

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT
U.F.R. de Mathématiques

Année : 2003

N°

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : Mathématiques

présentée par
Charles COCHET

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

**Réduction des graphes de
Goresky-Kottwitz-MacPherson ;
nombres de Kostka et
coefficients de Littlewood-Richardson**

Soutenue le 19 décembre 2003 devant le jury composé de :

M. Fokko DU CLOUX

M. Paul GÉRARDIN

M. Jean-Bernard LASSERRE

M. Marc A. A. VAN LEEUWEN , *rapporteur, président*

Mme Michèle VERGNE, *directrice*

M. Catalin ZARA, *rapporteur*

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à exprimer ma reconnaissance envers Michèle Vergne, ma Directrice de thèse. Elle m'a accordé sa confiance dès le stage de DEA, m'a orienté vers des thèmes de recherche très prometteurs, puis m'a encadré avec compétence, dynamisme et disponibilité pendant ces trois années. Avec une patience infinie, elle m'a guidé dans ce parcours initiatique à la recherche qu'est le doctorat.

Je souhaite également adresser toute ma gratitude à Marc A. A. van Leeuwen et Catalin Zara, qui ont accepté d'être les rapporteurs de mon travail. Ma reconnaissance va également à Fokko du Cloux, Paul Gérardin et Jean-Bernard Lasserre, qui me font l'honneur d'être dans mon jury.

Je remercie l'équipe de théorie des groupes, représentations et applications de l'université Paris 7, pour son accueil chaleureux et les réponses à de multiples questions. De manière générale, l'Institut de Mathématiques de Jussieu, sa bibliothèque, ses séminaires, forment un environnement exceptionnel dont l'ampleur n'est pas toujours saisie par les étudiants parisiens.

L'excellente ambiance régnant sur le plateau des doctorants, et notamment en 7C10, a été capitale pendant ces trois années. C'est pourquoi je tiens à exprimer mon amitié à tous mes collègues jeunes chercheurs, en particulier à Bertrand, Clotilde, François, Georg, José, Martine, Matthieu, Philippe, Sibylle.

J'adresse un grand merci à l'équipe informatique, tout spécialement à Joël Marchand et Albert Shih. On ne compte plus les explications, les solutions, ainsi que les installations et mises à jour — parfois dans la minute — de bibliothèques ou de logiciels.

La liste de diffusion `beta@` s'est avérée d'une très grande utilité, essentiellement pour poser encore plus de questions informatiques, souvent pour faire circuler des réponses, et parfois pour me faire rire à la lecture d'envolées hautement techniques.

Ces années de doctorat ont été grandement facilitées par Monique Douchez, Odile Larive, Jacqueline Lepage, Rosita Monchanin, Jean-Jacques Sansuc et Michèle Wasse. Je les remercie pour leur savant cocktail de professionnalisme, d'horaires élastiques, et de qualités humaines.

Enfin, cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans l'affection, les encouragements et le soutien constants de mes parents, de mon frère et de Marie-Noëlle.

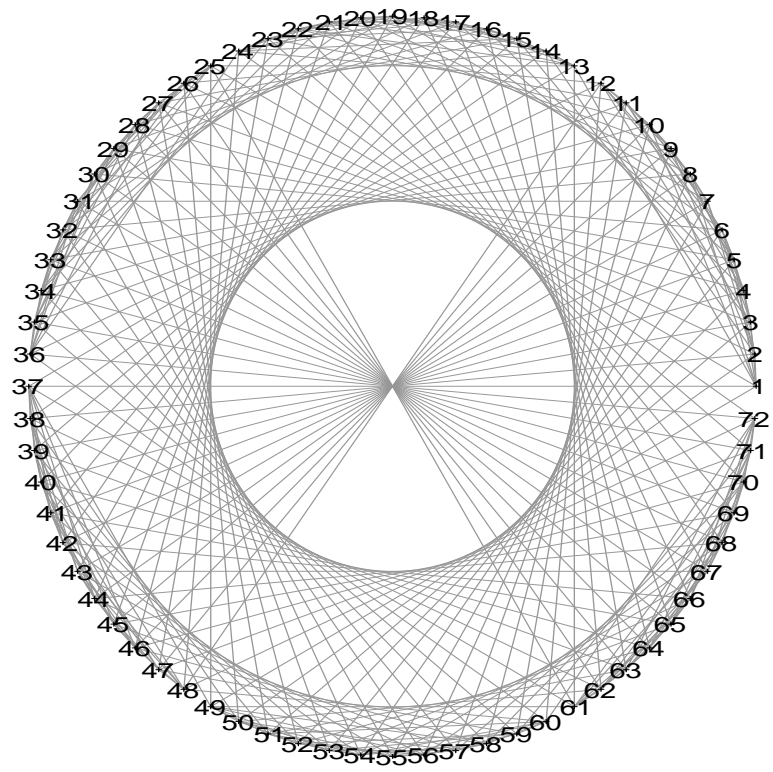


TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	iii
Introduction	ix
Partie I. Réduction des graphes de Goresky–Kottwitz–MacPherson	1
1. Graphe de GKM d’une variété hamiltonienne	3
1.1. Construction du graphe.....	3
1.2. Exemple de la variété projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$	5
1.3. Exemple de la variété grassmannienne $G_{k,n}(\mathbb{C})$	6
1.4. Exemple de la variété des drapeaux $U(3)/\{\text{matrices diagonales}\}$	8
1.5. Cohomologie et K-théorie du graphe de GKM d’une variété.....	10
1.6. Nombres de Betti.....	11
2. 1-squelette abstrait	13
2.1. Définition du 1-squelette abstrait.....	13
2.2. Orientation d’un 1-squelette abstrait.....	16
2.3. Produit de 1-squelettes.....	18
2.4. Produit et orientation.....	19
2.5. Cohomologie d’un 1-squelette.....	21
2.6. K-théorie et caractère d’un graphe de GKM.....	22
3. Réduction d’un 1-squelette	25
3.1. Motivation : réduction d’une variété.....	25
3.2. Définition et premières propriétés de la réduction d’un 1-squelette.....	26
3.3. V-hypergraphe de GKM.....	28
3.4. Application de Kirwan.....	30
3.5. Exemples de réduction.....	31
4. Quantification et réduction	35
4.1. Décomposition d’un caractère sur un sous-groupe.....	35
4.2. Caractère réduit d’un graphe de GKM.....	36
4.3. Lien entre caractère réduit et caractère invariant.....	37
4.4. Deux exemples d’application.....	38

5. Les programmes <code>reduction.mws</code> et <code>caractere.mws</code>	43
5.1. Stockage des données.....	43
5.2. Utilisation des programmes.....	44
5.3. En coulisse.....	45
5.4. Test des programmes.....	51
Partie II. Nombres de Kostka et coefficients de Littlewood-Richardson...	57
6. Le problème des multiplicités	59
6.1. Origine du problème.....	59
6.2. Les formules de Kostant et de Steinberg.....	60
7. Volume et points entiers des polytopes convexes rationnels	63
7.1. Réalisation des polytopes.....	63
7.2. Formules générales.....	65
7.3. Cas particulier de A_r	70
8. Le programme <code>multiplicites.mws</code>	73
8.1. Utilisation du programme.....	73
8.2. En coulisse.....	74
8.3. Test du programme.....	79
Index des notations	83
Index terminologique	87
Bibliographie	91

INTRODUCTION

Depuis leur introduction à la fin du XIX^{ième} siècle, les groupes de Lie ont fait l'objet de nombreuses études. Le développement de l'outil informatique a permis d'explorer les groupes de Lie de façon différente, en faisant apparaître des propriétés, exemples et contre-exemples inaccessibles de par leur taille ou leur complexité.

Ce travail s'inscrit dans cette optique. Il comporte deux parties distinctes, mais cependant issues du même monde : l'action d'un groupe de Lie, sur une variété ou un espace vectoriel.

La première partie traite de l'implémentation de la réduction et du calcul du caractère réduit d'un graphe de Goresky-Kottwitz-MacPherson, analogue combinatoire d'une variété symplectique compacte connexe soumise à une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact connexe commutatif. La seconde partie est consacrée au calcul effectif de coefficients intervenant lors de l'action d'un groupe de Lie semi-simple complexe sur un espace vectoriel de dimension finie, à savoir les nombres de Kostka et les coefficients de Littlewood-Richardson (aussi appelés coefficients de Clebsch-Gordan).

Remarque : les notations utilisées dans les deux parties sont indépendantes.

Première partie

En 1988, Thomas Delzant [Del88] jeta un pont entre la géométrie hamiltonienne et le monde des polyèdres convexes. Lorsque un tore agit de façon effective et hamiltonienne sur une variété symplectique compacte et connexe, la dimension de la variété est supérieure au double de la dimension du tore et l'image de la variété par l'application moment est un polyèdre convexe. De plus, si cette dimension est exactement le double de celle du tore, alors ce polyèdre convexe (appelé *polyèdre de Delzant*) caractérise à isomorphisme près la variété hamiltonienne. En d'autres termes, toute l'information de la variété hamiltonienne est contenue dans ce polyèdre.

Demazure [Dem70] a introduit la notion de variété torique (voir également [Aud91] et [Gui94]). Une sous-catégorie de ces variétés, comprenant notamment les espaces projectifs, fait partie des variétés satisfaisant les conditions du théorème de Delzant.

Hélas, de nombreuses variétés intéressantes ne remplissent pas ces conditions drastiques. Citons notamment les variétés grassmanniennes et les variétés des drapeaux. Ainsi, lors du passage d'une de ces variétés à son polyèdre associé il y a perte d'information.

La question en suspens est alors : comment encoder le maximum d'informations d'une variété compacte et connexe munie de l'action d'un tore de dimension quelconque à l'aide d'un objet combinatoire ?

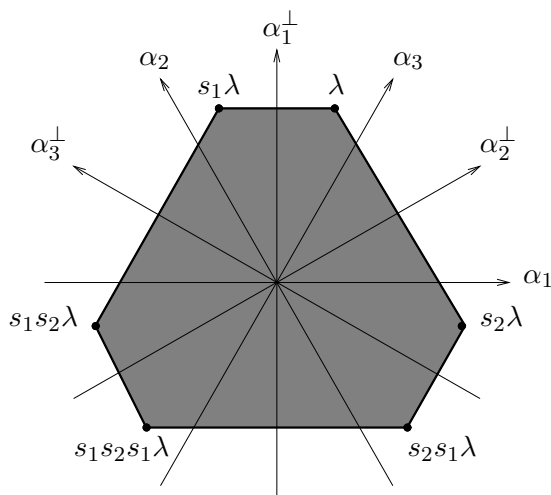


Image par l'application moment
de l'orbite coadjointe $U(3) \cdot \lambda$

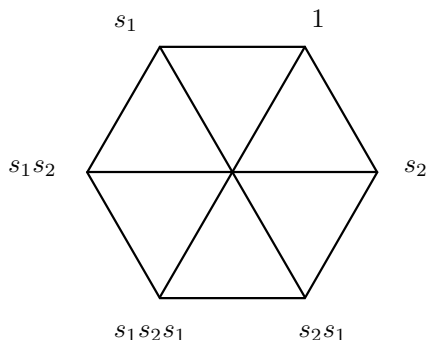
Goresky, Kottwitz et MacPherson ont démontré, dans leur article [GKM98], que l'anneau de cohomologie équivariante de certaines variétés compactes connexes — les *variétés de GKM*, dont nous discuterons plus loin — pouvait se calculer à l'aide d'outils issus de théorie des graphes. La liste des variétés de GKM comprend entre autres les variétés toriques et les espaces homogènes G/H , où G est un groupe compact connexe et H un sous-groupe de G de même rang.

Guillemin et Zara ont ensuite mis en valeur un graphe attaché à chaque variété de GKM. Ce graphe, orienté et dont chaque arête est numérotée par un *vecteur axial*, est appelé *graphe* (ou *1-squelette*) de Goresky-Kottwitz-MacPherson, ou graphe de GKM ([GZ99]). Par exemple, dans le cas hamiltonien, ce graphe prend en compte le fait que les images des points fixes par l'application moment sont reliées non seulement par des arêtes au sens des polytopes (intersection de facettes), mais parfois aussi par des arêtes « internes » au polytope.

Ce lien avec les graphes permet par ailleurs la représentation graphique des variétés dont la dimension est supérieure à trois.

Une fois ce graphe établi pour les variétés de GKM, Guillemin et Zara ont entrepris de formaliser la notion de graphe de GKM afin de s'abstraire de la variété initiale : ainsi naquit le *V-graphe de GKM* ou *1-squelette* (abstrait). Ils ont depuis effectué un travail méthodique d'investigation des propriétés de ce nouvel objet ([GZ], [GZ01a], [GZ01b]). Leur recherche a mis à jour de nombreux analogues en théorie des graphes aux notions de géométrie symplectique : orientation, cohomologie, K-théorie, quantification.

Ils ont prouvé que des théorèmes classiques de géométrie symplectique peuvent être démontrés en utilisant uniquement les graphes de GKM. Citons notamment le théorème de localisation d'Atiyah-Bott-Berline-Vergne ([BV82] et [AB84]) et le théorème de Jeffrey-Kirwan ([JK95]).



Graphe de GKM de la variété des drapeaux $U(3)/\{\text{matrices diagonales}\}$

Mais la partie de leur recherche qui m'a le plus fasciné est la suivante. Sous certaines hypothèses, on peut construire la *réduction* d'un V-graphe de GKM abstrait par rapport à un tore unidimensionnel et selon une valeur régulière d'une application moment du graphe. La réduction d'un V-graphe est à nouveau un V-graphe. Cette opération au niveau des graphes est calquée sur la réduction au niveau des variétés, de sorte à ce que la réduction du graphe d'une variété soit le V-graphe de la variété réduite (lorsque ces notions ont un sens).

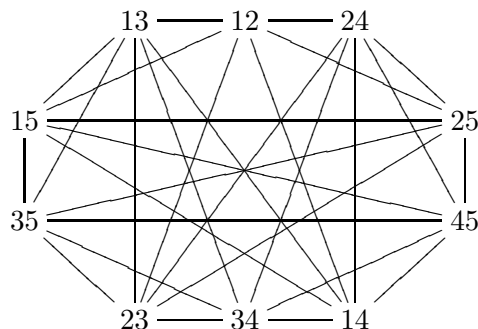
Par ailleurs, dans le cadre de la réduction d'un graphe de GKM par un sous-tore unidimensionnel, le caractère invariant d'un élément de K-théorie est en fait égal à un caractère construit uniquement à partir de données provenant du graphe réduit (et de l'élément de K-théorie), appelé *caractère réduit*. Ce dernier résultat est l'analogue en théorie des graphes à l'assertion « la quantification et la réduction commutent » issue du monde symplectique ([MS99]).

En outre, alors que le caractère invariant d'un élément de K-théorie est un polynôme de taille conséquente, le caractère réduit est une fraction rationnelle condensée.

Dans la pratique, la réduction d'un V-graphe de GKM est une tâche rapidement ardue. Passés les exemples en petite dimension (où la théorie de GKM n'apporte somme toute rien de neuf), on est vite confronté à des calculs éprouvants. Par exemple le graphe de la variété $G_{2,5}(\mathbb{C})$ des 2-plans complexes dans \mathbb{C}^5 est 6-valent et possède 10 sommets (donc 30 arêtes). Ses réductions selon le tore dont un générateur infinitésimal est $\xi = (0, 1, 2, 3, -6)$ sont 5-valentes et possèdent 6, 10, 12 et 14 sommets (donc 15, 25, 30 et 35 arêtes). L'outil informatique est donc utile afin d'étudier des exemples non triviaux.

J'ai donc implémenté avec MAPLE la réduction d'un V-graphe de GKM. En sortie nous obtenons non seulement les données du graphe (sommets, arêtes et vecteurs axiaux), mais aussi une représentation graphique du résultat.

De même, le calcul et le stockage du caractère invariant sont impossibles même pour de petits exemples. Ainsi la dilatation de l'élément de K-théorie implique une augmentation importante du nombre de termes du caractère. Par exemple, pour l'élément de K-théorie $\Theta(p) = e^{2i\pi\theta_p}$ de la variété $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ et le tore unidimensionnel dont un générateur infinitésimal est $\xi = (1, 2, -1, -2)$, les caractères invariants $\chi(\Theta^n)^H$ pour $n = 1, 10, 100$ et 1000 possèdent respectivement 1, 12, 867 et 83667 termes.

Graphe de GKM de $G_{2,5}(\mathbb{C})$

C'est pourquoi j'ai également implémenté le calcul du caractère réduit d'un élément de K-théorie d'un graphe de GKM. En sortie, nous obtenons une somme de fractions rationnelles dont la taille reste constante quelle que soit la dilatation de l'élément de K-théorie.

Mes deux programmes, intitulés `reduction.mws` et `caractere.mws`, incorporent une bibliothèque d'exemples. Des procédures génèrent ainsi les variétés grassmanniennes $G_{k,n}(\mathbb{C})$ et le cycle à $4N$ sommets. La variété des drapeaux $U(3)/\{\text{matrices diagonales}\}$ (dont la réduction est un *V-hypergraphe de GKM*) est également disponible. Une procédure de produit de V-graphes de GKM permet de créer d'autres exemples.

Les programmes sont disponibles en <http://www.math.jussieu.fr/~cochet>.

Le plan de la première partie de ce travail est le suivant. Les quatre premiers chapitres sont les rappels des résultats de Guillemin et Zara qui seront implémentés. Le cinquième est entièrement original.

Dans le premier chapitre est introduite la notion de graphe de GKM. Nous détaillons plusieurs exemples ainsi que des outils. Le second chapitre traite du V-graphe de GKM abstrait et de ses propriétés : orientation, produit, cohomologie, ainsi que K-théorie et caractère d'un graphe de GKM. Dans le troisième chapitre, nous parlerons de la réduction d'un V-graphe de GKM abstrait. Nous verrons notamment le lien avec les V-variétés et discuterons de la notion de V-hypergraphe de GKM. Le quatrième chapitre est consacré à l'analogie pour les graphes de GKM à l'assertion « la quantification et la réduction commutent ». Cette partie effectue le lien entre le caractère invariant et le caractère réduit. Enfin, le cinquième chapitre décrit les programmes `reduction.mws` et `caractere.mws`, leurs fonctionnalités, leurs implémentations, leurs performances.

Remerciements : Marc A. A. van Leeuwen m'a appris à optimiser ma programmation sous MAPLE et m'a enseigné son logiciel `LLE`. C'est grâce à lui que bon nombre des procédures des programmes `reduction.mws` et `caractere.mws` sont aussi efficaces. Je l'en remercie chaleureusement.

Seconde partie

Les représentations irréductibles de dimension finie d'un groupe de Lie G semi-simple complexe sont classifiées par leur plus haut poids λ , et notées usuellement $V(\lambda)$. Le caractère $\text{ch}(V(\lambda))$ de la représentation de plus haut poids λ est défini comme étant la trace de la représentation $G \rightarrow GL(V(\lambda))$. Plus précisément, il s'écrit sur un sous-groupe de Cartan de G comme une somme finie

$$\text{ch}(V(\lambda)) = \sum_{\mu} c_{\lambda}^{\mu} e^{\mu},$$

où c_{λ}^{μ} désigne la multiplicité du poids μ dans la représentation $V(\lambda)$. Ces multiplicités sont appelées *nombre de Kostka* dans le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$.

Restons dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$, c'est-à-dire pour une algèbre de Lie de type A_r . Le produit tensoriel des représentations de plus hauts poids λ et μ se décompose alors sous la forme

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) = \sum_{\nu} c_{\lambda \mu}^{\nu} V(\nu)$$

où $c_{\lambda \mu}^{\nu}$ représente la multiplicité de la représentation irréductible de plus haut poids ν dans le produit tensoriel. Ces multiplicités $c_{\lambda \mu}^{\nu}$ sont appelées *coefficients de Littlewood-Richardson* (et aussi coefficients de Clebsch-Gordan).

Une particularité du nombre de Kostka c_{λ}^{μ} est qu'il est localement polynomial en les coordonnées des poids λ et μ , et polynomial lorsque ceux-ci parcourent les chambres d'un certain complexe, dit de Kostant ([SV02], [BGR03]). En particulier la fonction $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\mu}$ définie sur les entiers naturels est donnée par une formule polynomiale. De même, le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda \mu}^{\nu}$ est localement polynomial en les coordonnées des poids λ , μ et ν . C'est en outre un polynôme sur les chambres d'un certain complexe, dit de Littlewood-Richardson ([Ras03], [KT99]). En particulier la fonction $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\nu} c_{t\mu}^{t\nu}$ est polynomiale.

Je suis intéressé par le calcul efficace des nombres de Kostka, des coefficients de Littlewood-Richardson, ainsi que des polynômes $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\mu}$ et $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\nu} c_{t\mu}^{t\nu}$ associés. Pour A_1 , le calcul des nombres de Kostka est immédiat et la formule de Clebsch-Gordan donne les coefficients de Littlewood-Richardson. Pour A_2 , les petits exemples peuvent encore se traiter à la main. Mais pour A_r ($r \geq 3$) ou pour des poids dont les composantes sont de taille respectable, les calculs sont impraticables. L'étude d'exemples non triviaux nécessite donc des formules adaptées ainsi que l'utilisation de l'outil informatique.

Il existe de nombreuses formules issues de la théorie des représentations permettant de calculer les deux quantités c_{λ}^{μ} et $c_{\lambda \mu}^{\nu}$. La première est la formule du caractère de Weyl, valable pour toute algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} . Cette formule affirme que le caractère de la représentation irréductible de plus haut poids λ est égal à

$$\text{ch}(V(\lambda)) = \frac{A_{\lambda+\rho}}{A_{\rho}},$$

où

$$A_{\mu} = \sum_{w \in W} (-1)^{\varepsilon(w)} e^{w(\mu)}.$$

La somme s'effectue sur le groupe de Weyl $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de \mathfrak{g} , pour une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} fixée. Les symboles μ et ρ désignent respectivement un poids et la demi-somme des racines positives. Par ailleurs $\varepsilon(w)$ est le nombre d'inversions de la permutation w (ainsi $(-1)^{\varepsilon(w)}$ est la signature de w).

Les coefficients du produit tensoriel s'obtiennent également à partir de cette formule, puisque le produit tensoriel des représentations de plus hauts poids λ et μ a pour caractère

$$\text{ch}(V(\lambda) \otimes V(\mu)) = \text{ch}(V(\lambda)) \cdot \text{ch}(V(\mu)) = \sum_{\nu} c_{\lambda \mu}^{\nu} \text{ch}(V(\nu)).$$

Ces deux formules sont toutefois inutilisables en pratique. En outre, elles nécessitent le calcul de tout le caractère pour en extraire un unique coefficient. Par exemple le caractère de la représentation de plus haut poids $\lambda = (3, 2, 1, -6)$ de A_3 possède 25 monômes, celui de la représentation $V(5\lambda)$ en possède 1605, et celui de la représentation $V(10\lambda)$ en possède 11601.

Le logiciel **LE** (de Arjeh M. Cohen, Marc van Leeuwen, Bert Lissers, voir [vL94]) utilise quant à lui les formules de Freudenthal et de Klymik. Ces formules sont en outre valables pour n'importe quelle algèbre de Lie semi-simple complexe.

Cependant toutes ces formules sont rapidement impraticables lorsque le rang de \mathfrak{g} augmente, ou lorsque la taille des coefficients des poids s'accroît. D'où la nécessité d'implémenter des formules plus efficaces. C'est le but de mon travail dans le cas particulier de $\mathfrak{gl}_{r+1}(\mathbb{C})$.

Remarquons que le nombre $k_{\mathfrak{g}}(\beta)$ de façons d'écrire un élément β du réseau des racines comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des racines positives de \mathfrak{g} satisfait à l'égalité

$$\frac{1}{\prod_{\alpha}(1 - e^{-\alpha})} = \sum_{\beta} k_{\mathfrak{g}}(\beta) e^{-\beta},$$

où le produit est sur l'ensemble des racines positives de l'algèbre \mathfrak{g} et la somme sur le réseau des racines. À l'aide de cette remarque et de la formule du caractère de Weyl, Kostant démontra que la multiplicité du poids μ dans la représentation de plus haut poids λ est égale à

$$c_{\lambda}^{\mu} = \sum_w (-1)^{\varepsilon(w)} k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)),$$

où la somme est sur l'ensemble des éléments w du groupe de Weyl de \mathfrak{g} tels que l'élément du réseau des racines $w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)$ soit contenu dans le cône engendré par les racines positives.

Étant donnés trois poids dominants λ, μ, ν , Steinberg démontra que la multiplicité de la représentation de plus haut poids ν dans le produit tensoriel des représentations de plus hauts poids λ et μ est égale à

$$c_{\lambda \mu}^{\nu} = \sum_{(w, w')} (-1)^{\varepsilon(w) + \varepsilon(w')} k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - (\nu + 2\rho)),$$

où la somme est sur l'ensemble des couples (w, w') d'éléments du groupe de Weyl tels que l'élément du réseau des racines $w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - (\nu + 2\rho)$ soit contenu dans le cône engendré par les racines positives.

Ces deux élégantes formules sont le point de départ de mon travail. Elles ont l'inconvénient de faire intervenir des sommes sur des sous-ensembles du groupe de Weyl. Or la taille de ce dernier est au moins exponentielle en le rang de l'algèbre considérée. Ces sous-ensembles se révéleront néanmoins de taille raisonnable dans la pratique, c'est-à-dire

lorsque le rang de A_r n'est pas trop grand. En outre, dans le cas de $\mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$ nous avons une méthode efficace pour les calculer.

Le point commun aux formules apparaissant dans les théorèmes de Kostant et de Steinberg est la fonction comptant le nombre de décompositions d'un élément du réseau des racines comme somme à coefficients entiers positifs des racines positives de l'algèbre de Lie. Cette fonction est appelée *fonction de Kostant* et compte le nombre de points entiers dans un polytope convexe rationnel. Ainsi, le problème de théorie des représentations consistant à calculer les nombres de Kostka c_λ^μ et les coefficients de Littlewood-Richardson $c_{\lambda^\nu}^\mu$ (ainsi que les fonctions polynomiales associées) se réduit au problème combinatoire consistant à compter les points entiers dans les polytopes convexes P à sommets entiers et le polynôme d'Ehrhart $n \mapsto |nP|$ correspondant ([Ehr74]).

Plus généralement, fixons un ensemble Φ fini de vecteurs d'un espace vectoriel engendrant un réseau. Alors la fonction calculant le nombre de décompositions d'un vecteur du réseau comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des éléments de Φ est appelée *fonction de partition vectorielle*. Cette fonction compte les points entiers d'un polytope convexe rationnel.

La fonction de partition vectorielle joue un rôle central en mathématiques. Ses applications sont multiples : théorie des représentations, flots dans un circuit, carrés magiques, statistiques, bases cristallines des groupes quantiques. Compter les points entiers dans un polytope convexe rationnel est un problème polynomial en la taille des données lorsque la dimension de ce polytope est fixée, et NP-difficile sinon ([Bar94]).

Les méthodes d'attaque de ce problème sont tout aussi variées que les domaines où il apparaît. Citons notamment les résidus ([BP03]) et l'algorithme de Barvinok ([Bar94]). Cette dernière méthode n'a été implémentée que récemment par l'équipe LATTE ([DHTY03]) et donne d'excellents résultats.

J'ai pour ma part utilisé l'approche de Baldoni-Vergne ([BSV01]) et de Baldoni-DeLoera-Vergne ([BSDLV03]) par inversion de la formule de Laplace, afin de construire un algorithme efficace, robuste et simple d'emploi, calculant la fonction de Kostant lorsque \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie de type A_r . Dans ce cas particulier, notre programme est actuellement le plus rapide.

Combiné aux formules de Kostant et de Steinberg, cet algorithme donne lieu à un programme MAPLE, nommé `multiplicites.mws`, calculant les nombres de Kostka c_λ^μ et les coefficients de Littlewood-Richardson $c_{\lambda^\nu}^\mu$. Deux procédures légèrement modifiées permettent de calculer les polynômes d'Ehrhart associés $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\mu}$ et $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\nu}$. Mon programme est particulièrement efficace lorsque les données en entrée (à savoir λ, μ, ν) possèdent d'énormes coefficients.

Se ramener au calcul du nombre de points entiers dans un polytope rationnel convexe n'est pas la panacée : la complexité du problème reste exponentielle en la dimension de l'algèbre. Néanmoins, le gain de temps est substantiel. Le programme `multiplicites.mws` permet d'étudier toute une gamme d'exemples auparavant inaccessibles, bien que dans des algèbres raisonnables comme A_8 : ceux pour lesquels les coefficients des poids sont de l'ordre du millier, du million, ou du milliard.

Mon programme, disponible en <http://www.math.jussieu.fr/~cochet>, incorpore plusieurs exemples afin que l'utilisateur se familiarise avec le logiciel et puisse en tester les

capacités. Il a déjà fait l'objet d'une prépublication sur ArXiv ([Coc03a]) et d'une communication ([Coc03b]).

Le plan de la seconde partie de ce travail est le suivant. Dans le sixième chapitre sont effectués des rappels de théorie des représentations, afin de préciser le problème et de fixer les notations. Le septième chapitre traite du problème du calcul du volume et des points entiers des polyèdres convexes rationnels. Après la description des formules générales de Baldoni-Vergne permettant le calcul de la fonction de partition vectorielle, on reprend les derniers développements de Baldoni-Deloera-Vergne sur la spécialisation dans le cas du calcul de la fonction de Kostant pour l'algèbre de Lie de type A_r . Enfin, le huitième chapitre décrit le programme `multiplicites.mws`, ses fonctionnalités, son implémentation, ses performances. Ce dernier chapitre est entièrement original.

PARTIE I

RÉDUCTION DES GRAPHEs DE GORESKY–KOTTWITZ–MACPHERSON

CHAPITRE 1

GRAPHE DE GKM D'UNE VARIÉTÉ HAMILTONIENNE

1.1. Construction du graphe

Soit G un tore n -dimensionnel d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Notons $\mathbb{Z}_G \subset \mathfrak{g}$ le noyau de l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ et $\mathbb{Z}_G^* \subset \mathfrak{g}^*$ le dual de \mathbb{Z}_G . C'est par définition le réseau des poids de G .

Définition 1.1.1. — Une variété compacte connexe M de dimension $2d$ sur laquelle agit le tore G vérifie les conditions de GKM (on dit aussi que M est une variété de GKM) si elle satisfait aux trois propriétés suivantes :

- (1) L'ensemble M^G des points fixes de M sous l'action de G est fini.
- (2) M admet une structure presque complexe G -invariante.
- (3) Pour tout point fixe p , les poids

$$(1.1.1) \quad \alpha_{p,i} \in \mathbb{Z}_G^*, \quad i = 1, \dots, d,$$

de l'action de G sur $T_p M$ muni de sa structure complexe sont deux à deux linéairement indépendants.

À partir d'une variété (M, G) de GKM, construisons un graphe d -valent Γ . Les sommets de Γ sont par définition les points fixes de M sous l'action de G . La construction des arêtes du graphe Γ nécessite l'introduction de nouvelles notations.

Désignons par $\mathfrak{h}_{p,i} \subset \mathfrak{g}$ le noyau de la forme linéaire $\alpha_{p,i}$ et par $H_{p,i}$ le sous-tore de G de dimension $n - 1$ et d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{p,i}$.

Proposition 1.1.2. — La composante connexe $E^{p,i}$ de $M^{H_{p,i}}$ contenant p est isomorphe à l'espace complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire à la sphère de Riemann S^2 . L'action de G sur $E^{p,i}$ se réduit à celle du cercle sur la sphère par rotation. En particulier $E^{p,i}$ contient deux points fixes (l'un d'entre eux étant p).

Soit q le second point fixe de G dans $E^{p,i}$. Alors les points p et q sont reliés par une arête, notée $[p, q]$, dans le graphe Γ . Nous désignerons par e l'arête $[p, q]$, et par \bar{e} l'arête $[q, p]$. Notons $\alpha_{p,e} = \alpha_{p,q} = \alpha_{p,i}$ (respectivement $\alpha_{q,\bar{e}} = \alpha_{q,[q,p]} = \alpha_{q,j}$) le poids de la représentation de G dans $T_p E^{p,i}$ (resp. $T_q E^{p,i}$). Alors $\alpha_{p,e} = -\alpha_{q,\bar{e}}$.

De cette manière, pour chaque poids $\alpha_{p,i}$ on obtient un espace complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de dimension 1 et un $q = q(p,i)$ relié à p par une arête. En répétant le processus à partir de chaque point fixe p , nous obtenons un graphe d -valent Γ de sommets les points fixes de M sous l'action de G .

Notons S_Γ l'ensemble des sommets du graphe Γ . La relation d'incidence I_Γ de Γ est l'ensemble des couples (p, e) , où p est un sommet du graphe et e est une arête issue de p . L'application

$$(1.1.2) \quad \alpha : I_\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_G^* \setminus \{0\}, \quad (p, e) \mapsto \alpha_{p,e}$$

est appelée la *fonction axiale* de Γ .

Définition 1.1.3. — Le couple (Γ, α) est dit graphe de Goresky-Kottwitz-MacPherson ou 1-squelette de Goresky-Kottwitz-MacPherson de M . En abrégé nous parlerons de graphe de GKM et de 1-squelette de GKM.

La fonction axiale bénéficie des propriétés suivantes :

Proposition 1.1.4. — (1) Si $e = [p, q]$ est une arête de Γ , alors

$$(1.1.3) \quad \alpha_{p,e} = -\alpha_{q,\bar{e}}.$$

(2) Désignons par e_i les d arêtes issues de $p \in S_\Gamma$. Alors les vecteurs

$$(1.1.4) \quad \alpha_{p,e_i}$$

sont deux à deux linéairement indépendants.

(3) Soient $e = [p, q]$ une arête de Γ et $\mathfrak{g}_e = \{\xi \in \mathfrak{g}; \alpha_{p,e}(\xi) = 0\}$ le noyau du poids $\alpha_{p,e}$. Soient p_i (resp. q_i) les $(d-1)$ voisins de p (resp. de q) autres que q (resp. que p). Alors on peut réordonner les q_i de sorte à avoir

$$(1.1.5) \quad \alpha_{p,p_i} = \alpha_{q,q_i} + c_{e,i} \alpha_{p,q}$$

pour des entiers $c_{e,i}$.

La dernière propriété est une conséquence de la continuité de la représentation de $H_{p,i}$ dans l'espace normal $N_p(E^{p,i}) = T_p M / T_p(E^{p,i})$ (voir la proposition 1.1.2).

