UNIVERSITÉ PARIS VI - PIERRE ET MARIE CURIE

U.F.R de Mathématiques

Thèse de Doctorat

Présentée par

AURÉLIEN GALATEAU

Problème de Bogomolov sur les variétés abéliennes

Soutenue le 13 DÉCEMBRE 2007 devant le jury composé de :

MATT	BAKER	(Georgia Institute of Technology)
DANIEL	BERTRAND	(Université Paris 6)
ANTOINE	CHAMBERT-LOIR	(Université Rennes 1)
SINNOU	DAVID	(Université Paris 6)
GAËL	RÉMOND	(Université Grenoble 1)
EMMANUEL	ULLMO	(Université Paris 11)

Directeur : SINNOU DAVID
Rapporteurs : MATT BAKER & EMMANUEL ULLMO

Remerciements

A l'heure de soutenir cette thèse, je souhaite ici exprimer ma reconnaissance pour ceux qui m'ont aidé à en voir le terme. Leur soutien m'a permis de supporter les nombreux découragements ; de mieux vivre tous les changements qui sont venus avec cette longue période souvent introspective.

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Sinnou David, qui m'a patiemment formé depuis quatre ans. Il m'a encouragé à approfondir les différents langages de la géométrie diophantienne, et m'a orienté vers un sujet très riche, qui correspondait parfaitement à ma curiosité pour la géométrie et la théorie des nombres. Au gré de nos nombreuses discussions, qui dépassaient toujours largement le cadre de ce travail, j'ai pu préciser mes intuitions sur ce qu'implique le métier de chercheur. Enfin, sans son optimisme infaillible, ses innombrables suggestions et sa grande disponibilité, cette thèse n'aurait pu aboutir.

Je tiens ensuite à remercier Matt Baker et Emmanuel Ullmo, qui ont accepté de rapporter ma thèse. Les conseils d'Emmanuel m'ont permis d'améliorer nettement ce travail et ont ouvert de nouvelles pistes pour des enrichissements ultérieurs. Daniel Bertrand, directeur du DEA où j'ai débuté ma formation doctorale, Antoine Chambert-Loir, qui m'a donné de précieuses explications sur le formalisme arakelovien, et Gaël Rémond, pour ses invitations à Grenoble et sa relecture récente, ont tous accompagné ma formation mathématique. Je suis donc très heureux qu'ils aient bien voulu faire partie de ce jury.

Je souhaite exprimer ma gratitude à David Masser, pour son accueil à Bâle, où je bénéficie de conditions exceptionnelles et de sa très belle vision des mathématiques. Un franc merci également à Martin Sombra et à Wadim Zudilin, qui m'ont parfaitement accueilli à Moscou et à Barcelone ; à l'administration du Centro De Giorgi à Pise et à celle du Schrödinger Institut à Vienne.

Ma compréhension de certains problèmes évoqués dans cette thèse a été facilitée par les éclairages de Francesco Amoroso, Carlo Gasbarri, Philipp Habegger, Marc Hindry, Frans Oort et Richard Pink. Dans mon apprentissage de la méthode des pentes, j'ai pu compter sur les patientes explications de Huayi Chen et d'Hugues Randriam, et surtout sur la disponibilité constante d'Eric Gaudron, à qui je dois aussi une minutieuse relecture. Je les en remercie tous chaleureusement.

Un grand merci à Cécile, Olivier, Manuel et Joël dont la bonne humeur fait du Bureau 7C04 un lieu de passage très agréable aux thésards solitaires.

Ces années de doctorat auraient été plus difficiles encore si je ne les avais menées de front avec certains de mes meilleurs amis. Je remercie tout particulièrement Cyril, pour son

enthousiasme communicatif, Marc et son épouse Sophie pour leur bienveillance à mon égard. Merci également à Adrien, Amine, Anne-Sophie, Asher, Benjamin, Borgesienne, Fabien, Florent, Francesco, Hakim et Julien d'avoir conjugué avec moi le goût pour les maths et d'autres sirènes.

Je remercie mes proches, qui ont su composer avec les soubresauts de cette thèse et m'ont apporté une constante affection. A Mazarine, toute ma gratitude. Et une pensée particulière pour ma mère sur qui je puis compter en toute circonstance.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de la hauteur sur les variétés abéliennes. On a cherché plus précisément à obtenir une version quantitative de la propriété de Bogomolov, en minorant le minimum essentiel des sous-variétés algébriques de variétés abéliennes (sauf celles incluses dans un translaté de sous-variété abélienne stricte).

En plus du présent chapitre, ce travail est composé de deux chapitres indépendants, organisés sous forme d'articles. Dans le premier chapitre, on a mis en œuvre des techniques de *transcendance* pour étendre aux produits de courbes elliptiques, en petite codimension, la minoration déjà connue pour les sous-variétés des tores depuis le travail d'Amoroso et David (*confer* [AD03]). On a ensuite essayé d'obtenir ce résultat pour des variétés abéliennes générales. Avec le langage de la théorie des pentes, qui s'est développé dans la littérature diophantienne depuis l'article fondateur de Bost ([Bos96b]), on a obtenu le même type de minoration sous l'hypothèse d'une densité positive de premiers ordinaires, qui est conjecturalement toujours vérifiée.

La connaissance précise des points de petite hauteur sur les variétés abéliennes est aujourd'hui décisive. Elle permet par exemple de donner une version quantitative de la conjecture de Mordell-Lang (initialement démontrée par Faltings dans [Fal94]), à l'aide des inégalités de Mumford et de Vojta (voir [Rém00a]). La minoration précise du minimum essentiel en fonction du degré de la sous-variété, qui est l'objet de cette thèse, permet d'attaquer la conjecture de Zilber-Pink sur les variétés abéliennes, suivant la stratégie développée avec succès pour les courbes plongées dans les tores, par les travaux d'Habegger et de Maurin (voir [Hab06] et [Mau07]).

1.1 Présentation

1.1.1 Enoncés de finitude en géométrie diophantienne

Le point de départ de ce travail est le problème de Bogomolov. Posé en 1981 dans [Bog80], sa forme originale est la suivante. Soit C une courbe algébrique (*i.e.* définie sur une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$) de genre $g \geq 2$, plongée dans sa jacobienne $J(C)$. On obtient une hauteur de Néron-Tate $\hat{h}$ sur $J(C)$ par la polarisation canonique, qui induit une semi-norme $x \to \sqrt{\hat{h}(x)}$ sur $J(C)$. Plus précisément, les points de hauteur nulle sont les points de torsion de $J(C)$. Le problème posé par Bogomolov est de savoir si la métrique induite sur C est discrète. De façon équivalente, en revenant à la hauteur, il pose la conjecture (qui est désormais un théorème d'Ullmo) :

Théorème 1.1 *Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\{x \in C, \hat{h}(x) \leq \epsilon\}$ est fini.*

Puisque les points de torsion sont exactement ceux de hauteur nulle, cette conjecture généralise la *conjecture de Manin-Mumford*, démontrée par Raynaud en 1983 (dans [Ray83]) :

Théorème 1.2 *Les points de torsion de $J(C)$ qui sont dans C sont en nombre fini.*

Une autre conjecture célèbre affirmait la finitude d'un sous-ensemble de C en genre ≥ 2, la *conjecture de Mordell*, démontrée par Faltings en 1983 (dans [Fal83]) :

Théorème 1.3 *Soit K un corps de nombres sur lequel la courbe C est définie. Alors l'ensemble $C(K)$ est fini.*

En comparaison de la conjecture de Bogomolov, on perd l'hypothèse sur la hauteur mais on fait une restriction forte sur le corps de définition.

Ces théorèmes reposent sur l'intuition suivante : certaines propriétés arithmétiques de C, ici la finitude des points de petite hauteur ou des points rationnels, dépendent d'invariants géométriques de la courbe, ici le genre (la contrainte $g \geq 2$ est capitale).

1.1.2 Généralisation et différentes approches

Ces énoncés de finitude se généralisent naturellement aux sous-variétés de variétés abéliennes. Soit V une sous-variété algébrique d'une variété abélienne A munie d'un fibré ample et symétrique, et $\hat{h}$ la hauteur de Néron-Tate associée à ce fibré ; soit aussi K un corps de nombres sur lequel V et A sont définies. On doit d'abord donner un analogue en dimension supérieure de l'hypothèse faite sur le genre :

Définition 1.1 *On dit que V est de torsion si V est la translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion.*

Par ailleurs, on introduit le minimum essentiel, pour décrire les points de petite hauteur dans V :

Définition 1.2 *Le minimum essentiel de V est :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) = \inf\{\theta > 0, \overline{V(\theta)}^{Z} = V(\overline{\mathbb{Q}})\},$$

$$\text{où } V(\theta) = \{x \in V(\overline{\mathbb{Q}}), \hat{h}(x) \leq \theta\},$$

et $\overline{V(\theta)}^{Z}$ est son adhérence de Zariski.

Le minimum essentiel $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V)$ renseigne sur la hauteur de V. Une première construction généralisant la hauteur (projective) aux sous-variétés de variétés abéliennes est due à Philippon. On définit la hauteur projective de V comme étant la hauteur de la forme de Chow qui lui est associée et on la note $h(V)$.

Une seconde définition s'appuie sur la théorie de l'intersection arithmétique et est exposée dans [BGS94], en particulier 3.1 et 3.2. On commence par se donner des modèles entiers $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{L}$ de V, A et L sur $\mathcal{O}_K$, et des métriques définissant un fibré hermitien $\overline{\mathcal{L}}$. La hauteur de $\mathcal{V}$ relativement à $\overline{\mathcal{L}}$ est alors définie comme le degré d'Arakelov normalisé de l'auto-intersection $c_1(\overline{\mathcal{L}})^{d+1}_{|\mathcal{V}}$ (où $c_1(\overline{\mathcal{L}})$ est la première classe de Chern du fibré $\overline{\mathcal{L}}$ et d est la dimension de V). Avec cette définition, il existe une relation de récurrence assez simple entre la hauteur d'une variété et la hauteur d'un diviseur sur cette variété (qu'on peut aussi prendre comme définition, avec la hauteur de Néron-Tate en dimension 0).

Ces deux notions coïncident, si on fait le choix de la norme L^2 pour les places archimédiennes dans la définition à la Philippon. On construit ensuite la hauteur normalisée $\hat{h}(V)$ par passage à la limite :

$$\hat{h}(V) = \lim_{m\to+\infty} \frac{h([m]V)\deg(V)}{m^2 \deg([m]V)}.$$

Cette limite existe et la hauteur ainsi construite généralise la hauteur de Néron-Tate pour les points de A (voir [HS00], p. 450 et [Phi95]). On a en particulier les propriétés suivantes, pour toute sous-variété V de A :

(i) Positivité : $\hat{h}(V) \geq 0$.
(ii) Compatibilité avec la loi de groupe : $\frac{\hat{h}([n]V)}{\deg([n]V)} = n^2 \frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)}$.
(iii) Comparaison avec la hauteur projective : $\frac{\hat{h}(V)}{\deg(V)} - \frac{h(V)}{\deg(V)} = \mathcal{O}(1)$.

Le théorème des minima successifs démontré par Zhang (dans [Zha95a]) implique les inégalités suivantes :

Théorème 1.4 *(inégalité des minima successifs)*
Soit V une sous-variété de A de degré D. Alors :

$$\frac{\hat{h}(V)}{(\dim(V)+1)D} \leq \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \leq \frac{\hat{h}(V)}{D}.$$

L'annulation du minimum essentiel équivaut donc à celle de la hauteur canonique.

La conjecture de Bogomolov se généralise alors de la façon suivante :

Théorème 1.5 *Soit V une sous-variété algébrique d'une variété abélienne A. Le minimum essentiel de V est nul si et seulement si V est de torsion.*

Ce théorème a été démontré par Ullmo pour les courbes plongées dans leur jacobienne (voir [Ull98]), puis par Zhang en toute généralité (*confer* [Zha98]). Ces deux démonstrations s'appuient sur les propriétés d'équirépartitions des petits points étudiées dans [SUZ97]. Auparavant, des résultats partiels avaient été obtenus par une approche arakelovienne, en reliant la hauteur d'une courbe algébrique C, définie sur K un corps de nombres, à l'auto-intersection du *faisceau dualisant* associée à un modèle minimal de C sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ (voir par exemple [Bur92] et [Zha95b]).

Avant de démontrer la conjecture de Bogomolov dans le cas abélien, Zhang a obtenu le même résultat pour les sous-variétés d'un tore $\mathbb{G}_m^n$ (dans [Zha92]), en utilisant l'analogue torique de la conjecture de Manin-Mumford, démontré par Laurent ([Lau83]), et des arguments de projection sur un facteur de $\mathbb{G}_m^n$. Cette stratégie, mise en œuvre indépendamment par Philippon pour les produits de courbes elliptiques (dans [Phi95]), est prise en défaut dès que la variété abélienne a un facteur simple de dimension $g \geq 2$. Mais une fois démontré le théorème 1.5, elle permet de prouver son analogue dans le cadre plus général des variétés semi-abéliennes. Une telle variété est définie comme l'extension S par un tore T d'une variété abélienne A, c'est-à-dire qu'on a une suite exacte de groupes algébriques :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow S \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Chambert-Loir a d'abord traité le cas d'une variété *isotriviale* (isogène au produit d'une variété abélienne et d'un tore), par des méthodes d'équidistribution (*confer* [CL00]). Puis le cas des variétés semi-abéliennes générales a été prouvé par David et Philippon (voir [DP00]), avec des techniques de projection.

Remarquons qu'avec un formalisme différent (en étudiant la *mesure de Mahler*), Lawton avait démontré dès 1977 (voir [Law77]) l'équivalent de la conjecture de Bogomolov pour les hypersurfaces de $\mathbb{G}_m^n$ définies sur $\mathbb{Q}$, et que des arguments simples (conjugaison et projection) permettent d'en déduire aisément le cas général sur $\mathbb{G}_m^n$. Cependant, il semble que ce résultat, ou le fait que la mesure de Mahler logarithmique et la hauteur coïncident sur $\mathbb{G}_m^n$, semblent avoir été ignorés jusqu'au début des années 90.

1.1.3 Version quantitative

Les premières approches diophantiennes sont assez récentes et s'inspirent des méthodes utilisées à la fin des années 70 pour traiter le problème de Lehmer, qui présente une analogie avec le problème de Bogomolov (voir *infra*, 1.1.4). Ces approches ont permis d'obtenir des versions quantitatives du théorème 1.5. Plus exactement, elles ont permis de minorer le minimum essentiel de sous-variétés V de A si ce minimum est non-nul. En fait, on doit aussi exclure les variétés $V = x + B$, où B est une sous-variété abélienne et x est un point d'ordre éventuellement infini. Dans ce cas, un calcul de Chambert-Loir écrit par Litcanu dans sa thèse (*confer* [Lit99] ou [Lit07]) permet de relier le minimum essentiel de V à la hauteur de la projection de x dans le quotient A/B (pour la polarisation induite). Si on fixe la hauteur de A et le degré de B (qui sont les invariants cruciaux dans ce problème, comme on le verra plus bas), on peut rendre le minimum essentiel non-nul et aussi petit qu'on veut en fixant un point x_0 d'ordre infini et en considérant $x_n = \frac{1}{n}x_0$.

Les énoncés étudiés ici donnent donc lieu à différents types d'obstruction qu'on peut hiérarchiser de la façon suivante. Le problème de Bogomolov qualitatif exclut les translatés de sous-variétés abéliennes par des points de torsion. Une version quantitative écarte les translatés de sous-variétés abéliennes (sans hypothèse sur le point). On verra qu'en direction d'une version effective, on doit aussi enlever les variétés *incluses* dans un translaté de sous-variété abélienne.

Une telle minoration dépend *a priori* d'un certain nombre d'invariants géométriques de V et de A. En vue d'une version *effective* de la conjecture de Bogomolov, on doit donc comprendre quels invariants sont indispensables dans une telle minoration, et obtenir pour chacun une dépendandance optimale. Les travaux de Bombieri et Zannier, d'abord dans le cas torique (voir [BZ95]) puis dans le cas abélien ([BZ96]), ont montré qu'on pouvait attendre une borne *uniforme*, c'est-à-dire ne dépendant que du degré de V et de la variété ambiante A (et seulement de n dans le cas de $\mathbb{G}_m^n$).

David et Philippon ont ensuite obtenu des minorations, dans les cas torique ([DP99]) et abélien ([DP02]), conformes aux théorèmes d'uniformité de Bombieri et Zannier, et avec une dépendance “raisonnable” en le degré de V et les données initiales. On cite ici le cas abélien, qui est encore à ce jour la meilleure estimation inconditionnelle :

Théorème 1.6 *Soit A une variété abélienne de genre $g \geq 2$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, principalement polarisée par un fibré $\mathcal{M}$, et V une sous-variété algébrique de A qui n'est pas translatée d'une sous-variété abélienne. Alors :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{\min\{1; \mathcal{R}_{\mathrm{inj}}\}^{2(b+1)}}{2^{11g^3}(g-k+1)\deg(V)^{2k(b+1)}},$$

où k désigne le nombre minimal de copies de $V - V$ dont la somme est une sous-variété abélienne de A , b la dimension de cette sous-variété abélienne et $\mathcal{R}_{\mathrm{inj}}$ la plus petite norme de Riemann d'une période d'une conjuguée de A.

Le terme au numérateur, appelé rayon d'injectivité, est relié au terme de hauteur $h(A)$ (hauteur projective de l'origine dans le plongement associé à $\mathcal{M}^{\otimes 16}$) par le lemme "matriciel" de Masser (voir le lemme 6.8 de [DP02]). Cette minoration est en outre monomiale en l'inverse du degré. Remarquons enfin que l'hypothèse du théorème : *V n'est pas un translaté de sous variété abélienne propre*, en apparence plus faible, est en fait comparable dans ce cas à l'hypothèse : *V n'est pas incluse dans un translaté de sous variété abélienne propre.* Une différence se ressent entre ces hypothèses dès qu'on obtient une minoration plus précise en $\deg(V)^{-1/n(V,A)}$, où $n(V, A) > 1$.

La stratégie est d'utiliser, comme Ullmo et Zhang, les propriétés d'une fonction rationnelle bien choisie, dominante mais singulière, et de s'aider d'une construction de transcendance. On considère donc le morphisme :

$$\begin{array}{rcl} V^2 & \longrightarrow & V^2 \\ s : (x, y) & \longrightarrow & (x, x - y), \end{array}$$

et on pose $W = s(V^2)$. Par construction, la fibre de la deuxième projection au-dessus de zéro est de dimension exceptionnellement grande. On construit alors, par transcendance, une forme F non-nulle et de hauteur contrôlée sur la deuxième projection de W, notée B et supposée sans trop de complication être une sous-variété abélienne, mais nulle en 0 à un ordre important. Le théorème de Bézout arithmétique permet alors d'évaluer la hauteur de $W \cap \pi_2^{-1}(Z)$, où $Z = \mathcal{Z}(F)$ et π_2 est la deuxième projection. Cette hauteur étant positive, et la contribution de Z étant négative (l'estimation précise provient de la singularité du morphisme et de calculs de volumes cruciaux), on peut minorer la hauteur de W, puis celle de V et enfin son minimum essentiel.

Ils déduisent de ce théorème des estimations pour une série de minima successifs définis en tenant compte des translatés de sous-variétés abéliennes inclus dans V. En notant :

$$V^0 := V \setminus \bigcup_{x+B \subset V} (x + B),$$

où la réunion porte sur tous les translatés de sous-variétés abéliennes de dimension au moins 1 contenus dans V, on a en particulier :

Théorème 1.7 *Soit $V \subset A$ une sous-variété algébrique d'une variété abélienne principalement polarisée, toutes deux définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Si on pose :*

$$q(V) := \left(2^{34g} \cdot h_0(A)^4 \cdot \deg(V)\right)^{(4g^2)^{\dim(V)}},$$

alors les points $x \in V^0$ de hauteur $\hat{h}(x) \leq 1/q(V)$ sont en nombre fini, inférieur à $q(V)$.

Ce dernier théorème a été utilisé par Rémond pour donner une version explicite de Mordell-Lang. Rappelons la version qualitative de cette conjecture, démontrée par Faltings dans [Fal94] :

Théorème 1.8 *Soient A une variété abélienne sur $\overline{\mathbb{Q}}$, X un sous-schéma fermé de A et Γ un sous-groupe de rang fini de A. Il existe un entier naturel S, des éléments $(x_1, \ldots, x_S)$ de $X \cap \Gamma$ et des sous-variétés abéliennes $(B_1, \ldots, B_S)$ de A tels que $x_i + B_i \subset X$ pour tout $1 \leq i \leq S$, et :*

$$X \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^{S} (x_i + B_i) \cap \Gamma.$$

Dans [Rém00a], Rémond démontre la version explicite suivante, où la dépendance en X se limite au degré de X (la dimension de X ne pouvant prendre qu'un nombre fini de valeurs est vue comme un raffinement de la dimension de l'espace ambiant) :

Théorème 1.9 *Soient A une variété abélienne de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et L un fibré en droites ample et symétrique sur A. Il existe un réel $c(A, L) > 0$ tel que pour tout schéma fermé X de A de dimension $m-1$ et tout sous-groupe Γ de A de rang $r \in \mathbb{N}$, on peut choisir dans le théorème 1.8 :*

$$S \leq \Big(c(A, L)\deg_L(X)\Big)^{(r+1)g^{5m^2}}.$$

La démarche de Rémond est la suivante. On commence par se placer sur $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ qui est un espace vectoriel de dimension r, muni de la norme euclidienne $\hat{h}^{1/2}$ issue de la hauteur de Néron-Tate. On considère ensuite X^0 (définie plus haut dans ce paragraphe) et on combine une extension (restreinte) de l'inégalité de Mumford qui, combinée à l'extension de l'inégalité de Vojta prouvée dans [Rém00b], permet de majorer explicitement le cardinal des "grands" points de $X^0 \cap \Gamma$ (de norme plus petite qu'un paramètre γ dépendant des données du problème). On majore alors le cardinal des points "moyens" restants, en recouvrant la boule de rayon γ par un nombre contrôlé de "petites" boules où on applique le théorème 1.7 (quitte à considérer des translatés de X). On traite enfin les points de $X - X^0$ par des arguments géométriques simples.

Remarquons pour finir que dans un article en cours de publication, David et Philippon ont amélioré la dépendance en la hauteur de A dans le théorème 1.7, pour $A = E^g$ une puissance de courbe elliptique (voir [DP07]). Les techniques employées par Rémond devraient permettre, dans ce cas, d'éliminer la dépendance en la hauteur de A dans la majoration du théorème 1.9. Une extension de ces travaux à des variétés abéliennes plus générales soulève cependant de nombreuses difficultés.

1.1.4 Lien avec le problème de Lehmer

Le théorème 1.5, joint à l'inégalité des minima successifs (théorème 1.4), est l'analogue en dimension ≥ 1 d'un théorème classique initialement démontré par Kronecker. Soit K un corps de nombres et $n \geq 1$ un entier. On définit la hauteur (logarithmique de Weil) d'un point $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}^n(K)$ par la formule suivante :

$$h(\alpha) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M(K)} n_v \log \max\{|\alpha_0|_v, \ldots, |\alpha_n|_v\},$$

où la somme porte sur toutes les places (archimédiennes et ultramétriques) de K, où n_v est le degré local associé à v et où on normalise les normes ultramétriques par : $|p|_v = p^{-1}$, avec

p l'image de v dans $\mathbb{Z}$. Cette définition ne dépend pas du choix de coordonnées projectives par la formule du produit, ni du choix d'un corps de définition de α par la normalisation. Cette hauteur est positive, et si on fixe n, D et h, il n'y a qu'un nombre fini de points de $\mathbb{P}^n$ définis sur un corps de degré $\leq D$ et de hauteur $\leq h$ (*théorème de Northcott*). Si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, on note $h(\alpha)$ la hauteur du point projectif $[1 : \alpha]$. Le théorème de Kronecker précise les points algébriques en lesquels la hauteur s'annule.

Théorème 1.10 *Un élément de $\overline{\mathbb{Q}}^*$ est de hauteur nulle si et seulement si c'est une racine de l'unité.*

De même que dans le problème de Bogomolov, la question suivante est de savoir si on peut minorer la hauteur d'un point α non de torsion. Ce problème est de nature arithmétique, l'invariant naturel pour une telle minoration étant le degré d'un corps de définition de α. En fixant un nombre algébrique non de torsion puis en considérant ses racines D-èmes, on observe qu'on ne peut espérer une minoration meilleure que $\frac{c}{D}$, où D est le degré de α et c est une constante absolue. De plus, en considérant les racines de 2, on voit que si une telle minoration existe, alors $c \geq \log(2)$. La conjecture de Lehmer est alors la suivante (il convient de rappeler que Lehmer n'était pas aussi affirmatif) :

Conjecture 1.11 *Il existe un nombre réel $c > 0$ tel que pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ qui n'est pas une racine de l'unité, on a :*

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]}.$$

La littérature écrite sur ce sujet est très vaste et on se contente ici de citer quelques résultats marquants. En 1971, Smyth a démontré que le problème de Lehmer était vrai pour α si α et α^{-1} ne sont pas dans la même orbite sous Galois (voir [Smy71]). Puis Dobrowolski, en 1979, a montré dans [Dob79] le meilleur résultat inconditionnel à ce jour (à l'amélioration de la constante près). En utilisant les propriétés du morphisme $x \to x^p$ de $\mathbb{G}_m$, il a plus précisément montré qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ non de torsion et de degré D :

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{D}\left(\frac{\operatorname{loglog}(3D)}{\log(3D)}\right)^3.$$

Ce problème admet une généralisation aux points du tore $\mathbb{G}_m^n$, et d'une variété abélienne. Des résultats comparables à celui de Dobrowolski, avec globalement la même approche, ont été obtenus par Laurent pour les courbes elliptiques CM (voir [Lau83]), puis Amoroso et David pour $\mathbb{G}_m^n$ (voir [AD99]), et David et Hindry sur les variétés abéliennes CM ([DH00]).

Si on veut généraliser ce type de résultat pour les sous-variétés générales de dimension ≥ 1 dans les tores ou les variétés abéliennes, on peut imposer des conditions de type géométrique pour éliminer les obstructions (translatés de sous-variétés abéliennes ou de sous-tores) et obtenir une minoration du minimum essentiel, ce qui nous ramène au problème de Bogomolov. Mais ces obstructions étant formées en fixant le degré géométrique et en faisant tendre vers l'infini le degré d'un corps de définition (voir *supra*, paragraphe 1.1.3, où on prend des points de division), on peut aussi chercher une minoration du minimum essentiel dépendant d'un corps de définition de la sous-variété V. Ceci mène alors à une généralisation du problème de Lehmer, étudiée par Amoroso et David dans le cas torique (voir [AD00] et [AD01]), puis par Ratazzi dans le cas des variétés abéliennes CM (voir [Rat04a] et [Rat04b]). Dans le cas abélien, on a ainsi la conjecture suivante, telle qu'on la trouve dans [Rat04a], et inspirée de [DP98] :

Conjecture 1.12 *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, munie d'un fibré ample et symétrique L. Soit V une sous-variété stricte de A définie sur K, K-irréductible et telle que $V(\overline{K})$ n'est pas réunion de sous-variétés de torsion. Alors on a :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq c(A, L)\deg_{K,L}(V)^{-\frac{1}{s-\dim(V)}},$$

où $\deg_{K,L}(V)$ est le degré sur K d'un corps de définition de V, l'entier s est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant V et $c(A, L)$ est une constante ne dépendant que de A et de L.

Cette conjecture suppose l'irréductibilité sur K, et non sur $\overline{K}$, d'où la clause légèrement différente portant sur $V(\overline{K})$. Remarquons que cette conjecture n'est pas la plus générale qu'on puisse formuler ; notamment, on peut faire intervenir l'indice d'obstruction relatif à la plus petite réunion de sous-variétés de torsion contenant V. Dans le cas des variétés abéliennes de type CM, Ratazzi obtient une minoration optimale à des termes logarithmiques près, typique de la méthode employée par Dobrowolski (Amoroso et David obtiennent des résultats comparables dans le cas torique).

1.2 Minorations précises en le degré et applications

On décrit dans cette partie le cas torique, qui a été traité par Amoroso et David (voir [AD03]), puis on montre ses applications récentes (par les travaux de Habegger et Maurin) en vue de la conjecture formulée par Zilber en 2002. Une estimation quantitative précise permet ainsi de démontrer des résultats de nature qualitative. C'est ce programme qui a inspiré le travail abélien mis en œuvre dans cette thèse.

1.2.1 Conjecture et résultat quasi-optimal d'Amoroso et David

Commençons par introduire un invariant plus fin que le degré, l'indice d'obstruction, qui apparaît naturellement avec les techniques diophantiennes.

Définition 1.3 *Soit V une sous-variété propre et irréductible d'une variété semi abélienne $\mathbb{G}$ munie d'un fibré ample L. On appelle indice d'obstruction de V, noté $\omega_L(V)$:*

$$\omega_L(V) = \inf\{\deg_L(Z)\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des hypersurfaces irréductibles Z de $\mathbb{G}$ contenant V. L'indice d'obstruction de V de poids T, noté $\omega_L(V,T)$, est défini par :

$$\omega_L(V,T) = \inf\{\big(T\deg_L(Z)\big)^{1/\mathrm{codim}(Z)}\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des sous-variétés irréductibles Z de $\mathbb{G}$ contenant V.

Par abus de notation, on ne notera pas le L dans le degré, l'indice d'obstruction, et la hauteur, quand son choix ne présentera pas d'ambiguïté.

Soit $\mathbb{G}$ une variété abélienne ou un tore, muni d'un fibré ample et symétrique L. L'analogue de la conjecture 1.12 dans le cas du problème de Bogomolov peut se formuler de la façon suivante :

Conjecture 1.13 *Soit V une sous-variété stricte de $\mathbb{G}$ définie et irréductible sur $\overline{\mathbb{Q}}$, qui n'est pas un translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}$. Alors on a la minoration :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq c(\mathbb{G}, L)\omega(V, B)^{-1},$$

où B est le plus petit translaté d'un sous-groupe algébrique contenant V et $c(\mathbb{G}, L)$ est une constante ne dépendant que de A et de L.

On peut aussi préciser la forme de la constante $c(\mathbb{G}, L)$, ce qui ramène notamment au problème de la dépendance en la hauteur évoqué plus haut.

En utilisant les propriétés de ramification dans les corps cyclotomiques, et en exploitant des techniques sophistiquées élaborées pour traiter le problème de Lehmer en dimension supérieure (notamment une *descente finale* sur des sous-variétés obstructrices), Amoroso et David obtiennent une minoration optimale aux termes logarithmiques près en le degré pour les sous-variétés d'un tore. Au lieu d'extrapoler sur une puissance p-ème (*i.e.* sur $[p]V$, où V est la variété de départ et p est un premier), ils extrapolent en les translatés par des points de p-torsion (*i.e.* sur $[p]^{-1}[p]V$, avec les mêmes notations).

Par le plongement standard $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, on obtient une hauteur projective h sur les points de $\mathbb{G}_m^n$, et un minimum essentiel $\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}$ sur les sous-variétés de $\mathbb{G}_m^n$. Ils obtiennent :

Théorème 1.14 *Soit V une sous-variété propre (et irréductible) de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$. On a alors :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq \tfrac{c(n)}{\omega(V)} \times (\log(3\omega(V)))^{-\lambda(k)},$$

où $c(n)$ est un réel strictement positif et $\lambda(k) = (9(3k)^{(k+1)})^k$.

Remarquons que ce résultat a été raffiné dans le cas des hypersurfaces par Pontreau ([Pon06]), et dans le cas général (avec des simplifications) par Amoroso (voir [Amo07]).

1.2.2 Intersection avec des sous-groupes algébriques

Dans l'article fondateur [BMZ99], Bombieri, Masser et Zannier étudient l'intersection d'une courbe irréductible C de $\mathbb{G}_m^n$ (non incluse dans un translaté de sous-groupe algébrique) avec une réunion de sous-groupes algébriques stricts. Ils démontrent que si on considère la réunion de tous les sous-groupes algébriques stricts de $\mathbb{G}_m^n$, son intersection avec C est un ensemble de hauteur bornée. On restreint ensuite cette réunion, en posant (la condition de codimension est liée à la dimension de C) :

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\mathrm{codim}(H)=2} H,$$

où la réunion porte sur tous les sous-groupes algébriques de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension indiquée. Ils prouvent alors le résultat suivant :

Théorème 1.15 *Soit C une courbe algébrique irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ non incluse dans un translaté de sous-groupe algébrique propre. Alors $C \cap \mathcal{H}$ est fini.*

La démonstration de ce théorème repose sur des méthodes de géométrie des nombres et sur l'extension du résultat de Dobrowolski en dimension supérieure par Amoroso et David ([AD99]), en particulier pour traiter les sous-groupes de petite codimension.

On peut étendre ce théorème en considérant un *épaississement* de la réunion $\mathcal{H}$. Plus précisément, pour S un sous-ensemble de $\mathbb{G}_m^n$, posons $S_\epsilon = \{xy, x \in S, y \in \mathbb{G}_m^n, h(y) \leq \epsilon\}$. Habegger a alors démontré le théorème suivant (dans [Hab06]) :

Théorème 1.16 *Soit C une courbe algébrique irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ non incluse dans un translaté de sous-groupe algébrique propre. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $C \cap \mathcal{H}_\epsilon$ est fini.*

Ce résultat généralise à la fois le théorème 1.15 et la propriété de Bogomolov (dont il ne constitue pas une nouvelle démonstration) pour les courbes plongées dans les tores. Sa démonstration s'appuie sur des méthodes de géométrie des nombres, et sur le théorème 1.14. Il démontre en fait un résultat plus général sur des sous-variétés X de $\mathbb{G}_m^n$ (avec une condition technique portant sur la codimension des sous-groupes algébriques).

1.2.3 Conjecture de Zilber-Pink sur les tores

L'aboutissement de ce programme est la démonstration récente, par Maurin, de la conjecture de Zilber-Pink pour les courbes incluses dans des tores. L'objet de cette conjecture, dans le cas d'une courbe tracée dans un tore, est d'obtenir le même résultat que dans le théorème 1.15 sous des hypothèses optimales. Si C est une courbe et S un sous-ensemble de $\mathbb{G}_m^n$, notons d'abord :

$$E(C,S) = C \cap \bigcup_{\mathrm{codim}(B)=2} S \cdot B,$$

où la réunion porte sur les sous-tores de codimension indiquée. Maurin démontre :

Théorème 1.17 *Soit C une courbe de $\mathbb{G}_m^n$ qui n'est pas incluse dans le translaté d'un sous-tore propre et Γ un sous-groupe de rang fini de $\mathbb{G}_m^n$. Alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble $E(C, \Gamma_\epsilon)$ soit fini.*

Il déduit alors de ce résultat que la conclusion du théorème 1.15 est vraie dès que la courbe n'est pas incluse dans un *sous-groupe algébrique propre de* $\mathbb{G}_m^n$ (théorème 1.2 de [Mau07]).

Les méthodes sont inspirées de celles mises en oeuvre dans [RV03]. Etant donné un sous-tore propre B de A, on a un morphisme de projection ϕ_B modulo B et la condition sur C fait que l'adhérence de $\phi_B(C)$ est encore une courbe, à laquelle on peut appliquer une inégalité de Vojta classique. Maurin obtient en fait, grâce au résultat principal de [Rém05], une inégalité de Vojta uniforme en les sous-tores, ce qui lui permet de borner la hauteur de $E(C, \Gamma_\epsilon)$. Grâce au théorème 1.16, il montre ensuite que cet ensemble est fini.

1.2.4 Analogue abélien

Le but de cette thèse est donc d'établir dans un contexte abélien le même type de minoration que celle obtenue dans [AD03]. Pour les applications, un résultat proche des conjectures "à ϵ près" (en particulier : à des termes logarithmiques près) suffit.

L'analogue du théorème 1.15 a été démontré par Viada dans [Via03] pour une puissance E^g, où E est une courbe elliptique CM, en utilisant [DH00]. Elle prouve également que l'intersection d'une courbe $C \subset E^g$ avec la réunion de tous les sous-groupes stricts de E^g est de hauteur bornée, sans condition sur E. Ce résultat a été étendu par Ratazzi à une puissance A^d d'une variété abélienne CM (dans [Rat05]). Puis dans un travail commun, Rémond et Viada ([RV03], utilisant une inégalité de Vojta uniforme, démontrent la conjonction de ce résultat et de la propriété de Mordell-Lang. Plus précisément, dans le cas où E est CM :

Théorème 1.18 *Soit C une courbe algébrique irréductible de E^g, une puissance de courbe elliptique CM, avec C non incluse dans un translaté de sous-groupe algébrique propre ; soit Γ un sous-groupe de rang fini de E^g. Alors $C \cap \left(\bigcup_{\mathrm{codim} B \geq 2} \Gamma + B\right)$ est fini, où la réunion porte sur toutes les sous-variétés abéliennes de E^g de codimension indiquée.*

L'attaque de ces problèmes par des estimations de type Bogomolov devrait permettre d'obtenir des résultats dans le cas où la variété abélienne n'est pas CM. Rappelons que cette condition provient de l'utilisation, dans les travaux portant sur le problème de Lehmer, de l'existence d'un *relèvement du Frobenius en caractéristique nulle*.

Récemment, Viada, sous l'hypothèse que le principal résultat du chapitre 2 de cette thèse se généralise en codimension quelconque, s'est rapprochée de l'analogue du théorème 1.16 pour une puissance de courbe elliptique E^g (en se restreignant aux sous-groupes de codimension ≥ 3). Les méthodes employées par Habegger laissent espérer l'exact analogue de ce théorème pour un produit de courbe elliptiques.

Rappelons que tous ces travaux tendent vers une conjecture très générale formulée indépendamment par Zilber et Pink. Ce dernier se place dans le cadre plus général des variétés de Shimura mixtes, généralisant aussi un cas particulier important de la conjecture d'André-Oort. Dans le cadre des variétés semi-abéliennes, on obtient la conjecture suivante :

Conjecture 1.19 *Soit S une variété semi-abélienne définie sur $\mathbb{C}$ et X une sous-variété irréductible de S, aussi définie sur $\mathbb{C}$, qui n'est pas incluse dans un sous-groupe algébrique propre de S. Alors l'ensemble des points de X qui sont inclus dans un sous-groupe algébrique de S de codimension $\geq \dim(X)+1$ n'est pas Zariski-dense dans X.*

Remarquons que cet énoncé est *a priori* d'autant plus significatif qu'il y a beaucoup de sous-groupes algébriques dans la variété considérée, ce qui est le cas pour un produit de courbes elliptiques.

1.3 Contenu de la thèse

Cette thèse est constituée de deux chapitres indépendants. Les introductions de chacun de ces chapitres sont en particulier redondantes. Le premier chapitre se place dans le contexte plus simple d'un produit de courbes elliptiques et développe des techniques de la théorie diophantienne classique. Le second s'attaque aux variétés abéliennes générales dans le formalisme plus récent de la *théorie des pentes*.

1.3.1 Méthodes de transcendance sur les produits de courbes elliptiques

Dans le premier chapitre, on adapte le schéma de preuve d'Amoroso et David (dans [AD03]) au cas multi-elliptique. Soit donc $A = E_1 \times \cdots \times E_g$ ($g \geq 2$) un produit de courbes elliptiques défini sur un corps de nombres K. Pour $1 \leq i \leq g$, on plonge E_i dans $\mathbb{P}_2$ par une équation de Weierstrass ; par plongement de Segre, on a aussi un plongement projectif pour A. On dispose donc d'une hauteur de Néron-Tate sur A, construite à partir de la hauteur projective, et d'un minimum essentiel sur les sous-variétés de A. On obtient alors le résultat suivant, restreint aux sous-variétés de petite codimension :

Théorème 1.20 *Soit V une sous-variété propre (et irréductible) de codimension $k \leq 2$ dans A. On suppose que V n'est contenue dans aucun translaté d'une sous-variété abélienne propre de A. On a alors :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{C(A)}{\omega(V)} \times (\log(3\deg(V)))^{-\lambda(k)},$$

où $C(A)$ est un réel strictement positif ne dépendant que de A et $\lambda(k) = (9(2k)^{(k+1)})^k$.

Par l'inégalité des minima successifs, on a aussi une minoration de la hauteur des sous-variétés en codimension 2 :

Corollaire 1.21 *Soit V une sous-variété propre (et irréductible) de codimension $k = 2$ dans un produit de courbes elliptiques A. Si V n'est contenue dans aucun translaté d'une sous-variété abélienne propre de A, on a :*

$$\hat{h}(V) \geq C'(A),$$

où $C'(A)$ est un réel strictement positif ne dépendant que de A.

Le cas torique s'appuyait sur l'inégalité suivante, vraie pour tout premier p, toute racine p-ème de l'unité ξ et toute place v/p d'un corps de nombres quelconque contenant ξ :

$$|\xi - 1|_v \leq p^{-1/p}.$$

Cette propriété traduit la ramification du premier p dans l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}[\xi_p]$ de $\mathbb{Q}$ (où ξ_p est une racine p-ème primitive de l'unité). Dans le contexte abélien, les racines de l'unité sont remplacées par des points de torsion. Les propriétés galoisiennes des points de torsion des courbes elliptiques ont été étudiées en détail par Serre dans [Ser72]. Soit p un nombre premier. On peut supposer sans trop de perte que les idéaux premier $\mathfrak{p}/p$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ ne se ramifient pas sur $\mathbb{Q}$. Dans ce cas, cet article montre qu'on peut espérer le même type de résultat en $p^{-1/p}$ pour évaluer la distance $\mathfrak{p}$-adique d'un point de p-torsion (se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$) à l'origine, si $\mathfrak{p}$ est un premier de réduction ordinaire. Dans le cas des premiers à réduction supersingulière, on obtient une majoration plus faible en p^{-1/p^2}. Les premiers de réduction ordinaire simultanée pour toutes les E_i étant de densité positive, on peut adapter l'argument d'extrapolation mis en place dans [AD03]. On a ici choisi de réinterpréter cet argument en terme de groupe formel, en vue d'une généralisation.

Il est à remarquer que le problème d'un relèvement du Frobenius en caractéristique 0 se fait sentir aussi dans notre cas. En effet, dans la phase de descente qui clôt la preuve, introduite par Amoroso et David, on pousse la variété V initiale par l'isogénie de multiplication par $[l]$, où l est un entier formé à partir des premiers d'extrapolation. Comme on extrapole sur les points de torsion qui se réduisent sur 0 modulo certains premiers, le meilleur analogue dans le cas abélien serait formé à partir d'un relèvement du Frobenius, dont l'existence n'est pas toujours garantie. C'est d'ailleurs un problème technique dans la mise en oeuvre de la descente qui empêche pour l'instant le cas de la codimension quelconque.

1.3.2 Théorie des pentes sur les variétés abéliennes

Le second chapitre tente de généraliser le résultat précédent aux variétés abéliennes. De nouvelles avancées dans la théorie des pentes (en particulier des résultats pris dans [BK06] et [Che06]) ont permis de travailler avec ce formalisme, qui est *grosso modo* équivalent au langage diophantien classique, mais qui rend plus facile le calcul des constantes. La spécificité de notre problème était de travailler, non pas avec un ensemble de dimension 0, comme c'était presque toujours le cas jusqu'alors dans les applications de la méthode des pentes (sauf, de manière qualitative, dans [Bos01]), mais sur des sous-variétés de variétés abéliennes.

A la recherche de bonnes propriétés métriques p-adiques, on a étudié les propriétés galoisiennes des points de torsion dans les variétés abéliennes (suivant notamment les travaux de Raynaud : [Ray74]). Mais la théorie galoisienne ne donnant pas les estimations espérées, on s'est tourné vers la théorie des groupes formels, et on a obtenu ces estimations en faisant une hypothèse sur l'application de Hasse-Witt. L'intuition fondamentale qui a guidé ce travail était la suivante : les propriétés p-adiques dépendent du p-rang de A et sont les meilleures pour les premiers ordinaires. Mais lorsque le p-rang chute, on a en contrepartie plus de points se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{p}$, pour $\mathfrak{p}/p$ dans une extension, et cette condition est indispensable pour pouvoir utiliser la propriété p-adique. Malheureusement, pour des raisons techniques liées aux outils diophantiens, ces propriétés ne s'équilibrent pas exactement, mais la mise en œuvre de ce principe nous a permis d'exploiter différents types de réduction (et pas seulement la réduction ordinaire, comme dans le travail multi-elliptique).

