

**THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ
PARIS VI**

Spécialité :
MATHÉMATIQUES

présentée par

Aurélié Cortez

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet :

**Lieu singulier et singularités génériques des
variétés de Schubert pour le groupe linéaire**

Soutenue le 10 décembre 2001, devant le jury composé de

M. Laurent Lafforgue
M. Alain Lascoux, rapporteur
M. Joseph Le Potier
M. Patrick Polo, directeur de thèse
M. Pierre Schapira
M. Jacques Tilouine

Cette thèse est le fruit de trois ans de travail, qui n'ont pas été sans difficultés ni péripéties, et qui n'auraient pas abouti sans le concours de nombreuses personnes.

Je veux d'abord exprimer ma profonde gratitude envers Patrick Polo, mon directeur de thèse. Il m'a véritablement initiée à la recherche mathématique, avec une grande générosité, tant scientifique qu'humaine, me consacrant beaucoup de temps et d'énergie. Il a toujours été disponible et de bon conseil, critique ou laudatif selon le cas. J'ai particulièrement apprécié sa façon de s'impliquer dans son rôle, prenant aussi en compte les difficultés paramathématiques inhérentes à la thèse.

Par ses travaux antérieurs, Alain Lascoux a une certaine paternité dans la première partie de ma thèse. J'ai eu à plusieurs reprises des discussions fructueuses avec lui, qui a aussi fait preuve de beaucoup de bienveillance et de générosité à mon égard. Il a de plus accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je le remercie chaleureusement de tout cela.

Merci aussi à Andrei Zelevinsky, qui a également été rapporteur, et à Messieurs Laurent Lafforgue, Joseph Le Potier, Pierre Schapira et Jacques Tilouine, qui me font l'honneur de participer au jury.

Je n'en serais pas là aujourd'hui si je n'avais été naguère l'élève de Michel Cognet puis d'Anne Raoult. C'est avec eux que j'ai découvert les mathématiques et que j'y ai pris goût, et c'est grâce à eux que j'ai pu surmonter un difficile apprentissage, et finalement continuer dans cette voie. Je leur en suis profondément reconnaissante, et, en tant qu'enseignants, ils resteront pour moi des références. Merci aussi à tous les mathématiciens que j'ai côtoyés par la suite, et qui par leur enseignement ont su entretenir mon goût pour cette discipline.

J'ai bénéficié durant ces trois années de conditions de travail excellentes. J'en remercie d'abord Dominique Le Brigand et Pierre Schapira, qui m'ont accueillie dans l'équipe d'analyse algébrique, et tous les autres membres de l'équipe.

Cette période m'a aussi donné l'occasion de lier des amitiés qui me sont chères. Merci donc à Alban, Andrea, Catriona, Fabien, Francesca, Frédéric, Gianluca, Ingo, Jérôme, Laurent, Lorenz, Oliver, Pietro, Vincent et Yosr, d'avoir mis du bonheur dans ces trois ans de labeur.

Merci enfin à Olivier, pour sa patience, et à tout mon entourage, famille et amis (qu'ils me pardonnent de ne pas tous les nommer) pour leur soutien essentiel. J'ai une pensée particulière pour mes grands-pères, Fernand Cortez et René Defives, qui je crois auraient été très fiers de me voir aujourd'hui postuler au titre de docteur.

Table des matières

Introduction	7
Préliminaires	11
0.1 Notations et rappels	11
0.2 Singularités génériques	12
0.3 L'ordre de Bruhat-Chevalley	12
0.3.1 Le point de vue classique	12
0.3.2 Une nouvelle approche : les corectrices	13
0.4 Description des variétés de Schubert	15
0.5 Quadrants et rectangles	16
I Cas des variétés de Schubert covexillaires	19
Introduction	21
1 Des composantes irréductibles du lieu singulier	23
2 Réciproque, description du lieu singulier	31
II Cas général	39
3 Renforcement d'une condition d'incidence	41
4 Des composantes de type S_1 et S_2	51
4.1 Configurations I et II	51
4.2 Des composantes de type S_1 et S_2	58

5	Quasi-résolutions des variétés de Schubert	65
5.1	Définition des quasi-résolutions	66
5.2	Un lemme	66
5.3	Le lieu exceptionnel $\text{Ex}(\pi_i)$	70
5.4	Lieux exceptionnels et lieu singulier	75
5.4.1	Intersection des images des lieux exceptionnels	75
5.4.2	Correspondance entre configurations	82
6	Théorème principal	89
	Index des notations	93
	Bibliographie	94

Introduction

On se place sur un corps algébriquement clos \mathbb{K} , de caractéristique quelconque. L'objet de cette thèse est de décrire explicitement les composantes irréductibles du lieu singulier d'une variété de Schubert arbitraire pour $GL_n(\mathbb{K})$, ainsi que la singularité le long de chacune d'entre elles.

Variétés de Schubert

On note B le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ formé des matrices triangulaires supérieures. Dans la variété de drapeaux classique $\mathbb{F}_n(\mathbb{K})$, les B -orbites sont paramétrées par le groupe symétrique d'ordre n , noté \mathfrak{S}_n , et appelées les cellules de Schubert. On note $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de \mathbb{K}^n , et $\mathbb{K}^\bullet = \mathbb{K}^1 \subset \dots \subset \mathbb{K}^n$ le drapeau complet associé à cette base, où $\mathbb{K}^p = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Alors, la cellule de Schubert C_w associée à la permutation $w \in \mathfrak{S}_n$ est, par définition, la B -orbite du drapeau $w\mathbb{K}^\bullet$, noté aussi e_w . Explicitement, C_w est l'ensemble des drapeaux complets $V^\bullet \in \mathbb{F}_n(\mathbb{K})$ qui vérifient les relations d'incidence suivantes : pour tous $p, q \in [1, n]$,

$$\dim(V^p \cap \mathbb{K}^q) = \#\{i \in [1, p] \mid w(i) \in [1, q]\}.$$

La variété de Schubert X_w est l'adhérence de la cellule C_w , elle peut aussi être décrite en termes de relations d'incidence, par :

$$\dim(V^p \cap \mathbb{K}^q) \geq \#\{i \in [1, p] \mid w(i) \in [1, q]\},$$

pour tous p, q .

Singularités génériques

L'inclusion des variétés de Schubert induit l'ordre de Bruhat-Chevalley sur le groupe symétrique – nous suivrons cette terminologie usuelle, bien que cet ordre ait été d'abord introduit par C. Ehresmann : pour $v, w \in \mathfrak{S}_n$, $v \leq w \iff X_v \subseteq X_w$. La variété de Schubert X_w étant B -stable, et B étant connexe, les composantes irréductibles du lieu singulier de X_w , noté $\text{Sing } X_w$,

sont B -stables, ce sont donc elles-mêmes des variétés de Schubert. Elles sont données par les permutations maximales v telles que le drapeau e_v soit un point singulier de X_w .

Etant donné $v \leq w$, le voisinage ouvert standard du drapeau e_v dans X_w se décompose comme le produit $C_v \times \mathcal{N}_{v,w}$; $\mathcal{N}_{v,w}$ est appelée la transversale à C_v dans X_w . Alors, X_v est une composante irréductible de $\text{Sing } X_w$ si et seulement si e_v est l'unique point singulier de $\mathcal{N}_{v,w}$. Ce sont les singularités génériques que l'on va décrire.

Les situations connues jusqu'ici (cf. [3]) suggèrent de définir les deux types de singularité suivants. Soit X_v une composante irréductible du lieu singulier de X_w ; on dira qu'elle est de type S_1 s'il existe des entiers i et j ($i, j \geq 2$) tels que $\mathcal{N}_{v,w}$ soit isomorphe à la variété $\mathcal{C}_{i,j}$ des matrices de taille (i, j) et de rang au plus 1, et l'on dira que X_v est de type S_2 si $\mathcal{N}_{v,w}$ est isomorphe à un cône quadratique non dégénéré de dimension au moins 5.

L'étude des variétés de Schubert relève à la fois de la géométrie et de la combinatoire, qui en offrent deux approches, plus complémentaires que concurrentes. Le point de départ de ce travail a été de tenter de comprendre et exploiter géométriquement des résultats combinatoires de A. Lascoux ([22]).

Une première illustration de l'interaction entre géométrie et combinatoire est le critère de singularité de V. Lakshmibai et B. Sandhya ([20]) : la variété de Schubert X_w associée à la permutation w de \mathfrak{S}_n est singulière si et seulement s'il existe des entiers $a < b < c < d$ dans $[1, n]$ vérifiant : $w(d) < w(b) < w(c) < w(a)$ – on dira que ces entiers forment une configuration (4231) de w – ou bien $w(c) < w(d) < w(a) < w(b)$ – configuration (3412).

Variétés de Schubert covexillaires

Auparavant, A. Lascoux et M.-P. Schützenberger avaient introduit la notion de permutation vexillaire ([24]) : w est vexillaire si elle ne contient pas de configuration (2143). On dit qu'une permutation w , et par extension la variété de Schubert X_w , est covexillaire si elle ne contient pas de configuration (3412); ainsi, w est covexillaire si et seulement si ww_0 est vexillaire au sens de Lascoux-Schützenberger, w_0 étant la permutation maximale de \mathfrak{S}_n . D'après [22], on sait calculer les polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les variétés de Schubert covexillaires (Lascoux les appelle "vexillaires" : nos paramétrisations des variétés de Schubert diffèrent d'un facteur w_0 à droite). Ainsi, lorsque w est covexillaire, cela met en évidence les composantes irréductibles du lieu des points non rationnellement lisses de X_w , qui

sont exactement celles du lieu singulier d'après [9]. En mettant en œuvre ces calculs, on a trouvé la forme conjecturale du résultat, puis on s'est attaché à en établir une preuve géométrique : d'une part en décrivant les transversales à certaines cellules C_{τ_i} , d'autre part en construisant une résolution, particulièrement intéressante car elle induit un isomorphisme au-dessus du complémentaire de la réunion des X_{τ_i} , dont on montre finalement que c'est le lieu lisse de X_w . On obtient ainsi que les composantes irréductibles du lieu singulier d'une variété de Schubert covexillaire X_w sont paramétrées par les configurations (4231) de w qui sont minimales en un certain sens, et l'on en donne une description explicite. Plus précisément, les composantes sont paramétrées par certains points coessentiels de w – notion duale des points essentiels définis par W. Fulton dans [13] – que l'on appellera bien bordés. De plus, on montre que les singularités génériques sont de type S_1 , conformément au modèle grassmannien ([3], cf. aussi [4]). Ce premier travail a fait l'objet d'un article aux Annales de l'Institut Fourier ([6]). La première partie de ce texte en est une version légèrement remaniée.

Cas général

Ensuite, il était naturel de tenter de faire opérer les mêmes techniques sur les configurations (4231) d'une permutation arbitraire. On a ainsi obtenu, par le calcul des transversales, un certain nombre de composantes irréductibles de $\text{Sing } X_w$, de type S_1 . Cela nous a conduit au passage à un résultat auxiliaire qui a son intérêt propre : la description des composantes irréductibles de la sous-variété d'une variété de Schubert définie par le renforcement d'une condition d'incidence.

Il fallait également prendre en compte, dans le cas général, les configurations (3412). On s'est bien entendu appuyé sur les cas connus (cf. [3] 4.6). Grâce aux calculs que l'on a pu effectuer en utilisant le programme Coxeter de F. du Cloux ([5]), et à certaines idées tirées de [1] et [15], on s'est forgé une intuition de la description des composantes irréductibles du lieu singulier dans le cas général, toujours par la description des transversales. On a ainsi exhibé d'autres composantes irréductibles du lieu singulier, ayant toutes une singularité générique de type S_1 ou S_2 .

On note Σ_w la réunion des composantes identifiées à ce stade ; elles sont paramétrées par les configurations (4231) et (3412) de w qui sont minimales en un certain sens. Plus précisément, on définit les notions de configuration I et II d'une permutation, qui sont une extension des configurations (4231) et (3412) respectivement, et on leur associe des permutations $\leq w$.

Les composantes de Σ_w sont alors paramétrées par les configurations I dites non dégénérées, et par les configurations II dites pures ou mixtes. Les singularités génériques sont de l'un des deux types S_1 ou S_2 : les composantes associées à des configurations I non dégénérées ou de type II mixtes ont une singularité générique de type S_1 , tandis que celles qui sont associées à des configurations II pures ont une singularité générique de type S_2 .

Il reste alors à montrer que Σ_w est exactement le lieu singulier. L'approche adoptée pour démontrer cette égalité conjecturale est la suivante : le résultat étant connu dans le cas covexillaire, on a cherché à s'y ramener. Cela nous a amené à considérer des "quasi-résolutions" des variétés de Schubert non covexillaires, construites à partir de variétés de Schubert plus petites, qui, d'une certaine manière, présentent un moindre défaut à être covexillaires. L'étude des lieux exceptionnels de ces quasi-résolutions et du lien de ceux-ci avec Σ_w permet finalement d'établir l'égalité $\text{Sing } X_w = \Sigma_w$.

A la suite de ce résultat, on obtient, pour chaque composante irréductible X_v de $\text{Sing } X_w$, le polynôme de Kazhdan-Lusztig $P_{v,w}$, ainsi que la multiplicité de X_w en e_v . Les résultats de cette deuxième partie sont annoncés dans une Note aux Comptes Rendus ([7]).

Remarquons que, de manière concomitante à notre travail, et avec une méthode plus combinatoire, la description des composantes irréductibles du lieu singulier dans le cas général a été obtenue, de manière quasi-simultanée, par L. Manivel ([27]) d'une part, S. Billey et G. Warrington ([2]) d'autre part, et enfin C. Kassel, A. Lascoux et C. Reutenauer ([16]), en utilisant la description de l'espace tangent obtenue par V. Lakshmibai et C. S. Seshadri ([21]) et par K. Ryan ([33]). Suite à cela, L. Manivel a également donné la description des singularités génériques ([28]).

Préliminaires

0.1 Notations et rappels

\mathbb{K} est un corps algébriquement clos de caractéristique arbitraire, $G = GL_n(\mathbb{K})$, B est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, U (resp. U^-) est le groupe des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) unipotentes, T est le tore maximal des matrices diagonales.

On note \mathfrak{S}_n le groupe symétrique d'ordre n , et \leq l'ordre de Bruhat-Chevalley. Pour $w \in \mathfrak{S}_n$, on note e_w le point wB de G/B , $C_w = Be_w$ la cellule de Schubert, et $X_w = \overline{C_w}$ la variété de Schubert associée. On note $\ell(w)$ le nombre d'inversions de w ; on rappelle que l'on a $\ell(w) = \dim X_w$. On désigne par Γ_w le graphe de w .

La variété des drapeaux G/B , sera aussi notée \mathbb{F}_n . On notera $\mathbb{K}^\bullet = \mathbb{K}^1 \subset \dots \subset \mathbb{K}^n$ le drapeau standard dans \mathbb{F}_n , associé à la base canonique de \mathbb{K}^n , notée $\{e_1, \dots, e_n\}$. Pour $g \in G$, on notera indifféremment $g\mathbb{K}^\bullet$ ou V_g^\bullet le drapeau associé. Pour toute suite finie d'entiers $1 \leq d_1 \leq \dots \leq d_k \leq n$, on notera $\mathbb{F}_{(d_1, \dots, d_k; n)}$ la variété des drapeaux partiels de dimensions d_1, \dots, d_k dans \mathbb{K}^n . Pour $p \leq n$, on notera $Gr_p(n)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension p dans \mathbb{K}^n .

Tous les intervalles considérés ici sont des intervalles de nombres entiers. Si i et j sont deux entiers distincts de $[1, n]$, on note (i, j) la transposition de support $\{i, j\}$, et pour $i \leq n-1$, on note s_i la transposition simple $(i, i+1)$. Si $I \subseteq [1, n-1]$, on note P_I le sous-groupe parabolique contenant B associé, et \mathfrak{S}_I le sous-groupe parabolique de \mathfrak{S}_n correspondant. On note ${}^I\mathfrak{S}_{min}$ (resp. ${}^I\mathfrak{S}_{max}$) l'ensemble des représentants minimaux (resp. maximaux) des classes à droite de \mathfrak{S}_n modulo \mathfrak{S}_I .

On rappelle le lemme suivant, qui se vérifie aisément en recensant les inversions de v et v' .

Lemme 0.1.1. *Si $v' = (i, j)v$ avec $i < j$ et $v^{-1}(i) > v^{-1}(j)$, on a*

$$\ell(v') = \ell(v) - 1 - 2\#\{i < k < j \mid v^{-1}(j) < v^{-1}(k) < v^{-1}(i)\}.$$

0.2 Singularités génériques

Les composantes irréductibles du lieu singulier de la variété de Schubert X_w sont données par les permutations maximales v telles que le point e_v soit un point singulier de X_w .

Etant donné $v \leq w$, l'ensemble $v(U^-)e_v \cap X_w$ est le voisinage standard de e_v dans X_w . D'après la décomposition de Bruhat, il est isomorphe au produit $C_v \times \mathcal{N}_{v,w}$ où $\mathcal{N}_{v,w} = [v(U^-) \cap U^-]e_v \cap X_w$ (cf. [17], Lemma A4). On appelle $\mathcal{N}_{v,w}$ la transversale à C_v dans X_w . La cellule de Schubert C_v étant un espace affine, on a en fait : X_v est une composante irréductible du lieu singulier de X_w si et seulement si $\mathcal{N}_{v,w}$ a e_v pour unique point singulier. Ce sont les singularités génériques que l'on va décrire.

Les situations connues jusqu'ici (cf. [3], 3.3 et 4.6) suggèrent de définir les deux types de singularité suivants. Soit X_v une composante irréductible du lieu singulier de X_w ; on dira qu'elle est de type S_1 s'il existe des entiers i et j ($i, j \geq 2$) tels que $\mathcal{N}_{v,w}$ soit isomorphe à la variété $\mathcal{C}_{i,j}$ des matrices de taille (i, j) et de rang au plus 1, et l'on dira que X_v est de type S_2 si $\mathcal{N}_{v,w}$ est isomorphe à un cône quadratique non-dégénéré \mathcal{K}_{2k+1} de dimension $2k+1 \geq 5$. Remarquons que dans le second cas, l'anneau local de $\mathcal{N}_{v,w}$ en e_v est factoriel (cf. [30], III.7, Example J) alors qu'il ne l'est pas dans le premier (cela peut se déduire de [30], III.9, Prop. 1, en considérant la résolution $Z = \{(\mathcal{D}, u) \mid \mathcal{D} \in \mathbb{P}^{i-1}, u : \mathbb{K}^j \rightarrow \mathcal{D}\}$ de $\mathcal{C}_{i,j}$).

0.3 L'ordre de Bruhat-Chevalley

0.3.1 Le point de vue classique

L'inclusion des variétés de Schubert induit un ordre partiel sur le groupe symétrique, appelé le plus souvent ordre de Bruhat-Chevalley : pour $v, w \in \mathfrak{S}_n$, $v \leq w \iff X_v \subseteq X_w$.

Cet ordre a d'abord été introduit par C. Ehresmann (cf. [12]), qui l'a décrit en termes de clef d'une permutation ; on note, pour tout k , $v_1^k <$

$\dots < v_k^k$ les entiers $v(1), \dots, v(k)$ ordonnés en une suite croissante. On a alors $v \leq w$ si et seulement si $v_j^k \leq w_j^k$ pour tous $j \leq k < n$.

Cette description permet de démontrer le lemme suivant. Si v et w sont deux permutations de $\{1, \dots, n\}$ qui coïncident sur k places, elles définissent naturellement des permutations \tilde{v} et \tilde{w} de $\{1, \dots, n-k\}$ comme suit : soient $i_1 < \dots < i_k$ les entiers sur lesquels v et w coïncident. Soit φ l'unique bijection croissante de $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ dans $\{1, \dots, n-k\}$, et soit ψ l'unique bijection croissante de $\{1, \dots, n\} \setminus \{v(i_1), \dots, v(i_k)\}$ dans $\{1, \dots, n-k\}$. Soient alors $\tilde{v} = \psi \circ v \circ \varphi^{-1}$ et $\tilde{w} = \psi \circ w \circ \varphi^{-1}$; ce sont des éléments de \mathfrak{S}_{n-k} . On a alors le

Lemme 0.3.1. $v \leq w \iff \tilde{v} \leq \tilde{w}$.

Une troisième caractérisation de l'ordre de Bruhat-Chevalley nous sera utile. Elle fait intervenir la fonction rang associée à une permutation : pour $w \in \mathfrak{S}_n$ et $(p, q) \in [1, n]^2$, on définit

$$r_w(p, q) = \#\{m \mid m \leq p \text{ et } w(m) \leq q\}.$$

On a alors le lemme suivant (*cf.* [26], Prop. 2.1.12),

Lemme 0.3.2. Pour $v, w \in \mathfrak{S}_n$

$$v \leq w \iff r_v(p, q) \geq r_w(p, q) \quad \forall p, q \in [1, n].$$

0.3.2 Une nouvelle approche : les corectrices

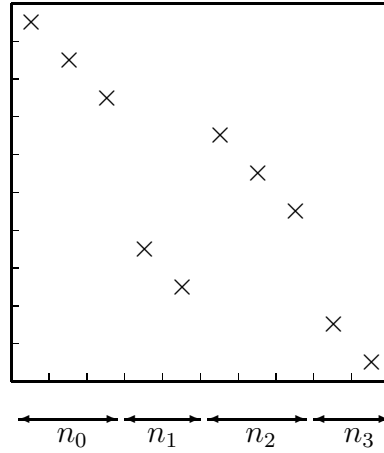
A. Lascoux et M.-P. Schützenberger ont introduit une nouvelle approche de l'ordre de Bruhat-Chevalley sur le groupe symétrique, en définissant les rectrices d'une permutation (*cf.* [25]). Il est plus commode pour nos besoins de considérer une notion duale, et nous parlerons des corectrices d'une permutation.

On appelle cograssmanniennes les permutations n'ayant qu'une montée, et cobigrassmanniennes les permutations cograssmanniennes dont l'inverse est aussi cograssmannienne. Une cobigrassmannienne est déterminée par un quadruplet d'entiers (n_0, n_1, n_2, n_3) , avec $n_0, n_3 \in \mathbb{N}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $\sum n_i = n$: on coupe $(n, n-1, \dots, 1)$ en quatre blocs dont les cardinaux sont les n_i , et on permute les deux blocs médians. Explicitement, une cobigrassmannienne

γ est de la forme :

$$\begin{cases} \gamma(i) = n + 1 - i & \text{pour } 1 \leq i \leq n_0, \\ \gamma(i) = n + 1 - n_2 - i & \text{pour } n_0 + 1 \leq i \leq n_0 + n_1, \\ \gamma(i) = n + 1 + n_1 - i & \text{pour } n_0 + n_1 + 1 \leq i \leq n_0 + n_1 + n_2, \\ \gamma(i) = n + 1 - i & \text{pour } n_0 + n_1 + n_2 + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En termes de graphe, les cobigrassmanniennes sont de la forme suivante :



On dispose alors d'un critère simple pour comparer une permutation arbitraire et une cobigrassmannienne, analogue à [25], Lemme 4.3 :

Lemme 0.3.3. *Soient $w \in \mathfrak{S}_n$ et c la cobigrassmannienne définie par le quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) . On a $w \leq c$ si et seulement si l'ensemble $w([1, n_0 + n_1]) \cap [1, n_1 + n_3]$ contient au moins n_1 éléments.*

Il est encore plus simple de comparer deux cobigrassmanniennes : si c et c' sont les cobigrassmanniennes associées respectivement à (n_0, n_1, n_2, n_3) et (n'_0, n'_1, n'_2, n'_3) , alors on a $c \leq c'$ si et seulement si $\begin{cases} n_0 \leq n'_0 \\ n_3 \leq n'_3 \end{cases}$ et $\begin{cases} n_1 \geq n'_1 \\ n_2 \geq n'_2 \end{cases}$.

Les cobigrassmanniennes permettent de décrire l'ordre de Bruhat-Chevalley de la façon suivante : notant \mathcal{C} l'ensemble des cobigrassmanniennes, on munit l'ensemble des parties de \mathcal{C} de l'ordre inverse de l'inclusion. Alors, d'après [25], l'application qui à $w \in \mathfrak{S}_n$ associe l'ensemble $\{c \in \mathcal{C} \mid w \leq c\}$ induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés de \mathfrak{S}_n sur son image dans $2^{\mathcal{C}}$. Etant donné une permutation w de \mathfrak{S}_n , les éléments minimaux de $\{c \in$

$\mathcal{C} \mid w \leq c$ sont appelés corectrices de w ; d'après ce qui précède, leur donnée détermine entièrement w .

Pour les décrire explicitement, introduisons l'ensemble coessentiel de w , dual de l'ensemble essentiel défini par W. Fulton (cf. [13]) :

$$\text{Coess}(w) = \left\{ (p, q) \in [1, n]^2 \mid \begin{array}{l} w(p-1) \leq q < w(p) \\ w^{-1}(q) \leq p-1 < w^{-1}(q+1) \end{array} \right\}.$$

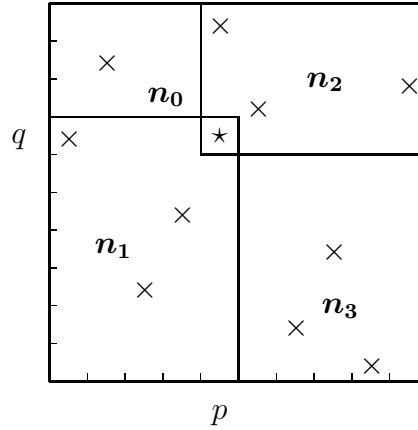
Cet ensemble paramètre les corectrices de w . La corectrice associée au point coessentiel (p, q) de w , notée $c_{p,q}$, est donnée par son quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) comme suit :

$$n_0 = \#\{m < p \mid w(m) > q\}$$

$$n_1 = \#\{m \leq p \mid w(m) \leq q\}$$

$$n_2 = \#\{m \geq p \mid w(m) \geq q\}$$

$$n_3 = \#\{m > p \mid w(m) < q\}$$



Définition 0.3.4. Soit c une cobigrassmannienne, associée au quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) . On dit que c est *itérable* si on a $n_0, n_3 \geq 1$, et on définit alors l'itérée c^1 de c par son quadruplet $(n_0 - 1, n_1 + 1, n_2 + 1, n_3 - 1)$. Elle vérifie l'inégalité $c^1 \leq c$.

0.4 Description des variétés de Schubert

La fonction rang définie en 0.3.1 permet de décrire les variétés de Schubert en termes de relations d'incidence : la variété de Schubert X_w est l'ensemble des drapeaux complets V^\bullet de \mathbb{K}^n qui vérifient pour tous $p, q \in [1, n]$,

$$\dim(V^p \cap \mathbb{K}^q) \geq r_w(p, q)$$

(cf. par exemple [26], Prop. 3.6.4).

Les points coessentiels de w fournissent un ensemble minimal de relations d'incidence pour X_w : les relations $\dim(V^{p-1} \cap \mathbb{K}^q) \geq r_w(p-1, q)$ pour $(p, q) \in \text{Coess}(w)$ sont indépendantes et suffisent à décrire X_w (cf. [14] chap. 10, ex. 6).

Comme de plus la fonction rang en un point coessentiel (p, q) vérifie $r_w(p, q) = r_w(p-1, q)$ (puisque l'on a $w(p) > q$), ces relations s'écrivent aussi $\dim(V^{p-1} \cap \mathbb{K}^q) \geq r_w(p, q)$ pour $(p, q) \in \text{Coess}(w)$.

