Université de Paris
École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386)
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche (UMR 7586)

Régulateurs supérieurs et valeurs spéciales de la fonction L de degré huit de $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$

Par Alex Panetta

Thèse de Doctorat de Mathématiques

Dirigée par Francesco Lemma

Présentée et soutenue publiquement le 4 mai 2021

Devant un jury composé de :

M. François Brunault	MCU HDR	ENS Lyon	Examinateur
M. Francesco Lemma	MCU HDR	Université de Paris	Directeur
Mme Ariane Mézard	PU	Sorbonne Université	Examinatrice
M. Jacques Tilouine	PU	Université Sorbonne Paris Nord	Rapporteur

Au vu des rapports de :

M. Jacques Tilouine	Université Sorbonne Paris Nord
Mme Sarah Zerbes	University College London

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
(CNRS – UMR 7586)
Université de Paris (Paris 7)
Bâtiment Sophie Germain - Boîte Courrier 7012
8, place Aurélie Nemours
75205 Paris Cedex 13
FRANCE

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre
Boîte Courrier 290
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
FRANCE

Résumé

En vue des conjectures de Beilinson, nous relions l'image d'un élément par le régulateur de Beilinson dans la cohomologie de Deligne de $S^K \times Y^L$, où S^K et Y^L sont une variété de Siegel et une courbe modulaire respectivement, à la valeur spéciale en 1 de la fonction L de degré huit de $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$ associée à un produit de représentations automorphes admissibles cuspidales génériques de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ respectivement, dans le cas où celle-ci est entière.

Après avoir rappelé les définitions des objets que nous utiliserons dans cette thèse, notamment la cohomologie motivique, le régulateur de Beilinson et les variétés de Shimura, nous construisons dans le chapitre 3 une forme différentielle à partir de certaines représentations automorphes dont nous préciserons les propriétés. Cette forme différentielle sera au coeur de la construction dans le chapitre 5 d'une forme linéaire définie sur un certain espace de cohomologie de Deligne, laquelle nous permettra dans le chapitre 6 d'accoupler le régulateur de Beilinson avec la forme différentielle précédemment construite. Enfin, notre travail trouvera sa conclusion dans le chapitre 7 où nous mettrons en évidence le lien entre le régulateur de Beilinson et la fonction L sus-mentionnée.

Mots-clés : Fonctions L, valeurs spéciales, régulateurs, conjectures de Beilinson, cohomologie motivique, cohomologie de Deligne, fonctorialité, formes automorphes, représentations automorphes, variétés de Shimura.

Abstract

In order to prove Beilinson conjectures, we link the image of an element through the Beilinson regulator in the Deligne cohomology of $S^K \times Y^L$, where S^K and Y^L are a Siegel variety and a modular curve respectively, to the special value in 1 of the degree-eight $L-$function of $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$ associated to a product of automorphic generic admissible cuspidal representations of $\mathrm{GSp}(4)$ and $\mathrm{GL}(2)$ respectively, in the case where this function is entire.

After defining the objects we will use in this thesis, namely motivic cohomology, Beilinson regulator and Shimura varieties, we construct in chapter 3 a differential form based on certain automorphic representations, whose proprieties will be precised. This differential form will have a key role in constructing in chapter 5 a linear form defined on the Deligne cohomology, which will be useful in chapter 6 in order to pairing the Beilinson regulator with the differential form previously introduced. Finally, our work will conclude in chapter 7 where we will enlighten the link between the Beilinson regulator and our $L-$function.

Keywords : L-functions, special values, regulators, Beilinson conjectures, motivic cohomology, Deligne cohomology, functoriality, automorphic forms, automorphic representations, Shimura varieties.

Remerciements

Le temps est maintenant venu de remercier tous ceux qui, par leur aide mathématique, leur amitié, ou leur simple présence bienfaitrice au cours de ces quatre dernières années, m'ont permis de mener à bien l'écriture de cette thèse. J'essaierai d'être le plus exhaustif possible, mais je prie d'avance toute personne qui viendrait à trouver scandaleuse l'absence de son nom de m'en excuser.

En premier lieu, je remercie chaleureusement mon directeur de thèse, Francesco Lemma, pour son soutien sans faille depuis l'écriture de mon mémoire de M2, fin 2016. Je te suis infiniment reconnaissant pour ta patience et ta générosité qui m'ont permis de découvrir le sujet passionnant dont il est question ici. Tu as su garder ma motivation intacte, même lorsque je pensais être dans une impasse, et je suis toujours sorti de nos conversations avec de nouvelles idées (essentiellement dues à ta culture mathématique impressionnante !). Je garderai un excellent souvenir de ces quatre années à travailler à tes côtés, mais aussi à discuter de musique par exemple. Merci pour tout, je n'aurais pas pu rêver d'un meilleur directeur.

Je voudrais également remercier ceux qui me font l'honneur de faire partie de mon jury. Merci à Jacques Tilouine et Sarah Zerbes d'avoir écrit un rapport sur ma thèse et de m'avoir permis de grandement améliorer ce texte par leurs remarques. Merci également à François Brunault. Un merci tout particulier à Ariane Mézard dont je garde un souvenir nostalgique de ses leçons d'algèbre dans le cadre de ma préparation à l'agrégation. Son implication et son dynamisme sans équivalent m'inspirent pour ma propre pédagogie. Merci également de m'avoir soutenu auprès de la FSMP afin d'obtenir une bourse pour mon M2. Sa présence dans mon jury m'honore et me donne l'impression que, quelque part, la boucle est bouclée.

Je remercie justement la FSMP pour l'accompagnement scientifique et financier durant mon master, qui m'ont permis d'étudier sereinement. Merci également à Hussein Mourtada, mon tuteur, pour l'aide et l'amitié qu'il me témoigne depuis des années. Plus généralement, merci à l'ensemble de l'IMJ-PRG pour m'avoir permis de travailler dans les meilleures conditions pendant 4 ans (et pour la chance incroyable qui m'a été donnée d'assister à l'ICM 2018 à Rio !). Je remercie particulièrement Stéphane Vassout et Georges Skandalis pour la confiance qu'ils m'ont témoignée pendant et après nos missions d'enseignement. Merci également à la SMF et son président, Fabien Durand, pour le soutien déterminant qui m'a permis d'obtenir un détachement auprès de l'Education Nationale.

Merci à la grande famille des doctorants : si je suis venu tous les jours au bureau avec le sourire, c'est grâce à eux. La liste est longue, que ceux qui seraient oubliés me pardonnent. Tout d'abord,

toute ma gratitude va à mes cobureaux qui m'ont supporté durant ces longues années : Corentin, Siarhei, Yanbo, Leonardo, Gabriel, Alexandre et Juan. Encore désolé pour toutes les fois où j'ai mis ma musique trop forte. Ensuite, merci aux "anciens" qui m'ont accueilli et m'ont permis de me sentir à l'aise dès le premier jour : Sacha, le maître des clés (et surtout compère de rock progressif, que ce soit sur scène avec la Kohalition, ou dans la fosse avec sa bien-aimée Sinéad), Théophile, crooner au Highlander à ses heures perdues, Reda, avec qui j'ai pu réaliser un de mes rêves : voir un match de foot au Brésil, Elie G, aka Mordred, Léa, Antoine, Nicolas, Alexandre V., Omar, Juan-Pablo, Andreas, Grégoire, Rahman... Mes "contemporains" : Charles, véritable encyclopédie vivante de Devin Townsend, Kevin, qui m'a appris à jouer aux échecs, Mario, qui m'a permis de gagner aux échecs, Colin Marie (merci pour votre hospitalité à Lyon !), Alice, Tancrède, Matthieu, Wille, Yann, Maud, Jérémie, Amandine, Alexandre L., Farid, futur créateur de jeux de société à succès, Xavier, Parisa, Mahsa, Camille, Dorian, Mathieu, Pierre, Amandine, Jules, Marina, Ratko, Mingkun, Elie C... Et le meilleur pour la fin, l'inénarrable Jérôme Barberon et ses histoires toutes plus dingues les unes que les autres, à qui je dois la découverte de la Ventre Mou's League.

Merci à David pour l'invitation au séminaire des doctorants à Grenoble.

Je remercie également Thierry Barrière pour ses cours de volley inoubliables. C'était un plaisir de retraverser l'histoire du foot en sa compagnie !

Cette soutenance marque pour moi la fin d'une époque. En effet, une fois cette thèse terminée, je me consacrerai pleinement à l'enseignement. Je me dois donc dorénavant de remercier tous ceux qui ont fait grandir en moi cette vocation.

Tout d'abord, je n'oublie pas mes professeurs de collège et de lycée, notamment José Tauziède, qui a été un modèle de rigueur pour la suite de mes études. J'espère mettre autant de passion dans mes cours que vous ! Merci à Jean Cornillon et Johann Wattiez de m'avoir permis de coller dans leurs classes et de m'avoir beaucoup appris au travers de discussions toujours enrichissantes et bienveillantes. Merci également à Patrick Polo pour avoir fait naître en moi le goût de la géométrie (ce n'était pas gagné !) et de m'avoir montré ce que c'était que d'écrire un cours.

Un énorme merci aux membres de l'association Math.en.JEANS qui m'ont accueilli à bras ouverts durant leurs universités d'été. Ces semaines entières passées à discuter et à faire des maths avec des professeurs du secondaire ont grandement contribué à mon envie de poursuivre dans cette voie.

Merci à mes élèves avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à enseigner !

Je voudrais maintenant remercier mes amis, qui m'ont si bien entouré durant ces quatre ans. Merci à Jérémy et Maroussia d'être les meilleurs amis dont je puisse rêver. Merci aux vieux potes : Guillaume et Claire, Robin, Mallorie et Milo, Marine, Aurélie et Tom, Sébastien, Mikado... Merci à Caroline de m'emmener voir des films improbables et des concerts inavouables. Merci aux amis du lycée, le bien-nommé groupe «Twerkage» : Maëva (merci du fond du coeur d'être aussi présente depuis bientôt 15 ans), Fanélie (désolé de te décevoir chaque été pour la rando), William (camarade supporter de Ferrari même dans les pires moments), Camille (les matins de grève étaient bien plus

amusants avec toi !), Oonna, Axel, Claire, Olivia, Laura, Arnaud, Sonny, Paul. . . Merci pour tout ! Merci à Apolline, Nicolas et Pierre pour les soirées Picaroonia. Merci à Martin, jamais à court de perles d'élèves.

Merci aux psychomotriciens pour les soirées au Highlander et les séjours aux quatre coins de la France : Gaëlle, Gwendal, Marion, Pierre, Mariette, Tiphaine, Fanny...

Merci à Simon pour les bonnes soirées foot et les mauvais pronostics. Merci à Antoine de m'avoir si gentiment accueilli dans son lycée.

Je remercie tous ceux qui ont participé à des aventures musicales avec moi durant ces quatre dernières années, au premier rang desquels, mon groupe : Fear Of The Clippers. J'ai du mal à croire que ce délire né au lycée figure aujourd'hui dans ma thèse. Merci à Guillaume, David, Estiva, Jérémy et Hadrien pour être les mecs les plus fous que je connaisse. Il n'y a pas de mot pour décrire le bonheur de répéter avec vous. Ces longues soirées à vos côtés sont des moments que je chérirai toujours.

Merci à toute la Kohalition pour ce concert inoubliable. Merci à ma chère Eva, ce projet de reprises de Fiona Apple aura fait naître une solide amitié. Merci à Thomas pour être le meilleur hôte de l'univers ! Merci à tous les musicieux talenteux rencontrés au gré des multiples scènes ouvertes, particulièrement à Nodo, pour ce qui reste à ce jour mon dernier concert. J'espère pouvoir remonter sur scène avec vous tous d'ici peu.

Merci enfin à ceux qui me sont le plus cher.

Merci à Camille dont l'éternel sourire et la tendresse se cachent derrière chaque mot de cette thèse.

Enfin, merci à toute ma famille, mes grands-parents, mes tantes, oncles, cousins (sans oublier Peluche !). Merci à ma sœur, Céline, d'avoir cru en moi et de m'avoir soutenu depuis toujours. Je suis heureux d'apporter ma modeste contribution à la liste des heureux événements de 2021, sans commune mesure bien évidemment avec ceux que Maxime et toi nous réservez. Merci à Billie d'être la plus mignonne des petites nièces.

Mes derniers remerciements iront à mes parents. On n'a pas toujours l'occasion de prendre le temps de leur dire « Merci ». Je saisis donc cette opportunité pour leur signifier à quel point je leur suis redevable. Merci pour les valeurs que vous m'avez inculquées, la culture que vous m'avez transmise, et l'amour que vous m'avez porté. Tout ça, c'est grâce à vous.

Break the code, find the formula.
Lose control, in euphoria.
1985 - Haken (Affinity, 2016).

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Fonctions L

L'objet au centre de ce travail est la fonction L de degré huit de $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$. Les fonctions L sont au coeur de la théorie des nombres, puisqu'elles relient des objets différents tels que les caractères de Dirichlet, les représentations automorphes, les formes modulaires, les courbes elliptiques ou encore les motifs.

Concrètement, les fonctions L sont obtenues comme prolongements méromorphes de séries de Dirichlet, c'est à dire des fonctions de la variable complexe s de la forme

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ désigne une suite de nombres complexes.

1.1.1 Fonction zêta de Riemann

La plus "simple" fonction L à laquelle on peut penser (en dehors de la fonction nulle) est la fonction L associée à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ constante égale à 1. On obtient ainsi la célèbre fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Cette série converge si $\mathrm{Re}(s) > 1$ et il est clair qu'elle admet un pôle en $s = 1$. De plus, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, elle admet le produit eulérien suivant :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right)$$

où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Riemann a démontré en 1859 qu'elle vérifiait l'équation fonctionnelle suivante, valable pour tout nombre complexe s différent de 0 et de 1 :

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

où Γ désigne la fonction définie pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$ par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$ et prolongée analytiquement en une fonction méromorphe sur l'ensemble du plan complexe excepté en les entiers négatifs qui sont des pôles simples. Ces deux propriétés, l'existence d'un produit eulérien et d'une équation fonctionnelle, sont fondamentales et se retrouvent dans chacune des fonctions L sus-mentionnées.

Les valeurs de la fonction ζ font l'objet d'un intérêt particulier chez les mathématiciens : citons notamment la formule bien connue $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ ou encore le théorème d'Apéry qui a démontré en 1978 que le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel. Mais plus que quelques valeurs particulières, ce sont les zéros de la fonction ζ qui fascinent les mathématiciens. Si l'équation fonctionnelle fournit aisément les *zéros triviaux* que sont les entiers pairs strictement négatifs (grâce au facteur $\sin\left(\dfrac{\pi s}{2}\right)$), l'hypothèse de Riemann qui formule que les autres zéros (dont on sait qu'ils sont en nombre infini) se situent tous sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{1}{2}$ reste à l'heure actuelle à l'état de conjecture.

En fait, la fonction ζ de Riemann appartient à une classe plus large de fonctions L : les fonctions L attachées à des corps de nombres. En effet, soit K un corps de nombres. Dedekind a défini pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$ la fonction

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathscr{I} \neq 0} \frac{1}{N(\mathscr{I})^s}$$

où la somme porte sur tous les idéaux non nuls de l'anneau des entiers $\mathscr{O}_K$ et où $N(\mathscr{I}) = |\mathscr{O}_K/\mathscr{I}|$. Dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, puisque $\mathscr{O}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}$, on retrouve $\zeta_{\mathbb{Q}} = \zeta$.

Enfin, pour tout caractère de Dirichlet χ, on associe la fonction $L(s,\chi)$ définie pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$ par

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

et qui admet le produit eulérien

$$L(s,\chi) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(\frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}} \right).$$

1.1.2 Formes modulaires et courbes elliptiques

On appelle forme modulaire pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ de poids $k \in \mathbb{Z}$ pair toute fonction holomorphe définie sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ et vérifiant l'équation

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Toute forme modulaire f admet alors un développement de Fourier de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)e^{2\pi i n z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)q^n$$

où les $a_n(f)$ sont des nombres complexes et $q = e^{2\pi i z}$. On dit que f est cuspidale si $a_0(f) = 0$.

On lui associe naturellement la fonction L

$$L(s, f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(f)}{n^s}.$$

Si on pose $\Lambda(s, f) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s, f)$, alors $\Lambda(s, f)$ se prolonge en une fonction analytique si f est cuspidale ; sinon elle a des pôles simples en $s = 0$ et $s = k$. Dans tous les cas, elle vérifie l'équation fonctionnelle ([Bum], Proposition 1.3.6)

$$\Lambda(s, f) = (-1)^{k/2}\Lambda(k - s, f).$$

Historiquement, l'idée d'un produit eulérien pour une fonction L associée à une forme modulaire est due à Ramanujan, avec la forme modulaire cuspidale de poids 12

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n$$

où τ est appelée la fonction de Ramanujan. Ce dernier a conjecturé en 1916 que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tau(n) q^n = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s})^{-1}.$$

Cette formule a ensuite été prouvée par Mordell en 1917.

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ de conducteur N. Alors E a bonne réduction modulo p pour tous les entiers premiers p ne divisant pas N, et dans ce cas, on pose $a_p(E) = p + 1 - |\tilde{E}(\mathbb{F}_p)|$ où $\tilde{E}(\mathbb{F}_p)$ est la courbe elliptique obtenue sur $\mathbb{F}_p$ à partir de E après réduction modulo p. Si p divise N mais que p^2 ne divise pas N, on pose $a_p(E) = \pm 1$ selon que E a une réduction modulo p scindée ou non. Si p^2 divise N, on pose simplement $a_p(E) = 1$.

On définit alors la fonction L associée à E par le produit eulérien

$$L(s, E) = \prod_{p \in \mathscr{P}} L_p(s, E)^{-1}$$

où

$$L_p(s, E) = \begin{cases} (1 - a_p(E)p^{-s} + p^{1-2s}) & \text{si } p \text{ ne divise pas } N, \\ (1 - a_p(E)p^{-s}) & \text{si } p \text{ divise } N \text{ et } p^2 \text{ ne divise pas } N, \\ a_p(E) & \text{si } p^2 \text{ divise } N. \end{cases}$$

Le théorème de modularité, prouvé dans le cas des courbes elliptiques semi-stables par Wiles ([Wiles]), puis prouvé dans les cas restants par Breuil, Conrad, Diamond et Taylor ([BCDT]), nous fournit alors les premiers exemples d'objets mathématiques a priori différents reliés via leurs fonctions L.

Théorème 1.1.1. *Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ de conducteur N. Alors il existe une forme modulaire f de poids 2 pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(N)$ telle que pour tout nombre premier p, on ait $a_p(E) = a_p(f)$. En particulier, on a*

$$L(s, f) = L(s, E).$$

1.1.3 Formes automorphes et motifs

La fonction L étudiée dans ce travail est construite à partir de représentations automorphes cuspidales π et σ de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ respectivement. La construction de la fonction L en question sera détaillée au chapitre 7.

En général, on part d'un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{Q}$, et on appelle ${}^LG$ le groupe dual de Langlands de G ([Lan70]). (Rappelons que d'après [ASha], le dual de Langlands de GSp(4) est $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{C})$.)

On considère une repésentation automorphe $\pi = \otimes'_v \pi_v$ de $G(\mathbb{A})$ et une représentation $\rho : {}^LG \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}, n)$. On note V l'ensemble fini des places où π est ramifiée. On définit alors le produit eulérien

$$L_V(s,\pi,\rho) = \prod_{v\notin V} L(s,\pi_v,\rho)$$

où les facteurs locaux $L(s,\pi_v,\rho)$ seront définis en section 7.1 ci-dessous. Ce produit est absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s)$ suffisamment grande.

Un des points clés de ce travail sera d'utiliser le transfert fonctoriel de GSp(4) à GL(4) démontré par [ASha] (Section 7.3 ci-dessous). Une fois encore, il s'agira de trouver une représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}(4,\mathbb{A})$ ayant même fonction L qu'une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$ donnée.

La fonction L qui nous intéresse ici peut également être construite de façon motivique, à partir du motif $M = H^4_!(S^K \times Y^L, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ de poids -2 qui sera défini en section 4.2 où S^K et Y^L sont respectivement une variété de Shimura associée à $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$ et une courbe modulaire associée à $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$. Rappelons la construction de la fonction L associée à un motif ([Nek], section 1.4).

Soit M un motif pur sur $\mathbb{Q}$. Soit $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$, soit l un nombre premier et soit M_l la réalisation l-adique de M. C'est une représentation continue du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans un $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout nombre premier p, soit $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$ et fixons un plongement $i_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$, d'où une inclusion $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \to \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Soit $I_p \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ le groupe d'inertie et soit $\varphi_p \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)/I_p$ le Frobenius géométrique. Comme précédemment, on note V l'ensemble fini des places non-archimédiennes $p \neq l$ de $\mathbb{Q}$ pour lesquelles M a mauvaise réduction. Pour tout $v \notin V$, le groupe I_v agit trivialement sur M_l, ce qui permet de définir le polynôme $P_v(X,M) = \det(1 - \varphi_v X | M_l)$. Ce polynôme ne dépend pas du choix du plongement i_v. De plus, Deligne a démontré que $P_v(X,M)$ est un polynôme à coefficients entiers indépendants de l ([Del74]). On définit alors les facteurs locaux de la fonction L associée à M par

$$L_v(s,M) = P_v(p^{-s},M)$$

puis

$$L_V(s,M) = \prod_{v\notin V} L_v(s,M).$$

D'après la conjecture de monodromie ([Nek], 1.4), pour toute place $v \notin S$, les pôles de $L_v(M,s)$ se trouvent sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{w}{2}$ où w est le poids du motif M. D'après [Del74], le produit eulérien est absolument convergent pour $\mathrm{Re}(s) > 1 + \dfrac{w}{2}$.

Par ailleurs, on conjecture qu'on peut définir des facteurs locaux $L_v(s,M)$ pour toute place non-archimédienne $v \in S$ dont les pôles ont partie réelle $\mathrm{Re}(s) = \dfrac{w-k}{2}$ pour $k \in \mathbb{N}$ ([Jan87]).

Enfin, on définit le facteur local archimédien $L_\infty(s, M)$ par un produit de facteurs gamma du type $\Gamma_\mathbb{R}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, et $\Gamma_\mathbb{C}(s) = \Gamma_\mathbb{R}(s)\Gamma_\mathbb{R}(s+1)$ dépendant uniquement de la structure de Hodge de la réalisation de Betti de M ([Nek], Section 1.4). On notera alors $L(s, M) = L_\infty(s, M) \prod_{v \in V} L_v(s, M) L_V(s, M)$.

Lorsque π est une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ dont la composante archimédienne est une série discrète, il existe des représentations galoisiennes l-adiques de dimension 4 dont la fonction L coïncide avec la fonction $L(s, \pi, \rho)$ associée à la représentation $\rho : \mathrm{GSp}(4, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$. Ceci est une conséquence de [Lau], [Tay] et [Wei05].

1.2 Régulateurs

Nous définirons en section 2.2 le régulateur de Beilinson

$$r_\mathscr{D} : H^5_\mathscr{M}(X, \mathbb{Q}(3)) \to H^5_\mathscr{D}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))$$

où X est une variété quasi-projective lisse sur $\mathbb{Q}$. Le but de ce travail est de construire un élément non nul $\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f) \in H^5_\mathscr{M}(X, \mathbb{Q}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ tel que

$$\Psi_\Omega(r_\mathscr{D}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) \sim c L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$$

où Ψ_Ω sera une forme linéaire sur $H^5_\mathscr{D}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ définie en section 5.2 ; le symbole $\sim$ désigne une égalité à un nombre algébrique non nul près et c sera une constante complexe non-nulle explicitée dans le Théorème 7.2.7.

Ce type de relation doit nous faire penser à une situation plus classique.

Soit K un corps de nombres. On note r_1 le nombre de plongements réels de K, r_2 la moitié des plongements complexes non réels de K et $\mathscr{O}_K^\times$ les unités de K. Rappelons le théorème des unités de Dirichlet : on a un isomorphisme

$$\mathscr{O}_K^\times \simeq \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1} \times \mu(K)$$

où $\mu(K)$ est le groupe fini des racines de l'unité de K. L'image du régulateur de Dirichlet

$$r_K : \mathscr{O}_K^\times \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{r_1+r_2}$$

est un réseau dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$, dont on note $r(K)$ le volume d'un domaine fondamental. On a alors l'égalité

$$\lim_{s \to 0} s^{-(r_1+r_2-1)} \zeta_K(s) = -\frac{h(K) r(K)}{w(K)}$$

où $h(K)$ est le nombre de classes de K et $w(K)$ le nombre de racines de l'unités dans K. Cette formule, intimement liée au théorème des unités de Dirichlet, dit que le prolongement méromorphe de la fonction ζ_K admet en $s = 0$ un zéro d'ordre $r_1 + r_2 - 1$, autrement dit le rang du groupe des unités $\mathscr{O}_K^\times$, et la valeur spéciale de ζ_K en 0, i.e. son premier terme non nul dans son développement de Taylor, est égal à

$$\zeta_K^*(0) = -\frac{h(K) r(K)}{w(K)},$$

ou encore avec les notations précédentes

$$r(K) \sim \zeta_K^*(0).$$

Nous serons amenés à démontrer que la fonction $s \mapsto L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$ ne s'annule pas en $s = 1$ de telle sorte que la valeur spéciale $L_V^*(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$ soit $L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$. Ainsi, de façon similaire au régulateur de Dirichlet, nous relierons la valeur spéciale d'une fonction L à un certain régulateur. Ce lien est encore mieux précisé par les conjectures de Beilinson ([Bei]).

1.3 Conjectures de Beilinson

Précisons qu'il existe des conjectures de Beilinson pour tout motif de poids $w \leq -1$ exposées dans [Nek]. Puisque le motif que nous considérerons ici, à savoir $M = H_!^4(S^K \times Y^L, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$, est de poids -2, nous nous contenterons de les présenter dans ce seul cas. De plus, via l'équation fonctionnelle des fonctions L motiviques ([Nek],1.5), les valeurs $L(0, M)$ et $L(1, \hat{M})$, où $\hat{M}$ est le motif dual de M, sont liées. Nous énoncerons donc les conjectures de Beilinson en 0.

Soit M un motif pur sur $\mathbb{Q}$ de poids $w = -2$. On considère sa fonction L définie en section 1 de la présente introduction. On sait que cette fonction est convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{w}{2} = 0$. Ainsi, 0 se situe au bord du demi-plan de convergence. Dans ce cas, la fonction L peut avoir un pôle en 0 dont l'ordre est prédit par la conjecture de Tate ([Tat]).

Conjecture. *(Tate) On a*

$$-\operatorname{ord}_{s=0} L(s, M) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{MM}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), M(-1)))$$

où $\mathrm{MM}_{\mathbb{Q}}$ *désigne la catégorie abélienne* $\mathbb{Q}$*-linéaire conjecturale des motifs mixtes sur* $\mathbb{Q}$ *à coefficients dans* $\mathbb{Q}$ *([Jan94], Conjecture 4.1).*

Soit M_{dR} et M_B les réalisations de de Rham et de Betti de M respectivement. La réalisation de de Rham M_{dR} est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie muni de la filtration de Hodge F^n. Notons M_B^+ le sous-espace de M_B constitué des vecteurs invariants par l'application induite par la conjugaison complexe. On montrera (Lemme 4.2.9 ci-dessous) que le morphisme $I_{\infty,M} : M_B^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to (M_{dR}/F^0) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ induit par l'isomorphisme de comparaison $M_B \otimes \mathbb{C} \simeq M_{dR} \otimes \mathbb{C}$ est injectif. D'après ([Nek], Section 2.5), on a $\operatorname{coker}(I_{\infty,M}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B)$ où $\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}$ désigne la catégorie abélienne des $\mathbb{R}$-structures de Hodge mixtes réelles. Les $\mathbb{Q}$-structures M_B^+ et M_{dR}/F^0 de la source et du but de $I_{\infty,M}$ induisent naturellement une $\mathbb{Q}$-structure $\mathscr{D}(M)$ sur $\det_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B))$ (où $\det(V)$ désigne la puissance extérieure non-nulle maximale de V). Soit $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MM}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Q}(0), M) \subset \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MM}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), M)$ les classes d'extensions définies sur $\mathbb{Z}$ ([Nek], Section 4.5). La réalisation de Betti induit un morphisme ([Nek], Section 4.2)

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MM}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Q}(0), M) \xrightarrow{r_b} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B).$$

De même, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B(-1)) \simeq \ker(I_{\infty,M(-1)})$$

où $M_B(-1) = M_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(-1)$.

Par ailleurs, la réalisation de Betti induit un morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{MM}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), M(-1)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B(-1))$$

et en composant avec le morphsime $\ker(I_{\infty,M(-1)}) \to \operatorname{coker}(I_{\infty,M})$, on en déduit un morphisme

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{MM}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), M(-1)) \xrightarrow{c_b} \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B).$$

Nous pouvons désormais énoncer les conjectures de Beilinson dans le cas où $w = -2$.

Conjecture. *(Beilinson)*
i) On a $(\operatorname{Im} r_b \oplus \operatorname{Im} c_b) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B)$.
ii) On a $\dim_{\mathbb{Q}} \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MM}_{\mathbb{Z}}}(\mathbb{Q}(0), M) = \operatorname{ord}_{s=-1} L(s, M)$.
iii) On a $\det_{\mathbb{Q}}(\operatorname{Im} r_b \oplus \operatorname{Im} c_b) = L^*(0, M)\mathscr{D}(M)$ *où* $L^*(0, M)$ *désigne la valeur spéciale de la fonction* L *en* 0.

Définition 1.3.1. *On dit que* 0 *est une valeur critique pour* M *si* $\operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B)$ *est nul.*

Dans notre travail, 0 ne sera pas une valeur critique du motif M (Proposition 5.1.4 ci-dessous) et $\operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B)$ sera isomorphe à $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$.

Dans le cas où la fonction L a un pôle en 0, le premier alinéa des conjectures de Beilinson devient $\operatorname{Im} c_b \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B)$. Francesco Lemma ayant traité le cas où la fonction L admet un pôle en $s = 0$ ([Lem20]), nous nous intéresserons ici au cas où la fonction L n'a pas de pôle en $s = 0$.

Dans ce cas, on a conjecturalement

$$\operatorname{Im} r_b \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B).$$

Notre motif M_B étant un motif de Chow, i.e. que la relation d'équivalence sur les cycles utilisée pour le définir est l'équivalence rationnelle, on a toujours d'après ([Nek], conjecture 4.1) un isomorphisme conjectural entre la cohomologie motivique $H^1_{\mathscr{M}}(M)$ de M et $\operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MM}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}(0), M)$. D'autre part, le régulateur de Beilinson définit un morphisme

$$H^1_{\mathscr{M}}(M) \xrightarrow{r_b} \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B)$$

qui, une fois restreint à la partie entière $H^1_{\mathscr{M}}(M)_{\mathbb{Z}} \subset H^1_{\mathscr{M}}(M)$ de la cohomologie motivique, se substitue au morphisme r_b du premier alinéa de la conjecture de Beilinson.

Après twist dans les bons degrés, on retrouve le régulateur de Beilinson $r_{\mathscr{D}}$ défini en Section 2.2 ci-dessous :

$$r_{\mathscr{D}} : H^5_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(3)) \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))$$

où $X = S^K \times Y^L$ est une variété projective et lisse définie sur $\mathbb{Q}$.

D'après la formule annoncée en début de section 1.2, le lien avait déjà été établi entre la valeur spéciale $L^*(0, M)$ et le régulateur $r_{\mathscr{D}}$. Un futur objectif pourra alors être de comparer l'image du régulateur de Beilinson $r_{\mathscr{D}}$ avec la $\mathbb{Q}$-structure $\mathscr{D}(M)$ conformément au troisième alinéa des conjectures de Beilinson.

1.4 Liens avec d'autres travaux

Comme expliqué ci-dessus, nous nous intéressons ici à la fonction L de degré huit de $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$ dans le cas où celle-ci n'a pas de pôle en $s = 0$. Le cas où la fonction L admet un pôle en

$s=0$ a été étudié par Francesco Lemma dans [Lem20]. La stratégie que nous suivons ici pour relier la classe de cohomologie motivique à la valeur spéciale de la fonction L en 1 est similaire à celle employée par Lemma dans cet article, qui s'appuyait elle-même sur des calculs faits précédemment dans [Lem17]. Plus précisément, supposons l'existence d'un motif $M(\pi_f \times \sigma_f)$, on a conjecturalement un isomorphisme

$$(H^5_{\mathscr{M}}(M(\pi_f \times \sigma_f), \mathbb{Q}(3))_{\mathbb{Z}} \oplus N^2(M(\pi_f \times \sigma_f))) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq H^5_{\mathscr{D}}(M(\pi_f \times \sigma_f)/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3)),$$

donné par le régulateur de Deligne-Beilinson $r_{\mathscr{D}}$, où $N^2(M(\pi_f \times \sigma_f))$ désigne le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des cycles de codimension 2 définis sur $M(\pi_f \times \sigma_f)$ à équivalence homologique près. Dans notre cas, on a $\dim_{\mathbb{R}}(H^5_{\mathscr{D}}(M(\pi_f \times \sigma_f)/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))) = 1$. D'après la conjecture de Tate, on a $\dim_{\mathbb{Q}}(N^2(M(\pi_f \times \sigma_f))) = 1$ si et seulement si la fonction $L(s, H^4(M(\pi_f \times \sigma_f)))$ a un pôle simple en $s=3$, ce qui est précisément le cas étudié par Lemma. Ici, on s'attachera à étudier l'autre cas, i.e. celui où la fonction L automorphe n'a pas de pôle en $s=0$. Précisons que cette fonction L a un pôle en $s=0$ dans le cas suivant : π est endoscopique (cf. Théorème 7.3.2), i.e. $\pi = \pi_1 \boxplus \pi_2$ est la somme isobare de deux représentations cuspidales de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$, et $\pi_1 \simeq \hat{\sigma}$ (ou $\pi_2 \simeq \hat{\sigma}$).