Soit A une variété abélienne définie sur K un corps de nombres, et L un fibré ample et symétrique sur A. Soit $\mathcal{A}$ un modèle entier de A sur $\mathcal{O}_K$; on considère les hypothèses sur $\mathcal{A}$:

Hypothèse H1 Il existe une densité positive d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ en lesquels la fibre spéciale $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ est ordinaire.

Hypothèse H2 Il existe une densité positive d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ pour lesquels le p-rang de la fibre spéciale $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ est égal à 0 ou à g.

On observe que : *l'hypothèse **H1** est plus forte que l'hypothèse **H2**.*

Notre résultat est le suivant :

Théorème 1.22 *Soit A une variété abélienne définie sur K un corps de nombre. On suppose qu'il existe un modèle entier $\mathcal{A}$ de A vérifiant **H2**. Alors on a la propriété **P**(A) suivante : pour toute sous-variété V propre (et irréductible) de codimension $r \leq 2$ dans A, si V n'est pas contenue dans le translaté d'une sous-variété abélienne propre de A, on a :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{C(A)}{\omega(V)} \times (\log(3\deg(V)))^{-\lambda(r)},$$

où $C(A)$ est un réel strictement positif ne dépendant que de A et $\lambda(r) = (16(2r)^{(r+1)})^r$.

Notons pour finir que l'hypothèse **H1** est l'objet de la conjecture :

Conjecture 1.23 *Pour toute variété abélienne A définie sur K un corps de nombres, quitte à étendre K, il existe un modèle entier $\mathcal{A}$ de A vérifiant **H1**.*

Cette conjecture est un théorème en dimension 1, dont la démonstration s'appuie sur la théorie des représentations l-adiques dans le cas non CM (voir [Ser68]) et dans le cas CM, en étudiant la décomposition des premiers ordinaires dans l'extension donnée par adjonction du corps de multiplication complexe. Elle est aussi vraie pour les variétés abéliennes CM et on a montré en 2.4.3 qu'elle est vérifiée pour les produits de courbes elliptiques.

Dans la continuité des travaux de Serre, il a été démontré (voir [Ogu82]) que la propriété **H1** est toujours vérifiée par une surface abélienne. Les travaux de Noot et Pink (voir [Noo95] et [Pin98]) donnent des conditions suffisantes portant sur les groupes de monodromie G_l (associés à chaque nombre premier l) d'une variété abélienne A pour que A vérifie **H1** (les premiers ordinaires étant même de densité 1).

Sous la conjecture 1.23, la propriété **P**(A) est vérifiée pour toute variété abélienne A définie sur K un corps de nombres.

Chapitre 2

Minimum essentiel sur un produit de courbes elliptiques

2.1 Introduction

L'objet de ce travail est de transposer au contexte abélien la minoration de la hauteur normalisée d'une sous-variété d'un tore entreprise dans [AD03]. Soit C une courbe algébrique de genre $g \geq 2$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et plongée dans sa jacobienne $J(C)$. On note $\hat{h}$ la hauteur canonique sur $J(C)$. La conjecture suivante (qui est aujourd'hui un théorème) a été énoncée par Bogomolov en 1981 :

Théorème 2.1 *Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\{x \in C(\bar{\mathbb{Q}}), \hat{h}(x) \leq \epsilon\}$ est fini.*

Plus généralement, soit V une sous-variété d'une variété abélienne munie d'un fibré ample et symétrique ; on note $\hat{h}$ la hauteur de Néron-Tate associée à ce fibré. En vue d'une généralisation de la conjecture de Bogomolov, on doit d'abord donner un analogue en dimension supérieure de l'hypothèse faite sur le genre. On dit que V est de torsion si V est la translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion ; une courbe algébrique est de genre 1 si et seulement si elle est de torsion. On a aussi la définition suivante (qui vaut pour V un fermé de Zariski) :

Définition 2.1 *Le minimum essentiel de V est :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) = \inf\{\theta > 0, \overline{V(\theta)}^Z = V(\overline{\mathbb{Q}})\},$$

$$\text{où } V(\theta) = \{x \in V(\overline{\mathbb{Q}}), \hat{h}(x) \leq \theta\}$$

et $\overline{V(\theta)}^Z$ est son adhérence de Zariski.

On peut alors reformuler et étendre aux sous-variétés des variétés abéliennes le théorème 2.1 :

Théorème 2.2 *Soit V une sous-variété propre d'une variété abélienne A (i.e. $V \subsetneq A$). Le minimum essentiel de V est nul si et seulement si V est de torsion.*

Le théorème 2.1 a été démontré par Ullmo (*confer* [Ull98]) et le théorème 2.2 par Zhang (*confer* [Zha98]), en utilisant les propriétés d'équirépartition démontrées dans [SUZ97]. Le résultat analogue est vrai si on remplace A par un tore (*confer* [Zha92]) ou plus généralement par une variété semi-abélienne (*confer* [DP00]).

2.1.1 Versions quantitatives du problème de Bogomolov

Ces conjectures étant démontrées, on peut s'intéresser à une version quantitative, en précisant ϵ dans le théorème 2.1 ou en minorant le minimum essentiel d'une variété qui n'est pas de torsion. Grâce au théorème des minima successifs démontré par Zhang (dans [Zha95a]), ceci revient à minorer la hauteur d'une telle variété. Depuis les travaux de Bombieri et Zannier (voir [BZ95] pour le cas torique et [BZ96] pour le cas abélien, le théorème 1 de cet article étant vrai pour toute variété abélienne après la démonstration par Zhang de la conjecture de Bogomolov généralisée), on sait qu'on peut espérer obtenir une borne "uniforme" pour le minimum essentiel, ne dépendant que du degré de V et de la variété abélienne A.

Remarquons que pour obtenir de telles minorations, on doit exclure les translatés de sous-variétés abéliennes par des points qui ne sont pas de torsion. En effet, si $V = x+B \subsetneq A$, le minimum essentiel est relié à la hauteur de la projection de x dans le quotient A/B (pour plus de détails, voir [Lit99]) et on peut le faire tendre vers 0 en fixant le degré et la dimension de V.

Amoroso et David obtiennent une majoration quasi-optimale en le degré de V pour les sous-variétés des tores ([AD03]). Le degré y est en fait remplacé par un invariant plus fin et plus approprié aux techniques diophantiennes, l'indice d'obstruction.

Définition 2.2 *Soit V un fermé de Zariski propre de S une variété semi abélienne munie d'un fibré ample. On appelle indice d'obstruction de V, noté $\omega(V)$:*

$$\omega(V) = \inf\{\deg(Z)\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des hypersurfaces (non nécessairement irréductibles) de S contenant V.

Dans un schéma d'approximation diophantienne, ils utilisent les propriétés de ramification des corps cyclotomiques qu'ils traduisent en un résultat métrique leur permettant d'extrapoler une fonction auxiliaire nulle sur V. Par le plongement standard $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, on obtient une hauteur projective h sur les points de $\mathbb{G}_m^n$, et un minimum essentiel $\hat{\mu}_{\text{ess}}$ sur les sous-variétés de $\mathbb{G}_m^n$. Ils démontrent alors :

Théorème 2.3 *Soit V une sous-variété propre (et irréductible) de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$. On a :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega(V)} \times (\log(3\omega(V)))^{-\lambda(k)},$$

où $c(n)$ est un réel strictement positif et $\lambda(k) = (9(3k)^{(k+1)})^k$.

Ce théorème est optimal aux termes logarithmiques près (voir la conjecture 1.2 de [AD03], et la remarque qui suit), comme le résultat de Dobrowolski sur le problème de Lehmer, et ses généralisations.

Dans le cas des variétés abéliennes, on dispose déjà de résultats quantitatifs, mais la dépendance en le degré est moins bonne. Le théorème suivant est démontré dans [DP02] :

Théorème 2.4 *Soit A une variété abélienne de genre $g \geq 2$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, principalement polarisée par un fibré $\mathcal{M}$, et V une sous-variété algébrique de A qui n'est pas translatée d'une sous-variété abélienne. Alors :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{\min\{1; \mathcal{R}_{\text{inj}}\}^{2(b+1)}}{2^{11g^3}(g-k+1)\deg(V)^{2k(b+1)}},$$

où k désigne le nombre minimal de copies de $V - V$ dont la somme est une sous-variété abélienne de A , b la dimension de cette sous-variété abélienne et $\mathcal{R}_{\mathrm{inj}}$ la plus petite norme de Riemann d'une période d'une conjuguée de A.

Le terme au numérateur, appelé rayon d'injectivité, est relié au terme de hauteur $h(A)$ (hauteur projective de l'origine dans le plongement associé à $\mathcal{M}^{\otimes 16}$) par le lemme "matriciel" de Masser. On a plus précisément :

$$\mathcal{R}_{\mathrm{inj}} \geq \frac{1}{g^2}\big(d.\max\{1; h(A)\}\big)^{-1/2},$$

où d est le degré sur $\mathbb{Q}$ d'un corps de définition de A (voir le lemme 6.8 de [DP02], ainsi que le corollaire 6.9 pour le lien avec la hauteur de Faltings). Cette minoration est monomiale inverse en le degré, alors que dans le cas torique, elle est linéaire inverse en l'indice d'obstruction (aux termes logarithmiques près), ce qui, en vertu d'un résultat de Chardin (voir *infra*, lemme 2.10), correspond à une minoration en $\deg(V)^{-1/k}$.

Remarquons enfin que l'hypothèse du théorème 2.4 (V n'est pas un translaté de sous-variété abélienne propre) est plus faible que son analogue torique dans le théorème 2.3 (V n'est pas *incluse* dans un translaté de sous-tore propre) ; cette différence se ressent dès qu'on obtient des résultats comparables au théorème 2.3 et on peut préciser la minoration sous l'hypothèse faible, en faisant intervenir la dimension du plus petit translaté de sous-tore propre contenant V (voir le corollaire 1.6 de [AD03]).

On souhaite ici améliorer la dépendance en le degré, et obtenir un résultat analogue au cas torique. Dans ce travail, on traite le cas particulier où A est un produit de courbes elliptiques. Soit donc $A = E_1 \times \cdots \times E_g$ ($g \geq 2$) un produit de courbes elliptiques défini sur un corps de nombres K. Pour $1 \leq i \leq g$, on plonge E_i dans $\mathbb{P}_2$ par une équation de Weierstrass ; par Segre, on a aussi un plongement projectif pour A. On dispose donc d'une hauteur de Néron-Tate sur A, construite à partir de la hauteur projective, et d'un minimum essentiel sur les sous-variétés de A. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 2.5 *Soit V une sous-variété propre (et irréductible) de codimension $k \leq 2$ dans A. On suppose que V n'est contenue dans aucun translaté d'une sous-variété abélienne propre de A. On a alors :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{C(A)}{\omega(V)} \times (\log(3\deg(V)))^{-\lambda(k)},$$

où $C(A)$ est un réel strictement positif ne dépendant que de A et $\lambda(k) = (9(2k)^{(k+1)})^k$.

Par l'inégalité des minima successifs (voir *infra*, 2.2.1 pour cette inégalité et pour la définition de $\hat{h}$ sur les sous-variétés de A), on en déduit :

Corollaire 2.6 *Soit V une sous-variété propre (et irréductible) de codimension $k = 2$ dans un produit de courbes elliptiques A. Si V n'est contenue dans aucun translaté d'une sous-variété abélienne propre de A, on a :*

$$\hat{h}(V) \geq C'(A),$$

où $C'(A)$ est un réel strictement positif ne dépendant que de A.

La minoration précise du minimum essentiel trouve plusieurs applications, en direction des conjectures formulées par Zilber sur les variétés semi-abéliennes (dans [Zil02]), puis Pink sur les variétés de Shimura mixtes (voir [Pin05], conjectures 1.2 et 1.3). Le théorème 2.4, combiné aux inégalités de Mumford et Vojta, a ainsi permis à Rémond de donner une version quantitative de la conjecture de Mordell-Lang (voir [Rém00a]). Un résultat récent de David et Philippon ([DP07]) améliore la dépendance en la hauteur de A si $A = E^g$ est une puissance d'une courbe elliptique, ce qui devrait permettre d'éliminer, dans ce cas précis, le terme de hauteur dans les estimations de Rémond.

Pour S un sous-ensemble de $\mathbb{G}_m^n$, on note :

$$S_\epsilon = \{xy, x \in S, y \in \mathbb{G}_m^n, h(y) \leq \epsilon\}.$$

En utilisant le théorème 2.3, Habegger a démontré le résultat suivant (voir [Hab06]) :

Théorème 2.7 *Soit C une courbe dans $\mathbb{G}_m^n$ qui n'est pas incluse dans le translaté d'un sous-tore propre, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $C \cap \mathcal{H}_\epsilon$ est fini, où :*

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\mathrm{codim} H = 2} H,$$

la réunion portant sur tous les sous-groupes algébriques de $\mathbb{G}_m^n$ ayant la codimension prescrite.

Ce théorème généralise à la fois le théorème 2 de [BMZ99] et la propriété de Bogomolov pour les courbes plongées dans les tores. Récemment, Maurin a démontré la conjecture de Zilber-Pink pour une courbe plongée dans un tore, en utilisant le théorème 2.7 et une inégalité de Vojta uniforme. Plus précisément, si C est une courbe et S un sous-ensemble de $\mathbb{G}_m^n$, notons :

$$E(C, S) = C \cap \bigcup_{\mathrm{codim}(B)=2} S \cdot B,$$

où la réunion porte sur les sous-tores de codimension indiquée. Maurin démontre d'abord le théorème suivant (théorème 1.5 de [Mau07]) :

Théorème 2.8 *Soit C une courbe de $\mathbb{G}_m^n$ qui n'est pas incluse dans le translaté d'un sous-tore propre et Γ un sous-groupe de rang fini de $\mathbb{G}_m^n$. Alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble $E(C, \Gamma_\epsilon)$ soit fini.*

Et il en déduit :

Corollaire 2.9 *Soit C une courbe algébrique irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ non incluse dans un sous-groupe algébrique propre. Alors $C \cap \mathcal{H}$ est fini.*

Ce corollaire améliore le résultat principal de [BMZ99], qui suppose que C n'est pas incluse dans un *translaté de sous-groupe algébrique propre*. Une extension du théorème 2.5 à la codimension générale pourrait permettre la démonstration des théorèmes équivalents aux théorèmes 2.7 et 2.8 dans le cadre multi-elliptique.

2.1.2 Plan de l'article

La preuve du théorème 2.5 est une adaptation du schéma de transcendance mis en oeuvre dans [AD03]. La deuxième partie rassemble quelques préliminaires sur les courbes elliptiques. On y introduit notamment le plongement étiré. Celui-ci permet de négliger la constante de comparaison entre la hauteur projective, qui intervient naturellement dans les constructions d'approximation diophantienne, et la hauteur de Néron-Tate, qui entre dans la définition du minimum essentiel. On choisit aussi la base de dérivations qu'on utilisera dans la phase transcendante.

Dans la troisième partie, on suppose que le minimum essentiel d'une sous-variété V est faible, et on en déduit, par un lemme de Siegel absolu, qu'il existe une fonction auxiliaire nulle sur V avec une forte multiplicité, de degré et de hauteur bornés. Le reste de la partie est consacré à la majoration de cette hauteur ; en étudiant d'abord la hauteur, puis le rang du système linéaire associé.

Dans l'étape d'extrapolation, on étudie les propriétés de ramification des points de torsion d'une courbe elliptique et on en déduit une propriété métrique, qui permet de montrer que la fonction auxiliaire construite dans la partie 2.3 est nulle sur les translatés de V par certains points de torsion. La qualité de la propriété métrique p-adique dépend du type de réduction des courbes elliptiques modulo p ; ceci oblige à faire un choix sur les premiers, contrairement au cas torique. On montre l'existence d'un ensemble de premiers adapté et assez gros pour mener la preuve à son terme. Pour obtenir assez d'informations dans la dernière phase de la preuve, on est amené à itérer k fois cette phase d'extrapolation, k étant la codimension de V.

La partie 2.5 est consacrée au lemme de zéros, qui permet de comparer le degré de la fonction auxiliaire à celui d'une large réunion impliquant des sous-variétés obstructrices liées à V, et indexée par les points d'extrapolation. Un travail combinatoire délicat autour du stabilisateur est alors nécessaire pour en extraire une inégalité plus simple, n'impliquant que le degré d'une sous-variété obstructrice.

Comme dans le cas torique, il manque une hypothèse de coprimalité entre des nombres construits simultanément pour conclure. La dernière partie reprend donc la stratégie de descente de [AD03], et c'est à ce stade qu'on doit supposer que la codimension de V est ≤ 2. La mise en oeuvre de cette méthode de descente est plus difficile sur un produit de courbes elliptiques, car si on fixe l un entier, l'isogénie $[l]$ qu'on utilise pour "décaler" les variétés n'est pas adaptée au problème (un relèvement du Frobenius en caractéristique 0 serait le bon morphisme, mais n'existe que dans le cas CM). Pour démontrer la codimension 2, on a du travailler, dès la transcendance, avec des fermés de Zariski pas nécessairement irréductibles.

2.2 Préliminaires sur les produits de courbes elliptiques

2.2.1 Quelques définitions

Soit $E_1, \ldots, E_g$ des courbes elliptiques définies sur K un corps de nombres. Fixons $1 \leq i \leq g$; on se donne une équation de Weierstrass pour $E_i : y_i^2 = x_i^3 + a_i x_i + b_i$ et on plonge E_i dans $\mathbb{P}_2$ par le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} (x_i, y_i) & \to & [x_i : y_i : 1] \\ \infty & \to & [0 : 1 : 0]. \end{array}$$

Soit L un corps de nombres et $P = [P_0 : P_1 : P_2]$ un point de $\mathbb{P}_2(L)$. On définit la hauteur projective de P par la formule suivante :

$$h(P) = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M(L)} n_v \log \max\{|P_0|_v, |P_1|_v, |P_2|_v\},$$

où $M(L)$ désigne l'ensemble des places de L, et où on normalise les valeurs absolues de telle sorte que la formule du produit soit satisfaite :

$$\forall x \in L, x \neq 0 : \prod_{v \in M(L)} |x|_v^{n_v} = 1,$$

avec, pour tout v/p et $p \in \mathbb{Z}$: $|p|_v = p^{-1/p}$. La formule donnant la hauteur ne dépend pas du choix du corps de définition L de P (par normalisation), et elle ne dépend pas du choix d'un représentant de P (par la formule du produit). On dispose donc d'une hauteur projective sur E_i. On définit aussi la hauteur de Néron-Tate, donnée par la formule :

$$\forall P \in E_i : \quad \hat{h}(P) = \lim_{n \to \infty} \frac{h([n]P)}{n^2}.$$

Cette fonction hauteur vérifie les propriétés suivantes, où $[n]$ désigne l'isogénie de multiplication par n :
- $\hat{h}(P) = 0$ si et seulement si P est un point de torsion de E_i.
- la hauteur est quadratique : $\hat{h}([n]P) = n^2\hat{h}(P)$, pour tout $P \in E_i$.
- il existe un réel c_{E_i} ne dépendant que de E_i telle que : $\forall P \in E_i : \ |h(P) - \hat{h}(P)| \leq c_{E_i}$.

On plonge maintenant $A = E_1 \times \cdots \times E_g$ dans un espace projectif par Segre. On a encore une hauteur projective (resp. une hauteur de Néron-Tate) sur A en sommant les hauteurs projectives (resp. les hauteurs de Néron-Tate) sur chaque E_i. On note encore h (resp. $\hat{h}$) cette hauteur.

Ce plongement permet aussi de définir le degré et la hauteur d'une sous-variété de A. En effet, soit plus généralement V une variété de dimension d plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}_n$. On définit son degré, qu'on note D, par la formule suivante :

$$D = a_d(V)d!,$$

où $a_d(V)$ est le coefficient dominant du polynôme de Hilbert de V (voir [Har77], page 47). On peut montrer que D est le nombre de points d'intersection de V avec $n - d$ hyperplans de $\mathbb{P}_n$ en "position générale".

On a défini dans l'introduction un invariant plus fin que le degré, l'indice d'obstruction. Si le théorème qu'on souhaite démontrer ne fait apparaître que cet indice, on aura besoin, au cours de la preuve, de l'indice d'obstruction avec poids :

Définition 2.3 *Soit V un fermé de Zariski propre de A et α un réel positif. On pose :*

$$\omega(\alpha, V) = \inf\{(\alpha \deg(Z))^{1/\mathrm{codim}(Z)}\},$$

où l'infimum porte sur l'ensemble des fermés équidimensionnels et propres de A contenant V.

Le lemme suivant compare l'indice d'obstruction simple, qui ne prend en compte que les hypersurfaces, et l'indice d'obstruction avec poids :

Lemme 2.10 *Soit V un fermé de Zariski équidimensionnel et propre de A de codimension k et $\alpha \geq 1$. Il existe une constante $c_0 > 0$ ne dépendant que de A telle que :*

$$c_0\alpha^{1/k}\omega(V) \leq \omega(\alpha, V) \leq \alpha\omega(V).$$

Preuve

L'inégalité de droite est claire. Celle de gauche est une conséquence d'un résultat de Chardin (*confer* [Cha90], pages 8 et 9). Remarquons que seule la dimension du projectif dans lequel on plonge A intervient dans c_0, un plongement de Weierstrass ayant été fixé pour chaque courbe elliptique.

□

Soit V une sous-variété de A. On définit la hauteur projective de V comme étant la hauteur de la forme de Chow qui lui est associée et on la note $h(V)$. On construit ensuite la hauteur normalisée $\hat{h}(V)$ par passage à la limite :

$$\hat{h}(V) = \lim_{m\to+\infty}\frac{h([m]V)\deg(V)}{m^2\,\deg([m]V)}.$$

Cette limite existe et la hauteur ainsi construite généralise la hauteur de Néron-Tate pour les points de A (voir [HS00], page 450 et [Phi95]). On peut aussi définir la hauteur d'une variété par l'approche arakelovienne (*confer* [BGS94], partie 3). Ces deux notions coïncident, si on fait le choix de la norme L^2 pour les places archimédiennes dans la définition de la hauteur projective. Le théorème des minima successifs démontré par Zhang (dans [Zha95a]) implique les inégalités suivantes :

Théorème 2.11 *(inégalité des minima successifs)*
Soit V une sous-variété de A. Alors :

$$\frac{\hat{h}(V)}{(\dim(V)+1)D} \leq \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \leq \frac{\hat{h}(V)}{D}.$$

2.2.2 Le plongement étiré

Lors de la phase de transcendance, on aura besoin d'éliminer la constante de comparaison entre hauteur projective et hauteur canonique sur A. On peut y arriver en considérant un plongement étiré.

Soit M un entier strictement positif. On rappelle que l'isogénie de multiplication par M sur A est notée $[M]$ et on définit ϕ_M :

$$\begin{array}{ccc} A & \to & A\times A \\ x & \to & (x,[M]x). \end{array}$$

Ce plongement a été utilisé pour la première fois par Laurent pour étudier le problème de Lehmer elliptique (*confer* [Lau83]) ; on suit ici la terminologie de Philippon ([Phi95]). Le principe en est le suivant : le lemme de Siegel nous renseigne sur la hauteur projective, et le minimum essentiel fait intervenir la hauteur de Néron-Tate associée au plongement. On sait que la différence entre ces deux hauteurs est bornée mais la hauteur de Néron-Tate, qu'on prendra proche du minimum essentiel au cours de la preuve, peut être très petite ; il y a donc une perte d'information sur la hauteur projective. Le plongement étiré multiplie la hauteur par un paramètre assez grand, qui rend négligeable la constante de comparaison.

On a vu que la variété A admet un plongement projectif ; par Segre, le produit $A \times A$ admet aussi un plongement dans un espace projectif (dont la dimension sera notée n), une hauteur projective et une hauteur de Néron-Tate. On notera V_M (resp. A_M) l'image par ϕ_M de V (resp. A) et $\mathcal{A}_M$ l'anneau des fonctions sur A_M. Le lemme suivant indique la variation de la hauteur et du degré par ϕ_M :

Lemme 2.12 *Si x est un point de A, on a :*

$$\hat{h}(\phi_M(x)) = (M^2+1)\hat{h}(x),$$

et si V est une sous-variété de A, on a :

$$\deg(V_M) = (M^2+1)^{\dim(V)}\deg(V).$$

Preuve

La première partie du lemme suit de la définition de ϕ_M par quadraticité de la hauteur. La deuxième partie est démontrée, par exemple, dans [Phi95], proposition 7.

□

2.2.3 Dérivations

En vue de l'extrapolation, on va construire des polynômes s'annulant avec une forte multiplicité sur V_M. On doit pour cela définir une base de dérivation adaptée à la variété abélienne. Pour $1 \leq i \leq g$, la courbe elliptique E_i est plongée dans $\mathbb{P}_2$ par Weierstrass. Si on note $[X_i : Y_i : Z_i]$ les coordonnées projectives, un paramètre en 0 est donné par : $t_i = X_i/Y_i$.

Sur $A = E_1 \times \cdots \times E_g$, on a une base de paramètres en 0 donnée par $(t_1, \ldots, t_g)$, où on confond un paramètre de E_i et son image dans le produit. A cette base de paramètres correspond une base du tangent de A en 0 qu'on appelle $(\partial_1, \ldots, \partial_g)$. On fait de même pour $A \times A$, de telle sorte que $(\partial_1, \ldots, \partial_g)$ soit une base de dérivation en 0 de $A \times 0$, et $(\partial_{g+1}, \ldots, \partial_{2g})$ soit une base de dérivation en 0 de $0 \times A$.

Soit $x \in A$. On peut déduire des paramètres $(t_1, \ldots, t_g)$ en 0, des paramètres locaux au voisinage de x :

$$(t_1 \circ \tau_{-x}, \ldots, t_g \circ \tau_{-x}),$$

où τ_{-x} désigne la translation par $-x$ sur A. On en déduit une base du tangent de A en x, qu'on note $(\partial_{1,x}, \ldots, \partial_{g,x})$, telle que pour tout $1 \leq i \leq g$, $\partial_{i,x}$ engendre le tangent de l'image de E_i dans A.

On en déduit de même une base du tangent de $A \times A$ en tout point. L'application induite par $[M]$ sur le tangent de A étant la multiplication par M, on obtient enfin une base de dérivations en tout $(x, Mx) \in A_M$ par la formule :

$$\delta_{i,x} = \partial_{i,(x,[M]x)} + M\partial_{g+i,(x,[M]x)}, \text{ pour } i = 1, \ldots, g.$$

On note enfin, pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_g)$:

$$\delta_x^\lambda = \frac{1}{\prod_{i=1}^g \lambda_i!}(\delta_{1,x})^{\lambda_1} \circ \cdots \circ (\delta_{g,x})^{\lambda_g}.$$

2.2.4 Choix de la constante

La minoration que l'on a en vue fait intervenir une constante ne dépendant que de la variété abélienne $A = E_1 \times \cdots \times E_g$. On a déja introduit une constante c_0 ne dépendant que de A et on introduira par la suite d'autres constantes $c_1, \ldots, c_{16}$. On choisira une constante C_0, ne dépendant que de A, grande devant les constantes $c_0, \ldots, c_{16}$. La constante $C(A)$ du théorème 2.5 s'exprimera simplement en fonction de C_0. Ces constantes sont calculables mais notre méthode ne permet pas d'améliorer la dépendance en la hauteur de A du théorème 2.4.

2.3 Construction de la fonction auxiliaire

On peut maintenant passer à la démonstration proprement dite, qui commence avec un lemme de Siegel. Dans cette première étape, on suppose que la variété V admet un minimum essentiel faible. On en déduit qu'il existe un polynôme nul sur X_M (où X est un fermé de Zariski lié à V), avec une forte multiplicité, de hauteur et de degré contrôlés. On travaillera plutôt avec un ensemble algébrique plus nécessairement irréductible, mais équidimensionnel, en vue de la dernière phase de la preuve.

2.3.1 Un lemme de Siegel absolu

Sous sa forme classique, le lemme de Siegel donne l'existence d'éléments dans un espace vectoriel sur K, où K est un corps de nombres, dont la hauteur est bornée en fonction du degré et du discriminant de K, de la hauteur du système et de sa dimension. On veut borner ici la hauteur d'un point dans un espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{Q}}$, sans faire apparaître son corps de définition. Le lemme suivant est démontré dans [DP99] (en particulier la remarque suivant le lemme 4.7) :

Lemme 2.13 *Soient S un sous-espace vectoriel de $\overline{\mathbb{Q}}^{N+1}$ de dimension d et $\epsilon > 0$. Alors il existe un point non nul $x \in S(\overline{\mathbb{Q}})$ de hauteur :*

$$h_{L_2}(x) \leq \frac{h_{L_2}(S)}{d} + \frac{\log\, d}{2} + \epsilon.$$

La hauteur L_2 diffère de la hauteur de Weil aux places archimédiennes, où la norme du supremum est remplacée par la norme euclidienne. Elle est donc plus grande que la hauteur de Weil.

La hauteur de S est la hauteur du point représentant S dans l'algèbre extérieure. Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est une base de S, la hauteur L_2 de S est :

$$h_{L_2}(S) = h_{L_2}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d) \leq h_{L_2}(\alpha_1) + \cdots + h_{L_2}(\alpha_d).$$

Cette hauteur ne dépend pas du choix de la base pour S car si $(\beta_1, \ldots, \beta_d)$ est une autre base de S, $\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_d$ est colinéaire à $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d$, donc a même hauteur.

2.3.2 Lemme de Siegel et section de petite hauteur

Pour adapter le lemme précédent aux polynômes s'annulant sur un fermé de Zariski X_M (image d'un fermé X équidimensionnel par plongement étiré), on note $\mathcal{B}_M$ l'idéal de définition de X_M sur $\overline{\mathbb{Q}}$; c'est un idéal homogène. Si $T \geq 1$, on définit $\mathcal{B}_M^{(T)}$, l'idéal engendré par les polynômes P tels que :

$$\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{N}^g \text{ tq } \sum_{i=1}^{g} \lambda_i \leq T-1 : \quad \delta_x^\lambda P = 0.$$

On note aussi $[\mathcal{B}_M]_L$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré L de $\mathcal{B}_M$. C'est un sous espace vectoriel de $\overline{\mathbb{Q}}[X_0, \ldots, X_n]_L$, qui est un espace vectoriel de dimension $\binom{L+n}{n}$.

Définition 2.4 *Si $\mathcal{I}$ est un idéal homogène (associé à X, un fermé de Zariski de $\mathbb{P}_n$), on appelle fonction de Hilbert géométrique de $\mathcal{I}$ l'application qui à L associe la dimension de l'espace des éléments de $\mathcal{I}$ de degré L. On note $H(\mathcal{I}, .)$ cette fonction.*

On a clairement l'égalité :

$$H(\mathcal{I}, L) = \binom{L+n}{n} - \dim_{\overline{\mathbb{Q}}}[\mathcal{I}]_L.$$

On va appliquer le lemme de Siegel avec comme espace vectoriel total : $\Big[\overline{\mathbb{Q}}[X_0, \ldots, X_n]/\mathcal{A}_M\Big]_L$ et comme sous-espace $S = \big[\mathcal{B}_M^{(T)}/\mathcal{A}_M\big]_L$. On a les formules suivantes pour les dimensions de S et de son orthogonal :

$$\begin{aligned} \dim S &= H(\mathcal{A}_M, L) - H(\mathcal{B}_M^{(T)}, L) \\ \dim S^\perp &= H(\mathcal{B}_M^{(T)}, L). \end{aligned}$$

Voici donc l'adaptation du lemme de Siegel :

Lemme 2.14 *Soit L et T tels que :*

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}} \big[\mathcal{B}_M^{(T)}/\mathcal{A}_M\big]_L > 0.$$

Il existe une constante c_4 ne dépendant que de A telle que : pour tout $\epsilon' > 0$, il existe un élément P de $\big[\mathcal{B}_M^{(T)}/\mathcal{A}_M\big]_L$ non nul sur A_M tel que :

$$h_{L_2}(P) \leq \frac{c_4 H(\mathcal{B}_M^{(T)}, L)}{H(\mathcal{A}_M, L) - H(\mathcal{B}_M^{(T)}, L)} \Big(LM^2 \big(\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) + \epsilon'\big) + L + T \log\big(2M(T+L)\big) \Big) + \frac{1}{2} \log \binom{L+n}{n}.$$

Remarque La hauteur de P est la hauteur projective de ses coefficients.

Preuve

Il s'agit essentiellement, dans ce lemme, de majorer la hauteur du système linéaire S. On va d'abord démontrer qu'on peut se contenter de trouver un polynôme nul avec multiplicité sur les points de X_M de hauteur petite et de degré borné ; ces points sont en nombre fini par le théorème de Northcott. Les polynômes non nuls sur A_M sont les polynômes non nuls de $\overline{\mathbb{Q}}[X_0, \ldots, X_n]/\mathcal{A}_M$.

Soit $\epsilon' > 0$ quelconque et $\theta = \hat{\mu}_{\text{ess}}(X) + \epsilon'$. Considérons, pour $D \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble fini :

$$\Lambda_D = \{x \in X(\overline{\mathbb{Q}}) \text{ tq } h(x) \leq \theta \text{ et } [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \leq D\}.$$

Les Λ_D sont croissants et on peut leur associer les espaces vectoriels S'_D formés par les polynômes $F \in \left[\overline{\mathbb{Q}}[X_0, \ldots, X_N]\right]_L$ nuls sur $\phi_M(\Lambda_D)$ à un ordre au moins T. Par choix des opérateurs de dérivation, un polynôme de $\mathcal{A}_M$ est nul sur X_M à tout ordre, et on a :

$$\forall D \in \mathbb{N},\ \mathcal{A}_M \subset S'_D.$$

Les S'_D sont des espaces vectoriels de dimension finie et décroissants. Ils sont donc stationnaires et il existe S'_∞ tel que pour D assez grand $S'_D = S'_\infty$. Comme $\mathcal{A}_M \subset S'_\infty$, on forme le quotient $S_\infty = S'_\infty / \left[\mathcal{A}_M\right]_L$. On a :

$$S = [\mathcal{B}_M^{(T)} / \mathcal{A}_M]_L \subset S_\infty.$$

L'autre inclusion est vraie : les polynômes de S'_∞ sont nuls sur $\phi_M(\Lambda)$ à un ordre $\geq T$, où on a noté Λ la réunion des Λ_D, c'est-à-dire $\{x \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ tq $h(x) \leq \theta\}$. De plus, ϕ_M est un plongement fermé et l'adhérence de Zariski de Λ est X donc les polynômes de S'_∞ sont nuls à un ordre $\geq T$ sur $X_M(\overline{\mathbb{Q}})$ tout entier.

On a donc l'égalité $S = S_\infty$, qui va nous permettre d'estimer la hauteur de S en passant par son orthogonal (on sait en effet que la hauteur de $S^\perp$ est égale à celle de S, voir [Sch91] chapitre 1, 8). Soit $x \in \Lambda$ et P s'annulant à un ordre λ en x. On a :

$$\delta_x^\lambda P = 0;$$

ce qui se traduit par :

$$< P, y_{x,\lambda} >= 0,$$

où $<,>$ est le produit scalaire habituel sur un ouvert affine contenant x, et $y_{x,\lambda}$ est un vecteur dépendant de x et λ. Pour x variant dans Λ, et λ décrivant tous les multi-indices de somme plus petite que T, les $y_{x,\lambda}$ sont des générateurs de $S^\perp$, et leurs coordonnées sont les :

$$\delta_x^\lambda G,$$

où G parcourt l'ensemble des monômes unitaires de degré L. Par choix des opérateurs de dérivation, on peut écrire :

$$\delta_x^\lambda = \delta_0^\lambda \circ \tau^*_{(x,[M]x)},$$

où $\tau^*_{(x,[M]x)}$ est la translation par (x, Mx) sur l'algèbre des fonctions régulières.

Soit G un monôme unitaire de degré L. Commençons par regarder $\tau^*_{(x,[M]x)}G$. D'après la proposition 8.2 de [Dav95], la forme $\tau^*_{(x,[M]x)}G$ est de degré $\leq 2L$ et de hauteur

$$\leq h(G) + c_1 L h(x, [M]x),$$

pour une certaine constante c_1 ne dépendant que de A. On remarque ensuite que G est de hauteur nulle, et qu'on peut majorer $h(x, [M]x)$ en la comparant à la hauteur de Néron-Tate puis en utilisant le lemme 11. Par définition, l'opérateur δ_0^λ est un monôme de degré $|\lambda|$ en les ∂_i dont les coefficients sont de hauteur :

$$\leq T \log(2M).$$

De plus, si Δ est un monôme de poids k en les ∂_i et H est un polynôme de degré L en les coordonnées projectives de $A \times A$, en appliquant la proposition 8.1 de [Dav95], à une base de fonctions elliptiques, on obtient : $h(\Delta(H)) \leq c_2 T\log(T+L)$, pour une constante c_2 ne dépendant que de A. On a donc, pour une constante c_3 ne dépendant que de A :

$$h(\delta_x^\lambda G) \leq c_3 \left(LM^2\hat{h}(\alpha) + L + T\log(T+L) + T\log(2M)\right).$$

Le second terme correspond à la comparaison entre hauteurs projective et canonique, le troisième à la majoration des hauteurs des dérivées en 0, et le quatrième à la modification des opérateurs de dérivation due au plongement étiré.

Comme la différence entre hauteur de Weil et hauteur L_2 est majorée par une fonction ne dépendant que de la dimension du projectif, qui est elle aussi bornée, il existe une constante c_4 telle que :

$$h_{L_2}(y_{x,\lambda}) \leq c_4 \left(LM^2 h(x) + L + T\log(T+L) + T\log(2M)\right).$$

Par ailleurs, si on note d la dimension de $S^\perp$, on sait que pour tous points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$:

$$h_{L_2}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d) \leq h_{L_2}(\alpha_1) + \cdots + h_{L_2}(\alpha_d).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} h_{L_2}(S) = h_{L_2}(S^\perp) &\leq \dim(S^\perp) \max h_{L_2}(y_{x,\lambda}) \\ &\leq c_4\big(H(\mathcal{B}_M^{(T)}; L)\big)\Big(LM^2(\hat{\mu}_{\text{ess}}(X) + \epsilon') + L + T\log(T+L) + T\log(2M)\Big). \end{aligned}$$

Le théorème vient immédiatement en appliquant le lemme 2.13 avec

$$\epsilon = \frac{1}{2}\log\frac{\binom{L+n}{n}}{\dim S} > 0,$$

cette dernière inégalité découlant de l'hypothèse faite sur L et T dans le lemme 2.14.

□

2.3.3 Bornes pour les fonctions de Hilbert

Pour pouvoir expliciter le résultat du paragraphe précédent, on doit estimer les fonctions de Hilbert $H(\mathcal{B}_M^{(T)}; L)$ et $H(\mathcal{A}_M; L)$. On majore d'abord $H(\mathcal{B}^{(T)}; L)$ en fonction de $H(\mathcal{C}; L)$, où $\mathcal{C}$ est un idéal bien choisi en fonction de X.

Plus précisément, soit $\mathcal{C}$ un idéal homogène tel que $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, associé à un fermé de Zariski Z équidimensionnel de codimension k' dans A. Il lui correspond un fermé Z_M de A_M et un idéal $\mathcal{C}_M$. On a alors la proposition :

Proposition 2.15 *Soit L un entier et $T \geq 1$; on a les inégalités suivantes :*

$$H(\mathcal{B}_M^{(T)}; L) \leq H(\mathcal{C}_M^{(T)}; L) \leq \binom{T-1+k'}{k'} H(\mathcal{C}_M; L).$$

Preuve

La première inégalité est immédiate. La démonstration de la seconde découle du raisonnement de géométrie différentielle classique appelé "astuce de Philippon-Waldschmidt" (voir [PW88], lemme 6.7, reprise dans [DH00], lemme 5.1 par exemple). L'idée, qu'on détaille ici, est de se ramener à une base du cotangent de V (les dérivations du tangent n'étant pas "coûteuses" par définition).

Quitte à renuméroter les indices, on peut supposer que

$$(\delta_{1,x}, \dots, \delta_{k',x})$$

se projette sur une base du cotangent de Z_M dans A_M, pour tout x dans un ouvert de Zariski U dense dans Z_M. En effet, le cotangent est l'image de la matrice jacobienne associée à la variété Z_M (sur un ouvert affine), et sa dimension est la taille maximale d'une sous-matrice de déterminant non nul. A chaque sous-matrice carrée de taille k', on associe l'ouvert des points où le déterminant ne s'annule pas. La réunion finie de ces ouverts est Z_M tout entier donc l'un d'entre-eux est non vide et par suite Zariski-dense.

Démontrons :

$$\left(\delta_x^\lambda F = 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{N}^{k'} \text{ tel que } |\lambda| \leq T,\ \forall x \in Z_M\right) \implies F \in \mathcal{C}_M^{(T+1)}, \tag{2.1}$$

où on a plongé $\mathbb{N}^{k'}$ dans $\mathbb{N}^g$ en complétant les k'-uplets par des zéros. Faisons une première récurrence sur T. Le résultat est vrai pour $T = 0$. On le suppose vrai au rang $T-1 \geq 0$. Soit F un polynôme vérifiant l'assertion de gauche dans (2.1). Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_g)$ tel que $|\lambda| \leq T$.

On fait une nouvelle récurrence sur la longueur résiduelle

$$|\lambda|' = \lambda_{k'+1} + \dots + \lambda_g,$$

pour montrer que $\delta_x^\lambda F = 0$ pour tout $x \in Z_M$. Pour $|\lambda|' = 0$, l'assertion de gauche signifie justement que : $\delta_x^\lambda F = 0$ pour tout $x \in Z_M$. Supposons le résultat démontré pour $|\lambda|'-1 \geq 0$. Soit $x \in U$; quitte à renuméroter les indices, comme $|\lambda|' \geq 1$, on peut écrire :

$$\delta_x^\lambda F = u\delta_{g,x} \circ \delta_x^\mu F;$$

la constante u correspond aux factorielles dans la définition des δ_i.

Comme $(\delta_{1,x}, \dots, \delta_{k',x})$ se projette sur une base du cotangent de Z_M en $(x, [M]x)$, on décompose :

$$\delta_{g,x} = \delta_x + \tilde{\delta}_x,$$

où δ_x est une combinaison linéaire des $\delta_{i,x}$ $(1 \leq i \leq k')$, et $\tilde{\delta}_x$ est un vecteur du tangent de Z_M, variant avec x. On a :

$$\delta_x \circ \delta_x^\mu F = 0,$$

par hypothèse de deuxième récurrence et : $\tilde{\delta}_x \circ \delta_x^\mu F = 0$. En effet, $v \to \delta_v^\mu$ est un polynôme de $\mathcal{C}$ par hypothèse de première récurrence ; le résultat suit de la définition du tangent. Ainsi, $\delta_x^\lambda F = 0$ pour tout $x \in U$ donc sur Z_M tout entier car U est Zariski-dense dans Z_M.

L'implication (2.1) donne une majoration du nombre de conditions linéaires à écrire pour être dans $\mathcal{C}_M^{(T+1)}$. La dérivation étant de degré 1, on obtient :

$$H(\mathcal{C}_M^{(T)}; L) \leq \sum_{j=0}^{T-1} \binom{j+k'-1}{k'-1} H(\mathcal{C}_M; L) \leq \binom{T-1+k'}{k'} H(\mathcal{C}_M; L).$$

Le terme binomial $\binom{j+k'-1}{k'-1}$ est le nombre de k-uplets d'entiers de somme j ; on calcule la somme en remarquant qu'il y autant de monômes à k variables de degré majoré par $T-1$ que de monômes à $k+1$ variables de degré $T-1$.

□

Il nous reste donc à trouver des bornes pour les fonctions de Hilbert $H(\mathcal{C}_M; L)$ et $H(\mathcal{A}_M; L)$. On sait par le théorème de Hilbert-Serre (*confer* [Har77] page 51) qu'elles sont polynomiales pour L assez grand. On en connaît le coefficient dominant :

$$H(\mathcal{C}_M; L) = \frac{\deg(Z_M)}{(g-k')!} \times L^{g-k'} + O(L^{g-k'-1}).$$

On a en fait la majoration suivante, vraie pour tout L positif :

Proposition 2.16 *Si $\mathcal{C}_M$ est un idéal associé à un fermé de Zariski Z_M de codimension k' dans $\mathcal{A}_M$, on a :*

$$H(\mathcal{C}_M; L) \ \leq \ \tbinom{L+g-k'}{g-k'} \deg(Z_M).$$

Preuve

C'est le résultat principal de [Cha88], vrai pour les idéaux homogènes équidimensionnels et géométriquement réduits.

