

**Thèse de Doctorat
de
l'Université Paris 6**

**Bouthaina Belhaj Dahmane
27/09/2001**

Jacobiennes à multiplication complexes

Remerciements

Je voudrais tout d'abord témoigner ma profonde reconnaissance à Yves André, qui a dirigé cette thèse, guidé mes premiers pas dans la recherche. Je lui présente toute ma gratitude et mes sincères remerciements.

Mes remerciements à Michel Waldschmidt, pour ces encouragements et pour m'avoir accelli dans l'équipe de théorie de nombre. Qu'il me soit permis de lui exprimer ma reconnaissance pour l'honneur qu'il me fait en faisant partie de jury.

Je remercie Bas Edixhoven et Juergen Wolfart pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, pour leurs remarques enrichissantes et pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail. Ils me font un grand honneur de participer au jury.

Je voudrais remercier aussi Marc Hindry pour les conversations utiles et pour avoir accepté de participer au jury.

Je voudrais aussi remercier mes collègues (ex et nouveaux) de bureau 7C6 pour leur soutien, leur aide et surtout pour l'ambiance agréable qu'ils ont fait reigner dans le bureau.

Il me tient également à coeur de remercier mes parents et mon mari pour leurs soutien inestimable et leur aide pendant toutes ces années de thèse. Je leur en suis très reconnaissante.

À mon Ziyad

Table des matières

0. Introduction

| | |
|---|---|
| 0.1 Motivations | 3 |
| 0.2 Rappel des résultats antérieurs | 4 |
| 0.3 Résultats principaux | 5 |
| 0.2 Contenu de la thèse | 6 |

1. La famille de courbes de "type hypergéométrique"

| | |
|--|----|
| 1.1 Rappels sur les fonctions hypergéométriques | 9 |
| 1.2 La situation géométrique | 11 |
| 1.3 Décomposition de Wolfart | 13 |
| 1.4 La famille des variétés abéliennes $J_{N,\text{new}}(\lambda)$ | 16 |
| 1.5 Réduction du problème | 19 |

2. Groupes de Mumford-Tate et variétés de Shimura attachés à $C_N(\lambda)$

| | |
|---|----|
| 2.1 Groupe de Mumford-Tate d'une structure de Hodge | 21 |
| 2.2 Groupe de Mumford-Tate d'une variété abélienne | 22 |
| 2.3 Variations de structure de Hodge | 23 |
| 2.4 Variétés de Shimura | 25 |
| 2.5 Modèles canoniques | 26 |
| 2.6 Variétés de Shimura et espaces de Modules | 27 |
| 2.7 Sous-variétés de type de Hodge | 28 |
| 2.8 Les sous-variétés modulaires associées à $J_N(\lambda)$ | 29 |

3. Application de la théorie de multiplication complexe

| | |
|---|----|
| 3.1 Courbes elliptiques à multiplication complexe | 34 |
| 3.2 Variétés abéliennes à multiplication complexe | 36 |
| 3.3 Relations entre deux corps CM | 43 |

4. Finitude des points CM

| | |
|---|----|
| 4.1 Application de l'inégalité de Liouville | 48 |
| 4.2 Construction d'un τ "commode" | 50 |
| 4.3 Réduction de τ | 53 |
| 4.4 Conclusion de la preuve | 55 |

Appendice 1: Réseaux et minima successifs

Appendice 2: Lemme de Minkovski pour les classes d'idéaux d'un ordre quelconque ...

5. Les périodes de la Jacobienne $J_{10}(\lambda)$

| | |
|--|----|
| 5.1 Périodes aux points CM et valeurs de la fonction Gamma | 69 |
| 5.2 La jacobienne de $C_5(\lambda)$ et ses périodes | 72 |
| 5.3 Les relations entre les périodes de $J_{10}(\lambda)$ | 81 |

| | |
|----------------------------|----|
| Bibliographie | 87 |
|----------------------------|----|

0. Introduction

0.1 Motivations

Nous étudions dans cette thèse un cas particulier d'une conjecture sur la distribution des points CM des sous-variétés de variétés de modules de variétés abéliennes. Il s'agit d'une question motivée par une conjecture d'André et Oort concernant la géométrie des variétés de Shimura.

Les variétés de Shimura usuelles sont les variétés qui paramétrisent les variétés abéliennes polarisées munies d'endomorphismes, ou plus généralement de cycles de Hodge. En prescrivant davantage de cycles de Hodge, on obtient des sous-variétés remarquables de la variété de Shimura considérée, appelées sous-variétés de type de Hodge. Les sous-variétés de type de Hodge de dimension 0 sont appelées points spéciaux. Ces points spéciaux sont denses dans toute sous-variété de type de Hodge.

La conjecture en question caractérise précisément les sous-variétés de type de Hodge par la Zariski-densité des points spéciaux qu'elles contiennent.

Dans le cas de \mathcal{A}_g l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g , Les points spéciaux sont appelés des points CM. La conjecture en question prédit précisément dans ce cas

0.1.1 Conjecture *Soit S une sous-variété de $\mathcal{A}_g \otimes \mathbb{C}$ l'espace de modules de variétés abéliennes polarisées sur le corps de nombres complexes. Si S contient un ensemble de points CM dense alors S est une sous-variété de type de Hodge.*

Dans [A89] pp 214-216 André a proposé de caractériser les courbes modulaires dans \mathcal{A}_g par la propriété qu'elles contiennent une infinité de points CM.

Plus tard, mais indépendamment, Oort [O97] a conjecturé que les sous-variétés de type de Hodge de \mathcal{A}_g sont caractérisés par la Zariski-densité des points CM.

Dans [A89] pp 214-216, André a remarqué l'analogie de cette conjecture avec le théorème de Raynaud.

0.1.2 Théorème [R83] *Soit X une variété abélienne complexe. Soit S une sous-variété algébrique qui contient un ensemble Zariski denses de points de torsion. Alors S est le translaté d'une sous-variété abélienne par un point de torsion.*

Dans ce contexte, l'analogie de la variété abélienne (resp. des points de torsion, des translatés de sous-variétés abéliennes par un point de torsion) est la variété modulaire \mathcal{A}_g (resp. les points CM, les sous-variétés de type de Hodge).

Ce travail est motivé aussi par la conjecture de Coleman ([C87] conjecture 6):

0.1.3 Conjecture *Soit $g \geq 4$. Alors il existe uniquement un nombre fini de courbes algébriques C de genre g tel que $\text{Jac}(C)$ est de type CM.*

Pour $g = 4$ ou 6 , les exemples "hypergéométriques" de de Jong et Noot montrent qu'il n'en est rien. Pour $g = 5$ et $g \geq 7$, la conjecture reste toujours ouverte.

0.2 Rappel des résultats antérieurs

0.2.1 Moonen s'est intéressé à la conjecture dans [Mo95] IX. Il a caractérisé les sous-variétés de Hodge en termes de linéarité formelle. Il a donné une variante de la conjecture, ce qui permet de prouver la conjecture pour une sous-variété S qui vérifie la propriété suivante. La variété S contient un ensemble Zariski dense Σ de points spéciaux tel qu'il existe un nombre premier p tel que les variétés correspondantes à tous les s dans Σ admettent une réduction ordinaire dont elles sont le relèvement canonique.

0.2.2 Dans [E98], Edixhoven a démontré la conjecture pour le produit de deux courbes modulaires sous l'hypothèse de Riemann généralisée pour un corps quadratique.

Il montre en premier lieu, que les deux corps CM associés au couple de points CM (j_1, j_2) coïncident pour une infinité des points CM. C'est un résultat dû essentiellement à l'action de Galois sur les points CM et au théorème de Siegel sur la croissance du nombre de classes d'idéaux.

Puis, il montre que les sous-variétés en question sont incluses dans leurs images par un opérateur de Hecke $T_p \times T_p$ pour p assez grand. L'hypothèse de Riemann généralisée permet d'affirmer l'existence d'un tel p .

André [A98] a démontré le même résultat sans l'hypothèse de Riemann généralisée.

0.2.3 Théorème [A98] *Soit S une courbe algébrique irréductible dans \mathbb{C}^2 , qui ne soit ni une droite horizontale, ni une droite verticale. Alors S est une courbe modulaire si et seulement si S contient une infinité de points (j, j') tels que j et j' soient des invariants modulaires singuliers.*

Pour la démonstration, on suppose l'existence d'une suite infinie (j_n, j'_n) de points complexes de S tels que j_n (resp. j'_n) soit l'invariant modulaire d'une courbe elliptique E_n (resp. E'_n) à multiplication complexe

Dans la première partie, André montre l'égalité entre les deux corps CM associés au couple (j_n, j'_n) . Sa démonstration est différente de celle d'Edixhoven mais elle repose sur les mêmes arguments.

Dans une deuxième partie, André montre que la suite de points (j_n, j'_n) se situe sur une branche unique de \overline{S} passant par (∞, ∞) . Cette affirmation repose essentiellement sur un résultat d'approximation diophantienne de D. Masser [Ma75] I-1-1.

0.2.4 Dans [Ya99] chp7, Yafaev a démontré la conjecture pour le produit de deux courbes de Shimura associées à une algèbre de quaternions indéfinie sur \mathbb{Q} sous l'hypothèse de Riemann généralisée.

Edixhoven [E99] a prouvé la conjecture, pour des surfaces modulaires de Hilbert, sous l'hypothèse de Riemann généralisée. Il a utilisé les mêmes arguments que dans [E98]. Avec en plus des techniques plus avancées comme le théorème de partie fixe sur la variation de structure de Hodge.

Yafaev [Ya00], a démontré qu'une courbe dans une variété de Shimura contenant un sous-ensemble infini de points spéciaux dans une orbite de Hecke est de type de Hodge. Ce dernier résultat a été généralisé par Edixhoven et Yafaev [EYa01], en remplaçant l'orbite de Hecke par les classes d'isomorphismes de \mathbb{Q} -structure de Hodge.

0.3 Résultats principaux

0.3.1 Nous nous intéressons dans ce travail au cas des courbes de type hypergéométrique. Oort est le premier qui a proposé d'étudier le cas de ce type de courbes [A97] 2.2.

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et N un entier > 1 non divisible par 3.

Soit $C_N(\lambda)$ la complétion projective lisse de la courbe affine d'équation

$$C_N(\lambda) : y^N = x(x-1)(x-\lambda)$$

Puisque $3 \nmid N$, $C_N(\lambda)$ est une courbe de genre $N-1$. L'image de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ dans \mathcal{A}_{N-1} , l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées, correspond à une famille de jacobiniennes $J_N(\lambda)$; c'est une courbe irréductible que nous notons S_N .

Dans ce cas, la conjecture 0.1.1 se traduit de la façon suivante :

0.3.2 Conjecture *Soit N un entier > 1 non divisible par 3. La courbe S_N est modulaire si et seulement si l'image dans $S_N(\mathbb{C})$ des points $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ pour lesquels $J_N(\lambda)$ est une variété abélienne de type CM, est infini.*

Il est déjà connu [Mu69] que si une variété algébrique S de \mathcal{A}_g est modulaire alors l'ensemble de ses points CM est partout dense dans $S(\mathbb{C})$ munide sa topologie archimédienne. Donc, il est question de la réciproque.

0.3.3 Il est clair que S_2 est modulaire. En effet, l'application correspondante de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ dans \mathbb{A}^1 est donnée par $\lambda \rightarrow j = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$. Donc S_2 est la droite des invariants modulaires.

La jacobienne $J_4(\lambda)$ est isogène au cube de la courbe elliptique $J_2(\lambda)$. Donc S_4 est une sous-variété modulaire de \mathcal{A}_3 paramétrant des variétés abéliennes munies d'une certaine isogénie vers le cube d'une courbe elliptique.

De Jong et Noot [dJN91] ont étudié le cas $N = 5$ (resp. $N = 7$). On obtient une famille de jacobiniennes avec multiplication complexe par $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ (resp. $\mathbb{Q}(\zeta_7)$). La variété de Shimura qui paramétrise $J_5(\lambda)$ (resp. $J_7(\lambda)$) est de dimension 1. Donc S_5 (resp. S_7) est une partie ouverte d'une sous-variété de type de Hodge .

Les deux auteurs, dans le même article [prop 5.7] suggèrent que S_N n'est modulaire que pour $N < 8$.

Dans ce cas, la conjecture 0.1.1 revient à démontrer que pour $N \geq 8$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$ pour lesquels $J_N(\lambda)$ est de type CM, est fini.

Dans ce travail, nous commençons par démontrer le résultat suivant:

0.3.4 Théorème *Soit N un entier, $N \geq 8$ non divisible par 3. Alors:*

$$S_N \text{ est non modulaire.}$$

Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et N un entier ≥ 4 non divisible par 3. Soit $C_{2N}(\lambda)$ la complétion projective de la courbe affine

$$C_{2N}(\lambda) : y^{2N} = x(x-1)(x-\lambda)$$

Soit $J_{2N}(\lambda)$ la jacobienne de $C_{2N}(\lambda)$. On procède à une décomposition de la jacobienne $J_{2N}(\lambda)$ du à Wolfart:

$$J_{2N}(\lambda) \sim J_{2N,\text{new}}(\lambda) \times \prod_{D|2N} J_D(\lambda)$$

où $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est une variété abélienne de dimension $\Phi(2N)$, dite la partie nouvelle de $J_{2N}(\lambda)$ et où $J_D(\lambda)$ est la jacobienne de la complétion projective de la courbe

$$C_D(\lambda) : y^D = x(x-1)(x-\lambda).$$

On modifie la décomposition précédente par un revêtement S de \mathbb{P}^1 pour obtenir une variété abélienne $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ principalement polarisée.

Le produit de $J_{2N,\text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$ est à isogenie près un facteur de $J_{2N}(\lambda)$.

On s'intéresse aux paramètres λ tel que $J_{2N}(\lambda)$ est de type CM. Alors, il en est de même de $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ (et de $J_2(\lambda)$).

Considérons les points λ CM vérifiant les propriétés suivantes:

H₁) La variété abélienne $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est à multiplication complexe par un ordre $\mathcal{O}_{N,\text{new}}(\lambda)$ de la forme $\mathbb{Z}[\zeta] \otimes \mathcal{O}_2(\lambda)$, où $\mathcal{O}_2(\lambda)$ est l'ordre de multiplication complexe de $J_2(\lambda)$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{2N}}$.

H₂) La variété abélienne $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est simple.

Le résultat principal de ce travail est le suivant:

0.3.5 Théorème *Soit N un entier ≥ 4 non divisible par 3. Alors l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tels que $J_{2N}(\lambda)$ est à multiplication complexe et tels que **H₁** et **H₂** soient satisfaites, est fini.*

Les théorèmes 0.3.4 et 0.3.5 impliquent le théorème 0.3.6:

0.3.6 Théorème : *Soit N un entier ≥ 4 non divisible par 3. Alors S_{2N} n'est pas modulaire si et seulement si l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tels que $J_{2N}(\lambda)$ est à multiplication complexe et tels que \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 sont satisfaites, est fini.*

0.4 Contenu de la thèse

Pour la démonstration de théorème 0.3.4, on commence par déterminer les valeurs de N pour lesquelles la famille $J_{N,\text{new}}(\lambda)$ n'est pas modulaire. On utilise un calcul direct de la monodromie des périodes d'intégrales abéliennes attachées à cette famille.

Pour les autres N , on calcule la dimension d'une certaine variété de Shimura attachée à la famille $J_{N,\text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$. On utilise la théorie de Hodge et les groupes de Mumford-Tate. On démontre plus précisément que le groupe qui définit la variété de Shimura associée à $J_{N,\text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$ coïncide avec le groupe de Mumford-Tate de $J_{N,\text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$.

La démonstration du théorème 0.3.6 sur la finitude des λ pour lesquelles la jacobienne $J_{2N}(\lambda)$ est à multiplication complexe repose sur le fait que les deux familles $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ et $J_2(\lambda)$ ont un comportement totalement différent lorsque λ tend vers l'une des singularités $0, 1, \infty$: la famille $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ y a potentiellement bonne réduction tandis que $J_2(\lambda)$ y possède des pointes (cusps).

La variété de Shimura associée à $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est compacte.

L'application de l'inégalité de Liouville aux relevés dans des domaines fondamentaux attachés à l'uniformisation des variétés de Shimura associées aux deux familles $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ et $J_2(\lambda)$ aboutit à une contradiction; s'il existait une infinité de points λ_n CM.

- D'un coté la considération de la partie elliptique et l'hypothèse \mathbf{H}_1 implique que pour les λ CM, on a

$$|\lambda| \simeq \exp D$$

ou D est le discriminant de $\text{End} J_{2N,\text{new}}(\lambda)$. On utilise essentiellement un développement de Puiseux.

- De l'autre coté, le problème revient à majorer la hauteur logarithmique d'un point τ_n d'un domaine fondamental attaché à l'uniformisation de variété de Shimura associée à $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ par la norme d'un idéal de l'ordre de multiplication complexe. Bien que le point τ_n appartient au domaine fondamental en question, on en sait rien à priori sur ces conjuguées. D'où l'idée de remplacer provisoirement τ_n par un point $\tau \in \text{GL}_{2g}(\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}})$ commode dont on peut contrôler les conjuguées.

Ci-dessous le plan de ce travail :

Dans le chapitre 1, on fait tout d'abord quelques rappels sur les fonctions hypergéométriques, notamment sur leurs représentations intégrales comme quotients de périodes. Ensuite, on établit des résultats sur les courbes de "type hypergéométrique" $C_N(\lambda)$ et l'action de μ_N sur $H^0(C_N(\lambda), \Omega^1)$ et $H_{DR}^1(C_N(\lambda))$. On explique alors comment obtenir la

décomposition de la jacobienne $J_N(\lambda)$ de $C_N(\lambda)$ donnée par Wolfart. Ces résultats nous seront utiles pour réduire le problème.

Dans le chapitre 2, on fait des rappels sur les structures de Hodge, les variations de structures de Hodge sur les variétés analytiques complexes lisses et les variétés de Shimura. Après, on démontre le théorème 0.3.4. La démonstration repose essentiellement sur le calcul de groupe de Mumford-Tate et la détermination de la variété de Shimura associée à $J_{N,\text{new}}(\lambda)$.

Le chapitre 3 est une application de la théorie de la multiplication complexe. On démontre pour presque tout λ CM, que le compositum du corps cyclotomique et du corps CM associé à $J_2(\lambda)$ coïncide avec le corps CM des isogénies de $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ tel que l'hypothèse **H₂** soit satisfaite.

La première étape de la démonstration repose sur l'action d'un groupe de Galois sur un autre par conjugaison. Cette action se fait par -1 par la théorie de multiplication elliptique. D'autre part, par la théorie de multiplication complexe de $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$, elle sera triviale. Ensuite, on démontre par un argument géométrique que le degré d'extension de corps de module sur $\mathbb{Q}(\lambda)$ est borné indépendamment de λ . On conclut la démonstration par un résultat de Chowla sur la croissance de nombre de classe.

Dans le chapitre 4, on montre la finitude des points CM vérifiant les hypothèses **H₁** et **H₂**. Ces hypothèses permettent des simplifications pour des raisons techniques, et sont probablement superflues. Nous supposons l'existence d'une infinité de points λ_n CM. Par conjugaison, on peut supposer que λ_n tend vers 0. Les considérations sur les préimages dans un domaine fondamental attaché à l'uniformisation des variétés de Shimura associées à la famille $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ contredit l'inégalité de Liouville.

L'appendice 1, chapitre 4 est un rappel des résultats sur les réseaux et les minima successifs utilisés pour la démonstration du résultat principal.

Dans l'appendice 2 du chapitre 4, on démontre le lemme de Minkovski pour un ordre quelconque.

Dans le chapitre 5, on s'intéresse au cas $N=10$. Ce cas est très particulier; c'est le seul cas où la variété de Shimura associée à $J_{10,\text{new}}(\lambda)$ est de dimension 0 (N non divisible par 3). On calcule explicitement les périodes en termes de facteurs hypergéométriques. On détermine leurs valeurs modulo \mathbb{Q}^* en termes de fonctions gamma dans des cas particuliers de multiplication complexe et les relations monomiales entre elles.

Chapitre 1

La famille de courbes de type hypergéométrique

Dans ce chapitre, on commence par des rappels sur les courbes de “type hypergéométrique”. Ensuite, on explicite une décomposition à isogénie près de la jacobienne d’une courbe de “type hypergéométrique”, due essentiellement à Wolfart. On s’intéresse particulièrement à la famille de la “partie nouvelle” qu’on note T_λ et à son algèbre d’endomorphismes. On utilise ces résultats pour effectuer une réduction de notre problème au §1.5.

1.1. Rappels sur les fonctions hypergéométriques

1.1.1 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $c \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

On définit la fonction hypergéométrique de Gauss par :

$$(1.1.2) \quad F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

(le symbole de Pochhammer $(x)_n$ est défini par $(x)_0 = 1$ et $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1)$). Elle satisfait à l’équation différentielle :

$$(1.1.3) \quad z(z-1)F'' + ((a+b+1)z-c)F' + abF = 0$$

Cette équation différentielle ordinaire du second ordre a pour points singuliers $0, 1$ et ∞ . En dehors de ces points, (1.1.3) admet deux solutions locales F_1 et F_2 linéairement indépendantes sur \mathbb{C} .

Si on suppose que $c, c-a-b$ et $a-b \notin \mathbb{Z}$, pour éviter les solutions logarithmiques, alors on peut prendre comme système fondamental de solutions:

- Au voisinage de 0 : $\{F(a, b, c, z), z^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c, z)\}$
- Au voisinage de 1 : $\{F(a, b, a+b+1-c, 1-z), (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c+1-a-b, 1-z)\}$
- Au voisinage de ∞ : $\{z^{-a}F(a, a+1-c, a+1-b, \frac{1}{z}), z^{-b}F(b+1-c, b, b+1-a, \frac{1}{z})\}$.

Si $c > b > 0$, la fonction hypergéométrique admet la représentation intégrale d'Euler

$$F(a, b, c, z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a} dx$$

où B désigne la fonction Béta

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Il est bien connu depuis déjà la fin du 19^{ème} siècle que deux solutions indépendantes de (1.1.3) sont données par

$$\int_0^1 \omega \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \omega$$

où

$$\omega = x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a} dx$$

1.1.4 Soient $z_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, et (F_1, F_2) la base ci-dessus de l'espace des solutions de (1.1.3).

Soit $\beta \in \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}, z_0)$. Le prolongement analytique de F_1 et F_2 suivant β donne \tilde{F}_1 et \tilde{F}_2 qui sont également deux solutions. Il existe alors une matrice carrée $M_{\beta} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ telle que :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = M_{\beta} \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix}$$

L'application:

$$\rho : \begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}) & \longrightarrow & \text{GL}(2, \mathbb{C}) \\ \beta & \longmapsto & M_{\beta} \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes, appelé **représentation de monodromie**. Son image dans $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ est le **groupe de monodromie**. Pour décrire la monodromie, on utilise les triangles de Schwarz.

Soit z_0 un point dans le demi-plan supérieur $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$, et soient F_1 et F_2 deux solutions indépendantes de (1.1.3) au voisinage de z_0 .

Le quotient $D(z) = \frac{F_1}{F_2}$ est appelé fonction triangulaire et on a le théorème suivant:

Théorème 1.1.5 (Schwarz) La fonction $D(z) = \frac{F_1}{F_2}$ envoie \mathcal{H} sur un triangle curviligne. Les sommets correspondent aux points $D(0), D(1), D(\infty)$ et les angles correspondants sont respectivement $|(1-c)|\pi, |(c-a-b)|\pi, |(a-b)|\pi$.

Pour la démonstration nous renvoyons le lecteur à [Y97 §6] et [Ca61] pour plus de détails.

1.2. La situation géométrique

Soient $N \geq 2$ et $1 \leq A, B, C < N$ des entiers tels que $\text{pgcd}(N, A, B, C) = 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

On considère la courbe projective lisse $C_N(\lambda)$ associée à l'équation affine:

$$y^N = x^A(x-1)^B(x-\lambda)^C$$

On note $d_0 = \text{pgcd}(N, A)$, $d_1 = \text{pgcd}(N, B)$, $d_\lambda = \text{pgcd}(N, C)$, $d_\infty = \text{pgcd}(N, A+B+C)$. La formule de Riemann-Hurwitz donne le genre g de $C_N(\lambda)$:

$$2g - 2 = -2N + \sum d_i \left[\frac{N}{d_i} - 1 \right] \quad \text{donc} \quad g = N + 1 - \frac{\sum d_i}{2}.$$

Soit le revêtement $C_N(\lambda) \rightarrow \mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ à N feuillets défini par $(x, y) \mapsto x$, ramifié en $0, 1, \lambda$ et ∞ (avec $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$, $\lambda \neq 0, 1, \infty$)

Soit χ l'automorphisme canonique qui permute ces feuillets, donné par :

$$(x, y) \mapsto (x, \zeta_N^{-1}y) \quad \zeta_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$$

L'espace des différentielles de première espèce de $C_{N,\lambda}$ se décompose en somme directe d'espaces propres V_n par l'action de χ^* ;

$$H^0(C_N(\lambda), \Omega^1) = \bigoplus_{n=0}^{N-1} V_n$$

avec $V_n = \{\omega \in H^0(C_{N,\lambda}, \Omega^1) \mid \chi^* \omega = \zeta_N^n \omega\}$.

Dans la suite on choisit les formes différentielles de la forme:

$$\omega(\alpha, \beta, \nu, n) = \frac{x^\alpha(x-1)^\beta(x-\lambda)^\nu}{y^n} dx \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad \text{et} \quad \alpha, \beta, \nu \in \mathbb{Z}$$

Lemme 1.2.1 $\omega \in H^0(C_N(\lambda), \Omega^1)$ si et seulement si

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} \alpha &\geq \frac{nA}{N} + \frac{1}{N} - 1 & \beta &\geq \frac{nB}{N} + \frac{1}{N} - 1 & \nu &\geq \frac{nC}{N} + \frac{1}{N} - 1 \\ \alpha + \beta + \nu &\leq \frac{n(A+B+C)}{N} - \frac{1}{N} - 1 \end{aligned}$$

Démonstration. $\omega(\alpha, \beta, \nu, n)$ est holomorphe si $\text{ord}_p \omega(\alpha, \beta, \nu, n) \geq 0$ pour tout $p \in C_N(\lambda)$. Il suffit alors de calculer les ordres aux points de ramification :

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \omega(\alpha, \beta, \nu, n) &= N\left(\alpha - \frac{nA}{N}\right) + N - 1 \\ \text{ord}_1 \omega(\alpha, \beta, \nu, n) &= N\left(\beta - \frac{nB}{N}\right) + N - 1 \\ \text{ord}_\lambda \omega(\alpha, \beta, \nu, n) &= N\left(\nu - \frac{nC}{N}\right) + N - 1 \\ \text{ord}_\infty \omega(\alpha, \beta, \nu, n) &= N\left(\alpha + \beta + \nu - 3\frac{n}{N}\right) + N - 1 \end{aligned}$$

□

Soient:

$$\begin{aligned} \langle \rangle &: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1[&& \text{la partie fractionnaire} \\ [\] &: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} && \text{la partie entière} \end{aligned}$$

Théorème 1.2.3 *Considérons la décomposition précédente:*

$$H^0(C_N(\lambda), \Omega^1) = \bigoplus_{n=0}^{n=N-1} V_n$$

Posons $\alpha := [\frac{nA}{N}]$, $\beta := [\frac{nB}{N}]$, $\nu := [\frac{nC}{N}]$ et $r_n = \dim V_n$. On a alors :

- i) $r_n = \langle \frac{nA}{N} \rangle + \langle \frac{nB}{N} \rangle + \langle \frac{nC}{N} \rangle - \langle n \frac{A+B+C}{N} \rangle$
- ii) Si $r_n = 1$ alors V_n a pour base $\{\omega(\alpha, \beta, \nu, n)\}$
Si $r_n = 2$ alors V_n a pour base $\{\omega(\alpha, \beta, \nu, n), \omega(\alpha + 1, \beta, \nu, n)\}$.

Démonstration. Voir ([Wo88] §4) pour i) et ([Mar89] th 3.1.9) pour ii).**Remarque 1.2.4** On a

$$r_n = 0, 1 \quad \text{ou} \quad 2 \quad \text{et} \quad r_n + r_{-n} = 2 \quad \forall n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$$

et

$$\sum_{n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} r_n = \Phi(N) \quad ; \quad \text{où} \quad \Phi(N) \text{ est la fonction d'Euler.}$$

1.2.5 On considère toujours la courbe définie sur $\mathbb{C}(\lambda)$ associée à la courbe affine $C_N(\lambda)$ définie au § 1.2. Le groupe μ_N des racines $N^{\text{èmes}}$ de l'unité opère sur le corps de fonctions $\mathbb{C}(\lambda)(x, y)$ par l'automorphisme χ . Donc il opère par functorialité sur $H_{DR}^1(C_N(\lambda))$, la cohomologie de de Rham de $C_N(\lambda)$.

En effet, on peut définir une extension de l'action de μ_N sur Ω^1 par $\zeta_N^n \cdot (udx) = (\zeta_N^n \cdot u)dx$. C'est une action qui préserve les formes différentielles de seconde espèce et les formes différentielles exactes.

On en déduit, par passage au quotient, l'action de μ_N sur $H_{DR}^1(C_N(\lambda))$. Cette action coïncide avec l'action de χ^* par la multiplication à travers ζ_N^n .

Les formes différentielles $\omega(\alpha, \beta, \nu, n)$, obtenues par l'action de χ^* , forment une base de $H_{DR}^1(C_N(\lambda))$ et on a la décomposition suivante:

$$H_{DR}^1(C_N(\lambda)) = \bigoplus_{n=0}^{N-1} H_{DR}^1(n)$$

où $H_{DR}^1(n) = \{\omega \in H_{DR}^1(C_N(\lambda)) \mid \chi^* \omega = \zeta_N^n \omega\}$.

Proposition 1.2.6 [Mar89]

$$1) \dim H_{DR}^1(n) = 2 - \#(\{\frac{nA}{N}, \frac{nB}{N}, \frac{nC}{N}, \frac{n(A+B+C)}{N}\} \cap \mathbb{Z})$$

2) Si $\dim H_{DR}^1(n) = 2$, alors $H_{DR}^1(n)$ a pour base l'ensemble $\{\omega(\alpha, \beta, \nu, n), \omega(\alpha+1, \beta, \nu, n)\}$ où $\omega(\alpha, \beta, \nu, n) \in \Omega^1$.

Démonstration (voir [Mar89]th 3.1.13)

1.3 Décomposition de Wolfart

Dans ce paragraphe, nous commençons par décrire la décomposition de Wolfart de la jacobienne de la courbe $C_N(\lambda)$. Nous déduisons ensuite des corollaires sur le corps de multiplication complexe généralisée et son CM-type.