En particulier, la variété de Schubert associée à la cobigrassmannienne c de quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) est définie par la seule relation

$$\dim(V^{n_0+n_1} \cap \mathbb{K}^{n_1+n_3}) \geq n_1.$$

0.5 Quadrants et rectangles

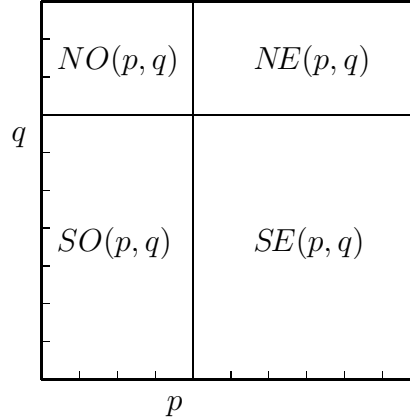
La donnée d'un point (p, q) du carré $[1, n]^2$ détermine les quatre quadrants suivants :

$$NO(p, q) = \{(i, j) \mid i \leq p, j > q\}$$

$$SO(p, q) = \{(i, j) \mid i \leq p, j \leq q\}$$

$$NE(p, q) = \{(i, j) \mid i > p, j > q\}$$

$$SE(p, q) = \{(i, j) \mid i > p, j \leq q\}$$



On considère $w \in \mathfrak{S}_n$. Les quadrants associés à (p, q) déterminent naturellement la partition suivante du graphe de w :

$$NO_w(p, q) = \Gamma_w \cap NO(p, q),$$

$$SO_w(p, q) = \Gamma_w \cap SO(p, q),$$

$$NE_w(p, q) = \Gamma_w \cap NE(p, q),$$

$$SE_w(p, q) = \Gamma_w \cap SE(p, q).$$

Si $(p+1, q)$ est un point coessentiel de w , cela correspond au découpage donné en 0.3.

On note $\partial(NO_w(p, q))$ (resp. $\partial(SE_w(p, q))$) la frontière Sud-Est (resp. Nord-Ouest) de $NO_w(p, q)$ (resp. $SE_w(p, q)$). On notera simplement NO , NO_w , $\partial(NO_w)$, *etc.* lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

On introduit aussi les notations suivantes ; soient a et b deux entiers distincts de $[1, n]$. Ecrivant indifféremment $[a, b]$ et $[b, a]$ pour désigner l'ensemble des entiers compris entre a et b , on note :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{(a,b)}(w) &=]a, b[\times]w(a), w(b)[\\ \overline{\mathcal{R}}_{(a,b)}(w) &= [a, b] \times [w(a), w(b)] \\ \mathcal{R}^{(a,b)}(w) &=]w^{-1}(a), w^{-1}(b)[\times]a, b[\\ \overline{\mathcal{R}}^{(a,b)}(w) &= [w^{-1}(a), w^{-1}(b)] \times [a, b].\end{aligned}$$

Soient maintenant A et B deux points distincts du graphe de w , de coordonnées respectives $(a, w(a))$ et $(b, w(b))$, on désigne aussi par $\mathcal{R}_{(A,B)}(w)$ (resp. $\overline{\mathcal{R}}_{(A,B)}(w)$) le rectangle $\mathcal{R}_{(a,b)}(w)$ (resp. $\overline{\mathcal{R}}_{(a,b)}(w)$).

Première partie

Cas des variétés de Schubert
covexillaires

Introduction

On dit qu'une permutation w , et par extension la variété de Schubert X_w , est *covexillaire* si elle n'a pas de configuration (3412). Les points coessentiels d'une telle permutation vérifient la propriété suivante (cf. [26] Prop. 2.2.8) : si (p, q) et (p', q') sont deux points coessentiels tels que $p \geq p'$ alors on a $q \geq q'$. Ainsi, l'ensemble des points coessentiels de w est totalement ordonné pour l'ordre produit sur $[1, n]^2$. On parlera donc de la suite croissante des points coessentiels de w .

De plus, la suite des rangs associée est alors strictement croissante. En effet, si (p, q) et (p', q') sont deux points coessentiels de w consécutifs avec $p \leq p'$, alors, comme on vient de le remarquer, on a aussi $q \leq q'$. Ainsi on a $SO(p, q) \subseteq SO(p', q')$, d'où $r_w(p, q) \leq r_w(p', q')$. Si de plus $p < p'$, alors le point $(p' - 1, w(p' - 1))$ est dans $SO(p', q')$ mais pas dans $SO(p, q)$, tandis que si $p = p'$ alors on a $q < q'$, et le point $(w^{-1}(q + 1), q + 1)$ est dans $SO(p', q')$ mais pas dans $SO(p, q)$. On a donc bien $r_w(p, q) < r_w(p', q')$.

On va montrer que dans le cas covexillaire, les singularités génériques sont de type S_1 , comme dans le cas grassmannien (cf. [3] et [4]).

Chapitre 1

Des composantes irréductibles du lieu singulier

Soit $w \in \mathfrak{S}_n$ une permutation covexillaire. Soient $(P_i)_{1 \leq i \leq k}$ la suite croissante des points coessentiels de w , $P_i = (p_i, q_i)$, $(r_i)_{1 \leq i \leq k}$ la suite strictement croissante des rangs de w aux points coessentiels, et enfin pour $i \in \{1, \dots, k\}$, c_i la corectrice de w associée au point coessentiel P_i .

Définition 1.1. Un point coessentiel (p, q) de w est dit *bien bordé* si la corectrice de w associée est itérable, c'est-à-dire si le graphe de w rencontre les quadrants $NO(p-1, q)$ et $SE(p-1, q)$.

Soit $P_i = (p_i, q_i)$ un point coessentiel bien bordé de w . On va construire une composante irréductible du lieu singulier de X_w associée à P_i .

Soient x_∞ l'abscisse du point du graphe de w le plus à l'Est dans le quadrant $NO(p_i-1, q_i)$, et $x_{-\infty}$ l'abscisse du point du graphe de w le plus à l'Ouest dans le quadrant $SE(p_i-1, q_i)$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x_\infty &= \sup \{p \mid p < p_i \text{ et } w(p) > q_i\}, \\ x_{-\infty} &= \inf \{p \mid p \geq p_i \text{ et } w(p) \leq q_i\}. \end{aligned}$$

On pose $y_\infty = w(x_\infty)$ et $y_{-\infty} = w(x_{-\infty})$. Comme w est covexillaire, le point (x_∞, y_∞) est aussi le point du graphe de w le plus au Sud dans le quadrant $NO(p_i-1, q_i)$: en effet, si $NO(p_i-1, q_i)$ contenait un point $(x, w(x))$ avec $w(x) < y_\infty$, on aurait aussi $x < x_\infty$ par définition de x_∞ , et les points d'abscisses $x, x_\infty, p_i-1, w^{-1}(q_i+1)$ formeraient une configuration (3412). De même, le point $(x_{-\infty}, y_{-\infty})$ est aussi le point du graphe de w le plus au Nord

dans le quadrant $SE(p_i - 1, q_i)$. Autrement dit, on a

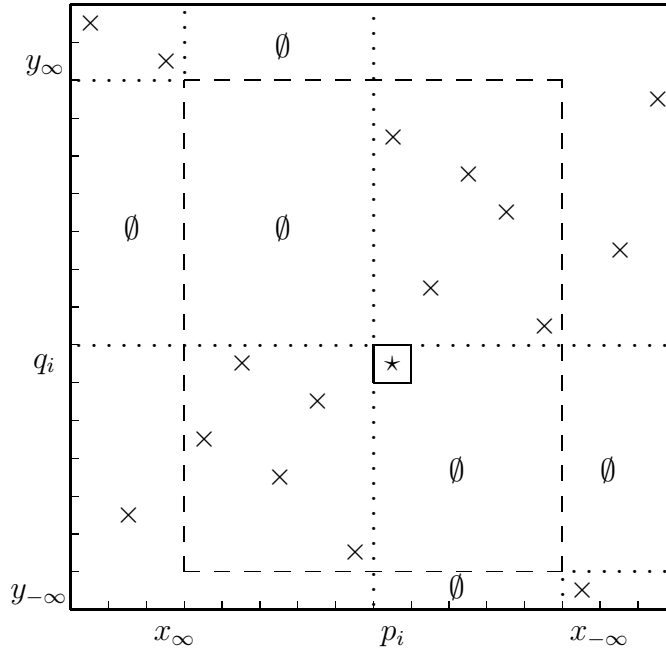
$$\begin{aligned} NO_w(p_i - 1, q_i) &\subseteq NO(x_\infty, y_\infty - 1), \\ SE_w(p_i - 1, q_i) &\subseteq SE(x_{-\infty} - 1, y_{-\infty}). \end{aligned}$$

De plus, comme (p_i, q_i) est un point coessentiel de w on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} x_\infty &< p_i - 1, \\ x_{-\infty} &> p_i, \\ y_{-\infty} &< q_i, \\ y_\infty &> q_i + 1. \end{aligned}$$

Lemme 1.2. *Le rectangle $R_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w)$ rencontre chacun des deux ensembles $SO_w(p_i - 1, q_i)$ et $NE_w(p_i - 1, q_i)$.*

La situation est résumée sur le diagramme suivant :



Preuve. Comme (p_i, q_i) est un point coessentiel de w , on a $w^{-1}(q_i) < p_i$ et $w(p_i - 1) \leq q_i$. De plus on a $w(x_\infty) > q_i$, en particulier $w^{-1}(q_i) \neq x_\infty$, on est donc dans l'un des deux cas suivants : $w^{-1}(q_i) \geq x_\infty + 1$ ou $w^{-1}(q_i) < x_\infty$. Dans le premier cas, le point $(w^{-1}(q_i), q_i)$ est dans $SO(p_i - 1, q_i) \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w)$. Dans le second cas, on a nécessairement $y_{-\infty} < w(p_i - 1)$, sinon

les abscisses $w^{-1}(q_i) < x_\infty < p_i - 1 < x_{-\infty}$ donneraient une configuration (3412). Le point $(p_i - 1, w(p_i - 1))$ est alors dans $SO(p_i - 1, q_i) \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w)$. Ainsi la zone $SO(p_i - 1, q_i) \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w)$ contient au moins un point du graphe de w .

On montre de même que la zone $NE(p_i - 1, q_i) \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w)$ contient nécessairement l'un des deux points $(w^{-1}(q_i + 1), q_i + 1)$ ou $(p_i, w(p_i))$, donc rencontre le graphe de w . \square

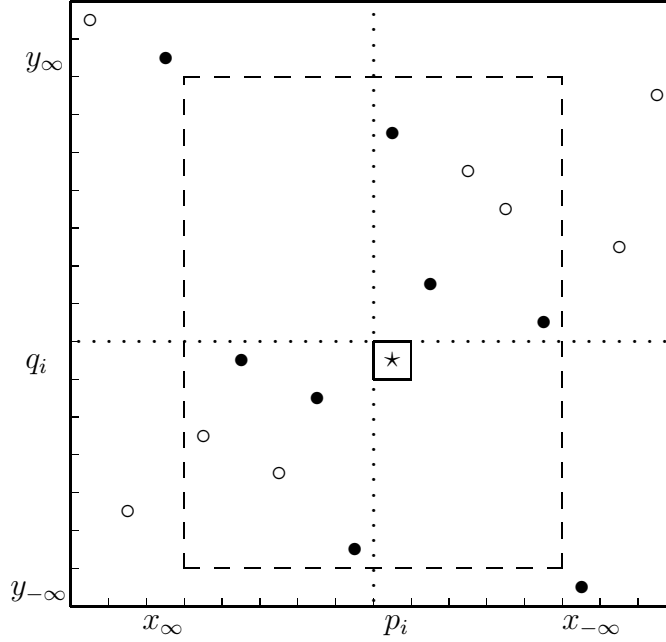
On associe à (p_i, q_i) deux suites de points du graphe de w , et deux entiers s_i et t_i , les longueurs de ces suites ; la première suite est la frontière Sud-Ouest de $NE_w(p_i - 1, q_i) \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w)$ (non vide d'après le lemme 1.2), appelée suite Nord-Est associée à (p_i, q_i) , notée $(x_h, y_h)_{1 \leq h \leq s_i}$, avec $q_i < y_1 < \dots < y_{s_i}$ et $x_1 > \dots > x_{s_i} \geq p_i$.

La seconde est la frontière Nord-Est de $SO_w(p_i - 1, q_i) \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w)$, notée $(x_h, y_h)_{-t_i \leq h \leq -1}$, avec $q_i > y_{-1} > \dots > y_{-t_i}$ et $x_{-1} < \dots < x_{-t_i} < p_i$.

Exemple 1.3. On considère la permutation

$$w = (16, 3, 15, 5, 7, 4, 6, 2, 13, 9, 12, 11, 8, 1, 10, 14)$$

dans \mathfrak{S}_{16} , et le point coessentiel $(9, 7)$. Sur le diagramme suivant, on a représenté par des \bullet les points du graphe de w de coordonnées (x_∞, y_∞) et $(x_{-\infty}, y_{-\infty})$ ainsi que les points des suites Nord-Est et Sud-Ouest, et par des \circ les autres points du graphe.



Définition 1.4. On notera $\mathcal{X}^i = \mathcal{X}_+^i \cup \mathcal{X}_-^i$ (resp. $\mathcal{Y}^i = \mathcal{Y}_+^i \cup \mathcal{Y}_-^i$) l'ensemble des abscisses (resp. ordonnées) ainsi construites, où

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_+^i &= \{x_h \mid h \in [1, s_i] \cup \{-\infty\}\}, & \mathcal{X}_-^i &= \{x_h \mid h \in [-t_i, -1] \cup \{\infty\}\}, \\ \mathcal{Y}_+^i &= \{y_h \mid h \in [1, s_i] \cup \{\infty\}\}, & \mathcal{Y}_-^i &= \{y_h \mid h \in [-t_i, -1] \cup \{-\infty\}\}. \end{aligned}$$

On omettra l'exposant i lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

On définit alors le cycle γ_i par

$$\gamma_i = (y_\infty, y_{-1}, \dots, y_{-t}, y_{-\infty}, y_1, \dots, y_s),$$

et la permutation τ_i par

$$\tau_i = \gamma_i w.$$

On note D'_i la région de $[1, n]^2$ définie par :

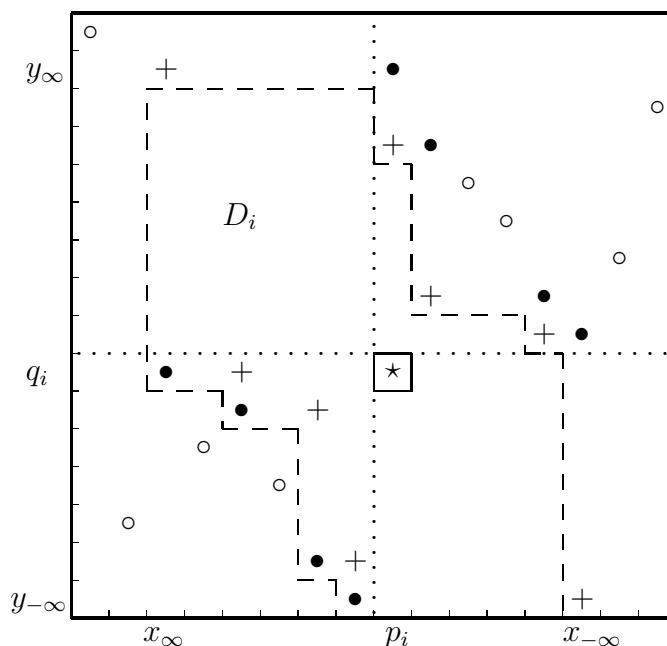
$$D'_i = \overline{\mathcal{R}}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w) \setminus \left(\bigcup_{h=1}^{t_i} SO(x_{-h} - 1, y_{-h} - 1) \cup \bigcup_{h=1}^{s_i} NE(x_h - 1, y_h - 1) \right),$$

et D_i la région obtenue en retirant à D'_i la bande d'ordonnée y_∞ , et la bande d'abscisse $x_{-\infty}$.

Exemple 1.5. On reprend l'exemple précédent ; la permutation τ_i est alors donnée par

$$(16, 3, 7, 5, 6, 4, 2, 1, 15, 13, 12, 11, 9, 8, 10, 14).$$

Sur le diagramme suivant, on a représenté par des \bullet les points du graphe de τ_i dont l'abscisse est dans \mathcal{X}^i , et par des \circ les autres points du graphe de τ_i . On a représenté par des $+$ les points du graphe de w dont l'abscisse est dans \mathcal{X}^i . Enfin D_i est la région délimitée par les pointillés.



Démontrons maintenant quelques propriétés simples de la permutation τ_i qui résultent de sa construction. On note χ_{D_i} la fonction caractéristique de l'ensemble D_i .

- Lemme 1.6.** (a) $r_{\tau_i} = r_w + \chi_{D_i}$, en particulier $\tau_i \leq w$,
 (b) $\ell(\tau_i) = \ell(w) - (s_i + t_i + 1)$,
 (c) $r_{\tau_i}(p_j - 1, q_j) = r_w(p_j - 1, q_j) + \delta_{ij}$ pour tout $(p_j, q_j) \in \text{Coess}(w)$.

Preuve. On vérifie que $r_{\tau_i} = r_w + 1$ sur D_i et $r_{\tau_i} = r_w$ en dehors de D_i . Compte tenu du lemme 0.3.2, cela implique $\tau_i \leq w$.

On remarque que γ_i peut s'écrire

$$\gamma_i = (y_{-1}, y_1) [(y_{-1}, y_{-2}) \cdots (y_{-t_i}, y_{-\infty})] [(y_1, y_2) \cdots (y_{s_i}, y_{\infty})].$$

D'après le lemme 0.1.1, si $\sigma' = (a, b)\sigma$ avec $a < b$ et $\sigma^{-1}(a) > \sigma^{-1}(b)$, aucun point du graphe de σ n'étant à l'intérieur du rectangle de sommets $(\sigma^{-1}(a), a)$ et $(\sigma^{-1}(b), b)$, alors $\ell(\sigma') = \ell(\sigma) - 1$. Ici, l'intérieur de D'_i ne contient aucun point du graphe de w . On est donc dans la situation précédente pour chacun des produits par une transposition permettant de passer de w à τ_i . L'assertion (b) en résulte immédiatement.

Reste, pour démontrer (c), à s'assurer que pour tout autre point coessentiel (p_j, q_j) , le point $(p_j - 1, q_j)$ n'est pas dans D_i . Comme $D_i \subseteq \overline{\mathcal{R}}_{(x_\infty, x_\infty)}(w) \setminus (\{x = x_\infty\} \cup \{y = y_\infty\})$, on peut supposer $(p_j - 1, q_j) \in \overline{\mathcal{R}}_{(x_\infty, x_\infty)}(w)$, et que ce point n'est pas dans les bandes d'abscisse x_∞ ou d'ordonnée y_∞ . Ainsi, on suppose que l'on a les inégalités

$$\begin{cases} x_\infty \leq p_j - 1 < x_\infty \\ y_\infty \leq q_j < y_\infty. \end{cases}$$

Supposons pour commencer $p_j > p_i$. Il vient alors $w(p_j - 1) > q_i$; en effet, si l'on a $p_j - 1 = p_i$, c'est l'une des inégalités qui caractérise le point coessentiel (p_i, q_i) , et sinon, on a $p_i < p_j - 1 < x_\infty$, et cela résulte alors de la définition de x_∞ . Ainsi $(p_j - 1, w(p_j - 1)) \in NE_w(p_i - 1, q_i)$. Comme les points $(x_h, y_h)_{h \in [1, s_i]}$ forment la frontière Sud-Ouest de $NE_w(p_i - 1, q_i)$, il existe un entier h tel que $(p_j - 1, w(p_j - 1)) \in NE(x_h - 1, y_h - 1)$. On en déduit, comme $q_j \geq w(p_j - 1)$, que $(p_j - 1, q_j) \in NE(x_h - 1, y_h - 1)$, et donc $(p_j - 1, q_j) \notin D_i$. De même, si $p_j < p_i$, on obtient $(p_j - 1, q_j) \notin D_i$ comme conséquence de l'inégalité $q_j < w(p_j)$.

Supposons enfin $p_j = p_i$, on a alors $w^{-1}(q_j) < p_j = p_i \leq w^{-1}(q_j + 1)$. Comme on a supposé

$$\begin{aligned} q_j < y_\infty &= \inf \{q \mid q > q_i, w^{-1}(q) < p_i\} \\ q_j + 1 > y_\infty &= \sup \{q \mid q \leq q_i, w^{-1}(q) \geq p_i\}, \end{aligned}$$

il vient d'une part $q_j \leq q_i$ et d'autre part $q_{j+1} > q_i$, c.-à-d. $q_j \geq q_i$. Ainsi on a $q_j = q_i$, et on obtient $(p_j, q_j) = (p_i, q_i)$. Cela achève la preuve. \square

Nous allons maintenant décrire la transversale $\mathcal{N}_{\tau_i, w}$. Soit $\bar{\tau}_i \in GL_n$ la matrice de la permutation τ_i .

On renvoie à 1.4 pour la définition de \mathcal{X}_- et \mathcal{Y}_+ , et on définit alors

$$\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-} = \left\{ u = (u_{hl}) \in GL_n \left| \begin{array}{l} u_{\tau_i(l)l} = 1 \text{ pour tout } l, \\ u_{hl} = 0 \text{ si } h \notin \mathcal{Y}_+ \text{ ou } l \notin \mathcal{X}_-, \\ \text{rg } (u_{hl})_{\substack{h \in \mathcal{Y}_+ \\ l \in \mathcal{X}_-}} \leq 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Le tore T agit sur $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ par $: t \cdot u = tu(\bar{\tau}_i^{-1}t^{-1}\bar{\tau}_i)$.
 Nous allons démontrer le

Théorème 1.7. *L'application $u \mapsto u\mathbb{K}^\bullet$ induit un isomorphisme T -équivariant de $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ sur $\mathcal{N}_{\tau_i, w}$. En particulier, X_{τ_i} est une composante irréductible du lieu singulier de X_w .*

Preuve. Par définition, $\mathcal{N}_{\tau_i, w} = [\tau_i(U^-) \cap U^-]e_{\tau_i} \cap X_w$. Il résulte de la décomposition de Bruhat que l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} (\bar{\tau}_i U^- \cap U^- \bar{\tau}_i) & \longrightarrow & [\tau_i(U^-) \cap U^-]e_{\tau_i} \\ u & \mapsto & u\mathbb{K}^\bullet \end{array}$$

est un isomorphisme T -équivariant. Il s'agit de montrer que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-} = \phi^{-1}(\mathcal{N}_{\tau_i, w}).$$

On remarque d'abord que

$$\bar{\tau}_i U^- \cap U^- \bar{\tau}_i = \left\{ u \in GL_n \mid \begin{array}{l} u_{\tau_i(l)l} = 1 \text{ pour tout } l, \\ u_{hl} = 0 \text{ si } h < \tau_i(l) \text{ ou } l > \tau_i^{-1}(h) \end{array} \right\}.$$

Fixons maintenant $u \in \phi^{-1}(\mathcal{N}_{\tau_i, w})$, et montrons que $u_{hl} = 0$ si $l \notin \mathcal{X}_-$ et $h > \tau_i(l)$, ou si $h \notin \mathcal{Y}_+$ et $l < \tau_i^{-1}(h)$.

Considérons pour commencer le cas où $l \notin \mathcal{X}_-$. Alors le point $(l, \tau_i(l))$ n'est pas dans D_i , on a donc, d'après le lemme 1.6, $r_{\tau_i}(l, \tau_i(l)) = r_w(l, \tau_i(l))$. L'espace $u(\mathbb{K}^l) + \mathbb{K}^{\tau_i(l)}$ contient la famille de vecteurs

$$\{e_1, \dots, e_{\tau_i(l)}\} \cup \{ue_p \mid p < l, \tau_i(p) > \tau_i(l)\} \cup \{ue_l - e_{\tau_i(l)}\}.$$

S'il existait $h > \tau_i(l)$ tel que $u_{hl} \neq 0$, alors cette famille serait libre. Or son cardinal est

$$\tau_i(l) + l - r_{\tau_i}(l, \tau_i(l)) + 1 = \tau_i(l) + l - r_w(l, \tau_i(l)) + 1,$$

alors que $\dim(u(\mathbb{K}^l) + \mathbb{K}^{\tau_i(l)}) \leq \tau_i(l) + l - r_w(l, \tau_i(l))$, une contradiction. Cela montre que $u_{hl} = 0$ pour tout $h > \tau_i(l)$.

On montre de même que si $h \notin \mathcal{Y}_+$, alors $u_{hl} = 0$ pour tout $l < \tau_i^{-1}(h)$.

Soit maintenant ρ le rang de la matrice extraite $(u_{hl})_{\substack{h \in \mathcal{Y}_+ \\ l \in \mathcal{X}_-}}$. On considère

l'espace F engendré par la famille de vecteurs

$$\{e_1, \dots, e_{q_i}\} \cup \{ue_p \mid p \leq p_i - 1, \tau_i(p) > q_i\} \cup \{ue_l, l \in \mathcal{X}_-\}.$$

On voit que sa dimension est

$$q_i + p_i - 1 - r_{\tau_i}(p_i - 1, q_i) + \rho.$$

D'autre part on a $r_{\tau_i}(p_i - 1, q_i) = r_w(p_i - 1, q_i) + 1$, et donc il vient

$$\dim F = p_i - 1 + q_i - r_w(p_i - 1, q_i) - 1 + \rho.$$

Or F est contenu dans l'espace $u(\mathbb{K}^{p_i-1}) + \mathbb{K}^{q_i}$, qui est de dimension au plus $p_i - 1 + q_i - r_w(p_i - 1, q_i)$. On obtient donc $\rho \leq 1$.

On a donc montré que $\phi^{-1}(\mathcal{N}_{\tau_i, w}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$. Or $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ est une variété irréductible de dimension $s_i + t_i + 1$, et d'après le lemme 1.6, $\mathcal{N}_{\tau_i, w}$ est aussi de dimension $s_i + t_i + 1$. On obtient ainsi $\phi^{-1}(\mathcal{N}_{\tau_i, w}) = \mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$.

La variété $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ a un unique point singulier : $\bar{\tau}_i$. On en déduit que X_{τ_i} est une composante irréductible du lieu singulier de X_w . \square

Chapitre 2

Réciproque, description du lieu singulier

On conserve les notations du chapitre précédent.

Nous allons d'abord construire une résolution de la variété de Schubert X_w , du type de celles considérées par A. Zelevinsky (cf. [34]) et par K. Ryan (cf. [33]), que l'on utilisera à plusieurs reprises dans la suite. Soient

$$Z_w = \{(U^\bullet, V^\bullet) \in \mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)} \times \mathbb{F}_n \mid U^{r_j} \subseteq V^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\},$$

$\pi : Z_w \longrightarrow \mathbb{F}_n$ la seconde projection, et

$$\Omega = \{V^\bullet \in \mathbb{F}_n \mid \dim(V^{p_i-1} \cap \mathbb{K}^{q_i}) = r_i \text{ pour tout } i\}.$$

Proposition 2.1. *La projection π fait de Z_w une résolution de X_w . De plus, π induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert Ω de X_w .*

Preuve. On montre d'abord que la variété Z_w est irréductible et lisse, par une méthode inspirée de [33]. On donne ici les détails de la preuve afin d'obtenir une formule explicite donnant la dimension de Z_w , qui sera utile dans la suite.

Considérons d'abord la variété

$$\tilde{Z}_w = \{(U^\bullet, V^\bullet) \in \mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)} \times \mathbb{F}_n \mid U^{r_j} \subseteq V^{p_j-1} \text{ pour tout } j\}.$$

La première projection $\mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)} \times \mathbb{F}_n \longrightarrow \mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)}$ induit une fibration localement triviale $\pi_1 : \tilde{Z}_w \longrightarrow \mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)}$, de fibre isomorphe à

$$Y = \{V^\bullet \in \mathbb{F}_n \mid \mathbb{K}^{r_j} \subseteq V^{p_j-1} \text{ pour tout } j\}.$$

On a

$$\pi_1(Z_w) = \{U^\bullet \in \mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)} \mid U^{r_j} \subseteq \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\}$$

et $\pi_1^{-1}\pi_1(Z_w) = Z_w$, donc π_1 induit une fibration localement triviale $Z_w \longrightarrow Y'$, où

$$Y' = \{U^\bullet \in \mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)} \mid U^{r_j} \subseteq \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\},$$

de fibre Y . Il suffit maintenant de montrer que Y et Y' sont irréductibles et lisses.

