SK_2 d'une algèbre de biquaternions et cohomologie galoisienne

Baptiste Calmès
Université Paris 7-Denis Diderot
175, rue du Chevaleret, 75013 Paris France

Directeur de thèse: Bruno Kahn

2 juillet 2002

Remerciements

Je voudrais remercier tout particulièrement Bruno Kahn, mon directeur de thèse, pour tout ce qu'il m'a appris en mathématiques et pour la manière dont il a guidé mes débuts dans la recherche. J'ai le sentiment qu'il m'a toujours soutenu et qu'il a su de nombreuses fois me donner les conseils qui m'ont permis d'avancer.

Je remercie également Ivan Panin, Emmanuel Peyre et Andrei Suslin qui ont pris le temps de lire mon travail et de me faire profiter de leur avis en l'évaluant, ainsi que Jean-Louis Colliot-Thélène, Philippe Gille, Max Karoubi et Fabien Morel, pour avoir accepté de participer à mon jury.

De nombreuses personnes m'ont fait partager leur savoir mathématique, je les en remercie. Parmi eux, je voudrais citer en particulier Bertrand Patureau, qui m'a expliqué de nombreuses fois la théorie des représentations, Laurent Fargues et Guillaume Jamet, dont les connaissances en géométrie algébrique m'ont beaucoup aidé, et Philippe Gille, avec qui j'ai discuté à plusieurs reprises et qui m'a fait comprendre, il me semble, le lien fondamental entre la théorie des représentations et mon sujet.

Je remercie le personnel administratif de Paris 7, qui nous simplifie beaucoup la vie, en particulier Michèle Wasse, ainsi que les informaticiens, en particulier Joël Marchand, qui nous font gagner beaucoup de temps précieux.

Je voudrais également pouvoir nommer tous les enseignants qui ont éveillé mon esprit aux mathématiques et aux sciences en général, mais la liste serait longue.

Je remercie enfin toutes les personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à me permettre de faire cette thèse, et parmi eux mes parents, Linda, et tout spécialement Jean-Pierre Grivaux.

Table des matières

Introduction

Depuis la généralisation du déterminant aux corps non-commutatifs par Dieudonné (voir [4]) en 1943, on sait que ce déterminant réalise un isomorphime entre le groupe des matrices inversibles sur un corps (non nécessairement commutatif) quotienté par son sous-groupe des commutateurs et le corps lui-même quotienté par son sous-groupe des commutateurs. Le calcul de ce dernier groupe n'est pas toujours évident. On dispose de théorèmes de structure des corps non commutatifs. La dimension d'un corps non commutatif D de dimension finie sur son centre F est nécessairement un carré. Sa racine carrée est appelée indice de D (noté n). De plus, par une extension des scalaires de D par une extension finie E de F, on peut obtenir une algèbre de matrices sur E. Cela permet de définir une norme réduite, qui est une racine n-ième du déterminant "naïf" que l'on obtient en considérant la multiplication à gauche d'un élément de D comme une application F-linéaire. Cette norme réduite est multiplicative et est donc nulle sur le sous-groupe des commutateurs. Une question naturelle est le calcul de son noyau, quotienté par les commutateurs, appelé SK_1D. Wang a montré dès 1949 (voir [26]) que ce groupe est nul dès que l'indice de D ne comporte pas de facteurs carrés. Il a ensuite fallu attendre 1976 pour avoir un exemple de corps D pour lequel SK_1D n'est pas nul, donné par Platonov dans [18]. Depuis, un certain nombre d'exemples ont été fournis, mais on ne connait toujours pas de caractérisation satisfaisante des cas où SK_1D n'est pas nul. Le cas le plus simple, qui n'est pas traité par le théorème de Wang est celui d'une algèbre de biquaternions (produit tensoriel de deux algèbres de quaternions). Lorsque cette algèbre est un corps, son indice est 4, qui est le plus petit carré non trivial.

Dans un langage plus moderne, après définition de la K-théorie algébrique, un corps D quotienté par ses commutateurs s'appelle K_1D, et la norme réduite est une application de K_1D vers K_1F. Dans les années 80, une approche a été tentée, initiée par Suslin, pour relier SK_1D à la cohomologie galoisienne. Rost a alors montré que pour une algèbre de biquaternions D associée à la forme quadratique d'Albert q, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow SK_1D \longrightarrow H^4(F, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow H^4(F(q), \mathbf{Z}/2)$$

où la cohomologie est la cohomologie galoisienne du groupe de Galois absolu $Gal(F_{sep}/F)$ à coefficients dans les racines carrées de l'unité. Ce théorème implique notamment que SK_1D est nul pour tout corps D de centre F dont la dimension cohomologique est inférieure où égale à 3. Au niveau de la K-théorie, il est naturel de se demander si on peut faire une telle construction pour K_2D, qui est un goupe moins bien connu que K_1D par bien des aspects, afin d'en dégager certaines propriétés. Suslin, dans [23] a donné une définition satisfaisante de la norme réduite pour K_2D. Merkurjev a alors montré que le groupe SK_2D était nul pour D un corps de quaternions. Le cas le plus simple qui suit est encore une algèbre de biquaternions.

Le but de ce qui suit est de tenter d'obtenir une suite exacte analogue à celle de Rost pour SK_2D, quand D est une algèbre de biquaternions.

La méthode de démonstration de la suite exacte de Rost exposée par Merkurjev dans [12] se divise en trois étapes principales. La première consiste à relier les groupes de cohomologie galoisienne qui interviennent avec de la K-cohomologie. La deuxième étape consiste à relier cette K-cohomologie aux groupes de la filtration topologique d'une quadrique d'Albert par l'intermédiaire de la suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen. Enfin, la dernière étape utilise la décomposition de la K-théorie de la quadrique en somme directe de groupes de K-théorie d'algèbres associées à la quadrique tel que l'a montré Swan dans [24]. Dans le cas particulier d'une quadrique d'Albert, les algèbres qui interviennent sont le corps de base et une algèbre de biquaternions. C'est le calcul de la filtration topologique en fonction de cette décomposition qui permet enfin de relier SK_1D et le reste.

Dans ce qui suit, nous avons essayé de suivre une démarche analogue. Malheureusement, un certain nombre de propriétés de la K-théorie sont connues pour K_0 et K_1 et ne le sont plus pour K_2. Cela conduit à des problèmes nouveaux qui n'interviennent pas dans la démonstration exposée par Merkurjev, et dont certains ne sont d'ailleurs pas résolus.

Le résultat principal de ce texte est le théorème 5.2 :

Lorsque F est un corps de caractéristique nulle et qui contient un sous-corps algébriquement clos, on a un morphisme surjectif

$$SK_2D \oplus \overline{K_2D} \twoheadrightarrow \ker(H^5(F,\mu_2) \longrightarrow H^5(F(q),\mu_2))$$

où $F(q)$ est le corps des fonctions de la quadrique d'Albert, et $\overline{K_2D}$ est un quotient de K_2D défini au chapitre 5.

Ce texte est organisé en cinq chapitres. Dans le premier, on présente une catégorie dans laquelle il est agréable d'introduire les morphismes classiques en K-théorie algébrique et leurs propriétés. La norme réduite a un statut particulier, puisqu'elle ne se définit qu'au niveau de la K-théorie. Dans le deuxième chapitre, on utilise une approche différente de celle de Rost pour identifier la cohomologie galoisienne qui intervient avec de la K-cohomologie. On utilise pour cela certaines suites spectrales en cohomologie motivique et des méthodes introduites par Kahn dans [9]. Cela permet d'obtenir des identifications de manière assez synthétique, mais oblige à certaines restrictions sur le corps de base, dues à l'utilisation de la cohomologie motivique (c'est là qu'intervient principalement la caractéristique nulle). C'est là qu'apparait aussi le sous-corps algébriquement clos, mais cela semble moins lié à la méthode. Dans la troisième partie, on utilise la description de Panin de la K-théorie des variétés projectives homogènes (voir [17]), qui a l'avantage d'englober la description de la K-théorie des quadriques et des variétés de Severi-Brauer généralisées. C'est un aspect qui est particulièrement utile dans notre cas, car il se trouve qu'une quadrique d'Albert est isomorphe à une variété de Severi-Brauer généralisée particulière (voir théorème 3.18). Dans le quatrième chapitre, on exploite en particulier cet isomorphisme pour calculer, comme dans la démarche de Rost, la filtration topologique de la quadrique (autant que possible). Enfin, dans le cinquième chapitre, on met bout à bout les résultats acquis dans les chapitres précédents, et on obtient le théorème 5.2.

0.1 Notations et définitions

Dans tout ce texte, F désigne toujours un corps de caractéristique différente de 2.

Lorsque A est une algèbre centrale simple (resp. X un schéma, q une forme quadratique) sur F, on note A_E (resp. X_E, q_E) l'algèbre centrale simple (resp. le schéma, la forme quadratique) obtenue en étendant les scalaires à une extension E de F.

La notation X_q désigne la quadrique projective des zéros de la forme quadratique q.

Le symbole q désigne, sauf mention contraire, une forme quadratique d'Albert (voir A.2).

Le symbole D désigne, sauf mention contraire, une algèbre de biquaternions (voir A.1).

Une quadrique associée à une forme quadratique est dite déployée lorsque la forme quadratique est elle-même déployée (i.e. est hyperbolique en dimension paire). Une algèbre centrale simple est dit déployée lorsqu'elle est neutre dans le groupe de Brauer.

Chapitre 1

Norme réduite et morphismes associés

Le but de ce chapitre est de décrire le cadre utilisé pour les calculs dans les chapitres qui suivront. Plus précisément, on introduit une catégorie dont les objets sont les algèbres séparables sur F (simples de rang fini sur un corps F et dont le centre est un produit d'extensions séparables de F), et on met les morphismes qu'il faut pour pouvoir retrouver les morphimes classiques en K-théorie et introduire les propriétés imposées à la norme réduite. La catégorie qu'on va utiliser est une sous-catégorie d'une catégorie plus générale, introduite par Merkurjev et Panin dans [13]. Les objets de cette dernière catégorie sont des couples (X, A), où X est un schéma sur F et A une algèbre séparable sur F, alors que nous nous restreindrons au cas où $X = \mathrm{Spec}(F)$.

1.1 Algèbres séparables

Définition 1.1 *On dit qu'une algèbre A est séparable sur F lorsqu'elle est de rang fini sur son centre (noté $Z(A)$) qui est lui-même un produit fini d'extensions séparables de degré fini de F. On considère la catégorie $\mathrm{Alg}(F)$ dont les objets sont les algèbres séparables sur F et dont les morphismes sont les morphismes de F-algèbres.*

La catégorie $Alg(F)$ est stable par produit fini (qui est une somme directe pour cette catégorie) et par produit tensoriel au dessus de F. Elle dispose d'un endo-foncteur involutif qui à une algèbre associe son algèbre opposée.

Définition 1.2 *Soit E une extension de F, l'extension des scalaires définit un foncteur $\mathcal{E}xt_{E/F}$ de $\mathrm{Alg}(F)$ vers $\mathrm{Alg}(E)$. Si de plus E est une extension finie séparable de F, on a un foncteur de restriction $\mathcal{R}es_{E/F}$ de $AlgE$ vers $\mathrm{Alg}(F)$.*

Définition 1.3 *Soit $\mathrm{ACS}(F)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Alg}(F)$ dont les objets* *sont ceux de* $\mathrm{Alg}(F)$ *qui sont des anneaux simples de centre* F*. On appelle ses objets des algèbres centrales simples sur* F*.*

Pour une extension E de F, le foncteur $\mathcal{E}xt_{E/F}$ induit un foncteur de $\mathrm{ACS}(F)$ vers $\mathrm{ACS}(E)$.

Proposition 1.4 *(voir [1], théorème III.3) Pour deux objets* A *et* B *de* $\mathrm{ACS}(F)$ *tels que* $A \subset B$*, on note* $C_B(A)$ *le commutant de* A *dans* B*. C'est un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$*, et on a* $B = A \otimes_F C_B(\mathrm{im}(A))$

Proposition 1.5 *Soient* A *et* B *deux objets de* $\mathrm{ACS}(F)$*. Alors tout morphisme de* A *dans* B *est injectif. Soit* $\mathrm{im}(A)$ *l'image de* A *dans* B*. Par la proposition 1.4, on a* $B = \mathrm{im}(A) \otimes_K C_B(A)$*.*

Théorème 1.6 *(Skolem-Noether, voir [1], théorème III.4) Soient* A *et* B *deux objets de* $\mathrm{ACS}(K)$*. Soient* f *et* g *deux morphismes de* A *dans* B*. Alors il existe un automorphisme intérieur* σ *de* B *tel que* $g = \sigma \circ f$*.*

Proposition 1.7 *(voir [1], théorème II.2) Soit* A *un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$*. Soit* S_A *un module simple sur* A *(ils sont tous isomorphes). Soit* $D = \mathrm{End}_A(S_A)^{op}$*. Alors* D *est un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$ *qui est un corps (non nécessairement commutatif), et* A *est isomorphe à une algèbre de matrices sur ce corps* D*. On dit que* D *est le corps gauche sous-jacent à* A *(il est défini à isomorphisme près).*

On rappelle (voir [1], théorème III.1) que la dimension d'un objet A de $\mathrm{ACS}(F)$ sur F est un carré et qu'on appelle degré de A sa racine carrée (notée $\deg(A)$). La racine de la dimension du corps gauche sous-jacent à A est appelé indice de A et est noté $\mathrm{ind}(A)$. Ce dernier divise le degré de A par la proposition précédente.

Définition 1.8 *Soient* A *et* B *des anneaux. Un* A*-*B*-bimodule est un* A*-module à gauche qui est également un* B*-module à droite tel que les actions de* A *et de* B *commutent.*

Proposition 1.9 *Soit* A *un objet simple de* $\mathrm{Alg}(F)$*. Alors le module simple* S_A *est un* A*-*$\mathrm{End}_A(S_A)^{op}$*-bimodule.*

Proposition 1.10 *Soit* A *un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$*. Posons* $D = \mathrm{End}_A(S_A)^{op}$*. En tant que* D*-*D*-bimodules,* $S_{A^{op}} \otimes_A S_A$ *et* D *sont isomorphes.*

On rappelle la définition du groupe de Brauer de F (voir [1], définition III.2). On dit que deux objets de $\mathrm{ACS}(F)$ sont semblables si leurs corps gauches sous-jacents sont isomorphes. Les classes d'algèbres semblables sont des classes d'équivalence. Le produit tensoriel au dessus de F passe aux classes, et munit l'ensemble des classes d'équivalences d'une loi de groupe. Ce groupe est appelé groupe de Brauer de F et est noté $Br(F)$. L'élément neutre est la classe de F, et l'inverse de la classe d'une algèbre est la classe de son algèbre opposée. Ce groupe est commutatif. Tout élément $[A]$ de ce groupe est d'ordre fini (appelé exposant de A et noté $\exp(A)$), et cet ordre divise l'indice de A et a les mêmes facteurs premiers.

L'extension des scalaires définit un morphisme de groupe de $Br(K)$ vers $Br(E)$.

Définition 1.11 *On dit qu'une algèbre de* $\mathrm{ACS}(F)$ *est déployée si elle est neutre dans le groupe de Brauer de* F.

Définition 1.12 *Si* A *est un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$*, on dit qu'une extension* E *de* F *déploie* A *si* A_E *est déployée.*

Proposition 1.13 *(voir [1], corollaire III.1, proposition III.3) Si* A *un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$ *et* L *est un sous-corps commutatif maximal de* A*, alors* L *déploie* A*. De plus, tout sous-corps commutatif est contenu dans un sous-corps commutatif maximal. Si* E *est un sous-corps commutatif de* A*, alors* $[E : F]$ *divise* $\deg(A)$*. Si de plus* A *est un corps, alors un sous-corps commutatif maximal* L *vérifie* $\deg(A) = [L : F]$.

Proposition 1.14 *Pour* A *et* B *deux objets de* $\mathrm{ACS}(F)$*, munis d'un morphisme* f *de* A *dans* B*, il existe* $C \in \mathrm{ACS}(F)$ *tel que* $\mathrm{im}(A) \otimes_F C \simeq B$*, par la proposition 1.4. Si* C' *est le corps gauche sous-jacent à* C*, alors le morphisme* f *de* $A \subset B$ *se factorise en* $A \longrightarrow \mathrm{im}(A) \otimes_F C' = B' \subset B$*, et* B' *est le plus petit sous -objet (au sens de l'inclusion) de* B *qui possède cette propriété de factorisation de* f*. De plus* $B' \sim B$.

Proposition 1.15 *Tout objet de* $\mathrm{Alg}(F)$ *se décompose comme un produit fini d'objets simples.*

Définition 1.16 *Soit* A *un objet de* $\mathrm{Alg}(F)$*. On note* $\mathrm{P}(A)$ *la catégorie des* A*-modules de rang fini, et* $K_*(A)$ *la* K*-théorie de Quillen de cette catégorie.*

Proposition 1.17 *Soit* A *un objet simple de* $\mathrm{Alg}(F)$*. Comme* A *est simple, il existe un module (simple)* S_A *tel que tout élément de* $\mathrm{P}(A)$ *soit isomorphe à une somme de copies de* S_A.

Définition 1.18 *Soient* A *et* B *deux éléments de* $\mathrm{Alg}(F)$*, et* $f : A \longrightarrow B$ *un morphisme. On appelle rang de* B *sur* A *le rang de* B *considéré comme* A*-module par le morphisme* f*. Ce rang est indépendant du morphisme choisi. On le note* $\mathrm{rg}_A(B)$.

Définition 1.19 *Soient* A*,* B *et* C *des objets de* $\mathrm{Alg}(F)$*. Le foncteur bi-exact*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{P}(B^{op} \otimes_F C) \times \mathrm{P}(A^{op} \otimes_F B) & \longrightarrow & \mathrm{P}(A^{op} \otimes_F C) \\ (P, P') & \longmapsto & P \otimes_B P' \end{array}$$

induit un accouplement en K-théorie

$$\begin{array}{ccc} K_n(B^{op} \otimes_F C) \otimes K_m(A^{op} \otimes_F B) & \longrightarrow & K_{n+m}(A^{op} \otimes_F C) \\ (u \otimes v) & \longmapsto & u \circ v \end{array}$$

Proposition 1.20 *Cet accouplement est associatif.*

Démonstration : Cela se vérifie sur les catégories sous-jacentes, et cela résulte immédiatement du fait que le produit tensoriel est associatif. □

1.2 La catégorie $\mathcal{A}_F$

Soit $\mathcal{A}_F$ la catégorie suivante. Les objets de sont les algèbres séparables sur F. Les morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_F}(A, B) = K_0(A^{op} \otimes_F B)$$

La composition est donnée par $(u, v) \longmapsto u \circ v$ (voir proposition 1.19). L'associativité résulte de la proposition 1.20. L'identité Id_A est la classe dans $K_0(A^{op} \otimes_F A)$ de A vue comme $A^{op} \otimes_F A$-module par

$$(b \otimes c).a \longrightarrow cab$$

La catégorie $\mathcal{A}_F$ est additive et munie d'une somme directe (donnée par le produit sur les objets). Elle est également munie d'un endo-foncteur contravariant involutif *op*, qui a tout objet A associe l'objet A^{op} et à tout morphisme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_F}(A, B) = K_0(A^{op} \otimes B)$ associe $u^{op} \in K_0(B^{op} \otimes A)$.

La catégorie $\mathcal{A}_F$ est munie d'une structure tensorielle, compatible avec la somme directe. A tout couple d'objets (A, B), on associe l'objet $A \otimes_F B$. A tout couple de morphismes $u \in K_0(A^{op} \otimes_F B)$ et $v \in K_0(C^{op} \otimes_F D)$, on associe le morphisme

$$u \otimes_F v \in K_0(A^{op} \otimes_F B \otimes_F C^{op} \otimes_F D) \simeq K_0((A \otimes_F C)^{op} \otimes_F (B \otimes_F D))$$

Définition 1.21 *Soient A et B deux objets de $\mathcal{A}_F$ tels que $A \sim B$. Soit D le corps gauche sous-jacent à A. On définit le morphisme* M *de A dans B d'invariance de Morita par* $\mathrm{M}_{A,B} = S_B \otimes_D S_{A^{op}} \in K_0(A^{op} \otimes_F B)$.

Proposition 1.22 *Pour trois objets A, B et C de $\mathcal{A}_F$ semblables, on a* $\mathrm{M}_{B,C} \circ \mathrm{M}_{A,B} = \mathrm{M}_{A,C}$.

Démonstration : Par définition de la composition dans $\mathcal{A}_F$, il suffit de vérifier que $S_C \otimes_D S_{B^{op}} \otimes_B S_B \otimes_D S_{A^{op}}$ est isomorphe à $S_C \otimes_D S_{A^{op}}$. Mais par la proposition 1.10, $S_{B^{op}} \otimes_B S_B$ est isomorphe à D en tant que D-D-bimodule, ce qui permet de conclure. □

Définition 1.23 *On définit le foncteur "graphe" covariant* γ_F *de* $\mathrm{Alg}(F)$ *vers* $\mathcal{A}_F$*. Ces deux catégories ont les mêmes objets. Pour un objet* A *de* $\mathrm{Alg}(F)$*, on pose que* $\gamma_F(A) = A$*. Pour un morphisme* $f : A \longrightarrow B$ *de* $\mathrm{Alg}(F)$*, on pose que* $\gamma_F(f)$ *est la classe dans* $K_0(A^{op} \otimes_F B)$ *de* B *vu comme* $A^{op} \otimes_F B$*-module par la formule* $(a \otimes b).x = bxf(a)$*. On note aussi* $\gamma_F(f) = f_*$*.*
De même, on définit le foncteur contravariant ${\gamma^{op}}_F$ *de* $\mathrm{Alg}(F)$ *vers* $\mathcal{A}_F$ *qui est la composée de* γ_F *avec le foncteur op. On note aussi* ${\gamma^{op}}_F(f) = f^*$

Démonstration : Vérifions que le foncteur γ_F est bien défini. Il envoie clairement l'identité de A sur l'identité de A. De plus, si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont deux morphismes de $\mathrm{Alg}(F)$, si on note $[B] = \gamma_F(f)$ et $[C] = \gamma_F(g)$, on a

$$[C] \otimes_B [B] = [C] = \gamma_F(f \circ g)$$

□

Définition 1.24 *Si* E *est une extension de* F*, on a un foncteur* $\mathcal{E}xt_{E/F}$ *de* $\mathcal{A}_F$ *vers* $\mathcal{A}_E$*. A tout objet* A *de* $\mathcal{A}_F$*, on associe l'objet* $A_E = E \otimes_F A$ *de* $\mathcal{A}_E$*. A tout morphisme* $u \in K_0(A^{op} \otimes_F B)$ *associe* $E \otimes_F u$ *dans* $K_0(A_E^{op} \otimes_E B_E)$*. Ce foncteur possède le même nom que celui de la définition 1.2 car le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(F) \arrow[r, "\mathcal{E}xt_{E/F}"] \arrow[d, "\gamma_F"'] & \mathrm{Alg}(E) \arrow[d, "\gamma_E"'] \\
\mathcal{A}_F \arrow[r, "\mathcal{E}xt_{E/F}"] & \mathcal{A}_E
\end{tikzcd}$$

est commutatif de manière évidente.

Définition 1.25 *Si* E *est une extension finie séparable de* F*, on a un foncteur* $\mathcal{R}es_{E/F}$ *de* $\mathcal{A}_E$ *vers* $\mathcal{A}_F$*. A tout objet* A *de* $\mathcal{A}_E$*, on associe l'objet* $A_{(F)}$ *(*A *vu comme* F *algèbre) de* $\mathcal{A}_F$*. A tout morphisme* $u \in K_0(A^{op} \otimes_F B)$*, on associe la restriction de* u *à* $K_0(A_{(F)}^{op} \otimes_F B_{(F)})$*. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(E) \arrow[r, "\mathcal{R}es_{E/F}"] \arrow[d, "\gamma_E"'] & \mathrm{Alg}(F) \arrow[d, "\gamma_F"'] \\
\mathcal{A}_E \arrow[r, "\mathcal{R}es_{E/F}"] & \mathcal{A}_F
\end{tikzcd}$$

est commutatif de manière évidente.

