THESE DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

présentée par

Amadeo Irigoyen

Approximation de compacts fonctionnels par des variétés analytiques et applications en problème inverse

Soutenue le 27 juin 2007

Directeur de thèse :
Gennadi Henkin

Rapporteurs :
Francesco Calogero
Franck Wielonsky
Yosef Yomdin

Jury :
Tien-Cuong Dinh
Jean-Pierre Françoise
Gennadi Henkin
Nessim Sibony
Franck Wielonsky
Yosef Yomdin

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse Gennadi Henkin pour m'avoir guidé tout au long de cette thèse. J'ai pu profiter pendant toutes ces années de sa richesse et de son ouverture en mathématiques. Sa disponibilité a également été très importante pour accomplir ce travail.

Francesco Calogero, Franck Wielonsky et Yosef Yomdin ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et m'ont fait bénéficier de leurs remarques et suggestions, qu'ils en soient chaleureusement remerciés. Je remercie également Tien-Cuong Dinh, Jean-Pierre Françoise et Nessim Sibony de me faire l'honneur de participer à mon jury.

Je tiens à remercier ceux qui m'ont apporté leur aide et fait part de leurs idées et suggestions au cours de ces années : Jean-Jacques Risler, Henri Skoda, Michel Waldschmidt, Tien-Cuong Dinh, Pascal Dingoyan, Laurent Charles, Alain Albouy, Jacques Féjoz, et particulièrement Jean-Pierre Marco pour toutes ces discussions enrichissantes et ses idées prometteuses autour de ce travail.

Je remercie également Anne Boutet de Monvel et Stéphane Rigat pour m'avoir invité à exposer dans leurs séminaires et pour nos discussions mathématiques.

Je tiens aussi à remercier Marcelline Prosper-Cojande, Yves Petit et Corentin Lacombe pour toute leur aide, leur efficacité et leur patience dans la partie administrative ; ainsi que le personnel de la bibliothèque pour leur disponibilité et leur gentillesse, et particulièrement Olivier, Pab et Claude.

Il y a aussi tous les amis que j'ai rencontrés dans l'univers des thésards de Chevaleret. A commencer par mes collègues de bureau Paulo, Gonçalo, Cecilia et Pierre. Ne connaissant personne à Chevaleret au début de ma thèse, je me suis vite adapté à la super ambiance avec Andrea, Ernesto, Giovanni, Luca(s). Puis ont pris le relais Sawah, Selene, Maria-Paula, Maria, Anne, Claire, Florent, ainsi qu'Athina, Mairi, Hakim, Jose. Avec au passage les séminaires de géométrie de contact à l'amphi Cartan avec entre autres Julien, Mathieu, Nicolas, Farid, sans compter les mémorables écools d'été de Martin. Et tous les autres que je n'oublie pas.

Pour faire un peu d'histoire, il s'en est fallu de pas beaucoup que je passe à côté des maths. Il y a deux personnes en particulier sans lesquelles je ne serais pas en ce moment en train de rédiger ces quelques lignes : il s'agit de mes professeurs de lycée

Michèle Grégoire et Michel Szwarcbaum, en qui j'ai une profonde reconnaissance. J'ai eu la chance de les avoir au bon moment afin de rectifier le tir et projeter de choisir les maths alors que j'étais en section littéraire, convaincu par (presque) tous que je n'étais pas scientifique. C'est pourquoi je tiens à remercier entre autres Ruru (mon grand frère), Jean, David, Amaiur pour m'avoir soutenu dans un tel projet. Je veux aussi remercier de tout mon coeur Jean-Paul Audière, Françoise Maury et Bernard Alfonsi de l'équipe du PCS0 d'Orsay qui restera une année inoubliable puisque c'est là que tout a enfin réussi pour moi.

Je pense aussi aux quelques amis de Jussieu, comme Kit, Djilali, et particulièrement Samoth d'une personnalité exceptionnelle. Ainsi que la bandabizal et nos expéditions délirantes, les piliers des quelques bistrots de mon quartier, en particulier le Burrito. Je remercie aussi ma famille, et mes parents grâce à qui mon choix des mathématiques a réellement été mon choix.

Je termine enfin par Catherine qui m'a toujours accompagné et soutenu pendant toutes ces années et que je ne remercierai jamais assez.

Table des matières

Introduction

Le but de cette thèse sera d'approfondir quelques questions en théorie d'approximation et d'en donner des applications nouvelles en problème inverse. La théorie d'approximation étant un thème très large, on s'intéressera dans ce travail à la notion d'approximation de compacts fonctionnels par des sous-ensembles donnés. On considère un espace vectoriel normé qu'on notera L, un sous-ensemble F et un sous-ensemble compact K. On définit alors l'approximation de K par F de la manière suivante :

$$D(K,F) \quad = \quad \sup_{y\in K} \inf_{z\in F} \|y-z\| \tag{1}$$

(la condition que K est compact intervient en particulier pour s'assurer que $D(K,F)$ est fini). Cette définition traduit le défaut d'approximation de K par F. Elle est d'autre part liée à la notion d'entropie qui est très importante en théorie d'approximation.

L'ε-entropie d'un compact K a été définie par A. Kolmogorov comme étant le logarithme du nombre minimal de boules de rayon ε pour recouvrir K (cf. [15]). Elle est liée à l'ε-capacité de K, définie par le logarithme du nombre maximal d'éléments de K qui sont ε-séparés (cf. [15], [18]).

Dans une première partie de ce travail, on se consacrera à l'approximation de compacts dans certains espaces fonctionnels : L désignera soit l'espace $C([0,1]^s)$ des fonctions continues sur le pavé $[0,1]^s$, soit l'espace $L^1([0,1]^s)$ des fonctions intégrables (avec leurs normes respectives). Quant au compact K, on choisira la boule unité des fonctions de classe C^l, i.e.

$$\Lambda_{l,s} \quad = \quad \left\{h \in C^l([0,1]^s),\, \forall\, j,\, 0 \le j \le m,\, \left\|h^{(j)}\right\|_\infty \le 1,\, \left\|h^{(m)}\right\|_\alpha \le 1\right\}, \tag{2}$$

où $l = m+\alpha$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \le 1$ et la norme α-hölderienne ainsi définie :

$$\|h\|_\alpha \quad = \quad \sup_{x\neq y} \frac{|h(x)-h(y)|}{\|x-y\|^\alpha}$$

($\Lambda_{l,s}$ est effectivement un compact de $(C([0,1]^s), \|\cdot\|_\infty)$ et de $(L^1([0,1]^s), \|\cdot,\|_{L^1})$). Ces objets étant fixés, l'étude portera sur le choix du sous-ensemble F qui approximera $\Lambda_{l,s}$.

0.1 Résultats négatifs en théorie d'approximation

Une approche classique est celle de l'approximation linéaire où F, noté L_n, est un sous-espace vectoriel de dimension finie n. La question qui suit concerne le choix, pour n fixé, de l'espace L_n optimal, ce qui nous amène à définir

$$D_n(\Lambda_{l,s}) \quad = \quad \inf_{L_n} D(\Lambda_{l,s}, L_n), \tag{3}$$

où L_n parcourt l'ensemble $\mathcal{L}_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension n de L. $D_n(\Lambda_{l,s})$ est appelé $n-width$ du compact $\Lambda_{l,s}$. Dans la suite des travaux de Vitushkin (cf. [35]), Tihomirov (cf. [32]) établit quelques propriétés générales des n-widths ainsi que des exemples de calcul avec explicitation de l'espace L_n optimal (cf. [25]). On trouve

$$\frac{c_{l,s}}{n^{l/s}} \leq D_n(\Lambda_{l,s}) \leq \frac{b_{l,s}}{n^{l/s}}, \tag{4}$$

ce qui détermine le comportement asymptotique de la précision.

Des applications nous motivent à considérer pour F des variétés non linéaires. Ce qui amène en particulier A. Vitushkin à se fonder sur l'approximation par des familles polynomiales. On pose, pour $n \geq 1$ et $d \geq 2$,

$$P_{n,d} \quad = \quad \left\{ \sum_{|k| \leq d} a_k(\cdot)\zeta^k,\, \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{5}$$

où $a_k \in L$ (ζ^k est le multi-produit $\zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_n^{k_n}$). On pose de même

$$D_{n,d}(K) \quad = \quad \inf_{P_{n,d}} D(K, P_{n,d}), \tag{6}$$

où $P_{n,d}$ parcourt l'ensemble $\mathcal{P}_{n,d}$ des variétés de L paramétrées par n variables indépendantes, polynomialement de degré au plus d. L'inégalité suivante constitue la première partie du théorème de Vitushkin que l'on trouve dans [35], [38] :

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \quad \leq \quad \frac{b'_{l,s}}{(n \ln d)^{l/s}}\,. \tag{7}$$

L'amélioration par le degré n'étant pas significative, la question qui se pose est de savoir si cette estimation peut être améliorée, ou est au contraire optimale. Cela conduit à la seconde partie du théorème de Vitushkin que l'on peut trouver dans [13], [20], [35], [38] et [11] :

Théorème 0.1. *Soit $P_{n,d}$ une famille polynomiale à n paramètres de degré au plus d. Alors il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$,*

$$\|h - P_{n,d}(\zeta)\| \geq \frac{c'_{l,s}}{(n \ln d)^{l/s}}\,.$$

De façon équivalente, on a

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \quad \geq \quad \frac{c'_{l,s}}{(n\ln d)^{l/s}}\,. \tag{8}$$

On donne en outre un calcul des constantes $c'_{l,s} = c_\infty(l,s)$ et $c_{L^1}(l,s)$ (cf. chapitre 1, (1.1), (1.2)).

Le premier constat de cette généralisation du cas linéaire est le fait qu'augmenter la complexité par le degré n'apportera pas d'amélioration significative. On aboutit ainsi à un résultat négatif d'approximation en établissant une borne inférieure. Vitushkin a montré cette estimation en utilisant la théorie de *variation of sets*, sans en expliciter les constantes $b'_{l,s}$, $c'_{l,s}$.

H. Warren a donné dans [37] une démonstration de ce résultat par une autre méthode, avec explicitation des constantes, mais dans des cas particuliers : $\Lambda_\omega([0,1]) \subset C([0,1])$ (ω étant un module de continuité) et $\Lambda_{\alpha,s} \subset L^1([0,1]^s)$, $0 < \alpha \leq 1$. Sa méthode n'utilise pas les *variations of sets*, mais se fonde, comme pour Vitushkin, sur l'estimation du nombre de composantes connexes d'un ensemble algébrique de $\mathbb{R}^n$, de O. Oleinik et I. Petrovskii (cf. [24]). Cette dernière repose finalement sur le théorème de Bézout : une intersection de n ensembles algébriques $\{\zeta \in \mathbb{R}^n, P_j(\zeta) = 0\}$, où $\deg P_j = p_j$, ne peut avoir plus de $\prod_{j=1}^n p_j$ points, les ensembles de zéros se trouvant en position générique (i.e. les coefficients de ces polynômes étant pris dans un ouvert de Zariski).

C'est donc dans cet esprit et en s'appuyant sur ces estimations que l'on redonne en premier chapitre une preuve du théorème 0.1.

Dans le cadre de la théorie d'approximation non linéaire figure aussi l'étude d'approximation rationnelle, que l'on peut trouver dans [12] et [35]. Ici non plus, passer du cas polynomial au cas rationnel n'améliore pas essentiellement la précision puisqu'on obtient un résultat négatif similaire à (8) (d étant cette fois la somme des degrés du numérateur et du dénominateur).

En plus de tenter de généraliser l'étude polynomiale, des applications en problème inverse nous motivent à considérer l'approximation par des familles analytiques. La classe de ces familles étant très large, une première direction consiste à transposer la méthode de Warren et l'utilisation du théorème de Bézout. On a ainsi recours aux résultats de A. Khovanskii qui considère le cas des variétés dites de Pfaff, définies comme étant les solutions intégrales des systèmes de formes différentielles à coefficients polynomiaux (cf. [14]). Il établit des estimations de type Bézout sur le nombres de composantes connexes d'une telle variété. Ce qui permet par ailleurs de regrouper une grande classe de variétés analytiques qui se comportent de ce point de vue comme des variétés algébriques.

Une sous-classe de ces variétés de Pfaff est celle des fonctions appelées quasi-polynômes et qui sont de la forme

$$P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \exp < a_1, \zeta >, \ldots, \exp < a_k, \zeta >)\,,$$

où $\zeta \in \mathbb{R}^n$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$, $< a_j, \zeta >= a_j^1 \zeta_1 + \cdots + a_j^n \zeta_n$. On montre ainsi au cours du premier chapitre le théorème 1.4 qui est un résultat analogue au théorème 0.1 pour le cas des familles quasi-polynomiales, avec une borne inférieure de l'ordre de

$$\frac{1}{(k^2 n \ln n \ln d)^{l/s}} . \tag{9}$$

Cependant, et quelle que soit sa valeur, ce résultat s'avère insuffisant pour les applications qui nous motivent. Il est donc nécessaire d'adopter une autre approche plus générale dans l'approximation analytique, ce qui fait l'objet de la seconde partie du premier chapitre.

Une classe assez naturelle de fonctions analytiques est celle des fonctions entières d'ordre fini, i.e. qui vérifient :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^n,\ |f(z)| \leq A \exp\left(b \|z\|_1^d\right), \tag{10}$$

où $\|z\|_1 = |z_1| + \cdots + |z_n|$. C'est une classe qui contient en particulier celle des fonctions de type exponentiel (celle pour $d = 1$). Ce travail aboutira au résultat suivant qui traite des familles de L paramétrées analytiquement d'ordre fini par N variables indépendantes (cf. [11]) :

Théorème 0.2. *On considère pour $N \geq 2$,*

$$f(x, \zeta) = f(x_1, \dots, x_s, \zeta_1, \dots, \zeta_N),\ x \in [0,1]^s,\ \zeta \in \mathbb{R}^N,$$

où f est entière par rapport à $\zeta \in \mathbb{C}^N$ et continue (resp. intégrable) par rapport à $x \in [0,1]^s$. On suppose de plus que, pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^N$,

$$\|f(\cdot, \zeta)\| \leq A e^{uN^v} e^{bN^t \|\zeta\|_1^d}.$$

Alors il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que, pour tout $|\zeta_j| \leq BN^r$, $j = 1, \dots, N$, on a

$$\|h - f(\cdot, \zeta)\| \geq \frac{C'}{(N \ln N)^{l/s}} .$$

De façon équivalente,

$$\sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{|\zeta_j| \leq BN^r} \|h - f(\cdot, \zeta)\| \geq \frac{C'}{(N \ln N)^{l/s}}. \tag{11}$$

Ici aussi, on explicite les constantes C'_∞ et C'_{L^1} (cf. chapitre 1, (1.13), (1.14)).

Une des principales motivations de ce résultat est l'application en théorie inverse sur laquelle on reviendra. On aura cependant besoin d'établir une version plus générale, mais aussi plus technique, avec des familles issues de fonctions analytiques d'ordre fini sur $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$, où $\mathbb{C}_+$ désigne le demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C}\,, \Re\, z > 0\}$. Ce sera l'objet du théorème 1.20. En outre, de même que dans le résultat précédent on impose une restriction sur les paramètres du type $\forall\, j = 1, \ldots, N,\ |\zeta_j| \leq BN^r$, on devra supposer que les paramètres restent dans un ensemble borné de $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$, appelé *domaine des paramètres d'approximation* (cf. définition 1.19).

Un autre constat est le suivant : dans toutes les bornes inférieures énoncées jusqu'ici figure l'exposant l/s (cf. (4), (7), (8), (9) et le théorème 0.2), ce qui est cohérent puisque $\Lambda_{l,s}$ est d'autant plus petit que l est grand (les fonctions sont très régulières) et que s est petit (car s'il y beaucoup de variables, il y a beaucoup de fonctions). En fait, l'exposant l/s est lié à l'ε-entropie du compact $\Lambda_{l,s}$, qui est de l'ordre de $(1/\varepsilon)^{s/l}$ (cf. [15], [35], [19]).

Cela conduit à la question suivante étudiée par A. Vitushkin (cf. [35], [19]) : on appelle *ε-algorithme* une famille fonctionnelle rationnelle à n paramètres dont les polynômes associés sont de degré au plus d ; s'il existe un algorithme approximant tout élément d'un compact fonctionnel K à ε-près, quelle relation peut-on déduire entre K, ε, n et d ? Pour $K = \Lambda_{l,s}$, le théorème 0.1 peut être reformulé ainsi :

$$n \ln(d+1) \quad \geq \quad C H_{c_1 \varepsilon}(K)\,, \tag{12}$$

$H_\varepsilon(K)$ étant l'entropie de K. De même, si on appelle ε-algorithme d'ordre fini toute famille $f(\cdot, \zeta)$ vérifiant les conditions du théorème 0.2 (avec la restriction sur les paramètres), alors (12) est encore une reformulation du théorème 0.2.

0.2 Applications en théorie inverse de Sturm-Liouville

La seconde partie de cette thèse portera sur des applications des résultats qui ont été énoncés. Avant d'expliquer les motivations qui ont conduit à tenter de généraliser ces résultats négatifs en théorie d'approximation, on commence par donner quelques rappels.

On considère l'équation aux valeurs propres de Sturm-Liouville sur le demi-axe $\mathbb{R}^+$:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} - \omega^2 Q y \quad = \quad \lambda y\,,$$

où Q est strictement positif et admet $m+1$ dérivées intégrables sur $\mathbb{R}^+$, et ω est un paramètre assez grand. L'opérateur associé $-\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 Q$ admet $N(\omega)$ valeurs propres négatives $-\xi_j^2$ et, pour chacune d'elles, une unique fonction propre ϕ_j qui vérifie les conditions aux bords :

$$\phi_j(0) = 0 \ \text{ et } \int_0^\infty |\phi_j(x)|^2 dx = 1\ .$$

On pose alors

$$C_j \quad = \quad \left(\phi_j'(0)\right)^2\ ,$$

appelée constante caractéristique associée à ξ_j.

Le problème inverse qui nous intéresse est le suivant : à partir de la donnée des ξ_j et C_j, pour ω assez grand, comment peut-on reconstruire le potentiel Q ? Et avec quelle précision ? La motivation de ce problème vient, d'une part de questions de sismologie (cf. [9], [33]), d'autre part des résultats de Lax et Levermore en théorie KdV (cf. [16]).

Grâce aux travaux de Gelfand, Levitan, Kohn et Jost, il existe des formules, en général non explicites, qui donnent une reconstruction théorique de Q. Il y a cependant un cas auquel on s'intéressera particulièrement où Q peut être approximé par la formule explicite suivante :

$$Q^0_\omega(x) \quad = \quad \frac{2}{\omega^2}\frac{d^2}{dx^2}\ln|\det W_{j,k}(x)|, \tag{13}$$

où, pour tous $j,\ k = 1, \ldots, N(\omega)$,

$$W_{j,k}(x) \quad = \quad \frac{2\sinh(\xi_j+\xi_k)x}{\xi_j+\xi_k} - (1-\delta_{j,k})\frac{2\sinh(\xi_j-\xi_k)x}{\xi_j-\xi_k} - \delta_{j,k}\left(2x - \frac{4\xi_j^2}{C_j}\right)$$

($\delta_{j,k}$ étant le symbole de Kronecker). Plus précisément, G. Henkin et N. Novikova ont montré dans [9] que, si Q admet 2 dérivées intégrables sur $\mathbb{R}^+$, alors on a, uniformément sur tout intervalle $[0, X]$,

$$\left|\int_0^x Q(t)dt - \int_0^x Q^0_\omega(t)dt\right| \leq \Gamma(Q)\frac{\ln\omega}{\sqrt{\omega}}\,, \tag{14}$$

ce qui donne une précision sur la vitesse de convergence de Q^0_ω.

L'autre cas qui nous intéressera dans ce travail est celui où Q admet $m+1$ dérivées intégrables. Supposons que l'on connaisse, non seulement les valeurs propres et constantes caractéristiques de Q, mais aussi Q et ses m premières dérivées en 0. Alors l'autre résultat dans [9] est le suivant : il existe une formule Q_ω, non explicite mais qui vérifie, uniformément sur tout $[0, X]$,

$$|Q(x) - Q_\omega(x)| \leq \Gamma'(Q)\frac{1}{\omega^m}. \tag{15}$$

Bien que Q_ω ne soit pas explicite, on a tout de même dans le cas où, par simplicité, on suppose que $Q^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, \ldots, m$:

$$Q_\omega(x) = \frac{2}{\omega^2}\left(-\frac{d}{dx}A_\omega(x,x) + \frac{d^2}{dx^2}\ln|\det T_{\omega,j,k}(x)|\right)\,, \tag{16}$$

où $A_\omega(x, y)$ est une solution de l'équation intégrale suivante

$$A_\omega(x,y) + \int_0^x A_\omega(x,s)\Phi_\omega(s,y)ds + A_\omega(x,y) = 0\,, \tag{17}$$

avec

$$\Phi_\omega(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\frac{\sin(y\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\left(\sqrt{\tau+\omega^2 Q(0)}-\sqrt{\tau}\right)d\tau\,, \tag{18}$$

et pour tous $j,\ k = 1,\dots,N(\omega)$

$$\begin{aligned} T_{\omega,j,k}(x) &= \frac{4\xi_j^2}{C_j}\delta_{j,k} \\ &+ 4\int_0^x \left(\sinh(\xi_j t)+\int_0^t A_\omega(t,s)\sinh(\xi_j s)ds\right)\left(\sinh(\xi_k t)+\int_0^t A_\omega(t,s)\sinh(\xi_k s)ds\right)dt\,. \end{aligned}$$

Se posent alors plusieurs questions : la précision de l'approximation par la formule (13) (resp. (16)) est-elle meilleure que celle donnée par (14) (resp. (15)) ? Existe-t-il une autre formule (du même type) qui donnerait une approximation plus fine de tout potentiel ? La précision peut-elle être améliorée par une donnée autre que les valeurs propres et constantes caractéristiques ?

Avant de donner une première réponse, on considère une classe de potentiels définie ainsi :

Définition 0.3. Pour $m \geq 1$ et $p > 0$, on pose

$$\mathcal{K}_{m,p} = \left\{Q \in L^1(\mathbb{R}^+),\ Q > 0 \text{ et } \forall\, j,\ 0 \leq j \leq m,\ \left\|Q^{(j)}\right\|_{L^1} \leq p\right\}.$$

Une première réponse est le résultat suivant (cf. [10]) :

Théorème 0.4. *Pour tout ω assez grand et tout $[0,X]$, on a pour la formule (13) :*

$$\sup_{Q\in\mathcal{K}_{2,p}}\ \sup_{x\in[0,X]}\left|\int_0^x Q(t)dt - \int_0^x Q_\omega^0(t)dt\right| \geq \frac{c_{2,p}}{(\omega\ln\omega)^3}. \tag{19}$$

On a de même pour la formule (16), pour tout $m \geq 1$:

$$\sup_{Q\in\mathcal{K}_{m+1,p}}\ \sup_{x\in[0,X]}|Q(x)-Q_\omega(x)| \geq \frac{c_{m+1,p}}{(\omega\ln\omega)^{m+1}}. \tag{20}$$

L'argument essentiel qui intervient pour la preuve est de remarquer que les formules (13) et (16) sont des familles fonctionnelles paramétrées analytiquement par rapport aux ξ_j, C_j, au nombre de $2N(\omega)$. On sait d'autre part que $N(\omega)$ est de l'ordre de ω : on a en effet, grâce aux bornes de Calogero (cf. [3]),

$$\frac{\omega}{\pi\sqrt{Q(0)}}\int_0^\infty Q(x)dx - \frac{1}{2} \leq N(\omega) \leq \frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{Q(x)}dx\,. \tag{21}$$

On connait également le comportement asymptotique de type Weyl (cf. [26]) :

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{N(\omega)}{\omega} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{Q(x)}dx\,. \tag{22}$$

Cela permet de ramener l'étude d'approximation de tout potentiel par une telle formule à $2N(\omega)$ paramètres, à celle d'approximation de toute classe $\mathcal{K}_{m,p}$ par une famille analytique à ω paramètres. Il en résulte que la première assertion du théorème est une application du théorème 0.2 pour $l = 2$, $s = 1$ (de même, la seconde assertion est une conséquence, pour $l = m + 1$, d'une version plus fine du théorème 0.2).

Cependant l'application n'est pas immédiate, il y a des difficultés essentielles à surmonter : d'abord, s'assurer que les formules (13) et (16) proviennent de familles analytiques d'ordre fini (ce qui est loin d'être évident en ce qui concerne la formule (16)) ; ensuite, prolonger le théorème 0.2 pour des familles plus générales, en particulier celles qui ont un dénominateur (comme dans (13)) ; enfin, le choix des valeurs propres et constantes caractéristiques doit être compatible avec la restriction sur les paramètres (du type $|\zeta_j| \leq BN^r$ dans l'énoncé du théorème 0.2).

La dernière condition énoncée est satisfaite grâce au résultat suivant :

Théorème 0.5. *Soit $Q \in C^1(\mathbb{R}^+)$ strictement positif, strictement décroissant, polynomialement décroissant à l'infini et tel que $Q'(0) = 0$. Alors pour tout ω et tout $j = 1, \ldots, N(\omega)$, on a les estimations suivantes :*

$$\frac{1}{\alpha_1\omega^{\beta_1}} \leq \xi_j(\omega^2 Q) \leq \alpha_1\omega \quad et \quad \frac{1}{\alpha_2\exp\left(\beta_2\omega^2\right)} \leq \frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)} \leq \alpha_2 \exp\left(\beta_2\omega^{\beta_3}\right).$$

La preuve de ce théorème sera donnée en second chapitre. On utilise pour cela la théorie WKB où, afin de l'appliquer rigoureusement, on suppose que Q est décroissant et $Q'(0) = 0$ (le résultat devrait être vrai dans un cas plus général, cf. [16], III). Remarquons d'autre part que, contrairement aux résultats sur les estimations asymptotiques des valeurs propres qui sont nombreux dans les références, il ne semble pas en être de même pour le cas des constantes caractéristiques.

On prolonge ensuite le théorème 0.2 à des familles analytiques plus générales, inspirées des formules (13) et (16), que l'on appelle *familles de potentiels de type Gelfand-Levitan*, notées $GL(\zeta)$, ce qui conduit au résultat suivant, prouvé à la fin du premier chapitre :

Théorème 0.6. *Soient $GL(\zeta)$ une N-famille de type Gelfand-Levitan et $\mathcal{K}_{m+1,p}$ un sous-ensemble fonctionnel. Alors pour tout $[0, X]$,*

$$D(\mathcal{K}_{m+1,p}, GL(\zeta))_{L^\infty([0,X])} \geq \frac{\widetilde{c}_{m+1,p}}{(N\ln N)^{m+1}}. \tag{23}$$

Enfin, on prouve que les formules (13) et (16) s'expriment à l'aide de familles analytiques d'ordre fini et peuvent ainsi être considérées comme des famille de type Gelfand-Levitan. Cette assertion fait l'objet de la proposition 2.1 prouvée en seconde partie du deuxième chapitre, ce qui termine la preuve du théorème 0.4.

Une autre conséquence du théorème 0.6 est que le choix de toute famille de type Gelfand-Levitan, autre que celles correspondant aux formules (13) et (16), ne donnera pas de précision meilleure que de l'ordre de $\dfrac{1}{(\omega \ln \omega)^{m+1}}$. En particulier, la formule (16), dont la précision est de l'ordre de $\dfrac{1}{\omega^m}$, se trouve être un cas d'approximation presque optimal ; de même, entre la borne inférieure $\dfrac{1}{(\omega \ln \omega)^3}$ et la précision de $\dfrac{\ln \omega}{\sqrt{\omega}}$ par la formule (13). Pour cette dernière, il est intéressant de constater qu'elle n'a pas été construite spécialement dans le cadre de la théorie d'approximation puisqu'elle provient des problèmes inverses de la physique mathématique.

Se pose alors une autre question : où se trouve l'optimalité entre les deux bornes ? On pense que la précision (14) de la formule (13) devrait être améliorée pour être voisine de la borne (19) (de même, la précision (15) devrait se rapprocher de la borne (20)).

En guise de conclusion, ces résultats théoriques semblent prometteurs pour d'autres applications en problème inverse : on signale à la fin du second chapitre d'autres exemples où on espère trouver des résultats analogues.

Chapitre 1

Résultats négatifs en théorie d'approximation

1.1 Approximation par des variétés algébriques

1.1.1 Introduction

On rappelle les notations : L désigne l'espace vectoriel normé $(C([0,1]^s), \|\cdot\|_\infty)$ ou $(L^1([0,1]^s, \|\cdot\|_{L^1}), \Lambda_{l,s}$ est la boule unité des fonctions de classe C^l sur $[0,1]^s$, avec $s \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $l > 0$,

$$\Lambda_{l,s} = \left\{h \in C^l([0,1]^s),\, \forall\, j,\, 0 \leq j \leq m,\, \left\|h^{(j)}\right\|_\infty \leq 1,\, \left\|h^{(m)}\right\|_\alpha \leq 1\right\},$$

où $l = m + \alpha$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$ $(m = -[-l] - 1)$, et

$$\|h\|_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{\|x - y\|^\alpha},$$

$\|\cdot\|$ étant la norme euclidienne usuelle sur $[0,1]^s$.

Le cas du compact $\Lambda_{l,s}$ est très étudié. On considère également, parmi les compacts fonctionnels, la boule unité des restrictions de fonctions analytiques bornées sur un voisinage de $[0,1]^s$ dans $\mathbb{C}^s$ (cf. [15] pour des calculs de son entropie).

La première partie de ce chapitre sera consacrée à la preuve du théorème suivant de Vitushkin, signalé dans l'introduction :

Théorème 1.1. *Soit*

$$P_{n,d} = \left\{ \sum_{|k| \leq d} c_k(\cdot)\zeta^k,\, \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

une famille fonctionnelle polynomiale à $n \geq 1$ paramètres, de degré au plus $d \geq 2$, avec $c_k \in C([0,1]^s)$ (resp. $L^1([0,1]^s)$).

Alors il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h - P_{n,d}(\zeta)\| \geq \frac{C(l,s)}{(n \ln d)^{l/s}},$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ (resp. $\|\cdot\|_{L^1}$), $C(l,s) = C_\infty(l,s)$ (resp. $C_{L^1}(l,s)$).

De façon équivalente, si $\mathcal{P}_{n,d}$ désigne l'ensemble des familles de $C([0,1]^s)$ (resp. $L^1([0,1]^s)$) paramétrées avec n variables, polynomialement de degré (au plus) d, on a

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \quad \geq \quad \frac{C(l,s)}{(n \ln d)^{l/s}}\,.$$

Remarque 1.2. Le fait de supposer $d \geq 2$ n'enlève rien à la généralité, c'est uniquement pour ne pas que $\ln d$ soit nul. On peut prolonger le résultat pour $d = 1$ quitte à remplacer $\ln d$ par $\ln(d+1)$ (afin d'y inclure les variétés linéaires).

On en déduira comme corollaire le calcul des constantes :

Corollaire 1.3.

$$C_\infty(l,s) \quad = \quad \frac{(\ln 2)^{l/s}}{\sqrt{s}\, 2^{l+1} 8^{l/s} ([l]+1)^{[l]+1} (4(1+e))^{s([l]+1)}} \tag{1.1}$$

et

$$C_{L^1}(l,s) \quad = \quad \frac{(([l]+1)!)^{2s} (\ln 2)^{l/s}}{5\sqrt{s}\, 2^{l+2} 18^{l/s} ([l]+1)^{[l]+1} ((2[l]+3)!)^s (1+e)^{s([l]+1)}}\,. \tag{1.2}$$

L'idée de la preuve se fonde essentiellement sur la méthode qu'utilise H. Warren dans [37] (cf. aussi [30]) : il s'agit d'estimer le nombre de composantes connexes d'un ensemble algébrique de $\mathbb{R}^n$, et d'en déduire, pour tous polynômes $P_1, \ldots, P_q$, une majoration du nombre de composantes de l'ensemble

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{q} \{P_j = 0\}\,.$$

La connaissance de l'ε-entropie de $\Lambda_{l,s}$, dont on redonnera un calcul en explicitant une famille ε-séparée en section 1.1.2, permettra d'en déduire la minoration voulue dans l'énoncé du théorème 1.1.

