Université Paris VII - Denis Diderot

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Claire Chavaudret

Réductibilité des cocycles quasi-périodiques

---

dirigée par Håkan Eliasson

Soutenue le 11 février 2010 devant le jury composé de :

M. Walter Craig	McMaster University	examinateur
M. Rafael de la Llave	University of Texas at Austin	rapporteur
M. Håkan Eliasson	Université Paris VII	directeur
M. Raphaël Krikorian	Université Paris VI	examinateur
M. Laurent Stolovitch	Université de Nice	examinateur
M. Jean-Christophe Yoccoz	Collège de France	rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du chevaleret
75 013 Paris

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

Remerciements

Je ne saurais assez remercier monsieur Eliasson pour sa patience, sa pédagogie et sa disponibilité lors de ces années de thèse, alors même qu'il était très occupé par la direction de l'institut, et pour m'avoir mise sur la piste de ces intéressants problèmes de dynamique. En fin de master, il avait déjà dirigé mon mémoire sur un sujet très riche ; les méthodes qu'il m'a apprises pendant la thèse ont également été variées, parfois soutenues par une intuition géométrique et parfois purement (et durement) analytiques, toutes extrêmement utiles. Il a su insister sur la nécessité d'une écriture rigoureuse, me suggérant des améliorations de rédaction avec une patience inouïe, sans jamais perdre son optimisme et son enthousiasme. Je le remercie également de m'avoir encouragée à faire connaître mes travaux et je tiens à dire que c'est une grande chance d'avoir travaillé sous sa direction.

Jean-Christophe Yoccoz et Rafael de la Llave m'ont fait le grand honneur d'être les rapporteurs de cette thèse et je les en remercie vivement, ainsi que Walter Craig, Laurent Stolovitch et Raphaël Krikorian qui ont accepté d'être examinateurs. Je souhaite remercier particulièrement Raphaël pour son soutien et des discussions très utiles.

Un grand merci à Anne Boutet de Monvel pour ses encouragements répétés, ainsi qu'à Artur Avila et Joaquim Puig pour leurs précieux conseils. Merci également à Andrea Venturelli, Hakim Boumaza, qui avait déjà rempli un rôle pédagogique très important lors de mon master, David Sauzin et Massimiliano Berti pour leurs gentilles invitations à présenter mes travaux et à Stefano Marmi pour son accueil à la Scuola Normale Superiore de Pise. Je remercie encore le Centre de Recherche Mathématiques de Montréal, Le CIRM à Marseille, l'ICTP de Trieste, le CRM de Barcelone et l'université de Naples pour leur hospitalité à l'occasion de congrès.

Je dois aussi mentionner l'entourage chaleureux des autres doctorants, que ce soit au quotidien à Chevaleret, au foot du dimanche matin, lors de séances de travail ou à des conférences. La thèse aurait été bien triste sans le voisinage de Ngân, Laura et Cédric, les conseils de vieux routier de Benoît Jacob, les discussion mathématiques avec Assia Metelkina, Olivier Jaulent, Nikos Karaliolios ou neuroscientifiques avec Gilles Wainrib et David Colliaux, la répétition d'un exposé avec Selene Sanchez, ou sans le tourisme et les soirées étudiantes avec Abed, Ali, Martin Andersson, l'accueil de Cecilia Salgado et de Marcelo Hilario à Rio de Janeiro, mes collocataires Alexei, Jenia, Alyona et Blanca, l'amitié de Fanny, les blagues de Robert, la gentillesse et la grande amitié de Martin Gaume.

Enfin, toute ma reconnaissance va à ma grand-mère Yvonne, mes parents, ma soeur et mon frère pour leur intérêt dans mes études et leur affection. Je souhaite dédier cette thèse à la mémoire de mes grands-parents Cécile et Eugène et de mon grand-père Jean. Et je remercie mes neveux et nièces pour leur simple existence.

Résumé

Cette thèse est consacrée à la réductibilité et à la presque-réductibilité des cocycles quasi-périodiques, qui sont les solutions fondamentales de systèmes différentiels linéaires à coefficients quasi-périodiques.

On introduit une notion de conjugaison, au sens des cocycles, par une transformation quasi-périodique ; les quantités invariantes par ce type de conjugaison sont appelés invariants dynamiques. Le caractère réductible d'un cocycle permet de connaître très bien ses invariants dynamiques, tels que les exposants de Lyapunov qui indiquent le comprtement asymptotique des solutions du système, et en dimension 2, le nombre de rotation qui donne leur rotation moyenne autour de l'origine. La presque réductibilité permet de connaître assez bien ces invariants sur un temps arbitrairement long.

On définit la réductibilité d'un cocycle dans un groupe de Lie linéaire G modulo 1 ou 2 comme étant la possibilité de réduire ce cocycle par une transformation à valeurs dans G et définie soit sur le tore, soit sur un revêtement du tore ; on montre par une méthode géométrique qu'un cocycle réductible dans le groupe des matrices inversibles et à valeurs dans G est réductible dans G modulo 1 si G est complexe et modulo 2 si G est réel.

La deuxième partie porte sur la notion de presque réductibilité, c'est-à-dire la possibilité de conjuguer un cocycle à un autre qui est arbitrairement proche d'un cocycle réductible, dans une topologie fixée. On démontre un résultat perturbatif de presque-réductibilité des cocycles analytiques à fréquence diophantienne proches d'un cocycle constant et qui sont à valeurs dans le groupe symplectique. La presque-réductibilité est obtenue dans l'espace des fonctions analytiques sur un voisinage fixe du tore,avec un seul doublement de période, par une méthode de type KAM quantifiant la fréquence de l'apparition de petits diviseurs, ou résonances. Un corollaire en est la quasi-densité, dans cette topologie, des cocycles réductibles au voisinage d'un cocycle constant.

Mots-clefs

Cocycle, produit croisé, quasi-périodique, réductibilité, petits diviseurs, KAM, Lyapunov, Floquet

Reducibility of quasi-periodic cocycles

Abstract

This thesis is dedicated to the study of reducibility and almost reducibility of quasi-periodic cocycles, which are the fundamental solutions of linear differential systems with quasi-periodic coefficients.

A notion of conjugation, in the sense of cocycles, by a quasi-periodic transformation, is introduced; quantities which are invariant by this type of conjugation are called dynamical invariants. When a cocycle is reducible, it is possible to have a good knowledge of its dynamical invariants, such as Lyapunov exponents which indicate the asymptotic behaviour of the solutions of the system, and in dimension 2, the rotation number which gives their mean rotation around the origin. Almost reducibility enables one to have quite a good control on these invariants on an arbitrarily long time.

One introduces the notion of reducibility of a cocycle in a linear Lie group G modulo 1 or 2, as the possibility of reducing the cocycle by means of a transformation with values in G and which is defined either on the torus, or on a covering of the torus; it is then shown by a geometric argument that a cocycle with values in G which is reducible in the group of invertible matrices is reducible in G modulo 1 if G is complex and modulo 2 if G is real.

The second part concerns the problem of almost reducibility, that is, whether it is possible to conjugate a cocycle to another one which is arbitrarily close to a reducible cocycle, in some fixed topology. We state and prove a perturbative result of almost reducibility of analytic cocycles with diophantine frequency which are close to a constant cocycle and take their values in the symplectic group. Almost reducibility is obtained in the space of analytic functions on a fixed neighbourhood of the torus, with only one period doubling, through a KAM-type method estimating how often small divisors, or resonances, appear. Quasi-density in this topology of reducible cocycles near a constant comes as a corollary.

Keywords

Cocycle, skew-product, quasi-periodic, reducibility, small divisors, KAM, Lyapunov, Floquet

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Cocycles quasi-périodiques

1.1.1 Définition et exemples

Un cocycle quasi-périodique est la solution fondamentale d'un système linéaire à coefficients quasi-périodiques [1]. Plus formellement, si A est une fonction définie sur le tore $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, à valeurs dans $gl(n,\mathbb{C})$ et si $\omega \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur rationnellement indépendant, alors l'application $X : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{C})$ qui est solution de

$$\forall(\theta,t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}X^t(\theta) = A(\theta + t\omega)X^t(\theta);\ X^0(\theta) = Id \tag{1.1}$$

est un cocycle quasi-périodique. Le vecteur ω est la fréquence du cocycle X.

On dit que X est un cocycle constant s'il est solution d'une équation du type (1.1) avec A constante. Il est alors indépendant de la phase $\theta \in \mathbb{T}^d$ et s'écrit pour tous t,θ,

$$X^t(\theta) = e^{tA} \tag{1.2}$$

Si G est un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$ et que $\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie associée à G, et si A est à valeurs dans $\mathcal{G}$, alors X prend ses valeurs dans G.

L'application X vérifie la relation de cocycle suivante :

$$\forall\theta \in \mathbb{T}^d, \forall s,t \in \mathbb{R},\ X^{t+s}(\theta) = X^t(\theta + s\omega)X^s(\theta) \tag{1.3}$$

Les cocycles apparaissent naturellement dans certains problèmes de physique mathématique. Le plus étudié a sans doute été l'équation de Schrödinger quasi-périodique. A partir de l'équation

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = (V(t) - \lambda)x(t) \tag{1.4}$$

où V est une fonction quasi-périodique (le potentiel), on obtient le système linéaire

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V(t)-\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

1. voir [Boh51] pour la notion de quasi-périodicité

dont la solution fondamentale est un cocycle quasi-périodique à valeurs dans $SL(2,\mathbb{R})$. En imposant certaines conditions initiales de position et de moment, c'est-à-dire en faisant agir le cocycle solution de (1.5) sur le vecteur des conditions initiales, on obtient la position et le moment de la solution à tout instant.

Un autre exemple d'apparition des cocycles concerne les systèmes hamiltoniens qui apparaissent en mécanique céleste. Pour étudier la stabilité des solutions quasi-périodiques du système hamiltonien

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x(t) = \partial_y H(t,x(t),y(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t) = -\partial_x H(t,x(t),y(t)) \end{array} \right. \tag{1.6}$$

avec l'hamiltonien quadratique

$$H(t,x(t),y(t)) = \sum_{j,k} H^0_{j,k}(t)x_j(t)x_k(t) + \sum_{j,k} H^1_{j,k}(t)x_j(t)y_k(t) + \sum_{j,k} H^2_{j,k}(t)y_j(t)y_k(t) + h.o.t \tag{1.7}$$

on en prend l'approximation linéarisée

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt}x_1(t) = \sum_j [H^1_{j,1}(t)x_j(t) + (H^2_{j,1}(t) + H^2_{1,j}(t))y_j(t)] \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) = \sum_j [H^1_{j,n}(t)x_j(t) + (H^2_{j,n}(t) + H^2_{n,j}(t))y_j(t)] \\ \frac{d}{dt}y_1(t) = -\sum_j [(H^0_{j,1}(t) + H^0_{1,j}(t))x_j(t) + H^1_{1,j}(t)y_j(t)] \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}y_n(t) = -\sum_j [(H^0_{j,n}(t) + H^0_{n,j}(t))x_j(t) + H^1_{n,j}(t)y_j(t)] \end{array} \right. \tag{1.8}$$

ce qui revient à une équation de la forme

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

où $A(t) \in sp(n,\mathbb{R})$ et A varie quasi-périodiquement en t si l'on se restreint à un tore invariant.

