$\alpha = \underline{\alpha}'_1 + \underline{\alpha}_0 + \underline{\alpha}''_1$$

and then we can consider that α is the Maurer-Cartan form associated to $u = \pi_H \circ U = p \circ \phi$ with the corresponding extended Maurer-Cartan form α_λ given by (2.49). Then we conclude that $u_\lambda = p \circ \phi_\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to G/H$ is harmonic and U_λ is an extended lift for it. Moreover, α_λ is also a $\Lambda\mathfrak{g}_\tau$-valued 1-form and $(U_\lambda)\colon \mathbb{R}^2 \to \Lambda G_\tau$. So we can write that $u = \mathcal{W}(\mu) = [U]$, where $\mathcal{W}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{H}$ is the Weierstrass representation:

$$\mathcal{W}\colon \mu \in \mathcal{P} \mapsto g \text{ holomorphic} \mapsto (U,h) \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \Lambda G_\tau \times \Lambda^+_{\mathcal{B}} G^{\mathbb{C}}_\tau) \mapsto \pi_H \circ U_1 \in \mathcal{H}$$

between the holomorphic potentials (holomorphic 1-forms μ taking values in $\Lambda_{-1,\infty}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau$) and the harmonic maps (such that $u(0) = H$) (see [8]). However to obtain μ we must solve the following $\bar\partial$-problem (see [8]):

$$\bar\partial h.h^{-1} = -(\alpha''_0 + \lambda\alpha_1),$$

and since α_λ takes values in $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma$, this is a $\bar\partial$-problem with right hand side in $\Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\sigma$, so we can find a solution $h\colon \mathbb{R}^2 \to \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_\sigma$, $h(0) = 1$. Then the holomorphic map $g = Uh$ (it is holomorphic because h is solution of the $\bar\partial$-problem) takes values in $\Lambda G^{\mathbb{C}}_\sigma$ and so the potential $\mu = g^{-1}.dg$ takes values in $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\sigma$. Let us write $\mathcal{P}_\sigma$ the vector subspace of $\mathcal{P}$, of holomorphic potentials taking values in $\Lambda_{-1,\infty}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\sigma = \Lambda_{-1,\infty}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\tau \cap \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\sigma$. Then we have proved that for each primitive map $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to G/G_0$ there exists $\mu \in \mathcal{P}_\sigma$ such that $\phi = \pi_{G_0} \circ U$ where

$g = Uh$ and $g^{-1}.dg = \mu$. However, the decomposition $g = Uh$ is in the same way the decomposition

$$\Lambda G_\tau^{\mathbb{C}} \overset{\mathrm{dec}_\tau}{=} \Lambda G_\tau . \Lambda_{\mathcal{B}}^{+} G_\tau^{\mathbb{C}}$$

but also

$$\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}} \overset{\mathrm{dec}_\sigma}{=} \Lambda G_\sigma . \Lambda_{\mathcal{B}_0}^{+} G_\sigma^{\mathbb{C}}$$

because g takes values in $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ and because of the uniqueness of the decomposition. We can say that the decomposition dec_σ (considered as a diffeomorphism) is the restriction of dec_τ to $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$.
Conversely, let us prove that for any $\mu \in \mathcal{P}_\sigma$, $\phi = \pi_{G_0} \circ U_\mu$ is primitive, so that we can conclude that the map

$$\mathcal{W}_\sigma \colon \mu \in \mathcal{P}_\sigma \mapsto g \mapsto (U, h) \mapsto \phi = \pi_{G_0} \circ U_1$$

is a surjection between $\mathcal{P}_\sigma$ and the primitive maps, i.e. that it is a Weierstrass representation for primitive maps. So suppose that $\mu \in \mathcal{P}_\sigma$. Then we integrate it: $\mu = g^{-1}.dg$, $g(0) = 1$ and we decompose $g = Uh$ following dec_σ. Since it is also the decomposition following dec_τ, then we know (Weierstrass representation $\mathcal{W}$ for the symmetric space G/H) that $\alpha_\lambda = U_\lambda^{-1}.dU_\lambda$ is in the form

