THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Specialité :

MATHÉMATIQUES

présentée par :

Amadou Lamine FALL

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

BORNES POUR LA RÉGULARITÉ DE CASTELNUOVO-MUMFORD

Soutenue le 26 septembre 2008 devant le jury :

Marc CHARDIN	(*I.M.J. , Directeur de thèse*)
Monique LEJEUNE-JALABERT	(*U.V.S.Q., Rapporteur*)
Jean-Pierre JOUANOLOU	(*U. Louis Pasteur, Rapporteur*)
Christian PESKINE	(*U. Pierre et Marie Curie, Examinateur*)
Tim RÖMER	(*U. Osnabrück, Examinateur*)
Aron SIMIS	(*U. Federal de Pernambuco, Examinateur*)

Remerciements

Je suis heureux de pouvoir exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Marc Chardin. Qu'il soit assuré de ma sincère gratitude pour la bienveillance et la très grande disponibilité qu'il a toujours manifestées à mon égard et pour m'avoir transmis un nombre considérable de connaissances.

À Monique Lejeune-Jalabert et Jean-Pierre Jouanolou, qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer ce texte.

Je remercie Christian Peskine, Tim Römer et Aron Simis qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membre du jury.

Je remercie mes jeunes frères : Masseye Gaye, Assane Diop, Ibrahima Gueye, Abass, Sagna, Rawane Samb,Anwar, Mounir Nisse, qui ont rendu agréable mes séjours à Paris.

Mes remerciements vont aussi à mon ami Rached Mneimné qui a rempli ma bibliothèque de livres.

Je remercie mes parents Awa Niang, Fatou Fall, Babacar Fall, Ndaraw Fall ; je leur dédie ce travail.

Comment oublier ma douce épouse Anta Goumbala et mes enfants Mouhamed, Cheikh Ahmed Tidiane, Babacar.

J'exprime ma gratitude à Mamour Sankhe et à Cheikhou Sylla du SUDES.

Je remercie l'équipe de Théorie des nombres et l'Institut mathématique de Jussieu qui m'ont donné un cadre idéal de travail.

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans le soutien financier de la Coopération française et de l'Agence universitaire de la francophonie

2

Table des matières

Introduction Générale

La régularité de Castelnuovo-Mumford est un invariant important en algèbre commutative et en géométrie algébrique. Elle mesure les notions suivantes.

- La complexité algébrique d'un idéal ou d'un module gradué. Elle mesure le degré maximal des syzygies apparaissant dans une résolution libre minimale graduée de l'idéal ou du module. Elle donne également le plus grand degré des éléments d'une base de Gröbner pour l'ordre lexicographique inverse.
- Elle est une mesure effective dans les théorèmes d'annulation de Grothendieck et de Serre.
- Elle borne le degré à partir duquel la dimension, comme espace vectoriel sur le corps de base des composantes homogènes d'un idéal ou d'un module gradué, devient une expression polynomiale.
- Le degré μ à partir duquel l'idéal ou le module obtenu en ne conservant que les composantes homogènes de degré au moins μ d'un idéal ou d'un module gradué donné admet une résolution linéaire. Cette caractérisation de la régularité de Castelnuovo-Mumford a permis (entre autres) à David Mumford de donner une preuve simplifiée de l'existence du schéma de Hilbert.

Dans [2], Bayer et Stillman ont montré que si R est un anneau de polynômes muni de l'ordre lexicographique inverse, I un idéal homogène de R et $\operatorname{gin} I$ son idéal initial générique, alors

$$\operatorname{reg} I = \operatorname{reg}(\operatorname{gin} I).$$

La régularité de I est donc le maximum des degrés des générateurs de son idéal initial générique pour l'ordre lexicographique inverse. Cette connection a motivé beaucoup de recherches pour les bornes de la régularité de Castelnuovo-Mumford en terme des degrés des générateurs d'un idéal ou d'un module gradué.

Dans cette direction Bertram, Ein et Lazarsfeld ont montré dans [3] que si X une variété projective complexe, lisse et irréductible de codimension e, définie par des hypersurfaces de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$, alors

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_e - e + 1.$$

Dans [25] Chardin et Ulrich donnent une généralisation des résultats de Bertram-Ein-Lazarsfeld dans le cas ou le corps de base est de caractéristique nulle.

Soit k un corps de caractéristique zéro et $S \subset \mathbb{P}^n_k$ un schéma équidimensionnel de codimension e sans composante immergée et défini par des formes de degré $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$. Si S est localement intersection complète sauf pour un nombre fini de points et ne possède que des singularités rationnelles en dehors d'un schéma de dimension 1, Chardin et Ulrich montrent que

$$\operatorname{reg}(I_S) \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_e - e + 1.$$

Soit k un corps et R un anneau de polynômes sur k, $I = (f_1, \cdots, f_s) \subset R$ un idéal engendré par des formes de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s \geq 1$, $S = \operatorname{Proj}(R/I) \subset \mathbb{P}^n_k$, un schéma localement intersection complète de codimension r, avec $1 < r < n$. Supposons que S a au plus des singularités irrationnelles isolées si la caractéristique de k est nulle ou a au plus des singularités F-rationnelles si la caractéristique de k est strictement positive, alors ils montrent dans le même article que

$$\operatorname{reg}(R/I) \leq \left(\frac{(\dim S + 2)!}{2}\right)(d_1 + \cdots + d_r - r - 1).$$

Les exemples de Mayr et Meyer montrent qu'il existe des idéaux dont la régularité est de l'ordre de d^{c^n} avec $c > 1$, où d est le maximum des degrés des générateurs de l'idéal et n le nombre de variables. Dans cette direction, pour un corps k de caractéristique zéro et un idéal I d'un anneau de polynômes $R = k[X_0, \cdots, X_n]$, engendré en degrés au plus d, Galligo ([Ga1], [Ga2]) et Giusti ([Giu]) ont prouvé la borne suivante :

$$\operatorname{reg}(I) \leq (2d)^{2^{n-1}}.$$

Utilisant un argument de Mumford ([64]), Bayer et Mumford ([1]) ont obtenu en toute caractéristique la borne plus faible suivante :

$$\operatorname{reg}(I) \leq (2d)^{n!}.$$

Dans [16] Caviglia et Sbarra montrent que la borne de Galligo et Giusti est valide en toute caractéristique.

Notre travail s'inscrit dans le cadre de la recherche de bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford en fonction des degrés des équations de définition et constitue une continuation des travaux cités ci-dessus.

Il est constitué de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous donnons des généralités sur la régularité de Castelnuovo-Mumford. Il n'y a aucun résultat nouveau dans ce chapitre.

Le chapitre 2 est constitué de deux parties. Dans la première partie, nous étudions la régularité de Castelnuovo-Mumford des idéaux en petite dimension. Dans cette perspective nous avons obtenu le résultat suivant, qui améliore en dimension 2 les bornes de Caviglia et Sbarra :

Théorème 0.1. *Soit I un idéal d'un anneau de polynômes $R = k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ de codimension m, engendré en degrés $d_1 \geq d_2 \cdots \geq d_s$ avec $s > m$. Soit $\mathcal{Z}$ le groupe de points défini par une section générale de $X := \mathrm{Proj}(R/I)$, et $i_{\mathcal{Z}} := \mathrm{indeg}(I_{\mathcal{Z}})$. Alors,*

$$\mathrm{reg}(I) \leq (d_1 d_2 \cdots d_m - \deg(\mathcal{Z}) + 1)(d_1 + d_2 + \cdots + d_{m+1} - m - i_{\mathcal{Z}}) + i_{\mathcal{Z}}.$$

La deuxième partie est consacrée à la recherche d'exemples d'idéaux de grande régularité.

Soit $m \geq 2$, $R = k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ et $\mathfrak{b}_{m,n}$ l'idéal de la courbe monomiale $\mathcal{C}_{m,n} \subset \mathbb{P}^{m+1}$ paramétrée sur la carte affine $X_0 = 1$ par

$$(1 : t : t^{n^m} : t^{n^{m-1}(n+1)} : \cdots : t^{n(n+1)^{m-1}}).$$

Nous construisons, à partir des générateurs de l'idéal $\mathfrak{b}_{m,n}$, un idéal $I_{m,n}$ définissant une intersection complète de codimension m et par des techniques de liaison, nous construisons à partir de $I_{m,n}$, un idéal $\mathcal{I}_{m,n}$ vérifiant

$$\mathrm{reg}(\mathcal{I}_{m,n}) \geq n^m + mn + 2^{m-2} - 2.$$

Dans le chapitre 3 nous étendons aux modules gradués de type fini les bornes connues pour les idéaux. Comme $\mathrm{reg}(I) = \mathrm{reg}(R/I)+1$, le cas des idéaux correspond aux modules cycliques engendrés en degré zéro. Pour prolonger le résultat aux modules quelconques, nous tenons compte des degrés des générateurs et de leurs relations.

Pour établir les résultats de ce chapitre nous procédons en deux étapes.

D'abord nous établissons des bornes dans le cas des modules de dimension au plus un. En second nous étendons aux modules la méthode de Caviglia et Sbarra, cette méthode permet de procéder par récurrence sur la dimension du module.

Pour la première étape nous employons un argument d'abord présenté par Gruson, Lazarsfeld et Peskine en prouvant des bornes pour la régularité des courbes réduites.

Cet argument montre qu'il n'est pas nécéssaire d'avoir une résolution libre graduée pour estimer la régularité de Castelnuovo-Mumford. Nous avons obtenu le résultat suivant qui généralise et améliore les bornes de Giusti, Galligo, Bayer, Mumford, Caviglia et Sbarra :

Théorème 0.2. *Soit R un anneau de Cohen-Macaulay gradué standard sur un anneau artinien local R_0 et $M \neq 0$ un R-module gradué de type fini. Supposons que M est engendré par n éléments de degrés non négatifs. Soit c et δ la codimension et la dimension du support de M ($c+\delta = \dim R$), respectivement. Si M est un R-module engendré en degré au plus $\kappa - 1$ et dont les relations sont de degrés au plus κ ; alors :*

- *(i) si* $\delta \leq 1$ *et* $c > 0$, $\operatorname{reg}(M) \leq \operatorname{reg}(R) + (\dim R + n - 1)\,\kappa - \dim R$ *;*
- *(i)' si* $\delta \leq 1$ *et* $c = 0$, $\operatorname{reg}(M) \leq \operatorname{reg}(R) + \kappa - 1$;
- *(ii) si* $\delta \geq 2$ *et* $c > 0$,

$$\operatorname{reg}(M) \leq \left[\deg(R)(\operatorname{reg}(R) + (c+n)\,\kappa - c)\binom{c+n-1}{c}\kappa^c\right]^{2^{\delta-2}} ;$$

- *(ii)' si* $\delta \geq 2$ *et* $c = 0$,

$$\operatorname{reg}(M) \leq [n \deg(R)(\operatorname{reg}(R) + \kappa)]^{2^{\delta-2}} .$$

Les conclusions de ce théorème sont assez générales, car elles sont valables pour des modules de dimension au plus un sur chaque R_0-algèbre graduée standard, où R_0 est un anneau local artinien et sur des modules de dimension quelconque sur une R_0-algèbre graduée de Cohen-Macaulay.

Pour démontrer ce théorème, nous sommes amenés à estimer la multiplicité (ou degré) d'un module supporté en dimension zéro et nous avons obtenu dans ce sens le théorème suivant :

Théorème 0.3. *Soit R un anneau gradué standard de Cohen-Macaulay et M un R-module gradué de codimension $c > 0$ engendré par n éléments de degrés $a_1, \cdots, a_n$ et dont le premier module de syzygie est engendré en degrés $b_1 \geq \cdots \geq b_s$.*

Alors, $s \geq c+n-1$ *et*

$$\deg(M) \leq \deg(R) \sum_{1\leq i_1\leq \cdots \leq i_c \leq n} \prod_{\ell=1}^{c} (b_{i_\ell+\ell-1} - a_{i_\ell}).$$

Dans le chapitre 4, nous étudions des bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford d'un schéma, admettant des singularités, en fonction des degrés des équations définissant le schéma, de sa dimension et de celle de son lieu singulier. Ce travail est une continuation des travaux de Bertram-Ein-Lazarsfeld, d'une part et de Chardin-Ulrich d'autre part.

Soit $R = k[X_0, \cdots X_n]$, un anneau de polynômes sur le corps k, $I \subset R$ un idéal homogène engendré par des éléments homogènes de degrés au plus D. Soit $X = \mathrm{Proj}(R/I)$ le schéma projectif sur k défini par I et d sa dimension. Soit δ la dimension du lieu singulier de X (avec la convention $\delta = -1$ si X est lisse). Si la caractéristique du corps k est nulle, X purement de codimension $r > 0$ et $\delta \leq 0$, Bertram-Ein-Lazarsfeld [3] dans le cas lisse et Chardin-Ulrich [25] dans le cas où les singularités sont isolées, ont montré la borne suivante :

$$\mathrm{reg}(I_X) \leq r(D-1)+1.$$

Dans ce chapitre, nous établissons le résultat suivant.

Théorème 0.4. *Soit X un schéma projectif sur un corps k, de dimension d et de codimension $r > 0$. Soit δ la dimension du lieu singulier de X et I_X l'idéal saturé définissant X. On suppose que X est défini par des équations de degrés au plus $D \geq 2$.*

1) *Si $\delta = -1$ ou $\delta = 0$ et la caractéristique de k est nulle, alors*

$$\mathrm{reg}(I_X) \leq r(D-1)+1.$$

2) *Si $\delta \leq 1$, alors* $\mathrm{reg}(I_X) \leq (\dim X)!(r(D-1)-1)+1$.

3) *Si $\delta \geq 2$ alors,*

$$\mathrm{reg}(I_X) \leq C_n D^{(n-\delta)2^{\delta-2}},$$

où C_n ne dépend que de n.

Pour établir nos bornes, nous procédons en deux étapes. Dans la première étape, nous établissons des bornes pour la régularité des schémas dont les singularités sont de type rationnel et localement intersection complète, hors d'un nombre fini de points. Nous utilisons pour cela la méthode de Chardin et Ulrich. Cette méthode, décrite dans [25], utilise des techniques de liaison, une récurrence sur la dimension et une version améliorée du théorème d'annulation de Kodaira.

Dans la deuxième étape, on se ramène au cas étudié dans la première étape, en utilisant un théorème de Bertini et une récurrence introduite par Caviglia et Sbarra dans [16] et développée dans le chapitre 3.

Chapitre 1

Généralités sur la régularité de Castelnuovo-Mumford

1.1 Introduction

Soit $R = k[X_1, \cdots, X_r]$ un anneau de polynômes sur un corps k, $\mathfrak{m} = (X_1, \cdots, X_r)$ et M un R-module gradué de type fini. Posons $b_i(M) = \max\{\mu / \operatorname{Tor}_i^R(M,k)_\mu \neq 0\}$ si $\operatorname{Tor}_i^R(M,k) \neq 0$ et $b_i(M) = -\infty$ sinon. Soit $H^0_{\mathfrak{m}}(M) = \{z \in M / \exists j, \mathfrak{m}^j z = 0\}$ et $H^i_{\mathfrak{m}}(-)$ le i-ème foncteur dérivé droit de $H^0_{\mathfrak{m}}(-)$ dans la catégorie des R-modules. Posons $a_i(M) = \max\{\mu / H^i_{\mathfrak{m}}(M)_\mu \neq 0\}$ si $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ et $a_i(M) = -\infty$ sinon.

Le but de ce chapitre est de présenter les principales propriétés de la régularité de Castelnuovo-Mumford et de passer en revue les méthodes et les principales bornes qui ont été établies dans la littérature. Étant donné qu'il n'y a pas d'énoncé nouveau dans ce chapitre, les résultats seront donnés pour la plupart sans démonstration.

1.2 Caractérisation de la régularité de Castelnuovo-Mumford

Soit une résolution libre minimale graduée d'un $R-$module M gradué de type fini, $0 \longrightarrow F_p \longrightarrow F_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, où $F_i = \bigoplus_j R[-b_{i,j}]$.

Comme la résolution ci-dessus est minimale, les différentielles du complexe $F_\bullet \otimes_R k$ sont nulles, d'où $\operatorname{Tor}_i^R(M,k) \simeq \oplus_j k[-b_{i,j}]$. On en déduit que $b_i(M) = \max_j\{b_{i,j}\}$.

Définition 1.1. *On définit la régularité de Castelnuovo-Mumford de M par :*

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(M) &= \max_{i,j}\{b_{i,j} - i\} \\ &= \max_{i}\{b_i(M) - i\}. \end{aligned}$$

Définition 1.2. *Soit d un entier et M un R-module gradué de type fini. On dit que M est faiblement d-régulier si*

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0, \quad \forall i > 0.$$

Définition 1.3. *On dit que M est d-régulier s'il est faiblement d-régulier et si*

$$d \geq \operatorname{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Définition 1.4. *Soit l une forme linéaire, on dit que l est une forme presque régulière sur M si le sous module $(0 :_M (l)) = \{m \in M / lm = 0\}$ est de longueur finie.*

Notons que l est une forme presque régulière si et seulement si l est un non diviseur de zéro dans $M^{sm} = M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$.

Nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.5. *Soit $R = k[X_1, \cdots, X_r]$ un anneau de polynômes sur un corps k infini. Si l est une forme linéaire suffisamment générale, alors l est une forme presque régulière pour tout R-module gradué de type fini M.*

La proposition suivante montre comment se comporte la régularité par rapport à une section hyperplane.

Proposition 1.6. *[30, Proposition 4.10]*
Soit M un R-module gradué de type fini et l une forme presque régulière sur M.

(1) *Si M est faiblement d-régulier alors M/lM est faiblement d-régulier.*

(2) *Si M est faiblement d-régulier, il est faiblement $(d+1)$-régulier.*

(3) *M est d-régulier si et seulement si M/lM est d-régulier et $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ est d-régulier.*

Le théorème suivant donne une caractérisation de la régularité de Castelnuovo-Mumford

Théorème 1.7. *[30, 4.3]*

Soit M un R-module gradué de type fini et d un entier, les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $d \geq \operatorname{reg}(M)$;

(2) $d \geq a_i(M) + i$ *pour tout* i ;

(3) M *est* d-*régulier.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) Supposons que $d \geq \operatorname{reg}(M)$ et raisonnons par récurrence sur la dimension projective $\operatorname{pdim}_R(M)$ de M.

– Si $\operatorname{pdim}_R(M) = 0$, M est un R-module libre, donc

$$M = \bigoplus_j R[-\alpha_j] \quad et \quad H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \bigoplus_j H^i_{\mathfrak{m}}(R)(-\alpha_j).$$

Or $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ est nul si $i < r$ et $H^r_{\mathfrak{m}}(R) = (\omega_R)^\vee$ où $\omega_R = R(-r)$ est le module canonique de R, $(\omega_R)^\vee$ est son dual gradué. Donc

$$\begin{aligned} H^r_{\mathfrak{m}}(M)_{d-r+1} &= \bigoplus_j H^r_{\mathfrak{m}}(R)_{d-\alpha_j-r+1} \\ &= \bigoplus_j R(-r)^\vee_{d-\alpha_j-r+1}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} H^r_{\mathfrak{m}}(M)_{d-r+1} &= \bigoplus_j R_{\alpha_j-d+r-1-r} \\ &= \bigoplus_j R_{\alpha_j-d-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $H^r_{\mathfrak{m}}(M)_{d-r+1} = 0$ si et seulement si $\alpha_j - d - 1 < 0$, donc M est d-régulier si et seulement si $\alpha_j < d$ pour tout j.

– Supposons que $\operatorname{pdim}_R(M) > 0$ et soit

$$\cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi} L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une résolution libre minimale de M. Si $M_1 = \operatorname{im}(\varphi)$ est le premier module de syzygie de M, on a $\operatorname{pdim}_R(M_1) < \operatorname{pdim}_R(M)$ et

$\operatorname{reg}(M_1) \leq 1 + \operatorname{reg}(M)$.

Par hypothèse de récurrence, M_1 est $(e+1)$-régulier pour tout $e \geq d$. Considérons la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(L_0)_{e-i+1} \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{e-i+1} \longrightarrow H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M_1)_{e-i+1} \longrightarrow \cdots .$$

Comme M_1 est $(e+1)$-régulier, on a

$$\begin{aligned} H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M_1)_{e-i+1} &= H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M_1)_{(e+1)-(i+1)+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\operatorname{reg}(M) \leq e$, on a $H^i_{\mathfrak{m}}(L_0)_{e-i+1} = 0$ pour tout $i \geq 0$. Ainsi,

$$H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{e-i+1} = 0 \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad i \geq 0 \quad \textit{et} \quad e \geq d.$$

2) $\Rightarrow$ 3) Supposons 2) vérifié :
- Pour $i = 0$, on a d'après 2) $d \geq \max\{e / H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e \neq 0\}$.
- Pour $i > 0$, $d - i \geq \max\{e / H^i_{\mathfrak{m}}(M)_e \neq 0\}$ et donc $H^i_{\mathfrak{m}}(M)_{d-i+1} = 0$, pour tout $i > 0$.

3) $\Rightarrow$ 1) Supposons que M est d-régulier et montrons que $d \geq \operatorname{reg}(M)$.

Quitte à travailler avec une extension de k, on peut supposer sans perte de généralité que le corps k est infini. Soit

$$\cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi} L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une résolution libre minimale de M. Montrer que $\operatorname{reg}(M) \leq d$ revient à montrer que les modules L_i sont engendrés en degrés $\leq d + i$.

Montrons d'abord que L_0 est engendré en degrés $\leq d$. Pour cela il suffit de montrer par récurrence sur la dimension que M est engendré en degrés $\leq d$.

- Si $\dim(M) = 0$, M est de longueur finie et on a $M_e = H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0$ pour tout $e > d$, d'où M est engendré en degrés $\leq d$.

Supposons $\dim(M) > 0$ et posons $M^{sm} = M / H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow M \longrightarrow M^{sm} \longrightarrow 0.$$

Comme M est d-régulier, on a $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_e = 0$ pour tout $e > d$, donc $H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ est engendré en degrés $\leq d$. Soit l une forme linéaire générale, d'après la proposition 1.5, on peut supposer que l est un non diviseur de zéro dans M^{sm}. D'après la proposition

1.6, M^{sm}/lM^{sm} est d-régulier, on a $\dim(M^{sm}/lM^{sm}) < \dim(M^{sm})$, donc par hypothèse de récurrence M^{sm}/lM^{sm} est engendré en degrés $\leq d$, d'où $M^{sm}/\mathfrak{m}M^{sm}$ est engendré en degrés $\leq d$. Le lemme de Nakayama montre alors que M^{sm} est engendré en degrés $\leq d$. □

Corollaire 1.8. *Si M un R-module de longueur finie, alors on a*

$$\mathrm{reg}(M) = \max\{d/M_d \neq 0\}.$$

Le corollaire suivant montre que les deux principales définitions de la régularité d'un module sont équivalentes.