1.3.1 On peut interpréter la représentation intégrale des fonctions hypergéométriques comme quotient de périodes à un facteur algébrique près. Soient $a, b, c \in \mathbb{Q}$, et $c \neq 0, -1, -2, \dots$

$$F(a, b, c, \lambda) = \frac{1}{B(c-b-1, b-a-c-1)} \int_1^\infty x^{a-c}(x-1)^{c-b-1}(x-\lambda)^{-a} dx$$

où B désigne l'intégrale d'Euler. La forme différentielle intégrée

$$\omega = \frac{dx}{y} = x^{a-c}(x-1)^{c-b-1}(x-\lambda)^{-a} dx$$

est une forme différentielle sur

$$C_N(\lambda) : y^N = x^A(x-1)^B(x-\lambda)^C$$

où N est le plus petit dénominateur commun des paramètres a, b, c et

$$A = (c-a)N, \quad B = (b+c-1)N, \quad C = aN.$$

Dans la suite on se borne aux formes différentielles ω de premières espèces. La condition de "première espèce" s'exprime sous la forme

$$A, B, C < N \quad \text{et} \quad A + B + C > N.$$

La forme différentielle $\omega = \frac{dx}{y}$ est un vecteur propre pour l'action de χ^* induite par l'automorphisme de la courbe

$$\chi : (x, y) \mapsto (x, \zeta_N^{-1}y), \quad \zeta_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}.$$

La dimension de l'espace propre

$$V_n = \{\omega \in H^0(C_N(\lambda), \Omega^1) / \chi^* \omega = \zeta_N^n \omega\}$$

se calcule par la formule

$$r_n = \left\langle \frac{nA}{N} \right\rangle + \left\langle \frac{nB}{N} \right\rangle + \left\langle \frac{nC}{N} \right\rangle - \left\langle n \frac{A+B+C}{N} \right\rangle. \quad (\text{cf.1.2.3})$$

1.3.2 Soit S l'ensemble des différentielles propres obtenues pour les valeurs propres $\zeta_N^n = e^{\frac{2i\pi n}{N}}$ avec $n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Elles forment une base de $V_n \cap S$. Soient α_1 et α_2 deux cycles d'intégration tels que $\chi^m(\alpha_1), \chi^m(\alpha_2)$, (avec $m = 0, \dots, N-1$) engendrent un sous-groupe d'indice fini dans $H_1(C_N(\lambda), \mathbb{Z})$. D'après [K81], cela est possible, en prenant par exemple les cycles de Pochhammer autour de $0, 1, \lambda$, et ∞ .

Les formes différentielles $\omega \in V_n$ avec $(n, N) \neq 1$, sont moins intéressantes, car leurs périodes sont déjà des périodes de la courbe

$$C_D(\lambda) : y^D = x^A(x-1)^B(x-\lambda)^C$$

où D est un diviseur de N . En effet, il existe, pour tout diviseur D de N , un revêtement naturel $m_D : C_N(\lambda) \rightarrow C_D(\lambda)$ donné par $y \mapsto u = y^{\frac{N}{D}}$. Donc, $J_D(\lambda)$ est contenu dans $J_N(\lambda)$.

A chaque $\omega \in S \cap V_n$ correspond le plongement

$$\begin{array}{ccc} \sigma_n & : & \mathbb{Q}(\zeta_N) \hookrightarrow \mathbb{C} \\ & & \zeta_N \longmapsto \zeta_N^n \end{array}$$

En utilisant l'intégration sur les cycles de Pochhammer et l'automorphisme canonique, on obtient une forme simple pour la jacobienne décrite dans le théorème suivant [Wo88 §5 th1].

Proposition 1.3.3 *La jacobienne $J_N(\lambda)$ est isogène à un produit*

$$J_N(\lambda) \sim T_\lambda \times \prod_{D|N, D \neq N} J_D(\lambda)$$

où T_λ est une variété abélienne de dimension $\Phi(N)$, définie par $\mathbb{C}^{\Phi(N)} / \Lambda$ avec

$$\Lambda = \left\{ \left(\sigma_n(u) \int_0^\lambda \omega + \sigma_n(v) \int_1^\infty \omega \right)_{\omega \in S} \mid u, v \in \mathbb{Z}[\zeta_N] \right\}.$$

Corollaire 1.3.4 $\mathbb{Z}[\zeta_N] \subset \text{End}(T_\lambda)$.

Cela découle immédiatement de la définition de Λ . □

La jacobienne $J_N(\lambda)$ est principalement polarisée. Mais ce n'est pas le cas de la partie nouvelle T_λ . Dans la suite, on modifie la décomposition de Wolfart de la jacobienne $J_N(\lambda)$ dans le but d'obtenir une partie nouvelle T_λ principalement polarisée.

Corollaire 1.3.5 *Le CM-type généralisé de T_λ est de la forme*

$$\sum_1^s (\zeta_j + \overline{\zeta_j}) + 2 \sum_{j=s+1}^{\frac{\phi(N)}{2}} \zeta_j$$

où s représente la moitié du nombre d'espaces propres V_n de $H^0(T_\lambda, \Omega^1)$ de dimension 1.

Démonstration. L'action de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ sur $H^0(T_\lambda, \Omega^1)$ induit la décomposition de la cohomologie de T_λ en $\phi(N)$ espaces propres V_n . Cette action est donnée par la multiplication par $\sigma_n(\mathbb{Q}(\zeta_N))$, $n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Donc le CM-type généralisé est de la forme $\sum_{\omega \in S} \sigma_n$. Il y a une injection naturelle

$$(\sigma_n)_{\omega \in S} : \mathbb{Z}[\zeta_N] \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} T_\lambda$$

le morphisme σ_n est de multiplicité r_n dans cette injection. Les valeurs possibles de r_n sont 0, 1, 2. Puisque $\bar{\sigma}_n = \sigma_{-n}$, $\sum_{\omega \in S} \sigma_n$ est de la forme

$$\sum_1^s (\zeta_j + \bar{\zeta}_j) + 2 \sum_{j=s+1}^{\frac{\phi(N)}{2}} \zeta_j$$

où s représente la moitié du nombre d'espaces propres V_n de $H^0(T_\lambda, \Omega^1)$ de dimension 1. \square

1.3.6 On peut remplacer le réseau Λ par un réseau isomorphe

$$\Lambda_1 = \{(\sigma_n(u) + \sigma_n(v)D_\omega(\lambda))_{\omega \in S} \mid u, v \in \mathbb{Z}[\zeta_N]\}$$

où $D_\omega(\lambda) = \frac{\int_1^\infty \omega}{\int_0^\lambda \omega}$ est la fonction triangulaire.

En calculant les ordres de ω aux points de ramification 0, 1, λ et ∞ , la condition de première espèce s'exprime sous la forme

$$A, B, C < N, \quad A + B + C > N$$

Ainsi, on peut exprimer les angles définis dans la remarque 4 du paragraphe 1.1 de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \gamma &= |1 - c| = \left| 1 - \frac{A+C}{N} \right| \\ \delta &= |b - a| = \left| \frac{A+B}{N} - 1 \right| \\ \kappa &= |c - b - a| = \left| 1 - \frac{B+C}{N} \right| \end{aligned}$$

On en déduit que $\gamma, \delta, \kappa < 1$. Alors $D_\omega(\lambda)$ est une fonction triangulaire, qui applique le demi-plan supérieur sur un triangle de sommets $D_\omega(0)$, $D_\omega(1)$ et $D_\omega(\infty)$ et d'angles $\pi\gamma, \pi\delta, \pi\kappa$.

1.3.7 Dans [FKV99], les auteurs donnent une façon naturelle pour définir la partie nouvelle T_λ . Le revêtement naturel $m_D : C_N(\lambda) \rightarrow C_D(\lambda)$ donnée par $y \mapsto u = y^{\frac{N}{D}}$ induit un homomorphisme de jacobienne (en tant que variété d'Albanese) $m_{D*} : J_D(\lambda) \rightarrow J_N(\lambda)$.

On note

$$J_{N,\text{old}}(\lambda) = \sum m_D^* J_D(\lambda).$$

Le supplémentaire orthogonal de $J_{N,\text{old}}$ (en respectant la polarisation canonique de $J_N(\lambda)$) est dite la partie nouvelle T_λ ou $J_{N,\text{new}}(\lambda)$.

Les deux sous-variétés abéliennes peut être exprimer en fonction des idempotents de $\mathbb{Q}[Z]$ ($Z = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$) suivant:

$$\epsilon_{\text{new}} = \sum_{D|N} \mu(D) \epsilon_D$$

où μ est la fonction de Möbius, et

$$\epsilon_D = \frac{1}{D} \sum_{h \in Z} h \in \mathbb{Q}[Z].$$

On a

Lemme 1.3.8 *Si $\chi : Z \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un caractère d'ordre N , alors*

$$\epsilon_D = \sum_{k=0, D|k}^{N-1} \epsilon_{\chi^k} \quad \text{et} \quad \epsilon_{\text{new}} = \sum_{k=1, (k,N)=1}^{N-1} \epsilon_{\chi^k},$$

où $\epsilon_{\chi^k} = \frac{1}{N} \sum_{g \in Z} \chi(g)^k g^{-1} \in \mathbb{C}[Z]$. En particulier, ϵ_{new} est un idempotent symétrique de $\mathbb{Q}[Z]$ et $\epsilon_D \cdot \epsilon_{\text{new}} = 0$, pour $D | N$, $D \neq 1$.

Démonstration (voir [FKV99] lemme 5.2).

Corollaire 1.3.9 *On pose $\tilde{\epsilon}_{\text{new}} = N\epsilon$ et $\tilde{\epsilon}_{\text{old}} = N - \tilde{\epsilon}$. Alors $\epsilon_{\text{new}}, \epsilon_{\text{old}} \in \text{End}(J_N(\lambda))$ et*

$$J_{N,\text{old}}(\lambda) = \tilde{\epsilon}_{\text{old}}(J_N(\lambda)), \quad J_{N,\text{new}}(\lambda) = \tilde{\epsilon}_{\text{new}}(J_N(\lambda)).$$

En plus $J_N(\lambda) = J_{N,\text{old}}(\lambda) + J_{N,\text{new}}(\lambda)$, et $J_{N,\text{old}}(\lambda) \cap J_{N,\text{new}}(\lambda) \leq J_N(\lambda)[N]$. En particulier $J_N(\lambda) \sim J_{N,\text{old}}(\lambda) \times J_{N,\text{new}}(\lambda)$.

Démonstration (voir [FKV99] corollaire 5.3).

Remarque 1.3.10 La polarisation de $J_{N,\text{new}}(\lambda)$ induite par la polarisation de $J_N(\lambda)$ n'est pas principale .

1.4 La famille des variétés abéliennes $J_{N,\text{new}}(\lambda)$

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques aspects de la méthode du plongement modulaire, implicite dans les travaux de Fricke-Klein, puis développée par Cohen-Wolfart. Différentes constructions du plongement modulaire d'un sous-groupe H d'indice fini dans un groupe triangulaire Fuchien Δ de signature (p, q, r) sont détaillées dans [CoWo90].

1.4.1 On sait d'après Klein [K81], que Δ agit sur les chemins d'intégration de la représentation intégrale de la fonction hypergéométrique, et donc sur toutes les composantes de τ .

En particulier, si σ_n correspond à un ω , Δ agit sur D_ω par une transformation homographique. Donc Δ change uniquement les bases de l'homologie et non la courbe $C_N(\lambda)$ ni les différentielles. Ainsi, Δ est le groupe qui fixe la famille des variétés abéliennes T_λ .

D'après ([T76] pro2,pro3), $tr(\Delta)$ est contenu dans l'anneau $\mathbb{Z}[2, 2\cos\frac{\pi}{p}, 2\cos\frac{\pi}{q}, 2\cos\frac{\pi}{r}]$ engendré par $(2, 2\cos\frac{\pi}{p}, 2\cos\frac{\pi}{q}, 2\cos\frac{\pi}{r})$ sur \mathbb{Z} . En particulier, le corps $k_1 = \mathbb{Q}(tr(\mu))$ ($\mu \in \Delta$) coïncide avec $\mathbb{Q}(\cos\frac{\pi}{p}, \cos\frac{\pi}{q}, \cos\frac{\pi}{r})$. Soit $A(\Delta)$ l'espace vectoriel engendré par Δ sur k_1 dans $M_2(\mathbb{R})$. Alors $A(\Delta)$ est une algèbre de quaternions $k_1[\Delta]$.

Si Δ_0 un sous-groupe d'indice fixe de groupe triangulaire Δ et k le corps engendré par les traces des éléments de Δ_0 . Alors Δ_0 engendre sur k une algèbre de quaternions $k[\Delta_0]$ contenue dans $M_2(\mathbb{R})$. Soit Γ le groupe des unités de norme réduite 1 dans $k[\Delta_0]$. Si \mathbf{H} désigne l'algèbre des quaternions de Hamilton, il y a un isomorphisme d'algèbres

$$L : k[\Delta_0] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \longmapsto A = M_2(\mathbb{R})^s \oplus \mathbf{H}^{n-s}$$

où $n = [k : \mathbb{Q}]$ et s est le nombre des places infinies non ramifiées de k dans $k[\Delta_0]$. On note k_j la $j^{\text{ème}}$ projection de A , alors $v_j = k_j \circ L$ est un plongement de $k[\Delta_0]$ dans $M_2(\mathbb{R})$ si $j = 1, \dots, s$ et dans \mathbf{H} pour $j = s + 1, \dots, n$. Si on note $w_j = v_j(w)$, $w \in k[\Delta_0]$, on peut définir une action de Γ sur \mathcal{H}^s donnée par

$$w : \tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s) \longmapsto (w_1(\tau_1), \dots, w_s(\tau_s))$$

où $w_j(\tau_j)$ est la transformation homographique de τ_j par w_j , $j = 1, \dots, s$.

Alors Γ agit sur \mathcal{H}^s comme un groupe discontinu. L'inclusion de Δ_0 dans le groupe arithmétique Γ devient le plongement modulaire au niveau des groupes. Au niveau de l'espace, on construit un plongement analytique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \hookrightarrow & \mathcal{H}^s \\ (\int_0^\lambda \omega_1, \int_1^\infty \omega_1) & \longmapsto & (\int_0^\lambda \omega_n, \int_1^\infty \omega_n)_{n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \quad \text{avec } r_n = 1 \end{array}$$

qui commute aux actions de Δ_0 sur \mathcal{H} et Γ sur \mathcal{H}^s . Par passage au quotient on obtient un morphisme non-trivial ψ de $X \cong \Delta_0/\mathcal{H}$ dans $V \cong \Gamma/\mathcal{H}^s$ où \mathcal{H} le demi-plan de Poincaré. Les variétés abéliennes T_λ construites sont de dimension $\Phi(N)$, et à multiplication complexe généralisée par le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Shimura [S63] (voir aussi Siegel) [Si63] a prouvé que l'ensemble des variétés abéliennes de type $(\mathbb{Q}(\zeta_N), (\sigma)_w)_{w \in S}$ est paramétré par un domaine complexe symétrique \mathcal{H}^s où $s = \sum r_n r_{-n}$. Deux variétés abéliennes dans cette famille sont isomorphes si et seulement si elles se trouvent dans la même orbite du groupe modulaire Γ qui agit comme groupe discontinu sur \mathcal{H}^s . La variété Γ/\mathcal{H}^s (nous revenons en détail sur cette variété de " Shimura " dans le chapitre 2) classe donc cette famille de variétés abéliennes. On note

$$R = \{\omega \in S \mid \omega \in V_n \quad \text{avec } r_n = 1\}.$$

Alors la dimension Γ/\mathcal{H}^s est $s = \frac{1}{2}R$. Les points de \mathcal{H}^s qui correspondent aux variétés T_λ sont donnés par $\tau = (D_\omega(\lambda))_{\omega \in R}$.

1.4.2 Conséquences du prolongement modulaire Dans [CoWo90], les auteurs ont développé certaines implications du plongement modulaire. Ils ont démontré en particulier que les images des points fixes de Δ par le plongement modulaire sont des points CM. On a la proposition suivante

Proposition 1.4.3 Soit S une courbe projective lisse connexe défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Il existe un revêtement fini surjectif

$$\beta : S \longrightarrow \mathbb{P}^1.$$

tel que T_λ a bonne réduction potentielle en $0, 1, \infty$ et les fibres en ces points de type CM. En particulier,

$$T_\lambda \simeq A_1 \times A_2$$

où A_1 et A_2 sont deux variétés abéliennes avec multiplication complexe par $\mathbb{Q}(\zeta)$ (au sens de Taniyama-Shimura) ($2\dim A_i = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$, $i = 1, 2$). Leurs types CM respectifs sont

$$\Phi_1 = \sum_{j=1}^{\frac{\Phi(2N)}{2}} \zeta_j \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^s \overline{\zeta_j} + \sum_{j=s+1}^{\Phi(N)/2} \zeta_j.$$

Lemme 1.4.4 On a $\dim V = 0$ si et seulement si

$$\#\{ n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \mid n < \frac{N}{3} \} = \frac{\Phi(N)}{2}.$$

Démonstration. $\dim V = 0$ si et seulement si $r_n = 0$ et $r_{\overline{n}} = 2 \quad \forall n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Ce qui veut dire que $\#\{ n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \mid r_n = 0 \} = \frac{\Phi(N)}{2}$. D'autre part

$$r_n = 3 \left\langle \frac{n}{N} \right\rangle - \left\langle \frac{3n}{N} \right\rangle = 3 \left[\frac{n}{N} \right] - \left[\frac{3n}{N} \right] = 0$$

Ce qui est équivalent à $3 \left[\frac{n}{N} \right] = \left[\frac{3n}{N} \right]$. Alors $\left[\frac{3n}{N} \right]$ est un multiple de 3. Or $\frac{3n}{N} < 3$ donc $\left[\frac{3n}{N} \right] = 0$ et $n < \frac{3n}{N}$. \square

Proposition 1.4.5 Soit $N = p$ un nombre premier tel que $p \equiv 2 \pmod{3}$.

$$\text{End}_{\mathbb{Q}} T_\lambda = \mathbb{Q}(\zeta).$$

Démonstration. D'après 1.4.2, La famille T_λ a une bonne réduction potentielle en $\lambda = 0$. On a alors par la théorie générale de la réduction [L83 th3.2 p. 45] que l'application

$$\text{End}_{\mathbb{Q}} T_\lambda \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}} T_0$$

est injective. Quitte à remplacer λ par une racine de λ et faire tendre λ tend 0. La variété T_λ se casse en deux parties ([CoWo90]§5)

$$T_0 \sim B_1 \times B_2$$

où B_1 et B_2 sont deux variétés abéliennes à multiplication complexe par $\mathbb{Q}(\zeta)$. Puisque $p \equiv 2 \pmod{3}$, alors (voir [KR78] théorème 2) les deux variétés abéliennes B_1 et B_2 sont simples.

Donc on a

- Si B_1 est non isogène à B_2 alors $\text{End}_{\mathbb{Q}}T_0 = \mathbb{Q}(\zeta) \times \mathbb{Q}(\zeta)$. Or $\mathbb{Q}(\zeta)$ est contenu dans $\text{End}_{\mathbb{Q}}T_\lambda$ alors $\text{End}_{\mathbb{Q}}T_\lambda = \mathbb{Q}(\zeta)$ ou $\mathbb{Q}(\zeta) \times \mathbb{Q}(\zeta)$.
- Si B_1 est isogène à B_2 alors $\text{End}_{\mathbb{Q}}T_\lambda = \mathbb{Q}(\zeta)$ ou $M_2(\mathbb{Q}(\zeta))$ ou à un corps CM L tel que $\mathbb{Q}(\zeta) \subset L \subset M_2(\mathbb{Q}(\zeta))$.

Dans le cas où

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}T_\lambda = \begin{cases} \mathbb{Q}(\zeta) \times \mathbb{Q}(\zeta) \\ \text{ou} \\ M_2(\mathbb{Q}(\zeta)) \\ \text{ou} \\ L \end{cases}$$

La variété T_λ serait à multiplication complexe et donc $\dim V = 0$ et T_λ est isotrivial. Or d'après le lemme 1.4.4, $\dim V = 0$ si et seulement si $N = 6$ ou 10 . \square

1.5 Réduction du problème

1.5.1 Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et N un entier ≥ 4 , N non divisible par 3. Notons $C_{2N}(\lambda)$ la complétion projective lisse de la courbe affine d'équation

$$y^{2N} = x(x-1)(x-\lambda)$$

Soit $J_{2N}(\lambda)$ la jacobienne de $C_{2N}(\lambda)$. On a la décomposition suivante (voir 1.3.9)

$$(1.5.2) \quad J_{2N}(\lambda) \sim J_{2N,\text{new}}(\lambda) \times J_{2N,\text{old}}(\lambda)$$

où $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est une variété de dimension $\Phi(2N)$ telle que $\text{End}_{\mathbb{Q}}J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ contient $\mathbb{Q}(\zeta)$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{2N}}$. Soit V la variété de Shimura associée à $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$. La variété V est de dimension $t = \frac{1}{2}\text{Card}(R)$ où

$$R = \{\nu \in (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z})^* / r_\nu = 1\}$$

et

$$r_\nu = \left\langle \frac{\nu}{N} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{N} \right\rangle + \left\langle \frac{\nu}{N} \right\rangle - \left\langle \nu \frac{3}{N} \right\rangle \quad (\text{cf 1.2.3}).$$

D'après la décomposition précédente $J_{2N,\text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$ est à isogénie près un facteur de $J_{2N}(\lambda)$ où $J_2(\lambda)$ est une courbe elliptique. Si $J_{2N}(\lambda)$ est de type CM alors $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ et $J_2(\lambda)$ sont de type CM. Soient $\lambda^{(2)}$ (resp. $\lambda^{(N)}$) les points CM tel que $J_2(\lambda)$ (resp. $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$) est de type CM. Alors, on peut voir la droite des $\lambda^{(2N)}$ (les points CM tel que $J_{2N}(\lambda)$ est à multiplication complexe) comme une diagonale de la droite des $\lambda^{(2)}$ et de la

droite des λ_N . Donc pour démontrer la finitude des points $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tels que $J_2(\lambda)$ est à multiplication complexe, il suffit de le faire pour le facteur $J_{2N, \text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$.

On remarque ici que la situation ressemble à celle du produit de deux courbes modulaires étudiés dans [A98].

Remarques 1.5.3

- Si on prend $\lambda = 1 - j^2$, la courbe $C_{2N}(\lambda)$ est isomorphe à $y^{2N} = x^3 - 1$. La jacobienne de cette courbe est à multiplication complexe par $\mathbb{Q}(\zeta_{6N})$. Donc $\lambda = 1 - j^2$ est un point CM.

- D'après le lemme, $\dim V \neq 0$, pour $N \neq 5$. Pour $N = 5$, $J_{10, \text{new}}(\lambda)$ est isotrivial *i.e* indépendant de λ (nous revenons en détail sur ce cas dans la chapitre 5). Dans ce cas, pour démontrer la finitude des points $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tels que $J_{10}(\lambda)$ est à multiplication complexe, on prend le facteur $J_5(\lambda) \times J_2(\lambda)$ au lieu $J_{10, \text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$.

1.5.4 Comme on l'a déjà remarqué la variété abélienne $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ n'est pas nécessairement principalement polarisée. Dans la suite et pour des simplifications techniques, nous remplaçons la variété $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ par une autre $\widetilde{J_{2N, \text{new}}(\lambda)}$ principalement polarisée. On peut choisir $\widetilde{J_{2N, \text{new}}(\lambda)}$ de deux façons différentes

1) Appliquer l'astuce de Zarhin (voir [F85] proposition 1) *i.e* remplacer $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ par $\widetilde{J_{2N, \text{new}}(\lambda)} = J_{2N, \text{new}}(\lambda)^{*4} \times J_{2N, \text{new}}(\lambda)^4$ (où $J_{2N, \text{new}}(\lambda)^*$ est la duale $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$) qui est une variété abélienne principalement polarisée de dimension $8\Phi(2N)$.

2) On remplace $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ par une variété abélienne isogène et principalement polarisée, définie sur une extension fini de $\mathbb{Q}(\lambda)$. On peut alors voir cette dernière comme la fibre générique d'un schéma abélien $\widetilde{J_{2N, \text{new}}(\lambda)}$ sur une courbe S , elle même munie d'une fonction rationnelle $\lambda : S \rightarrow \mathbb{P}^1$. On remplace le schéma abélien initial $\widetilde{J_{2N, \text{new}}(\lambda)}$ par son image inverse sur S . On a alors une "décomposition de Wolfart" qui est lieu sur S où tous les facteurs sont principalement polarisés.

Dans la suite on considère la "décomposition de Wolfart" sur S et note $\widetilde{J_{2N, \text{new}}(\lambda)}$ par $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$.

Chapitre 2

Groupes de Mumford-Tate et variétés de Shimura attachés à $C_N(\lambda)$

Dans ce chapitre, on démontre que la famille de jacobiniennes $J_N(\lambda)$ n'est pas de type de Hodge pour N non divisible par 3.

Comme m'a fait remarqué Edixhoven, si on combine ([dJN91] proposition 5.7) et ([No 96] théorème 3.7) on trouve que la famille de $J_N(\lambda)$ est de type de Hodge pour N non divisible par 3. Mais cette preuve est très indirecte.

On commence par rappeler les définitions principales et les résultats principaux sur les structures de Hodge et leurs groupes de Mumford-Tate. On définit également la notion de variété de Shimura et de sous-variété de type de Hodge. Pour plus de détails, on peut consulter (par exemple) [D72], [D79], [M90], [M94], [Mo95], [Mo98] ainsi que [Mo982].

2.1. Groupe de Mumford-Tate d'une structure de Hodge

On désigne par \mathbb{S} le groupe algébrique réel \mathbb{C}^* , déduit par restriction des scalaires à la Weil de \mathbb{C} à \mathbb{R} du groupe \mathbb{G}_m :

$$\mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Soit

$$w : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{S},$$

l'application canonique qui sur les points réels, induit l'inclusion de \mathbb{R}^* dans \mathbb{C}^* .

Soit

$$\text{Nm} : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{G}_m$$

une application qui sur les points réels s'identifie à l'application norme définie par $Nm = z\bar{z}$. Le noyau de Nm est le groupe $\mathbb{U}_1 = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$.

Définition 2.1.1 Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{Q} de dimension finie. Une \mathbb{Q} -structure de Hodge sur V de poids n peut être définie de façon équivalente par :

- un morphisme $h : \mathbb{S} \rightarrow GL(V)_{\mathbb{R}}$ tel que $h \circ w(z)$ est une multiplication par z^n .
- Une bigraduation $V \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} V^{p,q}, \bar{V}^{p,q} = V^{q,p}$, où $p, q \in \mathbb{Z}$.
- Une filtration $F^p V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{m \leq p} V^{m, n-m}$ telle que $F^p \oplus \bar{F}^{(n-p+1)} \simeq V_{\mathbb{C}}$.

Si on remplace \mathbb{Q} par \mathbb{Z} on obtient la notion d'une \mathbb{Z} -structure de Hodge.

Soit V une \mathbb{Q} -structure de Hodge. On identifie $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ à $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. Alors la filtration de Hodge sur V est définie par

$$\mu_h : \mathbb{G}_m \rightarrow GL(V)_{\mathbb{C}},$$

telle que $\mu_h(z) = h_{\mathbb{C}}(z, 1)$ et $\mu_h(z).v = z^{-p}v$ où $v \in V^{p,q}$.

Définition 2.1.2 Le groupe de Mumford-Tate de V , noté $MT(V)$, est le plus petit \mathbb{Q} sous-groupe de $GL(V)$, tel que μ_h se factorise à travers $MT(V)_{\mathbb{C}}$.

Le groupe $MT(V)$ est un groupe connexe, qui contient le sous-groupe \mathbb{G}_m de $GL(V)$ qui consiste en les homothéties de V si $n \neq 0$.

Définition 2.1.3 Soit (V, h) une \mathbb{Q} -structure de Hodge de poids $n \neq 0$. Le groupe de Hodge ou le groupe de Mumford-Tate spécial, noté $Hg(V)$, est le plus petit sous-groupe de $GL(V)$ défini sur \mathbb{Q} tel que $h/\mathbb{U}_1 : \mathbb{U}_1 \rightarrow GL(V)$ se factorise par $Hg(V)_{\mathbb{R}}$.

On a $MT(V) = \mathbb{G}_m.Hg(V)$.

Proposition 2.1.4 Soit (V, h) une \mathbb{Q} -structure de Hodge. Le groupe de Mumford-Tate $MT(V)$ est le sous-groupe de $GL(V)$ qui fixe toutes les classes de Hodge i.e $t \in (V^{\otimes m_1} \otimes \check{V}^{\otimes m_2})^{(0,0)}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $\in \mathbb{Z}$.

Démonstration (voir [M90] prop 2.7).

Définition 2.1.5 Une polarisation d'une structure de Hodge V de poids n est un morphisme

$$\Psi : V \otimes V \rightarrow \mathbb{Q}(-n)$$

tel que la forme bilinéaire réelle qui à (x, y) associe $(2i\pi)^n \psi(x, h(i)y)$ soit symétrique et définie positive.

Le groupe de Mumford-Tate d'une structure de Hodge polarisée est réductif.

2.1.6 Le groupe de Hodge d'un produit.

Soient V_1 et V_2 deux \mathbb{Q} -structures de Hodge. Posons $V = V_1 \oplus V_2$. Par définition on a $Hg(V) \subset Hg(V_1) \times Hg(V_2)$ et les deux projections $pr_i : Hg(V) \rightarrow Hg(V_i)$ sont surjectives. En général le groupe de Hodge $Hg(V)$ n'est pas égal à $Hg(V_1) \times Hg(V_2)$. Par exemple si $V_1 = V_2$ le groupe $Hg(V)$ est le sous-groupe diagonal de $Hg(V_1) \times Hg(V_2)$.

La situation est similaire pour le groupe de Mumford-Tate sauf que $MT(V)$ n'est jamais égal à $MT(V_1) \times MT(V_2)$ en poids $n \neq 0$. En effet le facteur central \mathbb{G}_m est compté deux fois dans $MT(V_1) \times MT(V_2)$ sauf dans le cas où l'un de V_i est de poids nul.

2.2. Groupe de Mumford-Tate d'une variété abélienne

Le théorème de Riemann donne une équivalence de catégories (*cf* [Mo982] 1.2).

$$2.2.1 \quad \left(\begin{array}{c} \text{variétés abéliennes} \\ \text{sur } \mathbb{C} \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c} \mathbb{Z}\text{-structures de Hodge} \\ \text{de type } (-1, 0) + (0, -1) \\ \text{polarisables} \end{array} \right).$$

qui à A associe $H_1(A, \mathbb{Z})$. Par passage au dual ($A \mapsto H^1(A, \mathbb{Z})$), on peut remplacer $(-1, 0) + (0, -1)$ par $(1, 0) + (0, 1)$. Ce résultat a plusieurs variantes:

- Les variétés abéliennes à isogénie près correspondent aux \mathbb{Q} -structures de Hodge polarisables de type $(-1, 0) + (0, -1)$.
- Si S est une variété lisse sur \mathbb{C} alors les schémas abéliens sur S correspondent aux variations de \mathbb{Z} -structures de Hodge polarisables de type $(-1, 0) + (0, -1)$ sur S . (*cf.* ci-dessous).

Définition 2.2.2 Soit A une variété abélienne sur \mathbb{C} . Alors le groupe de Mumford-Tate de A , noté $MT(A)$, est le groupe de Mumford-Tate de la structure de Hodge $H_1(A, \mathbb{Q})$ polarisable de type $(-1, 0) + (0, -1)$.

De même le groupe de Hodge de A , noté $Hg(A)$, est le groupe de Hodge de la structure de Hodge $H_1(A, \mathbb{Q})$.

Soit $\lambda : A \longrightarrow A^t$ une polarisation de A . Elle correspond à une polarisation de V

$$\tilde{\varphi} : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{Q}(-1).$$

Soit $\varphi \in (\check{V})^{\otimes 2}$ défini par $(2i\pi)^{-1}\tilde{\varphi}$ la forme de Riemann qui correspond à $\tilde{\varphi}$. Alors d'après [Mo98], la droite engendrée par φ est stable par l'action de $Hg(A)$. Donc $Hg(A)$ est contenu dans le groupe symplectique $Sp(V, \varphi)$. L'équivalence de catégories (2.2.1) implique l'isomorphisme suivant (*cf* [Mo982] 1.2)

$$\text{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \simeq \{\text{classes de Hodge dans } \text{End}(V)\} = \text{End}(V)^{Hg(A)}.$$

Donc $Hg(A)$ est contenu dans le centraliseur de $\text{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ dans $Sp(V, \varphi)$.

2.3 Variations de structure de Hodge

La notion de variation de structure de Hodge est due à Griffiths (voir [G70], et aussi [D71]).