$$\alpha_\lambda = \lambda^{-1}\underline{\alpha}_1' + \underline{\alpha}_0 + \lambda\underline{\alpha}_1''$$

but since α_λ is with values in $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma$ (because U takes values in ΛG_σ) then $\underline{\alpha}_1' \in \mathfrak{g}_{-1}$, $\underline{\alpha}_0 \in \mathfrak{g}_0$, $\underline{\alpha}_1'' \in \mathfrak{g}_1$ so $\phi_\lambda = \pi_{G_0} \circ U_\lambda$ is primitive.
Hence we have proved the following:

Theorem 2.11 *We have a Weierstrass representation for primitive maps, more precisely the map:*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{W}_\sigma \colon \mathcal{P}_\sigma & \xrightarrow{\mathrm{int}} & \mathrm{H}(\mathbb{C}, \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\mathrm{dec}_\sigma} & C^\infty(\mathbb{R}^2, \Lambda G_\sigma \times \Lambda_{\mathcal{B}_0}^{+} G_\sigma^{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \mathrm{Prim}(G/G_0) \\ \mu & \longmapsto & g & \longmapsto & (U, h) & \longmapsto & \phi = \pi_{G_0} \circ U_1 \end{array}$$

is surjective. $\mathrm{H}(\mathbb{C}, \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}})$ *is the set of holomorphic maps from* $\mathbb{C}$ *to* $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$*, and* $\mathrm{Prim}(G/G_0)$ *is the set of primitive maps* $\phi \colon \mathbb{R}^2 \to G/G_0$ *so that* $\phi(0) = G_0$*. We can say that* $\mathcal{W}_\sigma$ *is the restriction of the Weierstrass representation* $\mathcal{W}$ *for harmonic maps into* G/H*, to the subspace* $\mathcal{P}_\sigma$*. More precisely, we have the following commutatif diagram:*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{\mathrm{int}} & \mathrm{H}(\mathbb{C}, \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\mathrm{dec}_\tau} & C^\infty(\mathbb{R}^2, \Lambda G_\tau \times \Lambda_{\mathcal{B}}^{+} G_\tau^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{[\pi_H]} & \mathcal{H} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle [p]} \\ \mathcal{P}_\sigma & \xrightarrow{\mathrm{int}} & \mathrm{H}(\mathbb{C}, \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\mathrm{dec}_\sigma} & C^\infty(\mathbb{R}^2, \Lambda G_\sigma \times \Lambda_{\mathcal{B}_0}^{+} G_\sigma^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{[\pi_{G_0}]} & \mathrm{Prim}(G/G_0) \end{array}$$

where $[\pi_H](U, h) = \pi_H \circ U_1$*,* $[p](\phi) = p \circ \phi$*. In particular the image by* $\mathcal{W}$ *of* $\mathcal{P}_\sigma$ *is the subset of* $\mathcal{H}$ *:* $\{u = p \circ \phi,\ \phi \text{ primitive}\}$*.*

2.8.2 The supersymmetric case.

Definition 2.4 *A superfield $\tilde{\Phi}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/G_0$ is primitive if $D\tilde{\Phi}$ takes values in $[\mathfrak{g}_{-1}]$. Equivalently, it means that for any lift $\mathcal{F}$ of $\tilde{\Phi}$, with values in G, $U^{-1}.DU$ takes values in $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$.*

By proceeding as above and using the methods we developed in the previous sections to work in superspace, we obtain the following two theorems:

Theorem 2.12 *Let $\tilde{\Phi}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/G_0$ a superfield, $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G$ a lift, and $\alpha = \mathcal{F}^{-1}.d\mathcal{F}$ its Maurer-Cartan form. Then $\tilde{\Phi}$ is superharmonic if and only if*

$$\bar{D}\alpha_{\mathfrak{m}}(D) + [\alpha_0(\bar{D}), \alpha_{\mathfrak{m}}(D)] + [\alpha_{\mathfrak{m}}(\bar{D}), \alpha_{\mathfrak{m}}(D)]_{\mathfrak{m}} = 0.$$