Corollaire 1.9. *Soit $R = k[X_1, \cdots; X_r]$ un anneau de polynômes sur un corps et M un R-module gradué de type fini. Alors,*

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}(M) &= \max_i\{a_i(M) + i\} \\ &= \max_i\{b_i(M) - i\}. \end{aligned}$$

Corollaire 1.10. *Soit $R = k[X_1, \cdots; X_r]$ un anneau de polynômes sur un corps et M un R-module gradué de type fini. Si l est une forme linéaire presque régulière, alors on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}(M) &= \max\{\mathrm{reg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M)), \mathrm{reg}(M/lM)\} \\ &= \max\{\mathrm{reg}(0 :_M l), \mathrm{reg}(M/lM)\}. \end{aligned}$$

En particulier si l est un non diviseur de zéro dans M on a

$$\mathrm{reg}(M) = \mathrm{reg}(M/lM)$$

1.3 Régularité de Castelnuovo-Mumford des modules de Cohen-Macaulay

1.3.1 Régularité de Castelnuovo-Mumford et fonction de Hilbert

Soit $R = k[X_1, \cdots, X_r]$ un anneau de polynômes sur un corps k et $M = \bigoplus_d M_d$ un R-module gradué de type fini. Le module M étant de type fini, sa composante homogène de degré d est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.11. *Soit M un R-module gradué de type fini. On appelle fonction de Hilbert de M la fonction*

$$H_M(d) = \dim_k(M_d)$$

Si $L = \bigoplus_j R[-a_j]$ est un R-module libre, on a

$$H_L(d) = \sum_j \binom{r-1+d-a_j}{r-1},$$

où $\binom{a}{b}$ est le coefficient binomial, avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $a < b$.

Soit M est un R-module de type fini, la fonction de Hilbert de M peut se calculer à partir d'une résolution libre minimale de M. Soit

$$0 \longrightarrow F_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow 0$$

une résolution libre minimale graduée de M, on a

$$H_M(d) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i H_{F_i}(d).$$

La régularité de Castelnuovo-Mumford permet de contrôler le degré à partir duquel la fonction de Hilbert devient une fonction polynomiale comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1.12. *[30, Théorème 4.2]*

Soit M un R-module gradué de type fini. On a les propriétés suivantes.

(1) *Il existe une fonction polynomiale $P_M(d)$ appelée polynôme de Hilbert de M telque, $H_M(d) = P_M(d)$, pour tout d telle que $d \geq \operatorname{reg}(M) + 1$.*

(2) *Si M est de dimension projective δ, alors $H_M(d) = P_M(d)$, pour tout d tel que $d \geq \operatorname{reg}(M) + \delta - r - 1$.*

Si M est de Cohen-Macaulay cette borne est optimale.

(3) *Si $X \subset \mathbb{P}^{r-1}$ est un ensemble non vide de points et si $M = R_X$ est l'algèbre de X, alors $H_M(d) = P_M(d)$ si et seulement si $d \geq \operatorname{reg}(M)$*

1.3.2 Régularité des modules de Cohen-Macaulay

Soit M un R-module et $x_1, \cdots, x_n$ une suite d'éléments de R.

Définition 1.13. *On dit que $x_1, \cdots, x_n$ une suite régulière sur M (ou M-suite) si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

(1) $(x_1, \cdots, x_n)M \neq M$,

(2) *pour tout i, x_i est un non diviseur de zéro dans $M/(x_1, \cdots, x_{i-1})M$.*

L'entier n est la longueur de la suite régulière.

La suite est maximale si pour tout $x_{n+1} \in R$, $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ n'est pas une M-suite.

La proposition suivante montre que la régularité de M se calcule facilement lorsque M est de Cohen-Macaulay à partir d'une section du module par une suite régulière.

Proposition 1.14. *Soit M un R-module gradué de type fini de Cohen-Macaulay et $l_1, \cdots, l_t$ avec $t = \dim(M)$, une suite régulière de formes linéaires sur M. Alors on a*

$$\operatorname{reg}(M) = \max\{d \mid (M/(l_1, \cdots, l_t)M)_d \neq 0\}.$$

Corollaire 1.15. *Soit $X \subset \mathbb{P}^r$ une variété projective non contenue dans un hyperplan et R_X son anneau. Si R_X est de Cohen-Macaulay , alors*

$$\operatorname{reg}(R_X) \leq \deg X - \operatorname{codim} X$$

1.4 Régularité des faisceaux cohérents

Définition 1.16. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n$ et m un entier. On dit que $\mathcal{F}$ est m-régulier au sens de Castelnuovo-Mumford si $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-i)) = 0, \quad \forall i \geq 1$*

Définition 1.17. *La régularité de Castelnuovo-Mumford de $\mathcal{F}$ est le plus petit entier m tel que $\mathcal{F}$ soit m-régulier.*

La proposition suivante décrit le comportement de la régularité par rapport à une suite exacte

Proposition 1.18. *Soit*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0,$$

une suite exacte de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^n$. *Alors on a*

(1) $\operatorname{reg} \mathcal{F} \leq \max\{\operatorname{reg} \mathcal{F}', \operatorname{reg} \mathcal{F}''\}$

(2) $\operatorname{reg} \mathcal{F}' \leq \max\{\operatorname{reg} \mathcal{F}, \operatorname{reg} \mathcal{F}'' - 1\}$

(3) $\operatorname{reg} \mathcal{F}'' \leq \max\{\operatorname{reg} \mathcal{F}, \operatorname{reg} \mathcal{F}' + 1\}$

Notation

Notons $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ par $H^i(\mathcal{F}(m))$ et $h^1(\mathcal{F}(m)) = \dim(H^i(\mathcal{F}(m)))$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de $\mathbb{P}^n$ et H un hyperplan, on désigne par $\mathcal{F}_H$ la restriction du faisceau $\mathcal{F}$ à H.

Nous avons le lemme suivant

Lemme 1.19. *Si $\mathcal{F}$ est m-régulier alors $\mathcal{F}_H$ est m-régulier.*

Le résultat suivant dû à David Mumford, montre que la régularité de Castelnuovo-mumford est une mesure effective dans les théorèmes d'annulation A et B de Serre.

Théorème 1.20. *[64, pages 99 et 100] et [56, 1.8.3]*

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n$ et m un entier. On suppose que $\mathcal{F}$ est m-régulier. Alors on a les propriétés suivantes :

(1) *L'application canonique est surjective si $r \geq m$:*

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \otimes H^0(\mathcal{F}(r)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(r+1)).$$

(2) $H^i(\mathcal{F}(r)) = 0$ *pour* $i \geq 1$ *et* $r \geq m - i$,
en particulier $\mathcal{F}$ est m'-régulier $\forall m' \geq m$.

(3) *Pour $r \geq m$, $\mathcal{F}(r)$ est engendré par ses sections globales.*

1.5 Bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford

1.5.1 La borne de Mumford

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ un schéma projectif, $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ le faisceau d'idéaux associé.

Définition 1.21. *On dit que X est m-régulier si $\mathcal{I}_X$ est m-régulier.*

Pour $i \geq 2$ et $r \geq -n$, on a un isomorphisme

$$H^i(\mathcal{I}_X(r)) \simeq H^{i-1}(X, \mathcal{O}_X(r)).$$

Les groupes de cohomologie $H^i(\mathcal{I}(r))$ ne dépendent que du fibré en droites définissant le plongement de X dans $\mathbb{P}^n$ et l'isomorphisme précédent montre que le point essentiel dans la recherche de bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford de X est le contrôle du groupe $H^1(\mathcal{I}(r))$.

Notons par $Q(r) = \chi(X, \mathcal{O}_X)$ le polynôme de Hilbert de X, les résultats suivants dûs à Mumford, donnent une borne pour la régularité de X en fonction de Q.

Lemme 1.22. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbb{P}^n$, H un hyperplan général, $\mathcal{F}_H$ la restriction du faisceau $\mathcal{F}$ à $H \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ et m_0 un entier.*

Si $\mathcal{F}_H$ est m_0-régulier, alors

(1) $H^i(\mathcal{F}(m)) = 0$ $\forall i > 1$ *et* $m \geq m_0 - 1$

(2) $H^1(\mathcal{F}(m)) = 0$, $\forall m \geq h^1(\mathcal{F}(m_0 - 1) + m_0 - 1$,

où $h^1(\mathcal{F}(m_0 - 1) = \dim_k H^1(\mathcal{F}(m))$.

Théorème 1.23. *[64, page 101]*

Pour tout entier n, il existe un polynôme $F(X_0, \cdots, X_n)$ tel que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^n$, si

$$\begin{aligned} Q(m) &= \chi(\mathcal{F}(m)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{m}{i}, \end{aligned}$$

alors $\mathcal{F}$ est $F(a_0, \cdots, a_n)$-régulier.

Corollaire 1.24. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété projective de dimension r. Il existe un polynôme $F(X_0, \cdots, X_r)$ tel que si $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_X$ est un faisceau d'idéaux et si*

$$\chi(\mathcal{F}(m)) = \sum_{i=0}^{r} a_i \binom{m}{i},$$

alors $\mathcal{F}$ est $F(a_0, \cdots, a_r)$-régulier.

1.5.2 La borne de Gotzmann.

1.5.2.1 Représentation de Macaulay d'un entier

Soit a et b deux entiers positifs, on considère le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $a < b$. Soit c et i des entiers strictement positifs, Macaulay a montré que c peut s'ecrire de manière unique sous la forme

$$c = \binom{k_i}{i} + \binom{k_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{k_j}{j},$$

avec $k_i > k_{i-1} > \cdots > k_j \geq j > 0$.
Cette écriture est appelée la i-ème représentation de Macaulay (où développement de Macaulay) de l'entier c.

1.5.2.2 Représentation de Macaulay et régularité

Soit R un anneau gradué et I un idéal de R, si $\mathcal{I}$ désigne le faisceau d'idéaux associé à I, le théorème suivant donne une borne de la régularité de Castelnuovo-Mumford de $\mathcal{I}$ en fonction du développement de Macaulay du polynôme de Hilbert de R/I.

Théorème 1.25. *[44, 3.11]*
Soit I un idéal homogène d'un anneau gradué R, il existe un entier s et une suite $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_s$ tels que le polynôme de Hilbert de R/I soit de la forme

$$P_{R/I}(k) = \binom{k+a_1}{a_1} + \binom{k+a_2-1}{a_2} + \cdots + \binom{k+a_s-(s-1)}{a_s}.$$

De plus si $\mathcal{I}$ est le faisceau d'idéaux associé à I, alors

$$\operatorname{reg}(\mathcal{I}) \leq s$$

1.5.3 La contribution de Bayer et Stillman

1.5.3.1 Régularité et saturation

Soit $R = k[x_0, \cdots, x_n]$ un anneau de polynômes sur un corps k infini, $\mathfrak{m} = (x_0, \cdots, x_n)$ l'idéal maximal de R. Soient I et J sont deux idéaux homogènes de R, on définit $(I : J) = \{r \in R, rJ \subset I\}$.

Dans cette section, nous étudions les liens entre la régularité et la saturation.

Définition 1.26. *Un idéal homogène I est saturé si $(I : \mathfrak{m}) = I$. Le saturé de I est $I^{sat} := \bigcup_{\ell \geq 0}(I : \mathfrak{m}^{\ell})$, il est égal à I si et seulement si I est saturé.*

Définition 1.27. *Soit I un idéal homogène et m un entier, on dit que I est m-saturé si $I_d = I_d^{sat} \quad \forall d \geq m$.*

L'indice de saturation $\mathrm{sat}(I)$ *est le plus petit entier m tel que I soit m-saturé.*

Désignons par $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux associé à I, on a $I^{sat} = \bigoplus_d H^0(\mathfrak{I}(d))$. L'idéal I et le faisceau $\mathfrak{I}$ ont-ils la même régularité ? Quels liens y a il entre les deux ?

L'exemple suivant montre que ces deux nombres ne sont pas toujours égaux.

Exemple 1.28. $R = k[x_1, x_2]$, $I = (x_1^2, x_1x_2, x_2^3)$, *la résolution libre minimale de I a la forme suivante*

$$0 \longrightarrow R[-3] \bigoplus R[-4] \longrightarrow R[-2] \bigoplus R[-2] \bigoplus R[-3] \longrightarrow I \longrightarrow 0.$$

Donc $\mathrm{reg}(I) = 3$. $\mathfrak{I} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ *et* $\mathrm{reg}(\mathfrak{I}) = 0$

La proposition suivante donne un lien entre ces deux régularités.

Proposition 1.29. *Soit I un idéal homogène de R, $\mathfrak{I}$ le faisceau d'idéaux associé et m un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(*a*) *I est m-régulier*

(*b*) *I est m-saturé et le faisceau $\mathfrak{I}$ est m-régulier.*

Définition 1.30. *Soit I un idéal homogène de R et $l \in R_1$ une forme linéaire. On dit que l est générique pour I si l est un non diviseur de zéro dans R/I^{sat}.*

Notons que l est générique pour I si et seulement si l est presque régulière pour R/I.

Soit $j > 0$ un entier, définissons l'ensemble $U_j(I) = \{(l_1, \cdots, l_j) \in R_1^j\}$ tel que l_i soit générique pour $I + (l_1, \cdots, l_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq j$

Le corps k étant infini, $U_j(I)$ est un ouvert dense de R_1^j.

Lemme 1.31. *Soit I un idéal de R et $l \in R$.*

(*a*) *Si l n'est pas diviseur de zéro dans R/I, alors $(I : l) = I$.*

(*b*) *Si l est un diviseur de zéro dans R/I, alors $(I : l) \neq I$.*

Lemme 1.32. *[2] Soit I un idéal de R et $l \in R$, les conditions suivantes sont équivalentes*

(a) $(I : l)_d = I_d \quad \forall d \geq m$.

(b) *l est m-saturé et l est générique pour I.*

Lemme 1.33. *[2] Soit I un idéal de R tel que* $\dim(R/I) = 0$. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(a) *I est m-saturé.*

(b) *I est m-régulier.*

(c) $I_m = R_m$.

Lemme 1.34. *[2] Soit I un idéal de R et l une forme linéaire générique pour I. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(a) *I est m-régulier*

(b) *I est m-saturé et $I + (l)$ est m-régulier.*

1.5.3.2 Critère pour détecter la régularité

Les résultats suivants dûs à Bayer et Stillman, ils donnent un critère qui permet de déterminer la régularité de l'idéal I.

Lemme 1.35. *[2]*

Soit I un idéal engendré en degrés $\leq m$ et $l \in R_1$. Si $I + (l)$ est m-régulier alors $(I : l)$ est engendré en degrés $\leq m$.

Théorème 1.36 (Bayer-Stillman). *Soit I un idéal de R engendré en degrés $\leq m$, les conditions suivantes sont équivalentes*

(a) *I est m-régulier.*

(b) *Il existe un entier j et des formes linéaires $l_1, \cdots, l_j$ tels que*

$$((I + (l_1, \cdots, l_{i-1}) : l_i)_m = (I + ((l_1, \cdots, l_{i-1}))_m \quad \textit{pour} \quad i = 1, \cdots, j$$

et $(I + (l_1, \cdots, l_j))_m = R_m$

(c) *Soit* $r = \dim(R/I)$, *pour tout $(l_1, \cdots, l_r) \in U_r(I)$ et tout $p \geq m$, nous avons*

$$((I + (l_1, \cdots, l_{i-1}) : l_i)_p = (I + (l_1, \cdots, l_{i-1}))_p \quad \textit{pour} \quad i = 1, \cdots, r$$

et $(I + (l_1, \cdots, l_r))_p = R_p$.

1.5.3.3 Régularité et ordre monomial

Soit $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_n)$, on désigne par x^α le monôme $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

Définition 1.37. *Un idéal I est monomial s'il est engendré par des monômes.*

Définition 1.38. *Un ordre monomial $>$ sur R est un ordre total sur les monômes qui vérifie la propriété suivante :*

Pour tous monômes f,f_1,f_2, si $f_1 > f_2$ alors $ff_1 > ff_2$.

Les ordres monomiaux les plus utilisés sont les suivants.

Définition 1.39. *(Ordre lexicographique, lex)*

$$x^\alpha < x^\beta \Longleftrightarrow \exists s \in [0, n], \alpha_i = \beta_i \quad pour \quad i < s \quad et \quad \alpha_s < \beta_s.$$

Définition 1.40. *(Ordre lexicographique homogène, hlex)*

$$x^\alpha < x^\beta \Longleftrightarrow \begin{cases} \deg x^\alpha < \deg x^\beta \quad ou \\ \deg x^\alpha = \deg x^\beta \quad et \quad \exists s \quad telque \quad \alpha_s < \beta_s \end{cases}$$

Définition 1.41. *(Ordre lexicographique inverse)*

$$x^\alpha < x^\beta \Longleftrightarrow \begin{cases} \deg x^\alpha < \deg x^\beta \quad ou \\ \deg x^\alpha = \deg x^\beta \quad et \quad \exists s \in [0, n] \\ telque \quad \alpha_i = \beta_i \quad pour \quad i > s \quad et \quad \alpha_s > \beta_s. \end{cases}$$

Soit f un polynôme non nul et $>$ un ordre monomial sur R, le terme initial de f noté $\text{in}(f)$ est le terme correspondant au plus grand monôme qui apparaît dans f.

Définition 1.42. *Soit I un idéal non nul de R. L'idéal initial de I, $\text{in}(I)$ est l'idéal engendré par les termes initiaux des éléments non nuls de I.*

Désignons par $GL(n, k)$ le groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans un corps k. Le groupe $GL(n, k)$ agit sur R par changement de variables de la manière suivante $g \in GL(n, k), \quad g(x_i) = \sum g_{i,j} x_j$ et si $f \in R, g(f) = f(g(x_0), \cdots, g(x_n))$. L'ensemble $g(I) = \{g(f)/f \in R\}$ est un idéal de R. Soit B_i le groupe de Borel de $GL(n, k)$ des matrices triangulaires inférieures et B_s le sous groupes des matrices triangulaires supérieures.

Définition 1.43. *Un idéal homogène I est Borel-fixe si* $g(I) = I \quad \forall g \in B_i$.

Théorème 1.44. *(***Galligo***)*

Soit R un anneau de polynômes muni d'un ordre compatible avec le degré. Pour tout idéal homogène I, il existe un ouvert de Zariski non vide U de $GL(n,k)$, stable par B_s et un idéal monomial Jde R tels que pour tout $g \in U$ on ait : $\operatorname{in} g(I) = J$.

Définition 1.45. *L'idéal J est appelé idéal initial générique de I et est noté* $\operatorname{gin} I$.

L'idéal initial générique est Borel-fixe

Proposition 1.46. *Soit I un idéal monomial Borel-fixe,* $\operatorname{reg} I$ *est le maximum des degrés des générateurs de I.*

Proposition 1.47. *Soit I un idéal homogène de R. Pour tout ordre monomial sur R, on a* $\operatorname{reg} I \leq \operatorname{reg} \operatorname{in} I$. *En particulier la régularité de I est bornée par le maximum des degrés des générateurs de I.*

Théorème 1.48 (Bayer -Stillman). *.*

Soit R un anneau de polynômes muni de l'ordre lexicographique inverse, I un idéal homogène de R et $\operatorname{gin} I$ *son idéal initial générique. Alors*

$$\operatorname{reg} I = \operatorname{reg}(\operatorname{gin} I).$$

La régularité de I est donc le maximum des degrés des générateurs de son idéal initial générique pour l'ordre inverse.

1.6 Bornes en fonction des degrés des équations de définition

Le résultat de Bayer et Stillman montre que la complexité d'un idéal est la même que l'un de ses idéaux génériques. Cette connection a motivé beaucoup de recherches pour les bornes de la régularité de Castelnuovo-Mumford en termes des degrés des générateurs d'un idéal.

Dans cette section nous passons en revue les principales bornes obtenues dans ce sens.

1.6.1 La borne d'une intersection complète

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$, une intersection complète d'hypersurfaces de degrés $d_1, \cdots, d_e$. L'idéal homogène I_X de X est engendré par des éléments $f_1, \cdots, f_e$ de degrés $d_1, \cdots, d_e$ et le complexe de Koszul associé à $f_1, \cdots, f_e$ est une résolution libre de I_X. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 1.49. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété et $\mathcal{I}_X$ le faisceau d'idéaux associé à X. Si X est une intersection complète de degrés $d_1, \cdots, d_e$ alors*

$$\mathrm{reg}(\mathcal{I}_X) = d_1 + \cdots + d_e - e + 1.$$

1.6.2 La borne de Gruson-Lazarsfeld-Peskine

Soit $C \subset \mathbb{P}^n$ une courbe lisse, irreductible de degré d. On dit que C est non dégénerée si elle n'est contenue dans aucun hyperplan. Le théorème suivant dû à Gruson,Lazarsfeld et Peskine donne une borne pour la régularité de C :

Théorème 1.50. *[43] Soit $C \subset \mathbb{P}^n$ une courbe réduite et irréductible de degré d. Si C est non dégénerée alors*

$$\mathrm{reg}(I_C) \leq d - n + 2.$$

1.6.3 La borne de Bertram-Ein-Lazarsfeld

Soit $\mathcal{I}$ un faisceau d'idéaux défini sur $\mathbb{P}^n$, notons par $d(\mathcal{I})$ le plus petit entier d tel que $\mathcal{I}(d)$ soit engendré par ses sections globales. Pour un idéal homogène I d'un anneau de polynômes, on définit $d(I)$ par le maximum des degrés des générateurs minimaux de I. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété projective lisse et irréductible de dimension r et soit $\mathcal{I}_X$ le faisceau d'idéaux associé à X. Le théorème suivant dû à Bertram, Ein et Lazarsfeld donne une borne pour la régularité de X en fonction de $d := d(\mathcal{I}_X)$ et de $e := n - r$:

Théorème 1.51. *[3] Soit X une variété projective complexe, lisse et irréductible de dimension r et de codimension e. Pour $d := d(\mathcal{I}_X)$, on a :*

$$\mathrm{reg}(I_X) \leq ed - e + 1.$$

Si X est défini par des hypersurfaces de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$, on a le résultat suivant :

Théorème 1.52. *[3]*

Soit X une variété projective complexe, lisse et irréductible de codimension e, défini par des hypersurfaces de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$. Alors,

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_e - e + 1.$$

1.6.4 La borne de Chardin et Ulrich

Dans [25], Chardin et Ulrich prouvent des bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford des schémas projectifs en fonction des degrés des générateurs des équations de définition. Leur méthode est basée sur la liaison, une version améliorée du théorème d'annulation de Kodaira, les intersections résiduelles et la notion de F-rationalité.

Lorsque le corps de base k est de caractéristique zéro, ils ont obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.53. *[25, 0.1]*

Soit k un corps de caractéristique zéro et $S \subset \mathbb{P}_k^n$ un schéma équidimensionnel de codimension e sans composante immergée et défini par des formes de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_m$. Supposons que S soit localement intersection complète sauf pour un nombre fini de points et ne possède que des singularités rationnelles en dehors d'un schéma de dimension 1. Si S n'est pas une intersection complète, alors

$$\operatorname{reg}(I_S) \leq d_1 + d_2 + \cdots + d_e - e$$

En toute caractéristique, ils montrent le résultat suivant :

Théorème 1.54. *[25, 4.7(b)]*

Soit k un corps et R une k-algèbre gradué standard, $I = (f_1, \cdots, f_s) \subset R$ un idéal engendré par des formes de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s$, $X = \operatorname{Proj}(R/I)$, $r := \operatorname{codim} X > 0$, $\mathcal{Z} = \operatorname{Proj}(R)$. On suppose $d_1 \geq 2$, $\dim X \geq 1$, X localement intersection complète dans $\mathcal{Z}$ et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(i) X est de type rationnel.

