UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7

UFR Mathématiques

## Thèse de Doctorat

Discipline : Mathématiques

Présentée par

**ATHINA MAGEIRA**

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 7

# $C^*$-Algèbres Graduées Par Un Semi-Treillis

Thèse soutenue le 25 avril 2007 devant le Jury composé de

**Mme. Anne BOUTET DE MONVEL**

**M. Vladimir GEORGESCU** Rapporteur

**M. Andrei IFTIMOVICI**

**M. Jean RENAULT**

**M. Georges SKANDALIS** Directeur

**M. Alain VALETTE** Rapporteur

# Remerciements

C'est un moment très fort en émotion, fermer ce long chapitre de ma vie en remerciant toutes les personnes qui m'ont accompagnée pendant.

Je commence par exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Georges Skandalis. J'ai eu la chance de faire à ses côtés de belles mathématiques et je ne peux qu'admirer son savoir mathématique et sa façon de travailler. Je le remercie d'avoir été toujours disponible, de m'avoir accueillie toujours avec un grand sourire, d'être à mon écoute pendant les moments difficiles et de m'entourer avec gentillesse et humanité pendant les moments très difficiles. Toutes nos discussions étaient des sources d'inspiration pour mon travail, il a répondu avec beaucoup de patience à mes questions et il m'a appris que c'est dans la simplicité que l'on trouve les meilleures réponses. Je le remercie d'être un διδάσκαλος avec tout ce que cela signifie en grec ancien.

Je souhaite remercier Vladimir Georgesu et Alain Valette de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs et membres du jury de ma thèse. En particulier, je remercie Vladimir Georgescu d'avoir eu la patience de lire soigneusement mon travail et aussi pour le temps qu'il a consacré à m'écouter en janvier 2006 à l'Université de Cergy-Pontoise. Notre discussion a beaucoup aidé l'avancement de mon travail et clarifié certains points sombres à l'époque. Je voudrais remercier Alain Valette d'avoir aussi bien voulu se deplacer pour assister à ma soutenance.

Je remercie Anne Boutet de Monvel qui a accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je la remercie aussi de m'avoir aidée, avec ses conseils bibliographiques, à bien organiser l'introduction de ma thèse.

Je remercie Andrei Iftimovici d'avoir accepté de faire partie du jury. Je voudrais le remercier de m'avoir donné l'occasion de discuter de mon travail ainsi que pour les bonnes suggestions qu'il m'a faites.

C'est une grande joie de voir Jean Renault faire partie du jury de ma thèse et je le remercie beaucoup. J'ai eu la chance de découvrir sa gentillesse

pendant les rencontres du GdR Algèbres d'Opérateurs où l'on a eu de très agréables discussions.

Quand Stefaan Vaes m'a recontrée pour la toute première fois dans son cours de DEA, il m'a dit avec un grand sourire "bienvenue dans l'équipe". A ce moment j'étais un peu surprise, je ne comprenais pas vraiment la valeur de ces mots. Mais je me rendais compte petit à petit que j'étais en train de rentrer dans une grande famille, les "algèbres d'opérateurs". Avec le temps j'ai découvert un autre monde, très étrange à mes yeux qui est constitué de personnes qui se passionnent pour les mathématiques, qui rient, qui font beaucoup de blagues, qui prennent soin les uns des autres. Cette équipe est pleine d'énergie, de joie de vivre, de chaleur et de motivation pour la recherche et je la remercie du fond du coeur pour son soutien et son accueil. En particulier, je tiens à remercier Etienne Blanchard, Stefaan Vaes, Stéphane Vassout, Andrzej Zuk, Frédéric Paugam et Emmanuel Germain pour leur amitié et leur chalereux "bienvenue". C'est avec beaucoup d'émotion que je remercie aussi mes amis, Paulo mon "petit frère", Maria-Paula, Jean-François, Jérémie, Cyril et Benoit pour tous les bons moments qu'on a passés ensemble, pour nos petits groupes de travail, pour leur soutien quotidien à Chevaleret.

Je souhaite également exprimer ma gratitude à Rached Mneimne, Paul Gerardin et Hakan Eliasson qui m'ont énormément aidée pendant mon DEA, ma première année en France, qui a été assez difficile.

Je me souviendrai toujours que l'Institut de Mathématiques de Jussieu et son directeur Gilles Godefroy m'ont très bien accueillie depuis mon arrivée en France. Je remercie M. Godefroy aussi de m'avoir aidée à commencer justement cette thèse en me dirigeant sans hésitation vers Georges Skandalis comme directeur.

C'est avec un grand sourire que je remercie spécialement Michèle Wasse qui arrive à déchiffrer maintenant toutes les expressions de mon visage, tellement de fois j'ai couru chercher son aide. Elle a été très gentille dès notre première rencontre et d'une aide administrative inestimable.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui travaillent dans la grande bibliothèque de Chevaleret et particulièrement Olivier pour son efficacité et sa disponibilité.

A mes deux amies Μαρία et Μαίρη un grand merci. Avec elles, c'est tout mon pays qui m'accompagnait dans les petites ruelles de Paris. Je les remercie

pour nos longues promenades, pour me faire souvent oublier les petits soucis de la vie, pour me montrer que l'on peut rire face aux difficultés.

Je pense très fort à mes amis et mes collègues à Chevaleret, au plateau des thèsards où il règne une ambiance de grande solidarité et compréhension puisqu'on traverse tous des étapes similaires. Particulièrement, je remercie Selene, Amadeo (le garçon qui parle en chantant), Farid, Michel, Aicha, Salim, Nabil, José, Cecilia, Juliette, Luca, Sarah, Maria pour nos petites sorties et les fous rires. Je remercie aussi toutes les bourbaquettes pour nos agréables réunions.

Je ne pourrais oublié de remercier mes tous premiers amis en France, qui m'ont entourée avec beaucoup d'amour et qui pour certains, depuis leur départ, me manquent énormément. Je pense très fort à Mohamed, Walid, Cyrine, Sana, Magda, Abdelatif et Fethi.

Je remercie également mes collègues et amis du bureau 7C22 d'avoir créé une belle ambiance de travail, spécialement Nicolas, Lucia, Alexei et évidemment Nabil et Farid les nouveaux venus qui ont rempli mes moments de solitude ces derniers temps dans le bureau.

A M. Jacques Bouillet et ses enfants, un très grand merci pour leur chaleureux accueil à Paris et leur disponibilité à tout moment.

A ma meilleure amie en Grèce, Ανδρομάχη je ne peux que lui dire que j'ai beaucoup de chance de l'avoir à mes côtés. Je la remercie avec beaucoup d'amour de m'avoir toujours attendue les bras ouverts et d'avoir partagé avec moi des moments inoubliables.

Je pense aussi très fort à Μίνα pour m'avoir soutenue aux moments où je me sentais vraiment dans une impasse et où j'avais besoin de bons conseils pour pouvoir me relever et continuer.

Finalement, tout cela, ce petit rêve n'aurait pas pu se réaliser sans l'amour, la confiance, le soutien de ma famille. Elle est toujours là à me protéger. Elle me fait me sentir en sécurité, dans les grandes tempêtes j'ai toujours pu jeter l'ancre dans ses bras. Je remercie mon père qui a fait grandir mon imagination dès mon enfance quand il me faisait dormir avec ses contes de fées, qui m'a transmis son amour et son respect pour les mathématiques, qui m'a appris à être simple, à fermer mes oreilles aux bruits gênants et à m'échapper dans la poésie et la littérature. Ma mère, qui m'a appris à chercher la beauté dans tout ce qui m'entoure, que l'on peut être heureux juste en regardant

le soleil se coucher, en marchant sur les feuilles jaunes de l'automne. Elle a embrassé mes échecs et mes réussites sans distinction. Elle m'a appris que la vie est une chanson que l'on doit chanter à chaque instant. Je remercie ma soeur de m'avoir donné tellement de chaleur et de joie de vivre, pour ses petits réveils très doux, pour les petits sourires qu'elle m'a fait parvenir par la lune. Ma meilleure compagnie, d'une force intérieure incroyable qui m'a appris à ne jamais baisser les bras. Un grand merci à ma tante, qui a su m'encourager dans mon travail et en même temps partager avec moi son savoir philosophique. A mon oncle, pour son amour et son grand coeur d'enfant. Je remercie ma grande-mère Γαρυφαλλάνθη qui a toujours pris soin de moi, pour son coeur et ses mains d'or et ma grande-mère Αθηνά qui est partie depuis longtemps, pour sa sagesse, sa magnificence et son amour immense. Enfin je remercie mon grand-oncle Παναγιώτη Ν. Μάγειρα, qui n'est plus parmi nous il y a quelque temps et qui est le premier à avoir tracé le chemin dans le monde des mathématiques, pour avoir été une inspiration avec son regard lumineux.

# Table des matières

# Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des $C^*$-algèbres graduées par un semi-treillis.

Dans le cadre de leur travail sur le problème à $N$ corps, A. Boutet de Monvel et V. Georgescu ont été amenés à introduire dans [9], [10] et [13] l'étude des $C^*$-algèbres graduées par un semi-treillis fini.

L'utilisation des $C^*$-algèbres dans le problème à $N$ corps quantique est assez récente (*cf.* [5] - voir aussi par exemple [6] pour d'autres utilisations récentes).

D'autre part, R.G. Froese et I. Herbst ont introduit dans [17] la notion d'un semi-treillis toujours en relation avec le problème à $N$ corps. Cette notion était par la suite utilisée et développée par W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel et V. Georgescu dans [2], [3] et [4] pour donner une description détaillée des propriétés spectrales des hamiltoniens des systèmes quantiques à plusieurs corps (en particulier ils ont étudié une classe d'hamiltoniens « de type $A$ » qui apparaît pour la première fois dans le livre de S. Agmon [1]).

C'est donc tout naturellement que A. Boutet de Monvel et V. Georgescu ont été amenés à introduire dans [9], [10] et [13] l'étude des $C^*$-algèbres graduées par un semi-treillis fini. Les composantes (parties homogènes) de ces algèbres correspondent aux « niveaux d'intéraction ». L'utilisation de ces $C^*$-algèbres graduées leur a permis de retrouver des résultats classiques sur le spectre essentiel des hamiltoniens qui « engendrent » ces algèbres, comme par exemple le théorème de Hunziker-Van Winter-Zhislin (HVZ) et de donner une généralisation de l'équation de Weinberg-van Winter (WVW) introduite dans les années soixante (voir aussi dans [28] pour une première approche). De plus, dans [11] et dans un cadre plus général dans [13] ils se sont servis des $C^*$-algèbres graduées pour faire le calcul de l'estimation de Mourre pour des systèmes à $N$ corps (*cf.* aussi [12]). On retrouve les $C^*$-algèbres graduées dans l'article de A. Boutet de Monvel, V. Georgescu et A. Soffer [14] pour l'étude des hamiltoniens d'un système à $N$-corps avec des interactions très singulières.

On pourra consulter [5] pour une présentation plus globale et systématique des résultats rapidement cités ci-dessus.

Les travaux de M. Damak et V. Georgescu dans [15], [16] ainsi que V. Georgescu et A. Iftimovici dans [18], [19] et [20] proposent un élargissement du cadre et une systématisation de l'étude des $C^*$-algèbres graduées. Dans ces travaux, les auteurs étudient les $C^*$-algèbres graduées par des semi-treillis pouvant être infinis.

Un important résultat de cette série d'articles consiste à reconnaître la $C^*$-algèbre graduée considèrée dans [9] comme un produit croisé. Ceci est démontré par M. Damak et V. Georgescu dans [15] en s'appuyant sur un résultat donné par V. Georgescu et A. Iftimovici (voir théorème 3.12 dans [18]). Il s'agit du produit croisé de la $C^*$-algèbre formée des potentiels d'intéraction (qui est une $C^*$-algèbre graduée et commutative) par le groupe des translations. Cette nouvelle forme a été très utile pour déterminer le quotient de cette $C^*$-algèbre par une algèbre d'opérateurs compacts et par conséquent pour obtenir des nouveaux résultats dans la théorie spectrale des hamiltoniens d'un système physique. Ces résultats sont développés dans [15], [18] et [20].

En dehors de ce produit croisé, un autre exemple de $C^*$-algèbres graduées par un semi-treillis, *la $C^*$-algèbre symplectique* (qui était déjà apparue dans [13]), a été étudié par V. Georgescu et A. Iftimovici dans [19].

Dans cette thèse, nous proposons une étude systématique des $C^*$-algèbres graduées par un semi-treillis quelconque.

- On simplifie quelques axiomes des $C^*$-algèbres graduées.
- On reconstruit ces algèbres et on donne une présentation algébrique en fonction des composantes et de leur produit.
- On établit la stabilité des $C^*$-algèbres graduées pour des opérations comme le produit croisé et le produit tensoriel.
- On étudie des propriétés classiques des $C^*$-algèbres pour les $C^*$-algèbres graduées (commutativité, nucléarité, exactitude) ainsi que leur $K$-théorie.
- On propose enfin l'étude de quelques exemples.

Nous présentons maintenant nos résultats un peu plus en détail.

Soit $\mathfrak{A}$ une $C^*$-algèbre. On dit qu'elle est *graduée* par un semi-treillis $\mathcal{L}$ ou bien qu'elle est *$\mathcal{L}$-graduée* si l'on s'est donné une famille linéairement indépendante et totale $(A_i)_{i\in\mathcal{L}}$ de sous-$C^*$-algèbres de $\mathfrak{A}$, que l'on appellera les *composantes* de $A$ telles que $A_iA_j \subset A_{i\wedge j}$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$.

Soit $\mathfrak{A}$ une $C^*$-algèbre graduée par un semi-treillis. On dit que $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ est une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée où pour $i \in \mathcal{L}$ on a noté $A_i$ la composante de $\mathfrak{A}$ correspondante.

On peut remarquer tout de suite qu'une $C^*$-algèbre graduée par un semi-treillis $\mathcal{L}$ est limite inductive de ses sous-algèbres graduées par les sous-semi-treillis finis de $\mathcal{L}$. De plus, une $C^*$-algèbre graduée présente plusieurs suites exactes scindées qui permettent - dans le cas d'un semi-treillis fini - de la comprendre inductivement. Dans un sens, on peut considérer qu'une graduation d'une $C^*$-algèbre par un semi-treillis est une façon d'organiser une famille de suites exactes scindées « compatibles entre elles ». Il s'ensuit que toute construction « fonctorielle » de $C^*$-algèbres qui est compatible avec les suites exactes scindées et les limites inductives, va aussi être compatible avec les $C^*$-algèbres graduées. Par exemple, si $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ est une $C^*$-algèbre graduée et si un groupe localement compact $G$ opère sur $\mathfrak{A}$ en préservant les $A_i$, alors le produit croisé (plein ou réduit) $\mathfrak{A} \rtimes G$ est gradué par les $A_i \rtimes G$. Il en va de même pour les produits tensoriels de $C^*$-algèbres. De plus, le même principe montre que la $K$-théorie d'une $C^*$-algèbre graduée est somme directe des $K$-théories de ses composantes homogènes.

Soit $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée. La restriction du produit au niveau de ses composantes, fournit des applications $q_{i,j} : A_i \times A_j \to A_{i\wedge j}$ (pour $i, j \in \mathcal{L}$) appelées *applications de structure* et des morphismes de $C^*$-algèbres $\varphi_{i,j} : A_j \to M(A_i)$ (avec $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$) appelés *morphismes de structure* - ici $M(A_i)$ désigne l'algèbre des multiplicateurs de $A_i$. On énonce immédiatement les propriétés algébriques de la famille $(q_{i,j})_{i,j\in\mathcal{L}}$ et de la famille $(\varphi_{i,j})_{i\leq j}$ qui traduisent l'associativité du produit et les propriétés de l'involution de la $C^*$-algèbre $\mathfrak{A}$, et il est alors facile de décrire le passage de l'une à l'autre de ces familles. Nous démontrons en fait que ces applications et morphismes de structure nous permettent de reconstruire les $C^*$-algèbres graduées en ce sens qu'à une famille $(A_i)_{i\in\mathcal{L}}$ de $C^*$-algèbres et une famille d'applications $(q_{i,j})_{i,j\in\mathcal{L}}$ (ou $(\varphi_{i,j})_{i\leq j}$) vérifiant les propriétés mentionnées ci-dessus correspond une et une seule $C^*$-algèbre graduée (à isomorphisme près) qui admet les $A_i$ comme composantes et les $q_{i,j}$ comme applications de structure (ou les $\varphi_{i,j}$ comme morphismes de structure).

Puisqu'une $C^*$-algèbre graduée est entièrement décrite par ses composantes homogènes, il est naturel d'essayer de lire des propriétés de cette algèbre uniquement en termes des dites composantes. On démontre ainsi qu'une $C^*$-algèbre graduée est commutative, nucléaire ou exacte si et seulement si ses composantes vérifient cette même propriété. Dans le cas commutatif, on peut aussi faire un lien entre le spectre d'une algèbre graduée $\mathfrak{A}$ et ceux de ses composantes. Dans de bons cas, le spectre des composantes décrit complètement celui de $\mathfrak{A}$.

Les représentations d'une $C^*$-algèbre graduée (ainsi que les morphismes à valeurs dans une autre $C^*$-algèbre) sont entièrement décrites en termes des représentations de ses composantes. On peut alors donner les conditions necéssaires et suffisantes pour qu'un homomorphisme d'une $C^*$-algèbre graduée à valeurs dans une autre $C^*$-algèbre soit injectif ou surjectif en termes de ses restrictions aux composantes. Si le semi-treillis possède un plus petit élément $i_0$ on étudie plus particulièrement l'injectivité de l'homomorphisme $\mathfrak{A} \to M(A_{i_0})$. Ces résultats nous permettent d'une part de simplifier l'étude du produit croisé traité par M. Damak et V. Georgescu dans [15] et d'autre part d'étudier de nombreux exemples de $C^*$-algèbres graduées.

Nous étudions en particulier deux exemples commutatifs dont nous déterminons le spectre.

- Pour le premier, on considère un sous-semi treillis $\mathcal{G}$ du treillis (pour l'inclusion) de sous espaces d'un espace vectoriel de dimension finie $E$ et dont les composantes sont $A_L = C_0(E/L)$ (pour $L \in \mathcal{G}$). Nous étudions particulièrement le cas où $E$ est un plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{G} = \{\{0\}, \delta_1, ..., \delta_n, \mathcal{P}\}$ où $\delta_1, \ldots, \delta_n$ sont $n$ droites de $\mathcal{P}$. En utilisant la théorie des formes normales d'une surface de Riemann (voir [24] et [29]) on montre que le spectre de la $C^*$-algèbre graduée associée est homéomorphe au tore $\mathcal{T}_g$ à $g$ trous où $g = \dfrac{n}{2}$ si $n$ est pair et dans le cas où $n$ est impair ce spectre est un tore à $g = E(\dfrac{n}{2})$ trous pincé (*i.e.* deux de ses points sont idéntifiés).
- Dans le deuxième exemple, on considère un semi-treillis $\mathcal{L}$ et on prend toutes les composantes $A_i$ égales à $\mathbb{C}$. On identifie le spectre de $\mathcal{L}$ avec l'ensemble des sous-semi treillis finissants (non vides) de $\mathcal{L}$. En particulier, lorsque $\mathcal{L} = \mathbb{Q}$, on montre alors que le spectre de la $C^*$-algèbre graduée dont les composantes sont les $A_i$ est en bijection avec l'ensemble $\mathbb{R} \coprod \mathbb{Q} \coprod \{-\infty\}$.

Le texte de la thèse se décompose de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, on rappelle les principales définitions et propriétés des $C^*$-algèbres. On y rappelle en particulier les notions de multiplicateurs de $C^*$-algèbres, de produits croisés d'une $C^*$-algèbre par une action d'un groupe localement compact et de produit tensoriel de $C^*$-algèbres.
- Les $C^*$-algèbres graduées par un semi-treillis sont introduites dans le deuxième chapitre. On explore les morphismes de $C^*$-algèbres graduées

et on discute l'injectivité et la surjectivité de ces morphismes ; on explicite la relation entre les $C^*$-algèbres graduées et les suites exactes scindées de $C^*$-algèbres. Ensuite, on introduit les applications de structure et les morphismes de structure d'une $C^*$-algèbre graduée et on étudie les propriétés algébriques de ces familles d'applications. On conclut avec un cas particulier de morphisme de $C^*$-algèbres graduées dont on traite l'injectivité qui nous sera utile dans l'étude d'exemples.

- Dans le troisième chapitre on montre comment une $C^*$-algèbre graduée peut être entièrement reconstruite à partir de ses composantes et des morphismes de structure.
- Dans le chapitre 4 on montre que le produit croisé de $C^*$-algèbres et le produit tensoriel de $C^*$-algèbres ont un bon comportement pour les $C^*$-algèbres graduées.
- Au chapitre 5 on étudie la commutativité, nucléarité et exactitude d'une $C^*$-algèbre graduée et on exprime ses groupes de K-théorie en termes de ceux des composantes. Enfin, on étudie le spectre des $C^*$-algèbres graduées commutatives.
- Enfin le chapitre 6 est consacré à l'étude de quelques exemples de $C^*$-algèbres graduées.

# Chapitre 1

# Préliminaires, rappels

## 1.1 $C^*$-algèbres

On rappelle ici brièvement un certain nombre de définitions et propriétés des $C^*$-algèbres qui seront utiles dans la suite. Nous ne donnons pas de démonstrations. Celles-ci peuvent être trouvées dans [25], [26] et [34].

**Définition 1.1.1.** Soit $A$ une algèbre complexe. Une *involution* de $A$ est une application antilinéaire $a \mapsto a^*$ de $A$ dans $A$ telle que pour tout $a, b \in A$ on ait $(a^*)^* = a$ et $(ab)^* = b^*a^*$.

On appelle le couple $(A, *)$ une algèbre *involutive* ou une $*$-*algèbre*.

Une *algèbre de Banach involutive* est une algèbre involutive $A$ munie d'une norme sous-multiplicative qui est complète, dont l'involution est isométrique.

Une $C^*$-*algèbre* $A$ est une algèbre de Banach involutive telle que pour tout $a \in A$ on ait $||a^*a|| = ||a||^2$.

Plus généralement, une $C^*$-(semi)-norme sur une algèbre involutive $A$ est une (semi)-norme sous-multiplicative $N : A \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant l'égalité $N(a^*a) = N(a)^2$ pour tout $a \in A$. On vérifie alors que l'on a $N(a^*) = N(a)$. En ce sens, une $C^*$-algèbre est une algèbre de Banach involutive dont la norme est une $C^*$-norme.

**Définition 1.1.2.** Soit $A$ une algèbre complexe unifère et $a \in A$. On note $A^{-1}$ l'ensemble des éléments inversibles de $A$. Le *spectre* de $a$ dans $A$ est le sous-ensemble $\mathrm{Sp}_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, a - \lambda \notin A^{-1}\}$ de $\mathbb{C}$.

Si $A$ est une algèbre non unifère, on peut la plonger dans une algèbre unifère $\widetilde{A}$ qui comme espace vectoriel est isomorphe à $A \times \mathbb{C}$ et dont la loi du produit est définie par : $(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda a + \mu b, \lambda\mu)$ (pour tout $a, b \in A, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$). C'est une algèbre unifère (d'unité $(0, 1)$) qui contient une copie de $A$, $A \times \{0\}$. On identifie alors $A$ avec son image dans $\widetilde{A}$. Pour $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on note $a + \lambda$ l'élément $(a, \lambda)$ de $\widetilde{A}$.

Si $A$ est une algèbre de Banach qui n'est pas unifère, l'algèbre unifère $\widetilde{A}$ admet une structure d'algèbre de Banach pour la norme définie par : $||(a, \lambda)|| = ||a|| + |\lambda|$ (pour $a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$).

**Remarque 1.1.3.** a) Si $A$ est une algèbre non unifère, pour tout $a \in A$, $0 \in \mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(a)$.

b) Si l'algèbre $A$ possède déjà un élément unité noté $e$, l'application $(a, \lambda) \mapsto (a+\lambda e, \lambda)$ est un isomorphisme entre $\widetilde{A}$ et l'algèbre produit $A \times \mathbb{C}$. Ceci montre que $\mathrm{Sp}_{\widetilde{A}}(a) = \mathrm{Sp}_A(a) \cup \{0\}$ pour tout $a \in A$.

c) Si $\pi : A \to B$ est un homomorphisme d'algèbres, il existe un unique homomorphisme unital $\widetilde{\pi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ défini par $\widetilde{\pi}(a + \lambda) = \pi(a) + \lambda$ dont $\pi$ est la restriction. Il est injectif (resp. surjectif) si $\pi$ l'est.

**Proposition 1.1.4.** *Soit $A$ une $C^*$-algèbre (non nécessairement unifère). Munie de l'involution $(a + \lambda)^* = a^* + \lambda$, l'algèbre $\widetilde{A}$ est une $C^*$-algèbre. En d'autres termes $\widetilde{A}$ admet une (nécessairement unique) norme qui en fait une $C^*$-algèbre.*

$\square$

Donc l'algèbre $A$ est une sous-algèbre involutive fermée de $\widetilde{A}$.

**Définition 1.1.5.** Soit $A$ une $C^*$-algèbre et $B$ un sous-ensemble de $A$, on pose $B^* = \{b^* \mid b \in B\}$, on dit que $B$ est *autoadjoint* si $B^* = B$.

Un élément $a \in A$ est *autoadjoint* si $a = a^*$ et il est *normal* si $a^*a = aa^*$.

Si $A$ possède un élément unité, on dit que $a \in A$ est *unitaire* si $a^*a = aa^* = 1$.

**Définition 1.1.6.** Soient $A$, $B$ des algèbres involutives. Un homomorphisme $\varphi : A \to B$ est appelé un $*$-*homomorphisme* ou un homomorphisme *involutif* s'il est stable par l'involution, c'est-à-dire si $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$ pour tout $a \in A$. Si $\varphi : A \to B$ est un $*$-homomorphisme, alors $\varphi(A)$ est une sous-$*$-algèbre de $B$. Si $A$ et $B$ sont des $C^*$-algèbres on dit aussi que $\varphi$ est un *morphisme* de $C^*$-algèbres.

**Exemple 1.1.7.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On note $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble des applications linéaires bornées de $\mathcal{H}$ dans lui-même (opérateurs sur $\mathcal{H}$). L'algèbre $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ est une $C^*$-algèbre.

Soit $A$ une $C^*$-algèbre. Un morphisme de $C^*$-algèbres $A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ s'appelle une *représentation* de $A$ dans $\mathcal{H}$.

**Théorème de Gel'fand.** Soit $A$ une algèbre de Banach. On appelle *caractère* de $A$ tout homomorphisme d'algèbres continu et non nul de $A$ dans $\mathbb{C}$.

On appelle *spectre* d'une algèbre de Banach commutative $A$ et on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de ses caractères. On munit $\mathrm{Sp}(A)$ de la topologie de la convergence simple. Autrement dit la topologie de $\mathrm{Sp}(A)$ est la topologie la moins fine pour laquelle les applications $\chi \mapsto \chi(x)$ de $\mathrm{Sp}(A)$ dans $\mathbb{C}$ sont continues (pour tout $x \in A$).

**Proposition 1.1.8.** *(Transformation de Gel'fand). Soit $A$ une algèbre de Banach commutative.*

a) *Pour tout $a \in A$ on a $Sp_A(a) = \{\chi(a) \text{ où } \chi \in Sp(A)\}$.*
b) *Si $A$ est unifère, $Sp(A)$ est compact.*
c) *L'application $G : A \to C(Sp(A))$ donnée par $G(a) : \chi \to \chi(a)$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach qui est continu.*

□

**Théorème 1.1.9.** *(Gel'fand). Soit $A$ une $C^*$-algèbre commutative et unifère. La transformation de Gel'fand $G : A \to C(Sp(A))$ de $A$ est un isomorphisme isométrique de $C^*$-algèbres.*

□

**Remarque 1.1.10.** a) Soit $A$ une algèbre de Banach non unifère et $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$. On peut étendre $\chi$ de manière unique à un caractère $\widetilde{\chi}$ de $\widetilde{A}$ en posant $\widetilde{\chi}(a + \lambda) = \chi(a) + \lambda$ (pour tout $a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$). Ceci nous permet de voir que le spectre de $A$ est la partie du spectre de $\widetilde{A}$ formée des caractères qui ne sont pas nuls sur $A$.

b) Soit $A$ une algèbre de Banach commutative non nécessairement unifère. Le spectre de $A$ est un espace localement compact dont le compactifié d'Alexandroff est le spectre de $\widetilde{A}$. La transformation de Gel'fand de $A$ est l'homomorphisme $a \mapsto G(a)$ de $A$ sur $C_0(\mathrm{Sp}(A))$ qui est donné par $G(a)(\chi) = \chi(a)$ pour tout $a \in A$ et $\chi \in \mathrm{Sp}(A)$. Si $A$ est une $C^*$-algèbre commutative, le théorème de Gel'fand correspondant nous dit que l'application $G$ est un isomorphisme isométrique de $C^*$-algèbres.

**Calcul fonctionnel continu.** Un cas particulier du théorème de Gel'fand est le suivant : soit $x$ un élément normal d'une $C^*$-algèbre unifère $A$. Notons $B$ l'adhérence dans $A$ de l'ensemble $\{P(x, x^*),\ P \in \mathbb{C}[X, Y]\}$. C'est une sous-$C^*$-algèbre commutative de $A$ contenant l'unité, donc isomorphe à $C(\mathrm{Sp}(B))$. Son spectre $\mathrm{Sp}(B)$ s'idéntifie à $\mathrm{Sp}_A(x)$ via l'homéomorphisme $\chi \mapsto \chi(x)$. La transformation de Gel'fand de $B$ est un isomorphisme isométrique $G : B \to C(\mathrm{Sp}_A(x))$ qui associe à $x$ la fonction $z$ qui désigne l'inclusion de $\mathrm{Sp}_A(x)$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$ on pose $f(x) = G^{-1}(f)$.

**Proposition 1.1.11.** a) *Soient $x$ un élément normal d'une $C^*$-algèbre unifère $A$ et $f \in C(Sp_A(x))$. On a $Sp_A f(x) = f(Sp_A(x))$, l'élément $f(x)$ de $A$ est normal et pour toute fonction $g \in C(Sp_A f(x))$ on a $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

b) *Soient $\pi : A \to B$ un morphime unital de $C^*$-algèbres (unifères), $x \in A$ un élément normal de $A$ et $f$ une fonction continue sur $Sp_A(x)$. Alors $f(\pi(x)) = \pi(f(x))$.*

□

Soient $A$ une $C^*$-algèbre non unifère, $x$ un élément normal de $A$ et $f \in C(\mathrm{Sp}_A(x))$, alors $f(x) \in \widetilde{A}$. A l'aide de la proposition precédente (partie *b*) appliquée au morphisme $\epsilon : (a, \lambda) \mapsto \lambda$ de $\widetilde{A}$ dans $\mathbb{C}$ on a $f(x) \in A$ si et seulement si $f(0) = 0$.

**Eléments positifs ; la relation d'ordre d'une $C^*$-algèbre.** Un élément $a \in A$ est *positif* s'il est autoadjoint et son spectre $\mathrm{Sp}_A(a)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$.