Définition 2.3.1 Soit S une variété analytique complexe lisse et connexe. Une variation de \mathbb{Q} -structure de Hodge polarisée \mathcal{V} de poids n sur S est la donnée de :

- un système local $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ d'espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{Q} ,
- une filtration holomorphe finie \mathcal{F}^{\bullet} décroissante du faisceau analytique $\mathcal{V}_{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$,
- une polarisation définie par une forme bilinéaire

$$Q : \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \times_S \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}(-n),$$

telle que les conditions suivantes soient vérifiées.

- i) La condition de transversalité de Griffiths:

$$\nabla(\mathcal{F}^p) \subset \Omega_S^1 \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{F}^{p-1}$$

où ∇ est la connexion de Gauss-Manin.

- ii) En tout point $s \in S$, \mathcal{V} induit une \mathbb{Q} -structure de Hodge polarisée $(\mathcal{V}_{\mathbb{Q},s}, \mathcal{F}_s^{\bullet}, Q_s)$ de poids n .

On définit de manière analogue les variations de \mathbb{Z} ou de \mathbb{R} -structures de Hodge polarisées.

Soit S une variété analytique lisse complexe connexe munie d'une variation de \mathbb{Q} -structure de Hodge polarisable $(\mathcal{V}, \mathcal{F}^{\bullet}, Q)$. On note MT_s le groupe de Mumford-Tate de la structure de Hodge fibre en $s \in S$. Soit $\pi : \tilde{S} \longrightarrow S$ le revêtement universel. Choisissons un point base $b \in S$ et un point $\tilde{b} \in \tilde{S}$ avec $\pi(\tilde{b}) = b$. On a donc une trivialisaton $\pi^* \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \simeq \tilde{S} \times \mathcal{V}_b$ telle que la polarisation $\pi^* Q$ corresponde à la polarisation Q_b dans \mathcal{V}_b .

Soit $s \in S$, le choix de $\tilde{s} \in \tilde{S}$ tel que $\pi(\tilde{s}) = s$ détermine un homomorphisme injectif $i_{\tilde{s}} : MT_s \hookrightarrow GL(\mathcal{V}_b)$. (cf [Mo95], chp 1 §2)

On sait qu'il existe (voir par exemple [A92] §4) un ensemble analytique Σ de S , distinct de S union dénombrable de sous-variétés analytiques fermée de S tel que

- i) Pour $s \in S \setminus \Sigma$, l'image $M := \text{im}(i_{\tilde{s}}) \subset GL(\mathcal{V}_b)$ ne dépend ni de s ni de \tilde{s} . Le groupe M est appelé **groupe de Mumford-Tate générique de \mathcal{V}** .

- ii) Pour tous les s et \tilde{s} comme ci-dessus avec $s \in \Sigma$, le groupe MT_s est un sous-groupe propre du groupe de Mumford-Tate générique M .

L'ensemble $S \setminus \Sigma$ est appelé le lieu de Hodge générique. Parfois il est plus commode d'appeler MT_s le groupe de Mumford-Tate générique de \mathcal{V} . Les MT_s forment un système local en groupes réductifs sur S/Σ . Le système local $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ correspond à une représentation $\rho : \pi_1(S, s) \longrightarrow GL(\mathcal{V}_s)$, dite **représentation de monodromie**.

Le groupe de monodromie algébrique est le plus petit sous-groupe algébrique de $GL(\mathcal{V}_s)$ défini sur \mathbb{Q} qui contient l'image de ρ . Sa composante d'identité connexe est dite le groupe de monodromie algébrique connexe.

Supposons maintenant que S est munie d'une variation de \mathbb{Z} -structure de Hodge $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}$.

Soit $\pi : \tilde{S} \longrightarrow S$ son revêtement universel. Choisissons comme avant une trivialisaton $\pi^* \mathcal{V}_{\mathbb{Z}} \simeq \tilde{S} \times \mathcal{V}_b$. On note H_s le groupe de monodromie connexe associé à la représentation $\rho : \pi_1(S, s) \longrightarrow GL(\mathcal{V}_b)$.

On a alors le théorème suivant démontré par André [A92] dans le contexte plus général d'une variation de structure de Hodge mixte.

Théorème 2.3.2 *Supposons S algébrique. Avec les notations ci-dessus, on a les résultats suivants:*

- Pour tout $s \in S \setminus \Sigma$ le groupe de monodromie algébrique connexe est un sous-groupe normal du groupe de Mumford-Tate générique dérivé MT_s^{der} .

- Supposons qu'il y ait un point $s_0 \in S$ tel que MT_{s_0} soit abélien (donc un tore); alors $H_s = MT_s^{der}$.

Démonstration (Voir [A92] th1 et prop 5).

2.4 Variétés de Shimura

Définition 2.4.1. Soient \mathbf{G} un groupe réductif défini sur \mathbb{Q} et X une classe de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ -conjugaison de morphismes de groupes algébriques réels de \mathbb{S} dans $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$.

On suppose vérifiés les axiomes suivants:

- i) pour $h \in X$, l'algèbre de Lie $\text{Lie}(\mathbf{G}_{\mathbb{R}})$ est de type $\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$,
- ii) l'involution $\text{int}(h(i))$ est une involution de Cartan du groupe adjoint $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{ad}$,
- iii) le groupe adjoint \mathbf{G}^{ad} n'admet pas de facteurs \mathbf{G}' définis sur \mathbb{Q} , sur lesquels la projection de h soit triviale.

Alors le couple (\mathbf{G}, X) est appelé donnée de Shimura.

La condition i) implique que l'homomorphisme $\mu_h = \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ est à valeurs dans le centre de \mathbf{G} , donc indépendant de h .

2.4.2 Soit (\mathbf{G}, X) une donnée de Shimura. On note $\mathbf{G}^{ad}(\mathbb{R})^+$ la composante neutre topologique du groupe des points réels de \mathbf{G} . Soient $\mathbf{G}(\mathbb{R})_+$ l'image inverse de $\mathbf{G}^{ad}(\mathbb{R})^+$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+$ la trace de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ sur $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$.

Soit K un sous-groupe compact ouvert dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$. Considérons le quotient

$${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X) = \mathbf{G}(\mathbb{Q}) \backslash X \times \mathbf{G}(\mathbb{A}^f) / K,$$

où $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et K agissent sur $X \times \mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$ par (cf [M94]§3)

$$q(x, a)k = (qx, qak), q \in \mathbf{G}(\mathbb{Q}), x \in X, a \in \mathbf{G}(\mathbb{A}^f), k \in K.$$

Soit X^+ une composante connexe de X . Pour chaque $x \in X^+$, soit h'_x la composée de $\mathbb{S}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{ad}$. Donc $x \rightarrow h'_x$ identifie X^+ à une classe de $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{ad}$ -conjugaison des homomorphismes $h'_x : \mathbb{S} \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{R}}^{ad}$. Alors d'après [M90], X^+ s'identifie à un domaine hermitien symétrique et X est une réunion de domaines symétriques hermitiens indexés par $\mathbf{G}(\mathbb{R})/\mathbf{G}(\mathbb{R})_+$. Puisque $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ (théorème d'approximation réel). On a

$$\mathbf{G}(\mathbb{Q})/\mathbf{G}(\mathbb{Q})_+ \simeq \mathbf{G}(\mathbb{R})/\mathbf{G}(\mathbb{R})_+$$

et

$${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X) = \mathbf{G}(\mathbb{Q})^+ \setminus X^+ \times \mathbf{G}(\mathbb{A}^f)/K.$$

Soit C un ensemble de représentants de l'ensemble fini $\mathbf{G}(\mathbb{Q})^+ \setminus \mathbf{G}(\mathbb{A}^f)/K$ dans $\mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$. Pour chaque $g \in C$, on note $\Gamma'_g = gKg^{-1} \cap \mathbf{G}(\mathbb{Q})$ et Γ_g l'image de Γ'_g dans $\mathbf{G}^{ad}(\mathbb{R})_+$. Nous avons alors ([M90], §2)

$${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X) = \cup \Gamma_g \setminus X^+ \quad (\text{union disjointe portant sur } g \text{ dans } C).$$

D'après [BaBo66], le quotient $\Gamma_g \setminus X^+$ admet une structure naturelle de variété quasi-projective et donc il en est de même pour ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$.

Si K est assez petit, le groupe Γ_g est sans torsion; d'après [B072], Il en résulte que cette structure est unique.

On note $M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ la limite projective des ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$. C'est un schéma sur \mathbb{C} dit variété de Shimura définie par (\mathbf{G}, X) .

L'avantage de $M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ est qu'il est muni d'une action naturelle de $\mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$ définie par

$$[x, a]g = [x, ag], \quad x \in X, a \in \mathbf{G}(\mathbb{A}^f), g \in \mathbf{G}(\mathbb{A}^f).$$

On note $\mathcal{T}(g)$ l'opération g de $\mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$ sur $M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$; c'est l'opération de Hecke définie par g .

2.5 Modèles canoniques

Shimura a introduit la notion de modèle canonique sur un corps de nombres des variétés algébriques ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ ou $M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ (voir par exemple [M94] §3).

Soient T un tore sur \mathbb{Q} et h est l'homomorphisme de \mathbb{S} dans $T_{\mathbb{R}}$. Soit μ le morphisme de \mathbb{G}_m dans $T_{\mathbb{C}}$ telle que $\mu = h_{\mathbb{C}}(z, 1)$. La donnée de Shimura $(T, \{h\})$ définit une variété de Shimura.

Soient $E : E(T, h) \subset \overline{\mathbb{Q}}$ le corps de définition de μ et E^{ab} l'extension abélienne maximale de E .

On a l'application de réciprocité d'Artin

$$\mathbb{A}_E^* \longrightarrow \text{Gal}(E^{ab}/E).$$

On applique le foncteur de restriction des scalaires $\text{Res}_{E/\mathbb{Q}}$ à l'homomorphisme μ et on compose par l'application norme, on obtient l'homomorphisme suivant

$$N_h : \text{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \longrightarrow \text{Res}_{E/\mathbb{Q}} T_E \longrightarrow T.$$

Soit $T(\mathbb{Q})^-$ la clôture de $T(\mathbb{Q})$ dans $T(\mathbb{A}^f)$. Soit

$$r(T, h) : \text{Gal}(E^{ab}/E) \longrightarrow T(\mathbb{A}^f)/T(\mathbb{Q})^-$$

l'application de reciprocité définie de la façon suivante:

Soient $\sigma \in \text{Gal}(E^{ab}/E)$ et $s \in \mathbb{A}_E^\times$ tels que $\text{res}_E(s) = \sigma$. On écrit $s = s_\infty s_f$ où s_∞ est un idéal de $(E \otimes \mathbb{R})^\times$ et $s_f \in (E \otimes \mathbb{A}^f)^\times$ donc

$$r(T, h)(\sigma) = N_h(s_f) \pmod{T(\mathbb{Q})^-}.$$

Soit (\mathbf{G}, X) une donnée de Shimura. Le corps reflex (ou corps dual) $E(\mathbf{G}, X)$ de ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ est le corps de définition (dans \mathbb{C}) de la $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}$ -classe de conjugaison de $\mu : h_{\mathbb{C}}(z, 1)$; l'homomorphisme composé $h\omega$

$$h\omega : \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{C}}.$$

Le couple $(T, \{h\})$ est dit spécial dans (\mathbf{G}, X) si $T \subset \mathbf{G}$ est un tore et $h \in X$ se factorise par $T_{\mathbb{R}}$.

Définition 2.5.1 Un modèle de $M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ sur un sous-corps k de \mathbb{C} est la donnée de:

- un schéma M sur k muni d'une action continue de $\mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$,
- un isomorphisme $\mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$ -équivariant ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X) \longrightarrow M \otimes_k \mathbb{C}$.

Définition 2.5.2 Soit E une extension de $E(\mathbf{G}, h)$. Un modèle $M_E(\mathbf{G}, X)$ de $M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ sur E est dit canonique si, pour tout couple spécial $(T, \{h\}) \subset (\mathbf{G}, X)$ et tout élément $a \in \mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$, le point $[h, a]$ est rationnel sur $E(h)^{ab}$ et $\sigma \in \text{Gal}(E(h)^{ab}/E(h))$ opère sur $[h, a]$ par

$$\tau[h, a] = [h, r(\tau).a] \quad \text{où } r = r(T, h) \quad \text{et } E(h) = E.E(T, h).$$

2.6 Variétés de Shimura et espaces de modules

Soient (\mathbf{G}_i, X_i) ($i = 1, 2$) deux données de Shimura munies de classes de conjugaison de morphismes h_i . On désigne par $u : (\mathbf{G}_1, X_1) \longrightarrow (\mathbf{G}_2, X_2)$ un homomorphisme tel que $u(X_1) \subset X_2$ (i.e $u \circ h_1$ conjugué à h_2 sous $\mathbf{G}(\mathbb{R})$). Alors u induit une injection

$$u : M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}_1, X_1) \longrightarrow M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}_2, X_2).$$

Pour tout sous-groupe compact K_1 de $\mathbf{G}_1(\mathbb{A}^f)$, il existe un sous-groupe compact ouvert K_2 de $\mathbf{G}_2(\mathbb{A}^f)$ contenant K_1 , tel que u induise une immersion fermée de ${}_{K_1} M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}_1, X_1)$ dans ${}_{K_2} M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}_2, X_2)$.

Soit $\mathbf{G} = CS p_{2g}$ le groupe des similitudes symplectiques muni d'une forme standard ψ sur \mathbb{Q}^{2g} . Il existe alors une et une seule classe de conjugaison X d'homomorphismes $h : \mathbb{S} \longrightarrow CS p_{2g, \mathbb{R}}$ vérifiant les conditions (2.4.1). L'espace X s'identifie au double demi-espace de Siegel h_g^\pm .

Les conditions (2.4.1) imposent que h définit une structure de Hodge de type $(-1, 0) + (0, -1)$ tel que $\pm\psi$ soit une polarisation.

Pour $K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$, Deligne ([D72] §4) donne une interprétation ${}_K M_{\mathbb{C}}(CS p_{2g}, h_g^\pm)$ comme espace de modules des variétés abéliennes munies d'une certaine structure supplémentaire

(niveau et cycle de Hodge). Cette interprétation de ${}_K M_{\mathbb{C}}(CSp_{2g}, h_g^{\pm})$ en terme des variétés abéliennes se fait par un isomorphisme qui dépend du choix du réseau $\Lambda \subset \mathbb{Q}^{2g}$. Ce choix détermine le type de polarisation. Si on considère des variétés abéliennes principalement polarisées on choisit $\Lambda = \mathbb{Z}^{2g}$. Dans ce cas on a

$$M_{\mathbb{C}}(CSp_{2g}, h_g^{\pm}) \cong \varprojlim_n A_{g,n} \otimes \mathbb{C}.$$

Soit (G, X) une donnée de Shimura telle que $j : (G, X) \rightarrow (CSp_{2g}, h_g^{\pm})$ est une immersion pour un g donné. Alors le groupe est candidat à être un groupe de Mumford-Tate des variétés abéliennes et ${}_K M_{\mathbb{C}}(G, X)$ a une interprétation en terme des variétés abéliennes avec certaines classes de Hodge prescrites ([Mo95], §3.2).

2.7 Sous-variétés de type de Hodge

Définition 2.7.1 Soit (\mathbf{G}, X) une donnée de Shimura.

Une sous-variété S de ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ est dite **sous-variété de type de Hodge** s'il existe un sous-groupe algébrique H de \mathbf{G} défini sur \mathbb{Q} , un élément $\mu \in \mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$ et une composante connexe Y_H^+ de

$$Y_H = \{h \in X \mid h : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{R}} \text{ se factorise par } H_{\mathbb{R}}\}$$

tels que $S(\mathbb{C})$ soit l'image de $Y_H^+ \times \mu K$ dans ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$.

Soit (\mathbf{G}, X) une donnée de Shimura et ρ une représentation de \mathbf{G} sur un \mathbb{Q} -espace vectoriel V qui se factorise par une représentation fidèle de \mathbf{G}^{ad} . Donc ρ donne lieu à une variation de structure de Hodge sur X avec fibré vectoriel sous-jacent $X \times V$. Alors pour K suffisamment petit, la variation de structure de Hodge sur X induit une variation de structure de Hodge sur ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ (cf ([Mo98] 2.3).

Pour une variation de structure de Hodge sur ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$, Moonen a montré [Mo98, prop 2.8] que le lieu de Hodge exceptionnel est l'union des sous-variétés de Hodge propres. Il a donné, plus précisément, la caractérisation suivante des sous-variétés de type de Hodge.

Proposition 2.7.2 Soit $S \subset {}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ une sous-variété de type de Hodge. Alors il existe un sous-groupe compact ouvert K' de $\mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$ contenu dans K , une représentation $\rho : \mathbf{G} \longrightarrow GL(V)$ qui se factorise par une représentation fidèle de \mathbf{G}^{ad} et un groupe algébrique $M \subset GL(V)$, tels que

- la représentation ρ induit une variation de structure de Hodge $V(\rho)$ sur ${}_{K'} M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$,
- la sous-variété S est l'image d'une sous-variété $S' \subset {}_{K'} M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ par l'application:

$${}_{K'} M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X) \longrightarrow {}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X),$$

telle que S' soit une sous-variété irréductible maximale de groupe de Mumford-Tate générique M .

Si $(\mathbf{G}, X) = (CSp_{2g}(\mathbb{Z}), \mathcal{H}_g)$, on identifie ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ à \mathcal{A}_g . Alors S est **de type de Hodge (on dit aussi modulaire)** s'il existe un sous- \mathbb{Q} -groupe algébrique H de CSp_{2g} ,

telque $S(\mathbb{C})$ soit une composante de l'image dans \mathcal{A}_g l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de $\{h \in \mathcal{H}_g \text{ se factorisant par } H(\mathbb{R})\}$.

Définition 2.7.3 Soit (\mathbf{G}, X) une donnée de Shimura.

Un point h de X est dit spécial s'il existe un tore $T \subseteq \mathbf{G}$, défini sur \mathbb{Q} , tel que $h : \mathbb{S} \rightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ se factorise à travers $T_{\mathbb{R}}$. Un point x dans ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ est dit spécial s'il est de la forme $x = [h, gK]$ avec h spécial.

Un point x de ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ est une sous-variété de type de Hodge de dimension 0 si et seulement si x est un point spécial.

Les points spéciaux de l'espace des modules de variétés abéliennes \mathcal{A}_g sont les points qui correspondent aux variétés abéliennes de type CM. Dans ce cas on dit que ces points sont des points CM.

2.8 Les sous-variétés modulaires associées à $J_N(\lambda)$

Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, et N un entier ≥ 4 non divisible par 3, Notons $C_N(\lambda)$ la complétion projective lisse de la courbe affine d'équation

$$y^N = x(x-1)(x-\lambda).$$

Soit $J_N(\lambda)$ la jacobienne de $C_N(\lambda)$ qui est de genre $N-1$. L'application $\lambda \mapsto J_N(\lambda)$ induit une application algébrique de S vers la variété de modules grossière \mathcal{A}_{N-1} des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $N-1$. Son image est une courbe irréductible que nous notons S_N .

- Pour $N=4$, on a une isogénie entre $J_4(\lambda)$ et le cube de $J_2(\lambda)$, ce qui permet de conclure que S_4 est une sous-variété modulaire de \mathcal{A}_3 .

- Le cas $N=5$ ou $N=7$ a été étudié par J. de Jong et R.Noot [dJN91]. Ils montrent que S_5 (resp. S_7) est modulaire, paramétrant des variétés abéliennes à multiplication complexe par $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/5})$ (resp. $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/7})$) et d'un certain "type de Shimura".

Dans le même article les deux auteurs suggèrent que S_N n'est modulaire pour aucun $N > 7$ (N non divisible par 3).

Nous démontrons dans ce paragraphe qu'il en est ainsi pour N non divisible par 3. Commençons par démontrer quelques lemmes qui nous serviront pour la démonstration.

On note $J_{N,\text{new}}(\lambda)$ la partie nouvelle de $J_N(\lambda)$ dans la décomposition (1.3.9). On sait déjà que c'est une variété abélienne de dimension $\Phi(N)$ et son algèbre des endomorphismes est égale à $E = \mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{N}})$. (Nous rappelons que pour le cas exceptionnel $J_{10}(\lambda)$, nous notons $J_{10,\text{new}}(\lambda) = J_5(\lambda)$).

Soit $V_1 = H_1(J_{N,\text{new}}(\lambda), \mathbb{Q})$ l'espace vectoriel sur \mathbb{Q} de dimension $2\Phi(N)$. Le corps cyclotomique E est un corps CM.

On a la décomposition

$$V_1 \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{\sigma} V_{\sigma}$$

indexée par tous les homomorphismes $\sigma : \mathbb{Q}(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}$, avec $V_{\sigma} = (V_1 \otimes \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}[\zeta] \otimes_{\mathbb{C}, \sigma} \mathbb{C}} \mathbb{C}$ de dimension 2.

On fixe $\Phi = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{\frac{\Phi(N)}{2}}\}$ un ensemble des plongements de $\mathbb{Q}(\zeta)$ dans \mathbb{C} , tel que tout plongement de $\mathbb{Q}(\zeta)$ dans \mathbb{C} est soit dans Φ , soit de conjugué dans Φ .

Soit E^+ le sous-corps totalement réel maximal de E .

Pour chaque prolongement $\tau : E^+ \rightarrow \mathbb{R}$, posons $X_\tau = (V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \otimes_{E^+ \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}} \mathbb{R}$. L'espace X_τ admet une structure complexe naturelle donnée par l'action de $E \otimes \mathbb{R}$ sur $V_1 \otimes \mathbb{R}$. On a la décomposition suivante

$$V_1 \otimes \mathbb{R} = \prod_{\tau: E^+ \rightarrow \mathbb{R}} X_\tau$$

et

$$X_\tau \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V_\sigma \oplus V_{\bar{\sigma}}$$

où σ est l'extension de τ sur \mathbb{C} .

Dans le lemme qui suit, on calcule explicitement le groupe dérivé de groupe de Hodge sous certains hypothèse. Ce calcul ne servira pas dans la suite.

Lemme 2.8.1 *Soit H_1 le groupe de Hodge de $J_{N,\text{new}}(\lambda)$ et H_1^{der} son groupe dérivé. Alors on a*

i) $H_1 \subset \text{Res}_{E^+/\mathbb{Q}} U_2(V_1, \varphi)$ ou $U_2(V_1, \varphi)$ est le groupe unitaire sur E^+ relativement à une forme E -hermitienne φ ,

ii) $H_1^{\text{der}} = \text{Res}_{E^+/\mathbb{Q}} SU_2(V_1, \varphi)$ si $\text{End}_{\mathbb{Q}} J_{N,\text{new}}(\lambda) = \mathbb{Q}(\zeta)$ (ce qui est équivalent à " $J_{N,\text{new}}(\lambda)$ est simple," pour λ générique).

Démonstration.

i) L'espace vectoriel V_1 est muni d'une polarisation

$$\Psi : V_1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{Q}$$

telle que $\psi(\ell x, y) = \psi(x, \bar{\ell} y)$ où $\ell \in E$, $x, y \in V_1$ et $\ell \rightarrow \bar{\ell}$ est l'automorphisme non trivial de E sur E^+ . On choisit un élément $\alpha \in E$ tel que $\bar{\alpha} = -\alpha$. Donc il existe une unique forme hermitienne ([D82] lemme4.6)

$$\varphi : V_1 \times V_1 \rightarrow E$$

satisfaisant $\psi(x, y) = \text{tr}(\alpha \varphi(x, y))$ où tr est la trace de E dans \mathbb{Q} . Alors le groupe de Hodge ([Ri83]§3)

$$H_1 \subset \text{Res}_{E^+/\mathbb{Q}} U_2(V_1, \varphi)$$

où $\text{Res}_{E^+/\mathbb{Q}}$ est la restriction des scalaires à la Weil de E^+ sur \mathbb{Q} et $U_2(V_1, \varphi)$ est le groupe unitaire sur E^+ relativement à la forme hermitienne φ . La représentation matricielle qui correspond à $U_2(V_1, \varphi)$ est

$$U_2(\varphi)(\mathbb{C}) = \{k \in GL_2(\mathbb{C}) \mid {}^t k h k = h\}$$

où $h = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j \leq g}}$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq g}$ est la base de V_1 sur E .

ii) On a

$$H_{1/\mathbb{C}} \subset \prod_{\sigma_i: E \rightarrow \mathbb{C}} GL(V_{\sigma_i}) \subset GL(V_{\mathbb{C}}).$$

On rappelle

$$V_{1,\mathbb{C}} = \bigoplus_{\sigma_i: E \rightarrow \mathbb{C}} V_{\sigma_i} = \bigoplus_{\sigma_i \in \Phi} (V_{\sigma_i} \oplus V_{\bar{\sigma}_i}).$$

On peut écrire alors

$$\prod_{\sigma_i: E \rightarrow \mathbb{C}} GL(V_{\sigma_i}) = \prod_{\sigma \in \Phi} (GL(V_{\sigma_i}) \times GL(V_{\bar{\sigma}_i})).$$

La forme hermitienne φ induit une forme hermitienne non dégénérée ω_τ sur $X_{\tau,\mathbb{C}}$. Si on note L_τ la projection de $L = Res_{E^+/\mathbb{Q}} U_2(V_1, \varphi)$ dans $GL(X_\tau)$, alors on a ([Ku84] lemme 2.3)

$$L_\tau = U(X_\tau, \omega_\tau)$$

($U(X_\tau, \omega_\tau)$ désigne le groupe unitaire relativement à ω_τ) et $V_{\bar{\sigma}_i} \simeq V_{\sigma_i}^\perp$ comme L -module ($V_{\sigma_i}^\perp$ désigne le dual de V_{σ_i}). Donc ([Ku84] lemme 2.2) $V_{\bar{\sigma}_i} \simeq V_{\sigma_i}^\perp$ comme H_1 -module.

On a alors

$$\prod_{\sigma_i: E \rightarrow \mathbb{C}} GL(V_{\sigma_i}) = \prod_{\sigma \in \Phi} (GL(V_{\sigma_i}) \times GL(V_{\sigma_i}^\perp)).$$

Soit p la projection définie par

$$p: \prod_{\sigma_i: E \rightarrow \mathbb{C}} GL(V_{\sigma_i}) \longrightarrow \prod_{\sigma \in \Phi} GL(V_{\sigma_i}).$$

Alors p induit une **injection** de H_1 dans $\prod_{\sigma \in \Phi} GL(V_{\sigma_i})$. On note H_{σ_i} la projection de H_1 dans $\prod_{\sigma_i \in \Phi} GL(V_{\sigma_i})$.

Puisque $\text{End}_{\mathbb{Q}} J_{N,\text{new}}(\lambda) = \mathbb{Q}(\zeta)$, on a (voir la proposition 1.4.5)

$$(*) \quad \mathbb{C}^g = \text{End}_{J_{N,\text{new}}}(\lambda) \otimes \mathbb{C} \simeq \text{End}_{H_{\mathbb{C}}} \bigoplus_{\sigma_i} V_{\sigma_i} \simeq \text{End}_{H_{\mathbb{C}}} \bigoplus_{\sigma_i \in \Phi} (V_{\sigma_i} \oplus V_{\sigma_i}^\perp).$$

Donc $\text{End}_{H_{\sigma_i}} V_{\sigma_i} = \mathbb{C}$ et V_{σ_i} est un H_{σ_i} -module simple. La représentation standard de $GL(V_{\sigma_i})$ restreint à H_{σ_i} est irréductible.

Le groupe H_1 est réductif connexe donc H_{σ_i} aussi. On en déduit que

$$H_{\sigma_i} = GL(V_{\sigma_i}) \quad \text{ou} \quad H_{\sigma_i} = SL(V_{\sigma_i}) \quad \text{et} \quad H_{\sigma_i}^{\text{der}} = SL(V_{\sigma_i}).$$

D'autre part, d'après (*)

$$\text{si } \sigma_i \neq \sigma_j \quad \text{alors} \quad \text{Hom}_{H_1}(V_{\sigma_i}, V_{\sigma_j}) = \text{Hom}_{H_1}(V_{\sigma_i}, V_{\sigma_j}^\perp) = 0.$$

Puisque deux représentations de GL_2 dont la restriction à SL_2 sont isomorphes, elles sont isomorphes ou duales, donc $\text{Hom}_{H_1^{\text{der}}}(V_{\sigma_i}, V_{\sigma_j}) = 0$. Alors, d'après Goursat-Kolchin [Ka prop1.8.2]

$$H_1^{\text{der}} = \prod_{\sigma_i \in \Phi} SL(V_{\sigma_i}). \quad \square$$

Nous rappelons que pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, on note $C_2(\lambda)$ la complétion projective lisse de la courbe affine d'équation

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Soient $V_2 = H_1(J_2(\lambda), \mathbb{Q})$ et $V = V_1 \oplus V_2 = H_1(J_{N,\text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda), \mathbb{Q})$

Proposition 2.8.2 Soient $Hg(V)$ le groupe de Hodge de $J_{N,\text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$ et $Hg(V)^{\text{der}}$ son groupe dérivé. Soient H_1 le groupe de Hodge de V_1 et H_1^{der} son groupe dérivé. Alors

$$Hg(V)^{\text{der}} = H_1^{\text{der}} \times SL(V_2).$$

Démonstration.

On note H_2 le groupe de Hodge de V_2 , alors (voir par exemple [Ku89])

$$Hg(V_2) = SL(V_2).$$

Alors

$$Hg(V) \subset H_1 \times H_2$$

et les projections $p_i : Hg(V) \rightarrow H_i$ ($i = 1, 2$) sont surjectives.

On choisit un revêtement étale finis S' de S tel que l'image de la représentation de monodromie

$$\rho : \pi_1(S', \lambda) \rightarrow GL(V)$$

ait une adhérence de Zariski H_λ connexe (cette est indépendante de λ).

Nous avons alors [théorème 2.3.2], pour $\lambda \in S'$ suffisamment général

$$Hg(V)^{\text{der}} = MT^{\text{der}} = H_\lambda$$

où MT^{der} est le groupe de Mumford-Tate dérivé. Donc

$$H_\lambda \subset H_1^{\text{der}} \times SL(V_2).$$

Les projections

$$\begin{aligned} p_1 & : H_\lambda \rightarrow H_1^{\text{der}} \\ p_2 & : H_\lambda \rightarrow SL(V_2) \end{aligned}$$

sont surjectives.

On doit montrer que H_λ contient le groupe

$$H_1^{\text{der}} \times SL(V_2).$$

Sur \mathbb{C} , le groupe H_1^{der} est un produit de facteur SL_2 . Par Goursat-Kolchin [Ka prop 1.8.2], il suffit donc de démontrer qu'il n'y a pas d'homomorphismes non-trivial de représentations entre celle défini par p_1 et celle par p_2 . Pour cela on applique ([D71] prop 4.4.13). Pour $\lambda \in S'$, le groupe fondamental $\pi_1(S', \lambda)$ agit sur la fibre $H_1((J_{N,\text{new}})_\lambda, \mathbb{Z})$, (resp. $H_1((J_2(\lambda))_\lambda, \mathbb{Z})$) et on a :

$$(*) \quad \text{Hom}_{\pi_1(S', \lambda)}(H_1(J_2(\lambda), \mathbb{Z}), H_1(J_{N, \text{new}}(\lambda), \mathbb{Z})) = \text{Hom}(J_2(\lambda), J_{N, \text{new}}(\lambda)).$$

Comme $H_\lambda = Hg(V)^{\text{der}}$, on a

$$(**) \quad \text{Hom}_{Hg(V)^{\text{der}}}(V_1, V_2) \subset \text{Hom}_{\pi_1(S', \lambda)}(V_1, V_2)$$

D'autre part, $\text{Hom}(J_2(\lambda), J_{N, \text{new}}(\lambda)) = 0$. En effet, s'il existe un homomorphisme entre $J_2(\lambda)$ et $J_{N, \text{new}}(\lambda)$ alors l'un de facteurs de $J_{N, \text{new}}(\lambda)$ n'a pas bonne réduction potentielle en l'un des points de S tels que $\lambda = 0$. Ce qui contredit le fait que $J_{N, \text{new}}(\lambda)$ a bonne réduction potentielle en ce même point (la notion de bonne réduction potentielle est stable par isogénie).