Proposition 1.26 *Lorsque* A *et* B *sont deux objets simples de* $\mathrm{Alg}(F)$*, et* $f : A \longrightarrow B$ *est un morphisme, la composée* $f^* \circ f_*$ *coïncide avec* $\mathrm{rg}_A(B)\mathrm{Id}_A$*.*

Démonstration : Soit $[_f B]$ la classe de B vu comme $B^{op} \otimes A$-module, soit $[B_f]$ celle de B vu comme $A^{op} \otimes B$-module et soit $[B]$ la classe de $[B]$ vu comme $A^{op} \otimes A$-module par f (à gauche et à droite). Alors $[_f B] \otimes_B [B_f] = \mathrm{rg}_A(B)[B]$ comme A-modules pour des raisons de dimension (A est simple). □

Proposition 1.27 *Lorsque A et B sont deux objets de* $\mathrm{ACS}(F)$ *tels qu'il existe un morphisme $f : A \longrightarrow B$, le morphisme f_* ne dépend pas du morphisme f choisi.*

Démonstration : L'algèbre $A^{op} \otimes_F B$ est simple. La classe d'isomorphie de B en tant que $A^{op} \otimes_F B$-module (par f) ne dépend donc que de son rang sur F, qui est indépendant du morphisme f. □

Proposition 1.28 *Lorsque A et B sont deux objets de* $\mathrm{ACS}(F)$ *tels qu'il existe un morphisme $f : A \longrightarrow B$, le morphisme f^* ne dépend pas du morphisme f choisi.*

Démonstration : La démontration est analogue à celle de la proposition précédente. □

Définition 1.29 *Lorsque A et B sont deux objets de* $\mathrm{ACS}(F)$*, munis d'un morphisme $f : A \longrightarrow B$, on note* $\mathrm{Res}_{B,A} = f^*$ *et* $\mathrm{I}_{A,B} = f_*$*. Cela se justifie par les propositions précédentes.*

Proposition 1.30 *Si A et B sont des objets simples de* $\mathrm{Alg}(F)$ *tels que $A \sim B$ et munis d'un morphisme f de A dans B, alors* $\mathrm{I}_{A,B} = \frac{\deg(B)}{\deg(A)} \mathrm{M}_{A,B}$*. De même, on a* $\mathrm{Res}_{B,A} = \frac{\deg(B)}{\deg(A)} \mathrm{M}_{B,A}$*.*

Démonstration : Comme vu précédemment, il suffit de calculer les dimensions sur F de ces deux modules sur $A^{op} \otimes B$. Le module B est de dimension $\deg(B)^2$ sur F, et le module $S_B \otimes_D S_{A^{op}}$ est de dimension $\deg(A).\deg(B)$ sur F, ce qui fournit le résultat. En applicant le foncteur *op*, on obtient la seconde égalité. □

Définition 1.31 *Lorsque A est un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$ *et L est une extension finie séparable de F, et que f est le morphisme d'extension des scalaires de A vers $L \otimes_F A$, on note* $\mathrm{Ext}_{L/F}$ *le morphisme f_* et* $\mathrm{N}_{L/F}$ *le morphisme f^* (sans mention explicite de A).*

Proposition 1.32 *On montre sans difficulté en utilisant les modules sous-jacents que si A et B sont deux objets de* $\mathrm{ACS}(F)$ *munis d'un morphisme entre les deux, et E est une extension finie séparable de F, les diagrammes suivants sont commutatifs.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{E/F}"] & B_E \\ A \arrow[u, "\mathrm{I}_{A,B}"] \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{E/F}"'] & A_E \arrow[u, "\mathrm{I}_{A_E,B_E}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{E/F}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_{B,A}"'] & B_E \arrow[d, "\mathrm{Res}_{B_E,A_E}"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{E/F}"'] & A_E \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{E/F}"] \arrow[d, "\mathrm{M}_{B,A}"'] & B_E \arrow[d, "\mathrm{M}_{B_E,A_E}"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{E/F}"'] & A_E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B & B_E \arrow[l, "\mathrm{N}_{E/F}"'] \\ A \arrow[u, "\mathrm{I}_{A,B}"] & A_E \arrow[l, "\mathrm{Ext}_{E/F}"] \arrow[u, "\mathrm{I}_{A_E,B_E}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\mathrm{Res}_{B,A}"'] & B_E \arrow[l, "\mathrm{N}_{E/F}"'] \arrow[d, "\mathrm{Res}_{B_E,A_E}"] \\ A & A_E \arrow[l, "\mathrm{N}_{E/F}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "\mathrm{M}_{B,A}"'] & B_E \arrow[l, "\mathrm{N}_{E/F}"'] \arrow[d, "\mathrm{M}_{B_E,A_E}"] \\ A & A_E \arrow[l, "\mathrm{N}_{E/F}"] \end{tikzcd}$$

Proposition 1.33 *Si A est un objet de $\mathrm{ACS}(F)$, et L est un sous-corps commutatif maximal de A, alors A_L est déployée (par la proposition 1.13). Notons i l'inclusion de L dans A. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathrm{M}_{L,A_L}"] \arrow[dr, "\frac{\deg(A)}{[L:F]}.i_*"'] & A_L \arrow[d, "\mathrm{N}_{L/F}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration : Soit $[A_L]$ la classe dans $K_0(A_L^{op} \otimes_F A)$ de A_L vu comme $A_L^{op} \otimes_F A$-module. On a $\mathrm{M}_{L,A_L} = S_{A_L} \otimes L$ comme $L^{op} \otimes_F A_L$-module. De plus, $A_L \otimes_{A_L} S_{A_L} \otimes L = S_{A_L}$ comme $L^{op} \otimes_F A$ module. Il faut montrer que $\frac{\deg(A)}{[L:F]}$ fois ce dernier est isomorphe à A vu comme $L^{op} \otimes_F A$-module. Cela découle encore une fois de leurs dimensions sur F (qui sont respectivement $\deg(A).[L:F]$ et $\deg(A)^2$). □

Définition 1.34 *Soient A et B deux objets de $\mathrm{ACS}(F)$ tels que $A \subset B$. Soit B' le plus petit sous-objet de B semblable à B et qui contient A. Il existe grâce à la propriété 1.14. On pose alors $\overline{\mathrm{Res}}_{B,A} = \mathrm{Res}_{B',A} \circ \mathrm{M}_{B,B'}$.*

Proposition 1.35 *Pour deux objets A et B de $\mathrm{ACS}(F)$ tels que $A \subset B$, on a*

$$\mathrm{Res}_{B,A} = \frac{deg(B)}{\mathrm{ind}(B \otimes A^{op}) \deg(A)} \overline{\mathrm{Res}}_{B,A}$$

Démonstration : Cela découle directement de la proposition 1.30. □

1.3 Foncteurs de K-théorie

Pour chaque indice $i \in \mathbf{N}$, on définit le foncteur K_i^F de la catégorie $\mathcal{A}_F$ vers celle des groupes abéliens, qu'on note également K_i lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Pour un objet A de $\mathcal{A}_F$, on pose que $K_i(A)$ est le groupe de K-théorie de Quillen de l'anneau A. Pour un morphisme $u \in K_0(A^{op} \otimes B)$, $K_i(u)$ est le morphisme de $K_i(A)$ vers $K_i(B)$ qui à x associe $u \circ x$ (au sens de la definition 1.19). Ce foncteur est bien défini car il envoie bien l'identité de A sur l'identité de $K_i(A)$, et il respecte la composition par la proposition 1.20.

Proposition 1.36 *Le foncteur composé $K_i \circ \gamma_F$ de $\mathrm{Alg}(F)$ vers la catégorie des groupes abéliens est le foncteur K-théorie de Quillen classique.*

Démonstration : Il n'y a rien à vérifier pour les objets, et pour les morphismes, c'est une conséquence immédiate de la définition du graphe γ_F et de la fonctorialité de la K-théorie de Quillen, qui est justement induite par $P \longmapsto B \otimes_A P$ sur les catégories de modules sous-jacentes. □

Pour ne pas alourdir les notations, on note également f^*, f_*, $\mathrm{I}_{A,B}$, $\mathrm{Res}_{A,B}$, $\mathrm{M}_{A,B}$, $\overline{\mathrm{Res}}_{B,A}$, $\mathrm{Ext}_{E/F}$, $\mathrm{Res}_{E/F}$ les images par K_i de ces derniers morphismes.

Proposition 1.37 *Par fonctorialité, ces morphismes images par K_i vérifient les mêmes diagrammes commutatifs que leurs antécédants (proposition 1.32).*

Définition 1.38 *Soit E une extension de F. On a une transformation naturelle entre les foncteurs $K_i^F \circ \mathcal{E}xt_{E/F}$ (voir définition 1.24) et K_i^E, donnée par l'extension des scalaires classique de $K_i(A)$ vers $K_i(A_E)$. On note provisoirement $\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}$ le morphisme de $K_i(A)$ vers $K_i(A_E)$ de cette transformation naturelle. De même, si E est une extension finie séparable de F, on a une transformation naturelle entre les foncteurs $K_i^E \circ \mathcal{R}es_{E/F}$ et K_i^F. On note provisoirement $\widetilde{\mathrm{Res}}_{E/F}$ le morphisme de $K_i(A)$ vers $K_i(A_E)$ de cette transformation naturelle.*

Proposition 1.39 *Si A et B sont des objets de $\mathrm{ACS}(F)$, les diagrammes suivants (quand les morphismes sont définis) sont commutatifs.*

$$\begin{tikzcd}
K_i(B) \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}"] & K_i(B_E) \\
K_i(A) \arrow[u, "\mathrm{I}_{A,B}"] \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}"'] & K_i(A_E) \arrow[u, "\mathrm{I}_{A_E,B_E}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_i(B) \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_{A,B}"'] & K_i(B_E) \arrow[d, "\mathrm{Res}_{A_E,B_E}"] \\
K_i(A) \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}"'] & K_i(A_E)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K_i(B) \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}"] \arrow[d, "\mathrm{M}_{A,B}"'] & K_i(B_E) \arrow[d, "\mathrm{M}_{A_E,B_E}"] \\
K_i(A) \arrow[r, "\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}"'] & K_i(A_E)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_i(B) & K_i(B_E) \arrow[l, "\widetilde{\mathrm{Res}}_{E/F}"'] \\
K_i(A) \arrow[u, "\mathrm{I}_{A,B}"] & K_i(A_E) \arrow[l, "\widetilde{\mathrm{Res}}_{E/F}"] \arrow[u, "\mathrm{I}_{A_E,B_E}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K_i(B) \arrow[d, "\mathrm{Res}_{A,B}"'] & K_i(B_E) \arrow[l, "\widetilde{\mathrm{Res}}_{E/F}"'] \arrow[d, "\mathrm{Res}_{A_E,B_E}"] \\
K_i(A) & K_i(A_E) \arrow[l, "\widetilde{\mathrm{Res}}_{E/F}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K_i(B) \arrow[d, "\mathrm{M}_{A,B}"'] & K_i(B_E) \arrow[l, "\widetilde{\mathrm{Res}}_{E/F}"'] \arrow[d, "\mathrm{M}_{A_E,B_E}"] \\
K_i(A) & K_i(A_E) \arrow[l, "\widetilde{\mathrm{Res}}_{E/F}"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration : Ces diagrammes sont commutatifs par définition d'une transformation naturelle. □

Lorsque E est une extension finie séparable de F, le morphisme $\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}$ coïncide avec le morphisme $\mathrm{Ext}_{E/F}$. Comme le morphisme $\widetilde{\mathrm{Ext}}_{E/F}$ vérifie les même propriétés de commutation que $\mathrm{Ext}_{E/F}$, on le note également dorénavant $\mathrm{Ext}_{E/F}$. On fait de même pour les morphisme $\widetilde{\mathrm{Res}}_{E/F}$ et $\mathrm{Res}_{E/F}$.

1.4 Norme Réduite

Pour $i = 0$, 1 ou 2, on dispose de morphismes appelés normes réduites pour le foncteur K_i, et qui consistent en la donnée, pour tout corps F et tout objet A de $\mathcal{A}_F$ d'un morphisme

$$\mathrm{Nrd}_A : K_i(A) \longrightarrow K_i(Z(A))$$

On définit cette norme réduite pour les objets simples, et on pose qu'elle respecte la somme directe de $\mathcal{A}_F$.

Pour $i = 0$, $K_0(A)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$, de générateur le module simple S_A, et $K_0(F)$ est par conséquent engendré par $[F]$. La norme réduite est l'application qui envoie S_A sur $\mathrm{ind}(A).[F]$.

Pour $i = 1$, $K_1(A)$ est isomorphe à $A^*/[A^*, A^*]$, et la norme réduite est induite par l'application $A \longrightarrow A_E \simeq M_n(E) \xrightarrow{det} E^*$, où E est une extension finie de F qui déploie A. On peut montrer que cette application arrive dans F^* (voir [5]).

Pour $i = 2$, la définition est un peu plus compliquée. Une définition est donnée par Suslin dans [23], corollaire 5.7. Si Y est la variété de Severi-Brauer de A (voir [2]), sa K_iY se décompose en une somme directe dont un des facteurs est K_iA. De plus, Suslin montre dans [23] que la composée

$$K_2F \longrightarrow K_2Y \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{K}_2)$$

est un isomorphisme. Il définit alors la norme réduite comme la composée $K_2A \longrightarrow K_2Y \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{K}_2) \xleftarrow{\sim} K_2F$.

On appelle SK_iA le noyau de la norme réduite de K_iA vers K_iF. Ces morphismes vérifient les propriétés suivantes.

Proposition 1.40 *Par construction, la norme réduite vérifie que* $\mathrm{Nrd}_{A\oplus B} = \mathrm{Nrd}_A \oplus \mathrm{Nrd}_B$.

Cela signifie que l'on peut se ramener à examiner ses propriétés pour les algèbres simples.

Proposition 1.41 *La norme réduite avale le morphisme d'invariance de Morita : lorsque A et B sont des objets de* $\mathrm{ACS}(K)$*, et que $A \sim B$, on a* $\mathrm{Nrd}_A \circ \mathrm{M}_{B,A} = \mathrm{Nrd}_B$.

Proposition 1.42 *Si A est un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$ *et E est une extension quelconque de F, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
K_i(A) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{E/F}"] \arrow[d, "\mathrm{Nrd}_A"'] & K_i(A_E) \arrow[d, "\mathrm{Nrd}_{A_E}"'] \\
K_i(F) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_{E/F}"] & K_i(E)
\end{tikzcd}$$

Proposition 1.43 *Si E est une extension finie séparable de F, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
K_i(A) \arrow[d, "\mathrm{Nrd}_A"'] & K_i(A_E) \arrow[l, "\mathrm{N}_{E/F}"] \arrow[d, "\mathrm{Nrd}_{A_E}"] \\
K_i(F) & K_i(E) \arrow[l, "\mathrm{N}_{E/F}"]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ces dernières propriétés sont classiques pour $i = 0$ ou 1 (voir par exemple [5]), et on peut les montrer pour $i = 2$, en prenant pour définition celle de [23], corollaire 5.7. En effet, dans la composée qui définit la norme réduite, tous les termes sont fonctoriels par rapport à l'extension des scalaires et à la norme $\mathrm{N}_{E/F}$, cela montre donc les proposition 1.42 et 1.43. Pour la proposition 1.41, on montre qu'on peut se ramener au cas déployé en utilisant le corps des fonctions K de la variété de Severi-Brauer de A. En effet ce corps vérifie $K_2F \subset K_2K$ (voir la proposition A.6). Dans le cas déployé, la norme réduite de Suslin correspond naturellement au morphisme d'invariance de Morita. On obtient alors le résultat par la relation de la proposition 1.22.

On peut en tirer les conséquences suivantes.

Proposition 1.44 *Lorsque A est un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$ *tel que $A \sim F$, alors* $\mathrm{Nrd}_A = \mathrm{M}_{A,F}$.

Démonstration : C'est un conséquence de la propriété 1.41. □

Proposition 1.45 *Il n'y a qu'une seule famille de morphismes* Nrd *qui puisse vérifier les propriétés précédentes.*

Démonstration : Pour $i = 0$, 1 ou 2, pour tout corps F et toute algèbre centrale simple sur F, il existe un corps F_A extension de F qui déploie A et tel que l'application $K_iF \longrightarrow K_iF_A$ soit injective. Pour $i = 0$ et 1, il suffit de prendre n'importe quel corps qui déploie A, et pour $i = 2$, on prend le corps des fonctions de la varitété de Severi-Brauer de A (voir [23]). Par la propriété 1.42, on est alors ramené au cas où A est déployée, mais dans ce cas, la norme réduite est unique, puisqu'elle coïncide avec le morphisme d'invariance de Morita, par la proposition 1.44. $\square$

Proposition 1.46 *Lorsque A est un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$ *et L est un sous-corps commutatif maximal de A, alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
K_i(L) \arrow[r, "\frac{\deg(A)}{[L:F]}.i_*"] \arrow[dr, "\mathrm{N}_{L/F}"'] & K_i(A) \arrow[d, "\mathrm{Nrd}_A"] \\
& K_i(F)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, où i est l'inclusion de L dans A.

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition 1.33 et de la proposition 1.43. $\square$

Proposition 1.47 *Lorsque A est un objet de* $\mathrm{ACS}(F)$ *qui est un corps et E est un sous-corps commutatif de A, alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
K_i(E) \arrow[r, "\gamma_F(i)"] \arrow[dr, "\frac{\deg(A)}{[E:F]}\mathrm{N}_{E/F}"'] & K_i(A) \arrow[d, "\mathrm{Nrd}_A"] \\
& K_i(F)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, où i est l'inclusion de E dans A.

Démonstration : Tout sous-corps commutatif de A est inclus dans un sous-corps commutatif maximal (noté L) de A, on se ramène donc à la proposition précédente en utilisant que si A est un corps $\deg(A) = [L : F]$ et que la composée de l'inclusion de E dans L et de $\mathrm{N}_{L/E}$ est la multiplication par $[L : E]$. $\square$

Proposition 1.48 *Si A est une algèbre de* $\mathrm{ACS}(F)$*, la composée de l'inclusion de F dans A et de la norme réduite est la multiplication par le degré de A.*

Démonstration : Si D_A est le corps gauche semblable à A, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K_i(F) \arrow[r] \arrow[d, equal] & K_i(D_A) \arrow[d, "\mathrm{I}_{D,A}", "\frac{\deg(A)}{\deg(D_A)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Nrd}_{D_A}"] & \\
K_i(F) \arrow[r] & K_i(A) \arrow[r, "\mathrm{Nrd}_A"] & K_i(F)
\end{tikzcd}$$

est commutatif (par les propositions 1.30 et 1.41). On peut donc se ramener à montrer la proposition dans le cas où A est un corps. Mais dans ce cas, cela découle directement de la proposition 1.46. $\square$

1.5 Cup-produit

Si on utilise la K-théorie de Quillen pour deux indices i et j, on peut considérer le (bi-)foncteur $K_i \otimes_{\mathbf{Z}} K_j$ de $\mathcal{A}_F \times \mathcal{A}_F$ vers la catégorie des groupes abéliens. On peut aussi considérer le (bi-)foncteur de $\mathcal{A}_F \times \mathcal{A}_F$ vers $\mathcal{A}_F$ donné par le produit tensoriel au dessus de F. Il y a une transformation naturelle de $K_i \otimes_{\mathbf{Z}} K_j$ vers $K_{i+j} \circ \otimes_F$ appelée cup-produit, et induite par le produit tensoriel sur F dans les catégories de modules sous-jacentes. Pour $x \in K_i(A)$ et $y \in K_j(B)$, on note $x.y$ l'image dans $K_{i+j}(A \otimes_F B)$ par cette transformation naturelle de $x \otimes_{\mathbf{Z}} y$. Ce cup-produit est associatif.

Proposition 1.49 *Si A, B, A' et B' sont des algèbres de* $\mathrm{ACS}(F)$ *telles que $A \sim A'$ et $B \sim B'$. Alors* $\mathrm{M}_{A,A'}.\mathrm{M}_{B,B'} = \mathrm{M}_{A\otimes_F B, A'\otimes_F B'}$.

Démonstration : Comme le cup-produit est une transformation naturelle, la seule chose à vérifier est que le morphisme $\mathrm{M}_{A,A'} \otimes_F \mathrm{M}_{B,B'}$ coïncide avec $\mathrm{M}_{A\otimes_F B, A'\otimes_F B'}$. Cela se fait en comparant les modules $(S_{A'} \otimes_{D_A} S_{A^{op}}) \otimes_F (S_{B'} \otimes_{D_B} S_{B^{op}})$ et $S_{A'\otimes_F B'} \otimes_{D_{A\otimes_F B}} S_{(A\otimes_F B)^{op}}$ dans $K_0((A \otimes_F B)^{op} \otimes_F (A' \otimes_F B'))$. Ils ont même dimension sur F $(\deg(A)\deg(A')\deg(B)\deg(B'))$, ils sont donc isomorphes. □

On a de même

$$\mathrm{I}_{A,A'}.\mathrm{I}_{B,B'} = \mathrm{I}_{A\otimes_F B, A'\otimes_F B'}$$

et

$$\mathrm{Res}_{A,A'}.\mathrm{Res}_{B,B'} = \mathrm{Res}_{A\otimes_F B, A'\otimes_F B'}$$

La norme réduite se comporte également bien par rapport au cup-produit.

Proposition 1.50 *Pour $i \leq 2$, pour un objet A de* $\mathrm{ACS}(F)$ *et pour $x \in K_0(A)$ et $y \in K_i(F)$, on a* $\mathrm{Nrd}_A(x).y = \mathrm{Nrd}_A(x.y)$.

Démonstration : Par la proposition 1.49, on se ramène au cas ou A est un corps. Il suffit ensuite de vérifier pour un élément de K_iF et le générateur $[S_A]$ de K_0A. Mais dans le cas où A est un corps, $S_A = [A]$, et le cup-produit d'un élément de K_iF par $[A]$ coïncide donc avec le morphisme (induit par l'inclusion de F dans D) $\mathrm{I}_{F,D} : K_iF \longrightarrow K_iD$. La propriété est alors immédiate par compatibilité de I au cup-produit.
□

Nous ne l'utiliserons pas, mais on peut montrer que la norme réduite vérifie plus généralement la propriété suivante.

Proposition 1.51 *Pour $i + j \leq 2$, pour deux objets A et B de* $\mathrm{ACS}(F)$ *et pour $x \in K_i(A)$ et $y \in K_j(B)$, on a* $\mathrm{Nrd}_A(x).\mathrm{Nrd}_B(y) = \mathrm{Nrd}_{A\otimes_F B}(x.y)$.

1.6 Cas particulier d'une algèbre de biquaternions

On termine ce chapitre par un calcul dans le cas particulier d'une algèbre de biquaternions (voir annexe A.1), qui servira par la suite.

Une algèbre de biquaternions D qui est un corps est d'indice et de degré 4 et d'exposant 2 dans le groupe de Brauer. Par conséquent, on a $\mathrm{ind}(D^{\otimes i}) = 4$ si et seulement si i est pair, et 1 sinon. De plus, $D \simeq D^{op}$. Toutes les puissances paires de D sont semblables entre elles, et toutes les puissances impaires aussi. Le degré de $D^{\otimes i}$ est 4^i.

Proposition 1.52 *Si $i < j < k$, que i et k ont même parité et que $2j \leq k+i$, alors la composée $\mathrm{Res}_{D^{\otimes k},D^{\otimes j}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes i},D^{\otimes k}}$ coïncide avec $4^{i+k-2j}\mathrm{I}_{D^{\otimes i},D^{\otimes j}}$. Si $2j > k+i$, on a $4^{2j-i-k}\mathrm{Res}_{D^{\otimes k},D^{\otimes j}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes i},D^{\otimes k}} = \mathrm{I}_{D^{\otimes i},D^{\otimes j}}$.*

Démonstration : Si D est un corps, et si l est impair, le module simple $S_{D^{\otimes l}}$ est isomorphe à $D^{4^{l-1}}$. Il faut alors comparer les dimensions sur F de $D^{\otimes k} \otimes_{D^{\otimes k}} D^{4^{k-1}} \otimes_D D^{4^{i-1}}$ et de $D^{\otimes j}$. On trouve 4^{i+k} pour le premier, et 4^{2j} pour le deuxième. D'où le résultat. On procède de même quand D n'est pas un corps. □

Chapitre 2

K-cohomologie et cohomologie galoisienne

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.1 *Soient D une algèbre de biquaternions,*

$$q = < a, b, -ab, -c, -d, cd >$$

une forme d'Albert associée, X la quadrique projective d'équation $q = 0$ et de corps des fonctions $F(q)$. Soit Y la variété de Severi-Brauer $SB(D)$. On suppose de plus que F est de caractéristique nulle et contient un sous-corps F_0 algébriquement clos. On a un isomorphisme

$$\ker(H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^2(X_{F(Y)}, \mathcal{K}_4)) \simeq \ker(H^5(F, \mathbf{Z}/2) \longrightarrow H^5(F(q), \mathbf{Z}/2))$$

2.1 Utilisation des suites spectrales

Dans cette section, on utilise la méthode introduite par B.Kahn dans [9] qui consiste à relier des termes de deux suites spectrales ayant un but commun. Il s'agit ici de la suite spectrale de coniveau en cohomologie motivique étale et de la suite spectrale "des poids" en cohomologie motivique (B.4).