1.1.2 Equivalence de cocycles

On définit une relation d'équivalence, ou de cohomologie, entre deux cocycles. Si X est le cocycle solution de

$$\forall(\theta,t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}X^t(\theta) = A(\theta + t\omega)X^t(\theta);\ X^0(\theta) = Id \tag{1.10}$$

et Y le cocycle solution de

$$\forall(\theta,t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}Y^t(\theta) = B(\theta + t\omega)Y^t(\theta);\ Y^0(\theta) = Id \tag{1.11}$$

alors on dit que X et Y sont équivalents modulo N si et seulement s'il existe une application Z continue sur $N\mathbb{T}^d$ telle que

$$\forall\theta,\ \partial_\omega Z(\theta) = A(\theta)Z(\theta) - Z(\theta)B(\theta) \tag{1.12}$$

ce qui est équivalent au fait que

$$\forall(\theta, t),\ X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega)^{-1} Y^t(\theta) Z(\theta) \tag{1.13}$$

1.1.3 Exposants de Lyapunov

Cette notion d'équivalence via une transformation quasi-périodique permet de maintenir des invariants qui sont très importants dans l'étude de la dynamique : les exposants de Lyapunov, que l'on définit en dimension quelconque pour tout vecteur v de norme 1 par

$$\gamma_v := \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{T}^d} \log \| X^t(\theta) v \| \, d\theta \tag{1.14}$$

Dans le cas particulier des cocycles à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$, il n'y a que deux exposants de Lyapunov distincts, l'un étant l'opposé de l'autre, sauf si 0 est l'unique exposant de Lyapunov. En dimension quelconque n, on obtient au plus n exposants de Lyapunov distincts, qui composent le spectre de Lyapunov.

Dans le cas hamiltonien en particulier, les exposants de Lyapunov nous donnent la présence éventuelle d'orbites non bornées.

Dans le cas du cocycle de Schrödinger, le théorème d'Ishii-Pastur ([PF92]) établit une correspondance entre un exposant de Lyapunov nul et le spectre absolument continu.

1.1.4 Sous-fibrés invariants

Dans le cas d'un cocycle constant, la décomposition de Jordan suffit à décrire toute la dynamique. La notion de sous-fibré invariant sert à généraliser cette décomposition au cas de cocycles non constants ([SS78]).

Un sous-fibré invariant pour le cocycle X de fréquence ω est une application V du tore $\mathbb{T}^d$ dans la grassmanienne de $\mathbb{C}^n$ qui est

- continue au sens où il existe une base globale continue, c'est-à-dire des fonctions $v_1, \dots, v_m$ continues sur le double tore et à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ telles que pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$, $v_1(\theta), \dots, v_n(\theta)$ forment une base de $V(\theta)$ (la dimension est alors automatiquement constante),
- invariante, c'est-à-dire que pour tout $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$, $X^t(\theta)V(\theta) \subset V(\theta + t\omega)$ (et par constance de la dimension on a en fait une égalité).

Pour tout cocycle, il existe au moins un sous-fibré invariant qui est le sous-fibré trivial égal à $\mathbb{C}^n$.

Si deux cocycles X, Y sont équivalents, alors il y a aussi une équivalence entre leurs sous-fibrés invariants : si pour tous t, θ,

$$X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega) Y^t(\theta) Z(\theta)^{-1} \tag{1.15}$$

alors pour tout sous-fibré invariant V de X, $Z(\theta)^{-1}V(\theta)$ est un sous-fibré invariant de Y.

Si un cocycle dépend régulièrement d'un paramètre, alors ses sous-fibrés invariants en dépendent de manière exactement aussi régulière ([Joh80],[JS81]). S'il existe une décomposition de $\mathbb{C}^n$ en sous-fibrés invariants, alors l'application A dans (1.1) peut toujours être supposée diagonale par blocs de même dimension que chaque sous-fibré invariant ([EJ82]), ce qui permet de décomposer l'équation (1.1) en plusieurs équations et d'étudier séparément la dynamique sur chaque sous-fibré invariant.

1.2 Réductibilité

1.2.1 Différents types de réductibilité

Soit X le cocycle solution de

$$\forall(\theta,t)\in\mathbb{T}^d\times\mathbb{R},\ \frac{d}{dt}X^t(\theta)=A(\theta+t\omega)X^t(\theta);\ X^0(\theta)=Id \tag{1.16}$$

On dit que X est réductible s'il existe une application Z continue sur un revêtement $N\mathbb{T}^d$ du tore $\mathbb{T}^d$ et une matrice B telles que

$$\forall\theta,\ \partial_\omega Z(\theta)=A(\theta)Z(\theta)-Z(\theta)B \tag{1.17}$$

ce qui équivaut à

$$\forall(\theta,t),\ X^t(\theta)=Z(\theta+t\omega)^{-1}e^{tB}Z(\theta) \tag{1.18}$$

Pour préciser la périodicité de Z, on dira que X est "réductible modulo N".

Soit G un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$; on dit que X est réductible dans G si X est réductible et que Z peut être choisie à valeurs dans G.

La réductibilité dans G modulo 1 est une notion trop restrictive, et déjà dans la théorie de Floquet on voit que le doublement de période est nécessaire en général si G est un groupe réel. Il est donc nécessaire d'autoriser que la transformation Z soit seulement continue sur un revêtement du tore. Mais comme nous le verrons, en réalité un seul doublement de période est nécessaire dans le cadre réel, et aucun dans le cadre complexe.

Enfin, nous aurons besoin de préciser la régularité de l'application Z. Pour tout espace fonctionnel E, nous dirons que X est réductible dans E si Z peut être choisie dans E. Les espaces fonctionnels que nous considérerons seront : les fonctions analytiques sur un r-voisinage du tore, $C_r^\omega(N\mathbb{T}^d,G)$, les fonctions différentiables $C^k(N\mathbb{T}^d,G)$, les fonctions lisses $C^\infty(N\mathbb{T}^d,G)$. Il semble envisageable d'étendre une partie des résultats que nous allons citer aux fonctions de classe Gevrey.

La réductibilité équivaut à l'existence d'une décomposition en sous-fibrés invariants particuliers, que nous appellerons "sous-fibrés de Jordan" et qui apparaissent naturellement de la manière suivante. Soit X un cocycle réductible. Alors il existe B en forme normale de Jordan et $Z\in C^0(N\mathbb{T}^d,GL(n,\mathbb{C}))$ telles que

$$X^t(\theta)=Z(\theta+t\omega)e^{tB}Z(\theta)^{-1} \tag{1.19}$$

Fixons un bloc de Jordan de B, soit $\alpha+i\beta$ sa valeur propre et soient $k_1,\dots k_l$ les indices des colonnes de B dans lesquelles il apparaît. Alors pour tout $j, 1\le j\le l$,

$$X^t(\theta)Z(\theta)e_{k_j}=\sum_{1\le j'\le j}e^{t(\alpha+i\beta)}\frac{t^{j'-1}}{(j'-1)!}Z(\theta+t\omega)e_{k_{j'}} \tag{1.20}$$

donc le sous-fibré engendré par $(Z(\theta)e_{k_1},\dots,Z(\theta)e_{k_l})$ est un sous-fibré invariant.

1.2.2 Intérêt de la réductibilité

Les cocycles réductibles sont des cocycles équivalents à un cocycle constant. Or cette relation d'équivalence, nous l'avons mentionné, préserve certains invariants qui ont un rôle important en dynamique et qui sont bien connus pour des cocycles constants. Ainsi, les cocycles réductibles ont une dynamique bien connue. Soit X un cocycle réductible à un cocycle constant e^{tB}. La croissance ou décroissance exponentielle éventuelle des solutions est donnée par les exposants de Lyapunov, qui sont égaux aux parties réelles des valeurs propres de B. La décomposition de l'espace en sous-espaces propres généralisés de B donne donc directement la décomposition d'Oseledets de X. Celle-ci correspond à la décomposition en sous-fibrés de Jordan et permet d'obtenir une base de solutions qui s'écrivent assez explicitement comme le produit d'une fonction quasi-périodique avec une exponentielle.

1.2.3 Exemples de cocycles non-réductibles

Il existe des exemples de cocycles non-réductibles au-dessus d'une rotation dans un tore de dimension au moins 2.

La réductibilité implique la régularité au sens de Lyapunov ([NS60], [Eli98]). Un cocycle est dit régulier au sens de Lyapunov s'il est solution de (1.1) où A vérifie

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Re\ Tr(A(\theta + s\omega))ds \tag{1.21}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les exposants de Lyapunov. C'est évidemment vérifié pour les cocycles réductibles. L'article ([Mil68]) donne des exemples de cocycles non réguliers, donc non réductibles.

Dans [Eli02], il est prouvé que les cocycles à fréquence diophantienne, à valeurs dans $SO(3, \mathbb{R})$ et proches d'un cocycle constant sont, génériquement au sens topologique, uniquement ergodiques, donc non réductibles puisque l'on est dans un groupe compact. De même, on trouve dans [Ner88] des exemples de cocycles X à valeurs dans des groupes compacts qui sont ergodiques au sens où, en munissant $\mathbb{T}^d$ et le groupe de Lie G de la mesure de Haar, il n'existe aucun sous-ensemble de $\mathbb{T}^d \times G$ de mesure strictement positive et dont le complémentaire soit aussi de mesure strictement positive, qui soit invariant par l'application

$$a : \mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \times G \to \mathbb{T}^d \times G,\ (\theta, t, M) \mapsto (\theta + t\omega, X^t(\theta)M) \tag{1.22}$$

Les cocycles ergodiques forment en fait un ensemble résiduel. De tels cocycles sont donc non réductibles : en effet, si un cocycle est réductible, alors l'application (1.22) est conjuguée à

$$a' : (\theta, t) \mapsto (\theta + t\omega, e^{tB}) \tag{1.23}$$

où B est diagonale (on est dans un groupe compact), et donc il existe un feuilletage de G en sous-ensemble invariants par a' ([Eli98]).

1.2.4 Hyperbolicité uniforme et non-uniforme

Soit X un cocycle à valeurs dans $GL(n, \mathbb{C})$. On dit que X est hyperbolique si X n'a aucun exposant de Lyapunov nul. On dit qu'il est uniformément hyperbolique si, de plus, il existe deux sous-fibrés invariants V^+, V^- tels que

– pour tout $\theta \in \mathbb{T}^d$, $V^+(\theta) \oplus V^-(\theta) = \mathbb{C}^n$;
– il existe c, λ tels que pour tout $v \in V^{\pm}(\theta), t \in \mathbb{R}$,

$$|| X^t(\theta)v || \leq ce^{\pm\lambda t} \tag{1.24}$$

S'il est hyperbolique sans être uniformément hyperbolique, on dit qu'il est non-uniformément hyperbolique.

La réductibilité lorsqu'aucun exposant de Lyapunov n'est nul implique l'uniforme hyperbolicité ([Eli98]), et donc la non uniforme hyperbolicité implique qu'aucun exposant de Lyapunov n'est nul, mais sans réductibilité. Des critères d'uniforme hyperbolicité (aussi appelée "dichotomie exponentielle") se trouvent dans [SS74].

Il existe de nombreux exemples de cocycles non uniformément hyperboliques, qui sont donc en particulier non réductibles. Un exemple dans $SL(2, \mathbb{R})$ est donné dans [You97]. D'autres exemples proviennent de l'équation de Schrödinger quasi-périodique.

Dans [Joh86], il est montré qu'un cocycle de Schrödinger est uniformément hyperbolique si et seulement si l'énergie est dans l'ensemble résolvant. Ainsi, la localisation d'Anderson, c'est-à-dire le phénomène observé à une énergie du spectre ponctuel dont les fonctions propres ont une décroissance exponentielle, se trouve dans les valeurs du spectre pour lesquelles le cocycle de Schrödinger est non-uniformément hyperbolique. Dans [FSW90] et dans [Sin87] se trouve un exemple de cocycle de Schrödinger à une fréquence diophantienne présentant de la localisation d'Anderson, c'est donc un exemple de cocycle non-uniformément hyperbolique ; une généralisation de ces résultats est donnée dans [Eli97], où l'on voit aussi que la localisation d'Anderson a lieu en mesure positive. Les méthodes visant à minorer l'exposant de Lyapunov ([Her83], [SS91]) appliquées à des cocycles de Schrödinger dont l'énergie est dans le spectre aboutissent donc à des exemples de cocycles non-uniformément hyperboliques. Le résultat de M.Herman ([Her83]) implique même que les cocycles de Schrödinger correspondant à une énergie du spectre sont tous non-uniformément hyperboliques du moment que l'énergie est assez grande, avec une borne inférieure d'autant plus petite que le potentiel est petit ; de plus, A.Avila et R.Krikorian ont montré ([AK06]) que pour presque toute fréquence et presque toute énergie, un cocycle de Schrödinger dont le potentiel est analytique est soit réductible soit non-uniformément hyperbolique. Ainsi la non-uniforme hyperbolicité est un phénomène non-négligeable.