Donc (*) et (**) implique que V_1 est non isomorphe à V_2 . \square

On rappelle que S_N est l'adhérence de l'image de S dans \mathcal{A}_{N-1} par l'application qui à λ associe $J_N(\lambda)$. Alors on a la caractérisation suivante

Théorème 2.8.3 *Soit $N > 7$, N non divisible par 3. Alors S_N n'est pas modulaire.*

Démonstration.

Soit $S_{N, \text{new}}$ la variété de Shimura associé aux variétés abéliennes $J_{N, \text{new}}(\lambda)$. Alors d'après [1.2.3], la dimension de $S_{N, \text{new}}$ est donnée par

$$\dim S_{N, \text{new}} = \frac{1}{2} \text{card} R$$

où

$$R = \{n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \mid r_n = 1\},$$

et

$$r_n = \left\langle \frac{n}{N} \right\rangle + \left\langle \frac{n}{N} \right\rangle + \left\langle \frac{n}{N} \right\rangle - \left\langle \frac{3n}{N} \right\rangle \quad (\text{cf 1.2.3}).$$

Donc $\dim S_{N, \text{new}} > 1$ si et seulement si $\{n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \mid \frac{N}{3} < n < \frac{2N}{3}\} \geq 4$.

Ceci est vrai pour tous les $N = p$ premiers supérieur 11 et pour tout N supérieur à 19.

Pour $N = 8, 10, 14$ et 16 , la dimension de $S_{N, \text{new}}$ est égale à 1 et donc elle est modulaire.

Dans ce cas, on considère le facteur $J_{N, \text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$ de $J_N(\lambda)$.

On note $S_{2N, \text{new}}$ la variété de Shimura qui paramétrise $J_{N, \text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$. Elle est définie par la donnée de Shimura (G, X) .

D'après le lemme [2.9.2], le groupe G^{ad} coïncide avec le groupe adjoint $Hg(V)^{\text{ad}} = H_1^{\text{ad}} \times SL(V_2)$ où $Hg(V)$ (resp. H_1) est le groupe de de Hodge de $J_{N, \text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$ (resp. $J_{N, \text{new}}(\lambda)$). Ainsi on peut voir la courbe $S_{2N, \text{new}}$ comme le produit de deux courbes $S_{\text{New}} \times S_2$ où S_{New} (resp. S_2) est la variété de Shimura attachée à $J_{N, \text{new}}(\lambda)$ (resp. $J_2(\lambda)$). Donc la dimension de $S_{2N, \text{new}}$ est égale à 2. Ce qui implique que S_N n'est pas une variété modulaire. \square

Chapitre 3

Application de la théorie de multiplication complexe

Le résultat principal de ce chapitre est d'établir une relation entre $\text{End}_{\mathbb{Q}}(J_{2N,\text{new}}(\lambda))$ et $\text{End}_{\mathbb{Q}}(J_2(\lambda))$. Dans les deux premiers paragraphes, on fait quelques rappels sur la théorie de la multiplication complexe (Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [L83], [S94], [ST61]). Ces résultats seront utilisés tout au long de ce travail.

Dans le troisième paragraphe, on démontre le résultat principal. Cette démonstration se fait en trois étapes. La première étape repose sur l'action de Galois sur les points CM. Ensuite, on démontre par un argument géométrique que le degré de corps de modules de $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ sur $\mathbb{Q}(\lambda)$ est borné indépendamment de λ . On conclut par un résultat de Chowla sur la croissance des nombres de classes.

3.1. Courbes elliptiques à multiplication complexe

Un thème central de la théorie de multiplication complexe est de donner une construction explicite d'une extension abélienne pour un corps donné. Si $K = \mathbb{Q}$ alors l'extension abélienne maximale \mathbb{Q}^{ab} de \mathbb{Q} est engendrée par les racines de l'unité d'après le théorème de Kronecker-Weber. Il existe un isomorphisme

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}) \cong \prod_p \mathbb{Z}_p^*$$

où \mathbb{Z}_p est l'anneau des entiers p -adiques.

La théorie de la multiplication complexe donne une description similaire pour les extensions abéliennes des corps quadratiques imaginaires (dans le cas des courbes elliptiques) ou d'autres corps CM (dans le cas des variétés abéliennes de dimensions supérieures).

3.1.1 Notations

Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{C} . Sa forme affine de Legendre est donnée par

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$$

pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

L'invariant modulaire $j(E)$ se calcule par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & j(E) \end{array}$$

C'est un invariant de la classe d'isomorphie de E .

Le groupe des points complexes de E s'écrit comme quotient de \mathbb{C} par un réseau Λ , qu'on peut normaliser sous la forme $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, avec $\text{Im } \tau > 0$. On a alors la formule pour l'invariant modulaire de E

$$j(E) = j(\tau) = e^{-2i\pi\tau} \frac{(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 e^{2i\pi n\tau}}{1 - e^{2i\pi n\tau}})^3}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2i\pi n\tau})^{24}}.$$

3.1.3 Théorèmes principaux

Les endomorphismes de E s'identifient aux nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $z\Lambda \subset \Lambda$. En général, $\text{End}(E) = \mathbb{Z}$; si $\text{End}(E)$ est plus grand, $\text{End}(E) \otimes \mathbb{Q}$ est un corps quadratique imaginaire; c'est le cas de multiplication complexe.

Soit E une courbe elliptique à multiplication complexe. Soient K l'algèbre d'endomorphismes de E et \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K . Alors $\text{End}(E)$ est un sous-anneau de \mathcal{O}_K d'indice fini. Tout sous-anneau de \mathcal{O}_K est de la forme $\mathcal{O}_{K,f} = \mathbb{Z} + f\mathcal{O}_K$ où f est un entier positif ≥ 1 . On a alors les deux théorèmes suivants ([Sil86] appendice C):

Théorème 3.1.4 *Soit $\mathcal{O}_{K,f}$ un ordre de \mathcal{O}_K . L'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques telles que $\text{End}(E) = \mathcal{O}_{K,f}$ est en bijection avec le groupe de Picard $\text{Pic}(\mathcal{O}_{K,f})$ de l'ordre $\mathcal{O}_{K,f}$.*

Pour chaque classe d'idéaux $a \in \text{Pic}(\mathcal{O}_{K,f})$, on note $j(a)$ l'invariant de \mathbb{C}/a .

Théorème 3.1.5 *Soit E une courbe elliptique telle que $\text{End}(E) = \mathcal{O}_{K,f}$. On a alors:*

$$1) \text{Gal}(K(j(E))/K) \simeq \text{Pic}(\mathcal{O}_{K,f}).$$

L'isomorphisme est le suivant: à tout $\sigma \in \text{Gal}(K(j(E))/K)$, on associe $b \in \text{Pic}(\mathcal{O}_{K,f})$ tel que

$$j(a)^\sigma = j(b^{-1}a), \quad \forall a \in \text{Pic}(\mathcal{O}_{K,f}).$$

$$2) [K(j(E)) : K] = [\mathbb{Q}(j(E)) : \mathbb{Q}].$$

3) Si a_1, \dots, a_n forment un système complet de représentants de $\text{Pic}(\mathcal{O}_{K,f})$, alors les $j(a_i)$ sont les conjugués de $j(a_1)$ sur \mathbb{Q} et sur K .

4) Si $f = 1$, $K(j(E))$ est le corps de classe de Hilbert de K .

Comme conséquence de 1), on a

$$\rho\sigma\rho^{-1} = \sigma^{-1} \quad \text{pour } \sigma \in \text{Gal}(K(j_0)/\mathbb{Q})$$

où ρ est l'automorphisme de conjugaison complexe de \mathbb{C} . Puisque ρ est différent de l'identité sur K , le groupe de Galois de $K(j(E))$ sur \mathbb{Q} est une extension du groupe de Galois de $K(j(E))$ sur K par un groupe d'ordre 2. La structure du groupe de Galois de $K(j(E))$ sur \mathbb{Q} est complètement déterminée par le groupe de Galois de $K(j(E))$ sur K . On peut énoncer le résultat suivant:

Corollaire 3.1.6 ([E98] 3.3) *Soient K un corps quadratique imaginaire et f un entier supérieur à 1. L'élément non trivial σ de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ agit par -1 sur $\text{Pic}(\mathcal{O}_{K,f})$.*

3.2. Variétés abéliennes à multiplication complexe

Les résultats de ce paragraphe sont une généralisation due à Shimura-Taniyama des résultats du paragraphe précédent en dimension supérieure.

Soient $\overline{\mathbb{Q}}$ la fermeture algébrique de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} et $\mathbf{G}_{\mathbb{Q}}$ le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On note ρ la conjugaison complexe sur \mathbb{C} . Nous nous contentons ici de rappeler certaines définitions et les théorèmes principaux sans donner les démonstrations. Pour plus de précisions, nous renvoyons le lecteur à [L83] et [ST61].

3.2.1 Préliminaires algébriques

On note par $\rho : x \mapsto \bar{x}$ la conjugaison complexe. Pour nous, un corps de nombres algébriques est un sous-corps de \mathbb{C} sur \mathbb{Q} , de degré fini.

Définition 3.2.2 *Un corps de nombres, qui est une extension quadratique totalement imaginaire d'un corps totalement réel, s'appelle un corps CM.*

Proposition 3.2.3 ([S94] chp5, 5.11) *Un corps de nombres K est CM si et seulement si $K^{\sigma\rho} = K^{\sigma}$ pour $\sigma \in \mathbf{G}_{\mathbb{Q}}$ et la restriction de ρ sur K est non triviale.*

Définition 3.2.4 *Un type CM d'un corps CM K est une partie Φ de $\text{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant:*

- 1) $\Phi \cap \rho\Phi = \emptyset$
- 2) $\Phi \cup \rho\Phi = \text{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})$

On dit parfois que le couple (K, Φ) est un type CM.

Définition 3.2.5

1) Une variété abélienne A de dimension g est dite de type CM si $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ contient une algèbre semi-simple commutative de dimension $2g$ sur \mathbb{Q} .

2) Une variété abélienne simple A sur \mathbb{C} , sera dite avoir multiplication complexe par (K, Φ) , si $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q} = K$ telle que $2\dim(A) = [K : \mathbb{Q}]$ et si

$$\Phi = \sum_{i=1}^g \sigma_i$$

où σ_i est l'ensemble de tous les plongements de K dans \mathbb{C} par les quels K agit sur le \mathbb{C} -espace vectoriel des 1-formes holomorphes $\Omega^1(A)$.

Définition 3.2.6 Un type CM (K, Φ) est dit primitif (on dit aussi simple) si les variétés abéliennes de type (K, Φ) sont simples.

La proposition suivante donne une caractérisation d'un type CM primitif.

Proposition 3.2.7 ([ST61] pro 26) Soit (K, Φ) un type CM. Soient L une extension galoisienne de \mathbb{Q} qui contient K et \mathbf{G} le groupe de Galois de L sur \mathbb{Q} .

Soit H_1 le sous-groupe de \mathbf{G} qui correspond à K .

On pose

$$H' = \{\gamma \mid \gamma \in \mathbf{G}, \gamma\Phi = \Phi\}.$$

Donc (K, Φ) est primitif si et seulement si $H_1 = H'$.

3.2.8 Construction de variétés abéliennes de type CM

Soient K un corps CM de degré $2n$ et $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un type CM de K dans \mathbb{C} . Pour tout $\alpha \in K$, on pose

$$\Phi(\alpha) = {}^t(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha)) \in \mathbb{C}^n$$

Soit \mathfrak{a} un \mathbb{Z} -module libre de K , de rang $2n$ sur \mathbb{Z} (on dit que \mathfrak{a} est un réseau de K). Alors

$$\Phi(\mathfrak{a}) = \{\Phi(\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{a}\}.$$

Soit S_Φ la représentation de K dans les matrices diagonales de $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$S_\Phi(\alpha) = \text{diag}(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_n(\alpha))$$

Théorème 3.2.9 ([L83] chp1 th4.1)

1) Soit \mathfrak{a} un réseau de K . Alors, $\Phi(\mathfrak{a})$ est un réseau de \mathbb{C}^n de type (K, Φ) .

2) Réciproquement, soit (A, l) une variété abélienne de type (K, Φ) , où l est l'injection de K dans $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$. Alors il existe un réseau $\mathfrak{a} \in K$ et un isomorphisme analytique

$$\Theta : \mathbb{C}^n / \Phi(\mathfrak{a}) \longrightarrow A$$

tel que le diagramme suivant commute pour tout $\alpha \in K$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n / \Phi(\mathfrak{a}) & \longrightarrow & A \\ S_{\Phi}(\alpha) \downarrow & & \downarrow l(\alpha) \\ \mathbb{C}^n / \Phi(\mathfrak{a}) & \longrightarrow & A \end{array}$$

Si de plus \mathcal{O} est le sous-anneau de K défini de la façon suivante

$$\mathcal{O} = \{\alpha \in K \mid \alpha \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}\} \quad \text{alors} \quad l(\mathcal{O}) = l(K) \cap \text{End}(A).$$

Remarques 3.2.10

1) Si un diagramme comme dans le théorème [3.2.9] existe, on dit que (A, l) est de type (K, Φ, \mathfrak{a}) relativement à Θ .

2) Soit (K, Φ) un type CM, avec K un corps CM et \mathfrak{a} un réseau de K . Soit (A, l, \mathcal{C}) une variété abélienne de type (K, Φ, \mathfrak{a}) relativement à Θ où Θ un isomorphisme analytique définie comme dans le théorème [3.2.7]. Soit X un diviseur de \mathcal{C} et E_X une forme de Riemann E_X définie par X relativement à Θ (voir [L83]§) telle que

$$E_X(S_{\Phi}(\alpha)z, w) = E_X(z, S_{\Phi}(\bar{\alpha})w) \quad z, w \in K.$$

Il existe un $\zeta \in K$ tel que $-\zeta^\rho$ est totalement positif, $\text{Im}(\varphi_i \zeta) > 0$ pour tout i et

$$E_X(\Phi(z), \Phi(w)) = \text{tr}_{K/\mathbb{Q}}(\zeta z w^\rho), \quad z \in K, w \in K.$$

On dit alors que (A, \mathcal{C}, l) est de type $(K, \Phi, \mathfrak{a}, E)$.

3.2.11 Le corps reflex

Soient K un corps CM de degré $[K : \mathbb{Q}] = 2n$ et $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un type CM de K . Le type CM Φ peut être vu comme une combinaison linéaire formelle, ou une représentation de l'algèbre commutative simple K , qui s'écrit

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \varphi_i.$$

On définit la trace type

$$\text{tr}_{\Phi(x)} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x)$$

et la norme type

$$N_{\Phi}(x) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(x)$$

pour $x \in K$.

On peut construire un type CM (K', Φ') à partir d'un type CM (K, Φ) . Soit K' le corps engendré sur \mathbb{Q} par tous les éléments $tr_{\Phi(x)}$ avec $x \in K$. On dit alors que (K', Φ') est *le reflex* de (K, Φ) où bien encore *le dual* de (K, Φ) .

Proposition 3.2.12 *Soit (K, Φ) un type CM.*

i) Le reflex (K', Φ') est un type CM primitif.

ii) Si (K, Φ) est primitif, alors (K, Φ) coïncide avec son double reflex (K'', Φ'') .

Démonstration. (voir [ST61] §8.2)

Lemme 3.2.13 *Soient K un corps CM de degré $2n$ et $\Phi_K = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un type CM de K . Soit L une extension galoisienne finie de \mathbb{Q} contenant K . On suppose que L est un corps CM. Soit K' (resp. L') le corps reflex de K (resp. L). Alors $K' \subset L'$.*

Démonstration. Soient $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n$ des prolongements de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ à L . Soit

$$S_L = \cup_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i \text{Gal}(L/K).$$

Alors

$$\Phi_L = \sum_{\sigma \in S_L} \sigma$$

est un CM type de L .

Le corps L' est le corps engendré par $tr_{\Phi_L}(x), x \in L$.

Pour $x \in L$, on a

$$tr_{\Phi_L}(x) = tr_{\Phi_K}(tr_{L/K}(x)).$$

Donc si $x \in K$

$$tr_{\Phi_L}(x) = [L : K] tr_{\Phi_K}(x)$$

ce qui montre que $K' \subset L'$. □

3.2.14 Corps de modules

Dans le reste du paragraphe nous adoptons les notations suivantes. Soient A une variété abélienne, \mathcal{C} une polarisation de A et l une représentation de $R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ avec R une \mathbb{Q} -algèbre.

Shimura dans [S94] s'est intéressé aux corps de définition de (A, l, \mathcal{C}) . Il a défini un corps de nombres algébriques caractérisé par certaines conditions.

Définition 3.2.15 *Soient t_1, \dots, t_r des points de A dans \mathbb{C} . Soit $M(t) = M(A, t_1, \dots, t_r)$ un corps qui vérifie la condition suivante:
un élément $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ est l'identité sur $M(t)$ si et seulement si il existe un isomorphisme sur \mathbb{C}*

$$f : (A, l, \mathcal{C}) \mapsto (A, l, \mathcal{C})^\sigma$$

tel que $f(t_i) = t_i^\sigma$ pour $i = 1, \dots, r$

Pour la démonstration de l'existence de $M(t)$ nous renvoyons le lecteur à [S94].

Théorème 3.2.16 ([L83] chp5. th 3.1) *Soit (A, \mathcal{C}) une variété abélienne polarisée. Soit \mathcal{G} un groupe fini d'automorphismes de A . Soit k le corps de définition de A et de tous les éléments de \mathcal{G} . Alors il existe une variété projective W et une application rationnelle h de A dans W définie sur k satisfaisant*

1) h est définie sur A

2) $h(u) = h(v)$ si et seulement s'il existe un élément $T \in \mathcal{G}$ tel que $u = T(v)$

3) Si $f : A \rightarrow V$ est un morphisme de A dans une variété V tel que $f = f \circ T$ pour $T \in \mathcal{G}$, alors il existe une unique morphisme $f_W : W \rightarrow V$ tel que $f = f_W \circ h$ définie en $h(a)$ où h est définie en a .

On dit alors que le couple (W, h) est le quotient de A par \mathcal{G} .

Définition 3.2.17 *Soient (A, l, \mathcal{C}) une variété abélienne polarisée et \mathcal{G} le groupe des automorphismes de (A, l, \mathcal{C}) . On appelle variété de Kummer, notée (W, h) de (A, l, \mathcal{C}) le quotient de A par \mathcal{G} .*

Théorème 3.2.18 ([S94] 5.5.18) *Soient (A, l, \mathcal{C}) une variété abélienne polarisée et M son corps de modules. Alors la variété de Kummer (W, h) de (A, l, \mathcal{C}) vérifie les conditions suivantes:*

1) W est définie sur M .

2) h est définie sur tous les corps de définition de (A, l, \mathcal{C}) contenant M .

3) Si k est un corps de définition de (A, l, \mathcal{C}) contenant M , σ un isomorphisme de k sur M et

$$f_\sigma : (A, l, \mathcal{C}) \rightarrow (A^\sigma, l^\sigma, \mathcal{C}^\sigma)$$

est un isomorphisme, alors on a $h = h^\sigma f_\sigma$.

Le théorème suivant est une caractérisation du corps de modules en terme de variété de Kummer.

Théorème 3.2.19 ([L83] chp5 th3.3) *Soient M un corps de modules et $\mathcal{G} = \text{Aut}(A, l, \mathcal{C})$. Soit (W, h) la variété de Kummer de (A, l, \mathcal{C}) définie sur le corps de modules M . Pour tout point t de A on a*

$$M(A, \mathcal{C}, t) = M(h(t))$$

3.2.20 Interprétation du corps de modules comme un corps de classes

Soit (A, l, \mathcal{C}) une variété abélienne de type (K, Φ, a, E) relativement à Θ . Dans ce qui suit on donne une interprétation du corps de modules comme un corps de classes du corps reflex K' . Dans cette interprétation nous faisons appel au premier théorème principal de la multiplication complexe (voir [L83]).

Théorème 3.2.21 ([L83] chp3, 6.1) *Soit (A, l, \mathcal{C}) de type $(K, \Phi, \mathfrak{a}, E)$ relativement à Θ . Soient $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/K')$ et s un idèle de K' tels que $\sigma = (s, K')$ soit dans l'extension maximale abélienne de K' . On a alors*

1) $(A^\sigma, l^\sigma, \mathcal{C}^\sigma)$ est de type $(K, \Phi, N_{\Phi'}(s^{-1})\mathfrak{a}, \mathbf{N}(s)E)$ relativement à Θ^σ .

2) L'application Θ_σ est l'unique application telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} K/\mathfrak{a} & \longrightarrow & A_{tor} \\ N_{\Phi'(s^{-1})} \downarrow & & \downarrow \sigma \\ K/N_{\Phi'}(\mathfrak{a}) & \longrightarrow & A_{tor} \end{array}$$

où A_{tor} représente les points de torsion de A .

Tenant compte des notations de théorème précédent, on peut voir le corps de modules comme un corps de classes du corps reflex de K' .

Théorème 3.2.22 ([L83] chp5, 4.1) Soit $t_i = \Theta \circ \Phi(v_i)$ avec $v_i \in K/\mathfrak{a}$. Soient $t = (t_1, \dots, t_r)$ et $U(t)$ le sous-groupe des idèles s de K' vérifiant les conditions suivantes pour un certain $\beta \in K$ qui dépend de s

$$N_{\Phi'}(s^{-1})\mathfrak{a} = \beta\mathfrak{a}. \quad \beta\beta^p = \mathbf{N}(s).$$

et

$$N_{\Phi'}(s^{-1})v_i = \beta v_i.$$

Alors le corps de modules $M(A, l, \mathcal{C}, t)$ est le corps de classe de K' qui correspond au groupe $U(t)$.

Remarque 3.2.23

1) La variété abélienne polarisée (A, \mathcal{C}, l) détermine un point z du demi-plan supérieur \mathcal{H}_n de degré n , on peut alors la noter par $(A(z), \mathcal{C}_z, l_z)$, modulo un certain sous-groupe discret Γ de $Sp(n, \mathbb{R})$. Dans ce cas on peut noter (A, \mathcal{C}, l) par $(A(z), \mathcal{C}_z, l_z)$. Soient $T(z)$ le graphe pour la loi de composition de $A(z)$ et $V_z(r)$ le graphe de $l_z(r)$ pour $r \in \mathcal{O}$. Alors (voir [S56] prop10), les applications $z \rightarrow c(A(z))$, $z \rightarrow c(T(z))$, $z \rightarrow c(V_z(r))$ sont holomorphes sur \mathcal{H}_n , où $c(\cdot)$ désigne le point de Chow (pour la définition voir [S57] exposée19 démonstration du théoreme3).

Soit $\Lambda(0, z)$ l'origine de $A(z)$ défini par des fonctions holomorphes qui paramétrise le système abélien de variété $A(z)$ ([S56] n 10). Alors ([S56] n12) l'application φ définie par l'assemblage des applications $c(A(z))$, $c(T(z))$, $c(V_z(r))$ et $\Lambda(0, z)$ est holomorphe de \mathcal{H}_n dans l'espace projectif complexe, telle que $\mathbb{Q}(\varphi(z))$ est le corps de modules (A, \mathcal{C}, l) pour toute polarisation \mathcal{C} dont le type détermine le groupe Γ .

3.3 Relation entre deux corps CM

3.3.1 Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $N \geq 4$ un entier non divisible par 3. Soit $C_{2N}(\lambda)$ la complétion projective lisse de la courbe affine d'équation

$$y^{2N} = x(x-1)(x-\lambda),$$

de genre $2N-1$ et $J_{2N}(\lambda)$ sa jacobienne. On note toujours $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ la partie nouvelle de $J_{2N}(\lambda)$. La variété $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est de dimension $g = \Phi(2N)$. Soient $E = \mathbb{Q}(\zeta)$ où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{2N}}$ et $V_1 = H_1(J_{2N,\text{new}}(\lambda), \mathbb{Q})$ muni d'une structure de E -module et d'une forme alternée non dégénérée, $\psi : V_1 \times V_1 \longrightarrow \mathbb{Q}$.

On choisit un élément $\alpha \in E$ tel que $\bar{\alpha} = -\alpha$. Donc il existe une unique forme hermitienne

$$\varphi : V_1 \times V_1 \longrightarrow E$$

satisfaisant $\psi(x, y) = \text{tr}(\alpha\varphi(x, y))$ où tr est la trace de E dans \mathbb{Q}

Soit \mathbf{G} le groupe algébrique défini par

$$\mathbf{G} = \text{Res}_{E/\mathbb{Q}} U_2(V_1, \varphi)$$

(voir 2.9.1).

Puisque l'espace vectoriel V_1 est la cohomologie d'une variété abélienne, il est muni d'une structure de Hodge et d'une polarisation ψ . Il existe alors une et une seule classe de conjugaison de l'homomorphisme (voir §2.6)

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow GL_E(V)_{\mathbb{R}},$$

où $\mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbf{G}_m$.

L'homomorphisme h définit une structure de Hodge de type $(-1, 0) + (0, -1)$, se factorise par $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ et on a :

$$h_0 : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{R}}.$$

On note X la classe de conjugaison d'homomorphisme $h_0 : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$. La variété de Shimura ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ par (\mathbf{G}, X) a une interprétation comme espace de modules de variétés abélienne principalement polarisées muni d'une structure extra. Une structure de niveau de la variété abélienne principalement polarisée $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ définie sur un schéma \mathcal{S} est donnée par un isomorphisme de (\mathbb{Z}/n) -modules non symplectique,

$$f : J_{2N,\text{new}}(\lambda)[n] \longrightarrow (\mathbb{Z}/n)_{\mathcal{S}}^{2g}.$$

On note $\mathcal{A}_{g,n}$ l'espace de modules défini sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$, des variétés abéliennes polarisées par ρ muni d'une structure de niveau. Pour $n \geq 3$, $\mathcal{A}_{g,n}$ est un espace de modules fin [Ch85 théorème 1.4].

Il existe un sous-groupe compact ouvert tel que l'application $\lambda \longrightarrow J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ induit une application algébrique de \mathcal{S} vers la variété de Shimura ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$. Pour tout tore $u : (H, \{h'\}) \hookrightarrow (\mathbf{G}, X)$ dans \mathbf{G} , où $h' : \mathbb{S} \longrightarrow H_{\mathbb{R}}$ tel que uh' soit le conjugué de h par un élément de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Les points de ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ qui correspondent aux variétés abéliennes de type CM sont les points de l'image de l'application

$$M_{\mathbb{C}}(H, \{h'\}) \longrightarrow M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X) \longrightarrow {}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X).$$

Soit $E(\mathbf{G}, h_0)$ le corps de définition de la classe de conjugaison de cet homomorphisme

$$h_0 r : \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbf{G}_{\mathbb{C}}.$$

D'après [D72 3.7], $E(\mathbf{G}, h_0)$ est le corps reflex du corps CM de $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$.

Lemme 3.3.2

$$E(\mathbf{G}, h_0) \subset \mathbb{Q}(\zeta).$$

Démonstration.

L'application h_0 est complètement déterminée par la structure de Hodge V_1 de type $(-1, 0) + (0, -1)$. On a alors la décomposition de Hodge

$$V_1 \otimes \mathbb{C} \simeq H^{-1,0} \oplus H^{0,-1}.$$

L'action de $\mathbb{Q}(\zeta)$ sur V_1 se fait à travers la multiplication par les valeurs propres ζ^n , $n \in (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z})^*$.

On note $V_1(\zeta^n)$ l'espace propre qui correspond à ζ^n dans $V_1 \otimes \mathbb{C}$. On a alors la décomposition suivante:

$$V_1 \otimes \mathbb{C} \simeq \bigoplus_{n \in (\mathbb{Z}/2N\mathbb{Z})^*} V_1(\zeta^n).$$

D'après la définition de $E(\mathbf{G}, h_0)$ dans [De72 3.7], $E(\mathbf{G}, h_0)$ est l'intersection des corps de définition des espaces $H^{-1,0}$.

L'automorphisme ζ agit sur $H^{-1,0}$ avec des valeurs propres qui appartiennent à l'ensemble

$$\{\zeta^i \mid 1 \leq i \leq g\},$$

tel que les relations bilinéaires de Riemann suivante aient lieu:

1. $H^{-1,0}$ est isotrope pour $\psi \otimes \mathbb{C}$,
2. $\forall \omega \in H^{0,1}, \omega \neq 0$ on a $i\psi(\omega, \bar{\omega}) > 0$.

Ce sont ceux donnés par le type généralisé, en fait.

Les dimensions l_i des espaces propres qui correspondent à cette action sont égales à 0 ou 1 ou 2. On a alors la décomposition suivante

$$H^{-1,0} = \bigoplus_{l_i=1} V_{1,i} \oplus \bigoplus_{l_j=2} V_1(\zeta^j) \subset V_1 \otimes \mathbb{C}$$

où $V_{1,i} \subset V_1(\zeta^j)$ de dimension 1. On note $J = \{i_1, \dots, i_j, \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_j\}$ tel que $l_i = 1$ pour $i \in J$. Alors la condition 2 précédente impose que le choix de $V_{1,i}$ détermine $V_{1,\bar{i}}$ pour tout $i \in J$. Donc les choix possibles de $H^{-1,0}$ sont paramétrés par un ouvert de $\mathbb{P}(V_1(\zeta^{i_1}), \dots, V_1(\zeta^{i_j}))$. Puisque cet espace contient des points qui sont rationnels sur $\mathbb{Q}[\zeta]$, il existe alors un espace $H^{-1,0}$ défini sur $\mathbb{Q}[\zeta]$. \square

3.3.3 Dans la suite on prend $\lambda = \theta$ un point CM et on note $C_{2N}(\theta)$ la complétion projective de la courbe affine d'équation

$$y^{2N} = x(x-1)(x-\theta)$$

Soit $J_{2N}(\theta)$ sa jacobienne. D'après le paragraphe 1.4.5, $J_{2N, \text{new}}(\theta) \times J_2(\theta)$ est à isogénie près un facteur de $J_{2N}(\theta)$.

On rappelle que $J_2(\theta)$ est une courbe elliptique de type CM par un corps quadratique imaginaire K_2 . On note j_0 l'invariant modulaire de $J_2(\theta)$. Soit \mathcal{O}_{K_2} l'anneau des entiers de K_2 . Soit $\mathcal{O}_2(\theta)$ un sous-anneau de \mathcal{O}_{K_2} d'indice fini de la forme $\mathcal{O}_2(\theta) = \mathbb{Z} + \mathfrak{f}\mathcal{O}_{K_2}$ avec $\mathfrak{f} \geq 1$ tel que $\text{End}J_2(\theta) = \mathcal{O}_2(\theta)$. On note $D_2(\theta)$ le discriminant négatif de $\mathcal{O}_2(\theta)$.

H₁) On suppose que $J_{2N,\text{new}}(\theta)$ est **simple**. Donc $\text{End}_{\mathbb{Q}}(J_{2N,\text{new}}(\theta))$ est un corps qu'on note K_N . Soit K'_N le corps reflex de K_N . Soit M le corps de modules de $J_{2N,\text{new}}(\theta)$ munie des multiplications complexes.

H₂) On suppose que, K_2 n'est pas inclu dans $\mathbb{Q}(\zeta)$. Comme K_2 est quadratique, K_2 et $\mathbb{Q}(\zeta)$ sont linéairement disjoints sur \mathbb{Q} .