Further if $[\alpha_{\mathfrak{m}}(\bar{D}), \alpha_{\mathfrak{m}}(D)]_{\mathfrak{m}} = 0$, then the pair $(\alpha_0(D) + \lambda^{-1}\alpha_{\mathfrak{m}}(D), \alpha_0(\bar{D}) + \lambda\alpha_{\mathfrak{m}}(\bar{D}))$ satisfies the zero curvature equation (2.25), and so yields by $I^{-1}_{(D,\bar{D})}$ to an extended Maurer-Cartan form α_λ. In particular, if $\tilde{\Phi}$ is superprimitive then $[\alpha_{\mathfrak{m}}(\bar{D}), \alpha_{\mathfrak{m}}(D)]_{\mathfrak{m}} = 0$, $\tilde{\Phi}$ is superharmonic and $\Phi = p \circ \tilde{\Phi}\colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/H$ is superharmonic.

Theorem 2.13 *We have a Weierstrass representation for superprimitive maps, more precisely with obvious notations (according to the foregoing):*

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathcal{SW}_\sigma\colon \mathcal{SP}_\sigma & \xrightarrow{\text{int}} & \mathrm{H}(\mathbb{R}^{2|2}, \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\text{dec}_\sigma} & C^\infty(\mathbb{R}^{2|2}, \Lambda G_\sigma \times \Lambda^+_{\mathcal{B}_0} G_\sigma^{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \mathrm{SPrim}(G/G_0) \\
\mu & \longmapsto & g & \longmapsto & (\mathcal{F}, h) & \longmapsto & \tilde{\Phi} = \pi_{G_0} \circ \mathcal{F}_1
\end{array}$$

is surjective. We have the following commutatif diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{SP} & \xrightarrow{\text{int}} & \mathrm{H}(\mathbb{R}^{2|2}, \Lambda G_\tau^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\text{dec}_\tau} & C^\infty(\mathbb{R}^{2|2}, \Lambda G_\tau \times \Lambda^+_{\mathcal{B}} G_\tau^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{[\pi_H]} & \mathcal{SH} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle [p]} \\
\mathcal{SP}_\sigma & \xrightarrow{\text{int}} & \mathrm{H}(\mathbb{R}^{2|2}, \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\text{dec}_\sigma} & C^\infty(\mathbb{R}^{2|2}, \Lambda G_\sigma \times \Lambda^+_{\mathcal{B}_0} G_\sigma^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{[\pi_{G_0}]} & \mathrm{SPrim}(G/G_0)
\end{array}$$

In particular the image by $\mathcal{SW}$ of $\mathcal{SP}_\sigma$ is the subset of $\mathcal{SH}$:

$$\{\Phi = p \circ \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi} \text{ primitive}\}.$$

Here, the holomorphic potentials of $\mathcal{SP}_\sigma$ take values in $\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}}$ and the corresponding extended Maurer-Cartan form is in the form (2.35) but with values in $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma \subset \Lambda\mathfrak{g}_\tau$ (for example, in (2.35) $\alpha_1(D)$ takes values in $\mathfrak{g}_{-1}$ so $\alpha_1(D)^2$ takes values in $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$).

2.9 The second elliptic integrable system associated to a 4-symmetric space

We give us the same ingredients and notations as in the begining of section 2.8.1. Then let us recall what is a second elliptic system according to C.L. Terng (see [29]).