(ii) La caractéristique de k est nulle et X a au plus des singularités irrationnelles isolées.

Alors,

$$\operatorname{reg}(R/I) \leq \frac{(\dim X + 2)!}{2}(\operatorname{reg}(R) + d_1 + \cdots + d_r - r - 1).$$

1.6.5 La conjecture de Eisenbud-Goto

Etant donné une variété projective X, la conjecture de Eisenbud-Goto prédit une borne pour la régularité de X en fonction de son degré et de sa codimension.

Conjecture 1.1. *Soit X une variété projective lisse et non dégénérée, alors*

$$\operatorname{reg}(X) \leq \deg(X) - \operatorname{codim}(X) + 1.$$

Cette conjecture formulée par Eisenbud et Goto dans [31] a été prouvée dans les cas suivants :

- Pour les courbes intègres par Gruson, Lazarsfeld et Peskine dans [43] et pour les courbes connexes par Giaimo dans [40].

- Pour les surfaces lisses en caractéristique zéro par Lazarsfeld dans [56].

- Pour les surfaces arithmétiquement de Buchsbaum par Stückrad et Vogel dans [74].

- Pour certaines variétés toriques de codimension 2 par Peeva et Sturmfels dans [69].

Chapitre 2

Bornes pour la régularité des idéaux en petites dimensions

2.1 Introduction

Nous montrons dans ce chapitre une borne pour la régularité de Castelnuovo-Mumford d'un idéal homogène I d'un anneau de polynômes R en termes du nombre de variables et des degrés des générateurs dans le cas où la dimension de R/I est au plus deux. Cette borne améliore celle obtenue par Caviglia et Sbarra dans [16]. Puis, en s'inspirant du travail de Chardin et Clare D'Cruz [20], nous construisons à partir d'une famille de courbes monomiales, des idéaux homogènes ayant une régularité proche des bornes fournies précédemment. Ces idéaux fournissent également des exemples d'idéaux de grande régularité.

Les résultats nouveaux dans ce chapitre sont constitués par les deux exemples et le théorème suivant :

Théorème. *Soit R un anneau de polynômes en $m+2$ variables et I un idéal de R de codimension m, engendré en degrés $d_1 \geq d_2 \cdots \geq d_s$ avec $s > m$. Soit $\mathcal{Z}$ le groupe de points défini par une section générale de $X := \mathrm{Proj}(R/I)$, et $i_{\mathcal{Z}} := \mathrm{indeg}(I_{\mathcal{Z}})$. Alors,*

$$\mathrm{reg}(I) \leq (d_1 d_2 \cdots d_m - \deg(\mathcal{Z}) + 1)(d_1 + d_2 + \cdots + d_{m+1} - m - i_{\mathcal{Z}}) + i_{\mathcal{Z}}.$$

2.2 Bornes pour la régularité en dimension au plus 1

Les bornes pour la régularité en dimension au plus 1 ont été obtenues dans un premier temps par Sjögren dans [72] et par Chardin dans [17]. Ce dernier a montré le résultat suivant :

Théorème 2.1. *[17]*
Soit R une algèbre gradué standard sur un corps k et I un idéal de R engendré en degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s$ et soit $e = \min\{s, \dim R\}$. Si $\dim(R/I) \leq 1$ alors,

$$\operatorname{reg}(R/I) \leq \operatorname{reg}(R) + d_1 + d_2 + \cdots + d_e - e.$$

2.3 La méthode de Caviglia-Sbarra

Dans cette section $R = k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ est un anneau de polynômes en $m+2$ variables sur un corps k, $\mathfrak{m} := (X_0, \cdots, X_{m+1})$ et I un idéal homogène de R.

Définition 2.2. *Soit M un $R-$module gradué de type fini, des formes linéaires $l_1, \cdots, l_{s+1} \in R$ constituent une suite presque régulière pour M, si l_1 est presque régulière pour M et si l_{i+1} est presque régulière pour $M_i := M/(l_1, \cdots, l_i)M$, $i = 0, \cdots, s+1$.*

Notons que l est une forme presque régulière pour M si et seulement si elle n'est contenue dans aucun idéal premier associé à M autre que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

Si I est un idéal homogène de R, rappelons que $I^{sat} := \cup_{\ell>0}(I : \mathfrak{m}^\ell)$ et $I^{sat}/I = H^0_{\mathfrak{m}}(R/I)$.

Proposition 2.3. *Soit I est un idéal homogène de R et l une forme linéaire, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *l est presque régulière pour R/I.*
(2) *l est régulière pour R/I^{sat}.*
(3) *$(I : l^\ell) \subset I^{sat}$, $\forall \ell$.*
(4) *Il existe un entier ℓ tel que $(I : l^\ell) = I^{sat}$.*

Définition 2.4. *Soit I un idéal homogène de R et l une forme presque régulière pour R/I, le plus petit entier ℓ vérifiant $I^{sat} = (I : l^\ell)$ est appelé indice de saturation de I relativement à la forme l.*

La méthode de Caviglia et Sbarra consiste à borner la regularité d'un idéal en utilisant des sections hyperplanes successives par des formes lineaires presque régulières. Ils montrent le résultat suivant :

Lemme 2.5. *[16]*

Soit I un idéal homogène de R engendré en degrés au plus d et l une forme linéaire telle que $K = (I : (l))/I$ soit de longueur finie. Si $\lambda(M)$ désigne la longueur pour un R-module de longueur finie M, alors

$$\operatorname{reg}(I) \leq \max\{\operatorname{reg}(I + (l)), d\} + \lambda\left(\frac{I : l}{I}\right).$$

Ce lemme permet d'obtenir des bornes pour la régularité, en utilisant une récurrence sur la dimension. Le lemme suivant est un autre point clé pour la méthode :

Lemme 2.6. *[16] Soit I un idéal homogène de R tel que $(I : (l))/I$ soit de longueur finie. Pour tout $j > 0$, on a*

$$\lambda\left(\frac{I : (l)^j}{I : (l)^{j-1}}\right) - \lambda\left(\frac{I : (l)^{j+1}}{I : (l)^j}\right) = \lambda\left(\frac{(I : (l)^j) + (l)}{(I : (l)^{j-1}) + (l)}\right).$$

Les résultats suivants permettent d'avoir des bornes pour la régularité de I :

Théorème 2.7. *[16] Soit $I \subset k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ un idéal de codimension c, engendré en degrés au plus d. Si $l_{m+2}, \cdots, l_{c+1}$ sont des formes presque régulières, alors on a*

$$\operatorname{reg}(I) \leq \max\{d, \operatorname{reg}(I + (l_{m+2}))\} + d^c \prod_{i=c+1}^{m+1} \operatorname{reg}(I + (l_{m+2}, \cdots, l_i)).$$

Corollaire 2.8. *[16] Soit $I \subset k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ un idéal de codimension c, engendré en degrés au plus d, alors*

$$\operatorname{reg}(I) \leq (d^c + (d-1)c + 1)^{2^{m+1-c}}.$$

Corollaire 2.9. *[16] Soit $I \subset k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ un idéal engendré en degrés au plus d, alors* $\operatorname{reg}(I) \leq 2d - 1$ *si $m = 1$ et pour $m \geq 2$,* $\operatorname{reg}(I) \leq (2d)^{2^m}$.

2.4 Bornes pour la régularité en dimension 2

$R = k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ désigne un anneau de polynômes en $m+2$ variables sur un corps k infini et $\mathfrak{m} := (X_0, \cdots, X_{m+1})$. Si M est un R-module gradué de type fini, indeg(M) désigne le minimum des degrés des éléments non nuls de M si $M \neq 0$ et $-\infty$ sinon. D'après le corollaire 1.9, la régularité de Castelnuovo-Mumford de M est

$$\operatorname{reg}(M) = \max_i \{a_i(M) + i\} = \max_i \{b_i(M) - i\},$$

avec les notations $a_i(M) := \max\{\mu \mid H^i_{\mathfrak{m}}(M)_\mu \neq 0\}$, si $H^i_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ et $a_i(M) := -\infty$ sinon et $b_i(M) := \max\{\mu \mid \operatorname{Tor}_i^R(M, k)_\mu \neq 0\}$ si $\operatorname{Tor}_i^R(M, k) \neq 0$ et $b_i(M) := -\infty$ sinon. Soit I est un idéal homogène de R et $X = \operatorname{Proj}(R/I)$ est le sous-schéma de $\mathbf{P}_k^{m+1}$ défini par I, on pose $I_X := I^{sat}$.

Définition 2.10. *La longueur d'un module M sur un anneau R, non nécessairement commutatif, est la borne supérieure de l'ensemble des entiers n telle qu'il existe une suite $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n$ strictement croissante de sous-R-modules de M. On la note $\ell_R(M)$, ou $\ell(M)$ quand il ne fait aucun doute sur l'anneau des scalaires.*

Les résultats qui suivent améliorent de façon significative, en dimension 2, les bornes de Caviglia et Sbarra.

Proposition 2.11. *Soit R un anneau de polynômes sur un corps infini, I un idéal homogène R tel que $I \neq (I : \mathfrak{m})$ et l une forme linéaire presque régulière pour R/I.*

Si q désigne l'indice de saturation de I relativement à l, alors,

$$\begin{aligned} q &\leq a_0(R/I) - \operatorname{indeg}(I^{sat}) + 1 \\ &\leq \operatorname{reg}(I) - \operatorname{indeg}(I^{sat}). \end{aligned}$$

Démonstration. La seconde inégalité est claire car

$$\begin{aligned} a_0(R/I) + 1 &\leq \operatorname{reg}(R/I) + 1 \\ &= \operatorname{reg}(I). \end{aligned}$$

Soit $z \in (I : l^\infty) = I^{sat}$, et posons $K := a_0(R/I) + 1 - \operatorname{indeg}(I^{sat})$. Il s'agit de montrer que $zl^K \in I$. On peut supposer z homogène et non nul, ce qui entraîne que $\deg z \geq \operatorname{indeg}(I^{sat})$. Comme l est une forme presque régulière pour R/I, on a $zl^K \neq 0$. De plus, $zl^K \in (I^{sat})_{K+\deg(z)}$ et $K + \deg(z) \geq K + \operatorname{indeg}(I^{sat}) = a_0(R/I) + 1$. Or $I_\mu = (I^{sat})_\mu$ pour $\mu \geq a_0(R/I) + 1$. Il en découle que $(I^{sat})_{K+\deg(z)} = I_{K+\deg(z)}$, d'où $zl^K \in I$. $\square$

Soit I un idéal de R tel que $\dim(R/I) \leq 2$, $\mathcal{Z}$ le groupe de points défini par une section générale de $X := \mathrm{Proj}(R/I)$, et $i_{\mathcal{Z}} := \mathrm{indeg}(I_{\mathcal{Z}})$. Soit J l'intersection des idéaux primaires de dimension deux figurant dans la décomposition primaire de l'idéal I. Le schéma $\mathcal{C} = \mathrm{Proj}(R/J)$ est la composante de dimension 1 de X. Notons que $\deg(\mathcal{Z}) = \deg(X)$ et que si et $I_{\mathcal{C}}$ est l'idéal de définition de $\mathcal{C}$, $d_s \geq \mathrm{indeg}(I_{\mathcal{C}}) \geq i_{\mathcal{Z}} \geq 1$.

Proposition 2.12. *Si l_{m+2} et l_{m+1} sont deux formes linéaires telles que $(I : l_{m+2})/I$ et $R/(I + (l_{m+1}, l_{m+2}))$ soient de longueurs finies, alors*

$$\lambda\left(\frac{(I : l_{m+2})}{I}\right) \leq \lambda\left(\frac{I_{\mathcal{Z}} + (l_{m+1})}{I + (l_{m+1}, l_{m+2})}\right) q_{m+2},$$

où q_{m+2} est l'indice de saturation de $I + (l_{m+2})$ relativement à l_{m+1}.

Démonstration. D'après le lemme 2.6 on a,

$$\lambda\left(\frac{(I : l_{m+2})}{I}\right) = \lambda\left(\frac{(I : l_{m+2}) + (l_{m+2})}{I + (l_{m+2})}\right) + \lambda\left(\frac{(I : l_{m+2}^2)}{(I : l_{m+2})}\right).$$

En itérant cette formule on obtient

$$\begin{aligned}\lambda\left(\frac{(I : l_{m+2})}{I}\right) &= \lambda\left(\frac{(I : l_{m+2}) + (l_{m+2})}{I + (l_{m+2})}\right) + \lambda\left(\frac{(I : l_{m+2}^2) + (l_{m+2})}{(I : l_{m+2}) + (l_{m+2})}\right) + \cdots \\ &+ \lambda\left(\frac{(I : l_{m+2}^{\alpha_{m+2}}) + (l_{m+2})}{(I : l_{m+2}^{\alpha_{m+2}-1}) + (l_{m+2})}\right);\end{aligned}$$

où α_{m+2} est l'indice de saturation de I relativement à l_{m+2}. Comme

$$(I : l_{m+2}) \subset (I : l_{m+2}^2) \subset \cdots \subset (I : l_{m+2}^{\alpha_{m+2}}) = I^{sat},$$

on a d'après l'additivité des longueurs

$$\lambda\left(\frac{I^{sat} + (l_{m+2})}{I + (l_{m+2})}\right) = \lambda\left(\frac{(I : l_{m+2}) + (l_{m+2})}{I + (l_{m+2})}\right) + \cdots + \lambda\left(\frac{(I : l_{m+2}^{\alpha_{m+2}}) + (l_{m+2})}{(I : l_{m+2}^{\alpha_{m+2}-1}) + (l_{m+2})}\right).$$

Ainsi, on a

$$\lambda\left(\frac{(I : l_{m+2})}{I}\right) = \lambda\left(\frac{I^{sat} + (l_{m+2})}{I + (l_{m+2})}\right).$$

D'autre part, on a

$$I^{sat} + (l_{m+2}) \subset (I + (l_{m+2}))^{sat} = (I + (l_{m+2})) : l_{m+1}^{q_{m+2}}$$

et

$$I+(l_{m+2}) \subset (I+(l_{m+2})):l_{m+1} \subset (I+(l_{m+2})):l_{m+1}^2 \subset \cdots \subset (I+(l_{m+2})):l_{m+1}^{q_{m+2}},$$

donc

$$\left(\frac{(I+(l_{m+2})):l_{m+1}}{I+(l_{m+2})}\right) \subset \left(\frac{(I+(l_{m+2})):l_{m+1}^2}{I+(l_{m+2})}\right) \subset \cdots \left(\frac{(I+(l_{m+2})):l_{m+1}^{q_{m+2}}}{I+(l_{m+2})}\right).$$

Posons

$$M_j = \left(\frac{(I+(l_{m+2})):l_{m+1}^{j+1}}{(I+(l_{m+2})):l_{m+1}^{j}}\right), \quad j=0,\cdots,q_{m+2},$$

d'après l'additivité des longueurs, on a

$$\begin{aligned}\lambda\left(\frac{I^{sat}+(l_{m+2})}{I+(l_{m+2})}\right) &= \lambda\left(\frac{(I+(l_{m+2})):l_{m+1}^{q_{m+2}}}{I+(l_{m+2})}\right)\\ &= \sum_{0\leq j\leq q_{m+2}-1} \lambda\left(\frac{M_{j+1}}{M_j}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\lambda\left(\frac{M_{j+1}}{M_j}\right) &= \lambda\left(\frac{(I+(l_{m+2})):l_{m+1}^{j+1}}{(I+(l_{m+2})):l_{m+1}^{j}}\right)\\ &\leq \lambda\left(\frac{(I+(l_{m+2}))^{sat}+(l_{m+1})}{I+(l_{m+2},l_{m+1})}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda\left(\frac{I^{sat}+(l_{m+2})}{I+(l_{m+2})}\right) \leq \lambda\left(\frac{(I+(l_{m+2}))^{sat}+(l_{m+1})}{I+(l_{m+2},l_{m+1})}\right) q_{m+2}.$$

□

En utilisant les lemmes ci dessus, la proposition 2.12 ci-dessus et les résultats du théorème 2.1, nous obtenons le théorème suivant qui montrent une borne pour la régularité de l'idéal I en fonction des degrés des ses générateurs et du degré du groupe de points obtenu par une section générale de $\mathrm{Proj}(R/I)$.

Théorème 2.13. *Soit R un anneau de polynômes en $m+2$ variables sur un corps infini k et I un idéal de R de codimension m, engendré en degrés $d_1 \geq d_2 \cdots \geq d_s$ avec $s > m$. Soit $\mathcal{Z}$ le groupe de points défini par une section générale de $X := \mathrm{Proj}(R/I)$, et $i_{\mathcal{Z}} := \mathrm{indeg}(I_{\mathcal{Z}})$. Alors,*

$$\mathrm{reg}(I) \leq (d_1 d_2 \cdots d_m - \deg(\mathcal{Z})+1)(d_1+d_2+\cdots+d_{m+1}-m-i_{\mathcal{Z}})+i_{\mathcal{Z}}.$$

Démonstration. Soit l_{m+1}, l_{m+2} des formes linéaires telles que $(I : (l_{m+2}))/I$ et $R/(I + (l_{m+1}, l_{m+2}))$ soient de longueurs finies. On suppose de plus que l_{m+2} est générale, de telle sorte que, posant $\mathcal{Z} := \mathrm{Proj}(R/I+(l_{m+2}))$, on soit dans les conditions du théorème. (Notons que l'on a $I_{\mathcal{Z}} = (I+(l_{m+2}))^{sat}$, par définition). Comme I est engendré en degrés $\leq d_1$, en posant $\xi := \mathrm{reg}(I + (l_{m+2}))$ on a, par le lemme 2.5

$$\mathrm{reg}(I) \leq \max\{d_1, \xi\} + \lambda\left(\frac{I : l_{m+2}}{I}\right)$$

où $\lambda(M)$ désigne la longueur d'un R-module M. De plus, d'après la proposition 2.12, on a

$$\lambda\left(\frac{I : l_{m+2}}{I}\right) \leq \lambda\left(\frac{I_{\mathcal{Z}} + (l_{m+1})}{I + (l_{m+1}, l_{m+2})}\right) q_{m+2}.$$

Comme $q_{m+2} \leq \xi - i_{\mathcal{Z}}$, on a

$$\lambda\left(\frac{I : l_{m+2}}{I}\right) \leq \lambda\left(\frac{I_{\mathcal{Z}} + (l_{m+1})}{I + (l_{m+1}, l_{m+2})}\right) (\xi - i_{\mathcal{Z}}).$$

D'autre part,

$$\lambda\left(\frac{I_{\mathcal{Z}} + (l_{m+1})}{I + (l_{m+1}, l_{m+2})}\right) = \lambda\left(\frac{R}{I + (l_{m+1}, l_{m+2})}\right) - \lambda\left(\frac{R}{I_{\mathcal{Z}} + (l_{m+1})}\right).$$

Posons $S = R/I_{\mathcal{Z}}$, les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow S_{\mu-1} \overset{\times l_{m+1}}{\longrightarrow} S_\mu \longrightarrow S/(l_{m+1})_\mu \longrightarrow 0 \qquad (\mu \in \mathbb{Z})$$

montrent que $\lambda\left(\frac{R}{I_{\mathcal{Z}}+(l_{m+1})}\right) = \deg(\mathcal{Z})$. Comme $I+(l_{m+1}, l_{m+2})$ contient une intersection complète J de degrés $d_1, \cdots, d_m, 1, 1$, on a

$$\begin{aligned} \lambda\left(\frac{R}{I + (l_{m+1}, l_{m+2})}\right) &\leq \lambda(R/J) \\ &= d_1 \cdots d_m. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons la relation suivante

$$\lambda\left(\frac{I_{\mathcal{Z}} + (l_{m+1})}{I + (l_{m+1}, l_{m+2})}\right) \leq d_1 \cdots d_m - \deg(\mathcal{Z}).$$

On a donc au total :

$$\mathrm{reg}(I) \leq \max\{d_1, \xi\} + (d_1 \cdots d_m - \deg(\mathcal{Z}))(\xi - i_{\mathcal{Z}}).$$

D'après le théorème 2.1, $\xi \leq d_1 + \cdots + d_{m+1} - m$, d'où la borne annoncée. $\square$

Corollaire 2.14. *Soit $I \subset R = k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ un idéal engendré en degrés au plus d. Alors,*

(i) $\operatorname{reg}(R/I) \leq (m+2)(d-1)$ *si* $\dim(R/I) \leq 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(R/I) \leq (m+2)d^m(d-1)$ *si* $\dim(R/I) = 2$

Démonstration. Le cas (i) découle du théorème 2.1, et le (ii) du théorème 2.13 une fois noté que $\deg(\mathcal{Z}) \geq 1$ et $i_{\mathcal{Z}} \geq 1$. □

Remarque 2.15. *Dans ([16, 2.6]), Caviglia et Sbarra montrent la borne suivante :*

$$\operatorname{reg}(R/I) \leq (d^m + (d-1)m + 1)^2 - 1.$$

On note que cette borne est moins bonne que notre borne obtenue dans le cas (ii) du Corollaire 2.14

2.5 Exemples d'idéaux de grande régularité

Cette section est consacrée à la construction d'exemples d'idéaux de grande régularité. La construction de familles d'exemples est très utile pour la compréhension de la régularité de Castelnuovo-Mumford.

Nos exemples sont une continuation en un nombre arbitraire de variables des exemples suivants :

(1) On considère la famille d'idéaux $I = (x^m t - y^m z, z^{n+2} - xt^{n+1})$

(2) Soit $I_{\mathcal{C}}$ la courbe monomiale de degré $(1, mn^2, mn(n+1), m(n+1)^2)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^4 = \mathrm{Proj}(k[x,y,z,u,v]$, dans [20], Chardin et D'Cruz montrent que $\mathrm{reg}(I_{\mathcal{C}}) = mn^2$.

(3) Soit $I = (X_1^d, X_2^d, X_1X_3^{d-1} - X_2X_4^{d-1})$ avec $d \geq 2$,un idéal homogène de $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$, dans [15] Caviglia montre que $\mathrm{reg}(I) = d^2 - 1$.

2.5.1 Premier exemple

Soit $m \geq 1$ et $n \geq 2$ deux entiers, $R' = k[X_0, \cdots, X_{m+2}]$, $\mathfrak{b}'_{m,n}$ l'idéal de la courbe monomiale $\mathcal{C}'_{m,n} \subset \mathbb{P}^{m+2}$ paramétrée sur la carte affine $X_0 = 1$ par

$$(1 : t : t^{n^m} : t^{n^{m-1}(n+1)} : \cdots : t^{(n+1)^m}).$$

Les polynômes $F_i = X_i^{n+1} - X_0X_{i+1}^n$ pour $2 \leq i \leq m+1$ sont dans $\mathfrak{b}'_{m,n}$. En effet on a $X_0 = 1$, $X_1 = t$ et pour $i \geq 2$, $X_i = t^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}}$; donc

$$X_i^{n+1} = t^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-1}} = X_{i+1}^n.$$

Définissons par récurrence sur m,

$$f_1(X_2, X_3) := \frac{X_3}{X_2} \quad et \quad f_m(X_2, \cdots, X_{m+2}) := f_{m-1}(\frac{X_3}{X_2}, \cdots, \frac{X_{m+2}}{X_{m+1}}).$$

On note que si $m = 1$, et $x = (x_0 : \cdots : x_3) \in \mathcal{C}'_{1,n}$ avec $x_0x_1 \neq 0$, alors $f_1(x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_0}$. D'autre part, soit $m > 1$ et $x = (1 : x_1 : \cdots : x_{m+2}) \in \mathcal{C}'_{m,n}$ avec $x_1 \neq 0$.