De plus, cette méthode peut être transposée à des cas d'approximation par des variétés plus générales, dès lors que l'on est capable d'en estimer le nombre de composantes connexes. C'est ce que l'on traitera dans la section 1.1.4, où on considérera l'approximation de $\Lambda_{l,s}$ par des familles quasi-polynomiales en se fondant sur les estimations de A. Khovanskii (cf. [14]), ce qui conduira au résultat suivant :

Théorème 1.4. *Soit, pour n, $d \geq 2$, $k \geq 1$,*

$$P_{n,k,d} = \left\{ \sum_{|j| \leq d} c_j \, \zeta_1^{j_1} \cdots \zeta_n^{j_n} \, e^{j_{n+1} < a_1, \zeta >} \cdots e^{j_{n+k} < a_k, \zeta >}, \ \zeta \in \mathbb{R}^n \right\},$$

une famille d'éléments de $C([0,1]^s)$ paramétrée par un quasi-polynôme à coefficients $c_j \in C([0,1]^s)$, à n variables ζ_i, k pseudo-variables $e^{<a_i,\zeta>}$ et de degré total au plus d.

Alors il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h - P_{n,k,d}\|_\infty \geq \frac{C_1(l,s)}{(k^2 n \ln n \ln d)^{l/s}}.$$

De façon équivalente, si $\mathcal{P}_{n,k,d}$ désigne l'ensemble des familles paramétrées par des quasi-polynômes à n variables, k pseudo-variables et de degré total (au plus) d, on a

$$D_{n,k,d}(\Lambda_{l,s}) := \inf_{P \in \mathcal{P}_{n,k,d}} \sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - P(\zeta)\|_\infty \geq \frac{C_1(l,s)}{(k^2 n \ln n \ln d)^{l/s}}.$$

En outre, la constante $C_1(l,s)$ peut être calculée et vaut

$$\frac{(\ln 2)^{2l/s}}{\sqrt{s}\, 2^{l+1}\, 38^{l/s} ([l]+1)^{[l]+1} (4(1+e))^{s([l]+1)}}.$$

On terminera la première partie de ce chapitre par le résultat négatif suivant qui utilise de manière plus directe le théorème de Descartes :

Proposition 1.5. *On considère la famille $\Psi_{n,p_1,\ldots,p_n} \subset C([0,1])$ définie par*

$$\left\{ \left(t \in [0,1] \mapsto \psi(t,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \exp(\zeta_j t) \right), \ \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où P_j est un polynôme en t de degré $\leq p_j$.

Alors il existe $h \in \Lambda_l([0,1])$, tel que

$$\inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - \psi(\cdot,\zeta)\|_\infty \geq \frac{C_l}{\left(n + 1 + \sum_{j=1}^n p_j\right)^l}.$$

En outre, h ne dépend pas de la famille $\Psi_{n,p_1,\ldots,p_n}$, mais seulement de l, n et $p_1, \ldots, p_n$.

1.1.2 Construction d'une famille η-séparée de $\Lambda_{l,s}$

Le résultat suivant sera utile pour la preuve du théorème 1.1. C'est une reformulation du calcul de l'η-capacité du compact $\Lambda_{l,s}$, que l'on retrouve dans [15], p. 313.

Proposition 1.6. *Soient r un entier ≥ 1, $q = r^s$, et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ une suite de ± 1. On définit sur $[0,1]^s$ la fonction h_ε de la façon suivante : on considère le pavage (moyennant les bords) de $[0,1]^s$ en les $q = r^s$ cubes K_i, $i = 1, \dots, q$. Si $x \in K_i = \prod_{j=1}^{s} \left[t_{i,j}, t_{i,j} + \frac{1}{r}\right]$, alors $x = t_i + y$, où $t_i = (t_{i,1}, \dots, t_{i,s})$, $y \in \left[0, \frac{1}{r}\right]^s$, et on pose*

$$h_\varepsilon(x) = \varepsilon_i \frac{g_{l,s}(ry)}{2r^l M_{l,s}},$$

où $g_{l,s}$ est définie sur $[0,1]^s$ par

$$g_{l,s}(x) = \prod_{j=1}^{s} (x_j(1-x_j))^{[l]+1}, \tag{1.3}$$

$[l]$ étant la partie entière de l, et

$$M_{l,s} \quad = \quad \sqrt{s}(1+e)^{s([l]+1)}([l]+1)^{[l]+1}. \tag{1.4}$$

Alors h_ε est bien définie et est un élément de $\Lambda_{l,s}$.

On commence par prouver le

Lemme 1.7. *Soit la fonction définie sur $[0,1]$ par*

$$t \mapsto t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1}.$$

Alors $\forall\, k$, $0 \leq k \leq [l]+1$,

$$\left\| \frac{d^k}{dt^k} \left(t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1} \right) \right\|_\infty \leq (1+e)^{[l]+1}([l]+1)^k.$$

Démonstration. $\forall\, k$, $0 \leq k \leq [l]+1$, $\forall\, t \in [0,1]$,

$$t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1} = \sum_{j=0}^{[l]+1} C_{[l]+1}^{j} (-1)^j t^{[l]+j+1},$$

donc

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} \left(t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1} \right) \right| \leq \sum_{j=0}^{[l]+1} C_{[l]+1}^{j} ([l]+j+1) \cdots ([l]+j-k+2)\, t^{[l]+j+1-k}.$$

Or,

$$\begin{aligned}([l]+j+1)\cdots([l]+j-k+2) &\le ([l]+1)^k\left(1+\frac{j}{[l]+1}\right)^k\\ &\le ([l]+1)^k \exp\frac{jk}{[l]+1},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\left|\frac{d^k}{dt^k}\left(t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1}\right)\right| &\le ([l]+1)^k\sum_{j=0}^{[l]+1} C^j_{[l]+1}\left(e^{\frac{k}{[l]+1}}\right)^j\\ &= ([l]+1)^k\left(1+e^{\frac{k}{[l]+1}}\right)^{[l]+1},\end{aligned}$$

et prouve l'assertion.

□

On en déduit le :

Lemme 1.8. *Soit*

$$g_{l,s}(x)=\prod_{j=1}^{s}(x_j(1-x_j))^{[l]+1},$$

alors $g_{l,s}/M_{l,s}\in\Lambda_{l,s}$.

Démonstration. On voit d'abord que $g_{l,s}\in C^{[l]+1}([0,1]^s)\subset C^m([0,1]^s)$, en tant que polynôme (où $l=m+\alpha$).

Il s'agit de montrer que, $\forall\, k=(k_1,\dots,k_s)$, $0\le|k|=k_1+\dots+k_s\le m$,

$$\left\|\frac{\partial^{|k|}g_{l,s}}{\partial x^k}\right\|_\infty=\left\|\frac{\partial^{|k|}g_{l,s}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_s^{k_s}}\right\|_\infty\le M_{l,s}\,,$$

et $\forall\, k$, $|k|=m$,

$$\left\|\frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k}\right\|_\alpha\le M_{l,s}\,.$$

Pour la première estimation, prenons même k, $|k|=k_1+\dots+k_s\le[l]+1$, et soit $x=(x_1,\dots,x_s)\in[0,1]^s$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{|k|}g_{l,s}}{\partial x^k}(x) &= \prod_{j=1}^{s}\frac{\partial^{k_j}}{\partial x_j^{k_j}}\left(x_j^{[l]+1}(1-x_j)^{[l]+1}\right)\\ &= \prod_{j=1}^{s}\left(\frac{d^{k_j}}{dt^{k_j}}t^{[l]+1}(1-t)^{[l]+1}\right)(x_j),\end{aligned}$$

ce qui donne, par le lemme précédent puisque $0 \leq k_j \leq [l]+1$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{|k|} g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_\infty &\leq \prod_{j=1}^{s} (1+e)^{[l]+1} ([l]+1)^{k_j} \\ &= (1+e)^{s([l]+1)} ([l]+1)^{|k|} \\ &\leq M_{l,s}. \end{aligned}$$

Si l n'est pas entier, cela prouve l'estimation. Si l est entier, on a montré un peu plus puisque $[l] = m+1$: si $|k| = m+1$, $g_{l,s} \in C^{m+1}([0,1]^s)$ et $\left\| \frac{1}{M_{l,s}} \frac{\partial^{m+1} g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_\infty \leq 1$.

Pour la seconde majoration, on a, par le théorème des accroissements finis et l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall\, k,\ |k| = m,\ \forall\, x,\ y \in [0,1]^s$,

$$\left| \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k}(x) - \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k}(y) \right| \leq \left\| \overrightarrow{\nabla} \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right\| \|x-y\|,$$

soit puisque $\|x-y\| \leq \|x-y\|^\alpha$,

$$\left\| \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_\alpha \leq \left(\sum_{j=1}^{s} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right) \right\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque $m+1 \leq [l]+1$, on obtient d'après la première estimation,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k} \right\|_\alpha &\leq \left(\sum_{j=1}^{s} \left((1+e)^{s([l]+1)} ([l]+1)^{[l]+1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{s} (1+e)^{s([l]+1)} ([l]+1)^{[l]+1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

□

On peut donc prouver la proposition 1.6.

Démonstration. h_ε est effectivement bien définie sur $[0,1]^s$ car elle s'annule sur les bords des K_i. D'autre part, $g_{l,s} \in C^{[l]}([0,1]^s)$ et toutes ses dérivées partielles jusqu'à $[l]$ (qui sont continues sur $[0,1]^s$) s'annulent sur le bord de $[0,1]^s$, ce qui montre que h_ε construite par recollements est également dans $C^{[l]}([0,1]^s) \subset C^m([0,1]^s)$.

On vérifie ensuite que la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{r}\right]^s$ par

$$x \mapsto \frac{1}{r^l} \frac{g_{l,s}(rx)}{M_{l,s}},$$

est bien dans $\Lambda_{l,s}\left(\left[0,\frac{1}{r}\right]^s\right)$. En effet, d'après le lemme 1.8, $\forall\,|k|\leq m, \forall\, x\in\left[0,\frac{1}{r}\right]^s$,

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_s}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_s^{k_s}}(g_{l,s}(rx_1,\ldots,rx_s)) = r^{k_1+\cdots+k_s}\left(\frac{\partial^{|k|}g_{l,s}}{\partial x^k}\right)(rx),$$

et donc

$$\frac{1}{r^l}\left|\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}(g_{l,s}(rx))\right| \leq \frac{M_{l,s}}{r^{l-|k|}} \leq M_{l,s}.$$

De même, si $x\neq y$, $|k|=m$, alors $rx, ry\in[0,1]^s$, et :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|x-y\|^\alpha}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^k}(g_{l,s}(rx))-\frac{\partial^m}{\partial x^k}(g_{l,s}(ry))\right| &= \frac{r^\alpha}{\|rx-ry\|^\alpha}r^m\left|\left(\frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k}\right)(rx)-\left(\frac{\partial^m g_{l,s}}{\partial x^k}\right)(ry)\right|\\ &\leq r^l M_{l,s}.\end{aligned}$$

Il en résulte que h_ε a toutes ses dérivées d'ordre $\leq m$ bornées par 1 en norme uniforme sur $[0,1]^s$, car, $\forall\, K_i$, $\forall\,|k|\leq m$,

$$\left\|\frac{\partial^{|k|}h_\varepsilon}{\partial x^k}|_{K_i}\right\|_\infty = \frac{1}{2M_{l,s}}\left\|\frac{\partial^{|k|}g_{l,s}}{\partial x^k}\right\|_\infty \leq \frac{1}{2}\leq 1.$$

Reste à s'assurer que, $\forall\,|k|=m$,

$$\left\|\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}\right\|_\alpha \leq 1.$$

C'est immédiat si x et y sont dans le même cube K_i, et c'est même majoré par $\frac{1}{2}$. Sinon, on a $x\in K_{i_x}$, $y\in K_{i_y}$, avec $i_x\neq i_y$. Le segment $[x,y]$ va donc respectivement couper les bords de K_{i_x} et K_{i_y} en z_x et z_y (si x est sur le bord de K_{i_x}, on prend $z_x=x$; sinon, l'élément z_x est bien défini ; de même pour y), ce qui donne, puisque $\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(z_x)=\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(z_y)=0$, et $\|x-z_x\|$, $\|y-z_y\|\leq\|x-y\|$,

$$\frac{\left|\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(x)\right|}{\|x-y\|^\alpha} \leq \frac{\left|\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(x)-\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(z_x)\right|}{\|x-z_x\|^\alpha} \leq \frac{1}{2},$$

dans le cas où $x\neq z_x$. Sinon, x est sur le bord de K_{i_x}, donc $\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(x)=0$, et la majoration est triviale.

De même,

$$\frac{\left|\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(x)\right|}{\|x-y\|^\alpha} \leq \frac{1}{2},$$

donc

$$\frac{\left|\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(x)-\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(y)\right|}{\|x-y\|^\alpha} \leq \frac{\left|\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(x)\right|}{\|x-y\|^\alpha}+\frac{\left|\frac{\partial^m h_\varepsilon}{\partial x^k}(y)\right|}{\|x-y\|^\alpha} \leq 1,$$

ce qui donne la majoration cherchée pour tout $|k|\leq m$, et prouve l'assertion.

□

Remarque 1.9. Comme on l'a vu auparavant, pour l entier ≥ 1, $g_{l,s}$ et h_ε sont toujours dans l'espace $C^l([0,1]^s)$ usuel : $g_{l,s}$ comme restriction d'un polynôme, et h_ε puisque ses dérivées partielles sont continues sur chacun des K_i et qu'elles s'annulent sur les bords des K_i. En particulier, $h_\varepsilon \in \Lambda_{l,s}$, car par définition, $m = l-1$, $\alpha = 1$, et h_ε admet des dérivées partielles continues d'ordre $l-1$, qui sont lipschitziennes. Ainsi, le théorème 1.1 pourra également se formuler avec le sous-ensemble $\Lambda_{l,s} \cap C^l([0,1]^s)$.

1.1.3 Preuve du théorème de Vitushkin : méthode de Warren

Dans la suite, on notera simplement log pour le logarithme binaire $\log_2$ (ln désignera toujours le logarithme népérien).

Quelques rappels en géométrie algébrique réelle

On va énoncer sans démonstration quelques résultats sur les partitions de $\mathbb{R}^n$ par des variétés algébriques. Ils sont prouvés en détails par H. Warren dans [37].

D'abord (cf. [37], lemme 2.5), si p est un polynôme réel quelconque à n variables de degré d, alors le nombre de composantes connexes de l'ensemble $\{\zeta \in \mathbb{R}^n,\ p(\zeta) = 0\}$ ne peut pas dépasser $2d^n$. Dans le cas où p est régulier on a une majoration plus fine par d^n (cette borne majore la somme des nombres de Betti b_j de $\{p = 0\}$, donc en particulier le nombre de composantes connexes b_0, cf. [31]). La preuve utilise des résultats de Oleinik et Petrovskii (cf. [24]) et le théorème de Bézout.

Grâce à un résultat intermédiaire sur les partitions d'une variété topologique par des sous-variétés ([37], théorème 1), il en déduit le résultat suivant (théorème 2) : si $p_1, \ldots, p_q$ sont des polynômes (quelconques) sur $\mathbb{R}^n$, de degré au plus d, alors le nombre de composantes connexes de l'ensemble

$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{q} \{\zeta \in \mathbb{R}^n,\ p_j(\zeta) = 0\}$$

ne peut dépasser

$$\sum_{j=0}^{n} 2(2d)^n\, 2^j C_q^j \tag{1.5}$$

(en convenant que le coefficient binomial $C_q^j = 0$ si $q < j$).

Puisque la restriction de chaque p_j sur chaque composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{q} \{\zeta \in \mathbb{R}^n, p_j(\zeta) = 0\}$ donne une fonction continue qui ne s'annule pas, donc de signe constant, il en déduit l'estimation suivante (théorème 3) : le nombre de suites de signes prises par la fonction

$$\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_{j=1}^{q} \{p_j = 0\} \mapsto (sgn\, p_1(\zeta), \ldots, sgn\, p_q(\zeta))\,,$$

ne peut pas dépasser

$$\left(\frac{4edq}{n}\right)^n \tag{1.6}$$

(cf. aussi [36]). Cela conduit au résultat suivant qui récapitule les corollaires 3.1 et 3.2 de [37] (en convenant que $sgn\, 0 = 0$) :

Corollaire 1.10. *Si $q \geq 8n \log d$, alors il existe une suite $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$, où $\varepsilon_j = \pm 1$, qui n'est jamais atteinte par $sgn\, P(\zeta) = (sgn\, p_1(\zeta), \ldots, sgn\, p_q(\zeta))$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$.*

De même, si $q \geq 18n \log d$, il existe une suite ε qui diffère de plus de $q/10$ places de toute suite $sgn\, P(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$.

L'idée de la démonstration sera donc d'exploiter l'entropie de $\Lambda_{l,s}$ par l'utilisation de la famille η-séparée construite en section 1.1.2 : le fait que toute suite ε puisse être représentée par un élément h_ε traduit la capacité d'oscillation arbitraire de $\Lambda_{l,s}$. L'application du corollaire 1.10 rendra la minoration possible afin de prouver le résultat négatif d'approximation.

Démonstration du théorème

On est maintenant en mesure de donner la preuve du théorème 1.1 de Vitushkin.

Démonstration. Traitons dans un premier temps le cas continu, qui utilise la première assertion du corollaire 1.10. q étant donné, il s'agit de montrer qu'il existe $\eta(q)$ tel que, pour toute suite $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$, il existe $f \in \Lambda_{l,s}$ et q formes linéaires λ_j de norme ≤ 1 sur $C([0,1]^s)$ qui vérifient

$$\varepsilon_j \lambda_j(f) \geq \eta(q),\ j = 1, \ldots, q\,.$$

Cela entraînera

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \eta(q).$$

En effet, étant donné $P \in \mathcal{P}_{n,d}$, en prenant $q \geq 8n \log d$ et ε comme dans le corollaire 1.10, et $\eta(q)$, f, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q)$ associés, on aura, puisque $\|\lambda_j\| \leq 1$,

$$\sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - P(\zeta)\|_\infty \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|f - P(\zeta)\|_\infty \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \sup_{1 \leq j \leq q} |\lambda_j(f) - \lambda_j(P(\zeta))|.$$

Pour tout j, $p_j(\zeta) := \lambda_j(P(\zeta))$ est un polynôme réel à n variables de degré au plus d. D'après le corollaire 1.10, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$, la suite $sgn\, \lambda(P(\zeta)) = (sgn\, p_1(\zeta), \ldots, sgn\, p_q(\zeta))$ diffère de ε d'au moins une place : $\exists\, k$, $\varepsilon_k \neq sgn\, p_k(\zeta)$ ($sgn\, p_k(\zeta)$ peut être nul). Dans ce cas,

$$\sup_{1 \leq j \leq q} |\lambda_j(f) - \lambda_j(P(\zeta))| \geq |\lambda_k(f) - p_k(\zeta)| \geq |\lambda_k(f)| \geq \eta(q),$$

ce qui démontre l'inégalité cherchée pour P fixé. L'arbitraire sur $P \in \mathcal{P}_{n,d}$ nous donne finalement la minoration voulue.

Choisissons alors un entier $r \geq 1$, tel que $q = r^s \geq 8n \log d$, donnons-nous la suite ε grâce au corollaire 1.10, ainsi que h_ε construite à partir du pavage de $[0,1]^s$ en les K_i (cf. section 1.1.2). On sait d'après la proposition 1.6 que $h_\varepsilon \in \Lambda_{l,s}$.

Prenons alors pour les λ_i les morphismes d'évaluation en les centres des K_i. On a

$$\lambda_i(h_\varepsilon) = \varepsilon_i \|h_\varepsilon\|_\infty = \varepsilon_i \frac{g_{l,s}\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)}{2r^l M_{l,s}} = \varepsilon_i \frac{1}{2M_{l,s} 4^{s([l]+1)} r^l}$$

(où $M_{l,s}$ est défini en (1.4)). En particulier, si r est le plus petit entier (≥ 2) tel que $r^s \geq 8n \log d$, on a

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2(r-1)} \geq \frac{1}{2(8n \log d)^{1/s}},$$

soit

$$\varepsilon_i \lambda_i(h_\varepsilon) \geq \frac{1}{2M_{l,s} 4^{s([l]+1)} 2^l 8^{l/s}} \frac{1}{(n \log d)^{l/s}},$$

ce qui permet de conclure pour le cas continu :

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_\infty(l,s)}{(n \ln d)^{l/s}},$$

avec

$$C_\infty(l,s) = \frac{(\ln 2)^{l/s}}{2^{l+1} 4^{s([l]+1)} 8^{l/s} M_{l,s}}.$$

Traitons maintenant le cas intégrable (qui utilise la deuxième assertion du corollaire 1.10). Comme pour le cas continu, choisissons $q = r^s$, $r \geq 2$, tel que r^s soit le plus petit entier $\geq 18n \log d$.

Soient ε une suite, $h_\varepsilon \in \Lambda_{l,s}$ la fonction associée, et pour les λ_i, posons

$$\lambda_i(h) = \int_{K_i} h(x)dx.$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^m |\lambda_i(h)| \leq \sum_{i=1}^m \int_{K_i} |h(x)|dx = \|h\|_{L^1},$$

donc

$$\sum_{i=1}^m \|\lambda_i\|_{L^1} \leq 1.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\lambda_i(h_\varepsilon) &= \varepsilon_i \frac{1}{2r^l M_{l,s}} \int_{[0,\frac{1}{r}]^s} g_{l,s}(ry)dy \\
&= \varepsilon_i \frac{1}{2r^l M_{l,s} r^s} \int_{[0,1]^s} \prod_{j=1}^{s} (x_j(1-x_j))^{[l]+1} dx_1 \cdots dx_s \\
&= \varepsilon_i \frac{1}{2r^l M_{l,s} r^s} \left(\int_0^1 (t(1-t))^{[l]+1} dt \right)^s .
\end{aligned}$$

Cette intégrale peut être calculée par intégrations par parties successives, ce qui nous donne

$$\int_0^1 (t(1-t))^{[l]+1} dt = \frac{(([l]+1)!)^2}{(2[l]+3)!},$$

donc

$$\varepsilon_i \lambda_i(h_\varepsilon) \geq \frac{(([l]+1)!)^{2s}}{2M_{l,s}((2[l]+3)!)^s \, r^l r^s} .$$

Soit alors $P \in \mathcal{P}_{n,d}$: les $p_i(\zeta) = \lambda_i(P(\zeta))$ sont des polynômes réels à n variables de degré $\leq d$. D'après le corollaire et par hypothèse sur $q = r^s$, il existe une suite ε qui diffère d'au moins $q/10$ places de $sgn\, \lambda(P(\zeta)) = (sgn\, p_1(\zeta), \ldots, sgn\, p_q(\zeta)), \forall\, \zeta \in \mathbb{R}^n$, ce qui entraîne, puisque $\sum_{i=1}^q \|\lambda_i\|_{L^1} \leq 1$,

$$\sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h - P(\zeta)\|_{L^1} \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h_\varepsilon - P(\zeta)\|_{L^1} \geq \inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{q} |\lambda_i(h_\varepsilon) - \lambda_i(P(\zeta))|.$$

Comme, pour au moins $q/10$ indices i, on a

$$|\lambda_i(h_\varepsilon) - p_i(\zeta)| \geq |\lambda_i(h_\varepsilon)|,$$

il vient

$$\inf_{\zeta \in \mathbb{R}^n} \|h_\varepsilon - P(\zeta)\|_{L^1} \geq \frac{q}{10} \frac{(([l]+1)!)^{2s}}{r^s 2M_{l,s}((2[l]+3)!)^s r^l} = \frac{(([l]+1)!)^{2s}}{20M_{l,s}((2[l]+3)!)^s r^l}.$$

Enfin, le fait d'avoir ici encore

$$\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2(18n \log d)^{1/s}}$$

et l'arbitraire sur $P \in \mathcal{P}_{n,d}$ aboutissent à

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_{L^1}(l,s)}{(n \ln d)^{l/s}},$$

avec

$$C_{L^1}(l,s) = \frac{(([l]+1)!)^{2s}(\ln 2)^{l/s}}{20M_{l,s}2^l 18^{l/s}((2[l]+3)!)^s},$$

ce qui achève la preuve dans le cas $L^1([0,1]^s)$, et prouve le théorème.

□

On peut en particulier expliciter les constantes de minoration.

Corollaire 1.11. *On a : pour le cas continu,*

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_\infty(l,s)}{(n\ln d)^{l/s}},$$

où

$$C_\infty(l,s) = \frac{(\ln 2)^{l/s}}{\sqrt{s}\,2^{l+1}\,8^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}(4(1+e))^{s([l]+1)}}\ ;$$

et pour le cas intégrable,

$$D_{n,d}(\Lambda_{l,s}) \geq \frac{C_{L^1}(l,s)}{(n\ln d)^{l/s}},$$

avec

$$C_{L^1}(l,s) = \frac{(([l]+1)!)^{2s}(\ln 2)^{l/s}}{5\sqrt{s}\,2^{l+2}\,18^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}((2[l]+3)!)^s(1+e)^{s([l]+1)}}\ .$$

On peut par ailleurs imposer certaines restrictions sur la fonction $h = h_\varepsilon$ intervenant dans le théorème 1.1 :

Corollaire 1.12. *Dans le cas continu avec $s=1$, on peut de plus prendre $h \in \Lambda_l([0,1]) \cap C^l([0,1])$, nulle sur un sous-intervalle $[0,\delta]$ (ici $\left[0,\frac{1}{20}\right]$). Elle vérifie alors : pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$, il existe x_ζ, tel que*

$$\begin{cases} \dfrac{c(l)}{(n\ln d)^l} \leq \|h\|_\infty = |h(x_\zeta)| \leq \dfrac{2^l c(l)}{(n\ln d)^l} \\[2ex] h(x_\zeta)\,P_{n,d}(x_\zeta,\zeta) \leq 0 \\[2ex] h(x) = 0,\ \forall\, x \in \left[0,\dfrac{1}{20}\right] \end{cases} \tag{1.7}$$

($c(l)$ étant une autre constante).

Démonstration. D'abord, le fait de pouvoir prendre h dans $\Lambda_l([0,1]) \cap C^l([0,1])$ provient de la remarque 1.9. Ensuite, les deux premières conditions découlent de la première partie de la preuve du théorème 1.1. Quant à la dernière, il suffit juste de s'assurer que l'élément x_ζ peut être choisi dans l'intervalle $\left[\frac{1}{20}, 1\right]$, ce qui découle de la seconde assertion du corollaire 1.10 : si $q \geq 18n \log d$, il existe une suite ε qui diffère de plus de $q/10$ places de toute suite $sgn\, \lambda(P(\zeta))$, $\zeta \in \mathbb{R}^n$, les λ_j étant ici les morphismes d'évaluation en les centres des intervalles $\left[\frac{j-1}{q}, \frac{j}{q}\right]$, $j = 1, \ldots, q$. Il existe donc au moins une place pour x_ζ se trouvant en dehors de

$$\left[0, \frac{1}{q}\right] \cup \cdots \cup \left[\frac{k-1}{q}, \frac{k}{q}\right] \supset \left[0, \frac{1}{20}\right],$$

k étant le plus grand entier $\leq q/10$. Il ne reste plus qu'à changer h en 0 sur $\left[0, \frac{k}{q}\right]$. □

Remarque 1.13. Ce corollaire montre que l'entropie de $\Lambda_l([0,1])$ reste inchangée (du moins son ordre) lorsque l'on ne considère que les fonctions nulles sur un sous-intervalle fixé, puisque les résultats négatifs sont encore valables (avec le même exposant l). Le choix de se restreindre sur $[0,1]$ (i.e. $s = 1$) n'a rien de spécial. On pourrait étendre ce corollaire pour $s \geq 1$ quelconque en considérant les éléments de $\Lambda_{l,s}$ qui s'annulent sur un sous-ensemble de $[0,1]^s$ (et on aurait toujours le même exposant l/s).

1.1.4 D'autres applications de la méthode de Warren : variétés quasi-algébriques

Application des estimations de Khovanskii

La méthode de Warren peut encore être appliquée à d'autres familles de $\mathbb{R}^n$, dès lors qu'on est capable d'en estimer le nombre de composantes connexes. C'est ce que nous allons faire ici en considérant des quasi-polynômes, définis par

$$P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \exp < a_1, \zeta >, \ldots, \exp < a_k, \zeta >),$$

où P est un polynôme à $n+k$ variables, de degré total d, et où on a remplacé les k dernières variables par les fonctions $\exp < a_j, \zeta >$, avec $a_j \in \mathbb{R}^n$ et $< a_j, \zeta >= a_j^1 \zeta_1 + \cdots + a_j^n \zeta_n$.

On se fondera cette fois sur les estimations de A. Khovanskii : si on considère un système non dégénéré

$$P_1 = \cdots = P_p = 0$$

de p équations quasi-polynomiales à n variables, k pseudo-variables et de degrés respectifs m_j, alors la variété de dimension $n - p$ définie par ce système est homotopiquement équivalente à un complexe cellulaire dont le nombre de cellules est majoré par (cf. [14], p. 91, corollaire 3)

$$2^{\frac{k(k-1)}{2}} m_1 \cdots m_p \left(\sum_{j=1}^{p} m_j + n - p + 1 \right)^{n-p} \left[(n-p+1) \left(\sum_{j=1}^{p} m_j + n - p + 1 \right) - n + p \right]^k . \quad (1.8)$$

A. Gabrielov donne dans [5] des estimations explicites qui sont analogues pour des intersections non isolées de variétés de Pfaff complexes.

L'équivalence homotopique est définie ainsi (cf. [7], [34]) : deux espaces topologiques X et Y sont homotopiquement équivalents s'il existe des applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont respectivement homotopes à Id_X et Id_Y. Deux espaces homéomorphes sont topologiquement équivalents, mais la réciproque n'est pas vraie. Cependant la relation d'équivalence homotopique a des invariants comme le nombre de composantes connexes. D'autre part, le nombre de cellules étant additif par rapport à la réunion, on en déduit que l'estimation (1.8) donne en particulier une majoration du nombre de composantes connexes de la variété $P_1 = \cdots = P_p$.

On montre alors le résultat suivant signalé comme le théorème 1.4 :

Théorème. *Soit, pour $n,\ d \geq 2,\ k \geq 1$,*

$$P_{n,k,d} = \left\{ \sum_{|j| \leq d} c_j \, \zeta_1^{j_1} \cdots \zeta_n^{j_n} \, e^{j_{n+1} <a_1, \zeta>} \cdots e^{j_{n+k} <a_k, \zeta>}, \ \zeta \in \mathbb{R}^n \right\},$$

une famille quasi-polynomiale de $C([0,1]^s)$, à n variables, k pseudo-variables et de degré total au plus d.

Alors il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$,

$$\|h - P_{n,k,d}\|_\infty \ \geq \ \frac{C_1(l,s)}{(k^2 n \ln n \ln d)^{l/s}}. \quad (1.9)$$

En outre, la constante $C_1(l,s)$ peut être calculée et vaut

$$\frac{(\ln 2)^{2l/s}}{\sqrt{s}\, 2^{l+1}\, 38^{l/s} ([l]+1)^{[l]+1} (4(1+e))^{s([l]+1)}} .$$

On pourrait tenter de prouver une estimation (analogue à celle de type de Warren établie dans [37]) du nombre de composantes connexes de l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{q} \{P_j = 0\}$ dans le cas général (i.e. avec singularités). Cependant, il n'est pas trivial que les arguments de type algébrique utilisés par Warren se transposent dans le cas quasi-algébrique. On va donc plutôt se ramener au cas régulier par perturbation de la famille $P_{n,k,d}$, ce qui conduit aux deux prochains lemmes utiles pour la preuve du théorème et dont le premier utilise le lemme de Sard.