Dans le cas où cette fonction L n'a pas de pôle en $s=0$, cela donne lieu à un isomorphisme conjectural

$$H^5_{\mathscr{M}}(M(\pi_f \times \sigma_f), \mathbb{Q}(3))_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq H^5_{\mathscr{D}}(M(\pi_f \times \sigma_f)/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3)).$$

Dans notre théorème principal (Théorème 7.4.1) que nous énonçons ci-dessous, on démontrera l'existence d'une classe de cohomologie motivique non nulle dans $H^5_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(3))$. Plus précisément :

Théorème Principal . *Soient π une représentation automorphe cuspidale cohomologique (au sens de la Définition 3.1.8) unitaire de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ pour laquelle il existe π' une représentation automorphe cuspidale générique de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ telle que $\pi'_f \simeq \pi_f$. Soit σ une représentation automorphe cuspidale cohomologique unitaire de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$. Soient K et L deux sous-groupes nets compacts ouverts de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ respectivement tels que π_f^K et σ_f^L les espaces des formes automorphes de π_f et σ_f fixées par K et L soient non nuls. On note $X = S^K \times Y^L$ le produit des variétés de Shimura S^K et Y^L définies en Section 2.4.3. On note $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les noyaux des caractères de Hecke définis en Section 4.1.2. On suppose que :*

- pour toute place ramifiée non archimédienne $p \in V$, π_p s'obtient comme relèvement de Weil de représentations de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$;

- la fonction $L(s, \pi \times \sigma)$ n'admet pas de pôle en $s=0$;

- pour toute place non archimédienne ramifiée $p \in V$, la fonction $L_p(s, \pi \times \sigma)$ n'admet pas de pôle en $s=0$.

Alors il existe une classe de cohomologie motivique non nulle $z \in H^5_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$.

Remarque 1.4.1. *Le fait que les facteurs locaux ramifiés de la fonction L n'admettent pas de pôle en 0 est prédit par la conjecture de monodromie énoncée en Section 1.1.3.*

Enfin, signalons également que Hsu, Jin et Sakamoto ont récemment et indépendamment construit un système d'Euler pour la représentation de Galois associée à une représentation automorphe cohomologique cuspidale non endoscopique de $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$ ([HJS]). Pour cela, ils étudient la même classe de cohomologie motivique que nous construisons ici et étudient son image via le régulateur étale.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Cohomologie motivique

2.1.1 Groupes de Chow

Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps K. On appelle $z^*(X)$ le groupe des cycles algébriques sur X, c'est à dire le groupe abélien libre (gradué par la codimension) engendré par les sous-variétés fermées irréductibles de X. Un cycle sur X s'écrit ainsi comme une somme formelle finie à coefficients entiers $\sum n_v[V]$ de sous-variétés fermées irréductibles de X. On dira que ce cycle est un k-cycle si toutes les sous-variétés qui interviennent dans la somme finie sont de codimension k et on note $z^k(X)$ le sous-groupe des cycles de codimension k.

On désigne par $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles de X et par $K(X)^*$ son groupe multiplicatif.

2.1.2 Push-forward de cycles

Soient X et Y deux schémas quasi-projectifs.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre. Pour toute sous-variété V de X, $W = f(V)$ est une sous-variété fermée de Y.

Il existe alors un plongement de $K(W)$ dans $K(V)$ qui est une extension finie de corps si $\dim(W) = \dim(V)$ ([Ful], Appendice B.2.2).

Soit

$$\deg(V/W) = \begin{cases} [K(V) : K(W)] & \text{si } \dim(W) = \dim(V) \\ 0 & \text{si } \dim(W) < \dim(V) \end{cases}$$

où $[K(V) : K(W)]$ désigne le degré de l'extension finie $K(V)/K(W)$.

On définit ainsi

$$f_*[V] = \deg(V/W)[W].$$

Cette définition s'étend linéairement en un morphisme

$$f_* : z^k(X) \to z^k(Y).$$

Remarque 2.1.1. *Ces morphismes sont fonctoriels : soit Z un schéma quasi-projectif et $g : Y \to Z$. Alors, par multiplicativité des degrés des extensions de corps, on a $(gf)_* = g_* f_*$.*

2.1.3 Pull-back de cycles

Soient X et Y deux schémas quasi-projectifs. Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat de dimension relative n.

Pour toute sous-variété V de Y, on pose

$$f^*[V] = [f^{-1}(V)],$$

où $f^{-1}(V)$ désigne l'image inverse de V par f et est un sous-schéma de X de dimension $\dim(V)+n$ ([Ful],1.7).

On étend cette définition par linéarité pour obtenir les morphismes pull-back

$$f^* : z^k(Y) \to z^{k-n}(X).$$

Remarque 2.1.2. *Soit $g : Y \to Z$ un morphisme plat. Alors $g \circ f$ est un morphisme plat et $(gf)^* = f^*g^*$. En effet,*

$$(gf)^*[V] = [(gf)^{-1}(V)] = [f^{-1}g^{-1}(V)] = f^*[g^{-1}(V)] = f^*g^*[V].$$

Définition 2.1.3. *([Blo3],p. 65) On dit que deux sous-variétés X_1 et X_2 de X de codimensions respectives r_1 et r_2 se rencontrent proprement si toute composante irréductible de $X_1 \cap X_2$ a une codimension supérieure ou égale à $r_1 + r_2$ dans X.*

Si $i : W \to X$ est une sous-variété fermée qui est une intersection complète locale, il existe ([Blo2],p. 267) :

$$i^* : z^*(X)' \to z^*(W),$$

où $z^*(X)' \subset z^*(X)$ est le sous-groupe engendré par les sous-variétés qui rencontrent W proprement, c'est à dire dans la bonne dimension.

Soit K un corps. Soit X un schéma quasi-projectif sur K. Soient n et m deux entiers.

On considère une application $\rho : \{1, ..., m\} \to \{1, ..., n\}$ strictement croissante. Pour tout i n'appartenant pas à l'image de ρ, on choisit $\varepsilon_i \in \{0, \infty\}$. On définit alors l'application $\tilde{\rho}^\varepsilon : (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^m \to (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^n$ par :

$$(\tilde{\rho}^\varepsilon)^* t_i = \begin{cases} t_j & \text{si } i = \rho(j) \\ \varepsilon_i & \text{si } i \notin \rho\{1, ..., m\}. \end{cases}$$

Par ailleurs, observons qu'on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n_K & \simeq & (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^n \\ (x_1, ..., x_n) & \to & (1 - \dfrac{1}{x_1}, ..., 1 - \dfrac{1}{x_n}). \end{array}$$

D'autre part, on appelle Δ^m l'hyperplan de $\mathbb{A}^m_K$ défini par l'équation $\sum_{i=0}^m t_i = 1$. Via l'isomorphisme ci-dessus, on a une injection de Δ^m dans $(\mathbb{P}^1_K - \{1\})^m$.

On dit alors que $\tilde{\rho}^\varepsilon(\Delta^m) \subset \Delta^n$ est une face.

Ainsi, on définit $c^*(X,n) \subset z^*(X \times (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^n)$ comme le sous-groupe engendré par les variétés rencontrant toutes les faces du cube dans la bonne dimension.

Pour $i \in \{1, ..., n\}$, et $\varepsilon_i \in \{0, \infty\}$, on appelle $\partial_i^{\varepsilon_i} : c^*(X,n) \to c^*(X,n-1)$ le pullback le long de l'application

$$(t_1, ..., t_{n-1}) \to (t_1, ..., t_{i-1}, \varepsilon_i, t_i, ..., t_n).$$

On a ainsi ([Tot],p.180) un complexe de groupes abéliens gradués

$$c^*(X,n) \to ... \to c^*(X,1) \to c^*(X,0) \to 0$$

où les applications $d_n : c^*(X,n) \to c^*(X,n-1)$ sont définies par

$$d_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (\partial_i^\infty - \partial_i^0).$$

Enfin, on appelle $d^i(X,n)$ le sous-groupe de $c^i(X,n)$ engendré par les cycles sur $X \times (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^n)$ qui sont des pullbacks de cycles sur $X \times (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^{n-1})$ obtenus via une projection linéaire de la forme

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., \hat{x}_k, ..., x_n)$$

où $1 \leq k \leq n$, le symbole $\hat{}$ au-dessus d'un argument signifiant que celui-ci doit être omis.

Définition 2.1.4. *On définit les groupes de Chow supérieurs* $\mathrm{CH}^i(X,n)$ *comme les groupes d'homologie du complexe* $c^i(X,.)/d^i(X,.)$.

Si X et Y sont des K-schémas quasi-projectifs, l'isomorphisme

$$(X \times (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^q) \times (Y \times (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^s) \simeq (X \times Y) \times (\mathbb{P}^1_K - \{1\})^{q+s}$$

permet d'obtenir le produit extérieur

$$\mathrm{CH}^p(X,q) \otimes \mathrm{CH}^r(Y,s) \to \mathrm{CH}^{p+r}(X \times Y, q+s).$$

Définition 2.1.5. *([Blo1], 0.1.8.2) On définit la cohomologie motivique par l'égalité suivante :*

$$H^{2i-n}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(i)) = \mathrm{CH}^i(X,n) \otimes \mathbb{Q}.$$

Remarque 2.1.6. *Ainsi, on a* $H^1_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(1)) = \mathrm{CH}^1(X,1) \otimes \mathbb{Q}$.

Par définition, on a

$$\mathrm{CH}^1(X,1) = \ker(\overline{d_1}) / \operatorname{Im}(\overline{d_2})$$

où $\overline{d_1} : c^1(X,1)/d^1(X,1) \to c^1(X,0)/d^1(X,0)$ *et* $\overline{d_2} : c^1(X,2)/d^1(X,2) \to c^1(X,1)/d^1(X,1)$.

Soit $u \in \mathscr{O}(X)^\times$ *une unité sur* X*, vue comme un morphisme de* X *vers* $\mathbb{P}^1_K$.

On considère $V = \{(x, u(x)) \in X \times \mathbb{P}^1_K\}$ *son graphe, puis* $V' = V \cap (X \times (\mathbb{P}^1_K - \{1\}))$.

$[V']$ *définit alors un cycle dans* $c^1(X,1)$.

Par définition, on a

$$d_1([V']) = (\partial_1^0 - \partial_1^\infty)([V']).$$

Or, u étant une unité, elle ne prend jamais les valeurs 0 et ∞ donc $d_1([V']) = 0$.
Ainsi, la classe de $[V']$ modulo $d^1(X,1)$ définit un élément de $\mathrm{CH}^1(X,1)$.
D'après la définition 2.1.5, on a donc une application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{O}(X)^\times \otimes \mathbb{Q} & \to & H^1_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(1)) \\ u \otimes 1 & \mapsto & \overline{[V']} \otimes 1 \end{array}$$

2.2 Définition du régulateur de Beilinson

Soient X une variété algébrique réelle lisse et $X(\mathbb{C})$ sa variété algébrique complexifiée de dimension d. On rappelle en outre qu'on note $\mathbb{R}(p) = (2\pi \mathrm{i})^p\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. On choisit $\overline{X(\mathbb{C})}$ une compactification de $X(\mathbb{C})$ telle que $D = \overline{X(\mathbb{C})} \backslash X(\mathbb{C})$ soit un diviseur à croisements normaux. On appelle $j : X(\mathbb{C}) \to \overline{X(\mathbb{C})}$ l'inclusion naturelle.

On note $\Omega^*_{X(\mathbb{C})}$ le faisceau des formes différentielles holomorphes sur $X(\mathbb{C})$, et $\Omega^*_{\overline{X(\mathbb{C})}}(\log D)$ le faisceau des formes différentielles holomorphes sur $\overline{X(\mathbb{C})}$ à pôles logarithmiques selon D.

Définition 2.2.1. *On appelle F la filtration de Hodge de $\Omega^*_{\overline{X(\mathbb{C})}}(\log D)$ définie de la façon suivante :*

$$F^p\Omega^*_{\overline{X(\mathbb{C})}}(\log D) = \bigoplus_{p' \geq p} \Omega^{p'}_{\overline{X(\mathbb{C})}}(\log D).$$

Définition 2.2.2. *Le complexe de Deligne-Beilinson du couple $(X(\mathbb{C}), \overline{X(\mathbb{C})})$ est défini par le complexe de faisceaux pour la topologie analytique*

$$\mathbb{R}(p)_{\mathscr{D}} = \mathrm{cone}(Rj_*\mathbb{R}(p) \oplus F^p\Omega^*_{\overline{X(\mathbb{C})}}(\log D) \xrightarrow{u} j_*\Omega^*_{X(\mathbb{C})})[-1],$$

où $u(a, f) = -a + f$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}(p)$ désigne le sous-groupe $(2\pi\mathrm{i})^p\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$.

Définition 2.2.3. *Les groupes de cohomologie de Deligne-Beilinson sont les groupes d'hypercohomologie du faisceau $\mathbb{R}(p)_{\mathscr{D}}$, i.e.*

$$H^*_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{R}(p)) = \mathbb{H}^*(\overline{X(\mathbb{C})}, \mathbb{R}(p)_{\mathscr{D}}).$$

Remarque 2.2.4. *Ces groupes sont indépendants de la compactification choisie pour $X(\mathbb{C})$ ([BKK], 5.1).*

La définition des groupes de cohomologie de Deligne-Beilinson implique l'existence d'une suite exacte reliant celle-ci à la cohomologie usuelle. Cette suite exacte est donnée par ([BKK], égalité 5.4) :

$$... \to H^{n-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})/F^pH^{n-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \to H^n_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{R}(p)) \to H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(p)) \to ....$$

Définition 2.2.5. *La conjugaison complexe F_∞ est une involution antiholomorphe sur $X(\mathbb{C})$ et on définit la cohomologie de Deligne-Beilinson réelle par*

$$H^*_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{R}(p)) = H^*_{\mathscr{D}}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(p))^{\overline{F}^*_\infty = 1},$$

où $\overline{F}^*_\infty$ désigne la composition du morphisme induit par F_∞ et de la conjugaison complexe sur les coefficients.

On appelle $\mathscr{S}^m(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(n))$ l'espace vectoriel des formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ de degré m sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}(n)$ et qui sont fixées par le morphisme $\overline{F}_\infty^*$.

Proposition 2.2.6. *([Nek],7.3.1) Il existe un isomorphisme canonique*

$$H^n_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(n)) \simeq \frac{\{(\varphi,\omega)\in \mathscr{S}^{n-1}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(n-1))\oplus H^0(X,\Omega^n_X(\log D))|d\varphi=\pi_{n-1}(\omega)\}}{d\mathscr{S}^{n-2}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(n-1))},$$

où $\pi_{n-1}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}(n-1)$ est la projection naturelle définie par $\pi_{n-1}(z)=\dfrac{z+(-1)^{n-1}\overline{z}}{2}$.

Remarque 2.2.7. *Soit $r_{1,1}: H^1_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Q}(1))\to H^1_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{R}(1))$ le régulateur de Beilinson défini en Définition 2.2.12 ci-dessous.*

Vu l'application

$$\mathscr{O}(X)^\times\otimes\mathbb{Q}\to H^1_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Q}(1))$$

définie en Remarque 2.1.6 ci-dessus, alors pour tout $u\in\mathscr{O}(X)^\times$, la classe de cohomologie de Deligne $r_{1,1}(u\otimes 1)$ est représentée par $\varphi=\log|u|\in\mathscr{S}^0(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(0))$ et par $\omega=d\log u\in H^0(X,\Omega^1_X(\log D))$.

On appelle $\mathscr{T}^*(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(m))$ le complexe des courants $\mathbb{R}(m)$-valués fixés par l'involution $\overline{F}_\infty^*$.

De même, on note $\mathscr{T}^*_{\log}(\overline{X}/\mathbb{R},\mathbb{C})$ le complexe des courants sur X à pôles logarithmiques le long de D qui sont fixés par l'involution $\overline{F}_\infty^*$ équipé de sa filtration de Hodge ([Jan88], définition 1.4).

Proposition 2.2.8. *([Kin], Lemme 6.3.9)*

Soient i et j deux entiers. Il existe un isomorphisme canonique

$$H_i^{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(j))=\frac{\{(S,T)\in\mathscr{T}^{-i-1}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(j-1))\oplus F^j\mathscr{T}^{-i}_{\log}(X/\mathbb{R},\mathbb{C})|dS=\pi_{j-1}(T)\}}{\{d(\tilde{S},\tilde{T})|(\tilde{S},\tilde{T})\in\mathscr{T}^{-i-2}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(j-1))\oplus F^j\mathscr{T}^{-i-1}_{\log}(X/\mathbb{R},\mathbb{C}\}}.$$

Les courants étant covariants pour les applications propres, la proposition ci-dessous donne une description explicite du morphisme de Gysin dans la cohomologie de Deligne-Beilinson.

Proposition 2.2.9. *i) ([Jan88], Théorème 1.15) Il existe un isomorphisme canonique entre l'homologie et la cohomologie de Deligne-Beilinson :*

$$H_i^{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(j))\simeq H^{2d-i}_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(d-j)).$$

ii)([Kin], Lemme 6.3.10)

Soit $i: Y\hookrightarrow X$ une immersion fermée de codimension c. Alors, via l'isomorphisme précédent et la description explicite des classes d'homologie de Deligne-Beilinson, le morphisme de Gysin

$$i_*: H^m_{\mathscr{D}}(Y/\mathbb{R},\mathbb{R}(n))\to H^{m+2c}_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(n+c))$$

est induit par l'application $(S,T)\mapsto(i_*S,i_*T)$.

Définition 2.2.10. *Soit $\mathscr{S}_c^i(X, \mathbb{R}(j)) \subset \mathscr{S}^i(X, \mathbb{R}(j))$ le sous-espace des formes différentielles à support compact.*

Soit $\varphi \in \mathscr{S}^i(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(j))$.

On appelle $\mathscr{T}_\varphi \in \mathscr{T}^{i-2d}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(j-d))$ le courant défini par

$$\eta \in \mathscr{S}_c^{2d-i}(X, \mathbb{R}(d-j)) \mapsto \mathscr{T}_\varphi(\eta) = \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^d} \int_X \eta \wedge \varphi.$$

De même, pour $\omega \in H^0(X, \omega_X(\log D))$, on appelle $\mathscr{T}_\omega$ le courant d'intégration le long de ω.

Soit X une variété lisse et quasi-projective définie sur $\mathbb{Q}$. D'après [Blo3], paragraphe 4, on peut définir un régulateur

$$\mathrm{CH}^i(X, n) \to H_{\mathscr{D}}^{2i-n}(X \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}, i)^{\overline{F}_\infty^*=1}.$$

Remarque 2.2.11. *Si $X = \mathrm{Spec}(K)$, où K est un corps de nombres et $i = n = 1$, on obtient le régulateur standard*

$$K^* \longrightarrow (\mathbb{Q} \otimes \mathbb{R})^* \xrightarrow{\log|\cdot|} \mathbb{R}^{r_1+r_2},$$

où r_1 et r_2 désignent respectivement le nombre de plongements de K dans $\mathbb{R}$ et le nombre de plongements de K dans $\mathbb{C}$ divisé par 2.

On considère maintenant que X est une variété complexe. En factorisant, on obtient une nouvelle application

$$CH^i(X, n) \to H_{\mathscr{D}}^{2i-n-1}(X, \mathbb{R}(i-1))^{\overline{F}_\infty^*=1} / F^i H_{dR}^{2i-n-1}(X/\mathbb{R}).$$

Le fait que $F^i H_{dR}^{2i-n-1}(X/\mathbb{R})$ soit un sous-espace de $H_{\mathscr{D}}^{2i-n-1}(X, \mathbb{R}(i-1))^{\overline{F}_\infty^*=1}$ est justifié par la suite exacte définie dans la sous-section précédente et par la section 2.1 de [Nek]. Or, le membre de droite est isomorphe par définition à $H_{\mathscr{D}}^{2i-n}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(i))$.

D'autre part, d'après la définition 2.1.5, on a

$$CH^i(X, n) \otimes \mathbb{Q} = H_{\mathscr{M}}^{2i-n}(X, \mathbb{Q}(i)).$$

Définition 2.2.12. *On appelle régulateur de Beilinson et on note $r_{\mathscr{D}}$ l'application suivante ainsi obtenue pour tous entiers n et i :*

$$r_{\mathscr{D}} : H_{\mathscr{M}}^{2i-n}(X, \mathbb{Q}(i)) \to H_{\mathscr{D}}^{2i-n}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(i)).$$

2.3 Groupe symplectique et demi-plan de Siegel

Soit I_2 la matrice identité de taille 2 et soit J la matrice représentative de la forme symplectique sur $\mathbb{Z}^4$ dans la base canonique définie par

$$J = \begin{pmatrix} & I_2 \\ -I_2 & \end{pmatrix}.$$

J est une matrice antisymétrique vérifiant $J^2 = -I_4$, d'où $J^{-1} = -J$.

On définit alors le groupe symplectique GSp(4) de la façon suivante :

$$\mathrm{GSp}(4) = \{g \in \mathrm{GL}(4) |\, {}^t g J g = \nu(g) J, \nu(g) \in \mathbb{G}_m\}.$$

Ainsi définie, l'application $\nu : \mathrm{GSp}(4) \to \mathbb{G}_m$ est un caractère.

On note Sp(4) le noyau de ν,i.e.

$$\mathrm{Sp}(4) = \{g \in \mathrm{GL}(4) |\, {}^t g J g = J\},$$

ainsi que

$$\mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})_+ = \{g \in \mathrm{GL}(4) |\, {}^t g J g = \nu(g) J, \nu(g) > 0\}.$$

D'autre part, le groupe GSp(4) contient le sous-groupe

$$\mathrm{GL}(2) \times_{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL}(2) = \{(g, h) \in \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2) |\det(g) = \det(h)\}$$

via le morphisme de groupes

$$i : \mathrm{GL}(2) \times_{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL}(2) \to \mathrm{GSp}(4)$$

défini par

$$i\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & & b & \\ & a' & & b' \\ c & & d & \\ & c' & & d' \end{pmatrix}.$$

En effet, on vérifie aisément que pour tout couple (g, h) avec $\det(g) = \det(h)$, on a l'identité

$${}^t i(g, h) J i(g, h) = \det(g) J = \det(h) J.$$

Définition 2.3.1. *On appelle demi-plan supérieur de Siegel et on note $\mathscr{H}$ l'ensemble*

$$\mathscr{H} = \{Z \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) |\, {}^t Z = Z, \mathrm{Im}(Z) > 0\},$$

où $\mathrm{Im}(Z) > 0$ signifie que la partie imaginaire de Z est définie positive.

Nous allons décrire l'action de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})_+$ sur $\mathscr{H}$. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3.2. *a) Le groupe $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})$ est stable par transposition.*

b) Soit $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ où α, β, γ et δ sont des matrices de taille 2. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $g \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})$;

ii) ${}^t\alpha\gamma$ et ${}^t\beta\delta$ sont symétriques et ${}^t\alpha\delta - {}^t\gamma\beta = \nu(g) I_2$;

iii) $\alpha {}^t\beta$ et $\gamma {}^t\delta$ sont symétriques et $\alpha {}^t\delta - \beta {}^t\gamma = \nu(g) I_2$.

Démonstration. a) Soit $g \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})$. Alors, par définition,

$${}^t g J g = \nu(g) J.$$

Ainsi, g^{-1} vérifie

$${}^t g^{-1} J g^{-1} = \nu(g)^{-1} J,$$

d'où en prenant l'inverse à gauche et à droite,

$$gJ^tg = \nu(g)J.$$

Cette dernière égalité dit exactement que ${}^tg \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})$.

b) L'équivalence entre i) et ii) provient de la définition et du calcul suivant :

$${}^tgJg = \begin{pmatrix} {}^t\alpha\gamma -{}^t\gamma\alpha & {}^t\alpha\delta -{}^t\gamma\beta \\ {}^t\beta\gamma -{}^t\delta\alpha & {}^t\beta\delta -{}^t\delta\beta \end{pmatrix}.$$

L'équivalence entre ii) et iii) provient du point a) et du fait que

$${}^tg = \begin{pmatrix} {}^t\alpha & {}^t\gamma \\ {}^t\beta & {}^t\delta \end{pmatrix}.$$

$\square$

Proposition 2.3.3. *([BL], Proposition 8.2.2).*
Le groupe $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$ *agit de façon biholomorphe à gauche sur* $\mathscr{H}$ *par*

$$g.Z = (\alpha Z + \beta)(\gamma Z + \delta)^{-1}$$

pour tout $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$.

Démonstration. Dans un premier temps, il s'agit de montrer que $(\gamma Z + \delta)$ est inversible. En appliquant le lemme précédent, on trouve :

$$\begin{aligned} {}^t\overline{(\gamma Z+\delta)}(\alpha Z+\beta) - {}^t\overline{(\alpha Z+\beta)}(\gamma Z+\delta) &= ({}^t\gamma\alpha - {}^t\alpha\gamma)Z\overline{Z} + ({}^t\delta\alpha - {}^t\beta\gamma)Z + ({}^t\gamma\beta - {}^t\alpha\delta)\overline{Z} + {}^t\delta\beta - {}^t\beta\delta \\ &= \nu(g)(Z - \overline{Z}) \\ &= 2i\nu(g)\mathrm{Im}(Z). \end{aligned}$$

Soit $v \in \mathbb{C}^2$ tel que $(\gamma Z + \delta)v = 0$. Alors, d'après l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} 2i\nu(g){}^t\overline{v}\mathrm{Im}(Z)v &= {}^t\overline{v}({}^t\overline{(\gamma Z+\delta)}(\alpha Z+\beta) - {}^t\overline{(\alpha Z+\beta)}(\gamma Z+\delta))v \\ &= {}^t\overline{(\gamma Z+\delta)v}(\alpha Z+\beta)v - {}^t\overline{(\alpha Z+\beta)v}(\gamma Z+\delta)v \\ &= 0 \end{aligned}$$

par hypothèse sur v. Or, par définition, $\nu(g) \neq 0$. A fortiori, on a ${}^t\overline{v}\mathrm{Im}(Z)v = 0$. La partie imaginaire de Z étant définie positive par définition de $\mathscr{H}$, ceci implique nécessairement que $v = 0$. Ainsi, $(\gamma Z + \delta)$ est bien inversible, et l'action de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$ sur $\mathscr{H}$ est bien définie.

De même, on a

$$\begin{aligned} {}^t(\gamma Z+\delta)(g.Z - {}^t(g.Z))(\gamma Z+\delta) &= {}^t(\gamma Z+\delta)((\alpha Z+\beta)(\gamma Z+\delta)^{-1} - {}^t(\gamma Z+\delta)^{-1}\,{}^t(\alpha Z+\beta))(\gamma Z+\delta) \\ &= {}^t(\gamma Z+\delta)(\alpha Z+\beta) - {}^t(\alpha Z+\beta)(\gamma Z+\delta) \\ &= ({}^t\gamma\alpha - {}^t\alpha\gamma){}^tZZ + ({}^t\delta\alpha - {}^t\beta\gamma)Z + ({}^t\gamma\beta - {}^t\alpha\delta){}^tZ + {}^t\delta\beta - {}^t\beta\delta \\ &= \nu(g)(Z - {}^tZ) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car Z est symétrique par définition de $\mathscr{H}$. Or, $\gamma Z+\delta$ est inversible, donc $g.Z - {}^t(g.Z) = 0$, ce qui implique que $g.Z$ est symétrique.

Enfin, en utilisant que $g.Z$ est symétrique :

$$\begin{aligned}
{}^t\overline{(\gamma Z+\delta)}\mathrm{Im}(g.Z)(\gamma Z+\delta) &= \frac{1}{2i}\,{}^t\overline{(\gamma Z+\delta)}(g.Z-\overline{g.Z})(\gamma Z+\delta)\\
&= \frac{1}{2i}\,{}^t\overline{(\gamma Z+\delta)}(g.Z-{}^t\overline{g.Z})(\gamma Z+\delta)\\
&= \frac{1}{2i}\,{}^t\overline{(\gamma Z+\delta)}((\alpha Z+\beta)(\gamma Z+\delta)^{-1}-\overline{{}^t(\gamma Z+\delta)^{-1}\,{}^t(\alpha Z+\beta)})(\gamma Z+\delta)\\
&= \frac{1}{2i}(\,{}^t\overline{(\gamma Z+\delta)}(\alpha Z+\beta)-{}^t\overline{(\alpha Z+\beta)}(\gamma Z+\delta))\\
&= \nu(g)\mathrm{Im}(Z)
\end{aligned}$$

d'après le calcul fait en début de preuve.

On a donc l'égalité

$$\mathrm{Im}(g.Z)=\nu(g)\,{}^t\overline{(\gamma Z+\delta)^{-1}}\mathrm{Im}(Z)(\gamma Z+\delta)^{-1}.$$

Pour tout $v\in\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$, on trouve

$${}^t\overline{v}\mathrm{Im}(g.Z)v=\nu(g)\,{}^t\overline{(\gamma Z+\delta)^{-1}v}\mathrm{Im}(Z)(\gamma Z+\delta)^{-1}v.$$

Or, on a d'une part ${}^t\overline{(\gamma Z+\delta)^{-1}v}\mathrm{Im}(Z)(\gamma Z+\delta)^{-1}v>0$ car $\mathrm{Im}(Z)>0$, et d'autre part $\nu(g)>0$ par hypothèse.

Ainsi, pour tout $v\in\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$,

$${}^t\overline{v}\mathrm{Im}(g.Z)v>0,$$

donc $\mathrm{Im}(g.Z)>0$.

Ainsi, pour tout $g\in\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$, pour tout $z\in\mathscr{H}, g.Z\in\mathscr{H}$.

Il nous reste à vérifier que l'application $(g,Z)\mapsto g.Z$ est bien une action.

Tout d'abord, il est clair que pour tout $Z\in\mathscr{H}, I_4.Z=Z$.

Soit $g=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$ et $g'=\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\\gamma'&\delta'\end{pmatrix}$, deux matrices de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$. Montrons que pour tout $Z\in\mathscr{H}, g.(g'.Z)=(gg').Z$

Tout d'abord, $gg'=\begin{pmatrix}\alpha\alpha'+\beta\gamma'&\alpha\beta'+\beta\delta'\\\gamma\alpha'+\delta\gamma'&\gamma\beta'+\delta\delta'\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$(gg').Z=((\alpha\alpha'+\beta\gamma')Z+\alpha\beta'+\beta\delta')((\gamma\alpha'+\delta\gamma')Z+\gamma\beta'+\delta\delta')^{-1}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
g.(g'.Z) &= (\alpha g'.Z+\beta)(\gamma g'.Z+\delta)^{-1}\\
&= (\alpha(\alpha'Z+\beta')(\gamma'Z+\delta')^{-1}+\beta)(\gamma(\alpha'Z+\beta')(\gamma'Z+\delta')^{-1}+\delta)^{-1}\\
&= (\alpha(\alpha'Z+\beta')(\gamma'Z+\delta')^{-1}+\beta)(\gamma'Z+\delta')(\gamma'Z+\delta')^{-1}(\gamma(\alpha'Z+\beta')(\gamma'Z+\delta')^{-1}+\delta)^{-1}\\
&= (\alpha(\alpha'Z+\beta')+\beta(\gamma'Z+\delta'))((\gamma(\alpha'Z+\beta')(\gamma'Z+\delta')^{-1}+\delta)(\gamma'Z+\delta'))^{-1}\\
&= ((\alpha\alpha'+\beta\gamma')Z+\alpha\beta'+\beta\delta')(\gamma(\alpha'Z+\beta')+\delta(\gamma'Z+\delta'))^{-1}\\
&= ((\alpha\alpha'+\beta\gamma')Z+\alpha\beta'+\beta\delta')((\gamma\alpha'+\delta\gamma')Z+\gamma\beta'+\delta\delta')^{-1}\\
&= (gg').Z.
\end{aligned}$$

La proposition est donc prouvée. $\square$

Remarque 2.3.4. *La preuve est inchangée si on restreint l'action à* $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q})_+$.