Definition 2.5 *The second (G,σ)-system is the equation for $(u_0,u_1,u_2)\colon \mathbb{C}\to \oplus_{j=0}^2 \tilde{\mathfrak{g}}_{-j}$,*

$$\begin{cases} \partial_{\bar z}u_2+[\bar u_0,u_2]=0\\ \partial_{\bar z}u_1+[\bar u_0,u_1]+[\bar u_1,u_2]=0\\ -\partial_{\bar z}u_0+\partial_z\bar u_0+[u_0,\bar u_0]+[u_1,\bar u_1]+[u_2,\bar u_2]=0.\end{cases} \tag{2.51}$$

It is equivalent to say that the 1-form

$$\alpha_\lambda=\sum_{i=0}^{2}\lambda^{-i}u_i dz+\lambda^i\bar u_i d\bar z=\lambda^{-2}\alpha_2'+\lambda^{-1}\alpha_1'+\alpha_0+\lambda\alpha_1''+\lambda^2\alpha_2'' \tag{2.52}$$

satisfies the zero curvature equation:

$$d\alpha_\lambda+\frac{1}{2}[\alpha_\lambda\wedge\alpha_\lambda]=0.$$

The first example of second elliptic system was given by F. Hélein and P. Romon (see [17, 19]): they showed that the equations for Hamiltonian stationary surfaces in 4-dimension Hermitian symmetric spaces are the second elliptic system associated to certain 4-symmetric spaces. Then we generalized the case of $\mathbb{R}^4=\mathbb{H}$ (see [17]) in the space $\mathbb{R}^8=\mathbb{O}$ (with $G=Spin(7)\ltimes\mathbb{O}$, $\sigma=int_{(-L_e,0)}$, where int_g is the conjugaison by g, $e\in S(\mathrm{Im}\mathbb{O})$, and L_e is the left multiplication by e, see [21]): there exists a family $(\mathcal{S}_I)$ of sets of surfaces in $\mathbb{O}$, indexed by $I\subsetneqq\{1,\dots,7\}$, called the ρ-harmonic ω_I-isotropic surfaces, such that: $\mathcal{S}_I\subset\mathcal{S}_J$ if $J\subset I$, and of which equations are the second elliptic (G,σ)-system (see [21]). We think that our result can be generalized to $\mathbb{OP}^1,\mathbb{OP}^2$ or more simply to $\mathbb{HP}^1$.

For any second elliptic system associated to a 4-symmetric space, we can use the method of [8] to construct a Weierstrass representation, defined on $\mathcal{P}_\sigma^2$, the vector space of $\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}}$-valued holomorphic 1-forms on $\mathbb{C}$, (see [17, 19]):

$$\mathcal{W}_\sigma^2\colon \mathcal{P}_\sigma^2\xrightarrow{\text{int}}\mathrm{H}(\mathbb{C},\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}})\xrightarrow{\mathrm{dec}_\sigma}C^\infty(\mathbb{R}^2,\Lambda G_\sigma\times\Lambda^+_{\mathcal{B}_0}G_\sigma^{\mathbb{C}})\xrightarrow{[\pi]}\mathcal{S}$$

where $\mathcal{S}$ is the set of geometric maps of which equations correspond to the second elliptic system, and $[\pi](U,h)=\pi\circ U_1$. π can be π_{G_0} as well as π_H. For example in the case of Hamiltonian stationary surfaces in a Hermitian symmetric space G/H, we must take π_H (see [19]). Moreover if we consider the solution $u=\mathcal{W}_\sigma^2(\mu)=\pi_H\circ U_1$, then in this case $\phi=\pi_{G_0}\circ U_1$ can be identified with the map $(u,e^{i\beta})$ where β is a Lagrangian angle function of u ($G/G_0=G\times_{G_0}H$ is the principal $U(1)$-bundle $U(G/H)/SU(2)$). If we restrict $\mathcal{W}_\sigma^2$ to $\mathcal{P}_\sigma$, we obtain $\mathcal{W}_\sigma$, the Weierstrass repesentation of primitive maps, of which image is the set of special Lagrangian surface of G/H (by identifying u and $\phi=(u,1)$).