□

Il est important d'avoir un résultat précis en fonction du fermé Z_M, qui sera bientôt lié à X, mais pour minorer $H(\mathcal{A}_M; L)$, on peut se contenter d'une borne moins explicite, qui résulte du théorème de Hilbert-Serre. Dans le contexte du plongement étiré, on doit faire l'hypothèse suivante sur L et M :

$$L \geq M^2 + 1. \tag{2.2}$$

Sous cette condition, on déduit du théorème de Hilbert-Serre qu'il existe une constante c_5 ne dépendant que de A telle que (pour plus de détails, dans le contexte torique facilement adaptable aux variétés abéliennes, voir [DP99], 4.1) :

$$H(\mathcal{A}_M; L) \geq c_5 \deg(A_M) L^g.$$

On en déduit immédiatement, par le lemme 2.12 :

$$H(\mathcal{A}_M; L) \geq c_6 \ L^g M^{2g}.$$

En combinant toutes ces estimations, on peut majorer le quotient :

$$\beta := \frac{H(\mathcal{B}_M^{(T)}; L)}{H(\mathcal{A}_M; L)}.$$

Pour cela, on introduit un nouveau paramètre, noté T_{per}, qui mesurera la perte totale de multiplicité (après extrapolations). On suppose donc : $T_{\text{per}} \leq T$.

Proposition 2.17 *Il existe une constante c_7 ne dépendant que de A, et $1 \leq k' \leq k$ tels qu'on ait la majoration suivante :*

$$\beta \leq \frac{c_7}{T_{\text{per}}} \Big(\frac{T\omega(T_{\text{per}}, X)}{M^2 L} \Big)^{k'}.$$

Preuve

Par définition de l'indice d'obstruction avec poids, il existe un ensemble algébrique Z de A de codimension k' et équidimensionnel, contenant X, tel que :

$$\omega(T_{\text{per}}, X) = (T_{\text{per}} \deg(Z))^{1/k'}.$$

On applique les deux propositions précédentes avec ce choix de Z, et on majore les coefficients binomiaux :

$$\tbinom{T-1+k'}{k'} \leq T^{k'};$$

en utilisant, pour $0 \leq i \leq k'-1$:

$$T + i \leq T(1+i), \text{ car } T \geq 1.$$

Puis :

$$\binom{L+g-k'}{g-k'} \leq (L)^{g-k'};$$

en effet, pour $1 \leq i \leq g - k'$:

$$L + i \leq (L+1)i.$$

Le lemme 2.12 permet alors d'exprimer $\deg(Z_M)$ en fonction de $\deg(Z)$ et on a, pour une constante c_7 ne dépendant que de A :

$$\beta \leq c_7 \Big(\frac{T}{M^2L}\Big)^{k'} \deg(Z).$$

Le résultat suit alors du choix de Z.

$\square$

Remarques La présence du T_{per} au dénominateur compensera le terme en $T\log(T+L)$ qui est apparu lorsqu'on a majoré la hauteur des dérivées dans le lemme de Siegel. L'utilisation de l'indice $\omega(T_{\text{per}}, X)$ sera justifiée dans la partie consacrée au lemme de zéros. Celui-ci donnera l'existence de certaines variétés obstructices contenant des translatés de V et on obtiendra une majoration liée à leur degré plutôt qu'à celui de V. Le choix de l'indice d'obstruction avec poids nous permettra d'exploiter cette majoration.

2.3.4 Premier choix de paramètres et simplification de la hauteur

On va maintenant simplifier la majoration de la hauteur du polynôme obtenue avec le lemme de Siegel. Plus précisément, on souhaite majorer cette hauteur de telle sorte qu'elle n'interfère pas dans la phase d'extrapolation (voir *infra*, 2.4.4). Compte tenu de la proposition précédente, on prendra donc : M^2L très proche de $T\omega(T_{\text{per}}, X)$, de telle sorte que l'exposant de Dirichlet (le quotient des dimensions apparaissant dans le lemme de Siegel) soit petit.

Le paramètre M a été introduit pour compenser le terme d'erreur lié à la comparaison des hauteurs ; on choisit donc M de telle manière que le terme $M^2\hat{\mu}_{\text{ess}}(X)$ soit majoré par une constante. Pour la hauteur du système linéaire, c'est le terme en $T\log(T+L)$ provenant de la hauteur des dérivées qu'on veut prédominant. Une majoration de L en découle, puisque le terme lié à la hauteur ponctuelle dans lequel il apparaît doit être plus petit que $T\log(T+L)$. On ne doit pas fixer les paramètres L et T pour l'instant, mais on a une inégalité les impliquant ; de plus, l'hypothèse faite sur le minimum essentiel dépend de T.

Soit T, L, T_{per} trois entiers tels que $T \geq T_{\text{per}} \geq \max\{3, 4c_7\}$, vérifiant les inégalités suivantes (pour tout fermé de Zariski X de A) :

$$L \leq T\log T \quad \text{et :} \quad \frac{T\omega(T_{\text{per}}, X)}{L} \geq 1.$$

On note $[.]$ la partie entière puis on pose :

$$M = \Big[\Big(\frac{T\omega(T_{\text{per}}, X)}{L}\Big)^{1/2}\Big] + 1.$$

Le corollaire principal de cette partie s'énonce donc ainsi :

Corollaire 2.18 *On suppose que X est un fermé algébrique propre et équidimensionnel de A tel que :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) < \frac{L}{T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)}.$$

Alors il existe un élément P de $\left[\mathcal{B}_M^{(T)}\right]_L$ non nul sur A_M tel que :

$$h(P) \leq c_8 \frac{T}{T_{\mathrm{per}}} \log(T),$$

où c_8 ne dépend que de A.

Preuve

On commence par appliquer la proposition 2.17 pour majorer le quotient de Dirichlet du système associé à $\left[\mathcal{B}_M^{(T)}\right]_L$. On en déduit aisément l'inégalité suivante :

$$\beta \leq \frac{c_7}{T_{\mathrm{per}}} \leq \frac{1}{2}.$$

On a donc :

$$\frac{\beta}{1-\beta} \leq 2\beta < 1,$$

En particulier :

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}}[\mathcal{B}_M^{(T)}/\mathcal{A}_M]_L > 0\,;$$

et on peut appliquer le lemme de Siegel.

D'après le lemme 2.14, pour tout $\epsilon' > 0$, il existe donc un polynôme non nul P dans $\left[\mathcal{B}_M^{(T)}/\mathcal{A}_M\right]_L$ de hauteur :

$$h(P) \leq h_{L_2}(P) \leq \frac{2c_4c_7}{T_{\mathrm{per}}}\Big(LM^2\big(\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X)+\epsilon'\big) + L + T\log\big(2M(T+L)\big)\Big) + \frac{1}{2}\log\tbinom{L+n}{n}.$$

Comme on a :

$$\frac{T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)}{L} \geq 1,$$

on voit que :

$$M^2\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) \leq 4.$$

et il vient :

$$\begin{aligned}
h(P) &\leq \frac{2c_4c_7}{T_{\mathrm{per}}}\Big(LM^2\epsilon' + 5L + T\log(4MT) + T\log\log T\Big) + \frac{1}{2}\log\tbinom{L+n}{n} \\
&\leq \frac{14c_4c_7}{T_{\mathrm{per}}} T\log(4MT) + 2c_4c_7\log\log T + \frac{n}{2}\log(2T\log T).
\end{aligned}$$

en choisissant ϵ' assez petit. Et le résultat suit, avec une constante c_8 assez grande ne dépendant que de A, en remarquant pour le terme logarithmique que :

$$M^2 + 1 \leq L \leq T\log(T).$$

□

2.4 L'extrapolation

Suivant les schémas de transcendance classiques, on souhaite maintenant extrapoler les zéros de la fonction auxiliaire. Pour y parvenir, on veut exploiter des propriétés ultramétriques et les joindre à la formule du produit. Cette méthode a notamment permis d'obtenir des estimations précises sur le problème de Lehmer, à la suite de Dobrowolski (*confer* [Dob79]).

On va ici montrer que la translation par des points de p-torsion bien choisis est petite w-adiquement si w est une place au-dessus de p dans l'extension définie par les points de torsion. On fixera ensuite un ensemble de nombres premiers pour l'extrapolation. On prouvera enfin qu'un polynôme P tel que celui donné par le corollaire 2.18 doit s'annuler sur les translatées de X.

2.4.1 Propriétés du groupe formel associé à une courbe elliptique

L'extrapolation repose sur les propriétés des points de p-torsion des courbes elliptiques. Celles-ci diffèrent selon que p est un premier de réduction ordinaire ou supersingulière. Rappelons des résultats classiques sur le groupe formel d'une courbe elliptique en caractéristique positive (pour plus de détails, on renvoie à [Sil86], chapitre 4). Soit p un nombre premier et E une courbe elliptique sur k un corps algébriquement clos de caractéristique p. On définit la hauteur du groupe formel associé à la courbe elliptique.

Définition 2.5 *Soit $\widehat{E}$ le groupe formel associé à E. On appelle hauteur de $\widehat{E}$ et on note $ht(\widehat{E})$ le plus grand entier h tel que le morphisme de multiplication par p se factorise :*

$$[p] = f(T^{p^h}).$$

Remarques Il n'y a aucun rapport entre cette hauteur et la hauteur d'un point ou d'une variété définies dans la partie 2.2. De plus, la série entière f telle que $[p] = f(T^{p^h})$, où $h = ht(\widehat{E})$, vérifie : $f'(0) \neq 0$.

Le lemme suivant indique les valeurs que prend la hauteur :

Lemme 2.19 *Si E est ordinaire, $ht(\widehat{E}) = 1$. Sinon, E est supersingulière et $ht(\widehat{E}) = 2$.*

Preuve

On sait que le degré de la multiplication par p est p^2 et que son degré séparable est égal au cardinal du sous-groupe de p-torsion (le corps k étant algébriquement clos). Il vaut 1 dans le cas supersingulier et p dans le cas ordinaire.

D'autre part, la série f de la définition précédente est séparable par la remarque, et le Frobenius est purement inséparable de degré p. Le lemme suit en comparant les degrés inséparables.

□

On prend maintenant E une courbe elliptique définie sur K, un corps de nombres. Soit p un nombre premier et $\mathfrak{p}$ un premier de $\mathcal{O}_K$ divisant p, associé à une place v ; on suppose que $e_{\mathfrak{p}/p} = 1$ (il n'y a pas de ramification initiale) et que E a bonne réduction $\tilde{E}$ modulo $\mathfrak{p}$. On pose $q = p^h$ où h est la hauteur du groupe formel associé à $\tilde{E}$.

Proposition 2.20 *Soit x un point de p-torsion de E se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{p}$. Soit t un paramètre en 0 tel que, si on note $\tilde{t}$ sa réduction modulo $\mathfrak{p}$, $\tilde{t}$ soit un paramètre en 0 de $\tilde{E}$. Pour toute place w/v dans un corps de définition des points de torsion, on a :*

$$|t(x)|_w = p^{-1/(q-1)}.$$

Preuve

On écrit la multiplication par p sur la loi de groupe formel, par rapport à t :

$$[p](t) = pt + \sum_{i=2}^{\infty} a_i t^i.$$

En réduisant modulo $\mathfrak{p}$, on a une équation :

$$[p](\tilde{t}) = \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{a}_i \tilde{t}^i.$$

Comme $\tilde{t}$ est encore un paramètre, on peut appliquer le résultat précédent, qui montre que q est le premier indice i pour lequel $\tilde{a}_i$ est non nul. Par ailleurs, puisque x est un point de p-torsion se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{p}$, on sait (voir : [Sil86], VII, prop. 2.2), que la multiplication par $[p]$ en $t(x)$ est donnée par la loi de groupe formel. En appliquant la première identité à x qui est un point de p-torsion, on obtient :

$$pt(x) + \sum_{i=2}^{q-1} a_i t(x)^i = -\sum_{i=q}^{\infty} a_i t(x)^i.$$

Soit w/v dans un corps de définition de $E[p](\overline{\mathbb{Q}})$. Comparons les normes w-adiques : dans le membre de gauche, comme il n'y a pas de ramification initiale, tous les a_i sont divisibles par p et c'est le premier terme qui a la plus faible valuation ; celui de droite est de norme $|t(x)^q|_w$. On en déduit :

$$p^{-1}|t(x)|_w = |t(x)^q|_w,$$

et la proposition en résulte, vu le choix des normes ultramétriques.

□

2.4.2 Lemme sur les dérivées

On veut maintenant utiliser le résultat métrique du paragraphe précédent pour extrapoler les zéros du polynôme P obtenu par lemme de Siegel. On y parvient par une formule de Taylor, et on doit donc aussi majorer les normes ultramétriques des dérivées de P.

La première étape consiste à majorer la norme w-adique des dérivées de P en des points $\alpha + x$ où $\alpha \in X$, $x = (x_1, \ldots, x_g)$ tel que pour tout $1 \leq i \leq g$, x_i est un point de p-torsion, et w/p est une place dans un corps de définition de α et x. Précisons d'abord un résultat (c'est une version faible de [Dav95], proposition 8.1, qu'on a déjà utilisée pour majorer la hauteur du système linéaire dans Siegel) :

Lemme 2.21 *Soit E une courbe elliptique définie sur un corps de nombres K, donnée par une équation de Weierstrass : $y^2 = x^3 + ax + b$, avec $a, b \in K$. On note ∂ la dérivation correspondant par dualité au paramètre $t = y/x$. Alors ∂x et ∂y sont des polynômes de degré au plus 2 en (x, y), dont les coefficients sont des éléments de K de hauteur bornée explicitement en fonction de E.*

Remarque L'équation donnant la courbe elliptique est légèrement différente dans [Dav95], ce qui est sans conséquence sur ce lemme qualitatif.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.22 *Il existe une constante c_9 ne dépendant que de A telle que si $p \geq c_9$, pour tout w/p, une place de $K(A[p])$, pour toute fonction abélienne f de A_M, pour tous $1 \leq i \leq g$, et $\lambda \in \mathbb{N}^g$, $\delta_i^\lambda f$ est un polynôme en les fonctions abéliennes de A_M dont les coefficients $\alpha_j(f)$ vérifient :*

$$\forall j : \ |\alpha_j(f)|_w \leq 1.$$

Preuve

Par le lemme précédent, on peut trouver une constante c_9 telle que si $p \geq c_9$ et w/p, pour tout i et pour toute fonction abélienne f de A : $\partial_i f = \sum_j \alpha_j(f) H_j$. Les H_j sont des monômes en les fonctions abéliennes ; les coefficients $\alpha_j(f)$ sont dans K et vérifient, $\forall j : |\alpha_j(f)|_w = 1$. En effet, soit f est nulle sur E_i, soit la hauteur de cette dérivée est bornée uniquement en fonction de E_i et pour p assez grand en fonction de E_i, cette égalité est vérifiée.

Les opérateurs de dérivation sur A_M sont des combinaisons linéaires des ∂_i à coefficients entiers et le passage aux dérivées d'ordre supérieur s'effectue par la formule de Leibniz ; ces opérations ne peuvent que diminuer les normes ultramétriques, et le corollaire suit.

□

On regroupe maintenant la proposition et le corollaire précédents. Soit p un nombre premier qui ne se ramifie pas dans $\mathcal{O}_K$ et tel que : $\forall 1 \leq i \leq g$, E_i a (bonne) réduction ordinaire en tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ prolongeant p. Soit $\mathfrak{p}$ un tel premier, associé à une place $v \in M(K)$ et soit $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ (associé à une place w) dans $K' = K(A[p])$, le corps engendré par les coordonnées des points de p-torsion de A.

Soit $\alpha \in A$, soit $x = (x_1 \ldots, x_g)$ un point de p-torsion se réduisant sur 0 modulo w (*i.e.* chaque x_i est un point de torsion de E_i se réduisant sur 0 modulo w), et soit P un polynôme homogène sur A_M nul en $(\alpha, M\alpha)$ à l'ordre T. On fixe un ouvert affine U_α (resp. U_P) de $\mathbb{P}_n$ tel que $\forall i : |\alpha_i|_w \leq 1$ (resp. $|P_i|_w \leq 1$), en divisant par la coordonnée homogène de plus grande norme w-adique. On pose $U_{\alpha,P} = U_\alpha \cap U_P$. On conservera les mêmes notations sur $U_{\alpha,P}$ et sur $\mathbb{P}_n$.

Proposition 2.23 *Il existe une constante c_{10} ne dépendant que de A telle que si $p \geq c_{10}$, on a l'inégalité suivante sur $U_{\alpha,P}$:*

$$|\delta_{\alpha+x}^\lambda P|_w \leq p^{-(T-|\lambda|)/p}.$$

Preuve

En posant, pour $1 \leq i \leq g$: $t_i = y_i/x_i$, on voit que la réduction $\tilde{t}_i$ de t_i modulo $\mathfrak{q}$ est encore un paramètre local. Montrons que dans la complétion K'_w munie de la norme w-adique, on a :

$$\delta_{\alpha+x}^\lambda P = \sum_{\mu \geq \lambda} \delta_\alpha^\mu P \quad t_1(x)^{\mu_1-\lambda_1} \cdots t_g(x)^{\mu_g-\lambda_g}. \tag{2.3}$$

On sait déjà que le terme de gauche se développe en série entière selon les t_i car si on note $\widehat{\mathcal{O}}_{A_M,0}$ le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{A_M,0}$ en 0 le long de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_0$ associé à 0, on a :

$$\widehat{\mathcal{O}}_{A_M,0} \cong \overline{\mathbb{Q}}[[t_1 \ldots, t_g]].$$

La série de droite est le développement de Taylor en 0 selon les t_i du terme de gauche, appliqué en x. Il suffit donc de montrer qu'elle converge pour avoir égalité.

D'après la proposition 2.20, comme $\mathfrak{p}$ est un premier de réduction ordinaire simultanée pour les E_i, on sait que pour tout $1 \leq i \leq g$:

$$|t_i(x)|_w \leq p^{-1/p}.$$

Il reste à majorer la norme w-adique des coefficients de la série formelle. On a l'égalité :

$$\delta_\alpha^\mu P = \delta_0^\mu\big(P \circ \tau_{(\alpha,M\alpha)}\big).$$

Pour chaque courbe elliptique E_i, on s'est donné une équation de Weierstrass dont on appelle $\mathcal{E}_i$ l'ensemble des coefficients. L'addition (donc la multiplication par M) et la translation par α sont données sur les coordonnées homogènes par des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}[\alpha, \mathcal{E}_{i\ 1\leq i\leq g}]$. Si p est plus grand qu'une constante $c_{10} \geq c_9$ ne dépendant que de A, les coordonnées de $(\alpha, M\alpha)$ et du polynôme $Q = P \circ \tau_{(\alpha,M\alpha)}$ sont toutes de norme w-adique ≤ 1, par choix de l'ouvert affine.

Soit maintenant $\mu \in \mathbb{N}^g$. En itérant le corollaire 2.22, on voit que $\delta^\mu Q$ est un polynôme en les coordonnées affines dont les coefficients sont de norme w-adique ≤ 1. En évaluant en 0, on obtient :

$$|\delta_\alpha^\mu P|_w \leq 1.$$

La série converge donc bien car pour tout $1 \leq i \leq g$: $|t_i(x)|_w < 1$ et car la norme est ultramétrique. Ainsi, on a l'égalité (2.3). Comme P est nul à l'ordre T en α, un terme de la série est non-nul seulement si : $\sum_{i=1}^g \mu_i \geq T$; chaque terme de la série est donc de norme $\leq p^{-(T-|\lambda)|/p}$ et la proposition est prouvée.

□

2.4.3 Choix des bons premiers

On peut maintenant construire un ensemble de nombres premiers $\mathcal{P}_A$, dépendant de A, tel qu'on pourra extrapoler pour des points de p-torsion, où $p \in \mathcal{P}_A$. Cet ensemble de premiers sera de densité positive parmi les premiers de $\mathbb{N}$ (en fait, comme on pourra le vérifier dans le paragraphe 2.6.1, on pourrait se contenter d'une hypothèse légèrement plus faible sur l'ensemble de premiers).

Dans la proposition précédente, qui donne une propriété métrique intéressante en vue de l'extrapolation, on a supposé que les courbes elliptiques avaient réduction ordinaire ; dans le cas de la réduction supersingulière, le résultat serait en $1/p^2$. Cependant, cette propriété métrique plus faible serait compensée par le plus grand nombre de points supersinguliers se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$, pour $\mathfrak{q}/p$ dans $K' = K(A[p])$. La raison pour laquelle on n'utilise pas les premiers supersinguliers est que, sauf dans le cas CM, ces premiers sont de densité nulle. On a donc besoin de nombres premiers à réduction ordinaire simultanée pour $E_1, \ldots, E_g$. On dira qu'un sous-ensemble $\mathcal{P}_A$ de $\mathcal{P}$ est de densité d si :

$$\frac{|\{p \in \mathcal{P}_A, p \leq x\}|}{|\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}|} \to d \quad x \to +\infty.$$

Il s'agit de la densité naturelle, selon la terminologie de [Ser70], VI,4. On a le lemme :

Lemme 2.24 *Soit $E_1, \dots, E_g$ des courbes elliptiques définies sur un corps de nombres K. L'ensemble des nombres premiers p tels que : $\forall \mathfrak{p}$ idéal premier de $\mathcal{O}_K$ divisant p, $E_1, \dots, E_g$ ont réduction ordinaire simultanée en $\mathfrak{p}$, est de densité au moins $1/2^g$.*

Preuve

Pour les courbes elliptiques qui ne sont pas de type CM, la densité d'idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ ordinaires est 1 (*confer* [Ser68], IV, 13) ; comme les idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$ divisant un nombre premier fixé sont en nombre fini inférieur à $[K:\mathbb{Q}]$, la densité de nombres premiers au-dessus desquels tous les idéaux premiers sont à réduction ordinaire est aussi égale à 1.

On se limite donc aux courbes CM et on suppose, quitte à intervertir les facteurs, que $E_1, \dots, E_r$ sont de type CM, avec $r \leq g$. Pour une courbe elliptique E_i de type CM, associée à un corps quadratique K_i, les premiers de bonne réduction ordinaire sont ceux dont la projection sur $\mathbb{Z}$ se décompose dans K_i ; le type de réduction en un idéal premier ne dépend donc que de son image sur $\mathbb{Z}$.

On écrit $K_i = \mathbb{Q}(\sqrt{-d_i})$ où d_i est un entier naturel sans facteur carré. Les premiers ≥ 3 qui se décomposent dans K_i sont les p tels que d_i est un carré modulo p, ou encore tels que le symbole de Jacobi : $\left(\frac{d_i}{p}\right) = 1$. On est amené à traiter le premier 2 à part, ce qui apporte quelques complications techniques. On écrit donc $d_i = 2^{\alpha_i} d'_i$, où α_i vaut 0 ou 1. La loi de réciprocité quadratique généralisée nous donne :

$$\left(\frac{d_i}{p}\right) = \left(\frac{d'_i}{p}\right)\left(\frac{2^{\alpha_i}}{p}\right) = \left(\frac{p}{d'_i}\right)(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{d'_i-1}{2}\right)}(-1)^{\left(\frac{p^2-1}{8}\right)\alpha_i}.$$

Soit $(p_1, \dots, p_m)$ l'ensemble des premiers distincts rentrant dans la décomposition des d'_i. Par le théorème de Dirichlet (voir [Ser70], VI.4), les premiers sont équirépartis dans les classes modulo p_i ; en particulier, les premiers p tels que $\left(\frac{p}{p_i}\right) = 1$ sont de densité $1/2$ et les premiers p tels que $\left(\frac{p}{p_i}\right) = -1$ sont aussi de densité $1/2$.

On note $d = 8\prod_{i=1}^m p_i$. Par le lemme chinois, il existe 2^{m+2} sous-ensembles de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ correspondant chacun à une signature $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \epsilon_{m+1}, \epsilon_{m+2})$ où ϵ_i est la valeur du symbole de Legendre modulo p_i (pour $1 \leq i \leq m$), ϵ_{m+1} est celle de $(-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$, et ϵ_{m+2} celle de $(-1)^{\left(\frac{p^2-1}{8}\right)}$. De plus, les premiers sont équirépartis dans ces sous-ensembles. A $d_i = \prod_{j \in J_i} p_j$ on associe :

$$f_i : \ \epsilon \to \prod_{j \in J_i} \epsilon_j \ \epsilon_{m+1}^{\left(\frac{d'_i-1}{2}\right)} \ \epsilon_{m+2}^{\alpha_i}.$$

Alors la fonction :

$$f = (f_1, \dots, f_r) : \ \{-1,1\}^{m+2} \to \{-1,1\}^r$$

est un morphisme de groupes et $|\mathrm{Ker} f| \geq 2^{m+2-r}$. Chaque signature correspondant à une classe de densité $1/2^{m+2}$ en premiers, on en déduit que les premiers de réduction ordinaire simultanée sont de densité $1/2^r$.

□

On peut désormais construire l'ensemble de premiers $\mathcal{P}_A$ qui servira pour l'extrapolation :

Proposition 2.25 *Il existe un ensemble de premiers $\mathcal{P}_A$ de densité $\geq 1/2^g$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}_A$, et pour tout $\mathfrak{p}$ idéal premier de $\mathcal{O}_K$ divisant p :*

- *L'indice de ramification : $e_{\mathfrak{p}/p} = 1$.*
- *Les courbes elliptiques $E_1, \dots, E_g$ ont réduction ordinaire en $\mathfrak{p}$.*

– *La somme* $\sum_{p \in \mathcal{P}_A} \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{3}$.
– *Pour tout* $p \in \mathcal{P}_A$, $p \geq c_{10}$.

Preuve

Notons $D_{K/\mathbb{Q}}$ le discriminant de K sur $\mathbb{Q}$. La première condition est vérifiée si $p \geq D_{K/\mathbb{Q}}$. Le lemme précédent montre qu'il existe un ensemble de premiers de densité $\geq 1/2^g$ vérifiant la seconde condition (en particulier, A a bonne réduction sauf pour les idéaux premiers divisant son conducteur). La troisième condition est vraie à condition de prendre les p plus grands qu'une constante absolue, puisque la série en question indexée par $\mathbb{N}^*$ converge. La quatrième condition est vraie pour p assez grand en fonction de A, ce qui ne change pas la densité.

□

2.4.4 Le lemme d'extrapolation

On extrapole maintenant au moyen de l'ensemble $\mathcal{P}_A$ qu'on vient de construire et en utilisant la proposition 2.23. Soit $N \geq 3$ un entier, $p \in \mathcal{P}_A$ tel que $p \leq N$ et $\mathfrak{p}/p$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ associé à une place $v \in M(K)$. On notera dans la suite :

$$\mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}},$$

le sous-groupe des points de p-torsion de $A(\overline{\mathbb{Q}})$ se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$, pour tout $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$.

On reprend les hypothèses et notations du paragraphe 2.3.4. On se donne donc un fermé de Zariski X de A, un entier L, deux réels $T \geq T_{\mathrm{per}} \geq \max\{3, 4c_7\}$, tels que :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) < \frac{L}{T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)} \leq 1 \quad \text{et} \quad L \leq T\log T.$$

En posant :

$$M = \left[\left(\frac{T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)}{L}\right)^{1/2}\right] + 1,$$

et en supposant que : $M^2 + 1 \leq L$, on a démontré qu'il existe un élément P de $\left[\mathcal{B}_M^{(T)}\right]_L$ non nul sur A_M tel que :

$$h(P) \leq c_8 \log(T).$$

Pour simplifier la discussion qui va suivre, on introduit maintenant un paramètre Δ vérifiant l'hypothèse suivante :

$$\Delta \geq C_0 \log(3\omega(X)),$$

où on rappelle que C_0 est une constante ne dépendant que de A grande devant toutes les autres constantes introduites (voir 2.2.4). Ce paramètre Δ est de l'ordre de $\log(3\omega(X))$, mais il est grand devant tous les termes en $\log(3\omega(X))$, ce qui permettra de nombreuses simplifications. On suppose aussi, hypothèse qui sera aisément vérifiée par la suite, qu'il existe une constante c_{11} ne dépendant que de A telle que :

$$\max\{\log M, \log L, \log T, \log N\} \leq c_{11}\Delta. \tag{2.4}$$

On peut en particulier majorer tous ces termes par Δ^2.

En utilisant le travail de cette partie, on souhaite démontrer que le polynôme P donné par le lemme de Siegel est nul à un ordre T^* en tout translaté $\phi_M(x) + X_M$, pour un point

$x \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}$, où $p \leq N$. Ceci est possible si on fait quelques hypothèses en plus. On devra d'abord trouver une relation entre T^*, T et N qui assure que T^* est assez petit par rapport à T. Ensuite, on devra s'assurer une nouvelle fois que L n'interfère pas, en renforçant la majoration qu'on a déjà faite ; cette contrainte provient de la comparaison entre hauteur projective et hauteur canonique ; on devra enfin faire une hypothèse sur T_{per}, qui justifie la signification de ce paramètre (perte de multiplicité totale). On suppose donc :

$$L \leq T^*\mathrm{log}T \quad ; \quad T^* = \frac{T}{N\Delta^2} \geq 1 \quad \text{et} \quad T^* \geq \frac{T}{T_{\mathrm{per}}}. \tag{2.5}$$

Lemme 2.26 *Si les paramètres L, T, T^*, T_{per} et N vérifient les inégalités (2.4) et (2.5) et si $p \in \mathcal{P}_A \cap [3, N]$, alors pour tout $x \in Ker[p]_{\mathfrak{p}}$, le polynôme P est nul à un ordre $\geq T^*$ sur $\phi_M(x) + X_M$.*

Preuve

Soit x un élément de Ker $[p]_{\mathfrak{p}}$; on suppose par l'absurde qu'il existe $\lambda \in \mathbb{N}^g$ avec $\lambda < T^*$ tel que $\delta^\lambda P$ ne soit pas nul sur $\phi_M(x) + X_M$.

Soit ϵ un nombre réel > 0. Par définition du minimum essentiel, et comme ϕ_M est un plongement fermé, il existe un élément $\alpha \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ tel que

$$\hat{h}(\alpha) \leq \hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) + \epsilon \quad \text{et} \quad \delta^\lambda_{\alpha+x} P \neq 0.$$

On se place sur l'ouvert affine $U_{\alpha,P}$ choisi en 2.4.2 et on note cette fois $K' = K(A[p], \alpha)$. Compte tenu de la convention faite en 2.2.1 sur les normes ultramétriques et comme on a : $K(A[p]) \subset K'$, la norme $|.|_w$ n'augmente pas par extension et on sait déja majorer les normes ultramétriques $|\delta^\lambda_{\alpha+x} P|_w$ si w est une place de L et w/v :

$$|\delta^\lambda_{\alpha+x} P|_w \leq p^{-(T_0 - |\lambda|)/p}.$$

Aux autres places, on a la majoration évidente :

$$|\delta^\lambda_{\alpha+x} P|_w \leq \max\{1, |\delta^\lambda_{\alpha+x} P|_w\}.$$

Ceci permet de faire intervenir la hauteur qu'on majore de la même façon que dans le lemme de Siegel. Cette fois-ci, la hauteur du polynôme n'est pas nulle mais on dispose justement de la majoration fournie par le lemme de Siegel. On a plus précisément, pour c_{12} ne dépendant que de A :

$$h(\delta^\lambda_{\alpha+x} P) \leq c_{12} \left(LM^2 \hat{h}(\alpha) + L + h(P) + T^*\mathrm{log}(T^* + L) + T^*\mathrm{log}(2M) \right),$$

en utilisant au passage : $\hat{h}(\alpha + x) = \hat{h}(\alpha)$, car x est un point de torsion.

On remarque que $T^* \leq T$ et on applique la formule du produit sur K', en divisant par le degré total de l'extension $[K' : \mathbb{Q}]$:

$$0 \leq c_{12} \left(LM^2 \hat{h}(\alpha) + L + h(P) + T^*\mathrm{log}(4T\mathrm{log}T) \right) + \frac{\sum_{w/v} n_w}{[K' : \mathbb{Q}]} (T^* - T) \frac{\mathrm{log}p}{p}.$$

On fait ensuite tendre ϵ vers 0 ce qui donne, après simplifications :

$$0 \leq c_{12} \Big(5L + c_8 \frac{T}{T_{\mathrm{per}}} \mathrm{log}(T) + 3T^*\mathrm{log}(T) \Big) - \frac{T}{[K : \mathbb{Q}]} \frac{\mathrm{log}p}{p}.$$

Et il existe une constante c_{13}, ne dépendant que de A, telle que :

$$T\frac{\log N}{N} \leq c_{13}T^{*}\log(T).$$

Puis par l'égalité de (2.5) :

$$T\frac{\log N}{N} \leq c_{13}\frac{T}{N\Delta^2}\log(T).$$

On en déduit que : $\Delta^2 \leq c_{13}\log(T)$, ce qui est une contradiction par définition de Δ et par (2.4). Le lemme est donc entièrement démontré.

□

2.4.5 Extrapolation itérée

Comme dans le cas torique, le schéma de preuve qu'on a suivi oblige à itérer la phase d'extrapolation. On itère donc k fois l'étape précédente, où k est la codimension de X, pour pouvoir ensuite appliquer le lemme de zéros.

On se donne donc une suite finie d'entiers $N_1 = N, \ldots, N_k$, tels que pour tout $1 \leq i \leq k$: $N_i \leq N$; vue l'hypothèse (2.4) faite sur N, le logarithme de chaque N_i est en particulier négligeable devant Δ. On pose aussi :

$$T_0 = T \text{ et pour } 1 \leq i \leq k : \quad T_i = \frac{T_0}{\Delta^{2i}N_1 \ldots N_i}.$$

On pose enfin :

$$T_{\text{per}} = \frac{T_0}{T_k}$$

La suite d'hypothèses (2.5) faite pour écrire le lemme d'extrapolation s'étend de la façon suivante :

$$L \leq T_k\log T \quad \text{et} \quad T_k \geq 1. \tag{2.6}$$

On a donc la proposition :

Proposition 2.27 *Sous les hypothèses du paragraphe 2.4.4, en supposant de plus que (2.6) est vérifié, alors il existe un polynôme P de degré L nul à un ordre T_k sur*

$$\bigcup_{(p_1,\ldots,p_k)} \left(\bigcup_{x_i \in \mathrm{Ker}[p_i]_{\mathfrak{p}_i}, 1 \leq i \leq k} \phi_M(x_1 + \cdots + x_k) + X_M \right),$$

où la réunion porte sur les $(p_i, \mathfrak{p}_i)$, $1 \leq i \leq k$, tels que pour tout i, $p_i \in \mathcal{P}_A \cap [3, N_i]$, et $\mathfrak{p}_i$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ divisant p_i.

Preuve

La preuve se fait par récurrence, grâce au lemme d'extrapolation. Il suffit de remarquer que la hauteur de Néron-Tate, donc le minimum essentiel, ne change pas si on translate la variété par un point de torsion ; et que par (2.6), les paramètres intermédiaires T_i, pour $1 \leq i \leq k$, vérifient :

$$L \leq T_i\log T \quad \text{et} \quad T_i \geq 1.$$

□

Remarque Grâce à une approche nouvelle dans la phase de transcendance, Amoroso a récemment montré qu'on pouvait, au moins dans le cas torique, ne plus recourir à l'extrapolation itérée et au lemme de zéros qui suit (*confer* [Amo07]).

2.5 Lemme de zéros

On a démontré à la fin de la partie précédente qu'il existait un polynôme P de degré contrôlé s'annulant sur de nombreux translatés de X_M. Sachant cela, on commence par se ramener à X (le plongement étiré n'étant plus utile après la phase de transcendance). Le fermé de Zariski X sera par la suite une réunion de translatés d'une même variété (irréductible) V par des points de torsion. On voudra alors comparer le degré de V à celui de P pour obtenir une contradiction. Cette comparaison est l'objet d'un lemme de zéros, mais on n'y parvient pas directement (sauf en codimension 1) et on doit tenir compte de variétés obstructrices contenant un translaté de V. Dans ce contexte, il est particulièrement pratique de travailler avec des indices d'obstruction avec poids.

2.5.1 Le théorème

Le lemme de zéros dont on aura besoin est une version raffinée des lemmes de zéros classiques démontrés par Philippon. Une première version de ces lemmes raffinés a été prouvée dans le contexte torique ([AD03], 4) et sa généralisation aux groupes algébriques (avec le formalisme très souple des dessous d'escalier pour traiter la multiplicité) a été annoncée dans cette même référence.

On cite ici une version intermédiaire, la variété A étant un produit de courbes elliptiques, et la multiplicité étant constante uniforme selon les directions tangentielles. De plus, comme on va appliquer ce lemme sur A et non sur A_M, on considérera le polynôme $\tilde{P} = {\phi_M}^*(P)$ de degré $\tilde{L} = (M^2+1)L$.

Théorème 2.28 *Soit V une sous-variété irréductible de A, de codimension k, et $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_k$ des sous-ensembles finis de A tels que pour tout $1 \leq i \leq k$:*

$$\Sigma_i = \bigcup_{l=1,\ldots,s_i} H_{i,l},$$

où les $H_{i,l}$ sont des sous-groupes de A ; et $\Sigma_0 = H_0$, un sous-groupe fini de A. Soit de plus $\tilde{P}$ une fonction non identiquement nulle sur A, à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, de degré $\tilde{L}$, qui s'annule sur $\Sigma_0 + \cdots + \Sigma_k + V$. Alors il existe une constante c_{14} ne dépendant que de A, deux entiers $1 \leq r \leq k' \leq k$, des indices $j_1, \ldots, j_{r-1}$ avec $1 \leq j_l \leq s_l$ pour $l = 1, \ldots, r-1$, et des sous-variétés algébriques Z_j $(j = 1, \ldots, s_r)$ de A, propres, irréductibles et de codimension k', contenant au moins une composante isolée de

$$\Sigma_0 + H_{1,j_1} + \cdots + H_{r-1,j_{r-1}} + \Sigma_r + \cdots + \Sigma_k + V,$$

telles que :

$$T_r^{k'} \deg\Bigg(\bigcup_{x \in \Sigma_0 + H_{1,j_1} \cdots + H_{r-1,j_{r-1}}} \; \bigcup_{j=1,\ldots,s_r,\; y \in H_{r,j}} (x + y + Z_j) \Bigg) \leq c_{14} \tilde{L}^{k'}.$$

Preuve

Ce théorème est un cas particulier du résultat principal de [AD07]. Remarquons qu'il diffère du théorème torique de [AD03] par l'introduction de multiplicités et par la présence de Σ_0, justifiée par la dernière partie de la preuve.

□

2.5.2 Degré d'une sous-variété obstructrice

Il s'agit maintenant d'adapter le lemme de zéros à notre cas, et d'en déduire la majoration du degré d'une sous-variété obstructrice. On y arrive par un travail sur son stabilisateur. Commençons donc par la définition :

Définition 2.6 *Si Z est une sous-variété propre et irréductible de A, on appelle stabilisateur de Z, noté Stab(Z), l'ensemble :*

$$\{x \in A, x + Z = Z\} = \bigcap_{x \in Z} (Z - x).$$

On a les propriétés suivantes pour le stabilisateur :

$$\dim(\mathrm{Stab}(Z)) \leq \dim(Z) \ \text{ et : } \ \deg(\mathrm{Stab}(Z)) \leq \deg(Z)^{\dim(Z)+1}.$$

La première suit de la définition, et la preuve torique de la seconde (dans [AD99], 2) se transpose sans changement aux variétés abéliennes.

Les théorèmes de zéros classiques (comme [Phi96]) majorent directement le degré du stabilisateur d'une variété obstructice. On se rapprochera ici de la démarche de [AD03], en majorant le degré d'une variété obstructrice Z. Mais on ne "décalera" pas cette variété en considérant son image par l'isogénie de multiplication par un entier l.

En effet, dans le cas abélien, comme on se limite aux points de torsion se réduisant sur 0 modulo certains idéaux $\mathfrak{p}$, l'isogénie $[l]$ (pour un certain entier l) n'est pas adaptée. Si toutes les courbes elliptiques sont CM, on peut remédier à cela en prenant un relèvement du Frobenius en caractéristique nulle ; on peut aussi travailler avec des premiers supersinguliers, si ceux-ci sont de densité positive. Mais dans le cas général, on renonce à travailler avec une isogénie, et on se donne la possibilité, pendant la descente, d'appliquer le résultat de la transcendance à des réunions de translatés de la variété de départ (qui ne sont donc pas irréductibles).

On adapte le théorème précédent au fermé X et à la fonction ${\phi_M}^*P$. Pour $i \geq 1$, les $H_{i,l}$ sont les sous-groupes formés des points de p_l-torsion se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{p}_l$, pour un idéal premier $\mathfrak{p}_l$ de $\mathcal{O}_K$ divisant p_l. On reprend maintenant les hypothèses du paragraphe 2.4.5 et on suppose que :

$$X = V + \Sigma_0,$$

où V est une variété irréductible et $\Sigma_0 = H_0$, un sous-groupe fini de A. L'ensemble Σ_0 nous permettra de traiter la phase de descente. On suppose de plus que V n'est pas incluse dans un translaté de sous-variété abélienne propre de A et que les ensembles :

$$\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_A \cap [N_i/2, N_i] \ \text{ sont 2 à 2 disjoints,} \tag{2.7}$$

ce qui est indispensable pour ce travail combinatoire, et nous poussera à prendre les N_i très espacés. On note B le cardinal de H_0 et on suppose enfin que B est premier à tous les premiers des $\mathcal{P}_i$, pour $1 \leq i \leq k$.

Si $l = \prod_{i=1}^k p_i$ avec, pour tout $1 \leq i \leq k$: $p_i \in \mathcal{P}_i$ ou $p_i = 1$, on note :

$$\mathrm{Ker}[l]^* = \bigoplus_i \mathrm{Ker}[p_i]_{\mathfrak{p}_i}.$$

On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.29 *Il existe des entiers $1 \leq r \leq k' \leq k$, un entier $l \in \mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_r$ et une sous-variété Z de A propre et irréductible, de codimension k', contenant un translaté de V par un point de torsion, tels que :*

$$T_r^{k'} |\mathcal{P}_r| \frac{B}{|H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z)|} \frac{l^g}{|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)|} \deg(Z) \leq c_{15} \Delta (LM^2)^{k'},$$

pour une constante c_{15} ne dépendant que de A.

Remarque Le facteur dans le membre de gauche correspondant à la contribution de Σ_0 n'interviendra que dans la phase de descente. Pour simplifier les calculs qui viennent, on pose :

$$f(\Sigma_0, Z) = \frac{B}{|\mathrm{Stab}(Z) \cap H_0|}.$$

Preuve

La proposition 2.27 étant vérifiée, on applique le lemme de zéros avec V, Σ_0 et pour $1 \leq i \leq k$:

$$\Sigma_i = \bigcup_{p \in \mathcal{P}_i} \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}},$$

où pour tout $p \in \mathcal{P}_i$: $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ divisant p. On prend aussi $\tilde{P} = {\phi_M}^*(P)$ et on remarque que $\tilde{L} = LM^2$.

Il existe donc deux entiers k' et r tels que : $r \leq k' \leq k$, des couples $(p_i, \mathfrak{p}_i)$ tels que $p_i \in \mathcal{P}_i$ pour $1 \leq i \leq r-1$; une sous-variété algébrique Z_p de A (propre et irréductible, de codimension k') et $\mathfrak{p}$ un idéal premier divisant p dans $\mathcal{O}_K$, pour tout $p \in \mathcal{P}_r$, tels que :

$$T_r^{k'} \deg\Bigg(\bigcup_{p \in \mathcal{P}_r} \bigcup_{x \in \left(\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathrm{Ker}[p_i]_{\mathfrak{p}_i} \bigoplus \Sigma_0 \right)} \bigcup_{y \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}} x + y + Z_p \Bigg) \leq c_{14} \tilde{L}^{k'}.$$

La somme indexante pour x est bien directe, par les hypothèses faites sur B et les $\mathcal{P}_i$. De plus, pour tout $p \in \mathcal{P}_r$, la variété Z_p contient un translaté de V par un point de torsion.