Proposition 3.3.4 *Soit $K_2\mathbb{Q}(\zeta) = K_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta)$ le compositum de K_2 et $\mathbb{Q}(\zeta)$ (i.e le corps engendré par K_2 et $\mathbb{Q}(\zeta)$). Alors pour presque tout θ CM vérifiant **H₁** et **H₂** on a*

$$\mathbb{Q}(\zeta)K_2 = K_N.$$

Avant de démontrer la proposition 3.3.4, nous commençons par démontrer

Lemme 3.3.5 $\mathbb{Q}(\zeta)K_2 = K_N$ si et seulement si $K_2 \subset K'_N$.

Démonstration.

• Si $\mathbb{Q}(\zeta)K_2 = K_N$ alors $K_2 \subset K_N$. D'après le lemme 3.2.12 $K'_2 \subset K'_N$. Or K_2 est un corps quadratique donc $K'_2 = K_2$ (voir [ST61] exemple 8.4). Alors $K_2 \subset K'_N$.

• Si $K_2 \subset K'_N$ alors $K_2 \subset (K'_N)'$ (Lemme 3.2.12). Puisque $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est simple alors (K_N, Φ_{K_N}) est un CM-type simple et $K''_N = K_N$. Donc $K_2 \subset K_N$. D'autre part $\mathbb{Q}(\zeta) \subset \text{End}_{\mathbb{Q}}(J_{2N,\text{new}}(\theta)) = K_N$, donc $\mathbb{Q}(\zeta)K_2 = K_N$. \square

Pour démontrer La proposition 3.3.4, supposons alors que K_2 et K'_N sont linéairement disjoints sur \mathbb{Q} .

La démonstration se fait en 3 étapes:

Etape 1: Nous démontrons que tous les éléments du groupe abélien $\text{Gal}(MK_2(j_0) \cap K'_N K_2(j_0) / K_2 K'_N)$ sont d'ordre 2.

Etape 2: Nous démontrons que le degré de $[M.\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}(\theta)]$ est borné indépendamment de θ où M est le corps de modules.

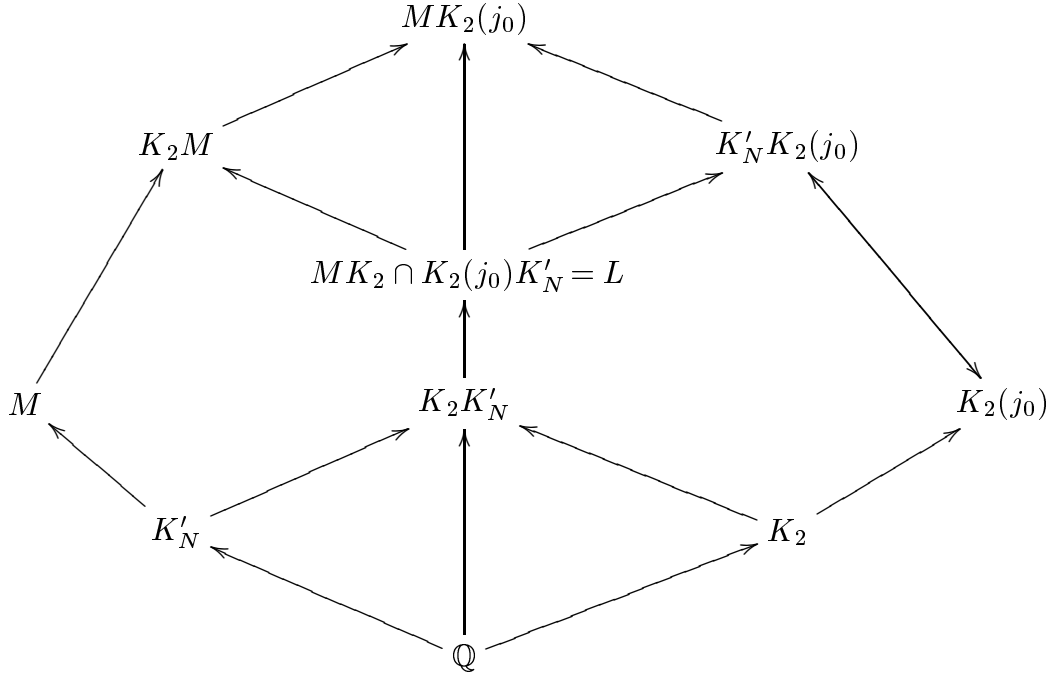
Etape 3: D'après les deux étapes précédentes le quotient $h(O_2(\theta))$ du nombre de classes d'idéaux de $O_2(\theta)$ par le nombre de classes d'idéaux d'ordre ≤ 2 de $O_2(\theta)$ est borné. D'autre part ce quotient tend vers infini $D_2(\theta)$ tend vers l'infini par Chowla. D'où la conclusion de la démonstration.

Démonstration.

Etape 1

Cette partie de la démonstration est inspirée de celle d'Edixhoven dans [E98], dans le cas du produit de deux courbes modulaires.

Considérons le diagramme suivant



Commençons par déterminer les extensions galoisiennes dans ce diagramme:

Les corps K_2 et $K_2(j_0)$ sont galoisiens sur \mathbb{Q} . Donc MK_2 (resp. $K'_N K_2$) est galoisien sur M (resp. K'_N). De même, $MK_2(j_0)$ (resp. $K'_N K_2(j_0)$) est galoisien sur M (resp. K'_N).

D'après la théorie du corps de classes, le corps de modules M est galoisien sur K'_N et le corps $K_2(j_0)$ est galoisien sur K_2 . Donc MK_2 (resp. $MK_2(j_0)$) est galoisien sur $K'_N K_2$ (resp. $K'_N K_2(j_0)$). De même, $MK_2(j_0)$ (resp. $K'_N K_2(j_0)$) est galoisien sur MK_2 (resp. $K'_N K_2$).

Puisque $K'_N K_2(j_0)$ et MK_2 sont galoisiens sur $K'_N K_2$, alors $MK_2(j_0)$ est galoisien sur $K'_N K_2$ et sur $L = MK_2 \cap K_2(j_0)K'_N$.

Avant de montrer que le groupe de Galois $\text{Gal}(L/K_2K'_N)$ est de type $(2, \dots, 2)$, on commence par démontrer les lemmes suivants.

Lemme 1 *L'élément non neutre du groupe $\text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ agit sur $\text{Gal}(K'_N K_2(j_0)/L)$ par -1 .*

Démonstration. Le groupe de Galois $\text{Gal}(K_2(j_0)/\mathbb{Q})$ est une extension de $\text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ par le groupe abélien $\text{Gal}(K_2(j_0)/K_2)$. Le groupe de Galois $\text{Gal}(MK_2(j_0)/M)$ est une extension de $\text{Gal}(MK_2/M)$ par le groupe abélien $\text{Gal}(MK_2(j_0)/MK_2)$. On a les deux suites exactes suivantes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \text{Gal}(K_2(j_0)/K_2) & \rightarrow & \text{Gal}(K_2(j_0)/\mathbb{Q}) & \rightarrow & \text{Gal}(K_2/\mathbb{Q}) \rightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2(j_0)/MK_2) & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2(j_0)/M) & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2/M) \rightarrow 0
 \end{array}$$

L'élément non neutre de $\text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ agit par -1 sur $\text{Gal}(K_2(j_0)/K_2)$. Or le groupe $\text{Gal}(MK_2(j_0)/MK_2)$ peut être vu comme un sous-groupe de $\text{Gal}(K_2(j_0)/K_2)$. Donc, $\text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ agit par -1 sur $\text{Gal}(MK_2(j_0)/MK_2)$.

D'autre part, $MK_2(j_0)$ est galoisien sur L et le groupe $\text{Gal}(MK_2(j_0)/MK_2)$ est isomorphe à $\text{Gal}(K'_N K_2(j_0)/L)$. •

Lemme 2 *Le groupe de galois $\text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ agit sur $\text{Gal}(MK_2/K_2(j_0)K'_N \cap MK_2)$ trivialement.*

Démonstration.

Le groupe $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2)$ s'injecte dans $\text{Gal}(M/K'_N) \times \text{Gal}(K_2(j_0)/K_2)$. Donc le groupe $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2)$ est abélien. Ainsi l'action de $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2)$ sur lui-même par conjugaison se factorise par $\text{Gal}(K'_N K_2/K'_N)$.

Le groupe $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2(j_0))$ est à la fois un sous-groupe de $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2)$ et un sous-groupe de $\text{Gal}(MK_2/K'_N K_2)$. On a les suites exactes suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2(j_0)/MK_2) & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N) & \rightarrow & \text{Gal}(K_2 K'_N / K'_N) & \rightarrow 0 \\
& & \uparrow & & & & \uparrow & \\
0 & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2(j_0)) & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N) & \rightarrow & \text{Gal}(K'_N K_2(j_0)/K'_N) & \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & & & \downarrow & \\
0 & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2/K_2 K'_N) & \rightarrow & \text{Gal}(MK_2/K'_N) & \rightarrow & \text{Gal}(K'_N K_2/K'_N) & \rightarrow 0
\end{array}$$

Le groupe $\text{Gal}(K_2 K'_N / K'_N)$ agit par conjugaison sur $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2)$ et donc sur $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2(j_0))$. Comme les corps K_2 et K'_N sont supposés linéairement disjoints, $\text{Gal}(K_2 K'_N / K'_N) \simeq \text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$.

L'action de $\text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ sur le groupe $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2(j_0))$ coïncide avec son action sur $\text{Gal}(MK_2/K_2 K'_N)$ via $\text{Gal}(MK_2/K'_N)$. Or $\text{Gal}(MK_2/K'_N)$ est abélien donc cette action est triviale. Donc $\text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ agit trivialement sur $\text{Gal}(MK_2(j_0)/K'_N K_2(j_0))$ qui est isomorphe à $\text{Gal}(MK_2/L)$. •

Lemme 3 *Le groupe de Galois $\text{Gal}(L/K_2 K'_N)$ est de type $(2, \dots, 2)$.*

Démonstration Le groupe $\text{Gal}(L/K_2 K'_N)$ est à la fois un groupe quotient du groupe $\text{Gal}(K'_N K_2(j_0)/K_2(j_0)K'_N \cap MK_2)$ et du groupe $\text{Gal}(MK_2/K_2 K'_N)$. Ainsi, d'après le lemme 1 et 2, $\text{Gal}(K_2/\mathbb{Q})$ agit d'une part trivialement et d'autre part par -1 sur le groupe $\text{Gal}(L/K_2 K'_N)$. Donc le groupe de $\text{Gal}(L/K_2 K'_N)$ est de type $(2, \dots, 2)$. •

Etape 2

Reprenons les notations de 3.3.1. L'application $\lambda \mapsto J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ induit une application algébrique de S vers la variété de Shimura ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, h_0)$, vu comme variété de module grossière. Il existe un sous groupe $K_n \subset K \subset \mathbf{G}(\mathbb{A}^f)$ telle que ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, h_0)$ s'interprète comme une variété de module fine muni des points de n -torsions. On a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
& \Phi_1 & \\
X & \rightarrow & {}_{K_n} M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, h_0) \\
& & \\
\downarrow & & \downarrow \\
& \Phi_2 & \\
S & \rightarrow & {}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, h_0)
\end{array}$$

où X est le pull-back. Si θ_N est un point de X au-dessus de θ , $K'_N[\Phi_1(\theta)] = M_N$ est le corps de définition de $J_{2N,\text{new}}(\theta)$ muni des structures supplémentaires mentionnées ci-dessus. On voit que l'indice $[K'_N(\theta_N) : M_N]$ est bornée par le degré de Φ_1 , donc indépendamment de θ . On conclut que $[\mathbb{Q}(\theta) : M]$ est borné indépendamment de θ et donc $[K'_N K_2(j_0) : MK_2 \cap K'_N K_2(j_0)]$ aussi.

Etape 3

Soit $q(\lambda)$ le cardinal du quotient de $\text{Pic}\mathcal{O}_2(\lambda)$ par son plus grand sous-groupe de type $(2, \dots, 2)$. Dans cette étape on applique directement le résultat de Chowla (cf [N90], 8.8) suivant

$$q(\lambda) \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad D_2(\lambda) \longrightarrow -\infty.$$

Puisque $\text{Gal}(K_2(j_0)/K_2) \simeq \text{Pic}\mathcal{O}_2(\lambda)$ et que $\text{Gal}(MK_2 \cap K'_N K_2(j_0)/K_2 K'_N)$ est de type $(2, \dots, 2)$. On a

$$q(\lambda) \mid \frac{[K'_N K_2(j_0) : K'_N K_2]}{[MK_2 \cap K'_N K_2(j_0) : K'_N K_2]}$$

Donc

$$[K'_N K_2(j_0) : MK_2 \cap K'_N K_2(j_0)] \longrightarrow \infty \quad \text{quand} \quad |D_2(\lambda)| \longrightarrow \infty.$$

Ceci contredit l'étape 2. On en déduit que K_2 et K'_N ne sont pas linéairement disjoints sur \mathbb{Q} □

Lemme 3.3.6 *Soit $\mathcal{O}_2(\lambda)$ l'ordre de multiplication complexe de $J_2(\lambda)$. Supposons que l'ordre de multiplication complexe de $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est $\mathcal{O}_{N,\text{new}} = \mathbb{Z}[\zeta] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_2(\lambda) = \mathbb{Z}[\zeta] \mathcal{O}_2(\lambda)$ où $\zeta = e^{2i\pi/2N}$. On note $D_N(\lambda)$ (resp. $D_2(\lambda)$) le discriminant de $\mathcal{O}_{N,\text{new}}$ (resp. $\mathcal{O}_2(\lambda)$). Alors*

$$\sqrt{|D_N(\lambda)|} \ll \sqrt{|D_2(\lambda)|}^{\Phi(2N)}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{|D_N(\lambda)|} &= \sqrt{|D_{\mathbb{Z}[\zeta]\mathcal{O}_2(\lambda)}|} \\ &= \sqrt{|D_{\mathbb{Z}[\zeta]}|^2} \sqrt{|D_2(\lambda)|}^{\Phi(2N)} \\ &\ll \sqrt{|D_2(\lambda)|}^{\Phi(2N)}. \end{aligned}$$

□

Remarques 3.3.7

1) il est probable qu'on pourra démontrer le lemme 3.3.6 sans prendre $\mathcal{O}_{N,\text{new}} = \mathbb{Z}[\zeta] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_2(\lambda)$. L'idée est d'utiliser la théorie locale du corps de classes pour borner les ramifications de corps de modules M sur K_N ; (travail que j'ai déjà entamé).

Chapitre 4

Finitude des points CM

Dans ce chapitre nous adaptions les notations suivantes. Soient $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $N \geq 4$ un entier non divisible par 3. Notons $C_{2N}(\lambda)$ la complétion projective lisse de la courbe affine d'équation:

$$y^{2N} = x(x-1)(x-\lambda).$$

Notons $J_{2N}(\lambda)$ la jacobienne de $C_{2N}(\lambda)$.

On rappelle qu'on se place sur un revêtement S de \mathbb{P}^1 défini dans (1.5.4). L'application $\lambda \mapsto J_{2N}(\lambda)$ induit une application de S vers la variété de modules grossière \mathcal{A}_{2N-1} des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $2N-1$; Son image est une courbe irréductible que nous notons S_{2N} . On a la décomposition de Wolfart sur S suivante:

$$J_{2N}(\lambda) \sim J_{2N,\text{new}}(\lambda) \times \prod_{D|ND \neq N} J_D(\lambda).$$

où $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est une variété abélienne principalement polarisée de dimension $g = \Phi(2N)$.

On s'intéresse aux λ pour lesquels $J_{2N}(\lambda)$ est à multiplication complexe. Alors il est en est de même de $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ (et de $J_2(\lambda)$).

Considérons les points λ CM vérifiant les propriétés suivantes

H₁) La variété abélienne $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est à multiplication complexe par un ordre $\mathcal{O}_{N,\text{new}}(\lambda)$ de la forme $\mathbb{Z}[\zeta] \otimes \mathcal{O}_2(\lambda)$, où $\mathcal{O}_2(\lambda)$ est l'ordre de multiplication complexe de $J_2(\lambda)$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{2N}}$.

H₂) La variété abélienne $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$ est simple.

On peut énoncer le résultat principal de la thèse :

Théorème 4.1: *Soit N un entier ≥ 4 non divisible par 3. Alors S_{2N} n'est pas modulaire si et seulement si l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tels que $J_{2N}(\lambda)$ est à multiplication complexe et tels que \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 soient satisfaites, est fini.*

Tenant compte du théorème 2.8.3 qui affirme que S_{2N} n'est pas modulaire ($N \geq 4$, non divisible par 3), le théorème 4.1 revient à démontrer le résultat suivant:

Théorème 4.2 *Soit N un entier ≥ 4 non divisible par 3. Alors l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tels que $J_{2N}(\lambda)$ est à multiplication complexe et tels que \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 soient satisfaites, est fini.*

Puisqu'on est placé sur un revêtement S de \mathbb{P}^1 tel que $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ soit principalement polarisée, on peut se limiter à démontrer que les points $\lambda \in S$ CM tels que $J_{2N, \text{new}}(\lambda) \times J_2(\lambda)$ est à multiplication complexe et vérifiant les hypothèses \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 est fini.

La stratégie de la démonstration est la suivante. Si l'ensemble \mathcal{A} est infini, on pourrait supposer par conjugaison que λ_N tend vers 0. La considération des relevés dans un domaine fondamental attaché à l'uniformisation de variété de Shimura associée à la famille $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ contredit l'inégalité de Liouville. Pour cela nous construisons un point $\tilde{\tau}$ de $\text{GL}_2(\mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}})$ dont on contrôle la hauteur logarithmique. Dans le paragraphe 3, nous ramenons notre $\tilde{\tau}$, à un point du domaine fondamental, en tenant compte du fait que le domaine fondamental associé à la famille $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ est compact. Nous concluons en appliquant une version du lemme de Minkovski pour un ordre non nécessairement maximal.

Notations. Dans la suite nous utilisons les notations suivante:

Soit V une variété algébrique. Soient f et g deux fonctions de V dans \mathbb{R}^+ .

La relation $f \approx g$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\frac{1}{C}g(x) \leq f(x) \leq Cg(x).$$

La relation $f \ll g$ signifie qu'il existe des constantes $C, D > 0$ telle que

$$f(x) \leq Cg(x) + D$$

4.1. Application de l'inégalité de Liouville

Pour la démonstration du théorème 4.2, nous allons donc supposer l'existence d'une suite infinie (λ_n) tels que $J_{2N, \text{new}}(\lambda_n) \times J_2(\lambda_n)$ soit de type CM.

Soit j_n l'invariant modulaire de $J_2(\lambda_n)$ à multiplication complexe par un ordre quadratique $\mathcal{O}_2(\lambda_n)$ de discriminant négatif $D_2(\lambda_n)$.

Comme j_n est algébrique sur \mathbb{Q} , l'application qui λ associe $J_2(\lambda)$ est $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ -équivariante. Donc $J_2(\lambda_n)$ est définie sur une extension finie sur \mathbb{Q} . Alors nous pouvons remplacer j_n par n'importe quel conjugué.

Soit $j(\tau)$ la fonction modulaire usuelle. Par conjugaison nous pouvons supposer et nous supposons que $j_n = j(\tau)$ pour $\tau = \frac{D_2(\lambda_n) + \sqrt{D_2(\lambda_n)}}{2}$.

La fonction λ est liée à la fonction modulaire j par

$$j = 2^8 \frac{(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{(\lambda^2 - \lambda)^2}.$$

Alors on a $\lambda_n = \lambda(\tau)$.

Le développement de Fourier de la fonction λ est

$$\lambda = 16q \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1 + q^{2n}}{1 + q^{2n-1}} \right)^8$$

où $q = \exp(i\pi\tau)$. Par simple substitution on obtient que

$$|\lambda_n| \approx \exp\left(-\pi \sqrt{|D_2(\lambda_n)|}\right).$$

Ce qui montre que $\lim |\lambda_n| = 0$. On peut donc extraire une sous-suite λ_n qui tend vers 0. Soit τ_n un point d'un domaine fondamental F_g pour l'action du groupe $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ qui correspond au point λ_n tel que $\lambda(\tau_n) = \lambda_n$. Soit τ_∞ le point qui correspond à l'un des points de S tel que $\lambda = 0$ et $\lambda(\tau_\infty) = 0$. Le point τ_∞ existe, puisque la famille $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ a bonne réduction potentielle en 0.

Quitte à modifier un peu le domaine fondamental F_g , on peut supposer τ_∞ non situé sur son bord; donc τ_n tend vers τ_∞ . En développant λ au voisinage de τ_∞ , on obtient

$$\log |\tau_n - \tau_\infty| \approx \chi \log |\lambda_n|,$$

où χ est une constante positive.

Donc il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\log |\tau_n - \tau_\infty| \approx -c \sqrt{|D_2(\lambda_n)|}.$$

Sous l'hypothèse \mathbf{H}_1 et le lemme 3.3.6, on a

$$\sqrt{|D_N(\lambda_n)|} \ll \sqrt{|D_2(\lambda_n)|}$$

où $D_N(\lambda_n)$ est le discriminant de $\mathcal{O}_{N, \text{new}}$.

D'où

$$\log |\tau_n - \tau_\infty| \ll -\sqrt{|D_N(\lambda_n)|}.$$

Les points τ_n et τ_∞ sont algébriques puisque la variété abélienne $J_{2N, \text{new}}(\lambda_n)$ est de type CM (voir par exemple [Sh92] théorème A-3) et de degré borné par $2g$ sur \mathbb{Q} . D'après l'inégalité de Liouville (voir [Fe66] Lemme 4) on a:

$$(**) \quad \log |\tau_n - \tau_\infty| > -Ch(\tau_n).$$

où C est une constante ne dépend que de τ_∞ , et où $h(\tau_n)$ désigne la hauteur logarithmique de τ_n , (le sup des hauteurs des coefficients) généralisée aux matrices. Pour conclure la démonstration, il faut trouver une borne supérieure de $h(\tau_n)$.

Nous commençons tout d'abord par rappeler la définition de la hauteur logarithmique pour un point $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ suivant [H.S201]. Soit K un corps de nombre qui contient x . On pose

$$h(x) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_K} \log(\max\{1, \|x\|_v\}),$$

où M_K est l'ensemble de places de K (l'ensemble des places archimédiennes est noté par M_K^∞ et $\|\cdot\|_v$ est la valeur absolue normalisée qui correspond à la place v .

Remarque Bien que τ_n appartienne au domaine fondamental pour $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, on ne sait a priori rien de ses conjugués. La théorie de la multiplication complexe donne des informations sur les conjugués de λ_n , pas de τ_n . C'est là l'une des difficultés techniques principales que nous rencontrons. D'où l'idée de remplacer τ_n provisoirement par un τ plus commode dont on peut contrôler la hauteur.

4.2 Construction d'un τ “commode”

On rappelle que pour λ un point CM, la variété abélienne $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$ de dimension $\Phi(2N)$ est à multiplication complexe par un ordre $\mathcal{O}_{N, \text{new}}$ d'un corps CM de la forme $K_N = \mathbb{Q}(\zeta).K_2$ où K_2 est le corps CM de $J_2(\lambda)$ et $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{2N}}$ (prop 3.3.4).

4.2.1 D'après le théorème 3.2.7, il existe un $\mathcal{O}_{N, \text{new}}$ -idéal entier \mathfrak{a} tel que $J_{2N, \text{new}}(\lambda) = \mathbb{C}^g / \Phi(\mathfrak{a})$ où $\Phi(\mathfrak{a})$ où Φ est le CM-type de $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$.

Soit $\alpha \in K_N$. Soit $S(\alpha)$ la représentation de α dans \mathbb{C}^g . Il existe donc un isomorphisme

$$\mathbb{C}^g / \Phi(\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathbb{C}^g / \Phi(\alpha\mathfrak{a}).$$

Soit $E_{\mathfrak{a}}$ une forme de Riemann de $\mathbb{C}^g / \Phi(\mathfrak{a})$ et $E_{\alpha\mathfrak{a}}$ son image par $S(\alpha)$. Alors d'après [L83 chap 3 §5.2] et en considérant les formes de Riemann contravariantes suivant nos convention on a pour $\alpha\bar{\alpha} \in \mathbb{Q}$, $E_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} E_{\alpha\mathfrak{a}}$. Donc on peut remplacer \mathfrak{a} par n'importe quel $\alpha\mathfrak{a}$ tel que $\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} \in \mathbb{Q}$.

Lemme 4.2.3 *Il existe un $\tilde{\tau} \in GL_{2g}(\mathbb{R} \cap K_N)$ dont la projection dans le quotient*

$$\mathbb{R}^* O_{2g}(\mathbb{R}) \backslash GL_{2g}(\mathbb{R}) / GL_{2g}(\mathbb{Z}) \quad \text{est dans} \quad K \backslash \mathbf{G}(\mathbb{R}) / \mathbf{G}_{\mathbb{Z}}$$

et coïncide avec le point qui paramètre la variété abélienne $J_{2N, \text{new}}(\lambda) \simeq \mathbb{C}^g / \Phi(\mathfrak{a})$, tel que

$$h(\tilde{\tau}) \ll \log \text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a}))$$

où $\text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a}))$ est le volume de $\Phi(\mathfrak{a})$.

Démonstration. On définit la fonction distance F par

$$F(x) = \sup_{1 \leq i \leq g} \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$

où $x = (x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) \in \mathbb{R}^{2g}$. On note m_i ($1 \leq i \leq 2g$) les minima successifs de F sur $\Phi(\mathfrak{a})$ et V_F le volume de $\{x \in \mathbb{R}^{2g} \mid F(x) < 1\}$.

Soit $b : (b_1, \dots, b_{2g})$ une base de \mathfrak{a} choisie telle que $\Phi(b)$ est une base de $\Phi(\mathfrak{a})$ qui vérifie les conditions suivantes (voir l'appendice 1, proposition 1.3.5)

$$\begin{aligned} F(b_1) &= m_1 \\ 2F(b_j) &\leq jm_j \quad (2 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

D'après l'identification de l'ensemble des réseaux \mathcal{R} de \mathbb{R}^{2g} avec $GL_{2g}(\mathbb{R})/GL_{2g}(\mathbb{Z})$ (voir appendice 1 §1.2), on peut associer à $\Phi(\mathfrak{a})$ muni de la base $\Phi(b)$ une matrice $\tilde{\tau}$ définie par

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\varphi_1(b_1)), & \dots, & \operatorname{Re}(\varphi_1(b_{2g})) \\ \operatorname{Im}(\varphi_1(b_1)), & \dots, & \operatorname{Im}(\varphi_1(b_{2g})) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \operatorname{Re}(\varphi_g(b_1)), & \dots, & \operatorname{Re}(\varphi_g(b_{2g})) \\ \operatorname{Im}(\varphi_g(b_1)), & \dots, & \operatorname{Im}(\varphi_g(b_{2g})) \end{pmatrix}.$$

On munit $GL_{2g}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|\tau\| = \sum_{i=1}^g \sup_{1 \leq j \leq 2g} \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2}$$

$$\text{Pour } \tau = \begin{pmatrix} x_{1,1}, & \dots, & x_{1,2g} \\ y_{1,1}, & \dots, & y_{1,2g} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_{g,1}, & \dots, & x_{g,2g} \\ y_{g,1}, & \dots, & y_{g,2g} \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant calculer la hauteur de notre $\tilde{\tau}$

$$\begin{aligned} h(\tilde{\tau}) &= \frac{1}{[\mathbb{Q}(\tilde{\tau}) : \mathbb{Q}]} \sum_{i=1}^{2g} \log(\max(1, \|\varphi_i(\tilde{\tau})\|)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2g} \log(\max(1, \sum_{j=1}^{2g} \sup_{1 \leq i \leq 2g} \sqrt{\operatorname{Re}|\varphi_i(b_j)| + \operatorname{Im}|\varphi_i(b_j)|})) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2g} \log(\max(1, \sum_{j=1}^{2g} \sup_{1 \leq i \leq 2g} |\varphi_i(b_j)|)) \end{aligned}$$

On utilise g fois le fait que $\max(1, x + y) \leq 2\max(1, x)\max(1, y)$ pour $x, y > 0$. Donc on a

$$h(\tilde{\tau}) \leq 2^{2g-1} \sum_{i=1}^{2g} \sum_{j=1}^{2g} \log(\max(1, \sup_{1 \leq i \leq 2g} |\varphi_i(b_j)|))$$

Or les b_j ($1 \leq j \leq 2g$) sont des entiers de K_N (\mathfrak{a} un idéal entier), donc $N_{K/\mathbb{Q}}(b_j) \in \mathbb{Z}$.
Puisque

$$N_{K/\mathbb{Q}}(b_j) = N_{\Phi}(b_j)N_{\overline{\Phi}}(b_j) \in \mathbb{Z} \text{ et } N_{\Phi}(b_j) = \prod_{i=1}^{2g} |\varphi_i(b_j)| \geq 1,$$

on a $\sup_{1 \leq i \leq 2g} |\varphi_i(b_j)| \geq 1$. Donc

$$\begin{aligned} h(\tilde{\tau}) &\leq 2^{2g-1} \sum_{i=1}^{2g} \sum_{j=1}^{2g} \log(\sup_{1 \leq i \leq 2g} |\varphi_i(b_j)|) \\ &\leq 2^{2g} \sum_{j=1}^{2g} \log(\sup_{1 \leq i \leq 2g} |\varphi_i(b_j)|) \\ &\leq 2^{2g} \sum_{j=1}^{2g} \log(F(\Phi(b_j))) \\ &\leq 2^{2g} \sum_{j=1}^{2g} \log(m_j) - \log V_F \\ &\leq 2^{2g} g \log 2^n + 2^{2g} g \log \det(\Phi(\mathfrak{a})) - \log V_F \\ &\leq 2^{2g} g \log 2^n + 2^{2g} g \log \text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a})) - \log V_F \\ &\ll \log \text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a})). \quad \square \end{aligned}$$

Pour déplacer $\tilde{\tau}$ dans le groupe $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ plutôt que dans $GL_{2g}(\mathbb{R})$, on va maintenant modifier $\Phi(b)$ en une base symplectique.

Lemme 4.2.4 *Il existe une base symplectique (b'_1, \dots, b'_{2g}) de $\Phi(\mathfrak{a})$ pour la forme alternée non dégénérée $E_{\mathfrak{a}}$ tel que*

$$\log \|b'_i\| \ll \log \text{Max}_{\substack{1 \leq i \leq 2g \\ 1 \leq j \leq g}} \|\varphi_j(b_i)\|,$$

où $1 \leq l \leq 2g$.

Démonstration. D'après le lemme 1.4.4 (appendice 1), on a

$$\log \|b'_i\| \ll \log \text{Max}_{\substack{1 \leq i \leq 2g \\ 1 \leq j \leq g}} \|\varphi_j(b_i)\| + \log \text{Max}_{\substack{1 \leq i, h \leq 2g \\ 1 \leq j, k \leq g}} E_{\mathfrak{a}}(\varphi_j(b_i), \varphi_k(b_h)),$$

Pour tout $1 \leq l \leq 2g$.