La réductibilité et la non-réductibilité ont donc des applications importantes dans l'étude du spectre des opérateurs de Schrödinger à potentiel quasi-périodique([DS75], [Eli92], [Pui04], [ABD09], [AJ]). La réductibilité a également des applications en mécanique céleste, dans l'étude de la stabilité des solutions quasi-périodiques ([Mos67],[Eli88],[Eli96]). Un panorama des différents aspects du problème est donné dans [Pui02].

1.2.5 Cas des cocycles périodiques

L'étude des cocycles périodiques est l'objet de la théorie de Floquet. Il est facile de voir que tout cocycle périodique est réductible dans $GL(n, \mathbb{C})$, et réductible modulo 2 dans $GL(n, \mathbb{R})$ s'il est réel. Ainsi, pour un système linéaire à coefficients périodiques, il existe une base de solutions qui s'écrivent explicitement comme le produit d'une fonction périodique et d'une exponentielle ; ce sont les "ondes de Bloch".

En physique mathématique, ce résultat permet de dire que pour toute énergie, l'équation de Schrödinger à potentiel périodique est réductible : ainsi, soit l'exposant de Lyapunov est positif et l'on se trouve dans l'ensemble résolvant ([Joh86]), soit l'exposant de

Lyapunov est nul et l'on se trouve dans le spectre absolument continu (théorème d'Ishii-Pastur, voir [PF92] et également [DS83]). La forme explicite des ondes de Bloch permet d'ailleurs de voir immédiatement si, pour une énergie donnée, il existe des solutions de l'équation de Schrödinger qui sont intégrables (auquel cas l'énergie se trouve dans l'ensemble résolvant). Si l'exposant de Lyapunov est nul, toutes les solutions sont périodiques, donc non intégrables ; s'il est positif, il existe une solution intégrable, qui est la combinaison d'une onde de Bloch à croissance exponentielle et d'une autre qui a une décroissance exponentielle.

1.3 Exposants de Floquet

Une première notion de réductibilité avait été introduite par Lyapunov. Au lieu de demander que la transformation soit quasi-périodique, la réductibilité au sens de Lyapunov autorise des transformations bornées. Ainsi les propriétés d'intégrabilité et les exposants de Lyapunov des solutions sont préservées par ces transformations, mais en revanche on perd les informations sur les oscillations des solutions. Le fait de se restreindre aux transformations quasi-périodiques permet de préserver au moins une information pertinente sur la rotation des solutions.

Dans le cas des cocycles réductibles, nous pouvons définir les exposants de Floquet qui indiquent le comportement rotationnel des solutions. Pour un cocycle réductible X quelconque, soit B une matrice telle que X soit réductible à e^{tB}. Les exposants de Floquet sont par définition les parties imaginaires des valeurs propres de B.

Il est important de remarquer que l'exposant de Floquet n'est pas défini de manière unique, mais seulement modulo $2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$. En effet, si un cocycle est réductible via une transformation Z continue sur $\mathbb{T}^d$, alors il est également réductible via $Ze^{2i\pi\langle m,.\rangle}$ qui est continue sur $\mathbb{T}^d$ pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$.

Pour un cocycle à valeurs dans $SL(2,\mathbb{R})$, nous pouvons définir le nombre de rotation fibré (qui est égal à l'exposant de Floquet modulo $2\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$ si le cocycle est réductible). Une définition et certaines propriétés sont données dans [Her83]. Une définition basée sur la renormalisation en est donnée dans [Ryc92] (pour des cocycles à une seule fréquence), où il est aussi montré qu'il dépend continûment du cocycle. Plus récemment, S.Hadj Amor a montré qu'il est de régularité Hölder ([Amo09]).

Dans le cas du cocycle de Schrödinger, il coïncide avec le nombre de rotation, défini dans [JM82]. Si (x_λ, x'_λ) est une solution de l'équation (1.5), on définit le nombre de rotation associé à l'énergie λ par

$$\alpha(\lambda) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\arg(x_\lambda(t) + ix'_\lambda(t)) \tag{1.25}$$

R.Johnson et J.Moser ont montré dans [JM82] que cette limite est indépendante du choix de la solution (x, x') et qu'elle est continue en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans [Joh87], des résultats analogues sont démontrés pour d'autres types de systèmes linéaires.

Pour le cocycle de Schrödinger, les propriétés du nombre de rotation sont directement liées à la réductibilité ([Eli92]). C'est aussi le cas du nombre de rotation fibré dans $SL(2,\mathbb{R})$ ([Amo06]).

Johnson et Nerurkar ([JN94]) ont introduit une notion plus générale de nombre de rotation dans le cadre hamiltonien (qui coïncide avec le nombre de rotation défini précédemment dans le cadre $SL(2,\mathbb{R})$) et montré un lien entre la réductibilité et le nombre de rotation. Mais cette notion ne coïncide pas avec les exposants de Floquet dans le cas réductible.

1.4 Présentation du premier résultat

La première partie de cette thèse sera consacrée à montrer le théorème suivant ([Cha]) :

Théorème 1.4.1. *Un cocycle réductible et à valeurs dans un sous-groupe de Lie G de $GL(n,\mathbb{C})$ parmi $GL(n,\mathbb{R}), Sp(n,\mathbb{R}, SL(n,\mathbb{R}), O(n)$ est réductible dans G modulo 2, et un cocycle réductible et à valeurs dans un sous-groupe de Lie G de $GL(n,\mathbb{C})$ parmi $SL(n,\mathbb{C}), Sp(n,\mathbb{C}), U(n)$ est réductible dans G modulo 1.*

En particulier, nous verrons qu'un seul doublement de période est nécessaire dans le cas réel, et aucun dans le cas complexe. Les résonances entre exposants de Floquet jouent un rôle particulier : si un cocycle X est réductible à e^{tB}, pour obtenir la réductibilité dans G, le doublement de période n'est nécessaire que dans le cas où apparaissent certaines résonances dans le spectre de la matrice B et où on cherche à construire une nouvelle transformation qui prend ses valeurs dans un groupe réel.

1.5 Cocycles discrets

Jusqu'ici nous n'avons parlé que de cocycles continus. On s'intéresse aussi aux cocycles en temps discrets lorsque l'on étudie l'équation de Schrödinger en temps discret ou un système linéaire quelconque en temps discret. Les cocycles discrets apparaissent essentiellement comme produit croisé de matrices au-dessus d'une rotation irrationnelle du tore : étant donné un groupe de Lie G et une application $A : \mathbb{T}^d \to G$, on définit le cocycle discret X associé à A par

$$X : \mathbb{T}^d \times \mathbb{Z} \to G,\ (\theta, n) \mapsto A(\theta + (n-1)\omega) \dots A(\theta) \tag{1.26}$$

Les cocycles discrets apparaissent aussi comme restriction de cocycles continus aux temps entiers, c'est-à-dire définis comme ci-dessus à partir de la restriction à un temps T d'un cocycle continu. Les cocycles discrets vérifient une relation de cocycle analogue à (1.3).

Les résultats de la première partie sont également valables pour les cocycles discrets.

On peut construire un cocycle continu à partir de certains cocycles discrets, par la méthode de suspension, comme nous le verrons dans la première partie.

R.Krikorian a montré dans le cas des groupes compacts ([Kri99b], théorème 2.2.1) que si un cocycle X à valeurs dans un groupe compact G est réductible au temps 1 via une transformation lisse, c'est-à-dire qu'il existe A constante et $Z \in C^\infty(\mathbb{T}^d, G)$ tels que pour tout θ,

$$X^1(\theta) = Z(\theta + \omega) A Z(\theta)^{-1} \tag{1.27}$$

alors X est réductible dans G.

Grâce à ce théorème et à la méthode de suspension, certains résultats de réductibilité que nous allons mentionner par la suite, formulés soit dans un cadre continu, soit dans un cadre discret, seront en fait valables dans les deux cadres.

Les cocycles discrets peuvent être vus comme des opérateurs quasi-périodiques agissant sur l'ensemble des suites indexées par un réseau de dimension 1. Signalons que l'étude des opérateurs quasi-périodiques agissant sur les suites indexées par $\mathbb{Z}^\nu$ où $\nu > 1$ est aussi d'un grand intérêt en physique mathématique et emploie des méthodes analogues ([CD93]).

1.6 Conditions diophantiennes

1.6.1 Méthode KAM

La méthode KAM est une manière de construire une conjugaison d'un cocycle à un cocycle constant, mais certaines hypothèses sont nécessaires pour que la conjugaison ainsi construite converge dans une certaine topologie. Cette méthode consiste en la résolution d'une équation linéarisée, à partir de laquelle on conjugue le cocycle initial à un nouveau cocycle dont la partie non constante est plus petite. Au moment de résoudre cette équation linéarisée, qui se décompose en une infinité d'équations grâce à la décomposition de Fourier des fonctions quasi-périodiques, on voit apparaître des "petits diviseurs" dans l'expression de la solution. Une manière d'estimer ces petits diviseurs, qui dépendent de la fréquence ω du cocycle considéré et du spectre d'une certaine matrice constante A, est de supposer que ω vérifie certaines *conditions diophantiennes* et d'éliminer les résonances dans le spectre de A. On construit ainsi une suite infinie de conjugaisons qui alternativement éliminent les résonances et réduisent la partie non constante du cocycle (si celle-ci est suffisamment petite) ; on obtient la réductibilité si le produit de ces transformations converge dans une certaine topologie.

En topologie analytique, de nombreux résultats ont déjà été obtenus, à partir des travaux de J.Moser ([Mos67]). L'enjeu initial était d'étudier la stabilité des tores invariants d'un système hamiltonien presque intégrable (théorème KAM pour les tores lagrangiens, et [Eli88] pour les tores invariants non lagrangiens).

1.6.2 Définitions

Définition: Soit $0 < \kappa' < 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
– Soit $z \in \mathbb{C}, \nu \in \{1, 2\}$. On dit que z est *diophantien modulo* ν *par rapport à* ω*, de constante* κ'*, d'exposant* τ *et d'ordre* N si pour tout $m \in \frac{1}{\nu}\mathbb{Z}^d$ tel que $0 < |m| \leq N$,

$$|z - 2i\pi\langle m, \omega\rangle| \geq \frac{\kappa'}{|m|^\tau} \tag{1.28}$$

On note

$$z \in DC^N_{\omega,\nu}(\kappa', \tau)$$

Notons que

$$DC^N_{\omega,2}(\kappa', \tau) \subset DC^N_{\omega,1}(\kappa', \tau) \tag{1.29}$$

et que tout nombre réel z est dans $DC^N_{\omega,2}(\frac{\kappa}{2^\tau},\tau)$ car pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$,

$$|z - 2i\pi\langle m,\omega\rangle| = \left(|z|^2 + (2\pi|\langle m,\omega\rangle|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\pi\kappa}{|2m|^\tau} \tag{1.30}$$

– (Seconde condition de Melnikov) Soit $A \in gl(n,\mathbb{R})$. On dit que A *a un spectre* $DC^N_\omega(\kappa',\tau)$ si

$$\forall\alpha,\beta \in \sigma(A),\ \alpha - \beta \in DC^N_{\omega,1}(\kappa',\tau) \tag{1.31}$$

et si

$$\forall\alpha,\beta \in \sigma(A),\ \alpha \neq \bar{\beta} \Rightarrow \alpha - \beta \in DC^N_{\omega,2}(\kappa',\tau) \tag{1.32}$$

1.7 Résultats connus sur la réductibilité dans un cadre non-perturbatif

1.7.1 Critères de réductibilité

Si l'image d'un cocycle de classe C^∞ au-dessus d'une rotation d'un tore de dimension quelconque est d'adhérence compacte, alors il est réductible modulo un entier ne dépendant que du groupe dans lequel il prend ses valeurs (et égal à 1 dans le cas du groupe unitaire) ([Kri99b], théorèmes 2.2.2 et 2.2.3) .