Les entiers r et k' sont déja fixés. Posons $l_0 = p_1 \cdots p_{r-1}$, et prenons $p_r \in \mathcal{P}_r$ tel que :

$$f(\Sigma_0, Z_{p_r}) \frac{(l_0 p_r)^g}{|\mathrm{Ker}[l_0 p_r]^* \cap \mathrm{Stab}(Z_{p_r})|} \deg(Z_{p_r})$$

soit minimale puis posons $l = l_0 p_r$ et $Z = Z_{p_r}$. Il s'agit de majorer cette quantité pour avoir le corollaire. On partitionne $\mathcal{P}_r$ en introduisant la relation d'équivalence suivante :

$$p \sim q \Longleftrightarrow \Bigg(\exists\, \alpha \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^* \oplus \bigoplus_{p_n \in \mathcal{P}_r} \mathrm{Ker}[p_n]_{\mathfrak{p}_n}, \text{ tel que } \alpha + Z_p = Z_q \Bigg).$$

On note $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_s$ les différentes classes d'équivalence. Les variétés Z_p sont irréductibles et il en va de même pour chacune de leurs translatées. Si p et q appartiennent à des classes différentes, les réunions

$$\bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^* \oplus \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}} x + Z_p$$

n'ont aucune composante en commun et on peut additionner les degrés :

$$T_r^{k'} \sum_{j=1}^{s} \deg\Bigg(\bigcup_{p \in \mathcal{C}_j} \bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^* \oplus \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}} x + Z_p \Bigg) \quad \leq \quad c_{14} \tilde{L}^{k'}.$$

Soit $p \in \mathcal{P}_r$. Le stabilisateur de Z_p ne dépend que de la classe d'équivalence de p puisque si q est dans la même classe que p, Z_q est un translaté de Z_p. On appelle $\mathcal{S}_j$ le stabilisateur commun aux Z_p, pour $p \in \mathcal{C}_j$. Pour chaque classe $\mathcal{C}_j$, on fixe un premier $\rho_j \in \mathcal{C}_j$. Pour tout autre premier $p \in \mathcal{C}_j$, il existe donc deux éléments $\alpha_p \in \bigoplus_{p_n \in \mathcal{P}_r} \mathrm{Ker}[p_n]_{\mathfrak{p}_n}$ et $\eta_p \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*$ tels que :

$$\alpha_p + \eta_p + Z_p = Z_{\rho_j}.$$

Soit $p \neq q$ dans la même classe $\mathcal{C}_j$ et soit $\omega_p \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}$, $\omega_q \in \mathrm{Ker}[q]_{\mathfrak{q}}$. Si les réunions

$$\bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*} x + \omega_\xi + Z_\xi, \tag{2.8}$$

pour $\xi = p$ et $\xi = q$ ont au moins une composante commune, c'est qu'il existe un élément $\eta_{p,q} \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*$ tel que :

$$\omega_p + Z_p = \eta_{p,q} + \omega_q + Z_q.$$

On en déduit, grâce aux deux dernières égalités, que :

$$x = \alpha_p - \omega_p - \alpha_q + \omega_q + \big(\eta_p - \eta_q + \eta_{p,q}\big) \in \mathcal{S}_j.$$

On note $\alpha_p^{p_n}$ la composante selon p_n de α_p. Remarquons que $\alpha_p^p - \alpha_q^p - \omega_p \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}$, de même : $\alpha_q^q - \alpha_p^q - \omega_q \in \mathrm{Ker}[q]_{\mathfrak{q}}$, et : $\eta_q - \eta_p + \eta_{p,q} \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*$. Le nombre p est premier à q, à l_0, à B et à tous les autres premiers de $\mathcal{P}_r$. Il existe donc une relation de Bezout :

$$up + vl_0 \prod_{p_n \neq p \in \mathcal{P}_r \text{ ou } p_n/B} p_n = 1.$$

On en déduit, avec ce choix des p_n, que :

$$[vl_0 \prod_{p_n} p_n]x = [vl_0 \prod_{p_n} p_n](\alpha_p^p - \alpha_q^p - \omega_p) = \alpha_p^p - \alpha_q^p - \omega_p \in \mathcal{S}_j;$$

puisqu'il suit de sa définition que le stabilisateur est stable sous la multiplication par un entier. Par contraposition, si :

$$\omega_p \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}} \setminus \big(\alpha_p^p - \alpha_q^p + \mathcal{S}_j\big) \text{ et } \omega_q \in \mathrm{Ker}[q]_{\mathfrak{q}} \setminus \big(\alpha_q^q - \alpha_p^q + \mathcal{S}_j\big),$$

les réunions (2.8) n'ont pas de composantes communes. Il suit :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{p \in \mathcal{C}_j} \bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*} \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}} x+\xi+Z_p\Bigg) \geq \sum_{p \in \mathcal{C}_j} \deg\Bigg(\bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*} \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}} \setminus \big(\alpha_p^p - \alpha_{p_n}^p + \mathcal{S}_j\big)} x+\xi+Z_p\Bigg).$$

Fixons j et $p \in \mathcal{C}_j$. On va calculer le degré de la réunion totale en fonction de $\deg(Z_p)$. Comme les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ divisant $p \in \mathcal{P}_A$ sont simultanément ordinaires pour toutes les courbes elliptiques E_i, on a :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*} \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}} x + \xi + Z_p\Bigg) = f(\Sigma_0, Z_p) \frac{(l_0 p)^g}{|\mathcal{S}_j \cap (\mathrm{Ker}[l_0 p]^*|} \deg(Z_p). \tag{2.9}$$

A cette réunion, il faut retrancher :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*} \bigcup_{\xi \in \alpha_p^p - \alpha_{p_n}^p + \mathcal{S}_j} x + \xi + Z_p\Bigg) \leq f(\Sigma_0, Z_p) \frac{|\mathcal{C}_j| l_0^g}{|\mathcal{S}_j \cap \mathrm{Ker}[l_0]^*|} \deg(Z_p).$$

En effet, il y a au plus $|\mathcal{C}_j|$ points de la forme α^p_{pn}. Notons $\tilde{\mathcal{C}_j}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_j$ formé des p divisant $[\mathcal{S}_j : \mathcal{S}_j^0]$, où $\mathcal{S}_j^0$ désigne le plus grand sous-groupe connexe de $\mathcal{S}_j$. Si $p \notin \tilde{\mathcal{C}_j}$, on peut comparer les termes apparaissant au dénominateurs des deux dernières formules :

$$|\mathcal{S}_j \cap \mathrm{Ker}[l_0]^*| = \frac{|\mathcal{S}_j \cap (\mathrm{Ker}[l_0 p]^*|}{p^{\dim \mathcal{S}_j}}.$$

Comme V n'est pas inclus dans le translaté d'une sous-variété abélienne propre, il en va de même pour tous les Z_p, et on déduit immédiatement de la définition du stabilisateur que : $\dim \mathcal{S}_j < \dim Z_{\rho_j} \leq g-1$. Il suit :

$$\deg\Big(\bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*} \ \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}} \setminus \alpha^p_p - \alpha^p_{pn} + \mathcal{S}_j} x+\xi+Z_p \Big) \ \geq \ \Big(1 - \frac{|\mathcal{C}_j|}{p^2}\Big) f(\Sigma_0, Z_p) \frac{(l_0 p)^g \deg(Z_p)}{|\mathcal{S}_j \cap (\mathrm{Ker}[l_0 p]^*|}.$$

En fixant j, on somme maintenant sur l'ensemble des p. En tenant compte des définitions de l et de Z, on obtient :

$$\begin{aligned} \deg\Big(\bigcup_{p \in \mathcal{C}_j} \ \bigcup_{x \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*} \ \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}} x+\xi+Z_p \Big) \ &\geq \ \Big(|\mathcal{C}_j \setminus \tilde{\mathcal{C}_j}| - |\mathcal{C}_j| \sum_{p \in \mathcal{C}_j} \frac{1}{p^2} \Big) \ \frac{f(\Sigma_0, Z)\ l^g}{|\mathrm{Stab}(Z) \cap \mathrm{Ker}[l]^*|} \deg(Z) \\ &\geq \ \Big(\frac{2}{3} |\mathcal{C}_j| - |\tilde{\mathcal{C}_j}| \Big) \frac{f(\Sigma_0, Z)\ l^g}{|\mathrm{Stab}(Z) \cap \mathrm{Ker}[l]^*|} \deg(Z), \end{aligned}$$

où on a utilisé la définition de $\mathcal{P}_A$ pour majorer : $\sum_{p \in \mathcal{C}_j} \frac{1}{p^2}$. On a plus directement, à partir de (2.9) et sans faire de dénombrement dans $\mathcal{C}_j$:

$$\deg\Big(\bigcup_{p \in \mathcal{C}_j} \ \bigcup_{x \in \mathrm{Ker}[l_0]^* \oplus \Sigma_0} \ \bigcup_{\xi \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{p}}} x+\xi+Z_p \Big) \geq \frac{f(\Sigma_0, Z)\ l^g}{|\mathrm{Stab}(Z) \cap \mathrm{Ker}[l]^*|} \deg(Z).$$

Il reste à estimer le nombre de premiers divisant $[\mathcal{S}_j : \mathcal{S}_j^0]$. Or on a :

$$|\tilde{\mathcal{C}_j}| \leq \frac{\log [\mathcal{S}_j : \mathcal{S}_j^0]}{\log 3} \leq \log\, \deg(\mathcal{S}_j) \leq g \log\, \deg(Z_{\rho_j}) \leq \Delta.$$

On a ici majoré le degré du stabilisateur en fonction de celui de la variété (par la propriété donnée au début du paragraphe), puis on a utilisé grossièrement le lemme de zéros pour majorer $\deg(Z_{\rho_j})$.

Une étude de fonction nous donne l'inégalité : $\max\{x-y; 1\} \geq \frac{x}{2y}$, valable pour $x \geq 0$ et $y \geq 1$; on en déduit :

$$\max\{\frac{2}{3}|\mathcal{C}_j| - |\tilde{\mathcal{C}_j}|, 1\} \geq \frac{|\mathcal{C}_j|}{3\Delta}.$$

Le corollaire suit en sommant sur les classes d'équivalence et en prenant $c_{15} = 3c_{14}$.

$\square$

2.6 Démonstration du théorème

Pour finir la démonstration du théorème 2.5, on va d'abord choisir les paramètres de sorte à pouvoir utiliser le corollaire 2.29. On obtiendra une inégalité (proposition 2.30), qui ne nous permettra pas de conclure immédiatement, car il manquera une hypothèse de coprimalité entre deux nombres choisis simultanément (l'un étant le cardinal de la partie discrète du stabilisateur d'une sous-variété). On devra alors itérer cette proposition pour construire une suite de variétés vérifiant le même type d'inégalité ; cette partie, dite de descente, imposera l'hypothèse : $\mathrm{codim}(V) \leq 2$.

2.6.1 Choix des paramètres

On commence par fixer les paramètres qui sont encore libres à ce stade de la preuve, à savoir : L, T_k, les N_i et les $\mathcal{P}_i$, $1 \leq i \leq k$. Ceux-ci dépendent d'un fermé $X = V + \Sigma_0$; on fixe donc V une sous-variété propre (et irréductible) de A, de codimension k. La phase de descente nous force, en contrepartie, à introduire deux nouveaux paramètres : ρ, un réel positif, et R un entier strictement positif. On fait les hypothèses suivantes concernant ces deux paramètres :

$$\Delta \geq \max\{C_0 \log(3\omega(X)), \log R\} \ \text{ et : } \ 1 \leq \rho \leq \left(5(2k)^{k+1}\right)^{k-1}.$$

Les hypothèses que doivent vérifier les paramètres sont regroupées dans la phase d'extrapolation (2.4.4 et 2.4.5). A celles-ci s'est ajoutée l'hypothèse (2.7) de 2.5.2 sur les ensembles $\mathcal{P}_i$. On choisit d'abord les N_i ; ceux-ci doivent être assez espacés pour que (2.7) soit vérifiée, et ils doivent être majorés par une puissance de $\log\big(3\omega(V)\big)$. On pose :

$$N_i = \Delta^{\rho(2k)^{k+2-i}}.$$

Et :

$$\mathcal{P}_i = \{p \in \mathcal{P}_A, N_i/2 \leq p \leq N_i, p \nmid R\};$$

on vérifie immédiatement (2.7).

On rappelle que :

$$T_{\mathrm{per}} = \Delta^{2k} N_1 \cdots N_k \ \text{ et } \ T = T_k T_{\mathrm{per}}.$$

On pose aussi :

$$T_k = T_{\mathrm{per}}\ \omega(T_{\mathrm{per}}, X) \text{ et } L = \left[\left(2T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)\right)^{1/2}\right] + 1$$

On vérifie aisément, comme on l'a supposé en 2.4.4, que :

$$T \geq T_{\mathrm{per}} = \Delta^{2k} N_1 \cdots N_k \geq \max\{3, c_7\}.$$

L'hypothèse (2.4) faite en 2.4.4 est vraie pour $\log T$, $\log N_1$ (on rappelle que $N = N_1$) et $\log L$. On a aussi :

$$M^2 < \frac{2T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)}{L},$$

et on voit, en utilisant le lemme 2.10, que (2.4) est aussi vérifiée pour $\log M$. Cette même inégalité couplée avec la définition de L montre qu'on a aussi : $M^2 < L$. Il en va de même pour l'hypothèse (2.6), cruciale dans l'extrapolation. On a en effet :

$$\frac{L}{T_k} \leq \frac{2\Big(2T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)\Big)^{1/2}}{T_k} \leq 2\sqrt{2T_k/T_k} \leq 2\sqrt{2}.$$

Les conditions sont donc réunies pour qu'on puisse exploiter le corollaire 2.29. La discussion précédente a fait apparaître l'intersection de $\mathrm{Ker}[l]^*$ et du stabilisateur de Z. Il s'agit d'un groupe fini et son cardinal divise une puissance de l. On note alors, pour simplifier la discussion qui suit :

$$|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)| = \lambda(Z).$$

On rappelle aussi la notation suivante :

$$f(\Sigma_0, Z) = \frac{B}{|\mathrm{Stab}(Z) \cap H_0|}.$$

Proposition 2.30 *On suppose que X n'est pas incluse dans le translaté d'une sous-variété abélienne et que son minimum essentiel est majoré de la façon suivante :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X)\ \omega(X) < \frac{1}{\Delta^{4\rho(2k)^{k+1}}}.$$

Alors il existe un entier l strictement positif et une sous-variété Z de codimension k' contenant un translaté de V par un point de torsion tels que :

– *L'entier l est premier avec R et :*

$$l \leq \Delta^{2\rho(2k)^{k+1}}.$$

– *On a l'inégalité :*

$$\left(\frac{f(\Sigma_0, Z) l^g}{\lambda(Z)} \deg(Z)\right)^{1/k'} < \Delta^{-\rho} l \omega(l, X).$$

Preuve

Pour appliquer le corollaire précédent, il reste à voir que l'hypothèse faite ici sur le minimum essentiel est plus forte que celle faite en 2.4.4. Par le lemme 2.10, le choix des paramètres et les sommes des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\frac{L}{T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T\omega(T_{\mathrm{per}}, X)}} = \frac{1}{T_{\mathrm{per}}\omega(T_{\mathrm{per}}, X)} \leq \frac{1}{\omega(X)\Delta^{4\rho(2k)^{k+1}}}.$$

On peut donc appliquer le corollaire 2.29 et il existe deux entiers strictement positifs $r \leq k' \leq k$, un entier $l \in \mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_r$, et une sous-variété algébrique Z propre (et irréductible) de A, de codimension k', contenant un translaté de V par un point de torsion, telle que :

$$T_r^{k'} |\mathcal{P}_r| \frac{f(\Sigma_0, Z) l^g}{\lambda(Z)} \deg(Z) \leq c_{15} \Delta M^{2k'} L^{k'}.$$

Par construction des $\mathcal{P}_i$, l'entier l est premier avec R et on a les inégalités :

$$2^{-r} N_1 \cdots N_r \leq l \leq N_1 \cdots N_r \leq \Delta^{\rho[(2k)^2 + \cdots + (2k)^{k+1}]}.$$

On majore l'exposant comme suit :

$$\sum_{j=2}^{k+1} (2k)^j \leq -k + \sum_{j=1}^{k+1} (2k)^j \leq 2(2k)^{k+1} - k,$$

par l'inégalité :

$$1 + x + \cdots + x^h \leq 2x^h \text{ pour } h \in \mathbb{N} \text{ et } x \geq 2.$$

On a donc démontré la majoration de l.

On doit encore prouver le second point. Comme $\Delta \geq C_0$, la définition de N_r montre que ce paramètre est grand devant toutes les constantes du problème. On peut donc appliquer le théorème des nombres premiers qui, joint à la densité de l'ensemble $\mathcal{P}_A$, montre que pour une constante $c_{16} > 0$ ne dépendant que de A :

$$|\mathcal{P}_r| \geq c_{16} \frac{N_r}{\log N_r} - \frac{\log R}{\log 2}.$$

On observe que : $\log N_r \leq \Delta^{1/2}$ (par choix de C_0) et on a aussi :

$$\Delta \geq \log R.$$

On en déduit :

$$|\mathcal{P}_r| \geq \Delta^{\rho(2k)^{k+2-r}-1}\big(c_{16}\Delta^{1/2} - 1\big) \geq \Delta^{\rho(2k)^{k+2-r}-1},$$

par choix de C_0, et parce que $c_{16} > 0$.

Par le lemme 2.4 de [AD03], comme $l \leq N_1 \cdots N_r \leq T_{\text{per}}$, on a :

$$\omega(T_{\text{per}}, X) \leq \frac{T_{\text{per}}}{l}\omega(l, X) \leq 2^r \Delta^{2k} N_{r+1} \cdots N_k \; \omega(l, X),$$

où on convient que le produit $N_{r+1} \cdots N_k$ vaut 1 si $r = k$. De plus, le même argument que celui employé pour majorer l nous donne :

$$N_{r+1} \cdots N_k \leq \Delta^{2\rho(2k)^{k+1-r}}.$$

On peut donc majorer :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(\Sigma_0, Z)l^g}{\lambda(Z)}\deg(Z)\right)^{1/k'} &\leq c_{15}\frac{\Delta^{1/k'}M^2L}{|\mathcal{P}_r|^{1/k'}T_r} \\
&\leq 2c_{15}\frac{\Delta^{1/k'}T\omega(T_{\text{per}}, X)}{|\mathcal{P}_r|^{1/k'}T_r} \\
&\leq 2^{2r+1}c_{15}\frac{l\;\Delta^{1/k'+4k}{N_{r+1}}^2 \cdots {N_k}^2}{|\mathcal{P}_r|^{1/k'}N_{r+1}\cdots N_k}\omega(l, X).
\end{aligned}$$

L'exposant h de Δ dans cette dernière majoration est donné par :

$$\begin{aligned}
h &:= 4k + \rho\big((2k)^2 + \cdots + (2k)^{k+1-r}\big) - \big(\rho(2k)^{k+2-r} - 2\big)/k'. \\
&\leq \rho\big((2k) + \cdots + (2k)^{k+1-r}\big) - 2\rho(2k)^{k+1-r} \\
&\leq \rho(k-r)(2k)^{k-r} + \rho(2k)^{k+1-r} - 2\rho(2k)^{k+1-r} \\
&\leq -\rho(k+r)(2k)^{k-r} \leq -2\rho.
\end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\left(\frac{f(\Sigma_0, Z)l^g}{\lambda(Z)}\deg(Z)\right)^{1/k'} < \Delta^{-\rho}l\omega(l, X),$$

en faisant disparaître les constantes avec Δ^ρ, et le résultat suit par les propriétés immédiates de l'indice d'obstruction avec poids.

$\square$

Remarques Posons $X = V$ et $\Sigma_0 = \{0\}$. Si on savait assurer la coprimalité entre l et $[\mathrm{Stab}(Z) : \mathrm{Stab}(Z)^0]$ (deux objets construits simultanément), on pourrait déjà clore la preuve, car on aurait :

$$\lambda(Z) \leq l^{\dim\left(\mathrm{Stab}(Z)^0\right)} \leq l^{g-k'-1};$$

la deuxième inégalité provient du fait que V, donc Z, n'est pas le translaté d'une sous-variété abélienne. La variété Z contenant un translaté de V par un point de torsion, on a de plus :

$$\omega(l, V) \leq \Big(l\deg(Z)\Big)^{1/k'},$$

et une contradiction suivrait immédiatement.

Notons aussi que grâce à la prise en compte de la multiplicité T_r dans le lemme de zéros, on a réussi à améliorer légèrement l'exposant de Δ dans l'hypothèse faite sur le minimum essentiel ; il valait en effet $4\rho(3k)^{k+1}$ dans le cas torique.

2.6.2 Itération et fin de la preuve

Cette construction ne permet pas de conclure, et on est amené à itérer la dernière proposition. C'est à ce stade de la preuve qu'on utilise crucialement l'hypothèse sur la codimension de V. En effet, on n'a pas pu mettre en place la stratégie de descente, devenue classique dans les travaux diophantiens sur la minoration de hauteurs, en codimension quelconque.

Une des raisons principales de l'échec de cette démarche est la suivante : la procédure diophantienne donne l'existence d'une sous-variété obstructrice vérifiant une propriété "pathologique" ; contrairement au cas torique (et parce qu'on ne peut pas recourir à une isogénie adaptée), on perd trop d'information en extrayant une hypersurface contenant cette variété obstructrice. Le passage par l'hypersurface est pourtant indispensable pour garantir l'emboîtement, et par suite l'égalité des dimensions après k itérations.

Preuve (du théorème 2.5)
On peut maintenant démontrer le théorème 2.5. Soit V une sous-variété propre de A qui n'est pas incluse dans un translaté de sous-variété abélienne de A, de codimension $k \leq 2$. On pose :

$$\Delta = C_0^2 \log(3\deg(V)),$$

et on suppose que :

$$\omega(V)\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) < \Delta^{-\left(9(2k)^{k+1}\right)^k}.$$

Première étape. Pour utiliser la proposition 2.30, on doit définir :

$$\rho_1 = \left(5(2k)^{k+1}\right)^{k-1} \text{ et } R_1 = [\mathrm{Stab}(V) : \mathrm{Stab}(V)^0].$$

On a, en tenant compte des propriétés du stabilisateur suivant la définition 2.6 :

$$\log(R_1) \leq \log\Big(\deg(\mathrm{Stab}(V))\Big) \leq g\log(3\deg(V)) \leq \Delta.$$

On applique alors la proposition 2.30 avec $X = V$, ce qui nous donne l'existence d'un entier l_1 et d'une sous-variété Z_1 de A, propre et de codimension k_1, contenant un translaté de V par un point x_1, et telle que :

$$\left(\frac{l_1^g}{\lambda_1(Z_1)}\deg(Z_1)\right)^{1/k_1} < \Delta^{-\rho_1} l_1 \omega(l_1, V).$$

De plus, on peut supposer que V est de codimension 2 et que Z_1 est une hypersurface. Sinon, on aurait : $Z_1 = x_1 + V$, car ces variétés seraient de même codimension et : $x_1 + V \subset Z_1$. Dans ce cas, l'entier l_1 serait premier à

$$[\mathrm{Stab}(V) : \mathrm{Stab}(V)^0] = [\mathrm{Stab}(Z_1) : \mathrm{Stab}(Z_1)^0],$$

et la remarque suivant la preuve de la proposition 2.30 montre qu'on aurait une contradiction.

Deuxième étape. On itère maintenant la proposition 2.30 en posant :

$$V_1 = \bigcup_{x \in \mathrm{Stab}(Z_1) \cap \mathrm{Ker}[l_1]^*} x + V.$$

Puis :

$$\rho_2 = \left(5(2k)^{k+1}\right)^{k-2} \text{ et } R_2 = [\mathrm{Stab}(V) : \mathrm{Stab}(V)^0] \times [\mathrm{Stab}(Z_1) : \mathrm{Stab}(Z_1)^0] \times l_1.$$

La dernière condition permet que le cardinal de Σ_0 soit premier à tous les premiers des $\mathcal{P}_i$ dans la phase combinatoire. On vérifie une nouvelle fois (par les majorations du degré de Z_1 et de l_1 données par la proposition 2.30) que :

$$\log(R_2) \leq g\log(3\omega(V)) + g^2\log(\omega(V)) + 3\log(l_1) \leq \Delta.$$

On doit aussi majorer :

$$\omega(V_1)\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V_1).$$

Le minimum essentiel de V_1 est celui de V puisqu'on translate par des points de torsion. Quant à l'indice d'obstruction, comme $x_1 + V_1 \subset Z_1$ (par définition de ces deux variétés), l'inégalité sur le degré de Z_1 donne :

$$\omega(V_1) \leq l_1 \omega(l_1, V) \leq l_1^2 \omega(V). \tag{2.10}$$

On obtient donc :

$$\omega(V_1)\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V_1) \leq l_1^2 \omega(V)\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \leq \Delta^{-\left(9(2k)^{k+1}\right)^k + 4\rho_1(2k)^{k+1}} \leq \Delta^{(2k)^{(k+1)}(-9+5)} \leq \Delta^{-4(2k)^{k+1}}.$$

Par (2.10), on a enfin :

$$C_0 \log(3\omega(V_1) \leq \Delta.$$

La proposition 2.30 avec $\Sigma_0 = H_0 = \mathrm{Stab}(Z_1) \cap \mathrm{Ker}[l_1]^*$ donne l'existence d'une variété Z_2 de codimension k_2 contenant un translaté $x_2 + V$, telle que :

$$\left(\frac{f(\Sigma_0, Z_2) l_2^g}{\lambda_2(Z_2)}\deg(Z_2)\right)^{1/k_2} < \Delta^{-\rho_2} l_2 \omega(l_2, V_1).$$

On remarque que Z_2 contient les translatés de $x_2 + V$ par les points de $H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z_2)$. On a :

$$\deg\Big(\bigcup_{x\in\Sigma_0/(\Sigma_0\cap \mathrm{Stab} Z_2)} x + Z_2\Big) \leq f(\Sigma_0, Z_2)\deg(Z_2);$$

et cette réunion, notée Z_2', contient un translaté de V_1. Si Z_2 est de codimension 2, on a encore une égalité : $Z_2 = x_2 + V$ et on en déduit que l_2 est premier à $[\mathrm{Stab}(Z_2) : \mathrm{Stab}(Z_2)^0]$. Il suit :

$$\Big(l_2\deg(Z_2')\Big)^{1/2} \leq \Delta^{-\rho_2}\omega(l_2, V_1),$$

ce qui est absurde, puisque Z_2' contient un translaté de V_1.

Les deux variétés Z_1 et Z_2 sont donc des hypersurfaces, qui contiennent toutes deux un translaté de V, de codimension 2. Quitte à translater ces deux variétés (ce qui est sans conséquences sur le degré et le stabilisateur), on suppose que $V \subset Z_1 \cap Z_2$. Il reste à comparer Z_1 et Z_2 pour finir la preuve.

Cas 1. L'intersection $Z_1 \cap Z_2$ est de codimension 1. Les deux hypersurfaces (irréductibles) sont donc égales. Par construction, Z_1 contient V_1 et on a :

$$\omega(V_1) \leq \deg(Z_1) \leq \deg(Z_2).$$

En outre, l'égalité des variétés nous montre que l_2 est premier à la partie discrète du stabilisateur de Z_2, et comme cette hypersurface n'est pas incluse dans un translaté de variété abélienne (puisque cette propriété est vraie pour $V \subset Z_2$) :

$$\omega(V_1) \leq \Delta^{-\rho_2}\frac{l_2^{2-g}}{\lambda_2(Z_2)}\omega(V_1) \leq \Delta^{-\rho_2}\omega(V_1).$$

On obtient donc une contradiction.

Cas 2. L'intersection $Z_1 \cap Z_2$ est de codimension 2. Dans ce cas, cette intersection contient V, mais elle contient aussi les translatés de V par les points de $H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z_2)$. Comme le cardinal de ce groupe divise une puissance de l_1, la partie discrète du stabilisateur de V n'intervient pas et on a :

$$\deg\Big(\bigcup_{x\in H_0\cap \mathrm{Stab}(Z_2)} x + V\Big) \geq \frac{|H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z_2)|}{l_1^{\dim(V)-1}}\deg(V).$$

On a utilisé au passage le fait que V n'était pas un translaté de variété abélienne. Par le théorème de Bézout, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{l_1^{3-g}}{\lambda_1(Z_1)f(\Sigma_0, Z_2)}\deg(V) &\leq \deg(Z_1)\deg(Z_2)\\ &\leq \Delta^{-\rho_1}\frac{l_1^{1-g}}{\lambda_1(Z_1)f(\Sigma_0, Z_2)}l_2^2\omega(l_1, V)\omega(V_1).\end{aligned}$$

La majoration des termes en l_2 a été grossière car ceux-ci sont négligeables devant Δ^{ρ_1} par la majoration de l_2 suivant la proposition 2.30. On en déduit :

$$\deg(V) \leq \Delta^{-\rho_1}l_1^{-2}l_2^2\omega(l_1, V)\omega(V_1).$$

Par (2.10), on trouve :

$$l_1 \deg(V) \leq \Delta^{-\rho_1} l_2^2 \omega(l_1, V)^2 \leq \Delta^u \omega(l_1, V)^2,$$

et le réel u vérifie :

$$u \leq -\rho_1 + 4\rho_2 (2k)^{k+1} < 0.$$

C'est à nouveau une contradiction.

Conclusion. Il en résulte que V contredit la majoration annoncée au début de cette preuve. On en déduit :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{C(A)}{\omega(V)} \times \Big(\log(3\deg(V))\Big)^{-\lambda(k)},$$

où $\lambda(k) = (9(2k)^{(k+1)})^k$ et $C(A) = \frac{1}{C_0^{2\lambda(k)}}$, qui ne dépend que de A.

$\square$

Remarques Notons d'abord que dans le cas où les E_i sont toutes à multiplication complexe, l'existence d'un relèvement du morphisme de Frobenius pour presque toute place de K permet de démontrer la même minoration en codimension quelconque. En effet, la fin de la preuve, à partir du paragraphe 2.5.2, est alors, à quelques détails près, la même que dans le cas torique, en remplaçant l'isogénie $[l]$ par le relèvement du Frobenius associé.

On n'a pas pu traiter la codimension quelconque car les techniques de descente résistent pour l'instant en codimension supérieure à 2. Il est cependant encourageant de voir qu'en codimension 2, le premier cas non-trivial, on a su mettre en œuvre ces techniques.

Chapitre 3

Bogomolov effectif et méthode des pentes

3.1 Introduction

On souhaite par ce travail, et sous certaines conditions, étendre aux variétés abéliennes la minoration du minimum essentiel déjà obtenue dans les produits de courbes elliptiques. Une telle minoration est une version quantitative de la conjecture de Bogomolov dont la formulation originale concerne les courbes algébriques.

Si C est une courbe algébrique de genre $g \geq 2$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et plongée dans sa jacobienne $J(C)$, on note $\hat{h}$ la hauteur canonique sur $J(C)$. On a alors la conjecture suivante, énoncée par Bogomolov en 1981 et démontrée par Ullmo en 1996 :

Théorème 3.1 *Il existe $\epsilon > 0$ tel que $\{x \in C(\overline{\mathbb{Q}}), \hat{h}(x) \leq \epsilon\}$ est fini.*

Puisque les points de torsion sont exactement ceux de hauteur nulle, le théorème d'Ullmo généralise le résultat suivant, connu sous le nom de *conjecture de Manin-Mumford* et démontré par Raynaud (dans [Ray83]) :

Théorème 3.2 *Les points de torsion de $J(C)$ qui sont dans $C(\overline{\mathbb{Q}})$ sont en nombre fini.*

Plus généralement, soit V une sous-variété algébrique d'une variété abélienne munie d'un fibré ample et symétrique, et $\hat{h}$ la hauteur de Néron-Tate associée à ce fibré. On commence par donner un analogue en dimension supérieure de l'hypothèse faite sur le genre :

Définition 3.1 *On dit que V est de torsion si V est la translatée d'une sous-variété abélienne par un point de torsion.*

Une courbe algébrique de torsion est en particulier de genre 1. On introduit par ailleurs le minimum essentiel, pour décrire les points de petite hauteur dans V :

Définition 3.2 *Le minimum essentiel de V est :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) = \inf\{\theta > 0, \overline{V(\theta)}^Z = V(\overline{\mathbb{Q}})\},$$

$$\textit{où } V(\theta) = \{x \in V(\overline{\mathbb{Q}}), \hat{h}(x) \leq \theta\},$$

et $\overline{V(\theta)}^Z$ est son adhérence de Zariski.

On a alors la généralisation suivante du théorème 1, démontrée par Zhang (*confer* [Zha98]) :

Théorème 3.3 *Soit V une sous-variété propre d'une variété abélienne A. Le minimum essentiel de V est nul si et seulement si V est de torsion.*

Remarque Ici, "V est une sous-variété propre de A" signifie que $V \subsetneq A$.

Le résultat analogue est vrai si on remplace A par un tore (*confer* [Zha92]) ou plus généralement par une variété semi-abélienne (*confer* [DP00]).

On peut chercher à obtenir une version quantitative de ce résultat, en précisant ϵ dans le théorème 1. Ceci revient, en dimension supérieure, à minorer le minimum essentiel d'une variété qui n'est pas de torsion. Grâce au théorème des minima successifs démontré par Zhang (dans [Zha95a]), il est équivalent de minorer la hauteur d'une telle variété. Depuis les travaux de Bombieri et Zannier (voir [BZ95] pour le cas torique et [BZ96] pour le cas abélien), on sait qu'on peut espérer obtenir une borne "uniforme" pour le minimum essentiel, ne dépendant que du degré de V et de la variété abélienne A.

Amoroso et David obtiennent une majoration optimale aux termes logarithmiques près en le degré de V pour les sous-variétés d'un tore (voir [AD03]). Le degré y est remplacé par un invariant plus fin qui apparaît naturellement avec les techniques diophantiennes, l'indice d'obstruction.

Définition 3.3 *Soit V une sous-variété propre et irréductible de S une variété semi abélienne munie d'un fibré ample. On appelle indice d'obstruction de V, noté $\omega(V)$:*

$$\omega(V) = \inf\{\deg(Z)\},$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des hypersurfaces irréductibles de S contenant V.

Par le plongement standard $\mathbb{G}_m^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, on obtient une hauteur projective h sur les points de $\mathbb{G}_m^n$, et un minimum essentiel $\hat{\mu}_{\text{ess}}$ sur les sous-variétés de $\mathbb{G}_m^n$. Amoroso et David démontrent la minoration suivante :

Théorème 3.4 *Soit V une sous-variété propre (et irréductible) de $\mathbb{G}_m^n$ de codimension k qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de $\mathbb{G}_m^n$. On a alors :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \tfrac{c(n)}{\omega(V)} \times (\log(3\omega(V)))^{-\lambda(k)},$$

où $c(n)$ est un réel strictement positif et $\lambda(k) = (9(3k)^{(k+1)})^k$.

Dans le cas des variétés abéliennes, on dispose déjà de résultats quantitatifs et inconditionnels, mais la dépendance en le degré n'est pas aussi bonne. On a (*confer* [DP02]) :

Théorème 3.5 *Soit A une variété abélienne de genre $g \geq 2$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, principalement polarisée par un fibré $\mathcal{M}$, et V une sous-variété algébrique de A qui n'est pas translatée d'une sous-variété abélienne. Alors :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{\min\{1; \mathcal{R}_{\text{inj}}\}^{2(b+1)}}{2^{11g^3}(g-k+1)\deg(V)^{2k(b+1)}},$$

où k désigne le nombre minimal de copies de $V - V$ dont la somme est une sous-variété abélienne de A , b la dimension de cette sous-variété abélienne et $\mathcal{R}_{\text{inj}}$ la plus petite norme de Riemann d'une période d'une conjuguée de A.

Le terme au numérateur, appelé rayon d'injectivité, est relié au terme de hauteur $h(A)$ (hauteur projective de l'origine dans le plongement associé à $\mathcal{M}^{\otimes 16}$) par le lemme "matriciel" de Masser (voir le lemme 6.8 de [DP02]). Cette minoration est monomiale inverse en le degré, alors que dans le cas torique, elle est linéaire inverse en l'indice d'obstruction (aux termes logarithmiques près), ce qui correspond à une minoration en $\deg(V)^{-1/k}$.

Remarquons enfin que l'hypothèse du théorème 3.5 (V n'est pas un translaté de sous-variété abélienne propre) est plus faible que son analogue torique dans le théorème 3.4 (V n'est pas *incluse* dans un translaté de sous-tore propre) ; cette différence se ressent dès qu'on obtient des résultats comparables au théorème 3.4 et on peut préciser la minoration sous l'hypothèse faible, en faisant intervenir la dimension du plus petit translaté de sous-tore propre contenant V (voir le corollaire 1.6 de [AD03]).

Résultats

On poursuit ici le travail commencé dans [Gal07], en vue d'obtenir une minoration, pour les sous-variétés de variétés abéliennes, comparable à celle connue dans le cas torique. Soit donc A une variété abélienne définie sur K un corps de nombres, et L un fibré ample et symétrique sur A. Soit de plus $\mathcal{A}$ un modèle entier de A sur $\mathcal{O}_K$. Les méthodes employées dans le cadre multi-elliptique laissaient espérer le même type de minoration en codimension $r \leq 2$ sous l'hypothèse suivante (on renvoie à *infra*, 3.2.1 pour plus de détails sur la réduction ordinaire, et à 3.2.3, sur la définition de la densité, qui est la densité *naturelle*) :

Hypothèse H1 Il existe une densité positive d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ en lesquels la fibre spéciale $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ est ordinaire.

Pour obtenir un résultat plus large, on a essayé de travailler avec des idéaux premiers ayant un autre type de réduction. Plusieurs obstructions sont apparues, nous forçant à faire l'hypothèse suivante sur $\mathcal{A}$ (voir *infra*, 3.2.2 pour plus de détails) :

Hypothèse H2 Il existe une densité positive d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ pour lesquels le p-rang de la fibre spéciale $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ est égal à 0 ou à g.

Il a été d'abord nécessaire de supposer que le p-rang est égal au rang de Hasse-Witt (ou est nul) pour trouver de bonnes propriétés métriques p-adiques pour A (p étant un premier de $\mathbb{Z}$), reliées au type de réduction modulo $\mathfrak{p}$, pour $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$ divisant p.

La preuve proprement dite, de nature diophantienne, nous a ensuite amené à travailler avec des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ pour lesquels la fibre $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ a un p-rang égal à 0 ou g. En effet, lorsque l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ n'est plus à réduction ordinaire, la propriété métrique obtenue est plus faible et on a besoin, en guise de compensation, d'un grand nombre de points de torsion se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$ (pour $\mathfrak{q}$ divisant $\mathfrak{p}$ dans une extension idoine). Ceci est vérifié si le p-rang est égal à 0.

On démontre le résultat conditionnel :

Théorème 3.6 *Soit A une variété abélienne définie sur K un corps de nombre. On suppose qu'il existe un modèle entier $\mathcal{A}$ de A vérifiant* ***H2****. Alors on a la propriété* $\boldsymbol{P}(A)$ *suivante : pour toute sous-variété V propre (et irréductible) de codimension $r \leq 2$ dans A, si V n'est pas contenue dans le translaté d'une sous-variété abélienne propre de A, on a :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{C(A)}{\omega(V)} \times (\log(3\deg(V)))^{-\lambda(r)},$$

où $C(A)$ est un réel strictement positif ne dépendant que de A et où $\lambda(r) = (16(2r)^{(r+1)})^r$.

La constante $C(A)$ est d'autant plus explicitable dans le contexte des pentes ; cependant, la méthode employée est coûteuse en terme de la hauteur de A et ne peut pas égaler les meilleures minorations obtenues par David et Philippon.

Les produits de courbes elliptiques, tout comme les variétés abéliennes CM, vérifient la propriété **H1**, qui implique clairement **H2**. Le théorème 3.6 généralise donc le principal résultat de [Gal07]. L'hypothèse **H1** est l'objet de la conjecture "folklorique" suivante :

Conjecture 3.7 *Pour toute variété abélienne A définie sur K un corps de nombres, quitte à étendre K, il existe un modèle entier $\mathcal{A}$ de A vérifiant* ***H1****.*

Sous cette conjecture, la propriété **P**(A) est vérifiée pour toute variété abélienne A définie sur K un corps de nombres. Remarquons qu'on peut même conjecturer, comme le fait Pink dans [Pin98], 7, que les premiers ordinaires sont en densité 1 (en étendant le corps de définition de A).

En dimension 1, pour une courbe elliptique E, le résultat est connu. Plus précisément, on sait que la densité de tels idéaux est 1 si E n'est pas CM (voir [Ser68], IV, 13), 1/2 si elle est CM.

La validité de **H1** a été étendue aux surfaces abéliennes par les travaux de Katz et Ogus (voir [Ogu82] 2.7, en remarquant par le théorème de Chebotarev que les premiers de degré 1 ont une densité positive). Des conditions suffisantes, portant sur les groupes de monodromie G_l (associés à chaque nombre premier l) de la variété abélienne, ont été données par Noot, puis Pink (voir [Noo95], 2 et [Pin98], 7).

Rappelons que la minoration fine du minimum essentiel permet d'obtenir des résultats en direction des conjectures formulées par Zilber sur les variétés semi-abéliennes (dans [Zil02]), puis Pink sur les variétés de Shimura mixtes (voir [Pin05], conjectures 1.2 et 1.3). Pour S un sous-ensemble de $\mathbb{G}_m^n$, on note :

$$S_\epsilon = \{xy, x \in S, y \in \mathbb{G}_m^n, h(y) \leq \epsilon\}.$$

En utilisant le théorème 3.4, Habegger a démontré le résultat suivant (voir [Hab06]) :

Théorème 3.8 *Soit C une courbe dans $\mathbb{G}_m^n$ qui n'est pas incluse dans le translaté d'un sous-tore propre, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $C \cap \mathcal{H}_\epsilon$ est fini, où :*

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\operatorname{codim} H = 2} H,$$

la réunion portant sur tous les sous-groupes algébriques de $\mathbb{G}_m^n$ ayant la codimension prescrite.

Ce théorème généralise à la fois le théorème 2 de [BMZ99] et la propriété de Bogomolov pour les courbes plongées dans les tores. Récemment, Maurin a démontré la conjecture de Zilber pour une courbe plongée dans un tore, en utilisant le théorème 3.8 et une inégalité de Vojta uniforme. Plus précisément, si C est une courbe et S un sous-ensemble de $\mathbb{G}_m^n$, notons :

$$E(C,S) = C \cap \bigcup_{\operatorname{codim}(B)=2} S \cdot B,$$

où la réunion porte sur les sous-tores de codimension indiquée. Maurin prouve d'abord (théorème 1.5 de [Mau07]) :

Théorème 3.9 *Soit C une courbe de $\mathbb{G}_m^n$ qui n'est pas incluse dans le translaté d'un sous-tore propre et Γ un sous-groupe de rang fini de $\mathbb{G}_m^n$. Alors il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble $E(C, \Gamma_\epsilon)$ soit fini.*

Et il en déduit :

Corollaire 3.10 *Soit C une courbe algébrique irréductible de $\mathbb{G}_m^n$ non incluse dans un sous-groupe algébrique propre. Alors $C \cap \mathcal{H}$ est fini.*

Ce corollaire améliore le résultat principal de [BMZ99], qui suppose que C n'est pas incluse dans un *translaté de sous-groupe algébrique propre.*

Le théorème 3.6 est donc la première étape, sous la conjecture 3.7, d'un programme qui permet d'attaquer la conjecture de Zilber-Pink sur les variétés abéliennes.

Plan de l'article

On démontre le théorème 3.6 en utilisant la méthode des pentes, formalisée par Bost dans [Bos96b]. La deuxième partie est consacrée à la démonstration d'une propriété p-adique obtenue par l'étude du groupe formel d'une variété abélienne en caractéristique p. On commence par faire quelques rappels sur le p-rang d'une variété abélienne, puis sur la théorie des schémas en groupes. On obtient ensuite un résultat métrique p-adique précis, pour les points de p-torsion de A se réduisant sur 0 modulo un idéal premier $\mathfrak{q}$ divisant p dans une extension convenable. Ce résultat suppose en principe le choix d'une base du tangent pour chaque idéal premier $\mathfrak{q}$ mais on démontre, à l'aide d'un argument de géométrie des nombres, que si on borne les premiers, il existe une base sur $\mathcal{O}_K$ de hauteur contrôlée dans laquelle toutes les propriétés p-adiques sont simultanéments vérifiées. On a cherché, dans cette partie, à obtenir les résultats les plus précis en fonction du p-rang.

Dans la troisième partie, on rappelle les définitions et résultats généraux de la théorie des pentes. Un premier fait assez inhabituel dans notre application de cette théorie est l'importance des estimations ultramétriques. Dans cette perspective, on utilise une version du théorème des pentes assez précise sur le plan ultramétrique. Puis on introduit les fibrés hermitiens qui seront utiles par la suite et on estime leur pente. La principale difficulté de cette partie réside dans la majoration de la pente maximale du fibré des sections d'un fibré ample sur une sous-variété de A (avec multiplicités), le fibré d'arrivée étant habituellement formé, dans la méthode des pentes, à partir d'un nombre fini de points. Cette majoration est obtenue en suivant une idée figurant dans la thèse de Chen ([Che06]). Les résultats de Bost et Künnemann ([BK06], améliorés par Chen en dimension ≥ 3 dans le chapitre 5 de sa thèse) concernant la pente maximale du produit tensoriel de deux fibrés hermitiens permettent de prendre en compte la multiplicité.