Lemme 1.14. *Soient $P_1, \ldots, P_q$ des quasi-polynômes à n variables, k pseudo-variables et de degré total au plus d. Alors, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q) \in \mathbb{R}^q$ en-dehors d'un ensemble de mesure nulle, les quasi-polynômes $P_1 - \varepsilon_1, \ldots, P_q - \varepsilon_q$ vérifient les conditions du théorème 1 dans [37] :*

1. *les ensembles $M_i = \{P_i = \varepsilon_i\}$ sont des variétés (fermées) et localement plates ;*
2. *pour tout $j = 1, \ldots, n$, l'intersection de n'importe quels j des M_i est soit vide, soit une variété de dimension $n - j$ avec un nombre fini de composantes connexes, et localement plate dans l'intersection de n'importe quels $j - 1$ de ces M_i ;*
3. *toute intersection de plus de n des M_i est vide.*

Démonstration. Pour tout $J \subset \{1, \ldots, q\}$ de cardinal $j \leq n$, on considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} P_J \ : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^j \\ & \zeta & \mapsto & \left(P_{l_1}(\zeta), \ldots, P_{l_j}(\zeta)\right). \end{array}$$

Par le lemme de Sard, l'image de l'ensemble des points pour lesquels la différentielle de P_J n'est pas surjective, est de mesure nulle. Il en résulte que, pour tout $\varepsilon_J = (\varepsilon_{l_1}, \ldots, \varepsilon_{l_j}) \in \mathbb{R}^j$ en-dehors d'un ensemble de mesure nulle, le système

$$\{P_J = \varepsilon_J\} = \{P_{l_1} = \varepsilon_{l_1}, \ldots, P_{l_j} = \varepsilon_{l_j}\},$$

donne une variété de dimension $n - j$ (s'il n'est pas vide).

En particulier, pour tout $J' \subset J$ de cardinal $j - 1$, l'ensemble $\{P_J = \varepsilon_J\}$ est une sous-variété de $\{P_{J'} = \varepsilon_{J'}\}$, avec un nombre fini de composantes connexes en vertu des estimations de Khovanskii. Cette propriété de finitude entraîne également qu'elle est localement plate : en effet, pour tout $\zeta \in \{P_J = \varepsilon_J\}$, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de ζ et un homéomorphisme

$$u : (U \cap \{P_{J'} = \varepsilon_{J'}\}, U \cap \{P_J = \varepsilon_J\}, \zeta) \quad \to \quad \left(\mathbb{R}^{n-j+1}, \mathbb{R}^{n-j}, 0\right)$$

(avec la convention que $\mathbb{R}^{n-j}$ correspond aux $y \in \mathbb{R}^{n-j+1}$ tels que $y_{n-j+1} = 0$).

Cette fois, si $|J| = j > n$, alors

$$\{P_J = \varepsilon_J\} \subset \{P_{l_1} = \varepsilon_{l_1}, \ldots, P_{l_{n+1}} = \varepsilon_{l_{n+1}}\},$$

et (toujours grâce aux estimations de Khovanskii) pour tout $(\varepsilon_{l_1}, \ldots, \varepsilon_{l_n})$ en-dehors d'un ensemble de mesure nulle, le système $\{P_{l_1} = \varepsilon_{l_1}, \ldots, P_{l_n} = \varepsilon_{l_n}\}$ est un ensemble fini de points. Il en résulte que, pour chacun de ces $(\varepsilon_{l_1}, \ldots, \varepsilon_{l_n})$, sauf pour un nombre fini de $\varepsilon_{l_{n+1}}$, le système $\{P_{l_1} = \varepsilon_{l_1}, \ldots, P_{l_{n+1}} = \varepsilon_{l_{n+1}}\}$ sera vide.

L'arbitraire sur $|J| = j$ et $j = 1, \ldots, q$ nous permet de conclure que les assertions énoncées dans le lemme sont vérifiées pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q) \in \mathbb{R}^q$ en-dehors d'un ensemble de mesure nulle.

$\square$

On en déduit le résultat suivant.

Lemme 1.15. *Sous les conditions du lemme précédent, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ en-dehors d'un ensemble de mesure nulle, le nombre de composantes connexes de l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^q \{P_j = \varepsilon_j\}$ est majoré par*

$$2^{k(k-1)/2}(2dnq)^{n+2k}.$$

Démonstration. Pour tout $j = 1, \ldots, n$, soit b_j le nombre total de composantes connexes des intersections de n'importe quels j des M_i. On a par (1.8) :

$$\begin{aligned} b_j &\leq C_q^j\, 2^{k(k-1)/2} d^j \,(jd+n-j+1)^{n-j} \left[(n-j+1)\,(jd+n-j+1) - n + j\right]^k \\ &\leq C_q^j\, 2^{k(k-1)/2} d^j (jd+n)^{n-j} [n(jd+n)]^k \\ &\leq C_q^j\, 2^{k(k-1)/2} [n(d+1)]^n \left[n^2(d+1)\right]^k . \end{aligned}$$

Par le lemme précédent, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ en-dehors d'un ensemble de mesure nulle, les variétés $M_i = \{P_i = \varepsilon_i\}$ vérifient les conditions du théorème 1 dans [37]. On en déduit que le nombre de composantes connexes de l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^q M_j$ est majoré par

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n b_j &\leq 2^{k(k-1)/2} [n(d+1)]^n \left[n^2(d+1)\right]^k \sum_{j=0}^n C_q^j \\ &\leq 2^{k(k-1)/2} (2dn)^n \left(2dn^2\right)^k \sum_{j=0}^n \frac{q^j}{j!} \\ &\leq 2^{k(k-1)/2} \, (2dn)^{n+2k} \sum_{j=0}^n \frac{q^n}{n!} \\ &\leq 2^{k(k-1)/2} (2dnq)^{n+2k}. \end{aligned}$$

□

On peut maintenant prouver le théorème.

Démonstration. La preuve est du même esprit que pour le théorème 1.1. On se donne $P_{n,k,d}$ une famille quasi-polynomiale de $C([0,1]^s)$. On pose $q = r^s$ et on considère les λ_j morphismes d'évaluation en les centres des K_j qui pavent $[0,1]^s$. Pour tout $j = 1, \ldots, q$, on pose $P_j(\zeta) = \lambda_j\,(P_{n,k,d}(\zeta))$. Considérons d'autre part, les fonctions $\mu_j \in C([0,1]^s)$ qui vérifient : $\forall\, i, j = 1, \ldots, q$, $\lambda_i(\mu_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker). Pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$, on pose $\mu_\varepsilon = \sum_{j=1}^q \varepsilon_j \mu_j$ et on a, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall\, j = 1, \ldots, q,\ \lambda_j\,(P_{n,k,d}(\zeta) - \mu_\varepsilon) = P_j(\zeta) - \varepsilon_j \,.$$

Les P_j étant des quasi-polynômes à n variables, k pseudo-variables et de degré au plus d, on en déduit par le lemme précédent que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^q$ en-dehors d'un ensemble de mesure nulle, le nombre de composantes connexes de l'ensemble $\mathbb{R}^q \setminus \bigcup_{j=1}^q \{P_j = \varepsilon_j\}$ est majoré par $2^{k(k-1)/2}(2dnq)^{n+2k}$. On vérifie que si r est le plus petit entier ≥ 2 tel que

$$q = r^s \geq 38k^2 n(\log n)(\log d),$$

alors ce nombre est plus petit que 2^q. Il existe donc une fonction $h = h_\varepsilon \in \Lambda_{l,s}$ qui vérifie

$$\begin{aligned}\inf_{\zeta\in\mathbb{R}^n} \|h_\varepsilon - (P_{n,k,d}(\zeta) - \mu_\varepsilon)\|_\infty &\geq \frac{1}{2M_{l,s}4^{s([l]+1)}r^l} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{s}\,2^{l+1}38^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}(4(1+e))^{s([l]+1)}} \frac{1}{(k^2 n\log n\log d)^{l/s}}.\end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ est dans un ensemble de mesure pleine, on peut choisir une suite qui tend vers $0 = (0, \ldots, 0)$. $\Lambda_{l,s}$ étant compact, quitte à extraire une sous-suite pour ε, on peut supposer que la suite associée h_ε converge vers $\widetilde{h} \in \Lambda_{l,s}$ (en fait, comme on l'a vu, la famille $(h_\varepsilon)_\varepsilon$ peut être prise dans l'ensemble fini des fonctions construites dans la partie 1.1.2, la limite $\widetilde{h}$ sera donc l'une de ces fonctions). D'autre part, $\mu_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par passage à la limite que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\|\widetilde{h} - P_{n,k,d}(\zeta)\right\|_\infty \geq \frac{C_1(l,s)}{(k^2 n\log n\log d)^{l/s}},$$

ce qui termine la preuve.

□

Remarque 1.16. Comme pour le cas polynomial, le résultat est aussi valable si on considère l'espace $L^1([0,1]^s)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$, avec les familles quasi-polynomiales à coefficients $c_j \in L^1([0,1]^s)$ (et une autre constante $C_{L^1}(l,s)$).

Ces variétés quasi-algébriques sont, comme on l'a signalé dans l'introduction, une sous-classe des variétés de Pfaff (variétés définies comme solutions intégrales de systèmes de formes différentielles à coefficients polynomiaux). En particulier, les variétés algébriques sont de Pfaff. De même que le théorème de Bézout donne une estimation du nombre de points d'intersection de n variétés algébriques sur $\mathbb{R}^n$, A. Khovanskii montre plus généralement dans [14] qu'on est capable d'obtenir des estimations analogues pour des variétés de Pfaff, ne dépendant que de données comme le nombre de variables ou le degré (cf. par exemple l'estimation (1.8)). Cependant elles ne sont pas toujours explicites et les seuls cas sont entre autres ceux des variétés quasi-polynomiales (c'est aussi une des raisons pour lesquelles on a considéré ce cas).

Cette étude est liée à la notion de complexité. Un exemple fondamental qui motive cette définition est celui d'un polynôme à une variable, dont la complexité correspond au nombre de termes non nuls, et nous amène au théorème de Descartes : si

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

est un polynôme à coefficients réels, alors le nombre de racines positives est majoré par le nombre de changements de signes de la suite $(a_0, \ldots, a_n)$. Il en résulte qu'un polynôme qui s'écrit avec k monômes non nuls ne peut avoir plus de $k-1$ racines positives (et donc au plus $2k-1$ racines réelles), et ce quel que soit son degré. Ainsi, la complexité pourrait être un nouveau moyen d'obtenir des estimations de type Bézout, mais reste à usage délicat dans les applications qui nous motivent (en particulier, le fait qu'elle ne soit pas toujours explicitée). A. Khovanskii (cf. [14] et [28]) et J.-J. Risler (cf. [27] et [29]) ont donné des résultats d'étude de complexité.

Un autre moyen dans cette optique aurait été l'utilisation de la conjecture de Kouchnirenko, qui est une généralisation à plusieurs variables du théorème de Descartes, et qui dit qu'un système $P_1 = \cdots = P_n = 0$ d'équations polynomiales à n variables, où m_i est le nombre de termes de P_i, ne peut avoir plus de $(m_1 - 1) \cdots (m_n - 1)$ racines positives non dégénérées. Elle aurait pu nous être utile, vu la simplicité de cette borne. Elle a cependant été récemment infirmée par B. Haas qui nous donne un contre-exemple dans [8].

Utilisation du théorème de Descartes

On va donner ici un résultat négatif d'approximation de $\Lambda_l([0,1])$ par des familles exponentielles $\Psi_{n,p_1,\ldots,p_n} \subset C([0,1])$, i.e. de la forme

$$\left\{ \left(t \in [0,1] \mapsto \psi(t,\zeta) = \sum_{j=1}^{n} P_j(t) \exp(\zeta_j t) \right),\ \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où P_j est un polynôme en t de degré $\leq p_j$. La preuve repose sur une application directe du théorème de Descartes. Quant au choix de cette famille, il est motivé par l'expression des formules de type Gelfand-Levitan où apparaissent des fonctions du type $\exp(< \zeta, x >)$ (cf. formule (13) dans l'introduction). On montre donc la proposition suivante formulée en tant que proposition 1.5.

Proposition. *Soit $\Psi_{n,p_1,\ldots,p_n} \subset C([0,1])$ une famille exponentielle.*

Soit également h_ε, la fonction définie sur $[0,1] = \bigcup_{i=1}^{n+1} \left[\frac{i-1}{n+1}, \frac{i}{n+1}\right]$, par

$$h_\varepsilon(x) = \varepsilon_i \frac{g_l((n+1)x - i + 1)}{M_l\,(n+1)^l},\ x \in \left[\frac{i-1}{n+1}, \frac{i}{n+1}\right],$$

où $\varepsilon_i = 1$, si i pair, -1 sinon ($g_l(x) = g_{l,1}(x) = (x(1-x))^{[l]+1}$, cf. (1.3), section 1.1.2).

On a alors
$$\inf_{\zeta\in\mathbb{R}^n} \|h_\varepsilon - \psi(\cdot,\zeta)\|_\infty \geq \frac{C_l}{\left(n+1+\sum_{j=1}^n p_j\right)^l}.$$

Démonstration. Supposons d'abord les $\zeta_j \in \mathbb{N}$ et les $P_j = c_j$ constants. Par le théorème de Descartes, le polynôme $\sum_{j=1}^n c_j X^{\zeta_j}$ a au plus $n-1$ racines > 0. Si $\zeta \in \mathbb{Z}^n$, on factorise par X^{-k}, k assez grand. Enfin pour $\zeta \in \mathbb{Q}^n$, on pose $X = \exp\frac{t}{p}$, p dénominateur commun des ζ_j, ce qui montre que la fonction
$$t \in \mathbb{R} \mapsto \psi_0(t,\zeta) = \sum_{j=1}^n c_j \exp(\zeta_j t),$$
a au plus $n-1$ zéros dans $\mathbb{R}$ (l'injectivité de la fonction exponentielle n'augmente pas le nombre de zéros).

Or h_ε changeant de signe n fois sur $[0,1]$ et $\psi_0(\cdot,\zeta)$ s'annulant au plus $n-1$ fois, il existe au moins un sous-intervalle où h_ε et $\psi_0(\cdot,\zeta)$ sont de signe contraire, ce qui implique, $\forall\, \zeta \in \mathbb{Q}^n$,
$$\|h_\varepsilon - \psi_0(\cdot,\zeta)\|_\infty \geq \frac{C_l}{(n+1)^l}.$$
Enfin, l'assertion est encore valable pour $\zeta \in \mathbb{R}^n$ par densité, la convergence étant uniforme sur $[0,1]$.

Considérons maintenant le cas général
$$\psi(t,\zeta) = \sum_{j=1}^n P_j(t)\exp(\zeta_j t),$$
où P_j est un polynôme de degré $\leq p_j$. On commence par remarquer que la fonction t est limite uniforme sur $[0,1]$ de $\frac{\exp\eta t-1}{\eta}$, pour $\eta \to 0_+$. On a alors, pour tout $m \geq 0$,
$$t^m = \lim_{\eta\to 0_+}\left(\frac{\exp\eta t - 1}{\eta}\right)^m = \lim_{\eta\to 0_+}\sum_{s=0}^m \frac{(-1)^{m-s}C_m^s}{\eta^m}\exp(s\eta t).$$
Ainsi, chaque $P_j(t)\exp(\zeta_j t)$ va être limite uniforme sur $[0,1]$ d'une famille de fonctions de la forme
$$\sum_{s=0}^{p_j} a_{j,s}(\eta)\exp(s\eta+\zeta_j)t,$$
qui pour tout j, $1 \leq j \leq n$, possède au plus p_j+1 termes ; ce qui pour $\psi(\cdot,\zeta)$ donnera $\sum_{j=1}^n p_j + n$ termes et aboutira, par limite uniforme, à
$$\|h_\varepsilon - \psi(\cdot,\zeta)\|_\infty \geq \frac{C_l}{\left(n+1+\sum_j p_j\right)^l}.$$

□

Remarque 1.17. On peut bien sûr prolonger le résultat sur tout intervalle $[a,\, b]$ de $\mathbb{R}$ (à condition qu'il soit compact pour assurer la convergence uniforme de $\frac{\exp(\eta t)-1}{\eta}$ vers t).

D'autre part, on utilise l'idée simple, mais fondamentale qu'une fonction continue sur un intervalle et qui change beaucoup de fois de signes, doit beaucoup s'annuler. C'est aussi cet argument qui intervient dans la preuve du théorème 1.1. Il est caractéristique à $\mathbb{R}$ et ne peut pas être directement transposé au cas complexe.

1.1.5 Quelles applications ?

En guise de conclusion, on a tenté de prolonger nos résultats négatifs pour les cas de familles polynomiales (Théorème de Vitushkin), quasi-polynomiales (théorème 1.4) et exponentielles (proposition 1.5). Comme on l'a signalé, ce dernier résultat a été motivé par l'insuffisance, en vue d'applications en problème inverse, du théorème 1.4 où l'on ne considère que la classe des familles quasi-polynomiales (en particulier, il n'y a pas de fonction de la forme $\exp(a\zeta_j x)$, où variable et paramètres sont "mélangés"). De plus, le résultat négatif est trop faible (du moins, dans le cadre du problème inverse qui nous intéresse) du fait de la présence de k^2 dans la minoration (1.9). C'est ce qui nous a poussés à établir la proposition 1.5.

A première vue, ce résultat pourrait s'appliquer dans le cadre de notre problème inverse. L'inconvénient est qu'ici aussi la minoration est trop faible : en effet, la formule de type Gelfand-Levitan possède en tant que déterminant (cf. formule (13) dans l'introduction) tous les

$$\exp 2(b_1\zeta_1 + \cdots + b_N\zeta_N),\ b_j \in \{-1,\, 0,\, 1\},$$

qui sont au nombre de 3^N, sans compter ceux qui ont une partie polynomiale, ce qui ne donnera pas mieux que $C_l/3^{lN}$, qui est déjà insuffisant.

Comme on l'a signalé dans l'introduction, cela nous contraint à tenter une autre approche qui fera l'objet de la section suivante. Le résultat principal concernera les familles analytiques d'ordre fini où figurera la borne de l'ordre de $(N \ln N)^{-l/s}$ (cf. (11) dans le théorème 0.2).

En revanche, les théorème 1.4 et proposition 1.5 présentent un avantage qu'il n'y a pas dans le cadre du théorème 0.2 : à aucun moment il n'y a besoin de borner les paramètres $(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$. De plus, la fonction h_ε de la proposition 1.5 est explicitée, et ne dépend pas de la famille exponentielle imposée au départ. Elle se trouve ainsi uniformément distante de toutes les familles exponentielles à n termes. Ceci nous conduit à la question suivante : soit le théorème 1.4 (ou la proposition 1.5) peut être nettement amélioré afin d'obtenir une estimation voisine de $(N \ln N)^{-l}$. Ce qui prolongerait le théorème de Vitushkin pour des familles quasi-polynomiales, et étendrait dans ce cas la relation (12), formulée dans l'introduction, entre le nombre N de paramètres et l'entropie du compact $\Lambda_{l,s}$.

Soit au contraire le résultat n'est pas loin d'être optimal, et la comparaison avec $(N \ln N)^{-l}$ montre que c'est alors pour des grandes valeurs des paramètres $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$ (donc au-delà de la taille polynomiale en N) que l'approximation est bien meilleure.

Cela mis à part, le résultat donné par le théorème 0.2 est d'une part préférable pour la meilleure précision et pour sa forme plus générale qui ne concerne pas seulement les familles quasi-polynomiales ou exponentielles, mais toutes les fonctions entières d'ordre fini ; d'autre part, comme on le verra dans le chapitre 2, ce résultat sera exploitable pour en déduire l'optimalité des formules d'approximation (13) et (16) de type Gelfand-Levitan.

1.2 Approximation par des variétés analytiques

1.2.1 Définitions et principaux résultats

On va montrer ici un des principaux résultats de cette thèse, qui est une généralisation essentielle dans le cas analytique du théorème de Vitushkin. On donne ainsi la définition suivante d'une famille analytique, de façon analogue à une famille polynomiale.

Définition 1.18. On appelle (N, M)-*famille analytique d'ordre fini continue* (resp. *intégrable*) toute fonction f définie sur $[0,1]^s \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$ (où $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C},\ \Re z > 0\}$) et qui vérifie les conditions suivantes : pour tout $(\zeta, w) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$, $f(\cdot, \zeta, w) \in C([0,1]^s)$ (resp. $L^1([0,1]^s)$) ; pour tout $x \in [0,1]^s$ (resp. presque tout $x \in [0,1]^s$), $f(x, \zeta, w)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$ et d'ordre fini, i.e. pour tout $(\zeta, w) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$,

$$\|f(\cdot, \zeta, w)\|_\infty \leq A e^{u(N+M)^v} e^{b(N+M)^t\left(\|\zeta\|_1^d + \|w\|_1^d\right)}$$

$$(\text{resp. } \|f(\cdot, \zeta, w)\|_{L^1} \leq A e^{u(N+M)^v} e^{b(N+M)^t\left(\|\zeta\|_1^d + \|w\|_1^d\right)}\ ), \tag{1.10}$$

où $A, u, v, b, t, d \in [1, +\infty[$ et $\|\zeta\|_1 = |\zeta_1| + \cdots + |\zeta_N|$ (de même pour $\|w\|_1$).

De façon analogue, on définit une N-*famille analytique d'ordre fini continue* (resp. *intégrable*) toute fonction f qui vérifie les mêmes conditions sur $[0,1]^s \times \mathbb{C}^N$.

Cependant, contrairement aux résultats négatifs établis dans la partie précédente, on a besoin d'imposer une restriction sur les paramètres, ce qui nous amène à poser la définition suivante.

Définition 1.19. On appelle (N, M)-*domaine des paramètres d'approximation* tout ensemble compact $\Omega_{N,M}$ de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^M$ de la forme

$$\Omega_{N,M} = \left\{(\zeta, w) \in \mathbb{R}^N \times \left(\mathbb{R}^+\right)^M, \forall j \leq N, |\zeta_j| \leq B_1(M+N)^{r_1}, \forall i \leq M, |w_i - a_i| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{a_i^2}\right) a_i\right\},$$

où pour tout $i = 1, \ldots, M$, $1 \leq a_i \leq B_2(M+N)^{r_2}$, avec B_1, B_2, r_1, $r_2 \geq 1$ et $0 < \varepsilon < 1$.

On définit de même un *N-domaine des paramètres d'approximation* Ω_N par

$$\Omega_N = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N,\ \forall\, j \le N,\ |\zeta_j| \le B N^r \right\} .$$

$\Omega_{N,M}$ est le produit d'un polydisque (réel) dont la taille grandit avec $N+M$ et d'un autre dont le centre s'éloigne à l'infini. Remarquons que, quelle que soit la famille de domaines $\Omega_{N,M}$ avec les bornes fixées, alors tout compact de $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$ de la forme $K^N \times K_+^M$, où K (resp. K_+) est un compact de $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}_+$), finit par être contenu dans un tel domaine $\Omega_{N,M}$, pourvu que N et M soient assez grands (de même pour Ω_N et tout compact K^N de $\mathbb{C}^N$). Bien que la définition de Ω_N paraisse plus naturelle, le choix de considérer $\Omega_{N,M}$ est motivé par les applications qui seront données au chapitre 2.

On peut maintenant énoncer les principaux résultats de cette partie.

Théorème 1.20. *On considère, pour $N \ge 2$ et $M \ge 0$, f une (N,M)-famille analytique d'ordre fini continue (resp. intégrable) et un (N,M)-domaine des paramètres d'approximation $\Omega_{N,M}$. Alors il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que pour tout $(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}$, on a*

$$\|h - f(\cdot,\zeta,w)\|_\infty \ge \frac{C'_\infty}{((M+N)\ln(M+N))^{l/s}}$$

$$\textit{(resp. } \|h - f(\cdot,\zeta,w)\|_{L^1} \ge \frac{C'_{L^1}}{((M+N)\ln(M+N))^{l/s}} \textit{)},$$

où C'_∞ (resp. C'_{L^1}) est une constante dépendant de $l, s, A, u, v, b, t, d, B_1, B_2, r_1, r_2, \varepsilon$ (et pas de N, M).

De façon équivalente,

$$\sup_{h \in \Lambda_{l,s}} \inf_{(\zeta,w)\in\Omega_{N,M}} \|h - f(\cdot,\zeta,w)\| \ge \frac{C'}{((N+M)\ln(N+M))^{l/s}}.$$

On obtient en particulier comme corollaire un résultat analogue pour une N-famille analytique :

Théorème 1.21. *On considère, pour $N \ge 2$, f une N-famille analytique d'ordre fini continue (resp. intégrable) et un N-domaine des paramètres d'approximation Ω_N. Alors il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que pour tout $\zeta \in \Omega_N$, on a*

$$\|h - f(\cdot,\zeta)\|_\infty \ge \frac{C''_\infty}{(N\ln N)^{l/s}}$$

$$\textit{(resp. } \|h - f(\cdot,\zeta)\|_{L^1} \ge \frac{C''_{L^1}}{(N\ln N)^{l/s}} \textit{)},$$

où C''_∞ (resp. C''_{L^1}) est une constante dépendant de $l, s, A, u, v, b, t, d, B, r$ (et pas de N).

De façon équivalente,

$$\sup_{h\in\Lambda_{l,s}} \inf_{|\zeta_j|\le BN^r} \|h - f(\cdot,\zeta)\| \ge \frac{C''}{(N\ln N)^{l/s}}.$$

On a en outre le calcul des constantes que l'on obtient comme corollaire de la preuve de ces deux théorèmes d'une part, et d'autre part du calcul des constantes C_∞ et C_{L^1} données dans le théorème 1.1 de Vitushkin.

Corollaire 1.22.

$$\begin{aligned}\frac{1}{C'_\infty} &= \frac{\sqrt{s}\,2^{l+2}\,16^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}(4(1+e))^{s([l]+1)}}{(\ln 2)^{l/s}} \qquad (1.11)\\ &\times\left[((d+1)(r_1+2r_2+1)+t+v)\ln\left(4bud^2B_1^d\left(eB_2^2\right)^{d+1}\left(1+\frac{l}{s}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right]^{l/s}\\ &\times\left[\ln\left(\ln\frac{A\sqrt{s}\,2^{l+3}\,8^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}(4(1+e))^{s([l]+1)}}{(\ln 2)^{l/s}}\right)\right]^{l/s},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{C'_{L^1}} &= \frac{5\sqrt{s}\,2^{l+3}\,36^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}((2[l]+3)!)^s(1+e)^{s([l]+1)}}{(([l]+1)!)^{2s}(\ln 2)^{l/s}} \qquad (1.12)\\ &\times\left[((d+1)(r_1+2r_2+1)+t+v)\ln\left(4bud^2B_1^d\left(eB_2^2\right)^{d+1}\left(1+\frac{l}{s}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right]^{l/s}\\ &\times\left[\ln\left(\ln\frac{5A\sqrt{s}\,2^{l+4}\,18^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}((2[l]+3)!)^s(1+e)^{s([l]+1)}}{(([l]+1)!)^{2s}(\ln 2)^{l/s}}\right)\right]^{l/s}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{1}{C''_\infty} &= \frac{\sqrt{s}\,2^{l+3}\,8^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}(4(1+e))^{s([l]+1)}\,[d(r+1)+t+v]^{l/s}}{3(\ln 2)^{l/s}} \qquad (1.13)\\ &\times\left[\ln\left(4bue^{d+1}B^d\left(1+\frac{l}{s}\right)^2\left(\ln\frac{A\sqrt{s}\,2^{l+3}\,8^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}(4(1+e))^{s([l]+1)}}{(\ln 2)^{l/s}}\right)\right)\right]^{l/s},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{C''_{L^1}} &= \frac{5\sqrt{s}\,2^{l+4}\,18^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}((2[l]+3)!)^s(1+e)^{s([l]+1)}}{3(([l]+1)!)^{2s}(\ln 2)^{l/s}} \qquad (1.14)\\ &\times\left[(d(r+1)+t+v)\ln\left(4bue^{d+1}B^d\left(1+\frac{l}{s}\right)^2\right)\right]^{l/s}\\ &\times\left[\ln\left(\ln\frac{5A\sqrt{s}\,2^{l+4}\,18^{l/s}([l]+1)^{[l]+1}((2[l]+3)!)^s(1+e)^{s([l]+1)}}{(([l]+1)!)^{2s}(\ln 2)^{l/s}}\right)\right]^{l/s}.\end{aligned}$$

Comme on le constate, en plus de l et s, C' (resp. C'') dépend des paramètres qui interviennent pour définir f et $\Omega_{N,M}$ (resp. Ω_N), mais pas de N, M.

On donnera en dernière partie des résultats négatifs plus spéciaux qui nous seront utiles dans le chapitre 2. On généralisera les théorèmes 1.20 et 1.21 à des familles dites *de type Gelfand-Levitan* (cf. définition 1.29), dont le choix est motivé par les formules (13) et (16) données en introduction.

1.2.2 Preuve des théorèmes 1.20 et 1.21

L'idée de la preuve sera d'utiliser le développement en série de Taylor de la famille analytique f, afin de l'écrire comme somme d'une famille polynomiale et d'un reste suffisamment petit. L'assertion sera alors une application du théorème 1.1 de Vitushkin. Comme la série doit converger, on comprendra la motivation, d'une part de supposer que f est d'ordre fini, d'autre part que les paramètres restent dans un domaine du type $\Omega_{N,M}$.

Cas d'une (N, M)-famille analytique

On va établir dans cette partie le théorème 1.20, et en déduire une version plus spéciale qui nous sera utile pour la suite (corollaire 1.27).

Théorème. *On considère, pour $N \geq 2$ et $M \geq 0$, f une (N, M)-famille analytique d'ordre fini continue (resp. intégrable) et $\Omega_{N,M}$ un (N, M)-domaine des paramètres d'approximation. Alors il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que pour tout $(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}$, on a*

$$\|h - f(\cdot, \zeta, w)\| \geq \frac{C'}{((M+N)\ln(M+N))^{l/s}}.$$

Démonstration. Tout au long de la preuve, la norme $\|\cdot\|$ désignera la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur $C([0,1]^s)$ (resp. intégrale $\|\cdot\|_{L^1}$ sur $L^1([0,1]^s)$).

L'analyticité de f par rapport à $(\zeta, w) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M_+$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} f(\cdot, \zeta, w) &= \sum_{|k|+|l|\geq 0} c_{k,l}(\cdot)\zeta^k (w-a)^l \\ &= \left(\sum_{|k|\leq K, |l|\leq L} + \sum_{|k|\leq K, |l|>L} + \sum_{|k|>K, |l|\geq 0} \right) c_{k,l}(\cdot)\zeta^k (w-a)^l \\ &= P_{K,L}(\cdot, \zeta, w) + S_{K,L}(\cdot, \zeta, w) + R_K(\cdot, \zeta, w), \end{aligned} \tag{1.15}$$

où K et L sont des entiers > 0, avec $k \in \mathbb{N}^N$, $l \in \mathbb{N}^M$ et $\zeta^k = \zeta_1^{k_1} \cdots \zeta_N^{k_N}$, $(w-a)^l = (w_1 - a_1)^{l_1} \cdots (w_M - a_M)^{l_M}$. La fonction $c_{k,l}$ est le coefficient de Taylor du monôme $\zeta^k (w-a)^l$ au point $(0, a) = (0, \ldots, 0, a_1, \ldots, a_M)$.

L'égalité doit être interprétée au sens fonctionnel, i.e. point par point dans $C([0,1]^s)$ (resp. presque partout dans $L^1([0,1]^s)$). Elle est justifiée par le lemme suivant qui nous donne une estimation de $c_{k,l}$.