Les conditions diophantiennes permettent de vérifier le caractère borné d'un produit de transformations, même dans un régime non-perturbatif, d'où les résultats de réductibilité suivants :

– R.Johnson et G.R.Sell, dans ([JS81]), ont montré qu'un cocycle au-dessus d'un tore de dimension quelconque, suffisamment différentiable et à fréquence diophantienne est réductible s'il a un spectre de Lyapunov simple.
– R.Krikorian a montré la réductibilité C^∞ des cocycles lisses homotopes à l'identité, au-dessus d'une rotation diophantienne du cercle, qui sont bornés en C^0 ([Kri04]).

1.7.2 Densité globale des cocycles réductibles

Certains résultats, utilisant des méthodes de renormalisation, sont déjà connus dans un cadre non-perturbatif, dans le cas où $d = 1$, c'est-à-dire le cas d'un cocycle à une seule fréquence. La méthode de renormalisation est présentée dans [Ryc92] et appliquée au cas d'une rotation du cercle par le nombre d'or. Voici quelques résultats connus utilisant cette méthode :

– Dans [Kri99a], R.Krikorian a développé la méthode de renormalisation pour démontrer que parmi les cocycles de classe C^∞ et à valeurs dans $SU(2)$ au-dessus d'une rotation du cercle, les cocycles réductibles sont denses pour la topologie C^0.
– Dans [Kri01], Krikorian démontre également que quitte à exclure un ensemble de fréquences de mesure de Haar nulle dans le cercle, on obtient, dans le même cadre, la densité des cocycles réductibles dans la topologie C^∞. Ainsi, il n'y a plus de perte de différentiabilité.
– L'article [AK06] utilise la renormalisation pour les cocycles de Schrödinger dont le potentiel possède une fréquence et est analytique ; dans ce cadre, pour presque

toute fréquence irrationnelle et presque toute énergie, le cocycle de Schrödinger correspondant est soit réductible, soit non-uniformément hyperbolique.

Notons que les fréquences pour lesquelles on a effectivement la réductibilité sont des fréquences satisfaisant une condition diophantienne. Ces résultats ne peuvent être généralisés tels quels à des cocycles à plusieurs fréquences. Par exemple, il existe un ensemble E de mesure positive dans le tore de dimension deux tel que l'opérateur de Schrödinger dont le potentiel est un polynôme trigonométrique avec une fréquence appartenant à E possède du spectre ponctuel ([Bou02]).

1.8 Résultats connus de réductibilité en cadre perturbatif

Les résultats énoncés dans cette section sont des résultats perturbatifs, c'est-à-dire des résultats de réductibilité de cocycles suffisamment proches d'un cocycle constant. Ils sont tous basés sur une méthode de type KAM. A la différence des résultats mentionnés dans la section 1.7, ils valent pour des cocycles au-dessus d'une rotation d'un tore de dimension quelconque ; en revanche, des conditions diophantiennes seront requises sur la direction de cette rotation et la taille de la perturbation dépend de la classe diophantienne dans laquelle se trouve le vecteur de rotation.

1.8.1 Résultats en mesure positive

- Dans [DS75], Dinaburg et Sinai ont obtenu un résultat de réductibilité en mesure positive pour les cocycles de Schrödinger analytiques, à fréquence diophantienne, et pour une énergie assez grande. Les valeurs de l'énergie pour lesquelles on obtient la réductibilité sont des valeurs pour lesquelles le nombre de rotation satisfait des conditions diophantiennes et leur ensemble est de mesure assez grande. Notons que ce résultat est complété par [MP84] qui obtient la réductibilité pour certaines valeurs rationnelles du nombre de rotation, mais qui sont en nombre fini donc de mesure nulle.
- Dans le cas des cocycles symplectiques, un résultat en mesure positive avait été démontré dans [Eli88].
- Dans [JS92], A.Jorba et C.Simo ont considéré le système généré par une perturbation d'une matrice réelle A et montré que si $\{\alpha_1, \dots \alpha_n\}$ est le spectre de A et si le vecteur $(\omega, \alpha_1, \dots \alpha_n)$ est non-résonant, alors pour tout F analytique, le système généré par $A + \epsilon F$ est réductible pour tout ϵ dans un ensemble de Cantor de mesure positive.
-

1.8.2 Résultats de réductibilité presque partout

- Dans [Eli92], Eliasson obtient la réductibilité du cocycle de Schrödinger analytique à fréquence diophantienne pour presque toute énergie "assez grande" dans le spectre, ou pour presque toute énergie si le potentiel est "assez petit", cette condition dépendant des constantes diophantiennes qui caractérisent la fréquence. Les valeurs de l'énergie pour lesquelles le cocycle est réductible sont précisément celles pour lesquelles le nombre de rotation est diophantien ou rationnel. Une amélioration a été apportée par J.Puig dans [Pui06], où la borne imposée au potentiel ne dépend pas de la classe diophantienne de la fréquence ; cependant, ce résultat ne vaut que pour des cocycles à une seule fréquence et les résultats semi-perturbatifs, c'est-à-dire les résultats pour

lesquelles la perturbation est bornée par une quantité indépendante de la classe diophantienne de la fréquence du cocycle, restent rares.
- Dans [Kri99b], R.Krikorian obtient la réductibilité presque partout au sens de la mesure pour des familles génériques à un paramètre de cocycles analytiques à valeurs dans $SO(3)$ et à fréquence diophantienne. Ceci fait contrepoids au fait que les cocycles analytiques à fréquence diophantienne et à valeurs dans $SO(3)$ sont également non-réductibles génériquement en un sens topologique ([Eli02]).
- Dans [Kri99c], il obtient pour un groupe de Lie compact semi-simple quelconque G et une fréquence diophantienne la réductibilité presque partout pour certaines familles à un paramètre de cocycles analytiques proche d'un cocycle constant qui doit être généré par un élément régulier de l'algèbre de Lie associée à G.
- Dans [HY08], H.He et J.You obtiennent la réductibilité presque partout pour une famille générique à un paramètre de cocycles analytiques suffisamment proches d'un cocycle constant, à valeurs dans $GL(n,\mathbb{C})$ et à fréquence diophantienne. La famille à un paramètre doit notamment satisfaire des conditions de transversalité, selon la notion introduite par Pyartli ([Pya69]) et utilisée dans [Kri99b].

Le résultat de la première partie de cette thèse permet de compléter ce résultat de H.He et J.You en l'adaptant au cadre d'un groupe de Lie quelconque G parmi $GL(n,\mathbb{R}), Sp(n,\mathbb{C}), Sp(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{R}), O(n), U(n)$. On obtient ainsi la réductibilité dans G presque partout pour une famille générique à un paramètre de cocycles analytiques suffisamment proches d'un cocycle constant, à valeurs dans G et à fréquence diophantienne. L'ensemble de ces résultats permettent de répondre à une conjecture d'Eliasson ([Eli98]).

1.9 Presque-réductibilité, densité des cocycles réductibles proches d'une constante

1.9.1 Définition

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ la classe des fonctions de régularité $\mathcal{C}$ dont le cocycle associé soit réductible. On dit que le cocycle associé à $A \in \mathcal{C}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ est presque réductible dans $\mathcal{C}'$ s'il est dans l'adhérence de $\mathcal{R}$ dans la topologie de $\mathcal{C}'$.

Soit $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ la classe des fonctions de régularité $\mathcal{C}$ et définies sur $\mathbb{T}^d$ dont le cocycle associé soit réductible. On dit que le cocycle associé à $A \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ est presque réductible dans $\mathcal{C}'$ modulo 1 s'il est dans l'adhérence de $\mathcal{R}'$ dans la topologie de $\mathcal{C}'$.

Ainsi, un cocycle est presque réductible s'il peut être conjugué à un cocycle arbitrairement proche d'un cocycle constant. En particulier, un cocycle presque réductible ne peut pas être non-uniformément hyperbolique ([Eli06]).

L'intérêt d'un cocycle presque réductible est que sa dynamique est assez bien connue sur un temps arbitrairement long. Supposons que le cocycle X associé à une fonction A est presque réductible. Soit $\epsilon > 0$, une fonction A_ϵ et une matrice B telles que A_ϵ soit conjuguée à A et ϵ-proche de B. La dynamique de A_ϵ est assez bien connue, puisque proche de celle de B, et conjuguée à celle de A, donc certains invariants de conjugaison sont assez bien connus pour A.

1.9.2 Résultats connus en cadre semi-perturbatif

Dans [AJ], la presque réductibilité est établie pour toute énergie pour les cocycles de Schrödinger discrets à une seule fréquence diophantienne et avec une constante de couplage suffisamment petite, la condition de petitesse étant indépendante de la fréquence. Etant donné le lien entre réductibilité et localisation d'Anderson mentionné plus haut, les auteurs établissent un parallèle entre la presque réductibilité des cocycles de Schrödinger et une notion de "presque localisation", pour en déduire que les mesures spectrales de l'opérateur presque-Mathieu sont absolument continues.

1.9.3 Résultats connus en cadre perturbatif

– Notons que les articles déjà cités qui utilisent une méthode de type KAM ([Eli02] et son preprint datant de 1991 ; [Eli92] ; [Kri99b], théorème sur les cocycles à valeurs dans $SO(3)$) donnent en fait la presque réductibilité des cocycles considérés.
– Dans [Kri99b] (théorème 5.1.1), R.Krikorian obtient la presque réductibilité des cocycles C^∞ à valeurs dans un groupe compact semi-simple et à fréquence diophantienne, s'ils sont suffisamment proches d'un cocycle constant, avec une certaine perte de périodicité non précisée ; cependant dans le cas $SO(3)$ et $SU(n)$, il n'y a pas de perte de périodicité et on a donc la densité C^∞ des cocycles réductibles. Notons qu'il n'y a pas de perte de différentiabilité dans ce résultat.
– Dans [Eli01], H.Eliasson démontre le résultat suivant : Supposons ω diophantien. Tout cocycle suffisamment proche d'un cocycle constant associé à une fonction de $C^\omega_r(\mathbb{T}^d, GL(n,\mathbb{R}))$ est presque réductible dans $C^\omega_0(2\mathbb{T}^d, GL(n,\mathbb{R}))$.

L'objet de la seconde partie de cette thèse est de généraliser ces résultats. Remarquons que dans [Eli01], la presque-réductibilité est obtenue au prix d'une perte d'analyticité considérable. Un enjeu dans la généralisation de ces résultats est d'arriver à garder un rayon d'analyticité strictement positif.

1.9.4 Presque-réductibilité des cocycles symplectiques analytiques à fréquence diophantienne, au voisinage d'un cocycle constant

La seconde partie de cette thèse sera consacrée à une extension du résultat de H.Eliasson mentionné ci-dessus, au cas du groupe symplectique et aux cocycles différentiables. Nous montrerons le résultat suivant :

Théorème 1.9.1. *Tout cocycle associé à une fonction de $C^\omega_r(\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$ et à fréquence diophantienne est presque réductible dans $C^\omega_{\frac{r}{2}}$. En dimension 2 (c'est-à-dire dans le cas $SL(2,\mathbb{R})$), on a le même résultat mais sans perte de périodicité, c'est-à-dire que ces cocycles sont presque réductibles modulo 1.*

Ce résultat peut se reformuler comme un théorème de densité ou de presque densité des cocycles réductibles au voisinage d'un cocycle constant.