**Proposition 1.1.12.** *Soit $A$ une $C^*$-algèbre.*

a) *Pour un élément autoadjoint $h$ de $A$ les conditions suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) $Sp_A(h) \subset \mathbb{R}^+$.*
   - *(b) Il existe $k \in A$ tel que $k = k^*$ et $k^2 = h$.*
   - *(c) Il existe $a \in A$ tel que $a^*a = h$.*

b) *Les éléments autoadjoints de $A$ vérifiant ces conditions forment un cône convexe saillant de $A$.*

□

Le cône des éléments positifs de $A$ est noté $A_+$. On définit une relation d'ordre sur l'ensemble des éléments autoadjoints de $A$ par $b - a \in A_+$ que l'on note $a \leq b$.

**Unités approchées.** On appelle *unité approchée* d'une algèbre de Banach $A$ une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $A$ indéxée par un ensemble $I$ muni d'un ordre filtrant croissant telle que, pour tout $a \in A$ on ait $a = \lim a u_i$ et $a = \lim u_i a$.

Si $A$ est une $C^*$-algèbre, on dit qu'une unité approchée $(u_i)_{i\in I}$ de $A$ est croissante si pour $i \leq i'$ on a $u_i \leq u_{i'}$.

**Proposition 1.1.13.** *Toute $C^*$-algèbre admet une unité approchée croissante.*

$\square$

**Morphismes de $C^*$-algèbres.** Un morphisme de $C^*$-algèbres est continu, de norme inférieure ou égale à 1. Autrement dit, on a la proposition suivante :

**Proposition 1.1.14.** *Tout morphisme de $C^*$-algèbres est contractant.*

$\square$

**Proposition 1.1.15.** *Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de $C^*$-algèbres, alors pour tout $y \in \varphi(A)$ il existe $x \in A$ tel que $\varphi(x) = y$ et $||x|| = ||y||$.*

*Démonstration.* On peut supposer que $A$ et $B$ sont unifères. Soit $y \in \varphi(A)$, il existe $z \in A$ tel que $\varphi(z) = y$. Posons $f(s) = \inf(1, \dfrac{||y||}{\sqrt{s}})$ pour $s \geq 0$ ($f(0) = 1$) et $x = zf(z^*z)$. Pour $s \in \mathrm{Sp}(y^*y)$ on a $s \leq ||y^*y|| = ||y||^2$ donc $f(s) = 1$ de sorte que $f(y^*y) = 1$. Puisque $\varphi$ est un morphisme de $C^*$-algèbres on a $\varphi(x) = yf(y^*y) = y$. Par la proposition precédente $\varphi$ est contractant donc $||y|| = ||\varphi(x)|| \leq ||x||$. Par ailleurs $x^*x = g(z^*z)$ où $g(s) = sf(s)^2 = \inf(s, ||y||^2)$, donc $||x||^2 = ||x^*x|| \leq ||y||^2$ d'où l'égalité $||x|| = ||y||$. $\square$

On en deduit un résultat classique de $C^*$-algèbres qui sera très utile dans la suite.

**Proposition 1.1.16.** *Tout morphisme injectif de $C^*$-algèbres est isométrique. Tout morphisme de $C^*$-algèbres est d'image fermée.*

$\square$

**Idéaux et quotients d'une $C^*$-algèbre.** Un idéal à gauche (resp. à droite) $I$, d'une algèbre $A$ est un sous-espace vectoriel de $A$ tel que $a \in A$ et $b \in I \Rightarrow ab \in I$ (resp. $ba \in I$). Un idéal bilatère (on l'appellera simplement *idéal*) est un idéal à gauche et à droite.

Soit $I$ un idéal d'une algèbre $A$, alors $A/I$ est une algèbre munie de la multiplication $(a + I)(b + I) = ab + I$. Soit $I$ un idéal fermé d'une algèbre normée $A$, alors $A/I$ est une algèbre munie de la norme *quotient* : $||a + I|| = \inf\limits_{b\in I} ||a + b||$.

Soient $A$, $B$ des algèbres involutives. Remarquons que le noyau d'un homomorphisme involutif $\varphi : A \to B$ est un idéal autoadjoint de $A$.

**Proposition 1.1.17.** *Soit $I$ un idéal fermé d'une $C^*$-algèbre $A$, alors $I$ est autoadjoint et le quotient $A/I$ est une $C^*$-algèbre pour la norme quotient.*

□

**Proposition 1.1.18.** *Soit $I$ un idéal fermé d'une $C^*$-algèbre $A$ et $B$ une sous-$C^*$-algèbre de $A$. Alors $I + B$ est une $C^*$-algèbre.*

□

Un idéal $I$ d'une $C^*$-algèbre $A$ est *essentiel* si pour tout autre idéal non-nul $J$ de $A$ on a $I \cap J \neq \{0\}$.

**Doubles centralisateurs ; multiplicateurs.** Soit $A$ une $C^*$-algèbre.
On appelle *double centralisateur* de $A$ un couple $(L, R)$ d'applications $L, R : A \to A$ qui verifie

$$R(a)b = aL(b)$$

pour tout $a, b \in A$. On note $\mathcal{DC}(A)$ l'ensemble des doubles centralisateurs de $A$.

**Proposition 1.1.19.** *Si $(L, R)$ est un double centralisateur de $A$ alors $L(ab) = L(a)b$ et $R(ab) = aR(b)$ pour tout $a, b \in A$. Les applications $L$ et $R$ sont linéaires bornés avec $||L|| = ||R||$.*

□

L'ensemble $\mathcal{DC}(A)$ est une algèbre de Banach munie de la norme $||(L, R)|| = ||L|| = ||R||$ et les opérations suivantes :

$$(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L_1 + L_2, R_1 + R_2),$$

$$z(L, R) = (zL, zR) \, (\text{pour } z \in \mathbb{C}),$$

$$(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1L_2, R_2R_1).$$

Si $L : A \to A$ est une application linéaire, on définit $L^* : A \to A$ par $L^*(a) = (L(a^*))^*$. Alors $L^*$ est linéaire et l'application $L \to L^*$ est une application antilinéaire isometrique de $\mathbb{B}(A)$ dans lui-même telle que $L^{**} = L$ et $(L_1L_2)^* = L_1^*L_2^*$. Si $(L, R) \in \mathcal{DC}(A)$ alors $(L, R)^* = (R^*, L^*) \in \mathcal{DC}(A)$. L'application $(L, R) \mapsto (L, R)^*$ est une involution sur $\mathcal{DC}(A)$.
On a la proposition suivante :

**Proposition 1.1.20.** *Si $A$ est une $C^*$-algèbre, alors $\mathcal{DC}(A)$ est une $C^*$-algèbre.*

□

**Exemple 1.1.21.** Soit $A$ un idéal fermé d'une $C^*$-algèbre $B$ et soit $b \in B$, alors $L_b : a \mapsto ba$ et $R_b : a \mapsto ab$ sont des applications de $A$ dans $A$ et le couple $(L_b, R_b) \in \mathcal{DC}(A)$. On remarque que pour tout $b \in B$, $||(L_b, R_b)|| \leq ||b||$.

Si $A$ est une $C^*$-algèbre, l'application $A \to \mathcal{DC}(A)$ donnée par $a \mapsto (L_a, R_a)$ est un morphisme de $C^*$-algèbres isométrique appelé le plongement canonique de $A$ dans $\mathcal{DC}(A)$. Donc, on idéntifie $A$ avec son image dans $\mathcal{DC}(A)$ qui est un idéal fermé.

**Proposition 1.1.22.** *Soit $A$ un idéal fermé d'une $C^*$-algèbre $B$. L'application $\mu : b \mapsto (L_b, R_b)$ est un homomorphisme $\mu : B \to \mathcal{DC}(A)$ dont la restriction à $A$ est le plongement canonique de $A$ dans $\mathcal{DC}(A)$. De plus, $\mu$ est injectif si et seulement si $A$ est essentiel dans $B$.*

$\square$

Soit $A$ et $B$ des $C^*$-algèbres. Un morphisme $\pi : A \to \mathcal{DC}(B)$ est *non-dégénéré* si $\pi(A)B = \{\pi(a)b$ où $a \in A$, $b \in B\}$ est dense dans $B$.

**Proposition 1.1.23.** *Soit $A$ un idéal fermé d'une $C^*$-algèbre $D$ et $\pi : A \to \mathcal{DC}(B)$ un morphisme non-dégénéré. Il existe une unique extension $\widetilde{\pi} : D \to \mathcal{DC}(B)$ de $\pi$. En particulier, tout morphisme de $C^*$-algèbres $\pi : A \to \mathcal{DC}(B)$ non-dégénéré s'étend de manière unique en $\widetilde{\pi} : \mathcal{DC}(A) \to \mathcal{DC}(B)$.*

$\square$

**Remarque 1.1.24.** Soit $A$ une $C^*$-algèbre (non nécessairement unifère) et $\chi$ un caractère de $A$, alors $\chi$ est un morphisme non-dégénéré $\chi : A \to \mathcal{DC}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et s'étend donc de manière unique en un homomorphisme $\widetilde{\chi} : \mathcal{DC}(A) \to \mathbb{C}$. On a $\widetilde{\chi}(T)\chi(a) = \chi(Ta)$ pour tout $T \in \mathcal{DC}(A)$ et $a \in A$.

**Remarque 1.1.25.** Soit $\pi : A \to \mathcal{DC}(B)$ un morphisme non-dégénéré de $C^*$-algèbres. Alors il existe une application continue $\pi^* : \mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A)$ satisfaisant $\pi^*(\chi)(a) = \chi(\pi(a)b)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\chi(b) = 1$.

Soient $A$ une algèbre involutive et $\mathcal{H}$ un espace hilbertien. On dit qu'une représentation $L : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ de $A$ est *non-dégenerée* si l'ensemble $\{L(a)h : a \in A, h \in \mathcal{H}\}$ engendre un sous-espace dense de $\mathcal{H}$. On dit que $L$ est *fidèle* si $\ker L = \{0\}$.

**Proposition 1.1.26.** *Soit $A$ un idéal fermé d'une $C^*$-algèbre $B$ et $\pi_A$ une représentation non-dégenerée de $A$. Alors $\pi_A$ se prolonge de façon unique en une représentation (non-dégenerée) $\pi_B$ de $B$.*

$\square$

Supposons que $A$ est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ et que $A\mathcal{H} = \mathcal{H}$.

**Définition 1.1.27.** On appelle *algèbre de multiplicateurs* de $A$ l'ensemble

$$M(A) := \{x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) \,|\, xA \subset A \,\text{et}\, Ax \subset A\}.$$

L'algèbre $M(A)$ est une $C^*$-algèbre contenant $A$ comme idéal essentiel.

**Exemple 1.1.28.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On note $\mathbb{K}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts définis sur $\mathcal{H}$. En fait, $\mathbb{K}(\mathcal{H})$ est un idéal fermé de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, représenté de façon non-degenerée et l'on a $M(\mathbb{K}(\mathcal{H})) = \mathbb{B}(\mathcal{H})$.

Suite à la proposition 1.1.22 on a :

**Proposition 1.1.29.** *Si $A$ est représenté de façon fidèle et non-dégénérée, alors l'application $x \mapsto (L_x, R_x)$ de $M(A) \to \mathcal{DC}(A)$ est un isomorphisme de $C^*$-algèbres.*

□

**Remarque 1.1.30.** L'application réciproque est donnée par la proposition 1.1.26 appliqué à $B = \mathcal{DC}(A)$.

On idéntifiera dans la suite $M(A)$ avec $\mathcal{DC}(A)$.

## 1.2 Produits tensoriels

On va donner rapidement quelques résultats classiques sur les produits tensoriels de $C^*$-algèbres qui seront utiles dans la suite (*cf.* [25], [31], [33] et [34]).

Soient $A$ et $B$ des espaces vectoriels. On note $A \odot B$ le *produit tensoriel algébrique* de $A$ et $B$ et $a \otimes b$ le *tenseur élémentaire* qui est un élément de $A \odot B$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Si $A$ et $B$ sont deux algèbres, la formule $(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) \mapsto (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)$ pour les tenseurs élémentaires permet de munir $A \odot B$ d'une structure d'algèbre. Si $A$ et $B$ sont des algèbres involutives, la formule $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$ permet de définir une involution sur $A \odot B$.

Soient $A$, $B$ et $C$ des algèbres involutives. Soient $\varphi : A \to C$, $\psi : B \to C$ des homomorphismes involutifs tels que $\varphi(a)\psi(b) = \psi(b)\varphi(a)$ pour tout $a \in A$, $b \in B$, alors l'application linéaire $\varphi \times \psi : A \odot B \to C$ satisfaisant $(\varphi \times \psi)(a \otimes b) = \varphi(a)\psi(b)$ est un homomorphisme involutif.

Soient $A, B, C, D$ des algèbres involutives et $\varphi : A \to C$, $\psi : B \to D$ des homomorphismes involutifs. Alors l'application linéaire $\varphi \odot \psi : A \odot B \to C \odot D$ vérifiant $(\varphi \odot \psi)(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes \psi(b)$ est un homomorphisme involutif.

Soient $A$ et $B$ des $C^*$-algèbres et $||\cdot||_\alpha$ une $C^*$-norme sur l'agèbre involutive $A \odot B$. Le complété de $A \odot B$ par rapport à la norme $||\cdot||_\alpha$ est le *produit tensoriel* de $A$ par $B$, noté $A \otimes_\alpha B$. C'est une $C^*$-algèbre.

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ des espaces hilbertiens, le *produit tensoriel hilbertien* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ est l'espace hilbertien obtenu en complétant $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ pour le produit scalaire défini par $< h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2 >=< h_1, h_2 >< k_1, k_2 >$.

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ des espaces de Hilbert. Pour $T_1 \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_1)$, $T_2 \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_2)$ l'application linéaire $T_1 \odot T_2$ de $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ dans lui-même définie par $(T_1 \odot T_2)(h_1 \otimes h_2) = T_1 h_1 \otimes T_2 h_2$ s'étend en un opérateur $(T_1 \otimes T_2) \in \mathbb{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ et l'on a $||T_1 \otimes T_2|| \leq ||T_1|| \, ||T_2||$. On décrit ainsi l'injection naturelle de $\mathbb{B}(\mathcal{H}_1) \odot \mathbb{B}(\mathcal{H}_2)$ comme une sous-algèbre involutive de $\mathbb{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$. De plus on a $||T_1 \otimes T_2|| = ||T_1|| \, ||T_2||$.

Si $\pi_1 : A_1 \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_1)$ et $\pi_2 : A_2 \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_2)$ sont des représentations de $C^*$-algèbres, il existe un unique homomorphisme involutif $\pi_1 \odot \pi_2 : A_1 \odot A_2 \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ vérifiant $(\pi_1 \odot \pi_2)(a_1 \otimes a_2) = \pi_1(a_1) \otimes \pi_2(a_2)$ pour tout $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$. Si $\pi_1$ et $\pi_2$ sont fidèles, $\pi_1 \odot \pi_2$ est injectif.

**Produit tensoriel maximal ; produit tensoriel minimal.** En général, on n'a pas unicité de $C^*$-norme sur le produit tensoriel algébrique de $C^*$-algèbres. Ici on va discuter les deux cas extrêmes de $C^*$-normes.

**Proposition 1.2.1.** *Soient $A_1$ et $A_2$ des $C^*$-algèbres. Toute $C^*$-semi-norme $||\cdot||_\nu$ sur $A_1 \odot A_2$ vérifie $||a_1 \otimes a_2||_\nu \leq ||a_1|| \, ||a_2||$ pour tout $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.* □

Pour $t \in A_1 \odot A_2$ on définit

$$||t||_{\max} = \sup\{||t||_\nu \text{ où } ||\cdot||_\nu \text{ est une } C^*\text{-semi-norme sur } A_1 \odot A_2\}.$$

Suite à la proposition précédente $||\cdot||_{\max}$ est finie et on peut voir que c'est une $C^*$-norme sur $A_1 \odot A_2$ qui majore toutes les $C^*$-semi-normes de $A_1 \odot A_2$ et qui vérifie : $||a_1 \otimes a_2||_{\max} = ||a_1|| \, ||a_2||$, pour tout $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.

Cette $C^*$-norme est appelée la $C^*$-norme *maximale* de $A_1 \odot A_2$. Le complété de $A_1 \odot A_2$ pour la norme maximale, notée $A_1 \otimes_{\max} A_2$ est une $C^*$-algèbre que l'on appelle le *produit tensoriel maximal* de $A_1$ et $A_2$.

**Proposition 1.2.2.** *Si $\psi_1 : A_1 \to B$, $\psi_2 : A_2 \to B$ sont des morphismes de $C^*$-algèbres tels que $\psi_1(a_1)\psi_2(a_2) = \psi_2(a_2)\psi_1(a_1)$ pour tout $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$, alors $\psi_1 \times \psi_2$ s'étend en un morphisme $\psi_1 \times \psi_2 : A_1 \otimes_{\max} A_2 \to B$.*

*Soient $\varphi_1 : A_1 \to B_1$ et $\varphi_2 : A_2 \to B_2$ des morphismes de $C^*$-algèbres, alors $\varphi_1 \odot \varphi_2$ s'étend en un morphisme $\varphi_1 \otimes_{\max} \varphi_2 : A_1 \otimes_{\max} A_2 \to B_1 \otimes_{\max} B_2$. Si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont surjectifs alors $\varphi_1 \otimes_{\max} \varphi_2$ est surjectif.*

*Si $A_1$ et $A_2$ sont des idéaux fermés de $B_1$ et $B_2$ respectivement alors $\varphi_1 \otimes_{\max} \varphi_2$ est un morphisme injectif.*

□

**Proposition 1.2.3.** *Soient $A_1$ et $A_2$ des $C^*$-algèbres et $\pi_1 : A_1 \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_1)$, $\pi_2 : A_2 \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_2)$, $\rho_1 : A_1 \to \mathbb{B}(\mathcal{K}_1)$, $\rho_2 : A_2 \to \mathbb{B}(\mathcal{K}_2)$ des représentations fidèles. Alors, $||(\pi_1 \odot \pi_2)(t)|| = ||(\rho_1 \odot \rho_2)(t)||$ pour tout $t \in A_1 \odot A_2$.*

□

On définit ainsi une $C^*$-norme sur $A_1 \odot A_2$ par $t \mapsto ||(\pi_1 \odot \pi_2)(t)|| = ||t||_{\min}$, où $\pi_1$ et $\pi_2$ sont des représentations fidèles de $A_1$ et $A_2$ qu'on appelle norme *minimale* ou *spatiale* et elle vérifie $||a_1 \otimes a_2||_{\min} = ||a_1||\,||a_2||$, pout tout $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.
Le complété de $A_1 \odot A_2$ pour cette norme est une $C^*$-algèbre qu'on la note $A_1 \otimes_{\min} A_2$ et on l'appelle le *produit tensoriel minimal ou spatial* de $A_1$ et $A_2$.

**Proposition 1.2.4.** *Soient $\pi_1$ et $\pi_2$ des représentations (non nécessairement fidèles) de $A_1$ et $A_2$, alors on a $||(\pi_1 \odot \pi_2)(t)|| \leq ||t||_{\min}$ pour tout $t \in A_1 \odot A_2$. Autrement dit, il existe une unique représentation $\pi_1 \otimes \pi_2 : A_1 \otimes_{\min} A_2 \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ vérifiant $(\pi_1 \otimes \pi_2)(a_1 \otimes a_2) = \pi_1(a_1) \otimes \pi_2(a_2)$ pour tout $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$.*

*Si $\pi_1$ et $\pi_2$ sont fidèles, $\pi_1 \otimes \pi_2$ est une représentation fidèle de $A_1 \otimes_{\min} A_2$.*

□

**Proposition 1.2.5.** *Soient $\varphi_1 : A_1 \to B_1$ et $\varphi_2 : A_2 \to B_2$ deux morphismes de $C^*$-algèbres, alors il existe un unique morphisme $\varphi_1 \otimes_{\min} \varphi_2 : A_1 \otimes_{\min} A_2 \to B_1 \otimes_{\min} B_2$ tel que $(\varphi_1 \otimes_{\min} \varphi_2)(a_1 \otimes a_2) = \varphi_1(a_1) \otimes_{\min} \varphi_2(a_2)$ pour tout $a_1 \in A_1$ et $a_2 \in A_2$. De plus, si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont injectifs, alors $\varphi_1 \otimes_{\min} \varphi_2$ est injectif, si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont surjectifs, alors $\varphi_1 \otimes_{\min} \varphi_2$ est surjectif.*

□

**Proposition 1.2.6.** (*cf.* [31]) *La norme spatiale est minimum. Autrement dit, si $A$ et $B$ sont des $C^*$-algèbres, toute $C^*$-norme $||\cdot||_\alpha$ sur $A \odot B$ domine la norme spatiale, i.e. $||t||_{\min} \leq ||t||_\alpha$ pour tout $t \in A \odot B$.*

□

**Proposition 1.2.7.** *Soient $A_1$ et $A_2$ des $C^*$-algèbres. Soit $||\cdot||_\alpha$ une $C^*$-norme sur $A_1 \odot A_2$. Il existe des morphismes injectifs $i_{A_1} : M(A_1) \to M(A_1 \otimes_\alpha A_2)$ et $i_{A_2} : M(A_2) \to M(A_1 \otimes_\alpha A_2)$ tels que $i_{A_1}(a_1)i_{A_2}(a_2) = i_{A_2}(a_2)i_{A_1}(a_1) = a_1 \otimes a_2$ pour tout $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$.*

□

**Remarque 1.2.8.** Soient $A$ et $B$ des $C^*$-algèbres. Par les propositions 1.2.7 et 1.2.2 on obtient un morphisme $M(A) \otimes_{\max} M(B) \to M(A \otimes_{\max} B)$.

Soient $\pi_1 : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_1)$ et $\pi_2 : B \to \mathbb{B}(\mathcal{H}_2)$ des représentations fidèles. Par la proposition 1.2.4 la représentation $\pi_1 \otimes \pi_2$ de $A \otimes_{\min} B$ est aussi fidèle. Notons $\widetilde{\pi_1}$ l'extension de $\pi_1$ à $M(A)$ et $\widetilde{\pi_2}$ celle de $\pi_2$ à $M(B)$. Alors $\widetilde{\pi_1}$ et $\widetilde{\pi_2}$ sont fidèles et on obtient une représentation fidèle $\widetilde{\pi_1} \otimes \widetilde{\pi_2}$ de $M(A) \otimes_{\min} M(B)$. En idéntifiant $A \otimes_{\min} B$ avec son image par $\pi_1 \otimes \pi_2$ on remarque que l'image de $\widetilde{\pi_1} \otimes \widetilde{\pi_2}$ est contenue dans $M(A \otimes_{\min} B)$. Autrement dit on a $M(A) \otimes_{\min} M(B) \subset M(A \otimes_{\min} B)$.

**Corollaire 1.2.9.** *Soient $\varphi_1 : A_1 \to M(B_1)$ et $\varphi_2 : A_2 \to M(B_2)$ deux morphismes de $C^*$-algèbres. En composant $\varphi_1 \otimes_{\min} \varphi_2$ avec l'inclusion $M(B_1) \otimes_{\min} M(B_2) \to M(B_1 \otimes_{\min} B_2)$ on a un morphisme $A_1 \otimes_{\min} A_2 \to M(B_1 \otimes_{\min} B_2)$ que l'on note aussi $\varphi_1 \otimes_{\min} \varphi_2$. Remarquons que le morphisme $\varphi_1 \otimes_{\min} \varphi_2$ est injectif ou non-dégénéré si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ vérifient la même propriété.*

□

**Remarque 1.2.10.** Soient $B_1, B_2$ des $C^*$-algèbres et $A_1$ (resp. $A_2$) un idéal fermé de $B_1$ (resp. $B_2$), alors $A_1 \odot A_2$ est un idéal de $B_1 \odot B_2$.

Posons $\alpha = \min$ ou $\max$. Notons $i_1 : A_1 \to B_1$ et $i_2 : A_2 \to B_2$ les inclusions naturelles, puisque $i_1 \otimes_\alpha i_2 : A_1 \otimes_\alpha A_2 \to B_1 \otimes_\alpha B_2$ est continue alors $(i_1 \otimes_\alpha i_2)(A_1 \otimes_\alpha A_2)$ est un idéal fermé de $B_1 \otimes_\alpha B_2$. De plus, $i_1 \otimes_\alpha i_2$ est injectif d'après les propositions 1.2.2 et 1.2.5, donc on peut idéntifier $A_1 \otimes_\alpha A_2$ à un idéal fermé de $B_1 \otimes_\alpha B_2$.

**Remarque 1.2.11.** Soient $A$ et $B$ des $C^*$-algèbres et $||\cdot||_\alpha$, $||\cdot||_\beta$ des $C^*$-normes sur $A \odot B$ telles que $||\cdot||_\alpha \leq ||\cdot||_\beta$, alors $A \otimes_\alpha B$ est un quotient de $A \otimes_\beta B$.

On en deduit que pour tout $C^*$-norme $||\cdot||_\alpha$ sur $A \odot B$, $A \otimes_{\min} B$ est un quotient de $A \otimes_\alpha B$ qui lui-même est un quotient de $A \otimes_{\max} B$.

**Proposition 1.2.12.** *Soit $D$ une $C^*$-algèbre et $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ une suite exacte de $C^*$-algèbres, alors*

$$0 \to A \otimes_{\max} D \xrightarrow{i \otimes_{\max} Id} B \otimes_{\max} D \xrightarrow{p \otimes_{\max} Id} C \otimes_{\max} D \to 0$$

*est une suite exacte de $C^*$-algèbres. De plus, elle est scindée si la suite* $0 \to A \xrightarrow{i} B \underset{\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} C \to 0$ *est exacte scindée.*

$\square$

**Proposition 1.2.13.** *Soit $D$ une $C^*$-algèbre et $0 \to A \xrightarrow{i} B \underset{\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} C \to 0$ une suite exacte scindée de $C^*$-algèbres, alors on a une suite exacte scindée de produits tensoriels minimaux*

$$0 \longrightarrow A \otimes_{\min} D \xrightarrow{i \otimes_{\min} Id} B \otimes_{\min} D \underset{\sigma \otimes_{\min} Id}{\overset{p \otimes_{min} Id}{\rightleftarrows}} C \otimes_{\min} D \longrightarrow 0.$$

$\square$

**$C^*$-algèbres nucléaires.** Une $C^*$-algèbre $A$ est *nucléaire* si pour toute $C^*$-algèbre $B$, il existe une unique $C^*$-norme sur $A \odot B$, autrement dit si le morphisme naturel $A \otimes_{\max} B \to A \otimes_{\min} B$ est injectif (dans ce cas $A \otimes_{\max} B \simeq A \otimes_{\min} B$).

Rappelons quelques propriétés des $C^*$-algèbres nucléaires.

- Un idéal fermé $I$ d'une $C^*$-algèbre nucléaire $A$ est nucléaire et le quotient $A/I$ est aussi nucléaire.
- L'extension d'une $C^*$-algèbre nucléaire par une $C^*$-algèbre nucléaire est nucléaire. Plus précisement : si la suite $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte et $A$ et $C$ sont nucléaires, alors $B$ est nucléaire.
- Toute $C^*$-algèbre commutative est nucléaire.
- Une limite inductive de $C^*$-algèbres nucléaires est nucléaire.

On pourrait consulter [32], [33] ou [34] pour les démonstrations de ces résultats.

**$C^*$-algèbres exactes.** Une $C^*$-algèbre $D$ est *exacte* si pour toute suite exacte de $C^*$-algèbres $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$, la suite

$$0 \to A \otimes_{\min} D \xrightarrow{i \otimes_{\min} Id} B \otimes_{\min} D \xrightarrow{p \otimes_{\min} Id} C \otimes_{\min} D \to 0$$

est exacte.

Rappelons quelques propriétes des $C^*$-algèbres exactes.

- Une sous-algèbre d'une $C^*$-algèbre exacte est exacte.
- Une $C^*$-algèbre nucléaire est exacte.
- Un quotient d'une $C^*$-algèbre exacte est exact (Kirchberg).
- Une limite inductive de $C^*$-algèbres exactes est exacte.

On peut trouver ces propriétés dans [33]. Signalons l'important résultat qu'ont récemment démontré Kirchberg et Philips dans [23]. Une $C^*$-algèbre séparable est exacte si et seulement si elle peut être plongée dans une $C^*$-algèbre nucléaire.

## 1.3 Produits croisés

**$C^*$-systèmes dynamiques.** On appele *$C^*$-système dynamique* un triplet $(A, G, \alpha)$ où $A$ est une $C^*$-algèbre, $G$ un groupe localement compact et $\alpha$ une application $g \mapsto \alpha_g$ qui est un homomorphisme continu de $G$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes involutifs de $A$ muni de la topologie de la convergence simple (*i.e.* pour tout $a \in A$ l'application $g \mapsto \alpha_g(a)$ est continue).

Soit $(A, G, \alpha)$ un $C^*$-système dynamique. Notons $\lambda$ une mesure de Haar à gauche sur $G$. Notons $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction modulaire de $G$ définie par :

$$\Delta(r) \int_G h(sr) d\lambda(s) = \int_G h(s) d\lambda(s) \text{ pour tout } h \in C_c(G), r \in G.$$

Rappelons que pour tout $f \in C_c(G)$,

$$\int_G f(s^{-1}) \Delta(s^{-1}) d\lambda(s) = \int_G f(s) d\lambda(s).$$

**L'algèbre involutive.** L'espace $C_c(G, A)$ des fonctions continues $\phi : G \to A$ à support compact est muni d'une structure d'algèbre involutive donnée par :

a) un produit appelé convolution

$$(f * g)(s) = \int_G f(r) \alpha_r(g(r^{-1}s)) d\lambda(r), \ f, g \in C_c(G, A), \ s \in G,$$

b) une involution

$$f^*(s) = \Delta(s^{-1}) \alpha_s(f(s^{-1})^*), \ f \in C_c(G, A)$$

On définit une norme sur $C_c(G, A)$ par :

$$||f||_1 = \int_G ||f(s)|| d\lambda(s).$$

Elle verifie $||f||_1 = ||f^*||_1$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$ grâce aux propriétés de la mesure de Haar. On l'appellera norme $L^1$. Le complété de $C_c(G, A)$ pour la norme $L^1$ est une algèbre de Banach involutive notée $L^1(G, A)$.

**Représentations covariantes.** Soit $(A, G, \alpha)$ un $C^*$-système dynamique. On appelle *représentation covariante* de $(A, G, \alpha)$ une paire $(\pi_A, U)$ où $\pi_A : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ est une représentation de $A$ et $U : G \to \mathbb{U}(\mathcal{H})$ est un homomorphisme $*$-fortement continu de $G$ dans le groupe des unitaires de $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ (on l'appelera aussi une *représentation unitaire* de $G$) notée $U(g) = U_g$ et telle que, $\pi_A(\alpha_s(a)) = U_s \pi_A(a) U_s^*$ pour tout $a \in A, s \in G$.

On dira que $(\pi_A, U)$ est non-dégénérée si $\pi_A$ est non-dégénérée.