Now, we are going to give another example of second elliptic system in the even part of a super Lie algebra. According to the previous section, a superprimitive map $\tilde\Phi\colon\mathbb{R}^{2|2}\to G/G_0$ leads to a extended lift $\mathcal{F}\colon\mathbb{R}^{2|2}\to\Lambda G_\sigma$. Let us consider $U=i^*\mathcal{F}\colon\mathbb{R}^2\to\Lambda G_\sigma$, then according to section 2.7, U is obtained from a (even) holomorphic potential, $-(\mu_D^\theta+(\mu_D^0)^2)dz$, which is defined in $\mathbb{R}^2$

and with values in $\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}}$. This is a $\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}}$-valued holomorphic 1-form on $\mathbb{R}^2$. In concrete terms, if we consider that we work with the category of supermanifolds (sets of parameters B, see the introduction) $\{\mathbb{R}^{0|L}, L \in \mathbb{N}\}$, i.e. that we work with G^∞ functions defined on $B_L^{2|2}$ (see [27]) then this is a $(\Lambda_{-2,\infty}\mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}} \otimes B_L^0)$-valued holomorphic 1-form on $\mathbb{R}^2$. In other words U comes from a holomorphic potential which is in $\mathcal{P}_\sigma^2 \otimes B_L^0$. So $u = \pi_H \circ U_1 \colon \mathbb{R}^2 \to G/H$ as well as $\phi = \pi_{G_0} \circ U_1 \colon \mathbb{R}^2 \to G/G_0$ correspond to a solution of the second elliptic system (2.51) in the Lie algebra $\mathfrak{g} \otimes B_L^0$ (i.e. u_i takes values in $\tilde{\mathfrak{g}}_{-i} \otimes B_L^0$). However that does not give us a supersymmetric interpretation of all second elliptic systems (2.51) in the Lie algebra $\mathfrak{g}$ in terms of superprimitive maps. Indeed, first the coefficient on λ^{-2} of the previous potential does not have body term: it is the square of a odd element so it does not have terms on $1 = \eta^{\varnothing}$ (we set $B_L = \mathbb{R}[\eta_1, \dots \eta_L]$). Second, this coefficient takes values in $[\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{-1}]$ which can be $\subsetneqq \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$.

In conclusion, the restrictions to $\mathbb{R}^2$ of superprimitive maps $\tilde{\Phi} \colon \mathbb{R}^{2|2} \to G/G_0$ correspond to particular solutions of the second elliptic system (2.51) in the Lie algebra $\mathfrak{g} \otimes B_L^0$: those which come by $\mathcal{W}_\sigma^2$, from potentials in the form $\hat{\mu} = -(\mu_D^\theta + (\mu_D^0)^2)dz$, with $\mu \in \mathcal{SP}_\sigma$.

Besides for each 4-symmetric space (G, σ), this gives us a geometrical interpretation of certain solutions of the second elliptic system (2.51) in $\mathfrak{g} \otimes B_L^0$. Hence this confirms our conjecture that there exist geometrical problems in $\mathbb{HP}^1$,$\mathbb{OP}^1$ and $\mathbb{OP}^2$, analogous to the ρ-harmonic surfaces in $\mathbb{O}$ ([21]), of which equations are respectively the second elliptic problems in the 4-symmetric spaces $\mathbb{HP}^1 = Sp(2)/(Sp(1) \times Sp(1))$, $\mathbb{OP}^1 = Spin(9)/Spin(8)$ and $\mathbb{OP}^2 = F_4/Spin(9)$.

Let us give a example by considering the case of the 4-symmetric space SU(3)/SU(2) (used by Hélein and Romon for their study of Hamiltonian stationary surfaces in $\mathbb{CP}^2 = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1))$).

Theorem 2.14 *Consider the case of the 4-symmetric space* SU(3)/SU(2) *($H = \mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(1))$). Then an immersion $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{CP}^2(\mathbb{R}^{0|L})$ from $\mathbb{R}^2$ to the G^∞ manifold over B_L of $\mathbb{R}^{0|L}$-points of $\mathbb{CP}^2$ (morphisms from $\mathbb{R}^{0|L}$ to $\mathbb{CP}^2$) is the restriction to $\mathbb{R}^2$ of a superprimitive map*

$$\tilde{\Phi} \colon \mathbb{R}^{2|2} \to \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2)$$

(i.e. $u = p \circ \tilde{\Phi} \circ i$) if and only if u is a Lagrangian conformal immersion of which Lagrangian angle β satisfies

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = ab \tag{2.53}$$

where $a, b \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}[\eta_1, \dots, \eta_L]$ are odd holomorphic functions. In this case, we have $\phi = i^*\tilde{\Phi} = (u, e^{i\beta})$.