Notons que ce théorème peut facilement s'étendre aux autres groupes de Lie mentionnés dans les résultats ci-dessus, à savoir $GL(n,\mathbb{C}), GL(n,\mathbb{R}), O(n), U(n)$, et que la perte de périodicité semble caractériser, là encore, le cas réel.

L'idée de la preuve est au départ la même que dans [Eli01], puisque comme nous le verrons, le fait de se limiter au cadre symplectique n'impose pas de contrainte supplémentaire par rapport au cadre réel ; mais en raffinant le procédé d'élimination des résonances nous arriverons à rester dans une classe de fonctions analytiques sur un voisinage du tore, même en passant à la limite dans l'itération.

Chapitre 2

Reducibility of quasiperiodic cocycles in linear Lie groups

Abstract : Let G be a linear Lie group. We define the G-reducibility of a continuous or discrete cocycle modulo N. We show that a G-valued continuous or discrete cocycle which is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible is in fact G-reducible modulo 2 if $G = GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), Sp(n,\mathbb{R})$ or $O(n)$ and modulo 1 if $G = U(n)$.

Introduction

Let G be a Lie subgroup of $GL(n,\mathbb{C})$ and $\mathcal{G}$ its Lie algebra. Let $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ and $N\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(N\mathbb{Z})^d$ for $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Let us consider the equation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{T}^d, \frac{d}{dt}X(t,\theta) = A(\theta + t\omega)X(t,\theta) \tag{2.1}$$

where $A : \mathbb{T}^d \to \mathcal{G}$ is continuous and $\omega \in \mathbb{R}^d$ is rationally independent. Let $X : (t,\theta) \mapsto X^t(\theta)$ be the associated continuous cocycle, i.e the map from $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$ to G satisfying (2.1) such that for all $\theta \in \mathbb{T}^d$, $X^0(\theta) = Id$. The terminology comes from the fact that X satisfies the cocycle relation

$$\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{T}^d,\ X^{t+s}(\theta) = X^t(\theta + s\omega)X^s(\theta) \tag{2.2}$$

As X is continuous in the variable t, $X^t(\theta)$ remains in the connected component of the identity for all t, θ, so we can suppose G is connected.

Definition: Let X be a G-valued continuous cocycle. We say that X is G-reducible modulo $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ if there exists $Z : N\mathbb{T}^d \to G$ continuous and $B \in \mathcal{G}$ such that for all $t \in \mathbb{R}$ and $\theta \in \mathbb{T}^d$,

$$X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega)^{-1}e^{tB}Z(\theta) \tag{2.3}$$

We say X is reducible if it is reducible modulo 1.

Remark: For a continuous cocycle, reducibility implies that for all θ,

$$\partial_\omega Z(\theta) = BZ(\theta) - Z(\theta)A(\theta) \tag{2.4}$$

where $\partial_\omega Z(\theta) := \frac{d}{dt}Z(\theta + t\omega)_{|t=0}$.

We shall prove the following theorems for continuous cocycles before adapting them to discrete cocycles :

Theorem 2.0.1. *Let X be a continuous cocycle with values in $GL(n,\mathbb{R})$; if it is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible, then it is $GL(n,\mathbb{R})$-reducible modulo 2.*

Theorem 2.0.2. *Let X be a G-valued continuous cocycle, where G is either the symplectic group $Sp(n,\mathbb{R})$* [1]*, the group $SL(n,\mathbb{R})$ of matrices with determinant 1, the orthogonal group $O(n)$, or the unitary group $U(n)$. Suppose X is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible. Then it is G-reducible modulo 2 if $G = Sp(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R})$ or $O(n)$ and modulo 1 if $G = U(n)$.*

Definition: Assume $(\omega, 1)$ is rationally independent. A discrete G-valued cocycle is a map $X : \mathbb{Z} \times \mathbb{T}^d \to G$ such that for all $n, m \in \mathbb{Z}$ and all $\theta \in \mathbb{T}^d$,

$$X^{n+m}(\theta) = X^n(\theta + m\omega)X^m(\theta) \tag{2.5}$$

Remark: Such cocycles appear when one studies products of matrices along an irrational rotation on a torus.

Definition: A discrete cocycle X is G-reducible modulo N if there exists a continuous $Z : N\mathbb{T}^d \to G$ and $A \in G$ such that

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \theta \in \mathbb{T}^d,\ X^n(\theta) = Z(\theta + n\omega)^{-1}A^n Z(\theta)$$

This is equivalent to the fact that $X^1(\theta) = Z(\theta + \omega)^{-1}AZ(\theta)$ for all θ. A discrete cocycle is reducible if it is reducible modulo 1.

Theorems 2.0.1 and 2.0.2 also hold for discrete cocycles. Adapting their proofs to the discrete case, one gets :

Theorem 2.0.3. *Let X be a G-valued discrete cocycle with G in $GL(n,\mathbb{R})$,$SL(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{R}), O(n)$ or $U(n)$, and assume it is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible. Then X is G-reducible modulo χ_G with*

$$\chi_G = \begin{cases} 2 & \text{if } G = GL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), G = Sp(n,\mathbb{R}) \text{ or } G = O(n) \\ 1 & \text{if } G = U(n) \end{cases}$$

In [HY08], H.He and J.You have solved a conjecture from [Eli01] showing that if ω is diophantine, if X_λ is the cocycle which is solution of

$$\frac{d}{dt}X^t(\theta,\lambda) = (A(\lambda) + F_\epsilon(\theta,\lambda))X^t(\theta,\lambda) \tag{2.6}$$

where F_ϵ is sufficiently small and $A(\lambda)$ satisfies non-degeneracy conditions on an interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$, then X_λ is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible for almost all $\lambda \in \Lambda$.
Applying Theorems 2.0.1 and 2.0.2 to this result, we get that if $X^t(\theta,\lambda)$ is G-valued, with G in $GL(n,\mathbb{R})$,$SL(n,\mathbb{R})$, $Sp(n,\mathbb{R}), O(n), U(n)$, then for almost all $\lambda \in \Lambda$, $X^t(\theta,\lambda)$ is G-reducible modulo 2 if $G = GL(n,\mathbb{R}), Sp(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), O(n)$ and modulo 1 if $G = U(n)$.
This completes R.Krikorian's result (see [Kri99c]) : let $A(\lambda)$ be a generic one-parameter family taking its values in the Lie algebra of a compact semi-simple group G ; then the

1. In this case, n is even

system (2.6) is G-reducible for almost every λ modulo some integer χ_G depending only on G, and $\chi_G = 1$ if $G = U(n)$. Now we know that $\chi_G = 2$ if $G = O(n)$.

So, when G is real, there is a loss of periodicity. In the periodic case ($d = 1$), this is a well-known phenomenon. However, it seems that there exists a large class of real cocycles that are reducible in a subgroup of $GL(n, \mathbb{R})$ without loss of periodicity. For instance, in [Kri99b] (Proposition 2.2.4), R. Krikorian has showed when G is a compact semi-simple group that if a discrete cocycle X is G-reducible modulo m to a constant cocycle $n \mapsto e^{nB}$, then there exists a subset $S \subset G$ of Haar measure 1 such that if $e^B \in S$, then X is reducible modulo 1. This tells us that loss of periodicity is quite rare, at least in the compact case. We shall prove the following :

Proposition 2.0.2. *If a continuous G-valued cocycle X, with $G = GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{R}), Sp(n, \mathbb{R})$ or $O(n)$, is $GL(n, \mathbb{C})$-reducible to a cocycle $t \mapsto e^{tB}$ such that no eigenvalue of B is in $\mathbb{R} + i\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle \setminus \{0\}$, then X is G-reducible.*

There is a natural question : considering a generic one-parameter family of cocycles which are solution of (2.6), where $A(\lambda)$ satisfies non-degeneracy conditions, is it true that for almost all λ such that the cocycle X_λ is reducible to a constant cocycle $t \mapsto e^{tB_\lambda}$, no eigenvalue of B_λ is in $\mathbb{R} + i\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle \setminus \{0\}$?
If it were true, the already mentioned result of [HY08] and Proposition 2.0.2 would imply G-reducibility almost everywhere, without loss of periodicity, for generic one-parameter families of cocycles of type (2.6).

Remark: All the results which we shall prove also hold in higher regularity classes : letting $\mathcal{C}$ be any regularity class, in particular differentiable, Gevrey or analytic, and defining "$\mathcal{C}$-reducibility" in the same way as reducibility, but with Z in $\mathcal{C}$ and not only continuous, it is easy to check that we get Theorems 2.0.1, 2.0.2, 2.0.3 and Proposition 2.0.2 with "$\mathcal{C}$-reducibility" instead of "reducibility". Indeed, there is no loss of regularity in our construction.

Sketch of the proof

We shall define notions of invariant subbundle and of Jordan subbundle as families parametrized by $\mathbb{T}^d$ and with values in the subspaces of $\mathbb{C}^n$, satisfying a continuity condition and some invariance properties. In order to prove Theorem 2.0.1, we shall first study the properties of the decomposition of $\mathbb{C}^n$ into Jordan subbundles given by the $GL(n, \mathbb{C})$-reducibility of X to a cocycle $t \mapsto e^{tB}$; we shall decompose $\mathbb{R}^n$ into two reducible invariant subbundles, one of them, say W, modulo 2 and having a basis with real exponents, the other, say W', modulo 1 and having a basis with no exponent in $\mathbb{R} + i\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle$, and such that the gap between the imaginary parts of two exponents cannot be in $2\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle$ (this is called a non-resonance condition). This gives Theorem 2.0.1 as a corollary, but it also facilitates the proof of Theorem 2.0.2 for the orthogonal and the symplectic group, since it is then easy to construct real global bases for the cocycle's invariant subbundles, which are respectively orthonormal and symplectic.

If in equation (2.3), no eigenvalue of B has its imaginary part in $\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle \setminus \{0\}$, then the first of these two subbundles, W, is trivial, so we can have real reducibility without doubling the period, and consequently, we can also have G-reducibility without loss of periodicity, if $G = SL(n, \mathbb{R}), Sp(n, \mathbb{R})$ or $O(n)$, whence Proposition 2.0.2.

In order to get Theorem 2.0.2 for $SL(n,\mathbb{R})$, we will just apply Theorem 2.0.1, then show that the determinant of Z is constant, so we can assume it is equal to 1. Notice that no condition on the exponents of the subbundles is used.

In the case where $G = U(n)$, we shall start from the decomposition of $\mathbb{C}^n$ into complex Jordan subbundles with non-resonant exponents, and construct a global complex orthonormal basis. As $U(n)$ is not a real Lie group, we do not need to double the period.

To prove Theorem 2.0.3, we can do exactly the same proof as for Theorems 2.0.1 and 2.0.2, simply adapting the first Lemma to the discrete case, i.e considering integer translations instead of continuous translations in the direction of ω. The dynamics are not modified by the fact that the time is discrete.

For a particular class of discrete cocycles, there is another way of proving G-reducibility :

Definition: A discrete cocycle X is called G-exponential if there exists a continuous $A : \mathbb{T}^d \to \mathcal{G}$ such that for all $\theta \in \mathbb{T}^d$, $X^1(\theta) = e^{A(\theta)}$.

To prove Theorem 2.0.3 for G-exponential cocycles, we can also construct a suspension of X on a torus of greater dimension, taking its values in G, using the function A from the definition of a G-exponential cocycle. We will obtain a continuous cocycle over $(\omega, 1)$, which is possible since $(\omega, 1)$ is assumed to be rationally independent. We then show that if X is $GL(n,\mathbb{R})$-reducible, then so is its suspension. Using Theorems 2.0.1 and 2.0.2, we obtain G-reducibility for the suspension modulo 1 or 2. Restricting to integer time and to a subtorus, we finally obtain G-reducibility for X modulo 1 or 2.