**Exemple 1.3.1.** *Représentations régulières à gauche*
Soit $\rho_A : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ une représentation de $A$ sur $\mathcal{H}$. Le couple $(\widetilde{\rho_A}, U)$ de représentations sur l'espace de Hilbert $L^2(G, \mathcal{H})$ définies par :
$\widetilde{\rho_A} : A \to \mathbb{B}(L^2(G, \mathcal{H}))$ telle que $\widetilde{\rho_A}(a)h(r) = \rho_A(\alpha_r^{-1}(a))(h(r))$, $a \in A, r \in G, h \in L^2(G, \mathcal{H})$ et $U : G \to \mathbb{U}(L^2(G, \mathcal{H}))$ telle que $U_s h(r) = h(s^{-1}r)$ pour $r, s \in G, h \in L^2(G, \mathcal{H})$ est une représentation covariante de $(A, G, \alpha)$ qu'on appelle représentation régulière à gauche associée à $\rho_A$. De plus elle est non-dégenerée si $\rho_A$ l'est.

**Proposition 1.3.2.** *Soit $(\pi_A, U)$ une représentation covariante de $(A, G, \alpha)$ sur $\mathcal{H}$. Alors*

$$(\pi_A \times U)(f) = \int_G \pi_A(f(s)) U_s d\lambda(s) \ , \ f \in C_c(G, A)$$

*définit une représentation involutive de $C_c(G, A)$ sur $\mathcal{H}$ qui est bornée pour la norme $L^1$. Par conséquent elle définit une représentation involutive de l'algèbre de Banach involutive $L^1(G, A)$.*

*La représentation $(\pi_A \times U)$ est non-dégenerée si $\pi_A$ est non-dégenerée.*

*De plus, l'application $(\pi_A, U) \mapsto \pi_A \times U$ est une bijection entre les représentations covariantes non-dégenerées de $(A, G, \alpha)$ et les représentations non-dégenerées de $L^1(G, A)$.*

□

**Produit croisé.** Soit $(A, G, \alpha)$ un $C^*$-système dynamique. On définit une norme sur $C_c(G, A)$ par

$$||f||_u = \sup\{||(\pi_A \times U)(f)|| \text{ où } (\pi_A, U) \text{ représentation covariante de } (A, G, \alpha)\}.$$

On l'appelle norme *universelle* et elle majorée par la norme $L^1$. Le completé de $C_c(G, A)$ ou de $L^1(G, A)$ pour la norme universelle, noté $A \rtimes_\alpha G$ est le *produit croisé maximal* de $A$ par $G$ et c'est une $C^*$-algèbre.

Remarquons que l'on a (par la proposition 1.3.2)

$$||f||_u = \sup\{||L(f)|| \text{ où } L \text{ représentation de } L^1(G, A)\}.$$

En d'autres termes, $A \rtimes_\alpha G$ est la $C^*$-algèbre *enveloppante* de $L^1(G, A)$.

Le complété de $C_c(G, A)$ ou de $L^1(G, A)$ pour la norme

$$||f||_r = \sup\{||(\widetilde{\rho_A} \times U)(f)|| \text{ où } \rho_A \text{ représentation de } A\}$$

est le *produit croisé reduit* de $A$ par $G$ qu'on le note $A \rtimes_{r,\alpha} G$ et qui est une $C^*$-algèbre.

**Proposition 1.3.3.** *Soit $(A, G, \alpha)$ un $C^*$-systeme dynamique et $\pi_A$ une représentation fidèle de $A$ alors $\widetilde{\pi_A} \times U$ est une représentation fidèle de $A \rtimes_{r,\alpha} G$.* □

Donnons trois autres façons d'énoncer cette proposition. On suppose qu'on a un $C^*$-systeme dynamique $(A, G, \alpha)$ et une représentation fidéle $\pi_A$ de $A$, alors

- $||f||_r = ||\widetilde{\pi_A} \times U(f)||$ pour tout $f \in C_c(G, A)$.
- $A \rtimes_{r,\alpha} G = A \rtimes_\alpha G / \ker(\widetilde{\pi_A} \times U)$.
- $A \rtimes_{r,\alpha} G \simeq (\widetilde{\pi_A} \times U)(A \rtimes_\alpha G)$.

**Exemple 1.3.4.** (*cf.* [30]) Soit $G$ un groupe localement compact et $C_0(G)$ la $C^*$-algèbre des fonctions continues définies sur $G$ qui tendent vers zèro à l'infini. Alors le produit croisé $C_0(G) \rtimes G$ pour l'action continue de $G$ donnée par les translations à gauche est isomorphe à la $C^*$-algèbre $\mathbb{K}(L^2(G))$ des opérateurs compacts définis sur $L^2(G)$.

**Morphismes équivariants.** Soient $A, B$ des $C^*$-algèbres munies des actions $\alpha$, $\beta$ d'un groupe $G$ et soit $\varphi : A \to B$ un morphisme de $C^*$-algèbres. On dit que $\varphi$ est *équivariant* si $\varphi[\alpha_g(a)] = \beta_g[\varphi(a)]$ pour tout $g \in G$ et tout $a \in A$.

Pour $g \in G$ notons $\widetilde{\beta_g}$ l'extension de $\beta_g$ à l'algèbre des multiplicateurs $M(B)$ qui est donnée par : $\widetilde{\beta_g}(b)\beta_g(b') = \beta_g(bb')$ pour tout $b \in M(B)$, $b' \in B$ et $g \in G$. On dit qu'un morphisme $\pi : A \to M(B)$ est équivariant si $\pi(\alpha_g(a)) = \widetilde{\beta_g}(\pi(a))$ pour tout $g \in G, a \in A$, autrement dit si $\pi(\alpha_g(a))\beta_g(b) = \beta_g(\pi(a)b)$ pour tout $g \in G, a \in A$ et $b \in B$.

**Proposition 1.3.5.** *Soient $(A, G, \alpha)$ et $(B, G, \beta)$ deux $C^*$-systémes dynamiques et $\varphi : A \to B$ un morphisme équivariant. Alors il existe un unique morphisme $\varphi_* : A \rtimes_\alpha G \to B \rtimes_\beta G$ donné par $\varphi_*(f)(s) = \varphi(f(s))$ pour tout $f \in C_c(G, A)$. Plus précisément, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} C_c(G,A) & \xrightarrow{\varphi_*} & C_c(G,B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \rtimes_\alpha G & \xrightarrow[\varphi_*]{} & B \rtimes_\beta G \end{array}$$

*où les flèches verticales sont les applications canoniques dans le complètè et où l'on a noté* $\varphi_* : C_c(G,A) \to C_c(G,B)$ *l'application* $f \mapsto \varphi \circ f$.

*Démonstration.* Puisque $\varphi$ est équivariant on vérifie immédiatement que l'application $\varphi_* : C_c(G,A) \to C_c(G,B)$ est un homomorphisme involutif.

De plus, puisque $\varphi$ est un morphisme de $C^*$-algèbres, on a $||\varphi_*(f)||_1 = \int_G ||\varphi(f(s))||d\lambda(s) \leq \int_G ||f(s)||d\lambda(s) = ||f||_1$. Donc $\varphi_*$ admet un unique prolongement à $L^1(G,A)$.

Soit $L$ une représentation de $L^1(G,B)$, alors $L \circ \varphi_*$ est une représentation de $L^1(G,A)$ et $||L \circ \varphi_*(f)|| \leq ||f||_u$ pour tout $f \in L^1(G,A)$. On en deduit que $||\varphi_*(f)||_u \leq ||f||_u$ pour tout $f \in L^1(G,A)$. Donc il existe une unique extension de $\varphi_*$ à un morphisme $\varphi_* : A \rtimes_\alpha G \to B \rtimes_\beta G$. □

On a également,

**Proposition 1.3.6.** *Soient* $(A,G,\alpha)$ *et* $(B,G,\beta)$ *deux* $C^*$*-systémes dynamiques et* $\varphi : A \to B$ *un morphisme équivariant. Alors il existe un unique morphisme* $\varphi_{*,r} : A \rtimes_{r,\alpha} G \to B \rtimes_{r,\beta} G$ *donné par* $\varphi_{*,r}(f)(s) = \varphi(f(s))$ *pour tout* $f \in C_c(G,A)$.

*Démonstration.* Soit $\pi_B$ une représentation fidéle de $B$ et soit $\widetilde{\pi_B} \times U$ la représentation de $B \rtimes_\beta G$ correspondante à la représentation $(\widetilde{\pi_B}, U)$. En posant $\pi_B \circ \varphi \equiv \pi_A$ on a par un simple calcul que $(\widetilde{\pi_B} \times U) \circ \varphi_* = (\widetilde{\pi_A} \times U)$ donc $||\varphi_*(f)||_r \leq ||f||_r$ pour tout $f \in C_c(G,A)$ et $\varphi_*$ admet un unique prolongement à $A \rtimes_{r,\alpha} G$. □

**Corollaire 1.3.7.** *Soient* $(A,G,\alpha)$ *et* $(B,G,\beta)$ *deux* $C^*$*-systémes dynamiques et* $\varphi : A \to B$ *un morphisme équivariant. Soient* $\lambda_A$ *(resp.*$\lambda_B$*) la surjection canonique* $A \rtimes_\alpha G \to A \rtimes_{r,\alpha} G$ *(resp.*$B \rtimes_\beta G \to B \rtimes_{r,\beta} G$*), alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} A \rtimes_\alpha G & \xrightarrow{\varphi_*} & B \rtimes_\beta G \\ \lambda_A \downarrow & & \downarrow \lambda_B \\ A \rtimes_{r,\alpha} G & \xrightarrow[\varphi_{*,r}]{} & B \rtimes_{r,\beta} G. \end{array}$$

□

Il est clair que la construction est naturelle au sens suivant

**Proposition 1.3.8.** ***(Naturalité des produits croisés)***
*Soient $(A, G, \alpha)$, $(B, G, \beta)$, $(C, G, \gamma)$ des $C^*$-systèmes dynamiques et soient $\varphi : A \to B$, $\psi : B \to C$ des morphismes equivariants. On a $(Id_A)_* = Id_{A \rtimes_\alpha G}$, $(Id_A)_{*,r} = Id_{A \rtimes_{r,\alpha} G}$ et $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$, $(\psi \circ \varphi)_{*,r} = \psi_{*,r} \circ \varphi_{*,r}$.*

□

On dit qu'une sous-$C^*$-algèbre $B$ de $A$ est $G$-*invariante* si elle est stable par les automorphismes $\alpha_g$ , $g \in G$.

**Proposition 1.3.9.** *Soit $(B, G, \beta)$ un $C^*$-système dynamique et soit $A$ un idéal fermé $G$-invariant de $B$. Notons $i : A \hookrightarrow B$ l'inclusion et encore $\beta_g$ la restriction de $\beta_g$ à $A$. Alors le morphisme $i_* : A \rtimes_\beta G \to B \rtimes_\beta G$ est injectif.*

*Démonstration.* Soit $||\cdot||_{u,B}$ la norme universelle sur $C_c(G, B)$ et $||\cdot||_{u,A}$ la norme universelle sur $C_c(G, A)$.

Pour tout $f \in A \rtimes_\beta G$ on a $||i_*(f)|| \leq ||f||$ parce que $i_*$ est un morphisme de $C^*$-algèbres.

D'autre part soit $\pi \times U$ une représentation fidèle non-dégenerée de $A \rtimes_\beta G$. La représentation $\pi : A \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ admet une unique extension $\pi_B : B \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ et par unicité de l'extension $(\pi_B, U)$ est une représentation covariante de $(B, G, \beta)$. Donc on a $||f||_{u,A} = ||\pi \times U(f)|| = ||\pi_B \times U(f)|| \leq ||f||_{u,B}$ pour tout $f \in C_c(G, A)$. On en deduit que $||f||_{u,A} = ||f||_{u,B}$ pour tout $f \in C_c(G, A)$ donc $i_*$ est injectif. □

**Proposition 1.3.10.** *Soit $p : A \to B$ un morphisme équivariant surjectif alors $p_* : A \rtimes_\alpha G \to B \rtimes_\beta G$ et $p_{*,r} : A \rtimes_{r,\alpha} G \to B \rtimes_{r,\beta} G$ sont des morphismes surjectifs.*

*Démonstration.* On note $\mathcal{B}$ l'espace de fonctions de la forme $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i b_i$ , $\varphi_i \in C_c(G), b_i \in B$. L'espace $\mathcal{B}$ est dense dans $C_c(G, B)$ pour la topologie de la convergence uniforme à support contenu dans un compact fixé, donc $\mathcal{B}$ est dense dans $C_c(G, B)$ pour la norme $L^1$ et par suite il est dense dans $B \rtimes_\beta G$.

On a de plus que $p_*(A \rtimes_\alpha G)$ est une sous-algèbre fermée de $B \rtimes_\beta G$ car $p_*$ est un morphisme de $C^*$-algèbres. Puisque l'image $\mathrm{Im} p_*$ contient $\mathcal{B}$ qui lui même est dense dans $B \rtimes_\beta G$, $p_*$ est surjectif.

A l'aide de 1.3.7 on a que $p_{*,r}$ est aussi surjectif. □

**Proposition 1.3.11.** *Si $i : A \to B$ est un morphisme équivariant injectif de $C^*$-algèbres alors, $i_{*,r} : A \rtimes_{r,\alpha} G \to B \rtimes_{r,\beta} G$ est injectif.*

*Démonstration.* Le resultat est immediat suite à la proposition 1.3.3 $\square$

Soit $(B, G, \beta)$ un $C^*$-systeme dynamique et $A$ un idéal (fermé) $G$-invariant de $B$. Notons $i : A \to B$ l'inclusion. Alors $C_c(G, A)$ est un ideal de $C_c(G, B)$. Puisque $i_* : A \rtimes_\beta G \to B \rtimes_\beta G$ et $i_{*,r} : A \rtimes_{r,\beta} G \to B \rtimes_{r,\beta} G$ sont continus alors $i_*(A \rtimes_\beta G)$ (resp. $i_{*,r}(A \rtimes_{r,\beta} G)$) est un idéal fermé de $B \rtimes_\beta G$ (resp. $B \rtimes_{r,\beta} G$). Puisque $i_*$, $i_{*,r}$ sont injectifs on idéntifiera $A \rtimes_\beta G$ (resp. $A \rtimes_{r,\beta} G$) à un idéal fermé de $B \rtimes_\beta G$ (resp.$B \rtimes_{r,\beta} G$).

**Proposition 1.3.12.** *Soient $(A, G, \alpha)$ et $(B, G, \beta)$ deux $C^*$-systémes dynamiques. Soit $\pi : A \to M(B)$ un morphisme équivariant. Alors il existe des morphismes uniques $\widetilde{\pi} : A \rtimes_\alpha G \to M(B \rtimes_\beta G)$ et $\widetilde{\pi_r} : A \rtimes_{r,\alpha} G \to M(B \rtimes_{r,\beta} G)$ donnés par*

$$(\widetilde{\pi}(f)h)(s) = (\widetilde{\pi_r}(f)h)(s) = \int_G \pi(f(r))\beta_r(h(r^{-1}s))d\lambda(r),$$

*pour tout $f \in C_c(G, A), h \in C_c(G, B)$ et $s \in G$. De plus, si $\pi$ est injective alors $\widetilde{\pi_r}$ l'est aussi.*

*Démonstration.* Soit $L$ une représentation fidèle non-dégénérée de $B \rtimes_\beta G$. Par la proposition 1.3.2, la représentation $L$ est de la forme $L = \varphi_B \times U$ où $(\varphi_B, U)$ est une représentation covariante non-dégénérée de $(B, G, \beta)$. Notons $\overline{L} = \overline{\varphi_B \times U} : M(B \rtimes_\beta G) \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ son extension à l'algèbre des multiplicateurs qui est aussi fidèle.

On définit $\varphi_A = \overline{\varphi_B} \circ \pi$ où $\overline{\varphi_B}$ est l'unique extension de la représentation $\varphi_B : B \to \mathbb{B}(\mathcal{H})$ à l'algèbre des multiplicateurs $M(B)$. Alors, $\varphi_A$ est une représentation de $A$ et avec un simple calcul, en utilisant que $\pi$ est équivariante, on montre que la représentation $(\varphi_A, U)$ est covariante. Donc par la proposition 1.3.2, on peut définir une représentation $\varphi_A \times U$ de $A \rtimes_\alpha G$. L'image de $A \rtimes_\alpha G$ est dans les multiplicateurs et l'on obtient un homomorphisme $\widetilde{\pi} : A \rtimes_\alpha G \to M(B \rtimes_\beta G)$ tel que $\varphi_A \times U = \overline{\varphi_B \times U} \circ \widetilde{\pi}$.

Pour le produit croisé reduit, soit $\varphi_B$ une représentation fidèle et non-degenerée de $B$ et $\overline{\varphi_B}$ son extension à l'algèbre des multiplicateurs qui est aussi fidèle. Par la proposition 1.3.3, $L = \widetilde{\varphi_B} \times U$ est une représentation fidèle non-degénérée de $B \rtimes_{r,\beta} G$, avec $(\widetilde{\varphi_B}, U)$ la représentation régulière à gauche de $(B, G, \beta)$ associée à $\varphi_B$. Il est clair que $\widetilde{\varphi_A} = (\overline{\widetilde{\varphi_B}} \circ \pi, U)$ est la représentation régulière à gauche de $(A, G, \alpha)$ associée à $\varphi_A = \overline{\varphi_B} \circ \pi$, qui est covariante. Donc, $\widetilde{\varphi_A} \times U$ est une représentation de $A \rtimes_{r,\alpha} G$ et on obtient un homomorphisme $\widetilde{\pi_r} : A \rtimes_{r,\alpha} G \to M(B \rtimes_{r,\beta} G)$ tel que $\widetilde{\varphi_A} \times U = \overline{\widetilde{\varphi_B} \times U} \circ \widetilde{\pi_r}$.

Si $\pi$ est injective $\varphi_A = \overline{\varphi_B} \circ \pi$ est fidèle. Donc la représentation $\widetilde{\varphi_A} \times U$ est fidèle et on en deduit que $\widetilde{\pi_r}$ est injective.

□

**Proposition 1.3.13.** *Soient $(A, G, \alpha)$, $(B, G, \beta)$, $(C, G, \gamma)$ des $C^*$-systèmes dynamiques. On suppose qu'on a une suite exacte de $C^*$-algèbres,*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$$

*où $i, p$ sont des morphismes équivariants. Alors les produits croisés maximaux forment aussi une suite exacte :*

$$0 \to A \rtimes_\alpha G \xrightarrow{i_*} B \rtimes_\beta G \xrightarrow{p_*} C \rtimes_\gamma G \to 0.$$

*Démonstration.* Par la proposition 1.3.9, puisque $A \rtimes_\alpha G$ est un ideal de $B \rtimes_\beta G$ on a que $i_*$ est injectif. Par la proposition 1.3.10, $p_*$ est surjectif.

Montrons que $\ker p_* = \mathrm{Im} i_* = A \rtimes_\alpha G$. Nous devons démontrer que le morphisme $j : B \rtimes_\beta G / A \rtimes_\alpha G \to C \rtimes_\gamma G$ déduit de $p_*$ est injectif. Soit $L$ une représentation fidèle non-dégénerée de $B \rtimes_\beta G / A \rtimes_\alpha G$ alors $L$ est de la forme suivante : $L = \pi_B \times U$ représentation non-dégenerée de $B \rtimes_\beta G$ (où $(\pi_B, U)$ est une représentation covariante de $(B, G, \beta)$ et $\pi_B$ représentation non-dégenerée de $B$) telle que $(\pi_B \times U)(A \rtimes_\alpha G) = 0$.

On a $\pi_B(A)(\pi_B \times U)(B \rtimes_\beta G) \subset (\pi_B \times U)(A \rtimes_\alpha G)$. Puisque $(\pi_B \times U)(A \rtimes_\alpha G) = 0$ alors $\pi_B(A)(\pi_B \times U)(B \rtimes_\beta G) = 0$, or la représentation $\pi_B \times U$ de $B \rtimes_\beta G$ est non-dégenerée donc $\pi_B|_A = 0$. Il existe donc une unique représentation $\pi_C$ de $C$ telle que $\pi_B = \pi_C \circ p$. Or, $(\pi_C, U)$ est une représentation covariante de $(C, G, \gamma)$ car : d'une part on a $\pi_B(\beta_g(b)) = \pi_C(p(\beta_g(b))) = \pi_C(\gamma_g(p(b)))$ pour tout $g \in G, b \in B$ et d'autre part on a $\pi_B(\beta_g(b)) = U_g \pi_B(b) U_g^* = U_g(\pi_C(p(b))U_g^*$ pour tout $g \in G$. Alors, $L = (\pi_C \times U) \circ j$. Comme $L$ est fidèle, $j$ est injectif.

Il est clair que $p_* \circ i_* = 0$.

□

**Corollaire 1.3.14.** *Si on suppose que la suite exacte*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \underset{\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} C \to 0$$

*est scindée (avec $i$, $p$, et $\sigma$ des morphismes équivariants), alors on obtient aussi une suite exacte scindée des produits croisés maximaux,*

$$0 \to A \rtimes_\alpha G \xrightarrow{i_*} B \rtimes_\beta G \underset{\sigma_*}{\overset{p_*}{\rightleftarrows}} C \rtimes_\gamma G \to 0.$$

*Démonstration.* C'est évident puisque par la proposition 1.3.8 on a $(p \circ \sigma)_* = p_* \circ \sigma_* = \mathrm{Id}_{C \rtimes_\gamma G}$. □

En d'autre termes, on a un isomorphisme linéaire

$$B \rtimes_\beta G = i_*(A \rtimes_\alpha G) \oplus \sigma_*(C \rtimes_\gamma G) \simeq (A \rtimes_\alpha G) \oplus (C \rtimes_\gamma G).$$

**Proposition 1.3.15.** *Soient* $(A, G, \alpha)$ , $(B, G, \beta)$ , $(C, G, \gamma)$ *des* $C^*$*-systemes dynamiques. On suppose qu'on a une suite exacte scindée de* $C^*$*-algèbres,*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \underset{\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} C \to 0$$

*où* $i, p$ *et* $\sigma$ *sont des morphismes équivariants. Alors les produits croisés reduits forment aussi une suite exacte scindée :*

$$0 \to A \rtimes_{r,\alpha} G \xrightarrow{i_{*,r}} B \rtimes_{r,\beta} G \underset{\sigma_{*,r}}{\overset{p_{*,r}}{\rightleftarrows}} C \rtimes_{r,\gamma} G \to 0.$$

*Démonstration.* On a vu que $i_{*,r}$ est injective (proposition 1.3.11) et on a $p_{*,r} \circ \sigma_{*,r} = \mathrm{Id}_{C \rtimes_{r,\gamma} G}$.

Notons $\lambda_K$ avec $K = A, B, C$ les surjections canoniques respectivement de $K \rtimes_k G \to K \rtimes_{r,k} G$, $k = \alpha, \beta, \gamma$. Puisqu'on a une suite exacte scindée

$$B \rtimes_\beta G = i_*(A \rtimes_\alpha G) \oplus \sigma_*(C \rtimes_\gamma G),$$

le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \rtimes_\alpha G \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\lambda_A"'] & B \rtimes_\beta G \arrow[r, shift left, "p_*"] \arrow[d, "\lambda_B"'] & C \rtimes_\gamma G \arrow[l, shift left, "\sigma_*"] \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \rtimes_{r,\alpha} G \arrow[r, "i_{*,r}"] & B \rtimes_{r,\beta} G \arrow[r, shift left, "p_{*,r}"] & C \rtimes_{r,\gamma} G \arrow[l, shift left, "\sigma_{*,r}"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est commutatif et comme $\lambda_B$ est surjective, on a

$$B \rtimes_{r,\beta} G = i_{*,r}(A \rtimes_{r,\alpha} G) \oplus \sigma_{*,r}(C \rtimes_{r,\gamma} G).$$

□

## 1.4 K-théorie de $C^*$-algèbres

La $K$-théorie de $C^*$-algèbres est un domaine qui s'est beaucoup developpé depuis une trentaine d'années. Il y a plusieurs livres consacrés à la $K$-théorie, par exemple on pourrait consulter les livres [7], [22] et [34] pour se familiariser avec cette théorie.

La $K$-théorie $K_0$ et $K_1$ est un foncteur covariant de la catégorie des $C^*$-algèbres dans la catégorie des groupes commutatifs.

Ce n'est pas le but de ce travail de la présenter. Signalons ici les deux propriétés élémentaires, qui nous seront utiles, sans du tout rentrer dans sa définition.

- Si $A$ est une $C^*$-algèbre qui est une limite inductive des $C^*$-algèbres *i.e.* $A = \varinjlim A_i$, alors $K_k(A)$, $k = 0, 1$ est une limite inductive des groupes $K_0$, $K_1$ correspodants, *i.e.* $K_k(A) = \varinjlim K_k(A_i)$ pour $k = 0, 1$.
- Si $0 \to A \to B \rightleftarrows C \to 0$ est une suite exacte scindée de $C^*$-algèbres, alors $0 \to K_k(A) \to K_k(B) \rightleftarrows K_k(C) \to 0$ pour $k = 0, 1$, est une suite exacte scindée de groupes.

# Chapitre 2

# $C^*$-algèbres graduées

## 2.1 Semi-treillis

Soit $(\mathcal{L}, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $(\mathcal{L}, \leq)$ est un *semi-treillis* si pour tout $k, \ell \in \mathcal{L}$, l'ensemble $\{m \in \mathcal{L};\ m \leq k \text{ et } m \leq \ell\}$ possède un plus grand élément noté $k \wedge \ell$. On dira parfois (improprement) que $\mathcal{L}$ est un semi-treillis.

Soit $(\mathcal{L}, \leq)$ un semi-treillis.

- Si $F$ est une partie finie non vide de $\mathcal{L}$ l'ensemble $\{k \in \mathcal{L}; \forall \ell \in F,\ k \leq \ell\}$ possède un plus grand élément noté $\wedge_{\ell \in F} \ell$. Cela se voit immédiatement à l'aide d'une récurrence sur le nombre d'éléments de $F$.
- Une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ est appelée un *sous-semi-treillis* de $\mathcal{L}$ si pour tout $k, \ell \in \mathcal{M}$, on a $k \wedge \ell \in \mathcal{M}$.
- Une *partie commençante* de $\mathcal{L}$ est une partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{M}$ on ait $\{b \in \mathcal{L};\ b \leq a\} \subset \mathcal{M}$. Toute partie commençante de $\mathcal{L}$ est un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$.
- Un *sous-semi-treillis finissant* de $\mathcal{L}$ est un sous-semi-treillis $\mathcal{M}$ qui soit une partie finissante *i.e.* telle que, pour tout $a \in \mathcal{M}$, on ait $\{b \in \mathcal{L};\ a \leq b\} \subset \mathcal{M}$.
- Soit $k \in \mathcal{L}$. L'ensemble $\mathcal{L}_k = \{\ell \in \mathcal{L};\ k \leq \ell\}$ est un sous-semi-treillis finissant de $\mathcal{L}$. Remarquons que le complémentaire d'une partie finissante est commençante. En particulier l'ensemble $\mathcal{L}'_k = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_k$ est un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$.
- L'ensemble des sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$ est stable par intersection. En particulier, si $\mathcal{M}$ est une partie de $\mathcal{L}$, il existe un plus petit sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$ contenant $\mathcal{M}$ ; on l'appelle le sous-semi-treillis *engendré par* $\mathcal{M}$. Il est en fait facile de caractériser ce sous-semi-treillis : c'est l'ensemble des $\wedge_{a \in F} a$ pour $F$ parcourrant l'ensemble des parties finies

non-vides de $\mathcal{M}$.

- Toute partie finie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ est contenue dans un sous-semi-treillis fini de $\mathcal{L}$. En effet, il est clair que le sous-semi-treillis engendré par $\mathcal{M}$ est fini.
- On dit que $\mathcal{L}$ est un *bon* semi-treillis si toute partie totalement ordonnée non vide de $\mathcal{L}$ est bien ordonnée (*i.e.* tout sous-ensemble non vide de cette partie admet un plus petit élément).

**Remarque 2.1.1.** Soit $(\mathcal{L}^k)_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ une famille finie de semi-treillis. Le produit $\mathcal{L} = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{L}^k$ est muni de l'ordre :

$$\text{pour tout}\, a = (a^k),\, b = (b^k) \in \mathcal{L}\, \text{alors},\ a \leq b \Leftrightarrow a^k \leq b^k \,\text{pour tout}\, k.$$

De plus, pour tout $a, b \in \mathcal{L}$ on a $a \wedge b = (a^k \wedge b^k)_{k=1}^n$, donc $\mathcal{L}$ est un semi-treillis.

**Remarque 2.1.2.** Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis. On a les equivalences suivantes :

a) L'ensemble $\mathcal{L}$ est un bon semi-treillis.

b) Toute partie totalement ordonnée non vide de $\mathcal{L}$ admet un plus petit élément.

c) Tout sous-semi-treillis non vide de $\mathcal{L}$ admet un plus petit élément.

d) Tout sous-semi-treillis finissant non vide de $\mathcal{L}$ admet un plus petit élément.

C'est evident que $a) \Leftrightarrow b)$.

Montrons $b) \Rightarrow c)$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-semi-treillis non vide de $\mathcal{L}$. Par le lemme de Zorn il existe une partie $A$ totalement ordonnée maximale de $\mathcal{F}$. Notons $a$ son plus petit élément et prenons $x \in \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{F}$ est un sous-semi-treillis $a \wedge x \in \mathcal{F}$. Comme l'ensemble $\{a \wedge x\} \cup A$ est totalement ordonnée et $A$ est maximal alors $a \wedge x \in A$ et donc $a \leq a \wedge x$. Cela implique $a \wedge x = a$. D'autre part, on a $a \wedge x \leq x$ et par conséquent $a \leq x$. En d'autres termes $a$ est le plus petit élément de $\mathcal{F}$.

Puisqu'une partie totalement ordonnée de $\mathcal{L}$ est un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$ on a $c) \Rightarrow b)$.

C'est evident que $c) \Rightarrow d)$.

Pour montrer que $d) \Rightarrow c)$, on considère $I$ un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$ et soit $J = \{j \in \mathcal{L}; \exists i \in I; i \leq j\}$. Alors $J$ est un sous-semi-treillis finissant de $\mathcal{L}$. Par hypothèse $J$ admet un plus petit élément, notons-le $j_0$. Alors puisque $j_0 \in J$ il existe $i_0 \in I$ tel que $i_0 \leq j_0$. Mais puisque par construction $I \subset J$, $i_0 \in J$. Donc $j_0 \leq i_0$ et on a l'égalité, autrement dit $i_0$ est le plus petit élément de $I$.

## 2.2 $C^*$-algèbres graduées

**Rappels**

- Soit $E$ un espace vectoriel. On dit qu'une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de $E$ est *en somme directe* (ou linéairement indépendante) si pour toute famille $(S_i)_{i\in I}$ telle que $S_i \in E_i$, $i \in I$ et $S_i \neq 0$ pour seulement un nombre fini au maximum de $i$, alors si $\sum_{i\in I} S_i = 0$ on a $S_i = 0$ pour tout $i \in I$.

- Soit $E$ un espace vectoriel normé. Une partie de $E$ est dite *totale* si le sous-espace vectoriel de $E$ qu'elle engendre est dense dans $E$. Une famille $(T_i)_{i\in I}$ de parties de $E$ est dite totale si $\bigcup_{i\in I} T_i$ est une partie totale de $E$.

Soit $(\mathcal{L}, \leq)$ un semi-treillis.