Posons $y_0 = 1$, $y_1 = x_1$ et $y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}$ pour $i \geq 2$, alors on a

$$y_i = \frac{t^{n^{m-i+1}(n+1)^{i-1}}}{t^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}}} = t^{n^{(m-1)-i+2}(n+1)^{i-2}},$$

ainsi $(1 : y_1 : \cdots : y_{m+1}) = (1 : x_1 : \frac{x_3}{x_2} : \cdots : \frac{x_{m+2}}{x_{m+1}}) \in \mathcal{C}'_{m-1,n}$; on en déduit par récurrence sur m que $f_m(x_2, \cdots, x_{m+2}) = x_1$.

De plus, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.16.

$$f_m(X_2,\cdots,X_{m+2})^{(-1)^m}=\prod_{j=0}^{m}X_{j+2}^{(-1)^j\binom{m}{j}}=\frac{P_m(X_2,X_4,\cdots)}{Q_m(X_3,X_5,\cdots)}$$

où P_m et Q_m sont des polynômes homogènes de degré 2^{m-1}.

Démonstration. Elle se fait par récurrence sur m.

La propriété est vérifiée pour $m=1$. Supposons que

$$\begin{aligned} f_{m-1}(Y_2,\cdots,Y_{m+1})^{(-1)^{m-1}} &= \prod_{j=0}^{m-1}Y_{j+2}^{(-1)^j\binom{m-1}{j}} \\ &= \frac{P_{m-1}(Y_2,Y_4,\cdots)}{Q_{m-1}(Y_3,Y_5,\cdots)}, \end{aligned}$$

on a $f_m(X_2,\cdots,X_{m+2})^{(-1)^m}=f_{m-1}(Y_2,\cdots,Y_{m+1})^{(-1)^{m-1}}$, où $Y_i=\frac{X_{i+1}}{X_i}$. Par hypothèse de récurrence, $f_{m-1}(Y_2,\cdots,Y_{m+1})^{(-1)^{m-1}}=\prod_{j=0}^{m-1}Y_{j+2}^{(-1)^j\binom{m-1}{j}}$, donc

$$\begin{aligned} f_m(X_2,\cdots,X_{m+2})^{(-1)^m} &= \prod_{j=0}^{m-1}\left(\frac{X_{j+2}}{X_{j+3}}\right)^{(-1)^j\binom{m-1}{j}} \\ &= \left(\prod_{j=0}^{m-1}X_{j+2}^{(-1)^j\binom{m-1}{j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m-1}X_{j+3}^{(-1)^{j+1}\binom{m-1}{j}}\right) \\ &= X_2\left(\prod_{j=1}^{m-1}X_{j+2}^{(-1)^j\binom{m-1}{j}}\right)\left(\prod_{j=1}^{m}X_{j+2}^{(-1)^{j+1}\binom{m-1}{j-1}}\right) \\ &= X_2\left(\prod_{j=1}^{m-1}X_{j+2}^{(-1)^j(\binom{m-1}{j}+\binom{m-1}{j-1})}\right)X_{m+2}^{(-1)^m} \\ &= \prod_{j=0}^{m}X_{j+2}^{(-1)^j\binom{m}{j}}. \end{aligned}$$

D'où la démonstration du lemme. $\square$

Il découle de ce qui précède que le polynôme défini par $F_1':=X_0P_m-X_1Q_m$ si m est pair et $F_1':=X_1P_m-X_0Q_m$ si m est impair appartient à $\mathfrak{b}'_{m,n}$.
La proposition suivante permet de construire à partir de l'idéal de cette courbe monomiale, une intersection complète de codimension $m+1$, pour cela nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.17. *Soit k un corps, R une k-algèbre de Cohen-Macaulay graduée en degrés positifs et $I = (f_1, \cdots, f_s)$ un idéal de R engendré par s polynômes homogènes. Si* $\operatorname{codim}(I) = s$, *alors $f_1, \cdots, f_s$ forment une suite régulière.*

Démonstration. Quitte à travailler avec une extension, on peut supposer le corps k infini. La démonstration du lemme se fait par récurrence sur s.

La propriété est vraie pour $s = 1$ car R est de Cohen-Macaulay et équidimensionel. Supposons $s \geq 2$ et soit $J = (f_2, \cdots, f_s)$, il existe un élément $g \in J$ tel que $h_1 = f_1 + g$ ne soit pas un diviseur de zéro dans R et on a $I = (h_1, f_2, \cdots, f_s)$.

Posons $R' = R/(h_1)$, $I' = I/(h_1)$ on a, $\operatorname{codim}_{R'}(I') = s - 1$ et $I' = (\overline{f_2}, \cdots, \overline{f_s})$ où $\overline{f_i}$ est la classe de f_i modulo(h_1). Par hypothèse de récurrence $(\overline{f_2}, \cdots, \overline{f_s})$ est une suite R'-régulière, ainsi $(f_2, \cdots, f_s, h_1)$ est une suite R-régulière. Comme $h_1 = f_1 + g$ avec $g \in J$, $(f_2, \cdots, f_s, f_1)$ est une suite R-régulière. Comme R est gradué à degrés positifs et les f_i sont homogènes de degrés positifs (si non $f_i \in \mathfrak{m}$ et donc $I = R$), d'après [7, paragraphe 9, n°7, corollaire 2], $(f_1, f_2, \cdots, f_s)$ est une suite R-régulière. □

Soit $I'_{m,n} := (F'_1, F_2, \cdots, F_{m+1})$, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.18. *On a $I'_{m,n} = \mathfrak{b}'_{m,n} \cap J'_{m,n} \cap K'_{m,n}$, où $J'_{m,n}$ est un idéal $(X_2, \cdots, X_{m+2})$-primaire et $K'_{m,n}$ est un idéal $(X_0, X_2, \cdots, X_{m+1})$-primaire. En particulier $I'_{m,n}$ est une intersection complète de codimension $m + 1$.*

Démonstration. Soit $J' := (X_2, \cdots, X_{m+2})$ et $K' := (X_0, X_2, \cdots, X_{m+1})$. Le schéma $\mathcal{Z}'_{m,n} := \operatorname{Proj}(R'/I'_{m,n})$ contient les droites $D := \operatorname{Proj}(R'/J')$ et $D' := \operatorname{Proj}(R'/K')$, de plus $\mathcal{Z}'_{m,n} \cap \{X_0 = 0\}$ est à support dans D'.

Montrons que sur la carte affine $X_0 = 1$, $\mathcal{Z}'_{m,n}$ est l'union d'un schéma à support dans D et de $\mathcal{C}'_{m,n}$. On note que si $X_2 \neq 0$, alors $X_i \neq 0$ pour tout i et si $X_2 = 0$, les autres sont aussi nuls. Lorsque $m = 1$, on a $X_2^{n+1} = X_3^n = (X_1X_2)^n$ d'où $X_2 = X_1^n$ puis $X_3 = X_1X_2 = X_1^{n+1}$. Si $m > 1$, on pose $Y_1 := X_1$ et $Y_i := \frac{X_{i+1}}{X_i}$ pour $2 \leq i \leq m + 1$ et on remarque que $X_i = Y_i^n$ pour $2 \leq i \leq m + 1$, d'où $Y_i^{n+1} = Y_{i+1}^n$ pour $2 \leq i \leq m$.

Par définition $f_{m-1}(Y_2, \cdots, Y_{m+1}) = f_m(X_2, \cdots, X_{m+2})$. Par récurrence sur m on déduit que $Y_i = Y_1^{n^{m-i+1}(n+1)^{i-2}}$, d'où

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i^n \\ &= Y_1^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}} \\ &= X_1^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}} \quad \textit{pour} \quad 2 \leq i \leq m+1. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} X_{m+2} &= X_{m+1}Y_{m+1} \\ &= X_1^{n(n+1)^{m-1}} Y_1^{(n+1)^{m-1}} \\ &= X_1^{(n+1)^m}. \end{aligned}$$

Ceci montre comme annoncé que $\mathcal{Z}'_{m,n}$ coïncide avec $\mathcal{C}'_{m,n}$ hors de $D \cup D'$. $\mathcal{Z}'_{m,n}$ est donc de codimension $m+1$. Ainsi, d'après le lemme 2.17, $(F'_1, F_2, \cdots F_{m+1})$ est nécessairement une suite régulière dans R' et $I'_{m,n}$ est purement de codimension $m+1$. La proposition en découle. □

Proposition 2.19. $\mathrm{reg}(J'_{m,n} \cap K'_{m,n}) < \mathrm{reg}(I'_{m,n}) = mn + 2^{m-1} + 1$

Cette proposition découle du théorème plus général suivant

Théorème 2.20. *([25, 4.2])*

Soient X et Y deux courbes projectives tels que $X \cup Y$ soit une intersection complète. Si $\dim(X \cap Y) < 1$ et Y est réduit, alors $\mathrm{reg}(X) < \mathrm{reg}(X \cup Y)$.

L'idéal $\mathfrak{b}'_{m,n}$ étant radical, on a $\mathrm{reg}(J'_{m,n} \cap K'_{m,n}) < \mathrm{reg}(I'_{m,n}) = mn+2^{m-1}+1$ d'après le théorème 2.20 . En particulier, $\mathfrak{a}'_{m,n} := J'_{m,n} \cap K'_{m,n}$ est engendré en degrés au plus $mn + 2^{m-1}$. Il existe donc $F' \in \mathfrak{a}'_{m,n} \setminus \mathfrak{b}'_{m,n}$ homogène de degré $d' := mn + 2^{m-1}$.

Définition 2.21. *Soit $R = K[X_1, \cdots, X_n]$ un anneau de polynômes, $\mathfrak{m} = (X_1, \cdots, X_n)$ et I un idéal de R. Un générateur minimal de I est un élément de I qui n'est pas dans $\mathfrak{m}I$.*

La proposition suivante permet de construire une famille d'idéaux de grande régularité. On pose $\mathcal{I}'_{m,n} := I'_{m,n} + (F')$.

Proposition 2.22. *L'idéal $\mathcal{I}'_{m,n}$ est engendré par m polynômes de degré $n+1$, un polynôme de degré $2^{m-1}+1$ et un polynôme de degré $mn+2^{m-1}$. On a $\dim(R'/\mathcal{I}'_{m,n}) = 2$ et*

$$\mathrm{reg}(\mathcal{I}'_{m,n}) \geq n^m + mn + 2^{m-1} - 1.$$

Démonstration. Comme $R'/I'_{m,n}$ est Cohen-Macaulay de dimension 2, la suite exacte

$$0 \longrightarrow (R'/\mathfrak{b}'_{m,n})[-d'] \xrightarrow{\times F'} R'/I'_{m,n} \longrightarrow R'/\mathcal{I}'_{m,n} \longrightarrow 0,$$

montre que
$$H^0_{\mathfrak{m}}(R'/\mathcal{I}'_{m,n}) \simeq H^1_{\mathfrak{m}}(R'/\mathfrak{b}'_{m,n})[-d'].$$
En particulier
$$a_0(R'/\mathcal{I}'_{m,n}) = a_1(R'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + d'.$$
Les générateurs minimaux de l'idéal d'une courbe monomiale sont des binômes. Sur la carte affine $X_0 = 1$, le seul binôme en X_1 et X_2 de la courbe monomiale affine $\widetilde{\mathfrak{b}'_{m,n}}$ de degré au plus n^m est $X_1^{n^m} - X_2$, donc $X_1^{n^m} - X_0^{n^m-1}X_2$ est un générateur minimal de $\mathfrak{b}'_{m,n}$. Ainsi $\operatorname{reg}(\mathfrak{b}'_{m,n}) \geq n^m$. Comme, d'autre part,

$$\begin{array}{rcl} a_2(R'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + 2 & < & a_2(R'/I'_{m,n}) + 2 \\ & = & \operatorname{reg}(R'/I'_{m,n}) \\ & = & mn + 2^{m-1}, \end{array}$$

on en déduit que $a_2(R'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + 2 \leq n^m - 1$ pour $(m,n) \neq (2,2),(3,2),(4,2)$.
Puisque $\operatorname{reg}(R'/\mathfrak{b}'_{m,n}) \geq n^m - 1$, on a

$$a_1(R'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + 1 = \operatorname{reg}(R'/\mathfrak{b}'_{m,n}) \text{ pour } (m,n) \neq (2,2),(3,2),(4,2).$$

Lorsque $m = 2,3,4$ et $n = 2$ on vérifie directement en utilisant le logiciel Macaulay 2 [42] que

$$\begin{array}{rcl} a_1(R'/\mathfrak{b}'_{m,n}) + 1 & = & \operatorname{reg}(R'/\mathfrak{b}'_{m,n}) \\ & = & n^m - 1. \end{array}$$

La proposition en découle. □

2.5.2 Second exemple d'idéaux

Soit $m \geq 2$, $R = k[X_0, \cdots, X_{m+1}]$ et $\mathfrak{b}_{m,n} = \mathfrak{b}'_{m,n} \cap R$ l'idéal de la courbe monomiale $\mathcal{C}_{m,n} \subset \mathbb{P}^{m+1}$ paramétrée sur la carte affine $X_0 = 1$ par

$$(1 : t : t^{n^m} : t^{n^{m-1}(n+1)} : \cdots : t^{n(n+1)^{m-1}}),$$

projection de la courbe $\mathcal{C}'_{m,n}$ sur l'hyperplan $X_{m+2} = 0$.

Les polynômes $F_i = X_i^{n+1} - X_0X_{i+1}^n$ pour $2 \leq i \leq m$ sont dans $\mathfrak{b}_{m,n}$.

Soit $F_1 := X_1^n P_{m-1} - X_0^n Q_{m-1}$ si m est pair et $F_1 := X_0^n P_{m-1} - X_1^n Q_{m-1}$ si m est impair. On remarque que $F_1 \in \mathfrak{b}_{m,n}$ et on pose $I_{m,n} := (F_1, \cdots, F_m)$.

Proposition 2.23. *On a $I_{m,n} = \mathfrak{b}_{m,n} \cap J_{m,n} \cap K_{m,n}$, où $J_{m,n}$ est un idéal $(X_2, \cdots, X_{m+1})$-primaire et $K_{m,n}$ est un idéal $(X_0, X_2, \cdots, X_m)$-primaire. En particulier $I_{m,n}$ est une intersection complète de codimension m.*

Démonstration. Soit $J := (X_2, \cdots, X_{m+1})$ et $K := (X_0, X_2, \cdots, X_m)$. Le schéma $\mathcal{Z}_{m,n} := \mathrm{Proj}(R/I_{m,n})$ contient les droites $\Delta := \mathrm{Proj}(R/J)$ et $\Delta' := \mathrm{Proj}(R/K)$, et $\mathcal{Z}_{m,n} \cap \{X_0 = 0\}$ est à support dans Δ'. Montrons que sur la carte affine $X_0 = 1$, $\mathcal{Z}_{m,n}$ est l'union d'un schéma à support dans Δ et de $\mathcal{C}_{m,n}$. Si $X_2 \neq 0$, alors $X_i \neq 0$ pour tout i. Lorsque $m = 2$, on a $X_2^{n+1} = X_3^n = (X_1^n X_2)^n$ d'où $X_2 = X_1^{n^2}$ puis $X_3 = X_1^n X_2 = X_1^{n(n+1)}$. Si $m > 2$, on pose $Y_1 := X_1$ et $Y_i := \frac{X_{i+1}}{X_i}$ pour $2 \leq i \leq m$ et on remarque que $X_i = Y_i^n$ pour $2 \leq i \leq m$ d'où $Y_i^{n+1} = Y_{i+1}^n$ pour $2 \leq i \leq m-1$. Par définition

$$f_{m-2}(Y_2, \cdots, Y_m) = f_{m-1}(X_2, \cdots, X_{m+1}).$$

Par récurrence sur m on en déduit que $Y_i = Y_1^{n^{m-i+1}(n+1)^{i-2}}$, d'où

$$\begin{aligned} X_i &= Y_i^n \\ &= Y_1^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}} \\ &= X_1^{n^{m-i+2}(n+1)^{i-2}} \quad \textit{pour} \quad 2 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} X_{m+1} &= X_m Y_m \\ &= X_1^{n^2(n+1)^{m-2}} Y_1^{n(n+1)^{m-2}} \\ &= X_1^{n(n+1)^{m-1}}. \end{aligned}$$

Le Schéma $\mathcal{Z}_{m,n}$ est donc à support dans la réunion de $\mathcal{C}_{m,n}$, Δ et Δ', et ainsi $(F_1, \cdots, F_m)$ forme nécessairement une suite régulière dans R. On conclut comme pour la proposition 2.18. □

On a $\mathrm{reg}(J_{m,n} \cap K_{m,n}) < \mathrm{reg}(I_{m,n}) = mn + 2^{m-2}$, en particulier $\mathfrak{a}_{m,n} := J_{m,n} \cap K_{m,n}$ est engendré en degrés au plus $mn + 2^{m-2} - 1$. Il existe donc $F \in \mathfrak{a}_{m,n} \setminus \mathfrak{b}_{m,n}$ homogène de degré $d := mn + 2^{m-2} - 1$. En posant $\mathcal{I}_{m,n} := I_{m,n} + (F)$, on a

Proposition 2.24. *L'idéal* $\mathcal{I}_{m,n}$ *est engendré par* $m-1$ *polynômes de degré* $n+1$*, un polynôme de degré* $2^{m-2}+n$ *et un polynôme de degré* $mn+2^{m-2}-1$*. On a* $\dim(R/\mathcal{I}_{m,n}) = 2$ *et*

$$\operatorname{reg}(\mathcal{I}_{m,n}) \geq n^m + mn + 2^{m-2} - 2.$$

Démonstration. Considérons la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow (R/\mathfrak{b}_{m,n})[-d] \xrightarrow{\times F} R/I_{m,n} \longrightarrow R/\mathcal{I}_{m,n} \longrightarrow 0.$$

Comme $R/I_{m,n}$ est Cohen-Macaulay de dimension 2, on déduit de la suite exacte ci-dessus que

$$a_0(R/\mathcal{I}_{m,n}) = a_1(R/\mathfrak{b}_{m,n}) + d.$$

On note que $X_1^{n^m} - X_0^{n^m-1}X_2$ est un générateur minimal de $\mathfrak{b}_{m,n}$, donc $\operatorname{reg}(\mathfrak{b}_{m,n}) \geq n^m$. Comme d'autre part si (m,n) est distinct de $(2,2)$ et $(3,2)$,

$$\begin{aligned} a_2(R/\mathfrak{b}_{m,n}) + 2 &< a_2(R/I_{m,n}) + 2 \\ &= \operatorname{reg}(R/I_{m,n}) = mn + 2^{m-2} \\ &\leq n^m - 1 \end{aligned}$$

on a $a_1(R/\mathfrak{b}_{m,n}) + 1 = \operatorname{reg}(R/\mathfrak{b}_{m,n}) \geq n^m - 1$ dans ces cas. Lorsque $m = 2$ ou $m = 3$, on a $a_1(R/\mathfrak{b}_{m,n}) + 1 = \operatorname{reg}(R/\mathfrak{b}_{m,n}) = n^m - 1$ d'après [6] si $m = 2$ et ([20, 2.6 (3)]) si $m = 3$. La proposition en découle. □

Remarque 2.25. *Lorsque* $m = 2$ *ou* $m = 3$ *on a plus précisément*

$$\operatorname{reg}(\mathcal{I}_{m,n}) = n^m + mn + 2^{m-2} - 2,$$

car $\operatorname{reg}(\mathfrak{b}_{m,n}) = a_1(R/\mathfrak{b}_{m,n}) + 2 = n^m$ *d'après [6] si* $m = 2$ *et ([20, 2.6 (3)]) si* $m = 3$*. D'autre part, d'après L'vovsky ([59, 5.5]),* $\operatorname{reg}(\mathfrak{b}_{m,n}) \leq n^m + n(n+1)^{m-2} - 1$ *pour tout* m*, et ainsi*

$$\operatorname{reg}(\mathcal{I}_{m,n}) \leq n^m + n(n+1)^{m-2} + mn + 2^{m-2} - 3.$$

Ceci doit être comparé à la borne founie par le théorème 2.13, qui donne, après quelques simplifications,

$$\operatorname{reg}(\mathcal{I}_{m,n}) \leq 2m^2 n(n+1)^{m-2}(n + 2^{m-2})^2.$$

L'exposant de n *dans cette expression diffère donc de un par rapport à sa vraie valeur.*

Chapitre 3

Bornes pour la régularité des modules

3.1 Introduction

Bayer et Stillman ont montré dans [2] que la complexité d'un idéal (ou d'un module) est la même que celle de l'un de ses idéaux génériques. Cette connection a motivé beaucoup de recherches pour les bornes de la régularité de Castelnuovo-Mumford en termes des degrés des générateurs d'un idéal et cela pour contrôler la complexité du calcul des bases de Gröbner. Pour un corps k de caractéristique zéro et un idéal I d'un anneau de polynômes $R = k[X_0, \cdots, X_n]$, engendré en degrés au plus d, Galligo ([Ga1], [Ga2]) et Giusti ([Giu]) ont prouvé la borne suivante :

$$\mathrm{reg}(I) \leq (2d)^{2^{n-1}}.$$

Utilisant un argument de Mumford ([64]), Bayer et Mumford ([1]) ont obtenu en toute caractéristique la borne plus faible suivante :

$$\mathrm{reg}(I) \leq (2d)^{n!}.$$

Dans [16] Caviglia et Sbarra montrent que la borne de Galligo et Giusti est valide en toute caractéristique.

Les exemples de Mayr et Meyer ([63]) montrent que le comportement doublement exponentiel n ne peut pas être évité.

Dans ce chapitre nous étendons aux modules gradués de type fini ces bornes connues pour les idéaux. Comme $\mathrm{reg}(I) = \mathrm{reg}(R/I) + 1$, le cas des idéaux correspond aux modules cycliques engendrés en degré zéro.

Pour prolonger le résultat aux modules quelconques, nous tenons compte des degrés des générateurs et de leurs relations. Des résultats sur la régularité des modules ont également été prouvés indépendamment par Brodmann et Götsch dans [11]. Les bornes qu'ils fournissent sont comparées aux nôtres. Notons que l'exposant qui apparait dans nôtre borne dépend de la dimension du support du module qui est plus petit que la dimension de l'anneau qui apparaît dans leur borne. Pour établir les résultats de ce chapitre nous procédons en deux étapes.

D'abord nous établissons des bornes dans le cas des modules de dimension au plus un. En second nous étendons aux modules la méthode de Caviglia et Sbarra, cette méthode permet de procéder par récurrence sur la dimension du module. Pour la première étape nous employons un argument d'abord présenté par Gruson, Lazarsfeld et Peskine en prouvant des bornes pour la régularité des courbes réduites. Cet argument montre qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une résolution libre graduée pour estimer la régularité de Castelnuovo-Mumford.

Nos résultats sont assez généraux car ils sont valables pour des modules de dimension au plus un sur chaque R_0-algèbre graduée standard où R_0 est un anneau local artinien et sur des modules de dimension quelconque sur une R_0-algèbre graduée de Cohen-Macaulay. Les principaux résultats nouveaux dans ce chapitre sont les théorèmes suivants.