Notations

For a vector $v \in \mathbb{R}^n$, denote by $Re\ v$ and $Im\ v$ its real and imaginary parts. The euclidean scalar product is denoted by $\langle .,. \rangle$ for a real vector space, and $\langle .,. \rangle_{\mathbb{C}}$ for a complex vector space (we shall take it semilinear in the second variable) ; euclidean distance is denoted by $d(.,.)$. Also, we shall write M^* for the adjoint of a matrix M ; if M is real, M^* is simply the transpose of M. Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ is denoted by J. Finally, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2.1 $GL(n,\mathbb{R})$-reducibility

In this section, we shall assume that X is a real cocycle.

2.1.1 Preliminary lemmas

Lemma 2.1.1. *1. Let $\omega \in \mathbb{R}^d$ rationally independent, $\beta \in \mathbb{R}$ and $N \in \mathbb{N}^*$. Suppose that for any real sequence $t_j \to \infty$,*

$$t_j\omega \to 0 \in N\mathbb{T}^d \Rightarrow t_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T} \tag{2.7}$$

Then there exists $k \in \mathbb{Z}^d$ such that $\beta = 2\pi\langle k, \frac{\omega}{N}\rangle$.

2. *Let $\omega \in \mathbb{R}^d$ such that $(\omega, 1)$ is rationally independent and $N \in \mathbb{N}^*$. Suppose that for any integer sequence $t_j \to \infty$,*

$$t_j\omega \to 0 \in N\mathbb{T}^d \Rightarrow t_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T} \tag{2.8}$$

Then there exists $k \in \mathbb{Z}^{d+1}$ such that $\beta = 2\pi\langle k, (\frac{\omega}{N}, 1)\rangle$.

Proof: 1. It is enough to prove the assertion for $N = 1$: assume it is true for $N = 1$, let N be any non-zero integer and assume that for every sequence t_j,

$$t_j\omega \to 0 \in N\mathbb{T}^d \Rightarrow t_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T} \tag{2.9}$$

then

$$t_j\frac{\omega}{N} \to 0 \in \mathbb{T}^d \Rightarrow t_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T} \tag{2.10}$$

and applying the case $N = 1$ with $\frac{\omega}{N}$ instead of ω, we get $\beta = 2\pi\langle k, \frac{\omega}{N}\rangle$ for some $k \in \mathbb{Z}^d$.

First notice that $(\frac{\beta}{2\pi}, \omega)$ is rationally dependent, since the orbit of the translation in the direction $(\frac{\beta}{2\pi}, \omega)$ is not dense in $\mathbb{T}^{d+1}$: otherwise, there would exist a sequence (t_j) satisfying $t_j(\frac{\beta}{2\pi}, \omega) \to (\frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{T}^{d+1}$, which would contradict the assumption. So there exists $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d, p \in \mathbb{Z}$ such that (p, k) is primitive (i.e the greatest common divisor of k_i and p is 1) and

$$\langle k, \omega\rangle + p\frac{\beta}{2\pi} = 0 \tag{2.11}$$

Notice that this is the only possible resonance (i.e (p, k) is unique up to a scalar). For if there existed a (p', k') independent from (p, k) and such that $\langle k', \omega\rangle + p'\frac{\beta}{2\pi} = 0$, then

$$\begin{cases} p\beta + 2\pi\langle k, \omega\rangle = 0 \\ p'\beta + 2\pi\langle k', \omega\rangle = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

would hold, so $pk' - p'k = 0 \in \mathbb{R}^d$ since ω is rationally independent, which would contradict the assumption that (p, k) and (p', k') are independent.

Now let us show that $p = \pm 1$. By contradiction, suppose $|p| \geq 2$.
Let V the subspace of $\mathbb{R}^{d+1}$ generated by (p, k) . Let $m_1, \dots, m_d \in \mathbb{Z}^{d+1}, m_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,d+1})$ such that the $(d+1) \times (d+1)$-matrix

$$C := \begin{pmatrix} (p, k) \\ m_1 \\ \vdots \\ m_d \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

has determinant 1. Such a matrix exists, according to [Cas97], Corollary 3 p.14. Form the following commuting diagram :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{d+1} & \overset{C}{} & \mathbb{R}^{d+1} \\ \Pi & & \Pi \\ \mathbb{T}^{d+1} & \overset{\bar{C}}{} & \mathbb{T}^{d+1} \end{array} \tag{2.14}$$

where Π is the canonical projection from $\mathbb{R}^{d+1}$ onto $\mathbb{T}^{d+1}$. As C has determinant 1, $\bar{C}$ is a homeomorphism. So the orbit of $\Pi\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \\ {}^t\omega \end{pmatrix}$ is dense in $\Pi(V^{\perp})$ if the orbit of $\Pi(C\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \\ {}^t\omega \end{pmatrix})$ is dense in $\Pi(C(V^{\perp}))$. Now $\Pi(C(V^{\perp})) \subset \{0\} \times \mathbb{T}^d$ and

$$\Pi(C\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \\ {}^t\omega \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle m_1, (\frac{\beta}{2\pi}, \omega)\rangle \\ \vdots \\ \langle m_d, (\frac{\beta}{2\pi}, \omega)\rangle \end{pmatrix}$$

Moreover, assume that

$$\sum_i a_i \langle m_i, (\frac{\beta}{2\pi}, \omega)\rangle = 0 \tag{2.15}$$

which is equivalent to

$$\sum_i \sum_{j\neq 1} a_i m_{i,j}\omega_{j-1} + \sum_i a_i m_{i,1}\frac{\beta}{2\pi} = 0 \tag{2.16}$$

then, as the resonance is unique, $(\sum_i a_i m_{i,1}, \dots, \sum_i a_i m_{i,d+1}) = \sum_i a_i m_i$ is a multiple of (p,k), which is impossible since m_i are independent from (p,k) by definition. So the vector

$$(\langle m_1, (\frac{\beta}{2\pi}, \omega)\rangle, \dots, \langle m_d, (\frac{\beta}{2\pi}, \omega)\rangle)$$

is rationally independent and its orbit is dense in $\mathbb{T}^d$. Therefore, the orbit of $\Pi\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \\ {}^t\omega \end{pmatrix}$ is dense in $\Pi(V^{\perp})$.

Let $m \in \mathbb{Z}^d$ such that $\frac{\langle k,m\rangle}{p}$ is not an integer (it exists, since (p,k) is primitive and $|p| \geq 2$). Then ${}^t(\frac{\langle k,m\rangle}{p}, -m) \in V^{\perp}$. As $\Pi\begin{pmatrix} \frac{\beta}{2\pi} \\ {}^t\omega \end{pmatrix}$ has a dense orbit in $\Pi(V^{\perp})$, there exists an unbounded sequence t_j such that $\Pi\begin{pmatrix} t_j\frac{\beta}{2\pi} \\ {}^t t_j\omega \end{pmatrix} \to \Pi\begin{pmatrix} \frac{\langle k,m\rangle}{p} \\ -{}^t m \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, which contradicts our assumption.

2. The general situation reduces to $N = 1$: suppose we have proved the assumption for $N = 1$; let now N be any non-zero integer and let (t_j) be an integer sequence such that

$$t_j\omega \to 0 \in N\mathbb{T}^d \Rightarrow t_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T}$$

then

$$t_j\frac{\omega}{N} \to 0 \in \mathbb{T}^d \Rightarrow t_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T}$$

so, applying the first case and replacing ω by $\frac{\omega}{N}$, we know that $\beta = 2\pi\langle k, (\frac{\omega}{N}, 1)\rangle$ for some $k \in \mathbb{Z}^{d+1}$.

Let t_j be a real unbounded sequence such that $t_j(\omega, 1) \to 0 \in \mathbb{T}^{d+1}$. For all j, let $n_j \in \mathbb{Z}$ and $r_j \in [0,1[$ such that $t_j = n_j + r_j$. In particular, $t_j \to 0 \in \mathbb{T}$, so $r_j \to 0 \in \mathbb{T}$. Since $t_j\omega \to 0 \in \mathbb{T}^d$ and $r_j\omega \to 0 \in \mathbb{T}^d$, then $n_j\omega \to 0 \in \mathbb{T}^d$. By assumption, this implies that $n_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T}$. But $r_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T}$, so $t_j\beta \to 0 \in 2\pi\mathbb{T}$. By 1., this implies that $\beta \in 2\pi\langle \mathbb{Z}^{d+1}, (\omega, 1)\rangle$. □

Lemma 2.1.2. *Let W be a subspace of $\mathbb{C}^n$. Let $(W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$ be the complex vector space generated by $W \cap \mathbb{R}^n$. Then*

1. $W = \bar{W} \Leftrightarrow (W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C} = W$;
2. *Let V be a subspace of W such that $V \oplus \bar{V} = W$ and $z_1, \dots, z_k$ a basis of V, then $Rez_1, Imz_1, \dots, Rez_k, Imz_k$ is a basis of $W \cap \mathbb{R}^n$.*

Proof: 1. $\Rightarrow$: Let $w_1, \dots, w_l$ be a basis of W ; as $W = \bar{W}$, then $\bar{w_1}, \dots, \bar{w_l}$ are also in W. So, for all $j \in \{1, \dots, l\}$, $Rew_j = \frac{1}{2}(w_j + \bar{w_j})$ and $Imw_j = \frac{1}{2i}(w_j - \bar{w_j})$ are in $W \cap \mathbb{R}^n$. So $w_j = Rew_j + iImw_j \in (W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$ and so $W \subset (W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$. The other inclusion is obvious, therefore $W = (W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$.

$\Leftarrow$: Let $w \in (W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$; then $w = \sum_{j=1}^{l} a_j v_j$ where $a_j \in \mathbb{C}$ and $v_j \in (W \cap \mathbb{R}^n)$. So $\bar{w} = \sum_{j=1}^{l} \bar{a_j}\bar{v_j} = \sum_{j=1}^{l} \bar{a_j} v_j \in (W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$ and so $W = \bar{W}$.

2. The set $\{Rez_1, Imz_1, \dots, Rez_k, Imz_k\}$ generates W and its elements are real, so it generates $W \cap \mathbb{R}^n$. With complex coefficients, the set $\{Rez_1, Imz_1, \dots, Rez_k, Imz_k\}$ generates $(W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$, and by 1., $(W \cap \mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$ is equal to W. As W has dimension $2k$, $Rez_1, Imz_1, \dots, Rez_k, Imz_k$ form a basis of $W \cap \mathbb{R}^n$. □

2.1.2 Subbundles, invariant subbundles and Jordan subbundles

Subbundles and invariant subbundles

Definitions:

1. A real (resp. complex) subbundle is a family $V = \{V(\theta), \theta \in \mathbb{T}^d\}$ with each $V(\theta)$ in $Grass(\mathbb{R}^n)$ (resp.$Grass(\mathbb{C}^n)$), which is continuous in θ, i.e such that for all $\theta_0 \in \mathbb{T}^d$, there exists an open subset $\mathcal{U}$ containing θ_0 and, for all $\theta \in \mathcal{U}$, a basis $\{x_1(\theta), \dots, x_k(\theta)\}$ of $V(\theta)$ which is continuous in θ on $\mathcal{U}$.
2. The dimension of $V(\theta)$ is automatically independent of θ ; this number is called the dimension of the subbundle V and is denoted by $\dim V$.
3. A real (resp. complex) invariant subbundle for the cocycle X is a real (resp. complex) subbundle such that for all t, θ, $X^t(\theta)V(\theta) = V(\theta + t\omega)$. In what follows, we shall omit to mention the cocycle X, as no other cocycle is involved.