**Définition 2.2.1.** Une $C^*$-algèbre $\mathfrak{A}$ est dite *graduée* par $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}$*-graduée* si l'on s'est donné une famille linéairement indépendante et totale $(A_i)_{i\in\mathcal{L}}$ de sous-$C^*$-algèbres de $\mathfrak{A}$ telles que $A_iA_j \subset A_{i\wedge j}$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$.

On dira alors que $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ est une $C^*$-algèbre graduée et on appellera les $A_i$, $i \in \mathcal{L}$ les *composantes* de $\mathfrak{A}$.

**Définition 2.2.2.** Soit $\mathfrak{B}$ une sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A}$. Posons $B_i = A_i \cap \mathfrak{B}$. On dit que $\mathfrak{B}$ est une sous-algèbre $\mathcal{L}$-graduée si $\overline{\bigoplus_{i\in\mathcal{L}} B_i} = \mathfrak{B}$.

Soit $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée. Pour toute partie $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$ notons $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ le sous-espace de $\mathcal{L}$ somme de la famille $A_i$ pour $i \in \mathcal{M}$.

On a immédiatement :

**Proposition 2.2.3.** a) *Si $\mathcal{M}$ est un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$, l'ensemble $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A}$. Elle est graduée par $\mathcal{M}$.*

b) *Si $\mathcal{M}$ est une partie commençante de $\mathcal{L}$, l'ensemble $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ est un idéal fermé de $\mathfrak{A}$.*

□

Le résultat suivant sera très utile dans toute la suite :

**Proposition 2.2.4.** *Si $\mathcal{F}$ est un sous-semi-treillis* fini *de $\mathcal{L}$, l'ensemble $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ est fermé dans $\mathfrak{A}$. C'est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A}$.*

*Démonstration.* On va le démontrer par récurrence sur le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ possède un seul élément $\mathcal{F} = \{i\}$ alors $A_i$ est fermé par hypothèse.

Supposons que c'est vrai pour tout sous-semi-treillis possèdent un nombre d'éléments inférieur ou égal à $n-1$. On va le montrer pour $\mathcal{F}$ à $n$ éléments.

Soit $i$ un élément maximal de $\mathcal{F}$ et soit $S = \mathcal{F} \backslash \{i\}$. L'ensemble $S$ est un sous-semi-treillis de $\mathcal{F}$ à $n-1$ éléments.

On a $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}} = \overline{\mathfrak{A}_S \oplus A_i}$ et on remarque que $S$ est une partie commençante de $\mathcal{F}$, donc par la proposition précedente $\overline{\mathfrak{A}_S}$ est un idéal fermé de $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}$. Par l'hypothèse de récurrence $\mathfrak{A}_S$ est un idéal fermé de $\overline{\mathfrak{A}_S \oplus A_i}$.

L'application $A_i \rightarrow \overline{\mathfrak{A}_S \oplus A_i}/\mathfrak{A}_S$ est un isomorphisme de $C^*$-algèbres puisque son noyau est nul et son image est dense.

Soit $x \in \overline{\mathfrak{A}_S \oplus A_i}$, il existe $y \in A_i$ tel que la classe de $x$ modulo $\mathfrak{A}_S$ soit égale à la classe de $y$ modulo $\mathfrak{A}_S$. Alors $x - y \in \mathfrak{A}_S \Rightarrow x \in y + \mathfrak{A}_S \Rightarrow x \in \mathfrak{A}_S \oplus A_i$ et $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ est fermé dans $\mathfrak{A}$.

$\square$

Notons $\mathbb{F}_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des sous-semi-treillis finis de $\mathcal{L}$.
Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}$ alors il existe $\mathcal{F}_3 \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}$ tel que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3$. Par définition pour $\mathcal{F}, \mathcal{M} \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}$ tels que $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ on a $\mathfrak{A}_{\mathcal{M}} \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$. En d'autres termes les $(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}}$ forment un système inductif de sous-$C^*$-algèbres de $\mathfrak{A}$.

Puisque $\displaystyle\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} = \sum_{i \in \mathcal{L}} A_i = \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ contient les $A_i$, $i \in \mathcal{L}$ et $(A_i)_{i \in \mathcal{L}}$ est une famille totale alors $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ est dense dans $\mathfrak{A}$. On en deduit que la $C^*$-algèbre $\mathfrak{A}$ est la limite inductive des $(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}}$.

**Proposition 2.2.5.** *Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ des semi-treillis et $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i \in \mathcal{L}_1})$ (resp. $(\mathfrak{A}, (B_j)_{j \in \mathcal{L}_2})$) une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}_1$-graduée (resp. $\mathcal{L}_2$-graduée). Supposons que la somme $\displaystyle\sum_{(i,j) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2} (A_i \cap B_j)$ est dense dans $\mathfrak{A}$. Alors, $\mathfrak{A}$ est aussi une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$-graduée dont les composantes sont les $A_i \cap B_j$, $i \in \mathcal{L}_1, j \in \mathcal{L}_2$.*

*Démonstration.* Montrons que la famille $(A_i \cap B_j)_{(i,j) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2}$ est linéairement indépendente. Soit $(S_{ij})_{(i,j) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2}$ une famille telle que $S_{ij} \in (A_i \cap B_j)$ pour tout $i \in \mathcal{L}_1, j \in \mathcal{L}_2$ et $\displaystyle\sum_{(i,j) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2} S_{ij} = 0$. Alors, $\displaystyle\sum_{i \in \mathcal{L}_1} \sum_{j \in \mathcal{L}_2} S_{ij} = 0$ et puisque $S_{ij} \in A_i$ et la famille $(A_i)_{i \in \mathcal{L}_1}$ est linéairement indépendent on a $\displaystyle\sum_{j \in \mathcal{L}_2} S_{ij} = 0$ pour tout $i \in \mathcal{L}_1$. Mais puisque $S_{ij} \in B_j$ et la famille $(B_j)_{j \in \mathcal{L}_2}$ est linéairement indépendente, donc $S_{ij} = 0$ pour tout $j \in \mathcal{L}_2$ et $i \in \mathcal{L}_1$.

Par hypothèse elle est aussi totale, donc il suffit de montrer que $(A_i \cap B_j) \cdot (A_\ell \cap B_k) \subset (A_{i\wedge\ell} \cap B_{j\wedge k})$ pour tout $i, \ell \in \mathcal{L}_1$ et $j, k \in \mathcal{L}_2$. Pour cela, soient $S_{ij} \in (A_i \cap B_j)$ et $D_{\ell k} \in (A_\ell \cap B_k)$. Puisque $S_{ij} \in A_i$, $D_{\ell k} \in A_\ell$ et $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}_1})$ est graduée, on a $S_{ij}D_{\ell k} \in A_{i\wedge\ell}$. On a également $S_{ij}D_{\ell k} \in B_{j\wedge k}$, d'où le résultat.

□

## 2.3 Morphismes de $C^*$-algèbres graduées

**Définition 2.3.1.** Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et soient $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{B}, (B_i)_{i\in\mathcal{L}})$ des $C^*$-algèbres $\mathcal{L}$-graduées. On dit qu'un homomorphisme $\psi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est un *homomorphisme de $C^*$-algèbres graduées* si $\psi(A_i) \subset B_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$.

**Proposition 2.3.2.** *Soient $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée, $B$ une $C^*$-algèbre et $\psi : \mathfrak{A} \to B$ un homomorphisme. Pour tout sous-semi-treillis fini $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}$, notons $\psi_\mathcal{F} : \mathfrak{A}_\mathcal{F} \to B$ la restriction de $\psi$ à $\mathfrak{A}_\mathcal{F}$. Pour $i \in \mathcal{L}$ on écrit $\psi_i : A_i \to B$ plutôt que $\psi_{\{i\}}$.*

*a) Pour tout $j, k \in \mathcal{L}$ et tout $x \in A_j$, $y \in A_k$ on a $\psi_{j\wedge k}(xy) = \psi_j(x)\psi_k(y)$.*

*b) Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(i) L'application $\psi$ est surjective.*
- *(ii) La famille $\psi_i(A_i)$ est totale.*

*c) Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(i) L'application $\psi$ est injective.*
- *(ii) Pour tout sous-semi-treillis fini $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}$, $\psi_\mathcal{F}$ est injective.*
- *(iii) Pour tout $i \in \mathcal{L}$ l'application $\psi_i$ est injective et la famille $\psi_i(A_i)$ de sous-espaces de $B$ est en somme directe.*

*Démonstration.* *a)* est clair.

*b)* Puisque l'image d'un homomorphisme de $C^*$-algèbres est fermé et que la famille $(A_i)_{i\in\mathcal{L}}$ est totale dans $\mathfrak{A}$, l'image de $\psi$ est le sous-espace fermé de $B$ engendré par les $\psi_i(A_i)$.

*c)* Remarquons que la condition *(iii)* équivaut à : $(iii)'$ la restriction $\psi_\mathcal{L}$ de $\psi$ à $\mathfrak{A}_\mathcal{L}$ est injective. Il est alors clair que $(i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii)$.
Supposons que *(ii)* soit satisfait. Soit $x \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$. Il existe un sous-semi-treillis fini $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ tel que $x \in \mathfrak{A}_\mathcal{F} \subset \mathfrak{A}_\mathcal{L}$. Le morphisme $\psi_\mathcal{F}$ de $C^*$-algèbres étant injectif, il est isométrique. On a donc $||\psi(x)|| = ||x||$ pour tout $x \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$ et, par densité, pour tout $x \in \mathfrak{A}$.

□

**Proposition 2.3.3.** *Soient $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée et $B$ une $C^*$-algèbre. Donnons-nous pour tout $i \in \mathcal{L}$ un homomorphisme $\psi_i : A_i \to B$. On suppose que pour tout $j, k \in \mathcal{L}$ et tout $x \in A_j$, $y \in A_k$ on a $\psi_{j\wedge k}(xy) = \psi_j(x)\psi_k(y)$. Alors il existe un unique homomorphisme $\psi : \mathfrak{A} \to B$ dont la restriction à $A_i$ soit $\psi_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$.*

*Démonstration.* Puisque les $A_i$ sont indépendants, il existe une unique application linéaire $\psi_{\mathcal{L}} : \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \to B$ dont la restriction aux $A_i$ soit $\psi_i$. L'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est un homomorphisme d'algèbres involutives. Soit $x \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$. Il existe un sous-semi-treillis fini $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ tel que $x \in \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$. La restriction de $\psi_{\mathcal{L}}$ à $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ est un homomorphisme de $C^*$-algèbres $\psi_{\mathcal{F}} : \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \to B$. On a donc $||\psi_{\mathcal{L}}(x)|| = ||\psi_{\mathcal{F}}(x)|| \leq ||x||$. On en déduit que $\psi_{\mathcal{L}}$ admet un unique prolongement à l'adhérence $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$.

□

On remplace maintenant la $C^*$-algèbre $B$ dans les propositions 2.3.2, 2.3.3 par une $C^*$- algèbre $\mathcal{L}$-graduée $(\mathfrak{B}, (B_i)_{i\in\mathcal{L}})$, donc on a

**Corollaire 2.3.4.** *Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et soient $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{B}, (B_i)_{i\in\mathcal{L}})$ deux $C^*$-algèbres $\mathcal{L}$-graduées. Soit $\rho_i : A_i \to B_i$ un morphisme tel que $\rho_i(x)\rho_j(y) = \rho_{i\wedge j}(xy)$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ et pour tout $x \in A_i, y \in A_j$. Alors il existe un unique morphisme $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ qui soit un morphisme de $C^*$-algèbres graduées. De plus si pour tout $i \in \mathcal{L}$ le morphisme $\rho_i$ est injectif (resp. surjectif) alors $\rho$ est injectif (resp. surjectif).*

*Démonstration.* Cela résulte de 2.3.2 et 2.3.3.

□

## 2.4 Sous-semi-treillis finissants et suites exactes scindées

**Proposition 2.4.1.** *Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et $\mathcal{M}$ un sous-semi-treillis finissant de $\mathcal{L}$ ; notons $\mathcal{M}'$ son complémentaire dans $\mathcal{L}$. Il existe un unique homomorphisme $p : \mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ dont la restriction à $A_i$ soit égale à $Id_{A_i}$ si $i \in \mathcal{M}$ et $0$ si $i \in \mathcal{M}'$. On a $\ker p = \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}}$. En d'autres termes, on a $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}} \oplus \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ et une suite exacte scindée*

$$0 \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}} \xrightarrow{i} \mathfrak{A} \underset{\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} \to 0,$$

*où $i$ et $\sigma$ sont les inclusions naturelles.*

*Démonstration.* Soit $B_i = \begin{cases} A_i \text{ si } i \in \mathcal{M} \\ 0 \text{ si } i \in \mathcal{M}' \end{cases}$ alors l'algèbre $(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}, (B_i)_{i\in\mathcal{L}})$ est une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$ graduée.

Soit $p_i : A_i \to B_i$ le morphisme défini par $p_i = \begin{cases} \mathrm{Id}_{A_i} \text{ si } i \in \mathcal{M} \\ 0 \text{ si } i \in \mathcal{M}'. \end{cases}$

D'après le corollaire 2.3.4 il existe un unique homomorphisme $p : \mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ tel que $p_{|A_i} = p_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$. Alors $p|_{\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}}} = 0$ et $p|_{\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}} = \mathrm{Id}_{\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}}$ de sorte que $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}} \cap \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} = \{0\}$.

D'autre part, $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}}$ est un idéal fermé de $\mathfrak{A}$ et $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A}$ (proposition 2.2.3), donc $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}} + \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ est fermé (proposition 1.1.18). Comme $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}} + \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ contient $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ qui est dense dans $\mathfrak{A}$ on a $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}} + \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$, autrement dit on a $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}'}} \oplus \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$.

□

En particulier, l'ensemble $\mathcal{L}_a = \{b \in \mathcal{L};\ a \leq b\}$ étant un sous-semi-treillis finissant, on obtient une suite exacte scindée

$$0 \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_a}} \to \mathfrak{A} \underset{\sigma_a}{\overset{p_a}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_a}} \to 0$$

où l'on a noté $\mathcal{L}'_a = \{b \in \mathcal{L};\ a \not\leq b\}$ le complémentaire de $\mathcal{L}_a$.

**Corollaire 2.4.2.** *Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et soient $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{B}, (B_i)_{i\in\mathcal{L}})$ des $C^*$-algèbres $\mathcal{L}$-graduées. Soit $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un morphisme de $C^*$-algèbres graduées. Notons $\rho_i$ sa restriction à $A_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$. Si $\rho$ est surjectif alors $\rho_i$ est surjectif pour tout $i \in \mathcal{L}$.*

*Démonstration.* Supposons que $\rho$ soit surjective et soit $i \in \mathcal{L}$. Par la prop. 2.4.1, on a $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}} \oplus \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_i}}$ de sorte que $\mathfrak{B} = \rho(\mathfrak{A}) = \rho(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}}) + \rho(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_i}})$. Remarquons que l'on a $\rho(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}}) \subset \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}_i}}$ et $\rho(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_i}}) \subset \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}'_i}}$ Comme de plus $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}_i}} \oplus \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}'_i}}$, il vient $\rho(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}}) = \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}_i}}$ et $\rho(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_i}}) = \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}'_i}}$.

Soit alors $b \in B_i \subset \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}_i}}$. Il existe $c \in \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}}$ tel que $\rho(c) = b$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un sous-semi-treillis fini $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}_i$ et $x \in \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ tel que $\|x - c\| < \varepsilon$.

Posons $T = \mathcal{F} \setminus \{i\}$ et, pour $j \in T$, notons $p_j : \mathfrak{B} \to \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}_j}}$ l'homomorphisme associé et $P : \mathfrak{B} \to \prod_{j\in T} \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}_j}}$ l'homomorphisme $y \mapsto (p_j(y))_{j\in T}$. On a $P(b) = 0$, de sorte que $\|P(\rho(x))\| = \|P(\rho(x - c))\| < \varepsilon$.

**Lemme 2.4.3.** *On a* $\ker P \cap \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} \subset B_i$.

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F} \subset \{i\}$ il n'y a rien à montrer. Sinon, soit $j$ un élément maximal de $T$ et posons $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \setminus \{j\}$. Soit $y = \sum_{k \in \mathcal{F}} y_k \in \ker P \cap \mathfrak{B}_{\mathcal{F}}$ . Puisque $y_j = p_j(y) = 0$, on a $y = \sum_{k \in \mathcal{F}_1} y_k$, de sorte que par hypothèse de récurrence $y \in B_i$. $\square$

Comme les $\rho(A_k)$ sont contenus dans $B_k$ qui sont en somme directe, il vient $\rho(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) \cap \ker P = \rho(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) \cap \mathfrak{B}_{\mathcal{F}} \cap \ker P \subset \rho(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) \cap B_i \subset \rho(A_i)$. Par la proposition 1.1.15 appliquée à $P : \rho(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) \to \prod_{j \in T} \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{L}_j}}$, il existe $h \in \rho(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})$ tel que $P(h) = P(\rho(x))$ et $\|h\| = \|P(\rho(x))\| < \varepsilon$. Posons $z = \rho(x) - h$. On a $z \in \rho(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) \cap \ker P \subset \rho(A_i)$ et $\|\rho(x) - z\| < \varepsilon$. Alors $\|z - b\| < 2\varepsilon$. Comme $\rho(A_i)$ est fermée, on trouve $b \in \rho(A_i)$. $\square$

Par la proposition 2.3.2 et le corollaire précedent on a alors

**Corollaire 2.4.4.** *Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et soient $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i \in \mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{B}, (B_i)_{i \in \mathcal{L}})$ des $C^*$-algèbres $\mathcal{L}$-graduées. Soit $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un morphisme de $C^*$-algèbres graduées. Notons $\rho_i$ sa restriction à $A_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$. Alors $\rho$ est surjectif (resp. injectif) si et seulement si $\rho_i$ est surjectif (resp. injectif) pour tout $i \in \mathcal{L}$.*

$\square$

On en deduit aussi

**Corollaire 2.4.5.** *Soient $\mathcal{L}$ un semi-treillis, $\mathfrak{A}$ une $C^*$-algèbre et $(A_i)_{i \in \mathcal{L}}$, $(B_i)_{i \in \mathcal{L}}$ des familles de sous-$C^*$-algèbres de $\mathfrak{A}$ telles que $(A_i)$ soit totale, $(B_i)$ soit linéairement indépendente, $A_i A_j \subset A_{i \wedge j}$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$, $B_i B_j \subset B_{i \wedge j}$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ et $A_i \subset B_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$. Alors $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i \in \mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{A}, (B_i)_{i \in \mathcal{L}})$ sont $\mathcal{L}$-graduées et $A_i = B_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$.*

*Démonstration.* C'est clair par la définition d'une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée que $\mathfrak{A}$ est une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée dont les composantes sont les $A_i$ et les $B_i$. L'égalité de ces deux composantes résulte du corollaire 2.4.2.

$\square$

**Remarque 2.4.6.** Soit $\mathcal{M}$ un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$. L'algèbre $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A}$, $\mathcal{L}$-graduée et on a $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} \cap A_i = \begin{cases} A_i \text{ si } i \in \mathcal{M} \\ 0 \text{ si } i \notin \mathcal{M}. \end{cases}$

En effet, c'est clair que si $i \in \mathcal{M}$ on a $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} \cap A_i = A_i$.

Supposons que $i \notin \mathcal{M}$. Soit $\mathcal{L}_i = \{j \in \mathcal{L};\ i \leq j\}$ et $\mathcal{L}'_i = \{j \in \mathcal{L};\ i \not\leq j\}$. Alors on a une suite exacte scindée

$$0 \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_i}} \to \mathfrak{A} \underset{\sigma_i}{\overset{p_i}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}} \to 0.$$

Prenons $x \in \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} \cap A_i$ non nul. Comme $x \in A_i$ on a $p_i(x) = x$.

L'ensemble $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}_i$ est un sous-semi-treillis finissant de $\mathcal{M}$ et son complémentaire dans $\mathcal{M}$ est l'ensemble $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}'_i$. En appliquant la proposition précedente on obtient une suite exacte scindée

$$0 \to \overline{\mathfrak{A}}_{\mathcal{M}\cap\mathcal{L}'_i} \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} \underset{\sigma_i}{\overset{q_i}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}}_{\mathcal{M}\cap\mathcal{L}_i} \to 0.$$

Or, $q_i(x) = x$ si $x \in A_j$ ; $j \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_i$ et $q_i(x) = 0$ si $x \in A_j$ ; $j \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}'_i$, donc $q_i$ est la restriction de $p_i$ à $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$. Puisque $x \in \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$ et on a $x = p_i(x)$ alors $x \in p_i(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}) = q_i(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}) = \overline{\mathfrak{A}}_{\mathcal{M}\cap\mathcal{L}_i}$.

Comme $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}_i$ est un sous-semi-treillis finissant de $(\mathcal{M} \cap \mathcal{L}_i) \cup \{i\}$ et $\{i\}$ est son complémentaire dans $(\mathcal{M} \cap \mathcal{L}_i) \cup \{i\}$, on a aussi $\overline{\mathfrak{A}}_{(\mathcal{M}\cap\mathcal{L}_i)\cup\{i\}} = \overline{\mathfrak{A}}_{\mathcal{M}\cap\mathcal{L}_i} \oplus A_i$. Puisque $x \in \overline{\mathfrak{A}}_{\mathcal{M}\cap\mathcal{L}_i} \cap A_i$, on en deduit que $x = 0$.

## 2.5 Morphismes de structure de $C^*$-algèbres graduées

Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et $(\mathfrak{A}, (A_a)_{a\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée. Comme $\{a\}$ est une partie commençante de $\mathcal{L}_a$, $A_a$ est un idéal fermé dans $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_a}}$. On obtient donc un morphisme $\varphi_a : \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_a}} \to M(A_a)$ et donc un morphisme $\pi_a = \varphi_a \circ p_a : \mathfrak{A} \to M(A_a)$.

Soient $a, b \in \mathcal{L}$ tels que $a \leq b$. Notons $\varphi_{a,b} : A_b \to M(A_a)$ la restriction à $A_b$ de $\varphi_a : \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_a}} \to M(A_a)$. Les morphismes $\varphi_{i,j}$ s'appellent les *morphismes de structure* de l'algèbre graduée $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$.

**Proposition 2.5.1.** *Soit $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée. Alors,*

*$(i)$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$, il existe un unique morphisme $\varphi_{i,j} : A_j \to M(A_i)$ satisfaisant $\varphi_{i,j}(y)x = yx$, $x \in A_i, y \in A_j$. Les morphismes $\varphi_{i,j}$ vérifient:*

*$a)$ $\varphi_{i,i} = Id_{A_i}$ pour tout $i \in \mathcal{L}$,*

*$b)$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ posons $k = i \wedge j$ et prenons $m \leq i \wedge j$ alors,*

$$\varphi_{k,i}(x)\varphi_{k,j}(y) \in A_k$$

*et*

$$\varphi_{m,k}(\varphi_{k,i}(x)\varphi_{k,j}(y)) = \varphi_{m,i}(x)\varphi_{m,j}(y),$$

*pour tout* $x \in A_i, y \in A_j$.

$(ii)$ *pour tout* $i, j \in \mathcal{L}$ *il existe une unique application* $q_{i,j} : A_i \times A_j \to A_{i\wedge j}$ *satisfaisant* $q_{i,j}(x, y) = xy$, $x \in A_i, y \in A_j$. *Les applications* $q_{i,j}$ *sont bilinéaires et verifient*:

- $a')$ $q_{i,i}(x, y) = xy$ *pour tout* $i \in \mathcal{L}$,
- $b')$ *pour tout* $i, j \in \mathcal{L}$ *et* $x \in A_i, y \in A_j$, $q_{i,j}(x, y) = q_{j,i}(y^*, x^*)^*$ *et*
- $c')$ *pour tout* $i, j, k \in \mathcal{L}$ *et* $x \in A_i, y \in A_j, z \in A_k$ *on a*

$$q_{i\wedge j,k}(q_{i,j}(x, y), z) = q_{i,j\wedge k}(x, q_{j,k}(y, z)).$$

*Démonstration.* (i) Par définition on a $A_iA_j \subset A_{i\wedge j}$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$. Si $i \leq j$ alors $A_iA_j \subset A_i$ donc si $x \in A_i, y \in A_j \Rightarrow xy \in A_i$ et on peut définir un morphisme $\varphi_{i,j} : A_j \to M(A_i)$ par $\varphi_{i,j}(y)x = yx$. On va démontrer que $\varphi_{i,j}$ vérifie les conditions $a)$ et $b)$. En effet,

- $a)$ $\varphi_{i,i}$ est le plongement canonique de $A_i \to M(A_i)$.
- $b)$ Soit $i, j \in \mathcal{L}$ et $x \in A_i, y \in A_j$. Posons $k = i \wedge j$ et prenons $z \in A_k$, alors par hypothése on a $A_iA_j \subset A_k$. Par les applications $\varphi_{k,i}(x) : z \mapsto xz$ et $\varphi_{k,j}(y) : z \mapsto yz$ on a, $\varphi_{k,i}(x)[\varphi_{k,j}(y)(z)] = \varphi_{k,i}(x)(yz) = xyz$, donc $\varphi_{k,i}(x)\varphi_{k,j}(y) = \varphi_{k,k}(xy) = xy \in A_k$.
  Soit maintenant $m \leq k$ et $w \in A_m$, alors
  $\varphi_{m,k}(\varphi_{k,i}(x)\varphi_{k,j}(y))(w) = \varphi_{m,k}(xy)(w) = (xy)w$.
  D'autre part $\varphi_{m,i}(x)[\varphi_{m,j}(y)(w)] = \varphi_{m,i}(x)[yw] = x(yw)$.
  Puisque $w \in A_m$ est quelconque on obtient l'égalité :
  $\varphi_{m,k}(\varphi_{k,i}(x)\varphi_{k,j}(y)) = \varphi_{m,i}(x)\varphi_{m,i}(y)$.

(ii) Puisque $A_iA_j \subset A_{i\wedge j}$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ on peut définir une application $q_{i,j} : A_i \times A_j \to A_{i\wedge j}$ par $(x, y) \mapsto q_{i,j}(x, y) = xy$ qui est bilinéaire. On va démontrer qu'elle verifie les conditions $a')$, $b')$, $c')$. En effet,

- $a')$ c'est évident.
- $b')$ Soient $i, j \in \mathcal{L}$ et $x \in A_i$, $y \in A_j$, par définition on a $q_{i,j}(x, y)^* = (xy)^* = y^*x^* = q_{j,i}(y^*, x^*)$.
- $c')$ Soient $i, j, k \in \mathcal{L}$ et $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$ alors,

$$\begin{aligned} q_{i\wedge j,k}(q_{i,j}(x, y), z) &= q_{i\wedge j,k}(xy, z) = xyz = q_{i,j\wedge k}(x, yz) \\ &= q_{i,j\wedge k}(x, q_{j,k}(y, z)). \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.5.2.** Soient $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$. On suppose que le morphisme $\varphi_{i,j}$ est non-dégénéré *i.e.* $\overline{\varphi_{i,j}(A_j)A_i} = \overline{A_i\varphi_{i,j}(A_j)} = A_i$. Suite à la proposition 1.1.23 $\varphi_{i,j}$ admet un unique prolongement en un morphisme $\widetilde{\varphi_{i,j}} : M(A_j) \to M(A_i)$.

Si pour tout $a, b \in \mathcal{L}$, $a \leq b$ les morphismes $\varphi_{a,b}$ sont non-dégénérés, la condition $b)$ de la proposition précedente est équivalente à la condition

$$\widetilde{\varphi_{a,b}} \circ \widetilde{\varphi_{b,c}} = \widetilde{\varphi_{a,c}}\,, \text{ avec } a \leq b \leq c,\ a, b, c \in \mathcal{L}.$$

**Proposition 2.5.3.** *Soit* $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}})$ *une* $C^*$*-algèbre graduée. On suppose que les morphismes de structure* $\varphi_{k,\ell} : A_\ell \to M(A_k)$, $k \leq \ell$ *satisfont* $\varphi_{k,\ell}^{-1}(A_k) = \{0\}$, *alors pour tout* $i \in \mathcal{L}$, *l'application* $\varphi_i : \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}} \to M(A_i)$ *est injective.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{F}$ un sous-semi-treillis fini non vide de $\mathcal{L}$. Notons $\ell$ son plus petit élément. Montrons par récurrence sur le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ que l'application $\varphi_\ell : \mathfrak{A}_\mathcal{F} \to M(A_\ell)$ est injective.

Soient $(x_k)_{k\in\mathcal{F}}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{A}_\mathcal{F}$ avec $x_k \in A_k$ et $\sum_{k\in\mathcal{F}} \varphi_{\ell,k}(x_k) = 0$.

Si $\mathcal{F}$ a deux éléments, $\ell, k$, avec $\ell \leq k$, on a $\varphi_{\ell,k}(x_k) = -\varphi_{\ell,\ell}(x_\ell) = -x_\ell$, donc $\varphi_{\ell,k}(x_k) \in A_\ell$, d'où l'on déduit $x_k = 0$ et $x_\ell = -\varphi_{\ell,k}(x_k) = 0$.

Supposons que $\mathcal{F}$ a au moins trois éléments et que, pour tout sous-semi-treillis $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ distinct de $\mathcal{F}$ de plus petit élément $\ell'$, l'application $\varphi_{\ell'} : \mathfrak{A}_{\mathcal{F}'} \to M(A_{\ell'})$ est injective.

Soit $k \in \mathcal{F}$ un élément tel que $k \neq \ell$ et que $k$ ne soit pas le plus grand élément de $\mathcal{F}$. Posons $\mathcal{F}' = \{j \in \mathcal{F};\ j \leq k\}$. Posons aussi $\mathcal{F}_k = \{j \in \mathcal{F};\ k \leq j\}$ et $\mathcal{F}'_k = \{j \in \mathcal{F};\ k \not\leq j\}$. Remarquons que $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}_k$, $\mathcal{F}'_k$ sont distincts de $\mathcal{F}$.

Donnons-nous un élément $\sum_{j\in\mathcal{F}} x_j \in \ker\varphi_\ell$ et soit $x \in A_k$. Le produit $x\sum_{j\in\mathcal{F}} x_j$ s'écrit $\sum_{j\in\mathcal{F}'} y_j$, où pour $j \in \mathcal{F}'$, on a posé $y_j = x \sum_{i\in\mathcal{F};\ i\wedge k=j} x_i$. Comme $\varphi_\ell\Big(x\sum_{j\in\mathcal{F}} x_j\Big) = 0$, on trouve $\varphi_\ell\Big(\sum_{j\in\mathcal{F}'} y_j\Big) = 0$. Par hypothèse de récurrence, on trouve $y_j = 0$ pour tout $j \in \mathcal{F}'$ ; en particulier, $y_k = 0$. Or $y_k = \sum_{j\in\mathcal{F}_k} xx_j = x\varphi_k(\sum_{j\in\mathcal{F}_k} x_j)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in A_k$, le multiplicateur $\varphi_k(\sum_{j\in\mathcal{F}_k} x_j)$ est nul. Par hypothèse de récurrence l'application $\varphi_k : \mathfrak{A}_{\mathcal{F}_k} \to M(A_k)$ est injective, donc tous les $x_j$ sont nuls pour $j \in \mathcal{F}_k$. Appliquant une dernière fois l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{F}'_k$, on trouve que tous les $x_j$ sont nuls.