La preuve du théorème commence réellement dans la quatrième partie. On prend une sous-variété propre V d'une variété abélienne A qui n'est pas incluse dans un translaté de sous-variété abélienne et on lui associe un fermé de Zariski X en vue de la fin de la preuve ; on construit deux espaces vectoriels E et F et un morphisme de restriction entre ces espaces (paramétrés en fonction de l'indice d'obstruction de X et en fonction de A). Puis on fixe les paramètres (degré de l'espace de sections, multiplicités, bornes pour la norme des idéaux premiers utilisés) intervenant dans cette construction et on suppose par l'absurde que le minimum essentiel de X est majoré en fonction de ces paramètres. Dans toute cette partie et les suivantes, on travaille avec un plongement étiré, devenu classique dans les travaux diophantiens sur les variétés abéliennes pour passer de la hauteur projective à la hauteur de Néron-Tate.

Dans la partie suivante, on calcule les rangs et les normes des morphismes susceptibles de rentrer dans l'inégalité de pentes. On écrit ensuite cette inégalité, sous l'hypothèse que le morphisme soit injectif. On parvient rapidement à une contradiction. A ce stade du travail, on a montré que le minimum essentiel de X est correctement minoré *modulo l'injectivité du morphisme.*

On suppose donc par l'absurde, dans la sixième partie, que le morphisme n'est pas injectif. On commence par appliquer un lemme de zéros très général d'Amoroso et David. L'utilisation de ce lemme est suivie, comme dans les cas torique et multi-elliptique, d'une phase de dénombrement et d'un argument de descente, qui permettent d'obtenir une contradiction. Le travail sur l'injectivité du morphisme s'effectue *exceptionnellement* après l'utilisation de l'inégalité des pentes, d'abord car il est assez long, mais surtout parce qu'il comporte une itération (dans la phase de descente) qui nécessite d'avoir déjà écrit cette inégalité. Comme dans le cas multi-elliptique, on n'a pu adapter la phase de descente qu'en petite codimension : $r \leq 2$.

Constantes

Le théorème 3.6 montre l'existence d'une constante $C(A)$ ne dépendant que de A et impliquée dans la minoration du minimum essentiel. Au cours de ce travail, on introduira des constantes $c_1, \ldots, c_{22}$ ne dépendant que de A. Le choix des paramètres fera intervenir une constante C_0, dépendant uniquement de A elle aussi, qui sera prise *grande* par rapport aux constantes c_i $(1 \leq i \leq 22)$. La constante $C(A)$ s'exprimera alors simplement en fonction de C_0.

3.2 Un lemme clé p-adique sur les variétés abéliennes

Soit A une variété abélienne définie sur K un corps de nombres et soit $\mathcal{P}_A$ un ensemble de premiers bien choisi en fonction de A. Le but de cette partie est d'établir une inégalité p-adique concernant les points de p-torsion de A, pour $p \in \mathcal{P}_A$. On cherche à montrer, pour les variétés abéliennes, un résultat comparable à l'inégalité suivante, vraie pour tout premier p, toute racine p-ème de l'unité ξ et toute place v/p d'un corps de nombres quelconque contenant ξ :

$$|\xi - 1|_v \leq p^{-1/p}.$$

Cette inégalité, conséquence d'une propriété de ramification bien connue sur les corps cyclotomiques (voir [IR80], Proposition 13.2.7), a un analogue satisfaisant sur les courbes elliptiques pour les premiers de bonne réduction ordinaire, s'il n'y a pas de ramification initiale ; dans le cas des premiers supersinguliers, on doit remplacer $1/p$ par $1/p^2$ (voir [Gal07], 4.1). On s'attend donc à ce que le résultat obtenu sur A dépende de la réduction de A modulo $\mathfrak{p}$, un idéal de $\mathcal{O}_K$. Deux invariants associés à une variété abélienne en caractéristique positive apparaissent naturellement au cours de la discussion, à savoir le rang de la matrice de Hasse-Witt et son rang stable (ou p-rang de la variété). On obtient une inégalité assez précise sous l'hypothèse que ces deux invariants sont égaux, puis on trouve une base du tangent dans laquelle les propriétés p-adiques associées à des premiers différents (et de norme bornée) sont vraies simultanément.

Dans la suite de ce travail, on n'utilisera pas ces estimations p-adiques dans toute leur précision. Dans ces conditions, le choix de la base adaptée n'est pas capital ; il est par ailleurs peu coûteux puisqu'il n'ajoute qu'un terme négligeable dans le calcul de pente du sous-paragraphe 3.3.2.

L'intérêt de ce résultat p-adique, dans la mise en œuvre de la méthode des pentes, sera d'estimer certaines normes ultramétriques d'un morphisme de restriction ; cette estimation est le point crucial de la preuve et correspond à la phase d'extrapolation dans une preuve classique de transcendance.

3.2.1 Le p-rang d'une variété abélienne

On fixe pour ce paragraphe et le suivant un premier p et une variété abélienne A définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q \subset k = \overline{\mathbb{F}}_p$. Commençons par donner la définition du p-rang, à travers la proposition suivante (*confer* [Mum74], page 64) :

Proposition 3.11 *Le sous-groupe $A[p]$ des points de p-torsion sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est de cardinal p^α, où $\alpha \in [0; g]$ est un entier. De plus, le groupe $A[p]$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\alpha$. Cet entier α sera appelé p-rang de A.*

Preuve
L'application linéaire $[p]^*$ induite sur le tangent en l'origine 0 de A par $[p]$ est la multiplication par p, donc est nulle en caractéristique p. Par conséquent, si ω est une différentielle invariante sur A, $[p]^*\omega$ est nulle en 0 ; comme cette différentielle est encore invariante, on en déduit qu'elle est nulle partout. Les différentielles invariantes sur A engendrent le faisceau des formes différentielles Ω^1_A sur A, donc elles engendrent le $k(A)$-module $\Omega_{k(A)}$ des différentielles à coefficients dans $k(A)$, et l'application induite par $[p]$, encore notée $[p]^*$, est nulle sur $\Omega_{k(A)}$. On en déduit que l'image de $k(A)$ par $[p]$ est incluse dans $k(A)^p$, et par suite son degré inséparable est plus grand que p^g. Le cardinal de $A[p]$ étant égal au degré séparable de $[p]$, le premier point est démontré. Les éléments non nuls de $A[p]$ sont exactement d'ordre p, ce qui donne le second point.

$\square$

Remarques Le p-rang de A est aussi appelé rang stable de A (en raison de son lien avec la matrice de Hasse-Witt de A, explicité *infra*, 3.2.2). S'il est égal à g, la variété A est dite *ordinaire*.

On peut maintenant introduire les morphismes de Frobenius Φ_{p^j}, pour $j \geq 1$ un entier. On définit d'abord Φ_{p^j} sur $\mathrm{Spec}(k)$ comme étant l'identité sur l'espace topologique réduit à un point et l'élévation à la puissance p^j sur k. On note ensuite $A^{(p^j)}$ le schéma sur $\mathrm{Spec}(k)$ défini comme le *tiré en arrière* de A par l'action du Frobenius Φ_{p^j} sur $\mathrm{Spec}(k)$. Par construction, ce schéma est une variété abélienne.

Définition 3.4 *Le morphisme de Frobenius :*

$$\Phi_{p^j} : A \to A^{(p^j)}.$$

est défini par l'élévation à la puissance p^j sur le faisceau structural.

Remarque Si la variété abélienne A est définie sur $\mathbb{F}_q$, avec $q = p^j$, alors le Frobenius Φ_{p^j} est un morphisme de A dans A.

Le schéma $A^{(p^j)}$ est une variété abélienne et le Frobenius Φ_{p^j} une isogénie purement inséparable de degré p^{jg} (voir [MvdG07], page 72). On vient de montrer que le degré inséparable de $[p]$ est supérieur à p^g. Dans le cas des courbes elliptiques, il est facile de prouver que $[p]$ se factorise à travers Φ_p ou Φ_{p^2} car son degré inséparable est exactement le degré d'un de ces deux morphismes. La factorisation par Φ_p est vraie en général, et on l'obtient en construisant explicitement le morphisme avec lequel on compose le Frobenius, appelé “Verschiebung” (*confer* [MvdG07], pages 74 et 104) :

Lemme 3.12 *Il existe une isogénie $V : A^{(p)} \to A$ telle que $[p] = V \circ \Phi_p$. De plus, V et Φ_p sont duales l'une de l'autre au sens suivant : si on note $\widehat{A}$ la duale de A, on a une décomposition :$[p]_{\widehat{A}} = V_{\widehat{A}} \circ \Phi_{p,\widehat{A}}$ avec :*

$$\widehat{V} = \Phi_{p,\widehat{A}} \text{ et } \widehat{\Phi_p} = V_{\widehat{A}}.$$

Comme le morphisme de Frobenius est purement inséparable, le p-rang n'est autre que le degré séparable de V. Si $\alpha = g$, l'isogénie V est séparable et sa différentielle en 0 est inversible. On veut relier plus généralement α à la différentielle de V en 0 ; ceci nous amène à étudier la structure de *schéma en groupe* du sous-groupe $A[p]$ de A.

3.2.2 Schémas en groupe

On fait ici quelques rappels sur la théorie des schémas en groupes ; on peut trouver ces résultats dans [Mum74], partie III.

Définition 3.5 *Un schéma en groupe G sur k est un schéma muni d'un morphisme de multiplication $m : G \times G \to G$, d'un morphisme d'inversion $i : G \to G$ et d'un élément neutre $e : \mathrm{Spec}(k) \to G$ vérifiant les axiomes :*

$$m \circ (m \times \mathrm{Id}_G) = m \circ (\mathrm{Id}_G \times m) : G \times G \times G \to G,$$

$$m \circ (e \times \mathrm{Id}_G) = j_1 : \mathrm{Spec}(k) \times G \to G,$$

$$m \circ (\mathrm{Id}_G \times e) = j_2 : G \times \mathrm{Spec}(k) \to G,$$

et :

$$e \circ \pi = m \circ (\mathrm{Id}_G \times i) = m \circ (i \times \mathrm{Id}_G) : G \to G,$$

où $\pi : G \to \mathrm{Spec}(k)$; $j_1 : \mathrm{Spec}(k) \times G \simeq G$ et $j_2 : G \times \mathrm{Spec}(k)$ sont les isomorphismes canoniques.

Soit G un schéma en groupe. Son algèbre de Lie est le k-espace vectoriel des champs de vecteurs invariants par m et elle est munie de la fonction de Hasse-Witt, qui associe à une dérivation D la dérivation D^p (p-ème itérée de D). C'est une application $\mathbb{F}_p$-linéaire (*i.e.* additive et linéaire sous la multiplication par un élément de $\mathbb{F}_p$).

On définit $\widehat{G}$ le dual (de Cartier) de G d'un schéma en groupe affine $\mathrm{Spec}(R)$ en prenant le dual R^* de R et en le munissant d'une comultiplication et d'un idéal d'augmentation par dualité.

On suppose maintenant que G est un schéma en groupe fini et commutatif. On dit que G est de type l (resp. de type r) si l'espace sous-jacent est constitué d'un seul point (resp. si G est réduit). On dit que G est de type (x, y) si G est de type x et $\widehat{G}$ est de type y. Le schéma G se décompose alors de façon unique en un produit :

$$G = G_{r,r} \times G_{r,l} \times G_{l,r} \times G_{l,l},$$

où $G_{x,y}$ est de type (x, y) (pour plus de détails, voir [Mum74], §14).

Pour le schéma en groupe $A[p]$ qui nous intéresse ici, le type $G_{r,r}$ est trivial car $A[p]$ est de cardinal une puissance de p. Plus précisément, on a la proposition :

Proposition 3.13 *On a l'isomorphisme de schémas en groupes :*

$$A[p] \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\alpha \times (\mu_p)^\alpha \times G_1^0,$$

où α est le p-rang de A, $\mu_p = \mathrm{Spec}\big(k[X]/(X^p - 1)\big)$ et G_1^0 est de type (l, l).

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compte tenu des structures de groupes de $A[p^n]$ et du dual $\widehat{A[p^n]}$, qui donnent les composantes réduites de ces deux schémas en groupes, et comme le dual du noyau de l'isogénie $[p]$ est le noyau de l'isogénie duale (*confer* [Mum74], page 143), on a la décomposition :

$$A[p^n] \simeq (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\alpha \times \left(\widehat{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}\right)^\beta \times G_n^0,$$

pour un certain entier β et un schéma en groupe local G_n^0.

L'algèbre de fonctions associée à $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est son algèbre de groupe et, en notant X l'évaluation en $1 \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, on voit que l'algèbre duale est isomorphe à :

$$\mathrm{Spec}\big(k[X]/(X^{p^n} - 1)\big).$$

On en déduit que : $\widehat{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}} \simeq \mu_{p^n}$. De plus, α et β sont permutés par passage de A à $\widehat{A}$ et puisqu'il existe une isogénie $f : A \to \widehat{A}$, en notant K le cardinal de son noyau, on a :

$$f(A[p^n]) \subset \widehat{A}[p^n] \quad \text{donc} \quad p^{n\alpha} \leq K p^{n\beta}.$$

En faisant varier n, on obtient : $\alpha \leq \beta$. Mais comme la duale de $\widehat{A}$ est isomorphe à A (*confer* [Mum74], page 132), on obtient : $\alpha = \beta$.

□

Remarque Les schémas en groupes de type local-local sont les plus difficiles à comprendre. Pour plus de détails, utilisant la théorie des vecteurs de Witt, on renvoie par exemple à [Pin04] (en particulier §16 et §22).

On peut maintenant faire le lien entre la différentielle de V en 0 et le p-rang :

Proposition 3.14 *Soit Ψ la différentielle de V en 0. Alors le p-rang de A est le rang de Ψ^g.*

Preuve

On passe aux algèbres de Lie dans la proposition précédente et on observe que l'application linéaire $[p]^*$ est la multiplication par p, donc est nulle sur $\mathrm{Lie}(A)$. En se limitant à la partie locale en 0, on a :

$$\mathrm{Lie}(A) = \mathrm{Lie}(A[p]) = \mathrm{Lie}(\mu_p)^\alpha \oplus \mathrm{Lie}(G_1^0).$$

En prenant comme base de $\mathrm{Lie}(\mu_p)$ la dérivation $X\partial/\partial X$, on observe que la fonction de Hasse-Witt est l'identité sur $\mathrm{Lie}(\mu_p)^\alpha$, alors qu'elle est nilpotente sur la partie locale-locale. De plus, par l'isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Lie}\widehat{A} \simeq H^1(A, \mathcal{O}_A),$$

la fonction de Hasse-Witt correspond à l'application induite par le Frobenius sur $\mathcal{O}_A$ (*confer* [Mum74], page 148), qui correspond par dualité à la différentielle de V sur le tangent en 0. Il existe donc une décomposition du tangent en 0 : $t_A = V_s + V_n$ laissée stable par Ψ telle que $\Psi_{|V_s}$ soit un isomorphisme et $\Psi_{|V_n}$ soit nilpotente ; de plus, l'espace vectoriel V_s est de dimension α. En itérant g fois l'application Ψ, la partie nilpotente s'annule et on en déduit que le p-rang est le rang de Ψ^g.

□

Remarques On appelle composante semi-simple de Ψ l'espace vectoriel V_s. Cette composante semi-simple est l'image de Ψ^g, donc est définie sur $\mathbb{F}_q$.
Le p-rang d'une variété abélienne n'est pas toujours égal au rang de la matrice de Hasse-Witt. Si on fixe $\alpha \leq g - 1$, on peut même montrer (voir [Kob75], theorem 7, page 163) que sur l'espace de module des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g avec structure de niveau fixée sur k, les variétés abéliennes ayant une matrice de Hasse-Witt de rang $g - 1$ sont Zariski-denses dans le fermé des variétés abéliennes dont le p-rang est plus petit que α.
Si le p-rang est égal à $g - 1$ ou g, il est automatiquement égal au rang de la matrice de Hasse-Witt.

En général, le p-rang et le rang de la matrice de Hasse-Witt sont distincts, et la partie nilpotente fait obstruction pour contrôler efficacement la norme p-adique de tous les paramètres. On devra donc par la suite travailler avec des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de bonne réduction tels que la variété abélienne modulo $\mathfrak{p}$ ait ces deux invariants égaux.

Hypothèse On suppose maintenant que le p-rang de A est égal à 0 ou au rang de Ψ.

On choisit un système de paramètres $(x_1, \ldots, x_g)$ associés à une base de différentielles invariantes, tels que $(x_1, \ldots, x_\alpha)$ soit une base de $\mathrm{Im}\Psi^g$ (qui est égale à $\mathrm{Im}\Psi$ sauf éventuellement si le rang est nul). Notons $\widehat{\mathcal{O}}_{0,A}$ le groupe formel associé à A en 0 sur $\mathbb{F}_q$. On a ([HS00], page 268) :

$$\widehat{\mathcal{O}}_{0,A} \simeq \mathbb{F}_q[[x_1, \ldots, x_g]].$$

On note $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_g)$ le g-uplet de séries formelles image de l'isogénie V dans le groupe formel. On note aussi Φ_α le morphisme de $\mathbb{F}_q[[x_1, \ldots, x_g]]$ qui agit sur les paramètres par :

$$\begin{aligned} x_i &\to x_i \quad \text{si} \quad i \leq \alpha \\ x_i &\to x_i^p \quad \text{si} \quad i > \alpha. \end{aligned}$$

Corollaire 3.15 *Il existe un g-uplet de séries formelles $\boldsymbol{U} = (U_1, \ldots, U_g)$ tel que $\boldsymbol{V}$ se factorise : $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \circ \Phi_\alpha$ et tel que $d\boldsymbol{U}$ soit inversible.*

Preuve

Si le p-rang est nul, on note $\mathbb{K}$ la clôture séparable de $V^*k(A)$ dans $k(A)$. Comme $k(A)^{p^2} \subset k(A)$ est purement inséparable, et par définition de la clôture séparable, on a l'inclusion : $k(A)^{p^2} \subset \mathbb{K}$ puis égalité en comparant les degrés de ces extensions. La factorisation sur les corps de fonctions induit une factorisation : $\mathbf{V} = \mathbf{U} \circ \Phi_{p^2}$, où $\mathbf{U}$ est séparable. Sa différentielle est donc inversible (voir [Lan02], VIII, proposition 5.5).

Supposons maintenant $\alpha > 0$. Pour tout entier $i \in [1, g]$, comme V est une isogénie, la forme différentielle dx_i^*V est encore une différentielle invariante, donc se décompose :

$$dx_i^*V = \sum_{j=1}^{g} \alpha_{i,j} dx_j,$$

où les $\alpha_{i,j}$ sont constants et donnés par la i-ème colonne de la matrice de Ψ dans la base associée à $(x_1, \ldots, x_g)$. On en déduit par intégration que les seuls termes non-nuls dans les V_i sont les termes linéaires ou des monômes en $(x_1^p, \ldots, x_g^p)$. Par choix de la base, les paramètres $(x_{\alpha+1}, \ldots, x_g)$ sont absents de la partie linéaire. On a donc bien la décomposition voulue. L'application Φ_α est purement inséparable et son degré est le rang de :

$$k[[x_1, \ldots, x_g]]/(x_{\alpha+1}^p, \ldots, x_g^p),$$

donc :

$$\deg\Phi_\alpha = \deg_i \Phi_\alpha = p^{g-\alpha}.$$

En comparant les degrés séparables et inséparables, on voit que $\mathbf{U}$ est séparable, et que sa différentielle est inversible.

$\square$

3.2.3 Retour en caractéristique nulle

Le but de ce paragraphe est de traduire la proposition précédente en un résultat p-adique pour les points de torsion d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres. Soit donc A une variété abélienne de dimension g définie sur un corps de nombres K, munie d'un fibré L ample et symétrique, et soit $\mathcal{A}$ un modèle entier de A sur $\mathcal{O}_K$. On sait par un théorème de Lefschetz (voir [HS00], page 105) que le fibré $L^{\otimes 3}$ est très ample. Rappelons que pour tout nombre premier p, il y a p^{2g} points de p-torsion dans $A(\overline{K})$. Pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ de bonne réduction divisant p, la fibre spéciale $\mathcal{A}_\mathfrak{p}$ ne contient plus que p^α points de p-torsion, où α est le p-rang de la fibre spéciale.

Par la suite, on fera implicitement un certain nombre de choix sur A (une base de sections globales pour $L^{\otimes 3}$, une base de dérivations algébriques, une base d'ouverts affines) et par abus de langage, on dira qu'une constante ne dépend que de A si elle dépend de A et de ces choix.

Précisons d'abord que si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de K' une extension finie de K, dont la projection sur $\mathbb{Z}$ est p, on choisit la normalisation suivante pour la valuation $\mathfrak{q}$-adique :

$$|p|_\mathfrak{q} = p^{-n_\mathfrak{q}}, \text{ où } n_\mathfrak{q} \text{ est le degré local : } [K'_\mathfrak{q} : \mathbb{Q}_p].$$

Cette normalisation permet d'écrire plus simplement la formule du produit et la hauteur d'un morphisme, qui intervient dans les inégalités de pentes.

Les premiers de réduction ordinaire (*i.e.* les premiers de bonne réduction pour lesquels le p-rang est égal à g) sont ceux pour lesquels les propriétés métriques sont les meilleures. Dans le cas d'une courbe elliptique E, on sait qu'ils sont de densité 1 si E n'est pas à multiplication complexe ; et qu'ils sont de densité $1/2$ si E est à multiplication complexe. En dimension supérieure, on ne connait aucun résultat de densité comparable. On va donc travailler avec un ensemble de premiers ayant même type de réduction (pas nécessairement ordinaire) et de densité positive. On définit la densité naturelle pour les idéaux premiers de la façon suivante :

Définition 3.6 *Soit $\mathcal{Q}$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}$ des idéaux premiers de $\mathcal{O}_K$. On dit que $\mathcal{Q}$ a une densité naturelle d si le quotient :*

$$\frac{|\{\mathfrak{q} \in \mathcal{Q}, \boldsymbol{N}(\mathfrak{q}) \leq x\}|}{|\{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}, \boldsymbol{N}(\mathfrak{p}) \leq x\}|}$$

tend vers d quand $x \to \infty$.

Remarque La fonction **N** est la norme sur les idéaux (définie dans [Sam03] : III, 5).

La loi d'addition de A est donnée sur chaque ouvert affine par des polynômes bihomogènes de degré $(2,2)$ (*confer* [LR85] ou [DP02], proposition 3.7) dont les coefficients sont de hauteur bornée uniquement en fonction de A. On a donc, si on note $(x_k)_k$ l'ensemble de ces coefficients :

$$\forall k \quad : \quad |x_k|_{\mathfrak{p}} \leq 1, \tag{3.1}$$

sauf pour un nombre fini d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ (ne dépendant que de A).

De plus, si on fixe une base de dérivations algébriques $(\partial_1, \ldots, \partial_g)$ sur A (orthonormale pour la forme de Riemann associée au fibré $L^{\otimes 3}$) on a (*confer* [Dav91]) :

Théorème 3.16 *Pour toute fonction abélienne f_i sur A et pour toute dérivation ∂_j :*

$$\partial_j f_i = \sum_{k,l} y_{k,l}^{i,j} f_k f_l,$$

où les f_i sont une base de fonctions abéliennes sur A. De plus, les $y_{k,l}^{i,j}$ sont des nombres algébriques, de hauteur bornée uniquement en fonction de A.

Preuve

La preuve de [Dav91], théorème 4.1, est donnée pour une base bien spécifique, la base de dérivation de Shimura, sous l'hypothèse que la polarisation est principale. Le résultat obtenu est alors effectif. Ses arguments s'adaptent sans peine pour obtenir le résultat qualitatif dont on a besoin dans la généralité indiquée. Rappelons-en les étapes.

On commence par observer que, si on fixe deux fonctions thêta (θ_0, θ_1) telles que : $f_i = \theta_1/\theta_0$, on a :

$$\theta_0^2 \partial_j (\frac{\theta_1}{\theta_0}) \in \Gamma(A, L^{\otimes 2}).$$

Puis (comme L est associée à un plongement projectivement normal), on montre que le morphisme :

$$\Gamma(A, L)^{\otimes 2} \longrightarrow \Gamma(A, L^{\otimes 2})$$

est surjectif.

On a donc l'écriture attendue, mais avec les $y_{k,l}^{i,j}$ dans $\mathbb{C}$, et comme la base de dérivation est algébrique, on en déduit que les $y_{k,l}^{i,j}$ le sont aussi. Ces coefficients étant en nombre fini, on peut trouver une borne pour leur hauteur ne dépendant que de A.

$\square$

En appliquant ce théorème à une base de sections de $L^{\otimes 3}$, il en résulte que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ sauf un nombre fini (ne dépendant que de A) :

$$\forall (i,j,k,l) \quad : \quad |y_{k,l}^{i,j}|_{\mathfrak{p}} \leq 1. \tag{3.2}$$

Les premiers de mauvaise réduction pour A sont en nombre fini, ainsi que les premiers de $\mathbb{Z}$ se ramifiant dans $\mathcal{O}_K$. On pose $\mathcal{P}_{A,0}$ l'ensemble des premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$ de bonne réduction, vérifiant (3.1) et (3.2), tels que si $(p) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$, on a : $e_{\mathfrak{p}/p} = 1$, et tels que :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_{A,0}} \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Comme la même somme indexée par $\mathbb{N}^*$ converge, il suffit d'exclure un ensemble fini (absolu) de premiers pour que cette condition soit vérifiée. L'ensemble $\mathcal{P}_{A,0}$ est de densité naturelle égale à 1, et sa construction ne dépend que de A et K.

On fait maintenant l'hypothèse suivante sur $\mathcal{A}$:

Hypothèse H3 Il y a une densité $c_0 > 0$ d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ pour lesquels :
- soit le p-rang de $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ est égal à 0,
- soit il est non-nul et égal au rang de la matrice de Hasse-Witt.

Par le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe un entier k tel que la densité naturelle d'idéaux premiers de $\mathcal{P}_{A,0}$ vérifiant **H3** et pour lesquels la fibre spéciale a un p-rang égal à k est supérieure ou égale à $\frac{c_0}{g+1}$. On choisit un tel entier et on le note α. On note $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{P}_{A,0}$ en lesquels la variété $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ a un p-rang égal à α. De plus, quitte à diviser la densité de cet ensemble par $[K : \mathbb{Q}]$, on peut supposer que deux idéaux premiers distincts de $\mathcal{P}_A$ ont des normes, donc des projections sur $\mathbb{Z}$, distinctes. Dans les cas non ordinaires, on obtient une inégalité métrique moins bonne. Cette perte sera compensée, en p-rang égal à 0, par le plus grand nombre de points de torsion se réduisant sur 0.

On peut maintenant traduire le corollaire précédent en propriété p-adique. Soit $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$ un idéal premier et $p = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$. Par choix de $\mathcal{P}_A$, la fibre spéciale $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ est lisse. Soit $\Psi_{\mathfrak{p}}$ la différentielle du Verschiebung sur $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$. Par la discussion du paragraphe précédent, on peut trouver une base de paramètres algébriques en l'origine de A :

$$t_{\mathfrak{p},1}, \ldots, t_{\mathfrak{p},g}$$

(*i.e.* dont la projection est une base de $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$, où $\mathfrak{m}_0$ est l'idéal maximal correspondant à l'origine de A) telle que son image par réduction modulo $\mathfrak{p}$:

$$\tilde{t}_{\mathfrak{p},1}, \ldots, \tilde{t}_{\mathfrak{p},g}$$

soit encore une base de paramètres algébriques, avec :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}\Psi_{\mathfrak{p}}^g & = & \mathrm{Vect}(\tilde{t}_{\mathfrak{p},1},\ldots,\tilde{t}_{\mathfrak{p},\alpha}), \\ \mathrm{Ker}\Psi_{\mathfrak{p}}^g & = & \mathrm{Vect}(\tilde{t}_{\mathfrak{p},\alpha+1},\ldots,\tilde{t}_{\mathfrak{p},g}). \end{array}$$

On note $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ l'anneau de valuation associé à $\mathfrak{p}$. Il lui correspond par tensorisation :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} := \mathcal{A} \times_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K} \mathrm{Spec}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}},$$

et la section nulle $\epsilon_{\mathfrak{p}}$. On note $\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}$ le complété le long de $\epsilon_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{A}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}$. La multiplication par $[p]$ est donnée sur le groupe formel par un g-uplet de séries formelles : $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_g)$ et par réduction modulo $\mathfrak{p}$, on obtient un g-uplet de séries formelles : $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{F}_1, \ldots, \tilde{F}_g)$. La décomposition : $[p]_{\mathfrak{p}} = V_{\mathfrak{p}} \circ \phi_{\mathfrak{p}}$ de la multiplication par p sur la fibre spéciale induit une décomposition :

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{t}}_{\mathfrak{p}}) = \mathbf{V}_{\mathfrak{p}}(\tilde{\mathbf{t}}_{\mathfrak{p}}^p),$$

où $\tilde{\mathbf{t}}_{\mathfrak{p}}^p = (\tilde{t}_{\mathfrak{p},1}^p, \ldots, \tilde{t}_{\mathfrak{p},g}^p)$ est l'image de $\tilde{\mathbf{t}}_{\mathfrak{p}}$ par le Frobenius.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.17 *Si P est un point de p-torsion se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$, pour une place $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ dans un corps de définition de P, on a :*

$$\forall 1 \leq i \leq \alpha : |t_{\mathfrak{p},i}(P)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-n_{\mathfrak{q}}/p},$$

et :

$$\forall \alpha < i \leq g : |t_{\mathfrak{p},i}(P)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-n_{\mathfrak{q}}/p^2}.$$

Preuve

Soit P se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$, pour $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ dans un corps de définition de P. On sait déjà que :

$$\forall\ 1 \leq i \leq g : |t_{\mathfrak{p},i}(P)|_{\mathfrak{q}} < 1.$$

De plus, le morphisme $[p]$ en P est donné par le g-uplet de séries formelles $\mathbf{F}$ appliquées au système de paramètres (voir [HS00], page 272). On en déduit :

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{t}_{\mathfrak{p}}(P) = 0.$$

D'après le corollaire 3.15, on a une factorisation : $\mathbf{V}_{\mathfrak{p}} = \mathbf{U}_{\mathfrak{p}} \circ \Phi_{\alpha,\mathfrak{p}}$, et la différentielle de $\mathbf{U}_{\mathfrak{p}}$ est inversible. En utilisant la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{F}$ et les propriétés de base d'une loi de groupe formel (rappelées dans [HS00], page 269), on voit que $\mathbf{F}$ est donnée par :

$$\mathbf{F}(\mathbf{t}_{\mathfrak{p}}) = p\mathbf{t}_{\mathfrak{p}} + \mathbf{G}(\mathbf{t}_{\mathfrak{p}}) + \mathbf{H} \circ \Phi_{\alpha}(\mathbf{t}_{\mathfrak{p}}^p).$$

Le g uplet de séries formelles $\mathbf{G}$ a ses coefficients dans $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ et ses premiers termes sont quadratiques ; le g-uplet $\mathbf{H}$ a ses coefficients inversibles modulo $\mathfrak{p}$ et sa différentielle est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Soit $i_0 \in [1, g]$ tel que $|t_{\mathfrak{p},i_0}(P)|_{\mathfrak{q}}$ soit maximal. En inversant la différentielle, et par choix de i_0, on obtient :

$$t_{\mathfrak{p},i_0}(P)^{p^{n_{i_0}}} \in \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}},$$

où $n_{i_0} = 1$ si $i_0 \leq \alpha$ et $n_{i_0} = 2$ sinon. Comme l'indice de ramification $e_{\mathfrak{p}/p}$ vaut 1 et par définition de i_0, on en déduit que pour tout $i \leq g$:

$$|t_{\mathfrak{p},i}(P)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-n_{\mathfrak{q}}/p^2}.$$

Ceci étant démontré, on est assuré que les termes non-linéaires dans $\mathbf{H}$ donnent une norme $\mathfrak{p}$-adique plus petite que 1, et n'interfèrent pas avec le terme linéaire. On obtient donc, cette fois, pour tout $i \leq \alpha$:

$$t_{\mathfrak{p},i}(P)^p \in \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}},$$

et la proposition est entièrement démontrée.

□

Remarque Puisque la ramification initiale : $e_{\mathfrak{p}/p} = 1$ et le sous-groupe des points de p-torsion se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$ est galoisien de cardinal inférieur à $p^{2g-\alpha}$, le théorème de Raynaud (corollaire 3.4.4 de [Ray74]) donne :

$$|t_{\mathfrak{p},i}(P)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-n_{\mathfrak{q}}/p^{(2g-\alpha)}},$$

pour tout $i \leq g$. La théorie galoisienne ne suffit donc pas ici à démontrer la propriété métrique, alors qu'elle donne les mêmes résultats que l'approche des groupes formels dans le cas multi-elliptique.

On pose maintenant : $n_\alpha = 1$ si $\alpha = g$ et $n_\alpha = 2$ sinon. On choisit un système de paramètres en 0 : $(t_1, \ldots t_g)$ associé à une base orthonormale de t_A, le tangent de A en l'origine, pour la forme de Riemann. On a immédiatement le corollaire :

Corollaire 3.18 *Si P est un point de p-torsion se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$, pour une place $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ dans un corps de définition de P, on a :*

$$\forall 1 \leq i \leq g : |t_i(P)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-n_{\mathfrak{q}}/p^{n_\alpha}}.$$

3.2.4 Base adaptée pour le tangent

On montre dans ce paragraphe comment améliorer le corollaire précédent et trouver une base entière du tangent dans laquelle les propriétés p-adiques de la proposition 3.17 seront simultanément vraies, pour un nombre fini d'idéaux premiers, de norme bornée par un entier N. La hauteur des éléments de la base sera bornée par une fonction explicite de N.

On note t_A l'espace tangent de A en l'origine et on le munit de sa base canonique $(f_1, \ldots, f_g)$ pour le produit scalaire hermitien induit par la forme de Riemann. A tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$, on peut associer une base orthonormale $\mathbf{e}_{\mathfrak{p}} = (e_{\mathfrak{p},1}, \ldots, e_{\mathfrak{p},g})$ de t_A dans laquelle on dispose de bonnes propriétés métriques (par la proposition 3.17). On veut trouver une base dans laquelle toutes les propriétés $\mathfrak{p}$-adiques sont lisibles simultanément, pour $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A$. Ceci est possible si on borne dès maintenant la norme des premiers avec lesquels on travaille. Soit donc N un entier ; on suppose $N \geq g^2$ et on note :

$$\mathcal{P}_{A,N} = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A, \mathbf{N}(\mathfrak{p}) \leq N\}.$$

On définit enfin la hauteur d'un vecteur $x \in K^g$ comme le maximum des hauteurs de ses coordonnées.

On commence par démontrer un lemme de géométrie des nombres, qui fournit des éléments de petite hauteur dans une classe modulo $\mathfrak{b}$, pour $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathcal{O}_K$.

Lemme 3.19 *Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathcal{O}_K$ de norme $\beta \in \mathbb{N}$. Il existe une constante c_1 ne dépendant que de K telle que : pour toute classe c modulo $\mathfrak{b}$, il existe un élément x de $\mathcal{O}_K$ dans c de hauteur plus petite que* $\log\beta + c_1$.

Preuve

Au cours de la preuve, on notera par commodité : $n = [K : \mathbb{Q}]$. On commence par plonger canoniquement K dans $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$ par un morphisme qu'on appelle σ ; on note r_1 le nombre de plongements réels et r_2 le nombre de plongements complexes à conjugaison près. Le module $\sigma(\mathfrak{b})$ est alors un sous-réseau de $\sigma(\mathcal{O}_K)$ et son covolume est donné par (*confer* [Sam03], 4.2) :

$$\det(\sigma(\mathfrak{b})) = 2^{-r_2}|d_K|^{1/2}\beta,$$

où d_K est le discriminant absolu de K. On applique le second théorème de Minkowski au réseau $\sigma(\mathfrak{b})$ et à l'ensemble :

$$B = \{b = (y_1, \ldots, y_{r_1}, z_1, \ldots, z_{r_2}) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}, \|b\| = \sum_{i=1}^{r_1} |y_i| + 2\sum_{j=1}^{r_2} |z_j| \leq 1\},$$

qui est compact, convexe et symétrique par rapport à l'origine. Son volume est donné par la formule ([Sam03], 4.2) :

$$\mathrm{vol}(B) = \frac{2^{r_1-r_2}\pi^{r_2}}{n!}.$$

En notant, pour $1 \leq i \leq n$:

$$\lambda_i = \inf\{\lambda,\ \exists\ i \text{ vecteurs de } \sigma(\mathfrak{b}) \text{ libres dans } \lambda B\},$$

on a l'inégalité des minima successifs :

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n \mathrm{vol}(B) \leq 2^n \det\sigma(\mathfrak{b}).$$

On souhaite majorer le dernier de ces minima. Pour y parvenir, on remarque que la norme d'un élément x de $\mathcal{O}_K$ est ≥ 1 (c'est la valeur absolue du coefficient constant de son polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$), et on en déduit, par l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\sigma_i(x)|\Big)^n \geq n^n \mathbf{N}(x) \geq n^n.$$

Ceci permet de minorer le premier minimum : $\lambda_1 \geq n$, et par suite :

$$n^{n-1}\lambda_n \leq \lambda_1^{n-1}\lambda_n \leq \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \frac{2^n \det\sigma(\mathfrak{b})}{\mathrm{vol}(B)}.$$

Soit c une classe de $\mathcal{O}_K/\mathfrak{b}$; son image par σ est une classe du quotient $\sigma(\mathcal{O}_K)/\sigma(\mathfrak{b})$. Comme la norme $\|.\|$ vérifie l'inégalité triangulaire, on peut choisir un représentant x de c tel que $\|x\| \leq n\lambda_n$. De plus, pour un point entier, seules les contributions archimédiennes interviennent dans la hauteur. Notons I l'ensemble des indices pour lesquels $|\sigma_i(x)| \geq 1$. Par concavité de la fonction log :

$$h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i \in I} n_{\sigma_i} \log|x|_{\sigma_i} \leq \log\Big(\frac{1}{|I|}\sum_{i \in I} n_{\sigma_i}|x|_{\sigma_i}\Big) \leq \log(\|x\|) \leq \log(n\lambda_n).$$

On peut enfin conclure, à l'aide de l'expression du dernier minimum, et des formules donnant le déterminant du sous-réseau et le volume de B :

$$h(x) \leq \log\beta + (n+1)\log 2 + \frac{1}{2}\log|d_K|.$$

□

Le lemme précédent, allié au lemme des restes chinois, permet alors de trouver une bonne base simultanée, de hauteur correctement contrôlée :

Proposition 3.20 *Il existe $(e_1, \dots, e_g)$ une base orthogonale de $t_A(K)$, correspondant par dualité à un système de paramètres $(t_1, \dots, t_g)$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{A,N}$ tel que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, si P est un point de p-torsion se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$, pour une place $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$, on a :*

$$\forall 1 \leq i \leq \alpha : |t_i(P)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-n_{\mathfrak{q}}/p},$$

et :

$$\forall \alpha < i \leq g : |t_i(P)|_{\mathfrak{q}} \leq p^{-n_{\mathfrak{q}}/p^2}.$$

De plus, la hauteur des e_i est majorée par $c_3 N$, pour une constante c_3 ne dépendant que de g et K.

Preuve

Soit $1 \leq i \leq g$. Si on note $e^j_{i,\mathfrak{p}}$ la j-ème composante de $e_{i,\mathfrak{p}}$ selon la base canonique, le nombre $e^j_{i,\mathfrak{p}}$ est dans $\mathcal{O}_K$. Par le lemme des restes chinois :

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{A,N}} \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}\mathcal{O}_K \simeq \mathcal{O}_K/(\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{A,N}} \mathfrak{p})\mathcal{O}_K.$$

Il existe donc d^j_i, un élément de $\mathcal{O}_K$, tel que :

$$d^j_i \equiv e^j_{\mathfrak{p},i} \bmod \mathfrak{p},$$

pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{A,N}$ et par le lemme précédent, on peut prendre d^j_i vérifiant :

$$h(d^j_i) \leq \log \mathbf{N}\left(\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{A,N}} \mathfrak{p}\mathcal{O}_K\right) + c_1,$$

pour une constante c_1 ne dépendant que de K. La norme étant multiplicative pour les idéaux (voir [Sam03], 3.5), et en utilisant l'estimation de Tchébychev ([Ten95], th. 3 page 11), on a :

$$h(d^j_i) \leq \sum_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{A,N}} \log(N(\mathfrak{p})) + c_1 \leq \sum_{p \leq N, p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}} \log(p) + c_1 \leq c_2 N,$$

pour une constante c_2 ne dépendant que de K, avec $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des premiers rationnels. On note d_i le vecteur dont les coordonnées sont les d^j_i dans la base canonique. La propriété $\mathfrak{p}$-adique ne dépendant que de la classe mod $\mathfrak{p}$ des coordonnées, elle reste vraie pour la base $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_g)$ et pour tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_{A,N}$. Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt appliqué à $\mathbf{d}$ fournit une base $\mathbf{e}$ pour laquelle la propriété métrique reste inchangée (par l'inégalité ultramétrique). Les e_i sont donnés par la formule :

$$e_i = d_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(e_k, d_i)}{(e_k, e_k)} e_k.$$

Puisque $N \geq g^2$, on obtient par récurrence : $h(e_i) \leq c_3 N$ avec $c_3 = 4^g c_2$.

□

3.3 Théorie des pentes

Dans cette partie, on commence par définir les objets qui apparaissent dans la théorie des pentes, puis on donne les inégalités de pentes dont on se servira par la suite. On finit par estimer les pentes de fibrés qui apparaîtront dans la suite de ce travail. Un des avantages de la méthode des pentes, en géométrie diophantienne, est de rendre plus facile le calcul des constantes. Si le calcul de la constante ne dépendant que de A reste très délicat dans notre minoration du minimum essentiel, on a tenu, dans cette partie, à donner des estimations précises, sinon en le corps de définition et en le genre de A, du moins en la hauteur de Faltings de A.

Enfin, comme dans la partie 3.2, on a donné des résultats un peu plus généraux que ceux dont on se servira par la suite, puisqu'on a défini la multiplicité avec un sous-module (de rang maximal) du module tangent donné par un modèle semi-abélien. Ces calculs pourraient éventuellement permettre, dans un travail ultérieur, de mettre en oeuvre une technique de *multiplicités penchées*, qu'on n'a pu appliquer ici.

3.3.1 Définitions et inégalité de pentes

On souhaite mettre en œuvre le formalisme des pentes, introduit par Bost dans [Bos96b], et qui s'est développé dans la littérature diophantienne depuis une dizaine d'années. Pour des détails et des exemples d'applications de la théorie des pentes, on renvoie par exemple aux articles de Bost ([Bos96b], [Bos01]) ou à l'article très complet de Gaudron ([Gau06]). Le but de cette partie est donc d'écrire une *inégalité de pentes*. Sous sa forme basique, celle-ci compare les *pentes* de deux $\mathcal{O}_K$-modules hermitiens s'il existe un morphisme ϕ injectif entre eux. On va donc définir le degré arithmétique d'un fibré vectoriel hermitien, puis sa pente, sa pente maximale, et la hauteur d'un morphisme de fibrés.

On note provisoirement (dans ce paragraphe) : $S = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$, S_0 l'ensemble des points fermés de S et S_∞ l'ensemble des places archimédiennes de $\mathcal{O}_K$ (correspondant aux points complexes de S) ; on note enfin $M(K) = S_0 \cup S_\infty$ l'ensemble des places de K. Un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur S est constant, ce qui mène à la définition suivante :

Définition 3.7 *Un fibré vectoriel hermitien sur S est un $\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{E}$ muni d'une collection $\{\|.\|_v\}_{v\in S_\infty}$ telle que pour tout $v \in S_\infty$, $\|.\|_v$ soit une norme hermitienne sur le K_v-espace vectoriel $\mathcal{E}_v = \mathcal{E} \otimes K_v$ et qu'on ait la compatibilité suivante :*

$$\|x\|_v = \|\overline{x}\|_{\overline{v}} \text{ pour tous } v \in S_\infty \text{ et } x \in \mathcal{E}_v,$$

où $\overline{v}$ désigne la conjuguée de v (via le plongement complexe qui leur est associé).