Proposition 2.3.5. *a) L'action de* $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$ *sur* $\mathscr{H}$ *est transitive.*

b) Le stabilisateur de $iI_2 \in \mathscr{H}$ *est le groupe*

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) | \alpha\, {}^t\beta = \beta\, {}^t\alpha ; \alpha\, {}^t\alpha + \beta\, {}^t\beta = \nu(g) I_2 \right\}.$$

Démonstration. a) Soit $Z = X + iY \in \mathscr{H}$. Puisque Y est symétrique, définie et positive, alors il existe $P \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ telle que $Y = P\, {}^tP$.

Soit $h = \begin{pmatrix} P & X\, {}^tP^{-1} \\ 0 & {}^tP^{-1} \end{pmatrix}$. On vérifie aisément, en utilisant que X est symétrique, que ${}^thJh = J$:

$$\begin{aligned} {}^thJh &= \begin{pmatrix} {}^tP & 0 \\ P^{-1}\, {}^tX & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & X\, {}^tP^{-1} \\ 0 & {}^tP^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & {}^tP \\ -P^{-1} & P^{-1}\, {}^tX \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & X\, {}^tP^{-1} \\ 0 & {}^tP^{-1} \end{pmatrix} \\ &= J. \end{aligned}$$

D'autre part, on considère la matrice $iI_2 \in \mathscr{H}$. Alors

$$\begin{aligned} h.iI_2 &= (iP + X\, {}^tP^{-1})\, {}^tP \\ &= X + iP\, {}^tP \\ &= X + iY \\ &= Z. \end{aligned}$$

Ainsi, toute matrice de $\mathscr{H}$ est dans l'orbite de iI_2, l'action est donc bien transitive.

b) On a l'équivalence

$$g.iI_2 = iI_2 \Leftrightarrow (i\alpha + \beta)(i\gamma + \delta)^{-1} = iI_2,$$

i.e

$$g.iI_2 = iI_2 \Leftrightarrow i\alpha + \beta = -\gamma + i\delta,$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha & = \delta \\ \beta & = -\gamma. \end{array} \right.$$

Ainsi, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, et d'après le Lemme 2.3.2, ceci équivaut aux faits que $\alpha\, {}^t\beta$ soit symétrique et que $\alpha\, {}^t\alpha + \beta\, {}^t\beta = \nu(g) I_2$.

$\square$

Remarque 2.3.6. *i) Cette fois, la preuve ne fonctionne plus dans le cas de* $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q})_+$ *(puisque* $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q})_+$ *est dénombrable) et l'action n'est pas transitive dans ce cas.*

ii) Si on restreint l'action à $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$*, tous les résultats précédents restent valables. De plus, le stabilisateur de* iI_2 *est cette fois le groupe compact*

$$K_\infty = \mathrm{Sp}(4,\mathbb{R}) \cap O(4,\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) | A\,{}^tB = B\,{}^tA; A\,{}^tA + B\,{}^tB = I_2 \right\}.$$

Dans ce cas, via l'application

$$\begin{array}{rcl} h : \mathrm{Sp}(4,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{H} \\ g & \longmapsto & g.iI_2, \end{array}$$

on a une bijection

$$\mathscr{H} \simeq \mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})/K_\infty.$$

De plus, l'application h *est propre ([BL], Proposition 8.2.4), i.e. pour tout compact* $K \subset \mathscr{H}$, $h^{-1}(K)$ *est un sous-ensemble compact de* $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$.

2.4 Variétés de Shimura

2.4.1 Adèles

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Définition 2.4.1. *On note* $\mathbb{A}$ *l'anneau des adèles de* $\mathbb{Q}$ *défini par*

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$$

où $\mathbb{A}_f$ *est l'anneau des adèles finies de* $\mathbb{Q}$ *et est défini par*

$$\mathbb{A}_f = \{(a_p)_{p\in\mathscr{P}} \in \prod_{p\in\mathscr{P}} \mathbb{Q}_p, \textit{pour presque tout } p, a_p \in \mathbb{Z}_p\},$$

où "pour presque tout" signifie "sauf pour un nombre fini".

Pour tout $x \in \mathbb{A}$*, on note*

$$|x| = \prod_{v\in\mathscr{P}\cup\infty} |x_v|_v.$$

Une base de la topologie de $\mathbb{A}$ *est donnée par les ensembles de la forme*

$$U \times \prod_{p\in S} V_p \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p$$

où U *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*,* S *un ensemble fini de nombres premiers et* V_p *un ouvert de* $\mathbb{Q}_p$*.*

On note $\mathbb{A}^\times$ *le groupe des unités de* $\mathbb{A}$*, appelé groupe des idèles de* $\mathbb{Q}$*, par*

$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{R}^\times \times \mathbb{A}_f^\times$$

où

$$\mathbb{A}_f^\times = \{(a_p)_{p\in\mathscr{P}} \in \mathbb{A}_f, \forall p \in \mathscr{P}, a_p \in \mathbb{Q}_p^\times, \textit{pour presque tout } p, a_p \in \mathbb{Z}_p^\times\}.$$

On rappelle les faits bien connus suivants : via l'inclusion diagonale, $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{A}$ et le quotient $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ est compact. Dans toute la suite, on munira $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ de l'unique mesure de Haar pour laquelle $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ a volume 1.

Proposition 2.4.2. *([Bum], Proposition 3.1.1) Soit χ un caractère de $\mathbb{A}^\times$. Alors il existe un ensemble fini S de places de $\mathbb{Q}$, contenant la place archimédienne, tel que si $p \notin S$, alors χ_p est trivial sur $\mathbb{Z}_p^\times$. Les places incluses dans S sont dites ramifiées, les autres non ramifiées.*

Remarque 2.4.3. *Si χ_p est non ramifié pour un certain nombre premier p, alors χ_p est entièrement défini par la valeur $\chi_p(p)$. En effet, soit $x \in \mathbb{Q}_p^\times$:*
- Si $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, on sait que $\chi(x) = 1$.
- Si $|x|_p < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in p^n\mathbb{Z}_p^\times$, donc $\chi(x) = \chi(p)^n$.
- Si $|x|_p > 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{-1} \in p^n\mathbb{Z}_p^\times$, donc $\chi(x) = \chi(p)^{-n}$.

Définition 2.4.4. *Soit N un entier naturel non nul. On appelle caractère de Dirichlet modulo N toute fonction $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ N-périodique obtenue en prolongeant par 0 sur les entiers non premiers avec N un caractère du groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$.*

Si $N_1|N$, tout caractère de Dirichlet modulo N_1 induit un caractère de Dirichlet modulo N en le composant avec l'application naturelle $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z})^\times$. Un caractère de Dirichlet modulo N obtenu de cette façon est dit non primitif. Sinon, on dit que χ est primitif et on appelle conducteur de χ l'entier naturel N.

Soit $\chi : \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times \to \mathbb{C}^\times$. On dit que χ est d'ordre fini si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\chi(x)^n = 1$ pour tout $x \in \mathbb{A}^\times$.

Proposition 2.4.5. *([Bum], Proposition 3.1.2)*

i) Soit χ un caractère de $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$. Alors il existe un unique caractère χ_1 d'ordre fini de $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ et un unique nombre imaginaire pur λ tel que

$$\chi(x) = \chi_1(x)|x|^\lambda.$$

ii) Soit χ un caractère d'ordre fini de $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$. Alors il existe un entier N dont les diviseurs premiers sont les nombres premiers p tels que χ_p soit ramifiée, et un caractère de Dirichlet primitif χ_0 modulo N tel que pour toute place non ramifiée p de χ, $\chi(p) = \chi_0(p)$.

Remarque 2.4.6. *Cette correspondance $\chi \mapsto \chi_0$ établit une bijection entre les caractères d'ordre fini de $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$ et les caractères de Dirichlet primitifs.*

2.4.2 Formes automorphes et représentations automorphes

Le but de cette section est de définir les formes automorphes sur $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$. Nous donnerons donc les définitions pour ce seul groupe, mais celles-ci s'adaptent de façon similaire pour définir les formes automorphes sur $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$.

Soit n un entier naturel non nul. D'après ([Bum], Section 3.3), le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ est unimodulaire, i.e. les mesures de Haar invariantes à gauche et à droites définies sur $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ coïncident. Dans toute la suite, on considèrera toujours une telle mesure de Haar.

Puisque $\mathbb{Q}$ est discret dans $\mathbb{A}$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ est un sous-groupe discret de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$. Dans toute la suite, on notera $Z(\mathbb{A})$ les points adéliques du centre algébrique de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{A})$ constitué des matrices scalaires.

Proposition 2.4.7. *([Bum], Proposition 3.3.2) L'espace quotient* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})Z(\mathbb{A})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *est de mesure finie.*

Soit ω un caractère de Hecke unitaire, i.e. un caractère unitaire de $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$.

On considère $L^2(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ l'espace des fonctions mesurables ϕ sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ et qui satisfont

$$\forall z\in\mathbb{A}^\times, \phi(zg)=\omega(z)\phi(g),$$
$$\forall\gamma\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}), \phi(\gamma g)=\phi(g)$$

et qui sont de carré intégrable modulo le centre, i.e. :

$$\int_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})Z(\mathbb{A})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})}|\phi(g)|^2dg<\infty.$$

En plus des propriétés précédentes, on dira que $\phi\in L^2(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ est cuspidale si elle vérifie la propriété supplémentaire suivante : pour toute décomposition $n=r+s$ où $1\leq r,s\leq n-1$, on note $\mathscr{M}_{r,s}$ le groupe algébrique additif des matrices de taille $r\times s$. La condition de cuspidalité est alors

$$\int_{\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{Q})\backslash\mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{A})}\phi\left(\begin{pmatrix}I_r & X\\ & I_s\end{pmatrix}g\right)dX=0$$

pour presque tout $g\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$.

On appelle $L^2_0(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ le sous-espace fermé des fonctions cuspidales de l'espace de Hilbert $L^2(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$.

On définit l'action de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ sur $L^2(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ par translation à droite, i.e. $\forall g,x\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\forall\phi\in L^2(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$,

$$(g.\phi)(x)=\phi(xg).$$

Le lemme suivant se vérifie sans difficulté.

Lemme 2.4.8. *Le sous-espace cuspidal* $L^2_0(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)\subset L^2(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ *est invariant sous l'action de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$.

Le théorème suivant montre l'utilité et la force des fonctions cuspidales.

Théorème 2.4.9. *([Bum], Théorème 3.3.2) L'espace* $L^2_0(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ *se décompose en une somme directe d'espaces invariants irréductibles.*

Nous allons maintenant lister les propriétés que doivent vérifier les formes automorphes sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$.

Définition 2.4.10. *Une fonction f sur* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *est dite lisse si pour tout* $g\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$, *il existe un voisinage N de g et une fonction lisse f_g sur* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *tels que pour tout $h\in N, f(h)=f_g(h_\infty)$ où on a factorisé $h=h_\infty h_f$ avec* $h_\infty\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *et* $h_f\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_f)$. *On note* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}))$ *(resp.* $\mathscr{C}^\infty_0(\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}))$*) l'espace des fonctions lisses (resp. lisses cuspidales) sur* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$.

Soit K le sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ suivant :

$$K=O(n)\prod_{p\in\mathscr{P}}\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_p)$$

où $O(n)=\{M\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})|\,{}^tMM=I_n\}$ désigne le sous-groupe orthogonal de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Définition 2.4.11. *Une fonction f sur* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *est dite $K-$finie si ses translatés à droite par des éléments de K engendrent un espace vectoriel de dimension finie.*

On définit une action de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ sur l'espace des vecteurs $K-$finis par

$$(Xf)(g)=\frac{d}{dt}f(g\exp(tX))|_{t=0}.$$

On peut montrer que si f est $K-$finie, alors Xf est aussi $K-$finie ([Bum], Exercice 3.3.2). On étend cette action de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ à l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$.

Définition 2.4.12. *Soit $\mathscr{Z}$ le centre de l'algèbre enveloppante universelle $U(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}))$. Une focntion f sur* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *est dite $\mathscr{Z}-$finie si f est dans un espace vectoriel de dimension finie invariant par $\mathscr{Z}$.*

On plonge le groupe algébrique $\mathrm{GL}(n)$ dans $\mathbb{A}^{n^2+1}$ l'espace affine de dimension n^2+1 via

$$g\mapsto(g,\det(g)^{-1}).$$

Pour toute place v de $\mathbb{Q}$, on définit une hauteur locale $||g_v||_v$ sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}_v)$ en restreignant la fonction

$$(x_1,...,x_{n^2+1})\mapsto\max_i|x_i|_v$$

sur $\mathbb{A}^{n^2+1}(\mathbb{Q}_v)$. On remarque que $||g_v||_v\geq 1$ pour toute place v et pour toute place p non archimédienne, $||g_p||_p=1$ si $g_p\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_p)$. On définit alors la hauteur globale $||g||$ comme le produit des hauteurs locales.

Définition 2.4.13. *Soit f une fonction sur* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$. *On dit que f est de croissance modérée si il existe des constantes C et N telles que*

$$\forall g\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),f(g)<C||g||^N.$$

Nous pouvons maintenant définir les formes automorphes sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$.

Définition 2.4.14. *Soit f une fonction sur* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$. *On dit que f est une forme automorphe de caractère central ω si $f\in L^2(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ et si f est lisse, $K-$finie, $\mathscr{Z}-$finie et de croissance modérée. De plus, f est une forme automorphe cuspidale si $f\in L^2_0(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$.*

On note $\mathscr{A}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ l'espace des formes automorphes de caractère central ω, et $\mathscr{A}_0(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ l'espace des formes automorphes cuspidales.

Définition 2.4.15. *Soit G un groupe réductif, K un sous-groupe compact maximal de G, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie ou complexe de G. On note également $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante universelle complexe de $\mathfrak{g}$.*

Un $(\mathfrak{g};K)$-module est un $\mathfrak{g}$-module (V,π) qui est localement fini (i.e. tout vecteur de V est contenu dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de V stable par $\mathfrak{g}$), qui est un K-module semi-simple et telle que les actions de $\mathfrak{g}$ et K satisfassent les conditions suivantes :

i) $\pi(k).(\pi(X)).v=\pi(\mathrm{Ad}k(X)).\pi(k).v,k\in K;X\in U(\mathfrak{g});v\in V$.

ii) Si F est un sous-espace de V de dimension finie et K-stable, alors la représentation de K sur F est différentiable et admet $\pi|_{\mathfrak{k}}$ comme différentielle.

Remarque 2.4.16. *Le groupe* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *n'agit pas sur* $\mathscr{A}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$. *En effet, la propriété de* $K-$*finitude n'est pas préservée par translation à droite par des éléments de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. *En revanche,* $\mathscr{A}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ *est stable sous l'action par translation à droite de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_f)$ *et est un* $(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}),O(n))-$*module. Ainsi, on dira que* $\mathscr{A}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ *admet une représentation de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *dans le sens suivant :* $\mathscr{A}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$ *admet une représentation de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_f)$ *et une structure de* $(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}),O(n))-$*module commutatif.*

Définition 2.4.17. *On appelle représentation automorphe de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *toute représentation* (π,V) *irréductible de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *qui peut être réalisée comme quotient de* $\mathscr{A}(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$. *On appelle* ω *le caractère central de* π.

Si $V\subset\mathscr{A}_0(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$, *on dit que* π *est une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$.

Définition 2.4.18. *Soit* (π,V) *une représentation de* K, *soit* (ρ,V_ρ) *une représentation irréductible de dimension finie de* K. *On désigne par* $V(\rho)$ *la somme de tous les* $K-$*sous-modules de* V *qui sont isomorphes à* V_ρ. *On appelle* $V(\rho)$ *la partie* ρ*-isotypique de* (V,π).

Nous allons maintenant définir la notion de représentation admissible de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$.

Définition 2.4.19. *Soit* (π,V) *une représentation automorphe de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$, *i.e.* V *est un espace vectoriel complexe muni d'une structure de* $(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}),O(n))-$*module et d'une action de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_f)$ *qui commutent. On combine ces deux actions pour obtenir une représentation* π *de* K.

On dit alors que (π,V) *est une représentation admissible de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$ *si tout vecteur dans* V *est* $K-$*fini, et si pour toute représentation* ρ *irréductible de dimension finie de* K, *la partie* $\rho-$*isotypique* $V(\rho)$ *de* V *est de dimension finie.*

Théorème 2.4.20. *([Bum], Théorème 3.3.3) Soit* (π,V) *une représentation automorphe admissible irréductible de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$. *Alors il existe un* $(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}),O(n))$*-module admissible irréductible* (π_∞,V_∞) *et pour toute place non archimédienne* p, *il existe une représentation admissible irréductible* (π_p,V_p) *de* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q}_p)$ *tels que pour presque toute place* p, V_p *contient un vecteur non nul* ξ_p^0 *fixé par* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_p)$. *De plus, on a*

$$\pi\simeq\otimes_v'\pi_v.$$

Dans toute la suite, on supposera toujours les représentations admissibles de telle sorte qu'on ait la propriété suivante : pour toute représentation automorphe admissible $\pi=\otimes_v'\pi_v$ de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A})$, il existe un ensemble fini S de places de $\mathbb{Q}$ contenant la place archimédienne tel que pour toute place $p\notin S$, π_p contient un vecteur non nul fixé par $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_p)$. On dit qu'une telle représentation π_p est sphérique. D'après le Théorème 4.6.2 de [Bum], le vecteur sphérique, si il existe, est unique à multiplication par un scalaire près. Enfin, on appellera *ramifiées* les places non-archimédiennes contenues dans S, *non-ramifiées* les autres. Au regard du théorème suivant, les places non-ramifiées contiennent l'essentiel de l'information de la représentation dans le cas où elle est cuspidale.

Théorème 2.4.21. *([Bum], Théorème 3.3.6, [Lan80], Lemme 3.1)*

Soit (π,V) *et* (π',V') *deux sous-représentations admissibles de* $\mathscr{A}_0(\mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}),\omega)$.

On suppose que $\pi_p\simeq\pi'_p$ *pour presque toute place non archimédienne. Alors les représentations* π *et* π' *sont isomorphes.*

2.4.3 Variétés de Shimura

Nous allons maintenant définir les variétés de Shimura.

Définition 2.4.22. *Soit* $g_f = (g_p)_{p\in\mathscr{P}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$. *Pour tout* p, *soit* Γ_p *le sous-groupe de* $\overline{\mathbb{Q}}_p^{\times}$ *engendré par les valeurs propres de* g_p. *On considère un plongement* $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ *ainsi que le sous-groupe de torsion* $(\overline{\mathbb{Q}}^{\times} \cap \Gamma_p)_{\mathrm{tor}}$ *(qui ne dépend pas du choix du plongement). On dit alors que* g_f *est net si*

$$\bigcap_p (\overline{\mathbb{Q}}^{\times} \cap \Gamma_p)_{\mathrm{tor}} = 1.$$

Si G *est un groupe algébrique linéaire, on dit qu'un élément* $g_f \in G(\mathbb{A}_f)$ *est net si son image par une représentation fidèle de* G *est nette (et si c'est le cas, cela le sera pour toute représentation fidèle).*

On dit alors qu'un sous-groupe de $G(\mathbb{A}_f)$ *est net si tous ses éléments sont nets.*

Définition 2.4.23. *Pour tout sous-groupe* K *net compact ouvert de* $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$, *on appelle* S^K *la variété de Shimura de niveau* K *associée à* $(\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f), \mathscr{H})$ *définie en tant que variété analytique complexe par :*

$$S^K(\mathbb{C}) = \mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q})_+ \backslash (\mathscr{H} \times \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)/K)$$

où $\mathscr{H}$ *désigne le demi-plan supérieur de Siegel introduit en Définition 2.3.1.*

Exemple 2.4.24. *Par exemple, si* $K = \Gamma(N) \subset \mathrm{GSp}(4, \hat{\mathbb{Z}})$ *est le sous-groupe de congruence de niveau* $N \geq 3$ *(i.e le groupe constitué des matrices dont la réduction des coefficients modulo* N *est égale à l'identité), on a une application*

$$\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q})_+ \backslash \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)/\Gamma(N) \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$$

induite par l'égalité $\mathbb{Q}_+^{\times} \backslash \mathbb{A}_f^{\times}/(1 + N\hat{\mathbb{Z}}) = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$. *Si on fixe pour chaque* $i \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ *un représentant* $x_i \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ *de la double classe inverse de* i *par l'application ci-dessus, on a la décomposition*

$$S^{\Gamma(N)}(\mathbb{C}) = \mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q})_+ \backslash (\mathscr{H} \times \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)/\Gamma(N)) \simeq \bigsqcup_{i\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \Gamma_i(N)\backslash\mathscr{H}$$

où $\Gamma_i(N) = \mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q})_+ \bigcup_{i\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x_i \Gamma(N) x_i^{-1}$.

Soit $g \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et K, K' deux sous-groupes nets compacts ouverts de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ tels que

$$g^{-1}K'g \subset K.$$

Soit $hK' \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)/K'$. On a alors

$$(hK')g \subset (hg)K.$$

Ainsi, la multiplication à droite par g envoie la classe hK' de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)/K'$ sur la classe $(hg)K$ de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)/K$.

Cela nous permet de définir un morphisme

$$\begin{array}{rcl} [g] : S^{K'} & \longrightarrow & S^{K} \\ \overline{(Z, hK')} & \longmapsto & \overline{(Z, (hg)K)} \end{array}$$

où la barre désigne la classe à droite modulo $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q})$, duquel découle une action de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ sur le système projectif de variétés de Shimura $(S^K)_K$ indexé par les sous-groupes nets compacts ouverts de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$.

Rappelons l'action de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})_+$, le groupe des matrices de taille $(2, 2)$ à déterminant strictement positif, sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$: pour tout $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})_+$, pour tout $z \in \mathbb{H}$, on pose

$$g.z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Pour tout sous-groupe L net compact ouvert de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$, on note Y^L la courbe modulaire définie en tant que variété analytique complexe par

$$Y^L(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})_+ \backslash (\mathbb{H} \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)/L).$$

On obtient de la même manière une action de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ sur le système projectif de courbes modulaires $(Y^L)_L$ indexé par les sous-groupes L nets compacts ouverts de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$.

D'après ce qui précède, $(\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2))(\mathbb{A}_f)$ agit donc sur le système projectif $(S^K \times Y^L)_{(K,L)}$ indexé par les paires (K, L) de sous-groupes nets compacts ouverts de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ respectivement.

Enfin, soit K un sous-groupe net compact ouvert de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$, et L un sous-groupe net compact ouvert de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ tel que $i(L \times L) = K$ où i est l'homomorphisme de groupes $i : \mathrm{GL}(2) \times_{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL}(2) \to \mathrm{GSp}(4)$ défini en section 2.3. Le groupe $M = \det(L)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{A}_f)^\times$ auquel correspond, via la théorie du corps de classe, une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ notée F_M.

On note alors

$$\iota : Y^L(\mathbb{C}) \times_{F_M} Y^L(\mathbb{C}) \to S^K(\mathbb{C})$$

l'immersion fermée induite ([Pin], 3.8).

2.4.4 Cohomologie de De Rham

Soit $H^*_{dR,c}(S^K)$ et $H^*_{dR}(S^K)$ la cohomologie de De Rham avec support compact et sans support respectivement, à coefficients complexes. Soit

$$H^*_{dR,!}(S^K) = \mathrm{Im}(H^*_{dR,c}(S^K) \to H^*_{dR}(S^K)).$$

On définit $H^*_{dR,!}(Y^L)$ et $H^*_{dR,!}(S^K \times Y^L)$ de la même manière.

Lemme 2.4.25. *([Lem20], Lemme 2.1) On a* $H^i_{dR,!}(Y^L) = 0$ *si* $i \neq 1$

Démonstration. Puisque les composantes connexes de Y^L sont non compactes,

$$H^0_{dR,c}(Y^L) = 0.$$

Comme Y est de dimension 2, d'après la dualité de Poincaré, on a l'isomorphisme suivant :

$$H^0_{dR,c}(Y^L) \simeq H^2_{dR}(Y^L).$$

Ainsi,

$$H^2_{dR}(Y^L) = 0,$$

ce qui implique le lemme.

$\square$

Notons

$$H^5_{dR,!}(S \times Y) = \varinjlim_K \varinjlim_L H^5_{dR,!}(S^K \times Y^L)$$

où les limites sont indexées par les sous-groupes compacts ouverts K et L de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ respectivement. On montre dans l'Annexe en section 8 que $H^5_{dR,!}(S^K \times Y^L) = H^5_{dR,!}(S \times Y)^{K \times L}$.

On définit $H^4_{dR,!}(S)$ et $H^1_{dR,!}(Y)$ de la même manière. Ainsi, d'après la formule de Künneth et le lemme précédent, on obtient l'isomorphisme canonique suivant :

$$H^5_{dR,!}(S \times Y) \simeq H^4_{dR,!}(S) \otimes H^1_{dR,!}(Y).$$

Chapitre 3

Construction de la forme différentielle

3.1 Rappels de Théorie de Lie classique

La présentation de cette section est empruntée à [CLR].

On rappelle que $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R}) | {}^t g J g = J\}$ où J désigne la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On appelle K_∞ le sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$ défini par

$$K_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} | A^t A + B^t B = I_2, A^t B = B^t A \right\}.$$

Enfin, on note $\mathrm{U}(2) = \{M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) | {}^t \overline{M} M = I_2\}$.

Alors on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} K_\infty & \simeq & \mathrm{U}(2) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} & \longmapsto & A + iB. \end{array}$$

On désigne par $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K_∞. Concrètement,

$$\mathfrak{k} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} | A = -{}^t A, B = {}^t B \right\}.$$

Si on note $\mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie complexe de $\mathrm{GSp}(4)$, on a la décomposition de Cartan

$$\mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{p}_\mathbb{C}^+ \oplus \mathfrak{p}_\mathbb{C}^-,$$

où $\mathfrak{p}_\mathbb{C}^\pm = \left\{ \begin{pmatrix} A & \pm iA \\ \pm iA & -A \end{pmatrix} \in M(4,\mathbb{C}) | A = {}^t A \right\}$.

Introduisons maintenant les matrices

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère alors

$$T_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ -D_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$T_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & D_2 \\ -D_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit $\mathfrak{h} = \mathbb{R}T_1 \oplus \mathbb{R}T_2$. $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan compacte de $\mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}$.

Proposition 3.1.1. *Soit (e_1, e_2) la base de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ duale de (T_1, T_2).*

On a alors le système de racines positives pour $(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ donné par

$$\{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2\}.$$

Les racines simples sont $e_1 - e_2$ et $2e_2$.

On remarque que $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^+$ est engendré par les espaces de racines correspondant aux racines positives $2e_1, 2e_2$ et $e_1 + e_2$.

On appelle $\Delta = \{\pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm(e_1 \pm e_2)\}$ l'ensemble de toutes les racines, $\Delta_c = \{\pm(e_1 - e_2)\}$ l'ensemble des racines compactes et $\Delta_{nc} = \Delta - \Delta_c$ l'ensemble des racines non compactes.

On note de même Δ^+, Δ_c^+ et Δ_{nc}^+ l'ensemble des racines positives, compactes positives et non compactes positives respectivement.

Les espaces de racines sont les suivants :

- Pour $j = 1$ ou 2, $X_{\pm 2e_j} = \begin{pmatrix} D_j & \pm iD_j \\ \pm iD_j & -D_j \end{pmatrix}$ engendre l'espace de racines de $\pm 2e_j$.

- Soit $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors, les éléments $X_{\pm(e_1+e_2)} = \begin{pmatrix} E_{1,2} & \pm iE_{1,2} \\ \pm iE_{1,2} & -E_{1,2} \end{pmatrix}$ engendrent l'espace de racines de $e_1 + e_2$.

-Soit $F_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors, les éléments $X_{\pm(e_1-e_2)} = \begin{pmatrix} \pm F_{1,2} & -iE_{1,2} \\ iE_{1,2} & \pm F_{1,2} \end{pmatrix}$ engendrent l'espace de racines de $\pm(e_1 - e_2)$.

Avec ces notations, on définit

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{nc}^+} \mathbb{C}X_{\pm\alpha}.$$

Puisque $\Delta_{nc}^+ = \Delta^+ - \Delta_c^+$, il s'ensuit que

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^{\pm} = \mathbb{C}X_{2e_1} \oplus \mathbb{C}X_{2e_2} \oplus \mathbb{C}X_{e_1+e_2}.$$

Définition 3.1.2. *On note* $(k_1, k_2) = k_1e_1 + k_2e_2$ *les poids intégraux, où les* k_i *sont des entiers relatifs.*

On dit qu'un poids intégral est dominant si $k_1 \geq k_2$.

On rappelle l'existence d'une bijection entre les classes d'isomorphisme des représentatons complexes irréductibles de dimension finie de K_∞ et les poids intégraux dominants, définie en associant la représentation $\tau_{(k_1,k_2)}$ à son plus haut poids (k_1, k_2) ([CLR], 3.1.4).

Rappelons quelques définitions.

Définition 3.1.3. *Soit* G *un groupe. On appelle représentation unitaire de* G *toute représentation* (π, V) *telle que* V *est un espace de Hilbert et si pour tout élément* g *de* G, $\pi(g)$ *est un opérateur unitaire, i.e.*

$$\pi^*(g)\pi(g) = Id$$

où $\pi^*(g)$ *désigne l'opérateur adjoint de* g.

Définition 3.1.4. *On appelle série discrète toute représentation unitaire irréductible d'un groupe topologique localement compact* G*, muni d'une mesure de Haar* μ*, qui soit une sous-représentation de la représentation régulière de* G *sur* $(L^2(G), \mu)$.

Soit G un groupe réductif et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie complexe. Soit K un sous-groupe compact maximal de G et on note $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie complexe. Enfin, on considère V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module via le morphisme $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Rappelons la définition des groupes de cohomologie $H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi)$ comme présentée par [BW], Section I.1.2.

Pour tout $q \in \mathrm{N}$, on note $C^q = C^q(\mathfrak{g}, \pi) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda^q\mathfrak{g}, V)$, et $d : C^q \to C^{q+1}$ définie par

$$df(x_0, ..., x_q) = \sum_i (-1)^i x_i f(x_0, ..., \hat{x}_i, ..., x_q) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_0, ..., \hat{x}_i, ..., \hat{x}_j, ...x_q)$$

où le symbole ˆ au-dessus d'un argument signifie que celui-ci doit être omis.

Avec ces notations, on a $d^2 = 0$ et $H^*(\mathfrak{g}, \pi)$ désigne la cohomologie du complexe C^q.

On définit maintenant pour tout $x \in \mathfrak{g}$ l'endomorphisme θ_x de C^q et le produit intérieur $i_x : C^q \to C^{q-1}$ définis par

$$(\theta_x f)(x_1, ..., x_q) = \sum_i f(x_1, ..., [x_i, x], ..., x_q) + xf(x_1, ..., x_q)$$

et

$$(i_x f)(x_1, ..., x_{q-1}) = f(x, x_1, ..., x_{q-1}).$$

Définition 3.1.5. *On note* $C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \pi)$ *le sous-espace de* $C^q(\mathfrak{g}, \pi)$ *constitué des éléments annulés par les applications* θ_x *et* i_x *pour tout* $x \in \mathfrak{g}$.

Alors le complexe $C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \pi)$ *est stable par* d *et ses groupes de cohomologie sont notés* $H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \pi)$.

Remarque 3.1.6. *Avec ces notations, on a* $C^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}, \pi) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(\Lambda^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi)$ *où l'action de* $\mathfrak{k}$ *sur* $\Lambda^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$ *est induite par la représentation adjointe.*

Remarque 3.1.7. *Ces groupes de cohomologie respectent la règle de Künneth, i.e. si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{k}_2$ *et* $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$*, alors on a pour tout entier* q *:*

$$H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \pi) = \bigoplus_{a+b=q} H^q(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{k}_1, \pi_1) \otimes H^q(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{k}_2, \pi_2).$$

L'inclusion $\mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}$ induit un isomorphisme

$$\mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}/\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}/(\mathrm{Lie}(K'_\infty))_{\mathbb{C}}$$

où $K'_\infty = \mathbb{R}_+^* K_\infty$.

Définition 3.1.8. *Soit $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ une représentation automorphe de* $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$.
La représentation π est dite cohomologique si $H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty; \pi_\infty) \neq 0$.

Proposition 3.1.9. *([BW], II. Proposition 3.1) Si π est cohomologique, alors*

$$H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty; \pi_\infty) = \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\bigwedge^3 \mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}/\mathfrak{k}; \pi_\infty).$$

Proposition 3.1.10. *Soit π une représentation automorphe de* $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$.
Si π est cohomologique, alors π_∞ est une série discrète.