Remark: A real invariant subbundle does not always have a basis which is continuous on $\mathbb{T}^d$, as illustrated by the example below :

Example : Consider the discrete 1-periodic cocycle $X^1(\theta) := \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix}$ acting on $\mathbb{R}^2$. Let $z_1(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \pi\theta \\ \sin \pi\theta \end{pmatrix}$. Then $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(z_1(\theta))$ is an invariant subbundle for $X^n(\theta)$, since $z_1(\theta + 1) = -z_1(\theta)$ for all θ. Though z_1 is continuous on $2\mathbb{T}$ and not on $\mathbb{T}$. Moreover, if z is another function such that for all θ, $z(\theta)$ generates $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(z_1(\theta))$, then there exists a continuous function λ bounded away from 0 and such that for all θ, $z(\theta) = \lambda(\theta)z_1(\theta)$. So $z(\theta+1) = \lambda(\theta+1)z_1(\theta+1) = -\lambda(\theta+1)z_1(\theta)$, and so $z(\theta)$ is continuous on $\mathbb{T}$ if and only if for all θ, $-\lambda(\theta+1)=\lambda(\theta)$. But this implies that the function λ changes sign, so it takes the value 0 since it is continuous, which is impossible.

Remark: The intersection of two (real or complex) subbundles is not necessarily a subbundle. For instance, in $\mathbb{R}^2$, for all $\theta\in\mathbb{T}$, let $V(\theta)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $W(\theta)=\begin{pmatrix}\cos 2\pi\theta\\ \sin 2\pi\theta\end{pmatrix}$, then $V(\theta)\cap W(\theta)=V(\theta)$ if $\theta=0$ or $\frac{1}{2}$ mod 1 and $\{0\}$ otherwise, so the dimension of the intersection is not independent of θ. However, the following Proposition holds :

Proposition 2.1.3. *The intersection of two real or complex invariant subbundles is an invariant subbundle.*

Proof: Let U,V be two invariant subbundles, then for all t,θ,

$$X^t(\theta)(U(\theta)\cap V(\theta))=X^t(\theta)U(\theta)\cap X^t(\theta)V(\theta)=U(\theta+t\omega)\cap V(\theta+t\omega)$$

so the intersection is invariant.

Let us show that it has constant dimension. Let $\mathcal{U}$ be an open subset of the torus such that there exist $(u_1,\dots,u_k)$ and $(v_1,\dots,v_l)$ continuous on $\mathcal{U}$ and such that for all $\theta\in\mathcal{U}$, $(u_1(\theta),\dots,u_k(\theta))$ is a basis of $U(\theta)$ and $(v_1(\theta),\dots,v_l(\theta))$ a basis of $V(\theta)$. For all $\theta\in\mathcal{U}$, let

$$M(\theta):=\left[\begin{array}{cccccc} u_1(\theta) & \dots u_k(\theta) & v_1(\theta) & \dots & v_l(\theta)\end{array}\right]$$

the $n\times(k+l)$-matrix whose columns are the vectors from the two bases. Let r be the rank of $M(\theta_0)$ for a fixed θ_0 in $\mathcal{U}$. Then there exists a $r\times r$-submatrix of $M(\theta_0)$ with non-zero determinant. This determinant is continuous in θ, so it is non-zero on a neighbourhood $\mathcal{V}$ of θ_0, so, on this neighbourhood, the rank of $M(\theta)$ is greater than, or equal to r. Therefore, if $d(\theta)$ is the dimension of $U(\theta)\cap V(\theta)$, then $d(\theta)\leq d(\theta_0)$ for all $\theta\in\mathcal{V}$.

Let $\theta_0,\phi_0\in\mathbb{T}^d$. As we have just seen, there exists a neighbourood $\mathcal{U}_0$ of θ_0 and a neighbourhood $\mathcal{V}_0$ of ϕ_0 such that $d(\theta)\leq d(\theta_0)$ for all $\theta\in\mathcal{U}_0$ and $d(\phi)\leq d(\phi_0)$ for all $\phi\in\mathcal{V}_0$. As the orbits of $t\mapsto\theta_0+t\omega$ and $t\mapsto\phi_0+t\omega$ are dense on the torus, there exist $t,t'\in\mathbb{R}$ such that $\theta_0+t\omega\in\mathcal{V}_0$ and $\phi_0+t'\omega\in\mathcal{U}_0$. Invariance and invertibility of $X^t(\theta_0)$ imply that

$$d(\theta_0+t\omega)=\dim(U\cap V)(\theta_0+t\omega)=\dim X^t(\theta_0)(U\cap V)(\theta_0)=\dim(U\cap V)(\theta_0)=d(\theta_0) \tag{2.17}$$

and analogously $d(\phi_0)=d(\phi_0+t'\omega)$. Moreover, as $\theta_0+t\omega\in\mathcal{V}_0$, $d(\theta_0+t\omega)\leq d(\phi_0)$, and analogously $d(\phi_0+t'\omega)\leq d(\theta_0)$. Therefore, $d(\theta_0)=d(\phi_0)$. As θ_0 et ϕ_0 are arbitrarily chosen, the dimension of $U\cap V$ is constant on $\mathbb{T}^d$.

Let us now define a local basis of $U\cap V$. Let $\mathcal{U}$ be a sufficiently small neighbourhood of θ_0 in $\mathbb{T}^d$ and $(u_1,\dots,u_k)$ and $(v_1,\dots,v_l)$ two bases for U and V which are continuous on $\mathcal{U}$. In the neighbourhood of θ_0, up to a permutation of the bases, there exists $l'\leq l$ such that $u_1(\theta),\dots,u_k(\theta),v_1(\theta),\dots,v_{l'}(\theta)$ is a basis of $U(\theta)+V(\theta)$. The integer l' does not depend on θ since the dimension of $U(\theta)\cap V(\theta)$ is independent of θ. So, for all l'', $l'+1\leq l''\leq l$, there exist $a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_{l'}$ which are continuous on a neighbourhood of θ_0 such that

$$v_{l''}(\theta) = \sum_{i=1}^{k} a_i(\theta)u_i(\theta) + \sum_{i=1}^{l'} b_i(\theta)v_i(\theta) \tag{2.18}$$

Let

$$\bar{v}_{l''}(\theta) := \sum_{i=1}^{k} a_i(\theta)u_i(\theta) \tag{2.19}$$

then $\bar{v}_{l''}(\theta)$ is obviously in $U(\theta)$ and since

$$\bar{v}_{l''}(\theta) = v_{l''}(\theta) - \sum_{i=1}^{l'} b_i(\theta)v_i(\theta) \tag{2.20}$$

then $\bar{v}_{l''}(\theta) \in U(\theta) \cap V(\theta)$. For every $\theta \in \mathcal{U}$, the vectors $\bar{v}_{l'+1}(\theta), \dots, \bar{v}_l(\theta)$ are independent since each $\bar{v}_{l''}(\theta)$ is a combination of $v_1(\theta), \dots, v_{l'}(\theta)$ and of $v_{l''}(\theta)$. Therefore the vectors $\bar{v}_{l'+1}(\theta), \dots, \bar{v}_l(\theta)$ form a basis of $U(\theta) \cap V(\theta)$ in a neighbourhood of θ_0. Moreover each $\bar{v}_{l''}$ is continuous on a neighbourhood of θ_0 as an expression of $a_1, \dots, a_k$ and $u_1, \dots, u_k$ and so $\bar{v}_{l'+1}, \dots, \bar{v}_l$ is a local basis of $U \cap V$. □

Corollary 2.1.4. *The sum of two invariant subbundles is an invariant subbundle.*

Proof: For all θ, dim $(U(\theta) + V(\theta)) =$ dim $U(\theta) +$ dim $V(\theta) -$ dim $(U \cap V)(\theta)$. But this number D is independent of θ. Any D independent functions taken from the bases of U and V on an open set of $\mathbb{T}^d$ form a basis of $U + V$ on this open set. The invariance property

$$X^t(\theta)(U(\theta) + V(\theta)) = U(\theta + t\omega) + V(\theta + t\omega)$$

is immediate. □

Notation : Let U, V be two invariant subbundles. We denote by $U \cap V$ the invariant subbundle which is the intersection of U and V, and by $U + V$ the invariant subbundle which is the sum of U and V. If $\dim(U \cap V) = 0$, we might write $U \oplus V$ instead of $U + V$: $U \oplus V$ is the direct sum of U and V.

Definition: We say that an invariant subbundle V decomposes into subbundles $U_1, \dots, U_k$ if $V = \bigoplus_{j=1}^k U_j$.

Jordan subbundles

Definition: A Jordan subbundle modulo N is a complex invariant subbundle having a basis $(z_1, \dots, z_k)$ which is continuous on $N\mathbb{T}^d$ and such that there exists $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ satisfying for all θ, t,

$$\begin{aligned}
X^t(\theta)z_1(\theta) &= e^{t(\alpha+i\beta)}z_1(\theta + t\omega) \\
X^t(\theta)z_2(\theta) &= e^{t(\alpha+i\beta)}z_2(\theta + t\omega) + te^{t(\alpha+i\beta)}z_1(\theta + t\omega) \\
&\dots \\
X^t(\theta)z_k(\theta) &= e^{t(\alpha+i\beta)} \sum_{i=1}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} z_i(\theta + t\omega)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

A Jordan subbundle is a Jordan subbundle modulo 1. The family of functions $(z_1, \dots, z_k)$ is called a Jordan basis, it is not unique. If it is real for all θ, it is called a real Jordan basis (for a complex Jordan subbundle). The number $\alpha + i\beta$ is called an exponent of the Jordan subbundle, and also the exponent of the Jordan basis $(z_1, \dots, z_k)$.

Remark: An exponent of a Jordan subbundle is not unique, but the exponent of a Jordan basis is.
Notice that the dimension of a Jordan subbundle is not supposed to be maximal : if $k \geq 2$, a Jordan subbundle of dimension k contains another Jordan subbundle of dimension $k-1$.

Remark: A Jordan subbundle is a particular type of reducible invariant subbundle.

Proposition 2.1.5. *Let V be a Jordan subbundle modulo N.*
i) If $\alpha+i\beta$ is an exponent for V, then for all $m \in \mathbb{Z}^d$, $\alpha+i\beta+2i\pi\langle\omega, \frac{m}{N}\rangle$ is an exponent for V.
ii) If $\alpha+i\beta$ and $\alpha'+i\beta'$ are two exponents for V, then $\alpha = \alpha'$ and $\beta-\beta' \in 2\pi\langle\mathbb{Z}^d, \frac{\omega}{N}\rangle$.