Donc il suffit de majorer

$$\log \text{Max}_{\substack{1 \leq i, h \leq 2g \\ 1 \leq j, k \leq g}} E_{\mathfrak{a}}(\varphi_j(b_i), \varphi_k(b_h)).$$

On munit la variété abélienne $\mathbb{C}^g/\Phi(\mathfrak{a})$ de la forme Hermitienne $H_{\mathfrak{a}}$ telle que $E_{\mathfrak{a}} = \text{Im} H_{\mathfrak{a}}$ soit à valeur dans \mathbb{Z} sur $\Phi(\mathfrak{a})$ et identifier $\Phi(\mathfrak{a})$ à son dual. La variété abélienne principalement polarisée $(\mathbb{C}^g/\Phi(\mathfrak{a}), H_{\mathfrak{a}})$ correspond au point τ dans l'espace de Siegel h_g , et on a

$$(\mathbb{C}^g / \Phi(\mathfrak{a}), H_{\mathfrak{a}}) \approx (\mathbb{C}^g / \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, H),$$

où H est la forme hermitienne standard. Alors, pour les covolumes on a

$$Vol_{H_{\mathfrak{a}}}(\Phi(\mathfrak{a})) = Vol_H(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$$

(l'indice est la forme hermetienne sur \mathbb{C}^g par rapport à laquelle on calcule le covolme). Or si τ reste dans un voisinage borné de τ_{∞} , $Vol_H(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ est borné indépendamment de τ . On en déduit que $H_{\mathfrak{a}} \ll H$, (la constante étant indépendante de \mathfrak{a}) et

$$E_{\mathfrak{a}}(\varphi_i(b_j), \varphi_k(b_h)) \ll \|\varphi_i(b_j)\| \|\varphi_k(b_h)\|.$$

□

4.3 Réduction de $\tilde{\tau}$

4.3.1 On commence par définir les groupes et les espaces qui interviennent

- L'espace de Siegel h_g est définie par

$$h_g = \{A \in M_g(\mathbb{C}) \mid A = A^t, \text{Im}(A) \geq 0\}.$$

Le groupe symplectique $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ défini par

$$Sp_{2g}(\mathbb{R}) = \{z \in M_{2g}(\mathbb{R}) \mid {}^t M \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0 \end{pmatrix}\}$$

agit transitivement sur h_g par l'action suivante:

$$Z \longrightarrow \sigma.Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Soit $U_g(\mathbb{C})$ le sous-groupe d'isotropie de τ_{∞} dans h_g . alors on a $h_g \simeq U_g(\mathbb{C}) \backslash Sp_{2g}(\mathbb{R})$

- Soit $\mathbf{G} = \text{Res}_{E^+/\mathbb{Q}} SU_2(\varphi)$ le groupe algébrique défini sur \mathbb{Q} où $SU_2(\varphi)$ est le groupe unitaire spécial associé à la forme hermitienne φ (voir lemme 2.9.1).

On note $X = \mathbf{G}(\mathbb{R})/K$ où K est le compact maximal de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, la $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison du morphisme de \mathbb{S} dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ définissent la structure de Hodge de nos variétés abéliennes. C'est un domaine hermitien symétrique contenu dans h_g . On note ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ la variété de Shimura associée aux données de Shimura (\mathbf{G}, X) et $\mathbf{G}_{\mathbb{Z}} = \mathbf{G} \cap Sp_{2g}(\mathbb{Z}, \varphi)$.

Notre situation se résume par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\tau}' \in \mathbf{G}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & Sp_{2g}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_{2g}(\mathbb{R}) \ni \tilde{\tau} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \tau' \in K \backslash \mathbf{G}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & U_g \backslash Sp_{2g}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^* O_{2g}(\mathbb{R}) \backslash GL_{2g}(\mathbb{R}) \ni \tau \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K \backslash \mathbf{G}(\mathbb{R}) / \mathbf{G}_{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & h_g / Sp_{2g}(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^* O_{2g}(\mathbb{R}) \backslash GL_{2g}(\mathbb{R}) / GL_{2g}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

Lemme 4.3.2 *La variété ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ est compacte.*

Démonstration. D'après [Bo69] théorème 8.4, il suffit de démontrer que le groupe de caractères de la composante neutre \mathbf{G}^0 est trivial (i.e $X_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}^0) = \{1\}$) et que tout élément de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$ est semi-simple.

Le groupe $SU_2(\varphi)$ est connexe sur E^+ . Donc \mathbf{G} est connexe sur \mathbb{Q} . Puisque le groupe dérivé de \mathbf{G} est égal à lui même alors $X_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G}) = \{1\}$.

On note pr la projection de \mathbf{G}_{E^+} dans le groupe SU_2 . Puisque SU_2 est compact alors pour tout élément u dans \mathbf{G}_{E^+} on associe 1.

Soit u un élément unipotent de $\mathbf{G}(\mathbb{Q})$. Alors sa projection $pr(u) = 1$. Or $\mathbf{G}_{E^+} = \prod_{\sigma} SU_2^{\sigma}$, donc u est égale à 1. \square

Corollaire 4.3.3 *Le domaine fondamental pour l'action par $\mathbf{G}_{\mathbb{Z}}$ est compact.*

Démonstration. Découle du fait que la variété ${}_K M_{\mathbb{C}}(\mathbf{G}, X)$ est compacte. \square

Lemme 4.3.4 *Soit τ dans la $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ -orbite de X et paramètre la variété abélienne $J_{2N, \text{new}}(\lambda)$. Pour un quelconque relevé $\tilde{\tau}$ de τ , il existe $M \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ tel que $M\tau \in F_X$ et*

$$\| M \| \ll \| \tilde{\tau} \|$$

où $\| \cdot \|$ désigne une norme matricielle.

Démonstration.

Puisque τ est dans $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ -orbite de X , alors on peut l'envoyer par un $M \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ dans F_X : c'est à dire

$$\tau_n = M\tau \in F_X$$

où $M \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$.

Soit $\tilde{\tau}_n$ le représentant de τ_n dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. On a alors

$$\tilde{\tau}_n = M\tilde{\tau}\alpha,$$

où $\alpha \in U_g$.

Donc $M^{-1} = \tilde{\tau}\alpha\tilde{\tau}_n^{-1}$ (M^{-1} existe car M est symplectique). Puisque $\alpha \in U_g$ qui est un compact et $\tau_n \in F_X$ qui est aussi un compact (c'est le point), alors

$$\| M \| = \| M^{-1} \| \leq \| \tilde{\tau} \| \| \tilde{\tau}_n^{-1} \| \| \alpha \| \ll \| \tilde{\tau} \|.$$

\square

4.4 Conclusion de la preuve de théorème 4.2

4.4.1 On fixe tout d'abord des notions compatibles de hauteur sur h_g et $Sp_{2g}(\mathbb{R})$.

Pour chaque $x \in \Omega \simeq Sp_{2g}(\mathbb{R})/SU_g$, on note h_x l'homomorphisme $\mathbb{S} \rightarrow Sp_{2g_{\mathbb{R}}}^{ad}$ qui lui correspond. Soit μ_x le cocaractère $z \mapsto h_{x, \mathbb{C}}(z, 1)$ attachée à h_x .

Pour chaque $x \in \Omega$, μ_x définit une filtration décroissante $\text{Filt}(\mu_x)$ de la catégorie des représentations de dimension finie de $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ sur \mathbb{C} .

On considère le plongement de Borel ([M90] p2,pro1.1) défini par

$$\beta : \begin{array}{ccc} h_g & \longrightarrow & \check{h}_g \\ x & \mapsto & \text{Filt}(\mu_x). \end{array}$$

On sait que le groupe $SU_g(\mathbb{C})$ est le groupe d'isotropie de τ_∞ dans $Sp_{2g}(\mathbb{R})$. Soit P le groupe d'isotropie de τ_∞ dans $Sp_{2g}(\mathbb{C})$.

Donc $SU_g(\mathbb{C}) = P \cap \mathbf{G}(\mathbb{R})$ et on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Sp_{2g}(\mathbb{R})/SU_g & \hookrightarrow & Sp_{2g}(\mathbb{C})/P(\mathbb{C}) \\ \downarrow \approx & & \downarrow \approx \\ h_g & \hookrightarrow & \check{h}_g. \end{array}$$

où \check{h}_g admet une structure de variété projective sur \mathbb{C} .

On dit que \check{h}_g est le compact dual Hermitien symétrique de h_g . Or \check{h}_g est une variété algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, est même sur le corps reflex $\mathbb{Q}[\zeta]$. Alors la hauteur de τ , $h(\tau)$ est par là est bien définie.

On considère maintenant le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} Sp_{2g}(\mathbb{R}) & \hookrightarrow & Sp_{2g}(\mathbb{C}) \\ i_1 \downarrow & & i_2 \downarrow \\ Sp_{2g}(\mathbb{R})/SU_{2g} & \hookrightarrow & Sp_{2g}(\mathbb{C})/P(\mathbb{C}) \end{array}$$

où i_1 et i_2 sont définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors le représentant $\tilde{\tau}$ de τ dans $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ modulo $SU_{2g}(\mathbb{C})$ est algébrique. D'autre part, puisque i_2 algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}$, il existe une constante positif C telque

$$h(i_2(\tilde{\tau})) \leq Ch(\tilde{\tau}).$$

Donc (cf [Sil86] VIII, 5.6)

$$h(\tau) \leq Ch(\tilde{\tau}).$$

Proposition 4.4.2 *Soit $\tilde{\tau} \in Sp_{2g}(\mathbb{R})$ dont la projection dans le quotient*

$$K \backslash \mathbf{G}(\mathbb{R}) / \mathbf{G}_{\mathbb{Z}} \subset U_g \backslash Sp_{2g}(\mathbb{R})$$

est le point τ qui correspond à la variété abélienne $J_{2N,\text{new}}(\lambda) \simeq \mathbb{C}^g / \Phi(\mathfrak{a})$, et tel que

$$h(\tilde{\tau}) \ll \log \text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a})).$$

Soit τ_n le représentant de τ dans le domaine fondamental pour l'action de $\mathbf{G}_{\mathbb{Z}}$.

Alors

$$h(\tau_n) \ll \log \text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a}))$$

où $\text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a}))$ est le volume $\Phi(\mathfrak{a})$.

Démonstration. D'après le lemme 4.3.4, on peut envoyer τ par un élément de $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ sur τ_n dans le domaine fondamental F_g de $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ ou plus précisément dans le domaine fondamental F_X pour l'action $\mathbf{G}_{\mathbb{Z}}$. La matrice de passage M de τ dans τ_n est de norme bornée par la norme de $\tilde{\tau}$. Donc, on a

$$h(\tau_n) = h(M\tau)$$

où $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$. Donc

$$\begin{aligned} h(\tau_n) &= h\left(\frac{A\tau+B}{C\tau+D}\right) \\ &\leq h(A\tau+B) + h(C\tau+D) \\ &\leq h(A) + h(\tau) + h(B) + h(C) + h(\tau) + h(D) + 2\log 2 \end{aligned}$$

Or A, B, C , et D sont des matrices à coefficients dans \mathbb{Z} . Alors on a

$$\begin{aligned} h(\tau_n) &\leq \log \|A\| + \log \|B\| + \log \|C\| + \log \|D\| + h(\tau) + 2\log 2 \\ &\ll \log \|M\| + h(\tau) \\ &\ll h(\tilde{\tau}) + h(\tau). \end{aligned}$$

Or d'après §4.4.1

$$h(\tau) \ll h(\tilde{\tau}),$$

alors

$$h(\tau_n) \ll h(\tilde{\tau}) \ll \log \text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a})).$$

□

Lemme 4.4.3 *Nous gardons les mêmes notations que dans la proposition 4.4.2. Soit $\mathcal{O}_{N,\text{new}}$ l'ordre de multiplication complexe de $J_{2N,\text{new}}(\lambda)$. Soit $D_N(\lambda)$ le discriminant de $\mathcal{O}_{N,\text{new}}$. Supposons que l'hypothèse \mathbf{H}_1 est vérifiée. Alors on a*

$$h(\tau_n) \ll \log |D_N(\lambda)|.$$

Démonstration.

D'après la proposition 4.4.2 on a

$$h(\tau_n) \ll \log \text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a})).$$

Puisque

$$\text{Vol}(\Phi(\mathfrak{a})) = 2^{r_2} \sqrt{|D_N(\lambda)|} N_{\mathcal{O}_{N,\text{new}}}(\mathfrak{a})$$

(voir appendice 2, lemme 2.3.2), alors on a

$$h(\tau_n) \leq 2^{-r_2} \log \sqrt{|D_{N(\lambda)}|} N_{\mathcal{O}_{N,\text{new}}}(\mathfrak{a}).$$

D'après la remarque 4.2.1, on peut remplacer \mathfrak{a} par n'importe quel $\alpha\mathfrak{a}$ où $\alpha \in K_N$ et vérifiant $\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} \in \mathbb{Q}$. Alors on peut prendre \mathfrak{a} un idéal entier pris convenablement dans la classe des $\mathcal{O}_{N,\text{new}}$ -idéaux propres modulo les idéaux principaux α tel que $\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}} \in \mathbb{Q}$. On pose $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_2(\lambda)$ où $\mathcal{O}_2(\lambda)$ est l'ordre de multiplication complexe de $J_2(\lambda)$. Soit α un élément de \mathfrak{b}^{-1} alors d'après le lemme 2.3.3 (appendice 2)

$$N_{K_2}(\alpha) \ll |D_2(\lambda)|^{\frac{1}{2}} N_{\mathcal{O}_2(\lambda)}(\mathfrak{b}^{-1}).$$

On note $N_{\mathbb{F}}$ la norme type. Alors

$$\begin{aligned} N_{\mathbb{F}}(N_{K_2}(\alpha)) &\ll |D_2(\lambda)|^{\frac{g}{2}} (N_{\mathcal{O}_2(\lambda)}(\mathfrak{b}))^{-g} \\ N_{K_N}(\alpha) &\ll |D_2(\lambda)|^{\frac{g}{2}} (N_{\mathcal{O}_2(\lambda)}(\mathfrak{b}))^{-g}. \end{aligned}$$

Donc

$$N_{\mathcal{O}_{N,\text{new}}}(\alpha\mathfrak{a}) \ll |D_2(\lambda)|^{\frac{g}{2}} (N_{\mathcal{O}_2(\lambda)}(\mathfrak{b}))^{-g} N_{\mathcal{O}_{N,\text{new}}}(\mathfrak{a}).$$

Puisque $\mathfrak{b} \otimes \mathbb{Z}[\zeta] \subset \mathfrak{a}$ (\mathfrak{a} étant un $\mathcal{O}_{N,\text{new}}$ -idéal) alors on a

$$[O_{N,\text{new}} : \mathfrak{a}] \leq [O_{N,\text{new}} : \mathfrak{b} \otimes \mathbb{Z}[\zeta]] = [O_2(\lambda) \otimes \mathbb{Z}[\zeta] : \mathfrak{b} \otimes \mathbb{Z}[\zeta]] = [O_2(\lambda) : \mathfrak{b}]^g.$$

Donc

$$N_{\mathcal{O}_{N,\text{new}}}(\mathfrak{a}) \leq N_{\mathcal{O}_2(\lambda)}(\mathfrak{b})^g,$$

et

$$N_{\mathcal{O}_{N,\text{new}}}(\alpha\mathfrak{a}) \ll |D_2(\lambda)|^{\frac{g}{2}}.$$

Or $O_{N,\text{new}} = O_2(\lambda) \otimes \mathbb{Z}[\zeta]$ donc $|D_2(\lambda)|^{\frac{g}{2}} \ll |D_N(\lambda)|^{\frac{g}{2}}$. Nous avons alors que

$$h(\tau_n) \ll \log |D_N(\lambda)|.$$

□

Avec ce lemme on obtient une contradiction avec l'inégalité de liouville (**). Ce qui achève la démonstration du théorème 4.2.

Appendice 1

Réseaux et minima successifs

Dans cet appendice, on rappelle tout d'abord quelques définitions sur les réseaux et les minima successifs. Dans le dernier paragraphe, on donne une construction d'une base symplectique effectif à partir d'une base symplectique. Ces résultats sont utilisés dans le chapitre 4, pour construire un élément de $GL_{2g}(\mathbb{R})$ puis dans $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ et calculer sa hauteur.

1.1 Réseaux

Commençons par rappeler la:

Définitions 1.1.1

- 1) Un réseau de \mathbb{R}^n est un sous-groupe discret de rang n de \mathbb{R}^n .
- 2) Nous notons μ la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n . On définit alors le volume d'une partie intégrable S de \mathbb{R}^n , par la mesure $\mu(S)$.
- 3) Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^n . Pour chaque base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de Λ , on désigne par P_e le parallélotope semi-ouvert

$$P_e = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mid 0 \leq \alpha_i < 1 \right\}.$$

On définit le volume d'un réseau Λ par le volume de l'un quelconque des parallélotopes P_e (le volume $\mu(P_e)$ est indépendant de la base choisie pour Λ).

- 4) Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^n de base (a_1, \dots, a_n) . On définit le déterminant de Λ par

$$\det(\Lambda) = | \det(a_1, \dots, a_n) |$$

où $\det(a_1, \dots, a_n)$ est le déterminant de matrice carrée $n \times n$ de jème colonne de vecteur a_j .

1.2 Le dictionnaire réseaux-formes quadratiques

Nous identifions l'ensemble des réseaux \mathcal{R} de \mathbb{R}^n au quotient $GL_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{Z})$. En effet, l'image $u(\Lambda)$ d'un réseau Λ par un élément u de $GL_n(\mathbb{R})$ est un nouveau réseau. On obtient tous les réseaux par ce procédé à partir d'un réseau Λ_0 . Pour une base donnée, on peut toujours identifier Λ_0 à \mathbb{Z}^n .

On a $v(\Lambda) = u(\Lambda)$ si et seulement si $u^{-1}v$ appartient au stabilisateur $GL_n(\mathbb{Z})$ de \mathbb{Z}^n .

Deux réseaux $u(\mathbb{Z}^n)$ et $v(\mathbb{Z}^n)$ sont semblables (resp. isométriques) si et seulement si on a $v = wus$ pour des éléments convenables $s \in GL_n(\mathbb{Z})$ et $w \in \mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R})$ (resp. $w \in O_n(\mathbb{R})$). On peut donc identifier l'ensemble des classes d'isométrie et de similitudes de réseaux de \mathbb{R}^n respectivement à

$$O_n \backslash GL_n(\mathbb{R}) / GL_n(\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}^* O_n \backslash GL_n(\mathbb{R}) / GL_n(\mathbb{Z}).$$

1.3 Les minima successifs

Nous allons définir maintenant les minima successifs d'une fonction distance sur un réseau comme dans [Cas 59].

Définition 1.3.1 Une fonction distance est une application continue $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives vérifiant la condition d'homogénéité suivante

$$F(\lambda x) = \lambda F(x)$$

quels que soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une fonction distance F est dite symétrique si $F(-x) = F(x)$.

Une fonction distance F est dite convexe si $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$.

Définition 1.3.2 Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^n et soit F une fonction distance. Soit A_β la partie définie par

$$A_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) < \beta\}.$$

Les minima successifs de F sur Λ sont les n nombres réels positifs $m_1 \dots m_n$ définis de la façon suivante: Pour $1 \leq r \leq n$

$$m_r = \min\{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid A_\beta \text{ contient au moins } r \text{ éléments linéairement indépendants}\}.$$

Remarque 1.3.3. Puisque $\Lambda \cap A_\beta$ est un ensemble fini pour tout réels positifs. On vérifie aussitôt que cette définition est licite, *i.e.* que l'ensemble

$$\{\beta \in \mathbb{R}_+ \mid A_\beta \text{ contient au moins } r \text{ éléments linéairement indépendants}\}$$

admet bien un minimum.

On a les propriétés suivantes

Théorème 1.3.4[Mi07] Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^n . Soit F une fonction distance symétrique convexe. Les minima successifs de F sur Λ vérifient l'inégalité suivante

$$V_F m_1 \dots m_n \leq 2^n d(\Lambda)$$

où V_F est le volume de $\{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) < 1\}$ dans \mathbb{R}^n .

Proposition 1.3.5 Soient m_1, \dots, m_n les minmums successifs d'une fonction distance F sur un réseau Λ . Alors il existe une base $\{b_1, \dots, b_n\}$ de Λ tel que :

$$\begin{aligned} F(b_1) &= m_1 \\ 2F(b_j) &\leq jm_j \quad (2 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

1.4 Réseaux symplectiques

1.4.1 Définition Soit Λ un \mathbb{Z} -module de rang de g et \langle, \rangle une forme alternée non-dégénérée tel que

$$\langle, \rangle = \Lambda \times \Lambda \longrightarrow \mathbf{Z},$$

identifie Λ à son dual. Le réseau Λ est dit un réseau symplectique.

1.4.2 Définition Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{2g})$ une base de Λ telle que

$$\langle e_i, e_{i+g} \rangle = - \langle e_{g+i}, e_i \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

Une telle base est dite une base symplectique de Λ .

Remarque. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{2g})$ une base symplectique de Λ . Soit $(e'_1, e'_2, \dots, e'_g)$ une base de Λ . Il existe un unique élément $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_{2g}(\mathbb{Z})$ tel que le vecteur colonne e'_i est obtenu par la multiplication par σ du vecteur e_i . la base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_g)$ sera une base symplectique de Λ si et seulement si

$$\sigma \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} {}^t \sigma = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire $\sigma \in Sp_{2g}(\mathbb{Z})$.

1.4.3 Lemme Soit Λ un réseau symplectique de \mathbb{R}^{2g} . Soit \langle, \rangle une forme non-dégénérée alternée. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_{2g})$ une base de Λ . Alors il existe une base symplectique de Λ $(e'_1, e'_2, \dots, e'_g)$ tel que

$$\log \| e'_i \| \ll \log \max_{1 \leq i \leq 2g} \| e_i \| + \log \max_{\substack{1 \leq i \leq 2g \\ 1 \leq j \leq 2g}} |\langle e_i, e_j \rangle|$$

Démonstration. On pose $e'_1 = e_1$. Les entiers $\langle e_1, e_i \rangle$ où $2 \leq i \leq 2g$ sont premiers entre eux parce que Λ est un réseau symplectique. Par Bézout, il existe m_i où $2 \leq i \leq 2g$ tel que $\sum_{i=2}^{2g} m_i \langle e_1, e_i \rangle = 1$ et $\log |m_i| \ll \log \max |\langle e_1, e_i \rangle|$.

On pose $e'_{g+1} = \sum_{i=2}^{2g} m_i e_i$

Alors pour tout e_j de Λ ,

$$e''_j = e_j - \langle e_j, e'_{g+1} \rangle e'_1 + \langle e_j, e_1 \rangle e'_{j+1}$$

est contenu dans $\Lambda_1 = (\mathbb{Z}e'_1 \oplus \mathbb{Z}e'_{g+1})^\perp$. Si la restriction de la forme \langle, \rangle sur Λ_1 est $\neq 0$, on réitère la construction ce qui donne, une base symplectique vérifiant par construction

$$\log \| e'_i \| \ll \log \max_{1 \leq i \leq 2g} \| e_i \| + \log \max_{\substack{1 \leq i \leq 2g \\ 1 \leq j \leq 2g}} |\langle e_i, e_j \rangle|$$

□

Appendice 2

Le lemme de Minkovski pour les classes d'idéaux d'un ordre quelconque.

Soit K un corps de nombre de degré n . On note σ_i les n plongements de K dans \mathbb{C} et $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Soit r_1 le nombre de plongements réels. Les autres sont en nombre pair $2r_2$ et $n = r_1 + 2r_2$. Soit \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K . Minkovski [Sa71] a démontré que dans chaque classe d'idéaux, il existe un idéal \mathfrak{a} de \mathcal{O}_K tel que

$$|N_K(\mathfrak{a})| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} |d_K|^{\frac{1}{2}}$$

où d_K est le discriminant de K et N_K est la norme de \mathfrak{a} .

Dans cet appendice, on va donner une généralisation de ce lemme pour les classes des idéaux d'un ordre non-maximal. Résultat utilisé dans le chapitre 4, pour conclure la finitude de points CM. La difficulté de cette démonstration par rapport à celle donnée par Minkovski est qu'un ordre non-maximal n'est pas intégralement clos. Donc un idéal entier d'un ordre non-maximal ne se décompose pas d'une façon unique en un produit d'idéaux premiers.

On commence par rappeler, dans le paragraphe 1, quelques résultats sur les idéaux des ordres non maximaux. Dans le paragraphe 2, on définit le conducteur et on explique son rôle pour passer des \mathcal{O}_K -idéaux aux \mathcal{O} -idéaux. Dans le paragraphe 3, on démontre le lemme de Minkovski pour un ordre quelconque.

2.1.Ordres

Définitions 2.1.1 On fixe un corps de nombres algébrique K sur \mathbb{Q} .

- 1) Un réseau de K est un \mathbb{Z} -module libre de K de rang $[K : \mathbb{Q}]$. Un ordre de K est un réseau et un sous-anneau de K .
- 2) Un ordre \mathcal{O} de K est dit maximal s'il n'existe aucun ordre contenant \mathcal{O} autre que lui-même. L'anneau des entiers \mathcal{O}_K de K est l'ordre maximal de K . Ainsi un ordre \mathcal{O} est décrit comme étant un sous-anneau de \mathcal{O}_K d'indice fini. Et donc le corps des fractions de \mathcal{O} est K .
- 3) Un idéal fractionnaire \mathfrak{a} d'un ordre \mathcal{O} de K (aussi appelé un \mathcal{O} -idéal fractionnaire) est un réseau de K tel que $\mathcal{O}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$. En particulier, un idéal entier de \mathcal{O} ou \mathcal{O} -idéal est un idéal fractionnaire contenu dans \mathcal{O} .
- 4) Le produit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ de deux idéaux fractionnaires de \mathcal{O} est le plus petit sous-module de K contenant $\{\alpha\beta; \alpha \in \mathfrak{a}, \beta \in \mathfrak{b}\}$. Le quotient $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ de deux idéaux fractionnaires \mathfrak{a} et \mathfrak{b} est l'ensemble des éléments ν de K tels que $\nu\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
- 5) Un idéal fractionnaire \mathfrak{a} de K est dit un \mathcal{O} -idéal propre si le quotient $(\mathfrak{a} : \mathfrak{a})$ est égal à \mathcal{O} .
- 6) Un idéal fractionnaire \mathfrak{a} est principal s'il existe un ν dans K tel que $\mathfrak{a} = \nu\mathcal{O}$.
- 7) L'inverse d'un idéal fractionnaire \mathfrak{a} est l'idéal fractionnaire défini par $\mathfrak{a}^{-1} = (\mathcal{O} : \mathfrak{a})$. Un idéal fractionnaire \mathfrak{a} est dit inversible dans \mathcal{O} si $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ est égal à \mathcal{O} . Un idéal principal est un idéal inversible.

Lemme 2.1.2 Soit \mathcal{O} un ordre dans un corps de nombres K . Chaque \mathcal{O} -idéal fractionnaire inversible de K est un \mathcal{O} -idéal propre. L'ensemble des \mathcal{O} -idéaux inversibles fractionnaires forme un groupe multiplicatif pour le produit.

Démonstration. On commence par démontrer que si \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont deux idéaux fractionnaires de \mathcal{O} non nuls avec \mathfrak{b} inversible alors $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$. En effet, si $\nu \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ alors $\nu\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. On multiplie par \mathfrak{b}^{-1} on obtient $\nu\mathcal{O} = \nu\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$. Donc $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$. Inversement, soit $\nu \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$, alors $\nu\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{a}\mathcal{O} = \mathfrak{a}$. Donc $\nu \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$. Maintenant, si on prend \mathfrak{c} un \mathcal{O} -idéal fractionnaire inversible alors d'après ce qui précède $(\mathfrak{c} : \mathfrak{c}) = \mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1} = \mathcal{O}$ donc \mathfrak{c} est un \mathcal{O} -idéal propre.

D'autre part, Si \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont deux \mathcal{O} -idéaux fractionnaires inversibles alors $(\mathcal{O} : \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$. Donc $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}(\mathcal{O} : \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} = \mathcal{O}$ et l'ensemble des \mathcal{O} -idéaux fractionnaires inversibles est un groupe. \square

On note

$I_{\mathcal{O}}$ le groupe des \mathcal{O} -idéaux fractionnaires inversibles.

$P_{\mathcal{O}}$ le sous-groupe des \mathcal{O} -idéaux fractionnaires principaux.

Le groupe $Cl_{\mathcal{O}} = \frac{I_{\mathcal{O}}}{P_{\mathcal{O}}}$ est dit le groupe de classes des \mathcal{O} -idéaux. C'est un groupe fini d'ordre $h_{\mathcal{O}}$.

Pour $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$, nous simplifions les notations. Nous notons alors I_K, P_K, Cl_K et h_K au lieu de $I_{\mathcal{O}_K}, P_{\mathcal{O}_K}, Cl_{\mathcal{O}_K}$ et $h_{\mathcal{O}_K}$. Dans ce cas tout idéal non nul est inversible.

2.1.3 Remarques

En général un \mathcal{O} -idéal propre n'est pas inversible et l'ensemble des \mathcal{O} -idéaux propres n'est pas un groupe.

Lemme 2.1.4 Soit \mathcal{O} un ordre d'un corps quadratique K . Alors chaque \mathcal{O} -idéal propre est inversible. L'ensemble des \mathcal{O} -idéaux propres est un groupe multiplicatif pour le produit.

Démonstration. (Voir [L73] p90)

2.2 Correspondance entre les \mathcal{O} -idéaux et les \mathcal{O}_K -idéaux

Il est clair qu'il existe des idéaux \mathfrak{m} de \mathcal{O}_K inclus dans \mathcal{O} , par exemple l'idéal principal (M) où M est l'indice de \mathcal{O} dans \mathcal{O}_K . En effet, si $\alpha \in \mathcal{O}_K$ on a $\alpha M \in \mathcal{O}$ puisque M est l'ordre du groupe quotient $\mathcal{O}_K/\mathcal{O}$. Ces idéaux \mathfrak{m} vérifient la propriété suivante:

$$(2.2.1) \quad \alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}} \implies \alpha \in \mathcal{O}.$$

2.2.2 Définition *Le conducteur \mathfrak{f} d'un ordre \mathcal{O} de l'anneau des entiers \mathcal{O}_K de K est le plus grand idéal \mathfrak{m} (pour l'inclusion) de tous les idéaux \mathfrak{m} de \mathcal{O}_K qui vérifient la propriété (2.2.1) ou la propriété équivalente :*

$$\mathfrak{m}\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}.$$

Remarque 2.2.3

L'idéal $M\mathcal{O}_K$ est inclus dans \mathfrak{f} où M est l'indice $[\mathcal{O}_K : \mathcal{O}]$.

Définitions 2.2.4 *Soit \mathcal{O} un ordre d'un corps de nombres K .*

- *Un \mathcal{O} -idéal \mathfrak{a} est relativement premier à un \mathcal{O} -idéal \mathfrak{m} si $\mathfrak{a} + \mathfrak{m} = \mathcal{O}$, où $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}$ est le plus petit idéal contenu dans \mathcal{O} qui contient \mathfrak{a} et \mathfrak{m} .*
- *Un \mathcal{O} -idéal fractionnaire \mathfrak{c} est premier à un \mathcal{O} -idéal \mathfrak{m} si \mathfrak{c} peut s'écrire $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ avec \mathfrak{a} et \mathfrak{b} deux \mathcal{O} -idéaux relativement premiers à \mathfrak{m} .*

Les idéaux entiers de \mathcal{O} premiers à \mathfrak{f} forment un monoïde .

Les \mathcal{O} -idéaux ne possèdent pas une factorisation unique parce que \mathcal{O} n'est pas un anneau de Dedekind. Néanmoins, on obtient une factorisation unique si on se restreint aux \mathcal{O} -idéaux relativement premiers au conducteur \mathfrak{f} .

Le théorème suivant montre que les idéaux relativement premiers à \mathfrak{f} permettent le passage entre \mathcal{O} et \mathcal{O}_K .

Théorème 2.2.5. *Il existe une bijection entre les \mathcal{O}_K -idéaux relativement premiers à \mathfrak{f} et les \mathcal{O} -idéaux relativement premiers à \mathfrak{f} donnée par les relations*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathcal{O}$$

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathcal{O}_K$$

avec \mathfrak{b} est un \mathcal{O}_K -idéal et \mathfrak{a} est un \mathcal{O} -idéal. De plus

$$[\mathcal{O}_K : \mathfrak{b}] = [\mathcal{O} : \mathfrak{a}]$$

Ainsi, les \mathcal{O} -idéaux relativement premiers à \mathfrak{f} se factorisent d'une façon unique en produit de \mathcal{O} -idéaux premiers.