Démonstration. Voir la preuve de [MT], Proposition 1. □

En utilisant la décomposition de Cartan, on obtient :

$$\bigwedge^3 \mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}/\mathfrak{k} = \bigoplus_{p+q=3} \bigwedge^p \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^+ \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^-.$$

3.2 Fonctions de Whittaker

On désigne par $\psi : \mathbb{Q}\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^*$ le caractère additif non trivial caractérisé par $\psi(x) = e^{2i\pi x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Considérons $N(\mathbb{Q}) \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ le sous-groupe unipotent maximal défini par

$$N(\mathbb{Q}) = \left\{ n(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

On considère alors le caractère $\psi_N : N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ défini par

$$\psi_N(n(x_0, x_1, x_2, x_3)) = \psi(-x_0 - x_3).$$

Définition 3.2.1. *Soit $\pi = \bigotimes'_v \pi_v$ une représentation automorphe cuspidale irréductible de* $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$.
La fonction globale de Whittaker W_Ψ sur $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ attachée à une forme cuspidale $\Psi \in \pi$ est

$$W_\Psi(g) = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \Psi(ng)\psi_N(n^{-1})\,\mathrm{d}n.$$

On dira que π est générique si il existe une forme $\Psi \in \pi$ telle que W_Ψ n'est pas identiquement nulle.

Définissons maintenant les fonctions locales de Whittaker ([Mor04], section 2.1).
Pour toute place v de $\mathbb{Q}$, on note $\psi_{N,v}$ la restriction de ψ_N à $N(\mathbb{Q}_v)$.

Définition 3.2.2. *On appelle* $\mathscr{C}^{\infty}_{\psi_{N,v}}(N(\mathbb{Q}_v)\backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_v))$ *l'espace*

$$\{W : \mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_v) \to \mathbb{C} | W \, lisse, W(ng) = \psi_{N,v}(n)W(g), \forall (n,g) \in N(\mathbb{Q}_v) \times \mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_v)\}.$$

C'est une représentation de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_v)$ *sur laquelle* $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_v)$ *agit par translation à droite.*

Supposons que $v = p$ est une place non archimédienne de $\mathbb{Q}$.

Théorème 3.2.3. *([Rod], Théorème 3) Soit* π_p *une représentation admissible irréductible de* $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_p)$*. Alors l'espace d'entrelacement*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_p)}(\pi_p, \mathscr{C}^{\infty}_{\psi_{N,p}}(N(\mathbb{Q}_p)\backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_p)))$$

est de dimension au plus 1.

Définition 3.2.4. *On reprend les notations du théorème ci-dessus.*
Si il existe un opérateur d'entrelacement non nul

$$\Psi_p \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_p)}(\pi_p, \mathscr{C}^{\infty}_{\psi_{N,p}}(N(\mathbb{Q}_p)\backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{Q}_p))),$$

on dit que π_p *est générique.*
Pour tout $u \in \pi_p$*, on appelle* $W_u = \Psi_p(u)$ *la fonction locale de Whittaker associée à* u*.*
Enfin, on désigne par

$$W(\pi_p, \psi_{N,p}) = \{W_u | u \in \pi_p\}$$

le modèle de Whittaker de π_p *attaché à* $\psi_{N,p}$*.*

Supposons maintenant que $v = \infty$ est la place archimédienne de $\mathbb{Q}$.

Définition 3.2.5. *Pour tout* $g \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})$*, on appelle norme de* g *la quantité définie par*

$$||g|| = \max\{|g_{i,j}|, |(g^{-1})_{i,j}| | 1 \leq i,j \leq 4\}.$$

Une fonction $W : \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ *est dite de croissance modérée si il existe* $C > 0$ *et* $M > 0$ *tels que pour tout* $g \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})$*, on ait*

$$|W(g)| \leq C||g||^M.$$

On appelle $\mathscr{A}_{\psi_{N,\infty}}(N(\mathbb{R})\backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R}))$ *l'espace des fonctions* $W \in \mathscr{C}^{\infty}_{\psi_{N,\infty}}(N(\mathbb{R})\backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R}))$ *qui sont de croissance modérée.*

Théorème 3.2.6. *([Wa], Théorème 8.8)*
Soit π_∞ *un* $(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty)$*-module.*
Alors l'espace d'entrelacement $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty)}(\pi_\infty, \mathscr{A}_{\psi_{N,\infty}}(N(\mathbb{R})\backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})))$ *est de dimension au plus 1.*

Définition 3.2.7. *On reprend les notations du théorème ci-dessus.*

Si il existe un opérateur d'entrelacement non nul

$$\Psi_\infty \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}},K'_\infty)}(\pi_\infty, \mathscr{A}_{\psi_{N,\infty}}(N(\mathbb{R})\backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})))$$

on dit que π_∞ est générique.

Pour tout $u \in \pi_\infty$, on appelle $W_u = \Psi_\infty(u)$ la fonction locale de Whittaker associée à u.

Enfin, on désigne par

$$W(\pi_\infty, \psi_{N,\infty}) = \{W_u | u \in \pi_\infty\}$$

le modèle de Whittaker de π_∞ attaché à $\psi_{N,\infty}$.

Théorème 3.2.8. *([Bum], Théorème 3.5.5) Soit σ une représentation automorphe cuspidale de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$. *Soit $\Phi \in \sigma$ une forme cuspidale.*

La fonction globale de Whittaker sur $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *associée à Φ est*

$$W_\Phi(g) = \int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \Phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix} g\right) \psi(-x)\,\mathrm{d}x.$$

On a le développement de Fourier

$$\Phi(g) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}^*} W_\Phi\left(\begin{pmatrix}\alpha & \\ & 1\end{pmatrix} g\right).$$

Ceci implique que pour toute forme cuspidale Φ non nulle, W_Φ n'est pas identiquement nulle.

Démonstration. Rappelons quelques éléments de la preuve. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{A}$ par

$$F(x) = \Phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix} g\right).$$

Pour tout $a \in \mathbb{Q}$, on a

$$\begin{aligned} F(x+a) &= \Phi\left(\begin{pmatrix}1 & a\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix} g\right)\\ &= F(x)\end{aligned}$$

car Φ est automorphe et $\begin{pmatrix}1 & a\\ & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$. Ainsi, F est une fonction continue sur le groupe compact $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{A}$ donc F admet un développement de Fourier selon les caracètres de $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{A}$. D'après ([Bum], Exercice 3.1.3), un tel caractère est de la forme $x \longmapsto \psi(\alpha x)$ pour $\alpha \in \mathbb{Q}$. On a donc l'égalité

$$\Phi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ & 1\end{pmatrix} g\right) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Q}} C(\alpha)\psi(\alpha x),$$

où le coefficient de Fourier $C(\alpha)$ vérifie

$$C(\alpha) = \int_{\mathbb{Q}\setminus\mathbb{A}} \Phi\left(\begin{pmatrix}1 & x \\ & 1\end{pmatrix} g\right)\psi(-\alpha x)dx.$$

Remarquons que pour obtenir cette égalité, il est crucial que dx soit la mesure de Haar qui donne volume 1 à $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{A}$.

Si $\alpha = 0$, alors $C(\alpha) = 0$ car Φ est cuspidale.

Si $\alpha \neq 0$, on a en utilisant le fait que Φ soit automorphe

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= \int_{\mathbb{Q}\setminus\mathbb{A}} \Phi\left(\begin{pmatrix}\alpha & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x \\ & 1\end{pmatrix} g\right)\psi(-\alpha x)dx \\ &= \int_{\mathbb{Q}\setminus\mathbb{A}} \Phi\left(\begin{pmatrix}1 & \alpha x \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \\ & 1\end{pmatrix} g\right)\psi(-\alpha x)dx. \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $x \mapsto \alpha^{-1}x$, qui est unimodulaire car $\alpha \in \mathbb{Q}^*$. On obtient alors

$$C(\alpha) = W_\Phi\left(\begin{pmatrix}\alpha & \\ & 1\end{pmatrix} g\right).$$

En injectant ce résultat dans le développement de Fourier de la fonction F, et en l'appliquant en $x = 0$, on obtient la formule voulue. □

Ainsi, dans le cas de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$, toutes les formes automorphes cuspidales sont génériques. On note $\mathscr{W}$ l'espace des fonctions de Whittaker W_Φ. On dit que $\mathscr{W}$ est un modèle de Whittaker pour σ.

On vérifie aisément que pour tout Φ, W_Φ satisfait l'équation

$$W_\Phi\left(\begin{pmatrix}1 & x \\ & 1\end{pmatrix} g\right) = \psi(x)W(g).$$

On définit alors le modèle local de Whittaker $W(\sigma_v, \psi_{N,v})$ de manière similaire à ci-dessus.

3.3 Séries discrètes

D'après [Lem17] Proposition 3.1, la classification d'Harish-Chandra établit que l'ensemble des classes d'isomorphismes des séries discrètes de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+ = \nu^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ avec les mêmes caractères central et infinitésimal que la représentation triviale possède 4 éléments et on le note

$$P_4 = \{\pi_\infty^{3,0}, \pi_\infty^{2,1}, \pi_\infty^{1,2}, \pi_\infty^{0,3}\}.$$

Avec ces notations, $\pi_\infty^{3,0}$ est holomorphe,$\pi_\infty^{2,1}$ et $\pi_\infty^{1,2}$ sont génériques, c'est à dire qu'elles admettent un modèle de Whittaker non nul et sont déterminées par leurs types de Hodge que nous verrons ultérieurement en section 3.4, et $\pi_\infty^{0,3}$ est antiholomorphe.

Dans toute la suite, nous considérerons uniquement des représentations automorphes cohomologiques π de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$ telles que $\pi_\infty|_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+}$ soit une somme de deux éléments conjugués de P_4.

Définition 3.3.1. *Soit G un groupe, H un sous-groupe de G et (π, V) une représentation de H.*

Soit V^G l'espace vectoriel des fonctions $f : G \to V$ telles que $f(hg) = \pi(h)f(g)$, pour tout $h \in H$, pour tout $g \in G$.

On définit la représentation induite $\mathrm{Ind}_H^G \pi$ de G par :

$$(\mathrm{Ind}_H^G \pi(g)f)(x) = f(xg),$$

pour tout $(g, x) \in G^2$, pour tout $f \in V^G$.

Définition 3.3.2. *On note π_∞^H et π_∞^W les séries discrètes de* $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{R})$ *définies par*

$$\pi_\infty^H = \mathrm{Ind}_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+}^{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})} \pi_\infty^{3,0} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+}^{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})} \pi_\infty^{0,3}$$

et

$$\pi_\infty^W = \mathrm{Ind}_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+}^{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})} \pi_\infty^{2,1} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+}^{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})} \pi_\infty^{1,2}.$$

Ainsi, on a notamment :

$$\pi_\infty^H|_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+} = \pi_\infty^{3,0} \oplus \pi_\infty^{0,3}$$

et

$$\pi_\infty^W|_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+} = \pi_\infty^{2,1} \oplus \pi_\infty^{1,2}.$$

De la même manière, on désigne par $P_2 = \{\sigma_\infty^{1,0}, \sigma_\infty^{0,1}\}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des séries discrètes de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})_+ = \det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ avec les mêmes caractères central et infinitésimal. Avec ces notations, $\sigma_\infty^{1,0}$ est holomorphe et $\sigma_\infty^{0,1}$ est antiholomorphe.

Définition 3.3.3. *On appelle σ_∞ la représentation induite*

$$\sigma_\infty = \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})_+}^{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})} \sigma_\infty^{1,0} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})_+}^{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})} \sigma_\infty^{0,1}.$$

Ainsi,

$$\sigma_\infty|_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})_+} = \sigma_\infty^{1,0} \oplus \sigma_\infty^{0,1}.$$

On note $\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie complexe de $\mathrm{GL}(2)$. On désigne par L_∞ le groupe $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ vu comme un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ modulo son centre. Comme précédemment, on note $L'_\infty = \mathbb{R}_+^* L_\infty$.

Proposition 3.3.4. *On a un isomorphisme* $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)(\mathbb{A}_f)$*-équivariant :*

$$H^4_{dR,!}(S \times Y) \simeq \bigoplus_{\pi,\sigma} H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty)^{m(\pi)} \otimes H^1(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, L'_\infty, \sigma_\infty)^{m(\sigma)} \otimes (\pi_f \times \sigma_f),$$

où la somme est indexée par les classes d'équivalence de repésentations automorphes cuspidales $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ et $\sigma = \sigma_\infty \otimes \sigma_f$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ telles que $\pi_\infty|_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+} \in P_4$ et $\sigma_\infty|_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})_+} \in P_2$ et où $m(\pi)$ et $m(\sigma)$ désignent les multiplicités cuspidales de π et σ respectivement.

Démonstration. Cela provient de l'isomorphisme

$$H^4_{dR,!}(S \times Y) \simeq H^3_{dR,!}(S) \otimes H^1_{dR,!}(Y),$$

de [Lem17], Lemme 3.6 et [Sch] Lemme 12.3. □

Soit $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie complexe de L'_∞.

Proposition 3.3.5. *Pour tout $\pi_\infty^{p,q} \in P_4$, pour tout $\sigma_\infty^{r,s} \in P_2$, $H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty; \pi_\infty^{p,q}) = \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\bigwedge^3 \mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}/\mathfrak{k}; \pi_\infty^{p,q})$ et $H^1(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, L'_\infty; \sigma_\infty^{r,s}) = \mathrm{Hom}_{L'_\infty}(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}/\mathfrak{l}; \sigma_\infty^{r,s})$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension 1.*

Démonstration. Cela découle de la Proposition 3.1.9 et de [BW] Proposition 3.1 et Théorème 5.3 □

3.4 Décompositions de Hodge

Soit G un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ et soit π une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A})$. On considère P un sous-groupe parabolique de G. Alors, d'après [Wei09], section 1.3, pour pour presque toute place v, il existe une représentation irréductible τ_v, de caractère central ω_v, du groupe de Levi de P_v telle que π_v soit un sous-quotient de $\mathrm{Ind}_{P_v}^{G_v}(\tau_v)$.

Définition 3.4.1. *Une représentation automorphe cuspidale π est dite CAP si il existe un sous-groupe net parabolique P de G et un ensemble fini T de places tel que la représentation $\otimes_{v \notin T} \tau_v$ du groupe de Levi de P est automorphe.*

Remarque 3.4.2. *D'après [PSS], Théorème 1.1, si π est globalement générique, alors π n'est pas CAP.*

Fixons $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ une représentation automorphe unitaire irréductible cuspidale de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$, et $\sigma = \sigma_\infty \otimes \sigma_f$ une représentation automorphe unitaire cuspidale de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$. Soit E un corps de nombres sur lequel π_f et σ_f sont définis (voir chapitre 4).

On note

$$M_B(\pi_f \times \sigma_f) = \mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)(\mathbb{A}_f)]}(\pi_f \times \sigma_f, H^4_{B,!}(S \times Y, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E).$$

Proposition 3.4.3. *Supposons que π soit globalement générique, i.e. qu'il existe $\Psi \in \pi$ telle que la fonction $W_\Psi : \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ définie précédemment n'est pas identiquement nulle.*

Alors l'inclusion naturelle $H^4_{B,!}(S \times Y, \mathbb{Q}) \subset H^4_B(S \times Y, \mathbb{Q})$ induit un isomorphisme

$$M_B(\pi_f \times \sigma_f) = \mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)(\mathbb{A}_f)]}(\pi_f \times \sigma_f, H^4_B(S \times Y, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E).$$

Démonstration. π étant globalement générique, π n'est pas CAP. On peut donc appliquer [Wei09] Théorème 1.1 :

$$\mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4)(\mathbb{A}_f)]}(\pi_f, H^3_B(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E) = \mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4)(\mathbb{A}_f)]}(\pi_f, H^3_{B,!}(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E)$$

et

$$\mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4)(\mathbb{A}_f)]}(\pi_f, H^4_B(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E) = 0.$$

De même, puisqu'il n'y a pas de représentations CAP pour $\mathrm{GL}(2)$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GL}(2)(\mathbb{A}_f)]}(\sigma_f, H^1_B(Y, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E) = \mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GL}(2)(\mathbb{A}_f)]}(\sigma_f, H^1_{B,!}(Y, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E).$$

Ainsi, d'après la formule de Künneth, on obtient le résultat voulu :

$$\mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)(\mathbb{A}_f)]}(\pi_f \times \sigma_f, H^4_{B,!}(S \times Y, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E) = \mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)(\mathbb{A}_f)]}(\pi_f \times \sigma_f, H^4_B(S \times Y, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E).$$

□

On définit de manière analogue

$$M_B(\pi_f) = \mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4)(\mathbb{A}_f)]}(\pi_f, H^3_{B,!}(S, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E)$$

et

$$M_B(\sigma_f) = \mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GL}(2)(\mathbb{A}_f)]}(\sigma_f, H^1_{B,!}(Y, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E).$$

La formule de Künneth permet alors d'établir naturellement que

$$M_B(\pi_f \times \sigma_f) = M_B(\pi_f) \otimes_E M_B(\sigma_f).$$

D'après les propositions 3.3.4, 3.3.5 et l'isomorphisme de comparaison entre les cohomologies de De Rham et de Betti, ce sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie équipés d'une action de E $\mathbb{Q}$-linéaire.

De plus, après avoir étendu les scalaires de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$, on a les décompositions de Hodge suivantes :

$$M_B(\pi_f)_{\mathbb{C}} = M(\pi_f)^{3,0} \oplus M(\pi_f)^{2,1} \oplus M(\pi_f)^{1,2} \oplus M(\pi_f)^{0,3}$$

et

$$M_B(\sigma_f)_{\mathbb{C}} = M(\sigma_f)^{1,0} \oplus M(\sigma_f)^{0,1}$$

où

$$M(\pi_f)^{3,0} = \bigoplus_{\sigma : E \to \mathbb{C}} H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{3,0})^{m(\pi_\infty^H \otimes \pi_f)},$$

$$M(\pi_f)^{2,1} = \bigoplus_{\sigma : E \to \mathbb{C}} H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{2,1})^{m(\pi_\infty^W \otimes \pi_f)},$$

$$M(\pi_f)^{1,2} = \bigoplus_{\sigma : E \to \mathbb{C}} H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{1,2})^{m(\pi_\infty^W \otimes \pi_f)},$$

$$M(\pi_f)^{0,3} = \bigoplus_{\sigma : E \to \mathbb{C}} H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{0,3})^{m(\pi_\infty^H \otimes \pi_f)},$$

$$M(\sigma_f)^{1,0} = \bigoplus_{\sigma : E \to \mathbb{C}} H^1(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, L'_\infty, \sigma_\infty^{1,0})^{m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f)}$$

et

$$M(\sigma_f)^{0,1} = \bigoplus_{\sigma : E \to \mathbb{C}} H^1(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, L'_\infty, \sigma_\infty^{0,1})^{m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f)}$$

où les sommes sont indexées par les plongements complexes du corps de nombres E.

Enfin, puisque

$$M_B(\pi_f \times \sigma_f) = M_B(\pi_f) \otimes_E M_B(\sigma_f),$$

$M_B(\pi_f \times \sigma_f)_{\mathbb{C}}$ admet la structure de Hodge produit suivante :

$$M_B(\pi_f \times \sigma_f)_{\mathbb{C}} = M^{4,0} \oplus M^{3,1} \oplus M^{2,2} \oplus M^{1,3} \oplus M^{0,4},$$

où

$$M^{4,0} = M(\pi_f)^{3,0} \otimes M(\sigma_f)^{1,0},$$
$$M^{3,1} = (M(\pi_f)^{3,0} \otimes M(\sigma_f)^{0,1}) \oplus (M(\pi_f)^{2,1} \otimes M(\sigma_f)^{1,0}),$$
$$M^{2,2} = (M(\pi_f)^{2,1} \otimes M(\sigma_f)^{0,1}) \oplus (M(\pi_f)^{1,2} \otimes M(\sigma_f)^{1,0}),$$
$$M^{1,3} = (M(\pi_f)^{1,2} \otimes M(\sigma_f)^{0,1}) \oplus (M(\pi_f)^{0,3} \otimes M(\sigma_f)^{1,0})$$

et

$$M^{0,4} = M(\pi_f)^{0,3} \otimes M(\sigma_f)^{0,1}.$$

3.5 Construction de la forme différentielle

Rappelons qu'on a fixé deux représentations automorphes unitaires cuspidales irréductibles $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ et $\sigma = \sigma_\infty \otimes \sigma_f$ de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ respectivement. On suppose que $\pi_\infty|_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+} \in P_4$ et $\sigma_\infty|_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})_+} \in P_2$.

On suppose en outre que π est globalement générique, ce qui implique que $\pi_\infty \simeq \pi_\infty^W$.

Proposition 3.5.1. *([JS]) On a*

$$m(\pi_\infty^W \otimes \pi_f) = 1.$$

Ainsi, puisque

$$M(\pi_f)^{2,1} = \bigoplus_{\sigma: E \to \mathbb{C}} H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{2,1})^{m(\pi_\infty^W \otimes \pi_f)},$$

et puisque $\dim_{\mathbb{C}} H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{2,1}) = 1$ d'après la Proposition 3.3.5, on peut affirmer que le $\mathbb{C} \otimes E$-module $M(\pi_f)^{2,1}$ est de rang 1. On va désormais montrer comment attacher un générateur de ce module à certaines formes cuspidales dans π.

D'après [Lem17], Proposition 3.1, $\pi_\infty^{2,1}$ contient $\tau_{(3,-1)}$ avec multiplicité 1 pour K'_∞-type minimal.

Rappelons que

$$H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{2,1}) = \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\bigwedge^3 \mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}/\mathfrak{k}; \pi_\infty^{2,1}).$$

Lemme 3.5.2. *Soit $\Psi_\infty \in \pi_\infty^{2,1}$ un vecteur de plus haut poids du K'_∞-type minimal.*

Alors, il existe un unique élément $\Omega_{\Psi_\infty} \in H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{2,1})$ tel que

$$\Omega_{\Psi_\infty}(X_{(2,0)} \wedge X_{(1,1)} \otimes X_{(0,-2)}) = \Psi_\infty.$$

Démonstration. On rappelle qu'on a

$$\bigwedge^3 \mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}/\mathfrak{k} = \bigoplus_{p+q=3} \bigwedge^p \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^+ \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^-.$$

Or, d'après [Lem17], section 3.2,

$$\bigwedge^2 \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^- = \tau_{(3,-1)} \oplus \tau_{(2,0)} \oplus \tau_{(1,1)}.$$

Ainsi, l'existence de Ω_{Ψ_∞} est assurée par le fait que $X_{(2,0)} \wedge X_{(1,1)} \otimes X_{(0,-2)}$ et Ψ_∞ sont tous les deux des vecteurs de plus haut poids $(3, -1)$. L'unicité, elle, découle du fait que $H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{2,1})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1. □

Rappelons qu'on dispose de l'isomorphisme $\pi_\infty^W|_{\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+} \simeq \pi_\infty^{2,1} \oplus \pi_\infty^{1,2}$.

Soit $\Psi = \Psi_\infty \otimes \Psi_f$ une forme cuspidale dans l'espace $\pi = \pi_\infty^W \otimes \pi_f$. On suppose que Ψ_∞ est un vecteur de plus haut poids du K'_∞-type minimal de $\pi_\infty^{2,1}$ et que Ψ_f est invariant par un sous-groupe net compact ouvert de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$, noté K.

On définit alors
$$\Omega_\Psi = (\Omega_{\Psi_\infty})_{\sigma:E\to\mathbb{C}} \otimes \Psi_f \in H^3_{B,!}(S^K,\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} E.$$
Soit $\omega_\Psi \in M_B(\pi_f)_{\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A}_f)]}(\pi_f, H^3_{B,!}(S,\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} E)$ l'unique élément tel que
$$\omega_\Psi(\Psi_f) = \Omega_\Psi$$
où $H^3_{B,!}(S,\mathbb{C}) = \varinjlim_K H^3_{B,!}(S^K,\mathbb{C})$, la limite portant sur tous les sous-groupes K compacts ouverts de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A}_f)$. Ainsi, par construction,
$$\omega_\Psi \in M(\pi_f)^{2,1}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ -1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$.

Puisque $\nu(A) = -1$, A normalise $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$. D'après [Lem17], Remarque 3.2, la représentation de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$ obtenue en conjuguant $\pi_\infty^{2,1}$ par A est isomorphe à $\pi_\infty^{1,2}$.

On appelle alors $\overline{\Psi}_\infty \in \pi_\infty^{1,2}$ l'image de $\Psi_\infty \in \pi_\infty^{2,1}$ via cet isomorphisme.

On définit de manière analogue
$$\Omega_{\overline{\Psi}_\infty} \in H^3(\mathfrak{gsp}_{4,\mathbb{C}}, K'_\infty, \pi_\infty^{1,2}) = \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\bigwedge^3 \mathfrak{sp}_{4,\mathbb{C}}/\mathfrak{k}; \pi_\infty^{1,2})$$
l'unique élément tel que
$$\Omega_{\overline{\Psi}_\infty}(X_{(0,2)} \wedge X_{(-1,-1)} \otimes X_{(2,0)}) = \overline{\Psi}_\infty.$$
Enfin, on construit $\overline{\omega}_\Psi \in M(\pi_f)^{1,2}$ exactement de la même manière que ω_Ψ.

On notera $\overline{\Psi} = \overline{\Psi}_\infty \otimes \Psi_f \in \pi_\infty^W \otimes \pi_f$.

On a la décomposition de Cartan
$$\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}'^+ \oplus \mathfrak{p}'^-,$$
où
$$\mathfrak{p}'^\pm = \left\{ \begin{pmatrix} z & \pm iz \\ \pm iz & -z \end{pmatrix}, z \in \mathfrak{gl}_{1,\mathbb{C}} \right\}.$$
Soit
$$v^\pm = \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}'^\pm.$$
Soit $\Phi = \Phi_\infty \otimes \Phi_f$ une forme cuspidale dans l'espace de $\sigma = \sigma_\infty \otimes \sigma_f$ telle que Φ_∞ est un générateur du L'_∞-type minimal de σ_∞ et telle que Φ_f soit invariante par un sous-groupe net compact ouvert de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_f)$, noté L.

Comme précédemment, on définit $\Omega_{\Phi_\infty} \in H^1(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}, L'_\infty, \sigma_\infty) = \mathrm{Hom}_{L'_\infty}(\mathfrak{gl}_{2,\mathbb{C}}/\mathfrak{l}, \sigma_\infty)$ tel que

$$\Omega_{\Phi_\infty}(v^+) = \Phi_\infty.$$

De même, on note ensuite

$$\Omega_\Phi = (\Omega_{\Phi_\infty})_{\sigma : E \to \mathbb{C}} \otimes \Phi_f \in H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} E,$$

puis on désigne par $\eta_\Phi \in M(\sigma_f)^{1,0}$ l'unique élément de $\mathrm{Hom}_{E[\mathrm{GL}(2,\mathbb{A}_f)]}(\sigma_f, H^1_{B,!}(Y^{,}\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} E)$, où $H^1_{B,!}(Y, \mathbb{C}) = \varinjlim_L H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{C})$, la limite portant sur tous les sous-groupes L compacts ouverts de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$, tel que

$$\eta_\Phi(\Phi_f) = \Omega_\Phi.$$

Or, $m(\sigma_\infty \otimes \sigma_f) = 1$ d'après [Shal] Théorème 5.5.

Ainsi, η_Φ est un générateur de $M(\sigma_f)^{1,0}$.

On a construit un élément $\overline{\omega}_\Psi \in M(\pi_f)^{1,2}$ et un élément $\eta_\Phi \in M(\sigma_f)^{1,0}$.

Il en résulte que $\overline{\omega}_\Psi \otimes \eta_\Phi \in M_B(\pi_f \times \sigma_f)$, et plus particulièrement :

$$\overline{\omega}_\Psi \otimes \eta_\Phi \in M^{2,2}.$$

Pour la suite, il sera utile de considérer

$$M_B(\pi_f \times \sigma_f, 3) = M_B(\pi_f \times \sigma_f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(3).$$

Le motif $M_B(\pi_f \times \sigma_f)_{\mathbb{C}}$ admettant une structure de Hodge pure de poids 4, le motif $M_B(\pi_f \times \sigma_f, 3)_{\mathbb{C}}$ est pur de poids $4 - 2 \times 3 = -2$ et admet une structure de Hodge de type suivant :

$$M_B(\pi_f \times \sigma_f, 3)_{\mathbb{C}} = M^{1,-3} \oplus M^{0,-2} \oplus M^{-1,-1} \oplus M^{-2,0} \oplus M^{-3,1}.$$

Par abus de notation, on peut considérer que $\overline{\omega}_\Psi \otimes \eta_\Phi \in M^{-1,-1}$.

Chapitre 4

Obtention de la suite exacte

4.1 Algèbres de Hecke

4.1.1 Algèbres de Hecke locales sphériques

Soit G un groupe réductif localement compact, unimodulaire et totalement discontinu muni d'une mesure de Haar. Soit K un sous-groupe compact ouvert de G.

On appelle alors $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^{K}(G)$ l'espace des fonctions localement constantes, à support compact et à valeurs rationnelles définies sur $K\backslash G/K$.

Définition 4.1.1. *On définit un produit de convolution sur $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^{K}(G)$ de la façon suivante :*

pour tout couple $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^{K}(G))^2$, pour tout $g \in G$,

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(g) = \int_G \varphi_1(gh^{-1})\varphi_2(h)dh$$

où dh désigne la mesure de Haar fixée préalablement sur G. Ce produit de convolution munit $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^{K}(G)$ d'une structure d'algèbre appelée algèbre de Hecke de G de niveau K.

Soit p un nombre premier.

Soit (π_p, V_{π_p}) une représentation lisse admissible de $G(\mathbb{Q}_p)$ non ramifiée, c'est à dire que l'espace $V_{\pi_p}^{G(\mathbb{Z}_p)}$ des formes automorphes fixées par l'action à droite de $G(\mathbb{Z}_p)$ n'est pas nul.

Soit dx_p la mesure de Haar définie sur $G(\mathbb{Q}_p)$ telle que la mesure du sous-groupe compact maximal $G(\mathbb{Z}_p)$ soit égale à 1.

Lemme 4.1.2. *i) L'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^{G(\mathbb{Z}_p)}(G(\mathbb{Q}_p))$ agit en tant que groupe sur $V_{\pi_p}^{G(\mathbb{Z}_p)}$ de la façon suivante :*

pour tout $\varphi \in \mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^{G(\mathbb{Z}_p)}(G(\mathbb{Q}_p))$, pour tout $\chi \in V_{\pi_p}^{G(\mathbb{Z}_p)}$, pour tout $g \in G(\mathbb{Q}_p)$,

$$(\varphi.\chi)(g) = \int_{G(\mathbb{Q}_p)} \varphi(x)\chi(gx)dx_p.$$

ii) De plus, c'est une action d'algèbre : pour tout couple $(\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^{G(\mathbb{Z}_p)}(G(\mathbb{Q}_p)))^2$*, pour tout* $\chi \in V_{\pi_p}^{G(\mathbb{Z}_p)}$*, pour tout* $g \in G(\mathbb{Q}_p)$*, on a*

$$((\varphi_1 * \varphi_2).\chi)(g) = \varphi_1.(\varphi_2.\chi)(g).$$

Démonstration. i) Soit $\varphi \in \mathscr{H}_{\mathbb{Q}}^{G(\mathbb{Z}_p)}(G(\mathbb{Q}_p))$, soit $\chi \in V_{\pi_p}^{G(\mathbb{Z}_p)}$. Vérifions que $\varphi.\chi$ soit bien fixée par $G(\mathbb{Z}_p)$.

Soit $g \in G(\mathbb{Z}_p)$. Montrons que $\pi_p(g)(\varphi.\chi) = \varphi.\chi$.

Soit $y \in G(\mathbb{Q}_p)$.

$$\begin{aligned}
\pi_p(g)(\varphi.\chi)(y) &= \varphi.\chi(yg) \\
&= \int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(ygx)\varphi(x)dx_p \\
&= \int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(ygx)\varphi(gxg^{-1})dx_p
\end{aligned}$$

par invariance de φ par conjugaison.

On effectue maintenant le changement de variables suivant : on pose

$$h = gxg^{-1},$$

de sorte que $gx = hg$. Par unimodularité de G, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\pi_p(g)(\varphi.\chi)(y) &= \int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(yhg)\varphi(h)dh_p \\
&= \int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(yh)\varphi(h)dh_p \text{ (car } \chi \text{ est fixé par l'action à droite de } G(\mathbb{Z}_p)) \\
&= (\varphi.\chi)(y),
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que

$$\pi_p(g)(\varphi.\chi) = \varphi.\chi.$$

Il reste à vérifier que ceci définit bien une action.