Théorème. *Soit R un anneau gradué standard de Cohen-Macaulay et M un R-module gradué de codimension $c > 0$ engendré par n éléments de degrés $a_1, \cdots, a_n$ et dont le premier module de syzygie est engendré en degrés $b_1 \geq \cdots \geq b_s$.*
Alors, $s \geq c + n - 1$ et

$$\deg(M) \leq \deg(R) \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_c \leq n} \prod_{\ell=1}^{c} (b_{i_\ell + \ell - 1} - a_{i_\ell}).$$

Ce théorème donne une estimation de la multiplicité d'un module M en fonction des degrés apparaissant dans une présentation de M.

Théorème. *Soit R une algèbre de Cohen-Macaulay, graduée standard sur un anneau artinien local R_0, et soit $M \neq 0$ un R-module gradué de type fini. Supposons que M soit engendré par n éléments de degrés positifs ou nuls. Soit c et δ la codimension et la dimension du support de M ($c + \delta = \dim R$), respectivement. Si M est engendré en degrés au plus $\kappa - 1$ et si son premier module de syzygies est engendré en degrés au plus κ, alors :*

(i) *Si* $\delta \leq 1$ *et* $c > 0$, *on a :* $\operatorname{reg}(M) \leq \operatorname{reg}(R) + (\dim R + n - 1)\,\kappa - \dim R.$

$(i)'$ *Si* $\delta \leq 1$ *et* $c = 0$, *on a :* $\operatorname{reg}(M) \leq \operatorname{reg}(R) + \kappa - 1.$

(ii) *Si* $\delta \geq 2$ *et* $c > 0$, *on a :*

$$\operatorname{reg}(M) \leq \left[\deg(R)(\operatorname{reg}(R) + (c+n)\,\kappa - c)\binom{c+n-1}{c}\kappa^c\right]^{2^{\delta-2}}.$$

$(ii)'$ *Si* $\delta \geq 2$ *et* $c = 0$, *on a :*

$$\operatorname{reg}(M) \leq \left[n \deg(R)(\operatorname{reg}(R) + \kappa)\right]^{2^{\delta-2}}.$$

3.2 Bornes pour la régularité des modules en dimension au plus 1

3.2.1 Sur les complexes d'Eagon-Northcott

Soit R une algèbre graduée standard sur un anneau artinien local $(R_0, \mathfrak{n})$, i.e. R_1 est un R_0-module de type fini et $R = R_0[R_1]$. Soit M un R-module gradué de présentation finie

$$F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où $F = \bigoplus_{i=1}^{m} R[-b_i]$, $G = \bigoplus_{i=1}^{n} R[-a_i]$ et $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$, avec $m \geq n$.

Posons $—^* := \mathrm{Hom}_R(—, R)$ et $\sigma := \sum_{i=1}^{n} a_i$. soit $E_\bullet^{(l)}$ le complexe R-gradué de R-modules associacié à φ (voir [29]) :

$$0 \longrightarrow N_{m-n}^{(l)}[\sigma] \xrightarrow{\delta} N_{m-n-1}^{(l)}[\sigma] \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_l^{(l)}[\sigma] \xrightarrow{\varepsilon} L_l^{(l)} \xrightarrow{\nu} L_{l-1}^{(l)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0^{(l)} \longrightarrow 0$$

avec $N_s^{(l)} = \mathrm{Sym}_{s-l} G^* \bigotimes \bigwedge^{n+s} F$ pour $l \leq s \leq m-n$ et $L_s^{(l)} = \mathrm{Sym}_{l-s} G \bigotimes \bigwedge^{s} F$ pour $0 \leq s \leq l$.

Le complexe $E_\bullet^{(l)}$ a des différentielles homogènes de degrés 0, son homologie est à support dans le support de M, $H_0(E_\bullet^{(l)}) = \mathrm{Sym}_R^l(M)$ pour $l > 0$, et $H_0(E_\bullet^{(0)}) = R/\mathrm{Fitt}_0^R(M)$. Les complexes $E_\bullet^{(0)}$ et $E_\bullet^{(1)}$ sont respectivement appellés complexe de Eagon-Northcott et complexe de Buchsbaum-Rim. Soit $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ les modules de cohomologie locale de M à support dans l'ideal $\mathfrak{m} = \oplus_{i>0} R_i$. Notons que $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \cong H_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}}^i(M)$ et posons

$$a_i(M) := \sup\{\mu \mid H_{\mathfrak{m}}^i(M)_\mu \neq 0\} \quad si \quad H_{\mathfrak{m}}^i(M) \neq 0.$$

et $-\infty$ si $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$.

Le théorème suivant montre que les modules d'homologie des complexes $E_\bullet^{(l)}$ ont un support contenu dans le support du module M.

Théorème 3.1. *[29]*

Soit R une algèbre graduée standard sur un corps et M un $R-$module gradué de présentation finie

$$F = \bigoplus_{i=1}^{m} R[-b_i] \xrightarrow{\varphi} G = \bigoplus_{j=1}^{n} R[-a_j] \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad avec \quad m \geq n.$$

Alors, les modules d'homologie $H_s(E_\bullet^{(l)})$ sont annulés par l'idéal $I_n(\varphi)$ des mineurs d'ordre n de la matrice φ.

Les résultats suivants donnent quelques propriétés des complexes $E_\bullet^{(l)}$

Théorème 3.2. *[13]*

Soit R une algèbre graduée standard sur un corps et M un $R-$module gradué de présentation finie

$$F = \bigoplus_{i=1}^{m} R[-b_i] \xrightarrow{\varphi} G = \bigoplus_{j=1}^{n} R[-a_j] \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad avec \quad m \geq n.$$

Si $grad(I_n(\varphi)) = m - n + 1$, la plus grande valeur possible, alors on a les propriétés suivantes

(1) *Les complexes $E_\bullet^{(l)}$ sont acycliques pour $0 \leq \ell \leq m - n$.*
(2) *$E_\bullet^{(0)}$ est une résolution libre de $R/I_n(\varphi)$.*
(3) *$E_\bullet^{(l)}$ est une résolution libre de $\mathrm{Sym}_R^l(M)$.*
(4) *$R/I_n(\varphi)$ et les $\mathrm{Sym}_R^l(M)$ sont des modules parfaits.*

Corollaire 3.3. *[29]*

Soit R une algèbre graduée standard sur un corps et M un $R-$module gradué de présentation finie

$$F = \bigoplus_{i=1}^{m} R[-b_i] \xrightarrow{\varphi} G = \bigoplus_{j=1}^{n} R[-a_j] \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad avec \quad m \geq n.$$

Si $grad(I_n(\varphi)) = m-n+1$ et si R est un anneau local, alors les $\binom{m}{n}$ mineurs maximaux de φ forment un système minimal de générateurs de l'idéal qu'ils engendrent.

Nous fournirons des bornes pour la régularité des puissances symétriques de M en termes de degrés des générateurs de M et de son premier module des syzygies. Nous commençons par traiter le cas des modules de dimension au plus 1.

Pour démontrer ces résultats sur la régularité, nous utilisons le théorème suivant qui est basé sur une idée de Gruson,Lazarsfeld et Peskine dans [43] et qui généralise le lemme 5.9 dans [30]. Ce résultat montre qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une résolution libre graduée pour estimer des bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford.

Théorème 3.4. *Soit C un complexe de R-modules gradués de type fini tel que $C_i = 0$ pour $i < 0$. Si pour $i > 0$, on a $\dim(H_i(C)) \leq i$, alors*

$$a_i(H_0(C)) \leq \max_{j \geq 0}\{a_{i+j}(C_j)\}, \quad \forall i.$$

En particulier,

$$\operatorname{reg}(H_0(C)) \leq \max_{0 \leq j \leq \dim R}\{\operatorname{reg}(C_j) - j\}.$$

Démonstration. On considère le complexe gradué double $\mathcal{C}^{\bullet}_{\mathfrak{m}}C$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal homogène de R et $\mathcal{C}^{\bullet}_{\mathfrak{m}}C$ est le complexe de Čech sur C. Il donne lieu à deux suites spectrales. L'une d'elle a pour deuxième terme $'E_2^{pq} = H^p_{\mathfrak{m}}(H_q(C))$. Comme $\dim(H_i(C)) \leq i$ pour $i > 0$, on a $'E_2^{pq} = 0$ pour $p > q > 0$. Ce qui implique que $'E_2^{p0} \simeq {}'E_\infty^{p0}$ pour tout p. L'autre suite spectrale a pour premier terme, $''E_1^{pq} = H^q_{\mathfrak{m}}(C_p)$. On en déduit que $('E_\infty^{i0})_\mu \simeq ('E_2^{i0})_\mu = H^i_{\mathfrak{m}}(H_0(C))_\mu$ s'annule si $H^p_{\mathfrak{m}}(C_q)_\mu = 0$ pour $p = q + i$. $\square$

Pour la simplicité, nous énonçons les résultats en séparant le cas où l'anneau est de dimension au plus 1 et le cas général.

3.2.2 Bornes pour la régularité dans le cas où l'anneau est de dimension au plus 1

La proposition suivante donne des bornes pour la régularité du module M et de ses puissances symétriques dans le cas où l'anneau de base est de dimension au plus 1.

Proposition 3.5. *Soit R une algèbre graduée standard de dimension au plus 1 sur un anneau artinien local R_0, M un R-module gradué de présentation finie*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} R[-b_i] \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^{n} R[-a_i] \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Supposons que $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$, posons $b := \max\{b_i\} = b_1$ et $a := \max\{a_i\}$. Alors pour $l > 0$,

(i) Si $\dim R = 0$, $\operatorname{reg}(R/\operatorname{Fitt}^0_R(M)) \leq \operatorname{reg}(R)$ et $\operatorname{reg}(\operatorname{Sym}^l_R(M)) \leq \operatorname{reg}(R) + la$,

(ii) Si $\dim R = 1$,

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(\operatorname{Sym}^l_R(M)) &\leq \max\{a_0(R) + la, a_1(R) + (l-1)a + b\} \\ &\leq \operatorname{reg}(R) + \max\{la, (l-1)a + b - 1\}\end{aligned}$$

et

$$\operatorname{reg}(R/\operatorname{Fitt}^0_R(M)) \quad \leq \quad \operatorname{reg}(R) + \max\{0, \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) - 1\}.$$

Démonstration. Si $\dim(R) = 0$, alors $\operatorname{reg}(R/\operatorname{Fitt}^0_R(M)) \leq \operatorname{reg}(R)$ et, comme $\operatorname{Sym}^l_R(M)$ est un quotient de $\operatorname{Sym}^l_R(G)$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(\operatorname{Sym}^l_R(M)) &\leq \operatorname{reg}(\operatorname{Sym}^l_R(G)) \\ &= \operatorname{reg}(R) + la_1. \end{aligned}$$

Si $\dim R = 1$, alors en appliquant le théorème 3.4 à $E^{(l)}_\bullet$ on obtient pour $l = 0$ et $m \geq n$, $\operatorname{reg}(R/\operatorname{Fitt}^0_R(M)) \leq \max\{\operatorname{reg}(L^{(0)}_0), \operatorname{reg}(L^{(0)}_1) - 1\}$ et pour $l > 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(\operatorname{Sym}^l_R(M)) &\leq \max\{a_0(L^{(l)}_0), a_1(L^{(l)}_1) - 1\} \\ &\leq \operatorname{reg}(R) + \max\{la, b + (l-1)a - 1\}. \end{aligned}$$

Le résultat en découle. $\square$

3.2.3 Bornes pour la régularité dans le cas où l'anneau est de dimension au moins 2

Lorsque l'anneau est de dimension est au moins 2, on a le résultat suivant :

Théorème 3.6. *Soit R une algèbre graduée standard de dimension $d \geq 2$ sur un anneau artinien local R_0, $M \neq 0$ un R-module gradué de dimension au plus 1, de présentation finie, $M = \operatorname{coker}(\bigoplus_{i=1}^m R[-b_i] \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^n R[-a_i])$ (Notons que $m \geq n+d-2$). Supposons que $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_m$ et $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Posons $D_l := \sum_{i=1}^l (b_i - 1)$ et $\Delta := \sum_{i=1}^{\min\{m,n+d-1\}} b_i - \sum_{i=1}^n a_i - (d-1)a_n - d$.*

Soit $M' := \operatorname{coker}(\bigoplus_{i=1}^{n+d-2} R[-b_i] \xrightarrow{\varphi'} \bigoplus_{i=1}^n R[-a_i])$, où φ' est la restriction de φ.

Alors,
(i) $\operatorname{reg}(R/\operatorname{Fitt}^0_R(M)) \leq \operatorname{reg}(R) + \Delta$,
(ii) pour $l \leq d-1$,

$$\operatorname{reg}(\operatorname{Sym}^l_R(M)) \leq \begin{cases} \operatorname{reg}(R) + \max\{D_l, \Delta + la_n\} & \text{si } M \neq M' \quad \text{ou} \quad l \leq d-2 \\ \operatorname{reg}(R) + D_{d-1} & \text{si} \quad M = M' \quad \text{et} \quad l = d-1 \end{cases}$$

(iii) pour $l \geq d$, $\operatorname{reg}(\operatorname{Sym}^l_R(M)) \leq \operatorname{reg}(R) + D_d + (l-d)a_1$.

Démonstration. En modifiant au besoin les générateurs et les relations de M, on peut supposer que les modules $F := \bigoplus_{i=1}^{m} R[-b_i]$ et $G := \bigoplus_{i=1}^{n} R[-a_i]$ peuvent se décomposer en $F = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ et $G = G_1 \oplus G_2$, avec une présentation de M de la forme suivante :

$$F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} G_1 \oplus G_2$$

où ψ est une présentation minimale de M.

Notons qu'en passant à une présentation minimale, Δ et D_l décroissent. On peut donc supposer que $F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow M \longrightarrow 0$ est une présentation minimale de M. Cette hypothèse implique que $b_j > a_n$ pour tout j. De plus notons que $b_j > a_1$ pour $j = 1, \cdots, d-1$, $M'' := \operatorname{coker}(F \xrightarrow{\varphi_1} R[-a_1])$ (où φ_1 est donné par la première colonne de φ) est un quotient de M, par suite M' est de dimension au plus 1, ce qui implique qu'au moins $d-1$ des degrés $b_i - a_1$ des entrées de φ_1 sont positifs.

D'après le théorème 3.1, les modules $H_s(E^l_\bullet)$ ont un support dans le support de M. Comme $\dim M \leq 1$, on a $\dim(H_s(E^l_\bullet)) \leq 1$ pour tout s. Par conséquent, d'après le théorème 3.4,

$$(*) \qquad \operatorname{reg}(H_0(E^l_\bullet)) \leq \max_{0 \leq s \leq d} \{\operatorname{reg}(E^l_s) - s\}.$$

$L^{(l)}_s = \operatorname{Sym}_{l-s} G \bigotimes \bigwedge^s F$ est un R-module gradué libre engendré par des éléments de degrés $(a_{i_1} + \cdots + a_{i_{l-s}}) + (b_{j_1} + \cdots b_{j_s})$ avec $i_1 \leq \cdots \leq i_{l-s}$ et $j_1 < \cdots < j_s$. Donc

$$\operatorname{reg}(L^{(l)}_s) = \operatorname{reg}(R) + \sum_{i=1}^{s} b_i + (l-s)a_1.$$

$N^{(l)}_s = \operatorname{Sym}_{s-l} G^* \bigotimes \bigwedge^{n+s} F$ est un R-module gradué libre engendré par des éléments de degrés $-(a_{i_1} + \cdots + a_{i_{s-l}}) + (b_{j_1} + \cdots b_{j_{n+s}})$ avec $i_1 \leq \cdots \leq i_{s-l}$ et $j_1 < \cdots < j_{n+s}$. Par conséquent

$$\operatorname{reg}(N^{(l)}_s[\sigma]) = \operatorname{reg}(R) + \sum_{i=1}^{n+s} b_i + (l-s)a_n - \sigma.$$

Notons que pour $s \leq \min\{l, d-1\}$,

$$\operatorname{reg}(L^{(l)}_s) \leq \operatorname{reg}(R) + D_l + s,$$

car $b_j \geq a_1 + 1$ pour $j \leq d-1$, et que

$$\operatorname{reg}(L^{(l)}_d) \leq \operatorname{reg}(R) + D_d + (l-d)a_1 + d.$$

Dans le cas où $M' \neq M$, on a $m \geq n+d-1$, et pour $l \leq s \leq d-1$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{reg}(N_s^{(l)}[\sigma]) &= \operatorname{reg}(R) + \sum_{i=1}^{n+s} b_i + (l-s)a_n - \sigma \\
&= \operatorname{reg}(R) + \Delta + la_n - \sum_{i=n+s+1}^{n+d-1} b_i + (d-1-s)a_n + d \\
&\leq \operatorname{reg}(R) + \Delta + la_n - (d-1-s)(b_{n+d-1} - a_n) + d \\
&\leq \operatorname{reg}(R) + \Delta + la_n + s + 1
\end{aligned}$$

(car $b_j > a_n$ pour tout j).

Un calcul semblable montre que $\operatorname{reg}(N_s^{(l)}[\sigma]) \leq \operatorname{reg}(R) + \Delta + la_n + s + 1$ pour $s \leq m-n = d-2$ dans le cas où $M = M'$ (rappelons dans ce cas que $E_p^{(l)} = 0$ pour $p \geq d$).

L'inégalité $(*)$ et les estimations pour la régularité de $\operatorname{reg}(L_s^{(l)})$ et de $\operatorname{reg}(N_s^{(l)}[\sigma])$ prouvent les inégalités indiquées dans le théorème. □

Corollaire 3.7. *Soit R une algèbre graduée standard sur un corps et soit M un R-module gradué de dimension au plus 1. Supposons que M est engendré par n éléments de degrés compris entre 0 et $B-1$ et que les syzygies M sont de degrés au plus B. Si* $\dim R > 0$ *ou $n > 1$, alors*

$$\operatorname{reg}(M) \leq \operatorname{reg}(R) + (\dim R + n - 1)B - \dim R.$$

Démonstration. Ceci est une conséquence immédiate de la Proposition 3.5 et du Théorème 3.6 comme $0 \leq a_i \leq B-1$ et $b_j \leq B$ pour tout i et tout j. □

3.3 Bornes pour la régularité des modules en dimension au moins 2

Soit R une algèbre graduée standard sur un anneau artinien local R_0, et $M \neq 0$ un R-module gradué de dimension δ, admettant une présentation finie

$$F = \bigoplus_{i=1}^{m} R[-b_i] \xrightarrow{\varphi} G = \bigoplus_{j=1}^{n} R[-a_j] \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

On peut écrire $R = S/J$, où J est S-idéal gradué et S est un anneau de polynômes sur R_0. Supposons que J n'a aucun élément de degrés 1, cette présentation est unique et $S = \mathrm{Sym}_{R_0}(R_1)$. Posons $b_i^R(M) := \sup\{\mu \mid \ \mathrm{Tor}_i^R(M, R_0)_\mu \neq 0\}$, ainsi $b_i^R(M) = -\infty$ si $\mathrm{Tor}_i^R(M, k) = 0$. Rappelons que $\mathrm{reg}(M) = \max_i\{b_i^S(M) - i\}$. Le degré initial de M est noté par $\mathrm{indeg}\, M = \min\{\mu \mid M_\mu \neq 0\}$. En outre, on note par $\lambda(M)$ la longueur de M comme R_0-module, si M est de longueur finie, et posons $h^i_{\mathfrak{m}}(M)_\mu = \lambda(H^i_{\mathfrak{m}}(M)_\mu)$. Nous allons généraliser aux modules les méthodes de Caviglia et Sbarra. Nous commençons par un résultat qui généralise ([16, 2.2]) :

Lemme 3.8. *Soit M un R-module gradué de type fini et l une forme linéaire telle que $K := 0 :_M (l)$ soit de longueur finie. Posons $M' := M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, $\overline{M} := M/lM$, $\overline{M'} := M'/lM'$, et $a := a_0(M) - \mathrm{indeg}(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) + 1$.*

Alors, pour tout entier μ,

(i)

$$\begin{aligned} \lambda(K_{\geq \mu}) &= h^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu + h^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M})_{>\mu} - h^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M'})_{>\mu} \\ &\geq h^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu, \end{aligned}$$

(ii) $h^0_{\mathfrak{m}}(M)_{\mu+a} \leq \sum_{j=1}^{a} h^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M})_{\mu+j} - \sum_{j=1}^{a} h^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M'})_{\mu+j}$,

(iii) $\mathrm{reg}(M) \leq \mu - 1 + h^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu$, *pour* $\mu \geq \max\{b_0^R(M) + h - 1,\ b_1^R(M) - 1,\ \mathrm{reg}(\overline{M}) + 1\}$ *où* $h := \max\{b_0^S(J), 1\}$.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif suivant à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^0_{\mathfrak{m}}(M) \arrow[r] \arrow[d, "\times l"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\times l"] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\times l"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0_{\mathfrak{m}}(M)[1] \arrow[r] \arrow[d] & M[1] \arrow[r] \arrow[d] & M'[1] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0_{\mathfrak{m}}(M)/lH^0_{\mathfrak{m}}(M)[1] \arrow[r] \arrow[d] & \overline{M}[1] \arrow[r] \arrow[d] & \overline{M'}[1] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Le diagramme montre que la longueur de K_μ est

$$\lambda(K_\mu) = h^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu - h^0_{\mathfrak{m}}(M)_{\mu+1} + h^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M})_{\mu+1} - h^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M'})_{\mu+1}$$

et la première égalité en découle. Posons $F^j := 0 :_M (l^j)$ et notons que $F^0 = 0$ et $F^1 = K$. En utilisant l'égalité $lF^j = F^{j-1} \cap lM$ pour $j \geq 2$, nous obtenons la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow F^j/F^{j-1} \xrightarrow{\times l} F^{j-1}/F^{j-2}[1] \longrightarrow (F^{j-1} + lM)/(F^{j-2} + lM)[1] \longrightarrow 0.$$

Ce qui montre que

$$\lambda(F^j_\mu/F^{j-1}_\mu) = \lambda(F^{j-1}_{\mu+1}/F^{j-2}_{\mu+1}) - \lambda((F^{j-1} + lM)_{\mu+1}/(F^{j-2} + lM)_{\mu+1}),$$

ainsi en particulier, $\lambda(F^j_\mu/F^{j-1}_\mu) \leq \lambda(K_{\mu+j-1})$ pour tout $j \geq 1$. Comme $F_j = F_{j+1} = H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ pour $j \geq a$, nous avons

$$\begin{aligned}
h^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu &= \sum_{j=1}^{a} \lambda(F^j_\mu/F^{j-1}_\mu) \\
&\leq \sum_{j=1}^{a} \lambda(K_{\mu+j-1}) \\
&\leq h^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu - h^0_{\mathfrak{m}}(M)_{\mu+a} + \sum_{j=1}^{a} h^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M})_{\mu+j} - \sum_{j=1}^{a} h^0_{\mathfrak{m}}(\overline{M'})_{\mu+j},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la deuxième inégalité.

Pour (iii), notons que $\mathrm{reg}(M) = \max\{a_0(M), \mathrm{reg}(\overline{M})\}$.