Lemme 1.23. *Pour tout* $(k,l) \in \mathbb{N}^{N+M}$,

$$\|c_{k,l}\| \leq Ae^{u(N+M)^v} \frac{e^{b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t}}}{a^l} \left(\frac{ebd(N+M)^{d+t}}{|k|} \right)^{\frac{|k|}{d}}.$$

Démonstration. On commence par remarquer que, pour tout (k,l), la fonction

$$\begin{array}{rcl} [0,1]^s & \to & C([0,1]^s) \text{ (resp. } L^1([0,1]^s)\text{)} \\ x & \mapsto & c_{k,l}(x) \end{array}$$

est bien définie, i.e. dans l'espace $C([0,1]^s)$ (resp. $L^1([0,1]^s)$). En effet, elle est donnée par la formule de Cauchy : pour tout $R_0 > 0$ et $R_i < a_i$, $i = 1, \ldots, M$,

$$c_{k,l}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^{N+M}} \int_{|\zeta_j|=R_0, |w_i-a_i|=R_i} \frac{f(x,\zeta,w)}{\zeta^{k+1}(w-a)^{l+1}} d\zeta \wedge dw,$$

où $(k+1) = (k_1+1, \ldots, k_N+1)$ (de même pour $l+1$) et $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_N$ (de même pour dw). Pour le cas de $C([0,1]^s)$, il s'agit d'une intégrale à paramètre d'une fonction continue par rapport à $x \in [0,1]^s$; tandis que pour le cas de $L^1([0,1]^s)$, c'est le théorème de Fubini appliqué à la fonction f sur l'ensemble $[0,1]^s \times (bD(0,R_0))^N \times \prod_{i=1}^M bD(a_i,R_i)$, qui permet de définir sur $[0,1]^s$ (presque partout, puis en prolongeant par 0) la fonction $c_{k,l}$, qui sera alors dans $L^1([0,1]^s)$.

Il vient

$$\|c_{k,l}\| \leq \frac{1}{(2\pi)^{N+M}} \int_{|\zeta_j|=R_0, |w_i-a_i|=R_i} \frac{\|f(\cdot,\zeta,w)\|}{R_0^{|k|+N} R_1^{l_1+1} \cdots R_M^{l_M+1}} d\zeta dw,$$

soit (puisque c'est vrai pour tout $R_i < a_i$)

$$\begin{aligned} \|c_{k,l}\| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{N+M}} \int_{|\zeta_j|=R_0, |w_i-a_i|=R_i} \frac{Ae^{u(N+M)^v} e^{b(N+M)^t \left(\|\zeta\|_1^d + (\|a\|_1 + \|w-a\|_1)^d\right)}}{R_0^{|k|+N} R_1^{l_1+1} \cdots R_M^{l_M+1}} d\zeta dw \\ &\leq Ae^{u(N+M)^v} \frac{e^{b(N+M)^t \left(N^d R_0^d + 2^d (a_1+\cdots+a_M)^d\right)}}{R_0^{|k|} a^l} \\ &\leq Ae^{u(N+M)^v} \frac{e^{b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t}}}{a^l} \frac{e^{b(N+M)^{d+t} R_0^d}}{R_0^{|k|}} \end{aligned}$$

L'inégalité étant valable pour tout $R_0 > 0$, on l'a en particulier pour $R_0 = R_{min}$ qui minimise le membre de droite. On le détermine en considérant la fonction définie sur

$]0,+\infty[$ par $R_0 \mapsto \dfrac{e^{b(N+M)^{d+t}R_0^d}}{R_0^{|k|}}$. Elle tend vers $+\infty$ en 0 et $+\infty$, elle admet donc (au moins) un minimum, qui annule sa dérivée, donnée par :

$$\begin{aligned} R_0 &\mapsto \frac{e^{b(N+M)^{d+t}R_0^d}}{R_0^{|k|}} bd(N+M)^{d+t}R_0^{d-1} - |k| \frac{e^{b(N+M)^{d+t}R_0^d}}{R_0^{|k|+1}} \\ &= \frac{e^{b(N+M)^{d+t}R_0^d}}{R_0^{|k|+1}} \left(bd(N+M)^{d+t}R_0^d - |k| \right), \end{aligned}$$

qui s'annule exactement en $R_0 = R_{min} = \left(\frac{|k|}{bd(N+M)^{d+t}} \right)^{\frac{1}{d}}$. On obtient

$$\|c_{k,l}\| \leq A e^{u(N+M)^v} \frac{e^{b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t}}}{a^l} \left(\frac{ebd(N+M)^{d+t}}{|k|} \right)^{\frac{|k|}{d}},$$

ce qui prouve le lemme. □

Notre objectif est maintenant de rendre petits les restes R_K et $S_{K,L}$ de la décomposition (1.15), pour tout $(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}$, pourvu que K et L soient assez grands. Comme on va estimer des restes de séries, on a au préalable besoin d'un résultat combinatoire qui constitue le lemme suivant.

Lemme 1.24. *Pour tous $p \geq 1$ et $n \geq 0$,*

$$card\{k \in \mathbb{N}^p,\ k_1 + \cdots + k_p = n\} = \frac{(n+p-1)!}{(p-1)!\, n!},$$

et

$$card\{k \in \mathbb{N}^p,\ k_1 + \cdots + k_p \leq n\} = \frac{(n+p)!}{n!\, p!}.$$

Démonstration. Pour la première égalité, le membre de gauche est le coefficient en X^n de la série formelle

$$\sum_{k_1,\ldots,k_p \geq 0} X_1^{k_1} \cdots X_p^{k_p},$$

après l'évaluation $X_1 = \cdots = X_p = X$. Or, cette série vaut :

$$\prod_{j=1}^{p} \left(\sum_{k_j \geq 0} X_j^{k_j} \right) = \prod_{j=1}^{p} \frac{1}{1 - X_j},$$

qui après évaluation donne $\frac{1}{(1-X)^p}$. On a d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-X)^p} &= \frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dX^{p-1}}\left(\frac{1}{1-X}\right)\\ &= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{k\geq 0} k(k-1)\cdots(k-p+2)X^{k-p+1},\end{aligned}$$

dont le coefficient en X^n correspond à $k = n+p-1$, ce qui donne finalement

$$\frac{(n+p-1)\cdots(n+1)}{(p-1)!},$$

et achève la première égalité.

La seconde s'en déduit par récurrence sur $n \geq 0$ (c'est la dimension de l'espace des polynômes de degré au plus n) : c'est immédiat pour $n = 0$, et si $n \geq 1$, on a en séparant les $|k| \leq n-1$ et les $|k| = n$,

$$card\{k \in \mathbb{N}^p,\ k_1 + \cdots + k_p \leq n\} = C_{n+p-1}^{n-1} + C_{n+p-1}^{n} = C_{n+p}^{n}\,,$$

ce qui prouve le lemme.

$\square$

On peut maintenant établir le lemme suivant qui donne une estimation du reste R_K.

Lemme 1.25. *Supposons $K \geq K_{N,M}$, où*

$$K_{N,M} := 2bud^2B_1^d\left(eB_2^2\right)^{d+1}\left(1+\frac{l}{s}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\ln\frac{4A}{C}\right)(N+M)^{(d+1)(r_1+2r_2+1)+t+v} \quad (1.16)$$

et C désigne la constante $C_\infty(l,s)$ (resp. $C_{L^1}(l,s)$) intervenant dans le théorème 1.1 de Vitushkin ($K_{N,M}$ n'est pas forcément entier).

Alors pour tout $(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}$,

$$\|R_K(\cdot,\zeta,w)\| \leq \frac{C}{4((N+M)\ln(K+K^2))^{l/s}}.$$

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $i = 1, \dots, M$, $\frac{|w_i - a_i|}{a_i} \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{a_i^2}\right)$, donc :

$$\begin{aligned}
\|R_K(\cdot,\zeta,w)\| &\leq Ae^{u(N+M)^v} e^{b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t}} \sum_{|k|>K, |l|\geq 0} \left(1-\frac{\varepsilon}{a^2}\right)^l \left(\frac{ebd(N+M)^{d+t}}{|k|}\right)^{\frac{|k|}{d}} |\zeta^k| \\
&\leq Ae^{u(N+M)^v + b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t}} \prod_{i=1}^{M} \frac{a_i^2}{\varepsilon} \\
&\quad \sum_{|k|>K} \left(\frac{ebd(N+M)^{d+t}}{|k|}\right)^{\frac{|k|}{d}} (B_1(N+M)^{r_1})^{|k|} \\
&\leq Ae^{u(N+M)^v + b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t}} \frac{(B_2(N+M)^{r_2})^{2M}}{\varepsilon^M} \\
&\quad \times \sum_{n>K} \left(\frac{ebdB_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t}}{n}\right)^{\frac{n}{d}} \frac{(n+N-1)!}{(N-1)!\,n!}\,,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du lemme 1.24.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\frac{(n+N-1)!}{(N-1)!\,n!} &= \frac{(n+N-1)\cdots(n+1)}{(N-1)!} \\
&= \left(1+\frac{n}{N-1}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{1}\right) \\
&\leq (n+1)^{N-1}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\|R_K(\cdot,\zeta,w)\| &\leq Ae^{u(N+M)^v + b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t}} \frac{(B_2(N+M)^{r_2})^{2M}}{\varepsilon^M} \\
&\quad \times \sum_{n\geq K+1} \left(\frac{ebdB_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t}}{n}(n+1)^{\frac{d(N-1)}{n}}\right)^{\frac{n}{d}}.
\end{aligned}$$

Du fait que $\varepsilon < 1$ et $C \leq 1$, et par hypothèse sur les autres constantes, tous les termes qui interviennent dans l'expression de $K_{N,M}$ sont minorés par 1. En particulier, $n \geq K \geq dN^2 - 1$. D'autre part, par décroissance de la fonction $(t+1)^{1/t}$ sur $[1, +\infty[$, on a

$$(n+1)^{\frac{d(N-1)}{n}} \leq \left(dN^2\right)^{\frac{d(N-1)}{dN^2-1}} \leq \left(dN^2\right)^{\frac{1}{N+1}} \leq 2d\,, \tag{1.17}$$

car $t^{2/(t+1)} \leq 2$. Il vient

$$\begin{aligned} \|R_K(\cdot,\zeta,w)\| &\leq Ae^{u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}}\frac{\left(B_2(N+M)^{r_2}\right)^{2M}}{\varepsilon^M} \\ &\quad \times \sum_{n\geq K+1}\left(\frac{2ebd^2B_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t}}{n}\right)^{\frac{n}{d}}. \end{aligned}$$

Pour estimer la série, on commence par remarquer que

$$K \geq 2bd^2e^{d+1}B_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t},$$

donc pour tout $n \geq K+1$,

$$\left(\frac{2ebd^2B_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t}}{n}\right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{e},$$

soit

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq K+1}\left(\frac{2ebd^2B_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t}}{n}\right)^{\frac{n}{d}} &\leq \frac{1}{1-e^{-1}}\,\frac{1}{e^{K+1}} \\ &\leq \frac{1}{e^K}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|R_K(\cdot,\zeta,w)\| \leq \frac{Ae^{u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}}\left(B_2(N+M)^{r_2}\right)^{2M}}{\varepsilon^M\ e^K}.$$

Il s'agit donc, pour prouver le lemme, de montrer que

$$\frac{Ae^{u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}}\left(B_2(N+M)^{r_2}\right)^{2M}}{\varepsilon^M\ e^K} \leq \frac{C}{4((N+M)\ln(K+K^2))^{l/s}},$$

soit

$$\begin{aligned} K-\frac{l}{s}\ln\ln\left(K+K^2\right) &\geq \ln\frac{4A}{C}+M\ln\frac{1}{\varepsilon}+2M\ln\left(B_2(N+M)^{r_2}\right)+\frac{l}{s}\ln(N+M) \\ &\quad +u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}. \end{aligned}$$

Puisque $K \geq \left(1+\frac{l}{s}\right)^2 \geq \left(\frac{l}{s}\right)^2$ et que, pour tout $t \geq 10$, $\ln\ln(t+t^2) \leq \frac{\sqrt{t}}{2}$, on a

$$\begin{aligned} K - \frac{l}{s}\ln\left(\ln\left(K+K^2\right)\right) &= K\left(1-\frac{l}{s}\frac{\ln(\ln(K+K^2))}{K}\right) \\ &\geq K\left(1-\frac{l}{2s}\frac{1}{\sqrt{K}}\right) \\ &\geq \frac{K}{2}\,. \end{aligned}$$

Il suffit donc de s'assurer que

$$\begin{aligned} \frac{K}{2} \;\geq\; & \ln\frac{4A}{C} + M\ln\frac{1}{\varepsilon} + 2M\ln\left(B_2(N+M)^{r_2}\right) + \frac{l}{s}\ln(N+M) \\ & + u(N+M)^v + b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Etant donné que $\ln t \leq t$ et que toutes les constantes sont minorées par 1, on a

$$\begin{aligned} \ln\frac{4A}{C} + M\ln\frac{1}{\varepsilon} &\leq (N+M)\ln\frac{4A}{C} + (N+M)\frac{1}{\varepsilon} \\ &\leq 2(N+M)\left(\ln\frac{4A}{C}\right)\frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} 2M\ln\left(B_2(N+M)^{r_2}\right) + \frac{l}{s}\ln(N+M) &\leq 2B_2(N+M)^{r_2+1} + \frac{l}{s}(N+M) \\ &\leq 2\left(1+\frac{l}{s}\right)B_2(N+M)^{r_2+1}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la somme des quatre premiers termes de (1.18) est majorée par

$$4B_2\left(1+\frac{l}{s}\right)\left(\ln\frac{4A}{C}\right)\frac{1}{\varepsilon}(N+M)^{r_2+1} \leq B_2\left(1+\frac{l}{s}\right)\left(\ln\frac{4A}{C}\right)\frac{1}{\varepsilon}(N+M)^{r_2+3}\,.$$

D'autre part,

$$u(N+M)^v + b(2B_2)^d M^d (N+M)^{dr_2+t} \leq bu2^d B_2^d (N+M)^{d(r_2+1)+t+v}\,.$$

Le second membre de (1.18) est donc majoré par

$$2\times bu2^d B_2^d\left(1+\frac{l}{s}\right)\left(\ln\frac{4A}{C}\right)\frac{1}{\varepsilon}(N+M)^{d(r_2+1)+t+v} \quad\leq\quad \frac{K_{N,M}}{2}\,,$$

ce qui prouve le lemme.

$\square$

On établit de même une estimation du reste $S_{K,L}$.

Lemme 1.26. *Pour $L = K^2$, avec $K \geq K_{N,M}$, on a*

$$\|S_{K,L}(\cdot,\zeta,w)\| = \|S_{K,K^2}(\cdot,\zeta,w)\| \leq \frac{C}{4\left((N+M)\ln\left(K+K^2\right)\right)^{l/s}}.$$

Démonstration. On commence par écrire de même :

$$\|S_{K,L}(\cdot,\zeta,w)\| \leq Ae^{u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}} \sum_{|k|\leq K}\left(\frac{ebdB_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t}}{|k|}\right)^{\frac{|k|}{d}} \sum_{|l|>L}\left(1-\frac{\varepsilon}{a^2}\right)^l.$$

Or d'après le lemme 1.24,

$$\begin{aligned}
\sum_{|k|\leq K}\left(\frac{ebdB_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t}}{|k|}\right)^{\frac{|k|}{d}} &\leq \left(ebdB_1^d(N+M)^{d(r_1+1)+t}\right)^{\frac{K}{d}}\frac{(N+K)!}{N!\,K!}\\
&\leq (ebd)^{\frac{K}{d}}B_1^K(N+M)^{\left(r_1+1+\frac{t}{d}\right)K}(N+1)^K\\
&\leq \left(2ebdB_1(N+M)^{r_1+t+2}\right)^K
\end{aligned}$$

(car $N+M \geq N+1$; sinon $M=0$, et $S_{K,L}=0$). D'autre part, pour tout $i = 1,\ldots,M$

$$a_i \leq a_0 := B_2(N+M)^{r_2}\,. \tag{1.19}$$

Puisque $L = K^2 \geq M$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{|l|>K^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{a^2}\right)^l &\leq \sum_{n>K^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}\right)^n\frac{(n+M-1)!}{(M-1)!\,n!}\\
&\leq \sum_{n>K^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}\right)^n(n+1)^M\\
&\leq \sum_{n>K^2}\left(\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}}\right)^n\left[\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}}\,(n+1)^{\frac{M}{n}}\right]^n.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \geq 1$, $\dfrac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}} \leq 1$, et $\ln(1+t) \leq t$. D'autre part,

$$\frac{2Ma_0^2}{\varepsilon} = \frac{2MB_2^2(N+M)^{2r_2}}{\varepsilon} \leq \frac{2}{\varepsilon}B_2^{d+1}(N+M)^{(d+1)r_2} \leq K_{N,M}\,,$$

donc puisque $n \geq K^2 \geq \left(\dfrac{2Ma_0^2}{\varepsilon}\right)^2$, il vient

$$\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}\right)+\frac{M}{n}\ln(n+1) \leq -\frac{\varepsilon}{2a_0^2}+\frac{M}{\sqrt{n}} \leq 0\,,$$

ce qui donne

$$\sum_{|l|>K^2}\left(1-\frac{\varepsilon}{a^2}\right)^{|l|} \;\leq\; \sum_{n>K^2}\left(\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}}\right)^n \leq \frac{\left(1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}\right)^{\frac{K^2}{2}}}{1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}}}.$$

Par ailleurs, $\sqrt{1+t} \leq 1+\dfrac{t}{2}$ et $1+t \leq e^t$, on en déduit

$$\begin{aligned}
\|S_{K,K^2}(\cdot,\zeta,w)\| &\leq Ae^{u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}}\left(2ebdB_1(N+M)^{r_1+t+2}\right)^K\frac{2a_0^2}{\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{a_0^2}\right)^{\frac{K^2}{2}}\\
&\leq Ae^{u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}}\left(2ebdB_1(N+M)^{r_1+t+2}\right)^K\frac{2a_0^2}{\varepsilon}e^{-\dfrac{\varepsilon K^2}{2a_0^2}}.
\end{aligned}$$

Comme pour le lemme précédent, il s'agit de prouver que

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon K^2}{2a_0^2}-K\ln\left(2ebdB_1(N+M)^{r_1+t+2}\right)\\
&\qquad -\frac{l}{s}\ln\ln\left(K+K^2\right) \;\geq\; \ln\frac{4A}{C}+\frac{l}{s}\ln(N+M)+\ln\frac{2a_0^2}{\varepsilon}\\
&\qquad\qquad +u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}.
\end{aligned}$$

D'abord, pour tout $t>1$, $\ln t \leq \sqrt{t}$ et $\ln\ln t \leq t$. Ensuite, on a $K \geq 2ebdB_1(N+M)^{r_1+t+2}$ et

$$K \geq 2e^2(N+M)B_2^4\left(1+\frac{l}{s}\right)^2\frac{1}{\varepsilon^2}(N+M)^{4r_2} \geq \left(\left(1+\frac{l}{s}\right)\frac{4a_0^2}{\varepsilon}\right)^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon K^2}{2a_0^2}-K\ln\left(2ebdB_1(N+M)^{r_1+t+2}\right)\\
&\qquad -\frac{l}{s}\ln\ln\left(K+K^2\right) \;\geq\; \frac{\varepsilon K^2}{2a_0^2}-K^{3/2}-\frac{l}{s}K\\
&\qquad\qquad \geq\; K^2\left(\frac{\varepsilon}{2a_0^2}-\left(1+\frac{l}{s}\right)\frac{1}{\sqrt{K}}\right)\\
&\qquad\qquad \geq\; \frac{\varepsilon}{4a_0^2}K^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour prouver le lemme, il suffit de vérifier que

$$K^2 \;\geq\; \frac{4a_0^2}{\varepsilon}\left[\ln\frac{4A}{C}+\ln\frac{2a_0^2}{\varepsilon}+\frac{l}{s}\ln(N+M)+u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}\right]. \quad (1.20)$$

D'abord,

$$\begin{aligned}
\ln\frac{4A}{C}+\frac{l}{s}\ln(N+M)+\ln\frac{2a_0^2}{\varepsilon} &\leq \ln\frac{4A}{C}+\frac{l}{s}(N+M)+\frac{2a_0^2}{\varepsilon}\\
&\leq \left(1+\frac{l}{s}\right)\left(\ln\frac{4A}{C}\right)(N+M)+2B_2^2\frac{1}{\varepsilon}(N+M)^{2r_2}\\
&\leq 3B_2^2\left(1+\frac{l}{s}\right)\frac{1}{\varepsilon}\left(\ln\frac{4A}{C}\right)(N+M)^{2r_2}\,.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$u(N+M)^v+b(2B_2)^dM^d(N+M)^{dr_2+t}\leq bu(2B_2)^d(N+M)^{dr_2+t+v+1}\,.$$

Il en résulte que le second membre de (1.20) est majoré par

$$\begin{aligned}
&4B_2^2\frac{1}{\varepsilon}(N+M)^{2r_2}\times 4bu2^dB_2^{2d}\left(1+\frac{l}{s}\right)\frac{1}{\varepsilon}\left(\ln\frac{4A}{C}\right)(N+M)^{2dr_2+t+v+1}\leq\\
&\qquad\leq\left[4bu2^dB_2^{2(d+1)}\left(1+\frac{l}{s}\right)\frac{1}{\varepsilon}\left(\ln\frac{4A}{C}\right)(N+M)^{2(d+1)r_2+t+v+1}\right]^2,
\end{aligned}$$

ce qui est vrai par définition de $K_{N,M}$.

□

De la décomposition (1.15) de f, il en résulte, grâce aux lemmes 1.25 et 1.26, que, pour tout $(\zeta,w)\in\Omega_{N,M}$,

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot,\zeta,w)-P_{K,K^2}(\cdot,\zeta,w)\| &\leq \|R_K(\cdot,\zeta,w)\|+\|S_{K,K^2}(\cdot,\zeta,w)\|\\
&\leq \frac{C}{2((N+M)\ln(K+K^2))^{l/s}}\,. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Or, la fonction

$$P_{K,K^2}(\cdot,\zeta,w)=\sum_{|k|\leq K,|l|\leq K^2}c_{k,l}(\cdot)\zeta^k(w-a)^l$$

est une famille polynomiale en (ζ,w) de l'espace $C([0,1]^s)$ (resp. $L^1([0,1]^s)$), à $N+M$ variables et de degré au plus $K+K^2$. D'après le théorème 1.1 de Vitushkin, il existe $h\in\Lambda_{l,s}$, tel que, $\forall\,(\zeta,w)\in\mathbb{R}^{N+M}$,

$$\|h-P_K(\cdot,\zeta,w)\|\geq\frac{C}{((N+M)\ln(K+K^2))^{l/s}}, \qquad (1.22)$$

où $C=C_\infty(l,s)$ (resp. $C_{L^1}(l,s)$). Il résulte de (1.21) et (1.22) que, pour tout $(\zeta,w)\in\Omega_{N,M}$,

$$\|h-f(\cdot,\zeta,w)\|\geq\frac{C}{2((N+M)\ln(K+K^2))^{l/s}}.$$

Pour terminer la preuve du théorème, il reste à estimer $K + K^2$ polynomialement en $N + M$. On choisit pour cela le plus petit entier $\widetilde{K} \geq K_{N,M}$. D'abord,

$$\widetilde{K} + \widetilde{K}^2 \leq \left(\widetilde{K} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(K_{N,M} + \frac{3}{2}\right)^2 .$$

Ensuite,

$$K_{N,M} + \frac{3}{2} \quad \leq \quad 4bud^2 B_1^d \left(eB_2^2\right)^{d+1} \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\ln \frac{4A}{C}\right) (N+M)^{(d+1)(r_1+2r_2+1)+t+v} ,$$

donc

$$\begin{aligned} \ln\left(\widetilde{K} + \widetilde{K}^2\right) \quad &\leq \quad 2[(d+1)(r_1 + 2r_2 + 1) + t + v] \ln(N+M) \\ &\qquad + 2\ln\left[4bud^2 B_1^d \left(eB_2^2\right)^{d+1} \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\ln \frac{4A}{C}\right)\right] \\ &\leq \quad 2[(d+1)(r_1 + 2r_2 + 1) + t + v] \ln(N+M) \\ &\qquad \times \ln\left[4bud^2 B_1^d \left(eB_2\right)^{d+1} \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\ln \frac{4A}{C}\right)\right] . \end{aligned}$$

On achève ainsi la preuve du théorème : il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que, pour tout $(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}$,

$$\|h - f(\cdot, \zeta, w)\| \quad \geq \quad \frac{C'}{((N+M)\ln(N+M))^{l/s}} ,$$

avec

$$\begin{aligned} C' \quad &= \quad \frac{C}{2^{1+l/s}\left[(d+1)(r_1 + 2r_2 + 1) + t + v\right]^{l/s}} \\ &\qquad \times \frac{1}{\left[\ln\left(4bud^2 B_1^d \left(eB_2^2\right)^{d+1} \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\ln \frac{4A}{C}\right)\right)\right]^{l/s}} . \end{aligned} \tag{1.23}$$

□

On en déduit en particulier le calcul des constantes C'_∞ et C'_{L^1} données dans le corollaire 1.22.

En vue de prouver les résultats de la prochaine section qui serviront dans le second chapitre, on aura besoin d'imposer certaines restrictions à la fonction h réalisant la minoration. On établit pour cela le résultat suivant qui est une conséquence du corollaire 1.12

et de la preuve du théorème 1.20. Cela provient en effet du fait que la fonction h qui réalise la minoration dans le théorème 1.20 est la même que celle qui donne la minoration dans le théorème 1.1.

Corollaire 1.27. *f et $\Omega_{N,M}$ étant donnés, pour tout $N+M\geq 2$ et pour tout $K\geq K_{N,M}$ (cf. (1.16)), il existe $h=h_K\in\Lambda_l([0,1])\cap C^l([0,1])$ qui vérifie pour tout $(\zeta,w)\in\Omega_{N,M}$:*

$$\begin{cases} \dfrac{c(l)}{((N+M)\ln(K+K^2))^l}\leq |h_K\left(x_{\zeta,w}\right)| = \|h_K\|_\infty \leq \dfrac{2^l c(l)}{((N+M)\ln(K+K^2))^l}, \\ h_K\left(x_{\zeta,w}\right)\widetilde{P}_K\left(x_{\zeta,w},\zeta,w\right)\leq 0, \\ \left\|\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,w)\right\|_\infty \leq \dfrac{c(l)}{2((N+M)\ln(K+K^2))^l}, \\ h_K(x)=0,\ \forall\, x\in\left[0,\frac{1}{20}\right], \end{cases} \tag{1.24}$$

où $\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,w)=R_K(\cdot,\zeta,w)+S_{K,K^2}(\cdot,\zeta,w)$, $\widetilde{P}_K=P_{K,K^2}(\cdot,\zeta,w)$ dans la décomposition (1.15) de f et $x_{\zeta,w}$ est bien choisi.

Application pour une N-famille analytique

On va donner ici la preuve du théorème 1.21 qui, bien que moins général, a une formulation plus naturelle (en particulier pour le domaine Ω_N). On en déduira de même le corollaire 1.28 qui nous servira dans la section suivante.

Théorème. *On considère, pour $N\geq 2$, f une N-famille analytique d'ordre fini continue (resp. intégrable) et un N-domaine des paramètres d'approximation Ω_N. Alors il existe $h\in\Lambda_{l,s}$ tel que pour tout $\zeta\in\Omega_N$, on a*

$$\|h-f(\cdot,\zeta)\|_\infty \geq \frac{C''_\infty}{(N\ln N)^{l/s}}\,.$$

où C'' est une constante dépendant de l,s,A,u,v,b,t,d,B,r (et pas de N).

Bien que l'énoncé de ce théorème se déduise immédiatement du théorème 1.20 en prenant $M=0$ et $B_2=r_2=\varepsilon=1$, on a besoin de reprendre la preuve afin d'en déduire les constantes C''_∞ et C''_{L^1} du corollaire 1.22.

Démonstration. D'abord, la décomposition (1.15) de f va se réduire à

$$\begin{aligned} f(\cdot,\zeta) &= \sum_{|k|\leq K} c_k(\cdot)\zeta^k + \sum_{|k|>K} c_k(\cdot)\zeta^k \\ &= \widetilde{P}_K(\cdot,\zeta)+\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta)\,, \end{aligned}$$

où, d'après le lemme 1.23 avec $M = 0$, on a

$$\|c_k\| \leq Ae^{uN^v} \left(\frac{ebdN^{d+t}}{|k|}\right)^{\frac{|k|}{d}} .$$

Ensuite, on pose de même

$$K_N \ := \ 2bud^2e^{d+1}B^d \left(1+\frac{l}{s}\right)^2 \left(\ln\frac{4A}{C}\right) N^{d(r+1)+t+v} . \tag{1.25}$$

Il vient, pour tous $\zeta \in \Omega_N$ et $K \geq K_N$,

$$\begin{aligned}
\left\|\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta)\right\| &\leq Ae^{uN^v} \sum_{|k|>K} \left(\frac{ebdN^{d+t}}{|k|}\right)^{\frac{|k|}{d}} (BN^r)^{|k|} \\
&\leq Ae^{uN^v} \sum_{n>K} \left(\frac{ebdB^dN^{(r+1)d+t}}{n}\right)^{\frac{n}{d}} \frac{(n+N-1)!}{n!\,(N-1)!} \\
&\leq Ae^{uN^v} \sum_{n\geq K+1} \left(\frac{2ebd^2B^dN^{d(r+1)+t}}{n}\right)^{\frac{n}{d}} ,
\end{aligned}$$

par le lemme 1.24 et du fait que, comme $K_N \geq dN^2$, alors pour tout $n \geq K$ (cf. (1.17)),

$$\frac{(n+N-1)!}{n!\,(N-1)!} \leq (n+1)^{N-1} \leq (2d)^{\frac{n}{d}} .$$

Etant donné que l'on a $K_N \geq 2bd^2e^{d+1}B^dN^{d(r+1)+t}$, on obtient

$$\left\|\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta)\right\| \leq Ae^{uN^v} \sum_{n\geq K+1} \frac{1}{e^n} \leq \frac{Ae^{uN^v}}{e^K} .$$

Il vient de même

$$\left\|\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta)\right\| \ \leq \ \frac{C}{4(N\ln N)^{l/s}} . \tag{1.26}$$

En effet, comme on a $K \geq (l/s)^2$, cela entraîne

$$K - \frac{l}{s}\ln\ln K \geq \frac{K}{2} ;$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
2\ln\frac{4A}{C} + 2uN^v + 2\frac{l}{s}\ln N &\leq 2\ln\frac{4A}{C} + 2u\left(1+\frac{l}{s}\right)N^v \\
&\leq 4u\left(1+\frac{l}{s}\right)\left(\ln\frac{4A}{C}\right)N^v \\
&\leq K_N .
\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout $K \geq K_N$,

$$K - \frac{l}{s} \ln \ln K \geq \frac{K}{2} \geq \ln \frac{4A}{C} + uN^v + \frac{l}{s} \ln N \,,$$

ce qui prouve (1.26).

Enfin, l'application du théorème 1.1 de Vitushkin à la famille polynomiale $\widetilde{P}_K(\cdot, \zeta)$ à N variables et de degré au plus K, nous dit qu'il existe $h \in \Lambda_{l,s}$ tel que, pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^N$,

$$\left\| h - \widetilde{P}_K(\cdot, \zeta) \right\| \geq \frac{C}{(N \ln K)^{l/s}} \,,$$

ce qui entraîne, pour tout $\zeta \in \Omega_N$ et $K \geq K_N$,

$$\|h - f(\cdot, \zeta)\| \;\; \geq \;\; \frac{3C}{4(N \ln K)^{l/s}} \,.$$

$\widetilde{K}$ étant le plus petit entier $\geq K_N$, il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\begin{aligned} \ln \widetilde{K} &\leq \ln(K_N + 1) \\ &\leq (d(r+1) + t + v) \ln N + \ln \left[4bue^{d+1} B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \left(\ln \frac{4A}{C}\right) \right] \end{aligned}$$

pour en conclure que, pour tout $\zeta \in \Omega_N$,

$$\left\| h - \widetilde{P}_K(\cdot, \zeta) \right\| \geq \frac{C''}{(N \ln N)^{l/s}} \,,$$

avec

$$C'' \;\; = \;\; \frac{3C}{4[d(r+1) + t + v]^{l/s} \left[\ln \left(4bue^{d+1} B^d \left(1 + \frac{l}{s}\right)^2 \left(\ln \frac{4A}{C}\right) \right) \right]^{l/s}} \,. \tag{1.27}$$

$\square$

On en déduit également le calcul des constantes C''_∞ et C''_{L^1} données dans le corollaire 1.22.