Soit enfin $i \in \mathcal{L}$. Pour tout sous-semi-treillis fini $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}_i$, l'ensemble $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{i\}$ est un sous-semi-treillis (fini) de $\mathcal{L}$ de plus petit élément $i$, donc la restriction de $\varphi_i$ à $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}'}$ est injective, donc la restriction de $\varphi_i$ à $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{F}'}$ est injective. Par la proposition 2.3.2, $\varphi_i : \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}} \to M(A_i)$ est injective. □

Soit $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée. Rappelons qu'on obtient des morphismes $\pi_i : \mathfrak{A} \to M(A_i)$ par $\pi_i = \varphi_i \circ p_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$, où $\varphi_i : \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}} \to M(A_i)$ et $p_i : \mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}}$. Suite à la proposition 2.5.3 on a le corollaire suivant :

**Corollaire 2.5.4.** *Supposons que $\mathcal{L}$ possède un plus petit élément, $\ell_0$ et que les morphismes de structure $\varphi_{k,\ell}$ avec $k \leq \ell$ satisfont $\varphi_{k,\ell}^{-1}(A_k) = \{0\}$. Alors le morphisme $\varphi_{\ell_0} = \pi_{\ell_0}$ est injectif.*

□

**Remarque 2.5.5.** Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée. Supposons que les morphismes de structure $\varphi_{k,\ell}, k \leq \ell$ satisfont $\varphi_{k,\ell}^{-1}(A_k) = \{0\}$.

La proposition 2.5.3 montre que $\ker \pi_i = \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_i}}$ où $\mathcal{L}'_i = \{j \in \mathcal{L}; i \not\leq j\}$.

Soit $I$ un ensemble (infini) et $(B_i)_{i\in I}$ une famille de $C^*$-algèbres. Rappelons que le produit $\ell^\infty$ des $B_i$ que nous noterons ici $\prod\limits_{i\in I}^{\ell^\infty} B_i$ est

$$\prod_{i\in I}^{\ell^\infty} B_i = \{(x_i)_{i\in I};\, x_i \in B_i \text{ et } \sup_{i\in I} ||x_i|| \text{ soit fini}\}$$

et la somme directe $c_o$ des $B_i$ que nous noterons ici $\bigoplus\limits_{i\in I}^{c_o} B_i$ est

$$\bigoplus_{i\in I}^{c_o} B_i = \{(x_i)_{i\in I};\, x_i \in B_i \text{ et } ||x_i|| \to 0 \text{ quand } i \to \infty\}.$$

Soit $\mathcal{M}$ une partie de $\mathcal{L}$. Posons $B_{\mathcal{M}} = M(\bigoplus\limits_{m\in\mathcal{M}}^{c_o} A_m) = \prod\limits_{m\in\mathcal{M}}^{\ell^\infty} M(A_m)$. Notons $\pi = (\pi_m)_{m\in\mathcal{M}} : \mathfrak{A} \to B_{\mathcal{M}}$ le morphisme donné par $a \mapsto \pi(a) = (\pi_m(a))_{m\in\mathcal{M}}$. On en deduit que
$\ker \pi = \ker (\pi_m)_{m\in\mathcal{M}} = \bigcap\limits_{m\in\mathcal{M}} \ker \pi_m = \overline{\mathfrak{A}_J}$ où $J = \{j \in \mathcal{L} : \forall m \in M,\, m \not\leq j\}$.
Donc le morphisme $\mathfrak{A}/\overline{\mathfrak{A}_J} \to B_{\mathcal{M}}$ est injectif.

Supposons de plus que $\mathcal{L}$ a un plus petit élément, $\ell_0$. On rappelle qu'un *atome* de $\mathcal{L}$ est un élément $a \neq \ell_0$ tel que si $b \leq a \Rightarrow b = \ell_0$ ou $b = a$. On dit que $\mathcal{L}$ est *atomique* si tout élément $i \in \mathcal{L}$ différent de $\ell_0$ est minoré par un atome. Notons encore $\mathcal{M}$ l'ensemble des atomes de $\mathcal{L}$. On remarque que l'ensemble $J$ possède un seul élément $\ell_0$ et que le morphisme $\mathfrak{A}/A_{\ell_0} \to B_{\mathcal{M}}$ est injectif. Notons $\widetilde{\mathfrak{A}} = \prod_{m \in \mathcal{M}}^{\ell^\infty} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_m}}$. On en deduit que le morphisme $\mathfrak{A}/A_{\ell_0} \to \widetilde{\mathfrak{A}}$ est injectif.

# Chapitre 3

# Reconstruction des $C^*$-algèbres graduées

## 3.1 Reconstruction

Nous démontrons ici que les morphismes de structure nous permettent de construire les $C^*$-algèbres graduées.

Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et $(A_i)_{i\in\mathcal{L}}$ une famille de $C^*$-algèbres indixées par $\mathcal{L}$.

On veut construire une $C^*$-algèbre graduée $\mathfrak{A}$ dont la composante indexée par $i$ soit $A_i$. Si une telle $C^*$-algèbre graduée est donnée, on dispose par la proposition 2.5.1

$(i)$ des morphismes $\varphi_{i,j} : A_j \to M(A_i)$, pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$, vérifiant les conditions

- $a)$ $\varphi_{i,i} = \mathrm{Id}_{A_i}$ pour tout $i \in \mathcal{L}$,
- $b)$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}, m \leq i\wedge j$ et tout $x \in A_i, y \in A_j$ posons $k = i\wedge j$ alors,

$$\varphi_{k,i}(x)\varphi_{k,j}(y) \in A_k$$

et

$$\varphi_{m,k}(\varphi_{k,i}(x)\varphi_{k,j}(y)) = \varphi_{m,i}(x)\varphi_{m,j}(y).$$

$(ii)$ des applications bilinéaires $q_{i,j} : A_i \times A_j \to A_{i\wedge j}$, pour tout $i, j \in \mathcal{L}$, vérifiant les conditions

- $a')$ $q_{i,i}(x, y) = xy$ pour tout $i \in \mathcal{L}$,
- $b')$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ et $x \in A_i, y \in A_j$, $q_{i,j}(x, y) = q_{j,i}(y^*, x^*)^*$ et
- $c')$ pour tout $i, j, k \in \mathcal{L}$ et $x \in A_i, y \in A_j, z \in A_k$ on a

$$q_{i\wedge j,k}(q_{i,j}(x, y), z) = q_{i,j\wedge k}(x, q_{j,k}(y, z)).$$

**Proposition 3.1.1.** *Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et $(A_i)_{i\in\mathcal{L}}$ une famille de $C^*$-algèbres.*

(1) *On se donne pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$, des morphismes $\varphi_{i,j} : A_j \to M(A_i)$ qui vérifient les conditions a) et b). Pour $i, j \in \mathcal{L}$ notons $q_{i,j} : A_i \times A_j \to A_{i\wedge j}$ l'application $(x, y) \mapsto \varphi_{i\wedge j,i}(x)\varphi_{i\wedge j,j}(y)$. La famille d'applications $q_{i,j}$ vérifie les conditions $a'$), $b'$), $c'$) ci-dessus.*

(2) *Inversement, on se donne pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ des applications $q_{i,j} : A_i \times A_j \to A_{i\wedge j}$ qui vérifient les conditions $a'$), $b'$) et $c'$) ci-dessus. Pour $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$ il existe un morphisme $\varphi_{i,j} : A_j \to M(A_i)$ qui est donné par $\varphi_{i,j}(y)x = q_{j,i}(y, x)$ et $x\varphi_{i,j}(y) = q_{i,j}(x, y)$ pour $x \in A_i$, $y \in A_j$. La famille de morphismes $\varphi_{i,j}$ vérifie les conditions a), b) ci-dessus.*

*Démonstration.* (1) Soient $i, j \in \mathcal{L}$ et $x \in A_i$, $y \in A_j$.

La condition $a'$) est satisfaite car par $a$) on a $q_{i,i}(x, y) = \varphi_{i,i}(x)\varphi_{i,i}(y) = xy$.

On a $b'$) puisque

$$\begin{aligned} q_{j,i}(y^*, x^*) &= \varphi_{i\wedge j,j}(y^*)\varphi_{i\wedge j,i}(x^*) = \varphi_{i\wedge j,j}(y)^*\varphi_{i\wedge j,i}(x)^* \\ &= (\varphi_{i\wedge j,i}(x)\varphi_{i\wedge j,j}(y))^* = q_{i,j}(x, y)^*. \end{aligned}$$

Soit aussi $z \in A_k$, en utilisant $b$) on a

$$\begin{aligned} q_{i,j\wedge k}(x, q_{j,k}(y, z)) &= \varphi_{i\wedge j\wedge k,i}(x)\varphi_{i\wedge j\wedge k,j\wedge k}(q_{j,k}(y, z)) \\ &= \varphi_{i\wedge j\wedge k,i}(x)\varphi_{i\wedge j\wedge k,j\wedge k}(\varphi_{j\wedge k,j}(y)\varphi_{j\wedge k,k}(z)) \\ &= \varphi_{i\wedge j\wedge k,i}(x)\varphi_{i\wedge j\wedge k,j}(y)\varphi_{i\wedge j\wedge k,k}(z). \end{aligned}$$

De même on a $q_{i\wedge j,k}(q_{i,j}(x, y), z) = \varphi_{i\wedge j\wedge k,i}(x)\varphi_{i\wedge j\wedge k,j}(y)\varphi_{i\wedge j\wedge k,k}(z)$ donc la famille $q_{i,j}$ vérifie aussi $c'$).

(2) Soient $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$ et $x \in A_i$, $y \in A_j$. Le morphisme $\varphi_{i,j}(y)$ est un multiplicateur puisque si $x' \in A_i$ alors on a

$$\begin{aligned} x'(\varphi_{i,j}(y)x) &= x'q_{j,i}(y, x) = q_{i,i}(x', q_{j,i}(y, x)) = q_{i,i}(q_{i,j}(x', y), x) \\ &= q_{i,j}(x', y)x = (x'\varphi_{i,j}(y))x. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés $b'$) et $c'$) des $q_{i,j}$ c'est facile de montrer que $\varphi_{i,j}$ est un morphisme de $C^*$-algèbres.

C'est évident qu'on a $a$).

Soient $i, j \in \mathcal{L}$ et posons $k = i \wedge j$ alors $j \wedge k = k$. Soient $x \in A_i$, $y \in A_j$, $z \in A_k$, en utilisant $c'$) on va démontrer $b$).

$$\begin{aligned} \varphi_{i\wedge j,i}(x)\varphi_{i\wedge j,j}(y)(z) &= \varphi_{i\wedge j,i}(x)(q_{j,i\wedge j}(y, z)) = q_{i,i\wedge j}(x, q_{j,i\wedge j}(y, z)) \\ &= q_{i,j\wedge k}(x, q_{j,k}(y, z)) = q_{i\wedge j,k}(q_{i,j}(x, y), z) \\ &= q_{k,k}(q_{i,j}(x, y), z) = q_{i,j}(x, y)z. \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{i\wedge j,i}(x)\varphi_{i\wedge j,j}(y) = q_{i,j}(x,y) \in A_k$.
Soit $m \leq i \wedge j$ et $z \in A_m$, alors

$$\begin{aligned}\varphi_{m,i\wedge j}(\varphi_{i\wedge j,i}(x)\varphi_{i\wedge j,j}(y))z &= q_{i\wedge j,m}(q_{i,j}(x,y),z) = q_{i,j\wedge m}(x, q_{j,m}(y,z)) \\ &= q_{i,m}(x, q_{j,m}(y,z)) = \varphi_{m,i}(x)q_{j,m}(y,z) \\ &= \varphi_{m,i}(x)\varphi_{m,j}(y)z.\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{m,i\wedge j}(\varphi_{i\wedge j,i}(x)\varphi_{i\wedge j,j}(y)) = \varphi_{m,i}(x)\varphi_{m,j}(y)$.

□

**Théorème 3.1.2.** *Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et $(A_i)_{i\in\mathcal{L}}$ une famille de $C^*$-algèbres. On se donne des morphismes*

$$\varphi_{i,j} : A_j \to M(A_i) \text{ pour } i \leq j, i,j \in \mathcal{L},$$

*qui verifient les propriétes a) et b) de la proposition 2.5.1. Alors, il existe à isomorphisme près une unique $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ dont les morphismes de structure soient les $\varphi_{i,j}$.*

*Démonstration.* On va faire la démonstration par étapes :

$I$) existence

On définit $\mathfrak{A}_\mathcal{L} = \bigoplus_{i\in\mathcal{L}} A_i$ et on idéntifie $A_i$ avec son image canonique dans $\mathfrak{A}_\mathcal{L}$. Un élément $x \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$ est écrit sous la forme $x = \sum_{i\in\mathcal{L}} x_i$ avec $x_i \neq 0$ pour seulement un nombre fini de $i \in \mathcal{L}$. On va démontrer que le complété de $\mathfrak{A}_\mathcal{L}$ pour une norme qu'on définira est une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée. On notera $\mathfrak{A}$ ce complété.

Soient $x, y \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$ alors $x = \sum_{i\in\mathcal{L}} x_i = (x_i)_{i\in\mathcal{L}}$ et $y = \sum_{j\in\mathcal{L}} y_j = (y_j)_{j\in\mathcal{L}}$ avec $x_i \in A_i, y_j \in A_j$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$.

- Pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ on pose $k = i \wedge j$ et on définit le produit :

$$x_i y_j = \varphi_{k,i}(x_i)\varphi_{k,j}(y_j) \in A_k.$$

Soit $x$ et $y \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$. On définit le produit dans $\mathfrak{A}_\mathcal{L}$ par :

$$xy = \sum_{i,j\in\mathcal{L}} x_i y_j.$$

Il résulte immédiatement de la proposition 3.1.1 que ce produit est associatif.

Définissons une application $*$ de $\mathfrak{A}_\mathcal{L}$ dans lui-même par $x \mapsto x^* = \sum_{i\in\mathcal{L}} x_i^*$ pour tout $x \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$. C'est clair qu'on a $x^{**} = x$ et $(xy)^* = y^* x^*$ pour tout $x, y \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$, donc cette application est une involution.

L'espace $\mathfrak{A}_\mathcal{L}$ muni de ce produit et de cette involution est une algèbre involutive.

Définissons la norme de $\mathfrak{A}_\mathcal{L}$.

- Pour tout $i \in \mathcal{L}$, on définit une application linéaire

$$\pi_i : \mathfrak{A}_\mathcal{L} \to M(A_i)$$

par

$$\pi_i(x) = \pi_i(\sum_{j\in\mathcal{L}} x_j) = \sum_{j\in\mathcal{L};i\leq j} \varphi_{i,j}(x_j) \,\text{pour}\, x = \sum_{j\in\mathcal{L}} x_j.$$

Montrons que $\pi_i$ est un morphisme d'algèbres involutives.

Par bilinéarité il suffit de montrer que pour tout $i, j, k \in \mathcal{L}$ et pour tout $x_k \in A_k, y_j \in A_j$ on a $\pi_i(x_k y_j) = \pi_i(x_k)\pi_i(y_j)$.

Si $i \in \mathcal{L}$ est tel que $i \not\leq k \wedge j$ alors $i \not\leq j$ ou $i \not\leq k$, donc $\pi_i(x_k)\pi_i(y_j) = 0 = \pi_i(x_k y_j)$.

Si $i \leq i \wedge j$ alors
$$\begin{aligned}\pi_i(x_k y_j) &= \varphi_{i,k\wedge j}(x_k y_j) = \varphi_{i,k\wedge j}(\varphi_{k\wedge j,k}(x_k)\varphi_{k\wedge j,j}(y_j)) = \varphi_{i,k}(x_k)\varphi_{i,j}(y_j)\\ &= \pi_i(x_k)\pi_i(y_j).\end{aligned}$$

De plus on a pour tout $x \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$ et tout $i \in \mathcal{L}$,

$$\pi_i(x^*) = \sum_{\substack{j\in\mathcal{L}:\\ i\leq j}} \varphi_{i,j}(x_j^*) = \sum_{\substack{j\in\mathcal{L}:\\ i\leq j}} \varphi_{i,j}(x_j)^* = \pi_i(x)^*.$$

- Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ une partie quelconque, on définit $||x||_\mathcal{S} = \sup\limits_{i\in\mathcal{S}} ||\pi_i(x)||$.

Remarquons tout d'abord que pour tout $\mathcal{S}$, $||\cdot||_\mathcal{S}$ est finie :

$$\begin{aligned}||x||_\mathcal{S} &= \sup_{i\in\mathcal{S}} ||\pi_i(x)|| = \sup_{i\in\mathcal{S}} ||\sum_{j:i\leq j} \varphi_{i,j}(x_j)||\\ &\leq \sup_{i\in\mathcal{S}} \sum_{j:i\leq j} ||\varphi_{i,j}(x_j)|| \leq \sup_{i\in\mathcal{S}} \sum_{j:i\leq j} ||x_j|| \leq \sum_{j\in\mathcal{S}} ||x_j||.\end{aligned}$$

De plus, $||\cdot||_\mathcal{S}$ est une $C^*$-semi-norme puisque c'est le supremum d'une famille de $C^*$-semi-normes.

**Lemme 3.1.3.** *Si $m$ est maximal dans le support de $x \in \mathfrak{A}_\mathcal{L}$ alors $x_m = \pi_m(x)$.*

*Démonstration.* Le résultat est immediat par définition *i.e.*

$$\pi_m(x) = \sum_{j\in\mathcal{L}} \pi_m(x_j) = \sum_{j\in\mathcal{L}:m\le j} \varphi_{m,j}(x_j) = \varphi_{m,m}(x_m) = x_m. \qquad \square$$

**Proposition 3.1.4.** *$||\cdot||_{\mathcal{L}}$ est une $C^*$-norme sur $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$.*

*Démonstration.* Soit $x \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ non nul, alors $x = \sum_{i\in\mathcal{L}} x_i$ avec $x_i \neq 0$ pour seulement un nombre fini de $i \in \mathcal{L}$. Notons $\Omega = \{j \in \mathcal{L} : x_j \neq 0\}$ le support de $x$. Soit $m \in \Omega$ un élément maximal alors $x_m \neq 0$ par définition de $\Omega$. Par le lemme précedent on a $\pi_m(x) \neq 0 \Rightarrow ||\pi_m(x)|| \neq 0 \Rightarrow \sup_{k\in\Omega} ||\pi_k(x)|| \neq 0 \Rightarrow ||x||_{\mathcal{L}} \neq 0$. $\square$

Le completé de $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ par rapport à la norme $||\cdot||_{\mathcal{L}}$ est une $C^*$-algèbre.

Montrons que $\mathfrak{A}$ est $\mathcal{L}$-graduée. Les $A_i$ sont linéairement independents car ils le sont dans $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ (par définition) et $||\cdot||_{\mathcal{L}}$ étant une norme sur $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$, l'application $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \to \mathfrak{A}$ est injective.

De plus par la définition du produit on a $A_iA_j \subset A_{i\wedge j}$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ et finalement par construction on a que $\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \equiv \bigoplus_{i\in\mathcal{L}} A_i = \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ est dense dans son complété $\mathfrak{A}$ pour la norme $||\cdot||_{\mathcal{L}}$.

*II*) unicité

Soit $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{A}}$ pour une autre norme $||\cdot||_*$. Pour $i \in \mathcal{L}$ notons $\rho_i : A_i \to B_i = A_i$ l'idéntité $\mathrm{Id}_{A_i}$. C'est évident qu'on a $\rho_i(x)\rho_j(y) = \rho_{i\wedge j}(xy)$ pour tout $x \in A_i, y \in A_j$ et $i, j \in \mathcal{L}$. Donc par le corollaire 2.3.4 il existe un unique morphisme $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ qui est injectif donc isométrique, d'où l'unicité.

$\square$

**Corollaire 3.1.5.** *Soient $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{B}, (B_i)_{i\in\mathcal{L}})$ des $C^*$-algèbres $\mathcal{L}$-graduées. On se donne un morphisme $\rho : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ de $C^*$-algèbres graduées. Notons $\rho_i$ la restriction de $\rho$ à $A_i$. Alors*

a) $\ker\rho = \overline{\bigoplus_{i\in\mathcal{L}} \ker\rho_i}$ *et*

b) $Im\rho = \overline{\bigoplus_{i\in\mathcal{L}} Im\rho_i}$.

*Démonstration.* a) Pour tout $i \in \mathcal{L}$ on a $\ker\rho_i \subset \ker\rho$, donc $\bigoplus_{i\in\mathcal{L}} \ker\rho_i \subset \ker\rho$.

Soit $\mathcal{F}$ un sous-semi-treillis fini de $\mathcal{L}$. Montrons $\bigoplus_{i\in\mathcal{F}} \ker\rho_i = \ker\rho_{\mathcal{F}}$.

Soit $x = \sum_{i \in \mathcal{F}} x_i \in \ker \rho_{\mathcal{F}}$ alors $\rho_{\mathcal{F}}(x) = 0$ donc $\sum_{i \in \mathcal{F}} \rho_i(x_i) = 0$. Puisque $\rho_i(x_i) \in B_i$ pour tout $i \in \mathcal{F}$ et $(B_i)_{i \in \mathcal{F}}$ est une famille linéairement indépendente on a $\rho_i(x_i) = 0$ pour tout $i \in \mathcal{F}$. Donc $x_i \in \ker \rho_i$ pour tout $i \in \mathcal{F}$ et $x \in \bigoplus_{i \in \mathcal{F}} \ker \rho_i$.

Si $x \in \ker \rho$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathcal{F}$ un sous-semi-treillis fini de $\mathcal{L}$ et il existe $y \in \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ tel que $||x - y|| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a $||\rho(y)|| = ||\rho(y-x)|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque $\rho(y) \in \rho(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})$ par la proposition 1.1.15 il existe $z \in \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ tel que $\rho(z) = \rho(y)$ et $||z|| = ||\rho(y)|| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mais $\rho(y - z) = 0 \Rightarrow y - z \in \ker \rho \cap \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \Rightarrow y - z \in \ker \rho_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{i \in \mathcal{F}} \ker \rho_i$.

Alors $||x - (y - z)|| \leq ||x - y|| + ||z|| < \varepsilon$ *i.e.* on a trouvé un élément $y - z$ dans $\ker \rho_{\mathcal{F}}$ qui est proche de $x \in \ker \rho$, donc $\ker \rho = \overline{\bigoplus_{i \in \mathcal{L}} \ker \rho_i}$.

b) Comme $(A_i)_{i \in \mathcal{L}}$ est totale dans $\mathfrak{A}$, $(\rho(A_i))_{i \in \mathcal{L}}$ est totale dans $\rho(\mathfrak{A})$.

□

## 3.2 Idéaux et quotients de $C^*$-algèbres graduées

De la proposition 2.3.2 et du corollaire 3.1.5 on deduit immediatement :

**Corollaire 3.2.1.** *Soient $(\mathfrak{J}, (J_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$, $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{B}, (B_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$ des $C^*$-algèbres $\mathcal{L}$-graduées. On se donne $i : \mathfrak{J} \to \mathfrak{A}$ et $p : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ des morphismes de $C^*$-algèbres graduées. Si pour tout $\ell \in \mathcal{L}$ la suite $0 \to J_\ell \to A_\ell \to B_\ell \to 0$ est exacte, alors la suite $0 \to \mathfrak{J} \to \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \to 0$ est exacte.*

□

**Proposition 3.2.2.** *Soit $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i \in \mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée et prenons la surjection canonique $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/I$ où $I$ est un idéal fermé de $\mathfrak{A}$. On pose $\pi(A_i) = B_i$. Alors on a une équivalence entre :*

a) *$I$ est une sous-$C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée de $\mathfrak{A}$ (et dans ce cas on a $\overline{\bigoplus_{i \in \mathcal{L}} I \cap A_i} = I$ d'après la définition 2.2.2).*

b) *La famille $(B_i)$ est linéairement indépendente, autrement dit $(\mathfrak{A}/I,\ (B_i)_{i \in \mathcal{L}})$ est une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée.*

*Démonstration.* *b)* $\Rightarrow$ *a)* On applique le corollaire 3.1.5 pour $\ker \pi = I$.

$a) \Rightarrow b)$. Comme $\mathfrak{A}$ est une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$ graduée, par la proposition 2.5.1 il existe une unique application bilinéaire $q_{i,j} : A_i \times A_j \to A_{i\wedge j}$ définie par $q_{i,j}(x, y) = xy$ pour tout $x \in A_i$ et $y \in A_j$ qui vérifie les conditions $a')$, $b')$, $c')$ de cette proposition. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_i \times A_j \arrow[r, "q_{i,j}"] \arrow[d, "\pi_{i,j}"'] & A_{i\wedge j} \arrow[d, "\pi_{i\wedge j}"] \\
B_i \times B_j \arrow[r, "q'_{i,j}"'] & B_{i\wedge j}
\end{tikzcd}$$

où $q'_{i,j}$ est une application bien définie. En effet, soit $x_i = \pi(x'_i) \in B_i$ et $y_j = \pi(y'_j) \in B_j$ (avec $x'_i \in A_i$ et $y'_j \in A_j$) alors $x_i y_j = \pi(x'_i y'_j) \in B_{i\wedge j}$ et $q'_{i,j}(x_i, y_j) = x_i y_j$ est bien définie.

Comme les applications $\pi_{i,j}$ et $\pi_{i\wedge j}$ sont surjectives $q'_{i,j}$ vérifie aussi les conditions $a')$, $b')$, $c')$ de la proposition 2.5.1.

Alors d'après le théorème 3.1.2 il existe à isomorphisme près une unique $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée $(\mathfrak{B}, (B_i)_{i\in\mathcal{L}})$ dont les applications de structure soient les $q'_{i,j}$.

Pour tout $i \in \mathcal{L}$, notons $\pi_i$ la restriction de $\pi$ à $A_i$. D'après le corollaire 2.3.4 il existe un unique morphisme $\pi' : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ dont la restriction à $A_i$ soit $\pi_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$. Comme $\ker \pi_i = I \cap A_i$ pour tout $i \in \mathcal{L}$ et par hypothèse, on a $\ker \pi' = \overline{\bigoplus_{i\in\mathcal{L}} \ker \pi_i} = \overline{\bigoplus_{i\in\mathcal{L}} I \cap A_i} = I = \ker \pi$. Les applications $\pi$ et $\pi'$ sont surjectives et ont même noyau. Il existe donc un unique isomorphisme $\rho : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}/I$ tel que $\rho \circ \pi' = \pi$.

Comme $(\mathfrak{B}, (B_i)_{i\in\mathcal{L}})$ est une $C^*$-algèbre graduée $(\mathfrak{A}/I, (\rho(B_i))_{i\in\mathcal{L}})$ est graduée. Or, en considérant la restriction de $\rho\circ\pi'$ et $\pi$ à $A_i$, on trouve $\rho_{|_{B_i}} = \mathrm{Id}_{B_i}$ de sorte que $\rho(B_i) = B_i$, d'où le résultat. $\square$

# Chapitre 4

# Produits tensoriels et produits croisés de $C^*$-algèbres graduées

## 4.1 Produits tensoriels

Les produits tensoriels de deux (un nombre fini) $C^*$-algèbres graduées par des semi-treillis finis ont été étudiés dans [21]. Nous généralisons ici leur résultat dans le cas de semi-treillis quelconques.

Notons $\alpha$ la $C^*$-norme minimale *min* ou maximale *max*.

**Lemme 4.1.1.** *Soit* $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}})$ *une* $C^*$*-algèbre graduée et* $C$ *une* $C^*$*-algèbre. Alors* $(\mathfrak{A} \otimes_\alpha C, (A_\ell \otimes_\alpha C)_{\ell\in\mathcal{L}})$ *est aussi une* $C^*$*-algèbre* $\mathcal{L}$*-graduée.*

*Démonstration.* Tout d'abord, montrons que pour tout $\ell \in \mathcal{L}$ l'inclusion naturelle $\varphi_\ell : A_\ell \hookrightarrow \mathfrak{A}$ induit un morphisme injectif $\varphi_\ell \otimes_\alpha \mathrm{Id}_C : A_\ell \otimes_\alpha C \to \mathfrak{A} \otimes_\alpha C$. En d'autres termes, montrons que $(A_\ell \otimes_\alpha C)_{\ell\in\mathcal{L}}$ est une famille de sous-$C^*$-algèbres de $\mathfrak{A} \otimes_\alpha C$.

C'est immédiat pour le produit tensoriel minimal.

Montrons-le pour le produit tensoriel maximal. Soit $\ell \in \mathcal{L}$, puisque $\mathfrak{A}$ est une $C^*$-algèbre graduée on a par la proposition 2.4.1 une suite exacte scindée

$$0 \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_\ell}} \to \mathfrak{A} \underset{\sigma_\ell}{\overset{p_\ell}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_\ell}} \to 0.$$

Par la proposition 1.2.2 on a des morphismes

$$\mathfrak{A} \otimes_{\max} C \underset{\sigma_\ell\otimes_{\max}\mathrm{Id}_C}{\overset{p_\ell\otimes_{\max}\mathrm{Id}_C}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_\ell}} \otimes_{\max} C$$

et $(p_\ell \otimes_{\max} \mathrm{Id}_C) \circ (\sigma_\ell \otimes_{\max} \mathrm{Id}_C) = (p_\ell \circ \sigma_\ell) \otimes \mathrm{Id}_C = \mathrm{Id}_{\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_\ell}}\otimes_{\max} C}$. Donc le morphisme $\sigma_\ell \otimes_{\max} \mathrm{Id}_C$ est injectif. Puisque $A_\ell \otimes_{\max} C$ est un idéal de $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_\ell}} \otimes_{\max} C$ on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A_\ell \otimes_{\max} C \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi_\ell \otimes_{\max} \mathrm{Id}_C"'] & \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_\ell}} \otimes_{\max} C \arrow[d, "\sigma_\ell \otimes_{\max} \mathrm{Id}_C"] \\
& \mathfrak{A} \otimes_{\max} C
\end{tikzcd}$$

et par conséquent $\varphi_\ell \otimes_{\max} \mathrm{Id}_C$ est injectif.

Montrons ensuite que $(A_\ell \otimes_\alpha C)_{\ell \in \mathcal{L}}$ est une famille linéairement indépendente. Soit $(x_i)_{i \in \mathcal{L}}$ une famille telle que $x_i \in A_i \otimes_\alpha C$ pour tout $i \in \mathcal{L}$ et notons $I = \{j \in \mathcal{L} : x_j \neq 0\}$ le support de $x = \sum_{i \in \mathcal{L}} x_i$. On va montrer par recurrence sur le nombre d'éléments de $I$ que si $\sum_{i \in I} x_i = 0$ alors $x_i = 0$ pour tout $i \in I$.

C'est evident si $I$ a un seul élément. Supposons que c'est vrai pour tout sous ensemble de $I$ distinct de $I$. Soit $m \in I$ un élément maximal et $x = \sum_{i \in I} x_i = 0$. Puisque $\mathfrak{A}$ est graduée on a

$$0 \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_m}} \to \mathfrak{A} \underset{\sigma_m}{\overset{p_m}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_m}} \to 0.$$

Par les propositions 1.2.12 et 1.2.13 on a aussi :

$$0 \longrightarrow \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_m}} \otimes_\alpha C \longrightarrow \mathfrak{A} \otimes_\alpha C \underset{\sigma_m \otimes_\alpha \mathrm{Id}_C}{\overset{p_m \otimes_\alpha \mathrm{Id}_C}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_m}} \otimes_\alpha C \longrightarrow 0.$$

Donc $(p_m \otimes_\alpha \mathrm{Id}_C)(x) = x_m = 0$ et $\sum_{i \in I \setminus \{m\}} x_i = 0$. Comme $I \setminus \{m\}$ est un sous-ensemble de $I$ par hypothèse de recurrence on a $x_i = 0$ pour tout $i \in I \setminus \{m\}$, d'où le résultat.