On projette d'abord Y sur la variété $\widehat{Y} = \{\widehat{V}^\bullet \in \mathbb{F}_{(p_1-1, \dots, p_k-1; n)} \mid \mathbb{K}^{r_j} \subseteq \widehat{V}^{p_j-1} \text{ pour tout } j\}$. Cette projection est une fibration localement triviale dont la fibre est un produit de variétés de drapeaux, donc irréductible et lisse. Définissons pour $1 \leq j \leq k$,

$$\widehat{Y}_{\geq j} = \{\widehat{V}^\bullet \in \mathbb{F}_{(p_j-1, \dots, p_k-1; n)} \mid \mathbb{K}^{r_h} \subseteq \widehat{V}^{p_h-1} \text{ pour tout } h \geq j\}.$$

Alors $\widehat{Y}_{\geq k}$ est une grassmannienne, donc elle est irréductible et lisse. Puis on observe que la projection naturelle de $\widehat{Y}_{\geq j-1}$ sur $\widehat{Y}_{\geq j}$ est une fibration localement triviale, de fibre isomorphe à une grassmannienne, donc irréductible et lisse. On obtient ainsi par récurrence l'irréductibilité et la lissité de tous les $\widehat{Y}_{\geq j}$, en particulier de $\widehat{Y} = \widehat{Y}_{\geq 1}$.

De même, les projections

$$\mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)} \longrightarrow \mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_{k-1}; n)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Gr_{r_1}(n)$$

font de Y' une suite de fibrations en grassmanniennes, donc Y' est irréductible et lisse. On a ainsi le résultat pour Z_w .

Il est clair que Z_w se projette par π sur X_w , et que π est bijective au-dessus de l'ouvert Ω de X_w . En particulier on en déduit que les variétés Z_w et X_w ont même dimension. Soit $z_w = (\mathbb{K}^{r^\bullet}, e_w) \in Z_w$, l'orbite Uz_w est un ouvert dense de Z_w et il résulte de la décomposition de Bruhat que π induit un isomorphisme $Uz_w \longrightarrow Ue_w$; par conséquent π est birationnelle.

Comme Ω est un ouvert de la variété normale X_w (cf. par exemple [32]), il résulte alors du théorème principal de Zariski que π induit un isomorphisme au-dessus de Ω (cf. [10] 5.4, cor. 2). \square

On déduit de cette proposition que l'ouvert Ω de X_w est formé de points lisses. Le lieu singulier de X_w est donc contenu dans le complémentaire de Ω , c'est-à-dire dans $\bigcup_{c_i \text{ itérable}} X_w \cap X_{c_i}^1$ (cf. 0.4). Nous montrerons qu'il y a en fait

égalité, et que les intersections $X_w \cap X_{c_i^1}$ sont les composantes irréductibles du lieu singulier construites au chapitre 1.

Pour commencer, nous avons la

Proposition 2.2. *Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que la corectrice c_i soit itérable, la variété $X_w \cap X_{c_i^1}$ est irréductible.*

Preuve. On fixe i dans $\{1, \dots, k\}$ tel que la corectrice associée soit itérable, c'est-à-dire tel que le point coessentiel P_i soit bien bordé. Nous allons montrer que l'intersection $X_w \cap X_{c_i^1}$ est l'image d'un morphisme $Z_w^i \rightarrow X_w$ où Z_w^i est une variété irréductible.

Comme le point coessentiel P_i est bien bordé, il existe un entier $p < p_i$ tel que $w(p) > q_i$. On a donc $r_i < \min(p_i - 1, q_i)$. On définit la suite $(r_j^i)_{1 \leq j \leq k}$ par :

$$r_j^i = r_j + \delta_{ij}.$$

Cette suite est croissante. On définit alors la variété

$$Z_w^i = \{(U^\bullet, V^\bullet) \in \mathbb{F}_{(r_1^i, \dots, r_k^i; n)} \times \mathbb{F}_n \mid U^{r_j^i} \subseteq V^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\}.$$

Soit π_i la projection de Z_w^i sur le deuxième facteur $\pi_i : \begin{array}{ccc} Z_w^i & \longrightarrow & X_w \\ (U^\bullet, V^\bullet) & \longmapsto & V^\bullet \end{array}$.

Par construction, l'image de π_i est contenue dans $X_w \cap X_{c_i^1}$. Réciproquement, si $V^\bullet \in X_w \cap X_{c_i^1}$, la suite $E_j = V^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j}$ pour $j \leq k$ est croissante car w est covexillaire, et on a $\dim E_j \geq r_j^i$. On peut donc choisir $U^{r_j^i} \subseteq E_j$ pour $j \leq k$ avec $\dim U^{r_j^i} = r_j^i$ et $U^{r_j^i} \subseteq U^{r_{j+1}^i}$. Ainsi $X_w \cap X_{c_i^1}$ est l'image de π_i , et il reste à montrer que Z_w^i est irréductible. Cela se fait aisément en adaptant la preuve de l'irréductibilité de Z_w dans la proposition 2.1 : la projection de Z_w^i sur le premier facteur est une fibration localement triviale de base $Y'^i = \{U^\bullet \in \mathbb{F}_{(r_1^i, \dots, r_k^i; n)} \mid U^{r_j^i} \subseteq \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\}$, et de fibre isomorphe à $Y^i = \{V^\bullet \in \mathbb{F}_n \mid \mathbb{K}^{r_j^i} \subseteq V^{p_j-1} \text{ pour tout } j\}$. On démontre l'irréductibilité de Y^i et Y'^i comme on a procédé pour Y et Y' . Cela achève la démonstration. \square

Remarque 2.3. On notera v_i la permutation définie par $X_w \cap X_{c_i^1} = X_{v_i}$. On observe que pour toute autre corectrice itérable $c_{i'}$, les permutations v_i et $v_{i'}$ sont incomparables. En effet, on a $r_{v_i}(p_j - 1, q_j) \geq r_j^i$ pour tout $(p_j, q_j) \in \text{Coess}(w)$. Mais d'après le lemme 1.6 (c), on a $\tau_i \leq v_i$ et $r_{\tau_i}(p_j - 1, q_j) = r_j^i$ pour tout j . On en déduit que $r_{v_i}(p_j - 1, q_j) = r_j^i$ pour tout j . En particulier, d'après le lemme 0.3.2, v_i et $v_{i'}$ sont incomparables.

Voyons maintenant la

Proposition 2.4. *Le point e_{v_i} est singulier dans X_w .*

Preuve. Supposons au contraire que ce soit un point lisse. Considérons

$$C_{[v_i, w]} := \bigcup_{v_i \leq y \leq w} Be_y.$$

Alors $C_{[v_i, w]}$ est un ouvert B -stable et lisse de X_w contenant e_{v_i} . La projection $\pi : Z_w \rightarrow X_w$ induit une projection birationnelle $\bar{\pi} : \pi^{-1}(C_{[v_i, w]}) \rightarrow C_{[v_i, w]}$. Notons $\text{Reg}(\pi)$ l'ouvert de Z_w formé des points admettant un voisinage ouvert U tel que π induise un isomorphisme de U sur $\pi(U)$. Le fermé complémentaire de $\text{Reg}(\pi)$ est le lieu exceptionnel de π , noté $\text{Ex}(\pi)$. On note aussi Reg_π et \mathcal{E}_π les images par π de $\text{Reg}(\pi)$ et $\text{Ex}(\pi)$. On définit de la même manière $\text{Reg}(\bar{\pi})$, $\text{Ex}(\bar{\pi})$, $\text{Reg}_{\bar{\pi}}$ et $\mathcal{E}_{\bar{\pi}}$.

D'après une forme du théorème principal de Zariski (*cf.* [30], III, 9, prop.1), si $\bar{\pi}$ n'est pas un isomorphisme, on aura l'égalité suivante :

$$\dim(\text{Ex}(\bar{\pi})) = \ell(w) - 1 \quad (\#).$$

Nous allons expliciter le lieu exceptionnel de $\bar{\pi}$ pour voir que cette égalité n'est pas vérifiée. Cela achèvera la démonstration.

Observons que comme π est surjective, \mathcal{E}_π est le fermé complémentaire de Reg_π ; il en est de même pour $\bar{\pi}$, et il en résulte en particulier que $\text{Ex}(\bar{\pi}) = \bar{\pi}^{-1}(\mathcal{E}_{\bar{\pi}})$. Comme π est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert Ω , on a $\mathcal{E}_\pi \subseteq \Omega^c$ (où c désigne le complémentaire), c.-à-d. $\mathcal{E}_\pi \subseteq \bigcup_{c_j \text{ itérable}} X_w \cap X_{c_j^c}$. On en

déduit, compte tenu de la proposition précédente, $\mathcal{E}_\pi \subseteq \bigcup_{c_j \text{ itérable}} X_{v_j}$.

On a remarqué que les permutations v_j associées aux corectrices itérables de w sont incomparables, donc $C_{[v_i, w]} \cap (\bigcup_{c_j \text{ itérable}} X_{v_j}) = Be_{v_i}$, et il vient

$\mathcal{E}_{\bar{\pi}} \subseteq Be_{v_i}$. Ainsi, l'image du lieu exceptionnel de $\bar{\pi}$ est soit égal à Be_{v_i} , soit vide, selon que $e_{v_i} \in \mathcal{E}_{\bar{\pi}}$ ou non. On s'intéresse donc maintenant à la fibre de $\bar{\pi}$ au point e_{v_i} :

$$\bar{\pi}^{-1}(e_{v_i}) \simeq \{U^\bullet \in \mathbb{F}_{(r_1, \dots, r_k; n)} \mid U^{r_j} \subseteq V_{v_i}^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\}.$$

Comme on l'a remarqué précédemment, on a $\dim(V_{v_i}^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j}) = r_j + \delta_{ij}$ pour tout j , donc on a

$$\bar{\pi}^{-1}(e_{v_i}) \simeq \{U^{r_i} \in Gr_{r_i}(n) \mid V_{v_i}^{p_i-1} \cap \mathbb{K}^{q_i-1} \subseteq U^{r_i} \subseteq V_{v_i}^{p_i-1} \cap \mathbb{K}^{q_i}\},$$

c'est-à-dire

$$\bar{\pi}^{-1}(e_{v_i}) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{K}^{r_i - r_{i-1} + 1}).$$

En particulier, comme $r_i - r_{i-1} + 1 \geq 2$, $e_{v_i} \in \mathcal{E}_{\bar{\pi}}$, d'où $\mathcal{E}_{\bar{\pi}} = Be_{v_i}$.

On déduit de la décomposition de Bruhat l'isomorphisme $\bar{\pi}^{-1}(Be_{v_i}) \simeq \bar{\pi}^{-1}(e_{v_i}) \times Be_{v_i}$, et donc $\dim(\bar{\pi}^{-1}(Be_{v_i})) = r_i - r_{i-1} + \ell(v_i)$. L'égalité (#) donne donc

$$\ell(w) - \ell(v_i) = r_i - r_{i-1} + 1.$$

On peut d'autre part tirer des preuves des propositions 2.1 et 2.2 une autre expression de la codimension de X_{v_i} dans X_w . En effet, on a déjà remarqué que $\dim X_w = \dim Z_w$. D'autre part, l'ensemble

$$\Omega^i = \{V^\bullet \in X_{v_i} \mid \dim(V^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j}) = r_j^i\}$$

est un ouvert non vide de X_{v_i} et la projection π_i est bijective au-dessus de cet ouvert, on a donc $\dim X_{v_i} = \dim Z_w^i$. En reprenant pas à pas les preuves de ces propositions (2.1 et 2.2), on obtient, en posant $p_0 = 1, r_0 = 0$, et $p_{k+1} = q_{k+1} = r_{k+1} = n + 1$:

$$\begin{aligned} \dim Z_w = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (p_{j+1} - p_j)(p_{j+1} - p_j - 1) + \\ \sum_{j=1}^k (p_{j+1} - p_j)(p_j - 1 - r_j) + \sum_{j=1}^k (r_j - r_{j-1})(q_j - r_j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dim Z_w^i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (p_{j+1} - p_j)(p_{j+1} - p_j - 1) + \\ \sum_{j=1}^k (p_{j+1} - p_j)(p_j - 1 - r_j^i) + \sum_{j=1}^k (r_j^i - r_{j-1}^i)(q_j - r_j^i). \end{aligned}$$

D'où par soustraction : $\ell(w) - \ell(v_i) = (p_{i+1} - p_i) - (q_i - r_i) + (r_i + 1 - r_{i-1}) + (q_{i+1} - r_{i+1})$.

En rapprochant les deux expressions, on obtient :

$$(p_{i+1} - p_i) + (q_{i+1} - q_i) = r_{i+1} - r_i.$$

Cela est absurde, car par un raisonnement simple de dénombrement, tenant compte, suivant les cas, des inégalités $w(p_{i+1}) > q_{i+1}$ ou $w^{-1}(q_i + 1) > p_i$, on montre que l'on a toujours

$$r_{i+1} - r_i \leq (p_{i+1} - p_i) + (q_{i+1} - q_i) - 1.$$

Cette contradiction montre que e_{v_i} est un point singulier de X_w , et la proposition 2.4 est démontrée. \square

Il résulte immédiatement de cette proposition que $\text{Sing } X_w = \bigcup_{c_i \text{ itérable}} X_{v_i}$,

et $v_i = \tau_i$ pour tout i tel que la corectrice c_i est itérable.

On a ainsi obtenu le théorème suivant

Théorème 2.5. *Soit w une permutation covexillaire.*

(a) *Les composantes irréductibles de $\text{Sing } X_w$ sont en bijection avec l'ensemble des points coessentiels bien bordés du graphe de w : la composante correspondant au point P_i est donnée par la permutation τ_i construite au chapitre 1. Elle est de type S_1 , la transversale étant isomorphe au cône $\mathcal{C}_{s_i+1, t_i+1}$.*

(b) *Si c_i est la corectrice (itérable) associée à P_i , alors $X_w \cap X_{c_i^1}$ est irréductible, et l'on a $X_{\tau_i} = X_w \cap X_{c_i^1}$.*

Remarque 2.6. L'irréductibilité de $X_w \cap X_{c^1}$ était connue de Lascoux (cf. [23], remarque suivant le théorème). En utilisant les clefs des permutations, $\text{inf}(w, c^1)$ se calcule simplement en prenant les minima composante par composante ; cette dernière description des composantes irréductibles du lieu singulier se prête ainsi à être implémentée.

Exemple 2.7. On considère la permutation covexillaire

$$w = (7, 2, 3, 6, 4, 1, 5),$$

et la corectrice itérable c définie par le quadruplet $(1, 2, 3, 1)$. L'itérée c^1 est définie par $(0, 3, 4, 0)$. Les clefs de w et c^1 sont respectivement :

$$\begin{array}{cccccccc} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & \text{et} & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \\ & 2 & 3 & 6 & 6 & 6 & & & 2 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ & & 2 & 3 & 4 & 4 & & & & 1 & 2 & 3 & 5 \\ & & & 2 & 3 & 3 & & & & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & 2 & 2 & & & & & & 1 & 2 \\ & & & & & 1 & & & & & & & 1 \end{array}$$

On construit la clef de $\inf(w, c^1)$ composante par composante, prenant le plus petit des deux entiers correspondant dans les clefs de w et c^1 . On obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & \\ & 2 & 2 & 3 & 6 & 6 & \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ & & & 1 & 2 & 3 & \\ & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & 1 & \end{array}$$

On en déduit

$$\tau = \inf(w, c^1) = (3, 2, 1, 7, 6, 4, 5).$$

Deuxième partie

Cas général

Chapitre 3

Renforcement d'une condition d'incidence

On a démontré au chapitre précédent que lorsque w est covexillaire et que c est une corectrice de w , la variété $X_w \cap X_{c^1}$ est irréductible, et l'on a construit un cycle γ , dépendant de w et c , tel que, posant $\tau = \gamma w$, on ait $X_w \cap X_{c^1} = X_\tau$. Nous allons étendre cette construction à une permutation w quelconque et une cobigrassmannienne itérable c , de quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) , telle que $w \leq c$ et $w \not\leq c^1$, et décrire les composantes irréductibles de $X_w \cap X_{c^1}$. Cela revient à décrire les éléments maximaux de $\Lambda(w, c^1)$, où pour des permutations w_1, \dots, w_k , on note $\Lambda(w_1, \dots, w_k)$ l'ensemble des permutations z telles que $z \leq w_i$ pour $i = 1, \dots, k$.

Posant $p = n_0 + n_1$ et $q = n_1 + n_3$, on voit que $X_w \cap X_{c^1}$ est la sous-variété, notée $X_w^{(p,q)+}$, définie par le renforcement de la condition d'incidence correspondant à (p, q)

$$X_w^{(p,q)+} = \{V^\bullet \in X_w \mid \dim(V^p \cap \mathbb{K}^q) \geq r_w(p, q) + 1\}.$$

Réciproquement, étant donné (p, q) tel que $r_w(p, q) < \text{Min}(p, q)$, la cobigrassmannienne c de quadruplet défini par

$$\begin{aligned} n_0 &= p - r_w(p, q), \\ n_1 &= r_w(p, q), \\ n_2 &= n - (p + q) + r_w(p, q), \\ n_3 &= q - r_w(p, q), \end{aligned}$$

est itérable, et d'après le lemme 0.3.3, elle majore w , et l'on a $w \not\leq c^1$. On a

$$X_w^{(p,q)+} = X_w \cap X_{c^1}.$$

Soit c une cobigrassmannienne itérable de quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) ; on note

$$\Omega(c) = \{w \in \mathfrak{S}_n \mid w \leq c \text{ et } w \not\leq c^1\}.$$

On pose $p = n_0 + n_1$ et $q = n_1 + n_3$. On considère $w \in \Omega(c)$; d'après le lemme 0.3.3, on a

$$\#SO_w = n_1,$$

et il vient alors aussi

$$\#NO_w = n_0,$$

$$\#NE_w = n_2,$$

$$\#SE_w = n_3.$$

On voit facilement que la bigrassmannienne

$$b = (1, \dots, n_1, n_1 + n_3 + 1, \dots, n_1 + n_3 + n_0, \\ n_1 + 1, \dots, n_1 + n_3, n_1 + n_3 + n_0 + 1, \dots, n),$$

qui, avec les notations de [25], est la bigrassmannienne associée au quadruplet (n_1, n_0, n_3, n_2) , est le plus petit élément de $\Omega(c)$.

Proposition 3.1. *Les éléments maximaux de $\Lambda(b, c^1)$ sont exactement les $(i, j) b$ pour $n_1 < i \leq q$, et $q < j \leq q + n_0$.*

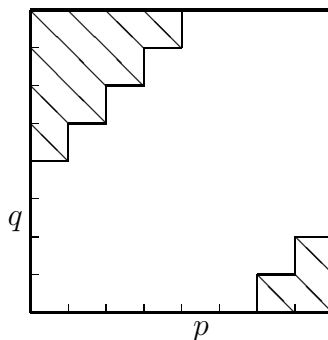
Preuve. Comme on a $b(i) = i$ pour $i \in [1, n_1] \cup [n_1 + n_3 + n_0 + 1, n]$, toute permutation $v \leq b$ coïncide avec b sur ces intervalles. On peut donc supposer $n_1 = n_2 = 0$, c'est-à-dire que $b = (q + 1, \dots, n, 1, \dots, q)$, avec $n = p + q$. La condition $v \leq c^1$ est alors

$$\#SO_v \geq 1 \quad (\star).$$

On observe que l'on a $v \leq b$ si et seulement si

$$v(i) \leq q + i \text{ pour } i \leq p, \text{ et } v(i) \geq i - p \text{ pour } i \geq p + 1 \quad (\star\star).$$

Cela s'exprime aussi en termes de graphe, comme représenté sur la figure suivante : le graphe de v doit être contenu dans la zone non hachurée



On considère maintenant $v \in \Lambda(b, c^1)$ maximale. Soit $r = \#SO_v = \#\{i \leq p \mid v(i) \leq q\}$; on a $r \geq 1$ puisque $v \leq c^1$. On a aussi $r = \#NE_v = \#\{i > p \mid v(i) > q\}$. Soient $i_1 < \dots < i_r$ les $i \leq p$ tels que $v(i) \leq q$, et $i'_r < \dots < i'_1$ les $i > p$ tels que $v(i) > q$. La maximalité de v entraîne $v(i_1) > \dots > v(i_r)$ et $v(i'_r) > \dots > v(i'_1)$. On veut montrer que $r = 1$ et que $v(i) = b(i)$ pour $i \notin \mathcal{A} := \{i_1, \dots, i_r, i'_r, \dots, i'_1\}$. Or on a pour tout $i \in [1, p]$,

$$v(i) = b(i) \text{ ou } i \in \mathcal{A} \quad (*).$$

En effet, c'est clair pour $i = 1$ car $b(1) = q + 1$; soit $i \in [2, p]$, supposons $v(i) \neq b(i)$ et $i \notin \mathcal{A}$. On a donc $q < v(i) < q + i$. Or, comme $v \leq b$, on a pour tout $i' \in [1, i - 1]$, $v(i') \leq q + i' < q + i$, il vient donc $v^{-1}(q + i) > i$. On a ainsi $(v(i), q + i)v > v$, et on vérifie sans peine que $(v(i), q + i)v \leq b, c^1$ à l'aide de (*) et (**). Cela contredit la maximalité de v , et (*) est démontrée.

On démontre de même que pour tout $i \in [p + 1, n]$,

$$v(i) = b(i) \text{ ou } i \in \mathcal{A}.$$

Cela entraîne, comme $q \geq v(i_1) > \dots > v(i_r)$ et $v(i'_r) > \dots > v(i'_1) > q$, que $v(i_1) = b(i'_1) = i'_1 - p$ et $v(i'_1) = b(i_1) = q + i_1$. On obtient alors $r = 1$ car si $l \geq 2$, alors $v < v(i_1, i'_1) \leq b, c^1$, exclu par maximalité de v . Cela montre que $v = (i'_1 - p, i_1 + q)b$, c'est-à-dire que v est de la forme voulue.

On remarque de plus que, si $i \leq q$, et $q < j$, notant D le rectangle $[j - q, i + p - 1] \times [i, j - 1]$, on a

$$r_{(i,j)b} = r_b + \chi_D,$$

où χ_D désigne la fonction caractéristique de D . Il résulte alors du lemme 0.3.2 que les permutations $(i, j)b$ pour $i \leq q$, et $q < j$, sont deux à deux incomparables. Cela achève la preuve de la proposition 3.1. \square

On considère maintenant un élément arbitraire w de $\Omega(c)$, et l'on se donne $(P_+, P_-) \in \partial(NO_w) \times \partial(SE_w)$ (voir 0.5 pour ces notations). Notons (x_∞, y_∞) les coordonnées de P_+ , et $(x_\infty, y_{-\infty})$ celles de P_- . Si l'ensemble $NE_w \cap \mathcal{R}_{(P_+, P_-)}(w)$ est non vide, sa frontière Sud-Ouest constitue la suite NE associée à (P_+, P_-) . Soient s la longueur de cette suite ($s = 0$ si $NE_w \cap \mathcal{R}_{(P_+, P_-)}(w) = \emptyset$), et $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq s}$ les coordonnées des points, indexés de sorte que $x_s < \dots < x_1$. On a alors $y_1 < \dots < y_s$.

De manière symétrique, si l'ensemble $SO_w \cap \mathcal{R}_{(P_+, P_-)}(w)$ est non vide, sa frontière Nord-Est constitue la suite SO associée à (P_+, P_-) . Soient t la longueur de cette suite et $(x_i, y_i)_{-t \leq i \leq -1}$ les coordonnées des points, indexés de sorte que $x_{-1} < \dots < x_{-t}$. On a alors $y_{-t} < \dots < y_{-1}$.

Définition 3.2. On notera $\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \cup \mathcal{X}_-$ (resp. $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_+ \cup \mathcal{Y}_-$) l'ensemble des abscisses (resp. ordonnées) ainsi distinguées, où

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_+ &= \{x_i \mid i \in [1, s] \cup \{-\infty\}\}, & \mathcal{Y}_+ &= \{y_i \mid i \in [1, s] \cup \{\infty\}\}, \\ \mathcal{X}_- &= \{x_i \mid i \in [-t, -1] \cup \{\infty\}\}, & \mathcal{Y}_- &= \{y_i \mid i \in [-t, -1] \cup \{-\infty\}\}. \end{aligned}$$

On définit alors le cycle $\gamma_{(P_+, P_-)}$ par

$$\gamma_{(P_+, P_-)} = (y_\infty, y_{-1}, \dots, y_{-t}, y_{-\infty}, y_1, \dots, y_s),$$

et la permutation $\tau_{(P_+, P_-)}$ par

$$\tau_{(P_+, P_-)} = \gamma_{(P_+, P_-)} w.$$

Il pourra être nécessaire par la suite de spécifier la permutation w à laquelle $\tau_{(P_+, P_-)}$ est associée, en écrivant $\tau_{(P_+, P_-)}(w)$. En revanche, on la notera simplement τ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur w et (P_+, P_-) .

On note D' la région de $[1, n]^2$ définie par :

$$D' = \overline{\mathcal{R}_{(P_+, P_-)}(w)} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^t SO(x_{-i} - 1, y_{-i} - 1) \cup \bigcup_{i=1}^s NE(x_i - 1, y_i - 1) \right),$$

et D la région obtenue en retirant à D' la bande d'ordonnée y_∞ , et la bande d'abscisse $x_{-\infty}$.

On démontre alors comme au chapitre 1 le

Lemme 3.3. (a) $r_\tau = r_w + \chi_D$, en particulier $\tau \leq w$,
(b) $\ell(\tau) = \ell(w) - (s + t + 1)$.

Nous allons démontrer le

Théorème 3.4. *Les permutations $\tau_{(P_+, P_-)}$, pour $(P_+, P_-) \in \partial(NO_w) \times \partial(SE_w)$, sont exactement les éléments maximaux de $\Lambda(w, c^1)$.*

Nous procédons par étapes, en prouvant d'abord la

Proposition 3.5. *Pour tout $(P_+, P_-) \in \partial(NO_w) \times \partial(SE_w)$, $\tau_{(P_+, P_-)}$ est un élément maximal de $\Lambda(w, c^1)$.*

Preuve. Le groupe des permutations de l'intervalle $[x_\infty, x_{-\infty}]$ (resp. $[y_{-\infty}, y_\infty]$) s'identifie naturellement à un sous-groupe de \mathfrak{S}_n , que l'on note \mathfrak{S}_X (resp. \mathfrak{S}_Y). L'ensemble des permutations dont le graphe coïncide avec celui de w en dehors du rectangle $\overline{\mathcal{R}}_{(P_+, P_-)}(w)$ est $\mathcal{F} = \mathfrak{S}_Y w \cap w \mathfrak{S}_X$. Soit $n' = \#\overline{\mathcal{R}}_{(P_+, P_-)}(w) \cap \Gamma_w$; il existe un isomorphisme d'ensembles ordonnés $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{S}_{n'}$, qui préserve la différence des longueurs (cf. [31], 4.2).

Nous allons montrer que $\tau_{(P_+, P_-)}$ est un élément maximal de $\Lambda(w, c^1)$, en établissant successivement que $\mathcal{F} \cap \Lambda(w, c^1)$ a un plus grand élément v , puis que v est un élément maximal de $\Lambda(w, c^1)$, et enfin que $v = \tau_{(P_+, P_-)}$.

On observe d'abord que l'ensemble $\mathcal{F} \cap [id, c^1]$ a un plus grand élément. En effet, posons

$$\begin{aligned} n'_0 &= \#\overline{\mathcal{R}}_{(P_+, P_-)}(w) \cap NO_w, \\ n'_1 &= \#\overline{\mathcal{R}}_{(P_+, P_-)}(w) \cap SO_w, \\ n'_2 &= \#\overline{\mathcal{R}}_{(P_+, P_-)}(w) \cap NE_w, \\ n'_3 &= \#\overline{\mathcal{R}}_{(P_+, P_-)}(w) \cap SE_w, \end{aligned}$$

et soit \tilde{c} la cobigrassmannienne de $\mathfrak{S}_{n'}$ de quadruplet (n'_0, n'_1, n'_2, n'_3) . Alors on a $n'_0 = n'_3 = 1$ par choix de P_+ et P_- . En particulier \tilde{c} est itérable. La permutation γ définie par $\gamma = \varphi^{-1}(\tilde{c}^1)$ est le plus grand élément de $\mathcal{F} \cap [id, c^1]$. En effet, on a $\gamma \leq c^1$ par construction, et si $y \in \mathcal{F} \cap [id, c^1]$, alors on a $\varphi(y) \leq \tilde{c}^1$, ce qui entraîne, puisque φ est un isomorphisme d'ordre, $y \leq \varphi^{-1}(\tilde{c}^1) = \gamma$.