Remarque 1.1.5. — Le groupe G n'agit pas forcément fidèlement sur la variété M . Plus précisément, soit \mathfrak{z} l'algèbre de Lie du noyau Z de la représentation de G dans $\text{Aut}(M)$. Alors la fonction axiale prend ses valeurs dans \mathfrak{z}^\perp . On dit que la variété M est *torique* lorsque sa dimension est égale au double de celle du tore G/Z .

Effectuons quelques rappels de géométrie symplectique.

Définition 1.1.6. — Fixons une variété connexe M de dimension $2d$.

(1) La variété M est symplectique s'il existe une 2-forme fermée et non-dégénérée Ω sur M . Cette forme est appelée forme symplectique pour M .

(2) Soumettons M à une action de G préservant la forme Ω . On dit que G agit sur M de façon hamiltonienne s'il existe une application $\phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, appelée application moment pour G , qui soit G -invariante et telle que la différentielle de l'application $\phi(\cdot)(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$ soit égale à la contraction de Ω par le champ de vecteurs X_M .

La catégorie des variétés compactes connexes symplectiques à action hamiltonienne et qui sont de GKM est une source d'exemples de variétés dont on peut assez facilement construire le graphe de GKM.

Remarque 1.1.7. — La construction d'un graphe de GKM ne nécessite pas de structure hamiltonienne ni même de structure symplectique. Ainsi, bien qu'une variété puisse admettre plusieurs structures symplectiques, son graphe de GKM sera toujours le même.

Fixons une fois pour toutes les notations. Le groupe G sera souvent $(S^1)^n$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$. Sa base duale est $(\theta_j)_j \subset \mathfrak{g}^*$. Les poids sont les formes linéaires de \mathfrak{g}^* de la forme $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j$, pour des coefficients λ_j entiers. Nous désignerons par $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ un élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

1.2. Exemple de la variété projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Soit $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'espace des lignes complexes dans \mathbb{C}^{n+1} (ou n -ième espace projectif complexe). C'est une variété complexe de dimension n . Notons $(e_j)_j$ la base canonique de \mathbb{C}^n . Soumettons la variété $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ à l'action du tore complexe $G = (S^1)^{n+1}$ suivante :

$$(1.2.1) \quad (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{n+1}}) \cdot [z_1, \dots, z_{n+1}] = [e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_{n+1}} z_{n+1}].$$

Ici $[z_1, \dots, z_{n+1}] \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ représente la ligne complexe $\sum_j z_j e_j$. Les points fixes de cette action sont alors les $[e_j] = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ (une valeur non nulle dans la j -ième coordonnée). On désignera $[e_j]$ par j . Remarquons que le sous-tore diagonal agit trivialement sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$:

$$(e^{i\theta}, \dots, e^{i\theta}) \cdot [z_1, \dots, z_{n+1}] = [z_1, \dots, z_{n+1}].$$

Fixons un sommet $p_j = j$ et déterminons pour tout k variant entre 1 et n le sommet $q = q(j, k)$ associé et les poids de l'action du tore sur l'espace tangent $T_{p_j} \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Sur l'ouvert $\{z_j \neq 0\} \cap \{z_k \neq 0\}$, nous avons au voisinage de p_j

$$\begin{aligned} & [z_1, \dots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \dots, z_{k-1}, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{n+1}] \\ = & \left[\frac{z_1}{z_k}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_k}, \frac{1}{z_k}, \frac{z_{j+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_{k-1}}{z_k}, 1, \frac{z_{k+1}}{z_k}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_k} \right] \\ \xrightarrow{z_k \rightarrow \infty} & [0, \dots, 0, \underbrace{0}_{j\text{-ième place}}, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-ième place}}, 0, \dots, 0] = p_k \end{aligned}$$

donc deux sommets j, k sont reliés par une arête $j \text{ --- } k$. Par conséquent, le graphe de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est le graphe complet à $n + 1$ sommets. Il est n -valent, donc possède $n(n + 1)/2$ arêtes. Toujours au voisinage de p_j , l'action du tore $(n + 1)$ -dimensionnel est

$$\begin{aligned} & (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{j-1}}, e^{i\theta_j}, e^{i\theta_{j+1}}, \dots, e^{i\theta_{n+1}}) \cdot [z_1, \dots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \dots, z_{n+1}] \\ &= [e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_{j-1}} z_{j-1}, e^{i\theta_j}, e^{i\theta_{j+1}} z_{j+1}, \dots, e^{i\theta_{n+1}} z_{n+1}] \\ &= [e^{i(\theta_1 - \theta_j)} z_1, \dots, e^{i(\theta_{j-1} - \theta_j)} z_{j-1}, 1, e^{i(\theta_{j+1} - \theta_j)} z_{j+1}, \dots, e^{i(\theta_{n+1} - \theta_j)} z_{n+1}]. \end{aligned}$$

Ainsi le poids de l'action au voisinage de p_j dans la k -ième direction est $\alpha_{j,k} = \theta_k - \theta_j$.

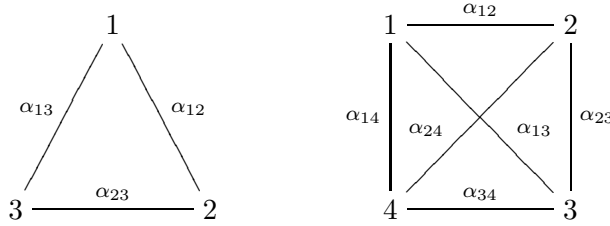


FIGURE 1.1. Graphes de GKM des variétés $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

L'espace projectif de dimension complexe n est soumis à l'action effective du tore $(S^1)^{n+1}/(e^{i\theta}, \dots, e^{i\theta})$ de dimension n . La forme de Fubini-Study le munit d'une structure symplectique à action hamiltonienne pour laquelle l'application moment est donnée par $\phi([z])(X) = -i\langle X(z), z \rangle / |z|^2$ ($z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $X \in \mathfrak{g}$). Cet espace vérifie les hypothèses du théorème de Delzant cité dans l'introduction. Par conséquent l'image de l'application moment suffit pour caractériser cet espace.

1.3. Exemple de la variété grassmannienne $G_{k,n}(\mathbb{C})$

En fait, l'exemple précédent se généralise à n'importe quelle variété grassmannienne $G_{k,n}(\mathbb{C})$.

Soit $M = G_{k,n}(\mathbb{C})$ la grassmannienne des k -plans complexes dans \mathbb{C}^n . Soumettons cette variété à l'action du tore complexe $T = (S^1)^n$ déduite de l'action naturelle sur \mathbb{C}^n :

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n).$$

Cette variété est de dimension complexe $k(n - k)$, tandis que le quotient du tore par le noyau de l'action est de dimension $n - 1$. Donc si k est différent de 1 et de $n - 1$ le théorème de Delzant ne s'applique pas, c'est-à-dire que l'image d'une application moment ne contient pas toute l'information de la variété.

Notons $(e_j)_j$ la base canonique de \mathbb{C}^n . À chaque sous-ensemble S de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal k est associé un point fixe $p_S = V_S$, à savoir le k -plan engendré par les e_j ($j \in S$). L'espace tangent à $G_{k,n}(\mathbb{C})$ en un tel point p_S est $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_S, V_{\{1, \dots, n\} \setminus S})$, de

base $\{e_j \otimes e_i^*; i \in S, j \in \{1, \dots, n\} \setminus S\}$. Les poids associés à cette action sont donc les $\alpha_{i,j} = \theta_j - \theta_i$, pour $i \in S$ et $j \in \{1, \dots, n\} \setminus S$.

On vérifie aisément que deux sommets p_S et $p_{S'}$ sont reliés par une arête si et seulement si le cardinal de $S \cap S'$ est $k - 1$. Notons alors $S_1 = S \cap S'$ et $S_2 = S \cup S'$. Soit $X_{S,S'}$ l'ensemble des k -plans V de \mathbb{C}^n tels que

$$V_{S_1} \subset V \subset V_{S_2}.$$

Si par exemple $S = \{i_1, \dots, i_{k-1}, i_k\}$ et $S' = \{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}\}$, alors $X_{S,S'}$ est l'ensemble des k -plans dont une base contient $e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}$ et dont le dernier vecteur de base peut être choisi dans l'espace $\mathbb{C}e_{i_k} \oplus \mathbb{C}e_{i_{k+1}}$. Alors $X_{S,S'}$ est une 2-sphère G -invariante contenant p_S et $p_{S'}$. D'où le

Proposition 1.3.1. — *Les sommets du graphe de GKM de $G_{k,n}(\mathbb{C})$ sont en bijection avec les sous-ensembles à k parties de $\{1, \dots, n\}$. Deux sommets p_S et $p_{S'}$ sont reliés par une arête si et seulement si $S \cap S'$ est de cardinal $k - 1$.*

Ce graphe possède $\binom{n}{k}$ sommets, chacun relié à $k(n - k)$ sommets adjacents. Il y a donc $\frac{k(n-k)}{2} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{k-1}$ arêtes au total. Par abus de notation, on notera souvent $p_S = S$.

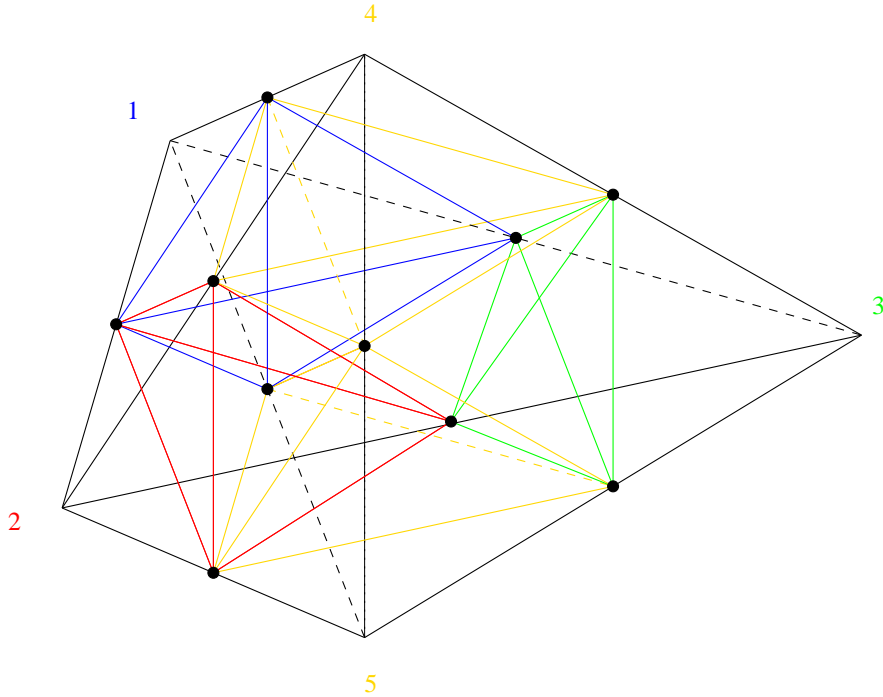


FIGURE 1.2. Graphe de GKM de $G_{1,5}(\mathbb{C})$ (en noir) et de $G_{2,5}(\mathbb{C})$ (en couleur)

1.4. Exemple de la variété des drapeaux $U(3)/\{\text{matrices diagonales}\}$

Soient $K = U(3)$ le groupe des matrices unitaires 3×3 et D le sous-groupe de K formé des matrices unitaires diagonales. Notons $M = U(3)/D \simeq GL(3, \mathbb{C})/B$ la variété des drapeaux de $GL(3, \mathbb{C})$, où B est le sous-groupe de Borel de $GL(3, \mathbb{C})$ des matrices triangulaires supérieures inversibles. C'est un exemple de variété pour laquelle le théorème de Delzant ne s'applique pas, donc pour laquelle le graphe de GKM prend toute sa valeur.

Les deux matrices

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

engendrent dans le quotient $N_K(D)/D$ du normalisateur de D dans K par D un groupe $W = W(K, D) = \{1, s_1, s_2, s_1s_2, s_2s_1, w_0 = s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2\}$ d'ordre 6 qui s'identifie à l'ensemble M^D des points de M invariants sous l'action du tore D , par l'application $w \mapsto wB$.

Choisissons un point fixe $p = w \in W$ pour l'action de D sur la variété M . Nous noterons indifféremment w pour l'élément du groupe W et pour sa classe wB dans M . Soit $t = \text{diag}(t_1, t_2, t_3) \in D$ avec $t_1, t_2, t_3 \in S^1$. Pour tout triplet (z_1, z_2, z_3) de nombres complexes, soit

$$u(z_1, z_2, z_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & 0 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $(z_1, z_2, z_3) \mapsto w \cdot u(z_1, z_2, z_3)B$ forme un système de coordonnées au voisinage de wB .

Afin de déterminer le graphe de GKM de M , nous avons deux tâches :

- (1) Le calcul des poids $\alpha_{p,i}$ pour $1 \leq i \leq 3 = \dim_{\mathbb{C}}(K/D)$.
- (2) À $p \in M^D$ et i fixés, trouver le second sommet $q = q(p, i)$ relié à p par l'arête i .

Exprimons $t \cdot wB$ dans un système de coordonnées au voisinage de wB . Nous avons

$$t \cdot 1 \cdot u(z_1, z_2, z_3)B = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ t_2 z_1 & t_2 & 0 \\ t_3 z_3 & t_3 z_2 & t_3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_2 t_1^{-1} z_1 & 1 & 0 \\ t_3 t_1^{-1} z_3 & t_3 t_2^{-1} z_2 & 1 \end{pmatrix} B$$

donc $t \cdot 1 \cdot u(z_1, z_2, z_3)B = u(t_2 t_1^{-1} z_1, t_3 t_2^{-1} z_2, t_3 t_1^{-1} z_3)B$. De même

$$\begin{aligned} t \cdot s_1 \cdot u(z_1, z_2, z_3)B &= \begin{pmatrix} t_1 z_1 & t_1 & 0 \\ -t_2 & 0 & 0 \\ t_3 z_3 & t_3 z_2 & t_3 \end{pmatrix} B \\ &= \begin{pmatrix} t_1 t_2^{-1} z_1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ t_3 t_2^{-1} z_3 & t_3 t_1^{-1} z_2 & 1 \end{pmatrix} B \\ &= s_1 \cdot u(t_1 t_2^{-1} z_1, t_3 t_1^{-1} z_2, t_3 t_2^{-1} z_3)B. \end{aligned}$$

En continuant, on obtient

$$\begin{aligned} t \cdot s_2 \cdot u(z_1, z_2, z_3)B &= s_2 \cdot u(t_3 t_1^{-1} z_1, t_2 t_3^{-1} z_2, t_2 t_1^{-1} z_3)B, \\ t \cdot s_1 s_2 \cdot u(z_1, z_2, z_3)B &= s_1 s_2 \cdot u(t_3 t_2^{-1} z_1, t_1 t_3^{-1} z_2, t_1 t_2^{-1} z_3)B, \\ t \cdot s_2 s_1 \cdot u(z_1, z_2, z_3)B &= s_2 s_1 \cdot u(t_1 t_3^{-1} z_1, t_2 t_1^{-1} z_2, t_2 t_3^{-1} z_3)B, \\ t \cdot w_0 \cdot u(z_1, z_2, z_3)B &= w_0 \cdot u(t_2 t_3^{-1} z_1, t_1 t_2^{-1} z_2, t_1 t_3^{-1} z_3)B. \end{aligned}$$

D'où finalement

$$\begin{cases} \alpha_{1,1} = \theta_2 - \theta_1 \\ \alpha_{1,2} = \theta_3 - \theta_2 \\ \alpha_{1,3} = \theta_3 - \theta_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_{s_1,1} = \theta_1 - \theta_2 \\ \alpha_{s_1,2} = \theta_3 - \theta_1 \\ \alpha_{s_1,3} = \theta_3 - \theta_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_{s_2,1} = \theta_3 - \theta_1 \\ \alpha_{s_2,2} = \theta_2 - \theta_3 \\ \alpha_{s_2,3} = \theta_2 - \theta_1 \end{cases}, \\ \begin{cases} \alpha_{s_1 s_2,1} = \theta_3 - \theta_2 \\ \alpha_{s_1 s_2,2} = \theta_1 - \theta_3 \\ \alpha_{s_1 s_2,3} = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_{s_2 s_1,1} = \theta_1 - \theta_3 \\ \alpha_{s_2 s_1,2} = \theta_2 - \theta_1 \\ \alpha_{s_2 s_1,3} = \theta_2 - \theta_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_{w_0,1} = \theta_2 - \theta_3 \\ \alpha_{w_0,2} = \theta_1 - \theta_2 \\ \alpha_{w_0,3} = \theta_1 - \theta_3 \end{cases}. \end{cases}$$

En fait seul le calcul de la forme $\alpha_{1,i}$ est nécessaire. En effet, si $\alpha_{1,i}$ est égale à $\theta_r - \theta_s$, alors $\alpha_{w,i} = \theta_{w(r)} - \theta_{w(s)}$.

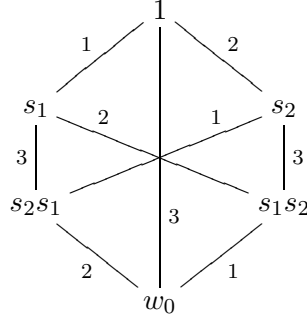
Remarque 1.4.1. — À p fixé les poids $\alpha_{p,i}$ sont deux à deux linéairement indépendants, mais trois poids sont liés. Par exemple $\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} + \alpha_{1,1}$. Le problème de l'indépendance des k -uplets de poids (issus d'un sommet fixé) sera crucial lors de la réduction des graphes de GKM, au chapitre suivant.

Maintenant, déterminons à $p = w$ et i fixés le second point fixe $q = q(p, i)$. Pour ce faire, notons encore $u(z_i)$ la matrice $u(z_1, z_2, z_3)$ pour laquelle les z_j avec $j \neq i$ sont nuls. Par exemple $u(z_2) = u(0, z_2, 0)$.

En effectuant la décomposition d'Iwasawa de $w \cdot u(z_i)B = K_w(z_i)B \in U(3)B$, puis en faisant tendre $z_i \in \mathbb{C} \subset S^2$ vers l'infini, on obtient le second point fixe q dans la sphère S^2 . Par exemple

$$\begin{aligned} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & -\frac{\bar{z}_1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & 0 \\ \frac{z_1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B \\ &\xrightarrow{z_1 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = s_1 B, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $1 \xrightarrow{1} s_1$. On vérifie tout aussi facilement que $1 \xrightarrow{2} s_2$ et $1 \xrightarrow{3} w_0$. En continuant le processus, nous obtenons le graphe



1.5. Cohomologie et K-théorie du graphe de GKM d'une variété

Comme dans la section 1.1, considérons une variété M de GKM de dimension $2d$ soumise à l'action du tore G de dimension n .

À partir du graphe de GKM (Γ, α) , construisons un anneau gradué

$$(1.5.1) \quad H(\Gamma, \alpha) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H^{2k}(\Gamma, \alpha),$$

appelé *anneau de cohomologie du graphe de GKM* de la variété M , de la façon suivante. Pour chaque arête e , la restriction $\rho_e : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}_e^*$ s'étend en un morphisme d'anneaux $\rho_e : S(\mathfrak{g}^*) \rightarrow S(\mathfrak{g}_e^*)$. Alors soit

$$(1.5.2) \quad H^{2k}(\Gamma, \alpha) = \left\{ f : S_\Gamma \rightarrow S^k(\mathfrak{g}^*) ; \rho_e f(p) = \rho_e f(q) \text{ pour toute arête } e = [p, q] \right\}.$$

La condition de compatibilité (1.5.2) signifie que $\alpha_{p,e}$ divise $f(p) - f(q)$ pour toute arête $e = [p, q]$.

L'espace $R(G)$ des représentations de G s'identifie avec

$$(1.5.3) \quad \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} m_j e^{2i\pi\lambda_j} ; m_j \in \mathbb{Z}, \lambda_j \in \mathbb{Z}_G^* \right\}.$$

Désignons par G_e le noyau du caractère $e^{2i\pi\alpha_{p,e}}$. Notons au passage que l'algèbre de Lie de G_e est \mathfrak{g}_e . Soit $r_e : R(G) \rightarrow R(G_e)$ l'application de restriction. La K-théorie $K(\Gamma, \alpha)$ du graphe de GKM de la variété M est définie comme étant l'ensemble des applications $\Theta : S_\Gamma \rightarrow R(G)$ telles que

$$(1.5.4) \quad r_e(\Theta(p)) = r_e(\Theta(q)) \text{ pour toute arête } e = [p, q].$$

La multiplication ponctuelle $(h_1 h_2)(p) = h_1(p) h_2(p)$ munit $H(\Gamma, \alpha)$ et $K(\Gamma, \alpha)$ d'une structure d'anneau commutatif. Par ailleurs $S(\mathfrak{g}^*)$ est vu comme le sous-anneau de $H(\Gamma, \alpha)$ des fonctions constantes $f(p) = f \in S(\mathfrak{g}^*)$; il s'ensuit que $H(\Gamma, \alpha)$ est un $S(\mathfrak{g}^*)$ -module. De même $K(\Gamma, \alpha)$ est un $R(G)$ -module.

L'intérêt de la cohomologie et de la K-théorie d'un graphe de GKM est le suivant.

Théorème 1.5.1 ([GKM98]). — Lorsque M est une variété de GKM symplectique soumise à une action hamiltonienne, l'anneau $H(\Gamma, \alpha)$ est isomorphe à l'anneau de cohomologie équivariante $H_G^*(M)$ de M .

Théorème 1.5.2 ([Ros03]). — Lorsque M est une variété de GKM symplectique soumise à une action hamiltonienne, les anneaux $K(\Gamma, \alpha) \otimes \mathbb{C}$ et $K_G^*(M) \otimes \mathbb{C}$ sont isomorphes.

Exemple 1.5.3. — Fixons $\ell \in \mathbb{Z}$. On définit un élément f_ℓ de la cohomologie du graphe de la variété grassmannienne $G_{k,n}(\mathbb{C})$ en posant $f_\ell(S) = \ell \cdot \theta_S = \ell(\theta_{j_1} + \dots + \theta_{j_k})$, et un élément Θ_ℓ de la K-théorie en posant $\Theta_\ell(S) = \exp(2i\pi\ell \cdot \theta_S) = \exp(2i\pi\ell(\theta_{j_1} + \dots + \theta_{j_k}))$. Ici $S = \{j_1, \dots, j_k\}$.

Exemple 1.5.4. — Fixons $\ell \in \mathbb{Z}$. Soient $\alpha_1 = \theta_2 - \theta_1$, $\alpha_2 = \theta_3 - \theta_2$, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. On définit un élément f_ℓ de la cohomologie du graphe de la variété des drapeaux $GL(3, \mathbb{C})/B$ en posant

$$\begin{aligned} f_\ell(1) &= -\ell(\alpha_1 + \alpha_2), & f_\ell(s_1) &= -\ell\alpha_2, & f_\ell(s_2s_1) &= \ell\alpha_1, \\ f_\ell(w_0) &= \ell(\alpha_1 + \alpha_2), & f_\ell(s_2) &= -\ell\alpha_1, & f_\ell(s_1s_2) &= \ell\alpha_2, \end{aligned}$$

et un élément Θ_ℓ de la K-théorie en posant $\Theta_\ell(p) = e^{2i\pi f_\ell(p)}$.

1.6. Nombres de Betti

On peut construire un analogue des nombres de Betti d'une variété, à l'aide des graphes de GKM.

Soit H un sous-tore de G unidimensionnel tel que $M^H = M^G$. Notons ξ une base de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H . Par conséquent il n'existe aucune arête $e = [p, q]$ telle que la forme linéaire $\alpha_{p,e}$ contienne ξ dans son noyau. On dit alors que ξ est un *vecteur polarisant*.

Pour tout point fixe p de M , désignons par σ_p le nombre d'arêtes $e = [p, q]$ telles que $\alpha_{p,e}(\xi)$ soit strictement négatif.

Définition 1.6.1. — Le $2k$ -ième nombre de Betti $b_{2k}(\Gamma, \alpha)$ est le nombre de sommets $p \in S_\Gamma$ tels que $\sigma_p = k$.

Ces nombres sont en fait intrinsèques à M , comme l'atteste le

Théorème 1.6.2 ([GZ99], théorème 2.6). — L'entier $b_{2k}(\Gamma, \alpha)$ ne dépend pas de ξ .

Remarque 1.6.3. — Ainsi $b_0(\Gamma, \alpha) = 1$ signifie qu'il existe un unique sommet p vérifiant $\alpha_{p,e}(\xi) < 0$ pour toute arête e issue de p . En d'autres termes p est un maximum pour l'orientation induite par ξ . Nous reviendrons à ce sujet dans la section 2.2.

Les nombres de Betti impairs d'une variété symplectique compacte à action hamiltonienne sont nuls. Quant aux nombres de Betti pairs, on peut les calculer à l'aide des graphes de GKM lorsque M est en plus de GKM.

Théorème 1.6.4 ([GZ01a], théorème 1.3.2). — *Soit M une variété de GKM symplectique à action hamiltonienne. Alors les nombres de Betti $b_{2k}(M)$ de la variété et les nombres de Betti $b_{2k}(\Gamma, \alpha)$ du graphe de GKM de la variété sont égaux.*

CHAPITRE 2

1-SQUELETTE ABSTRAIT

Nous allons formaliser la notion de 1-squelette d'une variété GKM et étudier ses propriétés, indépendamment de l'existence d'une variété M .

Dans ce chapitre, le symbole G désigne un tore n -dimensionnel d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Fixons un graphe d -valent Γ . Notons à nouveau S_Γ l'ensemble des sommets de Γ , et I_Γ la relation d'incidence de Γ , c'est-à-dire l'ensemble des couples (p, e) où e est une arête de Γ dont une des extrémités est p .

2.1. Définition du 1-squelette abstrait

Définition 2.1.1. — Une fonction axiale sur le graphe Γ est une application

$$(2.1.1) \quad \alpha : I_\Gamma \longrightarrow \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(1) Si $e = [p, q]$ est une arête de Γ , alors il existe des constantes strictement positives m_e et $m_{\bar{e}}$ telles que

$$(2.1.2) \quad m_e \alpha_{p,e} = -m_{\bar{e}} \alpha_{q,\bar{e}}.$$

(2) Désignons par e_i les d arêtes issues de $p \in S_\Gamma$. Alors les vecteurs α_{p,e_i} sont deux à deux linéairement indépendants.

(3) Soient $e = [p, q]$ une arête de Γ et \mathfrak{g}_e le noyau de la forme linéaire $\alpha_{p,e}$. Soient p_i (resp. q_i) les $(d-1)$ voisins de p (resp. de q) autres que q (resp. que p). Alors on peut réordonner les q_i de sorte à ce qu'il existe des constantes $\tau_{e,i} > 0$ et $c_{e,i} \in \mathbb{R}$ telles que

$$(2.1.3) \quad \alpha_{p,p_i} = \tau_{e,i} \alpha_{q,q_i} + c_{e,i} \alpha_{p,q}.$$

Le couple (Γ, α) est appelé 1-squelette abstrait ou V-graphe de GKM abstrait.

On notera parfois $(\Gamma, \alpha, \mathfrak{g})$ s'il y a ambiguïté sur l'espace d'arrivée de la fonction axiale.

Lorsque $m_e = m_{\bar{e}}$, $\tau_{e,i} = 1$ et α est à valeurs dans le réseau des poids \mathbb{Z}_G^* , on parle de *1-squelette de GKM* ou de *graphe de GKM* (abstrait). Cette définition est cohérente

avec le chapitre 1. En outre, elle n'est pas coupée de la réalité comme l'atteste le résultat suivant.

Proposition 2.1.2 ([GZ01a], **théorème 3.1.1**). — *Si (Γ, α) est un 1-squelette de GKM abstrait, alors il existe une variété complexe M et une action de G sur M telles que (Γ, α) soit le 1-squelette de GKM du couple (M, G) .*

Il est donc totalement justifié d'omettre le qualificatif « abstrait » quand on parle de 1-squelette de GKM et de graphe de GKM. Nous nous permettrons parfois cette omission même dans le cas d'un 1-squelette non de GKM.

Remarque 2.1.3. — La raison pour laquelle nous avons affaibli à la fois la définition (1.1.2) ainsi que les hypothèses (1.1.3) et (1.1.5) en ajoutant des constantes m_e et $\tau_{e,i}$, apparaîtra dans le chapitre 3 traitant de la réduction d'un 1-squelette. En fait, la réduction symplectique d'une variété est en général une V-variété (ou orbifold). La réduction d'un 1-squelette abstrait, construite comme l'analogie de la réduction symplectique d'une variété, donnera lieu à un V-graphe de GKM.

Remarque 2.1.4. — Notons que l'on peut à nouveau définir les nombres de Betti d'un 1-squelette abstrait comme dans la section 1.6. Il est remarquable que ceux-ci bénéficient toujours de leur caractère intrinsèque au 1-squelette.

Pour plus de commodité, le stockage d'un 1-squelette se fera de la façon suivante.

Définition 2.1.5. — Fixons une numérotation p_1, \dots, p_N des sommets du 1-squelette. Alors le 1-squelette est représenté par une matrice A de taille $N \times N$ telle que $a_{i,j} = \alpha_{p_i,p_j}$ si les sommets p_i et p_j sont reliés par une arête, et $a_{i,j} = 0$ sinon. Nous appellerons A la matrice d'adjacence généralisée de (Γ, α) (pour la numérotation des sommets).

Cette matrice contient toute l'information du 1-squelette : sommets, arêtes et fonction axiale.

Exemple 2.1.6. — La matrice d'adjacence généralisée du graphe de GKM de la variété $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ (voir la section 1.2) est

$$\begin{pmatrix} 0 & \theta_2 - \theta_1 & \theta_3 - \theta_1 & \theta_4 - \theta_1 \\ \theta_1 - \theta_2 & 0 & \theta_3 - \theta_2 & \theta_4 - \theta_2 \\ \theta_1 - \theta_3 & \theta_2 - \theta_3 & 0 & \theta_4 - \theta_3 \\ \theta_1 - \theta_4 & \theta_2 - \theta_4 & \theta_3 - \theta_4 & 0 \end{pmatrix}$$

lorsque l'on prend la numérotation p_1, p_2, p_3, p_4 des sommets.

Définition 2.1.7. — Le 1-squelette abstrait (Γ, α) est k -indépendant si pour tout sommet p et pour tout ensemble de k voisins $\{q_1, \dots, q_k\}$ de p , la famille à k éléments $\{\alpha_{p,q_1}, \dots, \alpha_{p,q_k}\}$ est linéairement indépendante.

Le second point de la définition 2.1.1 implique qu'un 1-squelette abstrait est au moins 2-indépendant.

Exemple 2.1.8. — (1) Le graphe de GKM de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est n -indépendant.

(2) Lorsque $k \neq 1$ et $k \neq n-1$, le graphe de GKM de la variété grassmannienne $G_{k,n}(\mathbb{C})$ est 3-indépendant mais jamais 4-indépendant. En effet, le sommet $S = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ est relié aux quatre sommets $S_1 = \{2, 3, \dots, k, k+1\}$, $S_2 = \{1, 3, \dots, k, k+1\}$, $S_3 = \{2, 3, \dots, k, k+2\}$, $S_4 = \{1, 3, \dots, k, k+2\}$. Les quatre fonctions axiales associées $\alpha_{S,S_1} = \theta_{k+1} - \theta_1$, $\alpha_{S,S_2} = \theta_{k+1} - \theta_2$, $\alpha_{S,S_3} = \theta_{k+2} - \theta_1$, $\alpha_{S,S_4} = \theta_{k+2} - \theta_2$ vérifient $\alpha_{S,S_1} + \alpha_{S,S_3} = \alpha_{S,S_2} + \alpha_{S,S_4}$.

(3) Le graphe de GKM de la variété des drapeaux $U(n)/\{\text{matrices diagonales}\}$ est 2-indépendant mais jamais 3-indépendant. On vérifie aisément que les poids de l'action en 1 sont les racines $\theta_i - \theta_j$ pour $1 \leq j < i \leq n$.

Exemple 2.1.9. — Examinons le graphe complet à N sommets. C'est le graphe Γ_N dont les sommets sont les entiers $\{1, \dots, N\}$ et tel que chaque couple (i, j) de sommets distincts est relié par une arête. Choisissons N formes linéaires $\alpha_i \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ et posons $\alpha(i, j) = \alpha_i - \alpha_j$. Alors cette fonction est axiale (et fait de Γ_N un 1-squelette) si et seulement si les vecteurs $\alpha_i - \alpha_j$ ($i \neq j$) sont deux à deux linéairement indépendants.

Ce graphe est un 1-squelette $(N-1)$ -indépendant si les vecteurs α_i sont linéairement indépendants.

Exemple 2.1.10 (Cycle à $4n$ sommets). — Soit \mathfrak{g} un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2. Fixons une base $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ de \mathfrak{g}^* . Soit C_{4n} le graphe divalent à $4n$ sommets p_1, \dots, p_{4n} et d'arêtes les $p_i - p_{i+1}$ pour tout i et $p_{4n} - p_1$. On munit C_{4n} d'une structure de 1-squelette grâce à la fonction axiale $\alpha_{p_i, p_{i+1}} = \alpha_i$ définie par

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_3 = \alpha_5 = \dots \\ \alpha_2 &= -\alpha_4 = \alpha_6 = \dots \end{aligned}$$

Nous reviendrons à ce 1-squelette dans l'exemple 2.2.5.

Exemple 2.1.11. — Soit \mathfrak{h} un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} . Notons $\Gamma_{\mathfrak{h}}$ le sous-graphe de Γ dont les arêtes sont les arêtes $e = [p, q]$ de Γ telles que \mathfrak{h} soit contenu dans le noyau de la fonction axiale $\alpha_{p,e}$. Alors $(\Gamma_{\mathfrak{h}}, \alpha)$ est un 1-squelette, appelé sous-1-squelette ou sous-V-graphe de GKM de (Γ, α) .

Lorsque (Γ, α) provient d'une variété de GKM symplectique (M, G) munie d'une action hamiltonienne, nous pouvons préciser $\Gamma_{\mathfrak{h}}$. En effet, soit H le groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . Alors $\Gamma_{\mathfrak{h}}$ est le graphe de GKM de (M^H, G) . En particulier le zéro-ième nombre de Betti (voir la section 1.6 et la remarque 2.1.4) de chaque composante connexe de $\Gamma_{\mathfrak{h}}$ est égal à 1.

Le lemme suivant nous sera utile lors de la réduction des 1-squelettes abstraits, au chapitre 3.