Il est clair que si φ est la fonction nulle, $\varphi.\chi$ est nulle également. Enfin, par linéarité de l'intégrale, il est clair que pour tout couple (φ_1, φ_2) de fonctions dans l'algèbre de Hecke, on a

$$(\varphi_1 + \varphi_2).\chi(g) = (\varphi_1.\chi)(g) + (\varphi_2.\chi)(g).$$

Le lemme est donc prouvé.

ii) Calculons les deux termes séparément. Tout d'abord, avec les notations de l'énoncé, on a

$$\begin{aligned}
\phi_1.(\phi_2.\chi)(g) &= \int_{G(\mathbb{Q}_p)} (\phi_2.\chi)(gy)\phi_1(y)dy_p \\
&= \int_{G(\mathbb{Q}_p)} \left(\int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(gyh)\phi_2(h)dh_p \right) \phi_1(y)dy_p.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}((\phi_1 * \phi_2).\chi)(g) &= \int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(gx)(\phi_1 * \phi_2)(x)dx_p \\ &= \int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(gx)\left(\int_{G(\mathbb{Q}_p)} \phi_1(xh^{-1})\phi_2(h)dh_p\right)dx_p \\ &= \int_{G(\mathbb{Q}_p)}\int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(gx)\phi_1(xh^{-1})\phi_2(h)dh_p dx_p.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $y = xh^{-1}$, on obtient

$$((\phi_1 * \phi_2).\chi)(g) = \int_{G(\mathbb{Q}_p)}\int_{G(\mathbb{Q}_p)} \chi(gyh)\phi_1(y)\phi_2(h)dh_p dy_p.$$

On a donc bien prouvé l'égalité voulue. □

4.1.2 Algèbres de Hecke globales sphériques

Généralisons maintenant au niveau global ce que nous venons de faire localement.

Dans toute la suite, G et H désigneront respectivement GSp(4) et GL(2).

Soit $\pi = \otimes_v \pi_v$ (resp. $\sigma = \otimes_v \sigma_v$) une représentation automorphe admissible irréductible cuspidale générique de $G(\mathbb{A})$ (resp.de $H(\mathbb{A})$).

Soit S l'ensemble fini des places ramifiées pour π, i.e.

$$\forall p \notin S, \pi_p^{G(\mathbb{Z}_p)} \neq 0.$$

On appelle S' l'ensemble des places ramifiées pour σ.

On note alors respectivement $\pi^S = \bigotimes_{p \notin S} \pi_p$ et $\mathbb{A}_f^S = \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p \prod_{p \in S} \mathbb{Q}_p$.

Le groupe $K^S = \prod_{p \notin S} G(\mathbb{Z}_p)$ (resp. $L^{S'} = \prod_{p \notin S'} H(\mathbb{Z}_p)$) est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ (resp. de $H(\mathbb{A}_f)$).

Soit $\mathcal{S}$ le groupe des automorphismes du corps $\mathbb{C}$.

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, α un élément de $\mathcal{S}$ et t un isomorphisme α-linéaire de π sur E, i.e.

$$t(\lambda\varphi) = \alpha(\lambda)t(\varphi), \forall \varphi \in \pi, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pour $g \in G(\mathbb{A})$, on définit $\pi^\alpha(g) \in \mathrm{GL}(E)$ par la formule

$$\pi^\alpha(g) = t \circ \pi(g) \circ t^{-1}.$$

Alors π^α est une représentation de $G(\mathbb{A})$ dans E dont la classe d'isomorphie est indépendante du couple (t, E) ([Wal], section 1.1).

Définition 4.1.3. *Soient $\mathcal{S}(\pi) = \{\alpha \in \mathcal{S}; \pi^\alpha \simeq \pi\}$ et $\mathbb{Q}(\pi)$ le sous-corps des éléments de $\mathbb{C}$ fixés par les éléments de $\mathcal{S}(\pi)$. $\mathbb{Q}(\pi)$ est appelé le corps de rationalité de π.*

On note de même $\mathbb{Q}(\sigma)$ le corps de rationalité de σ.

Définition 4.1.4. *On définit l'algèbre de Hecke sphérique de G de niveau K^S de la façon suivante :*

$$\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)} = \left\{ f : K^S \backslash G(\mathbb{A}_f^S)/K^S \longrightarrow \mathbb{Q}(\pi) \right\},$$

où les fonctions f considérées sont localement constantes et à support compact.

On définit de même l'algèbre de Hecke sphérique de H de niveau $L^{S'}$, notée $\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}$.

On munit ces algèbres du même produit de convolution que celui défini en Définition 4.1.1.

Remarque 4.1.5. *On définit l'action de $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ sur $(\pi^S)^{K^S}$ (resp. de $\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}$ sur$(\sigma^{S'})^{L^{S'}}$) de façon analogue à l'action vue précédemment dans le Lemme 4.1.2. Les calculs faits dans le Lemme 4.1.2 au niveau local restent valables au niveau global. Nous les avons effectués localement plutôt que globalement afin d'alléger les calculs.*

Proposition 4.1.6. *L'espace vectoriel $(\pi^S)^{K^S}$ est de dimension 1 sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Cf. [Bum], proposition 4.2.3 □

Proposition 4.1.7. *Il existe un sous $\mathbb{Q}(\pi)$-espace vectoriel F de $(\pi^S)^{K^S}$ tel que :*

i) $(\pi^S)^{K^S} = F \otimes_{\mathbb{Q}(\pi)} \mathbb{C}$

ii) F est stable par l'action de $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}}$.

Le sous-espace F est unique à homothétie près et $\dim_{\mathbb{Q}(\pi)}(F) = 1$.

Démonstration. Puisque $(\pi^S)^{K^S}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{C}$, on peut appliquer le lemme 1.2.2 dans [Wal]. □

Ainsi, si $f \in \mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ et $\chi \in F$, alors il existe un nombre $\theta_\pi(f) \in \mathbb{Q}(\pi)$ tel que

$$f.\chi = \theta_\pi(f)\chi.$$

Définition 4.1.8. *L'application $\theta_\pi : \mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)} \longrightarrow \mathbb{Q}(\pi)$ ainsi définie est un morphisme d'anneaux. On l'appelle caractère de Hecke. On appelle $\mathfrak{p} = \ker(\theta_\pi)$ son noyau.*

On note $\mathfrak{q} = \ker(\theta_\sigma)$ le noyau du caractère

$$\theta_\sigma : \mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)} \longrightarrow \mathbb{Q}(\sigma)$$

obtenu de façon analogue.

Remarque 4.1.9. *L'application θ_π est un morphisme de groupes en vertu du Lemme 4.1.2, alinéa i). Le fait que ce soit de plus un morphisme d'anneaux est assuré par le Lemme 4.1.2, alinéa ii).*

Lemme 4.1.10. *Les noyaux $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ sont des idéaux maximaux de $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ et $\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}$ respectivement.*

Démonstration. Montrons-le pour $\mathfrak{p}$.

Le morphisme θ_π est surjectif : en effet, soit $z \in \mathbb{Q}(\pi)$.

Considérons alors la fonction $f \in \mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ constante égale à z.

Puisque $\dim_{\mathbb{Q}(\pi)}(F) = 1$, il est clair que

$$\forall \chi \in F, f.\chi = z\chi,$$

et ainsi

$$\theta_\pi(f) = z.$$

Donc $\mathrm{Im}(\theta_\pi) = \mathbb{Q}(\pi)$.

On en déduit l'isomorphisme suivant :

$$\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{Q}(\pi).$$

$\mathbb{Q}(\pi)$ étant un corps, la maximalité de $\mathfrak{p}$ en découle. □

Définition 4.1.11. *On note $\mathscr{H}(G)_\mathfrak{p}$ (resp. $\mathscr{H}(H)_\mathfrak{q}$) l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ (resp. $\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}$) localisée en $\mathfrak{p}$ (resp. en $\mathfrak{q}$).*

4.2 Cohomologies des variétés de Shimura

On fixe K et L des sous-groupes nets compacts ouverts de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ respectivement. Notons $X = S^K \times Y^L$ le produit des variétés de Shimura S^K et Y^L définies en section 2.4.3.

On a une suite exacte longue de la forme suivante ([BKK], Section 5.1) :

$$... \longrightarrow H^{n-1}_B(X, \mathbb{C})/F^3H^{n-1}_B(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^n_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{R}(3))) \longrightarrow H^n_B(X, \mathbb{R}(3)) \longrightarrow ...$$

Intéressons-nous à la partie suivante de cette suite exacte :

$$... \to H^4_B(X, \mathbb{R}(3)) \to H^4_B(X, \mathbb{C})/F^3H^4_B(X, \mathbb{C}) \to H^5_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{R}(3))) \to H^5_B(X, \mathbb{R}(3)) \to ...$$

On considère l'isomorphisme suivant ([Nek], section 2) entre les cohomologies de Betti et de de Rham pour tout entier naturel i :

$$H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \overset{I_\infty}{\simeq} H^i_{dR}(X) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}.$$

Soit F_∞ l'involution de $X(\mathbb{C})$ induite par la conjugaison complexe. On note F^*_∞ l'involution de $H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ induite en cohomologie.

En utilisant que $H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq H^i_B(X, \mathbb{C}) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}$, on définit une application

$$\begin{aligned} c : \quad H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) &\longrightarrow H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ v \otimes z &\longmapsto v \otimes \overline{z} \end{aligned}$$

On définit de la même manière l'application

$$\lambda : H^i_{dR}(X) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C} \longrightarrow H^i_{dR}(X) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}.$$

Proposition 4.2.1. *Soit $\overline{F^*_\infty} = c \circ F_\infty$. Alors*

$$\lambda = I_\infty \circ \overline{F^*_\infty} \circ I^{-1}_\infty$$

Démonstration. Cf [Del79], 0.3. □

On construit de façon analogue une involution $\lambda_{\mathscr{D}}$ sur $H^i_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{R}(3))$.

En se restreignant aux sous-espaces stables par ces involutions, on obtient une nouvelle suite exacte :

$$... \to (H^4_B(X,\mathbb{R}(3)))^{\overline{F^*_\infty}} \to (H^4_B(X,\mathbb{C})/F^3H^4_B(X,\mathbb{C}))^{\overline{F^*_\infty}} \to (H^5_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{R}(3)))^{\lambda_{\mathscr{D}}} \to (H^5_B(X,\mathbb{R}(3)))^{\overline{F^*_\infty}} \to ...$$

D'après [Nek] section 2.1, sous l'isomorphisme I_∞, $H^4_B(X,\mathbb{C})^{\overline{F^*_\infty}}$ est isomorphe à $H^4_{dR}(X,\mathbb{R})$.

On sait que

$$H^i_{dR}(X,\mathbb{R}(3)) = H^i_B(X,\mathbb{R}(3))^- \oplus H^i_B(X,\mathbb{R}(2))^+$$

où $H^i_B(X,\mathbb{R}(3))^-$ et $H^i_B(X,\mathbb{R}(2))^+$ désignent les sous-espaces propres de F^*_∞ pour les valeurs propres -1 et 1 respectivement.

On a de plus $(H^5_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{R}(3)))^{\lambda_{\mathscr{D}}} = H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))$.

La suite exacte devient alors :

$$... \to H^4_B(X,\mathbb{R}(3))^- \to H^4_{dR}(X,\mathbb{R})/F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R}) \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3)) \to H^5_B(X,\mathbb{R}(3))^- \to ...$$

On désigne toujours par E un corps de nombres contenant $\mathbb{Q}(\pi)$ et $\mathbb{Q}(\sigma)$. En tensorisant par E, on obtient la suite exacte :

$$... \to H^4_B(X,\mathbb{R}(3))^-\otimes_{\mathbb{Q}}E \to H^4_{dR}(X,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{Q}}E/F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{Q}}E \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))\otimes_{\mathbb{Q}}E \to H^5_B(X,\mathbb{R}(3))^-\otimes_{\mathbb{Q}}E \to ...$$

Dans toute la suite, on notera ces espaces avec un indice E pour ne pas alourdir les notations. On a donc

$$... \to H^4_B(X,\mathbb{R}(3))^-_E \to H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_E/F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_E \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_E \to H^5_B(X,\mathbb{R}(3))^-_E \to ...$$

Tous les espaces de cohomologie considérés ici sont des $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$-modules et des $\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}$-modules.

En effet, comme vu précédemment en section 2.4.3, pour tout $g \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{A}_f)$, la multiplication à droite par g définit une application

$$m_g : S^{K\cap gKg^{-1}} \longrightarrow S^K.$$

L'application m_g est un homéomorphisme local et l'image réciproque de chaque point est finie (cf. [Lan73], p.31). En effet, si un point de S^K est représenté par (H,h), alors son image inverse est représentée par l'ensemble

$$A(h) = \{(H,h')|h'g = hk, k \in B\}$$

où B désigne un système de représentants de $K/(K\cap g^{-1}Kg)$.

Or, ν étant une application ouverte et K étant un sous-groupe ouvert de $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_f)$, $\nu(K)$ est ouvert dans $\mathbb{A}^*_f$, donc est d'indice fini dans $\mathbb{A}^*_f$, ce qui implique la finitude de $K/(K\cap g^{-1}Kg)$.

Par abus de notation, on peut donc noter de la même manière l'application induite

$$m_g : S^{K\cap gKg^{-1}} \times Y^L \longrightarrow S^K \times Y^L.$$

Puique m_g est un revêtement de degré fini, on a une application (définie dans [Lan73], p.31 et en chapitre 8 de ce texte)

$$m_{g_*} : H^*(S^{K\cap gKg^{-1}} \times Y^L)_E \longrightarrow H^*(S^K \times Y^L)_E,$$

où H désigne ici n'importe laquelle des cohomologies considérées ci-dessus. Par ailleurs, l'application identité

$$id : S^{K \cap gKg^{-1}} \times Y^L \longrightarrow S^K \times Y^L$$

donne naturellement une application

$$id^* : H^*(S^K \times Y^L)_E \longrightarrow H^*(S^{K \cap gKg^{-1}} \times Y^L)_E.$$

Soit $T_g = m_{g_*} \circ id^*$.

Alors T_g est un élément de $\mathrm{End}(H(S^K \times Y^L)_E)$.

Lemme 4.2.2. *Les fonctions du type $\mathbb{1}_{KgK}$, où $\mathbb{1}_{KgK}$ désigne l'indicatrice de KgK, engendrent $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$. Notons U le support compact de f.

Puisque f est bi-invariante par K, en particulier, f est invariante par translation à gauche par K.

Ainsi, pour tout $g \in U$, f est constante sur $(K \cap U)g$. K étant ouvert, $(K \cap U)g$ est un voisinage ouvert de g dans U.

On peut donc écrire U comme la réunion

$$U = \bigcup_{g \in U} (K \cap U)g.$$

Or, par compacité de U, on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini :

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} (K \cap U)g_i.$$

De plus, f est également invariante par translation à droite par K ; il s'ensuit que f s'écrit de la manière suivante :

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(g_i)\mathbb{1}_{Kg_iK}.$$

Les fonctions du type $\mathbb{1}_{KgK}$ engendrent donc bien $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$.

□

On définit l'application

$$\begin{array}{ll} \mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)} & \longrightarrow \mathrm{End}(H(S^K \times Y^L)_E) \\ \mathbb{1}_{KgK} & \longmapsto T_g \end{array}$$

étendue par linéarité à $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ tout entier, de telle sorte que ce soit un morphisme de groupes. Cela définit alors une action de $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ sur $H(S^K \times Y^L)_E$.

D'autre part, l'algèbre engendrée sur $\mathbb{C}$ par les opérateurs T_g est composée des opérateurs $\varphi(f)$ où f parcourt l'algèbre de Hecke de G de niveau K.

On obtient de la même manière une action de $\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}$ sur $H(S^K \times Y^L)$.

Remarque 4.2.3. *D'après [Lan73]p.33, via l'isomorphisme énoncé sous le lemme 5.2.1, l'action décrite ci-dessus est compatible avec la suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}_0(G) & \longrightarrow & \mathscr{A}_0(G) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$$

où φ' est définie par

$$\varphi'(h) = \sum_{K/(K\cap gKg^{-1})} \varphi(hkg).$$

De plus, si on note f_g la fonction $\mathbb{1}_{KgK}$ divisée par la mesure de K, alors T_g correspond à l'opérateur

$$\varphi(f_g) = \int_{G(\mathbb{A}_f)} f_g(h)\varphi(h)\,\mathrm{d}h.$$

Lemme 4.2.4. *La suite*

$$\begin{aligned} ... \to H^4_B(X,\mathbb{R}(3))^-_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \to H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_E/F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \\ \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \to H^5_B(X,\mathbb{R}(3))^-_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \to ... \end{aligned}$$

reste exacte.

Démonstration. Cela découle du fait que le foncteur de localisation est exact. □

On procède de la même manière avec $\mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}}$, ce qui nous fournit la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} ... \to H^4_B(X,\mathbb{R}(3))^-_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}} \to H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_E/F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}} \\ \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}} \to H^5_B(X,\mathbb{R}(3))^-_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}} \to ... \end{aligned}$$

Rappelons la formule de Künneth :

Théorème 4.2.5. *(Künneth) Pour tout entier naturel k,*

$$H^k_B(S^K \times Y^L, \mathbb{R}(3))_E = \bigoplus_{i+j=k} H^i_B(S^K,\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^j_B(Y^L,\mathbb{R})_E$$

et

$$H^k_{dR}(S^K \times Y^L, \mathbb{R}(3))_E = \bigoplus_{i+j=k} H^i_{dR}(S^K,\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^j_{dR}(Y^L,\mathbb{R})_E.$$

Remarque 4.2.6. *Ce théorème n'est plus vrai lorsqu'on considère la cohomologie de Deligne.*

Appliquons ce théorème à notre suite exacte :

$$\ldots \to \left(\bigoplus_{i+j=4} H^i_B(S^K,\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^j_B(Y^L,\mathbb{R})_E\right)^{-} \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}}$$

$$\to \left(\bigoplus_{i+j=4} H^i_{dR}(S^K,\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^j_{dR}(Y^L,\mathbb{R})_E\right)/F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}}$$

$$\to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}}$$

$$\to \left(\bigoplus_{i+j=5} H^i_B(S^K,\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^j_B(Y^L,\mathbb{R})_E\right)^{-} \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}} \to \ldots$$

Pour alléger les notations, on note

$$H^i_B(S^K,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} = H^i_B(S^K,\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}}$$

et

$$H^i_{dR}(S^K,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} = H^i_{dR}(S^K,\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}}.$$

On note de même

$$H^j_B(Y^L,\mathbb{R})_{\mathfrak{q}} = H^j_B(Y^L,\mathbb{R})_E \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}}$$

et

$$H^j_{dR}(Y^L,\mathbb{R})_{\mathfrak{q}} = H^j_{dR}(Y^L,\mathbb{R})_E \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}}.$$

Enfin, notons

$$F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}},$$

et

$$H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_E \underset{\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}}{\otimes} \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \underset{\mathscr{H}(H)^{L^{S'}}_{\mathbb{Q}(\sigma)}}{\otimes} \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}}.$$

La suite exacte s'écrit maintenant :

$$\ldots \to \left(\bigoplus_{i+j=4} H^i_B(S^K,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^j_B(Y^L,\mathbb{R})_{\mathfrak{q}}\right)^{-} \to \left(\bigoplus_{i+j=4} H^i_{dR}(S^K,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^j_{dR}(Y^L,\mathbb{R})_{\mathfrak{q}}\right)/F^3H^4_{dR}(X,\mathbb{R})_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$$

$$\to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \to \left(\bigoplus_{i+j=5} H^i_B(S^K,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^j_B(Y^L,\mathbb{R})_{\mathfrak{q}}\right)^{-} \to \ldots$$

Proposition 4.2.7. *Pour les cohomologies de Betti et de Rham, on a les égalités suivantes :*

$$H^i_B(S^K,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} = H^i_{B,!}(S^K,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}}$$

et

$$H^j_{dR}(Y^L,\mathbb{R})_{\mathfrak{q}} = H^j_{dR,!}(Y^L,\mathbb{R})_{\mathfrak{q}}.$$

De plus, on a $H^i_{B,!}(S^K,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} = 0$ si $i \neq 3$.

Démonstration. Soit Π une représentation automorphe de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$. Notons S l'ensemble fini des places où Π est ramifiée. Soit $p \notin S$. On note alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_S \times \mathbb{Q}_p \times \mathbb{A}_f,$$

où f désigne les places non-ramifiées distinctes de p et $K = K_\infty K_S K_p K_f$. En particulier, on a la décomposition

$$\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_S \otimes \Pi_p \otimes \Pi_f.$$

La représentation sphérique Π_f est entièrement déterminée par les valeurs propres de l'action de l'algèbre de Hecke sur son vecteur sphérique. D'après la fin de la section 1.2 de [Wei09], on a une décomposition du type

$$H^i(S^K,\mathbb{C}) = \bigoplus_{\Pi_f} H^i(S^K,\mathbb{C}(\Pi_f))$$

où Π_f parcourt les parties finies des représentations automorphes de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$ et $H^i(S^K,\mathbb{C}(\Pi_f))$ désigne le sous-espace propre généralisé sur lequel l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G)^{K_f}_{\mathbb{Q}(\Pi_f)}$ agit par un caractère θ_{Π_f}.

D'après [Wei09], Théorème 1.1, on a pour toute représentation Π qui n'est pas CAP :

$$\left(H^3(S^K,\mathbb{C})/H^3_!(S^K,\mathbb{C})\right)(\Pi_f) = 0$$

ce qui implique que $H^3(S^K,\mathbb{C}(\Pi_f)) = H^3_!(S^K,\mathbb{C}(\Pi_f))$.

Avec les notations précédentes, soit π la représentation automorphe de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$ fixée au début de la section 4.1.2 (qui n'est pas CAP puisqu'elle est générique, d'après la remarque 3.4.2), et soit $\mathfrak{p} = \ker(\theta_\pi)$ le noyau du caractère de Hecke qui lui est associé. Ainsi, on a

$$H^3(S^K,\mathbb{C})_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{\Pi_f} H^3(S^K,\mathbb{C}(\Pi_f))_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{\Pi_f} H^3_!(S^K,\mathbb{C}(\Pi_f))_{\mathfrak{p}}.$$

Or, pour toute représentation Π telle que $\ker(\theta_{\Pi_f}) \neq \mathfrak{p}$, on a $H^3(S^K,\mathbb{C}(\Pi_f))_{\mathfrak{p}} = 0$.

En effet,

$$\begin{aligned} H^3(S^K,\mathbb{C}(\Pi_f))_{\mathfrak{p}} &= (\mathscr{H}(G)^{K_f}_{\mathbb{Q}(\Pi_f)}/\ker(\theta_\Pi))_{\mathfrak{p}} \\ &= \mathscr{H}(G)^{K_f}_{\mathbb{Q}(\Pi_f)\mathfrak{p}}/\ker(\theta_\Pi)_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Puisque $\ker(\theta_{\Pi_f}) \neq \mathfrak{p}$, il existe $f \in \ker(\theta_{\Pi_f})$ tel que $f \notin \mathfrak{p}$. Ainsi, f est inversible dans $\ker(\theta_\Pi)_{\mathfrak{p}}$, ce qui prouve que $\ker(\theta_\Pi)_{\mathfrak{p}} = \mathscr{H}(G)^{K_f}_{\mathbb{Q}(\Pi_f)\mathfrak{p}}$.

Il en découle que $H^3(S^K, \mathbb{C}(\Pi_f))_{\mathfrak{p}} = 0$ si $\ker(\theta_{\Pi_f}) \neq \mathfrak{p}$. On en déduit donc que

$$\bigoplus_{\ker(\theta_{\Pi_f})=\mathfrak{p}} H^3(S^K, \mathbb{C}(\Pi_f))_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{\ker(\theta_{\Pi_f})=\mathfrak{p}} H^3_!(S^K, \mathbb{C}(\Pi_f))_{\mathfrak{p}}$$

où la somme porte sur les représentations Π telles que $\ker(\theta_{\Pi_f}) = \mathfrak{p}$, d'où

$$H^3(S^K, \mathbb{C})_{\mathfrak{p}} = H^3_!(S^K, \mathbb{C})_{\mathfrak{p}}.$$

D'après [Wei09], Théorème 1.1, on a également si $i \neq 3$,

$$H^i(S^K, \mathbb{C}(\Pi_f)) = 0.$$

On montre alors de la même façon que si $i \neq 3$, alors

$$H^i_!(S^K, \mathbb{C})_p = 0.$$

Puisque toute représentation automorphe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ n'est pas CAP (puisque générique), on déduit aisément de la preuve du Théorème 1.1. de [Wei09] l'assertion

$$H^j_{dR}(Y^L, \mathbb{C})_{\mathfrak{q}} = H^j_{dR,!}(Y^L, \mathbb{C})_{\mathfrak{q}}.$$

Puisque $H^i(S^K, \mathbb{R}(3)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = H^i(S^K, \mathbb{C})$ et $H^j_{dR}(Y^L, \mathbb{R}) \otimes_R \mathbb{C} = H^j_{dR}(Y^L, \mathbb{C})$, on obtient la proposition voulue. $\square$

En couplant cette dernière proposition avec le Lemme 2.4.25, on obtient la suite exacte :

$$\begin{aligned} ... \to \left(H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right)^- \to \left(H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{dR,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right) / F^3 H^4_{dR}(X, \mathbb{R})_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \\ \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \to 0 \end{aligned}$$

Remarque 4.2.8. $F^3 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}) = F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))$ *d'après la définition donnée par [Nek], section 1.1.*

Lemme 4.2.9. *La flèche*

$$\left(H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right)^- \to \left(H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{dR,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right) / F^3 H^4_{dR}(X, \mathbb{R})_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$$

est une injection.

Démonstration. On reprend les notations de la section 1 de [Nek].

Soit $M_B = H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}}$ et

$$M_B^- = \left(H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right)^- .$$

M_B est un motif pur de poids $w = 4 - 2 \times 3 = -2$.

Alors $M_B \otimes \mathbb{C} = H^4_{B,!}(X, \mathbb{C})_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ admet une structure de Hodge du type

$$H^4_{B,!}(X, \mathbb{C})_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = \bigoplus_{p+q=-2} H^{p,q}.$$

Sous l'isomorphisme I_∞, $F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{C})_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ correspond à $F^0(M_B \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{p \geq 0} H^{p,q}$.

On considère l'application

$$I_{\infty,M} : M_B^- \to \left(H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{dR,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right) / F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}.$$

Soit $\overline{F^0}(M_B \otimes \mathbb{C}) = \bigoplus_{q \geq 0} H^{p,q}$.

Tout d'abord, on remarque que $\ker(I_{\infty,M}) \subset (F^0 \cap \overline{F^0})(M_B \otimes \mathbb{C})$.

En effet, soit $v \in \ker(I_{\infty,M})$. Il est clair que $v \in F^0(M_B \otimes \mathbb{C})$. De plus, par définition de M_B^-, $\overline{v} = -v$.

Donc $v \in \overline{F^0}(M_B \otimes \mathbb{C})$.

Donc $\ker(I_{\infty,M}) \subset (F^0 \cap \overline{F^0})(M_B \otimes \mathbb{C})$.

D'autre part, $(F^0 \cap \overline{F^0})(M_B \otimes \mathbb{C}) = 0$.

En effet, soit $v \in (F^0 \cap \overline{F^0})(M_B \otimes \mathbb{C})$. Si $v \neq 0$, alors toutes les composantes de v sont du type $v_{p,q}$ avec avec $p \geq 0$, $q \geq 0$ et $p + q = -2$, ce qui est absurde.

Donc $(F^0 \cap \overline{F^0})(M_B \otimes \mathbb{C}) = 0$, ce qui implique que $\ker(I_{\infty,M}) = 0$.

$\square$

On en déduit que la suite exacte peut s'écrire finalement :

$$0 \to \left(H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right)^- \to \left(H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{dR,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right) / F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$$
$$\to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \to 0$$

Lemme 4.2.10. *La suite suivante reste exacte :*

$$0 \to \left(H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right)^- \bigoplus F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \to H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{dR,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}}$$
$$\to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \to 0,$$

Démonstration. Notons

$$A = \left(H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right)^-,$$

$$B = H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{dR,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}},$$

$$C = F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$$

et

$$D = H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}.$$

A et C sont tous deux des sous-espaces vectoriels de B. On sait qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow A \overset{\varphi_1}{\hookrightarrow} B/C \overset{\varphi_2}{\twoheadrightarrow} D \longrightarrow 0$$

où φ_1 est injective, φ_2 surjective et $\ker(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$.

L'injectivité de φ_1 assure que $A \cap C = 0$.

Soit $\varphi_1' : A \longrightarrow B$ tel que $\varphi_1 = p \circ \varphi_1'$, où p est la projection $p : B \longrightarrow B/C$. On définit alors

$$\begin{array}{rll} \tilde{\varphi_1} : & A \bigoplus C & \longrightarrow B \\ & (a, c) & \longmapsto \varphi_1'(a) - c \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rll} \tilde{\varphi_2} : & B & \longrightarrow D \\ & b & \longmapsto \varphi_2(b \mod C) \end{array}$$

$\tilde{\varphi_2}$ est clairement surjectif car φ_2 l'est.

$\tilde{\varphi_1}$ est injectif : en effet, soit $(a, c) \in \ker(\tilde{\varphi_1})$.

Alors $\varphi_1'(a) = c$. A fortiori, $\varphi_1'(a) \in C$, donc $\varphi_1(a) = 0$.

Or, φ_1 est injectif, donc $a = 0$, puis $c = 0$.

Enfin, $\ker(\tilde{\varphi_2}) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$.

En effet,

$$\begin{array}{rcl} \ker(\tilde{\varphi_2}) & = & \{b \in B | b \mod C \in \ker(\varphi_2)\} \\ & = & \{b \in B | b \mod C \in \mathrm{Im}(\varphi_1)\} \\ & = & \{b \in B | \exists a \in A, \overline{b} = \varphi_1(a)\} \\ & = & \{b \in B | \exists a \in A, \varphi_1'(a) - b \in C\} \\ & = & \{b \in B | \exists (a, c) \in A \times C, b = \varphi_1'(a) - c\} \\ & = & \mathrm{Im}(\tilde{\varphi_1}). \end{array}$$

La suite :

$$0 \longrightarrow A \bigoplus C \overset{\tilde{\varphi_1}}{\hookrightarrow} B \overset{\tilde{\varphi_2}}{\twoheadrightarrow} D \longrightarrow 0$$

reste donc exacte.

□

puis

Lemme 4.2.11. *La suite*

$$0 \to F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \to \left(H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{dR,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right) / \left(H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right)^- \\ \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \to 0.$$

est exacte.

Démonstration. Gardons les notations de la preuve précédente. Soit

$$\begin{array}{rrcl} \hat{\varphi_1} : & C & \longrightarrow & B/A \\ & c & \longmapsto & c \mod A \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rrcl} \hat{\varphi_2} : & B/A & \longrightarrow & D \\ & b \mod A & \longmapsto & \tilde{\varphi_2}(b) = \varphi_2(b \mod C) \end{array}$$

$\hat{\varphi_2}$ est bien défini : en effet, si $b - b' \in A$, alors $(b - b') \mod C \in \mathrm{Im}(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$.

Comme précédemment, $\hat{\varphi_2}$ est surjectif car $\tilde{\varphi_2}$ l'est.

De même, $\hat{\varphi_1}$ est injectif : en effet, soit $c \in \ker(\hat{\varphi_1})$.

Alors $c \mod A = 0$, donc $c \in A \cap C = 0$.

Enfin,

$$\begin{array}{rcl} \ker(\hat{\varphi_2}) & = & \{b \mod A | b \in \ker(\tilde{\varphi_2})\} \\ & = & \{b \mod A | b \in \mathrm{Im}(\tilde{\varphi_1})\} \\ & = & \{b \mod A | \exists (a,c) \in A \times C, b = \varphi_1'(a) - c\} \\ & = & \{b \mod A | \exists c \in C, b \mod A = c \mod A\} \\ & = & \mathrm{Im}(\hat{\varphi_1}). \end{array}$$

La suite

$$0 \longrightarrow C \overset{\hat{\varphi_1}}{\hookrightarrow} B/A \overset{\hat{\varphi_2}}{\twoheadrightarrow} D \longrightarrow 0$$

est donc exacte.

□

Or $H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3)) = H^4_B(X, \mathbb{R}(3))^- \oplus H^4_B(X, \mathbb{R}(2))^+$, donc

$$\left(H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{dR,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right) / \left(H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \right)^- \simeq H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}.$$

Donc finalement, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \longrightarrow H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \longrightarrow H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \longrightarrow 0.$$

L'existence de cette suite exacte va nous être utile afin de construire une forme linéaire sur $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$. Attachons-nous d'abord à montrer la non nullité de $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$.

Chapitre 5

Construction de la forme linéaire

5.1 Non criticité du motif

On considère toujours K et L des sous-groupes nets compacts ouverts de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ respectivement. On rappelle qu'on note M le motif $M = H_!^4(S^K \times Y^L, \mathbb{Q}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ et M_B sa réalisation de Betti.

Définition 5.1.1. *Le motif M est dit critique si* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHS}_{\mathbb{R}}^+}(\mathbb{R}(0), M_B)$ *est nul.*

D'après la formule de Künneth, on a déjà vu que

$$H^4_{B,!}(S^K \times Y^L, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \otimes H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}},$$

où les deux membres de l'égalité de droite sont des motifs de poids -3 et 1 respectivement.