Ici aussi, on peut en outre imposer à la fonction h des restrictions analogues à celles du corollaire 1.27.

Corollaire 1.28. *f et Ω_N étant donnés, pour tous $N \geq 2$ et $K \geq K_N$, il existe $h_K \in \Lambda_l([0,1]) \cap C^l([0,1])$ qui vérifie, pour tout $\zeta \in \Omega_N$:*

$$\begin{cases} \dfrac{c(l)}{(N \ln K)^l} \leq |h_K(x_\zeta)| = \|h_K\|_\infty \leq \dfrac{2^l c(l)}{(N \ln K)^l}, \\ \\ h_K(x_\zeta)\, \widetilde{P}_K(x_\zeta, \zeta) \leq 0, \\ \\ \left\| \widetilde{R}_K(\cdot, \zeta) \right\|_\infty \leq \dfrac{c(l)}{2(N \ln K)^l}, \\ h_K(x) = 0,\ \forall\, x \in \left[0, \dfrac{1}{20}\right], \end{cases} \tag{1.28}$$

où x_ζ est bien choisi.

1.2.3 Généralisation aux familles de type Gelfand-Levitan

En vue d'appliquer les théorèmes 1.20 et 1.21 en problème inverse (chapitre 2), on a besoin d'établir des résultats analogues pour des familles analytiques plus générales. Dans cette section, on ne considérera que le cas continu sur le segment $[0,1]$ (i.e. avec $C([0,1])$ et $\Lambda_l([0,1])$).

On introduit alors la définition suivante :

Définition 1.29. On appelle *N-famille de type Gelfand-Levitan* toute famille de la forme

$$GL_{[0,1]}(\zeta) \quad = \quad \left\{ \gamma_N \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (\cdot, \zeta),\ \zeta \in \Omega_N \right\} \tag{1.29}$$

avec les conditions suivantes : γ_N est une constante strictement positive telle que γ_N et $1/\gamma_N$ sont polynomialement bornées par rapport à N ; ψ est de classe C^1 par rapport à $x \in [0,1]$; les fonctions ψ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ induisent des N-familles analytiques d'ordre fini continues ; enfin, Ω_N est un N-domaine des paramètres d'approximation et il existe B_0, α et β tels que, pour tout $\zeta \in \Omega_N$,

$$\frac{1}{|\psi(0, \zeta)|} \quad \leq \quad B_0 e^{\alpha N^\beta}. \tag{1.30}$$

De même, on appelle *(N, M)-famille généralisée de type Gelfand-Levitan* toute famille de la forme

$$GL_{g,[0,1]}(\zeta, w) \quad = \quad \left\{ \gamma_{N,M} \left(\chi + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) (\cdot, \zeta, w),\ (\zeta, w) \in \Omega_{N,M} \right\}, \tag{1.31}$$

avec des conditions analogues : $\gamma_{N,M}$ et $1/\gamma_{N,M}$ sont polynomialement bornées par rapport à $N+M$; ψ (resp. χ) est de classe C^2 (resp. continue) par rapport à $x \in [0,1]$; les fonctions ψ, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ et χ induisent des (N,M)-familles analytiques d'ordre fini continues ; en outre, la restriction de χ sur $[0,1]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+^M$ est de type polynomial par rapport à (ζ,w) ; enfin, pour tout $(\zeta,w)\in\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}_+^M$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(0,\zeta,w) = 0\,, \tag{1.32}$$

et il existe B_0, α et β tels que, pour tout $(\zeta,w)\in\Omega_{N,M}$,

$$\frac{1}{|\psi(0,\zeta,w)|} \leq B_0 e^{\alpha(N+M)^\beta}. \tag{1.33}$$

Le choix de telles définitions est motivé par l'expression des formules de reconstruction de type Gelfand-Levitan données en introduction (cf. formules (13) et (16)). Remarquons d'autre part qu'une N-famille de type Gelfand-Levitan peut ne pas donner une famille de fonctions continues, ni même définies, à cause du dénominateur qui peut s'annuler (de même pour une (N,M)-famille de type Gelfand-Levitan).

On peut maintenant établir les résultats suivants comme généralisations des théorèmes 1.20 et 1.21.

(N,M)-familles généralisées

Proposition 1.30. *Soit $GL_{g,[0,1]}(\zeta,w)$ une (N,M)-famille de type Gelfand-Levitan. Alors il existe $h\in\Lambda_l([0,1])$ tel que*

$$\inf_{(\zeta,w)\in\Omega_{N,M}} \left\|h - GL_{g,[0,1]}(\zeta,w)\right\|_\infty \;\geq\; \frac{c}{((N+M)\ln(N+M))^l}\,,$$

où c ne dépend pas de N, M.

En outre, $h\in\Lambda_l([0,1])\cap C^l([0,1])$ est identiquement nulle sur $\left[0,\frac{1}{20}\right]$.

Démonstration. D'abord, on peut supposer que, pour tout $(\zeta,w)\in\Omega_{N,M}$, $\psi(0,\zeta,w)>0$: en effet, la condition (1.33) montre que la fonction $\psi(0,\zeta,w)$ ne s'annule pas sur l'ensemble (connexe) $\Omega_{N,M}$, elle a donc un signe constant. On peut alors remplacer ψ par $-\psi$ et ça redonnera la même famille $GL_{g,[0,1]}(\zeta,w)$.

Posons maintenant

$$\widetilde{\chi}(x,\zeta,w) = \int_0^x dt \int_0^t \chi(s,\zeta,w)ds \tag{1.34}$$

et

$$\widetilde{\psi}(x,\zeta,w) = e^{\widetilde{\chi}(x,\zeta,w)}\psi(x,\zeta,w)\,. \tag{1.35}$$

$\widetilde{\psi}$ étant de classe C^2 par rapport à $x \in [0,1]$, on peut définir, pour tous $\zeta_{N+1} \in \mathbb{C}^{N+1}$,

$$f(x,\zeta_1,\dots,\zeta_N,\zeta_{N+1},w) = e^{\zeta_{N+1}}\left(\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial^2 x}\widetilde{\psi} - \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}\right)^2\right)(x,\zeta,w)\,. \tag{1.36}$$

On voit alors que l'on a

$$f(x,\zeta,\zeta_{N+1},w) \;=\; e^{2\widetilde{\chi}(x,\zeta,w)}g(x,\zeta,\zeta_{N+1},w)\,, \tag{1.37}$$

où g est une $(N+1,M)$-famille analytique d'ordre fini continue (remarquons en revanche que f n'est pas forcément d'ordre fini).

Par hypothèse, χ est de type polynomial par rapport à $(\zeta,w) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^M$, on a donc, pour tout $(\zeta,w) \in \Omega_{N,M}$,

$$\left\| e^{2\widetilde{\chi}(\cdot,\zeta,w)} \right\|_\infty \le e^{2\|\chi(\cdot,\zeta,w)\|_\infty} \le A e^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}.$$

D'autre part, la fonction $Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}g$ est encore une $(N+1,M)$-famille analytique d'ordre fini continue.

Choisissons maintenant un domaine $\Omega_{N+1,M}$ qui contient $\Omega_{N,M}$, i.e.

$$\Omega_{N+1,M} = \left\{(\zeta,\zeta_{N+1},w) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}_+^M,\ (\zeta,w) \in \Omega_{N,M},\ |\zeta_{N+1}| \le B'(N+M)^{r'}\right\}, \tag{1.38}$$

où B' et r' sont assez grands afin que le choix du dernier paramètre

$$\zeta_{N+1} \;=\; \ln\left(\frac{\gamma_{N,M}e^{1/\gamma_{N,M}}}{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)^2}\right) \tag{1.39}$$

soit possible dans $\Omega_{N+1,M}$, pour tout $(\zeta,w) \in \Omega_{N,M}$. De tels B' et r' existent (et ne dépendent pas de N, M) : en effet, ψ étant d'ordre fini (et $\widetilde{\chi}(0,\zeta,w) = 0$), on a, pour tout $(\zeta,w) \in \Omega_{N,M}$,

$$0 < \widetilde{\psi}(0,\zeta,w) = \psi(0,\zeta,w) \le B_0' e^{\alpha'(N+M)^{\beta'}}\ ;$$

il en est de même pour $1/\psi(0,\zeta,w)$ par hypothèse (condition (1.33) de la définition 1.29) ; enfin $\gamma_{N,M}$ et $1/\gamma_{N,M}$ sont polynomialement bornés en $N+M$.

On peut alors appliquer le théorème 1.20, et plus précisément le corollaire 1.27 à la $(N+1, M)$-famille g avec le domaine $\Omega_{N+1,M}$. Il existe $h \in \Lambda_l([0,1]) \cap C^l([0,1])$ qui vérifie la condition (1.24) : pour tout $(\zeta, \zeta_{N+1}, w) \in \Omega_{N+1,M}$, il existe $x = x_{\zeta,\zeta_{N+1},w}$, tel que

$$\begin{cases} \dfrac{c(l)}{((N+M+1)\ln(K+K^2))^l} \leq |h\,(x)\,| = \|h\|_\infty \leq \dfrac{2^l c(l)}{((N+M+1)\ln(K+K^2))^l}, \\ \\ h\,(x)\,\widetilde{P}_K\,(x,\zeta,\zeta_{N+1},w) \leq 0, \\ \left\|\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1},w)\right\|_\infty \leq \dfrac{c(l)}{2((N+M+1)\ln(K+K^2))^l}\,, \\ h(t) = 0,\ \forall\, t \in \left[0, \frac{1}{20}\right], \end{cases} \tag{1.40}$$

où $Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}g(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1},w) = \widetilde{P}_K(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1},w) + \widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1},w)$, et $K \geq K_{N+1,M}$, $K_{N+1,M}$ étant polynomialement borné en $N+M$. Du fait que $e^{2\widetilde{\chi}(x,\zeta,w)} > 0$, on obtient en particulier

$$\begin{cases} h\,(x)\,\dfrac{e^{2\widetilde{\chi}(x,\zeta,w)}}{Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}}\,\widetilde{P}_K\,(x,\zeta,\zeta_{N+1},w) \leq 0\,, \\ \\ \left\|\dfrac{e^{2\widetilde{k}(\cdot,\zeta,w)}}{Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}}\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1},w)\right\|_\infty \leq \dfrac{c(l)}{2((N+M+1)\ln(K+K^2))^l}\,, \end{cases}$$

ce qui prouve encore une propriété du type (1.24), mais avec la $(N+1, M)$-famille f qui n'est plus nécessairement d'ordre fini.

Par ailleurs, pour tout réel $\mu \in [0,1]$, on a encore

$$\begin{cases} \mu h\,(x)\,\dfrac{e^{2\widetilde{\chi}(x,\zeta,w)}}{Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}}\widetilde{P}_K\,(x,\zeta,\zeta_{N+1},w) \leq 0, \\ \\ \left\|\mu\dfrac{e^{2\widetilde{\chi}(\cdot,\zeta,w)}}{Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}}\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1},w)\right\|_\infty \leq \dfrac{c(l)}{2((N+M+1)\ln(K+K^2))^l}\,. \end{cases}$$

On en déduit, avec la première ligne de (1.40),

$$\begin{aligned} |h(x) - \mu f(x,\zeta,\zeta_{N+1},w)|_\infty &= \left|h(x) - \frac{\mu e^{2\widetilde{\chi}(x,\zeta,w)}}{Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}}\ Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}g(x,\zeta,\zeta_{N+1},w)\right|_\infty \\ &\geq \left|h(x) - \mu\frac{e^{2\widetilde{\chi}(x,\zeta,w)}}{Ae^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}}\ \widetilde{P}_K(x,\zeta,\zeta_{N+1},w)\right| \\ &\quad - \left\|\frac{e^{2\widetilde{\chi}(\cdot,\zeta,w)}}{\widetilde{A}e^{\widetilde{\alpha}(N+M)^{\widetilde{\beta}}}}\ \widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1},w)\right\|_\infty \\ &\geq \frac{c(l)}{2((N+M+1)\ln(K+K^2))^l}\,. \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $(\zeta, \zeta_{N+1}, w) \in \Omega_{N+1,M}$, ça l'est en particulier avec le choix (1.39) du dernier paramètre (possible dans $\Omega_{N+1,M}$), ce qui donne, pour tout $\mu \in [0,1]$,

$$\left| h(x) - \mu\gamma_{N,M} e^{1/\gamma_{N,M}} \frac{\dfrac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial^2 x}(x,\zeta,w)\,\widetilde{\psi}(x,\zeta,w) - \left(\dfrac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}\right)^2(x,\zeta,w)}{\left(\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)\right)^2} \right| \geq$$

$$\geq \frac{c(l)}{2((N+M+1)\ln(K+K^2))^l}\,. \tag{1.41}$$

Supposons alors que

$$e^{-1/\gamma_{N,M}} \left(\frac{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(x,\zeta,w)}\right)^2 \leq 1.$$

Alors on peut choisir

$$\mu = e^{-1/\gamma_{N,M}} \left(\frac{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(x,\zeta,w)}\right)^2$$

dans l'inégalité (1.41) pour obtenir

$$\begin{aligned} \left| h(x) - \gamma_{N,M} \frac{\dfrac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial^2 x}(x,\zeta,w)\,\widetilde{\psi}(x,\zeta,w) - \left(\dfrac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial x}\right)^2(x,\zeta,w)}{\left(\widetilde{\psi}(x,\zeta,w)\right)^2} \right| &\geq \frac{c(l)}{2((N+M+1)\ln(K+K^2))^l} \\ &\geq \frac{c}{((N+M)\ln(N+M))^l}\,, \end{aligned} \tag{1.42}$$

la dernière inégalité venant du fait qu'on peut choisir K polynomialement borné en $N+M$ (par exemple en prenant le plus petit entier $\geq K_{N,M}$, cf. (1.16)).

Dans l'autre cas, on a

$$\left|\frac{\widetilde{\psi}(x,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)}\right| < e^{-\dfrac{1}{2\gamma_{N,M}}}\,. \tag{1.43}$$

On peut supposer que la fonction $t \mapsto \widetilde{\psi}(t,\zeta,w)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[0,x]$; dans le cas contraire, soit x_0 le premier zéro, il suffit de choisir $x' < x_0$, x' assez proche de x_0 pour avoir

$$0 < \frac{\widetilde{\psi}(x',\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)} < e^{-\dfrac{1}{2\gamma_{N,M}}}.$$

Ainsi, la fonction

$$t \in [0,x] \mapsto \ln \frac{\widetilde{\psi}(t,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)}\,,$$

est bien définie et de classe C^2, et l'hypothèse (1.43) nous donne

$$\ln \frac{\widetilde{\psi}(x,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)} < -\frac{1}{2\gamma_{N,M}}\,.$$

Par le théorème des accroissements finis, il existe $x_1 \in]0,x[$ tel que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t}(x_1,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(x_1,\zeta,w)}\right| &= \left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\widetilde{\psi}(t,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)}\right)(x_1)\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\ln\frac{\widetilde{\psi}(x,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)}\right| \\
&> \frac{1}{2\gamma_{N,M}}\,.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, par la condition (1.32) et du fait que, par construction, $\frac{\partial\widetilde{\chi}}{\partial t}(0,\zeta,w) = 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{\widetilde{\chi}(t,\zeta,w)}\psi(t,\zeta,w)\right)(0) = 0\,.$$

En appliquant à nouveau le théorème des accroissements finis, il existe $x_2 \in]0,x_1[$, tel que

$$\left|\frac{\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial^2 t}(x_2,\zeta,w)\widetilde{\psi}(x_2,\zeta,w) - \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t}\right)^2(x_2,\zeta,w)}{\left(\widetilde{\psi}(x_2,\zeta,w)\right)^2}\right| > \frac{1}{2\gamma_{N,M}}\,.$$

De plus, d'après la première ligne de (1.40), on a $\|h\|_\infty \leq 1/4$, ce qui donne

$$\left|h(x_2) - \gamma_{N,M}\frac{\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial^2 t}(x_2,\zeta,w)\widetilde{\psi}(x_2,\zeta,w) - \left(\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t}\right)^2(x_2,\zeta,w)}{\left(\widetilde{\psi}(x_2,\zeta,w)\right)^2}\right| \geq \frac{1}{2} - \|h\|_\infty \geq \frac{1}{4}\,.$$

Quitte à réduire c, on a encore

$$\left| h(x_2) - \gamma_{N,M} \frac{\dfrac{\partial^2 \widetilde{\psi}}{\partial^2 t}(x_2,\zeta,w)\,\widetilde{\psi}(x_2,\zeta,w) - \left(\dfrac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial t}\right)^2 (x_2,\zeta,w)}{\left(\widetilde{\psi}(x_2,\zeta,w)\right)^2} \right| \;\geq\; \frac{c}{((N+M)\ln(N+M))^l}\,,$$

ce qui prouve à nouveau une minoration du type (1.42), mais dans le second cas.

Ainsi, l'arbitraire sur $(\zeta,w) \in \Omega_{N,M}$ et le fait que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{\widetilde{\psi}(x,\zeta,w)}{\widetilde{\psi}(0,\zeta,w)} = \chi(x,\zeta,w) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \frac{\psi(x,\zeta,w)}{\psi(0,\zeta,w)}\,,$$

nous permettent de conclure que, pour tout $(\zeta,w) \in \Omega_{N,M}$,

$$\left\| h - \gamma_{N,M} \left(\chi(\cdot,\zeta,w) + \frac{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x}(\cdot,\zeta,w)\psi(\cdot,\zeta,w) - \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 (\cdot,\zeta,w)}{(\psi(\cdot,\zeta,w))^2} \right) \right\|_\infty \geq \frac{c}{((N+M)\ln(N+M))^l}\,.$$

En outre, $h \in \Lambda_l([0,1]) \cap C^l([0,1])$ et identiquement nulle sur $\left[0,\frac{1}{20}\right]$, ce qui achève la preuve.

$\square$

N-familles

On montre de la même manière le résultat analogue suivant :

Proposition 1.31. *Soit $GL_{[0,1]}(\zeta)$ une N-famille de type Gelfand-Levitan. Alors il existe $h \in \Lambda_l([0,1])$ tel que*

$$\inf_{\zeta \in \Omega_N} \left\| \int_0^{\cdot} h(t)dt - GL_{[0,1]}(\zeta) \right\|_\infty \;\geq\; \frac{c'}{(N \ln N)^{l+1}}\,,$$

où c' ne dépend pas de N.

Ici aussi, on peut supposer $h \in \Lambda_l([0,1]) \cap C^l([0,1])$ et identiquement nulle sur $\left[0,\frac{1}{20}\right]$.

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la proposition précédente. Ici aussi, on peut supposer que, pour tout $\zeta \in \Omega_N$, $\psi(0,\zeta) > 0$.

On pose ensuite

$$f(x,\zeta,\zeta_{N+1}) = e^{\zeta_{N+1}}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\zeta)\,.$$

Alors f est une N-famille analytique d'ordre fini continue.

On considère d'autre part un domaine Ω_{N+1} de la forme

$$\Omega_{N+1} \;=\; \left\{(\zeta,\zeta_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+1},\ \zeta \in \Omega_N,\ |\zeta_{N+1}| \le B'N^{r'}\right\}\,,$$

où B' et r' sont assez grands afin que, pour tout $\zeta \in \Omega_N$, l'évaluation

$$\zeta_{N+1} \;=\; \ln\frac{\gamma_N e^{1/\gamma_N}}{\psi(0,\zeta)} \tag{1.44}$$

soit possible.

En appliquant de même le corollaire 1.28 du théorème 1.21 à f et Ω_{N+1}, il existe $h_1 \in \Lambda_{l+1}([0,1]) \cap C^{l+1}([0,1])$ qui vérifie : pour tout $(\zeta,\zeta_{N+1}) \in \Omega_{N+1}$, il existe $x \in [0,1]$, tel que

$$\begin{cases} \dfrac{c(l+1)}{((N+1)\ln K)^{l+1}} \le |h_1(x)| = \|h_1\|_\infty \le \dfrac{2^{l+1}c(l+1)}{((N+1)\ln K)^{l+1}}, \\[2ex] h_1(x)\widetilde{P}_K(x,\zeta,\zeta_{N+1}) \le 0, \\[2ex] \left\|\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1})\right\|_\infty \le \dfrac{c(l+1)}{2((N+1)\ln K)^{l+1}}\,, \\ h_1(t) = 0,\ \forall\, t \in \left[0,\dfrac{1}{20}\right]. \end{cases}$$

Prenons de même $\mu \in [0,1]$, il vient

$$\begin{aligned} |h_1(x) - \mu f(x,\zeta,\zeta_{N+1})| \;&\ge\; \left|h_1(x) - \mu\widetilde{P}_K(x,\zeta,\zeta_{N+1})\right| - \mu\left\|\widetilde{R}_K(\cdot,\zeta,\zeta_{N+1})\right\|_\infty \\ &\ge\; \frac{c(l+1)}{2((N+1)\ln K)^{l+1}}\,. \end{aligned}$$

En particulier, le choix (1.44) donne

$$\left|h_1(x) - \mu\frac{\gamma_N e^{1/\gamma_N}}{\psi(0,\zeta)}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\zeta)\right| \;\ge\; \frac{c(l+1)}{2((N+1)\ln K)^{l+1}}\,.$$

De deux choses l'une : ou bien

$$e^{1/\gamma_N}\frac{\psi(x,\zeta)}{\psi(0,\zeta)} \geq 1\,,$$

dans ce cas le choix, $\mu = \dfrac{\psi(0,\zeta)}{e^{1/\gamma_N}\psi(x,\zeta)}$ est possible pour donner

$$\left| h_1(x) - \gamma_N \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,\zeta)}{\psi(x,\zeta)} \right| \quad \geq \quad \frac{c(l+1)}{2((N+1)\ln K)^{l+1}} \geq \frac{c'}{(N\ln N)^{l+1}}\,.$$

Sinon, on a

$$\ln\frac{\psi(x,\zeta)}{\psi(0,\zeta)} < -\frac{1}{\gamma_N}\,,$$

où la fonction définie par $t \in [0,x] \mapsto \ln\dfrac{\psi(t,\zeta)}{\psi(0,\zeta)}$, est de classe C^1 (quitte à rapprocher x de 0). L'application du théorème des accroissements finis nous donne alors $x_1 \in]0,1[$, tel que

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\psi(t,\zeta)}{\psi(0,\zeta)}\right)(x_1,\zeta) \right| = \left| \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t}(x_1,\zeta)}{\psi(x_1,\zeta)} \right| > \frac{1}{\gamma_N}\,,$$

soit, puisque $\|h_1\|_\infty \leq 1/2$,

$$\left| h_1(x_1) - \gamma_N \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x_1,\zeta)}{\psi(x_1,\zeta)} \right| \quad \geq \quad \frac{1}{2} \geq \frac{c'}{(N\ln N)^{l+1}}\,.$$

L'arbitraire sur $\zeta \in \Omega_N$ conduit finalement à

$$\left\| h_1 - \gamma_N \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(\cdot,\zeta)}{\psi(\cdot,\zeta)} \right\|_\infty \quad \geq \quad \frac{c'}{(N\ln N)^{l+1}}\,.$$

Il ne reste plus qu'à poser $h = h_1' \in \Lambda_l([0,1]) \cap C^l([0,1])$: on a $h_1(t) = \int_0^t h(s)ds$ et h est identiquement nulle sur $\left[0,\frac{1}{20}\right]$.

$\square$

On introduit la définition suivante :

Définition 1.32. Pour tout $l > 1$, $\Lambda_l^+([0,1])$ désignera l'ensemble des fonctions de $\Lambda_l([0,1]) \cap C^l([0,1])$ qui sont strictement positives, strictement décroissantes sur $[0,1]$ et qui vérifient

$$h^{(j)}(0) = 0, \, \forall\, j = 1, \ldots, [l].$$

Cette définition est motivée par le corollaire suivant qui nous sera utile dans le prochain chapitre.

Corollaire 1.33. *Pour tout $p > 0$, les propositions 1.30 et 1.31 sont encore vraies avec $p\Lambda_l^+([0,1])$.*

Démonstration. Commençons d'abord par remarquer le fait suivant : pour toute fonction $h \in \Lambda_l([0,1])$, identiquement nulle sur $\left[0, \frac{1}{20}\right]$, posons

$$\widetilde{h}(x) \;=\; h(x) + 2b_2 - b_1([l]+3)([l]+2)x^{[l]+1}\,, \tag{1.45}$$

avec b_1, $b_2 > 0$ à déterminer. Alors, puisque $\|h'\|_\infty \leq 1$, on a pour tout $x \in \left[\frac{1}{20}, 1\right]$,

$$\begin{aligned} \widetilde{h}'(x) &= h'(x) - b_1([l]+3)([l]+2)([l]+1)x^{[l]} \\ &\leq -b_1([l]+3)([l]+2)([l]+1)\frac{1}{20^{[l]}} + 1 \\ &\leq -1\,, \end{aligned}$$

en choisissant

$$b_1 \;=\; 2\frac{20^{[l]}}{([l]+3)([l]+2)([l]+1)}\,. \tag{1.46}$$

$\widetilde{h}$ est donc strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{20}, 1\right]$, ainsi que sur $\left[0, \frac{1}{20}\right]$ où $h \equiv 0$. b_1 ainsi choisi et $\|h\|_\infty \leq 1$, on fixe

$$b_2 \;=\; \frac{20^{[l]}}{[l]+1} + 1 \tag{1.47}$$

pour avoir $\widetilde{h}(x) \geq 1$, $\forall\, x \in [0,1]$. De plus, $\widetilde{h}$ a toutes ses dérivées qui s'annulent en 0 par construction.

Enfin si on pose

$$b_3 \;=\; b_1([l]+3)([l]+2) + 2b_2 + 1\,, \tag{1.48}$$

alors $\widetilde{h}/b_3 \in \Lambda_l([0,1])$.

On peut maintenant prouver le corollaire : fixons $p > 0$ et considérons le cas d'une (N, M)-famille généralisée de type Gelfand-Levitan, soit

$$GL_{g,[0,1]}(\zeta, w) \;=\; \left\{ \gamma_{N,M} \left(\chi + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) (\cdot, \zeta, w),\ (\zeta, w) \in \Omega_{N,M} \right\},$$

et posons

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma}_{N,M} = \frac{b_3 \gamma_{N,M}}{p}, \\ \widetilde{\psi}(x, \zeta, w) = e^{\left(b_1 x^{[l]+3} - b_2 x^2\right)/\widetilde{\gamma}_{N,M}}\, \psi(x, \zeta, w), \end{cases}$$

où b_1, b_2 et b_3 sont définis précédemment. Par hypothèse sur $\gamma_{N,M}$, la (N, M)-famille associée à $\widetilde{\gamma}_{N,M}$, χ, $\widetilde{\psi}$ et $\Omega_{N,M}$ est encore de type Gelfand-Levitan. De plus,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \left| \frac{\widetilde{\psi}(x, \zeta, w)}{\widetilde{\psi}(0, \zeta, w)} \right| \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \left| \frac{\psi(x, \zeta, w)}{\psi(0, \zeta, w)} \right| \right) + \frac{1}{\widetilde{\gamma}_{N,M}} \left(b_1([l] + 3)([l] + 2) x^{[l]+1} - 2b_2 \right) .$$

D'après la proposition 1.30, il existe $h \in \Lambda_l([0, 1]) \cap C^l([0, 1])$, identiquement nulle sur $\left[0, \frac{1}{20}\right]$, telle que, pour tout $(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}$,

$$\left\| h - \widetilde{\gamma}_{N,M} \left(\chi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left| \frac{\widetilde{\psi}}{\widetilde{\psi}(0, \zeta, w)} \right| \right) (\cdot, \zeta, w) \right\|_\infty =$$

$$= \left\| \widetilde{h} - \frac{b_3 \gamma_{N,M}}{p} \left(\chi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left| \frac{\psi}{\psi(0, \zeta, w)} \right| \right) (\cdot, \zeta, w) \right\|_\infty \geq \frac{c}{(N \ln N)^l} ,$$

où $\widetilde{h}$ est définie par (1.45). Il vient, pour tout $(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}$,

$$\left\| \frac{p}{b_3} \widetilde{h} - \gamma_{N,M} \left(\chi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left| \frac{\psi}{\psi(0, \zeta, w)} \right| \right) (\cdot, \zeta, w) \right\|_\infty \;\geq\; \frac{pc/b_3}{(N \ln N)^l} ,$$

ce qui prouve la proposition 1.30 mais avec le sous-ensemble $p\Lambda_l^+([0, 1])$.

La preuve pour le cas d'une N-famille de type Gelfand-levitan est similaire avec le même choix de $\dfrac{p}{b_3}\widetilde{h}$.

□

Remarque 1.34. On constate que, bien que $\widetilde{h}$ dépende de N et M, on a, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$p\, q_l \;\leq\; \frac{p}{b_3}\, \widetilde{h}(x) \;\leq\; p\,, \tag{1.49}$$

où q_l ne dépend que de l (d'après (1.46), (1.47) et (1.48)). Cette remarque nous sera utile dans le prochain chapitre.

Par ailleurs, vu la preuve du corollaire 1.33, on peut de même prouver que les résultats précédents sont encore vrais avec le sous-ensemble $p\Lambda_l^-([0,1]) := -p\Lambda_l^+([0,1])$. Cela permet d'une part de les étendre à des familles de type Gelfand-Levitan où, cette fois, γ_N (ou $\gamma_{N,M}$) est de signe quelconque.

D'autre part, comme pour le cas du corollaire 1.13, cela prouve que ces sous-ensembles compacts ont même entropie que $\Lambda_l([0,1])$. En effet, la première partie de la preuve du corollaire 1.33 consiste à translater $\Lambda_l([0,1])$ d'un élément (ne dépendant pas de N ou M), puis d'en prendre un homothétique qui le ramène dans $\Lambda_l([0,1])$. L'entropie (du moins son ordre) est ainsi conservée par ces opérations élémentaires.

Chapitre 2

Applications in inverse problems

2.1 Introduction

In this chapter we will give some applications of those negative results in Sturm-Liouville inverse theory. We have the following equation on the half-axis $\mathbb{R}^+$

$$-\frac{d^2y}{dx^2} - \omega^2 Q y = \lambda y\,,$$

where Q is strictly positive with $m+1$ integrable derivatives, and ω is a large enough parameter.

We define the Weyl function for $\Im k > 0$ as

$$j(k) = \frac{\phi'(0,k)}{\phi(0,k)},$$

with ϕ a L^2-integrable solution (and $k^2 = \lambda$). It is a meromorphic function on the half-plane whose poles are exactly the $i\xi_j$ and whose residues are (modulo multiplication by $2i\xi_j$) the characteristic constants C_j. Then if we consider $\sigma_+(d\tau)$ a measure defined on $\mathbb{R}^+$ such that

$$\lim_{\Im k \to 0, (\Re k)^2 = \tau} \Im j(k)\, dk^2 = \pi \sigma_+(d\tau),$$

we can determine the spectral measure $\sigma(d\tau)$ of $-\omega^2 Q$:

$$\sigma(d\tau) = \begin{cases} \sigma_+(d\tau),\ \tau \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{N(\omega)} C_j \delta\left(\tau + \xi_j^2\right),\ \tau < 0 \end{cases}$$

(δ is the Dirac measure).

In the case of zero potential the spectral measure becomes

$$\sigma_0(d\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau} d\tau,\ \tau \geq 0 \\ 0,\ \tau < 0. \end{cases}$$

From the classical Gelfand-Levitan formula (see [6], [17]), we have

$$\int_0^x Q(y)dy = -\frac{2}{\omega^2}A(x,x),$$

where $A(x,y)$ is a solution of the following integral equation

$$A(x,y) + \int_0^x A(x,s)\Phi(s,y)ds + A(x,y) = 0 \tag{2.1}$$

with kernel $\Phi(x,y)$ of the form

$$\Phi(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\frac{\sin(y\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}(\sigma(d\tau) - \sigma_0(d\tau)).$$

It follows that Q can be theoretically reconstructed if we completely know the spectral measure $\sigma(d\tau)$.