Lemme 2.1.12. — *Supposons le 1-squelette abstrait (Γ, α) 3-indépendant. Si \mathfrak{h} est un sous-espace de \mathfrak{g} de codimension 2, alors le sous-1-squelette $\Gamma_{\mathfrak{h}}$ est divalent.*

2.2. Orientation d'un 1-squelette abstrait

Définissons comme dans la section 1.6 l'ensemble des vecteurs polarisants

$$(2.2.1) \quad \mathcal{P} = \{\xi \in \mathfrak{g}; \alpha_{p,e}(\xi) \neq 0 \text{ pour tout couple } (p, e) \in I_\Gamma\}.$$

C'est le complémentaire de l'arrangement formé par les hyperplans $\mathfrak{g}_e = \ker(\alpha_e)$.

Pour tout vecteur polarisant ξ , la fonction axiale α définit une orientation o_ξ de Γ en posant

$$(2.2.2) \quad p < q \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha_{p,e}(\xi) > 0$$

pour toute arête $e = [p, q]$. Par abus de langage, nous parlerons d'orientation ξ . Cette orientation ne dépend en fait que de la composante connexe de ξ dans \mathcal{P} . Remarquons également que le fait de changer ξ en son opposé renverse l'orientation.

Le 1-squelette (Γ, α) est ξ -acyclique si le graphe orienté (Γ, o_ξ) n'a pas de cycle.

Définition 2.2.1. — Le 1-squelette (Γ, α) est fortement acyclique s'il vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) Il existe un vecteur polarisant ξ tel que (Γ, α) est ξ -acyclique.
- (2) Pour tout sous-espace \mathfrak{h} de \mathfrak{g} de codimension 2, pour toute composante connexe Γ_0 de $\Gamma_{\mathfrak{h}}$, nous avons $b_0(\Gamma_0) = 1$.

Définition 2.2.2. — Fixons une orientation $\xi \in \mathcal{P}$ de (Γ, α) . Une fonction $\phi : S_\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ est orientée positivement pour ξ (ou ξ -compatible) si pour toute arête $e = [p, q]$ nous avons

$$\frac{\phi(p) - \phi(q)}{\alpha_{q,e}(\xi)} > 0.$$

Si ϕ est injective et orientée positivement pour ξ , alors ξ ne peut pas avoir de cycle puisque ϕ est croissante sur tout chemin $p_1 < \dots < p_r$. La réciproque est vraie, comme l'atteste le résultat suivant.

Proposition 2.2.3 ([GZ01a], théorème 1.4.1). — Si l'orientation ξ du 1-squelette (Γ, α) n'a pas de cycle, il existe une fonction $\phi : S_\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ injective et orientée positivement pour ξ .

Démonstration. — Soit p un sommet du 1-squelette (Γ, α) . Considérons un chemin orienté de point initial p de plus grande longueur possible. Cette longueur est finie puisque Γ n'a pas de cycle pour ξ . Par conséquent ce chemin est de la forme $p = p_1 < p_2 < \dots < p_N$. Posons $\phi(p) = -(N - 1)$. On vérifie aisément que cette fonction est orientée positivement pour ξ . En la perturbant légèrement, nous obtenons la fonction recherchée. \square

Remarque 2.2.4. — Si le 1-squelette provient d'une variété de GKM symplectique à action hamiltonienne, alors il est ξ -acyclique pour tout $\xi \in \mathcal{P}$.

Exemple 2.2.5. — Examinons le cycle C_{4n} à $4n$ sommets défini dans l'exemple 2.1.10. Soit ξ un vecteur polarisant. Supposons par exemple que $\alpha_i(\xi) > 0$ pour un $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors les arêtes issues des sommets $4i$ sont toutes dirigées vers l'extérieur. D'où $b_0(C_{4n}) = n$ d'après le théorème 1.6.2 et la remarque 2.1.4. Par conséquent C_{4n} ne provient pas d'une variété hamiltonienne pour $n \geq 2$.

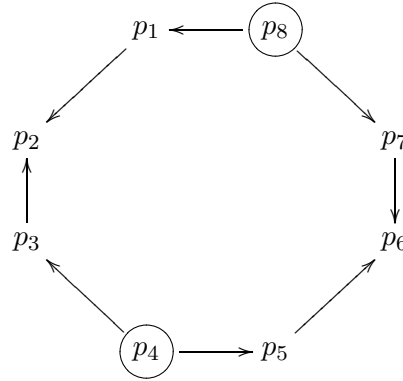


FIGURE 2.1. Orientation du cycle à $4n$ sommets

Exemple 2.2.6. — L'ensemble des orientations du graphe de GKM de la variété des drapeaux $GL(3, \mathbb{C})/B$ possède six composantes connexes, à savoir celles de $\xi_1 = \alpha_1$, $\xi_2 = \alpha_2$, $\xi_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ et de leurs opposés. Ceci donne lieu au graphe orienté représenté dans la figure 2.2.6, sur lequel sont mentionnées à la place des sommets les valeurs de la fonction orientée positivement construite dans la démonstration de la proposition 2.2.3.

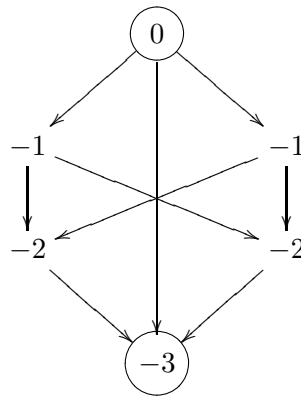


FIGURE 2.2. Orientation de $GL(3, \mathbb{C})/B$ selon $\alpha_1 + \alpha_2$

Le graphe de GKM de $GL(3, \mathbb{C})/B$ est ξ -acyclique.

2.3. Produit de 1-squelettes

Soient $(\Gamma^i, \alpha^i, \mathfrak{g}^i)$ deux 1-squelettes d_i -valents ($i = 1, 2$). Désignons par E^i l'ensemble des arêtes de Γ^i . Guillemin et Zara ont défini le produit (Γ, α) des $(\Gamma^i, \alpha^i, \mathfrak{g}^i)$ de façon naturelle :

- (1) Les sommets sont les couples (p_1, p_2) , où p_i est un sommet de Γ^i .
- (2) Deux sommets (p_1, p_2) et (q_1, q_2) sont reliés par une arête si et seulement si soit $p_1 = q_1$ et $[p_2, q_2] \in E^2$, soit $p_2 = q_2$ et $[p_1, q_1] \in E^1$.
- (3) On définit $\alpha : E \rightarrow (\mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2)^*$ en posant

$$\alpha([(p_1, p_2), (q_1, q_2)]) = \begin{cases} \alpha^2([p_2, q_2]) \in (\mathfrak{g}^2)^* & \text{si } p_1 = q_1 \text{ et } [p_2, q_2] \in E^2, \\ \alpha^1([p_1, q_1]) \in (\mathfrak{g}^1)^* & \text{si } p_2 = q_2 \text{ et } [p_1, q_1] \in E^1. \end{cases}$$

Le produit de deux 1-squelettes est clairement un 1-squelette. Si $(\Gamma^i, \alpha^i, \mathfrak{g}^i)$ est n_i -indépendant, alors le 1-squelette produit est $\inf(n_1, n_2)$ -indépendant.

Définissons le produit de deux orientations et le produit $\phi : S_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ de deux fonctions ξ^i -compatibles $\phi^i : S_{\Gamma^i} \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrons ensuite que l'acyclicité est compatible avec le produit.

Rappelons qu'un vecteur $\xi \in \mathfrak{g}$ est polarisant s'il vérifie $\alpha_e(\xi) \neq 0$ pour toute arête e . Un tel vecteur donne lieu à une orientation du 1-squelette.

Définition 2.3.1. — Soit o_i une orientation d'un 1-squelette (Γ^i, α^i) ($i = 1, 2$). On définit une nouvelle orientation $o = o_1 \times o_2$ en juxtaposant les orientations comme illustré dans la figure 2.3. Plus précisément, pour une arête $(p, q) - (p', q')$ du 1-squelette produit on définit

$$(p, q) > (p', q') \text{ si et seulement si } \begin{cases} \text{soit } p = p' \text{ et } q > q', \\ \text{soit } q = q' \text{ et } p > p'. \end{cases}$$

Cette orientation est appelée orientation produit de o_1 et o_2 ; elle n'est *a priori* pas définie par un vecteur polarisant.

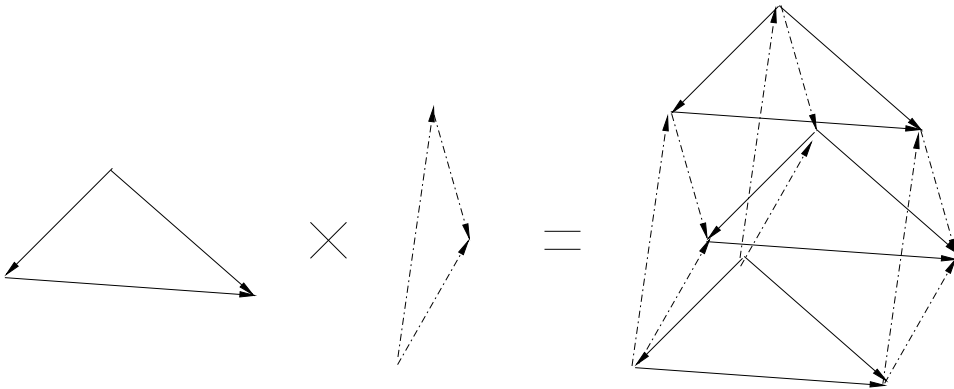


FIGURE 2.3. Produit de deux 1-squelettes orientés

Remarque 2.3.2. — À partir d'orientations définies par des vecteurs polarisants ξ^i ($i = 1, 2$), on peut construire une orientation produit définie par un vecteur polarisant. Le vecteur $\xi = \xi^1 \oplus \xi^2 = (\xi^1, \xi^2) \in \mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ n'annule en effet aucune des formes $\alpha([p, q], [p', q'])$.

2.4. Produit et orientation

Soit $\phi^i : \Gamma^i \rightarrow \mathbb{R}$ une application compatible avec l'orientation o_i ($i = 1, 2$). En d'autres termes $\phi^i(p) > \phi^i(p')$ pour toute arête orientée $p > p'$.

Lemme 2.4.1. — L'application $\phi : \Gamma^1 \times \Gamma^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(p_1, p_2) = \phi^1(p_1) + \phi^2(p_2)$ est compatible avec l'orientation produit.

Démonstration. — On a en effet

$$(p_1, p_2) > (q_1, q_2) \text{ si et seulement si } \begin{cases} p_1 = q_1 \text{ et } p_2 > q_2 & \text{donc } \phi^2(p_2) > \phi^2(q_2), \\ p_2 = q_2 \text{ et } p_1 > q_1 & \text{donc } \phi^1(p_1) > \phi^1(q_1), \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \phi(p_1, p_2) = \phi^1(p_1) + \phi^2(p_2) > \phi^1(p_1) + \phi^2(q_2) = \phi(p_1, q_2) = \phi(q_1, q_2), \\ \phi(p_1, p_2) = \phi^1(p_1) + \phi^2(p_2) > \phi^1(q_1) + \phi^2(p_2) = \phi(q_1, p_2) = \phi(q_1, q_2). \end{cases}$$

□

Démontrons maintenant la

Proposition 2.4.2. — Le produit de deux 1-squelettes orientés et sans cycle est un 1-squelette orienté et sans cycle.

Démonstration. — Soit (Γ^i, α^i) un 1-squelette orienté et sans cycle pour une orientation o_i ($i = 1, 2$). Il existe alors une application $\phi^i : \Gamma^i \rightarrow \mathbb{R}$ compatible avec l'orientation o_i ; par exemple en prenant pour $\phi^i(p)$ la longueur de la plus grande chaîne terminant en p . On définit alors comme dans le lemme 2.4.1 la fonction compatible $\phi : \Gamma^1 \times \Gamma^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Quitte à la perturber légèrement, on peut la supposer injective.

Ainsi, nous avons muni le 1-squelette orienté $\Gamma^1 \times \Gamma^2$ d'une fonction compatible avec l'orientation et injective, donc strictement croissante sur les chaînes. Par conséquent, l'orientation produit ne possède pas de cycle. □

Rappelons que le 1-squelette (Γ, α) est fortement acyclique s'il admet une orientation o sans cycle et si pour tout sous-espace \mathfrak{h} de \mathfrak{g} de codimension 2 et pour toute composante connexe Γ_0 de $\Gamma_{\mathfrak{h}}$, nous avons $b_0(\Gamma_0) = 1$. En particulier Γ_0 admet un unique sommet maximum (pour l'orientation o).

L'objet du reste de cette section est de démontrer que le produit de 1-squelettes fortement acycliques est fortement acyclique (pour l'orientation produit). Tout d'abord, la proposition 2.4.2 nous assure de l'existence d'une orientation sans cycle du produit. Il nous reste à vérifier la seconde condition de l'acyclicité.

Remarquons que le maximum de $\Gamma^1 \times \Gamma^2$ existe et est unique. En effet, il ne peut provenir que du produit des maxima de Γ^1 et Γ^2 , et ceux-ci sont uniques par hypothèse.

Cette remarque ne suffit pas : nous cherchons en effet à déterminer l'unicité de maxima « locaux » (plus précisément dans un ensemble de sous-1-squelettes).

Le lemme suivant est immédiat, quoique fondamental.

Lemme 2.4.3. — Notons $p_i : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^i$ la projection canonique et $\mathfrak{h}^i = p_i(\mathfrak{h})$ ($i = 1, 2$). Alors le sous-1-squelette $(\Gamma^1 \times \Gamma^2)_{\mathfrak{h}}$ du produit est égal au produit $\Gamma_{\mathfrak{h}^1}^1 \times \Gamma_{\mathfrak{h}^2}^2$ des sous-1-squelettes. En particulier les fonctions axiales provenant d'une arête de Γ^1 et d'une arête de Γ^2 sont linéairement indépendantes.

Fixons un sous-espace \mathfrak{h} de $\mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2$ de codimension 2. Soit Γ_0 une composante connexe de $\Gamma_{\mathfrak{h}}$. Nous avons deux cas.

Si Γ_0 est strictement inclus dans une copie de l'un des deux Γ^i , alors il bénéficie de la propriété $b_0(\Gamma_0) = 1$ au même titre que les Γ^i .

Si Γ_0 possède une arête e_1 dans Γ^1 et une arête e_2 dans Γ^2 (voir la figure 2.4), alors les vecteurs $\alpha(e_1)$ et $\alpha(e_2)$ engendrent un espace de dimension 2 d'après le lemme 2.4.3. La propriété de non-colinéarité des arêtes issues d'un même sommet et le lemme 2.4.3 impliquent que le 1-squelette Γ_0 est un parallélogramme (côtés opposés « identiques »). Grâce à l'orientation induite par l'orientation produit, il n'y a dans ce parallélogramme qu'un seul sommet à partir duquel toutes les arêtes pointent vers l'extérieur, donc $b_0(\Gamma_0)$ est bien égal à 1.

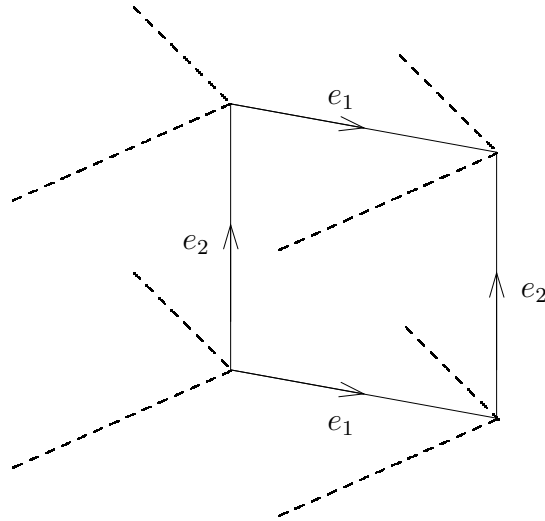


FIGURE 2.4. Sous-1-squelette divalent d'un produit

D'où la

Proposition 2.4.4. — Le produit de deux 1-squelettes fortement acycliques est un 1-squelette fortement acyclique.

2.5. Cohomologie d'un 1-squelette

Nous définissons l'anneau de cohomologie $H(\Gamma, \alpha)$ du 1-squelette abstrait (Γ, α) de la même façon qu'en (1.5.1) et (1.5.2). Cet anneau contient encore $S(\mathfrak{g}^*)$ comme sous-anneau.

Un élément de $H^2(\Gamma, \alpha)$ est ainsi une application $f : S_\Gamma \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ telle que $f(p) - f(q) = \lambda_e \alpha_{q,e}$ pour toute arête $e = [p, q]$ et pour une constante réelle λ_e . On dit que $f \in H^2(\Gamma, \alpha)$ est *symplectique* si $\lambda_e > 0$ pour toute arête e . L'existence d'une classe symplectique est une assertion forte, qui implique que toute orientation possède la propriété de non-cyclicité.

Citons un très joli résultat, analogue au théorème de localisation de Atiyah-Bott-Berline-Vergne. Soient pt le 1-squelette constitué d'un seul point et $\pi : S_\Gamma \longrightarrow pt$ la fonction constante. Cette fonction induit une injection $\pi^* : H^{2k}(pt) = S^k(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow H^{2k}(\Gamma, \alpha)$. On cherche à comprendre s'il existe une application

$$\pi_* : H^{2k}(\Gamma, \alpha) \longrightarrow H^{2(k-d)}(pt) = S^{k-d}(\mathfrak{g}^*).$$

Posons

$$(2.5.1) \quad \pi_*(f) = \sum_{p \in S_\Gamma} \frac{f(p)}{\prod_e \alpha_{p,e}},$$

où le produit est sur l'ensemble des arêtes e issues de p . Il n'est pas évident que cette application est bien définie, c'est-à-dire à valeurs dans $S(\mathfrak{g}^*)$.

Théorème 2.5.1 ([GZ99]). — *L'application π_* est à valeurs dans $S(\mathfrak{g}^*)$.*

Esquisse de la démonstration. — Soit $f \in H^{2k}(\Gamma, \alpha)$. Alors $\pi_*(f)$ s'écrit sous la forme

$$\pi_*(f) = \frac{g}{\prod_{i=1}^N \alpha_i},$$

pour $g \in S^{k-d+N}(\mathfrak{g}^*)$ et des $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ linéairement indépendants deux à deux. Vérifions que α_1 divise g . Le même argument permettra de démontrer que tout α_i divise g , donc que $\pi_*(f)$ est bien polynomiale.

On peut ranger les sommets du 1-squelette Γ dans deux catégories :

(1) Le sous-ensemble S_1 des sommets p pour lesquels aucun $\alpha_{p,e}$ n'est un multiple de α_1 .

(2) Le sous-ensemble S_2 des sommets p pour lesquels il existe une arête $e = [p, q]$ telle que α_1 divise $\alpha_{p,e}$; remarquons que la condition (1.1.4) implique l'unicité de cette arête.

La partie de $\pi_*(f)$ correspondant à S_1 est

$$\sum_{p \in S_1} \frac{f(p)}{\prod_e \alpha_{p,e}} = \frac{g_1}{\alpha_2 \cdots \alpha_N}$$

avec $g_1 \in S(\mathfrak{g}^*)$, et ne pose pas de problème.

Examinons maintenant la seconde partie, correspondant à S_2 . Pour $p \in S_2$, notons $e = [p, q]$ l'unique arête telle que α_1 divise $\alpha_{p,e}$. Par hypothèse, il existe λ tel que $\alpha_{p,e} = \lambda \alpha_1$. D'après la définition d'un 1-squelette, on a $\alpha_{p,e} = -c \alpha_{q,\bar{e}}$ ($c > 0$). Donc $q \in S_2$ et les sommets de S_2 sont regroupés par couples. À l'aide la condition de compatibilité (1.5.2)

sur f , on vérifie que la partie de $\pi_*(f)$ correspondant à p et q s'écrit sous la forme $\frac{g_2}{\alpha_2 \cdots \alpha_N}$ avec $g_2 \in S(\mathfrak{g}^*)$. D'où le résultat pour la partie de $\pi_*(f)$ correspondant à S_2 . \square

2.6. K-théorie et caractère d'un graphe de GKM

Rappelons que nous parlons indifféremment de 1-squelette de GKM ou de graphe de GKM. L'anneau de K-théorie $K(\Gamma, \alpha)$ d'un graphe de GKM abstrait (Γ, α) se définit comme en 1.5.4.

Désignons par E_p l'ensemble des arêtes issues de p . Pour tout élément Θ de K-théorie du graphe de GKM, définissons le *caractère* de Θ comme étant

$$(2.6.1) \quad \chi(\Theta) = \sum_{p \in S_\Gamma} \frac{\Theta(p)}{\prod_{e \in E_p} (1 - e^{2i\pi\alpha_{p,e}})}.$$

Alors

Théorème 2.6.1 ([GZ01b]). — *Pour tout élément Θ de K-théorie, le caractère $\chi(\Theta)$ n'a aucun pôle.*

Le morphisme de $R(G)$ -modules $\chi : K(\Gamma, \alpha) \rightarrow R(G)$ est appelé *application caractère*. La démonstration de ce théorème est semblable à celle du théorème 2.5.1.

Exemple 2.6.2. — Le graphe de GKM de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ soumis à l'action du tore $(S^1)^3$ est le graphe complet à quatre sommets muni de la fonction axiale $\alpha_{p,[p,q]} = \theta_q - \theta_p$ (voir la section 1.2 page 5). Définissons un élément f_ℓ de cohomologie du graphe de GKM en posant $f_\ell(p) = \ell\theta_p$ ($p = 1, \dots, 4$) avec $\ell \in \mathbb{Z}$ (voir l'exemple 1.5.3 page 11). On définit de même un élément de K-théorie du graphe de GKM en posant $\Theta_\ell(p) = e^{2i\pi f_\ell(p)}$.

Notons $u_j = e^{2i\pi\theta_j}$, pour j variant de 1 à 4. Alors

$$\begin{aligned} \chi(\Theta_\ell) &:= \frac{u_1^\ell}{(1 - u_2 u_1^{-1})(1 - u_3 u_1^{-1})(1 - u_4 u_1^{-1})} + \frac{u_2^\ell}{(1 - u_3 u_2^{-1})(1 - u_4 u_2^{-1})(1 - u_1 u_2^{-1})} \\ &\quad + \frac{u_3^\ell}{(1 - u_4 u_3^{-1})(1 - u_1 u_3^{-1})(1 - u_2 u_3^{-1})} + \frac{u_4^\ell}{(1 - u_1 u_4^{-1})(1 - u_2 u_4^{-1})(1 - u_3 u_4^{-1})} \\ &= \sum_{\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = \ell} u_1^{\ell_1} u_2^{\ell_2} u_3^{\ell_3} u_4^{\ell_4}. \end{aligned}$$

Ce résultat se généralise à l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ soumis à l'action du tore $(S^1)^n$.

Exemple 2.6.3. — Le graphe de GKM de la variété des drapeaux $GL(3, \mathbb{C})/B$ soumise à l'action du tore $(S^1)^3$ est le graphe à six sommets décrit dans la section 1.4 page 8. Définissons un élément f_ℓ de cohomologie du graphe de GKM comme dans l'exemple 1.5.4 page 11, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f_\ell(1) &= -\ell(\alpha_1 + \alpha_2), & f_\ell(s_1) &= -\ell\alpha_2, & f_\ell(s_2 s_1) &= \ell\alpha_1, \\ f_\ell(w_0) &= \ell(\alpha_1 + \alpha_2), & f_\ell(s_2) &= -\ell\alpha_1, & f_\ell(s_1 s_2) &= \ell\alpha_2, \end{aligned}$$

avec $\ell \in \mathbb{Z}$. On définit de même un élément de K-théorie du graphe de GKM en posant $\Theta_\ell(p) = e^{2i\pi f_\ell(p)}$.

Notons $u_j = e^{2i\pi\theta_j}$, pour j variant de 1 à 3. Alors

$$\begin{aligned} \chi(\Theta_\ell) &= \frac{u_1^\ell u_3^{-\ell}}{(1 - u_2 u_1^{-1})(1 - u_3 u_2^{-1})(1 - u_3 u_1^{-1})} + \frac{u_1^{-\ell} u_3^\ell}{(1 - u_1 u_2^{-1})(1 - u_2 u_3^{-1})(1 - u_1 u_3^{-1})} \\ &+ \frac{u_2^\ell u_3^{-\ell}}{(1 - u_1 u_2^{-1})(1 - u_3 u_2^{-1})(1 - u_3 u_1^{-1})} + \frac{u_2^{-\ell} u_3^\ell}{(1 - u_2 u_1^{-1})(1 - u_2 u_3^{-1})(1 - u_1 u_3^{-1})} \\ &+ \frac{u_1^\ell u_2^{-\ell}}{(1 - u_2 u_1^{-1})(1 - u_2 u_3^{-1})(1 - u_3 u_1^{-1})} + \frac{u_1^{-\ell} u_2^\ell}{(1 - u_1 u_2^{-1})(1 - u_3 u_2^{-1})(1 - u_1 u_3^{-1})}. \end{aligned}$$

On vérifie que cette somme est égale à

$$(2.6.2) \quad \sum_{j=1}^{\ell+1} j \cdot \left(\sum_{(r,s) \in R_j} \frac{r}{s} \right)$$

où R_j est l'ensemble des couples de monômes (r, s) en les variables u_1, u_2, u_3 , de degré $\ell - j + 1$ et premiers entre eux. Par exemple le caractère $\chi(\Theta_2)$ est égal à

$$\begin{aligned} &\frac{u_1^2}{u_2 u_3} + \frac{u_1^2}{u_2^2} + \frac{u_1^2}{u_3^2} + \frac{u_2^2}{u_1 u_3} + \frac{u_2^2}{u_1^2} + \frac{u_2^2}{u_3^2} + \frac{u_3^2}{u_1 u_2} + \frac{u_3^2}{u_1^2} + \frac{u_3^2}{u_2^2} + \frac{u_1 u_2}{u_3^2} + \frac{u_2 u_3}{u_1^2} + \frac{u_3 u_1}{u_2^2} \\ &+ 2 \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_1} + \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_1} \right) \\ &+ 3. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

RÉDUCTION D'UN 1-SQUELETTE

Ce chapitre traite de l'analogie pour les 1-squelettes abstraits de la réduction des variétés symplectiques munies d'une application moment.

3.1. Motivation : réduction d'une variété

Dans la section 2.1, nous avons affaibli la définition de graphe de GKM en introduisant le 1-squelette abstrait. Dans cette section, nous allons justifier la nécessité de cette nouvelle notion.

Soit M une variété de GKM symplectique pour laquelle l'action de G est hamiltonienne. Fixons un sous-tore unidimensionnel H de G tel que $M^H = M^G$ et un générateur ξ de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H . Notons $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ l'application moment relative à H . Pour toute valeur régulière c de ϕ , l'espace réduit

$$M_c = \phi^{-1}(c)/H$$

est une V -variété (ou *orbifold*), pour laquelle l'action du groupe quotient G/H est hamiltonienne.

On peut alors démontrer que :

Théorème 3.1.1 ([GZ01a]). — *L'espace réduit M_c est une V -variété de GKM pour toute valeur régulière c si et seulement le graphe de GKM de M est 3-indépendant.*

L'intérêt de la définition d'un V -graphe de GKM (ou 1-squelette) est le suivant. On peut construire comme dans la section 1.1 un graphe Γ_c à partir de M_c . Ce graphe Γ_c est alors un V -graphe de GKM. Détaillons la construction de ce graphe :

- (1) Les sommets de Γ_c sont les arêtes $e = [p, q]$ de Γ telles que $\phi(p) < c < \phi(q)$.
- (2) Appelons q_i ($i = 1, \dots, d-1$) les voisins de p autres que q . Soit \mathfrak{h}_i le sous-espace de \mathfrak{g} de codimension 2 défini comme étant l'intersection des noyaux des formes linéaires $\alpha_{p,q}$ et α_{p,q_i} . Soit Γ_i la composante connexe de $\Gamma_{\mathfrak{h}_i}$ contenant $[p, q]$. D'après l'exemple 2.1.11 page 2.1.11, le sous-graphe Γ_i est une chaîne divalente n'admettant qu'une unique arête e_i autre que e coupée par la valeur critique c . Alors dans le graphe Γ_c , les $d-1$ arêtes issues de e sont les $[e, e_i]$.

(3) La fonction axiale sur l'arête $[e, e_i]$ est $\alpha_{p,q_i} - \frac{\alpha_{p,q_i}(\xi)}{\alpha_{p,q}(\xi)}\alpha_{p,q}$.

La réduction d'un 1-squelette abstrait est calculée sur cette description, afin que commute le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{variété de GKM} \\ \text{3-indépendante} \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{c} \text{graphe de GKM} \\ \text{3-indépendant} \end{array} \\
 \downarrow \text{réduction} \\ \text{de variété} & & \downarrow \text{réduction} \\
 \text{V-variété de GKM} & \xrightarrow{\quad} & \text{V-graphe de GKM} \\
 & & \downarrow \text{de 1-squelette}
 \end{array}$$

3.2. Définition et premières propriétés de la réduction d'un 1-squelette

Soit (Γ, α) un 1-squelette abstrait d -valent, 3-indépendant et fortement acyclique (au sens de la définition 2.2.1). Pour toute arête $e = [p, q]$, désignons comme d'habitude par \mathfrak{g}_e le noyau de la forme $\alpha_{p,e}$. Fixons un sous-tore unidimensionnel H de G admettant pour générateur infinitésimal un vecteur $\xi \in \mathfrak{g}$ n'appartenant au noyau d'aucune forme $\alpha_{p,e}$ (où $e = [p, q]$ parcourt l'ensemble des arêtes du graphe). Ce vecteur ξ détermine une orientation o_ξ de (Γ, α) , en posant

$$p < q \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha_{p,e}(\xi) < 0$$

pour toute arête $e = [p, q]$.

Définition 3.2.1. — Une application $\phi : S_\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ est un H -moment (ou moment pour H) si elle vérifie

$$(3.2.1) \quad \frac{\phi(q) - \phi(p)}{\alpha_{p,e}(\xi)} > 0$$

pour toute arête orientée $e = [p, q]$. L'image de ϕ est appelée ensemble des valeurs critiques. Son complémentaire dans \mathbb{R} est l'ensemble des valeurs régulières de ϕ .

Ainsi, dire que l'application ϕ est un H -moment signifie qu'elle est compatible avec le générateur infinitésimal de l'action du tore H . Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle application moment est que le graphe orienté selon o_ξ n'admette aucun cycle (voir la section 2.2, page 16).

Remarque 3.2.2. — Il est toujours possible de rendre ϕ injective en la perturbant légèrement.

Soit f un élément de cohomologie du 1-squelette de degré 2, c'est-à-dire tel que $f(p) \in \mathfrak{g}^*$ pour tout sommet p . Choisissons f symplectique, c'est-à-dire vérifiant $f(q) - f(p) = \lambda_e \alpha_{p,e}$ pour toute arête $e = [p, q]$ et pour des constantes réelles strictement positives λ_e . L'application $\phi = \phi_{f,\xi} : S_\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(p) = \langle f(p), \xi \rangle$ est alors un H -moment.

Fixons une valeur régulière c de ϕ . Rappelons que la valence de (Γ, α) est égale à d . Nous allons construire un graphe $\text{red}[(\Gamma, \alpha), (\xi, c)]$ de valence $d - 1$ et qui sera un 1-squelette d'application moment nulle sur ξ . Ceci correspond au fait que la réduction d'une variété M de dimension $2d$ est (une V-variété) de dimension $2(d - 1)$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le tore H par rapport auquel la réduction s'effectue, nous notons (Γ^c, α^c) la réduction.

Remarque 3.2.3. — Sans la 3-indépendance, on n'obtient qu'un *hypergraphe*. Nous détaillerons cette notion dans la section suivante.

Maintenant, examinons la construction du 1-squelette réduit. L'ensemble de ses sommets S_{Γ^c} est formé des arêtes orientées $e = [p, q]$ telles que $\phi(p) < c < \phi(q)$. Pour une telle arête $e = [p, q]$, notons q_i les $(d - 1)$ voisins de p autres que q . Fixons un indice i . Soit \mathfrak{h}_i l'intersection des noyaux des formes $\alpha_{p,q}$ et α_{p,q_i} . La composante connexe Γ_0 de $\Gamma_{\mathfrak{h}_i}$ contenant p, q et q_i est divalente d'après le lemme 2.1.12. Par hypothèse le 1-squelette (Γ, α) est fortement acyclique, donc le zéro-ième nombre de Betti de Γ_0 est égal à 1. Par conséquent il existe dans cette composante connexe Γ_0 exactement deux arêtes coupées par c , à savoir e et une autre, notée $e' = [p', q']$. Nous relierons alors les sommets $[p, q]$ et $[p', q']$ par une arête dans la réduction. Voir la figure 3.1.

La fonction axiale sur l'arête $[e, e']$ de Γ^c est

$$(3.2.2) \quad \alpha_{e,e'}^c = \alpha_{p,q_i} - \frac{\alpha_{p,q_i}(\xi)}{\alpha_{p,q}(\xi)} \alpha_{p,q}.$$

Remarquons que c'est bien une forme linéaire nulle sur ξ .

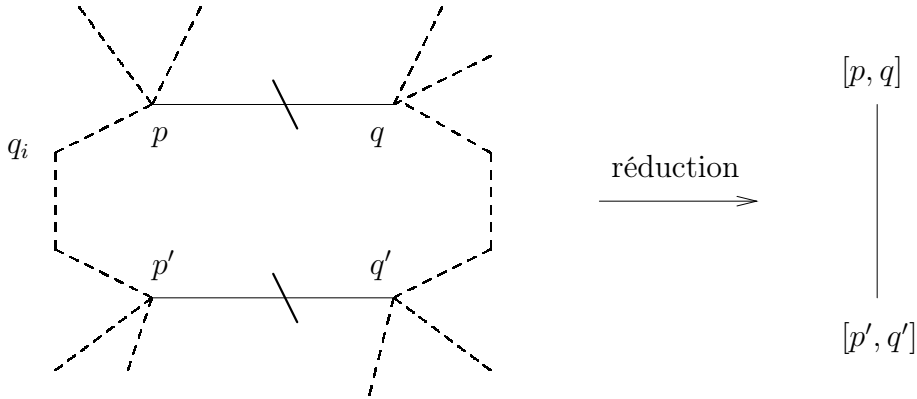


FIGURE 3.1. Réduction d'un graphe de GKM

Théorème 3.2.4 ([GZ01a]). — *Le graphe (Γ^c, α^c) est un 1-squelette $(d - 1)$ -valent. Si (Γ, α) est k -indépendant, alors (Γ^c, α^c) est $(k - 1)$ -indépendant.*

Si le V-graphe de GKM (Γ, α) provient d'une variété de GKM symplectique pour laquelle l'action est hamiltonienne (et donc (Γ, α) est un « vrai » graphe de GKM), alors

la réduction de (Γ, α) réduit coïncide avec le V-graphe de GKM de la variété réduite : $\Gamma(M)_c = \Gamma(M_c)$.