On en déduit que

$$\mathcal{F} \cap \Lambda(w, c^1) = \mathcal{F} \cap \Lambda(w, \gamma).$$

D'autre part, on a

$$\varphi(\mathcal{F} \cap \Lambda(w, \gamma)) = \Lambda(\varphi(w), \tilde{c}^1).$$

Soit $L = \{1, \dots, n'_1, n'_1 + 2, \dots, n' - 1\}$, et soit \mathfrak{S}_L le sous-groupe parabolique de $\mathfrak{S}_{n'}$ engendré par $\{s_i, i \in L\}$. La cobigrassmannienne \tilde{c}^1 est le plus grand élément de \mathfrak{S}_L . On a maintenant besoin du lemme suivant, dû à V. Deodhar (cf. [19], Lemma 11.1).

Lemme 3.6. *Soit W un groupe de Coxeter et W_Q un sous-groupe parabolique de W . Soit W^Q l'ensemble des représentants minimaux de W/W_Q dans W . Alors pour tous $\sigma, \sigma' \in W^Q$ et $w \in W_Q$ tels que $\sigma' \leq \sigma$, il existe un unique $w' = \eta(\sigma', \sigma, w) \in W_Q$ tel que $\sigma'w' \leq \sigma w$ qui soit maximal pour cette propriété.*

Il en résulte que $\Lambda(\varphi(w), \tilde{c}^1)$ a un unique élément maximal, soit α . Posons $v = \varphi^{-1}(\alpha)$; comme $\varphi(\mathcal{F} \cap [id, c^1]) = [id, \tilde{c}^1]$ et que φ est un isomorphisme d'ordre, alors v est le plus grand élément de $\mathcal{F} \cap \Lambda(w, c^1)$.

De plus, v est un élément maximal de $\Lambda(w, c^1)$. En effet, soit $y \in [v, w] \cap [id, c^1]$. Comme $v \in \mathcal{F}$, on a aussi $y \in \mathcal{F}$. En effet, on a $v(i) = w(i)$ pour tout $i < x_\infty$ ou $i > x_{-\infty}$, il vient donc $y(i) = w(i)$ pour tout $i < x_\infty$ ou $i > x_{-\infty}$. De même, on a $v^{-1}(j) = w^{-1}(j)$ pour tout $j < y_{-\infty}$ ou $j > y_\infty$, il vient donc aussi $y^{-1}(j) = w^{-1}(j)$ pour tout $j < y_{-\infty}$ ou $j > y_\infty$, et $y \in \mathcal{F}$. La maximalité de v entraîne alors $y = v$.

Montrons maintenant que $v = \tau_{(P_+, P_-)}$. Par construction, $\tau_{(P_+, P_-)} \in \mathcal{F} \cap \Lambda(w, c^1)$, on a donc $\tau_{(P_+, P_-)} \leq v$. Pour obtenir l'égalité, il suffit de montrer que ces permutations ont même longueur.

La démonstration du lemme est constructive, ce qui va nous permettre d'expliciter α , puis v . On applique ici le lemme avec $\sigma' = id$. Soit σ le représentant minimal de la classe $\varphi(w)\mathfrak{S}_L$, et soit $u = \sigma^{-1}\varphi(w)$. Il résulte de la preuve du lemme donnée dans [19] que si s est une réflexion simple telle que $s\sigma \leq \sigma$, alors

$$(\dagger) \quad \eta(id, \sigma, u) = \begin{cases} \eta(id, s\sigma, u) & \text{si } s \notin \mathfrak{S}_L, \\ s * \eta(id, s\sigma, u) & \text{si } s \in \mathfrak{S}_L, \end{cases}$$

où $*$ est l'unique loi associative sur $\mathfrak{S}_{n'}$ telle que pour toute transposition simple s et tout $y \in \mathfrak{S}_{n'}$, $s * y = \max(y, sy)$.

On voit sans peine que

$$\sigma = (2, 3, \dots, n'_1 + 1, n', 1, n'_1 + 2, n'_1 + 3, \dots, n' - 1);$$

par conséquent une écriture réduite de σ est :

$$(s_{n'-1} \cdots s_{n'_1+2}) (s_1 \cdots s_{n'_1}) s_{n'_1+1}.$$

On obtient donc, en utilisant (\dagger) ,

$$\alpha = \eta(id, \sigma, u) = ((s_{n'-1} \cdots s_{n'_1+2}) (s_1 \cdots s_{n'_1})) * u.$$

D'autre part, on obtient facilement que la permutation $u = \sigma^{-1}\varphi(w)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} u(1) &= n'_1 + 1, \\ u(p) &= \varphi(w)(p) - 1 \text{ pour } p \in [2, n'_1 + 1], \\ u(p) &= \varphi(w)(p) + 1 \text{ pour } p \in [n'_1 + 2, n' - 1] \\ u(n') &= n'_1 + 2. \end{aligned}$$

Le graphe de $\varphi(w)$ est obtenu à partir de celui de w en ne considérant que les points contenus dans le rectangle $\overline{\mathcal{R}}_{(P_+, P_-)}(w)$. En particulier, les suites NE et SO définies plus tôt donnent deux suites de points du graphe de $\varphi(w)$, que l'on appelle encore NE et SO. Notons $b_{-t} < \dots < b_{-1} < b_1 < \dots < b_s$ les ordonnées des points de ces suites. On voit alors que $\alpha = \bar{\sigma}u$, avec $\ell(\alpha) = \ell(\bar{\sigma}) + \ell(u)$, où $\bar{\sigma}$ est le sous-mot de $(s_{n'-1} \dots s_{n'_1+2})(s_1 \dots s_{n'_1})$ obtenu par omission, de droite à gauche, de $s_{b_{-1}-1}, \dots, s_{b_{-t}-1}, s_{b_1}, \dots, s_{b_s}$. En particulier, on a $\ell(\alpha) = \ell(u) + n' - 2 - (s+t)$. Mais $\ell(u) = \ell(\varphi(w)) - \ell(\sigma)$, c.-à-d. $\ell(u) = \ell(\varphi(w)) - (n' - 1)$. On en déduit finalement $\ell(\varphi(w)) - \ell(\alpha) = (s+t+1)$, et donc $\ell(w) - \ell(v) = (s+t+1)$ puisque φ préserve la différence des longueurs. Il vient donc $\ell(v) = \ell(\tau_{(P_+, P_-)})$, et $\tau_{(P_+, P_-)} = v$ est un élément maximal de $\Lambda(w, c^1)$. \square

Nous allons maintenant démontrer, par récurrence sur la longueur de $w \in \Omega(c)$ la

Proposition 3.7. *Pour tout $w \in \Omega(c)$, $\Lambda(w, c^1)$ a exactement $\#(\partial(NO_w) \times \partial(SE_w))$ éléments maximaux.*

Preuve. Compte-tenu de ce qui précède, il suffit de démontrer que $\Lambda(w, c^1)$ a au plus $\#(\partial(NO_w) \times \partial(SE_w))$ éléments maximaux. La proposition 3.1 donne le résultat pour l'élément minimal de $\Omega(c)$.

On se donne maintenant $w \in \Omega(c)$ tel que $w > b$. On suppose que pour tout $z \in [b, c]$ tel que $\ell(z) < \ell(w)$, les éléments maximaux de $\Lambda(z, c^1)$ sont exactement les $\tau_{(P_+, P_-)}(z)$ pour $(P_+, P_-) \in \partial(NO_z) \times \partial(SE_z)$.

Soit y un élément maximal de $\Lambda(w, c^1)$; comme $w > b$, il existe soit un entier $j \neq q$ tel que $s_j w < w$, soit un entier $i \neq p$ tel que $ws_i < w$. Plaçons-nous par exemple dans le premier cas (l'autre situation se traite de manière similaire). On remarque alors que $s_j w \in \Omega(c)$. De plus, il résulte de la "propriété Z" de Deodhar (cf. [8], Theorem 1.1) que $s_j y \leq w$. D'autre part, l'entier j est choisi de sorte que $s_j c^1 < c^1$, et il vient donc aussi $s_j y \leq c^1$. On

en déduit, par maximalité de y , que $s_j y < y$. A nouveau, par la propriété Z, on obtient $s_j y \leq s_j w$. Il existe donc un élément maximal τ de $\Lambda(s_j w, c^1)$ tel que $s_j y \leq \tau$. On montre alors, à l'aide de la "propriété Z" que $y = s_j * \tau$. On a donc obtenu

$$\text{Max}(\Lambda(w, c^1)) \subseteq s_j * \text{Max}(\Lambda(s_j w, c^1)).$$

De plus, si $\tau \in \Lambda(s_j w, c^1)$, alors on a $s_j * \tau \leq w$, c^1 . Il vient donc

$$\text{Max}(\Lambda(w, c^1)) \subseteq \text{Max}\left(s_j * \text{Max}(\Lambda(s_j w, c^1))\right) \quad (\dagger).$$

Il nous suffit maintenant de montrer que $\#(\partial(NO_w) \times \partial(SE_w))$ majore le cardinal du terme de droite de (\dagger) . Par hypothèse de récurrence, on a

$$\# \text{Max}\left(s_j * \text{Max}(\Lambda(s_j w, c^1))\right) \leq \#(\partial(NO_{s_j w}) \times \partial(SE_{s_j w})).$$

Supposons $j > q$; alors il est clair que $\partial(SE_{s_j w}) = \partial(SE_w)$, et l'on voit facilement que $\# \partial(NO_{s_j w}) = \# \partial(NO_w)$ ou $\# \partial(NO_w) + 1$. Plus précisément, on a $\# \partial(NO_{s_j w}) = \# \partial(NO_w) + 1$ si et seulement si $(w^{-1}(j), j)$ appartient à $\partial(NO_w)$, et est l'unique point de NO_w au Sud-Est de $(w^{-1}(j+1), j+1)$. C'est le seul cas à considérer, car si $\# \partial(NO_{s_j w}) = \# \partial(NO_w)$, la majoration cherchée est établie. On a alors

$$\partial(NO_{s_j w}) = \partial(NO_w) \setminus \{(w^{-1}(j), j)\} \cup \{(w^{-1}(j), j+1), (w^{-1}(j+1), j)\}.$$

Notons P_+ (resp. H'_+) le point de $\Gamma_{s_j w}$ de coordonnées $(w^{-1}(j+1), j)$ (resp. $(w^{-1}(j), j+1)$). Pour tout $P_- \in \partial(SE_w) = \partial(SE_{s_j w})$, on a

$$s_j * \tau_{(P_+, P_-)}(s_j w) = \tau_{(P_+, P_-)}(s_j w),$$

et

$$s_j * \tau_{(H'_+, P_-)}(s_j w) = s_j \tau_{(H'_+, P_-)}(s_j w).$$

Montrons qu'alors

$$s_j * \tau_{(P_+, P_-)}(s_j w) \leq s_j * \tau_{(H'_+, P_-)}(s_j w) ;$$

on note $x_{-1} < \dots < x_{-t}$ les abscisses des points de la suite SO définie par (P_+, P_-) . Soit i le plus petit entier tel que $x_{-i} > w^{-1}(j)$; alors les points de la suite SO définie par (H'_+, P_-) ont pour abscisses $x_{-i} < \dots < x_{-t}$. Les

permutations $\tau_{(P_+, P_-)}(s_j w)$ et $s_j \tau_{(H'_+, P_-)}(s_j w)$ ne diffèrent qu'en les abscisses $w^{-1}(j+1) < x_{-1} < \cdots < x_{-i+1} < w^{-1}(j)$, sur lesquelles $s_j \tau_{(H'_+, P_-)}(s_j w)$ induit la permutation maximale. On obtient ainsi

$$s_j * \tau_{(P_+, P_-)}(s_j w) \leq s_j * \tau_{(H'_+, P_-)}(s_j w).$$

Il vient donc

$$\# \text{Max}\left(s_j * \text{Max}(\Lambda(s_j w, c^1))\right) \leq \#\left[(\partial(NO_{s_j w}) \setminus \{P_+\}) \times \partial(SE_{s_j w})\right],$$

c'est la majoration cherchée. On traite de même le cas $j < q$. On obtient ainsi le résultat voulu pour w , ce qui achève la démonstration de la proposition, et par conséquent du théorème 3.4. \square

Chapitre 4

Des composantes de type S_1 et S_2

4.1 Configurations I et II

Dans cette section, on définit les configurations I et II d'une permutation w , et on leur associe des permutations $\leq w$. Les configurations I sont une version intrinsèque de la construction du chapitre précédent (c'est-à-dire qui ne nécessite pas le choix préalable d'une cobigrassmannienne c telle que $w \in \Omega(c)$).

Définition 4.1.1. • On appelle *configuration I* de w un ensemble de points du graphe de w ,

$$\mathcal{I} = \{(x_\infty, y_\infty), (x_{-\infty}, y_{-\infty})\} \cup \{(x_i, y_i), i \in [-t, -1] \cup [1, s]\},$$

avec $s, t \geq 0$, vérifiant les inégalités

$$\begin{aligned} x_\infty &< x_{-1} < \cdots < x_{-t} < x_s < \cdots < x_1 < x_{-\infty}, \\ y_{-\infty} &< y_{-t} < \cdots < y_{-1} < y_1 < \cdots < y_s < y_\infty, \end{aligned}$$

et tels que, notant $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w)$, on ait :

$$\Gamma_w \cap \mathcal{R} \subseteq \bigcup_{i=1}^t SO(x_{-i}, y_{-i}) \cup \bigcup_{i=1}^s NE(x_i - 1, y_i - 1) \quad (\Delta).$$

• Si $st = 0$, on dit que la configuration est dégénérée, au Nord-Est si $s = 0$, et au Sud-Ouest si $t = 0$.

- Si \mathcal{I} est une configuration I de w , on lui associe le cycle

$$\gamma(\mathcal{I}) = (y_\infty, y_{-1}, \dots, y_{-t}, y_{-\infty}, y_1, \dots, y_s),$$

et l'on définit la permutation

$$\tau(\mathcal{I}) = \gamma(\mathcal{I}) w.$$

On définit alors la région D comme au chapitre 3, et l'on rappelle que l'on a : $r_{\tau(\mathcal{I})} = r_w + \chi_D$, en particulier $\tau(\mathcal{I}) \leq w$, et $\ell(\tau(\mathcal{I})) = \ell(w) - (s + t + 1)$.

On obtient une paramétrisation des configurations I de w de la manière suivante.

Définition 4.1.2. Soit $P = (p+1, q)$ un point coessentiel bien bordé de w (cf. déf. 1.1). On appelle *bordage minimal* de P tout couple de points $(P_+, P_-) \in NO_w(p, q) \times SE_w(p, q)$ tels que $\mathcal{R}_{(P_+, P_-)}(w) \cap NO(p, q)$ et $\mathcal{R}_{(P_+, P_-)}(w) \cap SE(p, q)$ ne contiennent aucun point du graphe de w .

On fixe un point coessentiel bien bordé $P = (p+1, q)$ de w , et un bordage minimal (P_+, P_-) de P . Alors on a $(P_+, P_-) \in \partial(NO_w(p, q)) \times \partial(SE_w(p, q))$, et l'on considère alors les suites NE et SO associées, notées $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq s}$ et $(x_i, y_i)_{-t \leq i \leq -1}$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{I} := \{P_+, P_-\} \cup \{(x_i, y_i), i \in [-t, -1] \cup [1, s]\},$$

est une configuration I de w . De plus, toutes les configurations I de w sont obtenues de cette manière. On note \mathcal{T}_w l'ensemble des triplets (P, P_+, P_-) , où P est un point coessentiel bien bordé de w et (P_+, P_-) un bordage minimal de P . L'application qui à un tel triplet associe la configuration I décrite plus haut n'est en général pas injective; ces configurations sont paramétrées par les classes d'équivalence de \mathcal{T}_w pour la relation suivante : $(P, P_+, P_-) \sim (Q, Q_+, Q_-)$ si l'on a $P_+ = Q_+$, $P_- = Q_-$, et si les quadrants associés aux points coessentiels P et Q définissent la même partition de $\Gamma_w \cap \mathcal{R}_{(P_+, P_-)}(w)$.

On passe maintenant aux configurations II.

Définition 4.1.3. • Une configuration (3412) de w est la donnée de quatre points du graphe, d'abscisses $a < b < c < d$, tels que $w(c) < w(d) < w(a) < w(b)$. Par abus de langage, on assimilera cette donnée à celle des abscisses.

- Une configuration (3412), d'abscisses $a < b < c < d$, est dite *incompressible*

s'il n'existe pas d'autre configuration (3412) d'abscisses $x < y < c < d$ telle que $(x, w(x))$ (resp. $(y, w(y))$) soit au Sud-Est de $(a, w(a))$ (resp. $(b, w(b))$), ni, de manière symétrique, d'autre configuration (3412) d'abscisses $a < b < x < y$ telle que $(x, w(x))$ (resp. $(y, w(y))$) soit au Nord-Ouest de $(c, w(c))$ (resp. $(d, w(d))$).

La donnée d'une configuration (3412) détermine une partition du rectangle $\mathcal{R}_{II} = [a, d] \times [w(c), w(b)]$ en neuf zones. D'une part les zones

$$\begin{aligned} NO_{II} &= [a, b] \times [w(a), w(b)], \\ NE_{II} &= [c, d] \times [w(a), w(b)], \\ SO_{II} &= [a, b] \times [w(c), w(d)], \\ SE_{II} &= [c, d] \times [w(c), w(d)], \end{aligned}$$

la zone centrale

$$C =]b, c[\times]w(d), w(a)[,$$

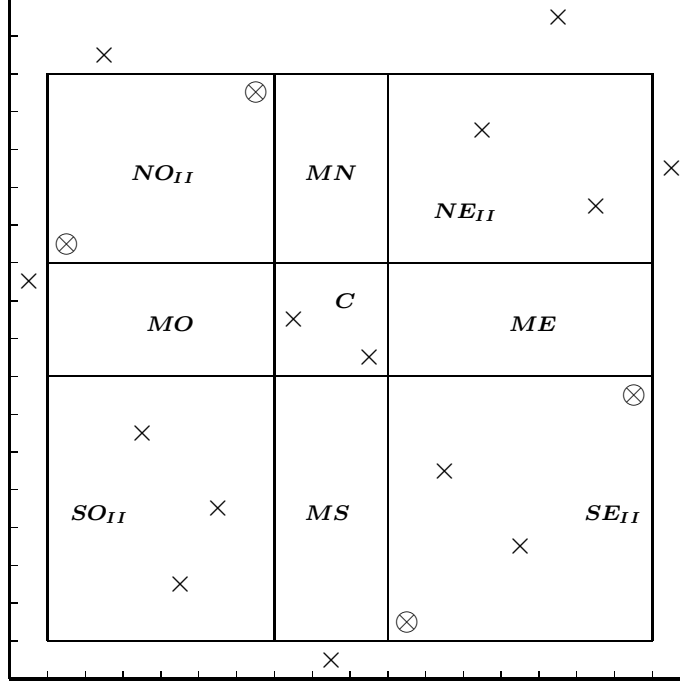
et enfin les zones médianes

$$\begin{aligned} MN &=]b, c[\times [w(a), w(b)], \\ MO &= [a, b] \times]w(d), w(a)[, \\ ME &= [c, d] \times]w(d), w(a)[, \\ MS &=]b, c[\times [w(c), w(d)]. \end{aligned}$$

Exemple 4.1.4. On considère la permutation

$$w = (11, 12, 17, 7, 3, 5, 16, 10, 1, 9, 2, 6, 15, 4, 18, 13, 8, 14) \in \mathcal{S}_{18},$$

et la configuration (3412) donnée par les points d'abscisses 2, 7, 11, 17 (cette configuration est incompressible). Sur le diagramme suivant, on a représenté par des \otimes les points de la configuration, et par des \times les autres points du graphe de w . On a représenté le rectangle \mathcal{R}_{II} associé et les 9 zones décrites ci-dessus.



Soit maintenant $a < b < c < d$ une configuration (3412) incompressible. Alors, d'une part, aucune des quatre zones médianes ne contient de point du graphe de w , et, d'autre part, si $C \cap \Gamma_w$ est non vide, notant ses points $(c_i, d_i)_{1 \leq i \leq r}$, avec $c_1 < \dots < c_r$, on a $d_1 > \dots > d_r$. Cette suite de points du graphe de w est appelée la suite centrale associée à la configuration $a < b < c < d$.

On considère maintenant l'ensemble $NE_{II} \cap \Gamma_w$. S'il n'est pas vide, sa frontière Sud-Ouest constitue la suite NE associée à la configuration $a < b < c < d$. Soient s la longueur de cette suite, et $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq s}$ ses points, indexés de sorte que $c < x_s < \dots < x_1 < d$. On a alors $w(a) < y_1 < \dots < y_s < w(b)$.

De manière symétrique, on considère $SO_{II} \cap \Gamma_w$. S'il est non vide, sa frontière Nord-Est constitue la suite SO associée à la configuration $a < b < c < d$. Soient t la longueur de cette suite et $(x_i, y_i)_{-t \leq i \leq -1}$ ses points, indexés de sorte que $a < x_{-1} < \dots < x_{-t} < b$. On a alors $w(c) < y_{-t} < \dots < y_{-1} < w(d)$.

Définition 4.1.5. • On appelle *configuration II* de w la donnée d'une configuration (3412) incompressible et des trois suites de points associées comme

ci-dessus. Une configuration II n'ayant pas de suite centrale sera dite *mixte*, et une configuration II avec une suite centrale mais n'ayant ni suite NE ni suite SO sera dite *pure*.

• On notera

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_- &= \{x_i \mid i \in [-t, -1]\}, & \mathcal{Y}_- &= \{y_i \mid i \in [-t, -1]\}, \\ \mathcal{C} &= \{c_i \mid i \in [1, r]\}, & \mathcal{D} &= \{d_i \mid i \in [1, r]\}, \\ \mathcal{X}_+ &= \{x_i \mid i \in [1, s]\}, & \mathcal{Y}_+ &= \{y_i \mid i \in [1, s]\}.\end{aligned}$$

On définit alors le cycle $\gamma(\mathcal{I})$ par

$$\gamma(\mathcal{I}) = (w(a), y_{-1}, \dots, y_{-t}, w(c), w(d), y_1, \dots, y_s, w(b))$$

et la permutation $\sigma(\mathcal{I})$ par

$$\sigma(\mathcal{I}) = \gamma(\mathcal{I}) w.$$

Soit D'_{II} la région du carré $[1, n]^2$ définie par

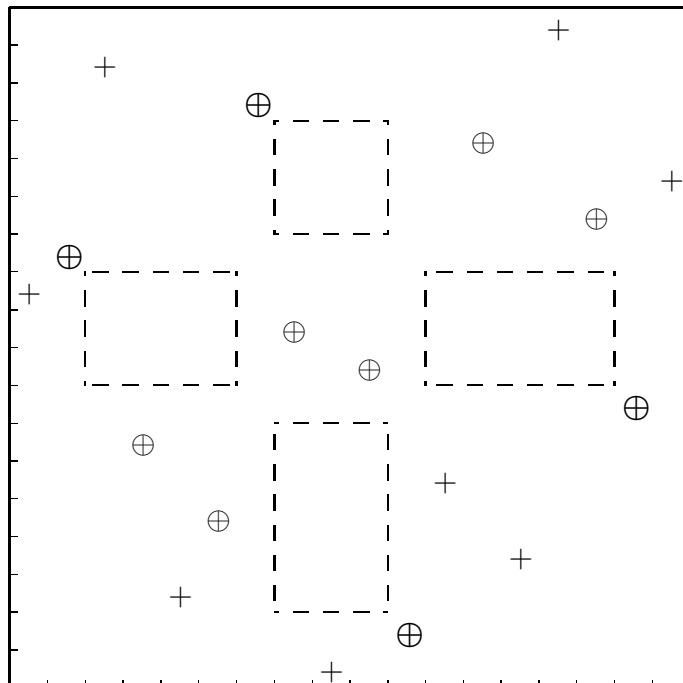
$$D'_{II} = \mathcal{R}_{II} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^t SO(x_{-i} - 1, y_{-i} - 1) \cup \bigcup_{i=1}^s NE(x_i - 1, y_i - 1) \cup NO(b - 1, w(a) - 1) \cup SE(c - 1, w(d) - 1) \right),$$

et soit D_{II} la région obtenue en retirant à D'_{II} la bande d'ordonnée $w(b)$ et la bande d'abscisse d .

Exemple 4.1.6. On reprend la permutation considérée dans l'exemple précédent

$$w = (11, 12, 17, 7, 3, 5, 16, 10, 1, 9, 2, 6, 15, 4, 18, 13, 8, 14) \in \mathcal{S}_{18},$$

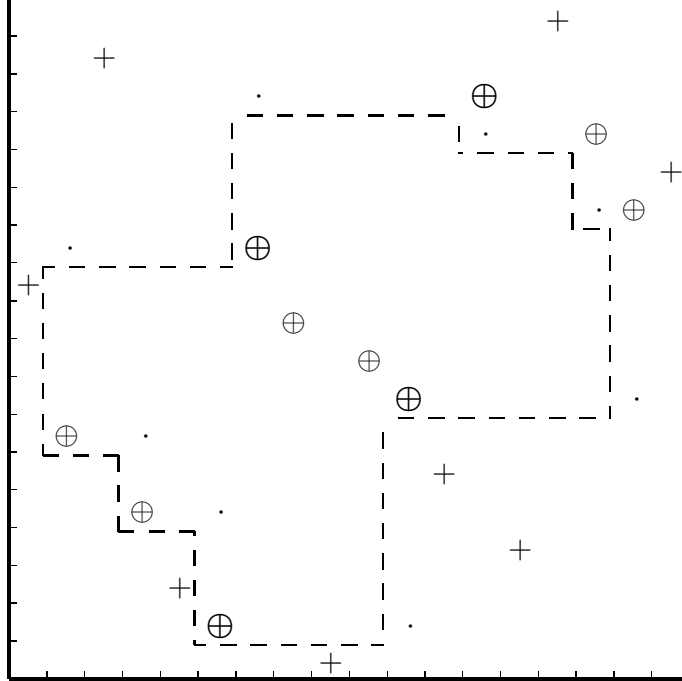
et la configuration (3412) incompressible donnée par les points d'abscisses 2, 7, 11, 17. Sur le diagramme suivant, on a représenté par des \oplus les quatre points de la configuration, par des \ominus les points des trois suites décrites ci-dessus, et par des $+$ les autres points du graphe de w .



La permutation $\sigma(\mathcal{I})$ est alors

$$\sigma(\mathcal{I}) = (11, 7, 17, 5, 3, 2, 12, 10, 1, 9, 8, 6, 16, 4, 18, 15, 13, 14).$$

Sur le diagramme suivant, on a représenté par des \oplus les points du graphe de $\sigma(\mathcal{I})$ dont les ordonnées sont dans $\{w(c), w(d), w(a), w(b)\}$, par des \ominus ceux dont les ordonnées sont dans $\mathcal{Y}_- \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{Y}_+$, et par des $+$ les autres points du graphe de $\sigma(\mathcal{I})$. On a représenté par des \cdot les points du graphe de w dont les abscisses sont dans $\{a, b, c, d\} \cup \mathcal{X}_- \cup \mathcal{X}_+$. Enfin, D_{II} est la région délimitée par les pointillés.



Le résultat suivant est une extension du lemme 1.6.

Lemme 4.1.7. (a) $r_{\sigma(\mathcal{I})} = r_w + \chi_{D_{II}}$, en particulier $\sigma(\mathcal{I}) \leq w$.
 (b) $\ell(\sigma(\mathcal{I})) = \ell(w) - (2r + s + t + 3)$.