En effet, de manière analogue à la décomposition de Hodge de $M_B(\pi_f)_{\mathbb{C}}$ vue en section 3.4, on a une décomposition du type

$$H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R})_{\mathfrak{p}} \otimes \mathbb{C} = V^{3,0} \oplus V^{2,1} \oplus V^{1,2} \oplus V^{0,3}.$$

Il en découle que

$$H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \otimes \mathbb{C} = V^{3-3,0-3} \oplus V^{2-3,1-3} \oplus V^{1-3,2-3} \oplus V^{0-3,3-3}.$$

On a donc les décompositions de Hodge suivantes :

$$H^3_{B,!}(S^K, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}} \otimes \mathbb{C} = V^{0,-3} \oplus V^{-1,-2} \oplus V^{-2,-1} \oplus V^{-3,0}$$

et

$$H^1_{B,!}(Y^L, \mathbb{R})_{\mathfrak{q}} \otimes \mathbb{C} = W^{1,0} \oplus W^{0,1}.$$

Grâce à la formule de Künneth, on obtient une décomposition de Hodge de $M_B \otimes \mathbb{C}$ de la manière suivante :

$$M_B \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{r+s=-2} H^{r,s},$$

où, par définition,

$$H^{r,s} = \bigoplus_{\substack{p+p'=r \\ q+q'=s}} V^{p,q} \otimes W^{p',q'}.$$

Concrètement, M_B a la décomposition suivante :

$$M_B \otimes \mathbb{C} = H^{-3,1} \oplus H^{-2,0} \oplus H^{-1,-1} \oplus H^{0,-2} \oplus H^{1,-3}$$

où

$$\begin{aligned} H^{-3,1} &= V^{-3,0} \otimes W^{0,1}, \\ H^{-2,0} &= (V^{-2,-1} \otimes W^{0,1}) \oplus (V^{-3,0} \otimes W^{1,0}), \\ H^{-1,-1} &= (V^{-1,-2} \otimes W^{0,1}) \oplus (V^{-2,-1} \otimes W^{1,0}), \\ H^{0,-2} &= (V^{0,-3} \otimes W^{0,1}) \oplus (V^{-1,-2} \otimes W^{1,0}), \end{aligned}$$

et

$$H^{1,-3} = V^{0,-3} \otimes W^{1,0}.$$

Définition 5.1.2. *Pour tout couple d'entiers* (r,s)*, on note* $h^{r,s}$ *le nombre*

$$h^{r,s} = \dim_{\mathbb{C}} H^{r,s}.$$

Proposition 5.1.3. *([Del79],1.3.1) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
i) M *est critique*
ii) $h^{p,q} = 0$ *si* $p \neq q$ *sauf éventuellement si* p *et* q *sont de signes opposés avec* $p \leq -1$ *ou* $q \leq -1$ *et* F_∞^* *agit sur* $H^{p,p}$ *par l'identité si* $p < 0$*, par -1 si* $p \geq 0$*.*

On a donc la proprosition suivante :

Proposition 5.1.4. *Le motif* M *n'est pas critique.*

Démonstration. Dans notre cas, M est critique si et seulement si F_∞^* agit sur $H^{-1,-1}$ par l'identité d'après la proposition précédente.
Or, si on considère un élément $x \neq 0 \in V^{-1,-2} \otimes W^{0,1}$, alors $\overline{x} \in V^{-2,-1} \otimes W^{1,0}$.
Posons $v = \dfrac{1}{2}(x - \overline{x})$.
Alors $F_\infty^*(v) = -v$.
D'après la proposition précédente, on en conclut que le motif M n'est pas critique. □

Proposition 5.1.5. *L'espace* $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ *n'est pas nul.*

Démonstration. Par définition, puisque le motif M n'est pas critique, a fortiori,

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B) \neq 0.$$

Or, d'après [Nek 3.4.1],

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{MHS}^+_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}(0), M_B) \simeq H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}.$$

Finalement, la non-criticité du motif M entraîne la non-nullité de $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$. □

5.2 Construction de la forme linéaire

5.2.1 Produit scalaire de Petersson

Rappelons la suite exacte obtenue à la fin du chapitre 4 :

$$0 \longrightarrow F^0H^4_{dR}(X,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \hookrightarrow H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \twoheadrightarrow H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \longrightarrow 0.$$

Via la dualité de Poincaré, on a un accouplement

$$\begin{array}{rcl} H^4_{dR,!}(X,\mathbb{R}(3)) \otimes_{\mathbb{C}} H^4_{dR,!}(X,\mathbb{R}(3)) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\omega,\eta) & \longmapsto & <\omega,\eta>= \dfrac{1}{16\pi^4}\displaystyle\int_X \omega\wedge\eta \end{array}$$

où le membre de droite ne dépend que de la classe de ω.

Rappelons qu'à la fin du chapitre 3, nous avions construit l'élément $\overline{\omega}_\Psi \otimes \eta_\Phi \in M^{-1,-1}$. Ainsi, on a

$$\Omega = \Omega_{\overline{\Psi}} \otimes \Omega_\Phi \in H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(3))$$

et plus particulièrement

$$\Omega \in H^{-1,-1}$$

puisque $(\overline{\omega}_\Psi \otimes \eta_\Phi)(\overline{\Psi}_f \otimes \Phi_f) = \Omega$.

Via l'isomorphisme entre la cohomologie de Betti et la cohomologie de de Rham, on déduit de l'accouplement ci-dessus une forme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(3))_E & \xrightarrow{\varphi_\Omega} & \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}} E \\ \eta & \longmapsto & <\Omega,\eta> . \end{array}$$

Il nous faut désormais prolonger cette forme linéaire à $H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$. Faisons-le pour $H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}}$ dans un premier temps.

On rappelle que G et H désignent toujours GSp(4) et GL(2) respectivement. On munit $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}} E$ de la structure de $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$-module suivante :

$$\forall f \in \mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}, \forall z\otimes x \in \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}} E, f.(z\otimes x) = (\theta_\pi(f)z)\otimes x.$$

Si $f \notin \mathfrak{p}$, alors $\theta_\pi(f) \neq 0$ donc la multiplication par $\theta_\pi(f) \neq 0$ définit un automorphisme de $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Q}} E$.

Par propriété universelle de la localisation, pour que la forme linéaire φ_Ω se prolonge à $H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}}$, au vu de l'action de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ sur $H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(3))$, il suffit de vérifier que :

$$\forall f \in \mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}, \forall \eta \in H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(3))_E, < f.\eta,\omega >= \theta_\pi(f) < \eta,\omega > .$$

D'après le Lemme 4.2.2, puisque les fonctions $\mathbb{1}_{KgK}$ engendrent $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme 5.2.1. $\forall g \in G, \forall \eta \in H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(3))_E, < T_g(\eta), \omega >= \theta_\pi(\mathbb{1}_{KgK}) < \eta, \omega >$.

Pour montrer le lemme ci-dessus, rappelons qu'on dispose de l'isomorphisme suivant :

$$H^*_{dR}(S^K, \mathbb{C}) \simeq H^* \left(\mathfrak{g}, K'_\infty, \mathscr{C}^\infty(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)\right)$$

où $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie complexe de G.

Par restriction, on a un isomorphisme ([MT], proposition 1) :

$$H^*_{dR,!}(S^K, \mathbb{C}) \simeq H^* \left(\mathfrak{g}, K, \mathscr{C}^\infty_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)\right).$$

Comme précédemment, via la dualité de Poincaré, on a un accouplement :

$$H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{C})_E \otimes_{\mathbb{C}} H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{C})_E \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} E.$$

Or, via l'isomorphisme précédent, on en déduit que :

$$H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{C})_E \otimes_{\mathbb{C}} H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{C})_E \simeq H^3 \left(\mathfrak{g}, K'_\infty, \mathscr{C}^\infty_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)\right)_E \otimes_{\mathbb{C}} H^3 \left(\mathfrak{g}, K'_\infty, \mathscr{C}^\infty_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)\right)_E.$$

D'autre part, on a la décomposition

$$H^3 \left(\mathfrak{g}, K'_\infty, \mathscr{C}^\infty_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)\right) = \bigoplus_{\substack{\pi_\infty \\ \text{série} \\ \text{discrète}}} H^3(\mathfrak{g}, K'_\infty, \pi_\infty \otimes \pi_f)^{m(\pi)}$$

où $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ parcourt les représentations automorphes cuspidales irréductibles de $G(\mathbb{A})$ et $m(\pi) \in \mathbb{N}$.

Or, on a un autre isomorphisme :

$$H^3(\mathfrak{g}, K'_\infty, \pi_\infty \otimes \pi_f) \simeq \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi_\infty \otimes \pi_f)$$

où $\mathfrak{k}$ désigne l'algèbre de Lie complexe de K_∞.

Ainsi, en combinant les précédents isomorphismes et la dualité de Poincaré, on a une application :

$$\left(\bigoplus_{\substack{\pi^1_\infty \\ \text{série} \\ \text{discrète}}} \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^1_\infty \otimes \pi^1_f)^{m(\pi^1)} \right) \bigotimes_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{\substack{\pi^2_\infty \\ \text{série} \\ \text{discrète}}} \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^2_\infty \otimes \pi^2_f)^{m(\pi^2)} \right) \otimes_{\mathbb{Q}} E \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} E.$$

Soit $f_1 \in \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^1_\infty \otimes \pi^1_f)$ pour une certaine représentation π_1 et $f_2 \in \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^2_\infty \otimes \pi^2_f)$ pour une certaine représentation π_2.

Alors $f_1 \wedge f_2 \in \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^6(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi_1 \otimes \pi_2)$.

Lemme 5.2.2. *On a* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) = 6$.

Démonstration. On a une décomposition

$$S^K = \bigsqcup_i \Gamma_i \backslash \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+/\mathrm{U}(2).$$

Or $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+/\mathrm{U}(2) \simeq \mathscr{H}$.

Ainsi, pour $\mathfrak{u}(2)$, l'algèbre de Lie complexe de $U(2)$,

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}/\mathfrak{k} & \simeq & \mathfrak{g}/\mathrm{Lie}(\mathrm{U}(2)) \\ & \simeq & T_{i\mathrm{I}_2}\mathscr{H} \\ & \simeq & \mathbb{C}^3, \end{array}$$

ce qui prouve le lemme. □

Il s'ensuit que $\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda^6(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})) = 1$.

Soit $\mathbf{1}$ un générateur de $\Lambda^6(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$.

Ainsi, $f_1 \wedge f_2$ ne dépend que de $f_1 \wedge f_2(\mathbf{1}) \in \pi_1 \otimes \pi_2$.

De même, l'évaluation en $\mathbf{1}$ donne lieu à une application surjective :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(2)}(\Lambda^6(\mathfrak{g}/\mathbb{R}_+^*\mathfrak{u}(2)), \mathscr{C}^\infty(G(\mathbb{R})) \overset{ev_{\mathbf{1}}}{\twoheadrightarrow} \mathscr{C}^\infty(G(\mathbb{R}))/\mathrm{U}(2)).$$

Définition 5.2.3. *On note $dx_{\infty,\mathbf{1}}$ la mesure définie sur $G(\mathbb{R})$ par*

$$\int_{G(\mathbb{R})} f \,\mathrm{d}x_{\infty,\mathbf{1}} = \int_{G(\mathbb{R})/\mathrm{U}(2)} \omega_f,$$

où ω_f est définie par $\omega_f(\mathbf{1}) = f$.

Définition 5.2.4. *Pour toute place non-archimédienne p, soit dx_p la mesure de Haar sur $G(\mathbb{Q}_p)$ telle que la mesure de $G(\mathbb{Z}_p)$ soit égale à 1. On considère $dx = \prod_p dx_p \times dx_{\infty,\mathbf{1}}$.*

Pour tout couple (φ_1, φ_2) de formes automorphes cuspidales sur $G(\mathbb{A})$ à caractère central trivial, on définit le produit scalaire de Petersson par

$$< \varphi_1, \varphi_2 >= \int_{Z(\mathbb{A})G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})} \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)} \,\mathrm{d}x.$$

Théorème 5.2.5. *([LO], proposition 2.6).*

Soit p une place non ramifiée de π Supposons que φ_1 et φ_2 ont un caractère central trivial et sont invariantes par translation à droite par $G(\mathbb{Z}_p)$. Soit $g \in G(\mathbb{Q}_p)$.

Alors

$$< \mathbb{1}_{KgK}\varphi_1, \varphi_2 >=< \varphi_1, \mathbb{1}_{KgK}\varphi_2 > .$$

Ainsi, via le produit scalaire de Petersson, on obtient la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^1_\infty \otimes \pi^1_f) \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^2_\infty \otimes \pi^2_f) & \to & \mathbb{C} \\ (f_1, f_2) & \mapsto & < \varphi_1, \varphi_2 > \end{array}$$

où $(\varphi_1, \varphi_2) = f_1 \wedge f_2(\mathbf{1})$.

En étendant cette nouvelle forme bilinéaire, on en déduit une application

$$\left(\bigoplus_{\substack{\pi^1_\infty \\ \text{série} \\ \text{discrète}}} \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3 \mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^1_\infty \otimes \pi^1_f)^{m(\pi^1)} \right) \bigotimes_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{\substack{\pi^2_\infty \\ \text{série} \\ \text{discrète}}} \mathrm{Hom}_{K'_\infty}(\Lambda^3 \mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \pi^2_\infty \otimes \pi^2_f)^{m(\pi^2)} \right) \otimes_{\mathbb{Q}} E \xrightarrow{\psi_2} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} E.$$

Théorème 5.2.6. *([Bor74]) Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{C})_E \otimes_{\mathbb{C}} H^3_{dR,!}(S^K, \mathbb{C})_E \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d] & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} E \\ H^3\left(\mathfrak{g}, K'_\infty, \mathscr{C}^\infty_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)\right)_E \otimes_{\mathbb{C}} H^3\left(\mathfrak{g}, K'_\infty, \mathscr{C}^\infty_0(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)\right)_E \arrow[r, "\psi_2"] & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} E \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

5.2.2 Preuve du Lemme 5.2.1

Démonstration. La commutativité de ce diagramme et le théorème 5.2.5 impliquent donc que :

$$\forall g \in G, \forall \eta \in H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(3))_E, < T_g(\eta), \omega >=< \eta, T_g(\omega) > .$$

Or, par définition de l'action de $\mathscr{H}(G)^{K^S}_{\mathbb{Q}(\pi)}$ sur $H(S^K \times Y^L)_E$ vue au chapitre 4, on sait que

$$< \eta, T_g(\Omega) >=< \eta, \mathbb{1}_{KgK}.\Omega > .$$

Mais par hypothèse sur Ω et par définition du caractère de Hecke vue en Définition 4.1.8, on obtient finalement que

$$\forall g \in G, \forall \eta \in H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(3))_E, < T_g(\eta), \Omega >= \theta_\pi(\mathbb{1}_{KgK}) < \eta, \Omega >,$$

ce qui prouve bien le Lemme 5.2.1. □

La forme linéaire φ_Ω se prolonge donc bien à $H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p}}$ dans un premier temps, puis à $H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ de façon similaire, et enfin à $H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ par restriction.

On a vu précédemment que sous l'isomorphisme I_∞, $F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ s'envoie sur $\bigoplus_{p \geq 0} H^{p,q} = H^{0,-2} \oplus H^{1,-3}$.

Ainsi, sous l'injection $F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \hookrightarrow H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$, $F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ s'envoie sur $\bigoplus_{p \geq 0} H^{p,q} = (H^{0,-2} \oplus H^{1,-3}) \cap H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$.

Donc φ_Ω s'annule sur l'image de $F^0 H^4_{dR}(X, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ par hypothèse sur Ω.

La forme linéaire φ_Ω passe donc au quotient et on note

$$H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} / (H^{0,-2} \oplus H^{1,-3}) \cap H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \xrightarrow{\overline{\varphi_\Omega}} \mathbb{C}.$$

Or, d'après la suite exacte obtenue en fin de chapitre 4, on a un isomorphisme

$$H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \simeq H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}/(H^{0,-2}\oplus H^{1,-3})\cap H^4_{B,!}(X,\mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}.$$

Via cet isomorphisme, il en résulte la forme linéaire attendue :

$$H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R},\mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \xrightarrow{\psi_\Omega} \mathbb{C}.$$

Chapitre 6

Accouplement du régulateur avec la forme différentielle

La présentation de cette section est empruntée à [CLR].

6.1 Fonctions de Schwartz-Bruhat et séries d'Eisenstein

On appelle T_2 le tore diagonal maximal de GL_2 et B_2 son Borel standard, le sous-groupe de GL_2 constitué des matrices triangulaires supérieures.

Nous allons maintenant définir l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur $\mathbb{A}^2$, où $\mathbb{A}$ désigne toujours l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. Tout d'abord rappelons les définitions suivantes.

Définition 6.1.1. *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ est dite lisse si elle possède des dérivées de tout ordre.*

Définition 6.1.2. *Soit p un nombre premier. Une fonction f définie sur $\mathbb{Q}_p^2$ est dite lisse si elle est localement constante.*

Nous allons maintenant définir les espaces de Schwartz localement.

Définition 6.1.3. *On appelle espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^2$ et on note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ qui sont lisses et telles que la quantité*

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^2}|x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}|\frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}f}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}}$$

est bornée pour tous entiers positifs α_i et β_i. On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ de la plus petite topologie pour laquelle les semi-normes $|.|_{\alpha,\beta}$ sont continues.

Définition 6.1.4. *Pour tout corps local F non archimédien, on définit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(F^2)$ comme l'espace des fonctions lisses sur F^2 et à support compact. On munit $\mathcal{S}(F^2)$ de la topologie la plus faible dans laquelle toutes les fonctions linéaires sont continues.*

Définition 6.1.5. *On désigne par $\mathcal{S}(\mathbb{A}^2)$ l'espace des fonctions de Schwartz-Bruhat sur $\mathbb{A}^2$ défini comme l'espace constitué de toutes les combinaisons linéaires de fonctions de la forme*

$$\varphi(x) = \prod_v \varphi_v(x_v), x = (x_v) \in \mathbb{A}^2$$

où pour toute place v de $\mathbb{Q}$, $\varphi_v \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_v^2)$ et φ_p est la fonction indicatrice de $\mathbb{Z}_p^2$ pour presque toute place non-archimédienne p.

Définition 6.1.6. *Soit v une place non archimédienne de $\mathbb{Q}$, soit $\varphi_v \in \mathcal{S}(\mathbb{Q}_v^2)$. On définit la transformée de Fourier locale de φ_v par :*

$$\hat{\varphi}_v(x,y) = \int_{\mathbb{Q}_v^2} \varphi_v(s,t)\psi_v(-tx+sy)dsdt$$

où ψ_v est la restriction à $\mathbb{Q}_v$ du caractère ψ défini au début de la section 3.2 et où la mesure sur $\mathbb{Q}_v$ est choisie de telle sorte que le volume de $\mathbb{Z}_v$ soit égal à 1.

Lemme 6.1.7. *Soit p un nombre premier, soit $\varphi_{p,0}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{Z}_p^2$. Alors la transformée de Fourier de $\varphi_{p,0}$ vérifie*

$$\hat{\varphi}_{p,0} = \varphi_{p,0}.$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{p,0}(x,y) &= \int_{\mathbb{Q}_p^2} \varphi_{p,0}(s,t)\psi_p(-tx+sy)dsdt \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^2} \psi_p(-tx+sy)dsdt \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(-tx)dt \int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(sy)ds. \end{aligned}$$

Intéressons-nous à la première intégrale. Rappelons que ψ_p est constant égal à 1 sur $\mathbb{Z}_p$. Ainsi, si $x \in \mathbb{Z}_p$, puisque le volume de $\mathbb{Z}_p$ est égal à 1 par choix de la mesure, on a $\int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(-tx)dt = 1$.

Si $x \notin \mathbb{Z}_p$, il existe alors $t_0 \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\psi_p(-t_0x) \neq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(-tx)dt &= \int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(-(t+t_0)x)dt \\ &= \psi_p(-t_0x)\int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(-tx)dt. \end{aligned}$$

Puisque $\psi_p(-t_0x) \neq 1$, il en découle que $\int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(-tx)dt = 0$.

Ainsi, on en déduit que $\int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(-tx)dt$ est égale à 1 si $x \in \mathbb{Z}_p$, et est nulle sinon. On raisonne de la même manière pour $\int_{\mathbb{Z}_p} \psi_p(sy)ds$ et on en déduit le résultat voulu. □

Définition 6.1.8. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^2)$. On définit la transformée de Fourier globale de φ par*

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{\mathbb{A}} \varphi(x)\psi(xy)dx$$

où ψ est toujours le caractère défini en début de section 3.2.

Définition 6.1.9. *Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^2)$, $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$, $s \in \mathbb{C}$, on note*

$$f_\varphi(g,s) = |\det(g)|^s \int_{\mathbb{A}^\times} \varphi((0,t)g)|t|^{2s}\, \mathrm{d}^\times t.$$

Avec ces notations, on définit alors la série d'Eisenstein associée

$$E(g,\varphi,s) = \sum_{\gamma \in \mathrm{B}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})} f_\varphi(\gamma g, s)$$

qui converge absolument et uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 1\}$ à l'exception des pôles de $f_\varphi(\gamma g, s)$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe.

Proposition 6.1.10. *([Jac], Proposition 19.3)*
Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^2)$et $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Alors la série d'Eisenstein $E(g,\varphi,s)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$E(g,\varphi,s) = E(g,\hat{\varphi},1-s)$$

où $\hat{\varphi}$ désigne la transformée de Fourier de φ.

Dans toute la suite, φ_∞ désignera la fonction de Schwartz-Bruhat définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi_\infty(x,y) = e^{-\pi(x^2+y^2)}.$$

Pour toute fonction $\varphi_f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}})$, on appelle N_{φ_f} le plus petit entier positif tel que φ_f soit constante modulo $N_{\varphi_f}\hat{\mathbb{Z}}^2$.

Enfin, on appelle $\mathcal{S}_0(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}})$ l'espace des fonctions φ_f telles que $\varphi_f(0,0) = 0$.

La proposition qui suit présente une version adélique de formule limite de Kronecker.

Proposition 6.1.11. *Soit $\varphi_f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}})$ telle que $N_{\varphi_f} \geq 3$.*
Alors il existe $u(\varphi_f) \in \mathcal{O}\left(Y^{L(N_{\varphi_f})}\right)^\times \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ tel qu'on ait pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$,

$$E(g,\varphi,s) = \log|u(\varphi_f)(g)| + O(s),$$

où $\varphi = \varphi_\infty \otimes \varphi_f$.

Démonstration. Voir [PS], corollaire 5.6 $\square$

6.2 Accouplement du régulateur avec la forme différentielle

Dorénavant, avec les notations de la section précédente et du chapitre 3, on note $X = S^K \times Y^{L(N_{\varphi_f})}$. Quitte à réduire le groupe K, on suppose que l'immersion fermée $\iota : Y^{L(N_{\varphi_f})}(\mathbb{C}) \times_{F_M} Y^{L(N_{\varphi_f})}(\mathbb{C}) \to S^K(\mathbb{C})$ construite en fin de section 2.4.3 est bien définie.

Soit

$$\mathrm{Eis}_{\mathscr{M}} : \mathcal{S}_0(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}}) \to \mathcal{O}(Y^{L(N_{\varphi_f})})^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{Q}} \to H^1_{\mathscr{M}}(Y^{L(N_{\varphi_f})}, \overline{\mathbb{Q}}(1))$$

la composée de deux applications où la première flèche est l'application $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f)$-équivariante définie par

$$\varphi_f \longmapsto u(\varphi_f)$$

et où la deuxième flèche est l'application construite en Remarque 2.1.6.

Définition 6.2.1. *On définit l'application* $\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2} : \mathcal{S}_0(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}})^{L(N_{\varphi_f})} \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\overline{\mathbb{Q}}}$, *où* $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\overline{\mathbb{Q}}} = H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3)) \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$, *comme la composée des applications suivantes :*

$\mathcal{S}_0(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\mathrm{Eis}_{\mathscr{M}}} H^1_{\mathscr{M}}(Y^{L(N_{\varphi_f})}, \overline{\mathbb{Q}}(1)) \xrightarrow{p^*} H^1_{\mathscr{M}}(Y^{L(N_{\varphi_f})} \times Y^{L(N_{\varphi_f})}, \overline{\mathbb{Q}}(1)) \xrightarrow{\iota_*} H^5_{\mathscr{M}}(S^K \times Y^{L(N_{\varphi_f})}, \overline{\mathbb{Q}}(3)) \xrightarrow{r_{\mathscr{D}}} H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\overline{\mathbb{Q}}}$,

où $r_{\mathscr{D}}$ désigne le régulateur supérieur de Beilinson et ι est l'application définie en fin de section 2.4.3.

Lemme 6.2.2. *Soit* $\varphi_f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}})$.

Alors, via les isomorphismes 2.2.6, 2.2.8, 2.2.9 vus précédemment, la classe de cohomologie $r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))$ *est représentée par la paire de courants* $(\iota_*\mathcal{T}_\xi, \iota_*\mathcal{T}_{\xi'})$, *où* $\xi = p^*\log|u(\varphi_f)|$ *et* $\xi' = p^* d\log u(\varphi_f)$.

Démonstration. D'après ([Jan88], section 3.7), on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\mathscr{M}}(Y^{L(N_{\varphi_f})}, \overline{\mathbb{Q}}(1)) \arrow[r, "p^*_{\mathscr{M}}"] \arrow[d, "r_{\mathscr{D}}"] & H^1_{\mathscr{M}}(Y^{L(N_{\varphi_f})} \times Y^{L(N_{\varphi_f})}, \overline{\mathbb{Q}}(1)) \arrow[r, "\iota_{*,\mathscr{M}}"] \arrow[d, "r_{\mathscr{D}}"] & H^5_{\mathscr{M}}(X, \overline{\mathbb{Q}}(3)) \arrow[d, "r_{\mathscr{D}}"] \\
H^1_{\mathscr{D}}(Y^{L(N_{\varphi_f})}/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1))_{\overline{\mathbb{Q}}} \arrow[r, "p^*_{\mathscr{D}}"] & H^1_{\mathscr{D}}((Y^{L(N_{\varphi_f})} \times Y^{L(N_{\varphi_f})})/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1))_{\overline{\mathbb{Q}}} \arrow[r, "\iota_{*,\mathscr{D}}"] & H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\overline{\mathbb{Q}}}
\end{tikzcd}$$

Via l'isomorphisme de la proposition 2.2.6, le morphisme $p^*_{\mathscr{D}}$ est obtenu par pullback de formes différentielles.

D'autre part, $\iota_{*,\mathscr{D}}$ est défini comme la composition

$$\begin{aligned}
H^1_{\mathscr{D}}((Y^{L(N_{\varphi_f})} \times Y^{L(N_{\varphi_f})})/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1))_{\overline{\mathbb{Q}}} &\simeq H_3^{\mathscr{D}}((Y^{L(N_{\varphi_f})} \times Y^{L(N_{\varphi_f})})/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1))_{\overline{\mathbb{Q}}} \\
&\xrightarrow{\iota_{*,\mathscr{D}}} H_3^{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1))_{\overline{\mathbb{Q}}} \\
&\simeq H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\overline{\mathbb{Q}}},
\end{aligned}$$

où le premier isomorphisme est induit par $(\varphi, \omega) \mapsto (T_\varphi, T_\omega)$ et où $\iota_{*,\mathscr{D}}$ est induit par $(S, T) \mapsto (\iota_* S, \iota_* T)$.

L'énoncé découle alors immédiatement de la remarque 2.2.7. $\square$

Lemme 6.2.3. *Il existe une suite* $(K_n)_{n\geq 0}$ *de sous-ensembles compacts de* X *et des fonctions* $\sigma_n \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ *tels que* $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $\bigcup_n K_n = X$, $\sigma_n = 1$ *sur un voisinage de* K_n, *et que le support de* σ_n *est un sous-ensemble de* $\overset{\circ}{K}_{n+1}$.

De plus, on a $0 \leq \sigma_n \leq 1$ *et pour tout* $x \in X$, *on a* $|d\sigma_{n,x}| \leq 2^{-n}$, *où* $|.|$ *est la norme sur l'espace cotangent induit par la métrique hermitienne* $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ *invariante sur* X.

Démonstration. Cela découle de ([Mil], proposition 1.11) et ([Dem], VII Lemme 2.4). □

Lemme 6.2.4. *Soit* θ *une forme différentielle à décroissance rapide sur* $Y^{L(N_{\varphi_f})} \times Y^{L(N_{\varphi_f})}$.

Alors la fonction $x \mapsto |\theta_x|$ *est à décroissance rapide, a fortiori intégrable, sur* $Y^{L(N_{\varphi_f})} \times Y^{L(N_{\varphi_f})}$.

Démonstration. Cf. ([Bor74], Proposition 5.5). □

Théorème 6.2.5. *Soit* $\varphi_f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{A}_f^2, \overline{\mathbb{Q}})$, *soit* $\xi = p^* \log |u(\varphi_f)|$. *On reprend la forme linéaire* Ψ_Ω *sur* $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ *construite au chapitre 5.*

Alors, il existe un opérateur de Hecke $T \in \mathscr{H}(G)_{\mathfrak{p}} \otimes_E \mathscr{H}(H)_{\mathfrak{q}}$ *tel que*

$$\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) = (\theta_\pi \otimes_E \theta_\sigma)(T) \int_{Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi \wedge \iota^* \Omega,$$

avec $(\theta_\pi \otimes_E \theta_\sigma)(T) \neq 0$.

Démonstration. Grâce à la suite exacte obtenue en fin de chapitre 4, on peut relever l'image de $r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))$ dans la localisation $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ à $H^4_{B,!}(X, \mathbb{R}(2))^+_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$. La cohomologie étant calculée à partir de courants, cela signifie qu'il existe un courant fermé $\mathscr{T} \in \mathscr{T}^{-4}(X/\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur X et un opérateur de Hecke $T' = T'_G \otimes T'_H$ avec $T'_G \notin \mathfrak{p}$ et $T'_H \notin \mathfrak{q}$ tels que l'image de la clase de cohomologie $(T')^{-1}[\mathscr{T}] \in H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ coïncide avec $r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))$.

Par définition de la forme linéaire $\Psi_\Omega : H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3)_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} E$, on a

$$\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) = < (T)'^{-1}[\mathscr{T}], [\Omega] > = \theta_\pi(T'_G)^{-1} \theta_\sigma(T'_H)^{-1} < [\mathscr{T}], [\Omega] > .$$

Par définition de la dualité de Poincaré sur la cohomologie intérieure, on a

$$< [\mathscr{T}], [\Omega] > = < [\mathscr{T}], [\Omega_c] >$$

où Ω_c est n'importe quelle forme différentielle à support compact représentant la classe de cohomologie de Ω.

On déduit des propositions 2.2.8 et 2.2.9 que $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3)) \simeq H^{\mathscr{D}}_3(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1))$ et que

$$H^{\mathscr{D}}_3(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1)) = \frac{\{(S,T) \in \mathscr{T}^{-4}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(0)) \oplus F^1 \mathscr{T}^{-3}_{\log}(X/\mathbb{R}, \mathbb{C}) | dS = \pi(T)\}}{d(\tilde{S}, \tilde{T})}.$$

Via ces isomorphismes, le morphisme canonique

$$H^4_B(X, \mathbb{R}(2))^+ \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))$$

est obtenu en envoyant $[\mathscr{T}]$ sur $[(\mathscr{T}, 0)]$ où $[(\mathscr{T}, 0)]$ désigne la classe de $(\mathscr{T}, 0)$ dans $H^{\mathscr{D}}_3(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1))$.

D'après le Lemme 6.2.2, il existe un opérateur de Hecke $T'' = T''_G \otimes T''_H$ avec $T''_G \notin \mathfrak{p}$ et $T''_H \notin \mathfrak{q}$ tel que

$$T''([(\mathscr{T},0)] - T'[(\iota_*\mathscr{T}_\xi, \iota_*\mathscr{T}_{\xi'})]) = 0 \in H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3)).$$

Désormais, on note $\mathscr{T}' = T''\mathscr{T}$ et $T = T'T''$.

D'après ce qui précède, on en déduit donc l'existence d'un courant $\tau \in \mathscr{T}^{-5}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(0))$ tel que

$$\mathscr{T}' = T\iota_*\mathscr{T}_\xi + d\tau.$$

De plus, puisque la dualité de Poincaré est induite par l'accouplement entre courants et formes différentielles à support compact, on a

$$< [\mathscr{T}'], [\Omega_c] >= \mathscr{T}'(\Omega_c) = \iota_*\mathscr{T}_\xi(T\Omega_c) + d\tau(\Omega_c).$$

On a $d\tau(\Omega_c) = \pm\tau(d\Omega_c) = 0$ puisque Ω_c est une forme différentielle fermée.