Remarque 3.2.5. — (1) La réduction ne change pas lorsque c varie dans une composante connexe de l'ensemble des points réguliers.

(2) Lorsque l'on ajoute à f un élément $\lambda_0 \in \mathfrak{g}^*$, toutes les données sont translatées. Ainsi par commodité on peut toujours effectuer une réduction en $c = 0$.

3.3. V-hypergraphe de GKM

Lorsque le 1-squelette à réduire n'est pas 3-indépendant, on ne peut plus utiliser le lemme 2.1.12. Nous pouvons néanmoins effectuer une réduction, mais celle-ci aboutira à un hypergraphe (voir [GZ]).

Rappelons qu'un hypergraphe Γ est un ensemble de N sommets muni d'hyperarêtes, chacune d'elles reliant *au moins* deux sommets. Un hypergraphe est encodé par sa matrice d'incidence. Les colonnes correspondent aux sommets, tandis que les lignes représentent les hyperarêtes. L'hyperarête englobant les sommets p_{i_1}, \dots, p_{i_k} est encodée par ligne $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_N)$ avec $\ell_t = 1$ si t est un des i_j , et $\ell_t = 0$ sinon.

Par exemple la matrice d'incidence

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dont la première ligne signifie que les sommets 1, 3 et 4 sont reliés par une hyperarête, encode le graphe de la figure 3.2.

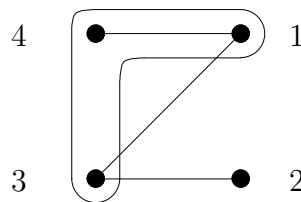


FIGURE 3.2. Un hypergraphe

Fixons un 1-squelette (Γ, α) fortement acyclique mais non 3-indépendant. Tout en conservant les notations de la section précédente, définissons la réduction de (Γ, α) . Choisissons un tore unidimensionnel H dont un générateur infinitésimal ξ n'est contenu dans le noyau d'aucune forme $\alpha_{p,e}$ (où $e = [p, q]$ parcourt l'ensemble des arêtes du graphe). Comme précédemment, fixons un élément de cohomologie f symplectique et construisons l'application moment $\phi = \phi_{f,\xi}$. Soit c une valeur régulière de ϕ .

Les sommets du 1-squelette réduit (Γ^c, α^c) sont à nouveau définis comme étant les arêtes $e = [p, q]$ telles que $\phi(p) < c < \phi(q)$. Choisissons une telle arête $e = [p, q]$, et soient q_i les $(d-1)$ voisins de p autres que q .

On effectue la partition I_1, \dots, I_t de $\{1, \dots, d-1\}$ de sorte à ce que pour chaque paquet I_s le vecteur $\alpha_{q,p}$ et les vecteurs α_{p,q_i} ($i \in I_s$) engendrent un espace de dimension 2. Un tel paquet I_s est appelé *hyperdirection* à partir de l'arête $[p, q]$.

Fixons une hyperdirection I et une direction $i \in I$. Soit \mathfrak{h}_i le sous-espace de \mathfrak{g} de codimension 2 défini comme étant l'intersection des noyaux des formes $\alpha_{p,q}$ et α_{p,q_i} . Soit Γ_V le sous-graphe de Γ dont les arêtes ont pour fonction axiale les vecteurs appartenant à l'espace vectoriel V engendré par les formes $\alpha_{q,p}$ et α_{p,q_i} . Les composantes connexes de ce sous-graphe ne sont plus *a priori* des cycles, puisque Γ n'est pas 3-indépendant.

La composante connexe Γ_0 de Γ_V contenant $[p, q]$ est coupée par c en e et en d'autres arêtes $e(I, 1), \dots, e(I, \ell)$. La collection $\{e, e(I, 1), \dots, e(I, \ell)\}$ de sommets du graphe réduit est alors liée par une hyperarête, notée H_I .

Les hyperarêtes issues de e sont obtenues en faisant varier l'hyperdirection I .

On numérote l'hyperarête H_I reliant les sommets $\{e, e(I, 1), \dots, e(I, \ell)\}$ par un vecteur non nul arbitraire de l'espace vectoriel unidimensionnel $\mathfrak{h}_i \cap (\mathbb{R}\xi)^*$. Ce vecteur $\alpha_{e,I}$ est appelé direction axiale. On prend par exemple

$$(3.3.1) \quad \alpha_{e,I} = \alpha_{p,q_i} - \frac{\alpha_{p,q_i}(\xi)}{\alpha_{p,q}(\xi)} \alpha_{p,q},$$

pour une direction arbitraire i de I . Finalement, on obtient un hypergraphe dont chaque hyperarête est munie d'un vecteur et satisfaisant à des propriétés similaires à celles des V-graphes abstraits. Cet hypergraphe est appelé *V-hypergraphe de GKM* ou *hyper-1-squelette*.

Pour plus de commodité, le stockage d'un hypergraphe de GKM se fera de la façon suivante.

Définition 3.3.1. — Supposons qu'un V-hypergraphe de GKM possède N sommets et P hyperarêtes. Alors on le stocke dans une matrice H de taille $P \times (1 + N)$ dont chaque ligne, de la forme $h_I = (v_I, \ell_I)$ encode une hyperarête. Plus précisément la collection des ℓ_I est la matrice d'incidence classique du graphe et v_I est un vecteur axial de l'hyperarête ℓ_I . La matrice H est appelée *matrice d'incidence généralisée* du V-hypergraphe de GKM.

Nous verrons dans la sous-section 3.5.3 des exemples de matrices d'incidence généralisées.

Exemple 3.3.2. — Soient v_1, \dots, v_4 des vecteurs. Alors la matrice d'incidence généralisée

$$\begin{bmatrix} v_1 & (1, 0, 1, 1) \\ v_2 & (1, 0, 1, 0) \\ v_3 & (1, 0, 0, 1) \\ v_4 & (0, 1, 1, 0) \end{bmatrix}$$

encode le V-hypergraphe de GKM de la figure 3.3.

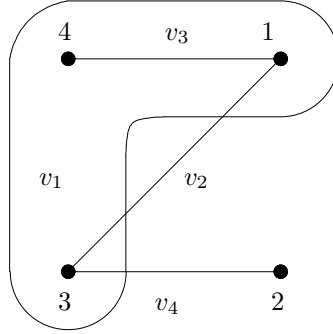


FIGURE 3.3. Un V-hypergraphe de GK

3.4. Application de Kirwan

Soit M une variété de GK symplectique munie d'une action hamiltonienne de G . Fixons un sous-tore unidimensionnel H de G tel que $M^H = M^G$. Notons $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ l'application moment. Supposons la condition de 3-indépendance sur les poids de M satisfaite. Le morphisme de Kirwan

$$K_c : H_G^*(M) \rightarrow H_{G/H}^*(M_c)$$

est défini comme étant la composition de la restriction $H_G^*(M) \rightarrow H_G^*(\phi^{-1}(c))$ avec l'isomorphisme $H_G^*(\phi^{-1}(c)) \simeq H_{G/H}^*(M_c)$.

D'après le théorème 1.5.1, les anneaux $H_G(M)$ et $H(\Gamma, \alpha)$ sont isomorphes. Puisque M est 3-indépendante, la V-variété M_c est de GK ; ainsi les anneaux $H_{G/H}(M_c)$ et $H(\Gamma^c, \alpha^c)$ sont isomorphes (le théorème 1.5.1 étant encore valable pour les V-variétés). On en déduit une application de Kirwan au niveau des graphes de GK

$$K_e : H(\Gamma, \alpha) \rightarrow H(\Gamma^c, \alpha^c).$$

Guillemin et Zara ont donné une interprétation en termes de graphes de GK de ce morphisme. Fixons un élément f de cohomologie du graphe (Γ, α) . Soit $e = [p, q]$ un sommet du graphe réduit. En d'autres termes $\phi_{f, \xi}(p) < c < \phi_{f, \xi}(q)$. Désignons comme à l'accoutumée par \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de H et par \mathfrak{g}_e le noyau de $\alpha_{p, e}$. La composition de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ et de la restriction $\rho_e : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}_e^*$ est un isomorphisme $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \simeq \mathfrak{g}_e^*$. D'où un isomorphisme d'anneaux

$$\gamma_e : S(\mathfrak{g}_e^*) \rightarrow S((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*).$$

On a alors $\gamma_e \rho_e f(p) = \gamma_e \rho_e f(q) \in S((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$.

Théorème 3.4.1 ([GZ01a], théorème 1.8.3). — *Pour tout sommet $e = [p, q]$ du graphe réduit (Γ^c, α^c) , l'application de Kirwan K_c au niveau des graphes a pour expression $K_c(f)(e) = \gamma_e \rho_e f(p)$.*

En d'autres termes le morphisme de Kirwan est égal à

$$K_c(f)([p, q]) = f(p) - \frac{\langle f(p), \xi \rangle}{\alpha_{p,q}(\xi)} \alpha_{p,q}$$

pour tout sommet $[p, q]$ de (Γ^c, α^c) . Remarquons que c'est bien une forme linéaire nulle sur ξ .

3.5. Exemples de réduction

Les exemples usuels sont la grassmannienne $G_{k,n}(\mathbb{C})$ et la variété des drapeaux $GL(3, \mathbb{C})/B$. Ces deux variétés sont munies de l'action des tores de dimension n et 3 respectivement. Ces deux actions ne sont pas fidèles. Le noyau de l'action est le sous-tore diagonal. Nous prendrons donc toujours pour générateur infinitésimal de H un vecteur $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ dont la somme des coordonnées est nulle. Le groupe H agit alors fidèlement sur les variétés correspondantes.

3.5.1. Réductions de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ lorsque c varie. — Examinons les réductions du graphe de GKM de l'espace projectif $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ selon le sous-tore unidimensionnel de $(S^1)^4$ dont un générateur infinitésimal est $\xi = (4, 3, 2, 1, -10)$. Puisque le graphe de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ est 4-indépendant, ses réductions seront des V-graphes de GKM 3-indépendants. Le graphe est muni de l'application moment $\phi(i) = \theta_i(\xi)$ ($i = 1, \dots, 5$), dont les valeurs critiques sont 4, 3, 2, 1 et -10 . D'après la remarque 3.2.5, on se ramène à étudier les réductions selon $c = 7/2, 5/2, 3/2, 0$. En fait, les réductions en $7/2$ et 0 sont les mêmes. De même pour $5/2$ et $3/2$.

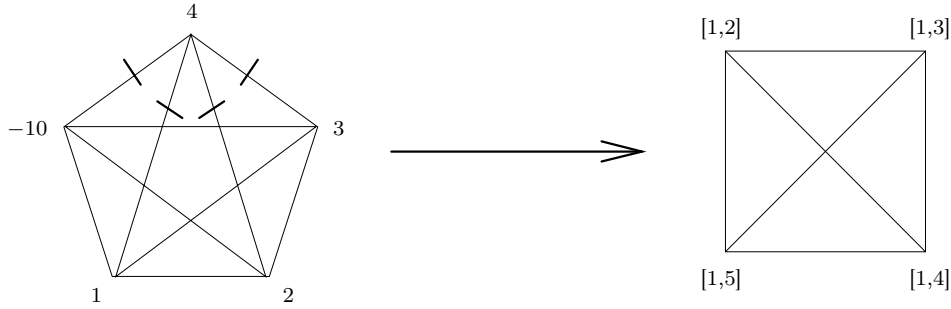
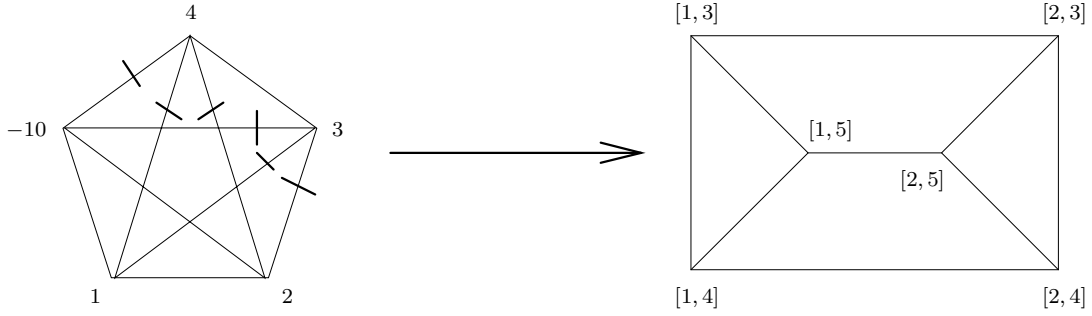


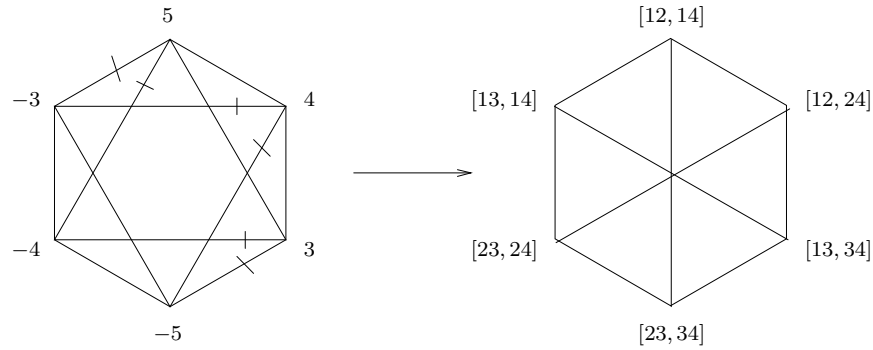
FIGURE 3.4. Réduction de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ selon $\xi = (4, 3, 2, 1, -10)$ en $c = 7/2$

Par exemple, la matrice d'adjacence généralisée de la réduction du graphe de GKM de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ selon $\xi = (4, 3, 2, 1, -10)$ et en $c = 7/2$ est la matrice 4×4 suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & (1, -2, 1, 0, 0) & (2, -3, 0, 1, 0) & (13, -14, 0, 0, 1) \\ (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0, 0) & 0 & (\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 1, 0) & (6, 0, -7, 0, 1) \\ (-\frac{2}{3}, 1, 0, -\frac{1}{3}, 0) & (-\frac{1}{3}, 0, 1, -\frac{2}{3}, 0) & 0 & (\frac{11}{3}, 0, 0, -\frac{14}{3}, 1) \\ (-\frac{13}{14}, 1, 0, 0, -\frac{1}{14}) & (-\frac{6}{7}, 0, 1, 0, -\frac{1}{7}) & (-\frac{11}{14}, 0, 0, 1, -\frac{3}{14}) & 0 \end{pmatrix}.$$

FIGURE 3.5. Réduction de $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ selon $\xi = (4, 3, 2, 1, -10)$ en $c = 5/2$

3.5.2. Réductions de $G_{2,4}(\mathbb{C})$ lorsque ξ varie. — La grassmannienne $G_{2,4}(\mathbb{C})$ des 2-plans complexes de \mathbb{C}^4 est une variété de dimension 4, que l'on munit de l'action du tore $(S^1)^4$. Examinons ses réductions selon le sous-tore unidimensionnel de $(S^1)^4$ dont un générateur infinitésimal est $\xi = (3, 2, 1, -6)$. Puisque le graphe de GKM de $G_{2,4}(\mathbb{C})$ est 3-indépendant, ses réductions seront des V-graphes de GKM 2-indépendants. Choisissons notre élément de cohomologie usuel f défini par $f(ij) = \theta_i + \theta_j$. Le graphe est alors muni de l'application moment $\phi = \phi_{f,\xi}$ dont les valeurs critiques sont ± 5 , ± 4 et ± 3 . D'après la remarque 3.2.5, on se ramène à étudier les réductions selon $c = \pm 9/2$, $\pm 7/2$ et 0. Les graphes réduits en $c = \pm 9/2$ sont les mêmes, tout comme pour $c = \pm 7/2$.

FIGURE 3.6. Réduction de $G_{2,4}(\mathbb{C})$ selon $\xi = (3, 2, 1, -6)$ en $c = 0$

Par exemple, la matrice d'adjacence généralisée de la réduction du graphe de GKM de $G_{2,4}(\mathbb{C})$ selon $\xi = (3, 2, 1, -6)$ et en $c = 9/2$ est la matrice 4×4 suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & (0, 7, -8, 1) & (-1, 2, -1, 0) & (-1, 9, -9, 1) \\ (0, -\frac{7}{8}, 1, -\frac{1}{8}) & 0 & (-1, \frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{4}) & (-1, \frac{9}{8}, 0, -\frac{1}{8}) \\ (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 0) & (4, -1, -4, 1) & 0 & (\frac{7}{2}, 0, -\frac{9}{2}, 1) \\ (\frac{1}{9}, -1, 1, -\frac{1}{9}) & (\frac{8}{9}, -1, 0, \frac{1}{9}) & (-\frac{7}{9}, 0, 1, -\frac{2}{9}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.5.1. — Les V-graphes de GKM réduits représentés par les figures 3.4 et 3.8 ne sont pas les mêmes, bien que leurs graphes soient semblables. En effet leurs fonctions axiales sont fondamentalement différentes :

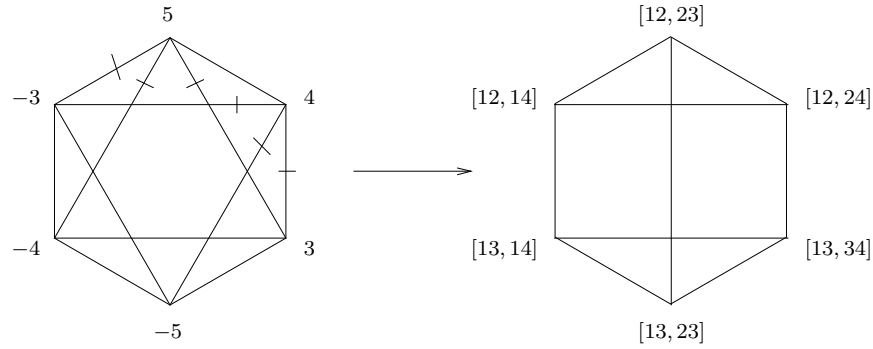


FIGURE 3.7. Réduction de $G_{2,4}(\mathbb{C})$ selon $\xi = (3, 2, 1, -6)$ en $c = 7/2$

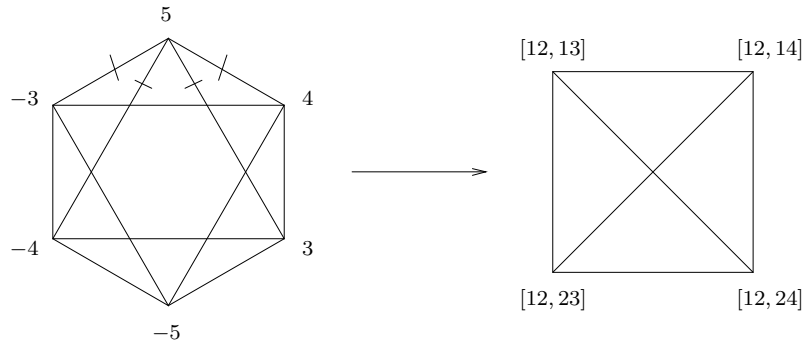


FIGURE 3.8. Réduction de $G_{2,4}(\mathbb{C})$ selon $\xi = (3, 2, 1, -6)$ en $c = 9/2$

- elles sont à valeurs dans \mathbb{R}^5 et \mathbb{R}^4 respectivement ;
- elles donnent lieu à des V-graphe de GKM 3-indépendant et 2-indépendant respectivement.

On s'en convaincra en examinant les matrices d'adjacence généralisée. Il en est de même pour les graphes de GKM réduits représentés par les figures 3.5 et 3.7.

3.5.3. Réductions de $GL(3, \mathbb{C})/B$. — Puisque le graphe de GKM de la variété des drapeaux $GL(3, \mathbb{C})/B$ n'est pas 3-indépendant, ses réductions sont des V-hypergraphes de GKM. Munissons notre variété de l'action du tore $(S^1)^3$. Examinons les réductions selon le sous-tore unidimensionnel H de $(S^1)^3$ dont un générateur infinitésimal est $\xi = (2, 1, -3)$. Conservons l'élément de cohomologie f défini dans l'exemple 1.5.4 page 11. Le graphe est alors muni de l'application moment $\phi = \phi_{f, \xi}$ dont les valeurs critiques sont $\pm 5, \pm 4$ et ± 1 . D'après la remarque 3.2.5, on se ramène à étudier les réductions selon $c = \pm 3/2, \pm 9/2$ et 0. Les réductions en $c = \pm 3/2$ sont les mêmes, tout comme pour $c = \pm 9/2$. Dans tous les cas, le graphe réduit possède une unique hyperarête englobant tous ses sommets.

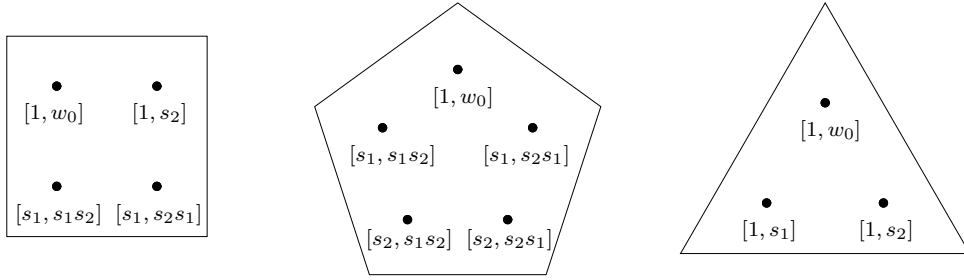


FIGURE 3.9. Réduction de $GL(3, \mathbb{C})/B$ selon $\xi = (2, 1, -3)$ en $c = 3/2$, $c = 0$ et $c = 9/2$

Les matrices d'incidence généralisées des réductions de la variété des drapeaux selon le tore H sont

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(-1, \frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right), (1, 1, 1, 1) \right) && \text{pour } c = 3/2, \\
 & \left(\left(1, -\frac{4}{5}, -\frac{1}{5} \right), (1, 1, 1, 1, 1) \right) && \text{pour } c = 0, \\
 & \left((5, -4, -1), (1, 1, 1) \right) && \text{pour } c = 9/2.
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 4

QUANTIFICATION ET RÉDUCTION

Ce chapitre traite de l'analogie du théorème

« la quantification et la réduction commutent »

en théorie des graphes de GKM abstraits, démontré par Guillemin et Zara [GZ01b] dans le cas de la réduction par un tore unidimensionnel.

Plus précisément, fixons un élément Θ de K-théorie d'un graphe de GKM abstrait (Γ, α) et un sous-tore unidimensionnel H de G dont un générateur infinitésimal ξ n'est contenu dans aucun des noyaux \mathfrak{g}_e des poids $\alpha_{p,e}$ (où $e = [p, q]$ parcourt l'ensemble des arêtes du graphe). Alors le caractère invariant $\chi(\Theta)^H$ (que nous allons décrire plus bas) s'exprime en termes de graphe de GKM et de Θ sous la forme condensée d'une somme de fractions rationnelles.

La première section comporte des rappels sur les caractères. Les deux sections suivantes sont la définition du caractère réduit (un invariant issu des graphes de GKM) et le lien entre ce caractère réduit et le caractère invariant. Nous examinerons ensuite des exemples d'application dans la quatrième section.

4.1. Décomposition d'un caractère sur un sous-groupe

Soit H un sous-tore de G . L'injection $\mathbb{Z}_H \hookrightarrow \mathbb{Z}_G$ induit une application de restriction $\mathbb{Z}_G^* \rightarrow \mathbb{Z}_H^*$. L'espace des caractères de G/H s'identifie au noyau de cette application.

Soit χ un élément de $R(G)$. Il s'écrit sous la forme

$$(4.1.1) \quad \chi = \sum_{\lambda} c_{\lambda} e^{2i\pi\lambda},$$

où la somme est sur l'ensemble des poids $\lambda \in \mathbb{Z}_G^*$ et où les coefficients c_{λ} sont nuls sauf un nombre fini. Le *caractère invariant* sous H associé à χ est par définition

$$(4.1.2) \quad \chi^H = \sum_{\lambda|_{\mathfrak{h}}=0} c_{\lambda} e^{2i\pi\lambda},$$

où la somme est sur l'ensemble des poids λ de restriction nulle à \mathfrak{h} . Le caractère χ^H est donc la composante invariante de χ sous l'action de H ; c'est un élément de $R(G/H)$.

Supposons le tore H unidimensionnel. Nous sommes intéressés par la description — *via* les graphes de GKM — du caractère invariant lorsque le caractère χ est de la forme $\chi(\Theta)$, pour un élément de K-théorie Θ d'un graphe de GKM. Rappelons que le caractère $\chi(\Theta)$ a été défini dans la section 2.6. D'après le théorème 2.6.1 le caractère $\chi(\Theta)$ est bien un élément de $R(G)$, donc parler de caractère invariant sous H associé à $\chi(\Theta)$ a un sens.

4.2. Caractère réduit d'un graphe de GKM

Soient (Γ, α) un graphe de GKM et H un sous-tore unidimensionnel de G dont un générateur infinitésimal ξ n'est contenu dans aucun des \mathfrak{g}_e (où e parcourt l'ensemble des arêtes du graphe).

Choisissons une application moment $\phi : S_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ relative au tore H (voir la définition 3.2.1) et une valeur régulière c de ϕ . On peut supposer sans perdre de généralité que ϕ est injective. Soit (Γ^c, α^c) le 1-squelette réduit de (Γ, α) , selon H et à l'aide de ϕ et c . Fixons un élément Θ de K-théorie.

Désignons par $V(p)$ l'ensemble des voisins d'un sommet p . Pour toute arête $e = [p, q]$ du graphe réduit, soient

$$(4.2.1) \quad \widehat{\Theta}_e = \frac{\Theta(p)}{\prod_{r \in V(p) \setminus \{q\}} (1 - e^{2i\pi\alpha_{p,r}})}, \quad \widehat{\Theta}_{\bar{e}} = \frac{\Theta(q)}{\prod_{r' \in V(q) \setminus \{p\}} (1 - e^{2i\pi\alpha_{q,r'}})}.$$

Soit G_e le noyau du caractère $e^{2i\pi\alpha_{p,e}}$. Remarquons que l'algèbre de Lie de G_e est le noyau \mathfrak{g}_e du poids $\alpha_{p,e}$. Désignons par $r_e : R(G) \rightarrow R(G_e)$ l'application de restriction.

L'application composée $\pi_e : G_e \hookrightarrow G \rightarrow G/H$ est surjective et de noyau un sous-groupe W_e de G_e monogène et d'ordre $|\alpha_{p,q}(\xi)|$. En particulier G/H est en bijection avec G_e/W_e , et on peut identifier π_e à la surjection canonique de G_e dans G_e/W_e .

Remarque 4.2.1. — Soient W un sous-groupe fini d'un tore H et $\gamma : H \rightarrow H/W$ la surjection canonique. On définit une application $\gamma_* : R(H) \rightarrow R(H/W)$ en posant $\gamma_*(\rho)(\gamma(g)) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \rho(g.w)$.

D'après la remarque, l'application π_e donne lieu à $(\pi_e)_* : R(G_e) \rightarrow R(G/H)$. Étendons $(\pi_e)_* \circ r_e$ à l'anneau des fonctions de la forme (4.2.1). L'égalité $r_e \widehat{\Theta}_e = r_{\bar{e}} \widehat{\Theta}_{\bar{e}}$ implique que l'élément

$$\Theta_c^\sharp(e) := (\pi_e)_* r_e \widehat{\Theta}_e = (\pi_{\bar{e}})_* r_{\bar{e}} \widehat{\Theta}_{\bar{e}}$$

est dans le corps des fractions de $R(G/H)$.

Définition 4.2.2. — Le caractère réduit en c est

$$(4.2.2) \quad \chi_c(\Theta) = \sum_{e \in \Gamma_c} \Theta_c^\sharp(e) = \sum_{e=[p,q] \in \Gamma_c} (\pi_e)_* r_e \left(\frac{\Theta(p)}{\prod_{r \in V(p) \setminus \{q\}} (1 - e^{2i\pi\alpha_{p,r}})} \right).$$

En d'autres termes, ce caractère réduit a pour expression

$$(4.2.3) \quad \sum_{[p,q] \in \Gamma_c} \frac{1}{|\alpha_{p,q}(\xi)|} \sum_{\zeta^{\alpha_{p,q}(\xi)}=1} \frac{\zeta^{\langle f(p), \xi \rangle} e^{2i\pi \left(f(p) - \frac{\langle f(p), \xi \rangle}{\alpha_{p,q}(\xi)} \alpha_{p,q} \right)}}{\prod_{r \in V(p) \setminus \{q\}} \left(1 - \zeta^{\alpha_{p,r}(\xi)} e^{2i\pi \left(\alpha_{p,r} - \frac{\alpha_{p,r}(\xi)}{\alpha_{p,q}(\xi)} \alpha_{p,q} \right)} \right)}.$$

Le caractère réduit est régulier, comme l'atteste le

Théorème 4.2.3 ([GZ01b]). — *Le caractère réduit $\chi_c(\Theta)$ est un élément de $R(G/H)$.*

Maintenant que nous avons une expression détaillée du caractère réduit, effectuons le lien avec le caractère invariant.

4.3. Lien entre caractère réduit et caractère invariant

Soit un élément Θ de K-théorie de la forme $\Theta(p) = e^{2i\pi f(p)}$, pour un élément f de cohomologie de degré 2 tel que $f(p) \in \mathbb{Z}_G^*$. Choisissons f *symplectique*, c'est-à-dire vérifiant $f(q) - f(p) = \lambda_e \alpha_{p,e}$ pour des entiers strictement positifs λ_e et pour toute arête $e = [p, q]$. L'application $\phi = \phi_{f,\xi} : S_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(p) = \langle f(p), \xi \rangle$ est alors un H -moment, que l'on suppose injectif sans perdre de généralité. Supposons de plus que 0 est une valeur régulière de ϕ , c'est-à-dire que $\langle f(p), \xi \rangle$ est non nul pour tout sommet p .

Dans la section 4.2, nous avons défini uniquement à partir du graphe réduit Γ_0 et de l'élément de K-théorie Θ le caractère réduit $\chi_0(\Theta)$. On peut alors démontrer que :

Théorème 4.3.1 ([GZ01b]). — *Soient $Q(\Gamma)$ la représentation virtuelle de G de caractère $\chi(\Theta)$ et $Q_{\text{red}}(\Theta)$ la représentation virtuelle de G/H de caractère $\chi_{\text{red}}(\Theta) = \chi_0(\Theta)$. Alors*

$$(4.3.1) \quad \chi_{\text{red}}(\Theta) = \chi(\Theta)^H.$$

On dit que « la quantification et la réduction commutent ». Cette assertion est parfois notée $[Q, R] = 0$.

Remarque 4.3.2. — Dans le cas de la réduction d'une variété hamiltonienne, Meinrenken et Sjamaar (voir [MS99]) ont démontré l'égalité $\chi_c(\Theta) = \chi(\Theta)^H$ pour une valeur régulière c proche de zéro. Bien que les variétés M_c et les graphes (Γ^c, α^c) changent lorsque c traverse la valeur critique 0, le caractère $\chi_c(\Theta)$ reste le même.

Ce résultat sera encore valable dans le cadre des exemples que nous traiterons dans le chapitre 5. C'est pourquoi dans ces exemples, lorsque 0 n'est pas une valeur régulière, nous effectuerons le calcul du caractère réduit pour la valeur régulière $c = 1/10$ suffisamment proche de zéro.

Remarque 4.3.3. — L'intérêt du théorème 4.3.1 est double. Tout d'abord, elle nous fournit une expression condensée, sous forme d'une somme de fractions rationnelles, du caractère de la représentation virtuelle $Q(\Gamma)^H$. En effet, lorsque (Γ, α) provient d'une variété symplectique M munie d'une action hamiltonienne, le caractère de la réduction $Q(M)^H$ est énorme. Ensuite, les formules de Guillemin et Zara font intervenir des racines

de l'unité. Lorsque celles-ci sont raisonnables, le calcul est possible et n'explose pas lorsque par exemple on dilate le caractère Θ . Cette remarque sera poursuivie après l'examen de deux exemples.

4.4. Deux exemples d'application

Dans cette section, on calcule pour les variétés projective $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ et des drapeaux $U(3)/\{\text{matrices diagonales}\}$ le caractère invariant de deux manières : par sa définition, puis à l'aide du théorème 4.3.1.

4.4.1. Cas de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. — Le graphe de GKM de l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est le graphe complet à quatre sommets (voir la section 1.2). Soit H le tore unidimensionnel dont un générateur infinitésimal est $\xi = (1, 2, -1, -2)$. Choisissons notre élément de cohomologie habituel f_ℓ défini par $f_\ell(p) = \ell\theta_p$ ($p = 1, \dots, 4$) avec $\ell \in \mathbb{N}^*$ (voir l'exemple 1.5.3 page 11). Soit Θ_ℓ l'élément de K-théorie défini par $\Theta_\ell(p) = e^{2i\pi f_\ell(p)}$.

Commençons par le calcul du caractère invariant. Notons $u_j = e^{2i\pi\theta_j}$ pour j variant de 1 à 4. Rappelons que le caractère de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, décrit dans l'exemple 2.6.2 page 22, a pour valeur

$$(4.4.1) \quad \chi(\Theta_\ell) = \sum u_1^{\ell_1} u_2^{\ell_2} u_3^{\ell_3} u_4^{\ell_4} = \sum e^{2i\pi(\ell_1\theta_1 + \ell_2\theta_2 + \ell_3\theta_3 + \ell_4\theta_4)}$$

où la somme est sur l'ensemble des indices $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) \in \mathbb{N}^4$ tels que $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = \ell$. Puisque pour un poids $\lambda = \sum_j \lambda_j \theta_j$ on a $\langle \lambda, \xi \rangle = 0$ si et seulement si $\lambda_1 + 2\lambda_2 = \lambda_3 + 2\lambda_4$, on obtient

$$(4.4.2) \quad \chi(\Theta_\ell)^H = \sum u_1^{\ell_1} u_2^{\ell_2} u_3^{\ell_3} u_4^{\ell_4}$$

où la somme est sur l'ensemble des indices $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4) \in \mathbb{N}^4$ tels que $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 = \ell$ et $\ell_1 + 2\ell_2 = \ell_3 + 2\ell_4$. Le résultat est un polynôme en les u_j dont le nombre de termes est quadratique en ℓ . Par exemple $\chi(\Theta_{500})^H$ possède 21001 termes qui s'entassent sur 93 pages.