Preuve. (a) L'égalité $r_{\sigma(\mathcal{I})} = r_w + \chi_{D_{II}}$ résulte de la construction de $\sigma(\mathcal{I})$, et l'inégalité $\sigma(\mathcal{I}) \leq w$ en découle d'après le lemme 0.3.2.

(b) On remarque que $\gamma(\mathcal{I})$ s'écrit aussi

$$\gamma(\mathcal{I}) = \left[(w(d), y_1)(y_1, y_2) \cdots (y_{s-1}, y_s)(y_s, w(b)) \right] \\ \left[(w(a), y_{-1})(y_{-1}, y_{-2}) \cdots (y_{-t+1}, y_{-t})(y_{-t}, w(c)) \right] (w(c), w(b)).$$

En utilisant le lemme 0.1.1, on obtient d'abord $\ell((w(c), w(b))w) = \ell(w) - (2r + 1)$. Ensuite, à chaque étape élémentaire $v' = (i, j)v$ du passage de w à $\sigma(\mathcal{I})$, le rectangle de sommets $(v^{-1}(i), i)$ et $(v^{-1}(j), j)$ ne contient pas d'autre point du graphe de v , de sorte que l'on a $\ell(v') = \ell(v) - 1$. On en déduit l'égalité annoncée. \square

4.2 Des composantes de type S_1 et S_2

Nous allons déterminer, parmi les permutations associées aux configurations I et II de w , définies à la section précédente, celles qui donnent des composantes irréductibles du lieu singulier de X_w . Pour cela, comme expliqué en 0.2, nous décrivons les transversales correspondantes dans X_w .

On considère d'abord une configuration I de w , notée \mathcal{I} , et l'on note simplement τ la permutation associée. On rappelle que l'on a défini au chapitre 3,

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_+ &= \{y_i \mid i \in [1, s] \cup \{\infty\}\}, \\ \mathcal{X}_- &= \{x_i \mid i \in [-t, -1] \cup \{\infty\}\}.\end{aligned}$$

On définit encore

$$\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-} = \left\{ u = (u_{ij}) \in GL_n \left| \begin{array}{l} u_{\tau(j)j} = 1 \text{ pour tout } j, \\ u_{ij} = 0 \text{ si } i \notin \mathcal{Y}_+ \text{ ou } j \notin \mathcal{X}_-, \\ \text{rg } (u_{ij})_{\substack{i \in \mathcal{Y}_+ \\ j \in \mathcal{X}_-}} \leq 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Le tore T agit sur $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ par : $t \cdot u = t u (\bar{\tau}^{-1} t^{-1} \bar{\tau})$, où $\bar{\tau}$ désigne la matrice de la permutation τ , c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les $\delta_{i\tau(j)}$. La projection de \mathcal{M}_n (ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K}) sur $\mathcal{M}_{s+1, t+1}$ (ensemble des matrices de taille $(s+1, t+1)$ à coefficients dans \mathbb{K}) obtenue par omission des lignes (resp. colonnes) d'indice n'appartenant pas à \mathcal{Y}_+ (resp. \mathcal{X}_-) induit un isomorphisme T -équivariant de $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ sur $\mathcal{C}_{s+1, t+1}$.

On démontre alors, exactement comme le théorème 1.7, le

Théorème 4.2.1. (a) *L'application $u \mapsto u\mathbb{K}^\bullet$ induit un isomorphisme T -équivariant de $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ sur $\mathcal{N}_{\tau, w}$.*

(b) *Par conséquent, si $st = 0$, e_τ est un point lisse de X_w , et si $st \neq 0$, X_τ est une composante irréductible de $\text{Sing } X_w$, de type S_1 .*

On considère maintenant une configuration II de w , et la permutation associée, notée simplement σ . En vue de la description de la transversale $\mathcal{N}_{\sigma, w}$, il est utile de considérer la variété suivante : étant donné trois entiers i, j, k avec $i, k \geq 1$ et $j \geq 2$, on définit

$$\mathcal{N}_{i, j, k} = \{(M, N) \in \mathcal{C}_{j, k} \times \mathcal{C}_{i, j} \mid NM = 0\}.$$

Proposition 4.2.2. $\mathcal{N}_{i,j,k}$ est une variété irréductible de dimension $2j + i + k - 3$. Elle est singulière au point $(0, 0)$.

- (a) Cette singularité est isolée si et seulement si $j = 2$ ou $i = k = 1$.
 (b) Si $i > 1$, $j > 2$, et $k = 1$ (resp. $i = 1$, $j > 2$, et $k > 1$) alors $\text{Sing } \mathcal{N}_{i,j,1} = \mathcal{C}_{j,1} \times \{0\}$ (resp. $\text{Sing } \mathcal{N}_{1,j,k} = \{0\} \times \mathcal{C}_{1,j}$).
 (c) Si $i, k > 1$ et $j > 2$, $\text{Sing } \mathcal{N}_{i,j,k}$ a deux composantes irréductibles, $\mathcal{C}_{j,k} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathcal{C}_{i,j}$.
 (d) On a :
- $\mathcal{N}_{i,2,k}$ est isomorphe à $\mathcal{C}_{i+k,2}$,
 - $\mathcal{N}_{1,j,1}$ est un cône quadratique non dégénéré de dimension $2j - 1$.

Preuve. Les assertions (a), (b) et (c) de cette proposition sont un cas particulier du Théorème 1 de [15]; on en donne ici, dans ce cas particulier, une démonstration directe, plus simple et plus géométrique.

Notons $\mathbb{P}(\mathbb{K}^j)$ (resp. $\mathbb{P}^*(\mathbb{K}^j)$) l'espace projectif des droites (resp. hyperplans) dans \mathbb{K}^j . En considérant la résolution

$$\mathcal{Z}_{i,j,k} = \{(M, \mathcal{D}, \mathcal{H}, N) \in \mathcal{C}_{j,k} \times \mathbb{P}(\mathbb{K}^j) \times \mathbb{P}^*(\mathbb{K}^j) \times \mathcal{C}_{i,j} \mid \text{Im } M \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \text{Ker } N\},$$

on voit que $\mathcal{N}_{i,j,k}$ est irréductible et de dimension $2j + i + k - 3$.

D'autre part, on voit facilement que l'espace tangent à $\mathcal{N}_{i,j,k}$ en $(0, 0)$ s'identifie à $\mathcal{M}_{j,k} \times \mathcal{M}_{i,j}$. Par conséquent, le point $(0, 0)$ est singulier dans $\mathcal{N}_{i,j,k}$. Par ailleurs, notant m_{pq} les coefficients de la matrice M , on définit les ouverts affines

$$U_{pq} = \{M \in \mathcal{C}_{j,k} \mid m_{pq} \neq 0\}$$

et

$$\mathcal{U}_{pq} = \{(M, N) \in \mathcal{N}_{i,j,k} \mid m_{pq} \neq 0\}.$$

On voit sans peine que, premièrement, l'application qui à M associe les coefficients m_{pq} , m_{rq} , m_{ps} pour $r \neq p$ et $s \neq q$, induit un isomorphisme $U_{pq} \simeq \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{j+k-2}$, et deuxièmement, l'application $(M, N) \mapsto (M, \overline{N})$, où \overline{N} est la matrice obtenue par omission de la colonne d'indice p de N , induit un isomorphisme $\mathcal{U}_{pq} \simeq U_{pq} \times \mathcal{C}_{i,j-1}$.

De même, on définit

$$\mathcal{V}_{pq} = \{(M, N) \in \mathcal{N}_{i,j,k} \mid n_{pq} \neq 0\}$$

et

$$V_{pq} = \{N \in \mathcal{C}_{i,j} \mid n_{pq} \neq 0\}.$$

On obtient comme précédemment que $V_{pq} \simeq \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^{i+j-2}$ et que $\mathcal{V}_{pq} \simeq \mathcal{C}_{j-1,k} \times V_{pq}$.

D'autre part, on observe que $\mathcal{C}_{r,s}$ est lisse si $r = 1$ ou $s = 1$ et a 0 pour unique point singulier sinon. Comme les ouverts \mathcal{U}_{pq} et \mathcal{V}_{pq} recouvrent $\mathcal{N}_{i,j,k} \setminus \{(0,0)\}$, on en déduit les assertions (a), (b) et (c). Il reste à établir les deux isomorphismes de (d).

D'abord, il est clair que si $i = k = 1$, $\mathcal{N}_{1,j,1}$ est un cône quadratique non dégénéré de dimension $2j - 1$. Supposons maintenant $j = 2$; alors

$$\mathcal{N}_{i,2,k} = \{(M, N) \in \mathcal{C}_{2,k} \times \mathcal{C}_{i,2} \mid NM = 0\}.$$

On vérifie sans difficulté que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{2,k} \times \mathcal{M}_{i,2} &\longrightarrow \mathcal{M}_{i+k,2}, \\ (M, N) &\longmapsto \begin{pmatrix} N \\ \widetilde{M} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\widetilde{M} = {}^t M \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, induit un isomorphisme de $\mathcal{N}_{i,2,k}$ sur $\mathcal{C}_{i+k,2}$. Cela achève la preuve de la proposition. \square

On passe maintenant à la description de la transversale $\mathcal{N}_{\sigma,w}$; cela nécessite encore quelques notations. On définit

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{X}}_- &= \mathcal{X}_- \cup \{a\}, & \overline{\mathcal{Y}}_+ &= \mathcal{Y}_+ \cup \{w(b)\}, \\ \overline{\mathcal{C}} &= \mathcal{C} \cup \{b, c\}, & \overline{\mathcal{D}} &= \mathcal{D} \cup \{w(a), w(d)\}, \end{aligned}$$

et l'on désigne par \mathcal{M}_σ l'ensemble des $u \in GL_n$ tels que :

- $u_{\sigma(j)j} = 1$ pour tout j ,
- $u_{ij} = 0$ si $i \neq \sigma(j)$ et $(i, j) \notin (\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{X}}_-) \cup (\overline{\mathcal{Y}}_+ \times \overline{\mathcal{C}})$,
- $(M, \overleftarrow{N}) \in \mathcal{N}_{s+1, r+2, t+1}$, où M et N sont les matrices extraites de u définies par $M = (u_{ij})_{(i,j) \in \overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{X}}_-}$ et $N = (u_{ij})_{(i,j) \in \overline{\mathcal{Y}}_+ \times \overline{\mathcal{C}}}$, et \overleftarrow{N} est la matrice obtenue en lisant N de droite à gauche.

On fait agir le tore T sur \mathcal{M}_σ par $t \cdot u = t u (\overline{\sigma}^{-1} t^{-1} \overline{\sigma})$.

Théorème 4.2.3. *L'application $u \mapsto u\mathbb{K}^\bullet$ induit un isomorphisme T -équivariant de \mathcal{M}_σ sur $\mathcal{N}_{\sigma,w}$.*

Preuve. La preuve de ce théorème s'obtient en étendant les arguments de la preuve du théorème 1.7. Rappelons que $\mathcal{N}_{\sigma,w} = (\sigma(U^-) \cap U^-)e_\sigma \cap X_w$, et qu'il résulte de la décomposition de Bruhat que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \overline{\sigma}U^- \cap U^-\overline{\sigma} &\longrightarrow (\sigma(U^-) \cap U^-)e_\sigma \\ u &\longmapsto u\mathbb{K}^\bullet \end{aligned}$$

est un isomorphisme T -équivariant. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{M}_\sigma = \phi^{-1}(\mathcal{N}_{\sigma,w})$.

On a d'abord

$$\overline{\sigma}U^- \cap U^-\overline{\sigma} = \left\{ u \in GL_n \mid \begin{array}{l} u_{\sigma(j)j} = 1 \text{ pour tout } j, \\ u_{ij} = 0 \text{ si } i < \sigma(j) \text{ ou } j > \sigma^{-1}(i) \end{array} \right\}.$$

Considérons maintenant $u \in \phi^{-1}(\mathcal{N}_{\sigma,w})$, et montrons que pour $(i, j) \notin (\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{X}}_-) \cup (\overline{\mathcal{Y}}_+ \times \overline{\mathcal{C}})$, avec $i > \sigma(j)$ et $j < \sigma^{-1}(i)$, on a $u_{ij} = 0$.

Pour commencer, si $j \notin \overline{\mathcal{X}}_- \cup \overline{\mathcal{C}}$, le point $(j, \sigma(j))$ n'est pas dans D_{II} , on a donc $r_\sigma(j, \sigma(j)) = r_w(j, \sigma(j))$. L'espace $u(\mathbb{K}^j) + \mathbb{K}^{\sigma(j)}$ contient la famille de vecteurs

$$\{e_1, \dots, e_{\sigma(j)}\} \cup \{ue_p \mid p < j, \sigma(p) > \sigma(j)\} \cup \{ue_j - e_{\sigma(j)}\}.$$

S'il existait $i > \sigma(j)$ tel que $u_{ij} \neq 0$, alors on aurait $i \notin \{\sigma(p) \mid p < j\}$ car $u_{\sigma(p)j} = 0$ pour $j < p$, et donc cette famille serait libre. Or son cardinal est

$$\sigma(j) + j - r_\sigma(j, \sigma(j)) + 1 = \sigma(j) + j - r_w(j, \sigma(j)) + 1,$$

alors que $\dim(u(\mathbb{K}^j) + \mathbb{K}^{\sigma(j)}) \leq \sigma(j) + j - r_w(j, \sigma(j))$, une contradiction. Ainsi, si $j \notin \overline{\mathcal{X}}_- \cup \overline{\mathcal{C}}$, on a $u_{ij} = 0$ pour tout $i > \sigma(j)$. De même, on montre que si $i \notin \overline{\mathcal{Y}}_+ \cup \overline{\mathcal{D}}$ alors $u_{ij} = 0$ pour tout $j < \sigma^{-1}(i)$.

Remarquons de plus que si $(i, j) \in \overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{C}}$, avec $\sigma(j) \neq i$, alors on a $i < \sigma(j)$ ou bien $j > \sigma^{-1}(i)$, car la restriction de σ à $\overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{D}}$ est l'élément de plus grande longueur ; et donc $u_{ij} = 0$, d'après la description de $\overline{\sigma}U^- \cap U^-\overline{\sigma}$. Par ailleurs, on voit que si $(i, j) \in \overline{\mathcal{Y}}_+ \times \overline{\mathcal{X}}_-$, le point $(j, i-1)$ n'est pas dans D_{II} ; en considérant l'espace $u(\mathbb{K}^j) + \mathbb{K}^{i-1}$, on montre alors comme précédemment que $u_{ij} = 0$. Cela prouve que $u_{ij} = 0$ si $i \neq \sigma(j)$ et $(i, j) \notin (\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{X}}_-) \cup (\overline{\mathcal{Y}}_+ \times \overline{\mathcal{C}})$.

Soient maintenant μ le rang de la matrice extraite $M = (u_{ij})_{(i,j) \in \overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{X}}_-}$, et ν le rang de la matrice extraite $N = (u_{ij})_{(i,j) \in \overline{\mathcal{Y}}_+ \times \overline{\mathcal{C}}}$. Soit E l'espace engendré par la famille de vecteurs

$$\{e_1, \dots, e_{w(d)-1}\} \cup \{ue_j \mid j < b, \sigma(j) > w(d)\} \cup \{ue_j \mid j \in \overline{\mathcal{X}}_-\}.$$

On voit que sa dimension est

$$(w(d) - 1) + (b - 1) - r_\sigma(b - 1, w(d)) + \mu.$$

Le point $(b - 1, w(d))$ est dans D_{II} , donc on a

$$\dim E = (w(d) - 1) + (b - 1) - r_w(b - 1, w(d)) + \mu - 1.$$

Or $E \subseteq u(\mathbb{K}^{b-1}) + \mathbb{K}^{w(d)-1}$, donc $\dim E \leq (w(d) - 1) + (b - 1) - r_w(b - 1, w(d))$. Il en résulte que $\mu \leq 1$. On montre de même que $\nu \leq 1$.

Montrons maintenant que $\overleftarrow{N}M = 0$. Pour cela, on introduit les notations suivantes : on pose $c_0 = b$, $c_{r+1} = c$, $d_0 = w(a)$, et $d_{r+1} = w(d)$. Il s'agit alors de montrer que pour tout $(i, j) \in \overline{\mathcal{Y}}_+ \times \overline{\mathcal{X}}_-$

$$\sum_{k=0}^{r+1} u_{ic_k} u_{d_k j} = 0.$$

Fixons $j \in \overline{\mathcal{X}}_-$; d'après ce qui précède,

$$ue_j = e_{\sigma(j)} + \sum_{k=0}^{r+1} u_{d_k j} e_{d_k},$$

et pour tout $k \in [0, r + 1]$,

$$ue_{c_k} = e_{d_k} + \sum_{i \in \overline{\mathcal{Y}}_+} u_{ic_k} e_i.$$

Soit $f_j = ue_j - e_{\sigma(j)} - \sum_{k=0}^{r+1} u_{d_k j} ue_{c_k}$. Ce vecteur appartient à l'espace $u(\mathbb{K}^c) + \mathbb{K}^{w(d)-1}$, et il s'écrit en fait

$$f_j = - \sum_{i \in \overline{\mathcal{Y}}_+} \left(\sum_{k=0}^{r+1} u_{ic_k} u_{d_k j} \right) e_i.$$

S'il existait $j \in \overline{\mathcal{X}}_-$ tel que $f_j \neq 0$, alors la famille

$$\{e_1, \dots, e_{w(d)-1}\} \cup \{ue_p \mid p \leq c, \sigma(p) \geq w(d)\} \cup \{f_j\}$$

serait libre. Son cardinal est $w(d) - 1 + c - r_\sigma(c, w(d) - 1) + 1$, et elle est contenue dans l'espace $u(\mathbb{K}^c) + \mathbb{K}^{w(d)-1}$, dont la dimension est au plus $w(d) -$

$1 + c - r_w(c, w(d) - 1)$. Or le point $(c, w(d) - 1)$ n'est pas dans D_{II} ; on a donc $r_\sigma(c, w(d) - 1) = r_w(c, w(d) - 1)$, une contradiction.

Ainsi, on a montré que $\phi^{-1}(\mathcal{N}_{\sigma,w}) \subseteq \mathcal{M}_\sigma$. Or d'après le lemme 4.1.7 et la proposition 4.2.2, ce sont deux variétés irréductibles de dimension $2r + t + s + 3$; on en déduit donc $\phi^{-1}(\mathcal{N}_{\sigma,w}) = \mathcal{M}_\sigma$. Cela prouve le théorème 4.2.3. \square

Corollaire 4.2.4. (a) e_σ est un point singulier de X_w .

(b) Si la configuration est mixte (i.e. si $r = 0$), X_σ est une composante irréductible de type S_1 de $\text{Sing } X_w$, la transversale étant isomorphe à $\mathcal{C}_{s+t+2,2}$.

(c) Si la configuration est pure (i.e. si $r \neq 0$ et $s = t = 0$), X_σ est une composante irréductible de type S_2 de $\text{Sing } X_w$, la transversale étant isomorphe à \mathcal{K}_{2r+3} .

(d) Si $rt \neq 0$ et $s = 0$ (resp. $rs \neq 0$ et $t = 0$) alors X_σ est contenu dans exactement une composante irréductible X_τ de $\text{Sing } X_w$, associée à une configuration I de w , et telle que $\mathcal{N}_{\tau,w} \simeq \mathcal{C}_{r+1,t+1}$ (resp. $\mathcal{N}_{\tau,w} \simeq \mathcal{C}_{s+1,r+1}$).

(e) Si $rst \neq 0$, alors X_σ est contenu dans exactement deux composantes irréductibles de $\text{Sing } X_w$, correspondant à des configurations I de w , et dont les transversales sont isomorphes à $\mathcal{C}_{r+1,t+1}$ et $\mathcal{C}_{s+1,r+1}$.

Preuve. Les trois premiers points résultent directement de la proposition 4.2.2 et du théorème 4.2.3.

Supposons maintenant $rt \neq 0$. Alors les points $(a, w(a))$ et $(c, w(c))$, la suite SO et la suite centrale forment une configuration I de w , non dégénérée. La permutation τ associée donne donc une composante irréductible du lieu singulier de X_w .

De plus, les graphes de τ et σ ne diffèrent qu'en les points dont les abscisses sont dans $\overline{\mathcal{C}} \cup \mathcal{X}_+ \cup \{d\}$; leurs ordonnées sont dans $\overline{\mathcal{D}} \cup \overline{\mathcal{Y}}_+$. Or sur ces points, τ induit la permutation maximale telle que $\tau(\overline{\mathcal{C}}) \subseteq \overline{\mathcal{D}} \cup \{w(b)\}$. Comme $\sigma(\overline{\mathcal{C}}) = \overline{\mathcal{D}}$, on obtient donc, en vertu du lemme 0.3.1, $\sigma \leq \tau$. On remarque de plus que $\ell(\tau) = \ell(w) - (r + t + 1)$.

De même, si $rs \neq 0$, les points $(b, w(b))$ et $(d, w(d))$, la suite centrale et la suite NE forment une configuration I non dégénérée de w . La permutation τ' associée donne une composante irréductible de $\text{Sing } X_w$, et l'on a $\sigma \leq \tau'$. Elle vérifie de plus $\ell(\tau') = \ell(w) - (r + s + 1)$.

Par ailleurs, on observe que si $rst \neq 0$, les permutations τ et τ' sont distinctes. Or, d'après la proposition 4.2.2 et le théorème 4.2.3, e_σ est contenu dans exactement une composante irréductible de $\text{Sing } X_w$ lorsque $rt \neq 0$ et

$s = 0$ ou lorsque $rs \neq 0$ et $t = 0$, et dans exactement deux lorsque $rst \neq 0$. Cela achève la démonstration du corollaire. \square

Remarque 4.2.5. Soit \mathcal{I} une configuration I dégénérée de w . D'après le théorème 4.2.1, le point $e_{\tau(\mathcal{I})}$ est lisse dans X_w . On peut voir qu'il existe une configuration (3412) incompressible \mathcal{II} telle que la permutation associée $\sigma(\mathcal{II})$ corresponde à une composante irréductible de $\text{Sing } X_w$, et vérifie $\tau(\mathcal{I}) > \sigma(\mathcal{II})$.

Chapitre 5

Quasi-résolutions des variétés de Schubert

Définition 5.1. On note Σ_w la réunion des composantes du lieu singulier exhibées au chapitre précédent.

On considère une permutation w non covexillaire. L'objet des deux derniers chapitres est de démontrer que $\Sigma_w = \text{Sing } X_w$. A cet effet, nous allons introduire des quasi-résolutions des variétés de Schubert non covexillaires, c'est-à-dire des morphismes birationnels $P \times^Q X_y \longrightarrow X_w$ pour certains sous-groupes paraboliques $P \supseteq Q$ de G et certaines variétés de Schubert $X_y \subseteq X_w$.

On rappelle que, étant donné un morphisme birationnel $\pi : X \longrightarrow Y$ entre des variétés irréductibles, on définit l'ouvert $\text{Reg}(\pi)$ de X comme l'ensemble des points admettant un voisinage ouvert U tel que π induise un isomorphisme de U sur $\pi(U)$. Le lieu exceptionnel de π , $\text{Ex}(\pi)$, est le fermé complémentaire de $\text{Reg}(\pi)$. D'autre part, on peut définir dans Y l'ouvert Reg_π comme l'ensemble des points admettant un voisinage V tel que π induise un isomorphisme de $\pi^{-1}(V)$ sur V . Alors π induit un isomorphisme de $\text{Reg}(\pi)$ sur Reg_π . Si de plus π est surjectif, notant $\mathcal{E}_\pi = \pi(\text{Ex}(\pi))$, \mathcal{E}_π est le fermé complémentaire de Reg_π , et l'on a aussi $\pi^{-1}(\mathcal{E}_\pi) = \text{Ex}(\pi)$.

Nous étudierons les lieux exceptionnels des quasi-résolutions, et leurs images, que nous relierons finalement à Σ_w .

5.1 Définition des quasi-résolutions

Définition 5.1.1. Soit \mathcal{I} une configuration (3412) de w , correspondant aux abscisses $a < b < c < d$. Notons $\alpha = w(a), \beta = w(b), \gamma = w(c), \delta = w(d)$.

- On associe à \mathcal{I} la paire d'entiers suivante : son amplitude $am(\mathcal{I}) = \alpha - \delta$ et sa hauteur $ht(\mathcal{I}) = \beta - \gamma$.
- On dit que \mathcal{I} est *bien remplie* si $w^{-1}(] \delta, \alpha] \subseteq] b, c [$.

Remarquons qu'il existe des configurations (3412) bien remplies : on voit facilement qu'une configuration (3412) d'amplitude minimale est bien remplie.

On fixe une configuration (3412) de w , correspondant aux abscisses $a < b < c < d$, et aux ordonnées $\gamma < \delta < \alpha < \beta$, bien remplie et de hauteur minimale (parmi les configurations bien remplies). On vérifie alors sans peine qu'elle est incompressible. On pose $h = \alpha - \delta$.

On considère

$$\begin{aligned} \alpha' &= \max\{q \geq \alpha \mid \forall q' \in [\alpha, q[, w^{-1}(q' + 1) < w^{-1}(q')\} \\ \delta' &= \min\{q \leq \delta \mid \forall q' \in]q, \delta], w^{-1}(q' - 1) > w^{-1}(q')\}. \end{aligned}$$

Soit $I = \{s_{\delta'}, \dots, s_{\alpha'-1}\}$, et pour $i = 1, \dots, h$, soient $k_i = \delta' + \alpha' - \alpha + i - 1$ et $J_i = I \setminus \{s_{k_i}\}$. Notant w_I et w_{J_i} les permutations maximales des sous-groupes paraboliques de \mathfrak{S}_n correspondant, on définit $w_i = w_{J_i} w_I w$. Comme w est maximal dans sa classe \mathfrak{S}_{Iw} , w_i est maximal dans sa classe $\mathfrak{S}_{J_i w_i}$.

On définit enfin

$$Z_i = P_I \times^{P_{J_i}} X_{w_i}.$$

L'application naturelle de Z_i dans G/B a pour image X_w , et la projection induite $\pi_i : Z_i \rightarrow X_w$ est birationnelle ; néanmoins, la variété Z_i n'est en général pas lisse, on l'appelle donc quasi-résolution de X_w . On va décrire l'image du lieu exceptionnel de chaque π_i .