If the spectral measure has the following form

$$\sigma_\omega^0(d\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau}d\tau, \ \tau \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{N(\omega)} C_j\delta\left(\tau + \xi_j^2\right), \ \tau < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

the associated potential can be explicitly reconstructed to get the first formula Q_ω^0 that is given as (13) in the introduction (see [9], [33]) :

$$Q_\omega^0(x) \quad = \quad \frac{2}{\omega^2}\frac{d^2}{dx^2}\ln|\det W_{j,k}(x)|, \tag{2.3}$$

where, for all $j,\ k = 1,\dots,N(\omega)$,

$$W_{j,k}(x) \quad = \quad \frac{2\sinh(\xi_j+\xi_k)x}{\xi_j+\xi_k} - (1-\delta_{j,k})\frac{2\sinh(\xi_j-\xi_k)x}{\xi_j-\xi_k} - \delta_{j,k}\left(2x - \frac{4\xi_j^2}{C_j}\right).$$

More generally, we can give an explicit spectral measure $\sigma_\omega(d\tau)$ constructed with ξ_j, C_j and $Q^{(j)}(0)$, $j = 0,\dots,m$. When we assume, for simplicity, that $Q^{(j)}(0) = 0$, for all $j = 1,\dots,m$, the spectral measure becomes

$$\sigma_\omega(d\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{\tau + \omega^2 Q(0)}d\tau, \ \tau \geq 0 \\ \sum_{j=1}^{N(\omega)} C_j\delta\left(\tau + \xi_j^2\right), \ \tau < 0\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

and this gives the other formula (16) in the introduction :

$$Q_\omega(x) = \frac{2}{\omega^2}\left(-\frac{d}{dx}A_\omega(x,x) + \frac{d^2}{dx^2}\ln|\det T_{\omega,j,k}(x)|\right), \tag{2.5}$$

where $A_\omega(x,y)$ is a solution of the integral equation (2.1) with

$$\Phi_\omega(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(x\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\frac{\sin(y\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\left(\sqrt{\tau+\omega^2 Q(0)}-\sqrt{\tau}\right)d\tau\,, \tag{2.6}$$

and for all $j,k = 1,\ldots,N(\omega)$

$$\begin{aligned} T_{\omega,j,k}(x) &= \frac{4\xi_j^2}{C_j}\delta_{j,k} \\ &+ 4\int_0^x \left(\sinh(\xi_j t)+\int_0^t A_\omega(t,s)\sinh(\xi_j s)ds\right)\left(\sinh(\xi_k t)+\int_0^t A_\omega(t,s)\sinh(\xi_k s)ds\right)dt\,. \end{aligned}$$

Now we recall the results of G. Henkin and N. Novikova that have been given in the introduction. The first is Theorem 2 from [9] : if Q is strictly positive with two integrable derivatives on $\mathbb{R}^+$, we have, uniformly on any $[0,X]$,

$$\left|\int_0^x Q(t)dt - \int_0^x Q_\omega^0(t)dt\right| \le \Gamma(Q)\frac{\ln\omega}{\sqrt{\omega}} \tag{2.7}$$

In addition we think that the precision should be better than $\ln\omega/\sqrt{\omega}$.

The second result is Theorem 1 from [9] : if Q is strictly positive, has $m+1$ integrable derivatives and satisfies $Q^{(j)}(0)=0$, $j=1,\ldots,m$ then we have, uniformly on any $[0,X]$,

$$|Q(x)-Q_\omega(x)| \le \Gamma'(Q)\frac{1}{\omega^m}. \tag{2.8}$$

Similarly, the precision could be better than $1/\omega^m$.

In addition, as G. Henkin noted, one can see from the proof of these results that $\Gamma'(Q) = \Gamma'\left(\|Q\|_{W^{m+1,1}(\mathbb{R}^+)}\right)$, where $W^{m+1,1}(\mathbb{R}^+)$ is the space of functions in $L^1(\mathbb{R}^+)$ with $m+1$ integrable derivatives (similarly, $\Gamma(Q) = \Gamma\left(\|Q\|_{W^{2,1}(\mathbb{R}^+)}\right)$).

Now we recall the definition of $\mathcal{K}_{m,p}$ given in the introduction.

Definition. For $m \ge 1$ and $p > 0$, we set

$$\mathcal{K}_{m,p} = \{Q \in L^1(\mathbb{R}^+),\, Q > 0 \text{ and } \forall\, j,\, 0 \le j \le m,\, \|Q^{(j)}\|_{L^1} \le p\}.$$

This allows us to give the first result of this chapter that has been given in the introduction and that gives an answer for the improvement of the precision of approximation from (2.7) and (2.8).

Theorem 2.1. For all large enough ω and for any $[0, X]$, we have

$$\sup_{Q \in \mathcal{K}_{2,p}} \sup_{x \in [0,X]} \left| \int_0^x Q(t)dt - \int_0^x Q_\omega^0(t)dt \right| \geq \frac{c_{2,p}}{(\omega \ln \omega)^3}. \tag{2.9}$$

Similarly, for all large enough ω and for any $[0, X]$,

$$\sup_{Q \in \mathcal{K}_{m+1,p}} \sup_{x \in [0,X]} |Q(x) - Q_\omega(x)| \geq \frac{c_{m+1,p}}{(\omega \ln \omega)^{m+1}}. \tag{2.10}$$

This statement is a consequence of several results : first, Theorem 2.3 below ; next, Proposition 2.1 below, whose proof uses the following theorem that has been given in the introduction and that is an estimation of the eigenvalues and characteristic constants of a Sturm-Liouville operator (it will bee proved in Section 2.2).

Theorem 2.2. Let $Q \in C^1(\mathbb{R}^+)$ be strictly positive, strictly decreasing with polynomial behavior at infinity, and such that $Q'(0) = 0$. Then for all ω and all $j = 1, \ldots, N(\omega)$, one has

$$\frac{1}{\alpha_1 \omega^{\beta_1}} \leq \xi_j(\omega^2 Q) \leq \alpha_1 \omega \text{ and } \frac{1}{\alpha_2 \exp(\beta_2 \omega^2)} \leq \frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)} \leq \alpha_2 \exp\left(\beta_2 \omega^{\beta_3}\right).$$

On the other hand, where Q is strictly positive and decreasing, we have the bounds of Calogero that have been given in the introduction as (21) (see [3], as well as [1] and [2]) :

$$\frac{\omega}{\pi\sqrt{Q(0)}} \int_0^\infty Q(x)dx - \frac{1}{2} \leq N(\omega) \leq \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{Q(x)}dx\,. \tag{2.11}$$

We also have the asymptotic formula of $N(\omega)$ of Weyl type (see [26]) given as (22) :

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{N(\omega)}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{Q(x)}dx\,. \tag{2.12}$$

Now Theorem 2.1 leads to other questions : would there exist another formula of the same kind giving a better approximation ? And could the precision be made better with data other than $\xi_j(\omega^2 Q)$ and $C_j(\omega^2 Q)$?

It has been conjectured in [9], p. 22, that any (analytic) formula with ω parameters could not uniformly approach all functions with $m+1$ bounded derivatives better than of order $1/\omega^{m+1}$ (we know that this is true for a polynomial family, as well as an analytic family of finite order). As it has been noted in the introduction, the analytic dependence of formulas (2.3) and (2.5) on the $2N(\omega)$ parameters $\xi_j(\omega^2 Q)$ and $C_j(\omega^2 Q)$, makes us set the following definition.

Definition 2.1. An *N-family $GL(\zeta)$ of potentials of finite order* is a functional family of the following form

$$GL(\zeta) = \left\{ \gamma_N \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) (x, \zeta_1, \ldots, \zeta_N),\ \zeta \in \Omega_N \right\} \tag{2.13}$$

with the following conditions : γ_N is a positive constant polynomially bounded on N as well as $1/\gamma_N$; ψ is of class C^1 with respect to x and is such that ψ and $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ are entire of finite order with respect to $\zeta \in \mathbb{C}^N$, i.e. for any $[0, X]$,

$$\|\psi(\cdot, \zeta_1, \ldots, \zeta_N)\|_{L^\infty([0,X])} \quad \leq \quad A \exp\left(uN^v\right) \exp\left(b\|\zeta\|_1^d\right) \tag{2.14}$$

(as well as $\frac{\partial \psi}{\partial x}$) ; Ω_N is an N-domain of parameters of approximation (see Chapter 1, Definition 1.19) :

$$\Omega_N \quad = \quad \left\{\zeta \in \mathbb{R}^N,\ \forall j = 1, \ldots, N,\ |\zeta_j| \leq BN^r\right\} \ ;$$

lastly, we assume that, for all $\zeta \in \Omega_N$,

$$\frac{1}{|\psi(0, \zeta)|} \leq B_0 \exp\left(\alpha N^\beta\right).$$

Similarly, *an (N, M)-generalized family $GL_g(\zeta, w)$ of potentials of finite order* is defined as

$$GL_g(\zeta, w) = \left\{ \gamma_{N,M} \left(\chi + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) (x, \zeta, w),\ (\zeta, w) \in \Omega_{N,M} \right\}, \tag{2.15}$$

with analogous conditions : $\gamma_{N,M}$ and $1/\gamma_{N,M}$ are polynomially bounded on $N + M$; ψ (resp. χ) is of class C^2 (resp. continuous) with respect to x and ψ (resp. χ), as well as $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ and $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, is holomorphic of finite order with respect to $(\zeta, w) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$; moreover, the restriction of χ on $\mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^+)^M$ is of polynomial type with respect to (ζ, w) ; lastly, we assume that, for all $(\zeta, w) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+^M$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, \zeta, w) = 0$$

and, for all $(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}$,

$$\frac{1}{|\psi(0, \zeta, w)|} \leq B_0 \exp\left(\alpha (N + M)^\beta\right).$$

This definition is similar to the one of families of Gelfand-Levitan type (see Chapter 1, Definition 1.29). In particular, the restriction to $[0, 1]$ of an N-family $GL(\zeta)$ (resp. (N, M)-generalized family $GL_g(\zeta, w)$) of finite order gives an N-family (resp. (N, M)-generalized family) of Gelfand-Levitan type.

Such a definition is motivated by the fact that formula (2.3) (resp. (2.5)) comes from an $2N(\omega)$-family (resp. $(2N(\omega), 1)$-generalized family) of potentials of finite order. Before proving this assertion, we need to consider more special subsets of potentials.

Definition 2.2. The set $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$ will mean the subset of all functions $Q \in \mathcal{K}_{m,p}$ satisfying the following conditions : Q is strictly decreasing, $Q'(0) = 0$ and there is $k \geq 4$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{q}\frac{1}{1+x^k} \leq Q(x) \leq \frac{q}{1+x^k}. \tag{2.16}$$

The motivation of this definition comes from the fact that, if $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, the coefficients α_j and β_j appearing in Theorem 2.2, as well as the coefficients in the bounds of $N(\omega)/\omega$ in (2.11), will only depend on $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$ (see Corollary 2.2). This will be useful for the proof (see Section 2.4) of the following proposition. In particular, the second part uses the existence of the solution $\widetilde{A}$ of the integral equation (2.1), for all $w \in \mathbb{C}_+$, associated to $\widetilde{\Phi}$, the holomorphic extension of Φ_ω to $\mathbb{C}_+$ (see Proposition 2.5).

Proposition 2.1. *Let us fix $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, with $m \geq 2$.*

Consider the $2N$-family $GL(\zeta)$ of potentials of exponential type associated to the following function

$$\Psi(x,\zeta) := \det \widetilde{W}_{j,k}(x,\zeta), \tag{2.17}$$

where

$$\widetilde{W}_{j,k}(x,\zeta) \quad = \quad \frac{2\sinh(\zeta_j+\zeta_k)x}{\zeta_j+\zeta_k} - (1-\delta_{j,k})\frac{2\sinh(\zeta_j-\zeta_k)x}{\zeta_j-\zeta_k} - \delta_{j,k}\left(2x - \exp\left(\zeta_{j+N}\right)\right),$$

$j,k = 1,\ldots,N$. Then, for all large enough ω and all $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, the approximating formula Q^0_ω in (2.3) is obtained by taking $N = N(\omega)$, $\gamma_{2N(\omega)} = 2/\omega^2$ and

$$\zeta_j(\omega^2 Q) = \xi_j(\omega^2 Q)\,,\quad \zeta_{j+N(\omega)}(\omega^2 Q) = \ln\frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)},\ j = 1,\ldots,N(\omega). \tag{2.18}$$

In addition, this choice is possible in some domain $\Omega_{2N(\omega)}$, whose coefficients B and r (see Definition 2.1) only depend on $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$.

Similarly, consider the following functions defined on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+$ as

$$\widetilde{\chi}(x,\zeta,w) := -\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{A}(x,x,w) \quad \text{and} \quad \widetilde{\Psi}(x,\zeta,w) := \det \widetilde{T}_{j,k}(x,\zeta,w), \tag{2.19}$$

where, for $j,\ k = 1,\ldots,N$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_{j,k}(x,\zeta,w) \quad &= \quad \exp\left(\zeta_{N+j}\right)\delta_{j,k} \\
&+ \quad 4\int_0^x \left(\sinh(\zeta_j t) + \int_0^t \widetilde{A}(t,s,w)\sinh(\zeta_j s)ds\right) \\
&\quad \times \left(\sinh(\zeta_k t) + \int_0^t \widetilde{A}(t,s,w)\sinh(\zeta_k s)ds\right) dt.
\end{aligned}$$

Then the associated family $GL_g(\zeta, w)$ is a $(2N, 1)$-generalized family of exponential type. Moreover, for all large enough ω and all $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, the approximating formula Q_ω in (2.5) is obtained by taking $N = N(\omega)$, $\gamma_{2N(\omega),1} = 2/\omega^2$ and the following choice, which is possible in some $\Omega_{2N(\omega),1}$:

$$\begin{gathered} w(\omega^2 Q) = \omega^2 Q(0), \\ \zeta_j(\omega^2 Q) = \xi_j(\omega^2 Q),\ \zeta_{j+N(\omega)}(\omega^2 Q) = \ln \frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)}, j = 1, \ldots, N(\omega). \end{gathered} \tag{2.20}$$

It follows that formula (2.3) (resp. (2.5)) can be seen as a family $GL(\zeta)$ (resp. $GL_g(\zeta, w)$) with the particular choice of parameters (2.18) (resp. (2.20)). In order to deal with their optimality, we need to define, as in the previous chapter, the approximation of any functional subset by such a family.

Definition 2.3. Consider $GL(\zeta)$ (resp. $GL_g(\zeta, w)$) an N-family (resp. (N, M)-generalized family) of potentials of finite order, and F a functional subset of $L^1(\mathbb{R}^+)$. Then the approximation of F by the family $GL(\zeta)$ (resp. $GL_g(\zeta, w)$), uniformly on any $[0, X]$, is defined as

$$D(F, GL)_{L^\infty([0,X])} = \sup_{f \in F} \inf_{\zeta \in \Omega_N} \left\| \int_0^{\cdot} f(t)dt - GL(\zeta) \right\|_{L^\infty([0,X])}$$

(resp.

$$D(F, GL_g)_{L^\infty([0,X])} = \sup_{f \in F} \inf_{(\zeta, w) \in \Omega_{N,M}} \|f - GL_g(\zeta, w)\|_{L^\infty([0,X])} \ ).$$

Now the following theorem gives an answer for the optimality of formula (2.3) (resp. (2.5)) considered in the class of N-families $GL(\zeta)$ (resp. (N, M)-generalized families $GL_g(\zeta, w)$). Indeed, the following lower bounds are similar to (2.9) and (2.10) in Theorem 2.1.

Theorem 2.3. Consider an N-family $GL(\zeta)$ and a subset $\mathcal{K}_{m,p}$, with $m \geq 2$. Then, for any $[0, X]$,

$$D(\mathcal{K}_{m,p}, GL)_{L^\infty([0,X])} \geq \frac{\widetilde{c}_{m+1,p}}{(N \ln N)^{m+1}}. \tag{2.21}$$

Similarly, consider an (N, M)-generalized family $GL_g(\zeta, w)$ and a subset $\mathcal{K}_{m,p}$. Then, for any $[0, X]$,

$$D(\mathcal{K}_{m,p}, GL_g)_{L^\infty([0,X])} \geq \frac{\widetilde{c}_{m,p}}{((N + M) \ln(N + M))^m}. \tag{2.22}$$

Theorem 2.3 will be proved in Section 2.4 and Theorem 2.1 will follow.

The conclusion is that the lower bounds (2.9) and (2.10) cannot be made better by choosing another family of Gelfand-Levitan type with another choice of parameters than the eigenvalues and characteristic constants.

Moreover, we see that the choice of the formulas (2.3) and (2.5) is almost optimal. Indeed, by applying (2.8) and Proposition 2.1, we can deduce that, for any subset of $\widetilde{\mathcal{K}}_{m+1,p,q}$ of potentials Q satisfying $Q^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, \ldots, m$ and for all large enough ω, the approximation of $\widetilde{\mathcal{K}}_{m+1,p,q}$ by the $(2N, 1)$-generalized family $GL_g(\zeta, w)$ associated to (2.19) is of order $1/\omega^m$, i.e. for any $[0, X]$,

$$D\left(\widetilde{\mathcal{K}}_{m+1,p,q}, GL_g\right)_{L^\infty([0,X])} \quad \leq \quad \frac{\Gamma_{m+1,p,q}}{\omega^m}$$

(one has also the same result at order $\dfrac{\ln\omega}{\sqrt{\omega}}$ for $\widetilde{\mathcal{K}}_{2,p,q}$ and the $2N$-analytic family associated to (2.17)). This leads to the following question : can the lower bounds be made even better, or else can the estimations by the formulas (2.3), (2.5) or by another similar formula be done close to these lower bounds ?

There is another question : could the explicit formula Q^0_ω from (2.3) get the approximation of any $\widetilde{\mathcal{K}}_{m+1,p,q}$ at order $1/\omega^m$? One notices that, if $Q^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \ldots, m$, the spectral measure $\sigma_\omega(d\tau)$ becomes $\sigma^0_\omega(d\tau)$ in (2.2) which gives Q^0_ω. However, in order to apply (2.8) from Theorem 1 in [9], the function Q must be strictly positive on $\mathbb{R}^+$ (particularly at 0). Nevertheless, numerical experiments lead us to think that the approximation at order $\frac{1}{\omega^m}$ is valid in this case (see [9], Section 4).

Another progress would be to improve the negative results from Theorem 2.1 : indeed, the subset $\mathcal{K}_{m,p}$ has an entropy bigger than the one of $\mathcal{K}_{m,p} \cap C^m$. Therefore we hope to improve Theorem 2.1 in order to get the order $1/(\omega\ln\omega)^{5/2}$ instead of (2.9) (similarly, $1/(\omega\ln\omega)^{m+1/2}$ instead of (2.10)). Another similar progress would be to improve the positive results (2.7) and (2.8) from [9], but with the (smaller) subset $\mathcal{K}_{m,p} \cap C^m$ in order to get a precision close to the lower bounds (2.9) and (2.10).

More generally, the essential argument of entropy makes us think that these results should still be true with any analytic formula with N parameters (in particular, without assuming that the family is of finite order, neither choosing any domain Ω_N).

We finish then by giving some examples of inverse problem with some possible analogous results (Section 2.5).

2.2 An estimation of the eigenvalues and characteristic constants

In this section, we prove the following theorem that has been given as Theorem 2.2 in the introduction.

Theorem. Let $Q \in C^1(\mathbb{R}^+)$ be strictly positive, strictly decreasing with polynomial behavior at infinity, and such that $Q'(0) = 0$. Then for all ω and all $j = 1, \ldots, N(\omega)$, one has

$$\frac{1}{\alpha_1 \omega^{\beta_1}} \leq \xi_j(\omega^2 Q) \leq \alpha_1 \omega \text{ and } \frac{1}{\alpha_2 \exp\left(\beta_2 \omega^2\right)} \leq \frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)} \leq \alpha_2 \exp\left(\beta_2 \omega^{\beta_3}\right).$$

Proof.

Q and ω being fixed, we will not specify the dependence on Q and ω of $N(\omega)$, ξ_j and C_j in the proof.

This statement is a corollary of the WKB theory which is not precisely formulated in the references, so we give a proof by principally using the WKB method as in [16]. The proof consists in some following lemmas.

Lemma 2.1. For all $j = 1, \ldots, N$,

$$\frac{1}{\alpha_1 \omega^{\beta_1}} \leq \xi_j \leq \alpha_1 \omega .$$

Proof.

First, ϕ_j being the normed eigenfunction, we have

$$\begin{aligned} -\xi_j^2 = \lambda_j &= -\int_0^\infty \phi_j''(x)\phi_j(x)dx - \omega^2 \int_0^\infty Q(x)\, \phi_j^2(x)dx \\ &\geq -\left[\phi_j'\phi_j\right]_0^\infty + \int_0^\infty \phi_j'^2(x)dx - \omega^2 \inf_{x\geq 0} Q(x) \\ &\geq -\omega^2 \sup_{x\geq 0} Q(x), \end{aligned}$$

then, for all $j = 1, \ldots, N$,

$$\xi_j \leq \omega\sqrt{Q(0)}. \tag{2.23}$$

Now we want to extend the equation to the whole line $\mathbb{R}$ in order to apply the WKB method of Lax and Levermore. First, we extend Q to an even function which still is of class C^1 (since $Q'(0) = 0$) and integrable with polynomial behavior at infinity. Moreover, the extension (which we still write Q) is monotone on $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^+$ and has the unique maximum at 0.

Next, we extend each eigenfunction ϕ_j to an odd function $\widetilde{\phi}_j$ (this is possible since $\phi_j(0) = 0$) which still is of class C^2 on $\mathbb{R}$. Then each function $\widetilde{\phi}_j/2$ is an eigenfunction on $\mathbb{R}$ with the same eigenvalue. Hence it is sufficient to prove the lower estimate for the $N_{\mathbb{R}}$ $(\geq N)$ eigenvalues on $\mathbb{R}^+$.

Now consider the equation in the quasi-classic case :

$$-\varepsilon^2 y'' - Qy = -\eta^2 y,$$

where $\varepsilon = \frac{1}{\omega}$ and $\eta_j = \frac{\xi_{N-j+1}}{\omega}$, $j = 1, \ldots, N$. By WKB method one has (see [16])

$$\Phi(\eta_j) = \left(j - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi \tag{2.24}$$

where $\Phi(\eta) = \int_{x_-(\eta)}^{x_+(\eta)} (Q(y) - \eta^2)^{\frac{1}{2}}\, dy$ and $x_+(\eta) = -x_-(\eta) \geq 0$ satisfying $-Q(x_+(\eta)) = -Q(x_-(\eta)) = -\eta^2$. Next,

$$N_{\mathbb{R}} = \left[\frac{1}{\varepsilon\pi}\Phi(0)\right] = \left[\frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (Q(y))^{\frac{1}{2}} dy\right]. \tag{2.25}$$

Lastly,

$$s_j = 2\exp\left(\frac{\theta_+(\eta_j)}{\varepsilon}\right)$$

where $\theta_+(\eta) = \eta x_+(\eta) + \int_{x_+(\eta)}^{\infty} \eta - (\eta^2 - Q(y))^{\frac{1}{2}}\, dy$; s_j is the normalized coefficient of the Jost solution :

$$\frac{\phi_j(x)}{2} \sim \frac{s_j}{2}\exp\left(-\frac{\eta_j x}{\varepsilon}\right),\ x \to +\infty.$$

Hence it is sufficient to prove that

$$\eta_{N_{\mathbb{R}}} \geq \frac{1}{\alpha_1 \omega^{\beta_1}}.$$

Q being polynomially decreasing, there exist $q \geq 1$ and $k_1 \geq k_2 \geq 4$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{q}\frac{1}{1 + x^{k_1}} \leq Q(x) \leq \frac{q}{1 + x^{k_2}}.$$

It follows that

$$\frac{1}{q}\frac{1}{1 + x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})^{k_1}} \leq Q(x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})) = \eta_{N_{\mathbb{R}}}^2 \leq \frac{q}{1 + x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})^{k_2}},$$

thus

$$\left(\frac{1}{q\eta_{N_{\mathbb{R}}}^2}-1\right)^{\frac{1}{k_1}} \le x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}}) = -x_-(\eta_{N_{\mathbb{R}}}) \le \left(\frac{q}{\eta_{N_{\mathbb{R}}}^2}-1\right)^{\frac{1}{k_2}}.$$

We can assume that $\eta_{N_{\mathbb{R}}}^2 \le 1/2q$ (otherwise the lemma is proved) then

$$\frac{1}{(2q)^{\frac{1}{k_1}}\eta_{N_{\mathbb{R}}}^{\frac{2}{k_1}}} \le x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}}) \le \frac{q^{\frac{1}{k_2}}}{\eta_{N_{\mathbb{R}}}^{\frac{2}{k_2}}}. \tag{2.26}$$

On the other hand,

$$\Phi(0)-\Phi(\eta_{N_{\mathbb{R}}}) = \left(\int_{-\infty}^{x_-(\eta_{N_{\mathbb{R}}})} + \int_{x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})}^{\infty}\right)(Q(y))^{\frac{1}{2}}dy + \int_{x_-(\eta_{N_{\mathbb{R}}})}^{x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})}(Q(y))^{\frac{1}{2}} - \left(Q(y)-\eta_{N_{\mathbb{R}}}^2\right)^{\frac{1}{2}}dy.$$

Furthermore,

$$\begin{aligned}\int_{x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})}^{\infty}(Q(y))^{\frac{1}{2}}dy &\le \int_{x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})}^{\infty}\frac{\sqrt{q}}{y^{\frac{k_2}{2}}}dy = \frac{2\sqrt{q}}{k_2-2}\frac{1}{x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})^{\frac{k_2-2}{2}}} \\ &\le \sqrt{q}(2q)^{\frac{k_2-2}{2k_1}}\eta_{N_{\mathbb{R}}}^{\frac{k_2-2}{k_1}} \le q\sqrt{2}\,\eta_{N_{\mathbb{R}}}^{\frac{k_2-2}{k_1}}\end{aligned}$$

(the same inequality is true for $\int_{-\infty}^{x_-(\eta_{N_{\mathbb{R}}})}(Q(y))^{\frac{1}{2}}dy$). The last integral is not greater than

$$\begin{aligned}\int_{x_-(\eta_{N_{\mathbb{R}}})}^{x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})}\left(Q(y)-\left(Q(y)-\eta_{N_{\mathbb{R}}}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}dy &= \eta_{N_{\mathbb{R}}}(x_+(\eta_{N_{\mathbb{R}}})-x_-(\eta_{N_{\mathbb{R}}})) \\ &\le 2q^{\frac{1}{k_2}}\eta_{N_{\mathbb{R}}}^{\frac{k_2-2}{k_2}} \le 2q^{\frac{1}{k_2}}q^{\frac{k_2-2}{2k_2}}\left(\frac{\eta_{N_{\mathbb{R}}}}{\sqrt{q}}\right)^{\frac{k_2-2}{k_1}} \\ &\le 2\sqrt{q}\,\eta_{N_{\mathbb{R}}}^{\frac{k_2-2}{k_1}},\end{aligned}$$

by (2.26) and (2.23). It follows that $\Phi(0)-\Phi(\eta_{N_{\mathbb{R}}}) \le 4q\,\eta_{N_{\mathbb{R}}}^{\frac{k_2-2}{k_1}}$.

Since $N_{\mathbb{R}} \le \frac{\Phi(0)}{\varepsilon\pi}$, one has by (2.24) $\Phi(0)-\Phi(\eta_{N_{\mathbb{R}}}) \ge \frac{\varepsilon\pi}{2}$. Hence

$$\eta_{N_{\mathbb{R}}} \ge \left(\frac{\pi}{8q}\right)^{\frac{k_1}{k_2-2}}\frac{1}{\omega^{\frac{k_1}{k_2-2}}} \tag{2.27}$$

and the lemma is proved.

□

Now we need a formula for C_j (see [4]). We extend the equation

$$-y''-\omega^2 Qy = k^2 y \tag{2.28}$$

with respect to k to the half-plane $\{\Im k > 0\}$. We know that there are the solutions $\phi(k,\cdot)$, $\psi(k,\cdot)$ and $f(k,\cdot)$ which respectively satisfy

$$\begin{cases} \phi(k,\cdot) \in L^2([0,\infty[) \text{ and } \int_0^\infty |\phi(k,x)|^2 dx = 1, \\ \psi(k,0) = 0 \ \text{ and } \ \psi'(k,0) = 1, \\ f(k,x) \sim \exp(ikx), \ x \to \infty\,. \end{cases}$$

$\phi(k,\cdot)$ is the physical solution and $f(k,\cdot)$ is called the Jost solution. When k is one of the $i\xi_j$ (and only in this case), these three solutions are proportional :

$$\begin{cases} f(i\xi_j,\cdot) = f'(i\xi_j,0)\psi(i\xi_j,\cdot), \\ \phi(i\xi_j,\cdot) = C_j^{\frac{1}{2}}\psi(i\xi_j,\cdot), \\ \phi(i\xi_j,\cdot) = s_j f(i\xi_j,\cdot) \end{cases}$$

then $f'(i\xi_j,0) = \frac{C_j^{\frac{1}{2}}}{s_j}$.

The Jost function F being defined as $F(k) = f(k,0)$, we claim that

$$\frac{4\xi_j^2}{C_j} = -s_j^2\left(\dot F(i\xi_j)\right)^2. \tag{2.29}$$

Indeed by differentiating the equation (2.28) with $f(k,x)$ with respect to k, the derivative (with respect to x) of the Wronskian of $f(k,\cdot)$ and $\dot f(k,\cdot) = \frac{\partial f}{\partial k}(k,\cdot)$ becomes

$$\begin{aligned} W'\left(f,\dot f\right) &= f(k,x)\dot f''(k,x) - f''(k,x)\dot f(k,x) \\ &= -2kf^2(k,x)\,. \end{aligned}$$

When $k = i\xi_j$, this yields

$$\begin{aligned} \dot F(i\xi_j)f'(i\xi_j,0) &= -2i\xi_j\int_0^\infty f^2(i\xi_j,x)dx = -\frac{2i\xi_j}{s_j^2} \\ &= \dot F(i\xi_j)\frac{C_j^{\frac{1}{2}}}{s_j} \end{aligned}$$

and the assertion is proved.

Since $0 < \eta_N < \cdots < \eta_1$, we see that $0 \le x_+(\eta_1) \le \cdots \le x_+(\eta_N)$ and by Lemma 2.1, for all $j = 1,\ldots,N$, we have

$$\theta_+(\eta_j) \le \alpha_1 x_+(\eta_N) + \int_0^\infty (Q(y))^{\frac{1}{2}}dy$$

which gives with (2.26)

$$2 \leq s_j \leq 2 \exp\left(\alpha_2\, \omega^{1+\frac{2k_1}{k_2(k_2-2)}} + \omega \int_0^\infty (Q(y))^{\frac{1}{2}} dy\right).$$

Now, by formula (2.29), the proof of Theorem 2.2 will be complete with the following lemma.

□

Lemma 2.2. For all $j = 1, \ldots, N$

$$\frac{1}{\alpha_2 \exp(\beta_2 \omega^2)} \leq \left|\dot{F}(i\xi_j)\right| \leq \alpha_2 \exp\left(\beta_2 \omega^2\right).$$

Proof.

In order to be more clear, we note by α_2 different constants, as well as β_2.

First, the Jost solution f (and the Jost function F as well) of equation (2.28) can be constructed by successive approximations by setting, for $x \geq 0$ and $\Im k \geq 0$,

$$\begin{cases} f_0(k,x) = e^{ikx}, \\ f_n(k,x) = -\omega^2 \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} Q(t) f_{n-1}(k,t) dt\,,\ n \geq 1. \end{cases}$$

We know (see [4]) that F is holomorphic on the half-plane $\{\Im k > 0\}$, is continuous on $\{\Im k \geq 0\}$, vanishes exactly on the $i\xi_j$ and converges to 1 at infinity. Moreover there is the following estimate : $\forall\, x,\, k$,

$$|f_n(k,x)| \leq \exp(-\Im k x)\, \frac{1}{n!}\left(\omega^2 \int_x^\infty \frac{2\sqrt{2}\, t}{1+|k|t} Q(t) dt\right)^n.$$

Then, for all k,

$$|F(k)| \leq \sup_{x \geq 0} |f(k,x)| \leq \exp\left(2\sqrt{2}\, \omega^2 \int_0^\infty t Q(t) dt\right) \leq \exp\left(\beta_2 \omega^2\right). \tag{2.30}$$

For all $i\xi_j$ one has, by the Cauchy formula on a small disc $D(i\xi_j, \varepsilon)$ contained in the domain of holomorphy of F (with $\varepsilon = \frac{\xi_1}{2} \geq \frac{1}{\alpha_1 \omega^{\beta_1}}$),

$$\left|\dot{F}(i\xi_j)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{|k-i\xi_j|=\varepsilon} \frac{F(k)}{\left(k - i\xi_j\right)^2} dk\right| \leq \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \leq \alpha_2 \exp\left(\beta_2 \omega^2\right)$$

and this proves the upper estimate.