Calculons le caractère réduit à l'aide de la formule (4.2.3). Posons $\phi = \phi_{f_\ell, \xi}$. Par conséquent $\phi(1) = \ell$, $\phi(2) = 2\ell$, $\phi(3) = -\ell$, $\phi(4) = -2\ell$. Il s'ensuit que l'ensemble des sommets du V-graphe réduit en 0 est $\{[3, 1], [3, 2], [4, 1], [4, 2]\}$. D'après le théorème 4.3.1, le caractère réduit $\chi_0(\Theta_\ell)$ est égal à la somme sur les sommets du V-graphe réduit des fractions $R_e(\ell)$ données par

$$\begin{aligned}
R_{[3,1]}(\ell) &= \frac{1}{2} e^{2i\pi\sigma_1} \sum_{t=1}^2 \frac{(-1)^{-t\ell}}{(1 - (-1)^{3t} e^{2i\pi\sigma_{1,1}})(1 - (-1)^{-t} e^{2i\pi\sigma_{2,1}})}, \\
R_{[3,2]}(\ell) &= \frac{1}{3} e^{2i\pi\sigma_2} \sum_{t=1}^3 \frac{j^{-t\ell}}{(1 - j^{2t} e^{2i\pi\sigma_{1,2}})(1 - j^{-t} e^{2i\pi\sigma_{2,2}})}, \\
R_{[4,1]}(\ell) &= \frac{1}{3} e^{2i\pi\sigma_3} \sum_{t=1}^3 \frac{j^{-2t\ell}}{(1 - j^{4t} e^{2i\pi\sigma_{1,3}})(1 - j^t e^{2i\pi\sigma_{2,3}})}, \\
R_{[4,2]}(\ell) &= \frac{1}{4} e^{2i\pi\sigma_4} \sum_{t=1}^4 \frac{i^{-2t\ell}}{(1 - i^{3t} e^{2i\pi\sigma_{1,4}})(1 - i^t e^{2i\pi\sigma_{2,4}})},
\end{aligned}$$

pour les formes linéaires σ_m et $\sigma_{s,s'}$ définies par

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{\ell}{2}(\theta_1 + \theta_3), & \sigma_{1,1} &= -\frac{3}{2}\theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{2}\theta_3, & \sigma_{2,1} &= \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{3}{2}\theta_3 + \theta_4, \\
\sigma_2 &= \ell(\frac{1}{3}\theta_2 + \frac{2}{3}\theta_3), & \sigma_{1,2} &= \theta_1 - \frac{2}{3}\theta_2 - \frac{1}{3}\theta_3, & \sigma_{2,2} &= \frac{1}{3}\theta_2 - \frac{4}{3}\theta_3 + \theta_4, \\
\sigma_3 &= \ell(\frac{1}{3}\theta_4 + \frac{2}{3}\theta_3), & \sigma_{1,3} &= -\frac{4}{3}\theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{3}\theta_4, & \sigma_{2,3} &= -\frac{1}{3}\theta_1 + \theta_3 - \frac{2}{3}\theta_4, \\
\sigma_4 &= \ell(\frac{1}{2}\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_4), & \sigma_{1,4} &= \theta_1 - \frac{3}{4}\theta_2 - \frac{1}{4}\theta_4, & \sigma_{2,4} &= -\frac{1}{4}\theta_2 + \theta_3 - \frac{3}{4}\theta_4.
\end{aligned}$$

Ici $j = e^{2i\pi/3}$. On vérifie aisément que

$$\begin{aligned}
R_{[3,1]}(2m) &= (u_1 u_3)^m \frac{1 + u_1^{-1} u_2 u_3^{-1} u_4}{(1 - u_1^{-3} u_2^2 u_3)(1 - u_1 u_3^{-3} u_4^2)}, \\
R_{[3,1]}(2m+1) &= (u_1 u_3)^m \frac{u_1^{-1} u_2 u_3 + u_1 u_2^{-1} u_4}{(1 - u_1^{-3} u_2^2 u_3)(1 - u_1 u_3^{-3} u_4^2)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_{[4,2]}(2m) &= (u_2 u_4)^m \frac{1 + u_1 u_2^{-1} u_3 u_4^{-1} + u_1^2 u_2^{-2} u_3^2 u_4^{-2} + u_1^3 u_2^{-3} u_3^3 u_4^{-3}}{(1 - u_1^4 u_2^{-3} u_3^{-1})(1 - u_2^{-1} u_3^4 u_4^{-3})}, \\
R_{[4,2]}(2m+1) &= (u_2 u_4)^m \frac{u_1^2 u_2^{-1} + u_3^2 u_4^{-1} + u_1^3 u_2^{-2} u_3 u_4^{-1} + u_1 u_2^{-1} u_3^3 u_4^{-2}}{(1 - u_1^4 u_2^{-3} u_3^{-1})(1 - u_2^{-1} u_3^4 u_4^{-3})}.
\end{aligned}$$

Un calcul similaire mène à

$$\begin{aligned}
R_{[3,2]}(3m) &= u_2^m u_3^{2m} \frac{1 + u_1^2 u_2^{-1} u_3^{-2} u_4 + u_1 u_3^{-3} u_4^2}{(1 - u_1^3 u_2^{-2} u_3^{-1})(1 - u_2 u_3^{-4} u_4^3)}, \\
R_{[3,2]}(3m+1) &= u_2^m u_3^{2m} \frac{u_1 u_3^{-1} u_4 + u_2 u_3^{-2} u_4^2 + u_1^2 u_2^{-1}}{(1 - u_1^3 u_2^{-2} u_3^{-1})(1 - u_2 u_3^{-4} u_4^3)}, \\
R_{[3,2]}(3m+2) &= u_2^m u_3^{2m} \frac{u_2 u_4 + u_1 u_3 + u_1^2 u_3^{-2} u_4^2}{(1 - u_1^3 u_2^{-2} u_3^{-1})(1 - u_2 u_3^{-4} u_4^3)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
R_{[4,1]}(3m) &= u_1^{2m} u_4^m \frac{1 + u_1^{-3} u_2^2 u_3 + u_1^{-2} u_2 u_3^2 u_4^{-1}}{(1 - u_1^{-4} u_2^3 u_4)(1 - u_1^{-1} u_3^3 u_4^{-2})}, \\
R_{[4,1]}(3m+1) &= u_1^{2m} u_4^m \frac{u_1^{-1} u_2 u_3 + u_3^2 u_4^{-1} + u_1^{-2} u_2^2 u_4}{(1 - u_1^{-4} u_2^3 u_4)(1 - u_1^{-1} u_3^3 u_4^{-2})}, \\
R_{[4,1]}(3m+2) &= u_1^{2m+1} u_4^m \frac{u_3 + u_1^{-1} u_2 u_4 + u_1^{-3} u_2^2 u_3^2}{(1 - u_1^{-4} u_2^3 u_4)(1 - u_1^{-1} u_3^3 u_4^{-2})}.
\end{aligned}$$

Le caractère réduit est ainsi la somme de quatre fractions rationnelles. Sa taille ne varie pas lorsque le paramètre ℓ augmente. Par exemple $\chi_0(\Theta_{6m})$ est égal à

$$\begin{aligned}
& \frac{u_1^{3m+2} u_3^{3m+2} (u_1 u_3 + u_2 u_4)}{(u_1^3 - u_2^2 u_3)(u_3^3 - u_1 u_4^2)} \\
+ & \frac{u_2^{3m+1} u_4^{3m+1} (u_2^3 u_4^3 + u_1 u_2 u_3 u_4 + u_1^2 + u_1^2 u_2 u_3^2 u_4 + u_1^3 u_3^3)}{(u_2^3 u_4 - u_1^4)(u_2 u_4^3 - u_3^3)} \\
+ & \frac{u_2^{2m+1} u_3^{4m+2} (u_2 u_3^3 + u_1^2 u_3 u_4 + u_1 u_2 u_4^2)}{(u_2^2 u_3 - u_1^3)(u_3^4 - u_2 u_4^3)} \\
+ & \frac{u_1^{4m+2} u_4^{2m+1} (u_1^3 u_4 + u_2^2 u_3 u_4 + u_1 u_2 u_3^2)}{(u_1^4 - u_2^3 u_4)(u_1 u_4^2 - u_3^3)}.
\end{aligned}$$

4.4.2. Cas de $U(3)/\{\text{matrices diagonales}\}$. — Le graphe de GKM de la variété des drapeaux $U(3)/\{\text{matrices diagonales}\}$ est 3-valent et possède 6 sommets (voir la section 1.4). Soit H le tore unidimensionnel dont un générateur infinitésimal est $\xi = (1, 0, -1)$. Choisissons notre élément de cohomologie f_ℓ défini dans l'exemple 1.5.4 page 11 (avec $\ell \in \mathbb{N}^*$). Soit Θ_ℓ l'élément de K-théorie donné par $\Theta_\ell(p) = e^{2i\pi f_\ell(p)}$.

Commençons par le calcul du caractère invariant. Notons $u_j = e^{2i\pi\theta_j}$ pour j variant de 1 à 3. Rappelons que le caractère $\chi(\Theta_\ell)$ a été décrit dans l'exemple 2.6.3 page 22. Puisque pour un poids $\lambda = \sum_j \lambda_j \theta_j$ on a $\langle \lambda, \xi \rangle = 0$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_3$, on obtient le caractère du graphe invariant à partir du caractère du graphe en ne gardant que les monômes dont la puissance en u_1 égale celle en u_3 . Le résultat $\chi(\Theta_\ell)^H$ est un polynôme de Laurent en $z = u_2^2/u_1 u_3$ dont le nombre de termes est ℓ lorsque ℓ est impair, et $\ell + 1$ lorsque ℓ est pair. Pour de gros ℓ , le caractère invariant est donc inexploitable. Par exemple

$$(4.4.3) \quad \chi(\Theta_9)^H = 2z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 8z + 10 + \frac{8}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{2}{z^4},$$

$$(4.4.4) \quad \chi(\Theta_{10})^H = z^5 + 3z^4 + 5z^3 + 7z^2 + 9z + 11 + \frac{9}{z} + \frac{7}{z^2} + \frac{5}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^5}.$$

Calculons le caractère réduit à l'aide de la formule (4.2.3). Posons $\phi = \phi_{f_\ell, \xi}$. Par conséquent $\phi(1) = 2\ell$, $\phi(s_1) = \ell$, $\phi(s_2) = \ell$, $\phi(s_1 s_2) = -\ell$, $\phi(s_2 s_1) = -\ell$, $\phi(w_0) = -2\ell$. On vérifie aisément que les six sommets du V-graphe réduit Γ_0 sont

$$[s_2 s_1, s_1], [s_2 s_1, s_2], [s_1 s_2, s_1], [s_1 s_2, s_2], [w_0, 1].$$

D'après le théorème 4.3.1, le caractère réduit $\chi_0(\theta_\ell)$ est égal à la somme sur les sommets e du graphe réduit des fractions $R_e(\ell)$ données par

$$\begin{aligned} R_{[s_2 s_1, s_1]}(\ell) &= \frac{1}{2} z^{\ell/2} \sum_{t=1}^2 \frac{(-1)^{t\ell}}{(1 - (-1)^t z^{-1/2})(1 - (-1)^{-t} z^{-1/2})}, \\ R_{[s_2 s_1, s_2]}(\ell) &= \frac{1}{(1 - z)(1 - z^{-1})}, \\ R_{[s_1 s_2, s_1]}(\ell) &= \frac{1}{(1 - z)(1 - z^{-1})}, \\ R_{[s_1 s_2, s_2]}(\ell) &= \frac{1}{2} z^{-\ell/2} \sum_{t=1}^2 \frac{(-1)^{-t\ell}}{(1 - (-1)^t z^{1/2})(1 - (-1)^{-t} z^{1/2})}, \\ R_{[w_0, 1]}(\ell) &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^2 \frac{(-1)^{2t\ell}}{(1 - (-1)^t z^{1/2})(1 - (-1)^t z^{-1/2})}, \end{aligned}$$

où z désigne à nouveau $u_2^2/(u_1 u_3) = e^{2i\pi(\alpha_1 - \alpha_2)}$. On vérifie aisément que $R_{[w_0, 1]}(\ell)$ est égal au double de $R_{[s_2 s_1, s_2]}(\ell)$, c'est-à-dire à $-2z/(1 - z)^2$. Dans l'expression des deux résidus $R_{[s_2 s_1, s_1]}(\ell)$ et $R_{[s_1 s_2, s_2]}(\ell)$ figurent des puissances fractionnaires de z . Celles-ci se simplifient dans la somme $R_{[s_2 s_1, s_1]}(\ell) + R_{[s_1 s_2, s_2]}(\ell)$, de façon différente selon la parité de ℓ . On obtient finalement

$$(4.4.5) \quad \chi_0(\Theta_{2m}) = \frac{(1 + z)(z^{-m} + z^{m+1}) - 4z}{(1 - z)^2},$$

$$(4.4.6) \quad \chi_0(\Theta_{2m+1}) = 2 \frac{z^{-m} + z^{2+m} - 2z}{(1 - z)^2}.$$

Remarque 4.4.1. — La formule de Guillemin et Zara donnant le caractère réduit en fonction de la réduction du graphe de GKM a l'avantage d'être extrêmement condensée. Un examen des formules des sous-sections 4.4.1 pour $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ et 4.4.2 pour $GL(3, \mathbb{C})/B$ permet de s'en convaincre.

En outre la formule de Guillemin et Zara peut se calculer aisément (lorsque les racines de l'unité restent raisonnables) même lorsque le coefficient ℓ intervenant dans l'élément de K-théorie augmente. En revanche, le calcul direct donne lieu à l'énumération d'indices satisfaisant à plusieurs conditions linéaires de la forme $\sum_j a_j \ell_j = T(\ell)$ (pour un opérateur linéaire T), problème qui devient rapidement impossible lorsque ℓ croît.

Remarque 4.4.2. — Dans le cas des variétés toriques, la variété réduite est encore torique. Les formules sont celles de Brion (voir [BV97], ainsi que [Bar02]) et ont été implémentées en temps polynomial grâce à l'algorithme de Barvinok par l'équipe LattE.

CHAPITRE 5

LES PROGRAMMES REDUCTION.MWS ET CARACTERE.MWS

Ce chapitre décrit mes programmes effectuant la réduction d'un V-graphe de GKM et le calcul du caractère réduit d'un élément de K-théorie d'un graphe de GKM. Après une section expliquant nos choix quant au stockage des données, je donne l'utilisation pratique des procédures. Une troisième section comporte les détails techniques de l'implémentation. Enfin, les tests des programmes font l'objet de la quatrième section de ce chapitre.

5.1. Stockage des données

Le codage d'un V-graphe de GKM est le suivant. Les sommets p_1, \dots, p_N de (Γ, α) sont stockés dans une liste $S = (p_1, \dots, p_N)$.

Le V-graphe (Γ, α) est représenté par sa matrice A d'adjacence généralisée (voir la définition 2.1.5 page 14). C'est la matrice de taille $N \times N$ telle que $a_{i,j} = \alpha_{p_i,p_j}$ si les sommets p_i et p_j sont reliés par une arête, et $a_{i,j} = 0$ sinon.

L'élément de cohomologie f est codé par la liste $F = (f(p_1), \dots, f(p_N))$. Pour faciliter les calculs, les formes linéaires θ_i sont représentées par la base canonique $(e_i)_i$ de \mathbb{R}^n .

C'est donc sous cette forme — listes S et F et matrice A — que s'effectuent les entrées et sorties des V-graphes de GKM.

Exemple 5.1.1. — Pour l'espace projectif $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ décrit dans la section 1.2, nous avons $S = (1, 2, 3, 4)$. L'élément de cohomologie $f(i) = \theta_i$ est représenté par le vecteur $F = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$. Enfin, la matrice d'adjacence généralisée (déjà croisée dans l'exemple 2.1.6 page 14) est

$$\begin{pmatrix} 0 & (-1, 1, 0, 0) & (-1, 0, 1, 0) & (-1, 0, 0, 1) \\ (1, -1, 0, 0) & 0 & (0, -1, 1, 0) & (0, -1, 0, 1) \\ (1, 0, -1, 0) & (0, 1, -1, 0) & 0 & (0, 0, -1, 1) \\ (1, 0, 0, -1) & (0, 1, 0, -1) & (0, 0, 1, -1) & 0 \end{pmatrix}$$

Le codage d'un V-hypergraphe de GKM (uniquement en sortie, après la réduction d'un V-graphe non 3-indépendant) est le suivant. Les sommets et l'élément de cohomologie sont stockés sous forme de listes de la même façon que dans le cas des graphes.

La matrice d'incidence généralisée d'un V-hypergraphe de GKM est stockée dans une liste H de couples $h_i = [v_i, \ell_i]$, chacun d'entre eux représentant une hyperarête. Plus précisément la collection des ℓ_i est la matrice d'incidence classique du graphe et v_i est un vecteur axial de l'hyperarête ℓ_i (voir la section 3.3 page 28).

En particulier si ℓ_i n'a que deux composantes non nulles, l'hyperarête h_i est une « vraie » arête.

5.2. Utilisation des programmes

Les deux programmes sont simples d'emploi.

L'utilisateur entre le V-graphe de GKM qu'il souhaite étudier, sous forme S, F, A . Ceci peut se faire soit manuellement, soit à l'aide des procédures générant les exemples classiques (grassmannienne, $GL(3, \mathbb{C})/B$, cycle à $4n$ sommets, produit des précédents). L'utilisateur fournit également le vecteur ξ et le réel c par rapport auxquels la réduction s'effectuera.

Par exemple les lignes

```
S := Sgrass(2,4) ;
F := Fgrass(2,4,5) ;
A := Agrass(2,4) ;
xi := [3,2,1,-6] ;
c := 0 ;
```

construisent les données associées à la grassmannienne $G_{2,4}(\mathbb{C})$ que l'on s'apprête à réduire selon le tore de générateur infinitésimal $\xi = (3, 2, 1, -6)$ et en la valeur régulière $c = 0$; enfin l'élément de cohomologie est $f(p) = 5x_p$.

Alors les appels de procédures

```
Sred := sommets_graphe_reduit(S,F,A,xi,c) ;
Fred := cohomologie_graphe_reduit(S,F,A,xi,c) ;
```

renvoient respectivement les sommets et l'élément de cohomologie de la réduction. Afin d'obtenir la matrice d'adjacence généralisée ou d'incidence généralisée (selon si le V-graphe est trois-indépendant ou non), on utilisera les commandes

```
Ared := reduc_trois_indep(S,F,A,xi,c) ;
ou
Hred := reduc_pas_trois_indep(S,F,A,xi,c) ;
```

Par convention, nous noterons **Ared** une matrice d'adjacence généralisée réduite et **Hred** une matrice d'incidence généralisée réduite.

Un affichage graphique est possible *via* les commandes

```

fabric_graphe(Ared) ;
fabric_hypergraphe(Hred) ;

```

selon que le résultat est un V-graphe de GKM ou un V-hypergraphe de GKM. Si l'utilisateur ne sait pas si son V-graphe est 3-indépendant ou pas, il peut appeler directement la procédure

```

Bred := reduction(S,F,A,xi,c) ;

```

Cette procédure commence par vérifier la validité des données, puis effectue un aigillage visible par l'utilisateur vers les procédures `reduc_trois_indep(S,F,A,xi,c)` ou `reduc_pas_trois_indep(S,F,A,xi,c)`, selon si le graphe à réduire est trois-indépendant ou pas. Le résultat de la procédure `reduction` pouvant être une matrice d'adjacence ou d'incidence, on fera attention avant d'invoquer l'une ou l'autre procédure d'affichage.

Enfin, le calcul du caractère s'effectue grâce à l'appel de procédure

```

caractere_red(S,F,A,xi,c) ;

```

et renvoie la somme de fractions rationnelles apparaissant dans la formule (4.2.3).

5.3. En coulisse

Le calcul des sommets du V-graphe réduit et de la réduction de l'élément de cohomologie s'effectue sans détour. L'implémentation de la réduction de la matrice d'adjacence généralisée est plus délicate. Pour le calcul du caractère réduit, la difficulté n'est pas d'implémenter la formule mais de le faire de façon efficace.

Cinq étapes sont à distinguer :

- vérification si les données fournies par l'utilisateur sont valides ;
- détermination si le V-graphe est 3-indépendant ou non ;
- réduction du V-graphe de GKM ;
- affichage graphique du V-graphe ou du V-hypergraphe réduit ;
- calcul du caractère réduit.

Examinons plus en détail chacun de ces points.

5.3.1. Validité des données. — Le programme se charge de vérifier si le graphe (Γ, α) est bien un V-graphe de GKM (`A_est_V_GKM(A)`) et si $\phi = \phi_{f,\xi}$, ξ et c sont convenables (`F_xi_et_c_sont_convenables(F,A,xi,c)`). On doit en outre vérifier avant d'effectuer le calcul du caractère réduit que le V-graphe de GKM est un graphe de GKM (`A_est_GKM(A)`).

Le programme commence par effectuer une série de vérifications sur la matrice A . Tout d'abord qu'elle provient bien d'un graphe ($a_{i,j} = 0 \iff a_{j,i} = 0$) et que la valence est

constante (chaque sommet a exactement d voisins). Ensuite, pour `reduction.mws`, on vérifie les trois conditions de la proposition 1.1.4; pour `caractere.mws`, on vérifie les trois conditions de la définition 2.1.1.

Si la matrice A passe avec succès cette première batterie de tests, on sait que l'on peut réduire pour f , ξ et c soigneusement choisis.

Les tests suivants portent sur f . On vérifie tout d'abord si c'est bien un élément de cohomologie de degré 2, c'est-à-dire s'il existe pour toute arête $[p, q]$ une constante $c_{p,q}$ telle que $f(q) - f(p) = c_{p,q}\alpha_{p,q}$. Puis on s'assure que la constante $c_{p,q}$ est bien strictement positive, afin que f soit symplectique.

On vérifie ensuite si le vecteur ξ est bien un générateur infinitésimal d'un tore H contenu dans aucun des G_e , c'est-à-dire si $\alpha_{p,q}(\xi) \neq 0$ pour toute arête $[p, q]$. Un dernier test nous assure que c est bien une valeur régulière de ϕ .

5.3.2. Vérification de la 3-indépendance. — La procédure `trois_indep(A)` détermine si la matrice d'adjacence généralisée A encode un graphe de GKM 3-indépendant. Précisons bien que la matrice A doit déjà avoir passé avec succès les tests de la sous-section précédente, sans quoi le résultat n'a aucun sens. Il est à noter qu'un graphe divalent est considéré comme 3-indépendant. Enfin, il n'est pas nécessaire de vérifier la 3-indépendance avant de calculer le caractère réduit d'un élément de K-théorie.

L'algorithme implémenté est sans détour :

```

si la valence est inférieure à 3 alors retourner 'vrai'
pour tout sommet  $p$  du graphe
  pour tout triplet  $(q, r, s)$  de voisins de  $p$ 
    si le rang de la famille de trois vecteurs  $\{\alpha_{p,q}, \alpha_{p,r}, \alpha_{p,s}\}$  est inférieur à 3
      alors retourner 'faux'
  fin de l'examen des triplets de voisins de  $p$ 
fin de l'examen des sommets
retourner 'vrai'

```

Cette procédure est assez coûteuse, à cause des multiples vérifications du rang d'un système de trois vecteurs.

5.3.3. Réduction d'un V-graphe 3-indépendant. — Cette tâche est traitée par la procédure `reduc_trois_indep(S, F, A, xi, c)`.

Le programme commence par déterminer tous les sommets du V-graphe réduit, c'est-à-dire les arêtes $e = [p, q]$ avec $\phi(p) < c < \phi(q)$. Fixons une telle arête $e = [p, q]$ et soit r un voisin de p autre que q .

La 3-indépendance implique qu'il existe un unique voisin s de r autre que p tel que la famille de vecteurs $\{\alpha_{q,p}, \alpha_{p,r}, \alpha_{r,s}\}$ soit de rang 2 (voir la figure 3.1 page 27). La procédure `voisin_dim_deux(A, q, p, r)` est chargée de trouver ce sommet s ; son implémentation se fait sans détour et ne mérite pas que nous nous y attardions.

L'algorithme déterminant la réduction d'un V-graphe 3-indépendant est alors le suivant :

```

pour tout sommet  $e = [p, q]$  du V-graphe réduit
  pour tout voisin  $r$  de  $p$  autre que  $q$ 
    calculer la fonction axiale réduite
    déterminer le voisin  $s$  de  $r$  autre que  $p$  tel que  $\{\alpha_{q,p}, \alpha_{p,r}, \alpha_{r,s}\}$  soit de rang 2
    répéter
      si  $[r, s]$  est coupée par  $c$ 
        alors relier  $[p, q]$  et  $[r, s]$  dans le V-graphe réduit
        quitter la boucle « répéter »
      sinon  $q \leftarrow p$ 
            $p \leftarrow r$ 
            $r \leftarrow s$ 
      fin si
    fin répéter
  fin de l'examen des voisins de  $p$ 
fin du parcours des sommets du graphe réduit

```

L'acyclicité du graphe empêche le programme de tourner indéfiniment.

5.3.4. Réduction d'un V-graphe non 3-indépendant. — Cette tâche est traitée par la procédure `reduc_pas_trois_indep(S, F, A, xi, c)`.

Le programme commence par déterminer tous les sommets du V-graphe réduit, c'est-à-dire les arêtes $e = [p, q]$ avec $\phi(p) < c < \phi(q)$.

Choisissons une telle arête $e = [p, q]$, et désignons par q_i les $(d - 1)$ voisins de p autres que q . La procédure `hyperdirections(A, q, p)` se charge de déterminer les hyperdirections à partir de $[p, q]$. Détaillons son fonctionnement.

```

soit  $V$  l'ensemble des voisins de  $p$  autres que  $q$ 
initialiser à 0 le nombre  $t$  d'hyperdirections
soit  $T$  une table destinée à contenir les hyperdirections
tant que  $V$  est non vide
  soit  $r$  le premier élément de  $V$ 
  ôter  $r$  de  $V$ 
  ajouter 1 à  $t$ 
  initialiser  $T_t$  à  $[r]$ 
  pour tout élément  $s$  de  $V$ 
    si la famille de vecteurs  $\{\alpha_{q,p}, \alpha_{p,r}, \alpha_{r,s}\}$  n'est pas de rang 3
      alors remplacer  $T_t$  par la concaténation de  $T_t$  et de  $s$ 
      ôter  $s$  de  $V$ 
    fin si
  fin de l'examen de  $V$ 
fin du vidage de  $V$ 
retourner la table  $T$  des hyperdirections

```

Fixons une hyperdirection I issue de l'arête e et une direction $i \in I$. Notons $r = q_i$. La procédure `sous_graphe_dim_deux(A, q, p, r)` a pour tâche de déterminer le sous-graphe Γ_V de Γ dont les arêtes ont pour fonction axiale les vecteurs appartenant à l'espace vectoriel V engendré par $\alpha_{q,p}$ et α_{p,q_i} . Son implémentation s'effectuant sans détour, nous ne la détaillerons pas davantage.

La récupération de la composante connexe Γ_0 de Γ_V contenant p est traitée à l'aide de la procédure `components(G, root=p)` intégrée à MAPLE. C'est une des rares procédures que nous n'avons pas réécrite, car ne représentant qu'une fraction infime du temps de calcul.

Pour direction axiale, nous avons fait le choix de prendre $\alpha_{p,I} = \alpha_{p,q_i} - \frac{\alpha_{p,q_i}(\xi)}{\alpha_{p,q}(\xi)}\alpha_{p,q}$, où i est le premier indice de l'hyperdirection I .

L'algorithme effectuant la réduction d'un V-graphe non 3-indépendant est alors le suivant :

```

pour tout sommet  $e = [p, q]$  du V-graphe réduit
  regrouper les voisins de  $p$  en hyperdirections
  pour toute hyperdirection  $I$  à partir de  $[p, q]$ 
    calculer l'hyperdirection axiale  $\alpha_{p,I}$ 
    déterminer le sous-graphe  $\Gamma_V$ 
    extraire la composante  $\Gamma_0$  de  $\Gamma_V$  contenant  $e$ 
    récupérer les arêtes  $[r, s]$  de  $\Gamma_0$  coupées par  $c$ 
    relier toutes ces arêtes  $[r, s]$  par une hyperarête
  fin de l'examen des hyperdirections à partir de  $[p, q]$ 
fin du parcours des sommets du V-graphe réduit
retourner la liste des hyperarêtes

```

La partie la plus onéreuse de cette procédure est la fabrication du sous-graphe Γ_V , faisant de multiples fois appel à la vérification du rang d'un système de trois vecteurs.

5.3.5. Affichage graphique du résultat. — Cette tâche est traitée par les procédures `fabric_graphe(A)` et `fabric_hypergraphe(H)`, où A est une matrice d'adjacence généralisée (encodant un V-graphe de GKM) et H est une matrice d'incidence généralisée (encodant un V-hypergraphe de GKM).

Dans les deux cas, les sommets p_i du graphe sont représentés par des points équirépartis sur le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique, et notés i .

L'arête $[p_i, p_j]$ est représentée par le segment joignant i et j .

Pour l'hyperarête h englobant les sommets p_{i_1}, \dots, p_{i_r} , le programme commence par construire le barycentre b des points i_1, \dots, i_r du cercle unité. L'hyperarête est alors représentée par la réunion des segments $b-i_j$. Pour faciliter la lecture du résultat, chaque hyperarête est affichée dans une couleur différente.

La programmation de ces deux procédures ne réservant aucune surprise, nous ne nous y attarderons pas plus.

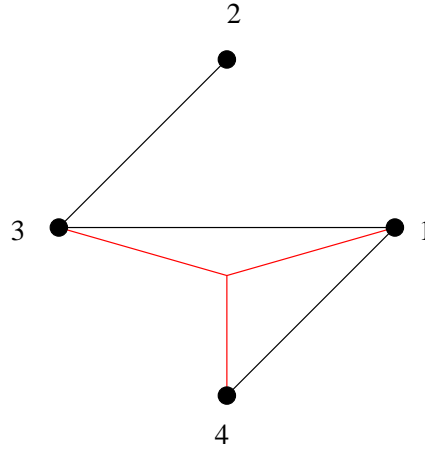


FIGURE 5.1. Représentation graphique du V-hypergraphe de GKM de la figure 3.3

5.3.6. Calcul du caractère invariant sous forme de somme de fractions rationnelles. — Comme je l'évoquais au début de cette partie, la difficulté de cette procédure consiste à trouver une implémentation efficace. Une programmation brutale mène à une procédure qui explose même pour de petits exemples.

Remarque 5.3.1. — Le calcul du caractère pour un graphe de GKM est indépendant de la notion de 3-indépendance.

Rappelons que nous nous intéressons à la formule (4.2.3), c'est-à-dire à l'expression

$$\sum_{e=[p,q] \in \Gamma_c} \frac{M_e}{k_e} \sum_{\ell=1}^{|k_e|} \frac{\omega_e^{\ell k_p}}{\prod_{r \in V(p) \setminus \{q\}} (1 - (\omega_e)^{\ell k_{p,r}} M_{p,r})}$$

où $\omega_e = e^{2i\pi/k_e}$ est une racine $|k_e|$ -ième de l'unité, avec $k_e = \alpha_{p,q}(\xi)$. Par ailleurs M_e et $M_{p,r}$ sont des monômes à puissances fractionnaires; enfin k_p et $k_{p,r}$ sont des entiers.

Le calcul des constantes et monômes ne pose aucun problème. Par contre la programmation des sommes

$$S(m; k, k_1, \dots, k_d) = \sum_{\ell=1}^m \frac{\zeta^{\ell k}}{(1 - \zeta^{\ell k_1} U_1) \cdots (1 - \zeta^{\ell k_d} U_d)}$$

où ζ désigne $e^{\frac{2i\pi}{m}}$, faisant intervenir des racines m -ièmes de l'unité, est ardue. En utilisant le développement en séries formelles, on arrive rapidement à une expression utilisable (voir [Zag73]) :

$$\begin{aligned}
S(m; k, k_1, \dots, k_d) &= \sum_{\ell=1}^m \frac{\zeta^{k\ell}}{(1 - \zeta^{\ell k_1} U_1) \cdots (1 - \zeta^{\ell k_d} U_d)} \\
&= \sum_{\ell=1}^m \sum_{r_1, \dots, r_d=0}^{\infty} \zeta^{k\ell} (\zeta^{k_1 \ell} U_1)^{r_1} \cdots (\zeta^{k_d \ell} U_d)^{r_d} \\
&= \sum_{r_1, \dots, r_d=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^m \zeta^{\ell(k+k_1 r_1 + \cdots + k_d r_d)} \right)}_{a_{r_1, \dots, r_d}} U_1^{r_1} \cdots U_d^{r_d}.
\end{aligned}$$

$$a_{r_1, \dots, r_d} = \begin{cases} m & \text{si } m | k + k_1 r_1 + \cdots + k_d r_d, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons les divisions euclidiennes $r_j = mt_j + s_j$. Alors $a_{r_1, \dots, r_d} = a_{s_1, \dots, s_d}$ et

$$\begin{aligned}
S(m; k, k_1, \dots, k_d) &= \sum_{t_1, \dots, t_d=0}^{\infty} \sum_{s_1, \dots, s_d=0}^{m-1} a_{s_1, \dots, s_d} U_1^{mt_1} \cdots U_d^{mt_d} U_1^{s_1} \cdots U_d^{s_d} \\
&= \frac{\sum_{s_1, \dots, s_d=0}^{m-1} a_{s_1, \dots, s_d} U_1^{s_1} \cdots U_d^{s_d}}{(1 - U_1^m) \cdots (1 - U_d^m)}.
\end{aligned}$$

Marc A. A. van Leeuwen a effectué une implémentation récursive performante de cette formule, dans la procédure `somme_racines_unite(k,L,X,U,m)`. Ici L est la liste des constantes k_j et X est une variable intermédiaire. En voici l'algorithme :

soit d le cardinal de L

soit `recur(niv,s)` une procédure locale définie par

si `niv` est strictement supérieur à d

alors renvoyer $X^{s \bmod m}$

sinon renvoyer la somme pour $t = 0, \dots, m-1$

des $U_{niv}^t * \text{recur}(niv+1, s-t*L_{niv})$

fin de la procédure locale

soit R le coefficient du polynôme `recur(1,0)` en X de degré $k \bmod m$

renvoyer $m \times R$ divisé par le produit des $(1 - U_{k_j})$, pour j variant de 1 à d .