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.1, on a une suite exacte, après localisation en 2*

$$0 \longrightarrow H^5_{ét}(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)) \longrightarrow H^6_{ét}(X, \mathbf{Z}(4)) \longrightarrow K_2(F) \oplus K_2(F)$$

Démonstration : On considère la suite spectrale "des poids" en cohomologie motivique (B.4) en poids $n = 4$. Pour les termes E_2, sur l'antidiagonale $p+q = 6$, on trouve (après identification) les groupes

$$E_2^{p,6-p} = H^{2p-6}_{ét}(E_q, \mathbf{Z}(p-2))$$

Or, d'après [9], lem. 8.2, $E_q = F$ sauf si $q = 2$, auquel cas $E_2 = F \times F$.

Tout ce qui suit dans cette démonstration est vrai après localisation en 2. Les groupes $E_2^{p,q}$ sont uniquement 2-divisibles pour $q > p$ par C.9 ($car(F) \neq 2$). Ils sont même nuls si de plus $q > 2$, car dans ce cas, ils ne sont que de la cohomologie de faisceaux en degré négatif.

Les différentielles sont de 4-torsion. En effet, un transfert d'une extension E de degré 4 qui déploie X le montre puisque X_E est cellulaire (A.5) et que la suite spectrale pour X_E est alors dégénèrée (B.4). Toutes les différentielles qui arrivent ou partent des termes $E_i^{p,q}$, $q > p$ sont donc nulles.

$E_2^{3,3} = H^0_{ét}(F, \mathbf{Z}(1))$ est nul (C.7).

$E_2^{5,1}$ est nul ("Hilbert 90" pour K_3 de Milnor, [9], Corollaire 4.7, b)).

Les seuls termes E_∞ non nuls sur cette antidiagonale sont donc $E_\infty^{4,2}$ et $E_\infty^{6,0}$. On obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_\infty^{6,0} \longrightarrow H^6_{ét}(X, \mathbf{Z}(4)) \longrightarrow E_\infty^{4,2}$$

La différentielle $d_2^{4,1}$ est nulle, par [9], Corollaire 8.6, a). Les différentielles d_i, $i > 3$ qui arrivent dans les $E_i^{6,0}$ sont nulles car elles partent de termes uniquement divisibles. Si $d_3^{3,2}$ est nulle, on a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{6,0} \longrightarrow H^6_{ét}(X, \mathbf{Z}(4)) \longrightarrow E_2^{4,2}$$

Calculons d'abord le terme $E_3^{3,2}$. Les différentielles $d_2^{1,3}$ et $d_2^{3,2}$ sont nulles car $E_2^{1,3}$ et $E_2^{5,1}$ sont nuls d'après ce qui précède. Il s'ensuit que $E_3^{3,2} = E_2^{3,2} = H^1_{ét}(F \times F, \mathbf{Z}(2)) \simeq K_3(F)_{ind} \times K_3(F)_{ind}$. L'hypothèse sur le sous-corps F_0 n'intervient que pour la nullité de cette différentielle $d_3^{3,2}$. En effet, on utilise le

Lemme 2.3 *Si F contient un sous-corps F_0 algébriquement clos, $K_3(F)_{ind}$ est divisible.*

Démonstration : D'après [15], prop. 11.6, le conoyau du morphisme

$$K_3(F_0)_{ind} \longrightarrow K_3(F)_{ind}$$

est uniquement divisible. Comme F_0 est algébriquement clos, $K_3(F_0)_{ind}$ est divisible et donc $K_3(F)_{ind}$ aussi. □

La différentielle $d_3^{3,2}$ est donc nulle car elle est de torsion et part d'un groupe divisible. □

Théorème 2.4 *On a une suite exacte, après localisation en 2,*

$$0 \longrightarrow H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^6_{ét}(X, \mathbf{Z}(4)) \longrightarrow H^5_{ét}(F(q), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4))$$

Démonstration : On utilise la suite spectrale de coniveau en cohomologie motivique étale (B.3) en poids $n = 4$. Tout le raisonnement qui suit est vrai après localisation en 2. Sur l'antidiagonale $p+q = 6$, les seuls termes $E_2^{p,q}$ éventuellement non nuls sont $E_2^{0,6}$ et $E_2^{2,4}$. En effet, $E_2^{1,5} = E_2^{3,3} = E_2^{5,1} = E_2^{6,0} = 0$ par la proposition B.2 et $E_1^{4,2} = \bigoplus_{x \in X^{(4)}} H_{ét}^{-2}(F(x), \mathbf{Z}(0)) = 0$ par le corollaire C.7. On obtient donc une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E_\infty^{2,4} \longrightarrow H_{ét}^6(X, \mathbf{Z}(4)) \longrightarrow E_\infty^{0,6} \longrightarrow 0$$

Par ailleurs, sur l'antidiagonale $p+q=7$, les termes $E_2^{p,q}$ sont nuls ou uniquement divisibles pour $p \geq 4$ pour les mêmes raisons. Les différentielles d_r, $r \geq 2$, qui partent de l'antidiagonale $p+q=6$ sont donc toutes nulles. Par ailleurs, $d_2^{0,5} = 0$ car $E_2^{0,5} = 0$ par B.2. Ceci permet déjà d'obtenir $E_\infty^{2,4} = E_2^{2,4}$.

Les différentielles qui arrivent en $E^{0,6}$ sont nulles car elles proviennent de groupes nuls, donc $E_\infty^{0,6} \subset E_1^{0,6}$. On obtient donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_\infty^{2,4} \longrightarrow H_{ét}^6(X, \mathbf{Z}(4)) \longrightarrow E_1^{0,6}$$

qui, après identification des termes grâce au paragraphe B.3 et à l'isomorphisme

$$H^6(F(X), \mathbf{Z}(4)) \simeq H^5(F(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4))$$

fournit la suite exacte voulue. $\square$

2.2 Démonstration du théorème

En croisant les suites exactes précédentes, qui ont le même terme central, on relie la K-cohomologie et la cohomologie galoisienne.

Lemme 2.5 (dit "du $700^{ème}$") *La donnée de deux suites exactes croisées*

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & \\ & & A \arrow[d] \arrow[dr, "\eta"] & \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[dr, "\xi"'] & B \arrow[r] \arrow[d] & C' \\ & & C & \end{tikzcd}$$

fournit un isomorphisme canonique $\ker \eta \simeq \ker \xi$.

Proposition 2.6 *On a un isomorphisme*

$$\ker(H_{ét}^5(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)) \xrightarrow{\eta} H_{ét}^5(F(q), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)))$$

$$\simeq \ker(H^2(X, \mathcal{K}_4) \xrightarrow{\xi} K_2(F) \oplus K_2(F))$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer le lemme 2.5 aux suites exactes des théorèmes 2.2 et 2.4. □

Proposition 2.7 *Lorsque X a un point rationnel,*

$$\ker(H^5_{ét}(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)) \longrightarrow H^5_{ét}(F(q), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4))) = 0$$

Proposition 2.8 *On a un isomorphisme*

$$\ker \xi \simeq \ker(H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^2(X_{F(Y)}, \mathcal{K}_4))$$

(où Y est la variété de Severi-Brauer associée à D).

Démonstration : Les diagrammes utilisés jusqu'ici sont tous fonctoriels par rapport au corps de base, on a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \ker f \arrow[d] & \\
\ker \xi \arrow[r] & H^2(X, \mathcal{K}_4) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & K_2(F) \oplus K_2(F) \arrow[d, hook] \\
& H^2(X_{F(Y)}, \mathcal{K}_4) \arrow[r, hook] & K_2(F(Y)) \oplus K_2(F(Y))
\end{tikzcd}$$

En effet, $\ker \xi_{F(Y)} \simeq \ker \eta_{F(Y)} = 0$ par 2.7. De plus le morphisme d'extension des scalaires $K_2(F) \longrightarrow K_2(F(Y))$ est une injection (théorème A.6). Une chasse au diagramme fournit le résultat. □

Lemme 2.9 *Le corps $F(Y)$ des fonctions de la variété de Severi-Brauer Y de D est un composé d'une extension de degré une puissance de 2 et d'une extension transcendante pure de F.*

Démonstration : Cela résulte de [2], Prop. 3, (iii). □

Corollaire 2.10 *Le groupe $\ker(H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^2(X_{F(Y)}, \mathcal{K}_4))$ est de 2-torsion.*

Démonstration : Pour une extension transcendante pure K, le groupe

$$\ker(H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^2(X_K, \mathcal{K}_4))$$

est nul. Pour une extension L de degré i, $\ker(H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^2(X_L, \mathcal{K}_4))$ est tué par i, par un argument de transfert. □

Le théorème 2.1 est alors simplement la partie de 2-torsion des isomorphismes précédents :

$$\ker(H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^2(X_{F(Y)}, \mathcal{K}_4))$$

$$
\begin{aligned}
&\simeq \ker \xi \simeq \ker \eta \\
&\simeq \ker(H^5_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4)) \longrightarrow H^5_{\acute{e}t}(F(q), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(4))) \\
&\simeq \ker(H^5_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Z}/2(4)) \longrightarrow H^5_{\acute{e}t}(F(q), \mathbf{Z}/2(4)))
\end{aligned}
$$

où le dernier isomorphisme provient de C.11.

Chapitre 3

K-théorie des quadriques et des grassmanniennes tordues

Dans [17], Panin calcule la K-théorie des variétés projectives homogènes en termes de K-théorie d'algèbres de Tits associées canoniquement aux représentations des groupes algébriques dont ces variétés sont issues. Parmi ces variétés, on peut trouver les grassmanniennes tordues (et donc les variétés de Severi-Brauer généralisées), ainsi que les quadriques. Le but de cette partie est d'expliquer en ces termes un isomorphisme entre la quadrique projective d'Albert et la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(2, D)$ de l'algèbre de biquaternions D qui lui est associée.

3.1 La construction de Panin

Ce paragraphe contient principalement un rappel des notations et les principaux théorèmes de Panin qui seront utilisés, ainsi que la démonstration de quelques lemmes et propriétés élémentaires qui en découlent, mais qui ne sont pas mentionnées explicitement dans [17].

Soit $\tilde{G}$ un groupe algébrique semi-simple, connexe, simplement connexe et déployé sur un corps F. Soit $\tilde{Z}$ le centre de ce groupe. Soit $\tilde{T}$ un tore déployé maximal de $\tilde{G}$ et $\tilde{P}$ un sous-groupe parabolique qui contient $\tilde{T}$. Soit $\tilde{Z}'$ un sous-groupe de $\tilde{Z}$. On pose $G = \tilde{G}/\tilde{Z}'$ et $P = \tilde{P}/\tilde{Z}'$. On note $\mathcal{F} = \tilde{G}/\tilde{P} = G/P$ la variété quotient. Pour un 1-cocycle $\gamma : Gal(F_{sep}/F) \longrightarrow G(F_{sep})$, on note ${}_{\gamma}\mathcal{F}$ la variété obtenue en tordant $\mathcal{F}$ par γ.

Pour un groupe algébrique affine quelconque H, on désigne par $Rep_F(\tilde{H})$ la catégorie exacte des représentations linéaires de H de dimension finie rationnelles sur F, et $R(\tilde{H})$ son groupe de Grothendieck. Il est naturellement muni d'un produit induit par le produit tensoriel des représentations. Le foncteur oubli, qui à une représentation associe son espace vectoriel sous-jacent induit en K-théorie le morphisme

$$\dim : R(\tilde{H}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

Soit χ un caractère de $\tilde{Z}$. On considère la sous-catégorie pleine $Rep_F^\chi(\tilde{P})$ (resp. $Rep_F^\chi(\tilde{G})$) de $Rep_F(\tilde{P})$ (resp. $Rep_F(\tilde{G})$) dont les objets sont les représentations sur lesquelles $\tilde{Z}$ agit par le caractère χ. On note $R^\chi(\tilde{P})$ (resp. $R^\chi(\tilde{G})$) son groupe de Grothendieck.
Le produit sur $R(\tilde{P})$ respecte les caractères, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$R^\chi(\tilde{P}) \otimes_{\mathbf{Z}} R^{\chi'}(\tilde{P}) \dot{\longrightarrow} R^{\chi\chi'}(\tilde{P})$$

Proposition 3.1 *(Voir [17], lemme 2.8) Les caractères donnent des décompositions*

$$\bigoplus_\chi R^\chi(\tilde{P}) \simeq R(\tilde{P})$$

et

$$\bigoplus_\chi R^\chi(\tilde{G}) \simeq R(\tilde{G})$$

On dit qu'un élément de $R(\tilde{P})$ est Ch-homogène s'il appartient à un $R^\chi(\tilde{P})$ pour un certain caractère χ. Le produit de deux éléments Ch-homogènes de caractères χ et χ' est donc Ch-homogène de caractère $\chi\chi'$.

Soit W le groupe de Weyl de $\tilde{G}$, et W_P le sous-groupe de W constitué des éléments w tels que $w\tilde{P}w^{-1} = \tilde{P}$.

Théorème 3.2 *(Voir [17], théorème 2.3 et lemme 2.12) Soit $\tilde{X} = \mathrm{Hom}(\tilde{T}, \mathbf{G}_m)$ et $\tilde{X}_\chi$ l'ensemble des éléments de $\tilde{X}$ qui induisent le caractère χ sur $\tilde{Z}$. Alors*

$$\begin{array}{rcl} R(\tilde{T}) & \simeq & \mathbf{Z}[\tilde{X}] \\ R(\tilde{P}) & \simeq & \mathbf{Z}[\tilde{X}]^{W_P} \\ R(\tilde{G}) & \simeq & \mathbf{Z}[\tilde{X}]^W \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} R^\chi(\tilde{T}) & \simeq & \mathbf{Z}[\tilde{X}_\chi] \\ R^\chi(\tilde{P}) & \simeq & \mathbf{Z}[\tilde{X}_\chi]^{W_P} \\ R^\chi(\tilde{G}) & \simeq & \mathbf{Z}[\tilde{X}_\chi]^W \end{array}$$

De plus, $R(\tilde{G})$ est un anneau de polynômes sur $\mathbf{Z}$ dont les variables sont les classes des représentations fondamentales.

Théorème 3.3 *(Voir [17], théorème 2.2) L'anneau $R(\tilde{P})$ vu comme module sur $R(\tilde{G})$ est un module libre.*

Corollaire 3.4 *Les anneaux $R(\tilde{G})$ et $R(\tilde{P})$ sont intègres.*

Démonstration : On a $R(\tilde{P}) \subset R(\tilde{G})$ qui est un anneau de polynômes sur $\mathbf{Z}$. $\square$

On désigne par $Vect^{\tilde{G}}(\mathcal{F})$ (resp. $Vect^{G}(\mathcal{F})$) la catégorie des fibrés vectoriels $\tilde{G}$-équivariants (resp. G-équivariants) au dessus de $\mathcal{F}$. Pour une représentation U de $Rep_F(\tilde{P})$, on considère l'action de $\tilde{P}$ sur $\tilde{G} \times U$ donnée par $(g,u).p = (gp, p^{-1}u)$ et le fibré vectoriel $\mathrm{Ind}(U) = (\tilde{G} \times U)/\tilde{P}$ au dessus de $\tilde{G}/\tilde{P}$. Ce fibré est naturellement muni d'une action à gauche de $\tilde{G}$. On définit donc l'induction

$$\mathrm{Ind} : Rep_F(\tilde{P}) \longrightarrow Vect^{\tilde{G}}(\mathcal{F})$$

A l'inverse, à V, fibré $\tilde{G}$-équivariant au dessus de $\tilde{G}/\tilde{P}$, on peut associer sa fibre au dessus de la classe de l'élément neutre de $\tilde{G}$. L'action de $\tilde{P}$ la laisse stable, c'est donc une représentation de $\tilde{P}$ notée $\mathrm{Res}(V)$. On définit donc la restriction

$$\mathrm{Res} : Vect^{\tilde{G}} \longrightarrow Rep_F(\tilde{P})$$

Ces deux foncteurs induisent en K-théorie deux isomorphismes inverses

$$\mathrm{Ind} : R(\tilde{P}) \longrightarrow K_0^{\tilde{G}}(\tilde{G}/\tilde{P})$$

et

$$\mathrm{Res} : K_0^{\tilde{G}}(\tilde{G}/\tilde{P}) \longrightarrow R(\tilde{P})$$

Lemme 3.5 *Lorsque U est une représentation de $\tilde{P}$ induit par une représentation de $\tilde{G}$, $\mathrm{Ind}(U)$ est un fibré vectoriel trivial.*

Démonstration : L'application entre fibrés $\tilde{G}$-équivariants au dessus de $\tilde{G}/\tilde{P}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}(U) & \longrightarrow & \tilde{G}/\tilde{P} \\ \overline{(g,u)} & \longmapsto & (\overline{g}, gu) \end{array}$$

est un isomorphisme (son application inverse est évidente). □

Les algèbres centrales simples que nous allons introduire maintenant sont dues à Tits, et portent son nom. Soit $V_\chi \in Rep_F^\chi(\tilde{G})$ et $A_\chi = End_F(V_\chi)$. On a $V_\chi^* \in Rep_F^{\chi^{-1}}(\tilde{G})$. Soit $\gamma : Gal(F_{sep}/F) \longrightarrow G(F_{sep})$ un cocycle. On désigne par $A_{\chi,\gamma}$ l'algèbre A_χ tordue par le cocycle $\bar{\gamma}$, obtenu en poussant γ dans $PGL(F_{sep}) = Aut_{F_{sep}}(A_\chi \otimes_F F_{sep})$.

Lemme 3.6 *(voir [17], § 3 et lemme 3.4 en particulier)*

1. *L'algèbre $A_{\chi,\gamma}$ est une algèbre centrale simple dont la classe dans le groupe de Brauer ne dépend pas du représentant V choisi dans $Rep_F^\chi(\tilde{G})$.*
2. *Si on prend $V_{\chi\chi'} = V_\chi \otimes_F V_{\chi'}$, alors $A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma} \simeq A_{\chi\chi',\gamma}$. Dans le cas général, on a seulement $A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma} \sim A_{\chi\chi',\gamma}$*
3. *$A_{\chi^{-1},\gamma} \sim A_{\chi,\gamma}^{op}$*
4. *Si $a \in R^\chi(\tilde{G})$, alors $\mathrm{ind}(A_{\chi,\gamma})$ divise $\dim(a)$.*

Démonstration : Seul le dernier point n'est pas montré dans [17]. Il suffit pour l'obtenir de montrer que pour toute représentation $V'_\chi \in Rep_F^\chi(\tilde{G})$, $\mathrm{ind}(A_{\chi,\gamma})$ divise $\dim V'_\chi$. Or le degré de $A'_{\chi,\gamma} =_\gamma \mathrm{End}(V'_\chi)$ est justement $\dim V'_\chi$, il est donc divisible par $\text{ind}(A'_{\chi,\gamma}) = \text{ind}(A_{\chi,\gamma})$ (par le point 1). $\square$

Soit $U' \in Vect^G(\mathcal{F})$ un fibré muni d'une action à droite de A_χ. La forme tordue ${}_\gamma U'$ de U est naturellement munie d'une action à droite de $A_{\chi,\gamma}$. On définit un foncteur bi-exact

$$\begin{array}{ccc} Rep_F^\chi(\tilde{P}) \times (A_{\chi,\gamma} - mod) & \longrightarrow & Vect({}_\gamma\mathcal{F}) \\ (U, M) & \longmapsto & {}_\gamma(Ind(U) \otimes_F V_\chi^*) \otimes_{A_{\chi,\gamma}} M \end{array}$$

Ce foncteur induit un accouplement

$$\mu_{\chi,\gamma} : R^\chi(\tilde{P}) \otimes_{\mathbf{Z}} K_*(A_{\chi,\gamma}) \longrightarrow K_*({}_\gamma\mathcal{F})$$

Proposition 3.7 *(Voir [17], remarque 3.7) Soient $V_\chi \in Rep_F^\chi(\tilde{G})$, $A_\chi = End_F(V_\chi)$, $V'_\chi \in Rep_F^\chi(\tilde{G})$, $A'_\chi = End_F(V_\chi)$ Par le lemme 3.6, on a $A_{\chi,\gamma} \sim A'_{\chi,\gamma}$, on peut donc définir le morphisme d'invariance de Morita*

$$\mathrm{M} : K_*(A_{\chi,\gamma}) \xrightarrow{\sim} K_*(A'_{\chi,\gamma})$$

et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} R^\chi(\tilde{P}) \otimes_{\mathbf{Z}} K_*(A_{\chi,\gamma}) \arrow[r, "\mu_{\chi,\gamma}"] \arrow[d, "Id\otimes\mathrm{M}"] & K_*({}_\gamma\mathcal{F}) \arrow[d, "Id"] \\ R^\chi(\tilde{P}) \otimes_{\mathbf{Z}} K_*(A'_{\chi,\gamma}) \arrow[r, "\mu'_{\chi,\gamma}"] & K_*({}_\gamma\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

où $\mu_{\chi,\gamma}$ est défini à l'aide de $A_{\chi,\gamma}$ et $\mu'_{\chi,\gamma}$ à l'aide de $A'_{\chi,\gamma}$.