La famille $(A_\ell \otimes_\alpha C)_{\ell \in \mathcal{L}}$ est clairement totale.

Soient $\ell, \ell' \in \mathcal{L}$, on vérifie facilement avec les tenseurs élémentaires qu'on a $(A_\ell \otimes_\alpha C)(A'_\ell \otimes_\alpha C) \subset A_{\ell \wedge \ell'} \otimes_\alpha C$.

$\square$

On va généraliser ce résultat par la proposition suivante

**Proposition 4.1.2.** *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ deux semi-treillis. Soit $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée et $(\mathfrak{B}, (B_m)_{m \in \mathcal{M}})$ une $C^*$-algèbre $\mathcal{M}$-graduée, alors $(\mathfrak{A} \otimes_\alpha \mathfrak{B}, (A_\ell \otimes_\alpha B_m)_{(\ell,m) \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}})$ est une $C^*$-algèbre $\mathcal{L} \times \mathcal{M}$-graduée.*

*Démonstration.* Soit $\ell \in \mathcal{L}, m \in \mathcal{M}$, puisque $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des $C^*$-algèbres graduées on a par la proposition 2.4.1 des suites exactes scindées

$$0 \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_\ell}} \to \mathfrak{A} \underset{\sigma_\ell}{\overset{p_\ell}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_\ell}} \to 0,$$

$$0 \to \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{M}'_m}} \to \mathfrak{B} \underset{\sigma'_m}{\overset{p'_m}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{B}_{\mathcal{M}_m}} \to 0.$$

On remarque que si $\varphi_\ell : A_\ell \hookrightarrow \mathfrak{A}$ et $\psi_m : B_m \hookrightarrow \mathfrak{B}$ sont les inclusions naturelles pour tout $\ell \in \mathcal{L}$ et $m \in \mathcal{M}$, alors par les propositions 1.2.5 et 1.2.2 on peut définir un morphisme $\varphi_\ell \otimes_\alpha \psi_m : A_\ell \otimes_\alpha B_m \to \mathfrak{A} \otimes_\alpha \mathfrak{B}$ pour tout $\ell \in \mathcal{L}$ et $m \in \mathcal{M}$. Montrons que $\varphi_\ell \otimes_\alpha \psi_m$ est injectif.

Par la proposition 1.2.5 le morphisme $\varphi_\ell \otimes_{\min} \psi_m$ est injectif donc $A_\ell \otimes_{\min} B_m$ est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A} \otimes_{\min} \mathfrak{B}$ pour tout $\ell \in \mathcal{L}$ et $m \in \mathcal{M}$.

Montrons-le pour le produit croisé maximal. Soit $\ell \in \mathcal{L}$ et $m \in \mathcal{M}$. Puisque $\mathfrak{B}$ est une $C^*$-algèbre graduée en appliquant le lemme 4.1.1 pour $C = A_\ell$ on a un morphisme injectif

$$\mathrm{Id}_{A_\ell} \otimes_{\max} \psi_m : A_\ell \otimes_{\max} B_m \to A_\ell \otimes_{\max} \mathfrak{B}.$$

Maintenant on utilise la graduation de $\mathfrak{A}$ et on applique une deuxième fois le lemme 4.1.1 avec $C = \mathfrak{B}$. On obtient donc un morphisme injectif

$$\varphi_\ell \otimes_{\max} \mathrm{Id}_{\mathfrak{B}} : A_\ell \otimes_{\max} \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \otimes_{\max} \mathfrak{B}.$$

La composition de ces deux morphismes injectifs $(\varphi_\ell \otimes_{\max} \mathrm{Id}_{\mathfrak{B}}) \circ (\mathrm{Id}_{A_\ell} \otimes_{\max} \psi_m) = \varphi_\ell \otimes_{\max} \psi_m$ est aussi un morphisme injectif. Autrement dit $A_\ell \otimes_{\max} B_m$ est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A} \otimes_{\max} \mathfrak{B}$ pour tout $\ell \in \mathcal{L}$ et $m \in \mathcal{M}$.

Montrons ensuite que la famille $(A_\ell \otimes_\alpha B_m)_{(\ell,m)\in\mathcal{L}\times\mathcal{M}}$ est linéairement indépendente. Il est clair (sur les tenseurs elémentaires) que $A_\ell \otimes_\alpha B_m \subset (A_\ell \otimes_\alpha \mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{A} \otimes_\alpha B_m)$ pour tout $\ell \in \mathcal{L}$ et $m \in \mathcal{M}$. Mais par le lemme 4.1.1 les familles $(A_\ell \otimes_\alpha \mathfrak{B})_{\ell\in\mathcal{L}}$ et $(\mathfrak{A} \otimes_\alpha B_m)_{m\in\mathcal{M}}$ sont linéairement indépendentes, d'où le résultat.

La famille $(A_\ell \otimes_\alpha B_m)_{(\ell,m)\in\mathcal{L}\times\mathcal{M}}$ est clairement totale.

Finalement, soient $(\ell, m)$, $(\ell', m') \in \mathcal{L} \times \mathcal{M}$ et $\alpha_\ell \otimes \beta_m$, $\alpha_{\ell'} \otimes \beta_{m'}$ des tenseurs elémentaires de $A_\ell \otimes_\alpha B_m$, $A_{\ell'} \otimes_\alpha B_{m'}$. Alors $(\alpha_\ell \otimes \beta_m)(\alpha_{\ell'} \otimes \beta_{m'}) = \alpha_\ell\alpha_{\ell'} \otimes \beta_m\beta_{m'} \in A_{\ell\wedge\ell'} \otimes_\alpha B_{m\wedge m'}$. On en deduit que $(A_\ell \otimes_\alpha B_m)(A_{\ell'} \otimes_\alpha B_{m'}) \subset A_{\ell\wedge\ell'} \otimes_\alpha B_{m\wedge m'}$.

□

**Remarque 4.1.3.** Par la proposition précedente on a une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}\times\mathcal{M}$-graduée $(\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B},(A_\ell\otimes_\alpha B_m)_{(\ell,m)\in\mathcal{L}\times\mathcal{M}})$ et on a montré que $A_\ell\otimes_\alpha B_m\subset(A_\ell\otimes_\alpha\mathfrak{B})\cap(\mathfrak{A}\otimes_\alpha B_m)$ pour tout $\ell\in\mathcal{L}$ et $m\in\mathcal{M}$. Montrons l'égalité.

Par le lemme 4.1.1 la $C^*$-algèbre $(\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B},(A_\ell\otimes_\alpha\mathfrak{B})_{\ell\in\mathcal{L}})$ est $\mathcal{L}$-graduée et $(\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B},(\mathfrak{A}\otimes_\alpha B_m)_{m\in\mathcal{M}})$ est $\mathcal{M}$-graduée. Puisque $\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{L}\times\mathcal{M}}(A_\ell\otimes_\alpha B_m)$ est dense dans $\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B}$, en appliquant la proposition 2.2.5, on a que $(\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B},((A_\ell\otimes_\alpha\mathfrak{B})\cap(\mathfrak{A}\otimes_\alpha B_m))_{(\ell,m)\in\mathcal{L}\times\mathcal{M}})$ est aussi une $C^*$-algèbre graduée. L'égalité $A_\ell\otimes_\alpha B_m=(A_\ell\otimes_\alpha\mathfrak{B})\cap(\mathfrak{A}\otimes_\alpha B_m)$ résulte maintenant du corollaire 2.4.5.

**Remarque 4.1.4.** On reprend les hypothèses de la proposition 4.1.2. Suite a la proposition 2.5.1 on remarque que les morphismes de structure de la $C^*$-algèbre $\mathcal{L}\times\mathcal{M}$-graduée $(\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B},(A_\ell\otimes_\alpha B_m)_{(\ell,m)\in\mathcal{L}\times\mathcal{M}})$ sont donnés par $\varphi_{(\ell,m),(\ell',m')}=\varphi_{\ell,\ell'}\otimes_\alpha\varphi_{m,m'}$ pour $(\ell,m),(\ell',m')\in\mathcal{L}\times\mathcal{M}$ tels que $\ell\leq\ell'$ et $m\leq m'$ où $\varphi_{\ell,\ell'}$, $\varphi_{m,m'}$ sont les morphismes de structure de la $C^*$-algèbre graduée $(\mathfrak{A},(A_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{B},(B_m)_{m\in\mathcal{M}})$ respectivement. Plus precisement, si $\alpha_\ell\otimes\beta_m$, $\alpha_{\ell'}\otimes\beta_{m'}$ sont des tenseurs elémentaires de $A_\ell\otimes_\alpha B_m$, $A_{\ell'}\otimes_\alpha B_{m'}$ respectivement avec $\ell\leq\ell'$ et $m\leq m'$ alors le morphisme

$$\varphi_{\ell,\ell'}\otimes_\alpha\varphi_{m,m'}:A_{\ell'}\otimes_\alpha B_{m'}\to M(A_\ell\otimes_\alpha B_m)$$

est donné par

$$(\varphi_{\ell,\ell'}\otimes_\alpha\varphi_{m,m'})(\alpha_{\ell'}\otimes\beta_{m'})=\varphi_{\ell,\ell'}(\alpha_{\ell'})\otimes_\alpha\varphi_{m,m'}(\beta_{m'}):\alpha_\ell\otimes\beta_m\mapsto\alpha_{\ell'}\alpha_\ell\otimes\beta_{m'}\beta_m.$$

On peut voir facilement que les morphismes $\varphi_{(\ell,m),(\ell',m')}$ vérifient les conditions *a*) et *b*) de la proposition 2.5.1.

**Remarque 4.1.5.** Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ des semi-treillis qui chacun possède un plus petit élément noté $\ell_0$ et $m_0$ respectivement. Alors le semi-treillis produit $\mathcal{L}\times\mathcal{M}$ possède aussi un plus petit élément noté $(\ell_0,m_0)$.

Soit $(\mathfrak{A}\otimes_\alpha\mathfrak{B},(A_\ell\otimes_\alpha B_m)_{(\ell,m)\in\mathcal{L}\times\mathcal{M}})$ une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}\times\mathcal{M}$-graduée. On suppose que les morphismes de structure $\varphi_{\ell,\ell'}$ avec $\ell\leq\ell'$ et $\varphi_{m,m'}$ avec $m\leq m'$ de l'algèbre $(\mathfrak{A},(A_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{B},(B_m)_{m\in\mathcal{M}})$ respectivement vérifient $\varphi_{\ell,\ell'}^{-1}(A_\ell)=\{0\}$ et $\varphi_{m,m'}^{-1}(B_m)=\{0\}$. Alors, par le corollaire 2.5.4 les morphismes $\varphi_{\ell_0}:\mathfrak{A}\to M(A_{\ell_0})$ et $\varphi_{m_0}:\mathfrak{B}\to M(B_{m_0})$ sont injectifs.

D'après le corollaire 1.2.9 le morphisme

$$\varphi_{\ell_0}\otimes_{\min}\varphi_{m_0}:\mathfrak{A}\otimes_{\min}\mathfrak{B}\to M(A_{\ell_0}\otimes_{\min}B_{m_0})$$

est injectif.

On peut généraliser ces résultats par recurrence pour une famille finie de semi-treillis $(\mathcal{L}^k)_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$ et une famille finie de $C^*$-algèbres $(\mathfrak{A}^k)_{k=1}^n$ graduées par $\mathcal{L}^k$, $k \in \mathbb{N}$ respectivement.

## 4.2 Produits croisés

**Proposition 4.2.1.** *Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et soit $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée, munie d'une action continue d'un groupe localement compact $G$. Supposons que pour tout $i \in \mathcal{L}$ la $C^*$-algèbre $A_i$ est $G$-invariante i.e. stable par les automorphismes de $\mathfrak{A}$, $\alpha_g$ , $g \in G$.*

*Alors le produit croisé maximal $(\mathfrak{A}\rtimes_\alpha G, (A_i\rtimes_\alpha G)_{i\in\mathcal{L}})$ et le produit croisé reduit $(\mathfrak{A}\rtimes_{r,\alpha} G, (A_i\rtimes_{r,\alpha} G)_{i\in\mathcal{L}})$ sont des $C^*$-algèbres $\mathcal{L}$-graduées.*

*Démonstration.* On va faire la démonstration pour le produit croisé maximal puisque le même raisonment démontre que le produit croisé reduit est aussi une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée.

Soit $k \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_k = \{j \in \mathcal{L} | k \leq j\}$, $\mathcal{L}'_k = \{j \in \mathcal{L} | k \nleq j\}$. Puisque $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée par la proposition 2.4.1 on obtient que $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_k}} \oplus \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_k}}$. Par le corollaire 1.3.14 on a donc une suite exacte scindée des produits croisés maximaux,

$$0 \to \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_k}}\rtimes_\alpha G \xrightarrow{i_*} \mathfrak{A}\rtimes_\alpha G \underset{\sigma_*}{\overset{p_*}{\rightleftarrows}} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_k}}\rtimes_\alpha G \to 0.$$

Autrement dit on a

$$\mathfrak{A}\rtimes_\alpha G \simeq (\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}'_k}}\rtimes_\alpha G) \oplus (\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_k}}\rtimes_\alpha G)$$

On va démontrer que :

*i)* $h_k : A_k\rtimes_\alpha G \to \mathfrak{A}\rtimes_\alpha G$ est injectif pour tout $k \in \mathcal{L}$.

*ii)* La famille de $C^*$-algèbres $(A_i\rtimes_\alpha G)_{i\in\mathcal{L}}$ est linéairement indépendante,

*iii)* $(A_i\rtimes_\alpha G)(A_j\rtimes_\alpha G) \subset A_{i\wedge j}\rtimes_\alpha G$ , $\forall i, j \in \mathcal{L}$,

*iv)* $\displaystyle\bigcup_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}_\mathcal{L}} \mathfrak{A}_\mathcal{F}\rtimes_\alpha G \equiv \sum_{i\in\mathcal{L}} A_i\rtimes_\alpha G$ est dense dans $\mathfrak{A}\rtimes_\alpha G$.

*i)* Comme $A_k$ est un idéal de $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_k}}$ alors $A_k\rtimes_\alpha G$ est un idéal de $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_k}}\rtimes_\alpha G$ et on a

$$\begin{tikzcd} A_k\rtimes_\alpha G \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h_k"'] & \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_k}}\rtimes_\alpha G \arrow[d, "\sigma_*"] \\ & \mathfrak{A}\rtimes_\alpha G. \end{tikzcd}$$

*ii)* Soit $f \in \mathfrak{A} \rtimes_\alpha G$, $f = \sum_{i \in \mathcal{L}} f_i = 0$ avec $f_i \neq 0$ pour seulement un nombre fini de $i \in \mathcal{L}$. Notons $\Omega = \{j \in \mathcal{L} : f_j \neq 0\}$ le support de $f$. Supposons que $\Omega \neq \emptyset$ et soit $m \in \Omega$ un élément maximal alors $f_m \neq 0 \Rightarrow ||f_m|| \neq 0$. On a $\mathcal{L}_m \cap \Omega = \{m\}$ et puisque $p_*$ est un morphisme $||f_m|| \leq ||\sum_{i \in \mathcal{L}} f_i||$. Mais $\sum_{i \in \mathcal{L}} f_i = 0 \Rightarrow f_m = 0$, ce qui est absurde.

*iii)* Soient $i, j \in \mathcal{L}$ et soit $f_i \in C_c(G, A_i)$ , $f_j \in C_c(G, A_j)$ alors par la définition du produit dans l'algèbre involutive $C_c(G, \mathfrak{A})$, pour tout $s \in G$ on a $(f_i * f_j)(s) \in A_{i \wedge j}$. Donc $C_c(G, A_i) C_c(G, A_j) \subset C_c(G, A_{i \wedge j})$ et par continuité du produit on a $(A_i \rtimes_\alpha G)(A_j \rtimes_\alpha G) \subset (A_{i \wedge j} \rtimes_\alpha G)$.

*iv)* Par hypothese on a que l'algèbre $\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \equiv \sum_{i \in \mathcal{L}} A_i$ est dense dans la $C^*$-algèbre $\mathfrak{A}$. Puisque le produit croisé des limites inductives est la limite inductive des produits croisés on a *iv)*.

$\square$

**Remarque 4.2.2.** On reprend les hypothèses de la proposition 4.2.1. Les morphismes de structure de $\mathfrak{A}$, $\varphi_{i,j} : A_j \to M(A_i)$ avec $i \leq j$, sont équivariants. Suite à la proposition 1.3.12, on remarque que les morphismes de structure de la $C^*$ algèbre graduée $(\mathfrak{A} \rtimes_\alpha G, (A_i \rtimes_\alpha G)_{i \in \mathcal{L}})$ sont les morphismes

$$\varphi_{i,j}^\alpha : A_j \rtimes_\alpha G \to M(A_i \rtimes_\alpha G)$$

pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$ satisfaisant $\varphi_{i,j}^\alpha(f)g = f * g$ pour tout $f \in A_j \rtimes_\alpha G$, $g \in A_i \rtimes_\alpha G$.

Egalement, pour le produit croisé reduit $(\mathfrak{A} \rtimes_{r,\alpha} G, (A_i \rtimes_{r,\alpha} G)_{i \in \mathcal{L}})$ on remarque que ses morphismes de structure sont les morphismes

$$\varphi_{i,j}^{r,\alpha} : A_j \rtimes_{r,\alpha} G \to M(A_i \rtimes_{r,\alpha} G)$$

satisfaisant $\varphi_{i,j}^{r,\alpha}(f)g = f * g$ pour tout $f \in A_j \rtimes_{r,\alpha} G$, $g \in A_i \rtimes_{r,\alpha} G$.

**Remarque 4.2.3.** Soit $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i \in \mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée. On suppose que $\mathcal{L}$ a un plus petit élément qu'on note $\ell_0$ et que les morphismes de structure $\varphi_{k,\ell} : A_\ell \to M(A_k)$ satisfont $\varphi_{k,\ell}^{-1}(A_k) = \{0\}$. Alors, par le corollaire 2.5.4 on obtient que $\varphi_{\ell_0} : \mathfrak{A} \to M(A_{\ell_0})$ est injectif.

Soit $G$ un groupe localement compact agissant sur $\mathfrak{A}$ et préservent les $A_i$, notons $\alpha$ cette action. Par la proposition 4.2.1 on a que $\mathfrak{A} \rtimes_{r,\alpha} G$ est une $C^*$-algèbre graduée. Le morphisme équivariant $\varphi_{\ell_0}$ est injectif, alors par la proposition 1.3.12, le morphisme $\varphi_{\ell_0}^{r,\alpha} : \mathfrak{A} \rtimes_{r,\alpha} G \to M(A_{\ell_0} \rtimes_{r,\alpha} G)$ est injectif.

# Chapitre 5

# Propriétés des $C^*$-algèbres graduées

On suppose dans la suite qu'on se donne un semi-treillis $\mathcal{L}$ et une $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$.

## 5.1 Commutativité

**Proposition 5.1.1.** *La $C^*$-algèbre $\mathfrak{A}$ est commutative si et seulement si les composantes $A_i$ sont commutatifs pour tout $i \in \mathcal{L}$.*

*Démonstration.* C'est évident que si $\mathfrak{A}$ est une $C^*$-algèbre commutative alors toute sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A}$ est commutative. Donc $A_i$ est commutative pour tout $i \in \mathcal{L}$.

Supposons que $A_i$ est commutatif pour tout $i \in \mathcal{L}$. Par densité, il suffit de montrer que pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ et $x_i \in A_i$, $y_j \in A_j$ on a $x_i y_j = y_j x_i$. Mais $x_i y_j = \varphi_{i\wedge j,i}(x_i)\varphi_{i\wedge j,j}(y_j)$ et comme $A_{i\wedge j}$ est une $C^*$-algèbre commutative, l'algèbre de multiplicateurs $M(A_{i\wedge j})$ l'est aussi, donc $x_i y_j = \varphi_{i\wedge j,i}(x_i)\varphi_{i\wedge j,j}(y_j)$ $= \varphi_{i\wedge j,j}(y_j)\varphi_{i\wedge j,i}(x_i) = y_j x_i$.

□

Etudions le spectre de $C^*$-algèbres graduées commutatives.

**Remarque 5.1.2.** Soit $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée et commutative. Soit $i \in \mathcal{L}$ et $\chi_i$ un caractère de $A_i$. Notons $\widetilde{\chi_i}$ son extension dans l'algèbre des multiplicateurs $M(A_i)$. Alors, on définit de façon unique un caractère de $\mathfrak{A}$ par $\chi = \widetilde{\chi_i} \circ \pi_i$ où $\pi_i = \varphi_i \circ p_i$ est le morphisme $\mathfrak{A} \to M(A_i)$. On obtient ainsi une application continue injective $\psi_i : \mathrm{Sp}(A_i) \to \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$.

Soit $\chi$ un caractère de $\mathfrak{A}$ et supposons qu'il existe $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $\chi = \widetilde{\chi_i} \circ \pi_i = \widetilde{\chi_j} \circ \pi_j$. On peut supposer que $i \not\leq j$. Alors $\pi_{i|_{A_j}} = 0$ donc $\widetilde{\chi_i} \circ \pi_{i|_{A_j}} = 0$

or $\widetilde{\chi_j} \circ \pi_{j_{|A_j}} = \chi_j \neq 0$ d'où la contradiction. Autrement dit les images des $\psi_i$ sont disjoints.

**Proposition 5.1.3.** *Soit* $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$ *une* $C^*$*-algèbre graduée et commutative. Si* $\mathcal{L}$ *est un bon semi-treillis alors*

$$Sp(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \psi_i(Sp(A_i)).$$

*Démonstration.* Soit $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$. On considère l'ensemble $I = \{i \in \mathcal{L}; \chi_{|A_i} \neq 0\}$. On remarque que $I$ est un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$ car si $i, j \in I$ prenons $a_i \in A_i$, $a_j \in A_j$ tels que $\chi(a_i) \neq 0$ et $\chi(a_j) \neq 0$, alors puisque $\chi$ est un morphisme de $C^*$-algèbres on a $\chi(a_i a_j) = \chi(a_i)\chi(a_j) \neq 0$ donc $\chi_{|A_{i \wedge j}} \neq 0$. Par hypothèse et par la remarque 2.1.2 l'ensemble $I$ admet un plus petit élément qu'on note $i_0$. On pose $\chi_{i_0} = \chi_{|A_{i_0}}$, alors $\chi_{i_0} \neq 0$. On va montrer que $\chi = \psi_{i_0}(\chi_{i_0})$. Pour cela il suffit de montrer que pour tout $j \in \mathcal{L}$ et $a_j \in A_j$, $\chi(a_j) = \psi_{i_0}(\chi_{i_0})(a_j)$ car alors par linéarité l'égalité sera vraie pour tout $x \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ et par densité pour tout $x \in \mathfrak{A}$.

Soit $j \in \mathcal{L}$. Si $i_0 \not\leq j$, puisque $i_0$ est le plus petit élément de $I$, alors $j \notin I$ et par consequent $\chi_{|A_j} = 0$. D'autre part si $a_j \in A_j$, alors $\psi_{i_0}(\chi_{i_0})(a_j) = \widetilde{\chi_{i_0}} \circ \pi_{i_0}(a_j) = 0$.

Si $i_0 \leq j$, puisque $\chi_{i_0} \neq 0$ il existe $a_{i_0} \in A_{i_0}$ tel que $\chi_{i_0}(a_{i_0}) = \chi(a_{i_0}) = 1$ et comme $\pi_{i_0}(a_{i_0}) = a_{i_0}$ alors $\psi_{i_0}(\chi_{i_0})(a_{i_0}) = 1$. Soit $a_j \in A_j$, alors

$$\begin{aligned}\psi_{i_0}(\chi_{i_0})(a_j) &= \psi_{i_0}(\chi_{i_0})(a_j)\psi_{i_0}(\chi_{i_0})(a_{i_0}) = \psi_{i_0}(\chi_{i_0})(a_j a_{i_0}) = \chi_{i_0}(a_j a_{i_0}) \\ &= \chi(a_j a_{i_0}) = \chi(a_j)\chi(a_{i_0}) = \chi(a_j)\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

**Remarque 5.1.4.** Soit $\mathcal{L}$ un bon semi-treillis et $(\mathfrak{A}, (A_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$ une $C^*$-algèbre graduée, commutative. On suppose que les morphismes de structure $\varphi_{i,j}$ sont non-dégénérés pour tout $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$. On a $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} \subset \mathfrak{A}$. Supposons que $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, autrement dit que tout élément de $\mathcal{L}$ est majoré par un élément de $\mathcal{M}$. A l'inclusion $\iota : \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} \to \mathfrak{A}$ correspond alors l'application continue $\Psi : \mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{Sp}(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}})$ donnée par $\chi \mapsto \chi \circ \iota$. Etudions cette application à la lumière des décompositions $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \psi_i(\mathrm{Sp}(A_i))$ et comme un sous-semi-treillis d'un bon semi-treillis est un bon semi-treillis écrivons de même $\mathrm{Sp}(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}) = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} \rho_m(\mathrm{Sp}(A_m))$.

Soit $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$. Il existe un unique $i \in \mathcal{L}$ tel que $\chi = \psi_i(\chi_i) \in \psi_i(\mathrm{Sp}(A_i))$. Soit $\mathcal{L}_i = \{j \in \mathcal{L}; i \leq j\}$. Comme $\chi_{|A_i} \neq 0$ et les morphismes $\varphi_{i,j}$ sont non-dégénérés pour tout $j \in \mathcal{L}$ tel que $i \leq j$, $\chi$ est non nul sur $A_j A_i$ donc $\chi_{|A_j} \neq 0$.

En d'autres termes on a $\mathcal{L}_i = \{j \in \mathcal{L}; i \leq j\} = \{j \in \mathcal{L}; \chi_{|A_j} \neq 0\}$. Posons $\mathcal{M}_i = \mathcal{M} \cap \mathcal{L}_i = \{m \in \mathcal{M}; i \leq m\} = \{j \in \mathcal{M}; \chi_{|A_j} \neq 0\}$, alors $\mathcal{M}_i$ est un sous-semi-treillis finissant de $\mathcal{M}$ . Puisque $\mathcal{L}$ est un bon semi-treillis, $\mathcal{M}$ admet un plus petit élément (remarque 2.1.2). Soit $m_0 \equiv m(i) = \inf \mathcal{M}_i$. Alors $\chi_{|A_{m_0}} = \chi_{m_0} \neq 0$.

Le morphisme $\varphi_{i,m_0} : A_{m_0} \to M(A_i)$ détermine une application continue $\Psi_i : \mathrm{Sp}(A_i) \to \mathrm{Sp}(A_{m_0})$ qui est donnée par $\Psi_i(\chi_i) = \widetilde{\chi_i} \circ \varphi_{i,m_0}$. Notons $\widetilde{\varphi_{i,m_0}}$ l'extension de $\varphi_{i,m_0}$ à l'algèbre des multiplicateurs $M(A_{m_0})$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(A_{m_0}) & \longrightarrow & M(A_i) \end{array}$$

est commutatif (on le vérifie sur les composantes de $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}$). Par conséquent le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(A_i) & \xrightarrow{\Psi_i} & \mathrm{Sp}(A_{m_0}) \\ {\scriptstyle \psi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{m_0}} \\ \mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Sp}(\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{M}}}) \end{array}$$

est commutatif. En d'autres termes l'application $\Psi$ est entierement décrite par l'application $\Psi_i$.

## 5.2 Nucléarité

**Proposition 5.2.1.** *La $C^*$-algèbre $\mathfrak{A}$ est nucléaire si et seulement si les composantes $A_i$ sont nucléaires pour tout $i \in \mathcal{L}$.*

*Démonstration.* Supposons que pour tout $i \in \mathcal{L}$, $A_i$ est nucléaire. Soit $B$ une $C^*$-algèbre. Par le lemme 4.1.1, $(\mathfrak{A} \otimes_{\max} B, (A_i \otimes_{\max} B)_{i \in \mathcal{L}})$ et $(\mathfrak{A} \otimes_{\min} B, (A_i \otimes_{\min} B)_{i \in \mathcal{L}})$ sont des $C^*$-algèbres $\mathcal{L}$-graduées.

Notons $\rho : \mathfrak{A} \otimes_{\max} B \to \mathfrak{A} \otimes_{\min} B$ l'homomorphisme naturel. Pour tout $i \in \mathcal{L}$, $\rho(A_i \otimes_{\max} B) \subset A_i \otimes_{\min} B$. Donc $\rho$ est un homomorphisme de $C^*$-algèbres graduées. Notons $\rho_i$ la restriction de $\rho$ sur $A_i \otimes_{\max} B$. Par hypothèse $\rho_i : A_i \otimes_{\max} B \to A_i \otimes_{\min} B$ est un isomorphisme de $C^*$-algèbres donc en appliquant la proposition 2.3.2 on a que $\rho$ est un isomorphisme.

Supposons que $\mathfrak{A}$ est une $C^*$-algèbre nucléaire. Soit $i \in \mathcal{L}$, alors $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}}$ qui est un quotient de $\mathfrak{A}$ est nucléaire. Donc $A_i$ qui est un idéal fermé de $\overline{\mathfrak{A}_{\mathcal{L}_i}}$ est nucléaire. $\square$

## 5.3 Exactitude

**Proposition 5.3.1.** *La $C^*$-algèbre $\mathfrak{A}$ est exacte si et seulement si $A_i$ est exacte pour tout $i \in \mathcal{L}$.*

*Démonstration.* Si $\mathfrak{A}$ est exacte, comme pour tout $i \in \mathcal{L}$, $A_i$ est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathfrak{A}$, alors $A_i$ est exacte.

Supposons que $A_\ell$ est exacte pour tout $\ell \in \mathcal{L}$. Soit $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ une suite exacte de $C^*$-algèbres. Par le lemme 4.1.1 les $C^*$-algèbres $(A \otimes_{\min} \mathfrak{A}, (A \otimes_{\min} A_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$, $(B \otimes_{\min} \mathfrak{A}, (B \otimes_{\min} A_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$ et $(C \otimes_{\min} \mathfrak{A}, (C \otimes_{\min} A_\ell)_{\ell \in \mathcal{L}})$ sont $\mathcal{L}$-graduées. On vérifie facilement que les morphismes induits $A \otimes_{\min} \mathfrak{A} \xrightarrow{i \otimes_{\min} Id_{\mathfrak{A}}} B \otimes_{\min} \mathfrak{A}$ et $B \otimes_{\min} \mathfrak{A} \xrightarrow{p \otimes_{\min} Id_{\mathfrak{A}}} C \otimes_{\min} \mathfrak{A}$ sont des morphismes de $C^*$-algèbres graduées. Comme $A_\ell$ est exacte la suite

$$0 \to A \otimes_{\min} A_\ell \xrightarrow{i \otimes_{\min} Id_{A_\ell}} B \otimes_{\min} A_\ell \xrightarrow{p \otimes_{\min} Id_{A_\ell}} C \otimes_{\min} A_\ell \to 0$$

est exacte donc par le corollaire 3.2.1 la suite

$$0 \to A \otimes_{\min} \mathfrak{A} \xrightarrow{i \otimes_{\min} Id_{\mathfrak{A}}} B \otimes_{\min} \mathfrak{A} \xrightarrow{p \otimes_{\min} Id_{\mathfrak{A}}} C \otimes_{\min} \mathfrak{A} \to 0$$

est exacte. Cela prouve que $\mathfrak{A}$ est exacte.