5.2 Un lemme

On commence par établir un lemme, dû à P. Polo. Soient $z \in \mathfrak{S}_n$ et $j \in [1, n - 1]$ tels que $z < s_j z$. A chaque point (b', β') de la frontière Sud-Est de $\Gamma_z \cap \{(p, q) \mid p < z^{-1}(j), q > j + 1\}$, on associe une permutation $\theta_{b'}$, dite de type Nord-Ouest, définie comme suit : on note $y_1 < \dots < y_s$ les

ordonnées des points de la frontière Sud-Ouest de l'ensemble $\Gamma_z \cap \mathcal{R}^{(j+1, \beta')}(z)$. La permutation $\theta_{b'}$ associée est

$$\theta_{b'} = (j+1, y_1)(y_1, y_2) \cdots (y_{s-1}, y_s)(y_s, \beta')z.$$

De façon similaire, à chaque point (c', γ') de la frontière Nord-Ouest de $\Gamma_z \cap \{(p, q) \mid p > z^{-1}(j+1), q < j\}$, on associe une permutation $\theta_{c'}$, dite de type Sud-Est : on note $y_{-t} < \cdots < y_{-1}$ les ordonnées des points de la frontière Nord-Est de l'ensemble $\Gamma_z \cap \mathcal{R}^{(\gamma', j)}(z)$, et la permutation $\theta_{c'}$ associée est

$$\theta_{c'} = (j, y_{-1})(y_{-1}, y_{-2}) \cdots (y_{-t}, \gamma')z.$$

Enfin, si $((b', \beta'), (c', \gamma'))$ est un couple de points de Γ_z vérifiant

$$z^{-1}(j) < b' < c' < z^{-1}(j+1), \quad \gamma' < j \text{ et } j+1 < \beta',$$

et tels que le rectangle $\mathcal{R}_{(b', c')}(z)$ ne contienne pas de point du graphe de z , on lui associe une permutation $\theta_{(b', c')}$, dite de type mixte : on définit les ordonnées $y_1 < \cdots < y_s$ et $y_{-t} < \cdots < y_{-1}$ comme ci-dessus, et la permutation $\theta_{(b', c')}$ est alors

$$\theta_{(b', c')} = [(j+1, y_1)(y_1, y_2) \cdots (y_{s-1}, y_s)(y_s, \beta')] [(j, y_{-1})(y_{-1}, y_{-2}) \cdots (y_{-t}, \gamma')]z.$$

On a alors le

Lemme 5.2.1. *Soient $z \in \mathfrak{S}_n$ et $j \in [1, n-1]$ tels que $z < s_j z$. Les éléments maximaux de $\{\theta \in \mathfrak{S}_n \mid \theta < z \text{ et } s_j \theta < \theta\}$ sont précisément les permutations décrites ci-avant.*

Preuve. On construit pour commencer un “ordre de réflexion” sur l'ensemble des transpositions de \mathfrak{S}_n (cf. [11]). On considère la permutation σ_j définie par la décomposition réduite $\sigma_j = s_{j-1} \cdots s_1 s_{j+1} \cdots s_{n-1}$. On considère une décomposition réduite $s_{i_1} \cdots s_{i_N}$ de w_0 , l'élément de plus grande longueur de \mathfrak{S}_n , obtenue par concaténation de celle de σ_j ci-dessus et d'une décomposition réduite de $\sigma_j^{-1} w_0$. D'après [11], prop. 2.13, en posant pour $k = 1, \dots, N$, $t_k = (s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}}) s_{i_k} (s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1})$, l'ordre défini par $t_1 \prec \cdots \prec t_N$ est un ordre de réflexion. On a,

$$\begin{aligned} \text{pour } k = 1, \dots, j-1, & \quad t_k = (j-k, j), \\ \text{pour } k = j, \dots, n-2, & \quad t_k = (j+1, k+2). \end{aligned}$$

Cet ordre étant construit, on considère une permutation θ telle que $\theta < z$ et $s_j\theta < \theta$, maximale pour cette propriété. Soit $k = \ell(z) - \ell(\theta)$, d'après [11], prop. 4.3, il existe des transpositions $t_{l_1} \prec \cdots \prec t_{l_k}$ telles que $\theta = t_{l_k} \cdots t_{l_1} z$, avec pour tout $p = 1, \dots, k$, $\ell(t_{l_p} \cdots t_{l_1} z) = \ell(z) - p$. Or on observe que l'on a $t_{l_k} \in \{t_1, \dots, t_{n-2}\}$: c'est évident si $k = 1$, et cela résulte de la maximalité de θ sinon. Alors, comme cet ensemble de réflexions est un idéal pour l'ordre \prec , on en déduit que $t_{l_p} \in \{t_1, \dots, t_{n-2}\}$ pour tout $p = 1, \dots, k$. Plus précisément, il existe des entiers $q_1 < \cdots < q_m$ et $q'_1 < \cdots < q'_{m'}$, avec $m, m' \geq 0$, et $m + m' = k$, tels que

$$\begin{cases} t_{l_p} &= (j - q_p, j) & \text{pour } p = 1, \dots, m, \\ t_{l_{m+p}} &= (j + 1, j + 1 + q'_p) & \text{pour } p = 1, \dots, m'. \end{cases}$$

Supposons d'abord $m' = 0$. Alors le fait que $s_j\theta < \theta$ entraîne $z^{-1}(j - q_k) > z^{-1}(j + 1)$. Puis, par maximalité de θ , on obtient au contraire $z^{-1}(j - q_{k-1}) < z^{-1}(j + 1)$. Enfin, comme la longueur diminue de 1 à chaque étape élémentaire du produit $t_{l_k} \cdots t_{l_1} z$, on a $z^{-1}(j) < z^{-1}(j - q_1) < \cdots < z^{-1}(j - q_k)$, et de plus, posant $q_0 = 0$, on a

$$\Gamma_z \cap (] z^{-1}(j - q_p), z^{-1}(j - q_{p+1}) [\times] j - q_{p+1}, j [) = \emptyset$$

pour $p = 0, \dots, k - 1$. Il en résulte que le point $(z^{-1}(j - q_k), j - q_k)$ est dans la frontière Nord-Ouest de $\Gamma_z \cap \{(p, q) \mid p > z^{-1}(j + 1), q < j\}$, et que les points $(z^{-1}(j - q_p), j - q_p)$, pour $p = 1, \dots, k - 1$ forment la frontière Nord-Est de $\Gamma_z \cap \mathcal{R}^{(j - q_k, j)}(z)$. Ainsi θ est une permutation de type Nord-Ouest. On procède de même lorsque $m = 0$ pour montrer que θ est une permutation de type Sud-Est.

Supposons maintenant $mm' \neq 0$. Alors, le fait que $s_j\theta < \theta$ entraîne $z^{-1}(j + 1 + q'_{m'}) < z^{-1}(j - q_m)$. Puis, par maximalité de θ , on obtient $z^{-1}(j - q_{m-1}) < z^{-1}(j + 1 + q'_{m'})$ et $z^{-1}(j - q_m) < z^{-1}(j + 1 + q'_{m'-1})$. Et, pour terminer, comme la longueur diminue de 1 à chaque étape élémentaire du produit $t_{l_k} \cdots t_{l_1} z$, on a d'abord $z^{-1}(j) < z^{-1}(j - q_1) < \cdots < z^{-1}(j - q_m)$, et $z^{-1}(j + 1 + q'_{m'}) < \cdots < z^{-1}(j + 1 + q'_1) < z^{-1}(j + 1)$, et de plus, posant $q_0 = q'_0 = 0$, l'on a

$$\begin{aligned} \Gamma_z \cap (] z^{-1}(j - q_p), z^{-1}(j - q_{p+1}) [\times] j - q_{p+1}, j [) &= \emptyset \\ &\text{pour } p = 0, \dots, m - 1, \\ \Gamma_z \cap (] z^{-1}(j + 1 + q'_{p+1}), z^{-1}(j + 1 + q'_p) [\times] j + 1, j + 1 + q'_{p+1} [) &= \emptyset \\ &\text{pour } p = 0, \dots, m' - 1. \end{aligned}$$

On en déduit que θ est une permutation de type mixte.

Réciproquement, il est clair que si θ est une permutation de l'un des types décrits avant l'énoncé, elle vérifie $s_j\theta < \theta$. De plus, si $\theta_{b'}$ est de type Nord-Ouest, associée au point (b', β') , les points de Γ_z d'ordonnées

$$j + 1 < y_1 < \cdots < y_s < \beta'$$

forment une configuration I dégénérée au Sud-Ouest, et $\theta_{b'}$ est la permutation associée. La région de $[1, n]^2$ associée comme en 3.2 est ici notée D_{NO} . On a alors, d'après le lemme 3.3,

$$r_{\theta_{b'}} = r_z + \chi_{D_{NO}} \quad (1),$$

d'où en particulier $\theta \leq z$. De même, si $\theta_{c'}$ est de type Sud-Est, associée au point (c', γ') , les points de Γ_z d'ordonnées

$$\gamma' < y_{-t} < \cdots < y_{-1} < j$$

forment une configuration I dégénérée au Nord-Est, et $\theta_{c'}$ est la permutation associée. La région de $[1, n]^2$ associée comme en 3.2 est ici notée D_{SE} . On a

$$r_{\theta_{c'}} = r_z + \chi_{D_{SE}} \quad (2).$$

Enfin, si $\theta_{(b', c')}$ est de type mixte, associée au couple $((b', \beta'), (c', \gamma'))$, alors d'une part les points de Γ_z d'ordonnées

$$j + 1 < y_1 < \cdots < y_s < \beta'$$

forment une configuration I dégénérée au Sud-Ouest, et l'on définit comme ci-dessus la région D_{NO} . D'autre part, les points de Γ_z d'ordonnées

$$\gamma' < y_{-t} < \cdots < y_{-1} < j$$

forment une configuration I dégénérée au Nord-Est, et l'on définit comme ci-dessus la région D_{SE} . On pose alors $D_M = D_{NO} \cup D_{SE}$, et l'on a

$$r_{\theta_{(b', c')}} = r_z + \chi_{D_M} \quad (3).$$

Il résulte alors de (1), (2) et (3) que les différents θ sont deux à deux incomparables. Le lemme est démontré. \square

5.3 Le lieu exceptionnel $\text{Ex}(\pi_i)$

Etant donné $i \in [1, h]$, on note $\partial NO(i)$ la frontière Sud-Est de

$$NO(i) = \Gamma_w \cap \{(p, q) \mid p < w^{-1}(\alpha - i + 1), q > \alpha'\},$$

et $\partial SE(i)$ la frontière Nord-Ouest de

$$SE(i) = \Gamma_w \cap \{(p, q) \mid p > w^{-1}(\alpha - i), q < \delta'\}.$$

A chaque point (b', β') de $\partial NO(i)$ on associe la permutation $t^i(b')$, dite de type Nord-Ouest, décrite comme suit. Soit $\tilde{\alpha}_{b'}$, le plus grand entier de l'intervalle $[\alpha - i + 1, \alpha']$ tel que $b' < w^{-1}(\tilde{\alpha}_{b'})$; si l'ensemble $\Gamma_w \cap \{(p, q) \mid w^{-1}(\alpha - i + 1) < p < w^{-1}(\alpha - i), \alpha' < q < \beta'\}$ est non vide, on note $x_s < \dots < x_1$ les abscisses des points de sa frontière Sud-Ouest. Alors les points d'abscisses

$$b' < w^{-1}(\tilde{\alpha}_{b'}) < \dots < w^{-1}(\alpha - i + 1) < x_s < \dots < x_1 < w^{-1}(\alpha - i)$$

forment une configuration I de w , éventuellement dégénérée au Nord-Est, notée \mathcal{I} , et l'on pose $t^i(b') = \tau(\mathcal{I})$.

De manière analogue, à chaque point (c', γ') de $\partial SE(i)$, on associe la permutation $t_i(c')$, dite de type Sud-Est, décrite comme suit. Soit $\tilde{\delta}_{c'}$, le plus petit entier de $[\delta', \alpha - i]$ tel que $w^{-1}(\tilde{\delta}_{c'}) < c'$; si l'ensemble $\Gamma_w \cap \{(p, q) \mid w^{-1}(\alpha - i + 1) < p < w^{-1}(\alpha - i), \gamma' < q < \delta'\}$ est non vide, on note $x_{-1} < \dots < x_{-t}$ les points de sa frontière Nord-Ouest. Alors les points d'abscisses

$$w^{-1}(\alpha - i + 1) < x_{-1} < \dots < x_{-t} < w^{-1}(\alpha - i) < \dots < w^{-1}(\tilde{\delta}_{c'}) < c'$$

forment une configuration I de w , éventuellement dégénérée au Sud-Ouest, notée \mathcal{I}' , et l'on pose $t_i(c') = \tau(\mathcal{I}')$.

Enfin, si $w^{-1}(\alpha - i + 1) < b' < c' < w^{-1}(\alpha - i)$ est une configuration (3412) incompressible de w , notée \mathcal{II} , on note $m_i(b', c')$ la permutation $\sigma(\mathcal{II})$, dite de type mixte.

Proposition 5.3.1. *Soit $i \in [1, h]$. Les composantes irréductibles de \mathcal{E}_{π_i} , l'image du lieu exceptionnel $\text{Ex}(\pi_i)$, correspondent exactement aux permutations $t^i(b')$, $t_i(c')$ et $m_i(b', c')$ décrites ci-dessus.*

Preuve. Puisque π_i est propre, l'ensemble des $x \in X_w$ dont la fibre $\pi_i^{-1}(\{x\})$ est finie est un ouvert de X_w (voir, par exemple, [18], Prop. 6.4.5). Puis, comme π_i est birationnelle et que X_w est normale (voir, par exemple, [32]), on déduit du théorème principal de Zariski que l'image du lieu exceptionnel de π_i , \mathcal{E}_{π_i} , est égale à

$$\{x \in X_w \mid \#\pi_i^{-1}(\{x\}) > 1\}.$$

Le morphisme π_i est P_I -équivariant, donc les composantes irréductibles de \mathcal{E}_{π_i} sont des variétés de Schubert X_v avec $v \leq w$, $v \in {}^I\mathfrak{S}_{max}$. On se donne une telle composante X_v , et l'on note $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$ les composantes irréductibles de $\pi_i^{-1}(X_v)$. Elles sont toutes de la forme $P_I \times^{P_{J_i}} X_{t_j}$, avec $t_j < w_i$, $t_j \in {}^{J_i}\mathfrak{S}_{max}$. Comme π_i est surjective et propre, on a

$$X_v = \bigcup_{j=1}^m \pi_i(\mathcal{V}_j)$$

et chaque $\pi_i(\mathcal{V}_j)$ est fermé. Or X_v est irréductible, il existe donc j tel que $X_v = \pi_i(\mathcal{V}_j)$. Alors $t_j \in \mathfrak{S}_I v$, et il résulte du lemme 3.6 qu'un tel j est unique; on peut supposer $j = 1$. Soit $\theta_1 = w_{J_i} t_1$, le représentant minimal de $\mathfrak{S}_{J_i} t_1$. On a ainsi

$$\dim(P_I \times^{P_{J_i}} X_{t_1}) = \ell(w_I) + \ell(\theta_1),$$

et

$$X_v = \pi_i(P_I \times^{P_{J_i}} X_{t_1}) = X_{w_I * \theta_1}.$$

On en déduit que $\theta_1 \notin {}^I\mathfrak{S}_{min}$. En effet, supposons au contraire $\theta_1 \in {}^I\mathfrak{S}_{min}$, il vient $\dim(X_v) = \dim(P_I \times^{P_{J_i}} X_{t_1})$. Alors si $z \in \pi_i^{-1}(e_v)$, l'orbite Uz est un ouvert dense de $P_I \times^{P_{J_i}} X_{t_1}$. Il en résulte que la fibre $\pi_i^{-1}(e_v)$ est un singleton, et l'on a alors $X_v \not\subseteq \mathcal{E}_{\pi_i}$, une contradiction. On a donc $\theta_1 \notin {}^I\mathfrak{S}_{min}$, ce qui équivaut, comme $\theta_1 \in {}^{J_i}\mathfrak{S}_{min}$, à $s_{k_i} \theta_1 < \theta_1$. Finalement, on a montré que $v = w_I * \theta$, avec $\theta < w_I w$, $\theta \in {}^{J_i}\mathfrak{S}_{min}$, et $s_{k_i} \theta < \theta$.

Réciproquement, si l'on se donne un tel θ , on a $w_{J_i} \theta < w_i$, $\pi_i(P_I \times^{P_{J_i}} X_{w_{J_i} \theta}) = X_{w_I * \theta}$, et $\dim(P_I \times^{P_{J_i}} X_{w_{J_i} \theta}) = \ell(w_I) + \ell(\theta) > \ell(w_I * \theta)$ puisque $\theta \notin {}^I\mathfrak{S}_{min}$. Il en résulte que $X_{w_I * \theta}$ est contenu dans l'image du lieu exceptionnel de π_i .

Ainsi, \mathcal{E}_{π_i} est la réunion des $X_{w_I * \theta}$ pour θ comme ci-dessus. Comme de plus on a $w_I * \theta \leq w_I * \theta'$ si $\theta \leq \theta'$, on peut se restreindre aux tels θ maximaux.

En appliquant le lemme 5.2.1 à $z = w_I w$ et $j = k_i$, on obtient la description de l'ensemble $\text{Max}_{k_i}(w_I w)$ des éléments maximaux de $\{u \in \mathfrak{S}_n \mid u < w_I w \text{ et } s_{k_i} u < u\}$. Comme $w_I w \in {}^I \mathfrak{S}_{min}$, on a

$$(w_I w)^{-1}(\delta') < \cdots < (w_I w)^{-1}(\alpha').$$

D'après le lemme 5.2.1, tout élément u de $\text{Max}_{k_i}(w_I w)$ vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u^{-1}(j) & = (w_I w)^{-1}(j) \text{ pour tout } j \in [\delta', \alpha'], j \neq k_i, k_i + 1, \\ u^{-1}(k_i) & \geq (w_I w)^{-1}(k_i), \\ u^{-1}(k_i + 1) & \leq (w_I w)^{-1}(k_i + 1). \end{cases}$$

On en déduit en particulier que $u^{-1}(\delta') < \cdots < u^{-1}(k_i)$, et $u^{-1}(k_i + 1) < \cdots < u^{-1}(\alpha')$, c'est-à-dire que $u \in {}^{J_i} \mathfrak{S}_{min}$. L'ensemble $\text{Max}_{k_i}(w_I w)$ coïncide donc avec l'ensemble des θ maximaux cherchés.

Il reste maintenant à décrire explicitement les $w_I * \theta$. Remarquons que ce sont les représentants maximaux des classes $\mathfrak{S}_I \theta$, et qu'ils sont aisément décrits à partir des θ : $(w_I * \theta)^{-1}$ coïncide avec θ^{-1} en dehors de $[\delta', \alpha']$, et $(w_I * \theta)^{-1}$ est décroissante sur $[\delta', \alpha']$.

Voyons d'abord le cas des permutations θ de type Nord-Ouest. On rappelle que $k_i = \delta' + \alpha' - \alpha + i - 1$, et l'on remarque que

$$(w_I w)^{-1}(k_i) = w^{-1}(\alpha - i + 1) \text{ et } (w_I w)^{-1}(k_i + 1) = w^{-1}(\alpha - i).$$

De plus, on a $(w_I w)^{-1}([k_i + 1, \alpha']) \subseteq [(w_I w)^{-1}(k_i + 1), n]$, donc il n'y a pas de point du graphe de $w_I w$ dans le rectangle $[1, (w_I w)^{-1}(k_i)] \times [k_i + 1, \alpha']$. On a ainsi

$$\begin{aligned} \Gamma_{w_I w} \cap \{(p, q) \mid p < (w_I w)^{-1}(k_i), q > k_i + 1\} = \\ \Gamma_{w_I w} \cap \{(p, q) \mid p < (w_I w)^{-1}(k_i), q > \alpha'\}. \end{aligned}$$

Comme les graphes de w et $w_I w$ coïncident pour les ordonnées de $] \alpha', n]$, on obtient finalement

$$\Gamma_{w_I w} \cap \{(p, q) \mid p < (w_I w)^{-1}(k_i), q > \alpha'\} = NO(i),$$

$NO(i)$ étant défini avant l'énoncé de la proposition.

Soit alors (b', β') un point de $\partial NO(i)$; notons (x_i, y_i) , pour $i = 1, \dots, s$, les coordonnées des points de la frontière Sud-Ouest de $\Gamma_{w_I w} \cap \mathcal{R}^{(k_i+1, \beta')}(w_I w)$,

avec $x_s < \dots < x_1$. Comme $(w_I w)^{-1}$ est croissante sur l'intervalle $[\delta', \alpha']$, il n'y a pas de point du graphe de $w_I w$ dans $]b', (w_I w)^{-1}(k_i + 1)[\times]k_i + 1, \alpha'[,$ i.e. dans $]b', w^{-1}(\alpha - i)[\times]k_i + 1, \alpha'[,$ De plus, comme (b', β') est un point de la frontière Sud-Est de $NO(i)$, il n'y a pas non plus de point de $\Gamma_{w_I w}$ dans $]b', w^{-1}(\alpha - i + 1)[\times]\alpha', \beta'[,$ Il vient donc

$$\Gamma_{w_I w} \cap \mathcal{R}^{(k_i+1, \beta')}(w_I w) \subseteq]w^{-1}(\alpha - i + 1), w^{-1}(\alpha - i)[\times]\alpha', \beta'[,$$

cet ensemble est donc formé de points du graphe de w . Soit $\tilde{\alpha}_{b'}$ le plus grand entier de l'intervalle $[\alpha - i + 1, \alpha']$ tel que $b' < w^{-1}(\tilde{\alpha}_{b'})$. Alors on vérifie que les points d'abscisses $b' < w^{-1}(\tilde{\alpha}_{b'}) < \dots < w^{-1}(\alpha - i + 1) < x_s < \dots < x_1 < w^{-1}(\alpha - i)$ forment une configuration I de w , notée \mathcal{I} , et que $w_I * \theta = \tau(\mathcal{I})$.

Le cas des permutations de type Sud-Est se traite de manière analogue.

Soit maintenant θ une permutation de type mixte, associée à un couple $((b', \beta'), (c', \gamma'))$ de points du graphe de $w_I w$ vérifiant

$$(w_I w)^{-1}(k_i) < b' < c' < (w_I w)^{-1}(k_i + 1),$$

c'est-à-dire

$$w^{-1}(\alpha - i + 1) < b' < c' < w^{-1}(\alpha - i),$$

et

$$\gamma' < k_i \text{ et } k_i + 1 < \beta'.$$

On suppose aussi que le rectangle $\mathcal{R}_{(b', c')}(w_I w)$ ne contient aucun point du graphe de $w_I w$. Les inégalités $b' < w^{-1}(\alpha - i)$ et $k_i + 1 < \beta'$ donnent $\beta' > \alpha'$, donc (b', β') est un point du graphe de w . On obtient de même $\gamma' < \delta'$, d'où $(c', \gamma') \in \Gamma_w$. Ainsi, les points $w^{-1}(\alpha - i + 1) < b' < c' < w^{-1}(\alpha - i)$ forment une configuration (3412) de w , notée \mathcal{II} . Cette configuration est incompressible : en effet, elle est d'amplitude 1, il suffit donc de vérifier que les rectangles MN et MS associés ne contiennent pas de point du graphe de w , ce qui résulte immédiatement du fait que $\mathcal{R}_{(b', c')}(w_I w) \cap \Gamma_{w_I w} = \emptyset$. Ensuite, on remarque que les points du graphe de $w_I w$ contenus dans le rectangle $\mathcal{R}^{(\gamma', k_i)}(w_I w)$ sont d'ordonnée $< \delta'$, donc sont des points du graphe de w et que leur abscisse est en fait $< b'$: ce sont donc exactement les points de $SO_{II} \cap \Gamma_w$. On voit de même que les points du graphe de $w_I w$ contenus dans le rectangle $\mathcal{R}^{(k_i+1, \beta')}(w_I w)$ sont des points du graphe de w , et que ce sont exactement les points de $NE_{II} \cap \Gamma_w$. On obtient alors que $w_I * \theta = \sigma(\mathcal{II})$.

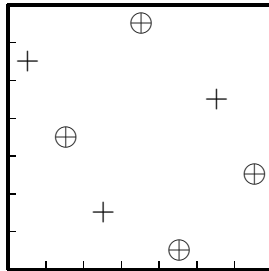
On remarque pour terminer que les permutations que l'on vient de décrire sont deux à deux incomparables, à l'aide des propriétés de leurs fonctions

rang vues aux lemmes 3.3 et 4.1.7. Elles décrivent donc les composantes irréductibles de l'image du lieu exceptionnel de π_i . \square

Exemple 5.3.2. On considère la permutation

$$w = (6, 4, 2, 7, 1, 5, 3)$$

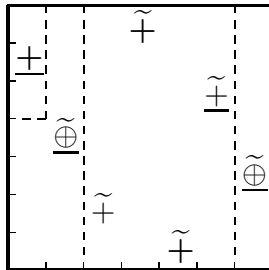
dans \mathfrak{S}_7 , dont le graphe est représenté sur le diagramme suivant.



La configuration (3412) donnée par les points d'abscisses 2, 4, 5 et 7 (représentés par des \oplus) est bien remplie et de hauteur minimale; elle est incompressible. On a $h = 1$, $\alpha' = \alpha = 4$, et $\delta' = \delta = 3$. La permutation w_1 associée est

$$w_1 = (6, 3, 2, 7, 1, 5, 4).$$

Sur le diagramme suivant, on a représenté dans Γ_w le quadrant $NO(1)$ et la bande verticale d'abscisses $\in]a, d[$.



D'après la proposition qui précède, l'image du lieu exceptionnel de π_1 a deux composantes irréductibles, l'une de type Nord-Ouest associée au point d'abscisse 1 (représenté par $\underline{\oplus}$), l'autre de type mixte, associée aux points d'abscisses 4 et 5 (représentés par $\tilde{+}$).

La configuration I qui définit la permutation $t^1(1)$ est non dégénérée (c'est un fait général, qui sera établi au lemme 5.4.2), constituée des points d'abscisses 1, 2, 6, 7 (ce sont les points soulignés de la figure), et on a

$$t^1(1) = (4, 3, 2, 7, 1, 6, 5).$$

La configuration II qui définit $m_1(4, 5)$ est mixte, donnée par les abscisses 2, 3, 4, 5, 6, 7 (ce sont les points surmontés d'un \sim sur la figure), et on a

$$m_1(4, 5) = (6, 2, 1, 4, 3, 7, 5).$$

5.4 Lieux exceptionnels et lieu singulier

5.4.1 Intersection des images des lieux exceptionnels

Proposition 5.4.1. *L'intersection des images des lieux exceptionnels des π_i , pour i parcourant l'intervalle $[1, h]$, est contenue dans Σ_w .*

Preuve. On va montrer que pour toute famille $(X_{v_i})_{i \in [1, h]}$, où chaque X_{v_i} est une composante irréductible de \mathcal{E}_{π_i} , on a $\bigcap_{i=1}^h X_{v_i} \subseteq \Sigma_w$. Dans cette perspective, il est utile de faire les remarques suivantes : d'abord, on peut supposer que tous les v_i sont de type Nord-Ouest ou Sud-Est, car les composantes de type mixte sont de la forme $\sigma(\mathcal{I})$ pour une certaine configuration \mathcal{I} de type II mixte, donc telle que $X_{\sigma(\mathcal{I})} \subseteq \Sigma_w$. On peut aussi supposer que les configurations I qui définissent les permutations v_i sont dégénérées, puisque sinon $X_{v_i} \subseteq \Sigma_w$. Cela implique en particulier que la composante X_{v_1} est de type Sud-Est, et que la composante X_{v_h} est de type Nord-Ouest, en vertu du lemme suivant.

Lemme 5.4.2. (a) *Les composantes de type Nord-Ouest (resp. Sud-Est) de \mathcal{E}_{π_1} (resp. \mathcal{E}_{π_h}) sont associées à des configurations I non dégénérées.*
 (b) *Si $i > 1$, (b, β) est le point le plus à l'Ouest de $\partial NO(i)$, et de même, si $i < h$, (c, γ) est le point le plus à l'Est de $\partial SE(i)$.*

Preuve du lemme 5.4.2. Montrons par exemple que les composantes de type Nord-Ouest de \mathcal{E}_{π_1} sont associées à des configurations I non dégénérées. On remarque pour commencer que le fait que la configuration $a < b < c < d$ soit de hauteur minimale parmi les configurations bien remplies entraîne :

$$w([\] w^{-1}(\alpha'), c[\] \cap] \alpha', \beta[= \emptyset \quad (\dagger).$$

Considérons alors un point (b', β') de $\partial NO(1)$; on a $b' < a$, et donc a fortiori $b' < b$. On constate que si $\beta' > \beta$, alors la configuration I qui définit la composante irréductible $X_{v^1(b')}$ de \mathcal{E}_{π_1} est non dégénérée, car sa suite NE contient le point (b, β) .

Voyons maintenant que si $h > 1$, alors on a $\beta' > \beta$. En effet, supposons $\beta' < \beta$; alors on obtient d'après (\dagger) , $b' < w^{-1}(\alpha')$. Il résulte aussi de (\dagger) que $w^{-1}(\alpha' + 1) > c$, et que pour tout $j \in [\alpha' + 1, \beta' [$, on a $w^{-1}(j) < w^{-1}(\alpha')$ ou $w^{-1}(j) > c$. Il existe donc un entier $j \in [\alpha' + 1, \beta' [$, tel que $w^{-1}(j) > c$ et $w^{-1}(j + 1) < w^{-1}(\alpha')$. Comme de plus $h > 1$, on a $w^{-1}(\alpha - 1) \in] b, c [$,

et donc les abscisses $w^{-1}(j+1) < b < w^{-1}(\alpha-1) < w^{-1}(j)$ forment une configuration (3412) de w , bien remplie (car d'amplitude 1) et de hauteur $\beta - \alpha + 1 < \beta - \gamma$, exclu. On a donc $\beta' > \beta$.