Proposition 3.8 *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} R^\chi(\tilde{P}) \otimes R^{\chi'}(\tilde{P}) \otimes K_i(A_{\chi,\gamma}) \otimes K_j(A_{\chi',\gamma}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, ".\otimes."] & R^\chi(\tilde{P}) \otimes K_i(A_{\chi,\gamma}) \otimes R^{\chi'}(\tilde{P}) \otimes K_j(A_{\chi',\gamma}) \arrow[d, "\mu_{\chi,\gamma}\otimes\mu_{\chi',\gamma}"] \\ R^{\chi\chi'}(\tilde{P}) \otimes K_{i+j}(A_{\chi\chi',\gamma}) \arrow[d, "\mu_{\chi\chi',\gamma}"] & K_i({}_\gamma\mathcal{F}) \otimes K_j({}_\gamma\mathcal{F}) \arrow[d, "."] \\ K_{i+j}({}_\gamma\mathcal{F}) \arrow[r, "\sim"] & K_{i+j}({}_\gamma\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Démonstration : Cela se vérifie sur les catégories sous-jacentes. Il suffit d'identifier deux produits tensoriels au moyen du lemme 3.6 et du fait que le foncteur Ind commute au produit tensoriel. $\square$

Lemme 3.9 *Soient $\lambda \in R^\chi(\tilde{G})$ et $a \in R^{\chi'}(\tilde{P})$. Alors le diagramme suivant est commutatif (le morphisme $\overline{\mathrm{Res}}$ est défini dans la définition 1.34).*

$$\begin{tikzcd} R^\chi(\tilde{G}) \otimes R^{\chi'}(\tilde{P}) \otimes K_*(A_{\chi\chi',\gamma}) \arrow[r, "(Id.Id)\otimes Id"] \arrow[d, "(\frac{\dim}{\mathrm{ind}(A_{\chi,\gamma})}.Id)\otimes\overline{\mathrm{Res}}"'] & R^{\chi\chi'}(\tilde{P}) \otimes K_*(A_{\chi\chi',\gamma}) \arrow[d, "\mu_{\chi\chi',\gamma}"] \\ R^{\chi'}(\tilde{P}) \otimes K_*(A_{\chi,\gamma}) \arrow[r, "\mu_{\chi',\gamma}"] & K_*(\mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

Démonstration : Le morphisme vertical de gauche est bien défini grâce au lemme 3.6, point 4. La commutativité du diagramme se vérifie sur les catégories sous-jacentes. Soit $Q \in Rep_F^{\chi}(\tilde{G})$, $B \in Rep_F^{\chi}(\tilde{P})$. Le fibré $Ind(Q)$ est alors trivial par le lemme 3.5, et de fibre Q. Soit V_{χ} une représentation irréductible de $Rep_F^{\chi}(\tilde{P})$. On peut se ramener au cas où $Q = V_{\chi}^{\oplus n}$. Soit $V_{\chi'}$ une représentation de $Rep_F^{\chi}(\tilde{P})$. On choisit $V_{\chi\chi'} = V_{\chi} \otimes V_{\chi'}$. On a alors $A_{\chi\chi',\gamma} \simeq A_{\chi,\gamma} \otimes_F A_{\chi',\gamma}$ par le lemme 3.6, point 2. Soit M un $A_{\chi\chi',\gamma}$-module. On a alors (les produits tensoriels non indicés sont sur F)

$$\begin{array}{rl}
& {}_{\gamma}(Ind(QB) \otimes V_{\chi\chi'}^*) \otimes_{A_{\chi\chi',\gamma}} M \\
= & {}_{\gamma}((Ind(Q) \otimes Ind(B)) \otimes (V_{\chi}^* \otimes V_{\chi'}^*)) \otimes_{A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma}} M \\
= & {}_{\gamma}((Ind(Q) \otimes V_{\chi}^*) \otimes (Ind(B) \otimes V_{\chi'}^*)) \otimes_{A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma}} M \\
= & {}_{\gamma}(Ind(Q) \otimes V_{\chi}^*) \otimes {}_{\gamma}(Ind(B) \otimes V_{\chi'}^*) \otimes_{A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma}} M \\
= & {}_{\gamma}(V_{\chi}^{\oplus n} \otimes V_{\chi}^*) \otimes {}_{\gamma}(Ind(B) \otimes V_{\chi'}^*) \otimes_{A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma}} M \\
= & A_{\chi,\gamma}^{\oplus n} \otimes {}_{\gamma}(Ind(B) \otimes V_{\chi'}^*) \otimes_{A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma}} M \\
= & {}_{\gamma}(Ind(B) \otimes V_{\chi'}^*) \otimes_{A_{\chi',\gamma}} \mathrm{Res}_{A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma}, A_{\chi',\gamma}}(M)^{\oplus n}
\end{array}$$

Mais $\dim(Q) = n \dim V_{\chi} = n \deg(A_{\chi,\gamma})$ et

$$\mathrm{Res} = \frac{\deg(A_{\chi,\gamma})}{\mathrm{ind}(A_{\chi,\gamma})} \overline{\mathrm{Res}}$$

par la propriété 1.35, donc n Res $= \frac{\dim(Q)}{ind(A_{\chi,\gamma})} \overline{\mathrm{Res}}$, ce qui fournit finalement

$$\begin{array}{rl}
& {}_{\gamma}((Ind(Q) \otimes V_{\chi}^*) \otimes (Ind(B) \otimes V_{\chi'})) \otimes_{A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma}} M \\
= & {}_{\gamma}(Ind(B) \otimes V_{\chi'}) \otimes_{A_{\chi',\gamma}} (\overline{\mathrm{Res}}_{A_{\chi,\gamma} \otimes A_{\chi',\gamma}, A_{\chi',\gamma}}(M))^{\oplus \frac{\dim(Q)}{\mathrm{ind}(A_{\chi,\gamma})}}
\end{array}$$

□

Définition 3.10 *Pour a un élément Ch-homogène, on pose*

$$\begin{array}{cccc}
\varphi_{a,\gamma} : & K_*(A_{\chi_a}) & \longrightarrow & K_*({}_{\gamma}\mathcal{F}) \\
& x & \longmapsto & \mu_{\chi_a,\gamma}(a \otimes x)
\end{array}$$

Théorème 3.11 *(voir [17], théorème 4.2) Si $\{a_i | i = 1 \dots n\} \in R(\tilde{P})$ est une base du $R(\tilde{P})$-module libre $R(\tilde{G})$ qui est Ch-homogène, alors le morphisme*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{a_i,\gamma} : \bigoplus_{i=1}^{n} K_*(A_{\chi_{a_i},\gamma}) \longrightarrow K_*({}_{\gamma}\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Lemme 3.12 *Soient a et b deux éléments Ch-homogènes, soient $x \in K_*(A_{\chi_a})$ et $y \in K_*(A_{\chi_b})$, alors*

$$\varphi_{ab,\gamma}(xy) = \varphi_{a,\gamma}(x).\varphi_{b,\gamma}(y)$$

Démonstration : C'est une application immédiate de la proposition 3.8. □

Lemme 3.13 *Les morphismes $\varphi_{a,\gamma}$ commutent à l'extension des scalaires et à la norme pour une extension finie*

Démonstration : Il suffit de revenir à la définition des morphismes $\mu_{\chi,\gamma}$. Tous les termes dans la formule commutent à l'extension des scalaires. Il en est de même pour la norme (qui est simplement une restriction). $\square$

Lemme 3.14 *Soit a un élément Ch-homogène de $R(\tilde{P})$ qui se décompose en $a = \sum_k \lambda_k b_k$ où les b_k sont Ch-homogènes et libres (comme sous-ensemble du $R(\tilde{G})$-module $R(\tilde{P})$ et $\lambda_k \in R(\tilde{G})$ pour tout k, alors*

$$\varphi_{a,\gamma} = \sum_k \frac{\dim(\lambda_k)}{\mathrm{ind}(A_{\chi_{\lambda_k},\gamma})} \varphi_{b_k,\gamma} \circ \overline{\mathrm{Res}}_{A_{\chi_a},A_{\chi_{b_k}}}$$

Démonstration : Montrons tout d'abord que les λ_k sont Ch-homogènes. Par la proposition 3.1, $\lambda_k = \sum_l \epsilon_{l,k}$ où les $\epsilon_{l,k} \in R(\tilde{G})$ sont Ch-homogènes de caractère $\chi_{l,k}$ (on a $\chi_{l,k} \neq \chi_{l',k}$ pour $l \neq l'$). Pour tout k, le produit $\epsilon_{l,k} b_k$ est donc Ch-homogène.

$$\begin{array}{rcl} a & = & \sum_k \sum_l \epsilon_{k,l} b_k \\ & = & \sum_{\chi_{l,k}\chi_{b_k}=\chi_a} \epsilon_{k,l} b_k + \sum_{\chi' \neq \chi_a} \sum_{\chi_{l,k}\chi_{b_k}=\chi'} \epsilon_{k,l} b_k \end{array}$$

Comme a est homogène de caractère χ_a, par la proposition 3.1, chaque terme $\sum_{\chi_{l,k}\chi_{b_k}=\chi'} \epsilon_{k,l} b_k$ de la deuxième somme est nul. Mais les b_k sont libres donc tous les $\epsilon_{k,l}$ qui interviennent dans ces sommes sont nuls. On a donc

$$a \quad = \quad \sum_{\chi_{l,k}\chi_{b_k}=\chi_a} \epsilon_{k,l} b_k$$

Cela implique en particulier que $\chi_{l,k} = \chi_a \chi_{b_k}^{-1}$ (indépendant de l). Pour chaque k, il n'y a donc qu'un seul l tel que $\epsilon_{k,l} \neq 0$ et λ_k est donc Ch-homogène de caractère $\chi_a \chi_{b_k}^{-1}$. Ceci, ainsi que le lemme 3.9 justifie les égalités

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{a,\gamma}(x) & = & \mu_{\chi_a,\gamma}((\sum_k \lambda_k b_k) \otimes x) \\ & = & \sum_k \mu_{\chi_a,\gamma}(\lambda_k b_k \otimes x) \\ & = & \sum_k \mu_{\chi_{\lambda_k b_k},\gamma}(\lambda_k b_k \otimes x) \\ & = & \sum_k \frac{\dim(\lambda_k)}{\mathrm{ind}(A_{\chi_{\lambda_k},\gamma})} \mu_{\chi_{b_k},\gamma}(b_k \otimes \overline{\mathrm{Res}}_k(x)) \\ & = & \sum_k \frac{\dim(\lambda_k)}{\mathrm{ind}(A_{\chi_{\lambda_k},\gamma})} \varphi_{b_k,\gamma} \circ \overline{\mathrm{Res}}_k(x) \end{array}$$

où $\overline{\mathrm{Res}}_k = \overline{\mathrm{Res}}_{A_{\chi_a},A_{\chi_{b_k}}}$ $\square$

3.1.1 Quadriques

On choisit $\tilde{G} = Spin(h)$, où h est la forme quadratique $[n/2]\mathbf{H}$ lorsque n est pair, et $[n/2]\mathbf{H} \perp <1>$ lorsque n est impair (où $\mathbf{H}$ est la forme hyperbolique xy). On a alors $\tilde{Z} = \mu_2$ si n est impair, $\tilde{Z} = \mu_2 \times \mu_2$ si $n = 4n'$ et $\tilde{Z} = \mu_4$ si $n = 4n' + 2$. On prend $\tilde{Z}' = \mu_2$ dans les trois cas (diagonal dans le deuxième) et on obtient $G = SO(h)$. Le tore T est le tore diagonal de G et $\tilde{T}$ est son image réciproque dans $\tilde{G}$. On considère l'action de G sur l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-1}$. On peut prendre pour $\tilde{P}$ l'image réciproque du sous-groupe P de G qui stabilise le point isotrope $(1, 0, \ldots, 0)$. La variété $\mathcal{F} = G/P$ est alors la quadrique projective d'équation $h = 0$.

Soit r_i le caractère de $\tilde{T}$ induit par le caractère de T de la forme $r_i(a) = a_{2i-1,2i-1}$. Dans le cas n impair, on note δ le caractère de la représentation spinorielle et dans le cas pair, δ_+ et δ_- les caractères des deux représentations spinorielles. Ces caractères spinoriels ne sont pas induits par des caractères de T, toutefois leurs carrés le sont. On a

$$\begin{array}{rcl} \delta^2 & = & r_1 \ldots r_{[n/2]} \\ \delta_+^2 & = & r_1 \ldots r_{[n/2]-1} r_{[n/2]}^{-1} \\ \delta_-^2 & = & r_1 \ldots r_{[n/2]-1} r_{[n/2]} \end{array}$$

On a alors dans le cas impair

$$\tilde{X} = \mathbf{Z}.r_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}.r_{[n/2]-1} \oplus \mathbf{Z}\delta$$

et dans le cas pair

$$\tilde{X} = \mathbf{Z}.r_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}.r_{[n/2]-1} \oplus \mathbf{Z}\delta_+ \oplus \mathbf{Z}\delta_-$$

Le groupe de Weyl W est le groupe $\mathfrak{S}_{[n/2]} \times Sign_{[n/2]}$ où $Sign_{[n/2]}$ est le groupe $\mathbf{Z}/2^{[n/2]}$ dans le cas impair, et $\ker(\mathbf{Z}/2^{[n/2]} \longrightarrow \mathbf{Z}/2)$ (un élément est envoyé sur la somme de ses coordonnées) dans le cas pair. L'action du groupe de Weyl est la permutation des r_i pour le facteur $\mathfrak{S}_{[n/2]}$ et le changement de r_i en r_i^{-1} pour le facteur $Sign_{[n/2]}$. Le groupe W_P (voir 3.2) est le stabilisateur de r_1. On obtient alors dans le cas impair

$$R(\tilde{T}) = \mathbf{Z}[\tilde{X}] = \mathbf{Z}[r_1^{\pm 1}, \ldots, r_{[n/2]-1}^{\pm 1}, \delta]$$

et dans le cas pair

$$R(\tilde{T}) = \mathbf{Z}[\tilde{X}] = \mathbf{Z}[r_1^{\pm 1}, \ldots, r_{[n/2]-1}^{\pm 1}, \delta_+, \delta_-]$$

On pose alors

$$\eta = \sum_{w \in Sign_{[n/2]} \cap W_P} \delta^w$$

$$\eta_+ = \sum_{w \in Sign_{[n/2]} \cap W_P} \delta_+^w$$

$$\eta_- = \sum_{w \in Sign_{[n/2]} \cap W_P} \delta_-^w$$

Ces trois termes sont stables par W_P. On pose également

$$\beta = \sum_{w \in Sign_{[n/2]}} \delta^w$$

$$\beta_+ = \sum_{w \in Sign_{[n/2]}} \delta_+^w$$

$$\beta_- = \sum_{w \in Sign_{[n/2]}} \delta_-^w$$

Ces trois termes sont stables par W. On note θ_i (resp. θ'_i) le i-ème polynôme symmétrique élémentaire en $y_1, \ldots, y_{[n/2]}$ (resp. $y_2, \ldots, y_{[n/2]}$) où $y_i = r_i + r_i^{-1}$. On obtient, dans le cas impair

$$\begin{array}{rcccl} R(\tilde{P}) & = & \mathbf{Z}[\tilde{X}]^{W_P} & = & \mathbf{Z}[r_1^{\pm 1}, \theta'_1, \ldots, \theta'_{[n/2]-1}, \eta] \\ R(\tilde{G}) & = & \mathbf{Z}[\tilde{X}]^{W} & = & \mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{[n/2]-1}, \beta] \end{array}$$

et dans le cas pair

$$\begin{array}{rcccl} R(\tilde{P}) & = & \mathbf{Z}[\tilde{X}]^{W_P} & = & \mathbf{Z}[r_1^{\pm 1}, \theta'_1, \ldots, \theta'_{[n/2]-1}, \eta_-, \eta_+] \\ R(\tilde{G}) & = & \mathbf{Z}[\tilde{X}]^{W} & = & \mathbf{Z}[\theta_1, \ldots, \theta_{[n/2]-1}, \beta_-, \beta_+] \end{array}$$

La dimension d'un élément de $R(\tilde{G})$, $R(\tilde{P})$, où $R(\tilde{G})$ est obtenue en spécialisant les r_i, δ, δ_+ et δ_- en la valeur 1.

Pour n pair, on obtient la décomposition

$$R(\tilde{P}) = R(\tilde{G}).1 \oplus R(\tilde{G}).r_1 \oplus \ldots \oplus R(\tilde{G}).r_1^{n-3} \oplus R(\tilde{G}).\eta_- \oplus R(\tilde{G}).\eta_+$$

et pour n impair

$$R(\tilde{P}) = R(\tilde{G}).1 \oplus R(\tilde{G}).r_1 \oplus \ldots \oplus R(\tilde{G}).r_1^{n-3} \oplus R(\tilde{G}).\eta$$

Les algèbres $A_{\chi,\gamma}$ qui interviennent sont F pour les puissances de r_1. Par contre lorsque n est impair $A_{\chi_\eta,\gamma} = C_0({}_\gamma h)$ (qui est bien une algèbre centrale simple), et lorsque n est pair, $C_0({}_\gamma h) = C_0^+({}_\gamma h) \oplus C_0^-({}_\gamma h)$ et ces deux composantes sont des algèbres centrales simples. On a alors $A_{\chi_{\eta_+},\gamma} = C_0^+({}_\gamma h)$ et $A_{\chi_{\eta_-},\gamma} = C_0^-({}_\gamma h)$ (voir [17], § 5.1). Toute forme quadratique peut être obtenue comme forme tordue de h. La variété ${}_\gamma\mathcal{F}$ correspondante est alors la quadrique projective $X_{{}_\gamma h}$ d'équation ${}_\gamma h = 0$. On obtient alors par le théorème 3.11, lorsque n est pair, l'isomorphisme

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_\gamma^i : K_*(F) \oplus \ldots \oplus K_*(F) \oplus K_*(C_0^-({}_\gamma h)) \oplus K_*(C_0^+({}_\gamma h)) \xrightarrow{\sim} K_*(X_{{}_\gamma h})$$

et lorsque n est impair

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_\gamma^i : K_*(F) \oplus \ldots \oplus K_*(F) \oplus K_*(C_0({}_\gamma h)) \xrightarrow{\sim} K_*(X_{{}_\gamma h})$$

La K-théorie des quadriques a été calculée en premier lieu par Swan, dans [24], mais par une méthode différente de celle de Panin.

3.1.2 Variétés de Severi-Brauer généralisées

Lorsqu'on choisit $\tilde{G} = SL_n$, on a $\tilde{Z} = \mu_n$, $G = PGL_n$. Le tore T est l'image du sous groupe diagonal de GL_n dans PGL_n, et $\tilde{T}$ est le sous-groupe des matrices diagonales dans SL_n. On peut alors poser

$$\tilde{P} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ avec } \det(a)\det(b) = 1\} \subset SL_n$$

où a (resp. b) est une matrice carrée de taille k (resp. $n-k$).

Soit t_i le caractère de $\tilde{T}$ induit par le caractère de T de la forme $t_i(a) = a_{i,i}$. Le groupe de Weyl W est alors le groupe $\mathfrak{S}_n$, et W_P est le sous-groupe $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$. On obtient alors

$$\tilde{X} = (\mathbf{Z}.t_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}.t_n)/\mathbf{Z}(t_1 \ldots t_n)$$

puis, si on appelle σ_i (resp. σ'_i, resp. σ''_i) le i-ème polynôme symmétrique élémentaire en $t_1 \ldots t_n$ (resp. $t_1 \ldots t_k$, resp. $t_{k+1} \ldots t_n$),

$$\begin{array}{lclcl} R(\tilde{T}) & = & \mathbf{Z}[\tilde{X}] & = & \mathbf{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]/(t_1 \ldots t_n - 1) \\ R(\tilde{P}) & = & \mathbf{Z}[\tilde{X}]^{W_P} & = & \mathbf{Z}[\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k, \sigma''_1, \ldots, \sigma''_{n-k}]/(\sigma'_k \sigma''_{n-k} - 1) \\ R(\tilde{G}) & = & \mathbf{Z}[\tilde{X}]^W & = & \mathbf{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]/(\sigma_n - 1) \end{array}$$

La dimension d'un élément de $R(\tilde{T})$, $R(\tilde{G})$ ou $R(\tilde{G})$ est obtenue en spécialisant les t_i en la valeur 1.

On obtient la décompositions

$$R(\tilde{P}) = \bigoplus_{\alpha} \sigma_\alpha$$

où σ_α est le polynôme de *Schur* (voir par exemple [6], p. 49) associé au multi-indice α, qui parcourt toutes les suites $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ qui vérifient $n - k \geq \alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_k \geq 0$.

L'algèbre $A_{\chi_\alpha, \gamma}$ est simplement $A_\gamma^{\otimes d(\alpha)}$ où $d(\alpha) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ et $A_\gamma \simeq {}_\gamma\mathrm{End}(V)$ pour V l'espace vectoriel de dimension n dont la grassmanienne paramètre les sous-espaces. On obtient alors par le théorème 3.11, l'isomorphisme

$$\sum_\alpha \varphi_\gamma^\alpha : \bigoplus_\alpha K_*(A_\gamma^{\otimes d(\alpha)}) \xrightarrow{\sim} K_*({}_\gamma Gr(k,n))$$

Les variétés de Severi-Brauer généralisées $SB(k, A)$ (voir [2]) sont des grassmanniennes tordues, et entrent donc dans ce cadre.

3.2 Le cas des groupes SL_4 et $Spin_6$

Ce paragraphe a pour but d'expliquer pourquoi la quadrique projective associée à une forme quadratique d'Albert est isomorphe à la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(2, D)$, où D est l'algèbre de biquaternions qui correspond à la forme d'Albert. En effet, la première est une forme tordue de la quadrique projective d'équation $3\mathbf{H} = 0$, et la seconde est une forme tordue de la grassmannienne $Gr(2,4)$, or il est bien connu que ces deux variétés sont isomorphes. On peut en fait retrouver cet isomorphisme à partir des groupes algébriques, et montrer qu'il est conservé lorsqu'on tord convenablement les deux variétés. Le paragraphe précédent fournit alors deux descriptions de la K-théorie de ces variétés, qui possèdent toutes deux leurs avantages.

Rappelons brièvement la description classique de l'isomorphisme entre SL_4 et $Spin_6$ d'une forme hyperbolique. Soit V un espace vectoriel sur F de dimension 4, muni d'une base $v_1, \dots, v_4$. On considère alors $W = \Lambda^2 V$. Cet espace W est naturellement muni par le déterminant d'une forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{lcl} \Lambda^2 V \times \Lambda^2 V & \longrightarrow & \Lambda^4 V \simeq F \\ (u_1 \wedge u_2, u_3 \wedge u_4) & \longmapsto & u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4 \end{array}$$

La forme quadratique associée à cette forme bilinéaire est hyperbolique ; dans la base $w_1 = v_1 \wedge v_2$, $w_2 = v_3 \wedge v_4$, $w_3 = v_2 \wedge v_3$, $w_4 = v_1 \wedge v_4$, $w_5 = v_1 \wedge v_3$ et $w_6 = v_4 \wedge v_2$, la forme quadratique a pour équation $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Notons-la h. Un élément g de $SL(V)$ agit sur W par $u_1 \wedge u_2 \longmapsto g(u_1) \wedge g(u_2)$. Cela définit un morphisme g_1 de $SL(V)$ vers $GL(W)$. Par définition du déterminant, $g(u_1) \wedge g(u_2) \wedge g(u_3) \wedge g(u_4) = det(g) u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4$, donc la forme quadratique est conservée par l'action de g, et le morphisme g_1 arrive en fait dans $SO(h)$. Or $Spin(h)$ et $SO(h)$ sont deux groupes simples et simplement connexes, donc g_1 se relève de manière unique en un morphisme g de $SL(V)$ vers $Spin(h)$.

Lemme 3.15 *Le morphisme g est un isomorphisme. Notons f son inverse.*

Démonstration : C'est un morphisme entre groupes simples, simplement connexes et de même dimension. □

Lemme 3.16 *Le diagramme suivant a des lignes exactes (en tant que complexes de groupes algébriques) et est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mu_2 \arrow[r] & Spin(h) \arrow[r] & SO(h) \arrow[r] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[u, equal] & SL(V) \arrow[r, "g_1"] \arrow[u, "g"] & SO(h) \arrow[r] \arrow[u, equal] & 1 \end{tikzcd}$$

Démonstration : Le carré de droite est commutatif par définition du relèvement g. Pour le carré de gauche, la seule chose à vérifier est que $-Id$ dans $SL(V)$ s'envoie bien sur $-Id$. C'est une conséquence du fait que g est un isomorphisme. □

Notons pour la suite $\tilde{G}_1 = SL(V)$, $\tilde{G}_2 = Spin(h)$. Ainsi que dans les sections 3.1.1 et 3.1.2, on note $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ les deux tores maximaux, $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ les deux sous-groupes paraboliques. On rappelle que $\tilde{T}_2$ est l'image réciproque dans $Spin(h)$

du tore diagonal T_2 de $SO(h)$. L'image d'une matrice de $\tilde{T}_2$ par g_1 est donnée par

$$\begin{pmatrix} t_1 & & & (0) \\ & t_2 & & \\ & & t_3 & \\ (0) & & & t_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} t_1t_2 & & & & & \\ & t_3t_4 & & & (0) & \\ & & t_2t_3 & & & \\ & & & t_1t_4 & & \\ & (0) & & & t_1t_3 & \\ & & & & & t_4t_2 \end{pmatrix}$$

où $t_1t_2t_3t_4 = 1$. Il est donc immédiat que $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ se correspondent bijectivement par f. Le parabolique $\tilde{P}_1$ est le sous-groupe de $SL(V)$ qui laisse globalement stable le plan $< v_1, v_2 >$. Le parabolique $\tilde{P}_2$ est l'image réciproque dans $Spin(h)$ de P_2 qui est le stabilisateur du point (projectif) isotrope $(1, 0, \ldots, 0)$. Mais $g \in SL(V)$ est tel que $g(v_1 \wedge v_2) = \lambda v_1 \wedge v_2$ si et seulement si g laisse globalement stable le plan $< v_1, v_2 >$. Ce qui montre que $\tilde{P}_1$ et $\tilde{P}_2$ se correspondent également bijectivement par f. Cela induit immédiatement des isomorphismes f et f^{-1} inverses l'un de l'autre entre la grassmannienne $Gr(2, V) = \tilde{G}_1/\tilde{P}_1$ et la quadrique $X_h = \tilde{G}_2/\tilde{P}_2$.