□

## 5.4 K-théorie

L'inclusion naturelle de $A_i \hookrightarrow \mathfrak{A}$ pour tout $i \in \mathcal{L}$ définit un morphisme de groupes $K$, $K_k(A_i) \to K_k(\mathfrak{A})$, $k = 0, 1$. Donc on en deduit un morphisme $\Phi$ des groupes $K_0$ et $K_1$,

$$\Phi : \bigoplus_{i \in \mathcal{L}} K_k(A_i) \to K_k(\mathfrak{A}),\ k = 0, 1.$$

**Proposition 5.4.1.** $\Phi$ *est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{\mathcal{L}}$. On va montrer par recurrence sur le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$ que $\Phi_{\mathcal{F}} : \bigoplus_{i \in \mathcal{F}} K_k(A_i) \to K_k(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})$, $k = 0, 1$ est un isomorphisme de groupes.

C'est clair si $\mathcal{F}$ possède un seul élément. Supposons que $\mathcal{F}$ a au moins deux éléments et que pour tout sous-semi-treillis distinct de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$ le résultat est vrai.

Soit $\ell \neq \min \mathcal{F}$, puisque $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ est une $C^*$-algèbre $\mathcal{F}$-graduée, par la proposition 2.4.1 on a une suite exacte scindée de $C^*$-algèbres

$$0 \to \mathfrak{A}_{\mathcal{F}'_\ell} \xrightarrow{i_\ell} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \underset{\sigma_\ell}{\overset{p_\ell}{\rightleftarrows}} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}_\ell} \to 0.$$

Donc, on en deduit une suite exacte scindée de groupes

$$0 \to K_k(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}'_\ell}) \xrightarrow{i} K_k(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) \underset{\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} K_k(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}_\ell}) \to 0,\ k = 0, 1,$$

et on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_k(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}'_\ell}) \arrow[r, "i"] & K_k(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) \arrow[r, shift left, "p"] & K_k(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}_\ell}) \arrow[l, shift left, "\sigma"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{j \in \mathcal{F}'_\ell} K_k(A_j) \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{F}'_\ell}"] \arrow[r, "i'"] & \bigoplus_{j \in \mathcal{F}} K_k(A_j) \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{F}}"] \arrow[r, shift left, "p'"] & \bigoplus_{j \in \mathcal{F}_\ell} K_k(A_j) \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{F}_\ell}"'] \arrow[l, shift left, "\sigma'"] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse de recurrence, on a que $\Phi_{\mathcal{F}'_\ell}$ et $\Phi_{\mathcal{F}_\ell}$ sont des isomorphismes, donc $\Phi_{\mathcal{F}}$ l'est aussi.

Puisque la $K$-théorie preserve la limite inductive, on a le même résultat pour un semi-treillis infini $\mathcal{L}$. □

# Chapitre 6

# Exemples de $C^*$-algèbres graduées

## 6.1 Semi-treillis de sous-groupes

Soit $G$ un groupe localement compact. L'ensemble $\mathcal{G}$ des sous-groupes fermés de $G$ est un treillis (complet) pour l'inclusion : si $(H_i)_{i\in I}$ est une famille *quelconque* de sous-groupes fermés de $G$, leur intersection $\bigcap_{i\in I} H_i$ est bien le plus grand élément de $\{H \in \mathcal{G};\ \forall i \in I,\ H \subset H_i\}$ ; le plus petit élément de $\{H \in \mathcal{G};\ \forall i \in I,\ H_i \subset H\}$ est l'adhérence du sous-groupe engendré par les $H_i$.

Pour $H \in \mathcal{G}$, posons $A_H = C_0(G/H)$. Si $H, K \in \mathcal{G}$ sont tels que $K \subset H$, toute classe à gauche $x \in G/K$ est contenue dans une classe à gauche $p_{K,H}(x) \in G/H$, d'où une application continue $p_{K,H} : G/K \to G/H$. On en déduit un homomorphisme $\varphi_{K,H} : A_H = C_0(G/H) \to C_b(G/K) = M(A_K)$.

**Lemme 6.1.1.** *Soient $H, K \in \mathcal{G}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *On a $\varphi_{H\cap K,H}(A_H)\varphi_{H\cap K,K}(A_K) \subset A_{H\cap K}$.*

(ii) *L'application $q : x \mapsto (p_{H\cap K,H}(x), p_{H\cap K,K}(x))$ de $G/(H \cap K)$ dans $G/H \times G/K$ est fermée.*

(iii) *Le sous-ensemble $HK = \{xy;\ x \in H,\ y \in K\}$ est fermé dans $G$ et l'application produit $H \times K \to HK$, $(x, y) \mapsto xy$, est ouverte.*

(iv) *$p_H(K)$ est fermé (dans $G/H$) et l'application $K \to p_H(K)$ obtenue par restriction de $p_H$ est ouverte.*

(v) *$p_K(H)$ est fermé (dans $G/K$) et l'application $H \to p_K(H)$ obtenue par restriction de $p_K$ est ouverte.*

*Démonstration.* Tout d'abord on remarque que $q$ est une application injective.

Montrons $(ii) \Rightarrow (i)$. Puisque $q$ est continue, injective et fermée, c'est une application propre donc pour tout $C$ sous-espace compact de $G/H \times G/K$, $q^{-1}(C)$ est un sous-espace compact de $G/(H \cap K)$. Soit $f \in C_0(G/H)$, $g \in C_0(G/K)$ et supposons que $||f||_\infty \leq 1$, $||g||_\infty \leq 1$, on va montrer que $fg = \varphi_{H\cap K,H}(f)\varphi_{H\cap K,K}(g) \in C_0(G/(H \cap K))$. On doit montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ le sous ensemble $M := \{x \in G/(H\cap K) : |(fg)(x)| \geq \varepsilon\}$ de $G/(H\cap K)$ est compact.

Soient $C_1 = \{x \in G/H : |f(x)| \geq \varepsilon\}$, $C_2 = \{x \in G/K : |g(x)| \geq \varepsilon\}$. Par hypothèse, ce sont des sous-ensembles compacts de $G/H$, $G/K$. En utilisant le fait que $\varphi_{H\cap K,H}$ et $\varphi_{H\cap K,K}$ sont des morphismes de $C^*$-algèbres on a $M \subset q^{-1}(C_1 \times C_2)$. Puisque $C_1 \times C_2$ est compact et $q$ est propre, alors $q^{-1}(C_1 \times C_2)$ est compact et par suite $M$ est compact.

Montrons $(i) \Rightarrow (ii)$. Montrons en fait que $q$ est propre. Soit $C$ un compact de $G/H \times G/K$ et montrons que $q^{-1}(C)$ est compact. Il existe $C_1$, $C_2$ compacts de $G/H$ et $G/K$ tels que $C \subset C_1 \times C_2$. Comme $q^{-1}(C)$ est un fermé il suffit de montrer que $q^{-1}(C_1 \times C_2)$ est un compact.

Soit $f \in C_0(G/H)$ telle que $f = 1$ sur $C_1$ et soit $g \in C_0(G/K)$ telle que $g = 1$ sur $C_2$. Par hypothèse on a $fg = \varphi_{H\cap K,H}(f)\varphi_{H\cap K,K}(g) \in C_0(G/(H \cap K))$. L'ensemble $S = \{x \in G/(H \cap K) : (fg)(x) = 1\}$ est un compact de $G/(H \cap K)$, or $q^{-1}(C_1 \times C_2) \subset S$ donc $q^{-1}(C_1 \times C_2)$ est compact.

Montrons que $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Soit $r : G \to G/H \times G/K$ l'application $x \mapsto (p_H(x), p_K(x))$. Puisque $q$ est injective, $p : G \to G/(H\cap K)$ est surjective et ouverte et $r = q \circ p$, on a les équivalences suivantes :

a) $q : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$ est fermée.

b) $q(G/(H\cap K))$ est fermé et $G/(H\cap K) \to q(G/(H\cap K))$ est un homéomorphisme.

c) $r(G)$ est fermé et $r : G \to r(G)$ est ouverte.

Rappelons d'abord qu'un *carré cartésien* (d'espaces topologiques) est un carré commutatif d'applications continues

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

tel que l'application $X \to Y \times_T Z$ déduite soit un homéomorphisme de $X$ sur le produit fibré $\{(y, z) \in Y \times Z; g(y) = f(z)\}$.

On considére le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & G \times G \arrow[d, "t"] \\ G/(H \cap K) \arrow[r, "q"'] & G/H \times G/K \end{tikzcd}$$

Puisque les applications $p_H : G \to G/H$ et $p_K : G \to G/K$ sont ouvertes, l'application $t : G \times G \to G/H \times G/K$ est ouverte. En d'autres termes l'application naturelle $(G \times G)/(H \times K) \to G/H \times G/K$ est un homéomorphisme.

$$\begin{aligned} \text{On a } r(G) &= q(G/(H \cap K)) \\ &= \{(x, y) \in G/H \times G/K;\ \exists g \in G : x = gH,\ y = gK\}, \text{ alors} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^{-1}(r(G)) &= \{(g_1, g_2) \in G \times G;\ \exists g \in G, \exists h \in H,\ k \in K : g_1 = gh,\ g_2 = gk\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G \times G;\ \exists h \in H,\ k \in K : g_1^{-1} g_2 = h^{-1} k\} \\ &= \{(g_1, g_2) \in G \times G : g_1^{-1} g_2 \in HK\}. \end{aligned}$$

On en déduit que $HK$ est fermé si et seulement si $t^{-1}(r(G))$ est fermé dans $G \times G$, autrement dit si et seulement si $r(G)$ est fermé.

Remarquons que le produit fibré de $G$ par $t^{-1}(r(G))$ au-dessus de $r(G)$ s'écrit

$$\begin{aligned} G \times_{r(G)} t^{-1}(r(G)) &= G \times_{G/H \times G/K} (G \times G) \\ &= \{(x, y, z) \in G \times G \times G; r(x) = t(y, z)\} \\ &= \{(x, y, z) \in G \times G \times G; x^{-1} y \in H,\ x^{-1} z \in K\} \end{aligned}$$

Pour $(g, h, k) \in G \times H \times K$ posons $s(g, h, k) = g$ et $\varphi(g, h, k) = (gh, gk) \in t^{-1}(r(G))$. L'application $\psi : G \times H \times K \to G \times_{r(G)} t^{-1}(r(G))$ donné par $(g, h, k) \mapsto (g, gh, gk)$ est un homéomorphisme. Donc le diagramme suivant est un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G \times H \times K \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr] & t^{-1}(r(G)) \arrow[d, "t_{r(G)}"] \\ G \arrow[r, "r"'] & r(G). \end{tikzcd}$$

Les applications du diagramme ci-dessus sont surjectives. De plus $t_{r(G)}$ est ouverte car $t$ l'est. Puisque $G \times H \times K$ est le produit fibré $G \times_{r(G)} t^{-1}(r(G))$ alors $r$ est ouverte si et seulement si $\phi$ l'est. L'application $t' : t^{-1}(r(G)) \to G \times HK$ donnée par $(g_1, g_2) \mapsto (g_1, g_1^{-1} g_2)$ est un homéomorphisme. Donc l'application $\phi' = t' \circ \phi : G \times H \times K \to G \times HK$ définie par $\phi'(g,h,k) = (g, hk)$ est ouverte si et seulement si l'application $H \times K \to HK$ est ouverte d'où l'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.

On va montrer que $(iii) \Leftrightarrow (iv)$. Tout d'abord on remarque que

$$\begin{aligned} p_H^{-1} p_H(K) &= \{g \in G : p_H(g) \in p_H(K)\} = \{g \in G;\, \exists k \in K,\, gH = kH\} \\ &= \{g \in G;\, \exists k \in K,\, \exists h \in H : g = kh\} = KH. \end{aligned}$$

Donc $p_H(K)$ est fermé dans $G/H$ si et seulement si $KH$ est fermé et par passage aux éléments inverses de $KH$ on a que $p_H(K)$ fermé si et seulement si $HK$ est fermé.

D'autre part, l'application $K \times H \to K \times_{p_H(K)} KH$ donnée par $(k,h) \mapsto (k, kh)$ est un homéomorphisme. Donc on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} K \times H \arrow[r] \arrow[d] & KH \arrow[d] \\ K \arrow[r] & p_H(K). \end{tikzcd}$$

Donc l'application $K \to p_H(K)$ est ouverte si et seulement si l'application $K \times H \to KH$ est ouverte, ce qui a lieu si et seulement si l'application $H \times K \to HK$ est ouverte.

Par symmetrie on obtient aussi que $(iii) \Leftrightarrow (v)$.

□

Donnons-nous un sous-semi-treillis $\mathcal{L}$ de $\mathcal{G}$ et supposons que tout $H, K \in \mathcal{L}$ satisfont les conditions équivalentes du lemme 6.1.1. On déduit du théorème 3.1.2 :

**Proposition 6.1.2.** *Il existe une algèbre graduée $(\mathfrak{A}, (A_H)_{H \in \mathcal{L}})$ dont les morphismes de structure soient les $\varphi_{K,H}$ définis ci-dessus.*

□

L'algèbre des multiplicateurs de $C_0(G)$ est l'algèbre $C_b(G)$ des fonctions continues bornées sur $G$.

Pour $H \in \mathcal{L}$. Notons $p_H : G \to G/H$ l'application quotient. L'application $f \mapsto f \circ p_H$ identifie $C_0(G/H)$ à une sous-$C^*$-algèbre de $C_b(G)$.

On obtient des morphismes $\varphi_H$ qui sont non-dénégérés pour tout $H \in \mathcal{L}$ donc ils se prolongent à des morphismes $\widetilde{\varphi_H}$ définis sur l'algèbre de multiplicateurs $C_b(G/H)$. Il est clair que $\varphi_H = \widetilde{\varphi_K} \circ \varphi_{K,H}$ pour tout $H, K \in \mathcal{L}$ tels que $K \subset H$. Ceci implique que $\varphi_H(f)\varphi_K(g) = \varphi_{H \cap K}(fg)$ pour tout $K, H \in \mathcal{L}$ et $f \in C_0(G/H), g \in C_0(G/K)$. On en deduit un homomorphisme $\varphi : \mathfrak{A} \to C_b(G)$.

**Proposition 6.1.3.** *L'homomorphisme $\varphi : \mathfrak{A} \to C_b(G)$ est injectif si et seulement si, pour tout $H, K \in \mathcal{L}$ tels que $K \subset H$ et $H \neq K$ l'espace quotient $H/K$ n'est pas compact.*

Nous aurons besoin d'un lemme :

**Lemme 6.1.4.** *Soient $K, H$ deux sous-groupes de $G$ avec $K \subset H$.*

a) *Si $H/K$ est compact on a $\varphi_{K,H}(C_0(G/H)) \subset C_0(G/K)$.*

b) *Si $H/K$ n'est pas compact on a $\varphi_{K,H}(C_0(G/H)) \cap C_0(G/K) = \{0\}$.*

Pour cela on démontre le lemme suivant :

**Lemme 6.1.5.** *Soit $G$ un groupe localement compact et soient $H$ et $K$ des sous-groupes fermés de $G$ tels que $K \subset H$.*

a) *Si $H/K$ est compact, l'application $p_{K,H}$ est propre.*

b) *Si $H/K$ n'est pas compact, pour tout $a \in G/H$ la partie $p_{K,H}^{-1}(\{a\})$ n'est pas relativement compacte dans $G/K$.*

*Démonstration.* a) Soit $C$ une partie compacte de $G/H$, puisque $G$ est localement compact et l'application $p_H$ est ouverte et surjective, il existe une partie compacte $A$ de $G$ telle que $p_H(A) = C$. On a $p_{K,H}^{-1}(C) = \{ax;\ a \in A,\ x \in H/K\}$, c'est l'image du compact $A \times H/K$, donc une partie compacte de $G/K$.

b) Soit $g \in G$ dont la classe est $a$, l'application $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme de $G/K$ qui envoie $H/K$ dans $p_{K,H}^{-1}(\{a\})$. Or, comme $H/K$ est fermé dans $G/K$ et n'est pas compact, il n'est pas relativement compact.

□

*Démonstration du lemme 6.1.4.*

a) Soit $f \in C_0(G/H)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in G/K;\ |f \circ p_{K,H}(x)| \geq \varepsilon\} = p_{K,H}^{-1}(\{x \in G/H;\ |f(x)| \geq \varepsilon\})$ est compact, donc $f \circ p_{K,H} \in C_0(G/K)$.

b) Soit $f \in C_0(G/K) \cap \varphi_{K,H}(C_0(G/H))$. Pour tout $a \in G/H$, l'application $f$, constante sur $p_{K,H}^{-1}(\{a\})$, y est donc nulle.

□

*Démonstration de la proposition 6.1.3.* S'il existe $H, K$ avec $K \subset H$, $H \neq K$ et $H/K$ compact, alors pour $f \in C_0(G/H)$ on a

$$\varphi(f - \varphi_{K,H}(f)) = \varphi_H(f) - \varphi_K(\varphi_{K,H}(f)) = 0,$$

donc $\varphi$ n'est pas injective.

Supposons inversement que pour tout $H, K \in \mathcal{L}$ tels que $K \subset H$ et $H \neq K$ l'espace quotient $H/K$ n'est pas compact. Nous distinguons trois cas :

a) Si $\{e\} \in \mathcal{L}$. Ce cas résulte immédiatement du lemme 6.1.4 et de la prop. 2.5.3.

b) Si aucun $H \in \mathcal{L}$ n'est compact, on pose $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\{e\}\}$ et on revient au premier cas.

c) S'il existe $H \in \mathcal{L}$ avec $H$ compact, alors pour tout $K \in \mathcal{L}$, l'espace $H/H \cap K$ est compact. Cela n'est possible que si $H \cap K = H$. Donc $H$ est le plus petit élément de $\mathcal{L}$. Par a prop. 2.5.3, l'application $\pi_H : \mathfrak{A} \to C_b(G/H) \subset C_b(G)$ est injective.

□

## 6.2 Exemple non-commutatif

On en déduit que si on a un semi-treillis de sous-groupes fermés vérifiant les conditions du lemme 6.1.1 et de la proposition 6.1.3, les sous-$C^*$-algèbres $C_0(G/H) \rtimes G \subset \mathbb{B}(L^2(G))$ forment une sous-$C^*$-algèbre de $\mathbb{B}(L^2(G))$ graduée (à l'aide de la proposition 4.2.1).

**Exemple 6.2.1.** Soit $X$ un espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{G}$ le treillis pour l'inclusion de tous les sous-espaces vectoriels de $X$. En dimension finie, un sous-espace vectoriel est fermé et toute application linéaire et surjective est ouverte. Donc la condition $(iii)$ du lemme 6.1.1 est satisfaite et on a pour tout $Y, Z \in \mathcal{G}$ que $C_0(X/Y)C_0(X/Z) \subset C_0(X/(Y \cap Z))$. Par la proposition 6.1.2, on a pour tout sous-semi-treillis $\mathcal{L}$ de $\mathcal{G}$ une $C^*$-algèbre graduée

$$\mathfrak{A} = \overline{\bigoplus_{Y \in \mathcal{L}} C_0(X/Y)}.$$

De plus, un espace vectoriel n'est pas compact, donc la condition $b)$ du lemme 6.1.5 est aussi satisfaite et on peut considerer $\mathfrak{A}$ comme une sous-$C^*$-algèbre de $C_b(X) = M(C_0(X)) \subset \mathbb{B}(L^2(X))$ où la deuxième inclusion est donnée par l'application qui à une fonction $u \in C_b(X)$ associe un opérateur de multiplication par $u$ défini sur $L^2(X)$.

On remarque que $\mathfrak{A}$ est stable par translations. On considère le produit croisé $\mathfrak{A} \rtimes X$ pour l'action continue de $X$ donnée par les translations. Par la proposition 4.2.1 ce produit croisé est aussi une $C^*$-algèbre $\mathcal{G}$-graduée *i.e.*

$$\mathfrak{A} \rtimes X = \overline{\bigoplus_{Y \in \mathcal{L}} (C_0(X/Y) \rtimes X)}.$$

En appliquant une nouvelle fois la proposition 6.1.3 et par l'exemple 1.3.4 on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \rtimes X = \overline{\bigoplus_{Y \in \mathcal{L}} (C_0(X/Y) \rtimes X)} & \subset M(C_0(X) \rtimes X) = M(\mathbb{K}(L^2(X))) \\ = \mathbb{B}(L^2(X)). & \end{aligned}$$

En d'autres termes $\mathfrak{A} \rtimes X$ est aussi une $C^*$-algèbre d'opérateurs définis sur l'espace de Hilbert $L^2(X)$.

L'exemple précedent est une autre approche du produit croisé considéré et étudié par M. Damak et V. Georgescu dans [15] et par V. Georgescu et A. Iftimovici dans [18] (voir en particulier théorème 3.12).

## 6.3 Exemples commutatifs

**Exemple 6.3.1.** On se donne un plan $\mathcal{P}$ et $n$ droites $\delta_i$, $i = 1, ..., n$ de $\mathcal{P}$. On définit $n$ formes linéaires $f_i$, $i = 1, ..., n$ de $\mathcal{P}$ telles que $\ker f_i = \delta_i$, $i = 1, ..., n$. On a un treillis d'espaces vectoriels $\mathcal{F}' = \{\{0\}, \delta_1, ..., \delta_n, \mathcal{P}\}$. Par l'exemple précedent on a une $C^*$-algèbre $\mathcal{F}'$-graduée :

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{Y \in \mathcal{F}'} C_0(\mathcal{P}/Y) \subset C_b(\mathcal{P}).$$

On se propose de déterminer le spectre de la $C^*$-algèbre commutative et unifère $\mathfrak{B}$.

On commence par traiter le cas $n = 1$. Alors le treillis $\mathcal{F}' = \{\{0\}, \delta_1, \mathcal{P}\}$ et l'algèbre $\mathfrak{B} = C_0(\mathcal{P}) \oplus C_0(\mathcal{P}/\delta_1) \oplus \mathbb{C}$.

On considère le sous-treillis de $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}_1 = \{\{0\}, \delta_1\}$. Alors, on a un idéal $\mathfrak{B}_1 = C_0(\mathcal{P}) \oplus C_0(\mathcal{P}/\delta_1) \subset C_b(\mathcal{P})$. Par le théorème de Gelfand-Naimark on a $\mathfrak{B}_1 \simeq C_0(\mathrm{Sp}\,\mathfrak{B}_1)$.

Idéntifions $\mathcal{P}$ à $\mathbb{R}^2$ et $\delta_1$ à l' "axe des x" (*i.e.* $\{(x, y);\, y = 0\}$). Alors un élément de $C_0(\mathcal{P}/\delta_1)$ est de la forme $(x, y) \mapsto g(y)$ où $g \in C_0(\mathbb{R})$. Posons $\mathbb{T} = P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ qui est homéomorphe au cercle. On a alors les inclusions $\psi_0 : C_0(\mathcal{P}) \hookrightarrow C_0(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ et $\psi_{\delta_1} : C_0(\mathcal{P}/\delta_1) \hookrightarrow C_0(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ données par :

$$\psi_0(f) : (x, y) \mapsto \begin{cases} f(x, y) \text{ si } x \in \mathbb{R} \\ 0 \text{ si } x = \infty \end{cases} \text{ et } \psi_{\delta_1}(g) : (x, y) \mapsto g(y).$$

On vérifie facilement que les morphismes $\psi_0$ et $\psi_{\delta_1}$ satisfont les hypothèses de la proposition 2.3.3, *i.e.*

$$\psi_{0\wedge\delta_1}(fg) = \psi_0(fg) = \psi_0(f)\psi_{\delta_1}(g), \forall f \in C_0(\mathcal{P}), g \in C_0(\mathcal{P}/\delta_1),$$

où le produit $fg = \varphi_{0,0}(f)\varphi_{0,\delta_1}(g)$ est donné par $(fg)(x, y) = f(x, y)g(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$. Donc il existe un unique homomorphisme $\psi : \mathfrak{B}_1 \to C_0(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ dont la restriction à $C_0(\mathcal{P})$ et $C_0(\mathcal{P}/\delta_1)$ soit $\psi_0$ et $\psi_{\delta_1}$ respectivement. De plus, comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook, "\varphi"'] & C_0(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \arrow[dl] \\ C_b(\mathcal{P}). & \end{tikzcd}$$

est commutatif, le morphisme $\psi$ est injectif.

L'algèbre $\mathfrak{B}$ est obtenue en adjoignant une unité à $\mathfrak{B}_1$, *i.e.* $\mathfrak{B} = \widetilde{\mathfrak{B}_1}$ et le morphisme $\psi$ s'étend de manière unique à un morphisme $\widetilde{\psi} : \mathfrak{B} \to C((\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\})$ où $(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ est le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. C'est évident que le morphisme $\widetilde{\psi}$ est injectif et de plus il est surjectif d'après le théorème de Stones-Weiestrass car l'algèbre $\widetilde{\psi}(\mathfrak{B})$ separe les points de $(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$. Donc $\mathfrak{B} \simeq C((\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\})$, autrement dit le spectre de $\mathfrak{B}$ est homéomorphe à $(\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \cup \{\infty\}$ qui topologiquement est homéomorphe à une sphère pincée.

Pour $n \geq 2$, on commence par considérer un autre exemple d'algèbres graduées : considérons une base de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, $(e_1, ..., e_n)$. Soit $I$ un sous-ensemble de $\{1, ..., n\}$. Notons $P_I$ le sous-espace vectoriel engendré par $(e_i)_{i \in I}$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble $\{P_I; I \subseteq \{1, ..., n\}\}$, alors $\mathcal{F}$ est un treillis dont le plus petit élément est $\{0\}$. On remarque que l'application $I \mapsto P_I$ est un isomorphisme de treillis.

On va plonger $\mathcal{P}$ dans $E$ par l'application linéaire $(f_1, ..., f_n) : \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n$. On a $\mathcal{P} \cap P_I = \{0\}$ pour tout $I$ tel que $\dim P_I \leq n - 2$. Notons $H_i = P_{\{1,...,n\} \setminus \{i\}}$, $i = 1, ..., n$ les hyperplans de $E$, alors les droites $\delta_i = \mathcal{P} \cap \{x_i = 0\} = \mathcal{P} \cap H_i$ avec $i = 1, ..., n$.

Puisque les conditions équivalentes du lemme 6.1.1 sont satisfaites pour tout $H$, $K \in \mathcal{F}$ on a par la proposition 6.1.2 une $C^*$-algèbre $\mathcal{F}$-graduée

$(\mathfrak{A}, (C_0(E/H))_{H\in\mathcal{F}})$ dont les morphismes de structure soient les $\varphi_{K,H}$ définis ci-dessus. Elle est donnée par :

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{H\in\mathcal{F}} C_0(E/H).$$

On remarque que $\mathfrak{A}$ est commutative et unifère donc par le théorème de Gelfand-Naimark on a

$$\mathfrak{A} \simeq C(\mathrm{Sp}(\mathfrak{A})).$$

Puisque les hypothèses de la proposition 6.1.3 sont satisfaites on peut considerer $\mathfrak{A}$ et par consequence $C(\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}))$ comme une sous-$C^*$-algèbre de l'algèbre $C_b(E)$. On appelle encore $\varphi$ cette inclusion. En d'autres termes, $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$ est un compactifié de $E$.

On va montrer que l'image de $\mathfrak{A}$ dans $C_b(E)$ est l'espace de fonctions continues sur le tore de dimension $n$, $\mathbb{T}^n$, autrement dit que $\mathrm{Sp}\ \mathfrak{A} = \mathbb{T}^n$.

Puisque $\mathbb{T}^n$ est un compactifié de $E$, la $C^*$-algèbre $C_0(E)$ est un idéal essentiel de $C(\mathbb{T}^n)$. On obtient donc un morphisme injectif $p : C(\mathbb{T}^n) \to C_b(E) = M(C_0(E))$.

Notons $J$ l'ensemble $\{1, ..., n\}$ et soit $I \subset J$. Notons $I' = J\backslash I$ et soit $p_{P_I}$ l'application quotient

$$p_{P_I} : E \to E/P_I \simeq P_{I'}.$$

Soient $\rho_E$ et $\rho_{P_{I'}}$ les inclusions naturelles de $E$ et $P_{I'}$ dans leurs compactifiés $\mathbb{T}^n$ et $\mathbb{T}^{I'}$, donc par continuité on peut prolonger $p_{P_I}$ en une application $\widetilde{p_{P_I}} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^{I'}$. Autrement dit, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p_{P_I}"] \arrow[d, "\rho_E"'] & P_{I'} \arrow[d, "\rho_{P_{I'}}"] \\ \mathbb{T}^n \arrow[r, "\widetilde{p_{P_I}}"] & \mathbb{T}^{I'}. \end{tikzcd}$$

Soit $H \in \mathcal{F}$ alors $H = P_I$, $I \subseteq J$. Par le diagramme précedent on en deduit un morphisme $\psi_H : C_0(E/H) \to C(\mathbb{T}^n)$ et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C_0(E/H) \arrow[r, "\psi_H"] \arrow[d, "\varphi_{0,H}"'] & C(\mathbb{T}^n) \arrow[dl, "p"] \\ C_b(E). & \end{tikzcd}$$

Comme $p$ est injective, le morphisme $\psi_H = p^{-1} \circ \varphi_{0,H}$ satisfait les hypothèses de la proposition 2.3.3, alors il existe un unique homomorphisme $\psi : \mathfrak{A} \to C(\mathbb{T}^n)$ dont la restriction sur $C_0(E/H)$ soit $\psi_H$. Donc on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook, "\varphi"'] & C(\mathbb{T}^n) \arrow[dl, hook, "p"] \\
C_b(E) &
\end{tikzcd}$$

qui est commutatif et par consequent le morphisme $\psi$ est injectif.

Pour montrer qu'il est surjectif, par le théorème de Stone-Weiestrass, il suffit de montrer que $\psi(\mathfrak{A})$ sépare les points de $\mathbb{T}^n$. Soient $x, y \in \mathbb{T}^n$ tels que $x \neq y$, alors il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $x_j \neq y_j$ avec $x_j, y_j \in \mathbb{T}$. Donc il existe $f \in C_0(\mathbb{R})$ telle que $f(x_j) \neq f(y_j)$. Or l'application $\psi_j(f)$ : $(z_1, ..., z_n) \mapsto f(z_j)$ est un élément de $\psi(\mathfrak{A})$ et $\psi_j(f)(x) \neq \psi_j(f)(y)$ d'où la surjectivité voulue.

On revient dans notre cas de l'algèbre $\mathfrak{B}$. On va montrer que $\mathfrak{B}$ est l'algèbre des fonctions continues définies sur le tore $\mathcal{T}_g$ à $g$ trous où $g = E(\dfrac{n}{2})$ qui, dans le cas où $n$ est impair, est pincé *i.e.* deux de ses points sont identifiés.