Il s'ensuit que

$$\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f)) = \iota_*\mathscr{T}_\xi(T\Omega_c) = \mathscr{T}\xi(\iota^*T\Omega_c) = \int_{Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi \wedge \iota^* T\Omega_c.$$

Il nous reste donc à prouver le lemme suivant :

Lemme 6.2.6. *On a*

$$\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi \wedge \iota^* T\Omega_c = (\theta_\pi \otimes_E \theta_\sigma)(T) \int_{Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi \wedge \iota^* \Omega.$$

Démonstration. Dans un premier temps, observons que l'intégrale de droite est convergente. En effet, la forme différentielle Ω est à décroissance rapide car cuspidale, la forme différentielle ξ est à croissance modérée car les séries d'Eisenstein sont à croissance modérée et le résultat d'un produit de deux formes différentilles à décroissance rapide et à croissance modérée resepctivement est une forme différentielle à décroissance rapide.

D'après ([Bor80], Corollaire 5.5), on peut choisir Ω_c tel que $\Omega - \Omega_c = d\varepsilon'$ pour une forme ε' qui est à décroissance rapide et ainsi

$$T\Omega_c = (\theta_\pi \otimes_E \theta_\sigma)(T)\Omega - d\varepsilon,$$

où $\varepsilon = T\varepsilon'$.

Pour prouver le lemme, on est donc ramené à prouver que

$$\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi \wedge \iota^* d\varepsilon = 0.$$

Observons d'abord que pour toute forme différentielle η sur X à support compact et à valeurs réelles, on a

$$\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi \wedge \iota^*(Td\eta) = \mathscr{T}'(d\eta) - (d\tau)(d\eta) = 0,$$

puisque $\mathscr{T}'$ est un courant fermé.

Soit $(\sigma_k)_{k\geq 0}$ la suite de fonctions donnée par le Lemme 6.2.3.

Pour tout $k \geq 0$, la forme différentielle $\sigma_k\varepsilon$ est à support compact. Ainsi,

$$\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi\wedge\iota^* d\varepsilon = \int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi\wedge\iota^* d(\varepsilon-\sigma_k\varepsilon).$$

Attachons-nous maintenant à montrer que $\lim_{k\to+\infty}\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi\wedge\iota^* d(\varepsilon-\sigma_k\varepsilon)=0$.

On a $d(\sigma_k\varepsilon)=d\sigma_k\wedge\varepsilon+\sigma_k d\varepsilon$.

Ainsi

$$\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi\wedge\iota^* d(\varepsilon-\sigma_k\varepsilon) = \int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi\wedge\iota^* d(\varepsilon-\sigma_k d\varepsilon)+\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi\wedge\iota^*(d\sigma_k\wedge\varepsilon).$$

D'autre part, il existe une fonction f à décroissance rapide telle qu'on a $\iota^* d\varepsilon = f\mathrm{vol}$, où vol est la forme volume sur $Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}$. Il en découle que

$$\xi\wedge\iota^*(d\varepsilon-\sigma_k d\varepsilon)=\xi\wedge(f-\sigma_k f)\mathrm{vol}.$$

La forme $\xi\wedge(f-\sigma_k f)$ est bornée par la fonction à décroissance rapide $2|\xi f|$ sur $Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}$ et s'annule sur $K_k\cap(Y^{L(N_{\varphi_f})}\times Y^{L(N_{\varphi_f})})$.

Or, par construction, $\bigcup_{k\geq 0} K_k\cap(Y^{L(N_{\varphi_f})}\times Y^{L(N_{\varphi_f})}) = Y^{L(N_{\varphi_f})}\times Y^{L(N_{\varphi_f})}$.

On en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi\wedge\iota^*(d\varepsilon-\sigma_k d\varepsilon)=0.$$

De plus, la forme différentielle $\xi\wedge\iota^*$ est à décroissance rapide, donc la fonction $x\mapsto|(\xi\wedge\iota^*\varepsilon)_x|$ est intégrable sur $Y^{L(N_{\varphi_f})}\times Y^{L(N_{\varphi_f})}$ d'après le Lemme 6.2.4.

De façon analogue à la preuve de ([Bor74], Proposition 2.2), il en découle que

$$\begin{aligned}\left|\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \iota^* d\sigma_k\wedge\xi\wedge\iota^*\varepsilon\right| &\leq \int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} c|\iota^* d\sigma_k||\xi\wedge\iota^*\varepsilon|\mathrm{vol}\\ &\leq 2^{-k}c\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} |\xi\wedge\iota^*\varepsilon|\mathrm{vol}\end{aligned}$$

pour une constance $c\in\mathbb{R}$.

Ainsi, $\lim_{k\to+\infty}\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \iota^* d\sigma_k\wedge\xi\wedge\iota^*\varepsilon=0$.

Finalement, on a donc bien $\lim_{k\to+\infty}\int_{Y^{L(N_{\varphi_f})}\times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi\wedge\iota^* d(\varepsilon-\sigma_k\varepsilon)=0$ et le lemme est prouvé. □

Le théorème est donc prouvé. □

6.3 Lien avec l'intégrale adélique

Dans cette section et dorénavant, on appelle P le groupe

$$P=\mathrm{GL}(2)\times_{\mathbb{G}_m}\mathrm{GL}(2)=\{(h_1,h_2)\in\mathrm{GL}(2)\times\mathrm{GL}(2)|\det(h_1)=\det(h_2)\}$$

vu comme sous-groupe de GSp(4) via l'injection i définie en section 2.3.

On définit une mesure de Haar sur $P(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ de la manière suivante : pour tout nombre premier p, on munit $P(\mathbb{Q}_p)$ de l'unique mesure de Haar dh_p pour laquelle $P(\mathbb{Z}_p)$ a un volume égal à 1.

D'autre part, soit

$$U_\infty = (\mathbb{R}_+^\times \mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+^\times \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})) \cap P(\mathbb{R}),$$

où $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) | \, {}^tMM = I_2, \det(M) = 1.\}$. C'est un sous-groupe compact maximal (modulo le centre) de $P(\mathbb{R})_+ = \{(h_1,h_2) \in P(\mathbb{R}) | \det(h_1) = \det(h_2) > 0\}$.

On désigne par $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{u}$ les algèbres de Lie complexes respectives de $P(\mathbb{R})$ et U_∞ respectivement.

Alors

$$\mathbf{1} = (v^+, 0) \wedge (0, v^+) \wedge (v^-, 0) \wedge (0, v^-)$$

est un générateur de la plus haute puissance extérieure $\bigwedge^4(\mathfrak{h}/\mathfrak{u})$ et détermine une mesure invariante à gauche dx sur $P(\mathbb{R})/U_\infty$. En notant dk la mesure de Haar sur $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ dont la masse totale est égale à 1, on définit une mesure $dh_\infty = dxdk$ sur $P(\mathbb{R})/\mathbb{R}_+^\times$.

Définition 6.3.1. *On appelle dh la mesure définie sur $P(\mathbb{A})/\mathbb{R}_+^\times$ par le produit*

$$dh = dh_\infty \prod_p dh_p.$$

Définition 6.3.2. *Pour deux éléments x et y de $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{Q} E$, on écrit $x \sim y$ si x et y sont égaux à multiplication près par un élément de $E^\times$.*

Dans toute la suite, un nombre complexe sera toujours considéré comme un élément de $\mathbb{C} \otimes_\mathbb{Q} E = \prod_{\sigma : E \to \mathbb{C}} \mathbb{C}$ via le plongement diagonal $\mathbb{C} \hookrightarrow \prod_{\sigma: E \to \mathbb{C}} \mathbb{C}$.

Proposition 6.3.3. *On a*

$$\Psi_\Omega(r_\mathscr{D}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) \sim \int_{Z(\mathbb{A})P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})} E(h_1, \varphi, 0)(X_{(-1,1)}\overline{\Psi})(h_1,h_2)\Phi(h_2)dh,$$

avec $\varphi = \varphi_\infty \otimes \varphi_f$.

Démonstration. D'après le théorème 6.2.5, on a

$$\Psi_\Omega(r_\mathscr{D}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) = (\theta_\pi \otimes_E \theta_\sigma)(T) \int_{Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi \wedge \iota^*\Omega,$$

avec $\xi(h) = p^* \log |u(\varphi_f)|(h_1,h_2) = E(h_1, \varphi, 0)$, où $\varphi = \varphi_\infty \otimes \varphi_f$ d'après la proposition 6.1.11.

On a un isomorphisme de variétés complexes

$$Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})} \simeq P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})/U_\infty U(N_{\varphi_f})$$

où $U(N_{\varphi_f})$ est le sous-groupe principal de congruence de niveau N_{φ_f} de $P(\mathbb{A}_f)$.

Notons $\theta = (\theta_\pi \otimes_E \theta_\sigma)(T)$. Rappelons que par définition, $\theta \in E^\times$. On note également p_N le cardinal du groupe fini $Z(\mathbb{Q})\backslash Z(\mathbb{A}_f)/(U \cap Z(\mathbb{A}_f))$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) &= \theta \int_{Y^{L(N_{\varphi_f})} \times_E Y^{L(N_{\varphi_f})}} \xi \wedge \iota^* \Omega \\
&= \theta \int_{P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})/U_\infty U} E(h_1, \varphi, 0)(\overline{\Omega}_\Psi \otimes \Omega_\Phi)(\mathbf{1}) dh \\
&= \theta \int_{P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})/U_\infty U(N_{\varphi_f})} E(h_1, \varphi, 0)\overline{\Omega}_\Psi((v^-, 0) \wedge (0, v^-) \otimes (v^+, 0))\Omega_\Phi(v^+) dh \\
&= \theta \int_{\mathbb{R}_+^\times P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})/U(N_{\varphi_f})} E(h_1, \varphi, 0)\overline{\Omega}_\Psi((v^-, 0) \wedge (0, v^-) \otimes (v^+, 0))\Omega_\Phi(v^+) dh \\
&= 4p_N\theta \int_{Z(\mathbb{A})P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})/U(N_{\varphi_f})} E(h_1, \varphi, 0)\overline{\Omega}_\Psi((v^-, 0) \wedge (0, v^-) \otimes (v^+, 0))\Omega_\Phi(v^+) dh \\
&= \frac{4p_N\theta}{\mathrm{vol}(U(N_{\varphi_f}))} \int_{Z(\mathbb{A})P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})} E(h_1, \varphi, 0)\overline{\Omega}_\Psi((v^-, 0) \wedge (0, v^-) \otimes (v^+, 0))\Omega_\Phi(v^+) dh.
\end{aligned}$$

Notons que le volume de $U(N_{\varphi_f})$ est un nombre rationnel non nul d'après notre choix de mesure.

D'autre part, on vérifie par un calcul ([Lem17], Lemme 4.27) que

$$(v^-, 0) \wedge (0, v^-) \otimes (v^+, 0) = \frac{1}{4}\mathrm{ad}_{X_{(-1,1)}}(X_{(0,-2)} \wedge X_{(-1,-1)} \otimes X_{(2,0)}).$$

Or, par définition de Ω_Ψ et Ω_Φ au chapitre 3, on a

$$\Omega_{\overline{\Psi}}(X_{(0,-2)} \wedge X_{(-1,-1)} \otimes X_{(2,0)}) = \overline{\Psi}$$

et

$$\Omega_\Phi(v^+) = \Phi.$$

Ainsi

$$\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) \sim \int_{Z(\mathbb{A})P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})} E(h_1, \varphi, 0)(X_{(-1,1)}\overline{\Psi})(h_1, h_2)\Phi(h_2) dh.$$

$\square$

Chapitre 7

Lien entre le régulateur de Beilinson et la fonction L

7.1 Définition de la fonction L

7.1.1 Définition

Soit $\pi = \pi_\infty \bigotimes_p' \pi_p$ et $\sigma = \sigma_\infty \bigotimes_p' \sigma_p$ des représentations automorphes admissibles unitaires cuspidales irréductibles de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ respectivement. Soit V l'ensemble fini constitué de la place archimédienne de $\mathbb{Q}$ et des places où π ou σ est ramifiée.

On sait que le dual de Langlands de $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$ est $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ([ASha]).

Soit $r : \mathrm{GSp}(4, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(8, \mathbb{C})$ la représentation de dimension huit obtenue par produit tensoriel entre les représentations standard de degré quatre et de degré deux de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ respectivement.

Pour toute place $p \notin V$, alors ([Bum], section 3.9) $\pi_p \times \sigma_p$ est paramétrée par une classe de conjugaison semisimple de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ qu'on note α_p.

Définition 7.1.1. *([Bum], section 3.9) On définit la fonction L de degré huit de* $\mathrm{GSp}(4) \times \mathrm{GL}(2)$ *en les places non ramifiées de* $\pi \times \sigma$ *par*

$$L_V(s, \pi \times \sigma) = \prod_{p \notin V} L(s, \pi_p \times \sigma_p)$$

où pour tout $p \notin V$,

$$L(s, \pi_p \times \sigma_p) = \mathrm{Det}(I_8 - p^{-s} r(\alpha_p))^{-1}.$$

Donnons maintenant une définition plus pratique de la fonction L.

Le centre Z de $\mathrm{GSp}(4)$ est constitué des matrices scalaires, et le tore maximal standard est

$$T = \{\mathrm{diag}(u_1, u_2, v_1, v_2) | u_1 v_1 = u_2 v_2 \neq 0\}.$$

On écrira un élément $t \in T$ sous la forme

$$t = \mathrm{diag}(u_1, u_2, u_1^{-1}u_0, u_2^{-1}u_0),$$

où pour tout $0 \leq i \leq 2, u_i \neq 0$ et $u_0 = \nu(t)$.

Toutes les représentations non ramifiées de GSp(4) s'obtiennent de la façon suivante ([ASch], 3.2) : soit p un nombre premier, soit χ_0, χ_1, χ_2 des caractères non ramifiés de $\mathbb{Q}_p^*$, i.e. des morphismes $\mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}^*$ qui sont triviaux sur $\mathbb{Z}_p^*$.

Soit $B = TN$ le sous-groupe de Borel, où N est le sous-groupe unipotent maximal défini en section 3.2. On définit un caractère non ramifié de B trivial sur N et qui est donné sur T par

$$t \longmapsto \chi_0(u_0)\chi_1(u_1)\chi_2(u_2).$$

On obtient alors par induction une représentation sur $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q}_p)$, notée $\pi(\chi_0, \chi_1, \chi_2)$, qui a un unique constituant sphérique. La classe d'isomorphisme de cette représentation dépend uniquement du caractère non ramifié modulo l'action du groupe de Weyl. Puisque toutes les représentations non ramifiées s'obtiennent de cette façon, il y a donc une bijection entre les caractères non ramifiés de T modulo l'action du groupe de Weyl d'une part, et les classes d'isomorphisme des représentations non ramifiées de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q}_p)$ d'autre part.

De plus, tout caractère non ramifié de $\mathbb{Q}_p^*$ est déterminé par sa valeur en p. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 7.1.2. *On appelle paramètres de Satake de la représentation $\pi(\chi_0, \chi_1, \chi_2)$ les trois nombres complexes non nuls*

$$\forall 0 \leq i \leq 2, b_i := \chi_i(p).$$

Définition 7.1.3. *Si π_p est une représentation non ramifiée de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Q}_p)$ admettant b_0, b_1 et b_2 comme paramètres de Satake, on définit $L(s, \pi_p)$ par la formule suivante :*

$$L(s, \pi_p)^{-1} := \prod_{k=0}^{2} \prod_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 2} (1 - b_0 b_{i_1} \ldots b_{i_k} p^{-s}).$$

Remarque 7.1.4. *On remarque que $L(s, \pi_p)^{-1}$ définit un polynôme de degré 4 en p^{-s}.*

On définit de même les paramètres de Satake b'_1 et b'_2 pour toute représentation σ_p non ramifiée de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$ ainsi que le facteur local

$$L(s, \sigma_p)^{-1} := \prod_{i=1}^{2} (1 - b'_i p^{-s}).$$

Définition 7.1.5. *Pour toute place p telle que π_p et σ_p sont non ramifiées, on définit le facteur local de la fonction L de Rankin-Selberg par*

$$L(s, \pi_p \times \sigma_p)^{-1} = \prod_{k=0}^{2} \prod_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 2} \prod_{j=1}^{2} (1 - b_0 b_{i_1} \ldots b_{i_k} b'_j p^{-s}).$$

Remarque 7.1.6. *On remarque que $L(s, \pi_p \times \sigma_p)^{-1}$ définit un polynôme de degré 8 en p^{-s}.*

7.1.2 Calcul de la fonction L

On reprend les notations du début du chapitre. π et σ désignent toujours des représentations automorphes cuspidales irréductibles admissibles globalement génériques de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ respectivement.

Par ailleurs, on rappelle que P désigne le groupe

$$P = \mathrm{GL}(2) \times_{\mathbb{G}_m} \mathrm{GL}(2) = \{(h_1, h_2) \in \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2) | \det(h_1) = \det(h_2)\}$$

vu comme sous-groupe de $\mathrm{GSp}(4)$ via l'injection i définie en section 2.3.

Définition 7.1.7. *Soit $\Psi \in \pi, \Phi \in \sigma$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathrm{A}^2)$. On définit l'intégrale zêta globale suivante :*

$$\mathscr{Z}(s, \Psi, \Phi, f_\varphi) = \int_{Z(\mathbb{A})P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})} \Psi(h)\Phi(h_2)E(h_1, \varphi, s)dh.$$

Cette intégrale converge absolument excepté en les pôles de la série d'Eisenstein et définit une fonction méromorphe pour $s \in \mathbb{C}$.

Remarque 7.1.8. *D'après la proposition 6.1.10, l'intégrale zêta vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\mathscr{Z}(s, \Psi, \Phi, f_\varphi) = \mathscr{Z}(1 - s, \Psi, \Phi, f_{\hat{\varphi}}).$$

Proposition 7.1.9. *La fonction $s \mapsto \mathscr{Z}(s, \Psi, \Phi, f_\varphi)$ est holomorphe à l'exception possible de pôles simples en $s = 1$ ou $s = 0$. De plus, on a*

$$\mathrm{Res}_{s=1}\mathscr{Z}(s, \Psi, \Phi, f_\varphi) = \frac{\hat{\varphi}(0)}{2} \int_{Z(\mathbb{A})P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})} \Psi(h)\Phi(h_2)dh$$

où

$$\hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{A}^2} \varphi(s, t)dsdt.$$

Démonstration. C'est un cas particulier de [Mor09], proposition 3.1. □

On suppose désormais que les formes cuspidales $\Psi = \bigotimes_v' \Psi_v$ et $\Phi = \bigotimes_v' \Phi_v$ sont factorisables. Le théorème local de multiplicité un implique alors que les fonctions globales de Whittaker W_Ψ et W_Φ se décomposent en produits de fonctions de Whittaker locales :

$$W_\Psi(g) = \prod_v W_{\Psi_v}(g_v), g \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$$

et

$$W_\Phi(h_2) = \prod_v W_{\Phi_v}(h_{2,v}), h_2 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}).$$

On suppose de plus que la fonction φ de Schwartz-Bruhat est factorisable sous la forme $\varphi = \prod_v \varphi_v$. Dans ce cas, la section globale de Jacquet f_φ se factorise de la façon suivante :

$$f_\varphi(s, h_1) = \prod_v f_{\varphi_v}(s, h_{1,v})$$

où

$$f_{\varphi_v}(s, h_{1,v}) = |\det h_{1,v}|_v^s \int_{\mathbb{Q}_v^\times} \varphi_v((0, t_v)h_{1,v})|t_v|_v^{2s} d^\times t_v.$$

Définition 7.1.10. *Pour toute place v de $\mathbb{Q}$, on définit l'intégrale zêta locale $\mathscr{Z}_v(s, W_{\Psi_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v})$ par*

$$\mathscr{Z}_v(s, W_{\Psi_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v}) = \int_{Z(\mathbb{Q}_v)N_P(\mathbb{Q}_v)\backslash P(\mathbb{Q}_v)} W_{\Psi_v}(h_v) W_{\Phi_v}(h_{2,v}) f_{\varphi_v}(s, h_{1,v}) dh_v$$

où N_P désigne le sous-groupe maximal unipotent de P défini par $N_P = N \cap P$.

Proposition 7.1.11. *([Mor04], proposition 3.2) On suppose que $\mathscr{Z}_\infty(s, W_{\Psi_\infty}, W_{\Phi_\infty}, f_{\varphi_\infty})$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > e_\infty$. Alors, l'intégrale*

$$\int_{Z(\mathbb{A})N_P(\mathbb{A})\backslash P(\mathbb{A})} W_\Psi(h) W_\Phi(h_2) f_\varphi(s, h_1) dh$$

converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > \max\{3, e_\infty\}$ et est égale à $\mathscr{Z}(s, \Psi, \Phi, f_\varphi)$.

Corollaire 7.1.12. *Pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > \max\{3, e_\infty\}$, on a*

$$\mathscr{Z}(s, \Psi, \Phi, f_\varphi) = \prod_v \mathscr{Z}_v(s, W_{\Psi_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v}).$$

7.1.3 Composantes non archimédiennes

Soit V un ensemble fini de places satisfaisant les conditions suivantes : si $v \notin V$, alors v est une place finie telle que Ψ_v est non ramifiée, les représentations π_v et σ_v admettent des vecteurs fixés par $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Z}_v)$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_v)$ respectivement, et $\varphi_v \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_v^2)$ est la fonction indicatrice $\varphi_{v,0}$ de $\mathbb{Z}_v^2$.

Fixons une place $v \notin V$. Soit $W_0 \in W(\pi_v, \Psi_v)$ la fonction de Whittaker locale fixée par $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{Z}_v)$ normalisée de telle sorte que $W_0(I_4) = 1$ et $W_0' \in W(\sigma_v, \Psi_v)$ la fonction de Whittaker locale fixée par $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_v)$ et normalisée de telle sorte que $W_0'(I_2) = 1$.

Proposition 7.1.13. *([Mor04], section 3.4) On a $\mathscr{Z}_v(s, W_0, W_0', f_{\varphi_{v,0}}) = L(s, \pi_v \times \sigma_v)$.*
Ainsi, pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > \max\{3, e_\infty\}$, on a

$$\mathscr{Z}(s, \Psi, \Phi, f_\varphi) = \prod_{v \in V} \mathscr{Z}_v(s, W_{\Psi_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v}) L_V(s, \pi \times \sigma).$$

On appelle $\mathscr{S}(\mathbb{Q}_v^2)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact définies sur $\mathbb{Q}_v^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 7.1.14. *([Sou], section 2). Soit v une place non archimédienne. Alors il existe un unique polynôme $P_v(X) \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_v(0) = 1$ et que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par $\mathscr{Z}_v(s, W_{\Psi_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v})$ pour $W_{\Psi_v} \in W(\pi_v, \Psi_v)$, $W_{\Phi_v} \in W(\sigma_v, \Psi_v)$ et $\varphi_v \in \mathscr{S}(\mathbb{Q}_v^2)$ est $P_v(p^{-s})^{-1}\mathbb{C}[p^{-s}, p^s]$.*

Définition 7.1.15. *Pour toute place non-archimédienne $v \in V$, on pose pour presque tout $s \in \mathbb{C}$*

$$L_v(s, \pi \times \sigma) = P_v(p^{-s})^{-1}.$$

7.1.4 Composante archimédienne

Rappelons les notations du chapitre 3.

On appelle $\sigma_\infty^{1,0}$ (resp. $\sigma_\infty^{0,1}$) la série discrète holomorphe (resp. antiholomorphe) de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})_+$ avec même caractères central et infinitésimal que la représentation triviale. De même, on note $\pi_\infty^{2,1} \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})_+$ (resp.$\pi_\infty^{1,2}$) la série discrète avec caractère central trivial qui contient comme K'_∞-type minimal le $\mathbb{C}[K'_\infty]$-module $\tau_{(3,-1)}$ (resp. $\tau_{(1,-3)}$) avec multiplicité un.

Soit Ψ_∞ un vecteur de plus haut poids du K'_∞-type minimal de $\pi_\infty^{2,1}$. Alors $\overline{\Psi}_\infty$ est un vecteur de plus haut poids du K'_∞-type minimal de $\pi_\infty^{1,2}$.

Soit Φ_∞ un générateur du L'_∞-type minimal de σ_∞.

Fixons un isomorphisme $\pi_\infty^W \simeq W(\pi_\infty^W, \Psi_\infty)$ et soit $W_{X_{(-1,-1)}\overline{\Psi}_\infty}$ l'image de $X(-1,-1)\overline{\Psi}_\infty$ sous cet isomorphisme. De même, on désigne par W_{Φ_∞} l'image de Φ_∞ sous un isomorphisme fixé $\sigma_\infty \simeq W(\sigma_\infty, \Psi_\infty)$.

Proposition 7.1.16. *([Mor04],5.11) Soit* $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$, *où* $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$. *Soit* $\varphi_\infty \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ *la fonction de Schwartz-Bruhat définie par* $\varphi_\infty(x,y) = e^{-\pi(x^2+y^2)}$.

Alors il existe une constante complexe C non nulle telle que pour tout nombre complexe s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > e_\infty$, *on a*

$$\mathscr{Z}_\infty(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_\infty}, W_{\Phi_\infty}, f_{\varphi_\infty}) = C\Gamma_{\mathbb{C}}(s+2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+1)^2\Gamma_{\mathbb{C}}(s).$$

Définition 7.1.17. *On pose pour presque tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$L_\infty(s, \pi \times \sigma) = C\Gamma_{\mathbb{C}}(s+2)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+1)^2\Gamma_{\mathbb{C}}(s).$$

7.2 Lien entre le régulateur de Beilinson et la fonction L

D'après la proposition 6.3.3 et la définition 7.1.7, on a la relation suivante :

$$\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) \sim \mathscr{Z}(0, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi).$$

D'après la proposition 7.1.9 , l'intégrale zêta définit une fonction $s \mapsto \mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi)$ holomorphe, à l'exception possible de pôles simples en $s = 1$ ou $s = 0$.

Dans un premier temps, attachons nous à montrer l'holomorphie en $s = 0$ de cette fonction.

Proposition 7.2.1. *La fonction* $s \mapsto \mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi)$ *est holomorphe en* $s = 0$.

Démonstration. Soit $\omega = \omega_\pi \times \omega_\sigma$ le caractère central de $\pi \times \sigma$, produit des caractères centraux de π et σ. D'après [Mor09], proposition 3.1, de deux choses l'une :

- si $\omega \neq |.|^\lambda$ pour tout $\lambda \in i\mathbb{R}$, alors la fonction $s \mapsto \mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi)$ est entière sur $\mathbb{C}$.

- si il existe $\lambda \in i\mathbb{R}$ tel que $\omega = |.|^\lambda$ alors la fonction $s \mapsto \mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi)$ est holomorphe, à l'exception de possibles pôles simples en $s = 1 - \dfrac{\lambda}{2}$ et $s = -\dfrac{\lambda}{2}$.

Dans le cas où $\lambda \neq 0$, il est clair que $s \mapsto \mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi)$ est holomorphe en 0.

Dans le cas où $\lambda = 0$, le résidu en 0 de l'intégrale zêta est donné par

$$\mathrm{Res}_{s=0}(\mathscr{Z}(s, \Psi, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, f_\varphi)) = -\frac{1}{2} \times \varphi(0) \times \int_{Z(\mathbb{A})P(\mathbb{Q})\backslash P(\mathbb{A})} X_{(-1,1)}\overline{\Psi}(h)\Phi(h_2)dh.$$

Or, par construction, $\varphi = \varphi_f \otimes \varphi_\infty$, avec $\varphi_f(0) = 0$. Donc $\varphi(0) = 0$, ce qui assure que

$$\mathrm{Res}_{s=0}(\mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi)) = 0.$$

Ainsi, dans tous les cas, la fonction $s \mapsto \mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi)$ est holomorphe en $s = 0$.

Remarque 7.2.2. *Dans le cas où le caractère central ω est trivial (cas où $\lambda = 0$), le résidu en $s = 1$ est donné par la proposition 7.1.9. La fonction $s \mapsto \mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi)$ n'est donc pas nécessairement holomorphe en $s = 1$.*

□

D'après la proposition 7.1.13, pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s)$ est assez grand, on a le produit

$$\mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi) = \prod_{v \in V} \mathscr{Z}_v(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v}) L_V(s, \pi \times \sigma).$$

Remarque 7.2.3. *Pour les places ramifiées non archimédiennes, d'après la proposition 7.1.14, il existe des choix de fonctions de Whittaker et de Schwartz-Bruhat pour lesquelles $\mathscr{Z}_v(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v}) = P_v(p^{-s})^{-1}$.*

Le membre de droite possédant un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, on peut également prolonger la définition de $\mathscr{Z}_v(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v})$ à presque tout $s \in \mathbb{C}$ par

$$\mathscr{Z}_v(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v}) = P_v(p^{-s})^{-1}.$$

Au regard de la définition 7.1.15, on a donc dans ce cas pour toute place ramifiée non archimédienne et pour presque tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\mathscr{Z}_v(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_v}, W_{\Phi_v}, f_{\varphi_v}) = L_v(s, \pi \times \sigma).$$

D'autre part, on a vu en proposition 7.1.16 que pour tout nombre complexe s avec $\mathrm{Re}(s)$ assez grand, on a

$$\mathscr{Z}_\infty(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_\infty}, W_{\Phi_\infty}, f_{\varphi_\infty}) = C\Gamma_\mathbb{C}(s+2)\Gamma_\mathbb{C}(s+1)^2\Gamma_\mathbb{C}(s).$$

La fonction Γ admettant un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, on étend la définition de $\mathscr{Z}_\infty$ pour presque tout $s \in \mathbb{C}$ par

$$\mathscr{Z}_\infty(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_\infty}, W_{\Phi_\infty}, f_{\varphi_\infty}) = C\Gamma_\mathbb{C}(s+2)\Gamma_\mathbb{C}(s+1)^2\Gamma_\mathbb{C}(s).$$

Définition 7.2.4. *On définit la représentation contragrédiente de (π, V), notée $(\hat{\pi}, \hat{V})$ où $\hat{V}$ est l'espace dual de V, par :*

$$\forall g \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}), \forall f \in \hat{V}, \forall v \in V,$$
$$\hat{\pi}(g)(f)(v) = f(\pi(g^{-1})(v)).$$

On définit de même la représentation contragrédiente de σ, notée $\hat{\sigma}$.

Concrètement, si on note ω_π et ω_σ les caractères centraux respectifs de π et de σ, on a $\hat{\pi} = \{\hat{\Psi} | \Psi \in \pi\}$ où pour tout $g \in \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}), \hat{\Psi}(g) = \omega_\pi^{-1}(\nu(g))\Psi(g)$ et $\hat{\sigma} = \{\hat{\Phi} | \Phi \in \sigma\}$ où pour tout $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}), \hat{\Phi}(g) = \omega_\sigma^{-1}(\det(g))\Phi(g)$. ([Mor09], Section 1.3)

Remarque 7.2.5. *D'après ([Bum], Section 4.2), si π est admissible, alors pour toute place v, $\hat{\hat{\pi}}_v \simeq \pi_v$.*

On suppose désormais que pour toute place ramifiée non archimédienne $p \in V$, π_p et $\hat{\pi}_p$ s'obtiennent comme relèvements de Weil de représentations de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$. On suppose également que pour toute place non ramifiée $p \notin V$, $\hat{\varphi}_p$ est l'indicatrice de $\mathbb{Z}_p^2$ (possible d'après le lemme 6.1.7) et que pour toute place ramifiée non archimédienne $p \in V$, on a $\varphi_p(x, y) = \mathbb{1}_{p^n \mathbb{Z}_p \times (1+p^n \mathbb{Z}_p)}(x, y)$ pour un entier naturel n assez grand (cf.[Sou], équation 5.7).

Dans ces conditions, on sait d'après [Sou], équation 5.7, qu'il existe alors un choix de fonctions de Whittaker tel que le facteur $\mathscr{Z}_p(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_p}, W_{\Phi_p}, f_{\varphi_p})$ soit une puissance de p constante. On pose alors

$$\alpha = \prod_{p \in V} \mathscr{Z}_p(0, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_p}, W_{\Phi_p}, f_{\varphi_p}).$$

α est donc une constante complexe non nulle.

Lemme 7.2.6. *On rappelle qu'on suppose que la fonction $s \mapsto L(s, \pi \times \sigma)$ n'a pas de pôle en $s = 0$.*

Alors la fonction L partielle $s \mapsto L_V(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$ n'a pas de pôle en $s = 1$ et peut donc s'y prolonger en une fonction holomorphe en $s = 1$.