Montrons au passage un résultat qui servira plus tard. L'espace projectif $\mathbf{P}^5$ est obtenu comme quotient $\tilde{G}_3/\tilde{P}_3$, où $\tilde{G}_3 = SL(W)$ et $\tilde{P}_3$ est l'ensemble des matrices qui laissent fixe le point projectif $(1, 0, \ldots, 0)$. Par définition, le plongement de Plücker de $Gr(2, V)$ dans $\mathbf{P}^5$ est induit par le morphisme g_1 décrit plus haut. Le plongement de la quadrique X_h dans l'espace projectif $\mathbf{P}^5$ est induit par le morphisme naturel $SO(h) \subset SL(W)$. De plus, les groupes paraboliques se correspondent, par ce qui vient d'être montré pour $\tilde{P}_2$ et $\tilde{P}_1$ (P_2 est par définition l'image réciproque de $\tilde{P}_3$, il n'y a donc rien de plus à montrer). On a donc montré le

Lemme 3.17 *Si on note Pl_h le plongement naturel de X_h dans $\mathbf{P}^5$ et Plk le plongement de Plücker de $Gr(2, V)$ dans $\mathbf{P}^5$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X_h \arrow[r, "Pl_h"] \arrow[d, "f"] & \mathbf{P}^5 \\ Gr(2,V) \arrow[ur, "Plk"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Les anneaux de représentations de $R(\tilde{P}_1)$ et $R(\tilde{P}_2)$ sont isomorphes. Etablissons la correspondance entre les caractères. Par la correspondance entre les tores $\tilde{T}_1$ et $\tilde{T}_2$ vue plus haut, on obtient

$$\begin{aligned} (f^{-1})^*(r_1) &= t_1t_2 \\ (f^{-1})^*(r_2) &= t_2t_3 \\ (f^{-1})^*(r_3) &= t_1t_3 \end{aligned}$$

Pour le caractère δ_+ il faut se rappeler que la représentations spinorielle dont c'est le plus haut poids est justement obtenue comme représentation standard de $SL(V)$. Or la représentation standard de $SL(V)$ est $t_1 + t_2 + t_3$, donc $(f^{-1})^*(\delta_+) = t_1, t_2$ ou t_3, selon le choix de la base. Mais le choix qui a été fait impose $\delta_+^2 = r_1.r_2.r_3^{-1}$, donc $(f^{-1})^*(\delta_+^2) = (f^{-1})^*(r_1).(f^{-1})^*(r_2).(f^{-1})^*(r_3^{-1}) = t_2^2$, donc $(f^{-1})^*(\delta_+) = t_2$. On en déduit $(f^{-1})^*(\delta_-) = (f^{-1})^*(\delta_+).(f^{-1})^*(r_3) = t_1t_2t_3$. Les morphismes f^* et $(f^{-1})^*$ étant inverses l'un de l'autre, on en déduit immédiatement les images des caractères par f^*. Finalement,

$$\begin{array}{rcl}
(f^{-1})^*(1) & = & 1 \\
(f^{-1})^*(r_1) & = & t_1t_2 \\
(f^{-1})^*(r_2) & = & t_2t_3 \\
(f^{-1})^*(r_3) & = & t_1t_3 \\
(f^{-1})^*(\delta_+) & = & t_2 \\
(f^{-1})^*(\delta_-) & = & t_1t_2t_3
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl}
f^*(1) & = & 1 \\
f^*(t_1) & = & \delta_-r_2^{-1} \\
f^*(t_2) & = & \delta_+ \\
f^*(t_3) & = & \delta_-r_1^{-1} \\
f^*(t_4) & = & \delta_+r_1^{-1}r_2^{-1}
\end{array}$$

Pour pouvoir vérifier que l'isomorphisme entre la grassmanienne $Gr(2, V)$ et la quadrique X_h induit, après torsion par un cocycle, un isomorphisme entre la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(2, D)$ et la quadrique d'Albert X_q, il suffit de montrer que le cocycle par lequel il faut tordre h pour obtenir q s'envoie par l'isomorphisme f sur un cocycle par lequel on peut tordre la grassmannienne $Gr(2, V)$ pour obtenir $SB(2, D)$.

Le diagramme commutatif du lemme 3.16 induit le diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mu_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & Spin(h) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & SO(h) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu_4 \arrow[r] & SL(V) \arrow[r] & PGL(V) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Chacune de ces lignes induit une suite exacte longue en cohomologie galoisienne jusqu'au terme H^2 du premier groupe de la ligne car le groupe μ_2 (resp. μ_4) est central dans $Spin(h)$ (resp. SL(V)) (voir [21], Chapitre I, § 5.7). Les morphismes de bord entre les termes de degré 1 et 2 donnent le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^1(F, SO(h)) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(F, \mu_2) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & {}_2Br(F) \arrow[d, hook] \\
H^1(F, PGL(V)) \arrow[r] & H^2(F, \mu_4) \arrow[r, "\sim"] & {}_4Br(F)
\end{tikzcd}$$

Soit γ un élément de $H^1(F, SO(h))$ tel que ${}_\gamma h = q$. Son image dans ${}_2Br(F)$ est $w_2(q) - w_2(h)$, où w_2 est l'invariant de Stiefel-Whitney (voir [21], Ch III, § 3.2, b.). Calculons la valeur de $w(q)$ pour la forme d'Albert $< a, b, -ab, -c, -d, cd >$. On utilise le symbole (a, b) qui représente la classe dans $Br(F)$ de l'algèbre de quaternions $\left(\begin{array}{c} a\ b \\ F \end{array}\right)$. Ce symbole (d'ordre 2) vérifie

$$\begin{array}{lcl} (a, b) & = & (b, a) \\ (a^2, b) & = & 0 \\ (a, 1-a) & = & 0 \\ (a, -a) & = & 0 \\ (a, bc) & = & (a, b) + (a, c) \end{array}$$

Par définition $w_2(q) = \sum_{i<j} (a_i, a_j)$ où les a_i sont les coefficients de q dans une base orthogonale. D'où

$$\begin{array}{rcl} w_2(q) & = & (a, b) + (a, -ab) + (a, -c) + (a, -d) + (a, cd) + (b, -ab) \\ & & +(b, -c) + (b, -d) + (b, cd) + (-ab, -c) + (-ab, -d) + (-ab, cd) \\ & & +(-c, -d) + (-c, cd) + (-d, cd) \end{array}$$

Après simplification en utilisant les relations mentionnées plus haut, on obtient

$$w_2(q) = (-1, -1) + (a, b) + (c, d)$$

En prenant $a = b = c = d = 1$, on obtient également $w_2(h) = (-1, -1)$. Donc

$$w_2(q) - w_2(h) = (a, b) + (c, d) = [D]$$

où D est l'algèbre de biquaternions associée à la forme d'Albert q. Mais l'image d'un élément γ de $H^1(F, PGL(V)) = H^1(F, Aut(End(V)))$ dans ${}_4Br(F)$ est la classe de l'algèbre ${}_\gamma End(V)$ obtenue en tordant $End(V)$ par γ (voir [20], chapitre X, §4 et §5). Par ailleurs, la torsion des grassmanniennes est compatible avec la torsion des algèbres au sens que la variété obtenue en tordant $Gr(k, V)$ par un élément γ de $H^1(F, PGL(V))$ est précisément la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(k, {}_\gamma End(V))$ (voir [2], § après le théorème 1). On a donc bien montré que le cocycle utilisé pour tordre la forme quadratique h en q s'envoie par l'isomorphisme f sur le cocycle utilisé pour tordre la grassmanienne $Gr(2, V)$ en la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(2, D)$, où D est l'algèbre de biquaternions associée à la forme d'Albert. On a donc le

Théorème 3.18 *L'isomorphisme f entre $SL(V)$ et $Spin(h)$ induit, après torsion, un isomorphisme entre la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(2, D)$ et la quadrique d'Albert X_q.*

3.3 Morphismes en K-théorie

Les lemmes démontrés dans la partie 3.1 vont maintenant servir à obtenir la correspondance entre la décomposition de la K-théorie de $SB(2, D)$ et celle de X_q par le théorème 3.11. Considérons la base de $R(\tilde{P}_1)$ (en tant que $R(\tilde{G}_1)$-module) $(1, r_1, r_1^2, r_1^3, \eta_-, \eta_+)$. Les algèbres $A_{\chi,\gamma}$ associées à chaque élément sont respectivement F, F, F, F, D, D (voir § 3.1.1), mais on choisira F, $D^{\otimes 2}$, $D^{\otimes 4}$, $D^{\otimes 6}$, D, $D^{\otimes 3}$ qui leur sont semblables, ce qui est possible et ne pose pas de problème grâce à la proposition 3.7. Considérons la base

$$(\sigma_{0,0}, \sigma_{1,0}, \sigma_{1,1}, \sigma_{2,0}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2})$$

(des polynômes de Schur en t_1 et t_2) de $R(\tilde{P}_2)$ (en tant que $R(\tilde{G}_2)$-module). Les algèbres qui interviennent sont les $D^{\otimes|\alpha|}$. Décomposons les images des éléments de la première base par $(f^{-1})^*$ sur la deuxième. On a les égalités

$$\begin{array}{rcl} \eta_+ & = & \delta_+ + \delta_- r_2^{-1} \\ \eta_- & = & \delta_- + \delta_+ r_2^{-1} \\ \beta_+ & = & \eta_+ + \eta_+ r_1^{-1} \\ \beta_- & = & \eta_- + \eta_- r_1^{-1} \end{array}$$

On rappelle que les σ_i (resp. σ_i', resp. σ_i'') sont les polynômes symétriques élémentaires en $t_1, \ldots, t_4$ (resp. t_1, t_2, resp. t_3, t_4), et que $t_1t_2t_3t_4 = \sigma_2'\sigma_2'' = 1$. On a les égalités

$$\begin{array}{rcl} (f^{-1})^*(r_1) & = & t_1t_2 = \sigma_2' = \sigma_{1,1} \\ (f^{-1})^*(r_1^2) & = & (\sigma_2')^2 = \sigma_{1,1}^2 \\ (f^{-1})^*(r_1^3) & = & (\sigma_2')^3 = \sigma_{1,1}^3 \\ (f^{-1})^*(\eta_+) & = & t_2 + t_1t_2t_3(t_2t_3)^{-1} = \sigma_1' = \sigma_{1,0} \\ (f^{-1})^*(\eta_-) & = & t_1t_2t_3 + t_2(t_2t_3)^{-1} = \sigma_2'\sigma_1'' = \sigma_1\sigma_{1,1} - \sigma_{2,1} \end{array}$$

Il faut ensuite décomposer les éléments trouvés sur la base

$$(\sigma_{0,0}, \sigma_{1,0}, \sigma_{1,1}, \sigma_{2,0}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2})$$

en prenant les coefficients dans $R(\tilde{G}_2)$, constitué des polynômes en $\sigma_1, \ldots, \sigma_4$. Pour cela, on utilise la table de produits suivante.

Proposition 3.19 *Les produits des polynômes de Schur σ_α sont donnés par la table de la figure 3.1.*

Démonstration : Ces produits s'obtiennent, dans l'ordre indiqué sur le tableau de la figure 3.2, en utilisant dans le même ordre les relations qui vont suivre entre les polynômes de Schur (en t_1 et t_2) et les fonctions symétriques.

1. $\sigma_{1,0}^2 = \sigma_{1,1} + \sigma_{2,0}$
2. $\sigma_{1,0}\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1}$
3. $\sigma_{1,1}^2 = \sigma_{2,2}$

La décomposition en polynômes symétriques élémentaires σ_i' et σ_j'' des σ_k donne

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & \sigma_1' + \sigma_1'' \\ \sigma_2 & = & \sigma_2' + \sigma_1'\sigma_1'' + \sigma_2'' \\ \sigma_3 & = & \sigma_1'\sigma_2'' + \sigma_1''\sigma_2' \\ \sigma_4 & = & \sigma_2'\sigma_2'' \end{array}$$

α	$1,0$	$1,1$	$2,0$	$2,1$	$2,2$
$1,0$	$\sigma_{2,0}$ $+\sigma_{1,1}$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_3\sigma_{0,0} - \sigma_2\sigma_{1,0}$ $+\sigma_1\sigma_{2,0} + \sigma_{2,1}$	$\sigma_4\sigma_{0,0} - \sigma_2\sigma_{1,1}$ $+\sigma_1\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}$	$\sigma_4\sigma_{1,0} - \sigma_3\sigma_{1,1}$ $+\sigma_1\sigma_{2,2}$
$1,1$		$\sigma_{2,2}$	$\sigma_4\sigma_{0,0} - \sigma_2\sigma_{1,1}$ $+\sigma_1\sigma_{2,1}$	$\sigma_4\sigma_{1,0} - \sigma_3\sigma_{1,1}$ $+\sigma_1\sigma_{2,2}$	$\sigma_4\sigma_{2,0} - \sigma_3\sigma_{2,1}$ $+\sigma_2\sigma_{2,2}$
$2,0$			$\sigma_1\sigma_3\sigma_{0,0}$ $+(\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2)\sigma_{1,0}$ $-\sigma_2\sigma_{1,1}$ $+(\sigma_1^2 - \sigma_2)\sigma_{2,0}$ $+\sigma_1\sigma_{2,1} + \sigma_{2,2}$	$\sigma_1\sigma_4\sigma_{0,0} + \sigma_4\sigma_{1,0}$ $-\sigma_1\sigma_2\sigma_{1,1}$ $+(\sigma_1^2 - \sigma_2)\sigma_{2,1}$ $+\sigma_1\sigma_{2,2}$	$\sigma_1\sigma_4\sigma_{1,0}$ $+(-\sigma_1\sigma_3 + \sigma_4)\sigma_{1,1}$ $+(\sigma_1^2 - \sigma_2)\sigma_{2,2}$
$2,1$				$\sigma_1\sigma_4\sigma_{1,0}$ $+(-\sigma_1\sigma_3 + \sigma_4)\sigma_{1,1}$ $+\sigma_4\sigma_{2,0} - \sigma_3\sigma_{2,1}$ $+\sigma_1^2\sigma_{2,2}$	$\sigma_1\sigma_4\sigma_{2,0}$ $+(-\sigma_1\sigma_3 + \sigma_4)\sigma_{2,1}$ $+(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)\sigma_{2,2}$
$2,2$					$\sigma_4^2\sigma_{0,0} - \sigma_3\sigma_4\sigma_{1,0}$ $+(-\sigma_2\sigma_4 + \sigma_3^2)\sigma_{1,1}$ $+\sigma_2\sigma_4\sigma_{2,0}$ $+(-\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_4)\sigma_{2,1}$ $+(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3)\sigma_{2,2}$

FIG. 3.1 –

α	$1,0$	$1,1$	$2,0$	$2,1$	$2,2$
$1,0$	1	2	3	6	10
$1,1$		4	5	9	12
$2,0$			7	8	11
$2,1$				13	14
$2,2$					15

FIG. 3.2 –

En remplaçant $\sigma'_1 = \sigma_{1,0}$ et $\sigma'_2 = \sigma_{1,1}$ et en utilisant les produits obtenus précédemment, on tire

$$\begin{array}{lrcl} 4. & \sigma_{1,0}\sigma_{2,0} & = & \sigma_3 - \sigma_2\sigma_{1,0} + \sigma_1\sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} \\ 5. & \sigma_{1,1}\sigma_{2,0} & = & \sigma_4 - \sigma_2\sigma_{1,1} + \sigma_1\sigma_{2,1} \end{array}$$

Enfin, on utilise successivement les relations suivantes qui fournissent un terme du tableau à chaque fois, en développant les produits (d'abord ceux entre parenthèses) grâce aux relations déjà obtenues.

$$\begin{array}{llcl} 6. & \sigma_{1,0}\sigma_{2,1} & = & \sigma_{1,1}\sigma_{2,0} + \sigma_{2,2} \\ & \sigma_{3,0} & = & \sigma_{2,0}\sigma_{1,0} - \sigma_{2,1} \\ 7. & (\sigma_{2,0})^2 & = & \sigma_{2,2} + \sigma_{3,0}\sigma_{1,0} \\ 8. & \sigma_{2,0}\sigma_{2,1} & = & (\sigma_{1,1}\sigma_{2,0})\sigma_{1,0} \\ 9. & \sigma_{1,1}\sigma_{2,1} & = & \sigma_{2,0}\sigma_{3,0} + \sigma_{2,0}\sigma_{2,1} - (\sigma_{1,0}\sigma_{3,0})\sigma_{1,0} \\ 10. & & = & \sigma_{1,0}\sigma_{2,2} \\ 11. & \sigma_{2,0}\sigma_{2,2} & = & (\sigma_{2,0}\sigma_{1,1})\sigma_{1,1} \\ 12. & \sigma_{1,1}\sigma_{2,2} & = & \sigma_{1,0}(\sigma_{1,0}\sigma_{2,2}) - \sigma_{2,0}\sigma_{2,2} \\ 13. & \sigma_{2,1}\sigma_{2,1} & = & (\sigma_{2,1}\sigma_{1,1})\sigma_{1,0} \\ 14. & \sigma_{2,1}\sigma_{2,2} & = & (\sigma_{2,1}\sigma_{1,1})\sigma_{1,1} \\ 15. & \sigma_{2,2}\sigma_{2,2} & = & (\sigma_{2,2}\sigma_{1,1})\sigma_{1,1} \end{array}$$

$\square$

Cela permet donc d'obtenir

$$\begin{array}{l}(f^{-1})^*(r_1^2) = \sigma_{1,1}^2 = \sigma_{2,2}\\ (f^{-1})^*(r_1^3) = \sigma_{1,1}^3 = \sigma_4\sigma_{2,0} - \sigma_3\sigma_{2,1} + \sigma_2\sigma_{2,2}\end{array}$$

et enfin en résumé

$$\begin{array}{lcl}(f^{-1})^*(1) & = & \sigma_{0,0}\\ (f^{-1})^*(r_1) & = & \sigma_{1,1}\\ (f^{-1})^*(r_1^2) & = & \sigma_{2,2}\\ (f^{-1})^*(r_1^3) & = & \sigma_4\sigma_{2,0} - \sigma_3\sigma_{2,1} + \sigma_2\sigma_{2,2}\\ (f^{-1})^*(\eta_+) & = & \sigma_{1,0}\\ (f^{-1})^*(\eta_-) & = & \sigma_1\sigma_{1,1} - \sigma_{2,1}\end{array}$$

Pour un caractère χ, seule la classe $[A_\chi]$ dans le groupe de Brauer de l'algèbres A_χ est bien définie (on fait le choix de la représentation de V_χ pour définir $A_\chi = End(V_\chi)$). Mais on a $[A_\chi] = [A_{f^*(\chi)}]$, puisqu'elles correspondent à des représentations isomorphes. Cela donne alors un isomorphisme de Morita entre $K_*(A_{\chi,f_*(\gamma)})$ et $K_*(A_{f^*(\chi),\gamma})$. La fonctorialité en K-théorie des schémas (contravariante) est simplement induite par le pull-back des faisceaux. On a alors $(f^{-1})^*(\varphi_a) = \varphi_{(f^{-1})^*(a)}$. On utilise le lemme 3.14 pour calculer, pour chaque élément b de $(1, r_1, r_1^2, r_1^3, \eta_-, \eta_+)$, le morphisme $(f^{-1})^*(\varphi_b)$ en fonction des φ_a, $a \in (\sigma_{0,0}, \sigma_{1,0}, \sigma_{1,1}, \sigma_{2,0}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2})$. La dimension des σ_i est obtenu en les spécialisant en $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 1$, ce qui donne $\dim(\sigma_1) = 4$, $\dim(\sigma_2) = 6$, $\dim(\sigma_3) = 4$ et $\dim(\sigma_4) = 1$. Pour ne pas trop alourdir les notations, on laisse tomber l'indice γ dans l'écriture de φ.

$$\begin{array}{lcl}(f^{-1})^*\varphi_1(x) & = & \varphi_{\sigma_{0,0}}(x)\\ (f^{-1})^*\varphi_{r_1}(x) & = & \varphi_{\sigma_{1,1}}(x)\\ (f^{-1})^*\varphi_{(r_1)^2}(x) & = & \varphi_{\sigma_{2,2}}(x)\\ (f^{-1})^*\varphi_{\eta_+}(x) & = & \varphi_{\sigma_{1,0}}(x)\end{array}$$

De plus

$$(f^{-1})^*\varphi_{(r_1)^3}(x) = \varphi_{\sigma_4\sigma_{2,0}-\sigma_3\sigma_{2,1}+\sigma_2\sigma_{2,2}}(x)$$

et

$$(f^{-1})^*\varphi_{\eta_-}(x) = \varphi_{\sigma_1\sigma_{1,1}-\sigma_{2,1}}(x)$$

Or, d'après le lemme 3.14, lorsque D est un corps ($\mathrm{ind}(D) = \deg(D) = 4$),

$$\begin{array}{l}\varphi_{\sigma_4\sigma_{2,0}-\sigma_3\sigma_{2,1}+\sigma_2\sigma_{2,2}}(x)\\ = \varphi_{\sigma_{2,0}}(\overline{\mathrm{Res}}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x)) - \varphi_{\sigma_{2,1}}(\overline{\mathrm{Res}}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 3}}(x)) + 6\varphi_{\sigma_{2,2}}(\overline{\mathrm{Res}}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x))\\ = \varphi_{\sigma_{2,0}}(\mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x)) - \varphi_{\sigma_{2,1}}(\mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x))\\ +6\varphi_{\sigma_{2,2}}(\mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x))\end{array}$$

De même,

$$\begin{array}{l}\varphi_{\sigma_1\sigma_{1,1}-\sigma_{2,1}}(x)\\ = \varphi_{\sigma_{1,1}}(\overline{\mathrm{Res}}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}}(x)) - \varphi_{\sigma_{2,1}}(x) = \varphi_{\sigma_{1,1}}(\mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}}(x)) - \varphi_{\sigma_{2,1}}(x)\end{array}$$

Finallement, on a

$$\begin{array}{rcl}
(f^{-1})^*\varphi_1(x) & = & \varphi_{\sigma_{0,0}}(x) \\
(f^{-1})^*\varphi_{r_1}(x) & = & \varphi_{\sigma_{1,1}}(x) \\
(f^{-1})^*\varphi_{(r_1)^2}(x) & = & \varphi_{\sigma_{2,2}}(x) \\
(f^{-1})^*\varphi_{(r_1)^3}(x) & = & \varphi_{\sigma_{2,0}}(\mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x)) \\
 & & -\varphi_{\sigma_{2,1}}(\mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x)) \\
 & & +6\varphi_{\sigma_{2,2}}(\mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x)) \\
(f^{-1})^*\varphi_{\eta_+}(x) & = & \varphi_{\sigma_{1,0}}(x) \\
(f^{-1})^*\varphi_{\eta_-}(x) & = & \varphi_{\sigma_{1,1}}(\mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}}(x)) - \varphi_{\sigma_{2,1}}(x)
\end{array}$$

En applicant le morphisme f^* et en utilisant la transitivité du morphisme d'invariance de Morita et les relations de commutation calculées dans la partie 1.6, on obtient dans l'autre sens

$$\begin{array}{rcl}
f^*\varphi_{\sigma_{0,0}}(x) & = & \varphi_1(x) \\
f^*\varphi_{\sigma_{1,0}}(x) & = & \varphi_{\eta_+}(x) \\
f^*\varphi_{\sigma_{1,1}}(x) & = & \varphi_{r_1}(x) \\
f^*\varphi_{\sigma_{2,0}}(x) & = & 16\varphi_{r_1}(x) - 6\varphi_{(r_1)^2}(\mathrm{M}_{D^{\otimes 2},D^{\otimes 4}}(x)) + \varphi_{(r_1)^3}(\mathrm{M}_{D^{\otimes 2},D^{\otimes 6}}(x)) \\
 & & -\varphi_{\eta_-}(\mathrm{I}_{D^{\otimes 2},D^{\otimes 3}}(x)) \\
f^*\varphi_{\sigma_{2,1}}(x) & = & \varphi_{r_1}(\mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}}(x)) - \varphi_{\eta_-}(x) \\
f^*\varphi_{\sigma_{2,2}}(x) & = & \varphi_{(r_1)^2}(x)
\end{array}$$

De plus, tous les morphismes utilisés dans ces expressions commutent à l'extension des scalaires (ce qui n'était pas le cas de Res), donc les formules restent valables lorsque D n'est pas un corps.