In order to prove the lower estimate we begin by setting

$$\widetilde{F}(k) = \frac{F(k)}{\prod_{l=1}^N \frac{k-i\xi_l}{k+i\xi_l}}\,,$$

which is also continuous on the closed half-plane, is holomorphic inside it, converges to 1 at infinity and does not vanish. Moreover

$$\dot{F}(i\xi_j) \quad = \quad \frac{1}{2i\xi_j}\left(\prod_{l\neq j}\frac{\xi_j-\xi_l}{\xi_j+\xi_l}\right)\widetilde{F}(i\xi_j). \tag{2.31}$$

Now we want to prove that, for all $l = 1, \ldots, N-1$,

$$\eta_l - \eta_{l+1} \geq \frac{1}{\alpha_2\omega^{\beta_2}}\,. \tag{2.32}$$

By (2.24), we have

$$\frac{\pi}{\omega} = \Phi(\eta_{l+1}) - \Phi(\eta_l) = \int_{x_-(\eta_{l+1})}^{x_+(\eta_{l+1})}\left(Q(y)-\eta_{l+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}dy - \int_{x_-(\eta_l)}^{x_+(\eta_l)}\left(Q(y)-\eta_l^2\right)^{\frac{1}{2}}dy.$$

On $[x_+(\eta_l), x_+(\eta_{l+1})]$ (resp. $[x_-(\eta_{l+1}), x_-(\eta_l)]$) one has $Q(y)-\eta_{l+1}^2 \leq \eta_l^2-\eta_{l+1}^2$; on $[x_-(\eta_l), x_+(\eta_l)]$ one has $\left(Q(y)-\eta_{l+1}^2\right)^{\frac{1}{2}} - (Q(y)-\eta_l^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\eta_l^2-\eta_{l+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}$. It follows that

$$\frac{\pi}{\omega} \quad \leq \quad (\eta_l-\eta_{l+1})^{\frac{1}{2}}(\eta_l+\eta_{l+1})^{\frac{1}{2}}(x_+(\eta_{l+1})-x_-(\eta_{l+1}))$$

and (2.32) follows by Lemma 2.1.

By (2.11), $N = O(\omega)$ then

$$\prod_{l\neq j}\left|\frac{\xi_j-\xi_l}{\xi_j+\xi_l}\right| \geq \left(\frac{1}{\alpha_2\omega^{\beta_2}}\right)^{N-1} \geq \frac{1}{\alpha_2\exp(\beta_2\omega^2)}\,.$$

By (2.31) and Lemma 2.1, it is sufficient to get a lower estimate for $\left|\widetilde{F}(i\xi_j)\right|$. Since $\widetilde{F}$ is holomorphic without zeroes, one has for any large enough R :

$$\frac{1}{4i\xi_j\,\widetilde{F}(i\xi_j)} = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-R}^{R}\frac{k}{\widetilde{F}(k)(k-i\xi_j)(k+i\xi_j)^2}dk + \int_0^{\pi}\frac{iR^2e^{2i\theta}}{\widetilde{F}(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}-i\xi_j)(Re^{i\theta}+i\xi_j)^2}d\theta\right),$$

which gives by taking limit ($\widetilde{F}(k)\to 1$ as $k\to\infty$)

$$\frac{1}{\widetilde{F}(i\xi_j)} = \frac{4i\xi_j}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{\widetilde{F}(k)(k-i\xi_j)(k+i\xi_j)^2}dk.$$

Thus

$$\frac{1}{\left|\widetilde{F}(i\xi_j)\right|} \leq \frac{4\xi_j}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{k}{|F(k)|\,|k-i\xi_j|\,|k+i\xi_j|^2}dk,$$

since $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\left|\widetilde{F}(k)\right| = |F(k)|$ and $F(-k) = \overline{F(k)}$.

In order to get a lower estimate of $\frac{1}{|F(k)|}$ on $\mathbb{R}^+$ we use the Wronskian of $f(k,\cdot)$ and $f(-k,\cdot)$, which is constant and equal to $-2ik$. It follows that, for all $k > 0$,

$$-2ik = f(k,0)f'(-k,0) - f(-k,0)f'(k,0) = 2i\Im\left(F(k)\overline{f'(k,0)}\right).$$

Since $f(k,\cdot)$ is a solution of the following integral equation

$$f(k,x) = e^{ikx} - \omega^2 \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} Q(t) f(k,t)dt,$$

we have by (2.30)

$$\begin{aligned} |f'(k,0)| &\leq k + \omega^2 \int_0^\infty |\cos kt|\, Q(t)\, |f(k,t)| dt \\ &\leq k + \omega^2 \exp\left(\beta_2\omega^2\right) \int_0^\infty Q(t)dt. \end{aligned}$$

Hence

$$2k \leq 2|F(k)| \left(k + \alpha_2 \exp\left(\beta_2\omega^2\right)\right).$$

It follows that

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{k}{|F(k)|\,|k - i\xi_j|\,|k + i\xi_j|^2} dk &\leq \int_0^{+\infty} \frac{k + \alpha_2 \exp\left(\beta_2\omega^2\right)}{\left(k^2 + \xi_j^2\right)^{\frac{3}{2}}} dk \\ &\leq \frac{1 + \alpha_2 \exp\left(\beta_2\omega^2\right)}{\xi_j^3} + \int_1^{+\infty} \frac{1 + \alpha_2 \exp\left(\beta_2\omega^2\right)}{k^2} dk \end{aligned}$$

and the proof is complete.

□

Under the condition that $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, we have a little stronger result.

Corollary 2.2. $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$ being given, there exist ω_0 and $n_2 \geq n_1 > 0$ such that, for all $\omega \geq \omega_0$ and all $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$,

$$n_1\omega \leq N(\omega) \leq n_2\omega\,. \tag{2.33}$$

In addition, for all $j = 1, \ldots, N(\omega)$,

$$\frac{1}{\alpha_1\omega} \leq \xi_j(\omega^2 Q) \leq \alpha_1\omega \text{ and } \frac{1}{\alpha_2 \exp\left(\beta_2\omega^2\right)} \leq \frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)} \leq \alpha_2 \exp\left(\beta_2\omega^2\right), \tag{2.34}$$

where the coefficients α_1, α_2 and β_2 only depend on $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$.

Proof.
First, if $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, by (2.16), there exists $k \geq 4$ such that

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sqrt{Q(x)}dx &\leq \int_0^1 \sqrt{q}dx + \int_1^\infty \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{1+x^k}}dx \\ &\leq \sqrt{q}\left(1 + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx\right).\end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$\frac{1}{\sqrt{Q(0)}}\int_0^\infty \sqrt{Q(x)}dx \geq \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}\int_0^1 \frac{1}{1+x^k}dx \geq \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

From the bounds of $N(\omega)$ in (2.11), it follows that we have, for all $\omega \geq \omega_0$,

$$n_1\omega \leq N(\omega) \leq n_2\omega,$$

where ω_0 and $n_2 \geq n_1 > 0$ only depend on q.

Now, by (2.23), for all $j = 1, \ldots, N(\omega)$, we have $\xi_j(\omega^2 Q) \leq \sqrt{q}\,\omega$. On the other hand, since we can take $k_1 = k_2 = k \geq 4$ in (2.27), one has

$$\begin{aligned}\xi_j(\omega^2 Q) &\geq \omega\, \eta_{N(\omega)}(\omega^2 Q) \geq \left(\frac{\pi}{8q}\right)^{\frac{k}{k-2}} \frac{1}{\omega^{\frac{2}{k-2}}} \\ &\geq \frac{\pi^2}{64q^2}\,\frac{1}{\omega}.\end{aligned}$$

Similarly, we get

$$\frac{1}{\alpha_2\, \exp(\beta_2\omega^2)} \leq \frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)} \leq \alpha_2\, \exp\left(\beta_2\omega^2\right)$$

and we see that, uniformly on $k \geq 4$, the coefficients α_1, α_2, β_1 and β_2 only depend on q. □

Before ending, we consider two different examples.

Example 2.3. Let

$$Q_1(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Q_1 satisfies the conditions of Theorem 2.2. We have by (2.11)

$$N(\omega) \leq [\omega]\,.$$

For all $\omega \geq 10$ and all $j = 1, \ldots, N(\omega)$,

$$\frac{\pi^2}{65}\frac{1}{\omega} \leq \xi_j(\omega) \leq \omega$$

and

$$\frac{1}{8\left(\frac{66}{\pi^2}\right)^3 e^{\frac{\pi^2}{320}}} \frac{1}{\omega^6 e^{\sqrt{2}\left(1+\frac{32}{\pi}\right)\omega^2}} \leq \frac{4\xi_j^2(\omega)}{C_j(\omega)} \leq \frac{130^2}{\pi^4}\,\omega^2 e^{2\sqrt{2}\,\omega^2+(\pi+1)\omega}.$$

Example 2.4. Let be

$$Q_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

The potential $-\omega^2 Q_2$ is a special case because it is discontinuous at $x = 1$. Then we calculate directly the estimates.

The equation $-y'' - \omega^2 y = \lambda y$ with $\lambda = -\xi^2$ and $0 < \xi < \omega$, has the following eigenfunctions

$$y_\xi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\xi}{1+\xi}} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\, x\right), & \text{if } x \in [0,1], \\ \sqrt{\frac{2\xi}{1+\xi}}\, e^{\xi} \sin\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\, e^{-\xi x}, & \text{if } x \geq 1, \end{cases}$$

where ξ satisfies the following equation

$$\xi \sin\sqrt{\omega^2 - \xi^2} + \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \cos\sqrt{\omega^2 - \xi^2} = 0. \tag{2.35}$$

The solutions $y_\xi \in C^1(\mathbb{R}^+)$ fulfill the condition $y_\xi(0) = 0$ and are normed :

$$\int_0^{+\infty} y_\xi^2(x)dx = 1.$$

First we know that $\xi \leq \omega$. And since

$$C_\xi = \left(y_\xi'(0)\right)^2 = \frac{2\xi}{1+\xi}\left(\omega^2 - \xi^2\right),$$

there is

$$\frac{4\xi^2}{C_\xi} = \frac{2\xi(\xi+1)}{\omega^2 - \xi^2}.$$

About the first estimate we find as well $0 < \frac{4\xi^2}{C_\xi} \leq 220\,\omega^2$: indeed, if $\omega \geq 10$ and $\varepsilon = \sqrt{\omega^2 - \xi^2} \leq \frac{1}{10}$, the equation 2.35 becomes

$$\sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2} \sin\varepsilon + \varepsilon \cos\varepsilon \geq 10\,\varepsilon > 0.$$

It follows that ε must be $\geq \frac{1}{10}$ then

$$\xi \leq \sqrt{\frac{99}{100}}\,\omega.$$

However the lower estimate of $\frac{4\xi^2}{C_\xi}$ need an analogous estimate for ξ which is in general false since the first eigenvalue ξ_1 cannot be low bounded by $\frac{1}{\omega^k}$ or $\exp(-a\omega^b)$ (which is a necessary condition to get $\ln\frac{4\xi^2}{C_\xi} = O(\omega^b)$).

Indeed, let fix for example ω_0 large enough and $\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$, and consider the equation 2.35 with respect to (ξ, ω), given by a smooth function g in a neighborhood of $(0, \omega_0)$. Since $\frac{\partial g}{\partial \xi}(0, \omega_0) = \sin\omega_0 = 1$ and $\frac{\partial g}{\partial \omega}(0, \omega_0) = -\omega_0$, an application of the implicit functions theorem allows us to consider the function $\omega \mapsto \xi(\omega)$ which has in a neighborhood of ω_0 the following expansion

$$\xi(\omega) = \omega_0(\omega - \omega_0) + O\left((\omega - \omega_0)^2\right).$$

Then for all ω such that $0 < \omega - \omega_0 \leq \eta(\omega_0)$ with $\eta(\omega_0)$ small enough, one has

$$0 < \xi(\omega) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{2}\exp\omega\right)$$

and it follows that for any ω large enough we cannot find a lower estimate for ξ as we need. This accident comes from the fact that Q_2 is not continuous at $x = 1$.

However if we set a condition for $\omega \geq 10$ as

$$\left|\omega - \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right| \geq \frac{1}{5},$$

we see that for any ξ with $0 < \xi \leq \frac{1}{10}$, we get $\left|\sqrt{\omega^2 - \xi^2} - \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right| \geq \frac{1}{10}$ then

$$\left|\xi \sin\sqrt{\omega^2 - \xi^2} + \sqrt{\omega^2 - \xi^2}\cos\sqrt{\omega^2 - \xi^2}\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Hence $\xi \geq \frac{1}{10}$ and

$$\frac{4\xi^2}{C_\xi} \geq \frac{1}{5\omega^2},$$

then we get as well a stronger estimate for $\left(\frac{4\xi^2}{C_\xi}\right)^{-1}$ as $O(\omega^2)$.

2.3 Some properties of the solution of a certain integral equation

Consider, for $(x, y) \in \Delta = \{0 \leq y \leq x\}$ and $w \in \mathbb{C}_+$, the integral equation (2.1) given in the introduction

$$A(x, y, w) + \int_0^x A(x, s, w)\widetilde{\Phi}(s, y, w)ds + \widetilde{\Phi}(x, y, w) = 0, \tag{2.36}$$

where

$$\widetilde{\Phi}(x,y,w) \;\; := \;\; \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(x\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\frac{\sin(y\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}\left(\sqrt{\tau+w}-\sqrt{\tau}\right)d\tau\,. \qquad (2.37)$$

We see that $\widetilde{\Phi}\,(x,y,\omega^2 Q(0)) = \Phi_\omega(x,y)$ (see (2.6)). It follows that, if $\widetilde{A}$ is the solution of the equation (2.36), then $\widetilde{A}\,(x,y,\omega^2 Q(0))$ will be exactly the solution A_ω in the formula (2.5). Indeed, by Proposition 2.5 below, the solution $\widetilde{A}$ is unique. So we will give the proof of this result which will be useful in order to prove the second part of Proposition 2.1.

Proposition 2.5. *The equation (2.36) has a unique solution $\widetilde{A}(x,y,w)$ defined on $\Delta \times \mathbb{C}_+$. It is continuous with respect to (x,y) and holomorphic with respect to w, and the application*

$$x \mapsto \left(y \mapsto \widetilde{A}(x,y,w) \in L^2_y([0,x])\right),$$

is continuously differentiable (with respect to the topology of $L^2([0,x])$).

Moreover, we have the following estimates : for all $X \geq 1$ and $w \in \mathbb{C}_+$,

$$\sup_{y\leq x\leq X}\left|\widetilde{A}(x,y,w)\right|,\; \sup_{x\leq X}\left\|\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,y,w)\right\|_{L^2_y([0,x])},\; \sup_{x\leq X}\left|\frac{d}{dx}\widetilde{A}(x,x,w)\right| \leq C(X)(1+|w|)^{\alpha}$$

(the exponent α does not depend on X).

The proof consists of the following lemmas. We begin by proving these properties for $\widetilde{\Phi}$.

Lemma 2.3. The function $\widetilde{\Phi}$ is continuous with respect to $(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ and holomorphic with respect to $w \in \mathbb{C}_+$. For all $X \geq 1$, the application

$$x \mapsto \widetilde{\Phi}(x,y,w) \in L^2_y([0,X])$$

is continuously differentiable and we have the following estimates :

$$\sup_{x,y\in[0,X]} |\widetilde{\Phi}(x,y,w)|,\; \sup_{x\leq X}\left\|\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w)\right\|_{L^2_y([0,X])} \leq C(X)(1+|w|)^{\alpha}.$$

Moreover, the restriction

$$x \mapsto \widetilde{\Phi}(x,x,w)$$

is continuously differentiable (in the usual sense) and

$$\sup_{x\leq X}\left|\frac{d}{dx}\widetilde{\Phi}(x,x,w)\right| \leq C(X)(1+|w|)^{\alpha}$$

(in all the cases the exponent α does not depend on X).

Proof.
First $\widetilde{\Phi}$ is well-defined since the integral is absolutely convergent :

$$\widetilde{\Phi}(x,y,w)=\int_0^\infty \frac{\sin kx}{k}\frac{\sin ky}{k}\frac{w}{k+\sqrt{k^2+w}}\frac{2k}{\pi}dk,$$

where we have chosen the principal determination of $\sqrt{z}$. $\widetilde{\Phi}$ is holomorphic with respect to w and for all $X \geq 1$

$$\left\|\widetilde{\Phi}(\cdot,w)\right\|_{\infty,X} \leq C(X)|w|.$$

Next we want to prove the differentiability of $x \mapsto \widetilde{\Phi}(x,\cdot,w)$:

$$\widetilde{\Phi}(x,y,w)=\left(\int_0^1+\int_1^\infty\right)\frac{\sin kx}{k}\frac{\sin ky}{k}\frac{w}{k+\sqrt{k^2+w}}\frac{2k}{\pi}dk,$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \frac{\sin kx}{k}\frac{\sin ky}{k}\left(\sqrt{k^2+w}-k\right)\frac{2k}{\pi}dk=\int_0^1 \cos kx\frac{\sin ky}{k}\left(\sqrt{k^2+w}-k\right)\frac{2k}{\pi}dk,$$

which is continuous with respect to (x,y) in the usual sense (then as well in the space $L^2_y([0,X])$) and polynomially bounded on w.

On the other hand,

$$\int_1^\infty \frac{\sin kx}{k}\frac{\sin ky}{k}\frac{w}{k+\sqrt{k^2+w}}\frac{2k}{\pi}dk=\frac{w}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos k(x-y)-\cos k(x+y)}{k\left(k+\sqrt{k^2+w}\right)}dk.$$

Now let us consider the integral with $\cos k(x-y)$: by integrating by parts, we get

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\cos k(x-y)}{k\left(k+\sqrt{k^2+w}\right)}dk &= -\frac{\sin(x-y)}{x-y}\frac{1}{1+\sqrt{1+w}} \\ &\quad +\int_1^\infty \frac{\sin k(x-y)}{x-y}\frac{2+\sqrt{1+\frac{w}{k^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{w}{k^2}}}}{k^3\left(1+\sqrt{1+\frac{w}{k^2}}\right)^2}dk \\ &= -\frac{\sin(x-y)}{x-y}\frac{1}{1+\sqrt{1+w}}+\int_1^\infty \frac{\sin k(x-y)}{x-y}\frac{1}{k^3\sqrt{1+\frac{w}{k^2}}}dk.\end{aligned}$$

The first term is clearly continuously differentiable with respect to (x,y) and its derivative is polynomially bounded on w. Now assume that $x>y$ and differentiate in the integral to get

$$\int_1^\infty \frac{k(x-y)\cos k(x-y)-\sin k(x-y)}{(x-y)^2}\frac{1}{k^3\sqrt{1+\frac{w}{k^2}}}dk=\int_{x-y}^\infty \frac{k\cos k-\sin k}{k^3\sqrt{1+\frac{w}{k^2}(x-y)^2}}dk\,,$$

which is continuous with respect to (x,y) since it is an absolutely convergent integral of a continuous function, and can be extended to $y \leq x$. Moreover, it is bounded with respect to w.

Now if $x < y$ the derivative of the integral is

$$\int_{y-x}^{\infty} \frac{k\cos k - \sin k}{k^3\sqrt{1+\frac{w}{k^2}(y-x)^2}}dk,$$

and can be continuously extended to $\{x \leq y\}$.

In the same way the integral with $\cos k(x+y)$ is continuously differentiable on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ and bounded with respect to w.

Notice that $\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}$ does not exist on $\{x=y\}$ since the limits from each side are different. Indeed,

$$\lim_{(x-y)\to 0^+} \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w) - \lim_{(x-y)\to 0^-} \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w) = 2\int_0^{\infty} \frac{k\cos k - \sin k}{k^3}dk \neq 0.$$

Nevertheless, the application $x \mapsto \widetilde{\Phi}(x,y,w) \in L^2_y([0,X])$ is continuously differentiable,

$$\int_{y\neq x} \left| \frac{\widetilde{\Phi}(x+h,y,w) - \widetilde{\Phi}(x,y,w)}{h} - \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w) \right|^2 dy \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

since for all $y \neq x$

$$\frac{\widetilde{\Phi}(x+h,y,w) - \widetilde{\Phi}(x,y,w)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w)$$

with domination in $L^2_y([0,X])$ ($\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}$ can be continuously extended to $\{x \geq y\}$ and $\{x \leq y\}$ although the limits do not coincide). In the same way one proves that the derivative $x \mapsto \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w) \in L^2_y([0,X])$ is continuous.

Lastly, $\sup_{x\leq X} \left\| \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w) \right\|_{L^2_y([0,X])}$ is polynomially bounded on w.

Now we want to prove the last assertion : for all $x \geq 0$,

$$\widetilde{\Phi}(x,x,w) \quad = \quad \frac{2wx}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k\left(k+\sqrt{k^2+wx^2}\right)}dk.$$

One can differentiate in the integral to get

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\widetilde{\Phi}(x,x,w) \quad &= \quad \frac{2w}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k\left(k+\sqrt{k^2+wx^2}\right)}dk \\
&\quad -\frac{2w^2x^2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k\sqrt{k^2+wx^2}\left(k+\sqrt{k^2+wx^2}\right)^2}dk,
\end{aligned}$$

which is continuous with respect to $x \geq 0$ and the estimate follows.

□

Next, we prove the existence and uniqueness of the solution $\widetilde{A}$.

Lemma 2.4. For all $x > 0$ and $w \in \mathbb{C}_+$, the equation (2.36) has a unique solution $\widetilde{A}(x, y, w)$ for almost all $y \leq x$. Moreover, $\widetilde{A}(x, y, w)$ is holomorphic with respect to w as a vector-valued function in $L^2_y([0, x])$.

Proof.
First, x and w being fixed, consider the complex Hilbert space $L^2([0, x])$ with the associated inner product

$$< f, g >= \int_0^x \overline{f(s)} g(s) ds\,.$$

Solving equation (2.36) is equivalent to finding the functions $h \in L^2([0, x])$ such that

$$(Id + K_{x,w})(h) = -\widetilde{\Phi}(x, \cdot, w),$$

where $K_{x,w}$ is the integral operator of $L^2([0, x]) : h \mapsto \int_0^x h(s)\widetilde{\Phi}(s, y, w)ds$.

Next, $\widetilde{\Phi}$ being continuous with respect to y and holomorphic with respect to w, the operator $K_{x,w}$ is compact and holomorphic on the domain $\mathbb{C}_+$ (in the Banach space of operators of $L^2([0, x])$ with the associated norm). By the analytic Fredholm Theorem (see [26]) either $(Id + K_{x,w})^{-1}$ exists for no $w \in \mathbb{C}_+$ or $(Id + K_{x,w})^{-1}$ exists and is holomorphic on $\mathbb{C}_+ \setminus S$, where S is a discrete subset of $\mathbb{C}_+$; in this case, for all $w \in S$, the equation $(Id + K_{x,w})(h) = 0$ has a nonzero solution in $L^2([0, x])$.

The first case is not possible since for w small enough $\widetilde{\Phi}(x, \cdot, w)$ is small enough for all $x, y \in [0, X]$. Then, $(Id + K_{x,w})^{-1}$ can be constructed by successive approximations. In fact the inverse operator exists for all $w \in \mathbb{C}_+$ since $\ker(Id + K_{x,w}) = \{0\}$. In order to prove this, one has for all $h \in L^2([0, x])$

$$\Re\left(< h, \int_0^x h(s)\widetilde{\Phi}(s, \cdot, w)ds >\right) \;\geq\; 0. \tag{2.38}$$

Indeed, h being in $L^1([0, x])$, we can write

$$\begin{aligned}
\Re < h, \int_0^x h(s)\widetilde{\Phi}(s, \cdot, w)ds > &= \Re \int_0^x \overline{h(y)}dy \int_0^x h(s)ds \int_0^\infty \frac{\sin ks}{k}\frac{\sin ky}{k}\left(\sqrt{k^2 + w} - k\right)\frac{2k}{\pi}dk \\
&= \int_0^\infty \Re\left(\sqrt{k^2 + w} - k\right)\frac{2k}{\pi}dk \left|\int_0^x h(y)\frac{\sin ky}{k}dy\right|^2 \\
&\geq \int_0^\infty \left(\sqrt{k^2 + \Re w} - k\right)\frac{2k}{\pi}dk \left|\int_0^x h(y)\frac{\sin ky}{k}dy\right|^2.
\end{aligned}$$

Now let $h \in L^2([0,x])$ such that (for almost all $y \in [0,x]$)

$$h(y) + \int_0^x h(s)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds = 0.$$

It follows from (2.38) that

$$0 = \Re\left(< h, h + \int_0^x h(s)\widetilde{\Phi}(s,\cdot,w)ds >\right) \geq \int_0^x |h(y)|^2 dy,$$

thus $h = 0$. The operator $(Id + K_{x,w})^{-1}$ exists for all $w \in \mathbb{C}_+$ and is holomorphic on $\mathbb{C}_+$ as an operator-valued function of $L^2([0,x])$. Hence the equation (2.36) has a unique solution $\widetilde{A}(x,\cdot,w) \in L^2([0,x])$ and is holomorphic as a vector-valued function in $L^2([0,x])$.

□

In order to establish the regularity of $\widetilde{A}$ we prove the following lemmas.

Lemma 2.5. Fix $x_0 \in [0,X]$ and a neighborhood V_0 of x_0, and consider the operator $L_{x_0,w} = (Id + K_{x_0,w})^{-1}$. Then for all continuous functions $f(x,y)$ on $V_0 \times [0,X]$ such that the application

$$x \in V_0 \mapsto f(x,y) \in L^2_y([0,X])$$

is continuously differentiable, the image $L_{x_0,w}(f(x,\cdot))$ satisfies the same properties as f and

$$\frac{\partial}{\partial x} L_{x_0,w}(f(x,\cdot)) = L_{x_0,w}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right).$$

Moreover, we have the following estimates :

$$\sup_{x \in V_0, y \leq X} |L_{x_0,w}(f(x,\cdot))(y)| \leq \left(1 + x_0 \left\|\widetilde{\Phi}(\cdot,w)\right\|_\infty \|L_{x_0,w}\|_{L^2([0,x_0])}\right) \|f\|_\infty$$

and

$$\sup_{x \in V_0} \left\|\frac{\partial}{\partial x} L_{x_0,w}(f(x,\cdot))(y)\right\|_{L^2_y([0,X])} \leq \left(1 + X \left\|\widetilde{\Phi}(\cdot,w)\right\|_\infty \|L_{x_0,w}\|_{L^2([0,x_0])}\right) \sup_{x \in V_0} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\|_{L^2([0,X])}.$$

Proof.

First, the element $L_{x_0,w}(f(x,\cdot))$ is well-defined and since $f(x,\cdot) = (Id + K_{x_0,w})(L_{x_0,w}(f(x,\cdot))$, then for almost all $y \in [0,x_0]$

$$L_{x_0,w}(f(x,\cdot))(y) \quad = \quad f(x,y) - \int_0^{x_0} L_{x_0,w}(f(x,\cdot))(s)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds. \qquad (2.39)$$

The integral does not depend on the choice of the representative of $L_{x_0,w}(f(x,\cdot))$ and gives a continuous function with respect to y. Since the right-hand side is still defined for

$y \in [0,X]$, it follows that the representative of $L_{x_0,w}(f(x,\cdot))$ can be chosen as a continuous function which can be extended to $[0,X]$ (and (2.39) will be true for all $y \in [0,X]$).

Since f is continuous with respect to (x,y), the application $x \mapsto f(x,\cdot) \in L^2_y([0,x_0])$ is continuous, and so is $L_{x_0,w}(f(x,\cdot))$. It follows that the integral in (2.39) is continuous with respect to $(x,y) \in V_0 \times [0,X]$, as well as the function $L_{x_0,w}(f(x,\cdot))(y)$. By using the Cauchy-Schwarz inequality,

$$|L_{x_0,w}(f(x,\cdot))(y)| \leq |f(x,y)| + \|L_{x_0,w}\|_{L^2([0,x_0])}\|f(x,s)\|_{L^2_s([0,x_0])}\left\|\widetilde{\Phi}(s,y,w)\right\|_{L^2_s([0,x_0])}$$

and the first estimate follows.

Next, since the application $x \mapsto f(x,\cdot) \in L^2_y([0,X])$ is continuously differentiable and $L_{x_0,w}$ an operator of $L^2([0,x_0])$, it follows that the application

$$x \mapsto L_{x_0,w}(f(x,\cdot)) \in L^2_y([0,x_0])$$

is continuously differentiable and

$$\frac{\partial}{\partial x}L_{x_0,w}(f(x,\cdot)) = L_{x_0,w}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right).$$

In order to extend this equality to $[0,X]$, one can differentiate (in $L^2_y([0,x_0])$) the formula (2.39) to get

$$L_{x_0,w}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right)(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \int_0^{x_0} L_{x_0,w}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right)(s)\,\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds,$$

which is still well-defined if $y \in [0,X]$ and gives a function in $L^2_y([0,X])$ which is continuous with respect to $x \in V_0$.

Lastly, the second estimate follows since, for all $x \in V_0$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial x}L_{x_0,w}(f(x,\cdot))(y)\right\|_{L^2_y([0,X])} \quad &\leq \quad \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right\|_{L^2_y([0,X])} \\ &\quad + \left\|L_{x_0,w}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right)(s)\right\|_{L^2_s([0,x_0])}\left\|\widetilde{\Phi}(s,y,w)\right\|_{L^2([0,x_0]\times[0,X])}.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.6. The assertion is still true if we consider the operator $H_{x,x_0,w}$ defined as

$$H_{x,x_0,w} : f(x,\cdot) \mapsto \left(y \in [0,X] \mapsto \int_{x_0}^{x} f(x,s)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds\right)$$

with derivative

$$x \in V_0 \mapsto f(x,x)\widetilde{\Phi}(x,y,w) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds.$$

Moreover, we have the following estimates (with $V_0 = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$) :

$$\sup_{x \in V_0, y \leq X} |H_{x,x_0,w}(f(x,\cdot))(y)| \leq \eta \left\| \widetilde{\Phi}(\cdot,w) \right\|_\infty \|f\|_\infty$$

and

$$\begin{aligned} \sup_{x \in V_0} \left\| \frac{\partial}{\partial x} H_{x,x_0,w}(f(x,\cdot))(y) \right\|_{L^2_y([0,X])} \quad &\leq \quad \sqrt{X} \left\| \widetilde{\Phi}(\cdot,w) \right\|_\infty \|f\|_\infty \\ &\quad + \sqrt{\eta}\sqrt{X} \left\| \widetilde{\Phi}(\cdot,w) \right\|_\infty \sup_{x \in V_0} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x,s) \right\|_{L^2_s([0,X])} . \end{aligned}$$

Proof.

First, the function $H_{x,x_0,w}(f(x,\cdot))(y)$ is continuous on $V_0 \times [0,X]$ and the first estimate follows.

Next, one proves that the application $x \mapsto H_{x,x_0,w}(f(x,\cdot)) \in C^0_y([0,X])$ is continuously differentiable (i.e. with respect to the uniform topology). Indeed, by uniform continuity of f and $\widetilde{\Phi}$, for all $x \in V_0$,

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(x+h,s)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds - f(x,x)\widetilde{\Phi}(x,y,w) \right| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

and (by continuity of the application $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,s) \in L^2_s([0,X])$)

$$\left| \int_{x_0}^{x} \left(\frac{f(x+h,s) - f(x,s)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,s) \right) \widetilde{\Phi}(s,y,w)ds \right| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

uniformly on $y \in [0,X]$.