Finalement l'algorithme déterminant le caractère de la réduction d'un élément de K-théorie d'un graphe de GKM est le suivant :

initialiser à 0 le résultat

pour tout sommet $e = [p, q]$ du graphe réduit

calculer k_p, k_e, M_e

déterminer les voisins r_j de p autres que q

calculer les k_{p,r_j} et les M_{p,r_j}

évaluer la fraction $S(|k_e|; k_p, k_{p,r_1}, \dots, k_{p,r_{d-1}})$

substituer $M_{[p,r_j]}$ à U_j dans la fraction précédente

ajouter la fraction au résultat

fin de l'examen des sommets du graphe réduit

retourner le résultat

La procédure `caractere_red(S,F,A,xi,c)` renvoie un résultat sous forme d'une somme de $|\Gamma_0|$ fractions rationnelles. La dilatation de l'élément de cohomologie par un facteur ℓ — même de l'ordre du milliard — n'entraîne pas de surcoût en temps ou en taille. Seul un monôme en facteur devant chaque fraction croît, alors que le résultat sous forme polynomiale explose (voir les exemples de la section 4.4).

5.4. Test des programmes

Commençons cette section par des remarques générales.

La vitesse des programmes a été considérablement améliorée en reprogrammant « à la main » les opérations sur les vecteurs : addition, multiplication par une constante, produit scalaire, test de colinéarité, rang de trois vecteurs. D'autre part, l'utilisation de listes à la place de vecteurs a permis un gain de temps significatif. Enfin, l'encodage d'un vecteur nul (correspondant à deux sommets non reliés) par l'entier zéro dans les matrices d'adjacence et d'incidence généralisées autorise un parcours rapide des arêtes.

Lorsque l'utilisateur sait avant le calcul si les données qu'il entre proviennent d'un V-graphe de GKM 3-indépendant ou pas, il est préférable qu'il utilise directement la procédure de réduction adéquate (`reduc_trois_indep` ou `reduc_pas_trois_indep`). La vérification de la 3-indépendance d'un graphe est en effet très coûteuse.

Nous avons effectué les tests des programmes sur des exemples de graphes de GKM provenant des variétés grassmanniennes, de la variété des drapeaux $GL(3, \mathbb{C})/B$, ainsi que de leurs produits. Dans tous les exemples examinés, l'élément de cohomologie pour les grassmanniennes est comme d'habitude $f_\ell(S) = \ell\theta_S$ (voir l'exemple 1.5.3 page 11). Celui pour la variété des drapeaux $GL(3, \mathbb{C})/B$ est construit dans l'exemple 1.5.4 page 11. Désignons par ξ_r le vecteur $(r-1, \dots, 1, -r(r-1)/2) \in \mathbb{C}^r$. Nous avons toujours effectué dans les exemples détaillés ici une réduction en la valeur régulière $c = 1/10$ (voir la remarque 4.3.2 page 37). Rappelons que la valence d'un graphe de GKM est égale à la dimension de la variété sous-jacente. Par ailleurs la valence du graphe réduit est inférieure d'une unité à celle du graphe initial.

Dans le tableau 5.2 figurent pour des variétés classiques la dimension du tore agissant effectivement sur la variété, ainsi que la valence et le nombre de sommets du graphe de GKM associé.

Les tests furent effectués sur le serveur `grobn3` de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586). Ce serveur bi-processeur Pentium III 1,13GHz est équipé de 2 gigaoctets de mémoire RAM et tourne sous Linux RedHat 9.0.

Effectuons maintenant des remarques sur le programme `reduction.mws`. La majeure partie du temps de calcul est consacrée à vérifier le parallélisme de deux vecteurs ou le rang d'un système de trois vecteurs. Une amélioration — même infime — du traitement de ces deux tâches mènerait à un gain substantiel de temps.

Par ailleurs, la réduction dans le cas non 3-indépendant est plus lente que dans le cas 3-indépendant. En effet, on est obligé de vérifier le rang de très nombreux systèmes de trois vecteurs.

La réduction de V-graphes de dimension 25 et avec plusieurs centaines de points fixes s'effectue en un temps très compétitif. Voir le tableau 5.3 pour des exemples de réduction de graphes de GKM issus de variétés classiques.

Graphe de GKM de la variété	Dimension tore effectif	Valence du graphe	Nb. de sommets du graphe
$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$	2	2	3
$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$	3	3	4
$GL(3, \mathbb{C})/B$	2	3	6
$\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$	4	4	5
$G_{2,4}(\mathbb{C})$	3	4	6
$\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$	5	5	6
$\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \times GL(3, \mathbb{C})/B$	5	6	24
$\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$	6	6	7
$G_{2,5}(\mathbb{C})$	4	6	10
$\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$	7	7	8
$\mathbb{P}^4(\mathbb{C}) \times GL(3, \mathbb{C})/B$	6	7	30
$\mathbb{P}^8(\mathbb{C})$	8	8	9
$G_{2,6}(\mathbb{C})$	5	8	15
$G_{3,6}(\mathbb{C})$	5	9	20
$\mathbb{P}^{10}(\mathbb{C})$	10	10	11
$G_{2,4}(\mathbb{C}) \times G_{2,5}(\mathbb{C})$	7	10	60
$G_{3,7}(\mathbb{C})$	6	12	35
$\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$	15	15	16
$G_{4,8}(\mathbb{C})$	7	16	70
$G_{3,9}(\mathbb{C})$	8	18	84
$\mathbb{P}^{20}(\mathbb{C})$	20	20	21
$G_{4,10}(\mathbb{C})$	9	24	210
$G_{5,10}(\mathbb{C})$	9	25	252
$G_{5,11}(\mathbb{C})$	10	30	462
$G_{6,12}(\mathbb{C})$	11	36	924
$G_{6,13}(\mathbb{C})$	12	42	1716

FIGURE 5.2. Données des graphes de GKM de variétés classiques

Effectuons enfin quelques remarques sur le programme `caractere.mws` calculant le caractère réduit d'un élément de cohomologie d'un graphe de GKM. Pour le calcul du caractère réduit, nous avons toujours effectué une réduction en la valeur régulière $c = 1/10$.

La procédure `somme_racines_unite(k,L,X,U,m)` calculant récursivement les sommes de racines de l'unité est très efficace. Ses deux paramètres principaux (influant directement sur le temps de calcul) sont la valence du graphe et les valeurs $\alpha_{p,q}(\xi)$ intervenant dans la formule (4.2.3). En effet d'une part la valence du graphe modifie la profondeur de la récursivité. D'autre part les sommes se font sur les racines de l'unité d'ordre $\alpha_{p,q}(\xi)$, lorsque $[p, q]$ décrit l'ensemble des sommets du graphe réduit.

Cependant, pour un calcul de caractère réduit, on fait appel à la cette procédure autant de fois qu'il y a de sommets du graphe réduit. Chacun de ces appels fournit un des termes du résultat. D'où un coût assez important lorsque le graphe réduit possède un grand nombre de sommets.

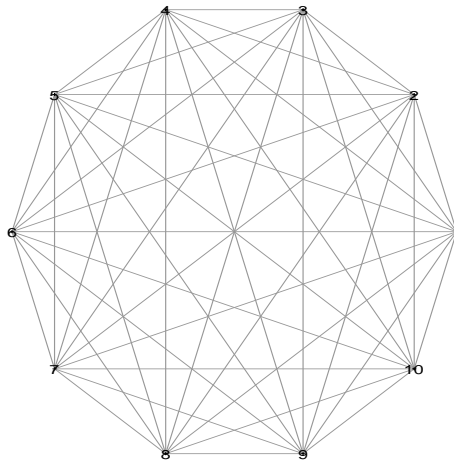
Pour une variété fixée, il est intéressant de faire varier le tore selon lequel on réduit. Ceci influe à la fois sur le nombre de sommes de racines de l'unité à effectuer et sur la nature des racines de l'unité. Voir le tableau 5.4 pour des exemples de calcul du caractère réduit d'un élément de K-théorie d'un graphe de GKM.

Variété à réduire	Générateur infinitésimal ξ du tore selon lequel on réduit	Nb. sommets graphe réduit	Nb. (hyper)arêtes graphe réduit	Temps de calcul
$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$	ξ_3	2	1	< 0.1 s
$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$	ξ_4	3	2	< 0.1 s
$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$	(1, 2, -1, -2)	4	4	< 0.1 s
$GL(3, \mathbb{C})/B$	(1, 0, -1)	5	1	< 0.1 s
$\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$	ξ_5	4	6	< 0.1 s
$\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$	(2, 1, 0, -1, -2)	6	9	< 0.1 s
$G_{2,4}(\mathbb{C})$	ξ_4	6	9	< 0.1 s
$G_{2,4}(\mathbb{C})$	(1, 2, -1, -2)	6	9	< 0.1 s
$\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$	ξ_6	5	10	< 0.1 s
$\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$	(3, 2, 1, -1, -2, -3)	9	18	< 0.1 s
$\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$	(4, 3, 2, 1, -4, -6)	8	16	< 0.1 s
$\mathbb{P}^3 \times GL(3)/B$	ξ_7	16	28	3.9 s
$\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$	ξ_7	6	15	< 0.1 s
$\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$	(4, 3, 2, 1, -2, -3, -5)	12	30	0.1 s
$G_{2,5}(\mathbb{C})$	ξ_5	12	30	0.1 s
$G_{2,5}(\mathbb{C})$	(3, 2, 1, 0, -6)	12	30	0.1 s
$\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$	ξ_8	7	21	0.1 s
$\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$	(4, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -4)	16	48	0.1 s
$\mathbb{P}^4 \times GL(3)/B$	ξ_8	20	45	11.6 s
$\mathbb{P}^8(\mathbb{C})$	ξ_9	8	28	0.2 s
$\mathbb{P}^8(\mathbb{C})$	(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4)	20	70	0.2 s
$G_{2,6}(\mathbb{C})$	ξ_6	20	70	0.3 s
$G_{2,6}(\mathbb{C})$	(3, 2, 1, -1, -2, -3)	26	91	0.2 s
$G_{3,6}(\mathbb{C})$	ξ_6	30	120	0.4 s
$G_{3,6}(\mathbb{C})$	(3, 2, 1, -1, -2, -3)	37	148	0.4 s
$\mathbb{P}^{10}(\mathbb{C})$	ξ_{11}	10	45	0.3 s
$G_{2,4} \times G_{2,5}$	ξ_9	72	324	9.8 s
$G_{3,7}(\mathbb{C})$	ξ_7	60	330	1.2 s
$\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$	ξ_{16}	15	105	0.8 s
$G_{4,8}(\mathbb{C})$	ξ_8	140	1050	4.8 s
$G_{3,9}(\mathbb{C})$	ξ_9	168	1428	8.2 s
$\mathbb{P}^{20}(\mathbb{C})$	ξ_{21}	20	190	2.2 s
$G_{4,10}(\mathbb{C})$	ξ_{10}	504	5796	56.7 s
$G_{5,10}(\mathbb{C})$	ξ_{10}	630	7560	84.7 s
$G_{5,11}(\mathbb{C})$	ξ_{11}	1260	18270	261.4 s
$G_{6,12}(\mathbb{C})$	ξ_{12}	2772	48510	1486.2 s
$G_{6,13}(\mathbb{C})$	ξ_{13}	5544	113652	8113.0 s

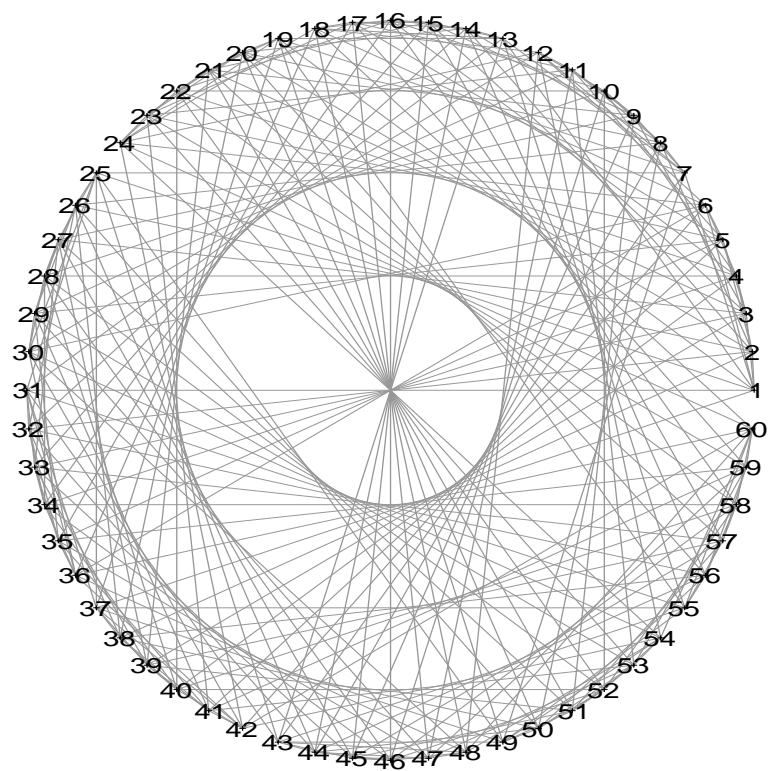
FIGURE 5.3. Réduction de graphes de GKM de variétés classiques

Variété à réduire	Générateur infinitésimal ξ du tore selon lequel on réduit	Nb. de sommets du graphe réduit	Ordre des racines de l'unité	Temps de calcul
$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$	ξ_3	2	4 et 5	< 0.1 s
$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$	ξ_4	3	7 à 9	< 0.1 s
$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$	(1, 2, -1, -2)	4	2 à 4	< 0.1 s
$GL(3, \mathbb{C})/B$	(1, 0, -1)	5	1 et 2	< 0.1 s
$\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$	ξ_5	4	11 à 14	0.3 s
$\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$	(2, 1, 0, -1, -2)	6	1 à 4	< 0.1 s
$G_{2,4}(\mathbb{C})$	ξ_4	6	7 à 9	0.1 s
$G_{2,4}(\mathbb{C})$	(1, 2, -1, -2)	6	1, 3, 4	< 0.1 s
$\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$	ξ_6	5	16 à 20	22.0 s
$\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$	(3, 2, 1, -1, -2, -3)	9	2 à 6	0.2 s
$\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$	(4, 3, 2, 1, -4, -6)	8	5 à 10	1.4 s
$\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$	(4, 3, 2, 1, -2, -3, -5)	12	3 à 9	7.3 s
$G_{2,5}(\mathbb{C})$	ξ_5	12	11 à 14	159.3 s
$G_{2,5}(\mathbb{C})$	(3, 2, 1, 0, -6)	12	6 à 9	16.9 s
$\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$	(4, 3, 2, 1, -1, -2, -3, -4)	16	2 à 8	45.7 s
$\mathbb{P}^8(\mathbb{C})$	(4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4)	20	1 à 8	743.0 s
$G_{2,6}(\mathbb{C})$	(3, 2, 1, -1, -2, -3)	26	1 à 6	102.5 s
$G_{3,6}(\mathbb{C})$	(3, 2, 1, -1, -2, -3)	37	1 à 6	891.4 s

FIGURE 5.4. Calcul du caractère réduit d'un élément de K-théorie de graphes de GKM



Réduction du graphe de GKM de $\mathbb{P}^{10}(\mathbb{C})$
selon $\xi = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, -45)$ et en $c = 1/10$

Graphe de GKM de la variété $GL(3, \mathbb{C})/B \times G_{2,5}(\mathbb{C})$

PARTIE II

NOMBRES DE KOSTKA ET COEFFICIENTS DE LITTLEWOOD-RICHARDSON

CHAPITRE 6

LE PROBLÈME DES MULTIPLICITÉS

Remarque : les notations de cette seconde partie sont indépendantes de celles de la première partie.

6.1. Origine du problème

Considérons un groupe de Lie semi-simple complexe G de rang r , et fixons un sous-groupe de Cartan H de G . Notons \mathfrak{g} et \mathfrak{h} les algèbres de Lie de G et H respectivement. Désignons par $W = W(G, H) = N_G(H)/H$ le groupe de Weyl de G pour H .

Une représentation de G dans un espace vectoriel complexe V est un morphisme de groupes π de G dans le groupe des transformations linéaires inversibles $GL(V)$ de V . Une représentation correspond à une action de G sur V . Le caractère d'une représentation est la fonction $\text{ch}(V) = \text{Tr}(\pi) : G \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\text{ch}(V) \cdot g = \text{Tr}(\pi(g))$.

On choisit un système de racines positives. On considère comme d'habitude les réseaux des poids et des racines.

Rappelons que les représentations irréductibles de dimension finie du groupe G sont classifiées par leur plus haut poids λ (ou poids dominant), et notées usuellement $V(\lambda)$. Les poids fondamentaux $\omega_1, \dots, \omega_r$, sont définis de sorte à ce que chaque poids dominant s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de ces poids ω_i .

Le caractère $\text{ch}(V(\lambda))$ s'écrit restreint à H comme une somme finie

$$(6.1.1) \quad \text{ch}(V(\lambda)) = \sum_{\mu} c_{\lambda}^{\mu} e^{\mu},$$

où c_{λ}^{μ} désigne la multiplicité du poids μ dans la représentation $V(\lambda)$. Ces multiplicités sont appelées *nombres de Kostka* dans le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$.

Le produit tensoriel des représentations de plus hauts poids λ et μ se décompose alors sous la forme

$$(6.1.2) \quad V(\lambda) \otimes V(\mu) = \sum_{\nu} c_{\lambda \mu}^{\nu} V(\nu)$$

où $c_{\lambda \mu}^{\nu}$ représente la multiplicité de la représentation irréductible de plus haut poids ν dans le produit tensoriel. Ces multiplicités $c_{\lambda \mu}^{\nu}$ sont appelées *coefficients de Littlewood-Richardson* ou *coefficients de Clebsch-Gordan*.

Il existe de nombreuses formules issues de la théorie des représentations permettant de calculer les deux quantités c_{λ}^{μ} et $c_{\lambda \mu}^{\nu}$. La première est la formule du caractère de Weyl, valable pour toute algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} .

Théorème 6.1.1 (Weyl). — *Le caractère de la représentation irréductible de plus haut poids λ est égal à*

$$(6.1.3) \quad \text{ch}(V(\lambda)) = \frac{A_{\lambda+\rho}}{A_{\rho}},$$

où

$$(6.1.4) \quad A_{\mu} = \sum_{w \in W} (-1)^{\varepsilon(w)} e^{w(\mu)}.$$

Ici μ est un poids et ρ désigne la demi-somme des racines positives. Par ailleurs $\varepsilon(w)$ est le nombre d'inversions de la permutation w (ainsi $(-1)^{\varepsilon(w)}$ est la signature de w).

Les coefficients de Littlewood-Richardson s'obtiennent également à partir de cette formule, puisque le produit tensoriel des représentations de plus hauts poids λ et μ a pour caractère

$$(6.1.5) \quad \text{ch}(V(\lambda) \otimes V(\mu)) = \text{ch}(V(\lambda)) \cdot \text{ch}(V(\mu)) = \sum_{\nu} c_{\lambda \mu}^{\nu} \text{ch}(V(\nu)).$$

Comme annoncé dans l'introduction, les formules (6.1.3) et (6.1.5) ne permettent pas un calcul effectif lorsque le rang de \mathfrak{g} ou la taille des coefficient des poids augmentent. D'où la nécessité d'implémenter des formules plus efficaces.

6.2. Les formules de Kostant et de Steinberg

Remarquons que le nombre $k_{\mathfrak{g}}(\beta)$ de façons d'écrire un élément β du réseau des racines comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des racines positives de \mathfrak{g} satisfait à

$$(6.2.1) \quad \frac{1}{\prod_{\alpha} (1 - e^{-\alpha})} = \sum_{\beta} k_{\mathfrak{g}}(\beta) e^{-\beta},$$

où le produit est sur l'ensemble des racines positives α de \mathfrak{g} et la somme sur le réseau des racines. Une conséquence de cette remarque et de la formule de Weyl est le

Théorème 6.2.1 (Formule de Kostant). — *Pour toute algèbre de Lie semi-simple complexe \mathfrak{g} , la multiplicité du poids μ dans la représentation irréductible de dimension finie de plus haut poids λ est égale à*

$$(6.2.2) \quad c_\lambda^\mu = \sum_w (-1)^{\varepsilon(w)} k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)),$$

où la somme est sur l'ensemble des éléments w du groupe de Weyl de \mathfrak{g} tels que l'élément $w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)$ du réseau des racines soit contenu dans le cône engendré par les racines positives de \mathfrak{g} .

En utilisant la formule de Weyl (6.1.3) dans (6.1.5), on obtient le

Théorème 6.2.2 (Formule de Steinberg). — *Étant donnés trois poids dominants λ , μ , ν de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , la multiplicité de la représentation de plus haut poids ν dans le produit tensoriel des représentations de plus hauts poids λ et μ est égale à*

$$(6.2.3) \quad \sum_{(w,w')} (-1)^{\varepsilon(w)+\varepsilon(w')} k_{\mathfrak{g}}(w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - (\nu + 2\rho)),$$

où la somme est sur l'ensemble des couples (w, w') d'éléments du groupe de Weyl de \mathfrak{g} tels que l'élément $w(\lambda + \rho) + w'(\mu + \rho) - (\nu + 2\rho)$ du réseau des racines soit contenu dans le cône engendré par les racines positives de \mathfrak{g} .

Ces deux élégantes formules ont l'inconvénient de faire intervenir des sommes sur des sous-ensembles du groupe de Weyl. Ces sous-ensembles se révéleront néanmoins de taille raisonnable.

À partir de maintenant, l'algèbre de Lie considérée sera toujours de type A_r , c'est-à-dire $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{r+1}(\mathbb{C})$.

Une particularité du nombre de Kostka c_λ^μ est qu'il est localement polynomial en les coordonnées des poids λ et μ ([Stu95]). Kirillov et Reshetikin ont démontré que l'application $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\mu}$ est polynomiale ([KR86]).

Ce résultat fut redémontré par Billey, Guillemin et Rassart *via* les diagrammes de Gelfand-Tsetlin ([BGR03]). Plus précisément, dans les chambres d'un certain complexe la multiplicité du poids μ dans la représentation de plus haut poids λ est un polynôme de degré $r(r-1)/2$ en les coordonnées de μ , dont les coefficients sont des polynômes de degré $r(r-1)/2$ en les coordonnées de λ . En particulier la fonction d'Ehrhart $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\mu}$ est polynomiale. Enfin, DeLoera et MacAllister ont redémontré la polynomialité de $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\mu}$ à l'aide de la formule de Kostant ([DM03]).

De même, le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda\mu}^\nu$ est localement polynomial en les coordonnées des poids λ , μ et ν . Rassart ([Ras03]), prolongeant [BGR03] et s'appuyant sur les travaux de Knutson et Tao portant sur les ruches ([KT99]), a démontré que le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda\mu}^\nu$ est un polynôme en les coefficients des poids λ , μ , ν sur les chambres d'un certain complexe. En particulier la fonction d'Ehrhart $t \mapsto c_{t\lambda}^{t\nu}$ est polynomiale. Ce dernier résultat fut également démontré par Derksen et Jerzy ([DW02]).

Le point commun aux formules apparaissant dans les théorèmes de Kostant et de Steinberg est la fonction comptant le nombre de décompositions d'un élément du réseau des

racines comme somme à coefficients entiers positifs des racines de l'algèbre de Lie. La description d'une méthode efficace de calcul de cette fonction fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 7

VOLUME ET POINTS ENTIERS DES POLYTOPES CONVEXES RATIONNELS

Ce chapitre a pour but de décrire les formules de Baldoni-Vergne et de Baldoni-Deloera-Vergne permettant de calculer efficacement le volume et le nombre de points entiers de certains polytopes convexes rationnels.

La première section introduit les polytopes, objets de notre étude. La seconde section décrit des formules générales pour le calcul du volume et du nombre de points à coordonnées entières d'un polytope. Dans la troisième section, ces résultats sont particularisés aux polytopes $P(\Phi, a)$ dont la matrice Φ provient d'un sous-ensemble du système des racines de A_r .

7.1. Réalisation des polytopes

Soit Φ une matrice de taille $r \times N$ à coefficients entiers, dont les colonnes sont notées ϕ_1, \dots, ϕ_N . Soit a un vecteur réel r -dimensionnel. Définissons le polyèdre convexe rationnel associé à Φ et a comme étant

$$(7.1.1) \quad P(\Phi, a) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^N ; \sum_{i=1}^N x_i \phi_i = a, x_i \geq 0 \right\}.$$

Ceci revient à définir le polyèdre $P(\Phi, a)$ comme étant un ensemble de points de \mathbb{R}^N à coordonnées positives vérifiant r équations linéaires.

On suppose que a est dans le cône $C(\Phi)$ engendré par les combinaisons linéaires à coefficients positifs des vecteurs ϕ_1, \dots, ϕ_N . Ainsi $P(\Phi, a)$ n'est pas vide.

On peut également supposer sans perdre de généralité que la matrice Φ est de rang maximal. Si ce n'est pas le cas, on prend le sous-espace de \mathbb{R}^r engendré par les colonnes de Φ et on ré-écrit le polyèdre en termes d'une matrice de taille $r' \times N$ et de rang r' .

Dans tout ce qui suit, nous exigerons que le noyau de Φ soit d'intersection nulle avec \mathbb{R}_+^N . Cette condition nous assure que le vecteur nul n'est pas une combinaison linéaire à coefficients positifs des vecteurs ϕ_i . Ainsi le polyèdre $P(\Phi, a)$ est un polytope, c'est-à-dire borné. On parle alors du polytope convexe rationnel associé à Φ et a .

Un polyèdre convexe est généralement défini comme étant l'ensemble des points à coordonnées positives vérifiant un certain nombre d'équations et d'inéquations linéaires. Remarquons que tout polyèdre convexe peut se réaliser à l'aide uniquement d'équations. En effet, soit P le polyèdre convexe dont les éléments sont les points $x \in \mathbb{R}_+^N$ vérifiant les r équations $E_i : \sum_k x_k a_{k,i} = c_i$ et les s inéquations $I_j : \sum_k x_k b_{k,j} \geq d_j$. Remplaçons chaque inéquation I_j par l'équation

$$(7.1.2) \quad E'_j : \begin{cases} \sum_k x_k b_{k,j} + t_j = d_j, \\ t_j \geq 0, \end{cases}$$

en les variables x_k et en la nouvelle variable t_j . Nous obtenons alors la réalisation de P par un polyèdre de \mathbb{R}^{N+s} satisfaisant à $r+s$ équations linéaires.

Exemple 7.1.1. — Le 2-simplexe s'identifie au polytope $P(\Phi, 1)$ de \mathbb{R}^3 avec $\Phi = (1 \ 1 \ 1) \in M_{1,3}(\mathbb{Z})$ et $a = 1$.

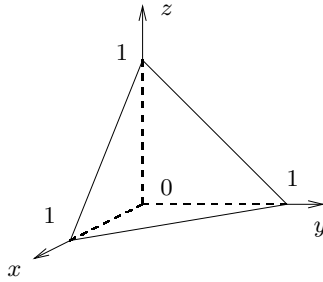


FIGURE 7.1. Le 2-simplexe

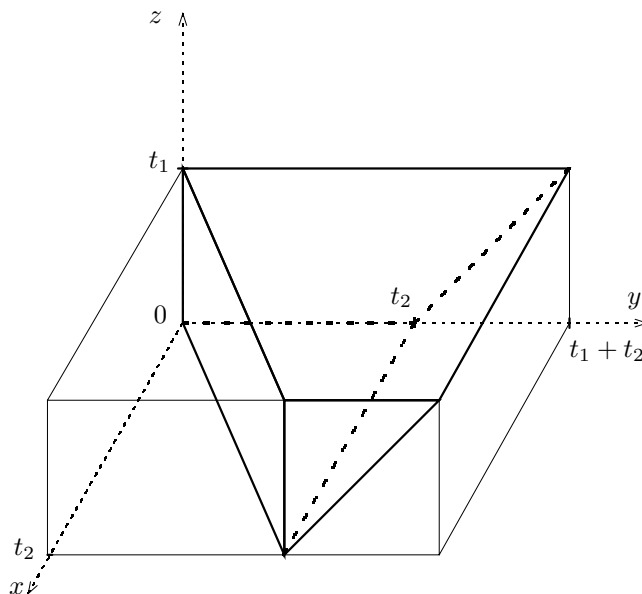
Exemple 7.1.2. — Le polytope $B(\ell_1\Lambda_1 + \ell_2\Lambda_2) = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_+^3 ; t_1 \leq t_2, t_3 \leq \ell_1, t_1 \leq \ell_2, t_2 - t_3 \leq \ell_2\}$ de dimension 3 est décrit par les conditions

$$\begin{cases} t_1, t_2, t_3, a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0, \\ a_1 = t_2 - t_1, \\ \ell_1 = t_3 + a_3, \\ \ell_2 = t_1 + a_2, \\ \ell_2 = t_2 - t_3 + a_4, \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} t_1, t_3, a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0, \\ \ell_1 = t_3 + a_3, \\ \ell_2 = t_1 + a_2, \\ \ell_2 = t_1 + a_1 - t_3 + a_4, \end{cases}$$

et est ainsi réalisé dans \mathbb{R}^6 . Alors $B(\ell_1\Lambda_1 + \ell_2\Lambda_2)$ s'identifie au polytope $P(\Phi, a)$ avec

$$(7.1.3) \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_2 \end{pmatrix}.$$

Le polytope $B(\ell_1\Lambda_1 + \ell_2\Lambda_2)$ intervient dans la description polyédrale de la base cristalline $B(\lambda)$ associée à la représentation irréductible de plus haut poids $\lambda = \ell_1\Lambda_1 + \ell_2\Lambda_2$ de l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ (les Λ_i sont les poids fondamentaux). Voir [Kas02] pour une introduction aux bases cristallines, ainsi que [Nak99] et [NZ97] pour la description détaillée de cette réalisation.

FIGURE 7.2. Polytope associé à la base cristalline $B(\ell_1\Lambda_1 + \ell_2\Lambda_2)$

7.2. Formules générales

7.2.1. La remarque fondamentale. — Fixons un polytope convexe rationnel $P(\Phi, a)$ soumis aux mêmes hypothèses que dans la section précédente. Définissons le *volume* de $P(\Phi, a)$:

$$(7.2.1) \quad v(\Phi, a) = \text{vol}(P(\Phi, a)).$$

Si a appartient à \mathbb{Z}^r , définissons la *fonction de partition vectorielle* par

$$(7.2.2) \quad k(\Phi, a) = |P(\Phi, a) \cap \mathbb{N}^N|.$$

Cet entier $k(\Phi, a)$ est le nombre de solutions entières positives (x_1, \dots, x_N) de l'équation $\sum_{i=1}^N x_i \phi_i = a$. En d'autres termes, il est égal au nombre de décompositions du vecteur a comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des vecteurs ϕ_i .

Remarque 7.2.1. — Par conséquent, le calcul efficace de la fonction de partition vectorielle est la clé de voûte de la programmation des formules de Kostant (6.2.2) et de Steinberg (6.2.3).

Le cône dual du cône $C(\Phi)$ est défini comme étant l'ensemble des vecteurs $z \in \mathbb{R}^r$ tels que le produit scalaire de z avec n'importe quel vecteur de $C(\Phi)$ soit positif.

Les résultats évoqués dans ce travail reposent sur les formules suivantes :

Théorème 7.2.2. — Soit z un vecteur appartenant au cône dual de $C(\Phi)$. Alors

$$\int_{C(\Phi)} v(\Phi, a) e^{-\langle a, z \rangle} da = \frac{1}{\prod_{\phi \in \Phi} \langle \phi, z \rangle},$$

$$\sum_{a \in C(\Phi) \cap \mathbb{Z}^r} k(\Phi, a) e^{-\langle a, z \rangle} = \frac{1}{\prod_{\phi \in \Phi} (1 - e^{-\langle \phi, z \rangle})}.$$

La première formule est la transformation de Laplace du cône $C(\Phi)$ selon la fonction $a \mapsto v(\Phi, a)$. La seconde formule est son analogue discret. L'inversion de ces deux formules nous donnera une expression du volume et du nombre de points à coordonnées entières du polytope $P(\Phi, a)$. Le reste de cette section est consacré à ce problème.

7.2.2. Résidu total. — Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $r > 0$. Choisissons une famille finie symétrique $\Delta = -\Delta \subset V^*$ de formes linéaires non nulles. Considérons l'arrangement d'hyperplans

$$(7.2.3) \quad \mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \bigcup_{\alpha \in \Delta} \{x \in V_{\mathbb{C}}; \alpha(x) = 0\}.$$

Soit $R_{\Delta} := \Delta^{-1}S(V^*)$ l'anneau des fonctions rationnelles à pôles dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire des fonctions de la forme $\frac{P}{\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha^{n_{\alpha}}}$ pour une fonction P polynomiale sur V et des entiers naturels n_{α} . Cet anneau est le localisé de $S(V^*)$ selon la partie multiplicative engendrée par Δ . Un sous-ensemble σ de Δ est dit *basique* pour Δ si les formes $\alpha \in \sigma$ forment une base de V^* . Un cône $C(\sigma)$ engendré par un sous-ensemble basique est dit *cône simplicial*. Notons $B(\Delta)$ la collection des sous-ensembles basiques de Δ . Pour un sous-ensemble basique σ , on pose

$$(7.2.4) \quad f_{\sigma} := \frac{1}{\prod_{\alpha \in \sigma} \alpha}.$$

Le sous- \mathbb{R} -espace de R_{Δ} engendré par les fonctions f_{σ} (où σ parcourt les sous-ensembles basiques pour Δ) est noté S_{Δ} . Il est contenu dans la composante homogène de degré $-r$ de R_{Δ} . En général, les fonctions f_{σ} ne sont pas linéairement indépendantes.

Exemple 7.2.3. — Soit V un \mathbb{R} -espace de base $\{e_1, e_2\}$. Choisissons pour Δ la collection des formes linéaires $\{\pm e^1, \pm e^2, \pm(e^1 - e^2)\}$, où $(e^j)_j$ désigne la base duale de $(e_i)_i$. Considérons les trois sous-ensembles basiques $\sigma^1 = \{e^1, e^2\}$, $\sigma^2 = \{e^1, e^1 - e^2\}$, $\sigma^3 = \{e^2, e^1 - e^2\}$ de Δ . Alors

$$\frac{1}{e^1 e^2} = \frac{1}{e^2 (e^1 - e^2)} - \frac{1}{e^1 (e^1 - e^2)},$$

donc les fonctions f_{σ} sont liées par la relation $f_{\sigma^1} = f_{\sigma^3} - f_{\sigma^2}$.