On note $\overline{\mathcal{E}}$ le fibré $(\mathcal{E}, \{\|.\|_v\})$. Si v est une place finie de K, on lui associe un anneau de valuation $\mathcal{O}_v$, et étant donnée une base $(e_1, \ldots, e_r)$ de $\mathcal{E}_v = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_v$ sur $\mathcal{O}_K$, on munit $\mathcal{E}_v$ de la norme $\|.\|_v$ définie comme le maximum des valeurs absolues v-adiques des coordonnées dans cette base (voir 3.2.3).

On peut maintenant définir le degré arakélovien *normalisé* d'un fibré hermitien. On commence par les modules de rang 1 puis on passe au cas général grâce au déterminant :

Définition 3.8 *Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un $\mathcal{O}_K$-fibré hermitien de rang 1 et s un élément non nul de $\mathcal{E}$. On définit le degré arithmétique (ou arakélovien) normalisé de $\mathcal{E}$ de la manière suivante :*

$$\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{E}} = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\Big(\log\#(\mathcal{E}/s\mathcal{O}_K) - \sum_{v\in S_\infty} \log\|s\|_v\Big).$$

Si $\overline{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{O}_K$-fibré hermitien de rang r, on pose :

$$\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{E}} = \widehat{\deg}\ \det\overline{\mathcal{E}},$$

où les normes sur le déterminant sont celles obtenues par puissance tensorielle et quotient à partir de celles de $\mathcal{E}$.

Remarques La formule du produit montre que cette définition ne dépend pas du choix de s. Si $K = \mathbb{Q}$, le degré d'Arakelov est l'opposé du logarithme du covolume de $\mathcal{E}$ vu comme réseau de $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (voir [BGS94], formule (2.1.13) pour le cas général).

Définition 3.9 *Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré hermitien de rang non nul, on définit sa pente de la façon suivante :*

$$\widehat{\mu}(\overline{\mathcal{E}}) = \frac{\widehat{\deg}\overline{\mathcal{E}}}{\mathrm{rg}\mathcal{E}}.$$

Les pentes des sous-modules de $\mathcal{E}$ sont bornées (par l'inégalité d'Hadamard), ce qui justifie la définition :

Définition 3.10 *La pente maximale de $\overline{\mathcal{E}}$ est définie par :*

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{E}}) = \max\ \widehat{\mu}(\overline{\mathcal{F}}),$$

où $\mathcal{F}$ décrit l'ensemble des sous-fibrés non-nuls de $\mathcal{E}$ munis des métriques déduites de celles de $\mathcal{E}$ par restriction.

Soit ϕ un morphisme entre deux $\mathcal{O}_K$-fibrés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Si ces fibrés sont hermitiens, pour toute place $v \in M(K)$, on note $\|\phi\|_v$ la norme d'opérateur du morphisme :

$$\phi : \mathcal{E}_v = \mathcal{E} \otimes K_v \to \mathcal{F}_v = \mathcal{F} \otimes K_v.$$

On a donc :

$$\|\phi\|_v = \sup_{x \in \mathcal{E}_v, x \neq 0} \frac{\|\phi(x)\|_v}{\|x\|_v}.$$

On peut alors définir la hauteur de ϕ :

Définition 3.11 *Si ϕ est un morphisme entre deux $\mathcal{O}_K$-fibrés hermitiens $\overline{\mathcal{E}}$ et $\overline{\mathcal{F}}$, on appelle hauteur de ϕ :*

$$h(\phi) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M(K)} \log \|\phi\|_v .$$

On est alors en mesure d'écrire une première inégalité de pentes :

Lemme 3.21 *Si le morphisme $\phi : \mathcal{E}_K \to \mathcal{F}_K$ est injectif :*

$$\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{E}} \leq \mathrm{rg}(\mathcal{E})\Big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{F}}) + h(\phi)\Big).$$

Preuve
C'est une conséquence de l'inégalité d'Hadamard ; on renvoie à [Che06], page 40, pour plus de détails (où la même convention est faite sur les normes ultramétriques).

□

On utilise généralement une version filtrée de cette inégalité. Soit $\phi : \mathcal{E}_K \to \mathcal{F}_K$ une application K-linéaire injective. On suppose qu'il existe une filtration d'espaces vectoriels :

$$\{0\} = \mathcal{F}_{K,N+1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{K,0} = \mathcal{F}_K.$$

et que les quotients $\mathcal{G}_{K,i} = \mathcal{F}_{K,i}/\mathcal{F}_{K,i+1}$ sont les tensorisation avec K de fibrés hermitiens $\overline{\mathcal{G}}_i$ sur Spec$\mathcal{O}_K$. On définit une filtration sur $\mathcal{E}_K$ par image réciproque :

$$\mathcal{E}_{K,i} = \phi_K^{-1}(\mathcal{F}_{K,i}),$$

et on considère :

$$\phi_i : \mathcal{E}_{K,i} \to \mathcal{G}_{K,i},$$

l'application linéaire naturellement induite sur le quotient. La version filtrée de l'inégalité des pentes est la suivante :

Lemme 3.22 *Si ϕ est injective, on a l'inégalité :*

$$\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{E}} \leq \sum_{i=0}^{N} \dim\big(\mathcal{E}_{K,i}/\mathcal{E}_{K,i+1}\big)\big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{G}}_i) + h(\phi_i)\big).$$

Cette version est particulièrement utile dans une preuve de transcendance : la filtration correspond alors aux différents ensembles et ordres d'annulation d'une fonction auxiliaire.

3.3.2 Quelques fibrés hermitiens et leurs pentes

On peut maintenant préciser les fibrés hermitiens auxquels on compte appliquer la méthode des pentes. Rappelons que A est une variété abélienne munie d'un fibré ample et symétrique L, et définie sur un corps de nombres $\mathcal{O}_K$.

Tangent et espace symétrique

Quitte à prendre une extension finie de K ne dépendant que de A, on suppose que A admet réduction semi-abélienne sur K. Il existe donc un modèle semi-abélien $\pi : \mathcal{A} \to$ Spec$\mathcal{O}_K$; on note $\epsilon :$ Spec$\mathcal{O}_K \to \mathcal{A}$ la section nulle et on pose :

$$t_{\mathcal{A}} := \epsilon^* T_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K},$$

où $T_{\mathcal{A}/\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K}$ est le fibré tangent de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{O}_K$. On a une structure de $\mathcal{O}_K$-module de type fini sur $t_{\mathcal{A}}$, qui est un sous-module de l'espace vectoriel tangent de A à l'origine. Si σ est une place complexe de K, il existe un isomorphisme : $t_{\mathcal{A}} \otimes_\sigma \mathbb{C} \simeq t_{\mathcal{A}_\sigma}(\mathbb{C})$ et la forme de Riemann ω associée au fibré ample L induit une forme hermitienne $\omega_\sigma \in \bigwedge^{1,1} t^\vee_{\mathcal{A}_\sigma}(\mathbb{C})$. Si ω_σ s'écrit sous la forme :

$$\omega_\sigma = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq h,l \leq g} a_{h,l} f_h^* \wedge \overline{f_l^*},$$

où $(f_1^*, \ldots, f_g^*)$ est la base duale d'une base $(f_1, \ldots, f_g)$ de $t_{\mathcal{A}_\sigma}(\mathbb{C})$, pour $(z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{C}^g$, on pose :

$$\left\| \sum_{i=1}^{g} z_i f_i \right\|_\sigma^2 = \sum_{1 \leq h,l \leq g} a_{h,l} z_h \overline{z_l}.$$

Ces métriques font de $t_{\mathcal{A}}$ un fibré vectoriel hermitien et cette structure se transporte par dualité à $t^\vee_{\mathcal{A}}$.

On sait calculer explicitement la pente de $\overline{t_{\mathcal{A}}^{\vee}}$ en fonction de la hauteur de Faltings de A (*confer* [Gau06], proposition 4.7). Pour définir celle-ci, on considère le module $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K} \simeq \det t_{\mathcal{A}}^{\vee}$ muni de la norme associée à chaque place archimédienne σ de K :

$$\forall s \in \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K} \otimes_\sigma \mathbb{C}, \quad \|s\|_\sigma^2 := \frac{i^{g^2}}{(2\pi)^g} \int_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} s \wedge \overline{s}.$$

Définition 3.12 *La hauteur de Faltings de A est le degré d'Arakelov normalisé du fibré $\overline{\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{O}_K}}$. Elle est notée $h_F(A)$ et ne dépend pas du choix de K, le corps de définition, et de $\mathcal{A}$, le modèle semi-abélien de A sur $\mathcal{O}_K$.*

Cette fonction vérifie les axiomes d'une hauteur sur les classes d'isomorphismes de variétés abéliennes de dimension g sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (voir le théorème (2.1) de [Bos96b]). Majorer la pente maximale de $\overline{t_{\mathcal{A}}^{\vee}}$ en fonction de $h_F(A)$ revient donc à comparer la pente maximale de deux modules isomorphes mais non isométriques ; on obtient (*confer* [Bos96b], (5.41)) :

Lemme 3.23 *Il existe une constante $c_4 > 0$ ne dépendant que de g telle que :*

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{t_{\mathcal{A}}^{\vee}}) \leq c_4 \max\{1, h_F(A), \log h^0(A, L)\},$$

où $h^0(A, L)$ désigne la dimension de l'espace des sections du fibré L sur A.

On a construit une base du tangent (sur $\mathcal{O}_K$) dans laquelle les propriétés $\mathfrak{p}$-adiques de A sont lisibles, pour un grand nombre de premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_K$. On souhaite donc pouvoir majorer, en général, la pente maximale associée à des sous-modules du tangent (de rang maximal). Soit $\mathcal{W}$ un sous-module de $t_{\mathcal{A}}$ de rang g engendré par des vecteurs $(e_1, \ldots, e_g)$; on munit ce module des métriques hermitiennes (issues de la forme de Riemann) de $t_{\mathcal{A}}$ par restriction. On peut majorer la pente maximale de $\overline{\mathcal{W}^{\vee}}$ en fonction de la hauteur d'une base de $\mathcal{W}$:

Lemme 3.24 *Soit $c(\mathcal{W}) > 0$ tel qu'il existe une base de $\mathcal{W}$ formée d'éléments dont toutes les coordonnées sont dans $\mathcal{O}_K$ et de hauteur plus petite que $c(\mathcal{W})$. La pente maximale de $\overline{\mathcal{W}^{\vee}}$ vérifie alors :*

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{W}^{\vee}}) \leq c_7 \max\{1, h_F(A), \deg_L(A), c(\mathcal{W})\},$$

pour une constante $c_7 > 0$ ne dépendant que de g et K.

Preuve

La valeur absolue du degré normalisé de $\mathcal{W}$ est majorée, à partir de la formule (2.1.13) de [BGS94], de l'inégalité d'Hadamard et en prenant une base de $\mathcal{O}_K$ d'éléments dont la hauteur est bornée par $c(\mathcal{W})$:

$$|\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{W}}| \leq c_5 c(\mathcal{W}),$$

pour une constante c_5 ne dépendant que de g et de K. En effet, pour les vecteurs à coordonnées dans $\mathcal{O}_K$, il n'y a pas de contribution ultramétrique dans l'expression de la hauteur, et les contributions archimédiennes sont comparables à la norme L^2 sortant de l'inégalité d'Hadamard. Un raffinement du lemme précédent (formule (41) de [Gau06]) donne :

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{W}^{\vee}}) \leq c_6 \max\{1, h_F(A), \deg_L(A), |\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{W}}|\},$$

où c_6 ne dépend que de g. La majoration de la valeur absolue du degré de $\overline{\mathcal{W}}$ permet de conclure.

$\square$

Pour passer aux dérivées d'ordre supérieur, on doit comprendre comment la pente maximale se comporte avec les puissances symétriques. Soit $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré hermitien sur $\mathcal{O}_K$. Pour tout m, la m-ème puissance symétrique $S^m\mathcal{E}$ est munie d'une structure hermitienne par produit tensoriel puis projection ; on note $S^m\overline{\mathcal{E}}$ le fibré hermitien ainsi obtenu. Le lemme suivant est démontré dans l'appendice de [Gra01] :

Lemme 3.25 *Pour $\overline{\mathcal{E}}$ un fibré hermitien de rang g :*

$$\hat{\mu}_{\max}\big(S^m(\overline{\mathcal{E}})\big) \leq m(\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{E}}) + 2g\log g).$$

La combinaison des deux derniers lemmes donne la proposition suivante, qui nous servira à majorer la pente maximale des fibrés d'arrivée dans l'inégalité de pentes :

Proposition 3.26 *On a la majoration suivante :*

$$\hat{\mu}_{\max}\big(S^m(\overline{\mathcal{W}^\vee})\big) \leq c_8 m \, \max\{1, h_F(A), \deg_L(A), c(\mathcal{W})\},$$

pour une constante c_8 ne dépendant que de g et K.

L'espace des sections d'un fibré ample sur la variété abélienne

La variété abélienne A est munie de L un fibré ample et symétrique, et on note $H^0(A, L)$ l'espace des sections de degré 1 sur ce fibré. Si $s \in H^0(A, L)$, on peut définir une métrique sur L à l'aide de la fonction θ associée à L. Pour $x = \exp_A(z)$ et $z \in t_A$, on pose en effet :

$$\|s(x)\| := e^{-\frac{\pi}{2}\|z\|^2}|\theta(z)|.$$

Cette métrique est appelée cubiste et sa forme de courbure est invariante par translation.

Il existe alors (voir [Bos96a], §4.3) un modèle de (A, L), appelé modèle de Moret-Bailly et noté $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{L}}, 0)$, constitué d'un schéma abélien :

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K,$$

et d'un fibré hermitien $\overline{\mathcal{L}}$ sur $\mathcal{A}$ vérifiant notamment les propriétés suivantes :

- Il existe un isomorphisme de variétés abéliennes sur $\overline{\mathbb{Q}}$: $i : A \to \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{Q}}}$.
- Il existe un isomorphisme de fibrés en droites sur A : $i^*\mathcal{L}_{\overline{\mathbb{Q}}} \to L$.
- L'origine de A se relève en une section $\epsilon : \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K \to \mathcal{A}$.
- Pour toute place σ archimédienne de K, la métrique sur $\mathcal{L}\otimes_\sigma\mathbb{C}$ est la métrique cubiste définie plus haut.

On note $\mathcal{E}$ le $\mathcal{O}_K$-module $H^0(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ et on le munit des métriques hermitiennes suivantes aux places archimédiennes : pour tout plongement $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $s \in \mathcal{E} \otimes_\sigma \mathbb{C} \simeq H^0(\mathcal{A}_\sigma, \mathcal{L}_\sigma)$, on pose :

$$\|s\|_{L^2,\sigma} = \left(\int_{\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|^2 d\mu(x)\right)^{1/2},$$

où $d\mu$ est la mesure de Haar de masse totale égale à 1 sur $\mathcal{A}_\sigma(\mathbb{C})$. On sait que $\overline{\mathcal{E}}$ est *semi-stable* : sa pente est égale à sa pente maximale. De plus, on peut la calculer de façon totalement explicite :

Proposition 3.27 *La pente de $\overline{\mathcal{E}}$ est donnée par la formule suivante :*

$$\hat{\mu}(\overline{\mathcal{E}}) = -\frac{1}{2}h_F(A) + \frac{1}{4}\log\frac{\chi(A,L)}{(2\pi)^g};$$

où $\chi(A,L) = \frac{\deg_L(A)}{g!}$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de L.

Cette formule a été démontrée par Moret-Bailly ([MB90]) dans le cas $\chi(A,L) = 1$ et en général par Bost ([Bos96a]). La semi-stabilité de $\overline{\mathcal{E}}$ est démontrée dans [Bos96b], 4.2.

Pente maximale et sous-variétés

Le morphisme de fibrés qu'on définira dans la partie suivante associera à une section de $L^{\otimes M}$ sur A (pour $M \geq 1$ un entier) sa restriction à X un fermé de Zariski, avec multiplicité (dans un plongement étiré). On aura donc besoin de majorer la pente maximale du fibré des sections sur des sous-variétés de A avec multiplicité.

Soit X un fermé de Zariski lisse et équidimensionnel de A, de dimension d, défini sur une extension K' de K. On en prend un modèle, c'est-à-dire un $\mathcal{O}_{K'}$-schéma propre et plat $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}_{K'}} K' = X$ et on choisit un $\mathcal{O}_K-$fibré $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X}$ dont la restriction à X est L. Soit de plus $\mathcal{W}$ un sous-module du tangent $t_{\mathcal{A}}$, muni de la restriction des métriques hermitiennes provenant de la forme de Riemann. Pour chaque place archimédienne σ de K', on munit le $\mathcal{O}_K$-fibré :

$$\mathcal{L}^{\otimes M} \otimes S^m(\mathcal{W}^\vee)$$

de la norme obtenue par produit tensoriel de la norme cubiste sur $\mathcal{L} \otimes_\sigma \mathbb{C}$ et de la norme symétrique sur $S^m(\mathcal{W}^\vee) \otimes_\sigma \mathbb{C}$; puis on munit l'espace de sections, *vu comme $\mathcal{O}_K$-module* :

$$\mathcal{H}_m^M = H^0\Big(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes M} \otimes S^m(\mathcal{W}^\vee)\Big)$$

de la métrique de Löwner $\|.\|_{L,\sigma}$ associée à la norme du sup, pour toute place archimédienne σ. Il s'agit d'une norme hermitienne proche de la norme du sup dans le sens suivant (*confer* [Gau07], 2.2 pour le cas euclidien) :

$$\forall x \in \mathcal{H}_m^M \otimes \mathbb{C} : \|x\|_{L,\sigma} \leq \|x\|_{\sup,\sigma} \leq \sqrt{2\mathrm{rg}\mathcal{H}_m^M}\, \|x\|_{L,\sigma}\,.$$

Remarque En termes géométriques, l'existence de la norme de Löwner est reliée à l'existence, étant donné un corps C convexe et symétrique, d'un ellipsoïde de volume minimal contenant C.

On étudie d'abord le cas sans multiplicité : $m = 0$. Lorsqu'il s'agit d'estimer la pente et non la pente maximale, on sait obtenir une formule asymptotique lorsque le degré tend vers l'infini. En effet, en combinant les théorèmes de Hilbert-Samuel arithmétique et géométrique, on obtient :

Théorème 3.28 *En munissant $\mathcal{H}_0^M$ de la norme du sup, on a l'équivalent asymptotique suivant pour la pente :*

$$\hat{\mu}(\overline{\mathcal{H}_0^M}) = M\frac{h_{\overline{L}}(X)}{\deg_L(X)} + o(M).$$

Remarque La définition de la hauteur $h_{\overline{L}}(V)$ d'une variété V est donnée dans [BGS94], partie 3 ; elle correspond à la définition de la hauteur projective donnée par Philippon en faisant le choix de la norme L^2 pour les places archimédiennes (voir [HS00]).

Preuve

Il suffit de combiner le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique (voir [GS92] ou le théorème (1.4) de [Zha95b]) et le théorème de Hilbert-Samuel géométrique (*confer* [Har77], page 51).

□

On désire obtenir une majoration efficace de la pente maximale par le premier terme de ce développement asymptotique et des termes d'erreur bien contrôlés. Dans sa thèse ([Che06]), H. Chen montre que le quotient

$$\frac{\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{H}_0^M})}{M}$$

converge aussi. Plus précisément, il donne une majoration assez fine de la pente maximale en munissant le fibré de la norme L^2. Cette inégalité fait apparaître une constante non-explicite provenant de l'inégalité de Gromov, et c'est pour contourner cette difficulté qu'on introduit la norme de Löwner. De plus, on précise le terme principal de la majoration à l'aide du "théorème de Wirtinger" et de l'inégalité des minima successifs de Zhang.

Proposition 3.29 *Il existe une constante explicite* c_9 *ne dépendant que de* K *telle qu'on ait la majoration suivante pour la pente maximale de* $\overline{\mathcal{H}_0^M}$ *:*

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{H}_0^M}) \leq M(d+1)!\frac{h_{\overline{L}}(X)}{\deg_L(X)} + d\log M + \log\, \deg_L(X) + \ c_9.$$

Preuve

On commence par majorer la pente maximale en introduisant la plus petite norme $\epsilon(\overline{\mathcal{H}_0^M})$ d'un élément non-nul du réseau $\mathcal{H}_0^M$ via le premier théorème de Minkowski (*confer* [BK06], inégalité (3.24) et la majoration de la fonction ψ page 35) ; cette norme est la norme hermitienne sur la somme orthogonale des $\mathcal{H}_0^M \otimes_\sigma \mathbb{C}$. On a :

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{H}_0^M}) \leq -\log\, \epsilon(\overline{\mathcal{H}_0^M}) + \frac{1}{2}\log\, \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}_0^M) + \frac{\log|\Delta_K|}{2[K:\mathbb{Q}]}.$$

On majore le terme $-\log\, \epsilon(\overline{\mathcal{H}_0^M})$ à l'aide de la théorie de l'intersection arithmétique. On peut appliquer la formule reliant la hauteur d'une variété à la hauteur d'un diviseur sur cette variété (*confer* [BGS94], proposition 3.2.1) et comme L est ample avec $c_1(\overline{L})$ définie positive (par la proposition 3.2.4 de [BGS94]), pour s un diviseur effectif de $\overline{L}^M$, on a :

$$h_{\overline{L}}(\mathrm{div}(s)) = Mh_{\overline{L}}(X) + \int_{X(\mathbb{C})} \log\|s\|\, c_1(\overline{L})^d \geq 0.$$

De plus, comme $c_1(\overline{L})$ est définie positive, on a :

$$\int_{X(\mathbb{C})} \log\|s\|\, c_1(\overline{L})^d \leq \max_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|s\|_{\sup,\sigma}\int_{X(\mathbb{C})} c_1(\overline{L})^d.$$

Par le théorème de Wirtinger (voir [GH78], page 171), cette dernière intégrale n'est autre que

$$\frac{\deg_L(X)}{d!}.$$

On a donc :

$$-\max_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|s\|_{\sup,\sigma} \leq Md!\frac{h_{\overline{L}}(X)}{\deg_L(X)}.$$

Soit σ tel que $\|s\|_{\sup,\sigma}$ réalise le maximum sur toutes les places archimédiennes. Par choix de la norme de Löwner associée à la norme du sup sur $\mathcal{H}_0^M$, on a :

$$\max_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|s\|_{\sup,\sigma} \leq \sqrt{2\mathrm{rg}\mathcal{H}_0^M}\,\|s\|_{L,\sigma}\,,$$

et par suite :

$$-\log\|s\| = -\frac{1}{2}\log\Big(\sum_{\sigma\in\Sigma_\infty}\|s\|_{L,\sigma}^2\Big) \leq -\log\|s\|_{L,\sigma} \leq -\max_{\sigma\in\Sigma_\infty}\log\|s\|_{\sup,\sigma} + \log\,\mathrm{rg}\mathcal{H}_0^M.$$

On en déduit que :

$$-\log\,\epsilon(\overline{\mathcal{H}_0^M}) \leq M(d+1)!\frac{h_{\overline{L}}(X)}{\deg_L(X)} + \log\,\mathrm{rg}\mathcal{H}_0^M.$$

Il reste à majorer le rang de $\mathcal{H}_0^M$, ce qui suit du théorème de Chardin (*confer* [Cha88]) :

$$\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}\mathcal{H}_0^M \leq [K:\mathbb{Q}]\mathrm{rg}\mathcal{H}_0^M \leq [K:\mathbb{Q}]M^d\deg_L(X).$$

La proposition est donc entièrement démontrée.

□

On peut maintenant majorer la pente maximale du fibré des sections avec multiplicité. Le choix, classique en géométrie diophantienne, de prendre le tangent de la variété abélienne, qui est un fibré constant (et non le tangent à la sous-variété), simplifie le calcul. Il semble possible d'obtenir une majoration dans le cas du tangent à la sous-variété en calculant les classes de Segré géométriques (voir [Ful84]) et arithmétiques (voir [Mou04]) associées au fibré tangent $t_{\mathcal{X}}$. Dans le cas qui nous intéresse, le fibré $\mathcal{W}^\vee$ étant constant, on a l'isomorphisme (isométrique) :

$$\mathcal{H}_m^M \simeq \mathcal{H}_0^M \otimes S^m\mathcal{W}^\vee.$$

Bost a conjecturé que la pente maximale du produit tensoriel est la somme des pentes maximales. Les meilleurs résultats connus dans cette direction sont ceux de Bost-Künnemann (*confer* [BK06]), et de H. Chen, qui a démontré dans sa thèse (*confer* [Che06]) :

Théorème 3.30 *Soient $\overline{\mathcal{E}_1},\dots,\overline{\mathcal{E}_n}$ des fibrés hermitiens non-nuls sur* $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$*, alors :*

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{E}_1}\otimes\cdots\otimes\overline{\mathcal{E}_n}) \leq \sum_{i=1}^n\Big(\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{E}_i}) + \log(\mathrm{rg}\mathcal{E}_i)\Big).$$

Remarque Pour un produit de deux fibrés, le résultat de Bost et Künnemann fait apparaître un facteur 1/2 pour le terme logarithmique (mais aussi, en contrepartie, une constante ne dépendant que de K).

Rappelons que par $c(\mathcal{W})$, on désigne un majorant de la hauteur d'une base entière de $\mathcal{W}$. On peut maintenant démontrer le corollaire suivant :

Corollaire 3.31 *On a la majoration, pour la pente maximale :*

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{H}_m^M}) \leq M(d+1)!\frac{h_{\overline{L}}(X)}{\deg_L(X)} + 2d\log(M) + 2\log\ \deg_L(X) + c_{10}m\ \max\{1, h_F(A), \deg_L(A), c(\mathcal{W})\},$$

où c_{10} ne dépend que de K et de g.

Preuve

Le théorème précédent nous montre que :

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{H}_m^M}) \leq \hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{H}_0^M}) + \hat{\mu}_{\max}(S^m(\overline{\mathcal{W}^\vee})) + \log(\mathrm{rg}\mathcal{H}_0^M) + \log(\mathrm{rg}S^m(\mathcal{W}^\vee)).$$

Les termes relatifs à $\overline{\mathcal{H}_0^M}$ ont été calculés dans la proposition précédente. Le rang de $S^m(\mathcal{W}^\vee)$ est donné par la formule classique :

$$\mathrm{rg}\ S^m(\mathcal{W}^\vee) = \binom{m+g-1}{g-1} \leq m^{g-1},$$

et sa pente maximale a été majorée en (3.2.1).

□

3.4 Choix des fibrés et du morphisme

Après ces préliminaires, la preuve du théorème 3.6 commence véritablement ici. Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K, munie d'un fibré L ample et symétrique, qu'on pourra supposer très ample quitte à considérer $L^{\otimes 3}$. Par la suite, lorsque cela ne sera pas précisé, le degré et la hauteur seront définis par rapport à ce fibré. Quitte à prendre une extension finie de K (ne dépendant que de A), on prend un modèle de Moret-Bailly $(\mathcal{A}, \mathcal{L}, 0)$ de (A, L), suivant la terminologie de Bost ([Bos96a]). Ce modèle est en particulier semi-abélien (voir [Gau06], définition-théorème 4.3). On suppose de plus que $\mathcal{A}$ vérifie **H3**.

On prend une sous-variété propre (et irréductible) V de A, de codimension r, qui n'est pas incluse dans le translaté d'une sous-variété abélienne. On pose aussi : $X = V + \Sigma_0$, en vue de la dernière phase de la preuve. L'ensemble Σ_0 sera un sous-groupe fini de A. On va construire un fibré hermitien $\overline{\mathcal{E}_M}$ associé à un espace vectoriel E, une suite de fibrés $\overline{\mathcal{G}_k}$, $k \in I$ (pour un certain ensemble fini I), correspondant à une fibration d'un espace vectoriel F, et un morphisme ϕ de restriction entre E et F. Les $\overline{\mathcal{G}_k}$ seront définis à partir de l'espace des sections d'une puissance de $\mathcal{L}$ sur des modèles entiers de X et de ses translatés par des points de torsion bien choisis. La partie précédente nous permettra de calculer les termes de pentes associés à ces fibrés. A la fin de cette partie, on fixera les paramètres et on supposera par l'absurde que le minimum essentiel de V est majoré en fonction des paramètres. Ce n'est qu'après avoir obtenu une contradiction qu'on en déduira le théorème 3.6, en calculant explicitement les paramètres.

3.4.1 Le plongement étiré

Pour éliminer la constante de comparaison entre hauteur projective et hauteur de Néron-Tate sur A, on considère classiquement un plongement étiré.

Soit M un entier supérieur ou égal à 1. La multiplication par M sur A est notée $[M]$ et on définit ϕ_M :

$$\begin{array}{rcl} A & \rightarrow & A \times A \\ x & \rightarrow & (x, [M]x). \end{array}$$

Ce plongement a été utilisé pour la première fois par Laurent pour étudier le problème de Lehmer elliptique (*confer* [Lau83]). Son principe est le suivant : les techniques diophantiennes nous renseignent sur la hauteur projective, et le minimum essentiel fait intervenir la hauteur de Néron-Tate associée au plongement. On sait que la différence entre ces deux hauteurs est bornée mais la hauteur de Néron-Tate peut être très petite ; il y a donc une perte d'information sur la hauteur projective. Le plongement étiré multiplie la hauteur par un paramètre assez grand, qui rend négligeable la constante de comparaison.

On notera L_M (resp. $\mathcal{L}_M$) l'image par ϕ_M de L (resp. $\mathcal{L}$). On a :

$$L_M \simeq L^{\otimes M^2+1};$$

par abus de langage, on utilise la même notation pour le fibré induit sur A par le plongement. On note $\deg_M$ (resp. $\hat{h}_M$) le degré (resp. la hauteur canonique) par rapport au fibré L_M. Le lemme suivant indique la variation de la hauteur et du degré par changement de fibré :

Lemme 3.32 *Si V est une sous-variété de A, on a la variation suivante de la hauteur canonique :*

$$\hat{h}_M(V) = (M^2+1)^{\dim(V)+1}\hat{h}(V);$$

et la formule suivante pour le degré :

$$\deg_M(V) = (M^2+1)^{\dim(V)}\deg(V).$$

Preuve

Ces formules sont démontrées, par exemple, dans [Phi95], proposition 7.

□

Dans cette partie et la suivante, on travaillera donc dans le plongement étiré. On confondra la variété abélienne A et ses sous-variétés avec leurs images par ϕ_M, mais on précisera toujours avec soin le fibré.

3.4.2 Le fibré de départ

Commençons par décrire le premier fibré. On pose $\mathcal{E}_M = H^0(\mathcal{A}, \mathcal{L}_M)$, le module des sections sur $\mathcal{A}$ sur le fibré $\mathcal{L}_M$. On note aussi E le tensorisé de $\mathcal{E}_M$ avec K. On a vu en 3.3.2 comment munir ce fibré d'une structure hermitienne et on a donné son degré dans le cas des sections de degré 1 ; le cas général s'en déduit en remplaçant $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}^{\otimes(M^2+1)}$. On fait une hypothèse qui sera aisément vérifiée par la suite, en supposant que :

$$\log(M^2) > 2\Big(\frac{2}{g}h_F(A) + \log(2\pi g!)\Big).$$

Lemme 3.33 *On a la minoration suivante pour le degré normalisé de $\overline{\mathcal{E}_M}$:*

$$\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{E}_M} \geq c_{11}(M^2)^g \log(M),$$

pour une constante $c_{11} > 0$ ne dépendant que de A.

Preuve

En multipliant le degré arithmétique par le rang, la proposition 3.27 donne :

$$\hat{\mu}(\overline{\mathcal{E}_M}) = (M^2+1)^g \frac{\deg_L(A)}{g!}\Big(-\frac{1}{2}h_F(A) + \frac{1}{4}\log\frac{(M^2+1)^g \deg_L(A)}{(2\pi g!)^g}\Big).$$

Notons que la hauteur de Faltings ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la variété abélienne, et qu'elle est donc invariante par le plongement étiré. L'hypothèse faite sur les paramètres donne immédiatement le lemme, avec une constante $c_{11} > 0$ ne dépendant que de A et facilement explicitable.

□

3.4.3 Voisinages infinitésimaux

On définit maintenant le fibré d'arrivée pour appliquer l'inégalité des pentes. Dans la littérature existante, ce fibré est très souvent formé à partir d'un nombre fini de points. Mais ici, on veut que les sections s'annulent sur le fermé X avec multiplicité, puis sur ses translatés. Pour former le fibré d'arrivée, on commence par introduire la notion de voisinage infinitésimal (*confer* [Bos96a]). Ce voisinage sera donné par un fermé Y de A et un ordre de dérivation l, par rapport au tangent t_{A_M}, image de t_A par l'étirement (voir 3.3.2 pour des détails sur le fibré tangent).

On fixe désormais une base $(f_1, \dots, f_g)$ de l'espace tangent t_{A_M}. L'action de l'isogénie $[M]$ sur le tangent étant la multiplication par M, en prenant une base $(e_1, \dots, e_{2g})$ de t_{A^2}, on peut choisir : $f_i = e_i + Me_{g+i}$. Il correspond à $(f_1, \dots, f_g)$ une base de dérivations $(\partial_1, \dots, \partial_g)$. Si $x \in A$, on en déduit par translation une base du tangent $t_{A_M,x}$ en x (dans le plongement étiré), associée à la base de dérivations $(\partial_{1,x}, \dots, \partial_{g,x})$. On notera aussi par la suite :

$$\partial_x^\lambda = \frac{1}{\prod_{1=i}^g \lambda_i!}\partial_{1,x}^{\lambda_1}\cdots\partial_{g,x}^{\lambda_g}.$$

Soit Y un fermé de Zariski de A (dans le plongement étiré). On définit le schéma $V(Y, t_{A_M}, l)$ de la façon suivante :

- si $l = 0$, $V(Y, t_{A_M}, l)$ est le sous-schéma réduit de A défini par Y.
- si $l = 1$ et $Y = 0$, $V(0, t_{A_M}, 1)$ est le voisinage infinitésimal d'ordre 1 de 0.
- si $l \geq 1$, $V(Y, t_{A_M}, l)$ est l'image dans A du schéma $Y \times V(0, t_{A_M}, 1)^l$ par le morphisme d'addition $A^{l+1} \to A$.

Le schéma $V(Y, t_{A_M}, l)$ admet pour support le fermé Y et son faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ est défini par :

$$s \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \Big(\forall y \in Y,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{N}^g \text{ tq} : \sum_{i=1}^g \lambda_i \leq l :\ \partial_y^\lambda s = 0\Big).$$

3.4.4 Fibration de l'espace d'arrivée

L'espace vectoriel d'arrivée sera formé à partir des espaces de sections sur des modèles de X et de nombreux translatés de X par des points de torsion, avec multiplicité. On doit donc d'abord préciser les points de torsion en lesquels on extrapole, et la multiplicité, puis mettre un ordre sur cet ensemble.

On se donne $T_0 > 0$; pour $1 \leq n \leq r$ (r étant la codimension de V et de X), on se donne aussi deux nombres positifs T_n (qui correspond à la multiplicité après n extrapolations), et N_n (qui borne les normes des premiers d'extrapolation). Puis on définit les ensembles $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_A \text{ avec } \mathbf{N}(\mathfrak{p}) \in [N_n/2; N_n]\}.$$

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des premiers de $\mathbb{Z}$. La projection des $\mathcal{P}_n$ sur $\mathbb{Z}$ est donnée par :

$$\mathcal{P}_{n,\mathbb{Z}} = \{p \in \mathcal{P}, \exists\ \mathfrak{p} \in \mathcal{P}_n, \mathfrak{p}/p\}.$$

Le choix des paramètres sera tel que les ensembles $\mathcal{P}_n$ (resp. $\mathcal{P}_{n,\mathbb{Z}}$) soient disjoints. On note :

$$\mathrm{Tor}_{A,n} = \{P, \text{ points de } p\text{-torsion se réduisant sur } 0 \bmod \mathfrak{q}, \text{ pour } \mathfrak{q}/\mathfrak{p}/p \text{ et } \mathfrak{p} \in \mathcal{P}_n\},$$

où $\mathfrak{q}$ est un idéal premier dans un corps de définition du point de torsion P. On note pour toute la suite K' le corps engendré par K, par un corps de définition de V et par les coordonnées projectives des points de la réunion : $\bigcup_{1\leq n\leq r} \mathrm{Tor}_{A,n}$. Les fibrés et les morphismes qu'on va considérer seront tous définis sur K' ; en fait, comme on considère des $\mathcal{O}_K$-fibrés, les calculs de pentes valables sur $\mathcal{O}_K$ se transportent sans changer à $\mathcal{O}_{K'}$, et le corps K' intervient uniquement dans les estimations ultramétriques.

On ordonne les points de $\mathrm{Tor}_{A,n}$ en les classant d'abord selon le plus petit premier p de torsion (pour l'ordre naturel sur $\mathbb{Z}$) puis en choisissant arbitrairement un ordre à p fixé. Pour $i = (i_1, \ldots, i_r)$, où i_n, pour $1 \leq n \leq r$, est un indice dans $[1, |\mathrm{Tor}_{A,n}|]$, on note P_i le point $P_{i_1} + \cdots + P_{i_r}$. On note I l'ensemble de ces multi-indices, qu'on ordonne avec l'ordre lexicographique. On confondra dans la suite l'ensemble I et son image dans $\mathbb{N}$ par l'indexation, et les éléments $i \in I$ pourront être vus comme des entiers via cette identification. On construit, pour $i \in I$, une suite de fermés $X_i = X + P_i$. On pose enfin, pour $i \in I$: $T_{(i)} = T_{n_i}$ et $N_{(i)} = N_{n_i}$, où n_i est le plus grand des j tels que $P_{i_j} \neq 0$.

On définit maintenant S, un schéma, et F un espace vectoriel (de sections) :

$$S = \bigcup_{i\in I} V(X_i, t_{A_M}, T_{(i)}) \quad \text{et : } F = H^0(S, L_M);$$

et pour $k \in I$ un entier, on pose :

$$S_k = \bigcup_{i\leq k} V(X_i, t_{A_M}, T_{(i)}).$$

Ceci permet de définir F_k, le noyau du morphisme de restriction :

$$p_k : H^0(S, L_M) \to H^0(S, L_M)_{|S_k}.$$

La suite décroissante des F_k est une filtration de F et on en déduit une filtration de E en posant : $E_k := \phi^{-1}(F_{k-1})$. Soit enfin $G_k = F_{k-1}/F_k$. En appliquant le lemme des serpents aux deux suites exactes :

$$0 \to F_k \to H^0(S, L_M) \to H^0(S, L_M)_{|S_k} \to 0$$

et :

$$0 \to F_{k-1} \to H^0(S, L_M) \to H^0(S, L_M)_{|S_{k-1}} \to 0,$$

on voit que G_k s'identifie au noyau de l'application :

$$H^0(S, L_M)_{|S_k} \to H^0(S, L_M)_{|S_{k-1}}.$$

Ce noyau est constitué de sections sur S_k nulles sur S_{k-1}, donc est un sous-espace vectoriel de :

$$H_k := H^0\Big(X_k, \mathrm{Sym}^{T_{(k)}}(t_{A_M}^\vee) \otimes L_M\Big) \simeq \mathrm{Sym}^{T_{(k)}}(t_{A_M}^\vee) \otimes H^0(X_k, L_M),$$

puisque le fibré $\mathrm{Sym}^{T_{(k)}}(t_{A_M}^\vee)$ est constant. On choisit un modèle entier $H^0(\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_M)$ de $H^0(X_k, L_M)$ et sa métrique, ainsi qu'un modèle entier $t_{\mathcal{A}}$ de t_A comme en 3.3.2 ; on en déduit un modèle entier $t_{\mathcal{A}_M}$ de t_{A_M} (voir 3.4.3) ; on dispose aussi d'une métrique sur $t_{\mathcal{A}_M}$ et on en déduit une métrique sur $\mathrm{Sym}^{T_{(k)}}(t_{\mathcal{A}_M}^\vee)$ par passage au dual, tensorisation et quotient.

Remarque On a choisi ici de noter Sym le fibré symétrique, pour éviter toute confusion avec le schéma S.

On obtient donc un modèle entier $\mathcal{G}_k$ de G_k et par restriction des métriques un fibré hermitien $\overline{\mathcal{G}_k}$; sa pente maximale est majorée par le corollaire 3.31 :

Lemme 3.34 *Il existe une constante c_{12} ne dépendant que de A telle que :*

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{G}_k}) \leq c_{12}\Big(M^2\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) + \log\big(\deg(X)\big) + T_{(k)}\log(M)\Big).$$

Preuve
L'injection :

$$\mathcal{G}_k \hookrightarrow \mathcal{H}_k := \mathrm{Sym}^{T_{(k)}}(t_{\mathcal{A}_M}^\vee) \otimes H^0(\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_M)$$

est isométrique et on a, par définition de la pente maximale :

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{G}_k}) \leq \hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{H}_k}).$$

On peut donc appliquer le corollaire 3.31 avec les fermés X_k. En notant h_M la hauteur projective associée à L_M, on commence par remarquer qu'il existe une constante c_{12} ne dépendant que de A telle que :

$$\frac{h_M(X_k)}{\deg_M(X_k)} \leq \frac{\hat{h}_M(X_k)}{\deg_M(X_k)} + c_{12} \leq (M^2+1)\frac{\hat{h}(X_k)}{\deg(X_k)} + c_{12},$$

en comparant la hauteur projective et la hauteur canonique dans le plongement étiré (voir [DP02], propositions 3.9 et 3.14), puis grâce au lemme 3.32. L'inégalité des minima successifs (démontrée par Zhang dans [Zha95b], theorem 5.2) donne finalement, comme $M \geq 1$:

$$\frac{h_M(X_k)}{\deg_M(X_k)} \leq 2gM^2\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) + c_{12},$$

en remarquant que le minimum essentiel, tout comme le degré, n'est pas modifié lorsqu'on translate par des points d'ordre fini. Par choix de la base de dérivation sur $\mathcal{A}_M$ (en tenant compte de l'action de $[M]$ sur le tangent), on peut prendre :

$$c(t_{\mathcal{A}_M}) = \log(M).$$

Quitte à prendre la constante c_{12} assez grande (en fonction de A), on a donc :

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{H}_k}) \leq c_{12}\Big(M^2\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) + \log\big(\deg(X)\big) + T_{(k)}\log(M)\Big),$$

et le lemme suit.

□

On note ϕ le morphisme de restriction de E vers F et on pose, pour $k \in I$: $\phi_k : E_k \to G_k$ l'application linéaire déduite de ϕ et de la projection canonique : $F_{k-1} \to G_k$. Pour être en mesure d'écrire l'inégalité de pentes, il restera à démontrer que ϕ est injectif, ce qu'on fera à l'aide d'un lemme de zéros.

3.4.5 Choix des paramètres et hypothèse sur le minimum essentiel

Le choix des paramètres, auquel nous procédons maintenant, doit permettre d'assurer l'injectivité du morphisme ϕ et de contredire l'inégalité des pentes. La stratégie qui guide ce choix est la suivante :

– on définit les paramètres M, T_0, N_1 de telle manière que le terme (correspondant au fermé X non-translaté) :
$$\mathrm{rg}(\mathcal{G}_0)\big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{G}_0}) + h(\phi_0)\big),$$
soit inférieur à $\widehat{\deg}(\overline{\mathcal{E}_M})$.

– les relations entre les paramètres T_i et N_i sont telles que les contributions des termes suivants dans l'inégalité des pentes soient négatives.

– le paramètre d'étirement M est pris aussi petit que possible, ce qui permet de montrer que le morphisme ϕ est injectif ; il est aussi choisi de telle sorte que $M^2\hat{\mu}_{\text{ess}}(X)$ soit majoré par une constante, ce qui détermine la minoration obtenue pour le minimum essentiel.

On commence par introduire l'indice d'obstruction avec poids $\omega(x, X)$; celui-ci permet classiquement de prendre en compte la hauteur des dérivées dans un lemme de Siegel. Il aura un emploi similaire dans le cadre de la théorie des pentes.

Définition 3.13 *Soit X un fermé de Zariski propre de A et x un réel positif. On pose :*
$$\omega(x, X) = \inf\{(x\deg(Z))^{1/\mathrm{codim}(Z)}\},$$
où l'infimum porte sur l'ensemble des fermés de Zariski (lisses, équidimensionnels) propres de A contenant X.

On utilisera souvent le lemme suivant, qui compare l'indice d'obstruction simple, ne prenant en compte que les hypersurfaces, et l'indice d'obstruction avec poids :

Lemme 3.35 *Soit X un fermé propre (lisse et équidimensionnel) de A de codimension r. Il existe une constante c_{13} ne dépendant que de A telle que pour tout réel x positif :*
$$c_{13}x^{1/r}\omega(X) \leq \omega(x, X) \leq x\omega(X).$$

Preuve
L'inégalité de droite est claire et celle de gauche est une conséquence d'un résultat de Chardin (*confer* [Cha90], corollaire 2, page 8 et exemple 1, page 9). Remarquons qu'un fibré très ample étant fixé, seule la dimension du projectif dans lequel on plonge A intervient dans c_{13}.