Démonstration (voir [L73] p.92, 93)

Corollaire 2.2.6 Soit \mathfrak{b} un \mathcal{O} -idéal entier premier à \mathfrak{f} alors \mathfrak{b} est inversible et \mathfrak{b}^{-1} est premier à \mathfrak{f} .

Démonstration. Soit $\tilde{\mathfrak{b}}$ l'extension de \mathfrak{b} par \mathcal{O}_K . D'après le théorème 2.3, l'idéal $\tilde{\mathfrak{b}}$ est premier à \mathfrak{f} dans \mathcal{O}_K . l'idéal $\tilde{\mathfrak{b}}^{h_K}$ est principal dans \mathcal{O}_K . Le groupe $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^*$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}_K/M\mathcal{O}_K)^*$ et donc fini. Alors on peut choisir un entier positif r tel que $\tilde{\mathfrak{b}}^{h_{Kr}} = \nu\mathcal{O}_K$ avec $\nu \in 1 + \mathfrak{f} \subset \mathcal{O}$. Donc $\nu\mathcal{O} + \mathfrak{f} = \mathcal{O}$ et l'idéal $\nu\mathcal{O}$ est premier à \mathfrak{f} . Alors, par le théorème 2.3, $\nu\mathcal{O}_K$ est premier à \mathfrak{f} et $\nu\mathcal{O}_K \cap \mathcal{O} = \nu\mathcal{O}$. D'autre part, $\tilde{\mathfrak{b}}^{h_{Kr}} \cap \mathcal{O} = \mathfrak{b}^{h_{Kr}}$ alors $\mathfrak{b}^{h_{Kr}} = \nu\mathcal{O}$ et $\mathfrak{b}^{h_{Kr}}\nu^{-1} = \mathcal{O}$. Donc \mathfrak{b} est inversible et son inverse est le \mathcal{O} -idéal fractionnaire $\mathfrak{b}^{h_{Kr}-1}\nu^{-1}$. \square

On considère les groupes suivants

$I_{\mathcal{O}}(\mathfrak{f})$ est le sous-groupe des idéaux fractionnaires inversibles de \mathcal{O} premiers à \mathfrak{f} .

$P_{\mathcal{O}}(\mathfrak{f}) = P_{\mathcal{O}} \cap I_{\mathcal{O}}(\mathfrak{f})$ est le sous-groupe des idéaux de \mathcal{O} principaux et premiers à \mathfrak{f} .
On a alors la caractérisation suivante du nombre de classes des \mathcal{O} -idéaux:

Proposition 2.2.6

$$\frac{I_{\mathcal{O}}(\mathfrak{f})}{P_{\mathcal{O}}(\mathfrak{f})} \cong \frac{I_{\mathcal{O}}}{P_{\mathcal{O}}}.$$

Démonstration. (voir [San91])

2.3 Le Lemme de Minkovski pour un ordre quelconque.

Nous commençons par établir quelques lemmes qui serviront pour la démonstration.

Lemme 2.3.1 Si M est un sous \mathbb{Z} -module de rang n et si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une \mathbb{Z} -base de M , alors $\sigma(M)$ est un réseau de \mathbb{R}^n , dont le volume est donné par

$$v(\sigma(M)) = 2^{-r_2} | \det \sigma_i(x_j)_{1 \leq i, j \leq n} |$$

Démonstration. voir ([Sa 71], IV 4.2,1).

Lemme 2.3.2 Soient K un corps de nombre et \mathcal{O} un ordre de K de discriminant $d_{\mathcal{O}}$. Soit \mathfrak{a} un \mathcal{O} -idéal. Alors $\sigma(\mathcal{O})$ et $\sigma(\mathfrak{a})$ sont des réseaux et on a

$$v(\sigma(\mathcal{O})) = 2^{-r_2} | d_{\mathcal{O}} |^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad v(\sigma(\mathfrak{a})) = 2^{-r_2} | d_{\mathcal{O}} |^{\frac{1}{2}} N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a})$$

Démonstration.

Puisque \mathfrak{a} est un sous-module de \mathcal{O} de rang n alors il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathcal{O} de rang n et des éléments non nuls a_i pour $1 \leq i \leq n$ de \mathbb{Z} tels que $(a_1 e_1, \dots, a_n e_n)$ soit une base de \mathfrak{a} et a_i divise a_{i+1} pour $1 \leq i \leq n-1$. Alors $d_{\mathcal{O}} = \det(\sigma_i(e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. On obtient donc la première formule en appliquant le lemme 2.3.1.

On a

$$\begin{aligned} v(\sigma(\mathfrak{a})) &= 2^{-r_2} \left| \det \sigma_i(a_i e_i)_{1 \leq i, j \leq n} \right| \\ &= 2^{-r_2} a_1 \dots a_n \left| \det \sigma_i(e_i)_{1 \leq i, j \leq n} \right| \\ &= 2^{-r_2} N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a}) \left| d_{\mathcal{O}} \right|^{\frac{1}{2}} \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 2.3.3 *Soient K un corps de nombre de degré $n = r_1 + 2r_2$ et \mathcal{O} un ordre de K . Soient $d_{\mathcal{O}}$ le discriminant de \mathcal{O} et \mathfrak{a} un \mathcal{O} -idéal non nul. Alors, \mathfrak{a} contient un élément non nul x tel que*

$$|N(x)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} \left| d_{\mathcal{O}} \right|^{\frac{1}{2}} N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a})$$

Démonstration.

Soit σ le plongement canonique de K dans $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$. Soient t un nombre réel strictement positif et l'ensemble

$$B_t = \{(y_1, \dots, y_{r_1}, z_1, \dots, z_{r_2}) \in \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{r_1} |y_i| + 2 \sum_{j=1}^{r_2} |z_j| \leq t\}.$$

C'est un ensemble compact, convexe et symétrique par rapport à 0, de volume ([Sa 71 appendice p. 79])

$$\mu(B_t) = 2^{r_1} \pi^{r_2} \frac{t^n}{n!}.$$

On peut choisir t tel que $\mu(B_t) = 2^n v(\sigma(\mathfrak{a}))$, donc on a

$$2^{r_1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{r_2} \frac{t^n}{n!} = 2^{n-r_2} \left| d_{\mathcal{O}} \right|^{\frac{1}{2}} N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a})$$

D'après [Sa page 67], il existe un élément non nul x de \mathfrak{a} tel que $\sigma(x) \in B_t$. On a

$$|N(x)| = \prod_{i=1}^{r_1} |\sigma_i(x)| \left| \prod_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} |\sigma_j(x)| \right|^2$$

L'inégalité de la moyenne géométrique montre qu'on a

$$|N(x)| \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r_1} |\sigma_i(x)| + \frac{2}{n} \sum_{j=r_1+1}^{r_1+r_2-2} |\sigma_j(x)| \right)^n \leq \frac{t^n}{n^n}.$$

D'où

$$|N(x)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} \left| d_{\mathcal{O}} \right|^{\frac{1}{2}} N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a}) \quad \square$$

Proposition 2.3.4 Soient K un corps de nombre, \mathcal{O} un ordre de K et \mathfrak{f} son conducteur. Soient I et J des \mathcal{O} -idéaux premiers à \mathfrak{f} : on peut trouver un idéal \mathfrak{a} de \mathcal{O} premier à \mathfrak{f} tels que $(\mathfrak{a}, IJ) = \mathcal{O}$, et tels que le produit $\mathfrak{a}I$ est principal.

Démonstration. Par la correspondance bijective avec les idéaux de K , on factorise I et J en produit d'idéaux premiers

$$I = \prod p^{n(p)} \quad J = \prod p^{m(p)}$$

Soit P l'ensemble des idéaux premiers qui divisent IJ et $x_p \in p^{n(p)}/p^{n(p)+1}$ pour tout $p \in P$. Le lemme chinois implique l'existence d'un élément a dans \mathcal{O} satisfaisant à $a \equiv x_p \pmod{(p^{n(p)+1})}$ pour $p \in P$. On a alors $a\mathcal{O} = I\mathfrak{a}$ où \mathfrak{a} premier est à IJ . \square

On appelle norme de \mathfrak{a} et on note $N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a})$ le nombre $\text{card}(\mathcal{O}/\mathfrak{a})$.

Proposition 2.3.5 Soient K un corps de nombres et \mathcal{O} un ordre de K . Alors toute classe de \mathcal{O} -idéaux propres contient un \mathcal{O} -idéal \mathfrak{a} premier à \mathfrak{f} . on a

$$|N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a})| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} |d_{\mathcal{O}}|^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration. Soient \mathfrak{b} un \mathcal{O} -idéal de la classe donnée et $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$ son représentant $I_{\mathcal{O}}(\mathfrak{f})$. Donc $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$ est un \mathcal{O} -idéal premier à \mathfrak{f} . Il existe un \mathcal{O} -idéal $\mathfrak{c}_{\mathfrak{f}}$ tel que $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}\mathfrak{c}_{\mathfrak{f}}$ est un idéal principal. D'après le lemme 3, le \mathcal{O} -idéal $\mathfrak{c}_{\mathfrak{f}}$ contient un élément non nul c tel que

$$|N(c)| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} |d_{\mathcal{O}}|^{\frac{1}{2}} N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{c}_{\mathfrak{f}}).$$

L'idéal principal de \mathcal{O} engendré par c est divisible par $\mathfrak{c}_{\mathfrak{f}}$. On note $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$ l'idéal $(c)\mathfrak{c}_{\mathfrak{f}}^{-1}$. Donc $\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}}$ et $\mathfrak{b}_{\mathfrak{f}}$ sont équivalents et

$$|N_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{f}})| \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \frac{n!}{n^n} |d_{\mathcal{O}}|^{\frac{1}{2}}.$$

\square

Chapitre 5

Les périodes de la jacobienne $J_{10}(\lambda)$

Dans ce chapitre nous calculons les périodes de la jacobienne $J_{10}(\lambda)$, et explicitons les relations entre ces périodes. Il s'agit d'un cas exceptionnel où les périodes de la partie nouvelle $J_{10,new}(\lambda)$ sont algébriques en λ . Le groupe de symétrie qui leur correspond est le groupe de l'icosaèdre. Dans le paragraphe 1, nous donnons une généralisation de la définition d'une période de variété abélienne à multiplication complexe en suivant Anderson [Ad82] et Shimura [S79], et leur expression en termes de fonction Gamma. Nous appliquons ces résultats dans le troisième paragraphe pour calculer les périodes de $J_{10}(\lambda)$.

5.1 Périodes aux points CM et valeurs de la fonction Gamma

5.1.1 Périodes d'une variété abélienne à multiplication complexe

Nous rappelons dans ce paragraphe des résultats d'Anderson [Ad82]. Il s'agit en fait d'une interprétation et raffinement des résultats de Shimura [S79] sur les périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe par un corps CM.

On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} et $\mathbf{G}_{\mathbb{Q}}$ le groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. On note ρ la conjugaison complexe.

Soient α et β deux nombres complexes alors on note $\alpha \sim \beta$ si $\frac{\alpha}{\beta} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Soient A une variété abélienne à multiplication complexe par un corps CM, qu'on note K et l une représentation $K \rightarrow \text{End} A \otimes \mathbb{Q}$. Soit $\Phi(A, K, l)$ le CM type de A , c'est-à-dire la classe d'isomorphie de $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ -modules sur lequel K agit par l . Les automorphismes de $K \rightarrow \mathbb{C}$ de $\Phi(A, K, l)$ décrivent l'action de K sur la partie holomorphe et la partie anti-holomorphe de la décomposition de Hodge de $H_{DR}^1(A)$ et on a

$$\Phi(A, K, l) \oplus \Phi(A, K, l \circ \rho) = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

Définition 5.1.2 ([Ad82] §1) *Soit ω une classe de cohomologie de De Rham $H_{DR}^1(A)$ satisfaisant*

$$(l(x))^*\omega = x\omega$$

où $x \in K$. Soit γ un 1-cycle non homologue à 0 sur A . Alors une période $P(A, K, l) \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{Q}^*$ de A est définie par

$$P(A, K, l) \sim \int_{\gamma} \omega.$$

La forme différentielle ω est définie à un facteur dans $\overline{\mathbb{Q}}^*$ près, et K^* agit transitivement sur la classe d'homologie de degré 1 à coefficients rationnels. Donc $P(A, K, l)$ est bien définie.

Par la relation de Riemann-Hodge on a

$$5.1.3. \quad P(A, K, l)P(A, K, l \circ \rho) \sim 2i\pi$$

Remarque Pour retrouver les notations de Shimura [S79]. Il convient de considérer le CM-type $\Phi(A, K, l)$ comme une combinaison formelle linéaire des plongements complexes de K . On a alors en termes de symbole de Shimura $p_K(\tau, \Phi)$

$$P(A, K, l) = \begin{cases} \pi p_K(id_K, \Phi) & \text{si } id_K \in \Phi(A, K, l) \\ p_K(\rho|_K, \Phi)^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut généraliser la définition des périodes d'une variété abélienne à multiplication complexe :

Proposition 5.1.4 *Soient A une variété abélienne à multiplication complexe et K un corps CM tel que $[K : \mathbb{Q}] = 2\dim A$. Soient l une représentation de K dans $\text{End}_{\mathbb{Q}}(A)$ et ω une classe de cohomologie de De Rham $H_{DR}^1(A)$ satisfaisant*

$$(l(x))^*\omega = \tau(x)\omega$$

pour $x \in K$ et $\tau \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Soit γ un 1-cycle non homologue à 0 sur A . Alors

$$P(A, K, l \circ \tau^{-1}) \sim \int_{\gamma} \omega.$$

Démonstration Il suffit de remplacer la représentation l par la représentation $\tilde{l} = l \circ \tau^{-1}$ dans la définition 5.1.2. •

Soit I_K le groupe de Grothendieck engendré par les $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ -modules finis. Soit I_K^0 le sous-groupe de I_K engendré par les CM types des variétés abéliennes à multiplication complexe par K . On peut voir I_K^0 comme le sous-groupe des modules Φ qui satisfait

$$\Phi \oplus \Phi^{\rho} = n(K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}).$$

Pour un entier convenable n . Soit $(\cdot, \cdot)_K$ la parité définie par

$$(\Phi, \psi)_K = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{K \otimes \mathbb{C}}(\Phi, \psi)$$

pour tout $\Phi \in I_K, \psi \in I_K$.

Soit L une extension de K . Alors l'application de restriction $\text{Res}_{L/K} : I_L \longrightarrow I_K$ et l'application $\text{Ind}_{L/K} : I_K \longrightarrow I_L$ sont définies par

$$(\text{ind}_{L/K}(\Phi), \Psi)_L = (\Phi, \text{Res}_{L/K}(\Psi))_K$$

pour tout $\Phi \in I_K, \Psi \in I_L$. On a

$$\Phi(\sigma) = (\sigma \mid K, \Phi)_K$$

alors on peut voir chaque Φ de I_K^0 comme une fonction de \mathbf{G} localement constante à valeurs dans \mathbb{Z} . Soient K, L deux corps CM tels que $K \subset L$. On a

$$\text{ind}_{L/K}(\Phi)(\sigma) = \Phi(\sigma)$$

alors $\varinjlim I_K^0$ peut être vu comme un sous-groupe du groupe des fonctions de \mathbf{G} localement constantes à valeurs dans \mathbb{Z} et on a

Proposition 5.1.5 ([Ad82]§1, 1.4) *Soit φ une fonction localement constante de \mathbf{G} dans \mathbb{Z} . Alors φ est un élément de $\varinjlim I_K^0$ si et seulement si pour tous $\sigma, \tau \in \mathbf{G}$ on a*

- i) $\varphi(\sigma\rho\sigma^{-1}\rho\tau) = \varphi(\tau)$,
- ii) $\varphi(\sigma\rho) + \varphi(\sigma) = \varphi(\text{id}) + \varphi(\rho)$

On note M l'espace des fonctions localement constantes de \mathbf{G} à valeurs dans \mathbb{Z} satisfaisant aux conditions i) et ii).

Proposition 5.1.6 ([Ad82]§1, 1.5) *Il existe une application \mathbb{Q} -linéaire*

$$W : M \longrightarrow \mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

telle que pour toute variété abélienne (A, K, l) de type CM

$$P(A, K, l) = W(\Phi(A, K, l)).$$

5.1.7 La Relation entre une période d'une variété abélienne à multiplication complexe et les fonctions Gamma .

Soit \mathbf{G}_{ab} le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} . On note M^{ab} le sous-espace de M formé des fonctions qui se factorisent par \mathbf{G}_{ab} . Dans la suite, on expose un résultat non publié de Deligne qui donne une caractérisation d'une période

de variété abélienne à multiplication complexe restreint à M^{ab} en termes de fonction Γ classique.

Soient $\langle \rangle, \{ \} : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définies par

$$\langle \rangle \equiv a = \{a\} \pmod{\mathbb{Z}}$$

$$0 \leq \langle a \rangle < 1, \quad 0 < \{a\} \leq 1,$$

et $\delta : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow M^{ab}$ une fonction telle que

$$\delta(a)(\sigma) = \langle -b \rangle$$

où $\sigma \in \mathbf{G}$ et $\exp(2i\pi a)\sigma = \exp(2i\pi b)$. On a alors

Théorème 5.1.8 *L'image de*

$$\delta : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow M^{ab}$$

engendre M^{ab} sur \mathbb{Q} .

Démonstration Voir [Ad82]théorème 3.1 p.321.

Soit la fonction

$$\tilde{\Gamma} : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times$$

définie par

$$\tilde{\Gamma}(a) = W(\delta(a)).$$

Alors on a

Théorème 5.1.9 ([Ad82] 4.7)

$$\tilde{\Gamma}(a) \sim \Gamma(\{a\}).$$

5.2 La jacobienne de $C_5(\lambda)$ et ses périodes

5.2.1 Pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, notons $C_5(\lambda)$ la complétion projective lisse de la courbe affine d'équation

$$C_5(\lambda) : y^5 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Soit τ un automorphisme d'ordre 5 donné par

$$(x, y) \longrightarrow (x, \zeta_5^{-1}y)$$

où $\zeta_5 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, τ^* opère sur l'espace de différentielles holomorphes avec les valeurs propres $\zeta_5^2, \zeta_5^3, \zeta_5^4$, et ζ_5^4 . Une base des différentielles de première espèce $H^0(C_5(\lambda), \Omega^1)$ est fournie par l'ensemble S

$$S = \left\{ \omega_2^1 = \frac{dx}{y^2}, \omega_3^1 = \frac{dx}{y^3}, \omega_4^1 = \frac{dx}{y^4}, \omega_4^2 = \frac{x dx}{y^4} \right\}$$

Soient les automorphismes

$$\begin{aligned} \sigma_n : \mathbb{Q}(\zeta_5) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \zeta_5 &\longrightarrow \zeta_5^n \end{aligned}$$

où $n \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$. Soit V_n l'espace propre défini par

$$V_n = \{\omega \in H^0(C_5(\lambda), \Omega^1) / \tau^* \omega = \sigma_n(\zeta_5) \omega\}.$$

Si on note r_n la dimension de V_n pour tout $n \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ alors on a, d'après le théorème 1.2.3, $r_1 = 0, r_2 = r_3 = 1$ et $r_4 = 2$.

La décomposition de Wolfart nous donne

$$J_5(\lambda) \cong \mathbb{C}^4 / \Lambda$$

$$\text{où } \Lambda = \{(\sigma_n(u) \int_0^\lambda \omega + \sigma_n(v) \int_1^\infty \omega)_{\omega \in S}, u, v \in \mathbb{Z}[\zeta_5]\}.$$

Considérons la décomposition

$$H_{DR}^1(C_5(\lambda)) = \bigoplus_{n \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*} H(n).$$

$$\text{où } H(n) = \{\omega \in H_{DR}^1 / \tau^* \omega = \sigma_n(\zeta_5) \omega\}.$$

D'après le lemme 1.3.5, $\dim H(n) = 2 \quad \forall n \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$.

$$\begin{aligned} H(1) &= \langle \omega_1^1 = \frac{dx}{y}, \omega_1^2 = \frac{x dx}{y} \rangle \\ H(2) &= \langle \omega_2^1 = \frac{dx}{y^2}, \omega_2^2 = \frac{x dx}{y^2} \rangle \\ H(3) &= \langle \omega_3^1 = \frac{dx}{y^3}, \omega_3^2 = \frac{x dx}{y^3} \rangle \\ H(4) &= \langle \omega_4^1 = \frac{dx}{y^4}, \omega_4^2 = \frac{x dx}{y^4} \rangle \end{aligned}$$

On peut exprimer les périodes et les quasi-périodes en fonction des séries hypergéométriques [1.4.1]

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \omega_1^1 &= B(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \lambda), & \int_0^\lambda \omega_1^1 &= (-1)^{\frac{2}{5}} \lambda^{\frac{3}{5}} B(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}) F(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \lambda) \\ \int_1^\infty \omega_2^1 &= B(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}) F(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \lambda), & \int_0^\lambda \omega_2^1 &= (-1)^{\frac{4}{5}} \lambda^{\frac{1}{5}} B(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}) F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \lambda) \\ \int_1^\infty \omega_3^1 &= B(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}) F(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \lambda), & \int_0^\lambda \omega_3^1 &= (-1)^{\frac{6}{5}} \lambda^{-\frac{1}{5}} B(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) F(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \lambda) \\ \int_1^\infty \omega_4^1 &= B(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}) F(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \lambda), & \int_0^\lambda \omega_4^1 &= (-1)^{\frac{8}{5}} \lambda^{-\frac{3}{5}} B(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) F(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \lambda) \\ \int_1^\infty \omega_1^2 &= B(-\frac{7}{5}, \frac{4}{5}) F(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, \lambda), & \int_0^\lambda \omega_1^2 &= (-1)^{\frac{2}{5}} \lambda^{\frac{8}{5}} B(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}) F(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \lambda) \\ \int_1^\infty \omega_2^2 &= B(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) F(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \lambda), & \int_0^\lambda \omega_2^2 &= (-1)^{\frac{4}{5}} \lambda^{\frac{6}{5}} B(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}) F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \lambda) \\ \int_1^\infty \omega_3^2 &= B(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) F(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \lambda), & \int_0^\lambda \omega_3^2 &= (-1)^{\frac{6}{5}} \lambda^{\frac{4}{5}} B(\frac{7}{5}, \frac{2}{5}) F(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \lambda) \\ \int_1^\infty \omega_4^2 &= B(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}) F(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \lambda), & \int_0^\lambda \omega_4^2 &= (-1)^{\frac{8}{5}} \lambda^{\frac{2}{5}} B(\frac{6}{5}, \frac{1}{5}) F(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \lambda) \end{aligned}$$

5.2.2 Le CM type

Dans la suite on prend $\lambda = \theta$ un point CM. La jacobienne $J_5(\theta)$ est à multiplication complexe par K un corps CM. Le corps K est une extension quadratique de corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta)$. On peut l'écrire alors $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D}, \zeta_5)$. Pour simplifier le calcul on prend $D = 3$. Soit L le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ et \tilde{l} la représentation

$$\tilde{l} : K \longrightarrow \text{End}(J_5(\theta))_{\mathbb{Q}}.$$

On note $\tau_{n,m} = (\sigma_n, \Delta_m)$ avec

$$\begin{aligned} \sigma_n & : \mathbb{Q}(\zeta_5) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_5) \\ & \zeta_5 \longmapsto \zeta_5^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_m & : \mathbb{Q}(\zeta_3) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_3) \\ & \zeta_3 \longmapsto \zeta_3^m \end{aligned}$$

où $n \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$, $m \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$.

Lemme 5.2.3 *Le CM Type $\Phi(J_5(\theta), K, \tilde{l})$ de $J_5(\theta)$ est l'ensemble $\{\tau_{2,1}, \tau_{3,1}, \tau_{4,1}, \tau_{4,2}\}$.*

Démonstration.

L'action sur $H_{DR}^1(C_5(\theta))$ par $\tilde{l}(x)$ se fait avec multiplication par $\tau_{m,n}(x)$ pour $x \in K$ donc c'est un $K \otimes \mathbb{C}$ -module. On a

$$K \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{\tau_{m,n}: K \rightarrow \mathbb{C}} \mathbb{C}_{\tau_{m,n}}$$

Donc $H_{DR}^1(J_5(\theta))$ se décompose en $\bigoplus_{\tau_{m,n}: K \rightarrow \mathbb{C}} H_{\tau_{m,n}}$ où

$$H_{\tau_{n,m}} = \{\omega \in H_{DR}^1(J_5(\theta)) / (\tilde{l}(x))^* \omega = \tau_{n,m}(x)\omega\}.$$

On a la décomposition de Hodge

$$H_{DR}^1(J_5(\theta)) = H^{-1,0} \otimes H^{0,-1}$$

La structure de Hodge consiste en $H^{-1,0} \subset H_1(J_5(\theta), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$. Soit

$$V_{n,m} = \{\omega \in H^{-1,0} / (\tilde{l}(x))^* \omega = \tau_{n,m}(x)\omega\}$$

Soit $\Phi(J_5(\theta), K, \tilde{l})$ le CM type de K . Donc $\Phi(J_5(\theta), K, \tilde{l})$ contient les homomorphismes $\tau_{m,n} \in G(K/\mathbb{Q})$ telque pour chaque $\tau_{m,n}$ il existe un $\omega \in V_{n,m}$. On en déduit que $\tau_{m,n} \in \Phi(A, K, \tilde{l})$ si et seulement si $V_{n,m} \cap H_{\tau_{m,n}/L} = V_{n,m} \cap H(n) \neq 0$. Or $\dim H(n) = 2$ donc

$$\dim V_{n,m} \cap H(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2, \quad 3 \\ 2 & \text{si } n = 4 \end{cases}$$

L'action de $(\sqrt{-3})^*$ se fait par deux valeurs propres distincts $\pm\sqrt{-3}$. Donc dans le cas où la dimension de $V_{n,m} \cap H(n)$ est égale à 1, on peut choisir par convention l'action de

$(\sqrt{-3})^*$. Dans la suite nous prenons l'action de $(\sqrt{-3})^*$ qui se fait par la valeur propre $\sqrt{-3}$. On a alors

$$\Phi(J_5(\theta), K, \tilde{l}) = \{\tau_{2,1}, \tau_{3,1}, \tau_{4,1}, \tau_{4,2}\} \quad \bullet$$

Si on écrit

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \zeta_5) = \mathbb{Q}(\zeta_{15})$$

où $\zeta_{15} = e^{\frac{2i\pi}{15}}$, le groupe de Galois $G(K/\mathbb{Q})$ est l'ensemble des homomorphismes

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_s & : \mathbb{Q}(\zeta_{15}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{15}^s) \\ & \zeta_{15} \longmapsto \zeta_{15}^s, \end{aligned}$$

avec $s \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$. On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_4 & = (\sigma_4, \Delta_1), & \tilde{\tau}_1 & = (\sigma_1, \Delta_1) \\ \tilde{\tau}_7 & = (\sigma_2, \Delta_1), & \tilde{\tau}_2 & = (\sigma_2, \Delta_2) \\ \tilde{\tau}_{13} & = (\sigma_3, \Delta_1), & \tilde{\tau}_8 & = (\sigma_3, \Delta_2) \\ \tilde{\tau}_{14} & = (\sigma_4, \Delta_2), & \tilde{\tau}_{11} & = (\sigma_1, \Delta_2) \end{aligned}$$

Donc

$$\Phi(J_5(\theta), K, \tilde{l}) = \{\tilde{\tau}_4, \tilde{\tau}_7, \tilde{\tau}_{13}, \tilde{\tau}_{14}\}.$$

5.2.4 Les périodes de la jacobienne $C_5(\lambda)$ en terme des fonctions Gamma

On se propose dans ce paragraphe d'évaluer les périodes de la variété abélienne $J_5(\lambda)$ où $\lambda = \theta$ un point CM.

Soit

$$\psi_{\tilde{\tau}_n} = \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tel que

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{\tau}_n}(\tilde{\tau}_k) & = 1 & \text{si } \tilde{\tau}_k \in \Phi(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_n^{-1}) \\ \psi_{\tilde{\tau}_n}(\tilde{\tau}_k) & = 0 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

un tel $\psi_{\tilde{\tau}_n}$ peut s'interpréter comme $\varphi = G^{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui s'annule sur $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/K)$ de G^{ab} , donc appartient à M_{ab} . D'après le théorème [1.5.8] $\psi_{\tilde{\tau}_n}$ s'écrit

$$\psi_{\tilde{\tau}_n} = \sum_{a \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}} \theta_a \delta\left(\frac{a}{15}\right)$$

avec

$$\delta = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \longrightarrow M_{ab}$$

défini pour $\tilde{\tau}_k \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et $\tilde{\tau}_k(\exp 2i\pi a) = \exp 2i\pi b$. On obtient alors le système suivant

$$A\vec{X} = \vec{V}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 11 & 7 & 3 & 14 & 10 & 6 & 2 & 13 & 9 & 5 & 1 & 12 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & 9 & 2 & 10 & 3 & 11 & 4 & 12 & 5 & 13 & 6 & 14 & 7 \\ 7 & 14 & 6 & 13 & 5 & 12 & 4 & 11 & 3 & 10 & 2 & 9 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 1 & 5 & 9 & 13 & 2 & 6 & 10 & 14 & 3 & 7 & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_\alpha, \dots, X_{14}).$$

Ainsi on peut résoudre le système, suivant les valeurs de $\psi_{\tilde{\tau}_n}$ pour chaque $\tilde{\tau}_n$ avec $n \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

* Pour $n = 1$, $\Phi(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_1^{-1}) = \{\tilde{\tau}_{11}, \tilde{\tau}_8, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_1\}$ et alors $\vec{V} = (15, 15, 0, 0, 15, 15, 0, 0)$.
On obtient alors

$$\psi_{\tilde{\tau}_1} = \frac{3}{2}\delta\left(\frac{2}{15}\right) - \delta\left(\frac{5}{15}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{7}{15}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{9}{15}\right) - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{12}{15}\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} P(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_1^{-1}) &= \int_{\gamma} \omega_1^1 \\ &\sim \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{15}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{9}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{12}{15}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

* Pour $n = 2$, $\Phi(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_2^{-1}) = \{\tilde{\tau}_7, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_4, \tilde{\tau}_2\}$ et alors $\vec{V} = (15, 15, 15, 15, 0, 0, 0, 0)$.
On obtient alors

$$\psi_{\tilde{\tau}_2} = 2\delta\left(\frac{1}{15}\right) - \delta\left(\frac{2}{15}\right) - \delta\left(\frac{5}{15}\right) + \delta\left(\frac{7}{15}\right) + \delta\left(\frac{12}{15}\right) - \delta\left(\frac{14}{15}\right)$$

On applique l'application \mathbb{Q} -lineaire W à $\psi_{\tilde{\tau}_1}$. On a alors par (5.1.6), (5.1.7) et (5.1.9)

$$\begin{aligned} P(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_2^{-1}) &\sim \int_{\gamma} \omega_2^2 \\ &\sim \Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{5}{15}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right) \Gamma\left(\frac{12}{15}\right) \Gamma\left(\frac{14}{15}\right)^{-1} \end{aligned}$$

* Pour $n = 4$, $\Phi(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_4^{-1}) \sim \{\tilde{\tau}_{14}, \tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_8, \tilde{\tau}_4\}$ et alors $\vec{V} = (0, 15, 15, 0, 15, 0, 0, 1)$.
On obtient alors

$$\psi_{\tilde{\tau}_4} = -2\delta\left(\frac{5}{15}\right) + \delta\left(\frac{6}{15}\right) + 2\delta\left(\frac{8}{15}\right) - \delta\left(\frac{10}{15}\right) + \delta\left(\frac{13}{15}\right)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} P(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_4^{-1}) &\sim \int_{\gamma} \omega_4^1 \\ &\sim \Gamma\left(\frac{5}{15}\right)^{-2} \Gamma\left(\frac{6}{15}\right) \Gamma\left(\frac{8}{15}\right)^2 \Gamma\left(\frac{10}{15}\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{13}{15}\right) \end{aligned}$$

* Pour $n = 7$, $\Phi(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_7^{-1}) \sim \{\tilde{\tau}_2, \tilde{\tau}_{11}, \tilde{\tau}_{14}, \tilde{\tau}_7\}$ et alors $\vec{V} = (0, 15, 0, 15, 0, 15, 0, 15)$.
On obtient alors

$$\psi_{\tilde{\tau}_7} = \delta\left(\frac{2}{15}\right) - \delta\left(\frac{5}{15}\right) - 2\delta\left(\frac{6}{15}\right) + \delta\left(\frac{7}{15}\right) + \delta\left(\frac{9}{15}\right) + \delta\left(\frac{14}{15}\right)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} P(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_7^{-1}) &= \int_{\gamma} \omega_2^1 \\ &\sim \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)\Gamma\left(\frac{5}{15}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{6}{15}\right)^2\Gamma\left(\frac{7}{15}\right)\Gamma\left(\frac{9}{15}\right) \end{aligned}$$

Pour les autres $n \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*$, on en déduit les périodes en utilisant la relation 5.1.3 due à la relation de Riemann-Hodge. On a alors

* Pour $n = 8$

$$\begin{aligned} P(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_8^{-1}) &\sim \int_{\gamma} \omega_3^2 \\ &\sim 2i\pi\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{5}{15}\right)\Gamma\left(\frac{6}{15}\right)^{-2}\Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{9}{15}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{14}{15}\right)^{-1} \end{aligned}$$

* Pour $n = 11$

$$\begin{aligned} P(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_{11}^{-1}) &\sim \int_{\gamma} \omega_1^2 \\ &\sim 2i\pi\Gamma\left(\frac{5}{15}\right)^2\Gamma\left(\frac{6}{15}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{8}{15}\right)^{-2}\Gamma\left(\frac{10}{15}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{13}{15}\right)^{-1} \end{aligned}$$

* Pour $n = 13$

$$\begin{aligned} P(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_{13}^{-1}) &\sim \int_{\gamma} \omega_3^1 \\ &\sim 2i\pi\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{-2}\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)\Gamma\left(\frac{5}{15}\right)\Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{12}{15}\right)^{-1}\Gamma\left(\frac{14}{15}\right) \end{aligned}$$

* Pour $n = 14$

$$\begin{aligned} P(J_5(\theta), K, l \circ \tilde{\tau}_{14}^{-1}) &\sim \int_{\gamma} \omega_4^2 \\ &\sim 2i\pi\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{5}{15}\right)\Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{9}{15}\right)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{12}{15}\right) \end{aligned}$$

5.2.5 Détermination des fonctions hypergéométriques en termes des fonctions Gamma

On rappelle que la fonction de Béta vérifie

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Et que la fonction Γ vérifie les équations fonctionnelles :

- i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- ii) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$
- iii) $\prod_{s=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{x+s}{p}\right) = \frac{(2\pi)^{p-1}}{p^{x-\frac{1}{2}}}\Gamma(x)$

Lemme 5.2.6 Soit V le \mathbb{Q} -espace vectoriel de $\mathbb{C}^*/\overline{\mathbb{Q}}^*$ engendré par π et $\{\Gamma(\frac{a}{15}) \mid a \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^*\}$. Alors V a pour base $\{\Gamma(\frac{a}{15}) \mid a \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*, 1 \leq a \leq 7, \text{ et } a \in (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^*\}$.