Les éléments de V agissent par différentiation sur R_{Δ} . Plus précisément, posons

$$(7.2.5) \quad \partial_v f(x) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + tv), \quad v, x \in V.$$

C'est la dérivée directionnelle de f dans la direction v . Nous avons alors le

Théorème 7.2.4 ([BV97]). — L'espace vectoriel R_Δ se décompose sous la forme

$$(7.2.6) \quad R_\Delta = \partial(V)R_\Delta \oplus S_\Delta.$$

Cette décomposition nous permet de définir la projection

$$(7.2.7) \quad \text{TRes}_\Delta : R_\Delta \longrightarrow S_\Delta,$$

appelée *résidu total* selon le système Δ . Ainsi, le résidu total d'une fonction f est une combinaison linéaire des fractions simples f_σ . Le résidu total est nul en-dehors de la composante homogène de degré $-r$ de R_Δ .

Ce théorème exprime le fait qu'une fonction rationnelle à pôles sur l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{H}_\mathbb{C}$ possède une composante selon les fonctions simples f_σ , et une composante qui est une différentielle et que le résidu total se charge d'éliminer.

Lemme 7.2.5. — Le résidu total s'annule sur les fonctions rationnelles de la forme

$$\frac{P}{\prod_{\alpha \in \kappa} \alpha^{n_\alpha}},$$

pour une fonction P polynomiale sur V , des entiers n_α et un sous-ensemble κ de Δ dont les éléments n'engendrent pas V^* .

Exemple 7.2.6. — Soient V un \mathbb{R} -espace de base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Considérons

$$\Delta = \{\pm e^2, \pm e^3, \pm(e^1 - e^2), \pm(e^1 - e^3), \pm(e^2 - e^3)\},$$

où $(e^j)_j$ désigne la base duale de $(e_i)_i$. Pour $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in V$, définissons une fraction homogène de degré -3 en posant

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)x_2x_3}.$$

Cette fraction se décompose sous la forme

$$f(x) = \frac{1}{(x_2 - x_3)x_2x_3} + \frac{1}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)x_2} + \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)x_3} + \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.$$

Donc son résidu total est

$$\text{TRes}_\Delta(f)(x) = \frac{1}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)x_2} + \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)x_3}$$

puisque les première et dernière fractions de la décomposition de f ci-dessus ont des dénominateurs égaux au produit de formes linéairement dépendantes.

Prolongeons ces notions à l'espace $\widehat{S}(V^*)$ des séries formelles sur V . Soit $\widehat{R}_\Delta = \Delta^{-1}\widehat{S}(V^*)$ l'anneau des séries formelles à pôles sur l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{H}_\mathbb{C}$. On étend le résidu total en une application $\text{TRes}_\Delta : \widehat{R}_\Delta \longrightarrow S_\Delta$. Par exemple

$$(7.2.8) \quad \text{TRes}_\Delta(e^a f) = \frac{1}{(q - r)!} \text{TRes}_\Delta(a^{q-r} f)$$

lorsque la fonction f est de degré $-q$.

7.2.3. Chambres. — Plaçons-nous sous les hypothèses de la section 7.2.1. Plus précisément, fixons une matrice Φ à coefficients entiers, de taille $r \times N$ et de rang r . Soit a un vecteur réel r -dimensionnel. Supposons que a appartienne au cône engendré par les vecteurs colonnes de Φ et que le noyau de Φ soit d'intersection nulle avec \mathbb{R}_+^N .

Définissons $\Delta^+ = \{\Phi\}$ comme étant l'ensemble des éléments $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ des vecteurs colonnes de Φ avec multiplicité 1 (on élimine d'éventuelles répétitions). Soit $\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ l'ensemble formé par les vecteurs de Δ^+ et leurs opposés.

Pour tout sous-ensemble ν^+ de Δ^+ , soit $C(\nu^+)$ le cône fermé engendré par les éléments de ν^+ . La réunion des cônes $C(\nu^+)$, avec ν^+ parcourant les sous-ensembles de Δ^+ de cardinal strictement inférieur à $r = \dim(V)$, est notée $C(\Delta^+)_{\text{sing}}$; ses éléments sont dits *singuliers* pour Δ^+ . L'ensemble $C(\Delta^+)_{\text{reg}}$ des éléments Δ^+ -réguliers est par définition le complémentaire de $C(\Delta^+)_{\text{sing}}$ dans $C(\Delta^+)$. Une composante connexe de $C(\Delta^+)_{\text{reg}}$ est appelée *grande chambre* ou *chambre*, et notée \mathfrak{c} .

La clôture d'une grande chambre est l'intersection des cônes simpliciaux $C(\sigma^+)$ la contenant, lorsque σ^+ décrit la collection des sous-ensembles basiques de Δ^+ . En effet, pour une telle chambre \mathfrak{c} on a soit $\mathfrak{c} \cap C(\sigma^+) = \emptyset$ soit $\mathfrak{c} \subset C(\sigma^+)$.

Un *mur* est un hyperplan engendré par $r - 1$ vecteurs linéairement indépendants de Δ . Notons \mathcal{H}^* la réunion des murs. Une composante connexe de $C(\Delta^+) \setminus \mathcal{H}^*$ est appelée *petite chambre* et notée \mathfrak{a} . On vérifie aisément que le complémentaire dans le cône $C(\Delta^+)$ de la réunion des murs est inclus dans l'ensemble des éléments réguliers. En outre, toute petite chambre est contenue dans une grande chambre.

Soulignons que les notions évoquées ici (chambre, mur, etc.) réfèrent à la théorie des polyèdres et pas à la théorie des représentations.

Exemple 7.2.7. — La figure 7.3 représente les chambres définies par le sous-ensemble $\Delta^+ = \{e^1, e^2, e^3, e^1 - e^2, e^1 - e^3, e^2 - e^3\}$ de \mathbb{R}^3 (correspondant au système des racines de A_3 , voir section 7.3). On peut y observer des vecteurs à la fois dans une grande chambre (c'est-à-dire Δ^+ -réguliers) et sur un mur.

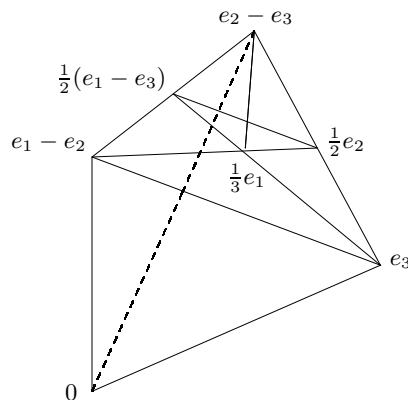


FIGURE 7.3. Grandes chambres pour le système des racines positives de A_3

Définition 7.2.8. — Pour $a \in \mathbb{R}^r$, soient

$$(7.2.9) \quad J(\Phi, a)(z) = \text{TRes}_\Delta \left(\frac{e^{\langle a, z \rangle}}{\prod_{k=1}^N \langle \phi_k, z \rangle} \right),$$

$$(7.2.10) \quad K(\Phi, a)(z) = \text{TRes}_\Delta \left(\frac{e^{\langle a, z \rangle}}{\prod_{k=1}^N 1 - e^{-\langle \phi_k, z \rangle}} \right).$$

Ces deux fonctions sont polynomiales en a , de degré $N - r$ et à valeurs dans S_Δ . Remarquons que la partie de $K(\Phi, a)(z)$ homogène de degré $N - r$ en a est $J(\Phi, a)(z)$.

Considérons la fraction simple f_σ , pour un sous-ensemble basique σ de Δ . Si σ se décompose sous la forme $\sigma = \sigma^+ \sqcup \sigma^-$ avec $\sigma^\pm \subset \Delta^\pm$, alors f_σ s'écrit sous la forme

$$f_\sigma = (-1)^{|\sigma^-|} f_{\sigma^+ \cup (-\sigma^-)}.$$

Par conséquent on peut se restreindre à considérer les fonctions f_σ pour des sous-ensembles σ basiques pour Δ^+ .

Associons à chaque grande chambre \mathfrak{c} de $C(\Delta^+)$ une forme linéaire $f \mapsto \langle\langle \mathfrak{c}, f \rangle\rangle$ sur l'espace S_Δ des fractions simples, appelée *résidu de Jeffrey-Kirwan*, en posant :

$$\langle\langle \mathfrak{c}, f_\sigma \rangle\rangle := \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}(\sigma)} & \text{si } \mathfrak{c} \subset C(\sigma), \\ 0 & \text{si } \mathfrak{c} \cap C(\sigma) = \emptyset. \end{cases}$$

Ici $\text{vol}(\sigma)$ désigne le volume du parallélépipède rectangle $\sum_\alpha [0, 1] \alpha$ engendré par les vecteurs $\alpha \in \sigma$. Le calcul de cette forme est délicat à cause du nombre élevé de grandes chambres. Par exemple, le système des racines positives de A_r possède 2, 7, 48, 820, 44288 grandes chambres pour respectivement $r = 2, 3, 4, 5, 6$.

Remarque 7.2.9. — Les fonctions $a \mapsto \langle\langle \mathfrak{c}, J(\Phi, a) \rangle\rangle$ et $a \mapsto \langle\langle \mathfrak{c}, K(\Phi, a) \rangle\rangle$ sont polynomiales en a .

Il nous manque encore une définition avant de pouvoir introduire la formule calculant le volume et le nombre de points à coordonnées entières dans un polytope. La matrice $\Phi \in M_{r, N}(\mathbb{Z})$ est dite *unimodulaire* si ses mineurs $r \times r$ sont égaux à 0, 1 ou -1 . Tous les ingrédients sont maintenant réunis pour le

Théorème 7.2.10 (Baldoni-Vergne [BSV01]). — Soit \mathfrak{c} une chambre de $C(\Delta^+)$.

(1) Pour tout vecteur a dans l'adhérence de la chambre \mathfrak{c} , le volume du polytope $P(\Phi, a)$ a pour expression la formule polynomiale en a suivante :

$$(7.2.11) \quad v(\Phi, a) = \langle\langle \mathfrak{c}, J(\Phi, a) \rangle\rangle.$$

(2) Supposons la matrice Φ unimodulaire. Alors pour tout vecteur a du treillis $\mathbb{Z}\Phi$ contenu dans l'adhérence de la chambre $\bar{\mathfrak{c}}$, le nombre de points à coordonnées entières du polytope $P(\Phi, a)$ est donné par la formule polynomiale en a suivante :

$$(7.2.12) \quad k(\Phi, a) = \langle\langle \mathfrak{c}, K(\Phi, a) \rangle\rangle.$$

Une formule plus générale pour une matrice Φ engendrant le treillis $\mathbb{Z}\Phi$ dans \mathbb{R}^r est démontrée dans [SV02].

7.3. Cas particulier de A_r

Baldoni-Deloera-Vergne ont obtenu une expression extrêmement simple pour le calcul du résidu total, lorsque les colonnes de la matrice Φ sont les racines de A_r . Décrivons la formule (7.2.12) dans ce cas.

Considérons un espace vectoriel réel V de dimension $r + 1$. Désignons par $(e_i)_i$ la base canonique de V . Le système des racines positives de A_r est égal à

$$A_r^+ = \{(e_i - e_j); 1 \leq i < j \leq r + 1\}.$$

Soit E_r l'espace engendré par les vecteurs $(e_i - e_j)$. Alors E_r est le sous-espace de V de dimension r des vecteurs dont la somme des coordonnées est nulle. Il est isomorphe à \mathbb{R}^r via le morphisme $\mathbb{R}^r \rightarrow E_r$ défini par

$$(7.3.1) \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_r) \mapsto \mathbf{a} = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r - (a_1 + \dots + a_r) e_{r+1}.$$

Soit $\Phi = \Phi(A_r)$ la matrice de rang r dont les $r(r+1)/2$ colonnes sont les racines positives de A_r . Dans ce cas, la fonction de partition vectorielle est appelée *fonction de Kostant* et est notée $k(\Phi(A_r), \mathbf{a}) = k(A_r^+, \mathbf{a})$. On dit que $k(A_r^+, \mathbf{a})$ est le *nombre de Kostant* de l'élément \mathbf{a} du réseau des racines.

Sous l'identification (7.3.1) de E_r et \mathbb{R}^r , un élément de R_{A_r} est une fraction rationnelle $f(z_1, z_2, \dots, z_r)$ sur \mathbb{C}^r dont les pôles sont sur les hyperplans $z_i = z_j$ ($1 \leq i < j \leq r$) ou $z_i = 0$ ($1 \leq i \leq r$). Posons

$$f_1(z_1, z_2, \dots, z_r) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3) \cdots (z_{r-1} - z_r) z_r}.$$

Désignons par Σ_r le groupe des permutations de r éléments (ce n'est pas le groupe de Weyl de A_r). Alors les fonctions

$$\begin{aligned} f_w(z_1, \dots, z_r) &= w \cdot f_1(z_1, \dots, z_r) \\ &= \frac{1}{(z_{w(1)} - z_{w(2)})(z_{w(2)} - z_{w(3)}) \cdots (z_{w(r-1)} - z_{w(r)}) z_{w(r)}} \end{aligned}$$

forment une base de S_{A_r} .

Le cône $C(A_r^+)$ engendré par les racines positives est déterminé par les inéquations $a_1 \geq 0$, $a_1 + a_2 \geq 0$, \dots , $a_1 + a_2 + \dots + a_r \geq 0$. Un mur est le noyau d'une forme linéaire du type $\sum_{i \in J} a_i$, pour un sous-ensemble J de $\{1, 2, \dots, r\}$. L'appartenance au cône $C(A_r^+)$ ou à un mur est aisément et rapidement testée.

Le calcul du résidu total, nécessaire pour obtenir le nombre de points à coordonnées entières dans un polytope convexe, est une tâche ardue. Cependant l'utilisation de la base formée des f_σ permet de ré-écrire la formule (7.2.12) sous une forme beaucoup plus facile à évaluer.

Pour un polynôme de Laurent $f = \sum_i f_i z^i \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, la notation $\text{Res}_{z=0}(f)$ désigne le coefficient f_{-1} . Définissons pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_r$ une forme linéaire sur R_{A_r} , appelée *résidu itéré*, en posant

$$\begin{aligned} \text{IRes}_{z=0}^\sigma f &= \text{Res}_{z_{\sigma(1)}=0} \text{Res}_{z_{\sigma(2)}=0} \cdots \text{Res}_{z_{\sigma(r)}=0} f(z_1, z_2, \dots, z_r) \\ &= \text{Res}_{z_1=0} \text{Res}_{z_2=0} \cdots \text{Res}_{z_r=0} f(z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(r)}). \end{aligned}$$

Cette forme $f \mapsto \text{IRes}_{z=0}^\sigma f$ sur R_{A_r} induit une forme sur S_{A_r} , puisqu'elle s'annule sur l'espace des fonctions dérivées ∂R_Δ . Les $r!$ formes linéaires $\text{IRes}_{z=0}^\sigma$ ($\sigma \in \Sigma_r$) sur S_{A_r} forment une base duale de la base $(f_w)_{w \in \Sigma_r}$ de S_{A_r} .

Soit $n(w)$ le nombre d'inversions consécutives de la permutation w , c'est-à-dire le nombre d'indices i tels que $w(i) > w(i+1)$. Notons $C_w^+ \subset C(A_r^+)$ le cône simplicial engendré par l'ensemble formé des r vecteurs

$$\begin{aligned} &\{ \epsilon(1)(e_{w(1)} - e_{w(2)}), \epsilon(2)(e_{w(2)} - e_{w(3)}), \dots, \epsilon(r-1)(e_{w(r-1)} - e_{w(r)}) \} \\ \cup &\{ e_{w(r)} - e_{r+1} \}, \end{aligned}$$

où $\epsilon(i)$ est égal à 1 ou -1 de sorte à ce que le vecteur $\epsilon(i)(e_{w(i)} - e_{w(i+1)})$ soit dans le cône $C(A_r^+)$.

Alors la formule (7.2.12) devient :

Théorème 7.3.1 ([BSV01]). — *Soit \mathfrak{c} une chambre de $C(\Phi)$. Alors le résidu de Jeffrey-Kirwan a pour expression*

$$(7.3.2) \quad \langle \langle \mathfrak{c}, f \rangle \rangle = \sum_{w \in \Sigma_r, \mathfrak{c} \subset C_w^+} (-1)^{n(w)} \text{IRes}_{z=0}^w f$$

pour toute fonction $f \in S_{A_r}$.

On peut même obtenir une formule encore plus explicite. Introduisons pour cela de nouvelles notations.

Pour un vecteur régulier \mathbf{a} , notons \mathfrak{c} l'unique chambre de $C(A_r^+)$ le contenant. Alors l'ensemble $\text{Sp}(\mathbf{a})$ des permutations $w \in \Sigma_r$ vérifiant $\mathfrak{c} \subset C_w^+$ peut se calculer sans connaître les chambres. En effet, on vérifie aisément qu'un élément w de $\text{Sp}(\mathbf{a})$ est caractérisé par les conditions

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{si } a_{w(1)} \geq 0 & \text{alors } w(1) < w(2) & \text{sinon } w(1) > w(2), \\ \text{si } a_{w(1)} + a_{w(2)} \geq 0 & \text{alors } w(2) < w(3) & \text{sinon } w(2) > w(3), \\ \vdots & & \\ \text{si } a_{w(1)} + \cdots + a_{w(r-1)} \geq 0 & \text{alors } w(r-1) < w(r) & \text{sinon } w(r-1) > w(r). \end{array} \right.$$

Un élément de $\text{Sp}(\mathbf{a})$ est appelé une *permutation spéciale*. Remarquons que si a_i est positif pour i variant de 1 à r , alors $\text{Sp}(\mathbf{a})$ est réduit à la permutation identité. L'appartenance à $\text{Sp}(\mathbf{a})$ est aisément et rapidement testée. La construction de toutes les permutations spéciales est plus délicate, nous y reviendrons dans la sous-section 8.2.3.

Le calcul de $k(\Phi, \mathbf{a})$ nécessite la régularité du vecteur $\mathbf{a} \in C(A_r^+) \cap \mathbb{Z}^{r+1}$. Afin de contourner ce problème, définissons le *vecteur déformé*

$$(7.3.3) \quad \text{def}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^r e_i - r e_{r+1} \right)$$

avec $\varepsilon = 1/2r$. Cette petite déformation de \mathbf{a} est non seulement régulière, mais reste aussi dans la même chambre que \mathbf{a} .

Le théorème 7.2.10 devient alors :

Théorème 7.3.2 (Baldoni-DeLoera-Vergne [BSDLV03]). — *Le nombre de Kostant d'un vecteur*

$$\mathbf{a} = a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r - \left(\sum_{i=1}^r a_i \right) e_{r+1},$$

entier et dans le cône engendré par les racines positives de A_r , a pour expression :

$$(7.3.4) \quad k(A_r^+, \mathbf{a}) = \sum_{w \in Sp(\mathbf{a}')} (-1)^{n(w)} \text{IRes}_{z=0}^w \left(\frac{\prod_{i=1}^r (1 + z_i)^{a_i + r - i}}{(\prod_{i=1}^r z_i) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)} \right)$$

où \mathbf{a}' est égal à \mathbf{a} lorsque \mathbf{a} est régulier, et à $\text{def}(\mathbf{a})$ sinon.

Remarque 7.3.3. — Le résultat reste inchangé si l'on prend $\mathbf{a}' = \text{def}(\mathbf{a})$ même lorsque \mathbf{a} est régulier. Afin de simplifier l'implémentation de la formule, nous effectuerons toujours ce choix.

Remarque 7.3.4. — La fonction de Kostant pour A_r est appliquée à un vecteur \mathbf{a} de dimension $r + 1$ et dont la somme des coordonnées est nulle. La déformation $\text{def}(\mathbf{a})$ de \mathbf{a} jouit des mêmes caractéristiques, en plus d'être régulière et dans la même chambre. Cependant, la construction des permutations spéciales ne nécessite l'examen que des r premières composantes du vecteur \mathbf{a}' , c'est-à-dire des seules composantes « représentatives » du vecteur \mathbf{a}' . C'est pourquoi nous avons pris le parti, lors de la construction du vecteur déformé $\text{def}(\mathbf{a})$ ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{r+1}$), de retourner le vecteur r -dimensionnel $(a_1 + \varepsilon, \dots, a_r + \varepsilon)$. Ainsi, la procédure construisant les permutations spéciales agit sur l'intégralité du vecteur qu'on lui fournit, et pas sur toutes ses coordonnées moins la dernière.

CHAPITRE 8

LE PROGRAMME MULTIPLICITES.MWS

Ce chapitre décrit mon programme effectuant le calcul des nombres de Kostka, des coefficients de Littlewood-Richardson et des polynômes associés. L'utilisation pratique des procédures est l'objet de la première section. La seconde section comporte les détails techniques de l'implémentation. Enfin, les tests du programme font l'objet de la troisième section de ce chapitre.

8.1. Utilisation du programme

Le programme `multiplicites.mws` est, tout comme `reduction.mws` et `caractere.mws`, simple d'emploi.

Nous travaillons exclusivement avec les poids de $GL(r+1, \mathbb{C})$, considérés dans la base canonique de l'espace \mathbb{R}^{r+1} . Rappelons qu'un tel poids est un vecteur $\lambda = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i e_i$ dont les composantes vérifient $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{Z}$ pour tout i . C'est un poids dominant lorsque ses composantes sont décroissantes, c'est-à-dire $\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N}$. Choisissons $\{e_i - e_j; 1 \leq i < j \leq r+1\}$ comme système des racines positives. Un élément du réseau des racines est alors un vecteur $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{r+1})$ tel que $\beta_i \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{i=1}^{r+1} \beta_i = 0$.

Le calcul du nombre de Kostka c_λ^μ suppose que λ est un poids dominant de $GL(r+1, \mathbb{C})$, que μ est un poids de $GL(r+1, \mathbb{C})$ et que la somme des composantes de λ est égale à la somme des composantes de μ . Le calcul du coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda^\nu}^\mu$ nécessite quant à lui que λ , μ et ν soient des poids dominants de $GL(r+1, \mathbb{C})$ tels que la somme des coordonnées de λ et de μ soit égale à la somme des coordonnées de ν .

L'utilisateur préférant la représentation dans la base des poids fondamentaux de A_r peut convertir les données dans les deux sens à l'aide des procédures

```
fundamental(lambda) ;  
fundamental_inverse(omega) ;
```

Le stockage d'un poids de $GL(r+1, \mathbb{C})$ se fait sous la forme d'une liste à $r+1$ éléments. Comme précédemment, nous avons évité de faire appel au type `vector` de MAPLE par souci de rapidité. Par exemple

```

beta := [5,3,-2,1,-10,3] ;
lambda1 := [4,3,2,1,0] ;
mu1 := [2,0,1,10,-3] ;
lambda2 := [3,2,1,0] ;
mu2 := [2,1,0,-1] ;
nu2 := [6,4,-1,-1] ;

```

sont des entrées valides. Le nombre de Kostant de l'élément β du réseau des racines est alors

```

k := kostant(beta) ;

```

D'autre part les appels de procédures

```

m1 := multiplicity(lambda1,mu1) ;
m2 := tensor_product(lambda2,mu2,nu2) ;

```

renvoient respectivement la multiplicité du poids μ_1 dans la représentation de plus haut poids λ_1 , et la multiplicité de la représentation de plus haut poids ν_2 dans le produit tensoriel des représentations de plus hauts poids λ_2 et μ_2 . Le calcul des polynômes $t \mapsto c_{t\lambda_1}^{t\mu_1}$ et $t \mapsto c_{t\lambda_2}^{t\nu_2} c_{t\mu_2}^{t\mu_2}$ associés se fait par les lignes de commande

```

p1 := polynomial_multiplicity(lambda1,mu1) ;
p2 := polynomial_tensor_product(lambda2,mu2,nu2) ;

```

8.2. En coulisse

Rappelons que les trois formules principales à implémenter sont le calcul de la fonction de Kostant par la formule de Baldoni-DeLoera-Vergne (7.3.4), le calcul des nombres de Kostka par la formule de Kostant (6.2.2), le calcul des coefficients de Littlewood-Richardson par la formule de Steinberg (6.2.3).

Lors de l'examen de ces formules, trois grands problèmes sont à distinguer :

- vérification si les données fournies par l'utilisateur sont convenables ;
- gestion des permutations (encodage et détermination des ensembles intervenant dans les trois formules) ;
- calcul des résidus itérés.

Examinons plus en détail chacun de ces points.

8.2.1. Validité des données. — La procédure `all_checks_two(lambda,mu)` se charge de vérifier les conditions imposées aux vecteurs λ et μ de dimension $r + 1$ avant le calcul du nombre de Kostka c_λ^μ , à savoir

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N}, \quad \mu_i - \mu_{i+1} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_i \lambda_i = \sum_i \mu_i.$$

La procédure `all_checks_three(lambda,mu,nu)` se charge de vérifier les conditions imposées aux vecteurs λ , μ et ν de dimension $r + 1$ avant le calcul du coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda\mu}^\nu$, à savoir

$$\lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N}, \quad \mu_i - \mu_{i+1} \in \mathbb{N}, \quad \nu_i - \nu_{i+1} \in \mathbb{N}, \quad \sum_i \lambda_i + \mu_i = \sum_i \nu_i.$$

Ces procédures de contrôle se programmant sans détour, nous ne les détaillerons pas davantage.

8.2.2. Permutations intervenant dans les formules de Kostant et de Steinberg.

— Dans le programme `multiplicites.mws`, une permutation w sur n éléments est encodée par la liste de ses valeurs $w(1), \dots, w(n)$. La ligne de commande

```
[seq(v[w[i]], i = 1..nops(v))];
```

effectue alors à peu de frais l'action de la permutation w sur le vecteur v (représenté par une liste). Remarquons que nous n'avons pas utilisé dans ce programme la fonction `combinat[permuter]` incorporée à MAPLE, car elle est peu pratique et ne permet pas de calculs poussés.

Appelons *permutations valides* pour λ et μ les permutations apparaissant dans la formule de Kostant (6.2.2), et désignons par $\text{Val}(\lambda, \mu)$ leur ensemble. En d'autres termes, une permutation w est valide pour λ et μ si et seulement si l'élément du réseau des racines $w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho)$ est dans le cône engendré par les racines positives de A_r .

La procédure `valid_permutations(u,v)` associe à deux vecteurs u, v de dimension $r + 1$ l'ensemble des permutations w telles que

$$\begin{aligned} u_{w(1)} &\geq v_1, \\ u_{w(1)} + u_{w(2)} &\geq v_1 + v_2, \\ &\vdots \\ u_{w(1)} + \dots + u_{w(r+1)} &\geq v_1 + \dots + v_{r+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire telles que $w(u) - v \in C(A_r^+)$. Cette procédure est ensuite appliquée aux vecteurs $\lambda + \rho$ et $\mu + \rho$, afin de déterminer les permutations sur lesquelles la somme dans la formule de Kostant s'effectue. Voici l'algorithme détaillé de la procédure, construisant composante par composante chaque permutation valide.

Pour toute liste d'indices x , notons u_x la somme $\sum_{i \in x} u_i$. Le premier pas de l'algorithme consiste à déterminer les indices i_1, \dots, i_p parmi $\{1, \dots, r+1\}$ tels que u_{i_j} soit supérieur à v_1 . Ces indices correspondent aux valeurs possibles pour $w(1)$. On les stocke dans la liste $X = [[i_1], \dots, [i_p]]$.

L'étape suivante est itérée r fois. Elle consiste à déterminer pour chaque liste $x \in X$ les indices i_x tels que $u_x + u_{i_x} \geq v_1 + \dots + v_{|x|+1}$, puis à construire la liste X_{new} des concaténations $x|[i_x]$. Ainsi à la ℓ -ième itération nous sommes en possession d'une liste de $(\ell+1)$ -uplets, chacun correspondant au début $[w(1), \dots, w(\ell+1)]$ d'une permutation valide pour les vecteurs u et v . À la fin de ces r itérations, l'ensemble des permutations valides est construit.

Voici une représentation plus formelle de l'algorithme.

```

construire la liste  $X$  des listes  $[i]$  à un seul élément, où  $i$  est un indice tel que  $u_i \geq v_1$ 
répéter  $r$  fois
  soit  $X_{\text{new}} = []$ 
  pour tout  $x$  dans  $X$ 
    pour tout indice  $i$  dans  $\{1, \dots, r+1\}$  mais pas dans  $x$ 
      si  $u_x + u_i \geq v_1 + \dots + v_{|x|+1}$ 
        alors ajouter à  $X_{\text{new}}$  la concaténation de  $x$  et  $i$ 
      fin de l'examen des  $i$ 
    fin de la boucle sur les  $x$ 
   $X \leftarrow X_{\text{new}}$ 
fin de répéter
retourner la liste  $X$ 

```

La figure 8.1 illustre la construction composante par composante des permutations valides.

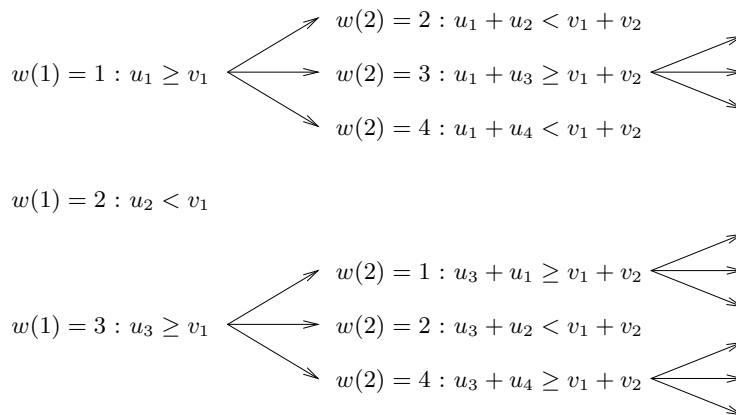


FIGURE 8.1. Construction itérative des permutations valides

Remarque 8.2.1. — Grâce aux trois astuces suivantes, l'obtention des permutations valides ne représente qu'une partie négligeable du temps de calcul total du programme.

- (1) Calculer une fois pour toutes le vecteurs $v' = (v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + \dots + v_{r+1})$.
- (2) À chaque itération, construire en même temps que X_{new} la suite SX_{new} des sommes partielles. Plus précisément, si le k -ième élément de X_{new} est $[i_1, \dots, i_\ell]$ alors le k -ième élément de SX_{new} est $u_{i_1} + \dots + u_{i_\ell}$.
- (3) Utiliser pour X_{new} et SX_{new} des tables plutôt que des listes.

De même, appelons *couples de permutations valides* pour λ, μ et ν les couples de permutations apparaissant dans la formule de Steinberg (6.2.3). Leur ensemble $\text{Val}(\lambda, \mu, \nu)$ est construit par la procédure `valid_couples_permutations(u1, u2, v)`, similaire à celle que nous venons de décrire, appliquée aux vecteurs $\lambda + \rho, \mu + \rho, \nu + 2\rho$.

8.2.3. Permutations spéciales. — La procédure `special_permutations(b)` se charge de déterminer les permutations apparaissant dans la formule (7.3.4), pour un vecteur b de dimension r . Cette procédure est assez similaire à celles de la sous-section précédente. En fait, la méthode générale est la même : construire les permutations de façon itérative, afin d'avoir à l'étape ℓ une liste X de $(\ell + 1)$ -uplets, chacun correspondant au début $[w(1), \dots, w(\ell + 1)]$ d'une permutation spéciale. Cependant, le processus de récupération des indices d'une étape sur l'autre mérite quelques précisions. Pour une liste d'indices $x = [i_1, \dots, i_\ell]$, notons x_{fin} le dernier indice i_ℓ .

La première étape initialise X à la liste des r listes $[i]$ à un élément. La seconde étape est répétée $r - 1$ fois. Elle consiste à examiner, pour tout $x \in X$, la somme $\sum_{i \in x} b_i$. Si cette somme est positive, alors on récupère les indices j_x non dans x tels que $j_x > x_{\text{fin}}$. Si cette somme est strictement négative, alors on récupère les indices j_x non dans x tels que $j_x < x_{\text{fin}}$. Ensuite, on construit la liste X_{new} des concaténations $x[j_x]$.

L'algorithme construisant l'ensemble des permutations spéciales est alors le suivant :

initialiser X à la liste des $[i]$, où $i = 1, \dots, r$
répéter r fois

```

soit  $X_{\text{new}} = []$ 
pour tout  $x$  dans  $X$ 
  pour  $j$  variant de 1 à  $x_{\text{fin}} - 1$ 
    si  $b_x + b_{x_{\text{fin}}} < 0$ 
      et si  $j$  n'est pas dans  $x$ 
        alors ajouter à  $X_{\text{new}}$  la concaténation de  $x$  et  $j$ 
  fin de l'examen des  $j$  inférieurs à  $x_{\text{fin}} - 1$ 
  pour  $j$  variant de  $x_{\text{fin}} + 1$  à  $r$ 
    si  $b_x + b_{x_{\text{fin}}} \geq 0$ 
      et si  $j$  n'est pas dans  $x$ 
        alors ajouter à  $X_{\text{new}}$  la concaténation de  $x$  et  $j$ 
  fin de l'examen des  $j$  supérieurs à  $x_{\text{fin}} + 1$ 
fin de la boucle sur les  $x$ 

```

```

    X ← Xnew
fin répéter
retourner la liste X

```

Remarque 8.2.2. — Comme pour les procédures déterminant les permutations intervenant dans les formules de Kostant et de Steinberg, la construction des sommes partielles SX_{new} en même temps que X_{new} , et l'utilisation de tables plutôt que de listes, permettent de rendre le coût de ce calcul négligeable.

Remarque 8.2.3. — Nous n'avons pu obtenir de borne satisfaisante au nombre de permutations spéciales. Dans tous les exemples testés, ce nombre est très inférieur au nombre total de permutations (à savoir $r!$). Ceci explique la compétitivité de l'algorithme de calcul de la fonction de Kostant, malgré la somme sur un sous-ensemble de Σ_r .

8.2.4. Calcul des résidus itérés. — Le calcul des résidus itérés d'un vecteur $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{r+1}$ dont la somme des coordonnées est nulle et pour une permutation $w \in \Sigma_r$ est le coeur du programme. La procédure `RRK(w, a)` se charge de cette tâche délicate. Elle nécessite au total trois sous-procédures.