Proof. Suppose that u is the restriction to $\mathbb{R}^2$ of a superprimitive map $\tilde{\Phi}$, then u is the image by the Weierstrass representation $\mathcal{W}_\sigma^2$ of the holomorphic potential

$\hat{\mu} = -(\mu_D^\theta + (\mu_D^0)^2)dz$ with $\mu \in \mathcal{SP}_\sigma$. Thus u is a Lagrangian conformal immersion. Let us set

$$\mu_D = \lambda^{-1}(A^0 + \theta A^\theta) + \sum_{k\geq 0} \lambda^k \left((\mu_D^0)_k + \theta(\mu_D^\theta)_k \right),$$

where A^0, A^θ takes values in $\mathfrak{g}_{-1}$, then

$$\hat{\mu} = -\lambda^{-2}(A^0)^2 dz + \sum_{k\geq -1} \lambda^k \hat{\mu}_k.$$

Next, since A^0 is in $\mathfrak{g}_{-1} \otimes B_L^1$, we can write (see [19])

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ -ib & ia & 0 \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

thus

$$\hat{\mu}_{-2} = iab \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} dz = 3abY dz$$

where $Y = \frac{i}{3} Diag(1, 1, -2)$. If we denote by $\hat{\alpha}_\lambda = U^{-1}dU = i^*\alpha_\lambda$ the extended Maurer-Cartan form associated to u, then u is an immersion if and only if $\hat{\alpha}_{-1}$ does not vanish. Besides since $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}Y$, one can easily see that

$$\hat{\alpha}_2' = \hat{\mu}_{-2}$$

(because $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_2] = 0$). Moreover we have (see [19])

$$\frac{d\beta}{2} Y = \hat{\alpha}_2$$

so finally

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = 6ab.$$

Conversely, suppose that u is a Lagrangian conformal immersion which satisfies (2.53). Then we have $\triangle\beta = 0$ since a, b are holomorphic by hypothesis. So we can write $u = \mathcal{W}_\sigma^2(\hat{\mu})$ with $\hat{\mu} \in \mathcal{P}_\sigma^2 \otimes B_L^0$. Let us take for $\hat{\mu}$ a meromorphic potential (see [19])

$$\hat{\mu} = \lambda^2 \hat{\mu}_{-2} + \lambda^{-1}\hat{\mu}_{-1}.$$

Then according to (2.53) we have $\hat{\mu}_{-2} = -(A^0)^2 dz$ with A^0 in the same form as in (2.54). Thus if we set $\mu_D = \lambda^{-1}(A^0 - \theta\hat{\mu}_{-1}(\frac{\partial}{\partial z}))$, then μ_D is an odd meromorphic map from $\mathbb{R}^{2|2}$ to $\Lambda_{-1,\infty}\mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}}$ and we have $\hat{\mu} = -(\mu_D^\theta + (\mu_D^0)^2)dz$ so $u = p \circ \tilde{\Phi} \circ i$ with $\tilde{\Phi} = \mathcal{SW}_\sigma(I_{(D,\bar{D})}^{-1}(\mu_D, 0))$. ■

Bibliographie

[1] F.A. Berezin, *Introduction to Superanalysis*, D.Reidel Publishing Company 1987.

[2] A.L. Besse, *Einstein Manifolds*, Spinger-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[3] F.E. Burstall, F. Pedit, *Harmonic maps via Adler-Kostant-Symes Theory*, Harmonic maps and integrable systems, A.P. Fordy, J.C. Wood (Eds.), Vieweg (1994), 221-272.

[4] F.E. Burstall and J.H. Rawnsley, *Twistor theory for Riemannian Symmetric Spaces with applications to harmonic maps of Riemann Surfaces* Lect. Notes in Math., vol. 1424, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.