Supposons qu'il existe $\mu \geq \mathrm{reg}(\overline{M})$ tel que $h^0_{\mathfrak{m}}(M)_j > h^0_{\mathfrak{m}}(M)_{j+1}$ pour $j \geq \mu$ et $h^0_{\mathfrak{m}}(M)_j \neq 0$. On en déduit que $a_0(M) \leq \mu - 1 + h^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu$, ainsi $\mathrm{reg}(M) \leq \mu - 1 + h^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu$.

Pour $\mu \geq \mathrm{reg}(\overline{M})$ nous avons la suite exacte

$$0 \longrightarrow K_\mu \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M)_\mu \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M)_{\mu+1} \longrightarrow 0$$

qui montre qu'il suffit d'estimer les degrés des générateurs de K comme S-module.

La suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow M[1] \longrightarrow \overline{M}[1] \longrightarrow 0$$

montre que

$$b_0^S(K) \leq \max\{b_0^S(M),\ b_1^S(M) - 1,\ b_2^S(\overline{M}) - 1\}.$$

Nous obtenons une résolution libre de M comme S-module à partir du double complexe obtenu en prenant une résolution libre de M comme R-module et en résolvant sur S chaque R-module libre. Cela implique en particulier que

$$b_1^S(M) \leq \max\{b_1^R(M),\ b_0^R(M) + b_0^S(J)\}.$$

On en déduit que

$$b_0^S(K) \leq \max\{b_0^R(M) + h - 1,\ b_1^R(M) - 1,\ \mathrm{reg}(\overline{M}) + 1\}.$$

Ce qui montre la dernière assertion. $\square$

Soient M un R-module gradué et $l_1, \cdots, l_{s+1} \in R$ des formes linéaires, posons $M_i := M/(l_1, \cdots, l_i)M$, $i = 0, \cdots, s+1$ et $K_i := \ker(M_i \xrightarrow{\times l_{i+1}} M_i[1])$.

Le lemme 3.8 nous permet d'établir le résultat suivant :

Lemme 3.9. *Soient M un R-module engendré par des éléments de degrés non négatifs et $l_1, \cdots, l_{s+1} \in R$ des formes linéaires telles que $K_i := \ker(M_i \xrightarrow{\times l_{i+1}} M_i[1])$ soit de longueur finie pour tout i. Si on pose*

$$Q_i = \max\{\mathrm{reg}(M_i), \lambda(K_i), b_1^R(M) - 2, b_0^R(M) + \max\{1, b_0^S(J)\} - 2\} + 1 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq i \leq s.$$

Alors, on a

$$Q_i \leq Q_{i+1}^2 \quad \forall i = 0, \cdots, s-1.$$

En particulier,

$$\mathrm{reg}(M) \leq Q_s^{2^s}.$$

Démonstration. La partie (i)du Lemme 3.8 montre que

$$h^0_{\mathfrak{m}}(M_i)_\mu \leq \lambda((K_i)_{\geq \mu}) \leq \lambda(K_i).$$

Comme $H^0_{\mathfrak{m}}(M_i) \subset M_i$ n'a pas d'élément de degré négatif, nous avons

$$h^0_{\mathfrak{m}}(M_i) := \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_i)) \leq (a_0(M_i)+1) \cdot \lambda(K_i).$$

En posant

$$r_i := \max\{b_1^R(M)-2,\ b_0^R(M)+\max\{1, b_0^S(J)\}-2,\ \operatorname{reg}(M_i)\},$$

on a, $Q_i = 1 + \max\{r_i, \lambda(K_i)\}$. En utilisant les inégalités $b_0^{R_{(i)}}(M_i) \leq b_0^R(M)$ et $b_1^{R_{(i)}}(M_i) \leq b_1^R(M)$ où $R_{(i)} = R/(l_1, \cdots, l_i)R$ et en appliquant la partie (iii) du lemme 3.8 au $R_{(i)}$-module M_i, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{reg}(M_i) & \leq & r_{i+1} + h^0_{\mathfrak{m}}(M_i)_{r_{i+1}+1} \\ & \leq & r_{i+1} + \lambda((K_i)_{>r_{i+1}}) \\ & \leq & r_{i+1} + \lambda(K_i). \end{array}$$

Ainsi

$$r_i \leq r_{i+1} + \lambda(K_i).$$

Considérons la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M_i) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M_i)[1] \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M_{i+1}) \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où C est un co-noyau. Cette suite montre que

$$\begin{array}{rcl} \lambda(K_i)_\mu & = & \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_i))_\mu - \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_i))_{\mu+1} + \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_{i+1}))_\mu - \lambda(C)_\mu \\ & \leq & \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_i))_\mu - \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_i))_{\mu+1} + \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_{i+1}))_\mu. \end{array}$$

En sommant, on a

$$\begin{array}{rcll} \lambda(K_i) & \leq & h^0_{\mathfrak{m}}(M_{i+1}) & \\ & \leq & (a_0(M_{i+1})+1) \cdot \lambda(K_{i+1}) & \\ & \leq & (r_{i+1}+1) \cdot \lambda(K_{i+1}) & (**) \end{array}$$

On en déduit que $\lambda(K_i) \leq Q_{i+1}(Q_{i+1}-1)$ et $r_i \leq (Q_{i+1}-1) + Q_{i+1}(Q_{i+1}-1) = Q_{i+1}^2 - 1$, d'où $Q_i \leq Q_{i+1}^2$. $\square$

Les lemmes 3.8 et 3.9 permettent d'étendre et de généraliser la méthode de Caviglia et Sbarra aux modules. Cette nouvelle méthode donne des bornes doublement exponentielles pour la régularité de Castelnuovo-Mumford des modules.

3.3.1 Estimation de la multiplicité d'un module en fonction des degrés des générateurs et des degrés des relations

Pour appliquer le lemme précédent, nous devons estimer le degré (ou la multiplicité) d'un module en termes de degrés apparaissant dans une présentation finie du module.

Dans le cas où l'anneau R est de Cohen-Macaulay, nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 3.10. *Soit R un anneau gradué standard de Cohen-Macaulay et M un R-module gradué de codimension $c > 0$ engendré par n éléments de degrés $a_1, \cdots, a_n$ et dont le premier module de syzygies est engendré en degrés $b_1 \geq \cdots \geq b_s$.*

Alors, $s \geq c+n-1$ et

$$\deg(M) \leq \deg(R) \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_c \leq n} \prod_{\ell=1}^{c} (b_{i_\ell+\ell-1} - a_{i_\ell}).$$

Démonstration. En remplaçant au besoin les générateurs $g_1, \cdots, g_s$ du premier module de syzygie par $g'_i := g_i + \sum_{j>i} h_{ij} g_j$, où h_{ij} est un polynôme suffisamment général de degré $b_i - b_j$, on peut supposer sans sans perte de généralité que l'idéal des mineurs maximaux de la matrice H d'ordre $(c+n-1) \times n$ correspondant aux relations $g_1, \cdots, g_{c+n-1}$ est de codimension c. Comme M est un quotient du module P présenté par H, on a $\deg(M) \leq \deg(P)$. Estimons le degré de P.

-Dans le cas où R est anneau de polynômes sur corps k, d'après les égalités 1.2, 1.3 et 1.4 de [37], le degré de P est égal au coéfficient du terme de degré c dans le développement de l'expression

$$\frac{\prod_{i=1}^{s}(1-b_i t)}{\prod_{j=1}^{n}(1-a_j t)}.$$

En désignant par σ_p la p-ième fonction symétrique en s variables, et par m_q la somme des monômes de degrés q en n variables, on a :

$$\prod_{i=1}^{s}(1-b_i t) = \sum_{p=0}^{s} (-1)^p \sigma_p(b_1, \cdots, b_s) t^p$$

et

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1-a_j t)} = \sum_{q \geq 0} m_q(a_1, \cdots, a_n) t^q.$$

Il s'en suit que $\deg(P) = \sum_{p+q=c} (-1)^{p-c} \sigma_p(b_1, \cdots, b_s) m_q(a_1, \cdots, a_n)$, ce qui peut être réécrit sous la forme

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_c \leq n} \prod_{\ell=1}^{c} (b_{i_\ell+\ell-1} - a_{i_\ell}).$$

Posons $a := (a_1, \cdots, a_n)$, $b := (b_1, \cdots, b_{c+n-1})$ et soit $H_{a,b}(\mu)$ la caractéristique d' Euler-Poincaré du complexe de Buchsbaum-Rim $(E_\bullet^{(1)})_\mu$.

Comme $E_\bullet^{(1)}$ est une résolution libre de P, il existe un polynôme $P_{a,b}(t)$ tel que

$$\begin{aligned}\sum_\mu H_{a,b}(\mu)t^\mu &= \frac{P_{a,b}(t)}{(1-t)^{p-c}}\\ &= (1-t)^c P_{a,b}(t)\frac{1}{(1-t)^p}\\ &= (1-t)^c P_{a,b}(t)\frac{P_R(t)}{(1-t)^p},\end{aligned}$$

où

$$p := \dim(R) \quad et \quad \sum_{1\leq i_1\leq\cdots\leq i_c\leq n}\prod_{\ell=1}^{c}(b_{i_\ell+\ell-1}-a_{i_\ell}) = \deg(P) = P_{a,b}(1).$$

Les mêmes calculs donnent le résultat analogue si R est un anneau de polynômes sur un anneau local artinien R_0.

-Si R n'est pas un anneau de polynômes sur R_0, le complexe de Buchsbaum-Rim est toujours une résolution de M. Comme les décalages se produisant dans les modules $E_i^{(1)}$ sont donnés par les mêmes expressions en termes de a et b comme ci-dessus, la caractéristique d'Euler-Poincaré $H'_{a,b}(\mu)$ de degré μ de $(E_\bullet^{(1)})_\mu$ est donnée par

$$\sum_\mu H'_{a,b}(\mu)t^\mu = (1-t)^c P_{a,b}(t)\frac{P_R(t)}{(1-t)^p}$$

où $p := \dim R$ et $P_R(1) = \deg(R)$, la conclusion en découle. $\square$

Corollaire 3.11. *Avec les hypothèses du théorème 3.10, posons $a := \min_i\{a_i\}$. Alors*

$$\deg(M) \leq \deg(R)\binom{r+n-1}{n-1}\prod_{i=1}^{r}(b_i-a).$$

3.3.2 Bornes pour la régularité des modules

Le théorème suivant donne des bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford des modules gradués de type fini sur anneau de Cohen-Macaulay qui est gradué standard sur un anneau artinien local. Ces résultats étendent aux modules les bornes doublement exponentielles de Galligo, Guisti, Caviglia et Sbarra.

Théorème 3.12. *Soit R un anneau de Cohen-Macaulay gradué standard sur un anneau artinien local R_0 et $M \neq 0$ un R-module gradué de type fini. Supposons que M est engendré par n éléments de degrés non négatifs. Soit c et δ la codimension et la dimension du support de M ($c + \delta = \dim R$), respectivement. Si M est engendré en degré au plus $\kappa - 1$ et dont le premier module de syzygie est engendré en degrés au plus κ, alors :*

(i) *Si* $\delta \leq 1$ *et* $c > 0$, $\operatorname{reg}(M) \leq \operatorname{reg}(R) + (\dim R + n - 1)\,\kappa - \dim R$.

(i)' *Si* $\delta \leq 1$ *et* $c = 0$, $\operatorname{reg}(M) \leq \operatorname{reg}(R) + \kappa - 1$.

(ii) *Si* $\delta \geq 2$ *et* $c > 0$,

$$\operatorname{reg}(M) \leq \left[\deg(R)(\operatorname{reg}(R) + (c+n)\,\kappa - c)\binom{c+n-1}{c}\kappa^c\right]^{2^{\delta-2}}.$$

(ii)' *Si* $\delta \geq 2$ *et* $c = 0$,

$$\operatorname{reg}(M) \leq [n \deg(R)(\operatorname{reg}(R) + \kappa)]^{2^{\delta-2}}.$$

Démonstration. Les parties (i) et $(i)'$ sont prouvées dans le théorème 3.6 et la proposition 3.5. Posons $D := \deg(R)$ et $r := \operatorname{reg}(R)$. On peut supposer que le corps $R_0/\mathfrak{n}$ est infini.

Estimons $\lambda(K)$ lorsque $\dim M = 1$. Soit $l \in R$ est une forme linéaire telque $K := 0 :_M (l)$ soit de longueur finie, on a $\lambda(K) = \lambda(M/lM) - \deg(M)$. En appliquant le Corollaire 3.11 à M/lM on a

$$\lambda(M/lM) \leq D\binom{c+n-1}{n-1}\kappa^c \quad si \quad c > 0.$$

Notons que $\lambda(M/lM) \leq nD$ si $c = 0$. On en déduit que

$$\lambda(K) < D\binom{c+n-1}{n-1}\kappa^c \quad si \quad \dim M = 1 \quad et \quad c > 0$$

et $\lambda(M/lM) \leq nD$ si $\dim M = 1$ et $c = 0$.

Soit $\delta = 2$, $c > 0$ et l une forme linéaire générale, notons que $b_0^R(M) + \max\{1, b_0^S(J)\} \leq (\kappa - 1) + (r + 1)$. Par suite, en utilisant les notations de la partie (i) du lemme 3.8, on a,

$$\begin{aligned} r_1 &= \max\{b_1^R(M) - 2, b_0^R(M) + \max\{1, b_0^S(J)\} - 2, \operatorname{reg}(M/lM)\} \\ &\leq r + (c+n)\,\kappa - (c+1). \end{aligned}$$

Les parties (i) and (iii) du lemme 3.8 entraînent que $\mathrm{reg}(M) < \lambda(K)+r+(c+n)\,\kappa - c$. De plus l'inégalité $(**)$ dans la preuve du lemme 3.9 démontre que

$$\lambda(K) \leq (r+(c+n)\,\kappa - c)\left[D\binom{c+n-1}{n-1}\kappa^c - 1\right].$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \max\{\mathrm{reg}(M), \lambda(K)\}+1 &\leq (r+(c+n)\,\kappa - c)\left[D\binom{c+n-1}{n-1}\kappa^c - 1\right] + r + (c+n)\,\kappa - c \\ &= D(r+(c+n)\,\kappa - c)\binom{c+n-1}{n-1}\kappa^c. \end{aligned}$$

Si $\delta = 2$ and $c = 0$, les estimations sont respectivement :

- $r_1 \leq r + \kappa - 1$ (d'après la partie (i)')
- $\mathrm{reg}(M) < \lambda(K) + r + \kappa$ (d'après les parties (i) et (iii) du Lemme 3.8) et
- $\lambda(K) \leq (r+\kappa)(nD-1)$ (d'après l'inégalité $(**)$ dans la preuve du lemme 3.9.).

On en déduit que $\max\{\mathrm{reg}(M), \lambda(K)\}+1 \leq nD(r+\kappa)$ dans ce cas.

Finalement, si $\delta > 2$, on obtient le résultat par récurrence en utilisant le lemme 3.9 avec $s = \delta - 2$. □

Remarque 3.13. *Les mêmes arguments donnent dans la partie (iii) du théorème 3.12 des inégalités plus fines si $c > 0$.*

Précisément, si M est engendré en degrés $a_1, \cdots, a_s$ et si les degrés des relations sont $b_1 \geq \cdots \geq b_s$, alors (à moins que $s = c+n-1$ dans ce cas M est Cohen-Macaulay de régularité $\mathrm{reg}(R) + \sum_j b_j - \sum_i a_i - c\min\{a_i\}$) on a

$$\mathrm{reg}(M) \leq \left[\deg(R)(\mathrm{reg}(R) + b_1 + \cdots + b_{c+n} - c) \sum_{1\leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq n} \prod_{\ell=1}^{r} (b_{i_\ell+\ell-1} - a_{i_\ell})\right]^{2^{\delta-2}}.$$

Remarque 3.14. *Si M est engendré en degrés entre 0 et a et si son premier module de syzygie est engendré en degré au plus κ, alors $\mathrm{Sym}^l_R(M)$ est engendré en degrés entre 0 et la et son premier module de syzygies est engendré en degrés au plus $\kappa + (l-1)a$.*

En appliquant le théorème 3.12 dans cette situation, si $a \leq \kappa - 1$ et $d := \dim(M) \geq 2$, on obtient la borne suivante :

$$\operatorname{reg}(\operatorname{Sym}^l_R(M)) \leq \left[\deg(R)(\operatorname{reg}(R) + (c+n)(\kappa + (l-1)a - c)\binom{c+n-1}{c}(\kappa + (l-1)a)^c\right]^{2^{\delta-2}}.$$

3.3.3 Comparaison avec le travail de Brodmann et Götsch

Dans [11, 6.3], Brodmann et Götsch montrent la borne suivante :

$$\operatorname{reg}(M) \leq [\operatorname{reg}(R) + (n+1)\deg(R) + \kappa + 1]^{2^{p-1}},$$

où $p = \dim(R)$.

Cette borne est un peu moins précise que la nôtre. La différence principale avec notre borne est que dans notre estimation de la régularité, l'exposant dépend de la dimension du module par opposition à leur exposant qui dépend de la dimension de l'anneau. En outre, notre borne est légèrement plus fine même dans le cas des modules supportés en petite codimension.

3.3.4 Retour aux idéaux

Considérons le cas spécial où $R = S$ est un anneau de polynômes sur un anneau artinien local R_0 et $M = S/I$ est de codimension c, de dimension δ, et I est engendré en degré au plus κ. Le théorème 3.12 entraîne

$$\operatorname{reg}(I) \leq \left[(c+1)\,\kappa^{c+1}\right]^{2^{\delta-2}}.$$

Notons que si $\dim S = p \geq 2$ et $c = 1$, alors $I = (F)J$, où F est de degré $e \leq \kappa$ et l'idéal J est engendré en degrés au plus $\kappa - e$ et a pour codimension $c' \geq 2$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(I) &= e + \operatorname{reg}(J) \\ &\leq e + \left[(c'+1)(\kappa - e)^{c'+1}\right]^{2^{p-4}}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que la régularité de tout idéal $I \subset S := R_0[X_1, \cdots, X_p]$ qui est engendré en degré au plus κ est bornée par $p(\kappa - 1) + 1$ si $p \leq 3$, et par $[3\,\kappa^3]^{2^{p-4}}$ si $p \geq 4$.

En utilisant le lemme 3.9, ([17, 3.3]) ou ([72, théorème 2]) et ([21, théorème 1]), on a la borne légèrement améliorée suivante (ce qui découle également de la preuve du théorème 3.12) :

$$\operatorname{reg}(I) \leq \left[3\,\kappa^2(\kappa-1)\right]^{2^{p-4}} + 1, \quad \text{pour } p \geq 4.$$

Notre résultat améliore aussi la borne de Caviglia and Sbarra [16] :

$$\operatorname{reg}(I) \leq \left[\kappa^2 + 2\,\kappa - 1\right]^{2^{p-3}}.$$

Question 3.1. *Il serait intéressant d'étendre la borne dans le théorème 3.12 à la classe de toutes les algèbres graduées standard sur un anneau artinien local. Pour cela il suffit d'étendre le théorème 3.10*

Chapitre 4

Bornes pour la régularité des Schémas singuliers

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions des bornes pour la régularité de Castelnuovo-Mumford d'un schéma projectif, admettant des singularités en fonction des degrés des équations définissant le schéma, de sa dimension et de la dimension de son lieu singulier. Nous procédons en deux parties. Dans la première partie, nous établissons d'abord des bornes pour la régularité des schémas de dimension au plus 1, admettant des singularités isolées. Puis nous utilisons la méthode de Chardin et Ulrich pour borner la régularité des schémas en dimension $d \geq 2$. Cette méthode largement décrite dans [25], utilise des techniques de liaison, une récurrence sur la dimension et une version améliorée du théorème d'annulation de Kodaira. Nous établissons les bornes suivantes qui améliorent celles obtenues par Chardin et Ulrich :

Théorème *Soit* $R = k[X_0, \cdots, X_n]$ *un anneau de polynômes sur un corps* k, $I = (f_1, \cdots, f_s) \subset R$ *un idéal non nul engendré par des formes de degrés* $d_1 \geq \cdots \geq d_s \geq 2$, $X = \mathrm{Proj}(R/I)$. *Posons* $r = \operatorname{codim} X$ *et* $\sigma = \sum_{i=1}^{r}(d_i - 1)$. *On suppose qu'il existe un schéma* $\mathcal{Z} \subset X$ *de dimension zéro, tel que pour tout* $x \in X - \mathcal{Z}$, X *est localement intersection complète en* x *et* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est de type rationnel.*

Alors $\operatorname{reg}(R/I) \leq \sigma$ *si* R/I *est de Cohen-Macaulay, et sinon*

$$\begin{array}{lll}
(0) & \operatorname{reg}(R/I) \leq \sum_{i=1}^{n+1}(d_i - 1) & \textit{si } \dim X \leq 0, \\
(1) & \operatorname{reg}(R/I) \leq 2(\sigma - 1) + d_n & \textit{si } \dim X = 1, \\
(2) & \operatorname{reg}(R/I) \leq (\dim X + 1)!(\sigma - 1) & \textit{si } \dim X \geq 2.
\end{array}$$

Dans la deuxième partie, on se ramène au cas étudié dans la première partie, en utilisant un théorème de Bertini et la méthode de Caviglia et Sbarra que nous avons étendue et améliorée dans le chapitre 3 de cette présente thèse.

Nous avons obtenu des bornes du même type que celles obtenues dans le chapitre 3, à la seule différence que l'exposant dépend de la dimension du lieu singulier du schéma et non de celle du schéma :

Théorème *Soit X un schéma projectif sur un corps k, de dimension d et de codimension $r > 0$. Soit δ la dimension du lieu singulier de X et I_X l'idéal saturé définissant X. On suppose que X est défini par des équations de degrés au plus $D \geq 2$.*

1) *Si $\delta = -1$ ou si $\delta = 0$ et la caractéristique de k est nulle, alors*

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq r(D-1)+1.$$

2) *Si $\delta \leq 1$, alors* $\operatorname{reg}(I_X) \leq (\dim X)!(r(D-1)-1)+1$.

3) *Si $\delta \geq 2$ alors,*

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq C(n, d-1, \delta-1)D^{(n-\delta)2^{\delta-2}}$$

où $C(n, d, \delta)$ ne dépend que de n, d et δ.

4.2 Rappels sur un théorème de Bertini et sur les singularités

4.2.1 Singularités et théorème de Bertini

Soit $X \subset \mathbb{P}_k^n$ un schéma projectif sur un corps k et $x \in X$ un point de X.

Définition 4.1. *On dit que x est un point non singulier de X si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier. Si $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas régulier on dit que x est un point singulier de X.*

Le lieu singulier du schéma X, $\mathrm{Sing}(X)$ est l'ensemble de ses points singuliers. Notons que $\mathrm{Sing}(X)$ est un fermé de X.

Définition 4.2. *Soit A un anneau noethérien. On dit que A vérifie la condition R_ℓ, si $A_\mathfrak{p}$ est régulier pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A de hauteur au plus ℓ.*

Définition 4.3. *On dit qu'un schéma X vérifie la condition R_ℓ si pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ vérifie la condition R_ℓ.*

Le résultat suivant donne une version du théorème de Bertini qui est valable en toute caractéristique.

Théorème 4.4. *[35, 3.4.14]*

Soit $X \subset \mathbb{P}_k^n$ un schéma projectif sur un corps infini k. Si X est régulier (respectivement normal, réduit, vérifie R_ℓ), alors pour tout hyperplan général H, $X \cap H$ est régulier (respectivement normal, réduit, vérifie R_ℓ).