3.4 Cup-produit

On peut remarquer qu'en utilisant le lemme 3.12, le lemme 3.14 et la table de la figure 3.1, on peut décomposer en images de morphismes φ_{σ_α} les cup-produits d'images de morphismes φ_{σ_α}. On obtient ainsi, pour tout α,

$$\varphi_{\sigma_{0,0}}(f).\varphi_{\sigma_\alpha}(x) = \varphi_{\sigma_\alpha}(f.x)$$

puis

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_{\sigma_{1,0}}(x).\varphi_{\sigma_{1,0}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{1,1}}(x.y) + \varphi_{\sigma_{2,0}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{1,0}}(x).\varphi_{\sigma_{1,1}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{2,1}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{1,0}}(x).\varphi_{\sigma_{2,0}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{0,0}} \circ \mathrm{Res}_{D,F} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 3},D}(x.y) \\
 & & -6\varphi_{\sigma_{1,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 3},D}(x.y) \\
 & & +\varphi_{\sigma_{2,0}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}}(x.y) + \varphi_{\sigma_{2,1}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{1,0}}(x).\varphi_{\sigma_{2,1}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{0,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 4},F}(x.y) - 6\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & +\varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}}(x.y) + \varphi_{\sigma_{2,2}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{1,0}}(x).\varphi_{\sigma_{2,2}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{1,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 5},D}(x.y) \\
 & & -\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 3}}(x.y)
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & & +\varphi_{\sigma_{2,2}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{1,1}}(x).\varphi_{\sigma_{1,1}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{2,2}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{1,1}}(x).\varphi_{\sigma_{2,0}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{0,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 4},F}(x.y) - 6\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & +\varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{1,1}}(x).\varphi_{\sigma_{2,1}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{1,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 1}}(x.y) \\
 & & -\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 3}}(x.y) \\
 & & +\varphi_{\sigma_{2,2}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{1,1}}(x).\varphi_{\sigma_{2,2}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{2,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & -\varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
 & & +6\varphi_{\sigma_{2,2}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{2,0}}(x).\varphi_{\sigma_{2,0}}(y) & = & 16\varphi_{\sigma_{0,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 4},F}(x.y) \\
 & & -5\varphi_{\sigma_{1,0}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 2},D} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & -6\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & +10\varphi_{\sigma_{2,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & +\varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}}(x.y) + \varphi_{\sigma_{2,2}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{2,0}}(x).\varphi_{\sigma_{2,1}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{0,0}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 1},F} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 5},D}(x.y) \\
 & & +\varphi_{\sigma_{1,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 5},D}(x.y) \\
 & & -6\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 3}}(x.y) \\
 & & +10\varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 3}}(x.y) \\
 & & +\varphi_{\sigma_{2,2}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{2,0}}(x).\varphi_{\sigma_{2,2}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{1,0}}\mathrm{Res}_{D^{\otimes 2},D} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & -15\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & +10\varphi_{\sigma_{2,2}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{2,1}}(x).\varphi_{\sigma_{2,1}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{1,0}}\mathrm{Res}_{D^{\otimes 2},D} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & -15\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & +\varphi_{\sigma_{2,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & -\varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
 & & +16\varphi_{\sigma_{2,2}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 6},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{2,1}}(x).\varphi_{\sigma_{2,2}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{2,0}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 7},D^{\otimes 3}}(x.y) \\
 & & -15\varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 7},D^{\otimes 3}}(x.y) \\
 & & +5\varphi_{\sigma_{2,2}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 5},D^{\otimes 4}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 7},D^{\otimes 5}}(x.y) \\
\varphi_{\sigma_{2,2}}(x).\varphi_{\sigma_{2,2}}(y) & = & \varphi_{\sigma_{0,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 8},F}(x.y) \\
 & & -\varphi_{\sigma_{1,0}}\mathrm{Res}_{D^{\otimes 2},D} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 8},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & +10\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 8},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & +6\varphi_{\sigma_{2,0}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 8},D^{\otimes 2}}(x.y) \\
 & & -5\varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 4},D^{\otimes 3}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 8},D^{\otimes 4}}(x.y) \\
 & & +20\varphi_{\sigma_{2,2}} \circ \mathrm{M}_{D^{\otimes 8},D^{\otimes 4}}(x.y)
\end{array}
$$

Chapitre 4

Filtration topologique

Le but de ce chapitre est de calculer autant que possible la filtration topologique (voir annexe B.1) de la quadrique projective d'Albert X_q, ou de la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(2, D)$, ce qui revient au même d'après l'isomorphisme du théorème 3.18. De ce point de vue, l'inconvénient des morphismes construits par Panin est qu'ils ne respectent pas la filtration topologique. Nous allons donc les modifier légèrement de manière à obtenir des morphismes qui arrivent dans les différents étages de la filtration de la quadrique. Les nouveaux morphismes sont définis à l'aide d'une norme réduite, or cette norme réduite n'est définie que pour K_0, K_1 et K_2. Ces morphismes ne sont donc définis que pour ces niveaux de K-théorie.

4.1 Morphismes respectant la filtration

On note $K_iX^{(j)}$ le j-ème groupe de la filtration topologique de K_iX, et $K_iX^{(j/j+1)} = K_iX^{(j)}/K_iX^{(j+1)}$.

Définition 4.1 *Pour $i = 0$, 1 ou 2, on définit les morphismes*

$$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 : K_iF \longrightarrow K_iX_q$$

par

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= \varphi_1 \\
\Psi_1 &= \varphi_1 - \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \\
\Psi_2 &= \varphi_1 - 2\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} + \varphi_{(r_1)^2} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}} \\
\Psi_3 &= \varphi_1 - 3\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} + 3\varphi_{(r_1)^2} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}} - \varphi_{(r_1)^3} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}
\end{aligned}$$

et

$$\Psi_2', \Psi_2'' : K_iD \longrightarrow K_iX_q$$

par

$$\begin{aligned}
\Psi_2' &= \varphi_1 \circ \mathrm{Nrd} + \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd} - \varphi_{\eta_+} \\
\Psi_2'' &= \varphi_1 \circ \mathrm{Nrd} + \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd} - \varphi_{\eta_-} \circ \mathrm{M}_{D,D^{\otimes 3}}
\end{aligned}$$

Théorème 4.2 *Pour $i = 0$, 1 ou 2, le morphisme*

$$\Psi_0 \oplus \Psi_1 \oplus \Psi_2 \oplus \Psi_3 \oplus \Psi_2' \oplus \Psi_2'' : K_iF^{\oplus 4} \oplus K_iD^{\oplus 2} \longrightarrow K_iX_q$$

est un isomorphisme.

Démonstration : On se ramène au morphisme

$$\varphi_1 \oplus \varphi_{r_1} \oplus \varphi_{r_1^2} \oplus \varphi_{r_1^3} \oplus \varphi_{\eta_+} \oplus \varphi_{\eta_-} :$$

$$K_iF \oplus K_iD^{\otimes 2} \oplus K_iD^{\otimes 4} \oplus K_iD^{\otimes 6} \oplus K_iD^{\otimes 1} \oplus K_iD^{\otimes 3} \longrightarrow K_iX_q$$

qui est un isomorphisme. Le morphisme de l'énoncé est la composée du morphisme précédent et de l'isomorphisme

$$K_iF^{\oplus 4} \oplus K_iD^{\oplus 2} \longrightarrow K_iF \oplus K_iD^{\otimes 2} \oplus K_iD^{\otimes 4} \oplus K_iD^{\otimes 6} \oplus K_iD^{\otimes 1} \oplus K_iD^{\otimes 3}$$

donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathrm{Id} & \mathrm{Id} & \mathrm{Id} & \mathrm{Nrd} & \mathrm{Nrd} \\ 0 & -\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} & -2\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} & -3\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} & \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd} & \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd} \\ 0 & 0 & \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}} & 3\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{M}_{D,D^{\otimes 3}} \end{pmatrix}$$

qui est inversible parce que triangulaire et de termes inversibles sur la diagonale. □

Théorème 4.3 *Pour $i = 0$, 1 ou 2 et pour tout j, Ψ_j, Ψ_j' et Ψ_j'' arrivent dans $K_iX_q^{(j)}$.*

Pour effectuer la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin de deux étapes. La première étape consiste à identifier, dans le cas où la quadrique est déployée, les morphismes du théorème avec des cup-produits par des éléments de K_0X_q, dont la codimension est connue. La deuxième étape consiste à se ramener au cas où la quadrique est déployée, en utilisant le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer $SB(D)$.

Certains élements de K_0X_h (quadrique déployée) que nous allons utiliser sont des éléments qui proviennent du plongement de X_h dans $\mathbf{P}^5$. Soit $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{D}$) la classe dans K_0X_h de l'intersection d'un hyperplan de $\mathbf{P}^5$ et de X_h (resp. d'une droite).Soit $\mathcal{Q}$ la classe d'un point rationnel. Soit $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) la classe de l'intersection de X_h avec les plans (projectifs) d'équation $w_2 = w_4 = w_6 = 0$ et $w_2 = w_4 = w_5 = 0$ (dans la base de W choisie au § 3.2). On note également $\mathcal{I}$ la classe du faisceau structural. La classe $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{D}$, $\mathcal{Q}$) dans K_0X_h ne dépend pas de l'hyperplan (resp. de la droite, resp. du point) choisi, par contre les classes $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont différentes (voir [11]). Les codimensions de ces éléments sont par construction 0, 1, 2, 2, 3 et 4 dans l'ordre $\mathcal{I}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{Q}$.

Par le lemme 3.17, le plongement de Plücker de $Gr(2,V)$ dans $\mathbf{P}^5$ et le plongement naturel de X_h dans $\mathbf{P}^5$ sont compatibles à l'isomorphisme f. Pour ne pas alourdir les notations, nous noterons également $\mathcal{I}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{Q}$ les éléments $(f^{-1})^*(\mathcal{I})$, $(f^{-1})^*(\mathcal{H})$, $(f^{-1})^*(\mathcal{P}_1)$, $(f^{-1})^*(\mathcal{P}_2)$, $(f^{-1})^*(\mathcal{D})$ et $(f^{-1})^*(\mathcal{Q})$ (bien évidemment, $(f^{-1})^*(\mathcal{I})$ est la classe du faisceau structural de $Gr(2,V)$).

La table des cup-produits de ces éléments est donnée par (voir [11]) :

.	$\mathcal{I}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{Q}$
$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{Q}$
$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}$	$\mathcal{P}_1+\mathcal{P}_2-\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{Q}$	0
$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{Q}$	0	0	0
$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{D}$	0	$\mathcal{Q}$	0	0
$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{Q}$	0	0	0	0
$\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$	0	0	0	0	0

FIG. 4.1 –

Nous utiliserons aussi des éléments de $K_0Gr(2,V)$, qui sont des classes de fibrés vectoriels. Soit $\mathcal{J}$ le fibré canonique de $Gr(2,V)$ (la fibre au dessus d'un point est l'espace vectoriel que représente ce point). Les éléments qui nous intéressent sont la classe dans $K_0Gr(2,V)$ des fibrés vectoriels $S^\alpha\mathcal{J}$, où S^α est le foncteur de Schur associé au multi-indice α, et où α prend les valeurs $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$ et $(2,2)$. Ces fibrés sont résumés dans le tableau

α	$(0,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,2)$	$(1,0)$	$(2,1)$
$\lvert\alpha\rvert$	0	2	2	4	1	3
$S^\alpha\mathcal{J}$	1	$\Lambda^2\mathcal{J}$	$S^2\mathcal{J}$	$\Lambda^2\mathcal{J}\otimes\Lambda^2\mathcal{J}$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{J}\otimes\Lambda^2\mathcal{J}$

Par abus de langage, pour un élément k de K_iF et un élément x de K_jX, où X est une variété sur F, on appelle cup-produit de k par x et on note $k.x$ l'élément obtenu en faisant le cup-produit de l'image de k dans K_iX (par le pull-back par le morphisme structural) par x.

Lemme 4.4 *Dans le cas déployé, si $[F]$ est la classe de F dans K_0F et si $k\in K_iF$, on a les égalités*

$$k.\varphi_{\sigma_\alpha}\circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes|\alpha|}}([F]) = \varphi_{\sigma_\alpha}\circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes|\alpha|}}(k)$$

$$k.\varphi_{(r_1)^i}\circ \mathrm{M}_{F,D^{2i}}([F]) = \varphi_{(r_1)^i}\circ \mathrm{M}_{F,D^{2i}}(k)$$

$$k.\varphi_{\eta_-}\circ \mathrm{M}_{F,D^3}([F]) = \varphi_{\eta_-}\circ \mathrm{M}_{F,D^3}(k)$$

$$k.\varphi_{\eta_+}\circ \mathrm{M}_{F,D}([F]) = \varphi_{\eta_+}\circ \mathrm{M}_{F,D}(k)$$

Démonstration : Le morphisme $\varphi_{0,0}$ (resp. φ_1) coïncide avec le pull-back par le morphisme structural de $Gr(2,V)$ (resp. X_h) par construction. On applique le calcul de cup-produit de la section 3.4 pour les morphismes φ_{σ_α} et on utilise le fait que le cup-produit par $[F]$ dans K_iF est l'identité. Cela fournit exactement le résultat. Pour les morphismes sur X_h, il suffit d'appliquer f^* au cas précédent. $\square$

Lemme 4.5 *(voir [17], § 10.2) Dans le cas déployé, on a $K_iD \simeq K_iF$ par l'isomorphisme de Morita. Alors*

$$\varphi_{\sigma_\alpha} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes|\alpha|}}(k) = k.S^\alpha \mathcal{J}$$

Démonstration : D'après le lemme précédent, il suffit d'identifier les élément $\varphi_{\sigma_\alpha}(\mathrm{M}_{F,D^{\otimes|\alpha|}}([F]))$ et $S^\alpha\mathcal{J}$, ce qui est fait dans [17], § 10.2 (et est par ailleurs immédiat si on utilise la définition de φ_{σ_α}). $\square$

Lemme 4.6 *Dans le cas déployé ($q = h$), on a, pour tout $i \geq 0$,*

$$\varphi_{(r_1)^i} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2i}}(k) = k.(\mathcal{I} - \mathcal{H})^i$$

de plus,

$$\varphi_{\eta_+} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) = k.(2\mathcal{I} - \mathcal{H} - \mathcal{P}_1)$$

et

$$\varphi_{\eta_-} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 3}}(k) = k.(2\mathcal{I} - \mathcal{H} - \mathcal{P}_2)$$

Démonstration : Nous allons démontrer ce lemme en utilisant des relations qu'on peut trouver sur la K-théorie de $Gr(2,V)$, puis appliquer le morphisme f^* grâce aux formules obtenues à la fin de la section 3.3.

Le fibré $\mathcal{O}_{Gr(2,V)}(-1)$ est le pull-back de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}(-1)$ par le plongement de Plücker. Le fibré $\mathcal{O}_{X_h}(-1)$ est le pull-back de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}(-1)$ par le plongement de la quadrique X_h dans $\mathbf{P}^5$. Par compatibilité de l'isomorphisme f au plongement, l'image de $\mathcal{O}_{Gr(2,V)}(-1)$ par f^* est donc bien $\mathcal{O}_{X_h}(-1)$. De plus, par définition du plongement de Plücker (qui envoie un sous-espace U de V sur $\Lambda^2 U$ dans $\Lambda^2 V$), le pull-back de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}(-1)$ (fibré canonique de $\mathbf{P}^5$) est $\Lambda^2\mathcal{J}$. Par pull-back, l'égalité classique $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^5}(-1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^5} - \mathcal{H}$ donne donc

$$\Lambda^2\mathcal{J} = \mathcal{I} - \mathcal{H}$$

dans $K_0Gr(2,V)$. Par ailleurs, ces considérations permettent de montrer que la classe $\mathcal{H}$ est définie même lorsque la quadrique X_q (resp. la variété de Severi-Brauer généralisée $SB(2,D)$) n'est pas déployée. En effet, il suffit de la définir comme la classe de $\mathcal{I} - \mathcal{O}_{X_q}(-1)$ (resp. $\mathcal{I} - \mathcal{O}_{SB(2,D)}(-1)$) qui sont bien définies, même dans le cas non déployé. La classe de $\mathcal{H}$ est alors de codimension 1. En effet, les éléments de K_0X pour une variété X qui sont de codimension 1, sont exactement ceux du noyau de l'application rang, ce qui est évidemment le cas pour $\mathcal{H}$.

Par définition, le fibré $\mathcal{J}$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{Gr(2,V)} \longrightarrow \mathcal{J}' \longrightarrow 0$$

qui se dualise en

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}'^{*} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{Gr(2,V)} \longrightarrow \mathcal{J}^{*} \longrightarrow 0$$

Soit ϕ un élément de V^* de noyau $< v_1, v_2, v_3 >$ (ce sont les vecteurs de la base définie au début de la section 3.2). Un tel élément fournit une section s de $\mathcal{J}^*$ par la composée

$$\mathcal{O}_{Gr(2,V)} \xrightarrow{\phi \otimes -} V^* \otimes \mathcal{O}_{Gr(2,V)} \longrightarrow \mathcal{J}^*$$

Le lieu d'annulation de s est l'ensemble des points x tels que la composée

$$\mathcal{J}_x \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{Gr(2,V),x} \xrightarrow{\phi.\mathrm{Id}} \mathcal{O}_{Gr(2,V),x}$$

est nulle. Or cette composée est nulle si le sous-espace $\mathcal{J}_x$ de V est dans $\ker\phi$, et par le plongement de Plücker, cette condition se transforme en $\Lambda^2\mathcal{J}_x \subset \Lambda^2 \ker\phi$. Mais $\Lambda^2 \ker\phi =< v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_3 >=< w_1, w_3, w_5 >$. On obtient donc exactement la sous-variété du plan projectif ($w_2 = w_4 = w_6 = 0$) qui a fourni la classe $\mathcal{P}_1$ dans $K_0Gr(2,V)$.

La suite exacte de Koszul (voir [7], IV, §2) associée au fibré $\mathcal{J}$ (de rang 2) et à la section s donne

$$0 \longrightarrow \Lambda^2\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_{Gr(2,V)} \longrightarrow \mathcal{O}_s \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{O}_s$ est le faisceau structural des du lieu d'annulation de s, et donc

$$\mathcal{J} = S^{1,1}\mathcal{J} + \mathcal{I} - \mathcal{P}_1$$

dans $K_0Gr(2,V)$.

La table de cup-produits de la figure 4.1 et la section 3.4 permettent alors de déduire les autres éléments. On obtient

$$\begin{aligned}
S^{0,0}\mathcal{J} &= \mathcal{I} \\
S^{1,0}\mathcal{J} &= 2\mathcal{I} - \mathcal{H} - \mathcal{P}_1 \\
S^{1,1}\mathcal{J} &= \mathcal{I} - \mathcal{H} \\
S^{2,0}\mathcal{J} &= 3\mathcal{I} - 3\mathcal{H} - 3\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{D} + \mathcal{Q} \\
S^{2,1}\mathcal{J} &= 2\mathcal{I} - 3\mathcal{H} + \mathcal{P}_2 \\
S^{2,2}\mathcal{J} &= (\mathcal{I} - \mathcal{H})^2 = \mathcal{I} - 2\mathcal{H} + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{D}
\end{aligned}$$

On a alors pour tout $k \in K_iF$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{(r_1)^i} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2i}}(k) &= f^*(\varphi_{(\sigma_{1,1})^i})(k) \\
&= f^*(k).f^*((\mathcal{I} - \mathcal{H})^i) \\
&= k.(\mathcal{I} - \mathcal{H})^i
\end{aligned}$$

ce qui est la première égalité du lemme. De plus,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\eta_+} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) &= f^*(\varphi_{\sigma_{1,0}}(k)) \\
&= f^*(k.(2\mathcal{I} - \mathcal{H} - \mathcal{P}_1)) \\
&= k.(2\mathcal{I} - \mathcal{H} - \mathcal{P}_1)
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\eta_-} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 3}}(k) &= f^*(\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ \mathrm{Res}_{D^{\otimes 3},D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 3}}(k) - \varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 3}}(k)) \\
&= f^*(\varphi_{\sigma_{1,1}} \circ 4\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k) - \varphi_{\sigma_{2,1}} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 3}}(k)) \\
&= f^*(k.4S^{1,1}\mathcal{J} - k.S^{2,1}\mathcal{J}) \\
&= f^*(k.4(\mathcal{I} - \mathcal{H}) - k.(2\mathcal{I} - 3\mathcal{H} + \mathcal{P}_2)) \\
&= k.(2\mathcal{I} - \mathcal{H} - \mathcal{P}_2)
\end{aligned}
$$

ce qui fournit les deux autres égalités du lemme. $\square$

Lemme 4.7 *Dans le cas déployé, pour $i = 0$, 1 ou 2 et pour tout $k \in K_iF$, on a*

$$
\begin{aligned}
\Psi_0(k) &= k.\mathcal{I} \\
\Psi_1(k) &= k.\mathcal{H} \\
\Psi_2(k) &= k.\mathcal{H}^2 \\
\Psi_2' \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) &= k.\mathcal{P}_1 \\
\Psi_2'' \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) &= k.\mathcal{P}_2 \\
\Psi_3(k) &= k.\mathcal{H}^3
\end{aligned}
$$

Démonstration : En utilisant le lemme 4.6 et le fait que dans le cas déployé, la norme réduite coïncide avec le morphisme d'invariance de Morita,

$$
\begin{aligned}
\Psi_0(k) &= \varphi_1(k) = k.\mathcal{I} \\
\Psi_1(k) &= \varphi_1(k) - \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k) \\
&= k.\mathcal{I} - k.(\mathcal{I} - \mathcal{H}) \\
&= k.\mathcal{H} \\
\Psi_2(k) &= \varphi_1(k) - 2\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k) + \varphi_{(r_1)^2} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}}(k) \\
&= k.\mathcal{I} - 2k.(\mathcal{I} - \mathcal{H}) + k.(\mathcal{I} - \mathcal{H})^2 \\
&= k.\mathcal{H}^2 \\
\Psi_2' \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) &= \varphi_1 \circ \mathrm{Nrd} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) + \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) \\
&\quad -\varphi_{\eta_+} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) \\
&= \varphi_1(k) + \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k) - \varphi_{\eta_+} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) \\
&= k.\mathcal{I} + k.(\mathcal{I} - \mathcal{H}) - k.(2\mathcal{I} - \mathcal{H} - \mathcal{P}_1) \\
&= k.\mathcal{P}_1 \\
\Psi_2'' \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) &= \varphi_1 \circ \mathrm{Nrd} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) + \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) \\
&\quad -\varphi_{\eta_-} \circ \mathrm{M}_{D,D^{\otimes 3}} \circ \mathrm{M}_{F,D}(k) \\
&= \varphi_1(k) + \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k) - \varphi_{\eta_-} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 3}}(k) \\
&= k.\mathcal{I} + k.(\mathcal{I} - \mathcal{H}) - k.(2\mathcal{I} - \mathcal{H} - \mathcal{P}_2) \\
&= k.\mathcal{P}_2 \\
\Psi_3(k) &= \varphi_1(k) - 3\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k) + 3\varphi_{(r_1)^2} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}}(k) \\
&\quad -\varphi_{(r_1)^3} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}(k) \\
&= k.\mathcal{I} - 3k.(\mathcal{I} - \mathcal{H}) + 3k.(\mathcal{I} - \mathcal{H})^2 - k.(\mathcal{I} - \mathcal{H})^3 \\
&= k.\mathcal{H}^3
\end{aligned}
$$

□

Ceci suffit pour montrer le théorème 4.3 dans le cas déployé, puisque tout les éléments de K_0X_h qui apparaissent ont la bonne codimension, et la codimension est compatible au cup-produit (voir B.1).

Pour la deuxième étape, nous allons nous ramener au cas déployé par extension des scalaires.

Définition 4.8 *Pour $i = 0$, 1 ou 2, en utilisant la suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen B.2, on définit les morphismes ξ_0 et ξ_1 comme les composées*

$$\xi_0 : K_iF \longrightarrow K_iX_q \longrightarrow K_iX_q^{(0/1)} \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_i)$$

et

$$\xi_1 : K_iF \xrightarrow{.\mathcal{H}} K_iX_q^{(1)} \longrightarrow K_iX_q^{(1/2)} \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_{i+1})$$

Théorème 4.9 *Les morphismes ξ_0 et ξ_1 sont des isomorphismes.*

Démonstration :

Dans le cas déployé, le groupe $K_iX_h^{(j)}$ est engendré par les cup-produits de K_iF avec les éléments de $(\mathcal{I}, \mathcal{H}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{D}, \mathcal{Q})$ qui ont une codimension supérieure à j (voir [11], § 3.2). Donc les morphismes

$$K_iF \longrightarrow K_iX_q \longrightarrow K_iX_q^{(0/1)}$$

et

$$K_iF \xrightarrow{.\mathcal{H}} K_iX_q^{(1)}$$

sont des isomorphismes. De plus, dans le cas déployé, la suite spectrale B.2 est dégénérée, donc les inclusions

$$K_iX_q^{(0/1)} \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_i)$$

et

$$K_iX_q^{(1/2)} \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_{i+1})$$

sont des isomorphismes. Par conséquent, ξ_0 et ξ_1 sont des isomorphismes.