Reste le cas $h = 1$ et $\beta' < \beta$: comme précédemment, il existe $j \in [\alpha'+1, \beta'[,$ tel que $w^{-1}(j) > c$ et $w^{-1}(j+1) < w^{-1}(\alpha')$. On a de plus $w^{-1}(j) \in]c, d[,$ car sinon, les abscisses $w^{-1}(j+1) < b < d < w^{-1}(j)$ formeraient une configuration (3412) de w , bien remplie (car d'amplitude 1) et de hauteur $\beta - \delta < \beta - \gamma$, exclu. La configuration qui définit $t^1(b')$ est alors non dégénérée car sa suite NE contient le point $(w^{-1}(j), j)$.

On montre de même que les composantes de type Sud-Est de \mathcal{E}_{π_h} sont associées à des configurations I non dégénérées.

Montrons maintenant la deuxième assertion du lemme. Soit $i > 1$, on rappelle que

$$NO(i) = \Gamma_w \cap \{(p, q) \mid p < w^{-1}(\alpha - i + 1), q > \alpha'\}.$$

On a $(b, \beta) \in NO(i)$; de plus, comme la configuration $a < b < c < d$ est de hauteur minimale parmi les configurations bien remplies, (b, β) est dans la frontière Sud-Est, $\partial NO(i)$. S'il y avait un point plus à l'Ouest dans $\partial NO(i)$, d'ordonnée β' , on aurait $\beta' < \beta$, et on obtiendrait comme précédemment une configuration bien remplie de hauteur plus petite, une contradiction.

On montre de même que pour $i < h$, (c, γ) est le point le plus à l'Est de $\partial SE(i)$. \square

On a remarqué au début de la preuve de la proposition 5.4.1 que les composantes de type mixte sont contenues dans Σ_w . Donc, dans le cas $h = 1$, le lemme 5.4.2 achève la preuve de cette proposition.

Exemple 5.4.3. On renvoie à l'exemple 5.3.2, où l'on a $h = 1$, et où les composantes irréductibles de \mathcal{E}_{π_1} sont associées à la configuration I non dégénérée donnée par les abscisses 1, 2, 6, 7, et à la configuration II mixte donnée par les abscisses 2, 3, 4, 5, 6, 7.

On suppose dorénavant $h \geq 2$, et on introduit la notion suivante.

Définition 5.4.4. Soit $(X_{v_i})_{i \in [1, h]}$ une famille de composantes irréductibles des \mathcal{E}_{π_i} , chacune de type Nord-Ouest ou Sud-Est, et associée à une configuration I dégénérée. On dit que $(X_{v_i})_{i \in [1, h]}$ est une *bonne famille*, s'il existe des entiers $i < j$ tels que :

- (a) la composante v_i soit de type Sud-Est, associée au point (c_i, γ_i) ,

- (b) la composante v_j soit de type Nord-Ouest, associée au point (b_j, β_j) ,
(c) on ait les inégalités

$$w^{-1}(\alpha - i + 1) < b_j < c_i < w^{-1}(\alpha - j).$$

Nous allons démontrer le

Lemme 5.4.5. *Si la famille $(X_{v_i})_{i \in [1, h]}$ est bonne, alors $\bigcap_{i=1}^h X_{v_i} \subseteq \Sigma_w$.*

Preuve du lemme 5.4.5. Soient $i < j$ vérifiant les conditions (a), (b) et (c) de la définition. On définit les entiers α_j et δ_i dans $[\delta', \alpha']$ par les conditions $w^{-1}(\alpha_j) < b_j < w^{-1}(\alpha_j - 1)$ et $w^{-1}(\delta_i + 1) < c_i < w^{-1}(\delta_i)$.

On a $b \leq b_j < w^{-1}(\alpha - j + 1)$ (la première inégalité résulte de l'assertion (b) du lemme 5.4.2, car $j \geq 2$, et la seconde de la définition de $NO(j)$). De même, on a $w^{-1}(\alpha - i) < c_i \leq c$. On en déduit que $\alpha_j \in [\delta + 2, \alpha]$, et $\delta_i \in [\delta, \alpha - 2]$.

D'autre part, comme $b_j < c_i$, on a $w^{-1}(\alpha_j) \leq w^{-1}(\delta_i + 1)$, et donc $\alpha_j \geq \delta_i + 1$ car w^{-1} est décroissante sur $[\delta', \alpha']$. Ainsi les points d'abscisses $w^{-1}(\alpha_j) < b_j < c_i < w^{-1}(\delta_i)$ forment une configuration (3412), que l'on note \mathcal{II} . Montrons que \mathcal{II} est incompressible; il s'agit d'une configuration (3412) bien remplie, il suffit donc de montrer que $MS =]b_j, c_i[\times]\gamma_i, \delta_i[$ et $MN =]b_j, c_i[\times]\alpha_j, \beta_j[$ ne rencontrent pas Γ_w . D'une part, $(c_i, \gamma_i) \in \partial SE(i)$, on a donc

$$]w^{-1}(\alpha - i), c_i[\times]\gamma_i, \delta' [\cap \Gamma_w = \emptyset \quad (1).$$

D'autre part, la configuration I définissant $t_i(c_i)$ (décrite avant la proposition 5.3.1) est supposée dégénérée, donc on a aussi

$$]w^{-1}(\alpha - i + 1), w^{-1}(\alpha - i)[\times]\gamma_i, \delta' [\cap \Gamma_w = \emptyset \quad (2).$$

Par ailleurs, comme w^{-1} est décroissante sur $[\delta', \alpha']$, on a $w^{-1}([\delta', \delta_i]) \subseteq [w^{-1}(\delta_i), n]$, en particulier

$$w^{-1}([\delta', \delta_i]) \cap]w^{-1}(\alpha - i + 1), c_i[= \emptyset \quad (3).$$

On déduit de (1), (2), et (3) que

$$]w^{-1}(\alpha - i + 1), c_i[\times]\gamma_i, \delta_i [\cap \Gamma_w = \emptyset \quad (\diamond).$$

En particulier, il en résulte que MS ne rencontre pas Γ_w , puisque $b_j > w^{-1}(\alpha - i + 1)$.

On démontre de même

$$]b_j, w^{-1}(\alpha - j) [\times]\alpha_j, \beta_j [\cap \Gamma_w = \emptyset \quad (\diamond\diamond),$$

et l'on en déduit que MN ne rencontre pas Γ_w . La configuration \mathcal{II} est donc incompressible.

Notant simplement σ la permutation associée à \mathcal{II} , nous allons montrer que $X_{v_i} \cap X_{v_j} \subseteq X_\sigma$.

La configuration I qui définit v_j , dégénérée au Nord-Est, est donnée par les points d'abscisses $b_j < w^{-1}(\alpha_j - 1) < \dots < w^{-1}(\alpha - j + 1) < w^{-1}(\alpha - j)$. Celle qui définit v_i est dégénérée au Sud-Ouest, et donnée par les points d'abscisses $w^{-1}(\alpha - i + 1) < w^{-1}(\alpha - i) < \dots < w^{-1}(\delta_i + 1) < c_i$.

Il résulte de (\diamond) et $(\diamond\diamond)$ que les rectangles SO_{II} et NE_{II} de la configuration \mathcal{II} ne rencontrent pas Γ_w , donc le graphe de σ ne diffère de celui de w qu'en les points d'abscisses $w^{-1}(\alpha_j)$, b_j , c_i et $w^{-1}(\delta_i)$.

On en déduit que les graphes des permutations w , v_j , v_i , et σ ne diffèrent qu'en les points d'abscisses $w^{-1}(\alpha - i + 1) < \dots < w^{-1}(\alpha_j) < b_j < w^{-1}(\alpha_j - 1) < \dots < w^{-1}(\delta_i + 1) < c_i < w^{-1}(\delta_i) < \dots < w^{-1}(\alpha - j)$. Notons $\overline{v_j}$, $\overline{v_i}$ et $\overline{\sigma}$ les permutations obtenues en focalisant sur ces abscisses ; soient

$$\begin{aligned} m_1 &= \# [\alpha_j, \alpha - i + 1] \geq 1, \\ m_2 &= \# [\delta_i + 1, \alpha_j - 1] \geq 0, \\ m_3 &= \# [\alpha - j, \delta_i] \geq 1. \end{aligned}$$

et soit $m = m_1 + m_2 + m_3 + 2$. Les permutations $\overline{v_j}$, $\overline{v_i}$ et $\overline{\sigma}$ sont dans \mathfrak{S}_m ; $\overline{v_j}$ est la permutation maximale telle que $\overline{v_j}(m_1 + m_2 + 2) = 1$ et $\overline{v_j}(m) = m$, $\overline{v_i}$ est la permutation maximale telle que $\overline{v_i}(1) = 1$ et $\overline{v_i}(m_1) = m$, et $\overline{\sigma}$ est la permutation maximale de \mathfrak{S}_m telle que $\overline{\sigma}(m_1) = 1$ et $\overline{\sigma}(m_1 + m_2 + 3) = m$. Soit v la permutation maximale de \mathfrak{S}_m telle que $v(1) = 1$ et $v(m) = m$; on voit facilement que v est le plus grand élément de $\Lambda(\overline{v_i}, \overline{v_j})$, et que $v \leq \overline{\sigma}$. On en déduit, en vertu du lemme 0.3.1, que $X_{v_i} \cap X_{v_j} \subseteq X_\sigma$.

D'autre part, on a remarqué que les rectangles NE_{II} et SO_{II} de la configuration (3412) qui définit σ ne rencontrent pas Γ_w , on a donc, d'après le corollaire 4.2.4, $X_\sigma \subseteq \Sigma_w$. Cela prouve le lemme 5.4.5. \square

Pour terminer la preuve de la proposition 5.4.1, nous allons maintenant démontrer le

Lemme 5.4.6. *Toute famille $(X_{v_i})_{i \in [1, h]}$ de composantes irréductibles des \mathcal{E}_{π_i} , chacune de type Nord-Ouest ou Sud-Est, et associée à une configuration I dégénérée, est bonne.*

Preuve du lemme 5.4.6. On se donne une famille de composantes comme dans l'énoncé du lemme, notée \mathcal{F} . Rappelons que, d'après le lemme 5.4.2, la composante v_1 est de type Sud-Est, disons associée au point (c_1, γ_1) , alors que la composante v_h est de type Nord-Est, disons associée au point (b_h, β_h) . Si l'on a $b_h < c_1$, alors \mathcal{F} est bonne : en effet, d'après le lemme 5.4.2, on a $b \leq b_h$ et $c_1 \leq c$, et il vient $w^{-1}(\alpha) = a < b_h < c_1 < d = w^{-1}(\delta)$.

On peut donc supposer $c_1 < b_h$. Posant $j_0 = 1$ et $i_0 = h$, supposons avoir construit des entiers

$$j_0 < j_1 < \cdots < j_{k-1} < i_{k-1} < \cdots < i_1 < i_0$$

et des points $(c_{j_l}, \gamma_{j_l}) \in \partial SE(j_l)$ et $(b_{i_l}, \beta_{i_l}) \in \partial NO(i_l)$, pour $l = 0, \dots, k-1$, tels que

$$(\dagger) \quad c_{j_0} < c_{j_1} < \cdots < c_{j_{k-1}} < b_{i_{k-1}} < \cdots < b_{i_0}$$

et que les entiers j_{l+1} et i_{l+1} soient définis par les encadrements

$$(\dagger\dagger) \quad \begin{cases} w^{-1}(\alpha - j_{l+1} + 1) < c_{j_l} < w^{-1}(\alpha - j_{l+1}), \\ w^{-1}(\alpha - i_{l+1} + 1) < b_{i_l} < w^{-1}(\alpha - i_{l+1}), \end{cases}$$

pour $l = 0, \dots, k-2$.

On définit alors les entiers j_k et i_k par

$$w^{-1}(\alpha - j_k + 1) < c_{j_{k-1}} < w^{-1}(\alpha - j_k)$$

et

$$w^{-1}(\alpha - i_k + 1) < b_{i_{k-1}} < w^{-1}(\alpha - i_k).$$

On a alors $j_{k-1} < j_k \leq i_k < i_{k-1}$.

Si v_{j_k} est de type Nord-Ouest, définie par le point de Γ_w d'abscisse b_{j_k} , alors b_{j_k} est dans l'intervalle $]w^{-1}(\alpha), w^{-1}(\alpha - j_k + 1[$, il existe donc $l \leq k-1$, tel que $w^{-1}(\alpha - j_l + 1) < b_{j_k} < w^{-1}(\alpha - j_{l+1} + 1)$. On obtient alors, en utilisant $(\dagger\dagger)$, que

$$w^{-1}(\alpha - j_l + 1) < b_{j_k} < c_{j_l} < w^{-1}(\alpha - j_k),$$

et \mathcal{F} est une bonne famille.

Si v_{j_k} est de type Sud-Est, définie par le point de Γ_w d'abscisse c_{j_k} , alors, d'après $(\dagger\dagger)$ et la définition de $SE(j_k)$, on a $c_{j_k} > w^{-1}(\alpha - j_k) > c_{j_{k-1}}$. Si de

plus $c_{j_k} > b_{i_{k-1}}$, en considérant le plus petit entier l tel que $b_{i_l} < c_{j_k}$, on a $c_{j_k} < b_{i_{l-1}}$, et $b_{i_{l-1}} < w^{-1}(\alpha - i_l)$ par $(\dagger\dagger)$. On a aussi $b_{i_l} > w^{-1}(\alpha - i_{l+1} + 1)$ d'après $(\dagger\dagger)$, mais $i_{l+1} \geq i_k \geq j_k$, et comme w^{-1} est décroissante sur $[\delta', \alpha']$, il vient $w^{-1}(\alpha - i_{l+1} + 1) \geq w^{-1}(\alpha - j_k + 1)$. On a donc obtenu

$$w^{-1}(\alpha - j_k + 1) < b_{j_l} < c_{j_k} < w^{-1}(\alpha - i_l),$$

et \mathcal{F} est bonne.

On procède de même avec v_{i_k} : on montre d'abord que si v_{i_k} est de type Sud-Est, \mathcal{F} est une bonne famille. Ensuite, si $v_{i_k} = t^{i_k}(b_{i_k})$ est de type Nord-Ouest, on remarque que $b_{i_k} < b_{i_{k-1}}$ et l'on montre que si de plus $b_{i_k} < c_{j_{k-1}}$ alors la famille \mathcal{F} est bonne.

En regroupant ces résultats, on constate que l'on a montré que \mathcal{F} est une bonne famille, sauf, éventuellement, si $j_k < i_k$, $v_{j_k} = t_{j_k}(c_{j_k})$ de type Sud-Est, $v_{i_k} = t^{i_k}(b_{i_k})$ de type Nord-Ouest, et $b_{i_k}, c_{j_k} \in]c_{j_{k-1}}, b_{i_{k-1}}[$. Si l'on a de plus $b_{i_k} < c_{j_k}$, il vient d'une part $w^{-1}(\alpha - j_k + 1) < b_{i_k}$ car $b_{i_k} > c_{j_{k-1}}$, par hypothèse et $c_{j_{k-1}} > w^{-1}(\alpha - j_k + 1)$ par $(\dagger\dagger)$. On obtient de même $c_{j_k} < w^{-1}(\alpha - i_k)$, d'où finalement

$$w^{-1}(\alpha - j_k + 1) < b_{i_k} < c_{j_k} < w^{-1}(\alpha - i_k),$$

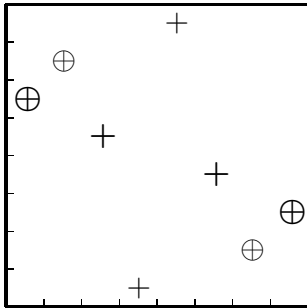
et la famille \mathcal{F} est bonne.

On peut donc supposer que $c_{j_k} < b_{i_k}$ et l'on est à nouveau dans les hypothèses de la récurrence. Ce processus s'arrête, puisque les suites d'entiers b_{i_l} et c_{j_l} sont strictement monotones et bornées, on en déduit donc que \mathcal{F} est une bonne famille. Cela termine la preuve du lemme 5.4.6, et par conséquent aussi celle de la proposition 5.4.1 \square

Exemple 5.4.7. On considère la permutation

$$w = (6, 7, 5, 1, 8, 4, 2, 3)$$

de \mathfrak{S}_8 .



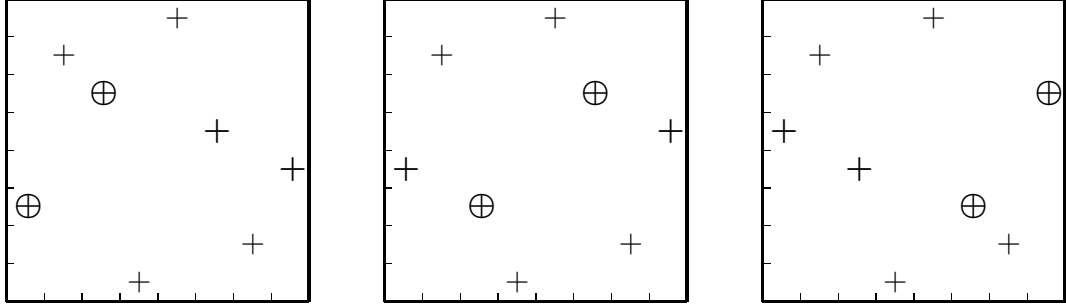
La configuration (3412) formée par les points d'abscisses 1, 2, 7, 8 est bien remplie et de hauteur minimale. On a $h = 3$, $\alpha' = \alpha = 6$ et $\delta' = \delta = 3$. Les permutations associées sont

$$w_1 = (3, 7, 6, 1, 8, 5, 2, 4),$$

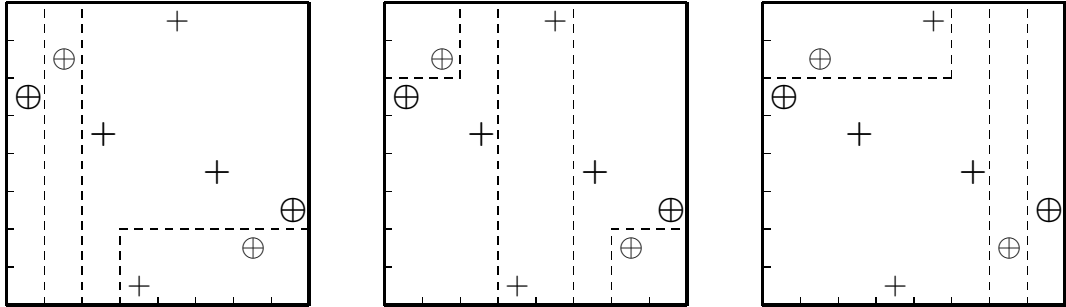
$$w_2 = (4, 7, 3, 1, 8, 6, 2, 5),$$

$$w_3 = (5, 7, 4, 1, 8, 3, 2, 6),$$

dont les graphes sont représentés ci-dessous.



Sur les trois diagrammes suivants, on a représenté les quadrants associés respectivement à chacune des trois quasi-résolutions, ainsi que les bandes verticales d'abscisses $\in]w_i^{-1}(\alpha'), w_i^{-1}(\delta') [$:

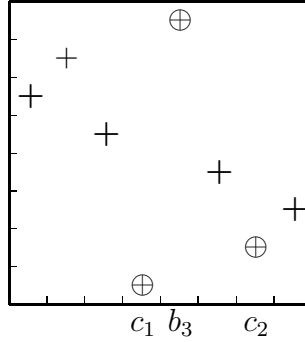


Ainsi, d'après la proposition 5.3.1, chacun des \mathcal{E}_{π_i} a deux composantes irréductibles. Les deux composantes de \mathcal{E}_{π_1} sont de type Sud-Est, $t_1(4) = (1, 7, 6, 5, 8, 4, 2, 3)$ et $t_1(7) = (2, 7, 6, 1, 8, 5, 4, 3)$. Le lieu \mathcal{E}_{π_2} a une composante de type Nord-Ouest et une de type Sud-Est, $t^2(2) = (6, 5, 4, 1, 8, 7, 2, 3)$ et $t_2(7) = (6, 7, 2, 1, 8, 5, 4, 3)$. Enfin, \mathcal{E}_{π_3} a deux composantes de type Nord-Ouest, $t^3(2) = (6, 5, 4, 1, 8, 3, 2, 7)$ et $t^3(5) = (6, 7, 5, 1, 4, 3, 2, 8)$.

Aucune de ces composantes n'est contenue dans Σ_w : elles correspondent toutes à des configurations I dégénérées, qui donnent des points lisses d'après le théorème 4.2.1. En revanche, d'après le lemme 5.4.6, toute intersection

$X_{v_1} \cap X_{v_2} \cap X_{v_3}$, où chaque X_{v_i} est une composante de \mathcal{E}_{π_i} , est contenue dans Σ_w .

Voyons par exemple l'intersection $X_{t_1(4)} \cap X_{t_2(7)} \cap X_{t^3(5)}$. Les entiers $i = 2$ et $j = 3$ remplissent les conditions de la définition 5.4.4 : (a) $t_2(7)$ est de type Sud-Est, associée au point $(7, 2)$; (b) $t^3(5)$ est de type Nord-Ouest, associée au point $(5, 9)$; (c) on a $\alpha = 6$ et $w^{-1}(5) = 3 < b_3 = 5 < c_2 = 7 < w^{-1}(3) = 8$.



D'après le lemme 5.4.5, l'intersection $X_{t_2(7)} \cap X_{t^3(5)}$ est contenue dans X_σ , où σ est la permutation associée à la configuration II pure formée par les points d'abscisses 3, 5, 6, 7, 8, c.-à-d. $\sigma = (6, 7, 2, 1, 5, 4, 3, 8)$.

5.4.2 Correspondance entre configurations

Pour toute configuration \mathcal{K} de w_i , de type I ou II, on note $w_I w_{J_i}(\mathcal{K})$ l'ensemble des points $(x, w(x))$ tels que $(x, w_i(x)) \in \mathcal{K}$.

Proposition 5.4.8. *Pour toute configuration \mathcal{K} de w_i , de type I ou II, paramétrant une composante irréductible X_v du lieu singulier de X_{w_i} , on a :*

- ou bien $P_I \times^{P_{J_i}} X_v \subseteq \text{Ex}(\pi_i)$,
- ou bien $w_I w_{J_i}(\mathcal{K})$ est une configuration du même type de w , et $\pi_i(P_I \times^{P_{J_i}} X_v) = X_{w_I w_{J_i} v}$ est la composante irréductible du lieu singulier de X_w associée.

Pour démontrer cette proposition, nous utiliserons la notion suivante

Définition 5.4.9. Soit z une permutation et \mathcal{F} une famille de points du graphe de z , $\mathcal{F} = \{(x_1, z(x_1)), \dots, (x_m, z(x_m))\}$, avec $x_1 < \dots < x_m$. Pour $j = 1, \dots, m - 1$, on appelle *successeur de $(x_j, z(x_j))$ dans \mathcal{F}* le point $(x_{j+1}, z(x_{j+1}))$.

Preuve. On considère une configuration \mathcal{K} de w_i , paramétrant une composante irréductible X_v de $\text{Sing } X_{w_i}$. On suppose de plus que $P_I \times^{P_{J_i}} X_v \not\subseteq \text{Ex}(\pi_i)$.

D'après la discussion au début de la preuve de la proposition 5.3.1, il vient que $w_{J_i}v \in {}^I\mathfrak{S}_{min}$, de sorte que $w_I * v = w_I w_{J_i}v$. Il suffit alors de montrer que $w_I w_{J_i}(\mathcal{K})$ est une configuration du même type de w . En effet, la dernière assertion en découle : on a $v = \gamma(\kappa)w_i$, où $\gamma(\kappa)$ est un certain cycle sur les ordonnées de la configuration \mathcal{K} , et de même, la composante irréductible de $\text{Sing } X_w$ associée à $w_I w_{J_i}(\mathcal{K})$ de w est donnée par $v' = \gamma(w_I w_{J_i}(\mathcal{K}))w$, et comme $\gamma(z(\kappa)) = z \gamma(\kappa) z^{-1}$, pour tout z , il vient $v' = w_I w_{J_i} \gamma(\kappa) w_i = w_I w_{J_i} v$.

On remarque de plus que l'on a $(\delta', \alpha')v \not\leq w_i$. En effet, notant $v' = (\delta', \alpha')v$, on a $v' = w_{J_i} s_{k_i} \theta$, et comme $\theta \in {}^I\mathfrak{S}_{min}$, il vient $v' \in {}^{J_i}\mathfrak{S}_{max}$. Si l'on avait $v' \leq w_i$, alors $P_I \times^{P_{J_i}} X_{v'} \subseteq Z_i$ aurait même image que $P_I \times^{P_{J_i}} X_v$, d'où $P_I \times^{P_{J_i}} X_v \subseteq \text{Ex}(\pi_i)$, une contradiction.

On note \mathcal{S}_i^S (resp. \mathcal{S}_i^N) l'ensemble des points du graphe de w_i dont l'ordonnée est dans $[\delta', k_i]$ (resp. $[k_i + 1, \alpha']$), et $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_i^S \cup \mathcal{S}_i^N$. On note aussi $\mathcal{S} = w_I w_{J_i}(\mathcal{S}_i)$.

1. Supposons pour commencer que \mathcal{K} est une configuration I, nécessairement non dégénérée puisqu'elle paramètre un point singulier de X_{w_i} . On conserve les notations concernant les configurations I définies dans les chapitres 3 et 4. On note \mathcal{K}^N la réunion de $\{P_+\}$ et de la suite NE, et \mathcal{K}^S la réunion de $\{P_-\}$ et de la suite SO. Si la configuration \mathcal{K} ne rencontre pas \mathcal{S}_i , le résultat est clair. Supposons au contraire que $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i \neq \emptyset$. Soit p_2 la deuxième projection de $[1, n]^2$ sur $[1, n]$. Comme w_i^{-1} est décroissante sur chacun des $p_2(E)$, pour $E = \mathcal{S}_i^S, \mathcal{S}_i^N, \mathcal{K}^S, \mathcal{K}^N$, et que \mathcal{S}_i^S est au Sud-Ouest de \mathcal{S}_i^N , chacune des deux parties \mathcal{K}^S et \mathcal{K}^N ne peut rencontrer qu'au plus l'une de \mathcal{S}_i^S et \mathcal{S}_i^N .

Montrons de plus que \mathcal{S}_i ne peut rencontrer simultanément \mathcal{K}^N et \mathcal{K}^S . En effet, supposons que ce soit le cas. Alors, nécessairement, \mathcal{K}^N rencontre \mathcal{S}_i^N et \mathcal{K}^S rencontre \mathcal{S}_i^S , et cela entraîne que \mathcal{S}_i ne contient ni P_+ ni P_- . Ainsi $\mathcal{K}^N \cap \mathcal{S}_i^N$ est contenu dans la suite NE, et $\mathcal{K}^S \cap \mathcal{S}_i^S$ dans la suite SO. Comme P_- est au Sud-Est de la suite NE, on en déduit que $x_{-\infty} > w_i^{-1}(\alpha')$, d'où $x_{-\infty} > w_i^{-1}(\delta')$.

Soit $y_m = \inf \{y \mid (w_i^{-1}(y), y) \in \mathcal{K}^S \cap \mathcal{S}_i^S\}$; on a $y_m = \delta'$, car sinon le point $(w_i^{-1}(\delta'), \delta')$ serait contenu dans $\Gamma_{w_i} \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}$ mais pas dans $\bigcup_{j=1}^t SO(x_{-j}, y_{-j}) \cup \bigcup_{j=1}^s NE(x_j - 1, y_j - 1)$, ce qui contredirait (Δ) . On montre de même que α' est l'ordonnée d'un point de la suite NE. Mais on

voit alors que $v' := (\delta', \alpha') v < w_i$. En effet, les graphes $\Gamma_{v'}$ et Γ_{w_i} coïncident en dehors des ordonnées de \mathcal{Y} (cf. 3.1), il suffit donc de comparer les permutations obtenues en focalisant sur ces ordonnées. Posant $n' = s + t + 2$, on a alors

$$\begin{aligned}\overline{w_i} &= (n', t+1, \dots, 2, s+t+1, \dots, t+2, 1) \\ \overline{v} &= (t+1, \dots, 1, n', \dots, t+2)\end{aligned}$$

et $\overline{v'} = (j_1, j_2)\overline{v}$ avec $j_1 \in [2, t+1]$ et $j_2 \in [t+2, s+t+1]$. On a donc $\overline{v'} < \overline{w_i}$, d'où $v' < w_i$, exclu. On a ainsi démontré que $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i$ est contenu dans \mathcal{K}^N ou bien dans \mathcal{K}^S , donc égal à l'un des quatre $\mathcal{K}^* \cap \mathcal{S}_i^{*'}$ où $*, *' \in \{N, S\}$.