Corollaire 4.5. *Soit $X \subset \mathbb{P}_k^n$ un schéma projectif et H un hyperplan général. Si* $\dim(\mathrm{Sing}(X)) = s$, *alors* $\dim(\mathrm{Sing}(X \cap H)) = s - 1$.

4.2.2 F-rationalité et Singularités de type rationnel

Définition 4.6. *Soit X un schéma de type fini sur un corps k, on dit que $X' \xrightarrow{\pi} X$ est une désingularisation de X si π est un morphisme propre birationnel et si X' est lisse sur k.*

Définition 4.7. *[25, page 3]*

Soit X un schéma essentiellement de type fini sur un corps k de caractéristique zéro, $X' \xrightarrow{\pi} X$ une désingularisation de X, soit $R^i\pi_*\mathcal{O}_{X'}$ les images directes supérieures du faisceau $\mathcal{O}_{X'}$. On dit que X a des singularités rationnelles si X est normal et si $R^i\pi_*\mathcal{O}_{X'} = 0$ pour tout $i > 0$.

Soit R un anneau noetherien de caractéristique p et R° l'ensemble des éléments de R qui ne sont dans aucun idéal premier minimal de R. Soit I un idéal de R et $q = p^e$ un entier avec e positif, $I^{[q]}$ désigne l'idéal de R engendré par les puissances d'ordre q des éléments de I. La clôture étroite (tight closure) I^* de I est défini par $z \in I^*$ si et seulement si il existe $c \in R^\circ$ et un entier positif N tel que $cz^{p^e} \in I^{[p^e]}$ pour tout $e \geq N$. On dit que I est étroitement clos (tightly closed) si $I = I^*$.

Définition 4.8. *[25, page 3]*

Un anneau R de caractéristique p premier est F-rationnel si tout idéal de R engendré par un système de paramètres est étroitement clos (tightly closed). Un schéma est F-rationnel si tous ses anneaux locaux sont F-rationnel.

La notion de F-rationalité s'etend aux anneaux essentiellement de type fini sur un corps k de caractéristique zéro de la manière suivante :

Définition 4.9. *[73, 4.1]*

Soit k un corps de caractéristique zéro et R une k-algèbre de type fini. On dit que R est F-rationnel s'il existe une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini A contenue dans k, une A-algèbre R_A de type fini, et un morphisme plat $A \hookrightarrow R_A$ tel que :

(i) $(A \hookrightarrow R_A) \otimes_A k$ soit isomorphe à $k \hookrightarrow R$, et

(ii) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ contenu dans un ouvert dense de $\operatorname{Spec} A$, l'anneau $R_A \otimes_A A/\mathfrak{m}$ est F-rationnel.

Définition 4.10. *[73, 4.2] Soit X un schéma de type fini sur un corps de caractéristique zéro k. Un point $x \in X$ est F-rationnel s'il possède un voisinage défini par un anneau F-rationnel. Le schéma X est F-rationnel si tout point $x \in X$ est F-rationnel.*

Nous adoptons la terminologie de Chardin et Ulrich dans [25] :

Définition 4.11. *On dit qu'un anneau R est de type rationnel, s'il est de caractéristique p et F-rationnel ou bien s'il est essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique zéro et à singularités rationnelles. Un schéma X est de type rationnel si ses anneaux locaux sont de type rationnel.*

4.3 Bornes pour la régularité des schémas en dimension au plus un

Soit R un anneau de polynômes sur un corps, $I \subset R$ un idéal homogène. On a le résultat suivant qui améliore [25, 2.1] :

Proposition 4.12. *[17, 5.12]*

Soit $R = k[X_0, \cdots, X_n]$, un anneau de polynômes sur un corps k, $I = (f_1, \cdots, f_s) \subset R$ un idéal homogène de hauteur $n-1$ engendré par s formes de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s$, avec $s \geq n$. Alors,

$$\operatorname{reg}(R/I) = \sum_{i=1}^{s} (d_i - 1) \quad si \quad s = n-1.$$

Si la composante C de dimension 1 de $\operatorname{Proj}(R/I)$ est réduite,

$$\operatorname{reg}(R/I) \leq 2(\sum_{i=1}^{n-1} (d_i - 1) - 1) + d_n \quad si \quad s \geq n$$

Démonstration. Soit $f_1, \cdots, f_n$ des éléments de I de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ tel que $I_{n-1} = (f_1, \cdots, f_{n-1})$ soit une intersection complète. On a $I \neq I_{n-1}$, car I n'est pas une intersection complète.

Posons $J = I_n : I$ et soit $\omega_{R/I}$ le module canonique de R/I, on a $J/I_{n-1} \simeq \omega_{R/I}(-d_1 - \cdots - d_{n-1} + n + 1)$, donc

$$\operatorname{reg}(J/I_{n-1}) = \operatorname{reg}(\omega_{R/I}) + d_1 + \cdots + d_{n-1} - n - 1.$$

$\omega_{R/I}$ étant un module de Cohen-Macaulay de dimension 2, on a d'après les théorèmes d'annulation de Grothendieck $H^i_{\mathfrak{m}}(\omega_{R/I}) = 0$ pour $i \neq 2$, ainsi $\operatorname{reg}(\omega_{R/I}) = a_2(\omega_{R/I}) + 2$.

Comme de plus,

$$\begin{array}{rcl} H^2_{\mathfrak{m}}(\omega_{R/I}) & = & End(\omega_{R/I})^* \\ & \simeq & \bigoplus_{\mu} H^0(C, \mathcal{O}_C(\mu)), \end{array}$$

on a $a_2(\omega_{R/I}) = 0$. On a au total

$$\mathrm{reg}(J/I_{n-1}) = d_1 + \cdots + d_{n-1} - n + 1.$$

Ainsi, modulo I_{n-1}, J est engendré en degrés au plus $d_1+\cdots+d_{n-1}-n+1$, il existe donc un élément $f \in J$ non diviseur de zéro modulo I_C, de degré $d_1+\cdots+d_{n-1}-n+1$ et telque l'idéal $I_{n-1} : (f) = I : (f)$ soit de profondeur strictement positif. La suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow R/I \cap (f) \longrightarrow R/I \oplus R/(f) \longrightarrow R/I + (f) \longrightarrow 0$$

montre que

$$a_0(R/I) \leq a_0(R/I + (f)).$$

Appliquons [17, 3.3] à $M = R$ et $M' = R/I + (f)$, $I + (f) = (f_1, \cdots, f_n, f_{n+1})$ avec $f_{n+1} = f$, $\delta = dim(R) = n + 1$, $\delta' = dim(R/I + (f)) = 1$. On a

$$a_0(R/I + (f)) \leq max\{a_0(R), a_1(R) + d_1, \cdots, a_{n+1}(R) + d_1 + \cdots + d_n + d_{n+1}\},$$

or $a_0(R) = -n - 1$, $d_{n+1} = d^\circ f = d_1 + \cdots + d_{n-1} - n + 1$ et $a_i(R) = 0$ pour $i < n + 1$.

Ainsi,

$$a_0(R/I) \leq 2(d_1 + \cdots + d_{n-1} - n) + d_n.$$

Le corollaire [17, 3.3] appliqué à $M = R$ et $M' = R/I$ montre que :

$$\begin{array}{rcl} a_1(R/I) + 1 & \leq & max\{a_1(R), a_2(R) + d_1, \cdots, a_{n+1}(R) + d_1 + \cdots + d_n\} + 1 \\ & \leq & d_1 + \cdots + d_n - n. \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} a_2(R/I) + 2 & \leq & max\{a_2(R), a_3(R) + d_1, \cdots, a_{n+1}(R) + d_1 + \cdots + d_{n-1}\} + 2 \\ & \leq & d_1 + \cdots + d_n - n + 1. \end{array}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(R/I) &\leq 2(d_1+\cdots+d_{n-1}-n)+d_n\\ &= 2(\sum_{i=1}^{n-1}(d_i-1)-1)+d_n.\end{aligned}$$

□

Le théorème suivant améliore [25, 2.2] :

Théorème 4.13. *[17, 5.13]*

Soit $R=k[X_0,\cdots,X_n]$, un anneau de polynômes sur un corps k, $I=(f_1,\cdots,f_s)\subset R$ un idéal homogène de hauteur $n-1$, engendré par s formes de degrés $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_s$, avec $s\geq n$. On suppose que la composante équidimensionnelle I^{top} de I est réduite. Soit C la composante de dimension 1 de $\operatorname{Proj}(R/I)$. *Si $\mu(I_{\mathfrak{p}})\leq n$, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}\supset I_C$ tel que* $\dim(R/\mathfrak{p})=1$, *alors*

$$\operatorname{reg}(R/I)\leq d_1+\cdots+d_{n+1}-n-1$$

Démonstration. Soit $I_i=(f_1,\cdots,f_i)$ l'idéal engendré par $f_1,\cdots,f_i$. Montrons par récurrence sur i que $a_0(R/I_i)\leq d_1+\cdots+d_i-n-1$.

- Pour $i\leq n$, on a $a_0(R/I_i)=-\infty$ car I_i est un idéal parfait. De plus d'après [17, 5.10], $a_0(R/I_n)\leq d_1+\cdots+d_n-n-1$.

Supposons $i\geq n+1$, la suite exacte suivante :

$$0\longrightarrow\left(\frac{I_{i-1}:f_i}{I_{i-1}}\right)(-d_i)\longrightarrow\frac{R}{I_{i-1}}(-d_i)\longrightarrow\frac{R}{I_{i-1}}\longrightarrow\frac{R}{I_{i-1}+(f_i)}\longrightarrow 0.$$

Cette suite exacte donne la suite longue en cohomologie locale

$$\cdots\longrightarrow H^k_{\mathfrak{m}}\left(\frac{I_{i-1}:f_i}{I_{i-1}}\right)(-d_i)\longrightarrow H^k_{\mathfrak{m}}\left(\frac{R}{I_{i-1}}\right)(-d_i)\longrightarrow H^k_{\mathfrak{m}}\left(\frac{R}{I_{i-1}}\right)\longrightarrow H^k_{\mathfrak{m}}\left(\frac{R}{I_{i-1}+(f_i)}\right)\longrightarrow\cdots$$

qui montre que

$$\begin{aligned}a_0(R/I_i) &= a_0(R/I_{i-1}+(f_i))\\ &\leq \max\left\{a_0(R/I_{i-1}),a_1(R/I_{i-1})+d_i,a_2\left(\frac{I_{i-1}:f_i}{I_{i-1}}\right)+d_i\right\}. \qquad (1)\end{aligned}$$

D'autre part la suite exacte

$$0\longrightarrow\left(\frac{I_{i-1}:f_i}{I_{i-1}}\right)\longrightarrow\frac{R}{I_{i-1}}\longrightarrow\frac{R}{I_{i-1}:f_i}\longrightarrow 0$$

montre que

$$a_2\left(\frac{I_{i-1}:f_i}{I_{i-1}}\right) \leq \max\{a_1(R/I_{i-1}:f_i), a_2(R/I_{i-1})\} \qquad (2).$$

Les inégalités (1) et (2) entraînent que

$$a_0(R/I_i) \leq \max\{a_0(R/I_{i-1}), a_1(R/I_{i-1})+d_i, a_1(R/I_{i-1}:f_i)+d_i, a_2(R/I_{i-1})+d_i\}.$$

Comme $d_i \leq d_{n+1}$, l'hypothèse de récurrence et [17, 5.6] montre que

$$\begin{array}{rcl} a_0(R/I_i) & \leq & \max\{d_1+\cdots+d_{n+1}-n-1, d_1+\cdots+d_n-n-1+d_i \\ & , & d_1+\cdots+d_{n-1}-n-1+d_i, a_1(R/I_{i-1}:f_i)+d_i.\} \qquad (3). \end{array}$$

Montrons que $a_1(R/I_{i-1}:f_i) \leq d_1+\cdots+d_n-n-1$. Le lemme [17, 5.4(2)] entraîne que pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \supset I_C$ de codimension n, $(I_n)_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p}$ et que $(I_{i-1})_\mathfrak{p} = (I_i)_\mathfrak{p}$. Si $\operatorname{codim}(I_{i-1}:f_i) = n$ alors $a_0(I_{i-1}:f_i) = -\infty$, sinon $(I_{i-1}:f_i) = J \cap K$, où J est purement de dimension 1 et $\operatorname{codim}(I+J) = n$. Comme

$$H^1_\mathfrak{m}(R/J\cap K) \simeq H^1_\mathfrak{m}(R/J),$$

on a d'après [24, 2 (i)], $a_1(R/J) \leq d_1+\cdots+d_n-n-1$, d'où

$$\begin{array}{rcl} a_1(R/I_{i-1}:f_i) & \leq & a_1(R/J) \\ & \leq & d_1+\cdots+d_n-n-1 \qquad (4). \end{array}$$

Les inégalités (3) et (4) entraînent

$$a_0(R/I_i) \leq d_1+\cdots+d_{n+1}-n-1.$$

les inégalités

$$a_1(R/I) \leq d_1+\cdots+d_n-1 \quad et \quad a_2(R/I) \leq d_1+\cdots+d_{n-1}-n-1$$

découlent du théorème 5.6 de [17], d'où la borne annoncée. $\square$

4.4 Bornes pour la régularité des schémas en dimension au moins 2

Dans [25], Chardin et Ulrich ont montré le résultat suivant :

Théorème 4.14. *[25, 4.7(b)]*

Soit k un corps et R une k-algèbre gradué standard, $I = (f_1, \cdots, f_s) \subset R$, un idéal engendré par des formes de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s$, $X = \mathrm{Proj}(R/I)$, $r = \mathrm{codim}\, X > 0$, $\mathcal{Z} = \mathrm{Proj}(R)$. On suppose $d_1 \geq 2$, $\dim X \geq 1$, X localement intersection complète dans $\mathcal{Z}$ et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

(i) X est de type rationnel.

(ii) La caractéristique de k est nulle et X a au plus des singularités irrationnelles isolées.

Alors,

$$\mathrm{reg}(R/I) \leq \frac{(\dim X + 2)!}{2}(\mathrm{reg}(R) + d_1 + \cdots + d_r - r - 1)$$

Soit $R = k[X_0, \cdots, X_n]$ un anneau de polynômes sur un corps k, le théorème suivant améliore le théorème 4.14.

Théorème 4.15. *Soit $R = k[X_0, \cdots, X_n]$ un anneau de polynômes sur un corps k, $I = (f_1, \cdots, f_s) \subset R$ un idéal non nul engendré par des formes de degrés $d_1 \geq \cdots \geq d_s \geq 2$, $X = \mathrm{Proj}(R/I)$, $r = \mathrm{codim}\, X > 0$ et $\sigma = \sum_{i=1}^{r}(d_i - 1)$. On suppose qu'il existe un schéma $\mathcal{Z} \subset X$ de dimension zéro, tel que pour tout $x \in X - \mathcal{Z}$, X est localement intersection complète en x et $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type rationnel.*

Alors $\mathrm{reg}(R/I) \leq \sigma$ si R/I est de Cohen-Macaulay, et sinon

$$\begin{array}{lll}
(0) & \mathrm{reg}(R/I) \leq \sum_{i=1}^{n+1}(d_i - 1) & \textit{si } \dim X \leq 0, \\
(1) & \mathrm{reg}(R/I) \leq 2(\sigma - 1) + d_n & \textit{si } \dim X = 1, \\
(2) & \mathrm{reg}(R/I) \leq (\dim X + 1)!(\sigma - 1) & \textit{si } \dim X \geq 2.
\end{array}$$

Démonstration. Si R/I est de Cohen-Macaulay, I est contenu dans une intersection complète $\mathfrak{b}$ de degrés $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_r$. D'après [25, 4.1(a)],

$$\mathrm{reg}(R/I) = \sigma - \mathrm{indeg}\left(\frac{\mathfrak{b} : I}{\mathfrak{b}}\right) \leq \sigma.$$

Le (0) découle de [17, 3.3] (voir aussi [72]) et le (1) découle du théorème 2.1.

Dans ce qui suit nous utilisons la méthode et les notations de [25, 4.4 et 4.7].

Soit $r = \operatorname{codim} X$, on peut supposer que $r \geq 2$.

En effet, si $r = 1$, on peut supposer que $n \geq 3$, il s'agit de montrer que $\operatorname{reg}(R/I) \leq n!(d_1 - 1)$. Comme les f_i ont un facteur commun h, on posons $f_i = hf'_i$ et $I' = (f'_1, \cdots, f'_r)$, l'idéal I' est de codimension $r' \geq 2$ et $\operatorname{reg}(I) = \deg(h) + \operatorname{reg}(I')$.

Si $r' \geq n$, on a d'après (0), $\operatorname{reg}(R/I') \leq (n+1)(d_1 - \delta - 1)$, où $\delta = \deg(h)$, donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{reg}(R/I) &\leq (n+1)(d_1 - \delta - 1) + \delta \\
&\leq (n+1)(d_1 - 1) \\
&\leq n!(d_1 - 1).
\end{aligned}$$

Si $r' \leq n$, le fait que X soit localement intersection complète hors d'un schéma $\mathcal{Z}$ de dimension, implique que $\dim(R/I') \leq 2$. Donc, les inégalités (0) et (1) appliquées à I' donne la borne pour I.

Dans tout ce qui suit on suppose $r \geq 2$, posons

$$a_{i,j} = \sum_{|\mu| = d_i - d_j} U_{i,j,\mu} X^{\mu} \quad 1 \leq i \leq r \quad et \quad r+1 \leq j \leq s,$$

où les $U_{i,j,\mu}$ sont des variables, $X^{\mu} = X_0^{\mu_0} \cdots X_n^{\mu_n}$ et $|\mu| = \mu_0 + \cdots + \mu_n$. Considérons la matrice $A = (a_{i,j})$ et définissons $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ par :

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) = \begin{pmatrix} I_{r,r} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_s \end{pmatrix},$$

où $I_{r,r}$ est la matrice identité d'ordre r. Posons $K = k(U_{i,j,\mu})$, $R' = R \otimes_k K$, $J = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)R' : IR'$, $\mathcal{Y} = \operatorname{Proj}(R'/IR' + J)$. Pour $c = \dim R - 1$ et $c' = \dim R - 2$, le théorème [25, 4.4(d)] montre que $\mathcal{Y}$ est un schéma de type rationnel et localement intersection complète hors d'un schéma de dimension zéro. D'après [25, 1.7(iii)], $\mathcal{Y}$ coïncide avec $\mathcal{Y}' = \operatorname{Proj}(R'/IR' + (J)_{\leq \sigma})$ hors d'un nombre fini de points. De plus, comme $\mathcal{Y}'$ est localement intersection complète hors d'un nombre fini de points, il existe $d = \dim X$ formes $\beta_1, \cdots, \beta_d \in J$ de degrés au plus σ telles que $\mathcal{Y}'' = \operatorname{Proj}(R'/(I, \beta_1, \cdots, \beta_d))$ coïncide avec $\mathcal{Y}'$ hors d'un nombre fini de points. Ainsi $\mathcal{Y}''$ coïncide avec $\mathcal{Y}$ hors d'un nombre fini de points. En posant $J'' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \cdots, \beta_d)$, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow R'/IR' \cap J'' \longrightarrow R'/IR' \oplus R'/J'' \longrightarrow R'/IR' + J'' \longrightarrow 0.$$

De cette suite on déduit que

$$\begin{array}{rcl} (*) \quad \operatorname{reg}(R/I) & = & \operatorname{reg}(R'/IR') \\ & \leq & \max\{\operatorname{reg}(R'/IR' \cap J''), \operatorname{reg}(R'/IR' + J'')\}. \end{array}$$

Comme $IR' \cap J'' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ est une intersection complète de codimension r, on a

$$\operatorname{reg}(R'/IR' \cap J') = \sigma.$$

Puisque $\mathcal{Y}''$ coïncide avec $\mathcal{Y}$ hors d'un nombre fini de points, $\mathcal{Y}''$ est un schéma de dimension $d-1$, de type rationnel et localement intersection complète hors d'un schéma de dimension zéro. Nous allons en déduire (2) par récurrence sur la dimension d de X.