Dans le cas général, d'après [9], § 5.3, § 5.4 et corollaire 8.6, ξ_0 et ξ_1 sont des isomorphismes après localisation en 2. Leurs noyaux et leurs conoyaux n'ont donc pas de 2-torsion. De plus, ces morphismes commutent à l'extension des scalaires, or on peut trouver une extension E de degré 4 telle que la quadrique X_q soit déployée, et la composée de l'extension des scalaires et de la norme $\mathrm{N}_{E/F} \circ \mathrm{Ext}_{E/F}$ est la multiplication par le degré $[E : F]$. Donc ces noyaux et conoyaux sont annulés par 4, et donc nuls. □

Corollaire 4.10 *Pour $i = 0$, 1 ou 2 et pour $j = 0$ ou 1 le morphisme*

$$K_iX_q^{(j/j+1)} \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_{i+j})$$

est un isomorphisme.

Définition 4.11 *Pour $i = 0$, 1 ou 2, on définit les morphismes $\overline{\xi}_0$ et $\overline{\xi}_1$ comme les composées*

$$\overline{\xi}_0 : K_iX_q \longrightarrow K_iX_q^{(0/1)} \hookrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_i) \xrightarrow{\xi_0^{-1}} K_iF$$

$$\overline{\xi}_1 : K_iX_q^{(1)} \longrightarrow K_iX_q^{(1/2)} \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{K}_{i+1}) \xrightarrow{\xi_1^{-1}} K_iF$$

Ces morphismes commutent à l'extension des scalaires.

Lemme 4.12 *Pour tout $j \geq 1$, la composée $\overline{\xi}_0 \circ \Psi_j$ (resp. Ψ_2' et Ψ_2'') est nulle.*

Démonstration : Ceci revient à dire que pour tout $j \geq 1$, Ψ_j arrive dans $K_iX_q^{(1)}$. Or dans le cas déployé, cela a déjà été montré. Pour le cas général, on utilise le corps des fonctions K de la variété de Severi-Brauer $SB(D)$ qui déploie X_q (voir propositions A.4 et A.6) et qui vérifie que pour $i \leq 2$, le morphisme $K_iF \longrightarrow K_iK$ est injectif (voir proposition A.6). Comme ξ_0 commute à l'extension des scalaires, cela nous ramène au cas déployé. □

Lemme 4.13 *Pour tout $j \geq 2$ la composée $\overline{\xi}_1 \circ \Psi_j$ (resp. Ψ_2' et Ψ_2'') est bien définie (par le lemme précédent), et est nulle.*

Démonstration : Cela se démontre exactement de la même façon que le lemme précédent. □

Les deux lemmes précédents concluent la démonstration du théorème 4.3.

Proposition 4.14 *Pour $i = 0$, 1 ou 2 et pour $j = 0$ ou 1, le morphisme composé*

$$K_iF \xrightarrow{\Psi_j} K_iX_q^{(j)} \longrightarrow K_iX_q^{(j/j+1)}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du corollaire 4.10, puisque Ψ_0 coïncide avec le morphisme induit par le morphisme structural, et Ψ_1 coïncide avec le cup-produit par $\mathcal{H}$. □

Proposition 4.15 *Pour $i = 0$, 1 ou 2 les morphismes*

$$\Psi_1 \oplus \Psi_2 \oplus \Psi_3 \oplus \Psi_2' \oplus \Psi_2'' : K_iF^{\oplus 3} \oplus K_iD^{\oplus 2} \longrightarrow K_iX_q^{(1)}$$

et

$$\Psi_2 \oplus \Psi_3 \oplus \Psi_2' \oplus \Psi_2'' : K_iF^{\oplus 2} \oplus K_iD^{\oplus 2} \longrightarrow K_iX_q^{(2)}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration : C'est un corollaire de la proposition 4.14. □

Définition 4.16 *Pour $i = 0$, 1 ou 2, on définit le morphisme*

$$\Psi'_3 : K_i D \longrightarrow K_i X_q$$

par

$$\Psi'_3 = \Psi'_2 + \Psi''_2 - \Psi_2 \circ \mathrm{Nrd}$$

Proposition 4.17 *Pour $i = 0$ ou 1, Ψ'_3 arrive dans $K_i X_q^{(3)}$.*
Pour $i = 2$, la composée

$$\bigoplus_{K \, déploie D} K_2 D_K \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/F}} K_2 D \xrightarrow{\Psi'_3} K_2 X_q$$

arrive dans $K_2 X_q^{(3)}$.

Démonstration : Dans le cas déployé, en utilisant la table de cup produit de la figure 4.1 et les résultats déjà obtenus pour les morphismes Ψ, Ψ' et Ψ'', on voit que $\Psi'_3(x)$ coïncide avec le cup-produit $\mathrm{M}_{D,F}(x).(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{H}^2) = \mathrm{M}_{D,F}(x).\mathcal{D}$. Le morphisme Ψ'_3 arrive donc bien dans $K_i X_q^{(3)}$. Dans le cas général, on passe par des normes provenant de quadriques déployées. la norme respecte la filtration topologique (voir annexe B.1). Les morphismes φ de Panin sont compatibles à la norme (voir 3.13), et les extensions qui déploient X_q sont les mêmes que celles qui déploient D (voir proposition A.4), donc la composée

$$\bigoplus_{K \, déploie D} K_i D_K \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/F}} K_i D \xrightarrow{\Psi'_3} K_i X_q$$

arrive dans $K_i X_q^{(3)}$. Ceci montre le second point. Pour le premier, il suffit de constater que le morphisme

$$\bigoplus_{K \, déploie D} K_i D_K \xrightarrow{\mathrm{N}_{K/F}} K_i D$$

est surjectif pour $i = 0$ ou 1. En effet, le morphisme est déjà surjectif si l'on se restreint aux sous-corps commutatifs maximaux de D. □

Nous n'aurons pas besoin du théorème suivant, toutefois il est démontré dans [12].

Théorème 4.18 *(voir [12], démonstration de la proposition 2) Pour $i = 0$ ou 1, le morphisme*

$$\Psi_3 \oplus \Psi'_3 : K_i F \oplus K_i D \longrightarrow K_i X_q^{(3)}$$

est un isomorphisme.

Démontrons enfin un dernier lemme qui servira par la suite.

Lemme 4.19 *Soient* $k \in K_iF$, $k' \in K_0F$ *et* $d \in K_0D$ *(*$i = 0$, 1 *ou* 2*). Pour* $j = 0$, 1, 2 *ou* 3, *on a*

$$\Psi_j(k.k') = k.\Psi_j(k')$$

Pour $j = 2$ *ou* 3, *on a*

$$\Psi'_j(k.d) = k.\Psi_j(d)$$

On a également

$$\Psi''_2(k.d) = k.\Psi_2(d)$$

Démonstration : On constate d'abord que par définition $\Psi_0 = \varphi_1$ coïncide avec le pull-back par le morphisme structural. On utilise ensuite le lemme 3.12 et la propriété 1.50 pour passer d'une ligne à l'autre dans les égalités suivantes.

$$\begin{array}{rcl}
\Psi_0(k.k') & = & \varphi_1(k.k') \\
& = & \varphi_1(k).\varphi_1(k') \\
& = & k.\varphi_1(k') \\
& = & k.\Psi_1(k') \\
\Psi_1(k.k') & = & \varphi_1(k.k') - \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k.k') \\
& = & \varphi_1(k.k') - \varphi_{r_1}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k')) \\
& = & \varphi_1(k).\varphi_1(k') - \varphi_1(k).\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k') \\
& = & k.\Psi_1(k') \\
\Psi_2(k.k') & = & \varphi_1(k.k') - 3\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k.k') + 3\varphi_{(r_1)^2} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}}(k.k') \\
& & -\varphi_{(r_1)^3} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}(k.k') \\
& = & \varphi_1(k.k') - 3\varphi_{r_1}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k')) + 3\varphi_{(r_1)^2}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}}(k')) \\
& & -\varphi_{(r_1)^3}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}(k')) \\
& = & \varphi_1(k).\varphi_1(k') - 3\varphi_1(k).\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k') \\
& & +3\varphi_1(k).\varphi_{(r_1)^2} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}}(k') - \varphi_1(k).\varphi_{(r_1)^3} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}(k') \\
& = & k.\Psi_2(k') \\
\Psi_3(k.k') & = & \varphi_1(k.k') - 3\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k.k') + 3\varphi_{(r_1)^2} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}}(k.k') \\
& & -\varphi_{(r_1)^3} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}(k.k') \\
& = & \varphi_1(k.k') - 3\varphi_{r_1}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k')) + 3\varphi_{(r_1)^2}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}}(k')) \\
& & -\varphi_{(r_1)^3}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}(k')) \\
& = & \varphi_1(k).\varphi_1(k') - 3\varphi_1(k).\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}}(k') \\
& & +3\varphi_1(k).\varphi_{(r_1)^2} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 4}}(k') - \varphi_1(k).\varphi_{(r_1)^3} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 6}}(k') \\
& = & k.\Psi_3(k') \\
\Psi'_2(k.d) & = & \varphi_1 \circ \mathrm{Nrd}(k.d) + \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd}(k.d) - \varphi_{\eta_+}(k.d) \\
& = & \varphi_1(k.\mathrm{Nrd}(d)) + \varphi_{r_1}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd}(d)) - \varphi_{\eta_+}(k.d) \\
& = & \varphi_1(k).\varphi_1 \circ \mathrm{Nrd}(d) + \varphi_1(k).\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd}(d) \\
& & -\varphi_1(k).\varphi_{\eta_+}(k.d) \\
& = & k.\Psi'_2(d) \\
\Psi''_2(k.d) & = & \varphi_1 \circ \mathrm{Nrd}(k.d) + \varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd}(k.d) - \varphi_{\eta_-} \circ \mathrm{M}_{D,D^{\otimes 3}}(k.d) \\
& = & \varphi_1(k.\mathrm{Nrd}(d)) + \varphi_{r_1}(k.\mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd}(d)) - \varphi_{\eta_-}(k.\mathrm{M}_{D,D^{\otimes 3}}(d))
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & = & \varphi_1(k).\varphi_1 \circ \mathrm{Nrd}(d) + \varphi_1(k).\varphi_{r_1} \circ \mathrm{M}_{F,D^{\otimes 2}} \circ \mathrm{Nrd}(d) \\
 & & -\varphi_1(k).\varphi_{\eta_-} \circ \mathrm{M}_{D,D^{\otimes 3}}(d) \\
 & = & k.\Psi_2''(d) \\
\Psi_3'(k.d) & = & \Psi_2'(k.d) + \Psi_2''(k.d) - \Psi_3 \circ \mathrm{Nrd}(k.d) \\
 & = & \Psi_2'(k.d) + \Psi_2''(k.d) - \Psi_3(k.\mathrm{Nrd}(d)) \\
 & = & k.\Psi_2'(d) + k.\Psi_2''(d) - k.\Psi_3 \circ \mathrm{Nrd}(d) \\
 & = & k.\Psi_3'(d)
\end{array}
$$

□

4.2 Calcul de $K_1 X_q^{(4)}$

Dans cette section, pour une variété X projective lisse sur F de dimension d, nous aurons besoin d'utiliser la norme $\mathrm{N}_X^i : H^d(X, \mathcal{K}_{i+d}) \longrightarrow K_i F$. Elle vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 4.20 *Si E est une extension de F, alors*

1. *La norme N_X^i commute à l'extension des scalaires $\mathrm{Ext}_{E/F}$.*
2. *Si de plus, $[E : F]$ est fini, la norme N_X^i commute aux normes $\mathrm{N}_{E/F}$.*

Proposition 4.21 *([3], exemple 2.3) Si L est une extension de F telle que X_q possède un point L-rationnel (q est isotrope sur L), alors le morphisme*

$$\mathrm{N}_{X_q}^1 : H^4((X_q)_L, \mathcal{K}_5) \longrightarrow K_1 L$$

est un isomorphisme.

Proposition 4.22 *Si π désigne le morphisme structural de X, le diagramme*

$$
\begin{tikzcd}
H^d(X, \mathcal{K}_{d+i}) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{N}_X^i"'] & K_i X \arrow[d, "\pi_*"] \\
 & K_i F
\end{tikzcd}
$$

est commutatif.

Démonstration : On utilise la propriété de covariance par rapport aux morphismes propres de la suite spectrale B.2 (voir [8], théorème 7.22). Le morphisme

$$\pi_* : E_1^{d,-d-i}(X) \longrightarrow E_1^{0,-i}(F) \simeq K_i F$$

coïncide par définition avec

$$N_X^i : E_1^{d,-d-i}(X) \longrightarrow K_i F$$

On utilise alors le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
E_1^{d,-d-i}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_*"'] & K_i X \arrow[d, "\pi_*"'] \\
E_1^{0,-i}(F) \arrow[r, "="] & K_i F
\end{tikzcd}
$$

qui induit le résultat sur les termes E_2. □

Nous aurons également besoin de la propriété suivante.

Proposition 4.23 *(voir [3]) Le morphisme*

$$\sum \mathrm{N}_{L/F} : \bigoplus_{X(L)\neq\varnothing} H^d(X_L, \mathcal{K}_{d+1}) \longrightarrow H^d(X, \mathcal{K}_{d+1})$$

est surjectif ($X(L)$ désigne les points L-rationnels de X).

On rappelle que $\mathrm{S}\Gamma(q)$ est le groupe de Clifford spécial de la forme quadratique q et $\mathrm{Spin}(q)$ le groupe Spin, noyau de $sn : \mathrm{S}\Gamma(q) \longrightarrow F^*$ la norme spinorielle.

Théorème 4.24 *(voir [10], prop. 4.2 et cor. 4.3) On a le diagramme commutatif aux lignes et aux colonnes exactes*

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Spin}(q) \arrow[r] \arrow[d] & D^* \arrow[r, "\mathrm{Nrd}"] \arrow[d] & F^* \arrow[d, equal] \\
1 \arrow[r] & \mathrm{S}\Gamma(q) \arrow[r] \arrow[d, "sn"'] & D^* \times F^* \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & F^* \\
 & F^* \arrow[r, equal] & F^* \arrow[d] & \\
 & & 1 &
\end{tikzcd}$$

où $\omega(d, f) = \mathrm{Nrd}(d)/f^2$.

Ce diagramme est fonctoriel par rapport à l'extension des scalaires, on obtient donc les même suites exactes en remplaçant chaque terme du diagramme par le groupe algébrique dont le terme est l'ensemble des points F-rationnels.

Dans [3], Chernousov et Merkurjev construisent un morphisme

$$\alpha : \mathrm{S}\Gamma(q) \longrightarrow A_0(X_q, \mathcal{K}_1)$$

Dans notre cas (q est une forme d'Albert), $A_0(X_q, \mathcal{K}_1)$ coïncide avec $H^4(X_q, \mathcal{K}_5)$. Ce morphisme vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 4.25 *([3], lem. 3.4 et prop. 3.7) Lorsque E est une extension de F, Le morphisme α commute à l'extension des scalaires* $\mathrm{Ext}_{E/F}$ *et, lorsque $[E : F]$ est fini, à la norme* $\mathrm{N}_{E/F}$

Proposition 4.26 *([3], prop. 3.5) Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}\Gamma(q) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "sn"'] & H^4(X_q, \mathcal{K}_5) \arrow[d, "\mathrm{N}^1_{X_q}"] \\ & F^* \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Pour G un groupe algébrique, on note RG son sous-groupe de R-équivalence (voir [3]).

Théorème 4.27 *([3], prop. 6.2) Le morphisme α induit des isomorphismes (également notés α)*

$$\mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \simeq H^4(X_q, \mathcal{K}_5)$$

et

$$\mathrm{Spin}(q)/R\mathrm{Spin}(q) \simeq \ker \mathrm{N}_{X_q}$$

Proposition 4.28 *(voir [3], théorème 6.1) Le sous-groupe de R-équivalence du groupe $\mathrm{SL}_1(D)$ est $R\mathrm{SL}_1(D) = [\mathrm{SL}_1(D), \mathrm{SL}_1(D)]$.*

Le diagramme commutatif du théorème 4.24 et la proposition précédente induisent donc un morphisme injectif

$$\beta : \mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \longrightarrow K_1 D \oplus K_1 F$$

qui vérifie

Lemme 4.29 *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "sn"'] & K_1 D \oplus K_1 F \arrow[d] \\ & K_1 F \end{tikzcd}$$

(où la flèche verticale est simplement la projection sur le facteur $K_1 F$) est commutatif.

Corollaire 4.30 *Cela fournit les isomorphismes*

$$\ker(sn : \mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \longrightarrow K_1 F) \simeq SK_1 D$$

et

$$\ker(\mathrm{N}^1_{X_q} : H^4(X_q, \mathcal{K}_5) \longrightarrow K_1 F) \simeq SK_1 D$$

Démonstration : Le premier isomorphisme est simplement induit par le morphisme β. C'est bien un isomorphisme par chasse au diagramme sur le diagramme commutatif aux lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
& \ker(sn) \arrow[r] \arrow[d] & SK_1D \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \arrow[r] \arrow[d, "sn"] & K_1D \oplus K_1F \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "p_2"] & 1 \\
& K_1F \arrow[r, equal] & K_1F &
\end{tikzcd}$$

Le second noyau est isomorphe au premier par le morphisme α. □

Définition 4.31 *Pour $i = 0$, 1 ou 2, on définit le mophisme*

$$\Theta : K_iD \oplus K_iF \longrightarrow K_iX_q$$

par

$$\Theta(d, f) = \Psi_3'(d) - \Psi_3(f)$$

Ce morphisme est injectif.

Pour faciliter les raisonnements, on introduit aussi le sous-groupe de $K_1D \oplus K_1F$ suivant

Définition 4.32 *Pour $i = 0$, 1 ou 2, on considère l'application*

$$\begin{array}{lcl} K_iD \oplus K_iF & \longrightarrow & K_iF \\ (d, f) & \longmapsto & \mathrm{Nrd}(d) - 2f \end{array}$$

on définit VK_iD comme le noyau de cette application.

Proposition 4.33 *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] & & K_1D \oplus K_1F \arrow[d, "\Theta"] \\
H^4(X_q, \mathcal{K}_5) \arrow[r, two heads] & K_1X_q^{(4)} \arrow[r, hook] & K_1X_q^{(3)}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration : La proposition 4.23 et l'isomorphisme

$$\alpha : \mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \longrightarrow H^4(X_q, \mathcal{K}_5)$$

(qui commute à la norme $\mathrm{N}_{L/F}$ d'après la proposition 4.25) montrent que le morphisme

$$\sum \mathrm{N}_{L/F} : \bigoplus_{X_q(L)\neq\varnothing} \mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q)_L \longrightarrow \mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q)$$

est surjectif. On peut donc se ramener à vérifier la commutativité du diagramme dans le cas où la forme quadratique est isotrope. C'est ce que nous supposerons pour la fin de la démonstration. Mais dans ce cas, la norme $\mathrm{N}^1_{X_q} : H^4(X_q, \mathcal{K}_5) \longrightarrow K_1F$ est un isomorphisme. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^4(X,\mathcal{K}_5) \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\mathrm{N}^1_{X_q}"'] & K_1X_q^{(4)} \arrow[d, "\pi_*"] \\ & K_1F \end{tikzcd}$$

de la proposition 4.22 permet donc de conclure que π_* induit un isomorphisme de $K_1X_q^{(4)}$ vers K_1F. Son inverse (noté π_*^{-1}) est donné par le morphisme $K_1F \xrightarrow{\cdot\mathcal{Q}} K_{X_q}$, où $\mathcal{Q}$ est la classe d'un point rationnel de X_q. En vertu des propositions 4.22, 4.25, du lemme 4.29 et de la proposition 4.26, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \arrow[rrr, "\beta"] \arrow[dr, "sn"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & & K_1D\oplus K_1F \arrow[dll, "p_2"'] \arrow[dd, "\Theta"] \\ & K_1F & & \\ H^4(X_q,\mathcal{K}_5) \arrow[ur, "\mathrm{N}^1_{X_q}"] \arrow[rr] & & K_1X_q^{(4)} \arrow[ul, "\pi_*"'] \arrow[r, hook] & K_1X_q^{(3)} \end{tikzcd}$$

tous les triangles sont commutatifs, mais pas forcément le quadrilatère de droite. Les normes $\mathrm{N}^1_{X_q}$, sn et le morphisme π_* restreint à $K_1X_q^{(4)}$ sont des isomorphismes. Pour montrer la commutativité du carré extérieur, il suffit de montrer que $\pi_*^{-1}\circ p_2\circ\beta = \Theta\circ\beta$. Mais l'image de β dans $K_1D\oplus K_1F$ est VK_1D par définition du morphisme β, et le morphisme p_2 restreint à VK_1D est un isomorphisme. Calculons son inverse (noté $p_2^{-1} : K_1F \longrightarrow \mathrm{VK}_1D$).

Lemme 4.34 *Si D n'est pas un corps, la composée* $\mathrm{VK}_1D \hookrightarrow K_1D\oplus K_1F \xrightarrow{p_2} K_1F$ *admet une section* $s : K_1F \longrightarrow \mathrm{VK}_1D$.

Démonstration : Si l'algèbre D (de degré 4) n'est pas un corps, elle est semblable à une algèbre Q de degré 2 (de quaternions). On considère alors la composée $t = \mathrm{M}_{Q,D}\circ \mathrm{I}_{F,Q}$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Nrd}_D\circ t &= \mathrm{Nrd}_D\circ \mathrm{M}_{Q,D}\circ \mathrm{I}_{F,Q} \\ &= \mathrm{Nrd}_Q\circ \mathrm{I}_{F,Q} \\ &= \deg(Q)\mathrm{Id}_{K_1F} \\ &= 2\mathrm{Id}_{K_1F} \end{aligned}$$

Le morphisme $s = (t, \mathrm{Id}) : K_1F \longrightarrow K_1D \oplus K_1F$ se factorise donc par VK_1D et est bien la section recherchée. □
Cette section est bien p_2^{-1} (car c'est un isomorphisme).

Pour vérifier l'égalité $\pi_*^{-1} \circ p_2 \circ \beta = \Theta \circ \beta$, il suffit alors de vérifier que $\pi_*^{-1} = \Theta \circ p_2^{-1}$. Soient $[F]$ la classe de F dans K_0F, $[Q]$ la classe de Q dans K_0Q et $[D]$ la classe de $[D]$ dans K_0D. On a alors

$$\begin{aligned}
\Theta \circ p_2^{-1}(k) &= \Psi_3' \circ \mathrm{M}_{Q,D} \circ \mathrm{I}_{F,Q}(k) - \Psi_3(k) \\
&= \Psi_3' \circ \mathrm{M}_{Q,D} \circ \mathrm{I}_{F,Q}(k.[F]) - \Psi_3(k.[F]) \\
&= \Psi_3'(k.\mathrm{M}_{Q,D} \circ \mathrm{I}_{F,Q}([F])) - \Psi_3(k.[F]) \\
&= k.(\Psi_3' \circ \mathrm{M}_{Q,D} \circ \mathrm{I}_{F,Q}([F]) - \Psi_3([F]))
\end{aligned}$$

où le passage de la ligne 2 à la ligne 3 s'effectue grâce aux propriétés de commutation avec le cup-produit de I et M et le passage de la ligne 3 à la ligne 4 grâce au lemme 4.19. Montrons maintenant que $\Psi_3' \circ \mathrm{M}_{Q,D} \circ \mathrm{I}_{F,Q}([F]) - \Psi_3([F])$ est la classe dans K_0X_q d'un point rationnel. Pour cela, comme l'extension des scalaires est injective sur K_0X_q, il suffit de montrer que cette classe s'envoie sur celle d'un point rationnel après extension des scalaires. Or, pour E une extension de F qui rend la quadrique X_q déployée (et donc D déployée), on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}_{E/F}(\Psi_3' \circ \mathrm{M}_{Q,D} \circ \mathrm{I}_{F,Q}([F]) - \Psi_3([F])) \\
&= \Psi_3' \circ \mathrm{M}_{Q_E,D_E} \circ \mathrm{I}_{E,Q_E} \circ \mathrm{Ext}_{E/F}([F]) - \Psi_3 \circ \mathrm{Ext}_{E/F}([F]) \\
&= \Psi_3' \circ \mathrm{M}_{Q_E,D_E} \circ \mathrm{I}_{E,Q_E}([E]) - \Psi_3([E]) \\
&= \Psi_3' \circ 2\mathrm{M}_{E,D_E}([E]) - \Psi_3([E]) \\
&= 2\Psi_3' \circ \mathrm{M}_{E,D_E}([E]) - \Psi_3([E])
\end{aligned}$$

et on a déjà vu que dans le cas déployé, $\Psi_3' \circ \mathrm{M}_{F,D}$ correspondait au cup-produit par $\mathcal{D}$ (démonstration de la proposition 4.17) et Ψ_3 correspondait au cup-produit par $\mathcal{H}^3$. Par ailleurs, $2\mathcal{D} - \mathcal{H}^3 = \mathcal{Q}$ d'après la table de la figure 4.1. On obtient donc bien

$$\begin{aligned}
\Theta \circ p_2^{-1}(k) &= k.\mathcal{Q} \\
&= \pi_*^{-1}(k)
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.33. □

Corollaire 4.35 *La composée*

$$\mathrm{VK}_1D \hookrightarrow K_1D \oplus K_1F \xrightarrow{\Theta} K_1X_q$$

arrive dans $K_1X_q^{(4)}$ *et induit un isomorphisme de* VK_1D *vers* $K_1X_q^{(4)}$.