Démonstration. D'après ([Mor09], Théorème 1.1), on a l'équation fonctionnelle suivante :

$$L(s, \pi \times \sigma) = \epsilon(s, \pi \times \sigma) L(1 - s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$$

où $\epsilon(s, \pi \times \sigma)$ est de la forme $\epsilon(s, \pi \times \sigma) = ab^{-s}$, avec $a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$. Puisque le facteur $L(s, \pi \times \sigma)$ n'a pas de pôle en 0 et que le facteur epsilon est holomorphe, on en déduit que la fonction $s \mapsto L(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$ est holomorphe en 1. Or, on a le produit

$$L(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = \prod_{p \in V} L_p(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) L_V(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) L_\infty(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}),$$

donc

$$L_V(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = L(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) \prod_{p \in V} L_p(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})^{-1} L_\infty(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})^{-1}.$$

On vient de voir que le facteur $L(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$ n'admet pas de pôle en $s = 1$. Ensuite, pour $p \in V$, d'après la définition 7.1.15, il existe un polynôme $\hat{P}_p$ tel que $L_p(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})^{-1} = \hat{P}_p(p^{-s})$ qui n'admet donc pas de pôle en $s = 1$. Enfin, de la même manière que dans la définition 7.1.17, il existe une constante complexe non nulle $\hat{C}$ telle que pour presque tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$L_\infty(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = \hat{C}\Gamma_\mathbb{C}(s+2)\Gamma_\mathbb{C}(s+1)^2\Gamma_\mathbb{C}(s).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} L_\infty(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) &= \hat{C}\Gamma_\mathbb{C}(3)\Gamma_\mathbb{C}(2)^2\Gamma_\mathbb{C}(1) \\ &= \hat{C}2(2\pi)^{-3}\Gamma(3)4(2\pi)^{-4}\Gamma(2)^2 2(2\pi)^{-1}\Gamma(1) \\ &= \hat{C}\frac{\pi^{-8}}{8}. \end{aligned}$$

On en conclut que la fonction $s \mapsto L(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$ n'admet pas de pôle en $s = 1$. □

Théorème 7.2.7. *Soit π une représentation automorphe cuspidale générique de* $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ *et σ une représentation automorphe cuspidale* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$. *On suppose que la fonction $s \mapsto L(s, \pi \times \sigma)$ n'a pas de pôle en $s = 0$. On suppose également que pour tout $p \in V, L_p(s, \pi \times \sigma)$ n'admet pas de pôle en $s = 0$. Comme expliqué précédemment, les choix des fonctions de Whittaker et des fonctions de Schwartz φ_p pour $p \in V$ sont tels que les facteurs $\mathscr{Z}_p(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}_p}, W_{\Phi_p}, f_{\varphi_p})$ soient des puissances de p constantes.*

On a l'égalité suivante :

$$\mathscr{Z}(0, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi) = cL_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$$

où $c = \hat{C}\dfrac{\pi^{-8}}{8}\alpha \prod_{p \in V} a_p L_p(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) L_p(0, \pi \times \sigma)^{-1}$ est une constante complexe non nulle.

Démonstration. Rappelons l'équation fonctionnelle :

pour presque tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\mathscr{Z}(s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi) = \mathscr{Z}(1-s, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_{\hat{\varphi}}).$$

Ainsi, $\mathscr{Z}(0, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_\varphi) = \mathscr{Z}(1, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_{\hat{\varphi}})$. Etudions maintenant le membre de droite.

De même qu'en proposition 7.1.13, on a

$$\mathscr{Z}(1, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_{\hat{\varphi}}) = \prod_{p \in V} \mathscr{Z}_p(1, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}}, W_\Phi, f_{\hat{\varphi}}) L_\infty(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}).$$

On a vu dans le lemme précédent que $L_\infty(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = \hat{C}\dfrac{\pi^{-8}}{8}$.

D'autre part, d'après ([Mor09], Proposition 3.3), on a pour tout $p \in V$,

$$\mathscr{Z}_p(1-s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}}, W_\Phi, f_{\hat{\varphi}}) = a_p p^{-b_p s}\mathscr{Z}_p(s, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}}, W_\Phi, f_\varphi) L_p(1-s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) L_p(s, \pi \times \sigma)^{-1},$$

où $a_p \in \mathbb{C}^\times, b_p \in \mathbb{Z}$. Pour $s = 0$, on obtient :

$$\mathscr{Z}_p(1, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}}, W_\Phi, f_{\hat{\varphi}}) = a_p\mathscr{Z}_p(0, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}}, W_\Phi, f_\varphi) L_p(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) L_p(0, \pi \times \sigma)^{-1}.$$

On rappelle que le facteur $\mathscr{Z}_p(0, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}}, W_\Phi, f_\varphi)$ est une puissance de p donc le produit $\alpha = \prod_{p \in V} \mathscr{Z}_p(0, W_{X_{(-1,1)}\overline{\Psi}}, W_\Phi, f_\varphi)$ est un nombre rationnel. Par définition, les facteurs $L_p(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$ ne peuvent pas s'annuler (cf. Définition 7.1.15) et on a fait l'hypothèse que les facteurs $L_p(s, \pi \times \sigma)$ n'avaient pas de pôle en $s = 0$, donc les facteurs $L_p(0, \pi \times \sigma)^{-1}$ ne s'annulent pas.

On a donc l'égalité

$$\mathscr{Z}(1, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_{\hat{\varphi}}) = \hat{C}\frac{\pi^{-8}}{8}\alpha \prod_{p\in V} a_p L_p(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) L_p(0, \pi \times \sigma)^{-1} L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}).$$

On en déduit que

$$\mathscr{Z}(0, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_{\varphi}) = cL_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}),$$

où $c = \hat{C}\frac{\pi^{-8}}{8}\alpha \prod_{p\in V} a_p L_p(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) L_p(0, \pi \times \sigma)^{-1}$ est une constante complexe non nulle, ce qui prouve le théorème. $\square$

Corollaire 7.2.8. *On a la relation*

$$\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) \sim cL_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$$

où c est la constante complexe non nulle explicitée dans le théorème précédent.

En particulier, $\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f)))$ est non nulle si et seulement si $L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma})$ est non nulle.

Démonstration. D'après la proposition 6.3.3 et la définition 7.1.7, on a la relation suivante :

$$\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) \sim \mathscr{Z}(0, X_{(-1,1)}\overline{\Psi}, \Phi, f_{\varphi}).$$

Le résultat découle donc du théorème précédent. $\square$

Afin de prouver que $r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f)) \neq 0$, il nous reste donc à montrer que $L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) \neq 0$. Pour cela, il nous faudra utiliser l'existence du transfert fonctoriel de GSp(4) à GL(4).

7.3 Transfert fonctoriel de GSp(4) à GL(4)

Rappelons l'énoncé de la conjecture de fonctoralité, telle que formulée par Langlands dans [Lan97].

Conjecture. *Soient G et G' deux groupes réductifs, ${}^LG$ et ${}^LG'$ leurs groupes duaux de Langlands. Soit π une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$, à laquelle on associe pour presque tout nombre premier p une classe de conjugaison $A_p(\pi)$ dans ${}^LG$.*

Soit

$$\phi : {}^LG \longrightarrow {}^LG'.$$

Alors il existe une représentation automorphe π' de G' telle que $A_p(\pi')$ et $\phi(A_p(\pi))$ sont conjugués pour presque tout p.

Remarque 7.3.1. *En particulier, pour $G = \mathrm{GSp}(4)$ et $G' = \mathrm{GL}(4)$, ${}^LG = \mathrm{GSp}(4, \mathbb{C})$ et ${}^LG' = \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$, considérons ϕ l'inclusion naturelle*

$$\phi : \mathrm{GSp}(4, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(4, \mathbb{C}).$$

Alors la conjecture de fonctorialité prédit que pour toute représentation automorphe π de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$, il existe une représentation automorphe Π de $\mathrm{GL}(4,\mathbb{A})$ telle que

$$L(s,\pi) = L(s,\Pi).$$

Sous certaines conditions, cette fonctorialité a été démontrée par [ASha]. Plus précisément :

Théorème 7.3.2. *([ASha], Théorème 2.4)*

Soit π une représentation automorphe cuspidale unitaire globalement générique de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$ de caractère central ω_π.

Alors π possède un unique transfert Π à $\mathrm{GL}(4,\mathbb{A})$, qui vérifie $\Pi \simeq \hat{\Pi} \otimes \omega_\pi$, de caractère central $\omega_\Pi = \omega_\pi^2$ et qui est globalement générique. De plus, on a les deux cas suivants :

i) Π est cupisdale si et seulement si π ne s'obtient pas comme relèvement de Weil de $\mathrm{GSO}(4,\mathbb{A})$.

ii) Si Π n'est pas cuspidale (on dit dans que ce cas que π est endoscopique), alors Π est la somme isobare de deux représentations non isomorphes entre elles Π_1 et Π_2, i.e. $\Pi = \Pi_1 \boxplus \Pi_2$, où chaque Π_i est une représentation automorphe unitaire cuspidale de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ satisfaisant $\Pi_i \simeq \hat{\Pi}_i \otimes \omega_\pi$.

Reprenons notre représentation π de $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$. Puisque π est cuspidale unitaire , il en va de même de sa contragrédiente $\hat{\pi}$ ([Bum], Proposition 3.3.4).

Pour appliquer le théorème 7.3.2 à $\hat{\pi}$, nous allons avoir besoin également du lemme suivant.

Lemme 7.3.3. *$\hat{\pi}$ est globalement générique.*

Démonstration. Par hypothèse, π est globalement générique, c'est à dire qu'il existe $\Psi_0 \in \pi$ telle que la fonction de Whittaker W_{Ψ_0} n'est pas identiquement nulle, où W_{Ψ_0} est définie par :

$$\forall g \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{A}), W_{\Psi_0}(g) = \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \Psi_0(ng)\Psi_N(n^{-1})dn.$$

D'après ([Bum], section 4.2), puisque π est irréductible, alors $\hat{\pi}$ est isomorphe à la représentation π' définie par

$$\forall g \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{A}), \pi'(g) = \pi({}^t g^{-1}).$$

Or, d'après ([Bum], proposition 3.3.4), toutes les fonctions $\Psi' \in \pi'$ sont de la forme

$$\Psi'(g) = \Psi({}^t g^{-1}),$$

où $\Psi \in \Pi$.

On a alors pour tout $g \in \mathrm{GSp}(4,\mathbb{A})$,

$$\begin{aligned} W_{\Psi'_0}(g) &= \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \Psi'_0(ng)\Psi_N(n^{-1})dn \\ &= \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \Psi_0({}^t(ng)^{-1})\Psi_N(n^{-1})dn \\ &= \int_{N(\mathbb{Q})\backslash N(\mathbb{A})} \Psi_0({}^t n^{-1}\, {}^t g^{-1})\Psi_N(n^{-1})dn \\ &= W_{\Psi_0}(n^{-1}\, {}^t n^{-1}\, {}^t g^{-1}). \end{aligned}$$

Puisque W_{Ψ_0} n'est pas identiquement nulle, il en va de même de $W_{\Psi'_0}$.

Ainsi, π' est globalement générique, et a fortiori $\hat{\pi}$ également. $\square$

$\hat{\pi}$ est donc cuspidale et globalement générique. On applique alors le théorème 7.3.2 qui nous permet d'établir l'existence de Π, représentation automorphe de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{A})$ obtenue comme transfert fonctoriel de $\hat{\pi}$.

7.3.1 Cas cuspidal

Dans cette section, on suppose que Π est cuspidale. D'après la proposition 2.2 de [ASha], ceci implique que la fonction $s \longmapsto L_V(s, \Pi \times \hat{\sigma})$ est entière. D'autre part, par construction, on a pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$L_V(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = L_V(s, \Pi \times \hat{\sigma}).$$

Théorème 7.3.4. *On a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) \neq 0.$$

Démonstration. Par définition de Π, on a pour tout réel t,

$$L_V(1 + \mathrm{i}t, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = L_V(1 + \mathrm{i}t, \Pi \times \hat{\sigma}).$$

Or, d'après [Shah], puisque Π et $\hat{\sigma}$ sont des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{A})$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ respectivement, on a pour tout réel t, $L_V(1 + \mathrm{i}t, \Pi \times \hat{\sigma}) \neq 0$. On a donc pour tout réel t

$$L_V(1 + \mathrm{i}t, \pi \times \hat{\sigma}) \neq 0.$$

En posant $t = 0$, on obtient le résultat voulu. $\square$

7.3.2 Cas non cuspidal

Supposons désormais que Π n'est pas cuspidale. D'après le théorème 7.3.2, il existe donc deux représentations automorphes cuspidales unitaires non isomorphes Π_1 et Π_2 de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ telles que Π soit la somme isobare $\Pi = \Pi_1 \boxplus \Pi_2$. Par définition de Π, on a donc l'égalité suivante pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$L_V(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = L_V(s, \Pi \times \hat{\sigma}),$$

c'est à dire ici

$$L_V(s, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = L_V(s, (\Pi_1 \boxplus \Pi_2) \times \hat{\sigma}).$$

Théorème 7.3.5. *On a l'égalité suivante pour tout $s \in \mathbb{C}$:*

$$L_V(s, (\Pi_1 \boxplus \Pi_2) \times \hat{\sigma}) = L_V(s, \Pi_1 \times \hat{\sigma}) L_V(s, \Pi_2 \times \hat{\sigma}).$$

Démonstration. Puisque Π_1 et Π_2 sont cuspidales, on peut appliquer le résultat du Théorème 9.5 dans [PSS]. Ainsi, pour toute place $v \notin S$, on a

$$L_v(s, (\Pi_1 \boxplus \Pi_2) \times \hat{\sigma}) = L_v(s, \Pi_1 \times \hat{\sigma}) L_V(s, \Pi_2 \times \hat{\sigma}).$$

En faisant le produit de tous les facteurs locaux en les places non ramifiées, on obtient le résultat voulu. $\square$

Théorème 7.3.6. *On a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) \neq 0.$$

Démonstration. Par construction, on a :

$$L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = L_V(1, (\Pi_1 \boxplus \Pi_2) \times \hat{\sigma}).$$

D'après le théorème précédent, on a donc

$$L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) = L_V(1, \Pi_1 \times \hat{\sigma}) L_V(1, \Pi_2 \times \hat{\sigma}).$$

Comme pour la preuve du théorème 7.3.4, nous allons appliquer le résultat de [Shah] : Π_1, Π_2 et $\hat{\sigma}$ étant des représentations automorphes cuspidales de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$, on a pour tout réel t, $L_V(1+\mathrm{i}t, \Pi_1 \times \hat{\sigma}) \neq 0$ et $L_V(1+\mathrm{i}t, \Pi_2 \times \hat{\sigma}) \neq 0$. En posant $t = 0$, on a $L_V(1, \Pi_1 \times \hat{\sigma}) \neq 0$ et $L_V(1, \Pi_2 \times \hat{\sigma}) \neq 0$. Donc finalement, par produit, on obtient

$$L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) \neq 0.$$

□

7.4 Non nullité du régulateur

On peut finalement énoncer et démontrer notre théorème principal. On rappelle qu'on considère π une représentation automorphe cuspidale cohomologique (au sens de la Définition 3.1.8) unitaire de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ pour laquelle il existe π' une représentation automorphe cuspidale générique de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A})$ telle que $\pi'_f \simeq \pi_f$. On considère σ une représentation automorphe cuspidale cohomologique unitaire de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$. Soient K et L deux sous-groupes nets compacts ouverts de $\mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_f)$ et $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_f)$ respectivement tels que π_f^K et σ_f^L les espaces des formes automorphes de π_f et σ_f fixées par K et L soient non nuls. On note $X = S^K \times Y^L$ le produit des variétés de Shimura S^K et Y^L définies en Section 2.4.3. On note $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les noyaux des caractères de Hecke définis en Section 4.1.2.

Théorème 7.4.1. *Soient π et σ comme ci-dessus. On suppose que :*

- pour toute place ramifiée non archimédienne $p \in V$, π_p s'obtient comme relèvement de Weil de représentations de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}_p)$;

- la fonction $L(s, \pi \times \sigma)$ n'admet pas de pôle en $s = 0$;

- pour toute place non archimédienne ramifiée $p \in V$, la fonction $L_p(s, \pi \times \sigma)$ n'admet pas de pôle en $s = 0$.

Alors il existe une classe de cohomologie motivique non nulle $z \in H^5_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$.

Démonstration. D'après les théorèmes 7.3.4 et 7.3.6, on a démontré que dans tous les cas, $L_V(1, \hat{\pi} \times \hat{\sigma}) \neq 0$.

D'après le corollaire 7.2.8, on a donc bien

$$\Psi_\Omega(r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))) \neq 0,$$

ce qui assure, vu la linéarité de Ψ_Ω que

$$r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f)) \neq 0.$$

On a donc bien prouvé que le régulateur de Beilinson

$$r_{\mathscr{D}} : H^5_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(3)) \to H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))$$

est non nul et ainsi construit des classes de cohomologie non nulles dans $H^5_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ et $H^5_{\mathscr{D}}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(3))_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ respectivement, $\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f)$ et $r_{\mathscr{D}}(\mathrm{Eis}_{\mathscr{M},2}(\varphi_f))$. $\square$

Chapitre 8

Annexe

Soient X et Y deux variétés différentielles. Soit $p : Y \to X$ un revêtement. On note $G = \mathrm{Aut}(Y/X)$ le groupe des automorphismes g de Y dans lui-même tels que $p \circ g = p$.

Définition 8.0.1. *On dit que le revêtement $p : Y \to X$ est galoisien si Y est connexe et si p induit un difféomorphisme*

$$\overline{p} : G \backslash Y \simeq X.$$

Proposition 8.0.2. *([Sza], prop.2.2.7) Le revêtement p est galoisien si et seulement si Y est connexe et G agit transitivement sur toutes les fibres.*

On suppose maintenant que le revêtement p est galoisien de groupe de Galois G fini de cardinal n.

On a naturellement une application $p^* : \Omega^*(X) \to \Omega^*(Y)$ définie par la formule suivante :

$$\forall \omega \in \Omega^*(X), \forall x \in X, (p^*\omega)_x = {}^t(T_x p).\omega_{p(x)}.$$

De même, pour tout élément $g \in G$, on considère $g^* : \Omega^*(Y) \to \Omega^*(Y)$.

On note $\Omega^*(Y)^G$ la sous-algèbre des formes différentielles fixées par tous les éléments de G.

Lemme 8.0.3. *p^* est à valeurs dans $\Omega^*(Y)^G$.*

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega^*(X)$.

Il faut montrer que $\forall g \in G, g^*(p^*(\omega)) = p^*(\omega)$, autrement dit que $g^* \circ p^* = p^*$.

Or, par hypothèse, $\forall g \in G, p \circ g = p$, d'où

$$g^* \circ p^* = (p \circ g)^* = p^*.$$

□

En réalité, on a même un isomorphisme donné par le théorème suivant :

Théorème 8.0.4. *$p^* : \Omega^*(X) \simeq \Omega^*(Y)^G$.*

Démonstration. Il s'agit de construire la réciproque de l'application p^*.

Pour cela, nous allons utiliser des trivialisations locales du revêtement p. (Sans perte de généralité, on supposera X connexe quitte à travailler composante connexe par composante connexe).

Pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert V de x tel que la restriction de p à $U = p^{-1}(V)$ soit difféomorphe en tant que revêtement à un revêtement trivial de la forme $V \times I \longrightarrow V$, où I est un espace topologique discret non vide.

Le caractère galoisien de p implique l'existence d'une action libre et transitive sur toutes les fibres, donc G agit librement et transitivement sur I. Ainsi, on dispose d'une bijection entre I et G, et on notera abusivement $p^{-1}(V) \simeq V \times G$.

On a donc l'isomorphisme suivant :

$$\Omega^*(p^{-1}(V)) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega^*(V).$$

On définit alors une application :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{n} \Omega^*(V) & \longrightarrow & \Omega^*(V) \\ (\omega_i)_{1\leq i\leq n} & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \omega_i, \end{array}$$

ce qui via l'isomorphisme précédent nous fournit une application à valeurs dans $\Omega^*(V)$ définie sur $\Omega^*(p^{-1}(V))$, puis par restriction, définie sur $\Omega^*(p^{-1}(V))^G$.

On appelle p_* l'application ainsi définie $p_* : \Omega^*(p^{-1}(V))^G \longrightarrow \Omega^*(V)$. Localement, p^* vérifie :

$$\forall \omega \in \Omega^*(V), p^*(\omega) = (\omega, ..., \omega) \in \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \Omega^*(V) \right)^G.$$

Un calcul immédiat montre alors que $p_* \circ p^* = n\,\mathrm{id}$ sur $\Omega^*(V)$.

Réciproquement, si $(\omega_i)_{1\leq i\leq n} \in \Omega^*(p^{-1}(V))^G$, alors on a nécessairement

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \omega_i = \omega_j.$$

En effet, puisque $X = \bigcup_{j\in J} V_j$, on a $Y = \bigcup_{j\in J} p^{-1}(V_j)$ d'où $Y \simeq \bigcup_{j\in J} V_j \times G$.

De plus, si on choisit deux ouverts V_1 et V_2, on a deux isomorphismes

$$(V_1 \cap V_2) \times G \simeq p^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

et

$$(V_2 \cap V_1) \times G \simeq p^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

qui donnent lieu à un nouvel isomorphisme de la forme

$$\begin{array}{ccc} (V_1 \cap V_2) \times G & \simeq & (V_2 \cap V_1) \times G \\ (u,g) & \longmapsto & (u, \sigma(g)) \end{array}$$

où σ est une permutation de G. Dans ces conditions, l'isomorphisme entre $\Omega^*(p^{-1}(V_1 \cap V_2))$ et lui-même est donné par

$$(\omega_i)_{1\leq i\leq n} \longmapsto (\omega_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}.$$

On peut donc étendre la défintion locale de p_* donnée plus haut en une application

$$p_* : \Omega^*(Y)^G \longrightarrow \Omega^*(X)$$

telle que p^* et $\dfrac{1}{n}p_*$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

□

L'inclusion $\Omega^*(Y)^G \subset \Omega^*(Y)$ induit une application

$$\iota : H^*(\Omega^*(Y)^G) \to H^*(Y)^G.$$

Proposition 8.0.5. *ι est un isomorphisme.*

Démonstration. Posons

$$\forall \omega \in H^*(Y), \pi_G(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g^*(\omega).$$

Montrons l'injectivité de ι.

Soit $[\omega] \in H^*(\Omega^*(Y)^G)$ tel que $\iota([\omega]) = 0$.

Alors, il existe $\eta \in \Omega^*(Y)$ tel que $\omega = d\eta$.

Ainsi,

$$\omega = \pi_G(\omega) = \pi_G(d\eta) = d(\pi_G(\eta)).$$

Or, $\pi_G(\eta) \in \Omega^*(Y)^G$ donc $[\omega] = 0 \in H^*(\Omega^*(Y)^G)$, ce qui assure l'injectivité de ι.

Montrons maintenant la surjectivité de ι.

Soit $[\omega] \in H^*(Y)^G$. On note $G = \{g_1, ..., g_n\}$ les éléments de G.

Alors il existe des formes différentielles $(\eta_i)_{1\leq i\leq n}$ telles que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], g_i^*(\omega) = \omega + d\eta_i.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \pi_G(\omega) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i^*(\omega) \\ &= \omega + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n d\eta_i \\ &= \omega + d\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \eta_i\right) \end{aligned}$$

donc $[\omega] = \iota[\pi_G(\omega)]$ avec $\pi_G(\omega) \in H^*(\Omega^*(Y)^G)$, ce qui prouve la surjectivité de ι.

Donc ι est bien un isomorphisme.

□

En couplant les deux propositions précédentes, on obtient immédiatement le résultat suivant :

Proposition 8.0.6. *On a un isomorphisme*

$$H^*(X) \simeq H^*(Y)^G.$$

Bibliographie

[ASch] Asgari, Mahdi ; Schmidt, Ralf. *Siegel modular forms and representations.* Manuscripta Math. 104 (2001), no. 2, 173–200.

[ASha] Asgari, Mahdi ; Shahidi, Freydoon. *Generic transfer from GSp(4) to GL(4). Compos.* Math. 142 (2006), no. 3, 541–550.

[BCDT] Breuil, Christophe ; Conrad, Brian ; Diamond, Fred ; Taylor, Richard. *On the modularity of elliptic curves over Q : wild 3-adic exercises.* J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 4, 843–939.

[Bei] Beilinson, A.A. *Higher regulators and values of L-functions*, Journal of Soviet Mathematics, 30 (1985), 2036-2070.

[BKK] Burgos Gil, J. I. ; Kramer, J. ; Kühn, U. *Cohomological arithmetic Chow rings.* (English summary) J. Inst. Math. Jussieu 6 (2007), no. 1, 1-172.

[BL] Birkenhake, Christina ; Lange, Herbert. *Complex abelian varieties.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 302. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xii+635 pp. ISBN : 3-540-20488-1

[Blo1] Bloch Spencer. *Lectures on mixed motives.* https ://www.math.uchicago.edu/ bloch/motive.ps

[Blo2] Bloch Spencer. *Algebraic cycles and higher K-theory.* Advances in mathematics 61, 267-304 (1986)

[Blo3] Bloch Spencer. *Algebraic cycles and the Beilinson conjectures.* Contemporary Mathematics, Volume 58, Part I, 1986.

[Bor74] Borel, Armand. *Stable real cohomology of arithmetic groups.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974)

[Bor80] Borel, Armand. *Stable real cohomology of arithmetic groups ii.* In "Manifolds and Lie Groups : Papers in Honor of Yozo Matsushima (1980), Birkhäuser Boston.

[Bum] Bump Daniel. *Automorphic forms and representations.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 55. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. xiv+574 pp. ISBN : 0-521-55098-X

[Bur] Burgos, Jose Ignacio. *Arithmetic Chow rings and Deligne-Beilinson cohomology.* J. Algebraic Geom. 6 (1997), no. 2, 335-377.

[BW] Borel, A. ; Wallach, N. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Second edition.* Mathematical Surveys and Monographs, 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xviii+260 pp. ISBN : 0-8218-0851-6

[CLR] Antonio Cauchi, Francesco Lemma, Joaquin Rodrigues Jacinto. *On higher regulators of Siegel varieties.* Preprint.

[Del74] Deligne, Pierre. *La conjecture de Weil. I.* (French) Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307.

[Del79] Deligne, P. *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales.* (French) With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 313-346, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Dem] Demailly, J.P. *Complex analytic and differiential geometry,* online book. https ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/manuscripts/agbook.pdf, Institut Fourier, Grenoble (2012).

[Dou] Douady, Régine ; Douady, Adrien. *Algèbre et théories galoisiennes. 1.* (French) [Algebra and Galois theories. 1] Algèbre. [Algebra] CEDIC, Paris, 1977. 192 pp. ISBN : 2-7124-0708-3

[Ful] Fulton, William. *Intersection Theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1984

[HJS] Chi-Yun Hsu, Zhaorong Jin, Ryotaro Sakamoto. *Euler systems for GSp(4)xGL(2)* arXiv :2011.12894.

[Jac] Jacquet, Hervé. *Automorphic forms on GL(2), Part 2.* Lecture Notes in Mathematics, 278, Berlin-New York : Springer-Verlag, 1972.

[Jan87] Jannsen, Uwe. *On the l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology.* Galois groups over Q (Berkeley, CA, 1987), 315–360, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 16, Springer, New York, 1989.

[Jan88] Jannsen,Uwe. *Deligne homology, Hodge-D-conjecture, and motives.* In "Beilinson's conjectures on special values of L-functions" (1988), M. Rapoport, P.Schneider and N.Schappacher, Eds., vol.4, Academic Press.

[Jan94] Jannsen,Uwe. *Motivic sheaves and filtrations on Chow groups,* Motives (Seattle, WA, 1991), 245-302, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[JS] Jiang, Dihua ; Soudry, David. *The multiplicity-one theorem for generic automorphic forms of GSp(4).* Pacific J. Math. 229 (2007), no. 2, 381–388.

[JPSS] Jacquet, H. ; Piatetskii-Shapiro, I. I. ; Shalika, J. A. *Rankin-Selberg convolutions.* Amer. J. Math. 105 (1983), no. 2, 367–464.

[Kin] Kings, G. *Higher regulators, Hilbert modular surfaces, and special values of L-functions.* Duke University Press (1998).

[Kna] Knapp, Anthony W. *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples.* Princeton Mathematical Series, 36

[Lan70] Langlands, R. P. *Problems in the theory of automorphic forms.* Lectures in modern analysis and applications, III, pp. 18–61. Lecture Notes in Math., Vol. 170, Springer, Berlin, 1970.

[Lan73] Langlands, R. P. *Modular forms and l-adic representations.* Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 361–500. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[Lan80] Langlands, Robert P. *Base change for GL(2).* Annals of Mathematics Studies, 96. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1980. vii+237 pp. ISBN : 0-691-08263-4 ; 0-691-08272-3

[Lan97] Langlands, Robert P. *Where stands functoriality today ?* Representation theory and automorphic forms (Edinburgh, 1996), 457–471, Proc. Sympos. Pure Math., 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Lau] Laumon, Gérard. *Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois.* (French. English, French summary) [Zeta functions of Siegel threefolds] Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4). Astérisque No. 302 (2005), 1–66.

[Lem17] Lemma, Francesco. *On higher regulators of Siegel threefolds II : the connection to the special value.* Compos. Math. 153 (2017), no. 5, 889–946

[Lem20] Lemma, Francesco. *Algebraic cycles and residues of degree eight L-functions of GSp(4)×GL(2).* Int. Math. Res. Not., 2020.

[LO] Lemma, Francesco et Ochiai, Tadashi. *Endoscopic congruences modulo adjoint L-values for GSp(4).* Preprint.

[Mil] Milne, J.S. *Introduction to Shimura Varieties.* In Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties, Clay Math. Proc. (2005), vol.4, pp 265-378

[Mor04] Moriyama, Tomonori. *Entireness of the spinor L-functions for certain generic cusp forms on GSp(2).* (English summary) Amer. J. Math. 126 (2004), no. 4, 899–920.

[Mor09] Moriyama, Tomonori. *L-functions for GSp(2)xGL(2) : archimedean theory and applications,* Canad. J. Math.61 (2), (2009), 395-426.

[MT] Mokrane, Abdellah et Tilouine, Jacques. *Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and applications.* (English, French summary) Cohomology of Siegel varieties. Astérisque No. 280 (2002), 1–95.

[Nek] Nekovár, Jan. *Beilinson's conjectures.* (English summary) Motives (Seattle, WA, 1991), 537-570, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Pin] Pink, Richard. *Mixed Shimura varieties.* https ://people.math.ethz.ch/ pink/ftp/phd/Chapter$_3$*.pdf*.

[PS] Pollack A., Shah S. *A class number formula for Picard modular surfaces.* arXiv preprint arXiv :1801.07383 (2017).

[PSS] Piatetski-Shapiro, Ilja I. ; Soudry, David. *On a correspondence of automorphic forms on orthogonal groups of order five.* J. Math. Pures Appl. (9) 66 (1987), no. 4, 407–436.

[Rod] Rodier, François. *Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic split groups.* Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), pp. 425–430. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[Sch] Scholze, Peter. *The Langlands-Kottwitz approach for the modular curve.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, no. 15, 3368–3425.

[Shah] Shahidi, Freydoon. *On nonvanishing of L-functions.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 2 (1980), no. 3, 462–464.

[Shal] Shalika, J. A. *The multiplicity one theorem for GLn.* Ann. of Math. (2) 100 (1974), 171–193.

[Sou] Soudry, D. *The L and γ factors for generic representations of GSp(4,k)$\times$GL(2,k) over a local non-archimedean field k*, Duke Math. J. 51, no.2, (1984), 355-394.

[Sza] Szamuely, Tamás. *Galois groups and fundamental groups.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 117. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. x+270 pp. ISBN : 978-0-521-88850-9

[Tat] Tate, J. *Algebraic cycles and poles of zeta functions,* Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963) pp. 93-110, New York, 1965.

[Tay] Taylor, Richard. *On the l-adic cohomology of Siegel threefolds.* Invent. Math. 114 (1993), no. 2, 289–310.

[Tot] Totaro, Burt. *Milnor K-Theory is the simplest part of Algebraic K-Theory.* K-Theory 6 : 177-189, 1992.

[Wa] Wallach, Nolan R. *Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups.* Lie group representations, I (College Park, Md., 1982/1983), 287–369, Lecture Notes in Math., 1024, Springer, Berlin, 1983.

[Wal] Waldspurger, J.-L. *Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur GL(2).* Compositio Math. 54 (1985), no. 2, 121-171.

[Wei05] Weissauer, Rainer. *Four dimensional Galois representations. Formes automorphes. II. Le cas du groupe GSp(4).* Astérisque No. 302 (2005), 67–150.

[Wei09] Weissauer, Rainer. *Endoscopy for GSp(4) and the cohomology of Siegel modular threefolds.* Lecture Notes in Mathematics, 1968. Springer-Verlag, Berlin, 2009. xviii+368 pp. ISBN : 978-3-540-89305-9

[Wiles] Wiles, Andrew. *Modular forms, elliptic curves, and Fermat's last theorem.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 243–245, Birkhäuser, Basel, 1995.

[Zet] *The zeta functions of Picard modular surfaces.* Edited by Robert P. Langlands and Dinakar Ramakrishnan. Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 1992. xiv+492 pp. ISBN : 2-921120-08-9