Lastly, the derivative

$$x \in V_0 \mapsto f(x,x)\widetilde{\Phi}(x,y,w) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,s)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds \in C^0_y([0,X]),$$

is continuous and the second estimate follows.

□

Now the regularity of $\widetilde{A}$ can be proved.

Lemma 2.7. The function $\widetilde{A}(x,y,w)$ is continuous with respect to $(x,y) \in \Delta$, is holomorphic with respect to $w \in \mathbb{C}_+$ (in the usual sense) and is such that the application $x \mapsto \widetilde{A}(x,y,w) \in L^2_y([0,x])$ is continuously differentiable. In particular, equation (2.36) is satisfied for all $(x,y) \in \Delta$ and $w \in \mathbb{C}_+$ (and not only for almost all $y \leq x$).

Proof.

Regularity being a local property, let us fix $X \geq 1$, $x_0 \leq X$ and a neighborhood $V_0 = [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$. For all $x \in V_0$ and almost all y, $0 \leq y \leq x$, the equation (2.36) is equivalent to

$$(Id + K_{x,w}) \left(\widetilde{A}(x, \cdot, w) \right) (y) = -\widetilde{\Phi}(x, y, w).$$

Writing $K_{x,w} = K_{x_0,w} + (K_{x,w} - K_{x_0,w}) = K_{x_0,w} + H_{x,x_0,w}$ and applying $L_{x_0,w}$, the equation becomes

$$\widetilde{A}(x, y, w) + [L_{x_0,w} \circ H_{x,x_0,w}] \left(\widetilde{A}(x, \cdot, w) \right) (y) = L_{x_0,w} \left(-\widetilde{\Phi}(x, \cdot, w) \right) (y).$$

Now we want to solve equation (2.36) by successive approximations by setting for $x \in V_0$:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_0(x, y, w) = -L_{x_0,w} \left(\widetilde{\Phi}(x, \cdot, w) \right) (y), \\ \widetilde{a}_{n+1}(x, y, w) = -[L_{x_0,w} \circ H_{x,x_0,w}](\widetilde{a}_n(x, \cdot, w))(y) \text{ for all } n \geq 0. \end{cases}$$

So it is sufficient to prove that the function $\widetilde{a}(x, y, w) := \sum_{n \geq 0} \widetilde{a}_n(x, y, w)$ is well-defined, is continuous for all $x - x_0$ small enough with $x \leq X$ and $y \leq X$, and is such that $x \mapsto \widetilde{a}(x, y, w) \in L^2_y([0, X])$ is continuously differentiable. Indeed, by uniqueness of the solution of equation (2.36), $\widetilde{a}(x, y, w)$ will be a local extension of $\widetilde{A}(x, y, w)$ to $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \times [0, X]$. Moreover, the equation (2.36) will be true for all (x, y, w) and $\widetilde{A}$ holomorphic in the usual sense.

From Lemmas 2.3, 2.5 and 2.6, we see by induction that, for all $n \geq 0$, $\widetilde{a}_n(x, y, w)$ is continuous on $V_0 \times [0, X]$ and the application $x \in V_0 \mapsto \widetilde{a}_n(x, y, w) \in L^2_y([0, X])$ is continuously differentiable. Thus it is sufficient to prove that the following series

$$\sum_{n \geq 0} \|\widetilde{a}_n(\cdot, w)\|_\infty \text{ and } \sum_{n \geq 0} \sup_{x \in V_0} \left\| \frac{\partial \widetilde{a}_n}{\partial x}(x, y, w) \right\|_{L^2_y([0,X])}$$

are convergent. By Lemmas 2.5 and 2.6, one has for all $n \geq 0$ and η small enough,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{a}_{n+1}(\cdot, w)\|_\infty &\leq \eta \left(1 + x_0 \left\| \widetilde{\Phi}(\cdot, w) \right\|_\infty \|L_{x_0,w}\|_{L^2([0,x_0])} \right) \left\| \widetilde{\Phi}(\cdot, w) \right\|_\infty \|\widetilde{a}_n(\cdot, w)\|_\infty \\ &\leq \frac{\|\widetilde{a}_n(\cdot, w)\|_\infty}{4}, \end{aligned}$$

then $\|\widetilde{a}_n(\cdot, w)\|_\infty \leq \frac{\|\widetilde{a}_0(\cdot, w)\|_\infty}{4^n}$ and this gives the convergence of the first series.

In the same manner, for all $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \widetilde{a}_{n+1}}{\partial x}(x, y, w) \right\|_{L^2_y([0,X])} &\leq \left(1 + X \left\| \widetilde{\Phi}(\cdot, w) \right\|_\infty \|L_{x_0,w}\|_{L^2([0,x_0])} \right) \sqrt{X} \left\| \widetilde{\Phi}(\cdot, w) \right\|_\infty \\ &\quad \times \left(\|\widetilde{a}_n(\cdot, w)\|_\infty + \sqrt{\eta} \sup_{x \in V_0} \left\| \frac{\partial \widetilde{a}_n}{\partial x}(x, y, w) \right\|_{L^2_y([0,X])} \right) \end{aligned}$$

uniformly on $x \in V_0$. Set

$$C_0(X, x_0, w) = \max\left\{\|\widetilde{a}_0(\cdot, w)\|_\infty,\ \sqrt{X}\left\|\widetilde{\Phi}(\cdot, w)\right\|_\infty \left(1 + X\left\|\widetilde{\Phi}(\cdot, w)\right\|_\infty \|L_{x_0,w}\|_{L^2([0,x_0])}\right)\right\},$$

assume that $\eta \leq \frac{1}{16C_0^2}$, choose an integer $N_0 = N_0(X, x_0, w)$ such that for all $n \geq N_0$, $\frac{C_0}{4^n} \leq \frac{n+1}{2^{n+2}}$, and lastly set

$$C_1 = C_1(X, x_0, w) = \max\left\{C_0,\ 2^{N_0} \sup_{x \in V_0}\left\|\frac{\partial \widetilde{a}_{N_0}}{\partial x}(x, y, w)\right\|_{L^2_y([0,X])}\right\}.$$

So it is sufficient to prove by induction that for all $n \geq N_0$

$$\sup_{x \in V_0}\left\|\frac{\partial \widetilde{a}_n}{\partial x}(x, y, w)\right\|_{L^2_y([0,X])} \leq C_1 \frac{n+1}{2^n}.$$

Indeed, if it is true for any $n \geq N_0$ one has from above

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in V_0}\left\|\frac{\partial \widetilde{a}_{n+1}}{\partial x}(x, y, w)\right\|_{L^2_y([0,X])} &\leq C_0\left(\frac{C_0}{4^n} + \sqrt{\eta}\, C_1 \frac{n+1}{2^n}\right)\\
&\leq C_1\left(\frac{C_0}{4^n} + \frac{n+1}{2^{n+2}}\right)\\
&\leq C_1 \frac{n+2}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

□

Now we want to prove the following lemma, which is an estimate of the norm of $L_{x,w}$.

Lemma 2.8. For all $x > 0$ and $w \in \mathbb{C}_+$, for all $h \in L^2([0, x])$,

$$\|h\|_{L^2([0,x])} \leq \left\|h(y) + \int_0^x h(s)\widetilde{\Phi}(s, y, w)ds\right\|_{L^2_y([0,x])}.$$

Proof.
One has

$$\left\|h(y) + \int_0^x h(s)\widetilde{\Phi}(s, y, w)ds\right\|^2_{L^2_y([0,x])} \geq \int_0^x |h(y)|^2 dy + 2\Re \int_0^x \overline{h(y)}dy \int_0^x h(s)\widetilde{\Phi}(s, y, w)ds$$

and the inequality follows from (2.38).

□

The proof of Proposition 2.5 will be complete with the last lemma of this section.

Lemma 2.9. The function $\widetilde{A}(x,y,w)$ is polynomially bounded on w : for all $X \geq 1$ and all $w \in \mathbb{C}_+$,

$$\sup_{y\leq x\leq X}\left|\widetilde{A}(x,y,w)\right|,\ \sup_{x\leq X}\left\|\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,y,w)\right\|_{L^2_y([0,x])},\ \sup_{x\leq X}\left|\frac{d}{dx}\widetilde{A}(x,x,w)\right| \leq C(X)(1+|w|)^\alpha$$

(where α does not depend on X).

Proof.
In the proof we will use the same notation for different constants $C(X)$ and α.
First, by Lemmas 2.8 and 2.3, for all $x \in [0,X]$,

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{A}(x,y,w)\right\|_{L^2_y([0,x])} &\leq \left\|\widetilde{A}(x,y,w)+\int_0^x \widetilde{A}(x,s,w)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds\right\|_{L^2_y([0,x])}\\ &= \left\|\widetilde{\Phi}(x,y,w)\right\|_{L^2_y([0,x])}\\ &\leq C(X)(1+|w|)^\alpha.\end{aligned}$$

It follows that for all $0 \leq y \leq x \leq X$

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{A}(x,y,w)\right| &= \left|\int_0^x \widetilde{A}(x,s,w)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds+\widetilde{\Phi}(x,y,w)\right|\\ &\leq \left\|\widetilde{A}(x,s,w)\right\|_{L^2_s([0,x])}\left\|\widetilde{\Phi}(s,y,w)\right\|_{L^2_s([0,x])}+\left\|\widetilde{\Phi}(\cdot,w)\right\|_\infty\end{aligned}$$

then

$$\left\|\widetilde{A}(\cdot,w)\right\|_\infty \leq C(X)(1+|w|)^\alpha$$

and this proves the first estimate.

Next, by differentiating the equation (2.36) with respect to x, one has in the space $L^2_y([0,x])$ for all $x \leq X$

$$\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,y,w)+\int_0^x \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,s,w)\widetilde{\Phi}(s,y,w)ds+\widetilde{A}(x,x,w)\widetilde{\Phi}(x,y,w)+\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w)=0.$$

Then by Lemma 2.8

$$\left\|\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,y,w)\right\|_{L^2_y([0,x])} \leq \left\|\widetilde{A}(x,x,w)\widetilde{\Phi}(x,y,w)+\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,y,w)\right\|_{L^2_y([0,x])}$$

and the second estimate follows by Lemma 2.3.

In order to prove the last estimate, take $y = x$ in the equation (2.36) and differentiate to get (which is possible since by Lemma 2.3, $\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}$ exists in $L^2_y([0,X])$)

$$\frac{d}{dx}\widetilde{A}(x,x,w) + \int_0^x \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,s,w)\widetilde{\Phi}(s,x,w)ds$$
$$+\widetilde{A}(x,x,w)\widetilde{\Phi}(x,x,w) + \int_0^x \widetilde{A}(x,s,w)\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,s,w)ds + \frac{d}{dx}\widetilde{\Phi}(x,x,w) = 0,$$

since $\widetilde{\Phi}(x,s,w) = \widetilde{\Phi}(s,x,w)$. It follows that for all $x \le X$

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dx}\widetilde{A}(x,x,w)\right| \;&\le\; \left|\widetilde{A}(x,x,w)\widetilde{\Phi}(x,x,w)\right| + \left\|\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,s,w)\right\|_{L^2_s([0,x])} \left\|\widetilde{\Phi}(s,x,w)\right\|_{L^2_s([0,x])} \\ &\quad + \left\|\widetilde{A}(x,s,w)\right\|_{L^2_s([0,x])} \left\|\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x}(x,s,w)\right\|_{L^2_s([0,x])} + \left|\frac{d}{dx}\widetilde{\Phi}(x,x,w)\right|,\end{aligned}$$

thus the last estimate follows.

Lastly, the exponent α does not depend on X since this is true for $\widetilde{\Phi}$.

□

2.4 Formulas of Gelfand-Levitan type as analytic families

Now we will prove the following proposition that has been formulated as Proposition 2.1 in the introduction and says that formulas (2.3) and (2.5) come from families of potentials of exponential type (and not only of finite order).

Proposition. *Let us fix $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, with $m \ge 2$.*

Consider the $2N$-family $GL(\zeta)$ of potentials of exponential type associated to the following function

$$\Psi(x,\zeta) := \det \widetilde{W}_{j,k}(x,\zeta), \tag{2.40}$$

where

$$\widetilde{W}_{j,k}(x,\zeta) \;=\; \frac{2\sinh(\zeta_j+\zeta_k)x}{\zeta_j+\zeta_k} - (1-\delta_{j,k})\frac{2\sinh(\zeta_j-\zeta_k)x}{\zeta_j-\zeta_k} - \delta_{j,k}\left(2x - \exp\left(\zeta_{j+N}\right)\right),$$

$j,k = 1,\ldots,N$. Then, for all large enough ω and all $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, the approximating formula Q^0_ω in (2.3) is obtained by taking $N = N(\omega)$, $\gamma_{2N(\omega)} = 2/\omega^2$ and

$$\zeta_j(\omega^2 Q) = \xi_j(\omega^2 Q)\,, \quad \zeta_{j+N(\omega)}(\omega^2 Q) = \ln\frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)},\; j = 1,\ldots,N(\omega). \tag{2.41}$$

In addition, this choice is possible in some domain $\Omega_{2N(\omega)}$, whose coefficients B and r only depend on $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$.

Similarly, consider the following functions defined on $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}_+$ as

$$\widetilde{\chi}(x,\zeta,w) := -\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{A}(x,x,w) \quad \text{and} \quad \widetilde{\Psi}(x,\zeta,w) := \det \widetilde{T}_{j,k}(x,\zeta,w), \tag{2.42}$$

where $\widetilde{A}$ is the solution of the previous section and, for $j,\ k = 1,\dots,N$,

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_{j,k}(x,\zeta,w) &= \exp\left(\zeta_{N+j}\right)\delta_{j,k}\\ &+ 4\int_0^x \left(\sinh(\zeta_j t) + \int_0^t \widetilde{A}(t,s,w)\sinh(\zeta_j s)ds\right)\\ &\quad\times\left(\sinh(\zeta_k t) + \int_0^t \widetilde{A}(t,s,w)\sinh(\zeta_k s)ds\right)dt.\end{aligned}$$

Then the associated family $GL_g(\zeta,w)$ is a $(2N,1)$-generalized family of exponential type. Moreover, for all large enough ω and all $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, the approximating formula Q_ω in (2.5) is obtained by taking $N = N(\omega)$, $\gamma_{2N(\omega),1} = 2/\omega^2$ and the following choice, which is possible in some $\Omega_{2N(\omega),1}$:

$$w(\omega^2 Q) = \omega^2 Q(0), \tag{2.43}$$
$$\zeta_j(\omega^2 Q) = \xi_j(\omega^2 Q),\ \zeta_{j+N(\omega)}(\omega^2 Q) = \ln\frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)}, j = 1,\dots,N(\omega).$$

Proof.

We begin by the first part of the statement. First, the $2N$-family associated to Ψ in (2.40) is of exponential type with respect to $\zeta \in \mathbb{C}^N$. This is true for all $\widetilde{W}_{j,k}(x,\zeta)$ since, for all $j,\ k = 1,\dots,N$ and all $x \in [0,X]$,

$$\left|\frac{\sinh(\zeta_j \pm \zeta_k)x}{\zeta_j \pm \zeta_k}\right| \le \sum_{n\ge 0}\frac{(|\zeta_j| + |\zeta_k|)^{2n}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \le X\exp X(|\zeta_j| + |\zeta_k|).$$

Then this is still true for each product $\prod_{j=1}^N \widetilde{W}_{j,\tau(j)}(x,\zeta)$ and there are $N!$ such products in the determinant. One also has the same estimate for $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$.

On the other hand, for any domain Ω_{2N} and $\forall\,\zeta \in \Omega_{2N}$,

$$\left|\det\left(\widetilde{W}_{j,k}\right)(0)\right|^{-1} = \prod_{j=1}^N \left|\exp\left(-\zeta_{N+j}\right)\right| \le \exp(\|\zeta\|_1) \le \exp\left(\alpha N^\beta\right).$$

Next, by applying Corollary 2.2 to a given $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, there exists $n_1 > 0$ such that $\omega \le \frac{N(\omega)}{n_1}$, for all large enough ω and all $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$. Furthermore, for all $j = 1,\dots,N(\omega)$,

$|\xi_j(\omega^2 Q)| \leq \alpha\omega$ and $\left|\ln \frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)}\right| \leq \beta\omega^2$, where α and β only depend on $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$. It follows that we can choose large enough B such that

$$|\xi_j(\omega^2 Q)|, \ \left|\ln \frac{4\xi_j^2(\omega^2 Q)}{C_j(\omega^2 Q)}\right| \leq B(2N(\omega))^2,$$

i.e. the choice (2.41) is possible in the domain $\Omega_{2N(\omega)}$ associated to B and $r = 2$.

Finally, $\gamma_{2N(\omega)} = 2/\omega^2$ and $1/\gamma_{2N(\omega)}$ are polynomially bounded on $N(\omega)$ (although they do not only depend on $N(\omega)$).

Now we prove the second part of the proposition. First, by Proposition 2.5, the function $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{A}(x,x,w)$ exists, is continuous with respect to x and is holomorphic of polynomial type with respect to $w \in \mathbb{C}_+$ (in particular, the restriction of $\widetilde{\chi}$ to $\mathbb{R}^+$ is of polynomial type with respect to w).

Next, each function $\widetilde{T}_{j,k}$ is of class C^2 with respect to x : indeed, $\widetilde{A}(x,y,w)$ is continuous with respect to (x,y), $0 \leq y \leq x$. Therefore

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{T}_{j,k}}{\partial x}(x,\zeta,w) &= 4\left(\sinh(\zeta_j x) + \int_0^x \widetilde{A}(x,s,w)\sinh(\zeta_j s)ds\right) \\
&\quad \times \left(\sinh(\zeta_k x) + \int_0^x \widetilde{A}(x,s,w)\sinh(\zeta_k s)ds\right).
\end{aligned}$$

Since the application $x \mapsto \widetilde{A}(x,y,w) \in L^2_y([0,x])$ is continuously differentiable, it follows that, for all j, $k = 1,\ldots,N$, the following function

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \widetilde{T}_{j,k}}{\partial x^2}(x,\zeta,w) &= 4\left(\zeta_j\cosh(\zeta_j x) + \widetilde{A}(x,x,w)\sinh(\zeta_j x) + \int_0^x \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,s,w)\sinh(\zeta_j s)ds\right) \\
&\quad \times \left(\sinh(\zeta_k x) + \int_0^x \widetilde{A}(x,s,w)\sinh(\zeta_k s)ds\right) \\
&\quad + 4\left(\sinh(\zeta_j x) + \int_0^x \widetilde{A}(x,s,w)\sinh(\zeta_j s)ds\right) \\
&\quad \times \left(\zeta_k\cosh(\zeta_k x) + \widetilde{A}(x,x,w)\sinh(\zeta_k x) + \int_0^x \frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x}(x,s,w)\sinh(\zeta_k s)ds\right)
\end{aligned}$$

exists and is continuous with respect to $x \in \mathbb{R}^+$. Hence $\widetilde{\Psi}$ is of class C^2 with respect to x, and $\widetilde{\Psi}$, $\frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial x}$ and $\frac{\partial^2\widetilde{\Psi}}{\partial x^2}$ are holomorphic of exponential type with respect to $(\zeta,w) \in \mathbb{C}^{2N} \times \mathbb{C}_+$.

On the other hand, for all $(\zeta,w) \in \mathbb{C}^{2N} \times \mathbb{C}_+$, $\frac{\partial \widetilde{T}_{j,k}}{\partial x}(0,\zeta,w) = 0$, therefore

$$\frac{\partial\widetilde{\Psi}}{\partial x}(0,\zeta,w) = 0.$$

Moreover, for any domain $\Omega_{2N,1}$ and $\forall\,(\zeta,w)\in\Omega_{2N,1}$,

$$\frac{1}{\left|\widetilde{\Psi}(0,\zeta,w)\right|}\leq \exp(\|\zeta\|_1)\leq \exp\left(\alpha N^{\beta}\right).$$

Lastly, the choice of parameters (2.43) gives the formula Q_ω in (2.5) since $\widetilde{A}\,(x,y,\omega^2Q(0)) = A_\omega(x,y)$. We know that there exists B_1 which only depends on $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$, such that $|\xi_j(\omega^2Q)|$, $\left|\ln\dfrac{4\xi_j^2(\omega^2Q)}{C_j(\omega^2Q)}\right|\leq B_1(2N(\omega))^2$. Moreover, by (2.33) in Corollary 2.2, it is sufficient to take $B_2\geq n_1^2q$ and $\varepsilon\leq\dfrac{1}{qn_2^2}$ in order to get

$$\omega^2Q(0)\in\left[\varepsilon, B_2(2N(\omega)+1)^2\right],$$

for all large enough ω and all $Q\in\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$. It follows that the choice (2.43) will be possible in the associated domain $\Omega_{2N(\omega),1}$.

□

In addition, we prove the following theorem that has been given as Theorem 2.3.

Theorem. Consider an N-family $GL(\zeta)$ and a subset $\mathcal{K}_{m,p}$, with $m\geq 2$. Then, for any $[0,X]$,

$$D(\mathcal{K}_{m,p},GL)_{L^\infty([0,X])}\geq\frac{\widetilde{c}_{m+1,p}}{(N\ln N)^{m+1}}.$$

Similarly, consider an (N,M)-generalized family $GL_g(\zeta,w)$ and a subset $\mathcal{K}_{m,p}$. Then, for any $[0,X]$,

$$D(\mathcal{K}_{m,p},GL_g)_{L^\infty([0,X])}\geq\frac{\widetilde{c}_{m,p}}{((N+M)\ln(N+M))^{m}}.$$

Proof.
Since $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}\subset\mathcal{K}_{m,p}$, it is sufficient to prove the theorem with some $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,q}$ instead of $\mathcal{K}_{m,p}$.

The restriction to $[0,1]$ of an N-family (resp. (N,M)-generalized family) of potentials of finite order being an N-family (resp. (N,M)-generalized family) of Gelfand-Levitan type, we can apply Corollary 1.33 from Chapter 1 with $l=m$ (>1). In addition, we know by (1.49) from Remark 1.34 that the function h giving the lower bound satisfies, for all $x\in[0,1]$,

$$p_1\leq h(x)\leq p,$$

where p_1 only depends on m and p.

It follows that we can extend h to $\mathbb{R}^+$ to a function Q that is in $\widetilde{\mathcal{K}}_{m,p,p_1}$ (and therefore the bound $\widetilde{c}_{m,p}$ does not depend on X).

□

Lastly, we can prove the following theorem given as Theorem 2.1 in the introduction.

Theorem. For all large enough ω and for any $[0,X]$, we have

$$\sup_{Q\in\mathcal{K}_{2,p}} \sup_{x\in[0,X]} \left| \int_0^x Q(t)dt - \int_0^x Q_\omega^0(t)dt \right| \geq \frac{c_{2,p}}{(\omega \ln \omega)^3}. \tag{2.44}$$

Similarly, for all large enough ω and for any $[0,X]$,

$$\sup_{Q\in\mathcal{K}_{m+1,p}} \sup_{x\in[0,X]} |Q(x) - Q_\omega(x)| \geq \frac{c_{m+1,p}}{(\omega \ln \omega)^{m+1}}. \tag{2.45}$$

Proof.
It is sufficient to prove the first part (the proof of the second part being similar). $\mathcal{K}_{2,p}$ being given, we consider, by the proof of the previous theorem, the associated subset $\widetilde{\mathcal{K}}_{2,p,p_1}$. Now we can apply Proposition 2.1 with the $2N$-family $GL(\zeta)$ from (2.40) to get the associated $2N$-domain Ω_{2N}. An application of the first part of the previous theorem (for $m = 2$) gives

$$\sup_{Q\in\mathcal{K}_{2,p,p_1}} \inf_{\zeta\in\Omega_{2N}} \left\| \int_0^\cdot h(t)dt - GL(\zeta) \right\|_{L^\infty([0,X])} \geq \frac{\widetilde{c}_{3,p,p_1}}{(2N \ln(2N))^3}.$$

Lastly, the particular choice (2.41) for ζ (that is possible in Ω_{2N}) gives formula Q_ω^0 in (2.3). By the bounds (2.11), $N(\omega)/\omega$ is uniformly bounded on $Q \in \widetilde{\mathcal{K}}_{2,p,p_1}$. The assertion follows since $\widetilde{\mathcal{K}}_{2,p,p_1} \subset \mathcal{K}_{2,p}$.

□

2.5 Other possible applications

We give here some examples of problems in which we would like to obtain similar results to that in Theorem 2.1.

2.5.1 Other inverse problems in one dimension

Theorem 1.2 p. 260 in [16] gives an original result in the case of L^2-approximation : if u is a negative potential of class C^1, has a finite number of critical points and tends to 0 so fast that $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)\,|u(x)|dx < +\infty$, then $L^2 - \lim_{\varepsilon\to 0} u(\cdot,\varepsilon) = u$, where

$$u(x,\varepsilon) = -2\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I + G(x,\varepsilon))$$

with

$$G(x,\varepsilon)=\varepsilon\left(\frac{\exp\left(-\dfrac{\eta_j+\eta_k}{\varepsilon}x\right)}{\eta_j+\eta_k}c_jc_k\right)$$

and $1\leq j,\,k\leq N(\varepsilon)$. The $-\eta_j^2$ (resp. c_j) are the semi-classical approximations of eigenvalues (resp. norming constants) of the corresponding Sturm-Liouville operator $-\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}+u$ (one has $\phi_j(x)\sim c_j\exp\left(-\eta_j x/\varepsilon\right)$, $x\to+\infty$, where $\int|\phi_j(x)|^2dx=1$).

We have an analytic family of potentials with exponential type dependence on parameters η_j and $\ln c_j$.

In [22], V. Marchenko deals with the problem of reconstruction by knowing the spectral measure $\sigma(d\tau)$ of the operator $-\dfrac{d^2}{dx^2}-\omega^2 Q$ on any interval $[-A,A]$. The precision of approximation is at order $1/A^m$, where Q has m derivatives. We think that this is the optimal precision. Therefore we hope to get a negative result with $1/(A\ln A)^m$ as lower bound.

2.5.2 Inverse problems in several variables

In [23], R. Novikov gives a method for nonlinear approximation, in the case of dimension $s=3$, of a potential from its scattering amplitude at fixed energy E. If Q has m continuous derivatives, the precision is of order $\dfrac{1}{E^{(m-3-\varepsilon)/2}}$ in the uniform norm (for any fixed $\varepsilon>0$).

In this case, the number of parameters N is of order $E^{3/2}$. We hope to apply our negative results in order to get a lower bound for nonlinear approximation at order $1/\left(E^{3/2}\right)^{m/3}=1/E^{m/2}$, and deduce some answers for the optimality of this method of reconstruction.

In [21], N. Mandache gives a negative result by showing an exponential instability for the reconstruction of a potential from the Dirichlet-to-Neumann map of its Schrödinger operator. We hope to improve this negative result in order to make it close to the positive case of approximation.

Bibliographie

[1] F. Brau and F. Calogero. Upper and lower limits for the number of S-wave bound states in an attractive potential. *J. Math. Phys.*, 44 :1554–1575, 2003.

[2] F. Brau and F. Calogero. Upper and lower limits on the number of bound states in a central potential. *J. Phys. A*, 36 :12021–12063, 2003.

[3] F. Calogero. Upper and lower limits for the number of bound states in a given central potential. *Comm. Math. Phys.*, 1 :80–88, 1965.

[4] K. Chadan and P. C. Sabatier. *Inverse problems in quantum scattering theory.* Springer, New York, 1989.

[5] A. Gabrielov. Multiplicities of pfaffian intersections, and the Lojasiewicz inequality. *Selecta Math. (N.S.)*, 1, 1995.

[6] I. M. Gelfand and B. M. Levitan. On the determination of a differential equation from its spectral function. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1, 1955.

[7] M.J. Greenberg. *Lectures on algebraic topology.* W.A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[8] B. Haas. A simple counterexample to Kouchnirenko's conjecture. *Beiträge Algebra Geom.*, 43, 2002.

[9] G. M. Henkin and N. N. Novikova. The reconstruction of the attracting potential in the Sturm-Liouville equation through characteristics of negative discrete spectrum. *Stud. Appl. Math.*, 97, 1996.

[10] A. Irigoyen. An application of approximation theory by nonlinear manifolds in Sturm-Liouville inverse problems. *Inverse Problems*, 23 :537–561, 2007.

[11] A. Irigoyen. Approximation de compacts fonctionnels par des variétés analytiques. *Journal of Functional Analysis*, 244 :590–627, 2007.

[12] L. D. Ivanov. The approximation of l-smooth functions by rational ones in the integral metric (in Russian). *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 36 :234–239, 1972.

[13] L. D. Ivanov. *Variations of sets and functions (in Russian).* Edited by A. G. Vitushkin. Izdat. "Nauka", Moscow, 1975.

[14] A. G. Khovanskii. *Fewnomials.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[15] A. N. Kolmogorov and V. M. Tihomirov. ε-entropy and ε-capacity of sets in functional spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 17, 1961.

[16] P. D. Lax and C. D. Levermore. The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation, I–III. *Comm. Pure Appl. Math.*, 36 :253–290, 571–593, 809–830, 1983.

[17] B. M. Levitan. *Inverse Sturm-Liouville problems.* English transl. VNU Science Press, Vetrecht, 1987.

[18] G. G. Lorentz. Metric entropy, widths, and superpositions of functions. *Amer. Math. Monthly*, 69 :469–485, 1962.

[19] G. G. Lorentz. Entropy and its applications. *J. Soc. Indust. Appl. Ser. B Numer. Anal.*, 1 :97–103, 1964.

[20] G. G. Lorentz. Metric entropy and approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 :903–937, 1966.

[21] N. Mandache. Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation. *Inverse Problems*, 17 :1435–1444, 2001.

[22] V. A. Marchenko. *Spectral theory of Sturm-Liouville operators (in Russian).* Izdat. "Naukova Dumka", Kiev, 1972.

[23] R. G. Novikov. The $\overline{\partial}$-approach inverse scattering at fixed energy in three dimensions. *IMRP Int. Math. Pap.*, 6 :287–349, 2005.

[24] O. A. Oleinik and I. B. Petrovskii. On the topology of real algebraic surfaces. *Transl. Amer. Math. Soc.*, 7 :399–417, 1962.

[25] A. Pinkus. *n-widths in approximation theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[26] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics, I–IV.* Academic Press, New York-San Francisco-London, 1978.

[27] J.-J. Risler. Hovansky's theorem and complexity theory. *Rocky Mountain J. Math.*, 4 :851–853, 1984.

[28] J.-J. Risler. Complexité et géométrie réelle (d'après A. Khovanskii). *Séminaire Bourbaki*, 1986.

[29] J.-J. Risler. Some aspects of complexity in real algebraic geometry. *J. Symbolic Comput.*, 5 :109–119, 1988.

[30] H. S. Shapiro. Some negative theorems of approximation theory. *Michigan Math. J.*, 11 :211–217, 1964.

[31] R. Thom. Sur l'homologie des variétés algébriques réelles. *Differential and Combinatorial Topology*, pages 255–265, 1965.

[32] V. M. Tihomirov. Diameters of sets in functional spaces and the theory of best approximations (in Russian). *Russian Math. Surveys*, 15, 1960.

[33] T. A. Povzner I. V. Savin V. M. Markushevich, N. N. Novikova and V. E. Fedorov. Method of determining the acoustic profile from normal monochromatic waves. *Computational Seismology, Mathematical methods in Seismology and Geodynamics*, 19 :127–136, 1986.

[34] V.A. Vassiliev. *Introduction to topology*. AMS, 2001.

[35] A. G. Vitushkin. *Theory of the transmission and processing of information*. Pergamon Press, New York-Oxford-London-Paris, 1961.

[36] H. E. Warren. Partitions by real algebraic varieties, and applications to questions of nonlinear approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :192–194, 1967.

[37] H. E. Warren. Lower bounds for approximation by nonlinear manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 133 :167–178, 1968.

[38] H. E. Warren. A construction of certain nonlinear approximating families. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21 :467–470, 1969.