□

On introduit maintenant la constante C_0 annoncée à la fin de l'introduction ; il s'agit d'une constante ne dépendant que de A, grande devant toutes les constantes intervenant dans ce problème, dans un sens explicitable. Soit Δ le paramètre :

$$\Delta = {C_0}^2 \log\big(3\deg(V)\big).$$

C'est à partir de ce paramètre, qui est *grosso modo* de l'ordre de $\log\big(\deg(V)\big)$, qu'on va définir tous les autres paramètres. Son avantage -comparé à $\log\big(\deg(V)\big)$- est d'être inconditionnellement grand devant les constantes intervenant au cours de la preuve, par choix de C_0.

En vue de la phase de descente, qui clôt la preuve, nous introduisons deux paramètres, qui permettront d'itérer toute la construction. Soit donc R un réel positif et ρ un entier vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\Delta \geq \log(R) \quad \text{et : } \quad 1 \leq \rho \leq \big(9(2r)^{r+1}\big)^{r-1}.$$

Dans le formalisme des pentes, on regarde la restriction d'une section aux translatés de V par n points de torsion, où $0 \leq n \leq r$. On prend un paramètre T_0 correspondant à la multiplicité initiale et on associe à tout $n \in [1; r]$ des paramètres spécifiques, à savoir une multiplicité T_n, et une borne N_n pour la norme des premiers de torsion, ce qui détermine un ensemble de premiers $\mathcal{P}_n$. Le lien entre ces paramètres est choisi de telle sorte que la contribution des termes de pente, pour des indices strictement positifs, soient négatifs. On prend d'abord :

$$N_n = \Delta^{\rho(2r)^{r+2-n}}.$$

Chaque N_n est donc négligeable devant le précédent ; les raisons de ce choix seront plus claires au cours de la preuve de la proposition 3.44, qui montrera *quasiment* l'injectivité du morphisme ϕ. Passons aux paramètres de multiplicités. Rappelons qu'on a posé : $n_\alpha = 1$ si $\alpha = g$ et $n_\alpha = 2$ sinon (voir 3.2.3). Le choix de cet indice correspond à la propriété métrique obtenue à la fin de la partie 3.2. Si $\alpha = g$, toutes les directions du tangent sont associées à une propriété métrique en $p^{-1/p}$; sinon, il existe des directions associées à des propriétés en p^{-1/p^2}. Par récurrence descendante, pour $0 \leq n \leq r-1$, on pose :

$$T_n = T_{n+1}\big(N_{n+1}^{n_\alpha}\Delta^2\big).$$

Puis on pose :

$$T_r = 1.$$

Ces formules déterminent complètement T_0 par itération :

$$T_0 = \Delta^{2r}\big(N_1 \cdots N_r\big)^{n_\alpha}.$$

On finit par le paramètre Q. Le but est de prendre M^2 assez grand pour que le premier terme dans la somme de l'inégalité de pentes soit plus petit que le degré de $\overline{\mathcal{E}_M}$. Cette condition s'apparente à celle qu'on obtiendrait par un lemme de Siegel dans une preuve classique de transcendance. Pour montrer l'injectivité de ϕ, on aura au contraire besoin que M^2 ne soit pas trop grand. On choisit donc :

$$M = \left[\Big(T_0\omega(\Delta T_0, X)\Big)^{1/2}\right] + 1.$$

On rappelle que V est une sous-variété propre de A qui n'est pas incluse dans un translaté de sous-variété abélienne propre, et que : $X = V + \Sigma_0$, où Σ_0 est un sous-groupe fini de A. On suppose que le cardinal de Σ_0 n'est pas trop gros :

$$\log(|\Sigma_0|) \leq \Delta. \tag{3.3}$$

Puis on fait l'hypothèse suivante sur le minimum essentiel de X :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) < \frac{\Delta}{T_0 \omega(\Delta T_0, X)}. \tag{3.4}$$

Notre but désormais sera d'obtenir une contradiction. Ceci fait, un rapide calcul nous donnera le théorème 3.6.

3.5 Utilisation de l'inégalité des pentes

On a déjà calculé le degré de $\overline{\mathcal{E}_M}$ et les pentes maximales. On veut maintenant majorer le rang des $\mathcal{G}_k$ (via les $\mathcal{H}_k$) et la hauteur des ϕ_k. Le calcul du rang des $\mathcal{H}_k$ correspond au calcul du rang du système linéaire dans un lemme de Siegel. Les estimations ultramétriques dans la hauteur des ϕ_k sont le point crucial de la preuve et ont été préparées par la partie 3.2. Les estimations archimédiennes, enfin, utilisent essentiellement l'inégalité de Cauchy (en plusieurs variables).

3.5.1 Majoration du rang

Pour majorer le rang des $\mathcal{G}_k$, on doit d'abord compter les dérivations puis estimer la fonction de Hilbert d'un fermé lisse et équidimensionnel assez précisément. Remarquons que dans notre cas, c'est une majoration du rang pour $k = 0$ qui est cruciale.

On rappelle qu'on a l'injection suivante :

$$\mathcal{G}_k \hookrightarrow \mathcal{H}_k = \mathrm{Sym}^{T_{(k)}}(t^{\vee}_{\mathcal{A}_M}) \otimes H^0(\mathcal{X}_k, \mathcal{L}_M).$$

On peut donc se contenter de majorer le rang du fibré de droite, qui est plus explicite.

Nombre de dérivations

Le calcul du nombre de dérivations est classique dans les preuves de transcendance. C'est un raisonnement de géométrie différentielle reposant sur l'"astuce de Philippon-Waldschmidt", qu'on trouve par exemple dans [AD03], lemme 2.5, et [DH00], 5.3, dans un contexte abélien.

Si X est un fermé lisse et équidimensionnel, L un fibré ample sur X et n un entier, on note $h^0(X, L^{\otimes n})$ la fonction de Hilbert en degré n associée à X et L. La prise en compte de l'indice d'obstruction avec poids nous amène à faire le raisonnement qui suit avec un fermé lisse et équidimensionnel Z_k contenant X_k, de codimension $r' \leq r$ (r étant la codimension commune à V et à tous ses translatés).

Proposition 3.36 *On a l'inégalité suivante pour le rang de $\mathcal{H}_k$:*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{H}_k) \leq T_{(k)}^{r'} h^0\big(Z_k, L_M\big).$$

Preuve

Commençons par remarquer que l'inclusion : $X_k \subset Z_k$, nous permet de nous ramener à la majoration du rang du fibré $\mathcal{G}_k$, dans lequel on a remplacé X_k par Z_k. Quitte à permuter les indices, on peut ensuite supposer que les dérivations $(\partial_{1,x} \ldots, \partial_{r',x})$ se projettent sur une base du cotangent pour $x \in U$, un ouvert dense de Z_k. Cet ouvert est défini par la non-annulation du déterminant d'une sous-matrice de taille maximale de la matrice jacobienne sur un ouvert affine.

On note $\mathcal{I}^{(k)}$ le faisceau d'idéaux associé au voisinage infinitésimal $V(Z_k, t_{A_M}, T_{(k)})$. Pour s une section sur Z_k, on va démontrer que :

$$\left(\forall x \in U,\ \forall \lambda \in \mathbb{N}^{r'} \text{ tel que } \sum_{i \leq r'} \lambda_i \leq T_{(k)} \ :\ \partial_x^\lambda s = 0\right) \implies s \in \mathcal{I}^{(k)}, \tag{3.5}$$

où on plonge $\mathbb{N}^{r'}$ dans $\mathbb{N}^g$ en complétant les r'-uplets par des zéros.

Faisons une première récurrence sur $T_{(k)}$. Le résultat est vrai pour $T_{(k)} = 0$. On le suppose vrai au rang $T_{(k)} - 1 \geq 0$. Soit $s \in H^0(Z_k, L_M)$ vérifiant l'assertion de gauche dans (3.5). Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_g)$ tels que :

$$\sum_{i \leq g} \lambda_i \leq T_{(k)}.$$

On fait une nouvelle récurrence sur la longueur résiduelle :

$$|\lambda|' = \lambda_{r'+1} + \ldots + \lambda_g,$$

pour montrer que $\partial_x^\lambda s = 0$ si $x \in U$. Pour $|\lambda|' = 0$, l'assertion de gauche dans (3.5) implique que : $\partial_x^\lambda s = 0$ pour tout $x \in U$. Supposons le résultat démontré pour $|\lambda|' - 1 \geq 0$ et soit $x \in U$. Quitte à renuméroter les indices, comme $|\lambda|' \geq 1$, on peut écrire :

$$\partial_x^\lambda s = \gamma \partial_{g,x} \circ \partial_x^\mu s;$$

pour une certaine constante γ (correspondant aux factorielles dans la définition des ∂_i). Comme $(\partial_{1,x}, \ldots, \partial_{r',x})$ se projettent sur une base du cotangent de Z_k en x, on décompose :

$$\partial_{g,x} = \delta_x + \delta'_x,$$

où δ_x est une combinaison linéaire des $\partial_{i,x}$ $(1 \leq i \leq r')$ et δ'_x est un vecteur du tangent de Z_k, dépendant de x. On a :

$$\delta_x \circ \partial_x^\mu s = 0,$$

par hypothèse de deuxième récurrence et : $\delta'_x \circ \partial_x^\mu s = 0$. En effet, $v \to \partial_v^\mu s$ est une section de $\mathcal{I}^{(k)}$ par hypothèse de première récurrence et l'égalité suit de la définition du tangent. Ainsi, $\partial_x^\lambda s = 0$ pour tout $x \in U$ donc sur Z_k tout entier car U est Zariski-dense dans Z_k. L'implication (3.5) est donc vérifiée.

On obtient ainsi une majoration du nombre de conditions linéaires à écrire pour être dans $\mathcal{I}^{(k)}$. Puisque le nombre de r'-uplets d'entiers de somme i est égal au terme binomial $\binom{i+r'-1}{r'-1}$ et puisque la dérivation est de degré 1 sur les idéaux homogènes :

$$\operatorname{rg}(\mathcal{H}_k) \leq \sum_{i=0}^{T_{(k)}-1} \binom{i+r'-1}{r'-1} h^0(Z_k, L_M) \leq \binom{T_{(k)}+r'-1}{r'-1} h^0(Z_k, L_M).$$

On a enfin la majoration :

$$\binom{T_{(k)}+r'-1}{r'-1} \leq T_{(k)}^{r'},$$

ce qui finit de prouver la proposition.

□

Remarque En suivant une approche légèrement différente, on peut chercher des résultats métriques aussi précis que possible, dans les cas intermédiaires où le p-rang est différent de 0 ou g, et mettre en oeuvre la méthode des pentes avec un système de *multiplicités penchées*. Le calcul du rang ci-dessus s'adapte bien à ce contexte, et on peut trouver, par exemple sous l'hypothèse que A est simple, des dérivations $(\partial_{1,x} \ldots, \partial_{r',x})$ se projetant sur une base du cotangent de Z_k sur un ouvert Zariski-dense, correspondant aux directions du tangent les moins "poussées" (associées aux directions de meilleures propriétés p-adiques). On utilise pour cela le fait que V, donc X et les X_k, ne sont pas incluses dans un translaté de sous-variété abélienne propre. Ceci permet d'avoir une majoration satisfaisante pour le rang ; il semble cependant difficile d'avoir une bonne majoration de la pente maximale de $\overline{\mathcal{H}_k}$ dans ce cas.

Majoration de la fonction de Hilbert géométrique

Pour majorer la fonction de Hilbert de la variété Z_k, on ne peut pas se contenter du théorème de Hilbert-Samuel géométrique. Celui-ci donne une estimation asymptotique, ce qui oblige à introduire une constante indéterminée dépendant de Z_k (et par suite de l'indice d'obstruction), ce qu'on souhaite éviter. On dispose d'une estimation inconditionnelle démontrée par Chardin, qui donne immédiatement :

Proposition 3.37 *On a :*

$$h^0(Z_k, L_M) \;\leq\; \binom{1+g-r'}{g-r'} \deg_M(Z_k).$$

Preuve

C'est une conséquence du résultat principal de [Cha88], valable pour un fermé lisse et équidimensionnel.

□

On regroupe les deux derniers résultats dans le corollaire suivant :

Corollaire 3.38

$$\mathrm{rg}(\mathcal{G}_k) \leq \frac{g(2M^2)^g}{\Delta T_0}.$$

Preuve

On commence par combiner les deux dernières propositions en remarquant que le coefficient binômial apparaissant dans la dernière est inférieur ou égal à g. Et on obtient, grâce au lemme 3.32 :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{H}_k) \leq gT_{(k)}^{r'}\deg_M(Z_k) \leq gT_{(k)}^{r'}(2M^2)^{g-r'}\deg(Z_k).$$

Ceci est vrai pour toute variété Z_k contenant X_k. Soit donc Z_k une sous-variété, de codimension r', telle que (on se ramène à X car le degré est invariant par translation) :

$$\omega(\Delta T_0, X) = \Big(\Delta T_0 \deg(Z_k)\Big)^{1/r'}.$$

On a donc, par choix du paramètre M :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{H}_k) \leq \frac{g(2M^2)^g}{\Delta T_0}\left(\frac{T_{(k)}}{T_0}\frac{\omega(\Delta T_0, X)}{\omega(\Delta T_0, X)}\right)^{r'},$$

et le résultat suit puisque $T_{(k)} \leq T_0$.

□

3.5.2 Normes ultramétriques des morphismes

Soit $k \in I$ un entier, et $\mathfrak{p}$ un premier de $\bigcup_{1\leq n\leq r}\mathcal{P}_n$ au-dessus d'un nombre premier p. Pour $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$, un idéal premier de K', la norme $\mathfrak{q}$-adique de ϕ_k n'est correctement majorée que si la k-ème étape dans la filtration correspond à la translation par un point de p-torsion. Autrement, on se contente d'une majoration simple. On introduit donc la définition suivante :

Définition 3.14 *On dit que k est n-lié à $\mathfrak{q}$ si le point $P_k = P_{k_1} + \cdots + P_{k_n}$ associé à k est tel que P_{k_n} soit un point de p-torsion non-nul se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$, et $\mathfrak{q}/p$.*

La proposition qui suit est une conséquence du lemme p-adique de la partie 3.

Proposition 3.39 *Pour tout $k \in I$, et tout idéal premier $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ de K', on a :*

$$\log \|\phi_k\|_{\mathfrak{q}} \leq 0.$$

De plus, si k est n-lié à $\mathfrak{q}$, on a :

$$\log \|\phi_k\|_{\mathfrak{q}} \leq -n_{\mathfrak{q}}\big(T_{n-1} - T_n\big)\frac{\log p}{p^{n_\alpha}}.$$

Remarque On rappelle que n_α vaut 1 si $\alpha = g$ (densité positive de premiers de réduction ordinaire) et vaut 2 sinon (voir 3.2.3).

Preuve

Soit $k \in I$ et $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ un idéal premier de K'. Soit s un élément de E_k tel que : $\|s\|_{\mathfrak{q}} \leq 1$; soit $\mathcal{X}_k$ le modèle entier de X_k choisi dans la définition de $\mathcal{G}_k$, et x un élément de $\mathcal{X}_k$. Soit aussi $\lambda \in \mathbb{N}^g$ tel que $\sum_{1\leq i\leq g}\lambda_i \leq T_{(k)}$. On a :

$$\partial_x^\lambda s = \partial^\lambda(s \circ \tau_x).$$

Par définition de $\mathcal{P}_A$, les coefficients de τ_x sont $\mathfrak{p}$-entiers (voir (3.1)). De plus, le choix de $\mathcal{P}_A$ permet aussi que l'opérateur différentiel ∂^λ appliqué en chaque fonction abélienne s'exprime comme un polynôme en les fonctions abéliennes à coefficients $\mathfrak{p}$-entiers (par (3.2)). En remarquant que notre base de dérivations sur A_M est obtenue par combinaisons linéaires à coefficients entiers de dérivations sur A, on a :

$$|\partial_x^\lambda s|_{\mathfrak{q}} \leq 1,$$

ceci étant vrai pour tout $x \in \mathcal{X}_k$ et tout $\lambda \in \mathbb{N}^g$ tel que $\sum \lambda_i \leq T_{(k)}$, on en déduit :

$$\|\phi_k(s)\|_{\mathfrak{q}} \leq 1.$$

La première partie de la proposition est donc démontrée en passant au sup sur $s \in E_k$.

Supposons que k soit n-lié à $\mathfrak{q}$. On désigne par $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_g)$ une base de paramètres correspondant à une base orthonormale pour la forme de Riemann sur t_A. On reprend les notations convenues avant la proposition 3.17. L'isomorphisme :

$$\widehat{\mathcal{A}}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}} \simeq \mathcal{O}_\mathfrak{p}[[t_1, \ldots, t_g]],$$

induit une application :

$$H^0(\mathcal{A}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}, \mathcal{O}_{\mathcal{A}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}}) \to \mathcal{O}_\mathfrak{p}[[t_1, \ldots, t_g]].$$

Celle-ci associe à l'image d'une section f de $H^0(\mathcal{A}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}, \mathcal{O}_{\mathcal{A}_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}})$ son développement de Taylor en 0 :

$$\sum_{\mu \in \mathbb{N}^g} (\partial^\mu f)\ \mathbf{t}^\mu.$$

On écrit $P_k = P_{k'} + P_{k_n}$, et pour $x \in \mathcal{X}_k : x = x' + P_{k_n}$. Le point de torsion P_{k_n} se réduit sur 0 modulo $\mathfrak{q}$. On en déduit, par la proposition 3.17, les majorations suivantes :

$$\forall 1 \leq i \leq g : |t_i(P_{k_n})|_\mathfrak{q} \leq p^{-n_\mathfrak{q}/p^{n\alpha}}.$$

De plus, on a encore, pour tout $\mu \in \mathbb{N}^g$:

$$|\partial^\mu (s \circ \tau_{x'})|_\mathfrak{q} \leq 1.$$

La norme étant ultramétrique, ceci suffit à voir que la série de Taylor de $\partial^\lambda(s \circ \tau_{x'})$ converge ; on en déduit l'égalité :

$$\partial_x^\lambda s = \sum_{\mu \geq \lambda \in \mathbb{N}^g} \partial^\mu (s \circ \tau_{x'}) \mathbf{t}(P_{k_n})^{\mu - \lambda},$$

où :

$$\mu \geq \lambda \Leftrightarrow \forall i \leq g :\ \mu_i \geq \lambda_i.$$

Par définition de E_k, s est nulle à un ordre T_{n-1} en x', donc si $\partial^\mu(s \circ \tau_{x'}) \neq 0$, on a :

$$\sum_{i \leq g} \mu_i > T_{n-1}.$$

On en déduit :

$$\left| \prod_{i=1}^g t_i(P_{k_n})^{\mu_i - \lambda_i} \right|_\mathfrak{q} \leq p^{-n_\mathfrak{q}(T_{n-1} - T_n)/p^{n\alpha}}.$$

La norme étant ultramétrique, l'inégalité fine de la proposition en résulte.

□

3.5.3 Normes archimédiennes des morphismes d'évaluation

Soit k un entier, et σ une place archimédienne de K' ; tous les ϕ_k sont définis sur K'. Le but de ce paragraphe est de majorer $\|\phi_k\|_\sigma$, par des méthodes d'analyse complexe, en particulier l'inégalité de Cauchy. On suit pour cela le paragraphe 5.9 de [Gau06]. Cette majoration sera la même pour toutes les places archimédiennes ; plus précisément, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.40 *Il existe une constante c_{16} ne dépendant que de A telle que :*

$$\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \Big(\sum_{\sigma : K' \hookrightarrow \mathbb{C}} \log \|\phi_k\|_\sigma \Big) \leq c_{16} T_{(k)} \log(M).$$

Preuve

Soit $s \in E_k \otimes \mathbb{C}$ et $x \in \mathcal{X}_k$. On a alors :

$$\phi_k(s)(x) \in \left(S^{T_{(k)}} t^\vee_{\mathcal{A}_M} \otimes x^* \mathcal{L}_M\right) \otimes_\sigma \mathbb{C},$$

qui est isomorphe (non isométriquement) à :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S^{T_{(k)}} t_{\mathcal{A}_{M,\sigma}}, x^* \mathcal{L}_{M,\sigma}).$$

Si on fixe une base d'ouverts affines, l'image de $\phi_k(s)(x)$ par cet isomorphisme est le morphisme qui associe à une dérivation D d'ordre $T_{(k)}$ la valeur de Ds en x (la dérivation D donnant par translation une dérivation en x). On note $\Theta_{T_{(k)}}$ cet isomorphisme qui est défini dans [Gau06], 4.1, où sa norme d'opérateur, ainsi que celle de son inverse, sont majorées :

$$\left\|\Theta_{T_{(k)}}\right\|_\sigma \leq \max_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^g, |\mathbf{i}| = T_{(k)}} \left\{ \frac{T_{(k)}!}{\mathbf{i}!} \right\} \text{ et } \left\|\Theta^{-1}_{T_{(k)}}\right\|_\sigma \leq 1.$$

On en déduit que :

$$\|\phi_k(s)(x)\|_\sigma \leq \left\|\Theta_{T_{(k)}}\left(\phi_k(s)(x)\right)\right\|_\sigma.$$

Soit $(f_{1,\sigma}, \ldots, f_{g,\sigma})$ une base de $t_{\mathcal{A}_{M,\sigma}}$ (composée à partir d'une base orthonormée de $t_{\mathcal{A}}$ pour la forme de Riemann induite par σ), correspondant à des dérivations $(\partial_{1,\sigma}, \ldots, \partial_{g,\sigma})$. Soit D une dérivation d'ordre $T_{(k)}$ le long de $t_{\mathcal{A}_{M,\sigma}}$. On écrit $D = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^g, |\mathbf{i}| = T_{(k)}} d_{\mathbf{i}} \partial^{i_1}_{1,\sigma} \cdots \partial^{i_g}_{g,\sigma}$. La norme sur $S^{T_{(k)}} t_{\mathcal{A}_{M,\sigma}}$ étant la norme quotient déduite de la projection : $t^{\otimes T_{(k)}}_{\mathcal{A}_{M,\sigma}} \to S^{T_{(k)}} t_{\mathcal{A}_{M,\sigma}}$, on a :

$$\|D\|^2 = \sum_{|\mathbf{i}| = T_{(k)}} |d_{\mathbf{i}}|^2 \frac{\mathbf{i}!}{T_{(k)}!} \geq \Big(\sum_{|\mathbf{i}| = T_{(k)}} |d_{\mathbf{i}}| \Big)^2 \times g^{-T_{(k)}}.$$

De plus, on a :

$$\|Ds(x)\| \leq \sum_{|\mathbf{i}| = T_{(k)}} |d_{\mathbf{i}}| \left\| (\partial^{i_1}_{1,\sigma} \cdots \partial^{i_g}_{g,\sigma}) s(x) \right\|,$$

et on en déduit :

$$\|\phi_k(s)(x)\|_\sigma \leq g^{T_{(k)}/2} \max_{|\mathbf{i}| = T_{(k)}} \left\{ \left\| (\partial^{i_1}_{1,\sigma} \cdots \partial^{i_g}_{g,\sigma}) s(x) \right\| \right\}.$$

En reprenant la définition de la métrique cubiste, on peut se ramener à la fonction θ correspondant à s ; notons que via le plongement étiré, la section s est une section sur A de degré $\leq 2M^2$. On note $\mathbf{u}$ un logarithme de $\sigma(x)$ ayant une norme hermitienne minimale sur $\mathbb{C}^g$. En tenant compte de l'action de ϕ_M sur les dérivations, il vient :

$$\|\phi_k(s)(x)\|_\sigma \leq (Q\sqrt{g})^{T_{(k)}} e^{-3\pi M^2 \|\mathbf{u}\|^2_\sigma} \times \max_{|\mathbf{i}| = T_{(k)}} \left\{ \left| \frac{1}{\mathbf{i}!} \Big(\frac{\partial}{\partial z} \Big)^{\mathbf{i}} \theta(\mathbf{u} + \mathbf{z})_{|\mathbf{z}=0} \right| \right\}.$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy appliquée à θ, pour tout réel $r_C > 0$ (à ne pas confondre avec r, qui désigne la codimension de V), on a :

$$\max_{|\mathbf{i}| = T_{(k)}} \left\{ \left| \frac{1}{\mathbf{i}!} \Big(\frac{\partial}{\partial z} \Big)^{\mathbf{i}} \theta(\mathbf{u} + \mathbf{z})_{|\mathbf{z}=0} \right| \right\} \leq \left(\frac{1}{r_C^{T_{(k)}}} \right) \sup_{\|\mathbf{z}\|_\sigma \leq r_C} |\theta(\mathbf{u} + \mathbf{z})|.$$

En revenant aux métriques cubistes, on trouve :

$$\|\phi_k(s)(x)\|_\sigma \leq \left(\frac{M\sqrt{g}}{r_C}\right)^{T_{(k)}} e^{3\pi M^2(r_C^2+2r_C\|\mathbf{u}\|_\sigma)} \|s\|_{\sup,\sigma}.$$

On choisit alors r_C de façon à optimiser la majoration :

$$r_C = \frac{\sqrt{g}}{M^2\max\{1,\|\mathbf{u}\|_\sigma\}}.$$

Comme $M^2 \geq \sqrt{g}$ (par le choix des paramètres), cela donne :

$$\|\phi_k(s)(x)\|_\sigma \leq \left(M^3\max\{1,\|\mathbf{u}\|_\sigma\}\right)^{T_{(k)}} e^{9\pi g} \|s\|_{\sup,\sigma}.$$

La norme sur $\mathcal{G}_k$ étant la norme de Löwner $\|.\|_L$ associée à la norme du sup, elle est plus petite que celle-ci et on a finalement :

$$\|\phi_k(s)\|_{L,\sigma} \leq \left(M^3\max\{1,\|\mathbf{u}\|_\sigma\}\right)^{T_{(k)}} e^{9\pi g} \|s\|_{\sup,\sigma},$$

Et, vu le choix de la norme L^2 sur $\mathcal{E}_M$:

$$\|\phi_k\|_\sigma \leq \left(M^3\max\{1,\|\mathbf{u}\|_\sigma\}\right)^{T_{(k)}} e^{9\pi g} \sup_{f\in\mathcal{E}_M, s\neq 0}\left\{\frac{\|s\|_{\sup,\sigma}}{\|s\|_{\mathrm{L}^2,\sigma}}\right\}.$$

La remarque 4.18 de [Gau06] montre que pour une certaine constante c_{14} ne dépendant que de g :

$$\frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\sum_{\sigma:K'\to\mathbb{C}} \operatorname{logmax}\{1,\|\mathbf{u}\|_\sigma\} \leq c_{14}\max\{1,\log(h_F(A)),\log(h^0(A,L))\}.$$

De plus, d'après la même référence, lemme 4.16, il existe une autre constante c_{15} telle que :

$$\log\ \sup_{s\in\mathcal{E}_{\mathcal{M}\sigma}, s\neq 0}\left\{\frac{\|s\|_{\sup,\sigma}}{\|s\|_{\mathrm{L}^2,\sigma}}\right\} \leq c_{15}\max\{1,\log(h_F(A)),\log(h^0(A,L))\}\log(M^2).$$

La proposition suit en sommant sur les places archimédiennes, pour une constante c_{16} dépendant de A.

□

Remarques On aurait pu choisir différemment le paramètre r_C issu de l'inégalité de Cauchy, en prenant à la place : $r'_C = r_C \times M^2$. On aurait alors obtenu une majoration par $c_{16}(T_{(k)}+M^2)$, qui aurait été plus mauvaise dans notre contexte puisque tous les paramètres sauf M sont logarithmiques en $\deg(X)$.

Jusqu'à la phase de descente (où cela ne semble plus possible), on pourrait travailler avec des termes en $\log\Big(\omega(V)\Big)$ à la place de $\log\Big(\deg(V)\Big)$, quitte à améliorer la proposition 3.29.

3.5.4 Inégalité de pentes et conséquences

Pour pouvoir appliquer le théorème des pentes, on doit s'assurer que le morphisme ϕ est injectif. On y travaillera dans la partie suivante, et on suppose par avance ici cette injectivité.

Contradiction sous l'injectivité de ϕ

On suppose par l'absurde que (3.4) est vérifié. Puisqu'on a aussi supposé que ϕ est injectif, on peut donc utiliser l'inégalité des pentes du lemme 3.22. On a donc :

$$\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{E}_M} \leq \sum_{k\in I} \dim(E_k/E_{k+1})\big(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{G}}_k) + h(\phi_k)\big).$$

Soit $k > 0$ un entier ; on veut d'abord montrer que la contribution du k-ème terme dans la somme précédente est négative. On regroupe pour commencer les estimations faites sur le morphisme ϕ_k, à savoir les majorations archimédiennes et ultramétriques. L'entier k est par définition n-lié à tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{O}_{K'}$ au-dessus d'un seul premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{P}_A$. On note p son image dans $\mathbb{Z}$; on a alors (par les propositions 3.39 et 3.40) :

$$\begin{aligned} h(\phi_k) = \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\sum_{v\in M(K')}\log\|\phi_k\|_v &\leq c_{16}T_n\log(M) - \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\sum_{\mathfrak{q}/\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{q}}\big(T_{n-1}-T_n\big)\frac{\log p}{p^{n_\alpha}} \\ &\leq c_{16}T_n\log(M) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\big(T_{n-1}-T_n\big)\frac{\log p}{p^{n_\alpha}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité classique (voir[Lan86], II, Corollary 1 to Theorem 2) :

$$\sum_{\mathfrak{q}/\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{q}} = [K':K].$$

On majore ensuite :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{G}_k}) + h(\phi_k) &\leq c_{17}\Big(M^2\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) + T_n\log(M) + \log\big(\deg(X)\big)\Big) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}T_{n-1}\frac{\log p}{p^{n_\alpha}} \\ &\leq c_{17}\Big(M^2\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) + T_n\log(M) + \log\big(\deg(X)\big)\Big) - \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}T_{n-1}\frac{\log N_n}{N_n^{n_\alpha}}, \end{aligned}$$

pour une constante c_{17} ne dépendant que de A, car $p \leq N_n$ et la fonction $\log(x)/x^{n_\alpha}$ est décroissante pour $x \geq 3$. Le choix du paramètre M (*confer* 3.4.5) et l'hypothèse (3.4) sur le minimum essentiel donnent :

$$M^2\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) \leq 2\Delta\frac{T_0\omega(\Delta T_0, X)}{T_0\omega(\Delta T_0, X)} \leq 2\Delta.$$

Puis :

$$\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{G}_k}) + h(\phi_k) \quad \leq \quad 5c_{17}\Delta T_n - \frac{T_{n-1}}{N_n^{n_\alpha}} \leq 0.$$

On a d'abord utilisé l'hypothèse (3.3) sur Σ_0, puis on a majoré $\log(M)$ par Δ grâce au lemme 3.35, en comparant $\log\Delta$ à Δ (quitte à prendre C_0 assez grand). On a ensuite éliminé $[K:\mathbb{Q}]$

avec $\log N_n$ (pour C_0 assez grand là encore). La dernière inégalité résulte de la définition des T_n par récurrence descendante (voir encore le paragraphe 3.4.5).

Il suit, grâce à l'estimation du terme de hauteur qu'on vient de faire (qui est encore valable pour $k=0$, sans le raffinement ultramétrique) :

$$\widehat{\deg}\ \overline{\mathcal{E}_M} \leq \dim(E_0/E_1)\big(\hat{\mu}_{\max}(\overline{\mathcal{G}_0}) + h(\phi_0)\big) \leq \mathrm{rg}(\mathcal{G}_0)(5c_{17}\Delta T_0).$$

On a pu remplacer $\dim(E_0/E_1)$ par $\mathrm{rg}(\mathcal{G}_0)$ en utilisant l'injectivité de ϕ, et parce que la hauteur est majorée par un terme positif. En combinant le lemme 3.33 (il est clair par le choix des paramètres que $\log(M)$ est plus grand que n'importe quelle constante), la proposition 3.38 avec $k=0$, et on obtient :

$$c_{11}(M)^{2g}\log(M) \leq \frac{g(2M^2)^g}{\Delta T_0}(5c_{17}\Delta T_0),$$

et on rappelle que $c_{11} > 0$. Puis :

$$\log(M) \leq \frac{5g2^g c_{17}}{c_{11}}.$$

On en déduit une contradiction, puisque $\log(M)$ est plus grand que n'importe quelle constante du problème, par définition de Δ.

□

3.6 Lemme de zéros et injectivité du morphisme

Il nous reste donc à nous assurer que le morphisme de restriction est injectif. On procède par l'absurde, en commençant par écrire un lemme de zéros, et le choix des paramètres fait dans 3.4.5 doit mener à une contradiction. Ceci s'avère assez délicat, et on y parvient en deux étapes. La première est de nature combinatoire (paragraphe 3.6.2), et mène à une *quasi-contradiction* en 3.6.3 ; la seconde est un argument de descente sur des variétés (paragraphe 3.6.4), qui imposera de travailler en petite codimension : $r \leq 2$.

3.6.1 Lemme de zéros

Notre lemme de zéros s'inscrit dans la tradition des théorèmes démontrés par P. Philippon, dont on reprend le formalisme (*confer* [Phi95]). Ce lemme est l'analogue abélien du théorème utilisé dans [AD03], à une différence près : on prend en compte les multiplicités, et ce à l'aide de la notion de dessous d'escalier, qui permet d'envisager des multiplicités variables et différentes selon les directions. Dans le cas qui nous intéresse, il est utile d'envisager la multiplicité finale dans le lemme de zéros, qui permet une légère amélioration par rapport au cas torique. On ne fait pas usage, cependant, de multiplicités différentes selon les directions.

Remarque On a pris la multiplicité finale T_r dans l'inégalité de pentes égale à 1 mais la multiplicité finale dans le lemme de zéros est un certain T_{r_0}, pour $r_0 \leq r$, et n'est pas forcément nulle.

Dans la suite, si $l \in \mathbb{N}$ et Z est une sous-variété de A, on notera $\{l\}Z$ le cycle Z avec la multiplicité l. Cette notation peu conventionnelle s'explique par l'emploi, dans ce genre de problème, de la notation $[l]Z$ pour désigner l'image de Z sous la multiplication par l.

Faisons d'abord quelques rappels nécessaires pour écrire le lemme de zéros. Soit A une variété abélienne munie d'une fibré ample L ; on considère la base de dérivations sur A définie en 3.4.3. Un ensemble $E \subset \mathbb{N}^g$ est un escalier si pour tout $\beta \in E$, on a $\beta + \mathbb{N}^g \subset E$. Un sous-ensemble de $\mathbb{N}^g$ est un dessous d'escalier s'il est le complémentaire d'un escalier. Si W est le dessous d'un escalier E de $\mathbb{N}^g$, et si on a des indices : $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq g$, on note $\mathcal{C}_{i_1,\ldots,i_d}(W)$ l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}_+^d$ de la trace de E sur la d-face de $\mathbb{N}^g$ définie par $(i_1, \ldots, i_d)$.

On appelle aussi ensemble pondéré un sous-ensemble Σ de $\mathbb{N}^g \times A$ tel que pour tout $x \in A$, l'ensemble $W_{x,\Sigma} = (\mathbb{N}^g \times \{x\}) \cap \Sigma$ soit un dessous d'escalier (éventuellement vide). On appelle support de Σ, noté $\mathrm{Supp}(\Sigma)$, sa projection sur A. Si Σ et Σ' sont deux ensembles pondérés, on définit $\Sigma + \Sigma'$ comme l'ensemble des couples $(x + x', \lambda + \lambda')$, pour $(x, \lambda) \in \Sigma$, et $(x', \lambda') \in \Sigma'$; c'est aussi un ensemble pondéré. On a $E + \emptyset = \emptyset$ et si E est un sous-ensemble de A, on l'identifie à l'ensemble pondéré $\{0\} \times E$.

On dit que $f \in H^0(A, L)$ s'annule sur un ensemble pondéré Σ si pour tout $(x, \lambda) \in \Sigma$, on a : $\partial_x^\lambda f = 0$. Si V est une sous-variété de codimension r de A et W un dessous d'escalier, on pose :

$$m_W(V) = r! \max_{x \in V, 1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq g} \{\mathrm{vol}(\mathbb{R}_+^r / \mathcal{C}_{i_1,\ldots,i_d}(W))\},$$

où le maximum porte sur $x \in X$ et les d-faces de $\mathbb{N}^g$ telles que $(\partial_{i_1,x}, \ldots, \partial_{i_d,x})$ forment une base du quotient $t_{A,x}/t_{V,x}$.

On peut maintenant énoncer le théorème dont on aura besoin :

Théorème 3.41 *Soit V une sous-variété irréductible de A, de codimension r, $\tilde{M} \geq 1$ un entier et $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_r$ des ensembles pondérés finis à support dans $A(\overline{K})$ tels que pour tout $1 \leq n \leq r$:*

$$\mathrm{Supp}(\Sigma_n) = \bigcup_{l=1\ldots s_n} H_{n,l},$$

où les $H_{n,l}$ sont des sous-groupes de $A(\overline{K})$; on suppose aussi que les dessous d'escaliers associés aux Σ_n ne dépendent que de n. Soit de plus $f \in H^0(A, L^{\otimes \tilde{M}})$, non nulle, qui s'annule sur $V + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_r$. Alors il existe une constante c_{18} ne dépendant que de A, deux entiers $1 \leq r_0 \leq r_1 \leq r$, des indices $j_0, \ldots, j_{r_0 - 1}$ avec $1 \leq j_l \leq s_l$ pour $l = 0 \ldots r_0 - 1$, et des sous-variétés algébriques Z_j $(j = 1, \ldots, s_{r_0})$ de A, propres, $\overline{K}$-irréductibles et de codimension r_1, contenant au moins une composante isolée de

$$H_{0,j_0} + \cdots + H_{r_0-1, j_{r_0-1}} + \Sigma_{r_0} + \cdots + \Sigma_r + V,$$

telles que :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{x \in H_{0,j_0} + \cdots + H_{r_0-1,j_{r_0-1}}} \ \bigcup_{j=1\ldots s_{r_0},\ y \in H_{r_0,j}} \{m_{W_y}(x + y + Z_j)\}\big(x + y + Z_j\big)\Bigg) \leq c_{18} \tilde{M}^{r_1}.$$

Preuve

Le même théorème dans le cadre plus général des groupes algébriques est l'objet d'un article en préparation de David et Amoroso ([AD07]).

□

3.6.2 Degré d'une sous-variété obstructrice

Il s'agit d'adapter le lemme de zéros au cas qui nous intéresse ; le degré $\tilde{M}$ du théorème qu'on vient d'énoncer sera égal à M^2+1 dans notre cas.

On reprend les hypothèses et notations des parties 3.4 et 3.5 et on rappelle que :

$$X = V + \Sigma_0,$$

où V est une variété irréductible et $\Sigma_0 = H_0$, un sous-groupe fini de A. On note B le cardinal de H_0 et on suppose enfin que B est premier à tous les premiers des $\mathcal{P}_{n,\mathbb{Z}}$, pour $1 \leq n \leq r$. Si p est un nombre premier de $\bigcup_{1\leq n\leq r} \mathcal{P}_{n,\mathbb{Z}}$ et $\mathfrak{q}/p$ dans K', on désigne par : $\mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}$ le groupe des points de p-torsion sur $\overline{K'}$ se réduisant sur 0 modulo $\mathfrak{q}$.

Si $l = \prod_{n=1}^{r} p_n$ avec, pour tout $1 \leq n \leq r$: $p_n \in \mathcal{P}_{n,\mathbb{Z}}$ ou $p_n = 1$, on note :

$$\mathrm{Ker}[l]^* = \bigoplus_n \mathrm{Ker}[p_n]_{\mathfrak{q}_n}.$$

Cette somme est bien directe car le choix des paramètres implique que les $\mathcal{P}_{n,\mathbb{Z}}$ sont deux-à-deux disjoints. Notre but, jusqu'à la fin de cette partie, sera de démontrer la proposition suivante, pour un bon choix du fermé X (dont dépend la construction du morphisme) :

Proposition 3.42 *Le morphisme $\phi : E \to F$ est injectif.*

On va supposer que ce n'est pas le cas et obtenir une contradiction en appliquant le lemme de zéros du paragraphe précédent. Celui-ci permet de majorer le degré d'une réunion de sous-variétés. On souhaite se ramener à une seule sous-variété obstructrice, et utiliser le fait que la réunion est largement distincte. On y arrive par un travail sur le stabilisateur. Commençons donc par une définition :

Définition 3.15 *Si Z est une variété propre et irréductible de A, on appelle stabilisateur de Z, noté Stab(Z), l'ensemble :*

$$\{x \in A, x + Z = Z\} = \bigcap_{x\in Z} (Z - x).$$

On a les propriétés suivantes pour le stabilisateur :

$$\dim(\mathrm{Stab}(Z)) \leq \dim(Z) \ \text{ et : } \ \deg(\mathrm{Stab}(Z)) \leq \deg(Z)^{\dim(Z)+1}.$$

La première suit de la définition, et la preuve torique de la seconde (dans [AD99], 2) se transpose sans changement aux variétés abéliennes.

On peut maintenant démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.43 *Il existe une constante c_{20}, des entiers $r_0 \leq r_1 \leq r$ strictement positifs, un entier $l \in \mathcal{P}_{1,\mathbb{Z}} \cdots \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}$, et une sous-variété Z de A, propre et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductible, de codimension r_1 contenant un translaté de V par un point de torsion, tels que :*

$$T_{r_0}^{r_1} |\mathcal{P}_{r,\mathbb{Z}}| \frac{B}{|H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z)|} \frac{l^{2g-\alpha}}{|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)|} \deg(Z) \leq c_{20} M^{2r_1} \Delta.$$

Remarque Pour simplifier les calculs qui viennent, on pose :

$$f(\Sigma_0, Z) = \frac{B}{|\mathrm{Stab}(Z) \cap H_0|}.$$

Preuve

Si le morphisme ϕ n'est pas injectif, il existe une section $f \in H^0(A, L^{\otimes M^2+1})$ qui s'annule sur :

$$\bigcup_{i\in I} V(X_i, t_A, T_{(i)}).$$

Par définition des voisinages infinitésimaux, ceci implique que f s'annule sur :

$$X + \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_r,$$

où l'ensemble Σ_n, pour $1 \leq n \leq r$, est pondéré de support :

$$\mathrm{Supp}(\Sigma_n) = \mathrm{Tor}_{A,n} = \bigcup_{\mathfrak{q}/\mathfrak{p}\in\mathcal{P}_n} \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}};$$

cet ensemble est associé au dessous d'escalier simple et ne dépendant que de n défini par :

$$\sum_{k=1}^{g} \lambda_k \leq T_n.$$

Il existe donc, par le théorème précédent, deux entiers r_0 et r_1 tels que : $r_0 \leq r_1 \leq r$, des couples d'idéaux premiers $(p_1, \mathfrak{q}_1), \ldots, (p_{r_0-1}, \mathfrak{q}_{r_0-1})$ avec $\mathfrak{q}_n \in \mathcal{P}_n$ (pour $1 \leq n \leq r_0 - 1$) et des sous-variétés algébriques $Z_{\mathfrak{q}}$ de A (pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}_{r_0}$), propres et $\overline{\mathbb{Q}}$-irréductibles, de codimension r_1, tels que :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{\mathfrak{q}\in\mathcal{P}_{r_0}} \bigcup_{\zeta\in\Sigma_0\oplus\bigoplus_n \mathrm{Ker}[p_n]_{\mathfrak{q}_n}} \{m_{W_{\zeta_{r_0}}}(\zeta + Z_{\mathfrak{q}})\}\big(\zeta + Z_{\mathfrak{q}}\big)\Bigg) \leq c_{18} M^{2r_1},$$

où on a écrit, pour unifier l'écriture dans la somme directe : $\mathfrak{q}_{r_0} = \mathfrak{q}$; et où ζ_{r_0} est la composante selon r_0 de ζ dans la somme directe. De plus, pour tout $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}_{r_0}$, la variété $Z_{\mathfrak{q}}$ contient un translaté de V par un point de torsion.

Le terme de multiplicité se calcule immédiatement. Soit $\mathfrak{q} \in \mathcal{P}_{r_0}$ et $\zeta \in \Sigma_0 \oplus \bigoplus_n \mathrm{Ker}[p_n]_{\mathfrak{q}_n}$; on a :

$$m_{W_{\zeta_{r_0}}}(\zeta + Z_{\mathfrak{q}}) = r_1! T_{r_0}^{r_1} \mathrm{vol}(\{u_1 + \cdots + u_{r_1} < 1\}) = T_{r_0}^{r_1}.$$

Cette multiplicité ne dépend pas de la variété dans la réunion donc on peut la mettre en facteur.