Pour $d = 2$, $\mathcal{Y}''$ est défini par des équations de degrés $\sigma \geq \sigma \geq d_1 \geq \cdots \geq d_r$. Comme $\dim \mathcal{Y}'' = 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{reg}(R/I) & \leq & \operatorname{reg}(R'/IR' + J'') \\ & = & 2(d(\sigma-1) + \displaystyle\sum_{i=1}^{r-d}((d_i-1)-1) + d_{r-d+1} \\ & = & 2(2(\sigma-1) + \displaystyle\sum_{i=1}^{r-2}(d_i-1)-1) + d_{r-1} \\ & \leq & 2(2(\sigma-1) + (\sigma-1)) \\ & = & 6(\sigma-1). \end{array}$$

Pour $d \geq 3$, $\mathcal{Y}''$ est défini par des équations de degrés $\underbrace{\sigma \geq \cdots \geq \sigma}_{d \quad fois} \geq d_1 \geq \cdots \geq d_{r-d}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, si $r \geq d$, on a

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{reg}(R'/IR' + J'') & \leq & d!(d(\sigma-1) + \displaystyle\sum_{i=1}^{r-d}(d_i-1)-1) \\ & \leq & d!(d(\sigma-1) + \sigma - 1) \\ & = & (d+1)!(\sigma-1). \end{array}$$

et si $r \leq d$, on a

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{reg}(R'/IR' + J'') & \leq & d!(r(\sigma-1)) \\ & \leq & dd!(\sigma-1) \\ & = & (d+1)!(\sigma-1). \end{array}$$

On en déduit dans tous les cas que,

$$\operatorname{reg}(R/I) \leq (d+1)!(\sigma - 1).$$

$\square$

Corollaire 4.16. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ un schéma projectif sur un corps k, de codimension $r > 0$, défini par des équations de degrés au plus $D \geq 2$. On suppose qu'il existe un schéma $\mathcal{Z} \subset X$ de dimension zéro, tel que $\forall x \in X - \mathcal{Z}$, X est localement intersection complète en x et $\mathcal{O}_{X,x}$ est de type rationnel. Alors,*

$$\begin{array}{lll}
(0) & \operatorname{reg}(R/I) \leq (n+1)(D-1) & \textit{si } \dim X \leq 0, \\
(1) & \operatorname{reg}(R/I) \leq (2r+1)(D-1) - 1 & \textit{si } \dim X = 1, \\
(2) & \operatorname{reg}(R/I) \leq (\dim X + 1)!(r(D-1) - 1) & \textit{si } \dim X \geq 2.
\end{array}$$

4.5 Bornes pour la régularité des schémas non lisses

Soit R un anneau de polynômes sur un corps, I un idéal gradué de R, engendré par des éléments de degrés au plus D, $X = \mathrm{Proj}(R/I) \subset \mathbb{P}^n$ un schéma de codimension r, δ la dimension de son lieu singulier. Soit $l_1, \cdots, l_{s+1}$ des formes linéaires générales définissant des hyperplans généraux $H_1, \cdots, H_\delta$. Posons $M = R/I$, $M_i := M/(l_1, \cdots, l_i)M$, $i = 0, \cdots, s$ et $K_i := \ker(M_i \xrightarrow{\times l_{i+1}} M_i[1])$. En appliquant les résultats de la preuve du lemme 3.9 avec $R = S$ et $J = (0)$, on a

$$\begin{aligned} r_i &= \max\{b_1^R(M) - 2,\ b_0^R(M) + \max\{1, b_0^S(J)\} - 2,\ \mathrm{reg}(M_i)\} \\ &= \max\{b_1^R(M) - 2,\ b_0^R(M) - 1,\ \mathrm{reg}(M_i)\} \\ &= \max\{D - 2, \mathrm{reg}(M_i)\}. \end{aligned}$$

En posant $Q_i = \max\{\mathrm{reg}(M_i), \lambda(K_i), D - 2\} + 1$ pour $0 \leq i \leq s$, on a

$$Q_i \leq Q_{i+1}^2 \quad \forall i = 0, \cdots, s-1.$$

En particulier,

$$\mathrm{reg}(M) \leq Q_s^{2^s}.$$

Proposition 4.17. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on pose* $X_\delta = \mathrm{Proj}(R/I + (l_1, \cdots, l_\delta))$*. Supposons qu'il existe un schéma* $\mathcal{Z}_\delta \subset X_\delta$ *de dimension zéro, tel que* $\forall x \in X_\delta - \mathcal{Z}_\delta$*,* X_δ *est localement intersection complète en* x *et* $\mathcal{O}_{X_\delta,x}$ *est de type rationnel. Alors,*

$$\lambda(K_{\delta-1}) \leq D^r \left(\frac{(r(D-1)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!} \right)$$

Démonstration. La suite exacte

$$0 \longrightarrow K_{\delta-1} \longrightarrow M_{\delta-1} \xrightarrow{\times l_\delta} M_{\delta-1}[1] \longrightarrow M_\delta \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte en cohomologie locale

$$0 \longrightarrow K_{\delta-1} \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M_{\delta-1}) \xrightarrow{\times l_\delta} H^0_{\mathfrak{m}}(M_{\delta-1})[1] \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(M_\delta) \longrightarrow \cdots,$$

qui montre que

$$\begin{aligned}\lambda(K_{\delta-1}) &\leq \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_{\delta-1})) - \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_{\delta-1})) + \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_\delta)).\\ &= \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_{\delta-1}))\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}\lambda(K_{\delta-1}) &\leq \sum_{\nu=0}^{\mathrm{reg}(M_\delta)} \lambda(H^0_{\mathfrak{m}}(M_\delta))_\nu\\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\mathrm{reg}(M_\delta)} H_{M_\delta}(\nu).\end{aligned}$$

L'idéal $I+(l_1,\cdots,l_\delta)$ contient un idéal J_δ engendré par une suite régulière de degrés $\underbrace{D,\cdots,D}_{r \quad fois},\underbrace{1,\cdots,1}_{\delta \quad fois}$. Donc

$$\begin{aligned}H_{M_\delta}(\nu) &\leq H_{R/J_\delta}(\nu)\\ &= \sum_{i_1=0}^{D-1}\cdots\sum_{i_r=0}^{D-1}\binom{\nu+d-\delta-(i_1+\cdots+i_r)}{d-\delta}\\ &\leq \binom{\nu+d-\delta}{d-\delta}D^r,\end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}\lambda(K_{\delta-1}) &\leq D^r\sum_{\nu=0}^{\mathrm{reg}(M_\delta)}\binom{\nu+d-\delta}{d-\delta}\\ &= D^r\binom{\mathrm{reg}(M_\delta)+d+1-\delta}{d+1-\delta}\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{reg}(M_\delta)\leq(d+1)!(r(D-1)-1)$, on a

$$\begin{aligned}\lambda(K_{\delta-1}) &\leq D^r\binom{(d+1)!(r(D-1)-1)+d+1-\delta}{d+1-\delta}\\ &\leq D^r\binom{r(d+1)!(D-1)}{d+1-\delta}\\ &\leq D^r\left(\frac{(r(D-1)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!}\right)\end{aligned}$$

□

La proposition 4.17 et le lemme 3.9 nous permettent d'obtenir la borne suivante :

Théorème 4.18. *Soit $R = k[X_0, \cdots X_n]$ un anneau de polynômes sur le corps k, $I \subset R$ un idéal homogène tel que $X = \mathrm{Proj}(R/I)$ un schéma projectif sur un corps k, de dimension d et de codimension $r > 0$. Soit δ la dimension du lieu singulier de X. Si I est engendré par des éléments de degrés au plus $D \geq 2$, alors on a*

$$\mathrm{reg}(R/I) \leq C(n, d, \delta) D^{(n+1-\delta)2^{\delta-1}},$$

où $C(n, d, \delta) = \left(\frac{((n-d)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!}\right)^{2^{\delta-1}}$.

Démonstration. Soit $l_1, \cdots, l_\delta$ des formes linéaires générales, on pose

$$S = R/I, \quad S_i := S/(l_1, \cdots, l_i)S, \quad i = 0, \cdots, \delta \quad \textit{et} \quad K_i := \ker(S_i \xrightarrow{\times l_{i+1}} S_i[1]).$$

Si $H_1, \cdots, H_\delta$ désignent les hyperplans définis par les l_i, le schéma $\mathcal{Z} = X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_\delta$ vérifie les conditions du corollaire 4.16.

Comme $(d+1-\delta)! < (d+1)!$ on a,

$$\mathrm{reg}(S_\delta) \leq (d+1)!(r(D-1)-1).$$

D'après la preuve du lemme 3.9 on a,

$$\mathrm{reg}(S_{\delta-1}) \leq \mathrm{reg}(S_\delta) + \lambda(K_{\delta-1}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
Q_{\delta-1} &= \max\{\mathrm{reg}(S_{\delta-1}), \lambda(K_{\delta-1}), D-2\} + 1 \\
&\leq \max\{\mathrm{reg}(S_\delta) + \lambda(K_{\delta-1}), D-2\} + 1 \\
&\leq ((d+1)!(r(D-1)-1) + \left(\frac{(r(D-1)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!}\right) D^r \\
&\leq \left(\frac{(rD(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!}\right) D^r \\
&\leq \left(\frac{(r(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!}\right) D^{r+d+1-\delta} \\
&= \left(\frac{((n-d)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!}\right) D^{n+1-\delta}.
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après le lemme 3.9 nous avons

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(R/I) &\leq Q_{\delta-1}^{2^{\delta-1}} \\ &\leq \left(\frac{((n-d)(d+1)!)^{d+1-\delta}}{(d+1-\delta)!}\right)^{2^{\delta-1}} D^{(n+1-\delta)2^{\delta-1}} \end{aligned}$$

D'où la preuve du théorème. □

Les deux lemmes suivants sont utiles pour la démonstration du théorème 4.21.

Lemme 4.19. *Soit $R = k[X_0, \cdots, X_n]$ un anneau de polynômes sur un corps k, $\mathfrak{m} = (X_0, \cdots, X_n)$ et I un idéal homogène de R. Alors,*

$$H_{\mathfrak{m}}^i(R/I) \simeq H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat}) \quad \forall i \geq 1.$$

Démonstration. Comme $\frac{I^{sat}}{I}$ est un R-module de longueur finie, la suite exacte

$$\frac{I^{sat}}{I} \longrightarrow R/I \longrightarrow R/I^{sat} \longrightarrow 0$$

donne pour tout $i \geq 1$, la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(R/I) \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat}) \longrightarrow 0,$$

qui montre que $H_{\mathfrak{m}}^i(R/I) \simeq H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat})$, $\forall i \geq 1$. □

Lemme 4.20. *Avec les notations du lemme 4.19, si l une forme linéaire générale, alors*

$$\operatorname{reg}(R/I^{sat}) = \max\{a_1(R/I^{sat}) + 1, \operatorname{reg}(R/(I + (l))^{sat})\}.$$

Démonstration. Posons $t = \max\{a_1(R/I^{sat})+1, \operatorname{reg}(R/(I+(l))^{sat})\}$, on a $t \leq \operatorname{reg}(R/I^{sat})$.

Soit l une forme linéaire générale, pour tout μ, la suite exacte

$$0 \longrightarrow R/I^{sat}(-1) \xrightarrow{\times l} R/I^{sat} \longrightarrow R/I^{sat} + (l) \longrightarrow 0,$$

donne les suites exactes longues suivantes

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(R/I^{sat}+(l))_\mu \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat})_{\mu-1} \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat})_\mu \longrightarrow H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat}+(l))_\mu \longrightarrow \cdots.$$

Compte tenu de la définition de t et de l'isomorphisme du lemme 4.19, nous avons $H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat} + (l))_\mu = 0$ pour tout μ tel que $\mu \geq t - i$, on en déduit que

$$H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat})_{\mu-1} \simeq H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat})_\mu \quad \forall \mu \geq t - i.$$

Comme les $H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat})_\mu$ sont nuls pour μ assez grand, on a $H_{\mathfrak{m}}^i(R/I^{sat})_\mu = 0$, pour $\mu \geq t - i$, par suite $t \geq \operatorname{reg}(R/I^{sat})$.

□

En utilisant les théorèmes 4.15 et 4.18, les résultats de Bertram-Ein-Lazarsfeld [3] et les résultats de Chardin-Ulrich [25], nous avons le théorème suivant :

Théorème 4.21. *Soit X un schéma projectif sur un corps k, de dimension d et de codimension $r > 0$. Soit δ la dimension du lieu singulier de X et I_X l'idéal saturé définissant X. On suppose que X est défini par des équations de degrés au plus $D \geq 2$.*

1) *Si $\delta = -1$ ou si $\delta = 0$ et la caractéristique de k est nulle, alors*

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq r(D-1)+1.$$

2) *Si $\delta \leq 1$, alors* $\operatorname{reg}(I_X) \leq (\dim X)!(r(D-1)-1)+1.$

3) *Si $\delta \geq 2$ alors,*

$$\operatorname{reg}(I_X) \leq C(n, d-1, \delta-1)D^{(n-\delta)2^{\delta-2}}$$

où $C(n, d, \delta)$ est définie dans le théorème 4.18.

Démonstration. La conclusion du 1) découle des théorèmes [3, 4 (i)] et de [25, 0.1].

Soit $R = k[X_0, \cdots, X_n]$ et $I_X = I^{sat}$ l'idéal saturé définissant le schéma X. Soit l une forme linéaire générale et H l'hyperplan défini par l, d'après les lemmes 4.19 et 4.20, on a

$$(*) \qquad \begin{array}{rcl} \operatorname{reg}(R/I_X) & = & \max\{\operatorname{reg}(R/I_{X\cap H}), a_1(R/I_X)+1\} \\ & \leq & \max\{\operatorname{reg}(R/I+(l)), a_1(R/I_X)+1\}. \end{array}$$

D'autre part la suite exacte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow (R/I)(-1) \xrightarrow{\times l} R/I \longrightarrow R/I+(l) \longrightarrow 0,$$

donne une suite exacte en cohomologie locale

$$\cdots \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(R/I+(l)) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(R/I)(-1) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(R/I) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(R/I+(l)) \longrightarrow \ldots$$

qui montre que $H^1_{\mathfrak{m}}(R/I)_\mu \simeq H^1_{\mathfrak{m}}(R/I)_{\mu-1} = 0$ pour $\mu \geq \operatorname{reg}(R/I+(l))$. On en déduit que

$$\operatorname{reg}(R/I+(l)) \geq a_1(R/I)+1 = a_1(R/I_X)+1,$$

et par suite d'après $(*)$ on a

$$\operatorname{reg}(R/I_X) \leq \operatorname{reg}(R/I+(l)). \tag{4.1}$$

Si $\delta \leq 1$ le schéma, $\mathcal{Z} = \operatorname{Proj}(R/I+(l))$ est à singularités isolées. D'après le (2) du théorème 4.15 on a,

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(R/I+(l)) &\leq (\dim \mathcal{Z} + 1)!(r(D-1)-1) \\ &= (\dim X)!(r(D-1)-1). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(I_X) &= \operatorname{reg}(R/I_X) + 1 \\ &\leq \operatorname{reg}(R/I+(l)) + 1 \\ &\leq (\dim \mathcal{Z} + 1)!(r(D-1)-1) + 1 \\ &= (\dim X)!(r(D-1)-1) + 1. \end{aligned}$$

Si $\delta \geq 2$, l' inégalité (4.1) ci-dessus et le théorème 4.18 appliqué à $R/I+(l)$ donne la borne annoncée.

$\square$

Bibliographie

[1] D. Bayer, D. Mumford, *What can be computed in algebraic geometry ?,* Computational algebraic geometry and commutative algebra, Symposia Mathematica, **XXXIV** (1993), 1-48

[2] D. Bayer, M. Stillman, *A criterion for detecting m-regularity,* Invent. Math. **87** (1987), 1-11.

[3] A. Bertram, L. Ein, R. Lazarsfeld, *Vanishing theorem, a theorem of Severi, and the equations defining projectives varieties* J. Amer.Math.Soc **4** (1991), 587-602.

[4] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques, Algèbre chapitre 10,* Ed Masson, 1998.

[5] J.F. Boutot, *Singularités rationnelles et quotient par les groupes réductifs* Invent.Math. **88** (1987), 65-68.

[6] H. Bresinsky, F. Curtis, M. Fiorentini, L. T. Hoa. *On the structure of local cohomology modules for monomial curves in P^3_K,* Nagoya Math. J. **136** (1994), 81–114.

[7] M.Brodmann, *Castelnuovo-Mumford regularity and degrees of generators of graded submodules,* Illinois J. Math. **47** (2003), no. 3, 749-767.

[8] M.Brodmann, T. Götsch, *Bounds for the Castelnuovo-Mumford regularity*, Preprint 25–2005, Institut für Mathematik, Universität Zürich.

[9] M.P. Brodmann, R.Y.Sharp, *Local cohomology,* Cambridge Studies in Advanced mathematics, **vol 60**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[10] E.Ballico, N.Chiarli, S.Greco, *Projections of singular varieties and Castelnuovo-Mumford regularity,* Osaka J. Math. **42** (2005), no. 4, 861–872.

[11] I. Bermejo, P. Gimenez, *Saturation and Castelnuovo-Mumford regularity* J.Algebra. **303** (2006),no 2, 592-617.

[12] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings,* revisited ed, Cambridge Studies in Advanced mathematics, **vol 39**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[13] W. Bruns, U. Vetter, *Determinantal rings,* Lecture Notes in Mathematics, **vol 1327**, Springer-verlag.

[14] G. Caviglia, *Bounds on the Castelnuovo-Mumford regularity of tensor products,* Proc.Amer.Math.Soc. **135** (2007), 1949-1957.

[15] G. Caviglia, *Koszul algebras,Castelnuovo-Mumford Regularity,and Generic Initial Ideal,* Thesis of University of Kansas , (2004).

[16] G. Caviglia, E. Sbarra, *Characteristic-free bounds for the Castelnuovo-Mumford regularity,* Compositio Math. **141** (2005), 1365-1373.

[17] M. Chardin, *Regularity of ideals and their powers*, Prépublication **364**, Institut de mathématiques de Jussieu, Mars 2004.

[18] M. Chardin, *Some results and questions on Castelnuovo-Mumford regularity*,Lect. Notes Pure Appl. Math.**254** Chapman et Hall /CRC, Boca Raton, FL, (2007) 1-40.

[19] M.Chardin, *Bounds for Castelnuovo-Mumford regularity in terms of degrees of defining equations,* Commutative algebra singularities and computer algebra (Sinaia, 2002), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem, **115**, 67-73.

[20] M. Chardin, C. D'Cruz. *Castelnuovo-Mumford regularity : examples of curves and surface,* J. Algebra **270** (2003), 347-360.

[21] M. Chardin, A. L. Fall, *Sur la régularité de Castelnuovo-Mumford des idéaux, en dimension deux*, C. R. Acad. Sci. Paris **341** (2005), 233-238.

[22] M. Chardin, A. L. Fall, U. Nagel *Bounds for the Castelnuovo-Mumford regularity of modules*, Math.Z. **258** (2008) 69-80.

[23] Marc Chardin, Guillermo Moreno-Socias *Regularity of lex-segment ideals : some closed formulas and applications,* Proc. Amer. Math. Soc. **131**,(2003), 1093-1102.

[24] Marc Chardin, Patrice Philippon *Régularité et interpolation,* J. Algebraic Geom. **8 (3)**, (1999) 471-481.

[25] M. Chardin, B. Ulrich.*Liaison and the Castelnuovo-Mumford regularity,* Amer. J. Math. **124** (2002), 1103-1124.

[26] A.Conca, J.Herzog, *Castelnuovo-Mumford regularity of products of ideals,* Collect. Math. **54** (2003), no. 2, 137–152.

[27] S.D.Cutkosky, J.Herzog, N.V.Trung, *Asymptotic behaviour of the Castelnuovo-Mumford regularity,* Compositio Math. **118** (1999), no. 3, 243–261.

[28] H. Dersen, J.Sidman. *A sharp bound for the Castelnuovo-Mumford regularity of subspace arrangements,* Ad.Math. **172** (2002), 151-157.

[29] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[30] D. Eisenbud, *The Geometry of Syzygies*, Graduate Texts in Mathematics **229**, Springer-Verlag, New York, 2005.

[31] D. Eisenbud, S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*,J. Algebra **88** 1(1984) 89-133

[32] R. Elkik, *Singularités rationnelles et déformations* Invent.Math. **47** (1978), 139-147.

[33] M.E Rossi, N.V.Trung, G. Valla, *Castelnuovo-Mumford regularity and finiteness of hilbert functions,* Commutative algebra, Lect.Notes Pure Appl.Math. **244**, Chapman et Hall /CRC, Boca Raton, FL, (2006), 193-209.

[34] M.E Rossi, N.V.Trung, G. Valla, *Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree,* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 5, 1773–1786.

[35] H. Flenner, L.O'Carroll, W.Vogel *Joins and Intersections*, Springer Monographs in Mathematics, New York, 1999.

[36] W. Fulton, *Intersection Theory*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1998.

[37] W. Fulton, P.Pragacz, *Schubert Varieties and Degeneracy Loci*, Lectures Notes in Mathematics, **1680** Springer, New York, 1998.

[38] A. Galligo, *A propos du théorème de préparation de Weierstrass. Fonctions de plusieurs variables complexes*, Lectures Notes in Mathematics **409** (1974), 543-579.

[39] A. Galligo, *Théorème de division et stabilité en géometrie analytique locale,* Ann. Inst. Fourier **29** (1979), 107-184.

[40] D.Giaimo. *On the Castelnuovo-Mumford regularity of connected curves* , Trasactions of the AMS, **358** 1(2005), 267-284.

[41] M. Giusti, *Some effectivity problems in polynomial ideal theory,* Eurosam **84**, Lect. Notes Comp. Sci **1984**, 159-171.

[42] D.Grayson, M.Stillman, *Macaulay 2 software*,
http ://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/.

[43] L. Gruson, R. Lazarsfeld, and C. Peskine, *On a theorem of Castelnuovo, and the equation defining space curves,* Invent. Math. **72** (1983), 491-506.

[44] M. Green, *Generic initial ideals,* Six Lectures on commutative algebra ,Progr.Math, **vol 166**, Birkhäuser, (1998), 119-186.

[45] N. Hara.*A characterization of rational singularities in terms of injectivity of Frobenius map,* Amer. J. Math. **120** (1998), 981-996.

[46] J. Harris, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Math. ,**vol 133**,Springer, New York, 1995

[47] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Math. ,**vol 52**,Springer, New York, 1977

[48] J.Herzog, L.T.Hoa ; N. V.Trung,*Asymptotic linear bounds for the Castelnuovo-Mumford regularity,* Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 5, 1793-1809.

[49] L.T.Hoa, E.Hyry,*Castelnuovo-Mumford regularity of canonical and deficiency modules,* J. Algebra **305** (2006), no. 2, 877-900.

[50] L.T.Hoa, E.Hyry, *Castelnuovo-Mumford regularity of initial ideals,* J. Symbolic Comput. **38** (2004), no. 5, 1327-1341.

[51] L.T.Hoa, W.Vogel, *Castelnuovo-Mumford regularity and hyperplane sections,* J. Algebra **163** (1994), no. 2, 348–365.

[52] J.P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications,* Progr.Math, **vol 42**, Birkhäuser, (1983).

[53] V.Kodiyalam, *Asymptotic behaviour of Castelnuovo-Mumford regularity,* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 2, 407–411.

[54] S.Kwak, *Castelnuovo-Mumford regularity for subvarieties of dimension 3 and 4,* J. Algebraic Geom **7** 1(1998), 195-206.

[55] S.Kwak, *Generic projections, the equations defining projectives varieties and the Castelnuovo-Mumford regularity,* Math.Z **234**3(2000), 413-434.

[56] R. Lazarsfeld, *A sharp Castelnuovo bound for smooth surfaces,* Duke.Math.J **55** 2(1987), 423-429.

[57] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry I,* A series of Modern Surveys in Mathematics, **vol 48**, Springer (2004).

[58] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry II,* A series of Modern Surveys in Mathematics, **vol 49**, Springer (2004).

[59] S. L'vovsky. *On inflection points, monomial curves, and hypersurfaces containing projective curves,* Math. Ann. **306** (1996), no. 4, 719–735.

[60] C.Miyazaki, *Castelnuovo-Mumford regularity and classical method of Castelnuovo,* Kodai Math. J. **29** (2006), no. 2, 237–247.

[61] C.Miyazaki, *Bounds on Castelnuovo-Mumford regularity for divisors on rational normal scrolls,* Collect. Math. **56** (2005), no. 1, 97–102.

[62] C.Miyazaki,*Sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity,* Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 4, 1675–1686.

[63] E. Mayr, A. Meyer, *The complexity of the word problem for commutative semi-groups and polynomial ideals*, Adv. Math. **46** (1982), 305-329.

[64] D. Mumford, *Lectures on algebraic curves on algebraic surfaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1966.

[65] V.B.Mehta, L. V.Srinivas,*A characterization of rational singularities* Asian J.Math. **1** (1997), 249-271.

[66] U.Nagel, *Comparing Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree : the borderline cases,* Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 9, 3585–3603.

[67] U.Nagel, P.Schenzel, *Degree bounds for generators of cohomology modules and Castelnuovo-Mumford regularity,* Nagoya Math. J. **152** (1998), 153–174.bibitemNS2

U.Nagel, P.Schenzel, *Cohomological annihilators and Castelnuovo-Mumford regularity ,* Contemp. Math.**159** Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1994), 153–174.

[68] A.Noma, *A bound on the Castelnuovo-Mumford regularity for curves,* Math. Ann. **322** (2002), no. 1, 69-74.

[69] I. Peeva, B. Sturmfels *Syzygies of codimension 2 lattice ideals*, Math.Z. **229**, 1(1998),163-194.

[70] C. Peskine, L. Szpiro,*Liaison des variétés algèbriques,* Invent.Math. **26** (1974), 271-302.

[71] J.Sidman, *On the Castelnuovo-Mumford regularity of products of ideal sheaves,* Adv. Geom. **2** (2002), no 3,219-229.

[72] R. Sjögren, *On the regularity of graded k-algebras of Krull dimension* ≤ 1, Math. Scand. **71** (1992), 167–172.

[73] K. Smith, *F-rational rings have rational singularities,* Amer.J.Math. **119** (1997), 159-180.

[74] J. Stückrad, W. Vogel, *On the number of equations defining an algebraic set of zero in n-space,* Seminar D. eisenbud / B. Singh /W. Vogel **Vol 2** (1982), 88-107.