La première d'entre elles, intitulée `coexp(b, i)`, est une ré-écriture performante du coefficient du binôme $\binom{b+i-1}{i}$ pour un entier relatif b et un entier i . La seconde, intitulée `invi(x, b, u)`, calcule le polynôme

$$\sum_{i=0}^{u-1} \binom{b+i-1}{i} x^i.$$

Appelons f_a la fonction apparaissant dans le résidu itéré de la formule (7.3.4). La troisième sous-procédure, nommée `trunc_next_functions(L, u, a)`, calcule le développement de Taylor de la fonction f_a à l'ordre u selon la liste de variables L . En d'autres termes `trunc_next_functions(L, u, a)` renvoie la fonction

$$(8.2.1) \quad \prod_{i=1}^{|L|} \left(\sum_{j=0}^{u-1} \left(\frac{x_k}{x_{L_i}} \right)^j \right) \times \frac{S_L}{\prod_{j=1}^{|L|} x_j} \times \sum_{i=0}^{u-1} \binom{-a_k - r + k + i}{i} (-x_k)^i$$

où k est le dernier coefficient de la liste L , et S_L est le signe $(-1)^{|\{j; L_j > k\}|}$.

La fonction f_a est un produit de fonctions en plusieurs variables. L'astuce du calcul du résidu itéré consiste à prendre les résidus en introduisant progressivement la partie de f_a contenant la variable désirée.

Remarquons que pour $u = 1$ le résultat de la troncation est $S_L / \prod_{i=1}^{|L|} x_i$. Ceci permet de gagner un cran lors du calcul du résidu itéré. Par conséquent, l'algorithme calculant le résidu itéré pour une permutation $w \in \Sigma_r$ et un vecteur a de dimension r est le suivant :

```

initialiser le résultat  $R$  à  $S_L / \prod_{i=1}^r x_i$ 
soit  $w'$  la liste des  $r - 1$  premiers coefficient de  $w$ 
pour  $i$  variant de 2 à  $r$ 
    initialiser  $T$  au produit de  $R$  et de trunc_next_functions(w', 1+i*(i-1)/2, a)
    remplacer  $R$  par le coefficient de  $T$  de degré  $-1$  en la variable  $x_{w(r-i+1)}$ 
    éliminer le dernier coefficient de  $w'$ 
fin de la boucle sur  $i$ 
retourner le résultat  $R$ 

```

Remarque 8.2.4. — Un examen attentif de la procédure `RRK(w, a)` permet de se rendre compte qu'elle peut traiter sans problème un vecteur a formel.

Le calcul de la fonction de Kostant grâce à la procédure `RRK(w, a)` repose sur l'appel de la procédure `trunc_next_functions`, sur la multiplication de polynômes et l'extraction d'un coefficient. Ces deux dernières parties nécessitent environ deux tiers du temps total de calcul. La rapidité du programme a été améliorée grâce à la modification empirique consistant à construire R à chaque étape par la ligne de commandes :

```
R := normal(expand(coeff(T, x[w[r-i+1]], -1)));
```

La procédure `RRK(w, a)` consomme à elle seule beaucoup de temps. Même si $w = 1$, le calcul `RRK(1, a)` reste infaisable lorsque le vecteur a est dans une algèbre trop grande. De plus, on appelle $|\text{Sp}(a)|$ fois cette procédure, et bien que ce nombre soit souvent très inférieur au nombre de permutations il reste néanmoins conséquent.

8.3. Test du programme

Soit θ le vecteur r -dimensionnel dont la décomposition dans la base des poids fondamentaux est

$$\left(1, \dots, 1, 1 + \frac{r(r+1)}{2}\right).$$

Son expression dans la base canonique de \mathbb{R}^{r+1} est

$$\left(r, r-1, \dots, 1, -\frac{r(r+1)}{2}\right).$$

Nous avons utilisé ce vecteur pour vérifier le fait que la multiplicité du poids nul dans la représentation de A_r de plus haut poids $N\theta$ est donnée par la dimension de la représentation de A_{r-1} de plus haut poids $N\rho$, à savoir $(N+1)^{r(r-1)/2}$. Le calcul a également été effectué avec le paramètre formel N , donnant comme attendu le résultat $(N+1)^{r(r-1)/2}$.

Les tests furent effectués sur le serveur `grobner3` de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586). Ce serveur bi-processeur Pentium III 1,13GHz est équipé de 2 gigaoctets de mémoire RAM et tourne sous Linux RedHat 9.0. La notation « $-$ » dans le

N	$ \text{Val}(10\theta, N\theta) $	Valeur de $c_{10\theta}^{N\theta}$	Temps de calcul
0	720	4177248169415651	10.8 s
1	720	4177248169415651	11.0 s
2	600	4177092544868045	11.1 s
3	576	4153282006799937	11.2 s
4	456	3899635283050694	11.2 s
5	402	2931789395526035	10.8 s
6	274	1297765345789869	9.8 s
7	132	210740227073233	6.3 s
8	72	5616154382787	3.3 s
9	10	3549690125	0.5 s
10	1	1	< 0.1 s

FIGURE 8.2. Le nombre de permutations valides $\text{Val}(10\theta, N\theta)$ décroît lorsque $N\theta$ se rapproche de 10θ (exemple dans A_6)

tableau 8.6 signifie que nous n'avons pas effectué le calcul, et non pas que le calcul a échoué.

Pour le calcul du nombre de Kostka, lorsque le poids μ est proche de λ , l'ensemble $\text{Val}(\lambda, \mu)$ des permutations valides (défini dans la sous-section 8.2.2) intervenant dans la formule de Kostant (6.2.2) est petit. Cet ensemble est de plus en plus grand, à mesure que μ se rapproche du poids nul. Par exemple, dans le tableau 8.2 figure le nombre de permutations valides pour les poids $\lambda = 10\theta$ et $\mu = N\theta$ de A_6 , pour N variant de 0 à 10. Remarquons que dans ce cas le groupe des permutations total est Σ_7 et qu'il possède 5040 éléments. Il en est de même pour le calcul du coefficient de Littlewood-Richardson.

On constate dans les tableaux 8.3 à 8.5 que le nombre des permutations valides et des couples de permutations valides est toujours très inférieur au cardinal du groupe ambiant. Par ailleurs, comme annoncé dans l'introduction, notre programme est très efficace pour les poids dont les coordonnées sont énormes.

Rappelons (voir [Bar97] et [BP99]) que le calcul du nombre de points entiers dans un polytope convexe rationnel est un problème polynomial en la taille des données lorsque la dimension est fixée. Les tableaux 8.3 à 8.5 illustrent ce fait. En outre, ce problème est NP-difficile lorsque la dimension n'est pas fixée. Voir à ce sujet le tableau 8.6.

Pour les poids $\lambda = (600, 500, 300, 100, -500, -1000)$ et $\mu = (10, 3, -4, -1, -3, -5)$ de l'algèbre de Lie de type A_5 , le polynôme $t \mapsto c_{t\lambda}^{\mu}$ est

Coefficient de dilatation des poids	Calcul de $c_{N\theta}^{[9N/10]\theta}$ dans A_7 $ \text{Val}(\lambda, \mu) = 120$ $ \Sigma_8 = 40320$	Calcul de $c_{N\theta}^0$ dans A_7 $ \text{Val}(\lambda, \mu) = 5040$ $ \Sigma_8 = 40320$
$N = 10^1$	12.5 s	204.9 s
$N = 10^2$	16.0 s	221.0 s
$N = 10^3$	17.5 s	235.6 s
$N = 10^4$	18.7 s	251.5 s
$N = 10^5$	17.6 s	259.1 s
$N = 10^6$	19.4 s	261.5 s
$N = 10^7$	20.3 s	283.8 s
$N = 10^8$	21.3 s	297.0 s
$N = 10^9$	22.5 s	297.2 s

FIGURE 8.3. Temps de calcul du nombre de Kostka, lorsque la taille des données augmente

Coefficient de dilatation des poids	Calcul de $c_{N\theta, N\theta}^{2[9N/10]\theta}$ dans A_5 $ \text{Val}(N\theta, N\theta, 2[9N/10]\theta) = 43$ $ \Sigma_6 \times \Sigma_6 = 518400$	Calcul de $c_{N\theta, N\theta}^0$ dans A_5 $ \text{Val}(N\theta, N\theta, 0) = 84096$ $ \Sigma_6 \times \Sigma_6 = 518400$
$N = 10^1$	0.2 s	4450 s
$N = 10^2$	0.2 s	4723 s
$N = 10^3$	0.3 s	5311 s
$N = 10^4$	0.3 s	5438 s
$N = 10^5$	0.3 s	6237 s
$N = 10^6$	0.3 s	8082 s
$N = 10^7$	0.3 s	8466 s
$N = 10^8$	0.3 s	8951 s
$N = 10^9$	0.3 s	9500 s

FIGURE 8.4. Temps de calcul du coefficient de Littlewood-Richardson, lorsque la taille des données augmente

$$\frac{200t + 1}{5040} (3568830560210943528344300 t^9 + 148680208857518777931043 t^8 + 2688728523554665818694 t^7 + 27961579117777957190 t^6 + 186422704587868756 t^5 + 838055612915927 t^4 + 2585022206786 t^3 + 5404819120 t^2 + 7225464 t + 5040)$$

et se calcule en 7,5 secondes. Il y a 114 permutations valides sur un total de $6! = 720$ permutations.

Coefficient de dilatation des poids	Calcul de $c_{N\theta, N\theta}^{2\lfloor 9N/10\rfloor\theta}$ dans A_6 $ \text{Val}(\lambda, \mu, \nu) = 1070$ $ \Sigma_7 \times \Sigma_7 = 25401600$	Calcul de $c_{N\theta, N\theta}^0$ dans A_4 $ \text{Val}(\lambda, \mu, \nu) = 2784$ $ \Sigma_5 = 14400$
$N = 10^1$	40.5 s	13.5 s
$N = 10^2$	47.0 s	13.7 s
$N = 10^3$	50.3 s	13.8 s
$N = 10^4$	52.6 s	14.0 s
$N = 10^5$	53.8 s	14.1 s
$N = 10^6$	57.0 s	14.4 s
$N = 10^7$	58.4 s	15.1 s
$N = 10^8$	59.9 s	15.2 s
$N = 10^9$	62.3 s	15.5 s

FIGURE 8.5. Temps de calcul du coefficient de Littlewood-Richardson, lorsque la taille des données augmente

Algèbre	Temps	Multiplicité c_θ^0	Temps	Polynôme $N \mapsto c_{N\theta}^0$
A_2	< 0.1 s	$2 = 2^1$	< 0.1 s	$(N + 1)^1$
A_3	< 0.1 s	$8 = 2^3$	< 0.1 s	$(N + 1)^3$
A_4	< 0.1 s	$64 = 2^6$	< 0.1 s	$(N + 1)^6$
A_5	0.4 s	$1024 = 2^{10}$	1.4 s	$(N + 1)^{10}$
A_6	7.6 s	$32768 = 2^{15}$	36.2 s	$(N + 1)^{15}$
A_7	169.3 s	$2097152 = 2^{21}$	2091 s	$(N + 1)^{21}$
A_8	9401 s	$268435456 = 2^{28}$	–	–

FIGURE 8.6. Multiplicité du poids nul dans $V(N\theta)$ lorsque le rang augmente

La traduction du programme `multiplicites.mws` dans le langage de programmation OBJECTIVE CAML est en passe d'être terminée. Ce langage est beaucoup plus proche de la machine que MAPLE, ce qui nous permet raisonnablement d'espérer une amélioration significative de la rapidité des calculs.

INDEX DES NOTATIONS

(M, G) , 3 (Γ, α) , 4, 13 $(\Gamma, \alpha, \mathfrak{g})$, 13 (Γ, α_ξ) , 16 (Γ^c, α^c) , 27 1_W , 8 A , 14, 43 A_μ , 60 A_r , 70 A_r^+ , 70 B , 8 $B(\Delta)$, 66 $B(\ell_1\Lambda_1 + \ell_2\Lambda_2)$, 64 $C(A_r^+)$, 70 $C(\Delta^+)_{\text{reg}}$, 68 $C(\Delta^+)_{\text{sing}}$, 68 $C(\Phi)$, 63 $C(\nu^+)$, 68 C_w^+ , 71 C_{4n} , 15 D , 8 E'_j , 64 $E^{p,i}$, 3 E_i , 64 E_p , 22 E_r , 70 F , 43 G , 3, 59 $GL(3, \mathbb{C})$, 8 $GL(V)$, 59 G_e , 10 $G_{k,n}(\mathbb{C})$, 6 H , 11, 29, 44, 59 $H(\Gamma, \alpha)$, 10, 21 $H^{2k}(\Gamma, \alpha)$, 10, 21 $H_G^*(M)$, 11 $H_{p,i}$, 3 I , 29	I_Γ , 4 I_j , 64 I_s , 29 $J(\Phi, a)$, 69 K , 8 $K(\Gamma, \alpha)$, 10, 22 $K(\Phi, a)$, 69 $K_G^*(M)$, 11 K_c , 30 K_w , 9 L , 78 M , 3, 4, 8 M^D , 8 M^G , 3 M_c , 25 M_e , 49 $M_{p,r}$, 49 N , 63 $N_G(H)$, 59 $N_K(D)$, 8 $N_p E^{p,i}$, 4 P , 64, 66 $P(\Phi, a)$, 63 $Q(\Gamma)$, 37 R , 79 $R(G)$, 10 R_Δ , 66 R_j , 23 S , 6, 43 $S(V^*)$, 66 $S(\mathfrak{g}^*)$, 10 $S(m; k, k_1, \dots, k_d)$, 49 SX_{new} , 77 S_L , 78 S_Δ , 66 S_Γ , 4 S_{Γ_c} , 27 $T_p M$, 3
---	---

- $U(3)$, 8
 $U_q(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))$, 64
 V , 59, 66
 $V(\lambda)$, 59
 $V(p)$, 36
 V_S , 6
 W , 8, 36, 59
 W_e , 36
 X , 76
 $X_{S,S'}$, 7
 X_{new} , 76
 Z , 4
 $[Q, R] = 0$, 37
 $[e, e_i]$, 26
 $[e_j]$, 5
 $[i]$, 77
 $[p, q]$, 3
 \mathbb{CP}^n , 5
 Δ , 66
 Δ^+ , 66
 Δ^- , 66
 Γ_0 , 16
 Γ_N , 15
 Γ_V , 29
 $\Gamma_{\mathfrak{h}}$, 15
 Γ_c , 25
 Γ_i , 25
 \mathcal{H}^* , 68
 \mathcal{H}_C , 66
 Λ_i , 64
 Ω , 4
 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, 5
 \mathcal{P} , 16
 Φ , 63
 $\Phi(A_r)$, 70
 Σ_r , 70
 Θ , 10
 Θ_ℓ , 11, 22
 \mathbb{Z}_G , 3
 \mathbb{Z}_G^* , 3
 α , 68
 α , 4, 13
 α_i , 15
 $\alpha^{(i,j)}$, 15
 $\alpha_{e,I}$, 29
 $\alpha_{e,e'}^c$, 27
 $\alpha_{j,k}$, 6
 $\alpha_{p,e}$, 3
 $\alpha_{p,q}$, 3
 β , 73
 \mathbf{c} , 68
 χ , 35
 $\chi(\Theta)$, 22
 χ^H , 35
 $\chi_c(\Theta)$, 36
 $\chi_{\text{red}}(\Theta)$, 37
 ℓ , 11, 76
 ℓ_I , 29
 ℓ_i , 44
 $\epsilon(i)$, 71
 \mathfrak{g} , 3, 59
 \mathfrak{g}_e , 4
 γ , 36
 γ_* , 36
 γ_e , 30
 \mathfrak{h} , 59
 \mathfrak{h}^i , 20
 \mathfrak{h}_i , 25
 $\mathfrak{h}_{p,i}$, 3
 λ , 64
 $\langle \mathbf{c}, \cdot \rangle$, 69
 \mathfrak{g}_e , 16
 μ , 59
 ν^+ , 68
 ω_e , 49
 ω_i , 59
 $\text{IRes}_{z=0}^\sigma(f)$, 71
 $\text{Sp}(\mathbf{a})$, 71
 TRes_Δ , 67
 $\text{Val}(\lambda, \mu)$, 75
 $\text{Val}(\lambda, \mu, \nu)$, 77
 $\text{ch}(V)$, 59
 $\text{def}(\mathbf{a})$, 72
 $\text{red}(\Gamma, \alpha)$, 27
 \bar{e} , 3
 $\partial_v f$, 66
 ϕ , 16, 25, 26
 $\phi(p_1, p_2)$, 19
 ϕ_i , 63
 $\phi_{f,\xi}$, 26
 π , 21, 59
 π^* , 21
 π_* , 21
 π_e , 36
 ρ , 60
 ρ_e , 10
 σ , 66
 σ_p , 11
 $\tau_{e,i}$, 13
 θ , 79
 θ_i , 43
 θ_j , 5
 ε , 72
 $\varepsilon(w)$, 60
 \widehat{R}_Δ , 67
 $\widehat{S}(V^*)$, 67
 $\widehat{\Theta}_e$, 36
 ξ , 4, 5, 16

\mathfrak{J} , 4
 $\{\Phi\}$, 68
 a , 63
 $a_{i,j}$, 14
 b , 77
 $b_{2k}(M)$, 12
 $b_{2k}(\Gamma, \alpha)$, 11
 c , 25, 27
 c_λ , 35
 c_λ^μ , 59
 $c_{\lambda\ \mu}^\nu$, 60
 $c_{e,i}$, 13
 c_{e_i} , 4
 d , 3, 4
 e , 3
 e' , 27
 $e(I, s)$, 29
 e^j , 66
 e_i , 4
 e_j , 5, 6
 f , 10, 21
 f_1 , 70
 f_ℓ , 11, 22
 f_σ , 66
 f_a , 78
 f_w , 70
 h_I , 29
 h_i , 44
 i , 29
 i_x , 76
 j , 5, 39
 j_x , 77
 k , 78
 $k(A_r^+, \mathbf{a})$, 70
 $k(\Phi, a)$, 65
 k_e , 49
 k_p , 49
 $k_{\mathfrak{g}}(\beta)$, 60
 $k_{p,r}$, 49
 m_e , 13
 n , 3
 $n(w)$, 71
 o , 19
 o_ξ , 16
 p , 3
 p' , 27
 p_S , 6
 p_i , 4, 20
 p_j , 5
 pt , 21
 q , 3
 q' , 27
 $q(p, i)$, 4
 q_i , 4
 r , 23, 63
 r' , 63
 r_e , 10
 s , 23, 64
 s_1 , 8
 s_2 , 8
 t , 8
 u , 75
 $u(z_1, z_2, z_3)$, 8
 $u(z_i)$, 9
 u_j , 22, 23
 u_x , 76
 v , 75
 v' , 77
 $v(\Phi, a)$, 65
 v_I , 29
 v_i , 44
 w , 8, 60
 w_0 , 8
 x , 76
 x_{fin} , 77
 \mathbf{a} , 70
 \mathbf{a}' , 72

INDEX TERMINOLOGIQUE

- 1-squelette
 - (K-théorie d'un), 10
 - (application moment d'un), 26
 - (cohomologie d'un), 21
 - (hyper-), 29
 - (sous-), 15
 - abstrait, 13
 - acyclique pour un vecteur, 16
 - de GKM, 4
 - fortement acyclique, 16
 - k-indépendant, 14
 - orienté, 16
 - produit, 18
 - réduit, 27
 - abstrait
 - (1-squelette), 13
 - (V-graphe de GKM), 13
 - action
 - d'un groupe
 - sur un espace vectoriel, 59
 - sur une variété, 3
 - par différentiation, 66
 - acyclique pour un vecteur
 - (1-squelette), 16
 - (V-graphe de GKM), 16
 - adjacence généralisée (matrice d'), 14
 - algèbre
 - de Lie, 3
 - enveloppante quantique, 64
 - anneau
 - de cohomologie, 10, 21
 - de K-théorie, 22
 - localisé, 66
 - application
 - caractère, 22
 - de Kirwan, 30
 - de restriction, 10
 - exponentielle, 3
 - moment
 - d'un 1-squelette, 26
 - d'une variété symplectique, 5, 25
 - symplectique, 21
 - arrangement d'hyperplans, 16, 66
 - Atiyah-Bott-Beline-Vergne (théorème de), 21
 - axiale
 - (direction), 29
 - (fonction), 4, 13
 - (hyperdirection), 29
 - Baldoni-DeLoera-Vergne (théorème de), 72
 - base cristalline, 64
 - basique (sous-ensemble), 66
 - Betti (nombre de), 11
 - Borel (sous-groupe de), 8
 - caractère, 22, 35
 - d'une représentation, 59
 - invariant, 35
 - réduit, 36
- chambre
 - (grande), 68
 - (petite), 68
- classe symplectique, 21
- Clebsch-Gordan (coefficient de), 60
- coefficient
 - de Clebsch-Gordan, 60
 - de Littlewood-Richardson, 60
- cohomologie
 - d'un 1-squelette, 21
 - d'un graphe de GKM, 10
- compatibilité (condition de), 10
- compatible (fonction), 16
- complet (graphe), 6, 15
- condition
 - de compatibilité, 10
 - de GKM, 3
- cône
 - dual, 65

- simplicial, 66
- couple de permutations valide, 77
- cristalline (base), 64
- critique (valeur), 25, 26
- cyclique (graphe), 15
- décomposition d'Iwasawa, 9
- déformé (vecteur), 72
- dérivée directionnelle, 66
- différentiation (action par), 66
- direction axiale, 29
- directionnelle (dérivée), 66
- dominant (poids), 59
- drapeaux (variété des), 8
- dual (cône), 65
- Ehrhart (fonction de), 69
- ensemble basique, 66
- espace
 - des représentations, 10
 - projectif, 5
 - réduit, 25
- exponentielle (application), 3
- fonction
 - axiale, 4, 13
 - compatible, 16
 - d'Ehrhart, 69
 - de Kostant, 70
 - de partition vectorielle, 65
 - orientée, 16
 - rationnelle, 66
- fondamental (poids), 59
- forme symplectique, 4
- fortement acyclique
 - (1-squelette), 16
 - (V-graphe de GKM), 16
- généralisée
 - (matrice d'adjacence), 14
 - (matrice d'incidence), 29
- générateur infinitésimal, 26
- GKM
 - (1-squelette de), 4
 - (conditions de), 3
 - (graphe de), 4
 - (théorème de), 10
 - (variété de), 3
- grande chambre, 68
- graphe
 - complet, 6, 15
 - cyclique, 15
 - de GKM, 4
 - (K-théorie), 22
 - (V-hyper-), 29
 - (cohomologie d'un), 10
- grassmannienne (variété), 6
- groupe de Weyl, 59
- hamiltonienne (variété à action), 5
- hyper-1-squelette, 29
- hyperarête, 28
- hyperdirection axiale, 29
- hypergraphe, 28
- hyperplans (arrangement d'), 16, 66
- incidence
 - (matrice d'), 28
 - (relation d'), 4
 - généralisée (matrice d'), 29
- infinitésimal (générateur), 26
- invariant (caractère), 35
- itéré (résidu), 71
- Iwasawa (décomposition de), 9
- Jeffrey-Kirwan (résidu de), 69
- k-indépendant (V-graphe), 14
- K-théorie
 - d'un 1-squelette, 10
 - d'un graphe de GKM abstrait, 22
- Kirwan (application de), 30
- Kostant
 - (fonction de), 70
 - (nombre de), 70
 - (théorème de), 60
- Kostka (nombre de), 59
- Lie (algèbre de), 3
- Littlewood-Richardson (coefficient de), 60
- localisé (anneau), 66
- matrice
 - d'adjacence généralisée, 14
 - d'incidence, 28
 - généralisée, 29
 - unimodulaire, 69
- moment (application)
 - d'un 1-squelette, 26
 - d'une variété, 5, 25
- mur, 68
- nombre
 - de Betti
 - d'un graphe de GKM, 11
 - d'une variété, 11
 - de Kostant, 70
 - de Kostka, 59
- orbifold, 25
- orientation
 - d'un 1-squelette, 16
 - d'un graphe de GKM, 11
 - d'un V-graphe de GKM, 16
 - produit, 18
- orientée (fonction), 16
- partition vectorielle (fonction de), 65
- permutation
 - spéciale, 71
 - valide, 75

- petite chambre, 68
- plus haut poids, 59
- poids
 - (plus haut), 59
 - (réseau des), 3, 59
 - d'une représentation, 3, 59
 - dominant, 59
 - fondamental, 59
- points entiers d'un polytope, 65
- polarisant
 - (vecteur), 11, 16
- polyèdre convexe rationnel, 63
- polytope
 - (points entiers d'un), 65
 - (volume d'un), 65
 - convexe rationnel, 63
- produit
 - d'orientations, 18
 - de 1-squelette, 18
 - de V-graphes de GKM, 18
- projectif (espace), 5
- racine, 59
- rationnelle (fonction), 66
- réduit
 - (1-squelette), 27
 - (caractère), 36
 - (espace), 25
- régulier (vecteur), 68
- régulière (valeur), 25, 26
- relation d'incidence, 4
- représentation
 - (caractère d'une), 59
 - (poids d'une), 59
 - d'un groupe de Lie, 59
 - virtuelle, 37
- représentations (espace des), 10
- réseau
 - des poids, 3, 59
 - des racines, 59
- résidu
 - de Jeffrey-Kirwan, 69
 - itéré, 71
 - total, 67
- restriction (application de), 10
- simplexe, 64
- simplicial (cône), 66
- singulier (vecteur), 68
- sommet, 4
- sous-
 - 1-squelette, 15
 - groupe de Borel, 8
 - V-graphe de GKM, 15
- spéciale (permutation), 71
- Steinberg (théorème de), 61
- symplectique
 - (application), 21
 - (classe), 21
 - (forme), 4
 - (variété), 4
- théorème
 - d'Atiyah-Bott-Berline-Vergne, 21
 - de Baldoni-DeLoera-Vergne, 72
 - de Goresky-Kottwitz-MacPherson, 10
 - de Kostant, 60
 - de Steinberg, 61
 - de Weyl, 60
- tore, 3
- torique (variété), 4
- total (résidu), 67
- unimodulaire (matrice), 69
- V-graphe de GKM
 - (sous-), 15
 - abstrait, 13
 - acyclique pour un vecteur, 16
 - fortement acyclique, 16
 - k-indépendant, 14
 - orienté, 16
 - produit, 18
- V-hypergraphe de GKM, 29
- V-variété, 25
- valeur d'un graphe, 4
- valeur
 - critique, 25, 26
 - régulière, 25, 26
- valide
 - (couple de permutations), 77
 - (permutation), 75
- variété
 - (nombre de Betti d'une), 11
 - à action hamiltonienne, 5
 - de GKM, 3
 - des drapeaux, 8
 - grassmannienne, 6
 - symplectique, 4
 - torique, 4
- vecteur
 - déformé, 72
 - polarisant, 11, 16
 - régulier, 68
 - singulier, 68
- vectorielle (fonction de partition), 65
- virtuelle (représentation), 37
- volume d'un polytope, 65
- Weyl
 - (groupe de), 59
 - (théorème de), 60

BIBLIOGRAPHIE

- [AB84] M. F. ATIYAH & R. BOTT – « The moment map and equivariant cohomology », *Topology* **23** (1984), no. 1, p. 1–28.
- [Aud91] M. AUDIN – *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- [Bar94] A. I. BARVINOK – « A polynomial time algorithm for counting integral points in polyhedra when the dimension is fixed », *Math. Oper. Res.* **19** (1994), no. 4, p. 769–779.
- [Bar97] A. BARVINOK – « Lattice points and lattice polytopes », *Handbook of discrete and computational geometry*, CRC Press Ser. Discrete Math. Appl., CRC, Boca Raton, FL, 1997, p. 133–152.
- [Bar02] A. BARVINOK – *A course in convexity*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [BGR03] S. BILLEY, V. GUILLEMIN & É. RASSART – « A vector partition function for the multiplicities of $\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C})$ », (2003), math. CO/0307227, to appear in *Journal of Alg. Combin.*
- [BP99] A. BARVINOK & J. E. POMMERSHEIM – « An algorithmic theory of lattice points in polyhedra », *New perspectives in algebraic combinatorics* (Berkeley, CA, 1996–97), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, p. 91–147.
- [BP03] M. BECK & D. PIXTON – « The Ehrhart polynomial of the Birkhoff polytope », (2003), preprint (ArXiv :math.CO/0202267), to appear in *Discrete Comput. Geom.*
- [BSDLV03] W. BALDONI SILVA, J. DE LOERA & M. VERGNE – *Counting integer flows in networks*, 2003, manuscript, 43 pages, math. CO/0303228.
- [BSV01] W. BALDONI SILVA & M. VERGNE – « Residues formulae for volumes and Ehrhart polynomials of convex polytopes », manuscript, 81 pages, math. CO/0103097, 2001.

- [BV82] N. BERLINE & M. VERGNE – « Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **295** (1982), no. 9, p. 539–541.
- [BV97] M. BRION & M. VERGNE – « Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes », *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), no. 4, p. 797–833.
- [Coc03a] C. COCHET – « Multiplicities and tensor product coefficients for A_r », (2003), manuscript, 5 pages, math. CO/0306308.
- [Coc03b] ———, « Multiplicities and tensor product coefficients for A_r », Proceedings of the Joint Summer Research Conference on Integer Points in Polyhedra, Snowbird, Utah, July 12-18, 2003, American Mathematical Society, 2003, à paraître.
- [Del88] T. DELZANT – « Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment », *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), no. 3, p. 315–339.
- [Dem70] M. DEMAZURE – « Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **3** (1970), p. 507–588.
- [DHTY03] J. DELOERA, R. HEMMECKE, J. TAUZER & R. YOSHIDA – « Effective Lattice Point Counting in Rational Convex Polytopes », (2003), to appear in Journal of Symbolic Computation.
- [DM03] J. DELOERA & T. MACALLISTER – « Vertices of Gelfand-Tsetlin Polytopes », (2003), unpublished.
- [DW02] H. DERKSEN & J. WEYMAN – « On the Littlewood-Richardson polynomials », *J. Algebra* **255** (2002), no. 2, p. 247–257.
- [Ehr74] E. EHRHART – *Polynômes arithmétiques et méthode des polyèdres en combinatoire*, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg, 1974.
- [GKM98] M. GORESKEY, R. KOTTWITZ & R. MACPHERSON – « Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem », *Invent. Math.* **131** (1998), no. 1, p. 25–83.
- [Gui94] V. GUILLEMIN – *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n -spaces*, Progress in Mathematics, vol. 122, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [GZ] V. GUILLEMIN & C. ZARA – « Morse theory on graphs », *math.CO/0007161*.
- [GZ99] ———, « Equivariant de Rham theory and graphs », *Asian J. Math.* **3** (1999), no. 1, p. 49–76, Sir Michael Atiyah : a great mathematician of the twentieth century.
- [GZ01a] ———, « 1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology », *Duke Math. J.* **107** (2001), no. 2, p. 283–349.

- [GZ01b] ———, « G -actions on graphs », *Internat. Math. Res. Notices* (2001), no. 10, p. 519–542.
- [JK95] L. C. JEFFREY & F. C. KIRWAN – « Localization for nonabelian group actions », *Topology* **34** (1995), no. 2, p. 291–327.
- [Kas02] M. KASHIWARA – *Bases cristallines des groupes quantiques*, Soc. Math. Fr., Paris, 2002, Cours Spécialisé 9 (rédigé par Charles Cochet).
- [KR86] A. N. KIRILLOV & N. Y. RESHETIKHIN – « The Bethe ansatz and the combinatorics of Young tableaux », *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **155** (1986), no. Differentzialnaya Geometriya, Gruppy Li i Mekh. VIII, p. 65–115, 194, translation in *Journal of Soviet Math.* 41 (1988), 925–955.
- [KT99] A. KNUTSON & T. TAO – « The honeycomb model of $GL_n(\mathbf{C})$ tensor products. I. Proof of the saturation conjecture », *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), no. 4, p. 1055–1090.
- [MS99] E. MEINRENKEN & R. SJAMAAR – « Singular reduction and quantization », *Topology* **38** (1999), no. 4, p. 699–762.
- [Nak99] T. NAKASHIMA – « Polyhedral realizations of crystal bases for integrable highest weight modules », *J. Algebra* **219** (1999), no. 2, p. 571–597.
- [NZ97] T. NAKASHIMA & A. ZELEVINSKY – « Polyhedral realizations of crystal bases for quantized Kac-Moody algebras », *Adv. Math.* **131** (1997), no. 1, p. 253–278.
- [Ras03] É. RASSART – « A polynomiality property for Littlewood-Richardson coefficients », (2003), manuscript, 14 pages, math.CO/0308101.
- [Ros03] I. ROSU – « Equivariant K -theory and equivariant cohomology », *Math. Z.* **243** (2003), no. 3, p. 423–448, With an appendix by Allen Knutson and Rosu.
- [Stu95] B. STURMFELS – « On vector partition functions », *J. Combin. Theory Ser. A* **72** (1995), no. 2, p. 302–309.
- [SV02] A. SZENES & M. VERGNE – « Residue formulae for vector partitions and Euler-MacLaurin sums », manuscript, 44 pages, math.CO/0202253, 2002.
- [vL94] M. A. A. VAN LEEUWEN – « LiE, a software package for Lie group computations », *Euromath Bull.* **1** (1994), no. 2, p. 83–94.
- [Zag73] D. ZAGIER – « Higher dimensional Dedekind sums », *Math. Ann.* **202** (1973), p. 149–172.

Réduction des graphes de Goresky-Kottwitz-MacPherson ; nombres de Kostka et coefficients de Littlewood-Richardson

Charles Cochet

Résumé : Ce travail concerne la réalisation concrète en calcul formel d'algorithmes abstraits issus de publications récentes. Il comporte deux parties distinctes mais cependant issues du même monde : l'action d'un groupe de Lie, sur une variété ou un espace vectoriel. La première partie traite de l'implémentation de la réduction d'un graphe de Goresky-Kottwitz-MacPherson. Ce graphe est l'analogue combinatoire d'une variété symplectique compacte connexe soumise à une action hamiltonienne d'un tore compact. La seconde partie est consacrée à l'implémentation du calcul de deux coefficients intervenant lors de l'action d'un groupe de Lie semi-simple complexe sur un espace vectoriel de dimension finie : la multiplicité d'un poids dans une représentation irréductible de dimension finie (nombre de Kostka) et les coefficients de décomposition du produit tensoriel de deux représentations irréductibles de dimension finie (coefficients de Littlewood-Richardson).

Discipline : Mathématiques

Mots-clés : graphe de Goresky-Kottwitz-MacPherson, réduction symplectique, nombre de Kostka, coefficient de Littlewood-Richardson, fonction de partition vectorielle, polytope.

Adresse de l'U.F.R. : U.F.R. de Mathématiques
Case 7012
Université Paris 7 - Denis Diderot
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France

Adresse électronique : cochet@math.jussieu.fr