Démonstration : Le diagramme de la proposition 4.33 induit un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}\Gamma(q)/R\mathrm{Spin}(q) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\alpha"] & VK_1D \arrow[d, hook, "\Theta"] \\
H^4(X_q, \mathcal{K}_5) \arrow[r, two heads] & K_1X_q^{(4)}
\end{tikzcd}$$

sur lequel une chasse au diagramme fournit le résultat. □

Corollaire 4.36 *Le morphisme* $H^4(X_q, \mathcal{K}_5) \longrightarrow K_1 X_q^{(4)}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration : Cela s'obtient dans la chasse au diagramme précédente. □

Corollaire 4.37 *Dans la suite spectrale B.2 pour la quadrique d'Albert, la différentielle* $d_2^{2,-4}$ *est nulle.*

Chapitre 5

Le groupe SK_2D

Dans ce chapitre, on rassemble les résultats obtenus dans les chapitres précédents afin d'obtenir enfin une relation entre le groupe SK_2D et le noyau de cohomologie galoisienne $\ker(H^5(F,\mu_2)\longrightarrow H^5(F(q),\mu_2))$, où $F(q)$ est le corps des fonctions de la quadrique d'Albert.

Proposition 5.1 *1. Dans la suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen B.2 pour X, la différentielle $d_2^{0,-3} : E_2^{0,-3}\longrightarrow E_2^{2,-4}$ est nulle.*

2. $K_2(X)^{(2/3)} \simeq H^2(X,\mathcal{K}_4)$

Démonstration : Le point 2 est une conséquence du 1, puisque le corollaire 4.37 montre que la différentielle $d_2^{2,-4}$ est nulle. Montrons donc 1. Les différentielles sont de 2-torsion, on peut donc localiser en 2. Tout ce qui suit dans cette démonstration est vrai après localisation en 2.

En utilisant la suite spectrale B.3 en poids 3, on obtient la surjection (c'est ici qu'intervient la localisation en 2),

$$H^3_{\acute{e}t}(X,\mathbf{Z}(3)) \twoheadrightarrow H^0(X,\mathcal{K}_3^M)$$

En utilisant la suite spectrale B.4, on obtient la suite exacte

$$0\longrightarrow H^3_{\acute{e}t}(F,\mathbf{Z}(3))\longrightarrow H^3_{\acute{e}t}(X,\mathbf{Z}(3))\longrightarrow H^1_{\acute{e}t}(F,\mathbf{Z}(2))\longrightarrow 0$$

où $H^3_{\acute{e}t}(F,\mathbf{Z}(3)) \simeq K_3^M(F)$, $H^1_{\acute{e}t}(F,\mathbf{Z}(2)) \simeq K_3(F)_{ind}$. De plus, cette suite exacte est scindée par une section s donnée par la multiplication par la classe d'une section hyperplane h. On a ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^3_{\acute{e}t}(F,\mathbf{Z}(3)) \arrow[r] & H^3_{\acute{e}t}(X,\mathbf{Z}(3)) \arrow[r, shift right] \arrow[d, "p"] & H^1_{\acute{e}t}(F,\mathbf{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[l, shift right, "s"'] & 0 \\
& K_3^M(F) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "f"] & H^0(X,\mathcal{K}_3^M) & &
\end{tikzcd}$$

Or p est une localisation, donc $p\circ s = 0$ car h s'annule au point générique. La ligne du haut est exacte. Ainsi, par chasse au diagramme, le morphisme $K_3^M(F)\longrightarrow H^0(X,\mathcal{K}_3^M)$ est surjectif.

On dispose de plus du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_3^M(F) \arrow[r] \arrow[d] & K_3(F) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & K_3(F)_{ind} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{K}_3^M) \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{K}_3) \arrow[r] & H^0(X, (\mathcal{K}_3)_{ind}) &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes. Une chasse au diagramme montre donc que le morphisme $K_3(F) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_3)$ est surjectif. Le morphisme $d_2 \circ g$ est nul car il se factorise en

$$K_3(F) \longrightarrow K_3(X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}_3) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{K}_4).$$

ce qui montre que d_2 est nulle. $\square$

Posons

$$\overline{K_i D} = \mathrm{coker}(\bigoplus_{K d\acute{e}ploie D} K_i D_K \overset{\mathrm{N}_{K/F}}{\longrightarrow} K_i D)$$

Ce groupe est nul pour $i = 0$ ou $i = 1$, et lorsque D est déployée.

Théorème 5.2 *Lorsque F est un corps de caractéristique nulle et qui contient un sous-corps algébriquement clos, on a un morphisme surjectif*

$$SK_2 D \oplus \overline{K_2 D} \twoheadrightarrow \ker(H^5(F, \mu_2) \longrightarrow H^5(F(q), \mu_2))$$

où $F(q)$ est le corps des fonctions de la quadrique d'Albert.

Démonstration : Par la proposition 4.15, les morphismes Ψ_2, Ψ_3, Ψ'_2 et Ψ''_2 induisent une surjection

$$K_2 F^{\oplus 2} \oplus K_2 D^{\oplus 2} \twoheadrightarrow K_2 X^{(2/3)}$$

Mais Ψ_3 arrive dans $K_2 X_q^{(3)}$, on a donc une surjection induite par Ψ_2, Ψ'_2 et Ψ''_2

$$K_2 F \oplus K_2 D^{\oplus 2} \twoheadrightarrow K_2 X_q^{(2/3)}$$

D'après la définition de Ψ'_3 (voir définition 4.16), le morphisme induit par Ψ_2, Ψ'_2 et Ψ'_3 est également surjectif. De plus, la proposition 4.17 montre que ce dernier morphisme se factorise en un morphisme surjectif

$$K_2 F \oplus K_2 D \oplus \overline{K_2 D} \twoheadrightarrow K_2 X_q^{(2/3)}$$

qui est un isomorphisme dans le cas déployé. En effet, dans ce cas, la composante $\overline{K_2 D}$ est nulle, et il ne reste plus que Ψ_2 et Ψ'_2, qui correspondent (à morphisme d'invariance de Morita près) au cup-produit par $\mathcal{H}^2$ et $\mathcal{P}_1$ (d'après le lemme 4.7). L'isomorphisme découle alors du fait que la filtration est engendrée, dans le cas déployé, par les éléments parmi $(\mathcal{I}, \mathcal{H}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{D}, \mathcal{Q})$ qui ont la bonne codimension (voir [11], § 3.2), et $\mathcal{H}^2 = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 - \mathcal{D}$.

Si K est le corps des fonctions de la variété de Severi-Brauer $SB(D)$, le morphisme d'extension des scalaires $K_2F \longrightarrow K_2K$ est injectif, et le noyau de $K_2D \longrightarrow K_2D_K$ est SK_2D. Par chasse au diagramme, on obtient donc un morphisme surjectif

$$SK_2D \oplus \overline{K_2D} \twoheadrightarrow \ker(K_2X_q^{(2/3)} \longrightarrow K_2(X_q)_K^{(2/3)})$$

De plus, par la proposition 5.1, on a

$$\ker(K_2X_q^{(2/3)} \longrightarrow K_2(X_q)_K^{(2/3)}) \simeq \ker(H^2(X, \mathcal{K}_4) \longrightarrow H^2(X_K, \mathcal{K}_4))$$

Le théorème 2.1 permet alors de conclure. □

Annexe A

Algèbre de biquaternions et forme d'Albert

Définition A.1 *On appelle algèbre de biquaternions un produit tensoriel de deux algèbres de quaternions sur le même corps de base.*

Une algèbre de biquaternions est une algèbre centrale simple. Son degré est 4 et son exposant (dans le groupe de Brauer) est 2 ou 1 selon qu'elle est déployée ou pas.

Le symbole D désigne l'algèbre de biquaternions

$$\left(\begin{array}{c} a\ b \\ F \end{array}\right) \otimes_F \left(\begin{array}{c} c\ d \\ F \end{array}\right)$$

Définition A.2 *On appelle forme d'Albert une forme quadratique de dimension* 6 *qui est dans* I^2F *(idéal de l'anneau de Witt engendré par les formes de Pfister de dimension* $2^2 = 4$*).*

Le symbole q désigne la forme quadratique d'Albert

$$< a, b, -ab, -c, -d, cd >$$

dans une base orthogonale, et X_q désigne la quadrique projective associée.

Soit $SB(2, D)$ la variété de Severi-Brauer généralisée (voir [2]) associée à D. Elle paramètre les idéaux à gauche (ou à droite) de D de rang $r = 2\deg(D) = 8$.

Théorème A.3 *Le corps des fonctions de la variété* $SB(2, D)$ *est isomorphe au corps des fonctions de la quadrique d'Albert* X_q*.*

Démonstration : Le théorème 3.18 fournit un isomorphisme entre ces deux variétés, et donc un isomorphisme entre leurs corps des fonctions. □

Proposition A.4 *On a les propriétés suivantes.*

1. *$D \sim C(q)$, où $C(q)$ est l'algèbre de Clifford associée à la forme quadratique $q =< a, b, -ab, -c, -d, cd >$, et l'équivalence celle de Brauer.*
2. *L'algèbre D est déployée si et seulement si q est déployée (hyperbolique).*
3. *L'algèbre D est à division (est un corps gauche) si et seulement si q est anisotrope.*

Démonstration : Le point 1 est un calcul simple de la théorie des algèbres de Clifford. En effet, on a

$$M_2(C(q)) \simeq C(q \perp < 1, -1 >) \simeq C(\ll a, b \gg)\hat{\otimes}_F C(- \ll c, d \gg)$$
$$\simeq \left(\begin{array}{c} a\ b \\ F \end{array} \right) \otimes_F \left(\begin{array}{c} c\ d \\ F \end{array} \right)$$

Le point 2 résulte de l'équivalence entre le fait qu'une forme quadratique d'Albert soit hyperbolique et le fait que son algèbre de Clifford soit neutre dans le groupe de Brauer. Le point 3 résulte de l'équivalence entre le fait que la variété $SB(2, D)$ possède un point rationnel (et donc que D possède un idéal à gauche et ne soit pas un corps) et le fait que X_q (qui lui est isomorphe) possède un point rationnel, et donc que q soit isotrope. □

Proposition A.5 *Si h est une quadrique déployée (hyperbolique), alors X_h est cellulaire.*

Démonstration : Une équation de X_h est $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0$. On considère l'hyperplan $\mathcal{H}$, d'équation $x_n = 0$, et le fermé $F = X \cap \mathcal{H}$. On a alors $X \setminus F \simeq \mathbf{A}^{2(n-1)}$ et $F \simeq Y \times \mathbf{P}^1$, où Y est la quadrique d'équation $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n-1}y_{n-1} = 0$. X_h est donc cellulaire par récurrence. □

Proposition A.6 *Si X est la variété de Severi-Brauer associée à une algèbre centrale simple A (voir [2]), alors*

1. *$A_{F(X)}$ est déployée,*
2. *$K_2(F) \longrightarrow K_2(F(X))$ est injective.*

Démonstration : Pour le point 1, voir [2], et pour le point 2, voir [23], §5. □

Annexe B

Suites spectrales

B.1 Filtration topologique

Pour un schéma X sur un corps F, on peut définir une filtration topologique sur K_0X, induite par la codimension du support des faisceaux (voir [19]).

On note $K_iX^{(j)}$ le j-ème groupe de filtration, et

$$K_iX^{(j/j+1)} = K_iX^{(j)}/K_iX^{(j+1)}$$

Pour un morphisme $f : X \longrightarrow Y$, on a $f^*(K_iY^{(j)}) \subset K_iX^{(j)}$.

Lorsque X et Y sont des schémas de dimension finie et que $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre, on a $f_*(K_iX^{(j)}) \subset K_iY^{(j-\dim(Y)+\dim(X))}$. En particulier, pour une extension finie E du corps F, la norme $\mathrm{N}_{E/F} : K_iX_E \longrightarrow K_iX$ respecte la filtration.

La filtration topologique est compatible au cup-produit :

$$K_iX^{(j)}.K_kX^{(l)} \subset K_{i+k}X^{(j+l)}$$

B.2 Suite spectrale de Brown-Gersten-Quillen

Pour un schéma X lisse de dimension finie sur un corps F, on a la suite spectrale ([19])

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_{-p-q}(F(X)) \Longrightarrow K_{-p-q}(X).$$

Le gradué de la filtration vers lequel converge cette suite spectrale est celui de la filtration topologique. De plus, on a l'isomorphisme canonique

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(X, \mathcal{K}_{-q})$$

Cette suite spectrale est naturellement contravariante par rapport aux morphismes quelconques et covariante par rapport aux morphismes propres. Les différentielles sont des dérivations par rapport au cup-produit

$$H^p(X,\mathcal{K}_{-q}) \times H^r(X,\mathcal{K}_{-s}) \longrightarrow H^{p+r}(X,\mathcal{K}_{-q-s})$$

Proposition B.1 *$E_2^{p,q} = 0$ pour $p > \dim X$, pour $p > -q$ ainsi que pour $p < 0$. Par ailleurs, $E_2^{p,-p} \simeq CH^p(X)$ ($p^{ième}$ groupe de Chow de X).*

B.3 Suite spectrale de coniveau en cohomologie motivique étale

Cette suite spectrale est obtenue en filtrant la cohomologie motivique étale par la codimension du support ([9], p.161). Pour X un schéma lisse de dimension finie sur un corps F, on a la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{p+q}_{x,\acute{e}t}(X,\mathbf{Z}(n)) \Longrightarrow H^{p+q}(X,\mathbf{Z}(n)).$$

Le terme E_1 s'identifie canoniquement à

$$E_1^{p,q} \simeq \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}_{\acute{e}t}(F(x),\mathbf{Z}(n-p))$$

Le terme E_2 vérifie, pour $q = n$

$$E_2^{p,n} \simeq H^p(X,\mathcal{K}_n^M)$$

Proposition B.2 *En particulier ([9], p.161),*

1. *$E_1^{p,q} = 0$ pour p tel que $p \geq q$ et $p > n$, ainsi que pour $p > q$ et $p = n$,*
2. *après localisation en 2, $E_1^{p,q}$ est uniquement l-divisible (l premier à la caractéristique) pour p tel que $p \geq q$ et $p < n$. $E_1^{p,q} = 0$ pour $p = q = n-1$,*
3. *après localisation en 2, $E_1^{p,q} = 0$ pour $q = n+1$,*
4. *$E_1^{p,q} = 0$ pour $p > dimX$ ainsi que pour $p < 0$.*

B.4 Suite spectrale "des poids" en cohomologie motivique

Dans [9], B.Kahn construit une suite spectrale en cohomologie motivique. Pour X un schéma lisse équidimensionnel, géométriquement cellulaire sur un corps F, elle est donnée, pour tout poids $n \geq 0$, par

$$E_2^{p,q}(X,n) = H^{p-q}_{\acute{e}t}(F, CH^q(X_s) \otimes \mathbf{Z}(n-q)) \Longrightarrow H^{p+q}.$$

où X_s désigne l'extension de X à la clôture séparable de F. On dispose de plus de morphismes $H^{p+q} \longrightarrow H_{ét}^{p+q}(X, \mathbf{Z}(n))$ bijectifs pour $p+q \leq 2n$ et injectifs pour $p+q = 2n+1$.

D'après [9], 5.1, on a l'identification

$$H_{ét}^{p-q}(F, CH^q(X_s) \otimes \mathbf{Z}(n-q)) = H_{ét}^{p-q}(E_q, \mathbf{Z}(n-q))$$

où E_q est une algèbre étale associée à $CH^q(X_s)$

Lorsque le schéma X est cellulaire, la suite spectrale dégénère.

Annexe C

Cohomologie Motivique

Pour une définition de la cohomologie motivique, voir [22].

Conjecture C.1 (Bloch-Kato) *Pour l entier premier à la caractéristique de F, on a un isomorphisme naturel*

$$K_n^M(F)/l \simeq H^n_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Z}/l(n))$$

donné par l'homomorphisme de résidu normique ([14]) Le cas $l = 2$ avait été conjecturé par Milnor ([16]) et est donc connu sous le nom de Conjecture de Milnor.

Théorème C.2 *La conjecture précédente est vraie dans les cas suivants*

1. $n = 0, 1$ *(Hilbert 90)*
2. $n = 2$ *([14])*
3. $l = 2$ *([25])*

Elle est également vraie pour quelques autres cas particuliers.

Cette conjecture implique notamment les résultats suivants pour la cohomologie motivique.

Corollaire C.3 ("Hilbert 90 motivique") *Sous la conjecture C.1, le groupe $H^{n+1}_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Z}(n))$ n'a pas de l-torsion.*

Démonstration : On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
H^n_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Z}(n)) \arrow[r, "p"] & H^n_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Z}/l(n)) \arrow[r, "\delta"] & H^{n+1}_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Z}(n)) \arrow[r, "l\times"] & H^{n+1}_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Z}(n)) \\
K_n^M(F) \arrow[u, "f"] \arrow[r, two heads] & K_n^M(F)/l \arrow[u, "\wr"'] & &
\end{tikzcd}$$

où la ligne du haut est une suite exacte longue en cohomologie et l'isomorphisme vertical est donné par la conjecture de Bloch-Kato.Le morphisme f est la composée $K_n^M(F) \longrightarrow H^n(F, \mathbf{Z}(n)) \longrightarrow H^n_{ét}(F, \mathbf{Z}(n))$. Le morphisme p est donc surjectif, et δ est nul. La multiplication par l est donc injective. □

Corollaire C.4 *$H^{n+1}_{ét}(F, \mathbf{Z}(n))$ n'a pas de 2-torsion.*

Conjecture C.5 (Beilinson-Soulé) *Pour X un schéma lisse de dimension finie sur F,*

$$H^i(X, \mathbf{Z}(n)) = 0 \ \forall n, \ \forall i < 0$$

et

$$H^0(X, \mathbf{Z}(n)) = 0 \ \forall n > 0.$$

Définition C.6 *La cohomologie motivique étale $H^i_{ét}(X, \mathbf{Z}(n))$ est définie comme la cohomologie du pull-back au grand site étale du complexe de faisceaux $\mathbf{Z}(n)$.*

Proposition C.7 *La conjecture de Beilinson-Soulé est vraie pour la cohomologie motivique étale ou Zariski en poids $n = 0$ et $n = 1$.*

Démonstration : $\mathbf{Z}(0)$ est le faisceau $\mathbf{Z}$ placé en degré 0. $\mathbf{Z}(1)$ est le faisceau $\mathbf{G}_m$ placé en degré 1. □

Théorème C.8 *(voir [25]) La cohomologie motivique étale des corps à coefficients dans $\mathbf{Z}/l$ s'identifie à la cohomologie étale classique :*

$$H^i_{ét}(F, \mathbf{Z}/l(n)) \simeq H^i_{ét}(F, \mu_l^{\otimes n})$$

pour l premier à la caractéristique de F.

Corollaire C.9 *$H^i_{ét}(F, \mathbf{Z}(n))$ est uniquement l-divisible pour tout $i < 0$ et l premier à la caractéristique de F.*

Démonstration : Il suffit de considérer la longue suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}(n) \longrightarrow \mathbf{Z}(n) \longrightarrow \mathbf{Z}/l(n) \longrightarrow 0$$

et de remarquer que $H^i_{ét}(F, \mu_l^{\otimes n}) = 0$ pour $i < 0$. □

Corollaire C.10 *$H^i_{ét}(F, \mathbf{Z}(n))$ est de torsion pour $i > n$*

Démonstration : C'est l'hypercohomologie d'un complexe de modules galoisiens, or la cohomologie galoisienne est de torsion en degré strictement positif, et $\mathbf{Z}(n)$ est acyclique en degré strictement supérieur à n. □

Proposition C.11 *La 2-torsion de $H^{n+1}_{ét}(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))$ est $H^{n+1}_{ét}(F, \mathbf{Z}/2(n))$.*

Démonstration : On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^n_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n)) \arrow[r, two heads, "\times 2"] & H^n_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2/l(n)) \arrow[r, "0"] & H^{n+1}_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Z}/2(n)) \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & H^{n+1}_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2(n)) \arrow[d, hook] \\
K^M_n(F) \otimes \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2 \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, two heads, "\times 2"] & K^M_n(F) \otimes \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2 \arrow[u, "\wr"] & & H^{n+1}_{\acute{e}t}(F, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(n))
\end{tikzcd}$$

dans lequel la première ligne est un morceau de la longue suite exacte en cohomologie associèe à la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2 \longrightarrow 0$$

les isomorphismes verticaux proviennent de C.2, l'inclusion verticale provient du fait que la flêche naturelle admet une section et les autres propriétés des morphismes sont impliquées par ces premières propriétés. Ceci fournit le résultat, car la flèche qui suit dans la longue suite exacte de cohomologie est justement la multiplication par 2. □

Bibliographie

[1] A. Blanchard, *Les corps non commutatifs*, P.U.F., 1972.

[2] A. Blanchet, *Function Fields of Generalized Brauer-Severi Varieties*, Communications in Algebra **1** (1991), no. 19, 97–118.

[3] V. Chernousov et A. S. Merkurjev, *R-equivalence in Spinor Groups*, Jour. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 509–534.

[4] J. Dieudonné, *Les déterminants sur un corps non commutatif*, Bulletin de la Société Mathématique de France (1943), no. 71, 27–45.

[5] P. K. Draxl, *Skew fields*, London Mathematical Society, no. 81, Cambridge Univesity Press, 1983.

[6] W. Fulton et J. Harris, *Representation theory*, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics.

[7] W. Fulton et S. Lang, *Riemann-roch algebra*, Grund. math. Wiss., no. 277, Springer-Verlag, 1985.

[8] H. Gillet, *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory*, Adv. in Math. **40** (1981), no. 3, 203–289.

[9] B. Kahn, *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (1999), no. 67, 149–174.

[10] B. Kahn, M. Rost, et R. Sujatha, *Unramified cohomology of quadrics, I*, American Journal of Mathematics (1998), no. 120, 841–891.

[11] N. A. Karpenko, *Algebro-geometric invariants of quadratic forms*, Leningrad math. j. **2** (1991), no. 1, 119–138.

[12] A. S. Merkurjev, *K-theory of simple algebras*, K-theory and Algebraic Geometry : connections with quadratic forms and division algebras (W. Jacob et A. Rosenberg, eds.), vol. 1, Proc. Symp. Pure Math., no. 58, 1995, pp. 65–83.

[13] A. S. Merkurjev et I. A. Panin, *K-theory of Algebraic Tori and Toric Varieties*, K-theory **12** (1997), no. 2, 101–143.

[14] A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Isvestia Akademii Nauk (1982), no. 46, 1011–1046, Traduction Anglaise dans Math U.S.S.R. Isv., 21, 1983, 307-340.

[15] ———, *On the group K_3 of a field*, Isvestia Akademii Nauk (1990), no. 3, 522–545, Traduction Anglaise dans Math U.S.S.R. Isv., 36, 1991, 541-565.

[16] J. Milnor, *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Inventiones Math. (1970), no. 79, 315–344.

[17] I. A. Panin, *On the Algebraic K-theory of Twisted Flag Varieties*, K-theory **8** (1994), no. 6, 541–585.

[18] V. P. Platonov, *The Tannaka-Artin problem and reduced K-theory*, Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R. (1976), no. 40.

[19] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory : I*, Algebraic K-theory, Lecture Notes in Math., no. 341, Springer-Verlag, 1973, pp. 83–147.

[20] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Publications de l'institut de mathématiques de Nancago, Hermann, 1962.

[21] ———, *Cohomologie galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics, no. 5, Springer-Verlag, 1965.

[22] A. Suslin et V. Voevodsky, *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 117–189.

[23] A. A. Suslin, *Torsion in K_2 of Fields*, K-Theory (1987), no. 1, 5–29.

[24] R. G. Swan, *K-theory of quadric hypersurfaces*, Annals of Mathematics (1985), no. 122, 113–153.

[25] V. Voevodsky, *The Milnor conjecture*, Prépublication, 1996.

[26] S. Wang, *On the commutator group of a simple algebra*, Amer. J. Math. (1949), 323–334.