Les entiers r_0 et r_1 sont déjà déterminés ; posons $l_0 = p_1 \cdots p_{r_0-1}$. Choisissons, pour tout premier $p \in \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}$, un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{P}_{r_0}$ divisant p tel que la quantité :

$$f(\Sigma_0, Z_{\mathfrak{q}}) \frac{(l_0 p)^{2g-\alpha}}{|\mathrm{Ker}[l_0 p]^* \cap \mathrm{Stab}(Z_{\mathfrak{q}})|} \deg(Z_{\mathfrak{q}})$$

soit minimale parmi les premiers de $\mathcal{P}_{r_0}$divisant p. Prenons aussi $\mathfrak{q}_{r_0} \in \mathcal{P}_{r_0}$ (et p_{r_0}) tels que cette même quantité soit minimale parmi tous les premiers de $\mathcal{P}_{r_0}$. On pose $l = l_0 p_{r_0}$ et $Z = Z_{\mathfrak{q}_{r_0}}$. Il suffit donc de majorer cette quantité pour obtenir la proposition. Rappelons que la somme :

$$\mathrm{Ker}[l_0]^* = \bigoplus_{n=1}^{r_0-1} \mathrm{Ker}[p_n]_{\mathfrak{q}_n}$$

est bien directe car, les premiers p_n étant deux-à-deux distincts, on peut écrire une relation de Bézout entre un des p_n et tous les autres. On partitionne $\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}$ en introduisant la relation d'équivalence suivante :

$$p \sim p' \Longleftrightarrow \left(\exists\ \gamma \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^* \oplus \bigoplus_{p_i \in \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}} \left(\mathrm{Ker}[p_i]_{\mathfrak{q}_i}\right),\ \text{tel que}\ \gamma + Z_{\mathfrak{q}} = Z_{\mathfrak{q}'}\right),$$

et on note $(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_s)$ les différentes classes d'équivalence associées. Les variétés $Z_{\mathfrak{q}}$ sont irréductibles et il en va de même pour chacune de leurs translatées. Si p et p' appartiennent à des classes différentes, les réunions

$$\bigcup_{\zeta \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^* \oplus \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}} \zeta + Z_{\mathfrak{q}}$$

n'ont aucune composante en commun et on peut additionner les degrés. Le choix d'un seul idéal de $\mathcal{P}_{r_0}$ au-dessus d'un nombre premier restreint la réunion ; on a donc :

$$T_{(r_0)}^{r_1} \sum_{j=1}^{s} \deg\left(\bigcup_{p \in \mathcal{C}_j} \bigcup_{\zeta \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^* \oplus \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}} \zeta + Z_{\mathfrak{q}}\right) \leq c_{18} M^{2r_1}. \tag{3.6}$$

Soit $p \in \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}$ et $\mathfrak{q}$ l'idéal qui lui est associé ; le stabilisateur de $Z_{\mathfrak{q}}$ ne dépend que de la classe d'équivalence de p puisque si p' (associé à $\mathfrak{q}'$) est dans la même classe que p, $Z_{\mathfrak{q}'}$ est un translaté de $Z_{\mathfrak{q}}$. On appelle $\mathcal{S}_j$ le stabilisateur commun aux $Z_{\mathfrak{q}}$, pour $\mathfrak{q}$ associé à $p \in \mathcal{C}_j$. Dans chaque classe $\mathcal{C}_j$, on fixe un premier $\rho_j \in \mathcal{C}_j$ et on note Z_{ρ_j} la variété qui lui est associée. Pour tout autre premier $p \in \mathcal{C}_j$, il existe donc un élément $\alpha_p \in \bigoplus_{p_i \in \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}} \mathrm{Ker}[p_i]_{\mathfrak{q}_i}$ et $\eta_p \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*$ tels que :

$$\alpha_p + \eta_p + Z_{\mathfrak{q}} = Z_{\rho_j}.$$

Remarquons que la somme est directe car tous les p_i sont distincts. Soient $p \neq p'$ dans la même classe $\mathcal{C}_j$; soient $\omega_p \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}$ et $\omega_{p'} \in \mathrm{Ker}[p']_{\mathfrak{q}'}$. Si les réunions

$$\bigcup_{\zeta \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*} \zeta + \omega_\xi + Z_\xi \tag{3.7}$$

pour $\xi = p$ et $\xi = p'$, ont au moins une composante commune, c'est qu'il existe un élément $\eta_{p,p'} \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*$ tel que :

$$\omega_p + Z_p = \eta_{p,p'} + \omega_{p'} + Z_{p'}.$$

On en déduit, grâce aux deux dernières égalités, que :

$$x = \alpha_p - \omega_p - \alpha_{p'} + \omega_{p'} + \left(\eta_p - \eta_{p'} + \eta_{p,p'}\right) \in \mathcal{S}_j.$$

On note $\alpha_p^{p_i}$ la composante selon p_i de α_p. On remarque que : $\alpha_p^p - \alpha_{p'}^p - \omega_p \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}$. De même : $\alpha_{p'}^{p'} - \alpha_p^{p'} - \omega_{p'} \in \mathrm{Ker}[p']_{\mathfrak{q}'}$, et : $\eta_{p'} - \eta_p + \eta_{p,p'} \in \Sigma_0 \oplus \mathrm{Ker}[l_0]^*$. Le nombre p est premier à p', à l_0, à B et à tous les autres premiers de $\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}$. Il existe donc une relation de Bézout :

$$up + vl_0 \prod_{p_i \neq p \in \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}} p_i = 1.$$

On en déduit que :

$$[vl_0 \prod_{p_i \neq p \in \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}} p_i]x = [vl_0 \prod_{p_i \neq p \in \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}} p_i](\alpha_p^p - \alpha_{p'}^p - \omega_p) = \alpha_p^p - \alpha_{p'}^p - \omega_p \in \mathcal{S}_j;$$

puisqu'il suit de sa définition que le stabilisateur est stable sous la multiplication par n, quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Par contraposition, si :

$$\omega_p \in \mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}} \setminus \left(\alpha_p^p - \alpha_{p'}^p - \mathcal{S}_j\right) \text{ et } \omega_{p'} \in \mathrm{Ker}[p']_{\mathfrak{q}'} \setminus \left(\alpha_{p'}^{p'} - \alpha_p^{p'} + \mathcal{S}_j\right),$$

les réunions (5) n'ont pas de composantes communes. Il suit :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}\bigcup_{\zeta\in\Sigma_0\oplus\mathrm{Ker}[l_0]^*}\bigcup_{\xi\in\mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}}\zeta+\xi+Z_{\mathfrak{q}}\Bigg) \geq \sum_{p\in\mathcal{C}_j}\deg\Bigg(\bigcup_{\zeta\in\Sigma_0\oplus\mathrm{Ker}[l_0]^*}\bigcup_{\xi\in\mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}\setminus\bigcup_i\left(\alpha_p^p-\alpha_{p_i}^p+\mathcal{S}_j\right)}\zeta+\xi+Z_{\mathfrak{q}}\Bigg).$$

Fixons j et $p \in \mathcal{C}_j$. On va calculer le degré de la réunion totale en fonction de $\deg(Z_{\mathfrak{q}})$. Par choix de l'ensemble $\mathcal{P}_A$, il y a $p^{2g-\alpha}$ points se réduisant sur 0 mod $\mathfrak{q}$, et il y a $l_0^{2g-\alpha}$ points dans $\mathrm{Ker}[l_0]^*$. Il en résulte :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{\zeta\in\Sigma_0\oplus\mathrm{Ker}[l_0]^*}\bigcup_{\xi\in\mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}}\zeta+\xi+Z_{\mathfrak{q}}\Bigg) = \frac{f(\Sigma_0, Z_{\mathfrak{q}})(l_0p)^{2g-\alpha}}{|\mathcal{S}_j \cap \left(\mathrm{Ker}[l_0p]^*\right)|}\deg(Z_{\mathfrak{q}}). \tag{3.8}$$

A cette réunion, il faut retrancher :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{\zeta\in\Sigma_0\oplus\mathrm{Ker}[l_0]^*}\bigcup_{\xi\in\bigcup_i\left(\alpha_p^p-\alpha_{p_i}^p+\mathcal{S}_j\right)}\zeta+\xi+Z_{\mathfrak{q}}\Bigg) \leq \frac{|\mathcal{C}_j|l_0^{2g-\alpha}}{|\mathcal{S}_j\cap\mathrm{Ker}[l_0]^*|}\deg(Z_{\mathfrak{q}}).$$

En effet, il y a au plus $|\mathcal{C}_j|$ points de la forme $\alpha_{p_i}^p$. Notons $\tilde{\mathcal{C}}_j$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_j$ formé des p divisant $[\mathcal{S}_j : \mathcal{S}_j^0]$, où $\mathcal{S}_j^0$ désigne la composante connexe de l'identité dans $\mathcal{S}_j$. Si $p \notin \tilde{\mathcal{C}}_j$, les dénominateurs des deux dernières formules sont égaux et comme $\alpha \leq g$, on a :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{\zeta\in\Sigma_0\oplus\mathrm{Ker}[l_0]^*}\bigcup_{\xi\in\mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}\setminus\bigcup_i\left(\alpha_p^p-\alpha_{p_i}^p+\mathcal{S}_j\right)}\zeta+\xi+Z_{\mathfrak{q}}\Bigg) \quad\geq\quad \left(1-\frac{|\mathcal{C}_j|}{p^2}\right)\frac{f(\Sigma_0, Z_{\mathfrak{q}})(l_0p)^{2g-\alpha}}{|\mathcal{S}_j\cap\left(\mathrm{Ker}[l_0p]^*\right)|}\deg(Z_{\mathfrak{q}}).$$

Le quotient $\frac{1}{p^2}$ provient du fait que la "partie discrète" du stabilisateur de $Z_{\mathfrak{q}}$ est triviale et que sa composante connexe en 0 est un groupe algébrique de codimension $\geq r+1 \geq 2$. En fixant j, on somme sur l'ensemble des p ; en tenant compte de la définition de Z, on obtient :

$$\begin{aligned}\deg\Bigg(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}\bigcup_{\zeta\in\Sigma_0\oplus\mathrm{Ker}[l_0]^*}\bigcup_{\xi\in\mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}}\zeta+Z_{\mathfrak{q}}\Bigg) &\geq \left(|\mathcal{C}_j\setminus\tilde{\mathcal{C}}_j|-|\mathcal{C}_j|\sum_{p\in\mathcal{C}_j}\frac{1}{p^2}\right)\frac{f(\Sigma_0,Z)(l)^{2g-\alpha}}{|\mathrm{Ker}[l]^*\cap\mathrm{Stab}(Z)|}\deg(Z)\\ &\geq \left(\frac{2}{3}|\mathcal{C}_j|-|\tilde{\mathcal{C}}_j|\right)\frac{f(\Sigma_0,Z)(l)^{2g-\alpha}}{|\mathrm{Ker}[l]^*\cap\mathrm{Stab}(Z)|}\deg(Z).\end{aligned}$$

On avait en effet choisi l'ensemble $\mathcal{P}_A$ tel que la somme $\sum_{\mathfrak{p}/p\in\mathcal{P}_A}\frac{1}{p^2} < \frac{1}{3}$. On a plus directement, par un calcul direct à partir de (6) :

$$\deg\Bigg(\bigcup_{p\in\mathcal{C}_j}\bigcup_{\zeta\in\mathrm{Ker}[l_0]^*}\bigcup_{\xi\in\mathrm{Ker}[p]_{\mathfrak{q}}}\zeta+Z_{\mathfrak{q}}\Bigg) \geq \frac{f(\Sigma_0,Z)(l)^{2g-\alpha}}{|\mathrm{Ker}[l]^*\cap\mathrm{Stab}(Z)|}\deg(Z).$$

On doit donc estimer le nombre de premiers divisant $[\mathcal{S}_j : \mathcal{S}_j^0]$. Or :

$$|\tilde{\mathcal{C}_j}| \leq \frac{\log[\mathcal{S}_j : \mathcal{S}_j^0]}{\log 3} \leq \log \deg(\mathcal{S}_j) \leq c_{19}\Delta,$$

pour une constante c_{19}. On a ici majoré le degré du stabilisateur en fonction de celui de la variété (*confer* [Hin88], lemme 6), puis on a utilisé le lemme de zéros pour majorer $\deg(Z_{\rho_j})$, et on a majoré $\log(M)$ à l'aide du choix des paramètres. Par l'inégalité : $\max\{x-y;1\} \geq \frac{x}{2y}$ pour $x \geq 0$ et $y \geq 1$, on obtient :

$$\max\{\frac{2}{3}|\mathcal{C}_j| - |\tilde{\mathcal{C}_j}|, 1\} \geq \frac{|\mathcal{C}_j|}{3c_{19}\Delta}.$$

La proposition suit en sommant sur les classes d'équivalence.

□

3.6.3 Un premier pas vers l'injectivité

On suppose maintenant que A vérifie l'hypothèse **H2**. On vérifie aisément que celle-ci implique **H3**.

Le choix des paramètres va nous donner une inégalité "presque absurde" ; on ne pourra cependant pas conclure, car il manquera une hypothèse de coprimalité sur des objets construits simultanément. On devra donc itérer une fois le résultat obtenu, en exigeant cette hypothèse entre la première et la seconde étape, puis on conclura par un argument de descente.

Rappelons que la dernière proposition nous a donné l'existence d'un couple (l, Z) où l est un entier assez grand (on sait que $l \in \mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_{r_0}$) et Z est une sous-variété irréductible contenant un translaté de V. La proposition suivante résume et précise ce qu'on a obtenu.

Proposition 3.44 *On suppose que X n'est pas incluse dans le translaté d'une sous-variété abélienne et que son minimum essentiel est majoré de la façon suivante :*

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X)\ \omega(X) < \frac{1}{\Delta^{8\rho(2r)^{r+1}}}.$$

Alors il existe une sous-variété propre Z de codimension $r_1 \leq r$ contenant un translaté de V par un point de torsion et un entier $l > 0$ tels que :

-L'entier l est premier avec R et :

$$l \leq \Delta^{2\rho(2r)^{r+1}}.$$

-De plus, on a l'inégalité :

$$\Big(\frac{f(\Sigma_0, Z)l^{gn_\alpha}}{|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)|}\deg(Z)\Big)^{1/r_1} < \Delta^{-\rho} l^{n_\alpha} \omega(l^{n_\alpha}, X).$$

Preuve

On commence par montrer que la contrainte portant ici sur le minimum essentiel est plus forte que l'hypothèse (3.4). Si (3.4) n'est pas vérifiée :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(X) \geq \frac{\Delta}{T_0\omega(\Delta T_0, X)} \geq \frac{1}{T_0^2\omega(X)},$$

par application du lemme 3.35. De plus, par les choix de paramètres faits en 3.4.5 :

$$T_0^2 \leq \Delta^{2r} \prod_{n=1}^{r} N_n^4 \leq \Delta^{8\rho(2r)^{r+1}},$$

ce qui contredit l'hypothèse de la proposition. Pour démontrer cette inégalité, on a d'abord utilisé :

$$N_1 \cdots N_r \leq \Delta^{\rho[(2r)^2+\cdots+(2r)^{r+1}]}; \tag{3.9}$$

puis on a majoré l'exposant comme suit :

$$\sum_{j=2}^{r+1}(2r)^j \leq -r + \sum_{j=1}^{r+1}(2r)^j \leq 2(2r)^{r+1} - r,$$

par l'inégalité :

$$1 + x + \ldots + x^h \leq 2x^h \text{ pour } h \in \mathbb{N} \text{ et } x \geq 2.$$

La proposition précédente nous donne donc l'existence de trois entiers strictement positifs r_0, r_1 et l avec $r_0 \leq r_1 \leq r$, $l \in \mathcal{P}_{1,\mathbb{Z}} \cdots \mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}$, et une sous-variété algébrique Z propre et irréductible de A, de codimension r_1, contenant un translaté de V par un point de torsion, telle que :

$$T_{r_0}^{r_1} |\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}| \frac{f(\Sigma_0, Z) l^{2g-\alpha}}{|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)|} \deg(Z) \leq c_{20} M^{2r_1} \Delta.$$

Par construction des $\mathcal{P}_{n,\mathbb{Z}}$, l'entier l est premier avec R et on a les inégalités :

$$2^{-r_0} N_1 \cdots N_{r_0} \leq l \leq N_1 \cdots N_{r_0}.$$

Et le premier point suit, par la même majoration que (3.9).

Reste à prouver la seconde inégalité. Le théorème des nombres premiers et le choix de l'ensemble $\mathcal{P}_A$ font que, pour une certaine constante $c_{21} > 0$ ne dépendant que de A :

$$|\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}| \geq c_{21} \frac{N_{r_0}}{\log N_{r_0}} - \frac{\log R}{\log 2}.$$

Par définition des N_n et de Δ, on a : $\log N_{r_0} \leq \Delta^{1/2}$ pour C_0 assez grand dans la définition de Δ. On a aussi :

$$N_{r_0} \geq \Delta^9 \geq \log(R)^2.$$

On a encore, pour C_0 assez grand : $\frac{1}{2} c_{21} \Delta^{1/2} \geq 1$, le facteur $\frac{1}{2}$ correspondant au terme en $\log(R)$. On en déduit :

$$|\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}| \geq \Delta^{\rho(2r)^{r+2-r_0}-1}.$$

Par le lemme 2.4 de [AD03], comme $l^{n_\alpha} \leq (N_1 \cdots N_r)^{n_\alpha} \leq \Delta T_0$, on a :

$$\omega(\Delta T_0, X) \leq \frac{\Delta T_0}{l^{n_\alpha}} \omega(l^{n_\alpha}, X).$$

Sous l'hypothèse **H2**, on peut supposer que $\alpha = 0$ ou $\alpha = g$. Dans les deux cas, on a :

$$\begin{aligned}\Big(\frac{f(\Sigma_0, Z) l^{n_\alpha g}}{|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)|}\deg(Z)\Big)^{1/r_1} &\leq \frac{c_{20} M^2 \Delta^{1/r_1}}{|\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}|^{1/r_1} T_{r_0}} \\ &\leq c_{20}\frac{T_0 \omega(\Delta T_0, X)\Delta^{1/r_1}}{|\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}|^{1/r_1} T_{r_0}} \\ &\leq c_{20}\frac{\Delta T_0^2 \Delta^{1/r_1}}{l^{n_\alpha}|\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}|^{1/r_1} T_{r_0}}\omega(l^{n_\alpha}, X).\end{aligned}$$

Or on a :

$$\frac{T_0}{T_{r_0}} \leq \Delta^{2r_0}\big(N_1 \cdots N_{r_0}\big)^{n_\alpha} \leq (2\Delta)^{2r_0} l^{n_\alpha},$$

et on en déduit :

$$\Big(\frac{f(\Sigma_0, Z) l^{n_\alpha g}}{|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)|}\deg(Z)\Big)^{1/r_1} \leq c_{22}\frac{l^{n_\alpha}\Delta^{2r+1+1/r_1} N_{r_0+1}^{n_\alpha} \cdots N_r^{n_\alpha}}{|\mathcal{P}_{r_0,\mathbb{Z}}|^{1/r_1}}\omega(l^{n_\alpha}, X).$$

L'exposant h de Δ dans cette dernière majoration est borné par :

$$\begin{aligned} h &:= 4r + 2\rho\big((2r)^2 + \cdots + (2r)^{r+1-r_0}\big) - \big(\rho(2r)^{r+2-r_0} - 2\big)/r_1. \\ &\leq 2\rho\big((2r) + \cdots + (2r)^{r+1-r_0}\big) - 2\rho(2r)^{r+1-r_0} \\ &\leq 2\rho(r - r_0)(2r)^{r-r_0} + \rho(2r)^{r+1-r_0} - 2\rho(2r)^{r+1-r_0} \\ &\leq -2\rho r_0 (2r)^{r-r_0} \leq -2\rho. \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\Big(\frac{f(\Sigma_0, Z) l^{n_\alpha g}}{|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)|}\deg(Z)\Big)^{1/r_1} < \Delta^{-\rho} l^{n_\alpha}\omega(l^{n_\alpha}, X),$$

en faisant disparaître les constantes avec Δ^ρ, et le résultat suit.

□

Remarques On notera dorénavant :

$$|\mathrm{Ker}[l]^* \cap \mathrm{Stab}(Z)| = \lambda(Z).$$

Posons $X = V$ et $\Sigma_0 = \{0\}$. Si on savait assurer la coprimalité entre l et $[\mathrm{Stab}(Z) : \mathrm{Stab}(Z)^0]$ (deux objets construits simultanément), on pourrait déjà clore la preuve, car on aurait :

$$\lambda(Z) \leq l^{n_\alpha \dim\left(\mathrm{Stab}(Z)^0\right)} \leq l^{n_\alpha(g - r_1 - 1)},$$

la deuxième inégalité provenant du fait que V n'est pas inclus dans un translaté de sous-variété abélienne. La variété Z contenant un translaté de V par un point de torsion, on a de plus :

$$\omega(l^{n_\alpha}, V) \leq \Big(l^{n_\alpha}\deg(Z)\Big)^{1/r_1},$$

et une contradiction suivrait immédiatement.

3.6.4 Itération et descente

Cette construction ne permet pas de conclure, et on est amené à itérer la dernière proposition. C'est à ce stade de la preuve qu'on utilise crucialement l'hypothèse sur la codimension de V. En effet, on n'a pas pu mettre en place la stratégie de descente, devenue classique dans les travaux diophantiens sur la minoration de hauteurs, en codimension quelconque.

Cette démarche échoue en grande partie pour la raison suivante : la procédure diophantienne donne l'existence d'une sous-variété obstructrice vérifiant une propriété “pathologique” mais on perd trop d'information en extrayant une hypersurface contenant cette variété obstructrice. Le passage par l'hypersurface est pourtant indispensable pour garantir l'emboîtement, et par suite l'égalité des dimensions après r itérations.

Preuve (du théorème 3.6)

On peut maintenant démontrer le théorème 3.6, qui découlera de la non-injectivité d'un morphisme ϕ par le résultat du paragraphe 3.5.4. Soit V une sous-variété propre de A qui n'est pas incluse dans un translaté de sous-variété abélienne de A, de codimension $r \leq 2$. On rappelle que :

$$\Delta = C_0^2 \log(3\deg(V)),$$

et on suppose :

$$\omega(V)\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) < \Delta^{-\left(16(2r)^{r+1}\right)^r}. \tag{3.10}$$

Première étape. Pour utiliser la proposition 3.44, on doit définir :

$$\rho_1 = \left(9(2r)^{r+1}\right)^{r-1} \text{ et } R_1 = [\mathrm{Stab}(V) : \mathrm{Stab}(V)^0].$$

On a, en tenant compte des propriétés du stabilisateur suivant la définition 3.15 :

$$\log(R_1) \leq \log\Big(\deg(\mathrm{Stab}(V))\Big) \leq g\log(3\deg(V)) \leq \Delta.$$

Si le morphisme ϕ n'est pas injectif, on applique la proposition 3.44 avec $X = V$, ce qui donne l'existence d'un entier l_1 et d'une sous-variété Z_1 de A, propre et de codimension k_1, contenant un translaté de V par un point x_1, et telle que :

$$\left(\frac{l_1^{n_{\alpha_1}g}\deg(Z_1)}{\lambda_1(Z_1)}\right)^{1/k_1} < \Delta^{-\rho_1} l_1^{n_{\alpha_1}} \omega(l_1^{n_{\alpha_1}}, V).$$

De plus, on peut supposer que V est de codimension 2 et que Z_1 est une hypersurface. Sinon, on aurait : $Z_1 = x_1 + V$, car ces variétés seraient de même codimension et : $x_1 + V \subset Z_1$. Dans ce cas, l'entier l_1 serait premier à

$$[\mathrm{Stab}(V) : \mathrm{Stab}(V)^0] = [\mathrm{Stab}(Z_1) : \mathrm{Stab}(Z_1)^0],$$

et la remarque suivant la preuve de la proposition 3.44 montre qu'on aurait une contradiction.

Deuxième étape. On itère maintenant la proposition 3.44 en posant :

$$V_1 = \bigcup_{x \in \mathrm{Stab}(Z_1) \cap \mathrm{Ker}[l_1]^*} x + V.$$

Puis :

$$\rho_2 = \bigl(9(2r)^{r+1}\bigr)^{r-2} \text{ et } R_2 = [\mathrm{Stab}(V) : \mathrm{Stab}(V)^0] \times [\mathrm{Stab}(Z_1) : \mathrm{Stab}(Z_1)^0] \times l_1.$$

La dernière condition permet que le cardinal de Σ_0 soit premier à tous les premiers des $\mathcal{P}_{i,\mathbb{Z}}$ dans la phase combinatoire. On vérifie une nouvelle fois (par les majorations du degré de Z_1 et de l_1 données par la proposition 3.44) que :

$$\log(R_2) \leq g\log(3\omega(V)) + g^2\log(\omega(V)) + 3\log(l_1) \leq \Delta.$$

L'hypothèse (3.3) est satisfaite pour les mêmes raisons (on a la majoration : $|\Sigma_0| \leq l_1^{2g}$). On doit aussi majorer :

$$\omega(V_1)\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V_1).$$

Le minimum essentiel de V_1 est celui de V puisqu'on translate par des points de torsion. Quant à l'indice d'obstruction, comme $x_1 + V_1 \subset Z_1$ (par définition de ces deux variétés), l'inégalité sur le degré de Z_1 donne :

$$\omega(V_1) \leq l_1^2\omega(l_1^2, V) \leq l_1^4\omega(V). \tag{3.11}$$

On obtient donc :

$$\omega(V_1)\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V_1) \leq l_1^4\omega(V)\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \leq \Delta^{-\left(16(2r)^{r+1}\right)^r + 8\rho_1(2r)^{r+1}} \leq \Delta^{\rho_2(2r)^{(r+1)}(-16+8)} \leq \Delta^{-8\rho_2(2r)^{r+1}}.$$

Par (3.11), on a enfin :

$$C_0\log\bigl(3\omega(V_1)\bigr) \leq \Delta.$$

La proposition 3.44 avec $\Sigma_0 = H_0 = \mathrm{Stab}(Z_1) \cap \mathrm{Ker}[l_1]^*$ donne l'existence d'une variété Z_2 de codimension k_2 contenant un translaté $x_2 + V$, telle que :

$$\left(\frac{f(\Sigma_0, Z_2)l_2^{n_{\alpha_2}g}\deg(Z_2)}{\lambda_2(Z_2)}\right)^{1/k_2} < \Delta^{-\rho_2}l_2^{n_{\alpha_2}}\omega(l_2^{n_{\alpha_2}}, V_1).$$

On remarque que Z_2 contient les translatés de $x_2 + V$ par les points de $H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z_2)$. On a :

$$\deg\Bigl(\bigcup_{x\in\Sigma_0/(\Sigma_0\cap\mathrm{Stab}Z_2)} x + Z_2\Bigr) \leq f(\Sigma_0, Z_2)\deg(Z_2);$$

et cette réunion, notée Z_2', contient un translaté de V_1. Si Z_2 est de codimension 2, on a encore une égalité : $Z_2 = x_2 + V$ et on en déduit que l_2 est premier à $[\mathrm{Stab}(Z_2) : \mathrm{Stab}(Z_2)^0]$. Il suit :

$$\Bigl(l_2^{n_{\alpha_2}}\deg(Z_2')\Bigr)^{1/2} \leq \Delta^{-\rho_2}\omega(l_2^{n_{\alpha_2}}, V_1),$$

ce qui est absurde, puisque Z_2' contient un translaté de V_1.

Les deux variétés Z_1 et Z_2 sont donc des hypersurfaces, qui contiennent toutes deux un translaté de V, de codimension 2. Quitte à translater ces deux variétés (ce qui est sans conséquences sur le degré et le stabilisateur), on suppose que $V \subset Z_1 \cap Z_2$. Il reste à comparer Z_1 et Z_2 pour finir la preuve.

Cas 1. L'intersection $Z_1 \cap Z_2$ est de codimension 1. Les deux hypersurfaces (irréductibles) sont donc égales. Par construction, Z_1 contient V_1 et on a :

$$\omega(V_1) \leq \deg(Z_1) \leq \deg(Z_2).$$

En outre, l'égalité des variétés nous montre que l_2 est premier à la partie discrète du stabilisateur de Z_2, et comme cette hypersurface n'est pas incluse dans un translaté de variété abélienne (puisque cette propriété est vraie pour $V \subset Z_2$) :

$$\omega(V_1) \leq \Delta^{-\rho_2} l_2^{(2-g)n_{\alpha_2}} \lambda_2(Z_2)\omega(V_1) \leq \Delta^{-\rho_2}\omega(V_1).$$

On obtient donc une contradiction.

Cas 2. L'intersection $Z_1 \cap Z_2$ est de codimension 2. Dans ce cas, cette intersection contient V, mais elle contient aussi les translatés de V par les points de $H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z_2)$. Comme ce groupe est de cardinal une puissance de l_1, la partie discrète du stabilisateur de V n'intervient pas et on a :

$$\deg\Big(\bigcup_{x \in H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z_2)} x + V\Big) \geq \frac{|H_0 \cap \mathrm{Stab}(Z_2)|}{l_1^{n_{\alpha_1}(\dim(V)-1)}}\deg(V).$$

On a utilisé au passage le fait que V n'était pas un translaté de variété abélienne. Par le théorème de Bézout, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1(Z_1) l_1^{(3-g)n_{\alpha_1}}}{f(\Sigma_0, Z_2)}\deg(V) &\leq \deg(Z_1)\deg(Z_2) \\ &\leq \Delta^{-\rho_1}\frac{\lambda_1(Z_1) l_1^{(1-g)n_{\alpha_1}}}{f(\Sigma_0, Z_2)} l_2^4 \omega(l_1, V)\omega(V_1). \end{aligned}$$

La majoration des termes en l_2 a été grossière car ceux-ci sont négligeables devant Δ^{ρ_1} par la majoration de l_2 suivant la proposition 3.44. On en déduit :

$$\deg(V) \leq \Delta^{-\rho_1} l_1^{-2n_{\alpha_1}} l_2^4 \omega(l_1^{n_{\alpha_1}}, V)\omega(V_1).$$

En raffinant (3.11) avec n_{α_1}, on trouve :

$$l_1^{n_{\alpha_1}}\deg(V) \leq \Delta^{-\rho_1} l_2^4 \omega(l_1^{n_{\alpha_1}}, V)^2 \leq \Delta^u \omega(l_1^{n_{\alpha_1}}, V)^2,$$

et le réel u vérifie :

$$u \leq -\rho_1 + 8\rho_2(2r)^{r+1} < 0.$$

C'est à nouveau une contradiction.

Conclusion. On a donc démontré par l'absurde que la proposition 3.42 était vraie, soit avec $X = V$, soit avec $X = V_1$. Il en résulte dans les deux cas que V contredit la majoration (3.10). On en déduit :

$$\hat{\mu}_{\mathrm{ess}}(V) \geq \frac{C(A)}{\omega(V)} \times \Big(\log(3\deg(V))\Big)^{-\lambda(r)},$$

où $\lambda(r) = (16(2r)^{(r+1)})^r$ et $C(A) = \frac{1}{C_0^{2\lambda(r)}}$, qui ne dépend que de A.

$\square$

Remarques Dans le cas où A est à multiplication complexe, l'existence d'un relèvement du morphisme de Frobenius pour presque toute place de K permet de démontrer la même minoration pour une variété V de codimension r quelconque. En effet, la fin de la preuve, à partir du lemme combinatoire, est alors (à quelques détails près) la même que dans le cas torique, en remplaçant l'isogénie $[l]$ par le relèvement du Frobenius associé (on est dans ce cas assuré d'avoir une densité positive de premiers ordinaires).

Il est envisageable qu'un raffinement de l'argument de descente, couplé aux nouvelles idées introduites par Amoroso dans [Amo07], permette de traiter la codimension quelconque, ainsi que quelques cas inconditionnels en petite dimension (essentiellement le cas des surfaces abéliennes).

Bibliographie

[AD99] F. Amoroso et S. David : Le problème de Lehmer en dimension supérieure. *J. reine angew. Math.*, 513:145–179, 1999.

[AD00] F. Amoroso et S. David : Minoration de la hauteur normalisée des hypersurfaces. *Acta Arith.*, 92(4):340–366, 2000.

[AD01] F. Amoroso et S. David : Densité des points à coordonnées multiplicativement indépendantes. *Ramanujan Math. J.*, 5:237–246, 2001.

[AD03] F. Amoroso et S. David : Minoration de la hauteur normalisée dans un tore. *J. Inst. Math. Jussieu*, 2(3):335–381, 2003.

[AD07] F. Amoroso et S. David : Un théorème de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Manuscript en préparation*, 2007.

[Amo07] F Amoroso : Bogomolov on tori revisited. *Prépublication*, 2007.

[BGS94] J.B. Bost, H. Gillet et C. Soulé : Heights of projective varieties. *Journal of the A.M.S.*, 7(4):903–1027, 1994.

[BK06] J.B. Bost et K. Künnemann : Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic varieties. *Prépublication*, 2006.

[BMZ99] E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier : Intersecting a curve with algebraic subgroups of multiplicative groups. *Internat. Math. Res. Notices*, 20:1119–1140, 1999.

[Bog80] F. Bogomolov : Points of finite order on abelian varieties. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(4):782–804, 973, 1980.

[Bos96a] J.B. Bost : Intrinsic heights of stable varieties and abelian varieties. *Duke Math. J.*, 82(1):21–70, 1996.

[Bos96b] J.B. Bost : Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). *Séminaire Bourbaki, Astérisque*, 237:115–161, 1996.

[Bos01] J.B. Bost : Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. IHÉS*, 93:161–221, 2001.

[Bur92] J.F. Burnol : Weierstrass points on arithmetic surfaces. *Invent. Math.*, 107(2): 421–432, 1992.

[BZ95] E. Bombieri et U. Zannier : Algebraic points on subvarieties of $\mathbb{G}_m^n$. *Internat. Math. Res. Notices*, 7:333–347, 1995.

[BZ96] E. Bombieri et U. Zannier : Heights of algebraic points on suvarieties of abelian varieties. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, 23(4):779–792, 1996.

[Cha88] M. Chardin : Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique. *Bull. Soc. math. France*, 117:305–318, 1988.

[Cha90] M. Chardin : Contributions à l'algèbre commutative effective et à la théorie de l'élimination. *Thèse de Doctorat, Université Paris VI*, 1990.

[Che06] H. Chen : Positivité en géométrie algébrique et en géométrie d'Arakelov. *Thèse de Doctorat, Université Paris XI*, 2006.

[CL00] A. Chambert-Loir : Points de petite hauteur sur les variétés semi-abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 33(6):789–821, 2000.

[Dav91] S. David : Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes. *Compositio Math.*, 78(2):121–160, 1991.

[Dav95] S. David : Minorations de formes linéaires de logarithmiques elliptiques. *Mémoires de la Soc. Math. de France*, 62, 1995.

[DH00] S. David et M. Hindry : Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C.M. *J. Reine Angew. Math.*, 529:1–74, 2000.

[Dob79] E. Dobrowolski : On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial. *Acta Arith.*, 34:391–401, 1979.

[DP98] S. David et P. Philippon : Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes. *Number Theory (Tiruchirapalli, 1996). Contemp. Math.*, 210:333–364, 1998.

[DP99] S. David et P. Philippon : Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 28(3):489–543, 1999.

[DP00] S. David et P. Philippon : Sous-variétés de torsion des variétés semi-abéliennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 331(1):587–592, 2000.

[DP02] S. David et P. Philippon : Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes II. *Comment. Math. Helv.*, 77:639–700, 2002.

[DP07] S. David et P. Philippon : Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés des puissances de courbes elliptiques. *Prépublication*, 2007.

[Fal83] G. Faltings : Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlenkörpern. *Inventiones Math.*, 73:349–366, 1983.

[Fal94] G. Faltings : The general case of S. Lang's conjecture. *Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991). Perspect. Math. 15. Academic Press. San Diego.*, pages 175–182, 1994.

[Ful84] W. Fulton : *Intersection theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Gal07] A. Galateau : Minoration de la hauteur normalisée dans un produit de courbes elliptiques. *Prépublication*, 2007.

[Gau06] É. Gaudron : Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. *Annales de l'ÉNS*, 2006.

[Gau07] É. Gaudron : Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global. *Rendiconti di Padova*, 2007.

[GH78] P. Griffiths et J. Harris : *Principles of algebraic geometry.* John Wiley and sons, New-York, 1978.

[Gra01] P. Graftieaux : Formal groups and Isogeny theorem. *Duke Math. J.*, 106:81–121, 2001.

[GS92] H. Gillet et C. Soulé : An arithmetic Riemann-Roch theorem. *Invent. Math.*, 110(3):473–543, 1992.

[Hab06] P. Habegger : A Bogomolov property modulo algebraic subgroups. *Prépublication*, 2006.

[Har77] R. Hartshorne : *Algebraic Geometry*, volume 52 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.

[Hin88] M. Hindry : Autour d'une conjecture de S. Lang. *Invent. Math.*, 94:575–603, 1988.

[HS00] M. Hindry et J. Silverman : *Diophantine Geometry : An Introduction*, volume 201 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[IR80] K. Ireland et M. Rosen : *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, volume 84 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980.

[Kob75] N. Koblitz : p-adic variation of the zeta-function over families of varieties defined over finite fields. *Compositio Math.*, 31(2), 1975.

[Lan86] S. Lang : *Algebraic number theory*. Springer-Verlag, 1986.

[Lan02] S. Lang : *Algebra*, volume 211 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[Lau83] M. Laurent : Minoration de la hauteur de Néron-Tate. *Séminaire de théorie des nombres de Paris, 1981-1982, Progr. Math.*, 38:137–152, 1983.

[Law77] W. Lawton : A generalization of a theorem of Kronecker. *J. Sci. Fac. Chiangmai Univ.*, 4:15–23, 1977.

[Lit99] R. Litcanu : Minoration des hauteurs des sous-variétés de variétés abéliennes. Etude du degré des morphismes de Belyi. *Thèse de Doctorat, Université Paris XI*, 1999.

[Lit07] R. Litcanu : Petits points et conjecture de Bogomolov. *Expo. Math.*, 25(1):37–51, 2007.

[LR85] H. Lange et W. Ruppert : Complete systems of addition laws on abelian varieties. *Invent. Math.*, 79(3):603–610, 1985.

[Mau07] G. Maurin : Conjecture de Zilber-Pink pour les courbes tracées sur des tores. *Prépublication de l'Institut Fourier*, 696, 2007.

[MB90] L. Moret-Bailly : Sur l'équation fonctionnelle de la fonction thêta de Riemann. *Compositio Math.*, 75:203–217, 1990.

[Mou04] C. Mourougane : Computations of Bott-Chern classes on $\mathbb{P}(E)$. *Duke Math. J.*, 24(2):389–420, 2004.

[Mum74] D. Mumford : *Abelian Varieties*. Tata Lecture Notes. Cambridge University Press, 1974.

[MvdG07] B. Moonen et G. van der Geer : *Abelian varieties*. Version préliminaire. http ://staff.science.uva.nl/ bmoonen/boek/BookAV.html, 2007.

[Noo95] R. Noot : Abelian varieties - Galois representations and properties of ordinary reduction. *Compositio Math.*, 97:161–171, 1995.

[Ogu82] A. Ogus : Hodge cycles and crystalline cohomology. *Lecture Notes in Mathematics*, 900, 1982.

[Phi95] P. Philippon : Sur des hauteurs alternatives III. *J. Math. Pures Appl.*, 74(4): 345–365, 1995.

[Phi96] P. Philippon : Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mountain Math. Journal*, 26(3):1069–1088, 1996.

[Pin98] R. Pink : l-adic algebraic monodromy groups, cocharacters, and the Mumford-Tate conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 495:187–237, 1998.

[Pin04] R. Pink : *Finite Group Schemes.* Notes de Cours http ://www.math.ethz.ch/ pink/FiniteGroupSchemes.html, 2004.

[Pin05] R. Pink : A common generalization of the conjectures of André-Oort, Manin-Mumford and Mordell-Lang. *Prépublication*, 2005.

[Pon06] C. Pontreau : Geometric lower bounds for the normalized height of hypersurfaces. *Int. J. Number Th.*, 4(2):555–568, 2006.

[PW88] P. Philippon et M. Waldschmidt : Formes linéaires de logarithmes dans les groupes algébriques commutatifs III. *Ill. Journal of Math.*, 32(2):281–314, 1988.

[Rat04a] N. Ratazzi : Densité de points et minoration de hauteur. *J. Number Theory*, 106(1):112–127, 2004.

[Rat04b] N. Ratazzi : Problème de Lehmer pour les hypersurfaces de variétés abéliennes de type C.M. *Acta Arith.*, 113:273–290, 2004.

[Rat05] N. Ratazzi : Minoration de la hauteur sur les variétés abéliennes de type C.M. et applications. *Prépublication*, 2005.

[Ray74] M. Raynaud : Schémas en groupes de type $(p, \ldots, p)$. *Bulletin de la S.M.F.*, 2:241–280, 1974.

[Ray83] M. Raynaud : Courbes sur une variété abélienne et points de torsion. *Invent. Math.*, 71:207–233, 1983.

[Rém00a] G. Rémond : Décompte dans une conjecture de Lang. *Invent. Math.*, 142(3):513–545, 2000.

[Rém00b] G. Rémond : Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 29(1):101–151, 2000.

[Rém05] G. Rémond : Inégalité de Vojta généralisée. *Bull. S.M.F.*, 133:459–495, 2005.

[RV03] G. Rémond et E. Viada : Problème de Mordell-Lang modulo certaines sous-variétés abéliennes. *Int. Math. Res. Not.*, 35:1915–1931, 2003.

[Sam03] P. Samuel : *Théorie algébrique des nombres.* Hermann, Paris, 2003.

[Sch91] W. M. Schmidt : Diophantine approximation and Diophantine equations. *Springer Lecture notes in Mathematics*, 1467, 1991.

[Ser68] J.P. Serre : *Abelian l-adic representations and elliptic curves.* Benjamin, New York, 1968.

[Ser70] J.P. Serre : *Cours d'arithmétique.* Le Mathématicien. PUF, Paris, 1970.

[Ser72] J. P. Serre : Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. *Invent. Math.*, 15:259–331, 1972.

[Sil86] J. Silverman : *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1986.

[Smy71] C. Smyth : On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 3:169–175, 1971.

[SUZ97] L. Szpiro, E. Ullmo et S. Zhang : Équirépartition des petits points. *Invent. Math.*, 127:337–347, 1997.

[Ten95] G. Tenenbaum : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Collection S.M.F., Paris, 1995.

[Ull98] E. Ullmo : Positivité et discrétion des points algébriques des courbes. *Ann. of Math.*, 147:167–179, 1998.

[Via03] E. Viada : The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 5-2:47–75, 2003.

[Zha92] S. Zhang : Positive line bundles on arithmetic surfaces. *Ann. of Math.*, 136:569–587, 1992.

[Zha95a] S. Zhang : Positive line bundles on arithmetic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 8:187–221, 1995.

[Zha95b] S. Zhang : Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.*, 4:281–300, 1995.

[Zha98] S. Zhang : Equidistribution of small points on abelian varieties. *Ann. of Math.*, 147:159–165, 1998.

[Zil02] B. Zilber : Intersecting varieties with tori. *J. London Math. Soc.*, 65:27–44, 2002.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de la hauteur sur les variétés abéliennes, et plus précisément à la répartition des petits points dans les sous-variétés algébriques de variétés abéliennes. On a cherché à établir une version quantitative de la propriété de Bogomolov en minorant le minimum essentiel des sous-variétés algébriques de variétés abéliennes (sauf celles incluses dans un translaté de sous-variété abélienne stricte).

Dans la première moitié de ce travail, on a mis en œuvre des techniques de transcendance pour étendre aux produits de courbes elliptiques, en petite codimension, la minoration déjà connue pour les sous-variétés des tores depuis les travaux d'Amoroso et David. On a ensuite essayé d'étendre ce résultat aux variétés abéliennes générales. Avec le langage de la théorie des pentes, qui s'est développé dans la littérature diophantienne depuis l'article fondateur de Bost, on a obtenu le même type de minoration sous l'hypothèse d'une densité positive de premiers ordinaires, qui est conjecturalement toujours vérifiée.

Mots-clés

Hauteur, variétés abéliennes, géométrie diophantienne, effectivité, degré d'Arakelov, méthode des pentes.

Mathematics Subject Classification 2000 : 11G10, 11J81, 14G40.