Supposons par exemple que $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i = \mathcal{K}^N \cap \mathcal{S}_i^S$. Alors il est clair que les coordonnées des points de $w_I w_{J_i}(\mathcal{K})$ vérifient les inégalités requises (cf. 3.1), et il suffit donc de vérifier l'inclusion (Δ) . Notons

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \{(x_\infty, y_\infty), (x_{-\infty}, y_{-\infty})\} \cup \{(x_j, y_j), j \in [-t, -1] \cup [1, s]\}, \\ w_I w_{J_i}(\mathcal{K}) &= \{(x_\infty, y'_\infty), (x_{-\infty}, y'_{-\infty})\} \cup \{(x_j, y'_j), j \in [-t, -1] \cup [1, s]\}.\end{aligned}$$

Comme les graphes Γ_{w_i} et Γ_w coïncident sur les ordonnées hors de $[\delta', \alpha']$, il suffit de montrer que

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w) \subseteq \bigcup_{j=1}^t SO(x_{-j}, y'_{-j}) \cup \bigcup_{j=1}^s NE(x_j - 1, y'_j - 1) \quad (\Delta').$$

Soit $y_m = \inf \{y \mid (w_i^{-1}(y), y) \in \mathcal{K}^N \cap \mathcal{S}_i^S\}$; on a $m \in [1, s] \cup \{\infty\}$. Soit m' l'entier tel que $x_{m'} = v^{-1}(y_m)$; on a $m' \in [1, s] \cup \{-\infty\}$. Le point $(x_{m'}, y_{m'})$ est à l'Ouest, au sens large, du successeur de $(w_i^{-1}(y_m), y_m)$ dans \mathcal{S}_i . En effet, si $y_m \neq \delta'$, alors le successeur de $(w_i^{-1}(y_m), y_m)$ dans \mathcal{S}_i est $(w_i^{-1}(y_m - 1), y_m - 1)$. Si l'on avait $w_i^{-1}(y_m - 1) < x_{m'}$, alors le point $(w_i^{-1}(y_m - 1), y_m - 1)$ serait contenu dans $\Gamma_{w_i} \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w_i)$, et pas dans $\bigcup_{j=1}^t SO(x_{-j}, y_{-j}) \cup \bigcup_{j=1}^s NE(x_j - 1, y_j - 1)$, ce qui contredit (Δ) . D'autre part, si $y_m = \delta'$, alors le successeur de $(w_i^{-1}(y_m), y_m)$ dans \mathcal{S}_i est $(w_i^{-1}(\alpha'), \alpha')$. Si l'on avait $w_i^{-1}(\alpha') < x_{m'}$, alors on aurait $(\delta', \alpha') v < v$, d'où $(\delta', \alpha') v < w_i$, exclu.

Il vient alors : si $m' = -\infty$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w) \subseteq w_I w_{J_i}(\mathcal{K})$, d'où (Δ') , et si $m' \neq -\infty$, comme on a $w_i(x_{m'}) = y_{m'} < \delta'$, alors $w(x_{m'}) = w_i(x_{m'})$, ou encore $y'_{m'} = y_{m'}$ et alors

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{R}_{(x_\infty, x_{-\infty})}(w) \subseteq w_I w_{J_i}(\mathcal{K}) \cup NE(x_{m'} - 1, y'_{m'} - 1),$$

d'où l'on déduit (Δ') .

Le cas $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i = \mathcal{K}^S \cap \mathcal{S}_i^N$ est semblable, et les cas où $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i$ est égal à $\mathcal{K}^S \cap \mathcal{S}_i^S$ ou $\mathcal{K}^N \cap \mathcal{S}_i^N$ sont similaires, mais plus simples.

On a donc démontré le résultat lorsque \mathcal{K} est une configuration I.

2. Supposons maintenant que \mathcal{K} est une configuration II : comme X_v est une composante irréductible du lieu singulier, on a, d'après le corollaire 4.2.4, $s = t = 0$ ou $r = 0$.

2.1. Traitons pour commencer le cas d'une configuration pure. Notons A, B, C et D les quatre points de la configuration (3412) qui détermine \mathcal{K} , et (x_A, y_A) , etc. leurs coordonnées. On va montrer que $w_I w_{J_i}(\{A, B, C, D\})$ est une configuration (3412) de w , incompressible, et telle que les zones $NE_{II}(w)$ et $SO_{II}(w)$ associées ne contiennent pas de point de Γ_w . Comme précédemment, il suffit de montrer que

$$(MN(w) \cup NE_{II}(w) \cup ME(w) \cup MS(w) \cup SO_{II}(w) \cup MO(w)) \cap \mathcal{S} = \emptyset \quad (\nabla).$$

Comme l'ensemble des ordonnées des points de \mathcal{S}_i est un intervalle, le résultat est clair si $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i = \emptyset$. On suppose donc $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i \neq \emptyset$.

2.1.1. Supposons pour commencer $B \in \mathcal{S}_i$. Alors le seul autre point de \mathcal{K} qui pourrait appartenir à \mathcal{S} est A , mais on aurait alors $(\delta', \alpha') v < v$, exclu. On a donc $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i = \{B\}$. Alors il est clair que $w_I w_{J_i}(\{A, B, C, D\})$ est une configuration (3412) de w , notée \mathcal{I} . Si $B \in \mathcal{S}_i^N$, alors comme on a vu que $A \notin \mathcal{S}_i$, on a $p_2(\mathcal{S}_i^S) \subseteq]y_A, y_B[$, et l'on obtient que \mathcal{I} est de la forme voulue. D'autre part, si $B \in \mathcal{S}_i^S$, on a d'abord $y_A < \delta'$, et donc $(ME(w) \cup MS(w) \cup SO_{II}(w) \cup MO(w)) \cap \mathcal{S} = \emptyset$. Ensuite, si $y_B \neq \delta'$, le successeur de B dans \mathcal{S}_i a pour ordonnée $y_B - 1 \in]y_A, y_B[$, et comme \mathcal{K} est incompressible et que le rectangle $NE_{II}(\mathcal{K})$ ne rencontre pas Γ_{w_i} , on a nécessairement $x_D < w_i^{-1}(y_B - 1)$. D'autre part, si l'on a $y_B = \delta'$, alors le successeur de B dans \mathcal{S}_i est le point d'ordonnée α' , et l'on a $x_D < w^{-1}(\alpha')$, car sinon on aurait $(\delta', \alpha') v < v$. On en déduit, dans les deux cas, $(MN(w) \cup NE_{II}(w)) \cap \mathcal{S} = \emptyset$. On a ainsi obtenu (∇) lorsque $B \in \mathcal{S}_i$. Le cas où $C \in \mathcal{S}_i$ se traite de façon semblable.

2.1.2. Il reste donc à traiter le cas $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{K}^M$, où \mathcal{K}^M désigne la réunion de A, D et de la suite centrale. Dans ce cas, $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i$ est contenue dans l'une des deux zones \mathcal{S}_i^N ou \mathcal{S}_i^S , disons \mathcal{S}_i^S .

Si l'on a $A \in \mathcal{S}_i^S$ et $D \notin \mathcal{S}_i^S$: alors on a d'une part $y_D < \delta'$, donc $(MS(w) \cup SO_{II}(w)) \cap \mathcal{S} = \emptyset$. D'autre part, on a $y_B > \alpha'$, donc, comme la configuration \mathcal{K} est incompressible et que $NE_{II}(\mathcal{K})$ ne rencontre pas Γ_{w_i} , les abscisses de B et D sont contenues dans un même intervalle de la subdivision donnée

par les abscisses des points de \mathcal{S}_i . Alors les propriétés voulues concernant les rectangles $MN(w)$, $NE_{II}(w)$, $MO(w)$ et $ME(w)$ résultent de leur analogue dans Γ_{w_i} . On a donc établi (∇) dans ce cas. Les autres cas, plus simples, sont laissés au lecteur. On a donc démontré le résultat pour \mathcal{K} de type II telle que $s = t = 0$.

2.2. Soit maintenant \mathcal{K} de type II mixte. On décompose alors \mathcal{K} en trois parties : on note \mathcal{K}^N la réunion de $\{B\}$ et de la suite NE, $\mathcal{K}^M = \{A, D\}$ et \mathcal{K}^S est la réunion de $\{C\}$ et de la suite SO. On va montrer que $w_I w_{J_i}(\{A, B, C, D\})$ est une configuration (3412) de w , incompressible et de zone centrale ne contenant pas de point de Γ_w , et que

$$\Gamma_w \cap (SO_{II}(w) \cup NE_{II}(w)) \subseteq \bigcup_{j=1}^t SO(x_{-j}, y'_{-j}) \cup \bigcup_{j=1}^s NE(x_j - 1, y'_j - 1) \quad (\diamond)$$

avec les mêmes conventions d'écriture que précédemment. A nouveau, on peut remplacer (\diamond) par

$$\mathcal{S} \cap (SO_{II}(w) \cup NE_{II}(w)) \subseteq \bigcup_{j=1}^t SO(x_{-j}, y'_{-j}) \cup \bigcup_{j=1}^s NE(x_j - 1, y'_j - 1) \quad (\diamond').$$

Le résultat est clair si $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i = \emptyset$, on suppose donc $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i \neq \emptyset$. On remarque que l'intersection de chacune des parties \mathcal{S}_i^S et \mathcal{S}_i^N avec \mathcal{K} est contenue dans l'une de \mathcal{K}^N , \mathcal{K}^M et \mathcal{K}^S .

2.2.1. Supposons pour commencer que \mathcal{K} ne rencontre qu'une seule de \mathcal{S}_i^S et \mathcal{S}_i^N . Les deux cas sont symétriques, il suffit donc de traiter par exemple $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i^S$. On suppose d'abord $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i^S = \mathcal{K}^N \cap \mathcal{S}_i^S$. Alors il est clair que $w_I w_{J_i}(\{A, B, C, D\})$ est une configuration (3412) de w . Par ailleurs, on a $y_A < \delta'$, donc les propriétés voulues concernant les rectangles $MO(w)$, $C(w)$, $ME(w)$, $MS(w)$, et $SO_{II}(w)$ résultent de leur analogue dans Γ_{w_i} . Les abscisses de B et C sont nécessairement contenues dans un même intervalle de la subdivision donnée par les abscisses des points de \mathcal{S}_i (sinon $MN(w_i)$ contiendrait des points de \mathcal{S}_i). Il en résulte que $MN(w) \cap \Gamma_w = \emptyset$. Concernant $NE_{II}(w)$, il suffit de montrer que

$$NE_{II}(w) \cap w_I w_{J_i}(\mathcal{S}_i^N) \subseteq \bigcup_{j=1}^s NE(x_j - 1, y'_j - 1) \quad (\diamond'').$$

Or on montre que l'on a $x_D < w_i^{-1}(\alpha')$ ou bien qu'il existe $j \in [1, s]$ tel que $x_j < w_i^{-1}(\alpha')$ et $y_j < \delta'$. Dans le premier cas, il vient

$$NE_{II}(w) \cap w_I w_{J_i}(\mathcal{S}_i^N) = \emptyset,$$

et dans le second, on a $y'_j = y_j$ et on obtient

$$NE_{II}(w) \cap w_I w_{J_i}(\mathcal{S}_i^N) \subseteq NE(x_j - 1, y'_j - 1).$$

On a donc établi (\diamond''). Cela prouve le résultat voulu dans le cas $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i = \mathcal{K}^N \cap \mathcal{S}_i^S$. Le cas $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i = \mathcal{K}^S \cap \mathcal{S}_i^S$, plus simple que celui que nous venons de détailler, est laissé au lecteur.

Le cas $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{K} \cap \mathcal{S}_i^S \subseteq \mathcal{K}^M$ se traite de la même manière que son analogue traité en 2.1.2.

2.2.2. Il reste pour terminer à montrer que \mathcal{K} ne peut pas rencontrer à la fois \mathcal{S}_i^N et \mathcal{S}_i^S . On remarque d'abord que si \mathcal{S}_i^S rencontre \mathcal{K}^N ou contient D , alors $\mathcal{S}_i^N \cap \mathcal{K} = \emptyset$. De même, si \mathcal{S}_i^N rencontre \mathcal{K}^S ou contient A , alors $\mathcal{S}_i^S \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Ainsi, si \mathcal{K} rencontrait à la fois \mathcal{S}_i^N et \mathcal{S}_i^S , on aurait

$$\mathcal{S}_i^S \cap \mathcal{K} \subseteq \{A\} \cup \mathcal{K}^S, \text{ et } \mathcal{S}_i^N \cap \mathcal{K} \subseteq \{D\} \cup \mathcal{K}^N.$$

De plus, on n'a pas simultanément $\mathcal{S}_i^S \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^S$ et $\mathcal{S}_i^N \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}^N$, car les ordonnées de A et D sont entre celles des points de \mathcal{K}^S et \mathcal{K}^N . Les possibilités qui restent sont donc

$$A \in \mathcal{S}_i^S \text{ et } \mathcal{S}_i^N \cap \mathcal{K}^N \neq \emptyset$$

ou, symétriquement,

$$D \in \mathcal{S}_i^N \text{ et } \mathcal{S}_i^S \cap \mathcal{K}^S \neq \emptyset.$$

Mais on montre alors que l'on aurait $(\delta', \alpha')v < v$, exclu. Cela termine la preuve de la proposition 5.4.8. \square

Chapitre 6

Théorème principal

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème principal 6.1. *Le lieu singulier de X_w est la réunion des composantes décrites dans la section 4.2. En particulier, les singularités génériques sont de type S_1 ou S_2 , c'est-à-dire soit un cône de matrices de rang au plus 1, soit un cône quadratique non dégénéré de dimension impaire $d \geq 5$.*

Preuve. Nous allons procéder par récurrence sur la dimension de X_w pour montrer que $\text{Sing } X_w = \Sigma_w$. On peut supposer $n \geq 4$ puisque les variétés de Schubert de GL_3/B sont lisses. L'énoncé a été établi dans le cas des variétés covexillaires dans la partie I.

On suppose maintenant l'égalité démontrée pour toute variété de Schubert de dimension $\leq k - 1$, et on se donne X_w de dimension k . On peut supposer w non covexillaire. On fixe alors une configuration (3412) de w , bien remplie et de hauteur minimale, et on considère les quasi-résolutions de X_w étudiées dans le chapitre 5. Etant donné une composante irréductible X_v de $\text{Sing } X_w$, ou bien $X_v \subseteq \bigcap_{i=1}^h \mathcal{E}_{\pi_i}$, ou bien il existe un entier i tel que $X_v \not\subseteq \mathcal{E}_{\pi_i}$. Dans le premier cas, on obtient $X_v \subseteq \Sigma_w$, d'après la proposition 5.4.1.

Dans le second cas, considérons l'ouvert Reg_{π_i} . Nous utiliserons le fait suivant : si Ω est un ouvert d'une variété X , les composantes irréductibles de $\text{Sing } X$ qui rencontrent Ω sont en bijection avec les composantes irréductibles de $\text{Sing } \Omega$, par l'application $Y \mapsto Y \cap \Omega$.

Ici, la composante irréductible X_v de $\text{Sing } X_w$ rencontre Reg_{π_i} , donc $X_v \cap \text{Reg}_{\pi_i}$ est une composante irréductible de $\text{Sing } \text{Reg}_{\pi_i}$. Comme π_i in-

duit un isomorphisme de $\text{Reg}(\pi_i)$ sur $\text{Reg}_{\mathfrak{S}_{\pi_i}}$, $\pi_i^{-1}(X_v \cap \text{Reg}_{\pi_i})$ est une composante irréductible de $\text{Sing } \text{Reg}(\pi_i)$. Il existe alors, d'après le fait évoqué plus haut, une composante irréductible Y de $\text{Sing } Z_i$ telle que $\pi_i^{-1}(X_v \cap \text{Reg}_{\pi_i}) = Y \cap \text{Reg}(\pi_i)$. Par ailleurs, comme la projection de Z_i sur P_I/P_{J_i} est une fibration localement triviale de fibre X_{w_i} , les composantes irréductibles de $\text{Sing } Z_i$ sont les $P_I \times^{P_{J_i}} X_{v_i}$, avec X_{v_i} composante irréductible de $\text{Sing } X_{w_i}$. Ainsi, il existe une composante irréductible X_{v_i} de $\text{Sing } X_{w_i}$ telle que $Y = P_I \times^{P_{J_i}} X_{v_i}$. Il vient alors, comme π_i est surjective et propre, $X_v = \pi_i(P_I \times^{P_{J_i}} X_{v_i})$. Par hypothèse de récurrence, on a $\text{Sing } X_{w_i} = \Sigma_{w_i}$, donc il existe une configuration \mathcal{K} de w_i telle que $v_i = \gamma(\kappa)w_i$. Il résulte alors de la proposition 5.4.8 que $X_v = X_{w_I w_{J_i} v_i} \subseteq \Sigma_w$. Le théorème est démontré. \square

Remarque 6.2. Le théorème précédent, combiné avec [3], 3.3 et 4.6, permet de déterminer, pour chaque composante irréductible X_v de $\text{Sing } X_w$, le polynôme de Kazhdan-Lusztig $P_{v,w}$ et la multiplicité de X_w en e_v , notée $m_{v,w}$ (on renvoie par exemple à [29], chap.5, 14 pour cette notion). Si $\mathcal{N}_{v,w} \simeq \mathcal{C}_{i+1,j+1}$ alors

$$m_{v,w} = \binom{i+j}{i} \quad \text{et} \quad P_{v,w} = 1 + q + \dots + q^u,$$

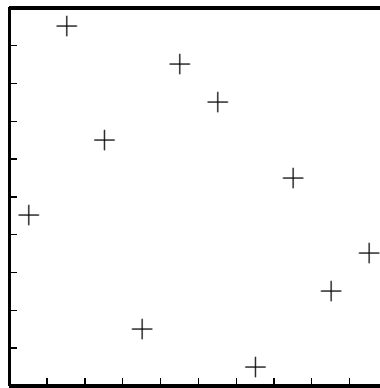
où $u = \text{Min}(i, j)$, tandis que si $\mathcal{N}_{v,w} \simeq \mathcal{K}_{2k+1}$, alors

$$m_{v,w} = 2 \quad \text{et} \quad P_{v,w} = 1 + q^k.$$

Exemple 6.3. On considère la permutation

$$w = (5, 10, 7, 2, 9, 8, 1, 6, 3, 4)$$

dans \mathfrak{S}_{10} .



Il y a deux points coessentiels bien bordés $P_1 = (5, 5)$ et $P_2 = (5, 7)$; P_1 admet trois bordages minimaux, donnés par les couples de points d'abscisses $(3, 7)$, $(3, 9)$ et $(3, 10)$, tous dégénérés (l'un au Nord-Est, les deux autres au Sud-Ouest). Le point P_2 admet deux bordages minimaux, donnés par les couples de points d'abscisses $(2, 7)$ et $(2, 8)$, non dégénérés, qui donnent deux composantes de type S_1 . D'autre part, les configurations (3412) incompressibles sont d'abscisses

1, 3, 4, 9
 1, 3, 4, 10,
 1, 6, 7, 9,
 1, 6, 7, 10,
 1, 8, 9, 10,
 3, 6, 7, 8,
 3, 6, 9, 10 (*).

Elles donnent toutes des configurations II mixtes, sauf celle qui est marquée d'une (*), qui donne une configuration II pure.

Le lieu singulier de X_w a donc 9 composantes irréductibles. Elles sont données dans le tableau ci-après. Dans la colonne de gauche, on a écrit les configurations, données par les ordonnées des points, dans l'ordre des abscisses croissantes, ainsi que le type de la configuration. Pour les configurations I, les ordonnées $y_{-\infty}$ et y_{∞} sont marquées en gras; pour les configurations II, les ordonnées des points de la configuration (3412) sont indiquées en gras. La composante irréductible correspondante v est donnée dans la deuxième colonne; les points où elle diffère de w sont en gras. Dans les quatre colonnes suivantes, on donne la classe d'isomorphisme de la transversale, sa dimension $d = \dim \mathcal{N}_{v,w} = \ell(w) - \ell(v)$, le polynôme de Kazhdan-Lusztig $P_{v,w}$, et enfin la multiplicité $m_{v,w}$.

	Configuration	v	$\mathcal{N}_{v,w}$	d	$P_{v,w}$	$m_{v,w}$
I	10, 7, 2, 9, 8, 1	(5, 7, 2, 1, 10, 9, 8, 6, 3, 4)	$\mathcal{C}_{3,3}$	5	$1 + q + q^2$	6
I	10, 7, 9, 8, 6	(5, 7, 6, 2, 10, 9, 1, 8, 3, 4)	$\mathcal{C}_{2,3}$	4	$1 + q$	3
II_m	5, 7, 2, 6, 3	(2, 10, 5, 3, 9, 8, 1, 7, 6, 4)	$\mathcal{C}_{3,2}$	4	$1 + q$	3
II_m	5, 7, 2, 6, 4	(2, 10, 5, 4, 9, 8, 1, 7, 3, 6)	$\mathcal{C}_{3,2}$	4	$1 + q$	3
II_m	5, 8, 1, 6, 3	(1, 10, 7, 2, 9, 5, 3, 8, 6, 4)	$\mathcal{C}_{3,2}$	4	$1 + q$	3
II_m	5, 8, 1, 6, 4	(1, 10, 7, 2, 9, 5, 4, 8, 3, 6)	$\mathcal{C}_{3,2}$	4	$1 + q$	3
II_m	5, 6, 3, 4	(3, 10, 7, 2, 9, 8, 1, 5, 4, 6)	$\mathcal{C}_{2,2}$	3	$1 + q$	2
II_m	7, 2, 8, 1, 6	(5, 10, 2, 1, 9, 7, 6, 8, 3, 4)	$\mathcal{C}_{3,2}$	4	$1 + q$	3
II_p	7, 8, 6, 3, 4	(5, 10, 3, 2, 9, 7, 1, 6, 4, 8)	\mathcal{K}_5	5	$1 + q^2$	2

Index des notations

e_w	11
C_w	11
X_w	11
$\ell(w)$	11
Γ_w	11
\mathbb{F}_n	11
\mathbb{K}^\bullet	11
$\mathbb{F}_{(d_1, \dots, d_k; n)}$	11
$Gr_p(n)$	11
\mathfrak{S}_I	11
${}^I\mathfrak{S}_{min}$	11
${}^I\mathfrak{S}_{max}$	11
$\mathcal{N}_{v,w}$	12
Singularité de type S_1	12
$\mathcal{C}_{i,j}$	12
Singularité de type S_2	12
\mathcal{K}_{2k+1}	12
$NO(p, q)$	16
$NO_w(p, q)$	16
$\partial(NO_w(p, q))$	16
$\mathcal{R}_{(a,b)}(w), \overline{\mathcal{R}}_{(a,b)}(w)$	17
$\mathcal{R}^{(a,b)}(w), \overline{\mathcal{R}}^{(a,b)}(w)$	17
Σ_w	65
$\text{Reg}(\pi)$	65
$\text{Ex}(\pi)$	65
Reg_π	65
\mathcal{E}_π	65
$t^i(b')$	70
$t_i(c')$	70
$m_i(b', c')$	70

Bibliographie

- [1] S. Billey, V. Lakshmibai, *Singular loci of Schubert varieties*, Progress in Mathematics **182**, Birkhuser, 2000.
- [2] S. Billey, G. Warrington, *Maximal singular loci of Schubert varieties in $SL(n)/B$* , preprint, arXiv :math.AG/0102168.
- [3] M. Brion, P. Polo, *Generic singularities of certain Schubert varieties*, Math. Z. **231** (1999), 301-324.
- [4] S. Buoncristiano, A. B. Veit, *The intrinsic stratification of a Schubert variety*, Adv. Math. **91** (1) (1992), 1-26.
- [5] F. du Cloux, *Coxeter*, programme disponible à l'adresse www.desargues.univ-lyon1.fr/home/ducloux/coxeter.html.
- [6] A. Cortez, *Singularités génériques des variétés de Schubert covexillaires*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** (2) (2001), 375-393.
- [7] A. Cortez, *Singularités génériques et quasi-résolutions des variétés de Schubert pour le groupe linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris **333** (2001), 561-566.
- [8] V. Deodhar, *Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Mbius function*, Invent. Math. **39** (2) (1977), 187-198.
- [9] V. Deodhar, *Local Poincaré duality and nonsingularity of Schubert varieties*, Comm. Algebra **13** (1985), 1379-1388.
- [10] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique, tome 2*, P.U.F, 1974.
- [11] M. J. Dyer, *Hecke algebras and shellings of Bruhat intervals*, Compositio Math. **89** (1) (1993), 91-115.
- [12] C. Ehresmann, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*, Annals of Math. **35** (1934), 396-443.

- [13] W. Fulton, *Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas*, Duke Math. J. **65** (1992), 381-420.
- [14] W. Fulton, *Young Tableaux, with applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, 1997.
- [15] N. Gonciulea, *Singular loci of varieties of complexes, II*, J. Algebra **235** (2) (2001), 547-558.
- [16] C. Kassel, A. Lascoux, C. Reutenauer, *The singular locus of a Schubert variety*, preprint, IRMA n°2001-004.
- [17] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), 165-184.
- [18] G. Kempf, *Algebraic varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series **172**, Cambridge University Press, 1993.
- [19] V. Lakshmibai, C. Musili, C. S. Seshadri, *Geometry of G/P . IV. Standard monomial theory for classical types*, Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A (Math. Sci.) **88** (4) (1979), 279-362.
- [20] V. Lakshmibai, B. Sandhya, *Criterion for smoothness of Schubert varieties in $SL(n)/B$* , Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **100** (1990), 45-52.
- [21] V. Lakshmibai, C. S. Seshadri, *Singular locus of a Schubert variety*, Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1984), 363-366.
- [22] A. Lascoux, *Polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les variétés de Schubert vexillaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 667-670.
- [23] A. Lascoux, *Ordonner le groupe symétrique : pourquoi utiliser l'algèbre de Iwahori-Hecke ?* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. III, 355-364.
- [24] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, *Schubert polynomials and the Littlewood-Richardson rule*, Lett. Math. Phys. **10** (2-3) (1985), 111-124.
- [25] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, *Treillis et bases des groupes de Coxeter*, Electron. J. Combin. **3** (2) (1996) (The Foata Festschrift volume).
- [26] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, Cours spécialisés **3**, Société Mathématique de France, 1998.

- [27] L. Manivel, *Le lieu singulier des variétés de Schubert*, preprint, arXiv :math.AG/0102124.
- [28] L. Manivel, *Generic singularities of Schubert varieties*, preprint, arXiv :math.AG/0105239.
- [29] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge University Press, 1986.
- [30] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Lecture Notes in Mathematics **1358**, Springer, 1999.
- [31] P. Polo, *Construction of arbitrary Kazhdan-Lusztig polynomials in symmetric groups*, Represent. Theory (an electronic journal of the AMS) **3** (1999), 90-104.
- [32] S. Ramanan, A. Ramanathan, *Projective normality of flag varieties and Schubert varieties*, Invent. Math. **79** (1985), 217-224.
- [33] K. Ryan, *On Schubert varieties in the flag manifold of $SL(n, \mathbb{C})$* , Math. Ann. **276** (1987), 205-224.
- [34] A. Zelevinsky, *Small resolutions of singularities of Schubert varieties*, Funct. Anal. Applic. **17** (1982) 142-144.