Démonstration: Puisque V est de dimension $\frac{\Phi(15)}{2} + 1$, il suffit de prouver que

$$\{\pi, \Gamma(\frac{1}{15}), \Gamma(\frac{2}{15}), \Gamma(\frac{4}{15}), \Gamma(\frac{7}{15})\}$$

est une partie génératrice de V .

On a

$$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

Soit

$$\frac{a}{15} = \sum_{i=1}^2 \frac{a_i}{p_i} \pmod{\mathbb{Z}}$$

où $p_1 = 3, p_2 = 5$ et a_i est défini mod p_i .

$$\begin{aligned} T_{15} &= \left\{ \frac{a}{15} \mid (a_i, p_i) = 1 \text{ et } a_i \neq 1 \text{ ou } a = 0 \right\} \\ &= \left\{ 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{15}, \frac{4}{15}, \frac{7}{15} \right\} \end{aligned}$$

D'après [L78] (théorème 9.1 page 58) l'ensemble

$$\left\{ \pi, \Gamma(\frac{10}{15}), \Gamma(\frac{6}{15}), \Gamma(\frac{9}{15}), \Gamma(\frac{12}{15}), \Gamma(\frac{1}{15}), \Gamma(\frac{4}{15}), \Gamma(\frac{2}{15}) \right\}$$

engendre V .

Par la relation ii) on a

$$\Gamma(\frac{6}{15})\Gamma(\frac{9}{15}) \sim \pi$$

$$\Gamma(\frac{12}{15})\Gamma(\frac{3}{15}) \sim \pi$$

$$\Gamma(\frac{10}{15})\Gamma(\frac{5}{15}) \sim \pi$$

Si on prend dans ii) $p = 5$ et $x = \frac{1}{3}$ on a

$$\Gamma(\frac{1}{15})\Gamma(\frac{4}{15})\Gamma(\frac{7}{15})\Gamma(\frac{10}{15})\Gamma(\frac{13}{15}) \sim \pi^{\frac{9}{2}}\Gamma(\frac{1}{3})$$

$$\Gamma(\frac{1}{15})\Gamma(\frac{4}{15})\Gamma(\frac{7}{15})\frac{\pi}{\Gamma(\frac{5}{15})}\frac{\pi}{\Gamma(\frac{2}{15})} \sim \pi^{\frac{9}{2}}\Gamma(\frac{5}{15})$$

Alors

$$\Gamma(\frac{5}{15}) \sim \pi^{-\frac{5}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{1}{2}}}.$$

On prend maintenant dans ii) $p = 3$ et $p = \frac{1}{5}$ on a

$$\Gamma(\frac{1}{15})\Gamma(\frac{6}{15})\Gamma(\frac{11}{15}) \sim \pi\Gamma(\frac{1}{15}).$$

Donc

$$(*) \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{15})\Gamma(\frac{6}{15})}{\Gamma(\frac{4}{15})} \sim \Gamma(\frac{3}{15}).$$

On prend dans ii) $p = 3$ et $x = \frac{2}{5}$ on a

$$\Gamma(\frac{2}{15})\Gamma(\frac{7}{15})\Gamma(\frac{12}{15}) \sim \pi\Gamma(\frac{2}{15}).$$

Donc

$$(**) \quad \frac{\Gamma(\frac{2}{15})\Gamma(\frac{7}{15})}{\Gamma(\frac{3}{15})} \sim \Gamma(\frac{6}{15}).$$

On remplace $\Gamma(\frac{6}{15})$ dans (*) on a

$$\Gamma(\frac{3}{15}) \sim \frac{\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{1}{2}}}.$$

On remplace dans (**)

$$\Gamma(\frac{6}{15}) \sim \frac{\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{1}{2}}}. \quad \bullet$$

5.2.7 En identifiant les périodes et les quasi-périodes en termes des fonctions hypergéométriques (5.2.1) et les périodes de types CM (5.2.3), on exprime les fonctions hypergéométriques en termes de la fonction Gamma .

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} F(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \theta) & F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \theta) \\ F(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \theta) & F(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, \theta) \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{5}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{5}{2}}} & \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{7}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{2i\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{5}{2}}\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{3}{2}}\pi^{\frac{9}{2}}} & \frac{2i\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{7}{2}}\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{11}{2}}} \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \theta) & F(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \theta) \\ F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \theta) & F(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \theta) \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \frac{\pi^{\frac{5}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{5}{2}}\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{7}{2}}\Gamma(\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{5}{2}}} & \frac{\pi^{\frac{9}{2}}\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{7}{2}}} \\ \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{3}{2}} & \frac{\pi^{\frac{5}{2}}\Gamma(\frac{1}{15})^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{4}{15})^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{15})^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{7}{15})^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{pmatrix} F\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \theta\right) & F\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \theta\right) \\ F\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \theta\right) & F\left(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{5}, \theta\right) \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \frac{2i}{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{2i\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ 2i \frac{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{5}{2}}}{\pi^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{7}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}}} & \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{7}{2}}} \end{pmatrix} \\
A_4 &= \begin{pmatrix} F\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \theta\right) & F\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \theta\right) \\ F\left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \theta\right) & F\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \theta\right) \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \frac{2i\Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^2 \pi^{\frac{9}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{5}{2}}} & \frac{\pi^{\frac{11}{2}}}{2i\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{5}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{5}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{7}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On remarque tout d'abord les relations fonctionnelles suivantes

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \theta\right) F\left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \theta\right) &\sim 1 & F\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \theta\right) F\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \theta\right) &\sim 1 \\
F\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \theta\right) F\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \theta\right) &\sim 1 & F\left(\frac{1}{5}, \frac{-7}{5}, \frac{-3}{5}, \theta\right) F\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \theta\right) &\sim 1 \\
F\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \theta\right) F\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \theta\right) &\sim 1 & F\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \theta\right) F\left(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{1}{5}, \theta\right) &\sim 1 \\
F\left(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \theta\right) F\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \theta\right) &\sim 1 & F\left(\frac{2}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-1}{5}, \theta\right) F\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \theta\right) &\sim 1
\end{aligned}$$

On remarque que $\det A_i \equiv 0 \pmod{\overline{\mathbb{Q}}} \quad \forall 1 \leq i \leq 4$. Donc il reste aux moins six fonctions hypergéométriques indépendantes.

5.2.8 On peut aussi exprimer les fonctions $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda\right)$ et $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda\right)$ associées aux périodes de courbe elliptique en terme de la fonction Γ . On utilise le théorème suivant:

Théorème 5.2.9 (Chowla-Selberg). *Soit E une courbe elliptique à multiplication complexe par le corps K de discriminant $-d$, $d > 0$; on note w le nombre d'unités et h le nombre de classes de K , et ϵ le caractère de Dirichlet associé à K , i.e le symbole de (Legendre-Jacobi-) Kronecker $\chi_{(-d)} = \left(\frac{-d}{\cdot}\right)$ défini (par exemple dans [Coh], §1.4.2). Soient ω une forme différentielle de premier espèce de E défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et γ un 1-cycle non homologue à 0 sur E . Alors*

$$\int_{\gamma} \omega \sim \sqrt{\pi} \prod_{0 < a < d} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{w\epsilon(a)}{4h}}.$$

Soit η une forme différentielle de seconde espèce sur E , définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, n'appartenant pas à l'espace engendrée par ω . Dans la décomposition de Hodge, ω forme une base de $H^0(E, \Omega_{\mathbb{C}})$

et η forme une base de $H^1(E, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})$. La formule de Chowla-Selberg combinée avec la relation de Legendre donne

$$\int_{\gamma} \nu \sim \frac{2i\sqrt{\pi}}{\prod_{0 < a < d} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{\omega\epsilon(a)}{4h}}}.$$

Dans notre cas $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $h = 1$, $w = 6$ et

$$\int_{\gamma} \omega \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\pi}$$

Or $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$ alors

$$\left(\begin{array}{c} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda\right) \\ F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda\right) \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\pi^2} \\ \frac{\pi^3}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c} \pi^{-\frac{19}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \pi^{\frac{21}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{4}{15}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right).$$

5.3 Les relations entre les périodes $J_{10}(\lambda)$

5.3.1 Pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, notons $C_{10}(\lambda)$ la complétion projective lisse de la courbe affine d'équation

$$C_{10}(\lambda) : y^{10} = x(x-1)(x-\lambda).$$

Soit $J_{10}(\lambda)$ la jacobienne de $C_{10}(\lambda)$. Soit l un automorphisme d'ordre 5 donné par

$$(x, y) \longrightarrow (x, \zeta_{10}^{-1}y)$$

où $\zeta_{10} = e^{\frac{2i\pi}{10}}$, l^* opère sur l'espace des différentielles holomorphes avec les valeurs propres $\zeta_{10}^7, \zeta_{10}^7, \zeta_{10}^9$, et ζ_{10}^9 . Une base des différentielles de première espèce $H^0(C_{10}(\lambda), \Omega^1)$ est fournie par l'ensemble S

$$S = \left\{ \omega_7^1 = \frac{dx}{y^7}, \omega_7^2 = \frac{xdx}{y^7}, \omega_9^1 = \frac{dx}{y^9}, \omega_9^2 = \frac{xdx}{y^9} \right\}.$$

Soient les automorphismes

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\sigma}_n : & \mathbb{Q}(\zeta_{10}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \zeta_{10} & \longmapsto & \zeta_{10}^n \end{array}$$

où $n \in (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$. Soit V_n l'espace propre définie par

$$V_n = \{ \omega \in H^0(C_{10}(\lambda), \Omega^1) / l^* \omega = \sigma_n(\zeta_{10}) \omega \}.$$

Si on note r_n la dimension de V_n pour tout $n \in (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^*$ alors on a, d'après le théorème 1.2.3, $r_1 = 0, r_3 = 0, r_7 = 2$ et $r_9 = 2$.

La décomposition de Wolfart nous donne que

$$J_{10}(\lambda) \sim J_{10, new}(\lambda) \oplus J_5(\lambda) \oplus J_2(\lambda).$$

D'après (1.4.6), la variété de Shimura qui paramètre $J_{10,new}(\lambda)$ est de dimension 0. Donc $J_{10,new}(\lambda)$ est isotrivial *i.e* il ne dépend pas de λ . Cela se traduit par le fait que les périodes sont algébriques et les triplets (γ, δ, κ) , définis dans (1.2.1), liés à ces périodes appartiennent à la liste de Schwartz. On a le tableau suivant

| Périodes | γ | δ | κ |
|---|---------------|---------------|---------------|
| $F(\frac{1}{10}, \frac{-7}{10}, \frac{2}{10}, \lambda)$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $F(\frac{3}{10}, \frac{-1}{10}, \frac{6}{10}, \lambda)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $F(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \lambda)$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $F(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \lambda)$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $F(\frac{1}{10}, \frac{-17}{10}, \frac{-8}{10}, \lambda)$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| $F(\frac{3}{10}, \frac{-11}{10}, \frac{-4}{10}, \lambda)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $F(\frac{7}{10}, \frac{13}{10}, \frac{8}{5}, \lambda)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{5}$ |
| $F(\frac{9}{10}, \frac{11}{10}, \frac{6}{5}, \lambda)$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |

On obtient deux triangles Δ_1 d'angles $\frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}$ et Δ_2 d'angles $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$. On peut couvrir les triangles Δ_1 et Δ_2 par 6 triangles élémentaires d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{5}$ [Ca61]. Donc le groupe de monodromie est le groupe fini de signature $(2, 3, 5)$. Le corps régulier qui correspond à ces groupes de monodromie est l'icosaèdre. On peut le recouvrir par une triangulation comprenant 120 triangles d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}$. On l'illustre par la figure suivante

5.3.2 Dans ce qui suit on montre que l'approche par les G-fonctions utilisée par André dans [A97b] pour le produit de deux courbes modulaires n'est pas applicable pour $J_{10,\lambda}$. L'approche par les G-fonctions repose sur le théorème suivant

Théorème 5.3.3 [A97b] Soit $\vec{y} = (y_0(z), \dots, y_\mu(z))^t$ un vecteur de G -fonctions à coefficients dans un corps de nombres $k \subset \mathbb{C}$, homogènement algébriquement indépendantes sur $k(z)$, et vérifiant un système différentiel normal au sens de Siegel. Soit $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ un point dans le domaine de convergence de \vec{y} . On note $h(\xi)$ sa hauteur logarithmique absolue; on note ν et δ respectivement la dimension et le degré de la $k(\xi)$ -variété projective $\text{Proj}k(\xi)[y_0(z), \dots, y_\mu(z)] \subset \mathbb{P}^\mu$. On suppose que $\mu > 2\nu$. Alors on a

$\log |\xi| < -b'[k(\xi) : k]^a h(\xi)^b \delta^c$ ou bien $h(\xi) < [k(\xi) : k]^{-a'} \delta^{c'}$, où a, b, c, a', b', c' sont des constantes positives indépendantes de ξ , et $a < 1, b < 1$.

On rappelle ici que $J_5(\lambda) \times J_2(\lambda)$ est à isogénie près un facteur de $J_{10}(\lambda)$. Alors la valeur μ est égale au degré de transcendance de l'extension de $\mathbb{Q}(\lambda)$ engendré par les périodes de $J_5(\lambda) \times J_2(\lambda)$. Nous utiliserons le résultat suivant sur l'indépendance des "fonctions périodes" :

Théorème 5.3.4 Soit $A \rightarrow S$ un schéma abélien. Supposons qu'il existe une fibre $s \in S$ tel que A_s est de type CM. Alors le degré de transcendance de la $\mathbb{C}(S)$ -extension engendrée par les périodes de A est égal à la dimension du groupe de Mumford-Tate dérivé générique $MT(A)^{der}$.

Ce théorème a été démontré par André [A92](théorème 2, page 15) dans un contexte plus général sur les 1-motifs. En effet, le théorème 2.3.2 implique que $\dim MT(A)^{der} = \dim H_s$, où H_s est le groupe de monodromie connexe. Puisque la connection admet que des points singuliers réguliers alors la dimension du groupe H_s est égale à la dimension du groupe de Galois différentiel associé à $H_{\text{DR}}^1(A)$. D'après [A84], la dimension de groupe de Galois différentiel est égal au degré de transcendance de la $\mathbb{C}(S)$ -extension engendrée par les périodes de A .

Alors d'après 5.3.4, μ est égal à la dimension du groupe dérivé du groupe de Mumford-Tate $MT(J_5(\lambda) \times J_2(\lambda))^{der}$. D'après 2.9.2, $MT(J_5(\lambda) \times J_2(\lambda))^{der} = Sl_2 \times SL_2 \times SL_2$ est de dimension 9. Mais puisque pour les périodes de $J_2(\lambda)$ la solution logarithmique s'exprime en fonction de deux autres périodes de $J_2(\lambda)$, alors le degré de transcendance chute à 8. Cette valeur confirme notre calcul dans §5.2.4 en tenant compte de toutes les relations fonctionnelles obtenues entre toutes les fonctions hypergéométriques.

La dimension ν de la $\mathbb{Q}(\lambda)$ -variété projective engendrée par $F(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \theta), F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \theta),$

$F(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \theta), F(\frac{1}{5}, \frac{-7}{5}, \frac{-3}{5}, \theta), F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \theta), F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \theta), F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \theta), F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \theta)$

doit être inférieure à 4. Nous devons alors trouver au moins quatre relations homogènes non fonctionnelles indépendantes entre ces fonctions.

On note $l_0 = \log \pi$ et $l_n = \log \Gamma(\frac{n}{15})$. On a

$$\begin{aligned}
b_1 &= \log F(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \theta) && \sim \frac{3}{2}l_0 + \frac{3}{2}l_1 + \frac{5}{2}l_2 - \frac{5}{2}l_4 + \frac{1}{2}l_7 \\
b_2 &= \log F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \theta) && \sim \frac{1}{2}l_0 - \frac{1}{2}l_1 + \frac{7}{2}l_2 - \frac{1}{2}l_4 + \frac{3}{2}l_7 \\
b_3 &= \log F(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \theta) && \sim -\frac{9}{2}l_0 + \frac{5}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2 - \frac{3}{2}l_4 + \frac{5}{2}l_7 \\
b_4 &= \log F(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, \theta) && \sim -\frac{11}{2}l_0 + \frac{1}{2}l_1 + \frac{3}{2}l_2 + \frac{1}{2}l_4 + \frac{1}{2}l_7 \\
b_5 &= \log F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \theta) && \sim \frac{5}{2}l_0 + \frac{-5}{2}l_1 + \frac{7}{2}l_2 + \frac{1}{2}l_4 + \frac{5}{2}l_7 \\
b_6 &= \log F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \theta) && \sim \frac{1}{2}l_0 + \frac{3}{2}l_1 + \frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{2}l_4 + \frac{3}{2}l_7 \\
b_7 &= \log F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \theta) && \sim -\frac{19}{2}l_0 + \frac{3}{2}l_1 + \frac{3}{2}l_4 + \frac{3}{2}l_7 - \frac{3}{2}l_2 \\
b_8 &= \log F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \theta) && \sim \frac{21}{2}l_0 + \frac{3}{2}l_2 - \frac{3}{2}l_1 - \frac{3}{2}l_4 + \frac{3}{2}l_7
\end{aligned}$$

Soient α_i avec $1 \leq i \leq 8$ des nombres rationnels tels que $\sum_{i=1}^8 \alpha_i b_i = 0$. On remplace les b_i par leurs valeurs et on résoud le système, on obtient les relations indépendante suivantes

$$\begin{aligned}
1) \quad & F(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \theta)^{115} F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \theta)^{160} F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \theta)^{20} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \theta)^{140} \\
& \sim F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \theta)^{122} F(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5})^{147}. \\
2) \quad & F(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \theta)^{115} F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \theta)^{160} F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5})^{20} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)^{140} \\
& \sim F(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5})^{262} F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \theta)^7. \\
3) \quad & F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5})^{11} F(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}) F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)^{125} F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)^{115} \\
& \sim F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5})^5 F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5})^{15}.
\end{aligned}$$

Les équations 1 et 2 avec le fait que $\det A_1 \sim 1$ implique l'équation suivante

$$F(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \theta) F(\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}) \sim F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \theta) F(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \theta) \sim 1.$$

Cette équation permet de transformer les équations 2 et 3 en les équations homogènes suivantes

$$\begin{aligned}
& F(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \theta)^{27} F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \theta)^{160} F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \theta)^{20} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \theta)^{140} \\
& \sim F(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \theta)^{235} F(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \theta)^{112} \\
& F(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \theta)^5 F(\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{5}, \theta)^{15} F(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}, \frac{13}{5}, \theta)^{11} F(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}, \theta)^{105} F(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, \theta)^{104}. \\
& \sim F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \theta)^{125} F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \theta)^{115}
\end{aligned}$$

On obtient donc trois relations homogènes entre les fonctions hypergéométriques. Il nous manque alors une relation pour vérifier les conditions du théorème 5.3.3.

Bibliographie

- [A84] André Y., *Sur certaines algèbres de Lie associées aux schémas abéliens*, Note C.R.-A.S. t.299 I n^o5 (1984), p. 137-140.
- [A89] André Y., *G-functions and Geometry*, Aspects of Math. vol. E13, Vieweg, braunschweig/ Wiesbaden., (1989), p. 252-268.
- [A92] André Y., *Mumford-Tate groups of mixed Hodge structures and the theorem of the fixed part*, Compos. Math., 82, (1992), p. 1-24.
- [A96] André Y., *G-fonctions et transcendance*, J. reine angew. Math., 476 (1996) p. 95-125.
- [A97] André Y., *Distribution des points CM sur les variétés de modules de variétés abéliennes*, prépublication 1997, Jussieu.
- [A98] André Y., *Finitude des couples d'invariants modulaires singuliers sur une courbe algébrique plane non modulaire donnée*, J. reine angew. Math., 505, (1998) p. 203-208.
- [Ad82] Anderson G., *Logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions and the periods of abelian varieties*, Compos. Math., 45, (1982), p. 315-332.
- [B80] Belyi G., *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. U.S.S.R.-Izv., 14, n^o 2, (1980), p. 247-256.
- [BaBo66] Baily W.I, Borel A., *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Annals of Math. 84, (1966).
- [Bo69] Borel A, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, (1969).
- [Bo72] Borel A, *Some metric proprieties of arithmetic quotients of symmetric spaces and extension theorem*, J. Diff. Geometry n 6 (1972).
- [C87] Coleman R., *Torsion points on curves*, In: Galois representations and arithmetic algebraic geometry (Ed. Y.Ihara), Adv. Stud. Pure Math. (1987), p. 235-247.
- [Ca61] Carathodory C., *theory of functions*, Chelsea publishing company New York. (1961) V2.
- [Cas59] Cassels J., *An introduction to the geometry of numbers*, Springer-Verlag. (1959).

- [Ch85] Chai C., *Siegel moduli schemes and their compactifications over \mathbb{C}* , Cornell G, Silvermann J. Arithmetic geometry. Springer-Verlag.
- [CoWo90] Cohen.P; Wolfart.J., *Modular embeddings for some nonarithmetic Fuchsian groups*, Acta Arith. , (1990), n^o.2.p. 93-110.
- [CoWo92] Cohen.P; Wolfart.J., *Dessins de Grothendic et variétés de Shimura*, C.R.Acad. Sci. Paris, t315, Série I., (1992), no.2.p. 1025-1028.
- [dJN91] de Jong J.,Noot R., *Jacobians with complex multiplication*, In:Arithmetic algebraic geometry (Ed.G.van der Geer, F.Oort, J.Steenbrink), Progress in Math.89, Birkhäuser (1991), p.177-192.
- [D71] Deligne P., *Théorie de Hodge II*, Pub. Math. de l'I.H.E.S., 40, (1971), p. 5-57.
- [D72] Deligne P., *Travaux de Shimura*. Sémin. Bourbaki 1970/71, Exp.389. Lec. Notes Math. 244, Springer-Verlag (1972), p. 123-165.
- [D79] Deligne P., *Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*,in Automorphic forms, representations, and L -fonctions, Part 2, A. Borel and W.Casselman, eds., Proc. of Symp. in Pure Math., Vol. 3, American Mathematical Society, (1979), p. 247-290.
- [D82] Deligne P., *Hodge cycles on abelian varieties*, Hodge cycles, motives and Shimura varieties, Springer L.N. 900, (1982), p. 9-100.
- [E98] Edixhoven B., *Special points on the product of two modular curves*, Compos. Math., 114, (1998), p. 315-328.
- [E99] Edixhoven B., *On the André-Oort conjecture for Hilbert modular surfaces*, Preprint, université de Rennes., (1999).
- [EYa01] Edixhoven B Yafaev A., *Subvarieties of Shimura varieties*, Preprint, université de Rennes., (1999).
- [F85] Flexor M., *Endomorphismes de variétés abélienne*, Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de mordell Weil Astérisque., (1985), no. 127, p.235-248.
- [Fe66] Feldman N., *Approximation of certain transcendal numbers I, II*, Amer. Math. Soc.Transl., (1966), no. 59, p.224-270.
- [FKV99] Frey G, Ernst K, Helmut V., *Curves with infinite K -rational geometric fundamental group*, London Math Soci, Lecture Note Serie 256 Cambridge University Press(1999), p.86-118 p.224-270.
- [HS201] Hindry M, Silverman J H., *Diophantine Geometry: An introduction*, Graduate texts in Mathematic 112, Springer Verlag, (2000).
- [Igu72] Igusa J., *Theta functions*, New York, Springer-Verlag, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 194 (1972gu 72).
- [K81] Klein F., *Vorlesungen über die hypergemetsche Function*, Springer-Grundlehren 39, Berlin-Heeideberg-New York (1981).

- [Ka90] Katz N., *Exponential sums and differential equations*, Annals of Math Studies 124, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1990).
- [KR78] Koblitz N, Rohrlich D., *Simple factors in the Jacobian of Fermat curve*, Can. J. Math., 30, (1978), p.1183-1205.
- [Ku84] Kumar M., *Exceptional Hodge Classes on Certain Abelian Varieties*, Math Ann 208, (1984), p197-200.
- [Ku89] Kumar M., *Computing the Hodge group of an abelian variety*, Séminaire de Théorie des nombres, Paris (1988-1989), p141-156.
- [L73] Lang S., *Elliptic Functions*, Addison-wesley, Mass, (1973).
- [L78] Lang S., *Cyclotomics Fields*, Springer-Verlag (1978).
- [L83] Lang S., *Complex multiplication*, Springer-Verlag (1983).
- [M90] Milne J., *Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles*, Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions I, (1990), p. 283-411.
- [M94] Milne J., *Shimura varieties and motives*, Proc. of Symp. in Pure Math., Vol55, American Mathematical Society, (1994), p. 447-423.
- [Ma75] Masser D., *Elliptic functions and transcendence*, Lect. Notes in Math. 437, Springer-Verlag (1975).
- [Mar89] Marel B., *Formal groups and Differential equations*, Thesis (1989).
- [Mi07] Minkovski H., *Diophantische Approximationen*, Leipzig(1907).
- [Mo95] Moonen B., *Special points and linearity properties of Shimura varieties*, Thesis, Utrecht, september (1995).
- [Mo98] Moonen B., *Linearity propereties of Shimura varieties I*. Journal of Algebraic Geometry 7(1998), p 539-567.
- [Mo982] Moonen B., *Models of Shimura varieties in mixed characteristic*. in “ Galois representations in arithmetic algebraic geometry”, edited by A.J. Scholl and R.L. Taylor. Cambridge University Press (1998), p 267-350.
- [Mu66] Mumford D., *Families of abelian varieties*, Proc.Sympos.Pure Math. Vol. 9: Algebraic groups and discontinuous subgroups (Ed.A.Borel and G. D.Mostow). AMS, 1966; p. 347-351.
- [N90] Narkiewicz., *Elementary and anaytic theory of algebraic numbers*, 2ème éd., Springer-Verlag (1990).
- [No96] Noot R., *Models of Shimura varieties in mixed characteristic*, Journal of Algebraic Geometry (1996) p187-207.
- [O97] Oort F., *Canonical lifts and dense sets of CM-points*, Aritmetic Geometry, Proc. Cortona Symposium (1994), F. Catanese, ed., symposia Math., Vol. XXXVII, Cambridge University Press, (1997), p. 228-234.

- [R83] Raynaud M., *Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion arithmétique geometry*, Vol.I, p. 327-352, Progr. Math., 35, Birkhäuser Boston, Boston, Mass., (1983).
- [Ri83] Ribet K., *Hodge classes on certain types of abelian varieties*, Amerc. J. Math 105 n2 p 523-538, (1983).
- [Sa71] Samuel P., *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, (1971).
- [S59] Shimura G., *On the theory of automorphic functions*, Ann. of Math. 70 (1959) p. 101-144.
- [S57] Shimura G., *Modules des variétés abéliennes polarisées et fonctions modulaires*, séminaire H.cartan E.N.S (1957-1958) Exposés 18-20.
- [S79] Shimura G., *Automorphic forms and periods of abelian varieties*, J. Math. Soc. Japan 31, (1979), p. 561-592.
- [S63] Shimura G., *On analytic families of polarised abelian varieties and automorphic functions*, Ann. of Math. 78 (1963) p. 149-192.
- [S94] Shimura G., *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publ of Math. soc of Japan, Princeton University Press, (1994).
- [San91] Sands J., *Generalisation of a theorem of Siegel*, Acta Arith. 58, no1 p 44-57, (1991).
- [Sh92] Shiga H., *On the transcendency of values of the modular function at algebraic points*, Proceedings of the Journées Arithmétiques Genève 1991, Astérisque 209 p293-305 (1992).
- [Si63] Siegel C., *Lectures on Riemann matrices*, Tata Institute. Bombay (1963).
- [Sil86] Silverman J.H., *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate texts in Mathematics 106. Springer-Verlag (1986).
- [ST61] Shimura G, Taniyama Y., *Complex Multiplication of Abelian Varieties*, Math. Soc. Japan, Tokyo (1961).
- [SW95] Shiga H, Wolfart J., *Criteria for complex multiplication and transcendence properties of automorphic functions*, J. Reine Angew. Math, 463, (1995), p. 1-25.
- [Wo88] Wolfart J., *Werte hypergeometrischer Funktionen*, Invent. Math. 92, (1988), no.1, p187-216.
- [Y97] Yoshida M., *Hypergeometric Functions, My love*, Aspects of Math. (1997).
- [Ya99] Yafaev A., *Special points on products of two Shimura Curves*, preprint, accepted for publication in Manuscripta mathematica.
- [Ya00] Yafaev A., *Sous-variétés des variétés de Shimura*, thèse., septembre (2000).