A l'inclusion (propre) $\mathcal{P} \to E$ correspond un homomorphisme (surjectif) $C_b(E) \to C_b(\mathcal{P})$. Puisqu'on a $\mathfrak{A} \subset C_b(E)$, on obtient donc un morphisme $\Phi : \mathfrak{A} \to C_b(\mathcal{P})$.

Pour tout $P_I$; $I \subseteq \{1, ..., n\}$, soit $\Phi_{P_I}$ la restriction de $\Phi$ sur les composants de $\mathfrak{A}$, $C_0(E/P_I)$.

Si $\dim P_I \leq n-2$ on a $\mathcal{P} \hookrightarrow E/P_I$ et par suite l'image par $\Phi_{P_I}$ de $C_0(E/P_I)$ dans $C_b(\mathcal{P})$ est $C_0(\mathcal{P})$.

Si $P_I = H_i$, $i = 1, ..., n$ alors pour tout $i$, $E/H_i$ est homéomorphe à $\mathcal{P}/\delta_i$ et on a un isomorphisme donné par $\Phi_{H_i} : C_0(E/H_i) \simeq C_0(\mathcal{P}/\delta_i)$.

Donc on a montré que $\Phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$.

D'autre part $\mathfrak{A} = C(\mathbb{T}^n)$ et en considèrant $C(\overline{\mathcal{P}})$ comme une sous-algèbre de $C_b(\mathcal{P})$ alors $\Phi$ est la réstriction de $C(\mathbb{T}^n)$ à $\mathcal{P}$ *i.e.* $C(\overline{\mathcal{P}}) = \Phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$. En d'autres terms, $\mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$ est l'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{T}^n$.

Décrivons un peu plus cette adhérence. Avec les hypothèses de départ le plan $\mathcal{P}$ sera de la forme suivante :

$$\mathcal{P} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n ;\ x_k = A_{ijk} x_i + B_{ijk} x_j\},$$

avec $i, k, j \in \{1, ..., n\}, i, j$ fixés, $k \notin \{i, j\}$ et les coefficients réels $A_{ijk}$, $B_{ijk}$ sont non nuls et ils vérifient $B_{ijk} A_{ij\ell} \neq A_{ijk} B_{ij\ell}$ pour tout $k, \ell \notin \{i, j\}$ distincts.

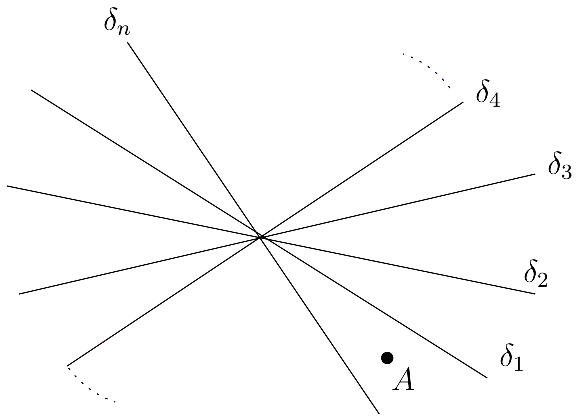
Notons par $Q$ l'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $(\overline{\mathbb{R}})^n$. Alors l'adherence de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{T}^n$, $\overline{\mathcal{P}} = \rho(Q)$ où $\rho$ est la surjection canonique $(\overline{\mathbb{R}})^n \to \mathbb{T}^n$.

Soit $(a_1, ..., a_n) \in Q$ alors il existe une suite de vecteurs $(x_{1,k}, ..., x_{n,k})_k \in \mathcal{P}$ telle que $(x_{1,k}, ..., x_{n,k}) \to (a_1, ..., a_n)$ quand $k \to \infty$.

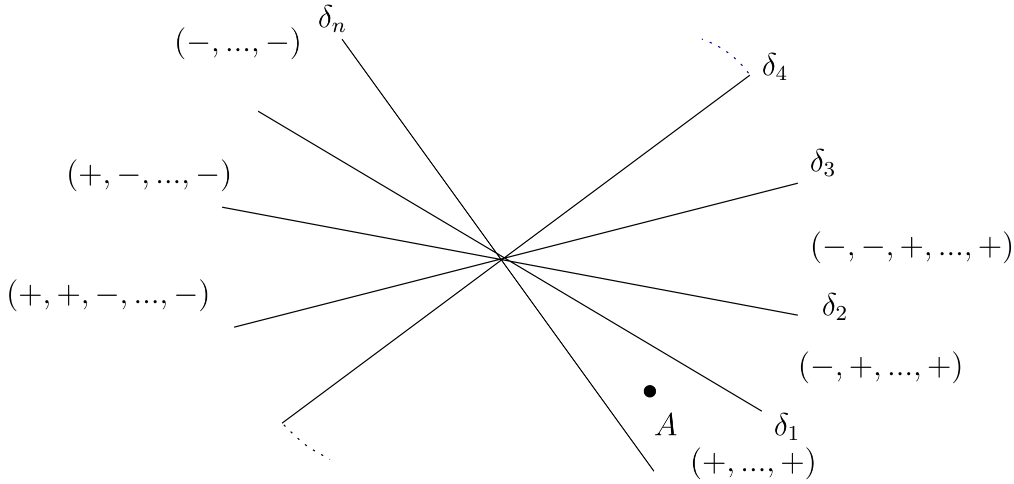
Supposons qu'au moins deux coéfficients de $(a_1, ..., a_n)$ soient finis, $a_i$, $a_j$, et soit $m \in \{1, ..., n\}\backslash\{i, j\}$. Alors si $x_{i,k} \to a_i$ et $x_{j,k} \to a_j$ quand $k \to \infty$ on obtient que $x_{m,k} = A_{ijm}x_{i,k} + B_{ijm}x_{j,k} \to A_{ijm}a_i + B_{ijm}a_j$, donc $a_m$ est fini. On en deduit que la limite de $(x_{1,k}, ..., x_{n,k})$ quand $k \to \infty$ est dans $\mathcal{P}$.

Supposons qu'un seul coéfficient $a_i$ est fini. Alors si $j \in \{1, ..., n\}\backslash\{i\}$ et $x_{i,k} \to a_i$ quand $k \to \infty$ et si $x_{j,k} \to a_j = \infty$, où $\infty$ signifie $+\infty$ ou$-\infty$, pour $m \in \{1, ..., n\}\backslash\{i, j\}$ on a $x_{m,k} \to A_{ijm}a_i + B_{ijm}a_j = A_{ijm}a_i + B_{ijm}(\infty) = \infty$, où le signe de l'infini depend du signe de l'infini limite de $x_{j,k}$ et du signe de $B_{ijm}$, *i.e.* $a_m = B_{ijm}(a_j)$. Donc dans $Q$ on a des vecteurs dont un coefficient est fini et les autres sont infinis. On les appelle les droites à l'infini et puisque $i$ parcourt l'ensemble $\{1, ..., n\}$ il y en a $2n$. On va montrer que le nombre des points d'intersection de ces droites, qu'on appelera points à l'infini, est également $2n$. Par consequent $Q$ aura la forme d'un polygone à $2n$ côtés.

En effet, choisissons une orientation de $\mathcal{P}$ et un point $A \in \mathcal{P}\backslash \cup_{i=1}^n \delta_i$. On réindexe les droites de la façon suivante : on choisit d'appeller la première droite qu'on rencontre dans le sens direct par $\delta_1$, la deuxième $\delta_2$ jusqu'à la nième $\delta_n$, *i.e.* on obtient



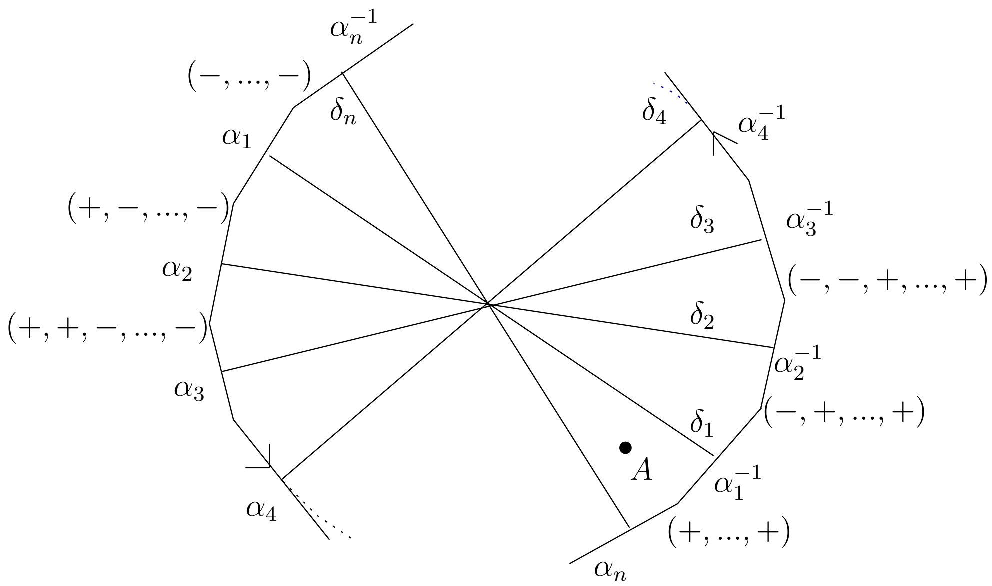

On choisit les $n$ formes linéaires $f_i, i = 1, ..., n$ telles que $f_i(A) = 1$ pour tout $i$. Donc, dans le secteur formé par les droites $\delta_1$ et $\delta_n$ qui contient le point $A$, les signes du point à l'infini seront tous positifs. Si on traverse la droite $\delta_1$ et on passe dans le secteur formé par $\delta_1$ et $\delta_2$ au-dessus du point $A$, les valeurs de $f_1$ deviennent negatives, donc on a un changement du premier signe en negatif *i.e.* le point à l'infini sera $(-\infty, +\infty, ..., +\infty)$. Avec la même procedure on ne trouve que $2n$ possibilités de signes qui sont de la forme $(+, ..., +, -, ..., -)$ et $(-, ..., -, +, ..., +)$.




Donc l'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $(\overline{\mathbb{R}})^n$ est un polygone à $2n$ côtés. En passant de $(\overline{\mathbb{R}})^n$ à $\mathbb{T}^n$, on idéntifie $+\infty$ et $-\infty$, ce qui revient à

a) identifier chaque côté au côté opposé

b) identifier tous les sommets.




La première identification, donne lieu à la surface de Riemann $Y_g$ dont la forme normale est $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}...\alpha_n^{-1}$ (voir par exemple dans [24], [29]) qui est équivalente à

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}...\alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n-1}^{-1}\alpha_n^{-1}$$

si $n$ est pair et à

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}...\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}^{-1}\alpha_{n-1}^{-1}\alpha_n\alpha_n^{-1}$$

si $n$ est impair. C'est donc un tore à $g$ trous où $g = E(\frac{n}{2})$.

Indexons les sommets par $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. En faisant l'identification des côtés on identifie aussi le $j$-ième sommet avec le sommet $j+n-1$ pour tout $j \in \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. En d'autres termes deux sommets sont identifiés si et seulement si ils sont dans la même orbite pour l'addition de $(n-1)$ dans $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$. Or, si $n$ est pair $\mathrm{PGCD}(n-1, 2n) = 1$ et si $n$ est impair $\mathrm{PGCD}(n-1, 2n) = 2$.

Donc l'application $Y_g \to \mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$ est un homéomorphisme lorsque $n$ est pair.

Lorsque $n$ est impair, on passe de $Y_g$ à $\mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$ en idéntifiant ces deux points, $\mathrm{Sp}(\mathfrak{B})$ est donc une surface de genre $g$ pincée.

Appliquons la remarque 5.1.4 à cet exemple.

**Remarque 6.3.2.** Notons $\mathcal{F}$ le treillis donné par $\mathcal{F} = \{\{0\}, \delta_1, ..., \delta_n, \mathcal{P}\}$ et $\mathcal{F}'$ le treillis qui contient une droite de moins, par exemple choisissons $\mathcal{F}' = \{\{0\}, \delta_1, ..., \delta_{n-1}, \mathcal{P}\} = \mathcal{F}\backslash\{\delta_n\}$.

Soit $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{H\in\mathcal{F}} C_0(\mathcal{P}/H)$ et $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}'} = \bigoplus_{K\in\mathcal{F}'} C_0(\mathcal{P}/K)$ les $C^*$-algèbres graduées correspondantes. Elles sont commutatives et unifères. On a $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}'} \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ et par conséquent on a une application $\Psi : \mathrm{Sp}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) \to \mathrm{Sp}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}'})$. Notons $A_H = C_0(\mathcal{P}/H)$ pour tout $H \in \mathcal{F}$.

Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont finis, ce sont de bons treillis et on a $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}) = \bigcup_{H\in\mathcal{F}} \mathrm{Sp}(A_H)$ et $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}'}) = \bigcup_{K\in\mathcal{F}'} \mathrm{Sp}(A_K)$ (proposition 5.1.3).

Soit $\chi \in \mathrm{Sp}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})$. Il existe un unique $H \in \mathcal{F}$ tel que $\chi = \chi_H \in \mathrm{Sp}(A_H)$. En appliquant la remarque 5.1.4 on obtient que : Si $H \in \mathcal{F}'$, l'image de $\chi_H$ par l'application $\Psi$ est lui-même. Si $H \in \mathcal{F}\backslash\mathcal{F}'$ *i.e.* $H = \delta_n$, alors $\inf\{K \in \mathcal{F}'; \delta_n \subseteq K\} = \mathcal{P}$ et l'image de $\chi_{\delta_n}$ par l'application $\Psi$ est dans $\mathrm{Sp}(A_{\mathcal{P}})$ *i.e.* c'est le point à l'infini.

En d'autres termes, on passe du spectre de $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ à $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}'}$ en contractant la droite $\mathcal{P}/\delta_n$ en un seul point : le point à l'infini.

**Exemple 6.3.3.** Soit $\mathcal{L}$ un semi-treillis et $(A_i)_{i\in\mathcal{L}}$ la famille de $C^*$-algèbres définie par $A_i = \mathbb{C}$ pour tout $i \in \mathcal{L}$. Pour $i, j \in \mathcal{L}$ tels que $i \leq j$ posons $\varphi_{i,j} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Ces morphismes vérifient les propriétés $a$) et $b$) de la proposition 2.5.1, donc par le théorème 3.1.2 il existe à isomorphisme près une unique $C^*$-algèbre $\mathcal{L}$-graduée $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathcal{L}})$ dont les morphismes de structure soient les $\varphi_{i,j}$. On veut ici calculer son spectre $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A})$.

Montrons que l'ensemble des sous-semi-treillis finissants non vides de $\mathcal{L}$ est en bijection avec l'ensemble des caractères de $\mathfrak{A}$.

Notons $e_i$, $i \in \mathcal{L}$ l'image de $1 \in A_i$ dans $\mathfrak{A}$. C'est clair que $e_i$ est un idémpotent pour tout $i \in \mathcal{L}$ donc si $\chi$ est un caractère de $\mathfrak{A}$ on a $\chi(e_i) \in \{0, 1\}$. De plus, par la définition du produit dans $\mathfrak{A}$ on a $e_i e_j = e_{i\wedge j}$ pour tout $i, j \in \mathcal{L}$.

Soit $\chi$ un caractère de $\mathfrak{A}$. Posons $\mathcal{M}_\chi = \{i \in \mathcal{L}; \chi(e_i) = 1\}$. C'est un sous-semi-treillis de $\mathcal{L}$ car si $i, j \in \mathcal{M}_\chi$ on a $\chi(e_{i\wedge j}) = \chi(e_i e_j) = \chi(e_i)\chi(e_j) = 1$ donc $i \wedge j \in \mathcal{M}_\chi$. C'est un sous-semi-treillis finissant car pour $i \in \mathcal{M}_\chi$ et $j \in \mathcal{L}$ tel que $i \leq j$ on a $\chi(e_j) = \chi(e_i)\chi(e_j) = \chi(e_i e_j) = \chi(e_i) = 1$ *i.e.* $j \in \mathcal{M}_\chi$.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-semi-treillis finissant non vide de $\mathcal{L}$. D'après la proposition 2.3.3 il existe un unique homomorphisme $\chi_\mathcal{M} : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ satisfaisant $\chi_\mathcal{M}(\lambda e_i) = \begin{cases} \lambda, & i \in \mathcal{M} \\ 0, & i \notin \mathcal{M} \end{cases}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $i \in \mathcal{L}$. En effet, il est facile de voir que, puisque $\mathcal{M}$ est un sous-semi-treillis finissant, $\chi_\mathcal{M}(\lambda e_i)\chi_\mathcal{M}(\mu e_j) = \chi_\mathcal{M}(\lambda\mu e_{i\wedge j})$. Comme $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\chi_\mathcal{M}$ est un caractère de $\mathfrak{A}$.

Remarquant que tout caractère est déterminé par sa valeur sur $e_i$ $(i \in \mathcal{L})$ on a montré que les applications $\chi \mapsto \mathcal{M}_\chi$ et $\mathcal{M} \mapsto \chi_\mathcal{M}$ sont des bijections inverses l'une de l'autre.

Remarquons enfin que, puisque $A_i = \mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}(A_i)$ a un seul point $\mathrm{Id}_\mathbb{C}$. On a $\psi_i(\mathrm{Id}_\mathbb{C})(e_j) = \begin{cases} 1, & i \leq j \\ 0, & i \nleq j \end{cases}$ *i.e.* $\psi_i(\mathrm{Id}_\mathbb{C}) = \chi_{\mathcal{L}_i}$. Il en résulte qu'un caractère $\chi$ de $\mathfrak{A}$ est dans $\bigcup_{i\in\mathcal{L}} \psi_i(\mathrm{Sp}(A_i))$ si et seulement si $\mathcal{M}_\chi$ est de la forme $\mathcal{L}_i$ *i.e.* si et seulement s'il possède un plus petit élément. Finalement $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) = \bigcup_{i\in\mathcal{L}} \psi_i(\mathrm{Sp}(A_i))$ si et seulement si $\mathcal{L}$ est un bon semi-treillis.

Etudions un cas particulier de cet exemple.

**Exemple 6.3.4.** On considère l'ensemble $\mathbb{Q}$ avec son ordre. Remarquons que $\mathbb{Q}$ étant totalement ordonné, c'est un semi-treillis mais ce n'est pas un *bon* semi-treillis. On prend alors $\mathcal{L} = \mathbb{Q}$ et on va étudier le spectre de la $C^*$-algèbre graduée correspondante $(\mathfrak{A}, (A_i)_{i\in\mathbb{Q}})$.

Notons $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ la $C^*$-algèbre des fonctions complexes boreliennes bornées définies sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $i \in \mathbb{Q}$ on définit une application $\tau_i : A_i \to \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ par $\tau_i(\lambda e_i) = \lambda \mathbf{1}_{]-\infty,i]}$ où $\mathbf{1}$ est la fonction caractéristique. On vérifie facilement que $\tau_i$ est un morphisme injectif de $C^*$-algèbres satisfaisant l'égalité $\tau_{i\wedge j}(\lambda e_i \mu e_j) = \tau_i(\lambda e_i)\tau_j(\mu e_j)$ pour tout $i, j \in \mathbb{Q}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Par conséquent, suite à la proposition 2.3.3 il existe un unique morphisme $\tau : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}_b(\mathbb{R})$ dont la restriction à $A_i$ soit $\tau_i$ pour tout $i \in \mathbb{Q}$.

Montrons que $\tau$ est injectif. D'après la proposition 2.3.2 il suffit de l'étudier pour tout sous-semi-treillis fini $\mathcal{F}$ de $\mathbb{Q}$. Soit $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_{\mathbb{Q}}$. Supposons que $\mathcal{F}$ possède $n$ éléments. Puisque l'ordre est total on peut aussi supposer que $\mathcal{F} = \{i_1, ..., i_n\}$ avec $i_1 < i_2 < ... < i_n$. Soit $\tau_{\mathcal{F}}$ la restriction de $\tau$ à $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$ et $x \in \ker \tau_{\mathcal{F}}$. Alors $x = \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{F}} \lambda_i e_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in\mathcal{F}} \lambda_i \mathbf{1}_{]-\infty,i]}(s) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Pour $s$ tel que $i_{n-1} < s \leq i_n$ on trouve $\lambda_n = 0$. Si on prend $s$ tel que $i_{n-2} < s \leq i_{n-1}$ on a $\lambda_{n-1} + \lambda_n = 0$ et par conséquent $\lambda_{n-1} = 0$. On continue de la même manière et on démontre que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \mathcal{F}$. Autrement dit $x = 0$ et $\tau_{\mathcal{F}}$ est injectif.

On peut idéntifier donc $\mathfrak{A}$ avec son image par $\tau$. Décrivons cette image. On va montrer que $\tau(\mathfrak{A}) = \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est l'espace des fonctions complexes boreliennes bornées définies sur $\mathbb{R}$ qui sont reglées, continues à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, nulles en $+\infty$ et qui admettent une limite en $-\infty$.

Montrons d'abord que $\mathcal{A}$ est une sous-$C^*$-algèbre de $\mathcal{B}_b(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer qu'elle est fermée. Ceci est clair car une limite uniforme de fonctions reglées (resp. continues à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, resp. continues sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, resp. nulles en $+\infty$, resp. qui admettent une limite en $-\infty$) est reglée (resp. continue à gauche en tout point de $\mathbb{R}$, resp. continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, resp. nulle en $+\infty$, resp. admet une limite en $-\infty$).

Pour tout $i \in \mathcal{L}$, $\tau(e_i) \in \mathcal{A}$ donc $\tau(\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}) \subset \mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est fermé et $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ est dense dans $\mathfrak{A}$ on a $\tau(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{A}$.

Soit $f \in \mathcal{A}$. Supposons que la limite de $f$ en $-\infty$ est égale à $\lambda$, donc soit $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que pour tout $x \leq a$ on ait $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$. D'autre part $f$ est nulle en $+\infty$ donc il existe $A \in \mathbb{Q}$ tel que pour tout $x \geq A$ on ait $|f(x)| < \varepsilon$. Autrement dit, pour tout $x \in ]-\infty, a] \cup ]A, +\infty[$ on a $|f(x) - \lambda \mathbf{1}_{]-\infty,a]}(x)| < \varepsilon$.

Puisque $f$ est une fonction reglée, elle est reglée sur $[a, A]$ et il existe une fonction en escaliers $g$ sur $[a, A]$ telle que $||f - g||_\infty = \sup\{|f(t) - g(t)|, t \in$

$[a, A]\} < \varepsilon$. Il existe donc une subdivision $i_0, i_1, ..., i_s$ de $[a, A]$ telle que $i_0 = a$ et $i_s = A$ et $g$ est égale à une constante $c_r$ sur $]i_{r-1}, i_r[$ pour tout $r \in \{1, ..., s\}$.

Par hypothèse $f$ est continue à gauche en $i_r$ pour tout $r \in \{0, ..., s\}$ donc $|f(i_r) - c_r| = \lim_{t \to i_r -} |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon$.

Si $i_r \notin \mathbb{Q}$, la fonction $f$ est continue en $i_r$ donc il existe $j_r \in ]i_r, i_{r+1}[\cap\mathbb{Q}$ tel que pour tout $t \in [i_r, j_r]$ on ait $|f(t) - f(i_r)| < \varepsilon$. Pour $t \in [i_r, j_r]$ on a $|f(t) - c_r| \leq |f(t) - f(i_r)| + |f(i_r) - c_r| < 2\varepsilon$.

Si $i_r \in \mathbb{Q}$, on pose $j_r = i_r$.

Maintenant on a une nouvelle subdivision $j_0, ..., j_s$ de $[a, A]$. Soit $g$ la fonction définie par

$$g(t) = \begin{cases} 0, \ t > A \\ \lambda, \ t \leq a \\ c_r, \ t \in ]j_{r-1}, j_r] \text{ avec } r \in \{1, ..., s\}. \end{cases}$$

On a $g = \lambda \mathbf{1}_{]-\infty,a]} + \sum_{r=1}^{s} c_r \mathbf{1}_{]j_{r-1}, j_r]} = \lambda\tau(e_a) + \sum_{r=1}^{s} c_r \tau(e_{j_r} - e_{j_{r-1}}) \in \tau(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})$ où $\mathcal{F} = \{j_0, ..., j_s\} \in \mathbb{F}_{\mathbb{Q}}$. Comme $||f - g||_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - g(t)| < 2\varepsilon$ et $\tau(\mathfrak{A})$ est fermé on en deduit que $f \in \tau(\mathfrak{A})$.

On a $\mathrm{Sp}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Sp}(\tau(\mathfrak{A})) = \mathrm{Sp}(\mathcal{A})$. Par l'exemple précedent il y a une bijection entre les caractères de $\mathfrak{A}$ et les sous-semi-treillis finissants non vides $\mathcal{M}$ de $\mathbb{Q}$. Remarquons que les seules formes possibles de $\mathcal{M}$ sont les suivantes : $\mathcal{M} = \mathbb{Q}$ ou $\mathcal{M} = \mathbb{Q} \cap [t, +\infty[ \equiv \mathcal{L}_t$ ou $\mathcal{M} = \mathbb{Q} \cap ]t, +\infty[ \equiv \mathcal{M}_t$ avec $t \in \mathbb{Q}$. Remarquons que si $t \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ alors $\mathcal{L}_t = \mathcal{M}_t$. On a donc une bijection naturelle entre les caractères de $\mathfrak{A}$ et $\{\mathbb{Q}\} \cup \{\mathcal{L}_t;\ t \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathcal{M}_t;\ t \in \mathbb{Q}\}$.

Idéntifions le caractère qui correspond à chacun de ces sous-semi-treillis finissants à travers l'isomorphisme $\tau : \mathfrak{A} \to \mathcal{A}$ décrit ci-dessus. En vérifiant qu'il coïncide sur les générateurs $e_i$ $(i \in \mathcal{L})$ on trouve :

- $\chi_{\mathbb{Q}}(a) = \lim_{s \to -\infty} \tau(a)(s)$,
- $\chi_{\mathcal{L}_t}(a) = \tau(a)(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- $\chi_{\mathcal{M}_t}(a) = \lim_{s \to t+} \tau(a)(s)$ pour tout $t \in \mathbb{Q}$.

# Bibliographie


[1] S. Agmon, *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations*, Princeton Univ. Press, 1982.

[2] W. O. Amrein, A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, *Semicompactness and spectral analysis of $N$-body Hamiltonians*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988), no. 15, 813-818.

[3] W. O. Amrein, A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, *Notes on the $N$-Body Problem, I*, Preprint Université de Genève, UGVA-DPT 1988/11-598.

[4] W. O. Amrein, A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, *Notes on the $N$-Body Problem, II*, Preprint Université de Genève, UGVA-DPT 1991/04-718, p.164-424.

[5] W. O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, *$C_0$-groups, Commutator Methods and Spectral theory of N-body Hamiltonians*, Birkhauser-Verlag, 1996.

[6] W. O. Amrein, M. Măntoiu, R. Purice, *Propagation properties for Schrödinger operators affiliated with certain $C^*$-algebras*, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), no. 6, 1215–1232.

[7] B. Blakadar, *$K$-theory for Operator algebras*, New York, Springer-Verlag, 1986.

[8] N. Bourbaki, *Eléments des mathématiques, Topologie Générale, Chapitres 1 à 4*, Hermann, Paris, 1971.

[9] A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, *Graded $C^*$-algebras in the $N$-body problem*, J. Math. Phys. **32** (1991), 3101-3110.

[10] A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, *Graded $C^*$-algebras and many-body perturbation theory. I. The $N$-body problem*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 6, 477-482.

[11] A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, *Graded $C^*$-algebras and many-body perturbation theory. II. The Mourre estimate*, Astérisque No. 210 (1992), 6-7, 75-96.

[12] A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, *Some developments and applications of the abstract Mourre theory*, Astérisque No. 210 (1992), 5, 27-48.

[13] A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, *Graded $C^*$-algebras associated to symplectic spaces and spectral analysis of many channel Hamiltonians*, in Dynamics of Complex and Irregular Systems (Bielefeld 1991), Bielefeld Encount. Math. Phys., vol. 8, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1993, pp. 22-66.

[14] A. Boutet de Monvel-Berthier, V. Georgescu, A. Soffer *$N$-body Hamiltonians with hard-core interactions*, Rev. Math. Phys. **6** (1994), no. 4, 515-596.

[15] M. Damak, V. Georgescu, *$C^*$-cross products and a generalized mechanical $N$-body problem*, Mathematical Physics and Quantum Field Theory, Electronic Journal of Differential Equations, Conf. 04, 2000, pp. 51-69.

[16] M. Damak, V. Georgescu, *$C^*$-algebras related to the N-body problem and the self-adjoint operators affiliated to them*, preprint 99-482 at hhtp ://www.ma.utexas.edu/mparc/.

[17] R. G. Froese, I. Herbst, *A new proof of the Mourre estimate*, Duke Math. J., 49, 1982, pp. 1075-1085.

[18] V. Georgescu, A. Iftimovici, *$C^*$-algebras of energy observables. I. General theory and bumps algebras*, preprint 01-521 at hhtp ://www.ma.utexas.edu/mparc/.

[19] V. Georgescu, A. Iftimovici, *$C^*$-algebras of energy observables. II. Graded symplectic algebras and magnetic Hamiltonians*, preprint 01-99 at hhtp ://www.ma.utexas.edu/mparc/.

[20] V. Georgescu, A. Iftimovici, *Crossed products of $C^*$-algebras and spectral analysis of quantum hamiltonians*, Commun.Math.Phys. 228, 519-560 (2002).

[21] V. Georgescu, A. Iftimovici, *$C^*$-algebras of quantum hamiltonias*, Operator algebras and mathematical physics (Constanţa, 2001), 123–167, Theta, Bucharest, 2003.

[22] M. Karoubi, *K-theory : an introduction*, Springer-Verlag, Grundlehren N° 226. (1978).

[23] E. Kirchberg, N. C. Phillips *Embedding of exact $C^*$-algebras in the Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$* , J. Reine Angew. Math. 525 (2000), 17–53.

[24] W. S. Massey, *Algebraic topology : an introduction*, New York : Springer-Verlag, 1967.

[25] G. J. Murphy $C^*$*-algebras and operator theory*, Academic Press, 1990.

[26] G. K. Pedersen, $C^*$*-algebras and their automorphismes groups*, London : Academic Press, 1979.

[27] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I : Functional analysis*, Academic Press, New York 1972.

[28] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics IV : Analysis of Operators*, Academic Press New York, San Francisco, London 1978.

[29] G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1957.

[30] H. Takai, *On a duality for crossed products of* $C^*$*-algabras*, J. Functional Analysis **19** (1975), 25-39.

[31] M. Takesaki, *Theory of Operator algebras Vol.I*, Springer-Verlag, 1979. Heidelberg, New York, Hong Kong, Tokyo.

[32] M. Takesaki, *Theory of Operator algebras Vol.III*, Springer-Verlag, 2002. Heidelberg, New York, Hong Kong, Tokyo.

[33] S. Wasserman, *Exact* $C^*$*-algebras and related topics*, University Press, National University Seoul, 1994.

[34] N. E. Wegge-Olsen, $K$*-Theory and* $C^*$*-algebras*, Oxford University Press, 1993.