[5] P. Deligne, P. Etingof, D. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, J. Morgan, D. Morrison, E. Witten, ed. ,*Quantum Fields and Strings : a Course for Mathematicians*, Volume 1, AMS, 1999

[6] P. Deligne and J. Morgan, *Notes on Supersymmetry*, in [5].

[7] P. Deligne, D. Freed, *Supersolutions*, in [5].

[8] J. Dorfmeister, F. Pedit and H.-Y. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. in Analysis and Geometry, 6(4) (1998), p. 633-668.

[9] Fall Problem 2 posed by E. Witten, solutions by P. Deligne, D. Freed, in *Homework*, in [5].

[10] A.P. Fordy, J.C. Wood, *Harmonic maps and integrable systems*, Aspects of Mathematics E23, Vieweg (1994).

[11] D. Freed, *Five lectures on supersymmetry*, AMS, 1999.

[12] R. Harvey, *Spinors and Calibrations*, Acadamic Press Inc., 1990.

[13] R. Harvey and H. B. Lawson, *Calibrated geometries*, Acta Mathematica, 148 (1982), p. 47-157.

[14] F. Hélein, *Applications harmoniques, lois de conservations et repères mobiles*, Diderot éditeur, Paris 1996 ; or *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Cambridge University Press 2002.

[15] F. Hélein, *Constant mean Curvature Surfaces, Harmonic maps and Integrable Systems*, Lecture in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser 2001.

[16] F. Hélein, *Willmore immersions and loop groops*, J. Diff. Geometry, 50(2) (1998), p.331-338.

[17] F. Hélein and P. Romon, *Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in* $\mathbb{C}^2$, Comm. in Analysis and Geometry Vol. 10, N. 1, 2002, p. 79-126.

[18] F. Hélein and P. Romon, *Weierstrass representation of lagrangian surfaces in four dimensional spaces using spinors and quaternions*, Comment. Math. Helv., 75 (2000), p. 668-680.

[19] F. Hélein and P. Romon, *Hamiltonian stationnary Lagrangian surfaces in Hermitian symmetric spaces*, in *Differential Geometry and Integrable Systems*, Martin Guest, Reiko Miyaoka, and Yoshihiro Ohnita, Editors-AMS, 2002.

[20] S. Helgason, *Differential geometry, Lie group and symmetric spaces*, Academic Press, Inc., 1978.

[21] I. Khemar, *Surfaces isotropes de* $\mathbb{O}$ *et systèmes intégrables*, preprint arXiv :math.DG/0511258, ou chapitre 1 de cette thèse.

[22] I. Khemar, *Supersymmetric Harmonic Maps into Symmetric Spaces*, preprint , ou chapitre 2 de cette thèse.

[23] D.A. Leites, *Introduction to the theory of Supermanifolds*, Russian Math. Surveys, **35** no. 1 (1980), 1-64.

[24] Y.I. Manin, *Gauge field theory and Complex Geometry*, Gundlehren der Mathematischen Wissenshaften 289, Springer-Verlag, 1988.

[25] F. O'Dea Supersymmetric Harmonic Maps into Lie Groups, preprint arXiv :hep-th/0112091.

[26] A. Pressley and G. Segal, *Loop groops*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[27] A. Rogers, *A global theory of supermanifolds*, J.Math.Phys. **21** (6), 1980, 1352-65 ; *Super Lie groups : global topology and local structure*, J.Math.Phys. **22**(5), 1981, 939-45.

[28] G. Segal and G. Wilson, *Loop Groops and Equations of KdV Type*, Pub. Math. IHES, **61** (1985), 5-65.

[29] C.L. Terng, *Geometries and Symmetries of Soliton Equations and Integrable Elliptic Equations*, preprint arXiv :math.DG/0212372.

[30] C.L. Terng, K. Uhlenbeck, *Integrable Systems*, J. Differential Geometry Surveys, Vol. 4, International Press, Cambridge, MA, 1999.

[31] K. Uhlenbeck, *Harmonic maps into Lie groups*, Journal of Differential Geometry, **30** (1989),1-50.