Proof: i) Suppose $(z_1, \dots, z_k)$ is a Jordan basis of V with exponent $\alpha + i\beta$.
Let $m \in \mathbb{Z}^d$. For all $1 \leq j \leq k$ and all $\theta \in N\mathbb{T}^d$, let $z'_j(\theta) = e^{-2i\pi\langle\frac{\theta}{N}, m\rangle} z_j(\theta)$. Then the vectors $z'_j(\theta)$ form a global basis of V which is continuous on $N\mathbb{T}^d$ and for all θ, t and all $j \leq k$,

$$X^t(\theta) z'_j(\theta) = e^{t(\alpha+i\beta+2i\pi\langle m, \frac{\omega}{N}\rangle)} \sum_{i=1}^{j} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} z'_i(\theta + t\omega) \tag{2.22}$$

so $\alpha + i\beta + 2i\pi\langle m, \frac{\omega}{N}\rangle$ is also an exponent of V.

ii) Let $(v_1, \dots, v_k)$ and $(v'_1, \dots, v'_k)$ be Jordan bases of V with respective exponents $\alpha + i\beta$ and $\alpha' + i\beta'$.
For all $\theta \in N\mathbb{T}^d$, let $v'_1(\theta) = \sum_{j=1}^k \gamma_j(\theta) v_j(\theta)$ where γ_j are continuous on $N\mathbb{T}^d$. Then for all t,

$$\sum_{j=1}^{k} \gamma_j(\theta) e^{t(\alpha+i\beta)} \sum_{i=1}^{j} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} v_i(\theta + t\omega) = e^{t(\alpha'+i\beta')} \sum_{j=1}^{k} \gamma_j(\theta + t\omega) v_j(\theta + t\omega)$$

As the $v_j(\theta + t\omega)$ are linearly independent, in particular

$$\gamma_k(\theta) e^{t(\alpha+i\beta)} = e^{t(\alpha'+i\beta')} \gamma_k(\theta + t\omega)$$

Suppose $\gamma_k(\theta) \neq 0$ for some $\theta \in N\mathbb{T}^d$. As γ_k is bounded, then $\alpha = \alpha'$. Let t_m be an unbounded real sequence such that $t_m\omega \to 0 \in N\mathbb{T}^d$. Then as $m \to \infty$, since $\gamma_k(\theta) \neq 0$, $t_m(\beta-\beta') \to 0 \in 2\pi\mathbb{T}$. By Lemma 2.1.1, there exists $K \in \mathbb{Z}^d$ such that $\beta-\beta' = 2\pi\langle K, \frac{\omega}{N}\rangle$.
If γ_k is identically zero, then

$$\gamma_{k-1}(\theta) e^{t(\alpha+i\beta)} = e^{t(\alpha'+i\beta')} \gamma_{k-1}(\theta + t\omega)$$

and we deduce in the same way that $\beta - \beta' = 2\pi\langle K, \frac{\omega}{N}\rangle$ for some $K \in \mathbb{Z}^d$. Otherwise, we repeat the argument until we find a non zero $\gamma_j(\theta)$ and deduce that for some $K \in \mathbb{Z}^d$, $\beta - \beta' = 2\pi\langle K, \frac{\omega}{N}\rangle$. $\Box$

Remark: • Thus, the exponent of a Jordan subbundle V modulo N is well defined modulo $2i\pi\langle\mathbb{Z}^d, \frac{\omega}{N}\rangle$. We denote it by $\exp_N(V)$.

• The complex conjugate of a Jordan subbundle V modulo N is obviously a Jordan subbundle modulo N whose exponent is the complex conjugate of the exponent of V.

• The term "Jordan subbundle" comes from the fact that if (2.3) holds for some B in Jordan normal form, then the columns of $Z(\theta)^{-1}$ whose indices are the same as those of the first columns of a Jordan block of B with eigenvalue $\alpha + i\beta$ form a Jordan basis with exponent $\alpha + i\beta$.

Lemma 2.1.6. *$GL(n,\mathbb{C})$-reducibility modulo N is equivalent to the existence of a decomposition of $\mathbb{C}^n$ into Jordan subbundles modulo N. The existence of a decomposition of $\mathbb{R}^n$ into Jordan subbundles modulo N with a real Jordan basis implies $GL(n,\mathbb{R})$-reducibility modulo N.*

Proof: By definition, $GL(n,\mathbb{C})$-reducibility of X is the existence of a matrix $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$, where each B_j is a Jordan block with exponent $\alpha_j + i\beta_j$, and of a continuous function $Z : \mathbb{T}^d \to GL(n,\mathbb{C})$ such that for all θ, t,

$$X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega)^{-1} e^{tB} Z(\theta) \tag{2.23}$$

If $z_1(\theta), \dots, z_n(\theta)$ are the columns of $Z(\theta)^{-1}$, then (2.23) is equivalent to the fact that for all θ, t, j, if $l_1, \dots, l_{k_j}$ are the indices of the columns containing B_j,

$$\begin{aligned} X^t(\theta) z_{l_1}(\theta) &= e^{t(\alpha_j + i\beta_j)} z_{l_1}(\theta + t\omega) \\ X^t(\theta) z_{l_2}(\theta) &= e^{t(\alpha_j + i\beta_j)} z_{l_2}(\theta + t\omega) + t e^{t(\alpha_j + i\beta_j)} z_{l_1}(\theta + t\omega) \\ \dots \\ X^t(\theta) z_{l_{k_j}}(\theta) &= e^{t(\alpha_j + i\beta_j)} \sum_{i=1}^{k_j} \frac{t^{k_j - i}}{(k_j - i)!} z_i(\theta + t\omega) \end{aligned} \tag{2.24}$$

which is also equivalent to the fact that if for all j, $V_j(\theta) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(z_{l_1}(\theta), \dots, z_{l_{k_j}}(\theta))$, then V_j is a Jordan subbundle with exponent $\alpha_j + i\beta_j$. Moreover, $V_j(\theta)$ are in direct sum since $Z(\theta)^{-1}$ is invertible.

In the preceding argument, it is clear that X is in fact $GL(n,\mathbb{R})$-reducible if all V_j have a real global basis. □

Remark: Decomposition into Jordan subbundles is not always unique. For instance, if for all θ, t, $X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega)^{-1} e^{t\alpha Id} Z(\theta)$, then for any invertible matrix P, $X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega)^{-1} P e^{t\alpha Id} P^{-1} Z(\theta)$, so $\mathbb{C}^n$ decomposes into Jordan subbundles of dimension 1 generated by the columns of $Z(\theta)^{-1}P$, where P is arbitrarily chosen.

However, we can caracterize reducibility by the existence of another decomposition, which will be shown to be unique :

Definition:

1. A generalized Jordan subbundle W modulo N is the direct sum of Jordan subbundles modulo N which all have the same exponent.

2. This exponent is called the exponent of the generalized subbundle, denoted by $\exp_N(W)$.
3. A basis of W which is a union of Jordan bases for Jordan subbundles contained in W is referred to as a generalized Jordan basis.

Remark: Lemma 2.1.6 immediately implies that $GL(n,\mathbb{C})$-reducibility modulo N is equivalent to the existence of a decomposition of $\mathbb{C}^n$ into generalized Jordan subbundles modulo N.

Definition: Let $W_1,\dots,W_r$ be generalized Jordan subbundles modulo N. We say that $\mathbb{C}^n = \bigoplus W_j$ is a minimal decomposition if all W_j have different exponents.

We shall see later on that there is a unique minimal decomposition.

We shall need the following Lemma :

Lemma 2.1.7. *Let W be a Jordan subbundle modulo N without a real Jordan basis, $z_1,\dots,z_k$ a Jordan basis of W with real exponent α, and for all $j\leq k$, u_j the real part of z_j and v_j its imaginary part.*

Then $U := \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u_1,\dots,u_k)$ and $V := \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(v_1,\dots,v_k)$ are Jordan subbundles modulo N with exponent α and there exist $l,m\leq k$ such that $u_l,\dots,u_k$ is a Jordan basis of U and $v_m,\dots,v_k$ a Jordan basis of V. Moreover, either l or m is equal to 1.

Proof: For all j, $t\in\mathbb{R},\theta\in N\mathbb{T}^d$, as $X^t(\theta)$ is real, then

$$X^t(\theta)u_j(\theta) = e^{t\alpha}\sum_{j'\leq j}\frac{t^{j-j'}}{(j-j')!}u_{j'}(\theta+t\omega)$$

Suppose there exist $j\geq 1,\theta_0$ and $\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1}\in\mathbb{C}$ such that $u_j(\theta_0)=\sum_{i\leq j-1}\lambda_i u_i(\theta_0)$. Then for all t,

$$\begin{aligned}0 &= X^t(\theta_0)(u_j(\theta_0)-\sum_{i\leq j-1}\lambda_i u_i(\theta_0))\\ &= e^{t\alpha}\sum_{j'\leq j}\frac{t^{j-j'}}{(j-j')!}u_{j'}(\theta_0+t\omega)-\sum_{i\leq j-1}\lambda_i\sum_{j'\leq i}\frac{t^{i-j'}}{(i-j')!}u_{j'}(\theta_0+t\omega)\end{aligned}\tag{2.25}$$

so, dividing by $e^{t\alpha}t^{j-1}$, for all $t\neq 0$,

$$0=\sum_{j'\leq j}\frac{t^{-j'+1}}{(j-j')!}u_{j'}(\theta_0+t\omega)-\sum_{i\leq j-1}\lambda_i\sum_{j'\leq i}\frac{t^{i-j'-j+1}}{(i-j')!}u_{j'}(\theta_0+t\omega)$$

Let θ be any point of $N\mathbb{T}^d$. Let t_s be an unbounded real sequence satisfying $t_s\omega\to\theta-\theta_0$ in $N\mathbb{T}^d$. Then, as s tends to infinity,

$$\frac{1}{(j-1)!}u_1(\theta)=0$$

Assume by induction that $u_{j''}$ is identically 0 for all j'' strictly inferior to some $J\leq j$. Then, dividing equation (2.25) by $e^{t\alpha}t^{j-J}$, for all $t\neq 0$,

$$0 = e^{t\alpha} \sum_{J\le j'\le j} \frac{t^{J-j'}}{(j-j')!} u_{j'}(\theta_0+t\omega) - \sum_{i\le j-1} \lambda_i \sum_{J\le j'\le i} \frac{t^{J-j+i-j'}}{(i-j')!} u_{j'}(\theta_0+t\omega)) \tag{2.26}$$

so, with the sequence t_s above defined, if $t=t_s$ and taking the limit as $s\to\infty$,

$$\frac{1}{(j-J)!} u_J(\theta) = 0$$

and so $u_J(\theta)=0$ for all θ. Therefore, for all θ and all $j'\le j$, $u_{j'}(\theta)=0$.

Thus, we have shown that there exists $l\le k$ so that the functions $u_1,\dots,u_{l-1}$ are identically 0 if $l\ge 2$ and $(u_l,\dots,u_k)$ form a global basis of U, which is then a Jordan basis. We proceed exactly in the same way to show that there exists $m\le k$ such that $v_1,\dots,v_{m-1}$ are identically 0 if $m\ge 2$ and $(v_m,\dots,v_k)$ form a Jordan basis of V. Moreover, as u_1 and v_1 cannot be 0 at the same time, then either l or m is equal to 1. □

Real Jordan subbundles

Definition: We say that V is a real Jordan subbundle if V is a Jordan subbundle with a real basis.

Remark: If a Jordan subbundle has a real Jordan basis with exponent $\alpha+i\beta$ $(\mathrm{mod} 2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle)$, then $\beta=0$ $(\mathrm{mod} 2\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle)$. But there exist Jordan subbundles with real exponent $(\mathrm{mod} 2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle)$ but without a real Jordan basis. A trivial example is the constant Jordan subbundle generated by $\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ with exponent 0 $(\mathrm{mod} 2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle)$ for the identity cocycle.

Definition: A generalized real Jordan subbundle is a direct sum of real Jordan subbundles with the same exponent.

2.1.3 Properties of real Jordan subbundles

Let $\{u_j, 1\le j\le k\}$ be a real Jordan basis of a real Jordan subbundle U modulo N with exponent α.

Sublemma 2.1.8. *Every invariant subbundle contained in U is a Jordan subbundle modulo N generated by $(u_1,\dots,u_j)$ for some $j\le k$.*

Proof: Let W be a non zero invariant subbundle contained in U and $u_1,\dots,u_k$ as above. For some θ_0, let j be the maximal integer lower than k such that there exists $\sum_{j'\le j} a_{j'}u_{j'}(\theta_0)$ in $W(\theta_0)$ with $a_j\ne 0$.
As W is invariant, for all $t\in\mathbb{R}$, $X^t(\theta_0)\sum_{j'\le j} a_{j'}u_{j'}(\theta_0)\in W(\theta_0+t\omega)$. Now this vector is equal to $e^{t\alpha}\sum_{j'\le j} a_{j'}\sum_{i=1}^{j'}\frac{t^{j'-i}}{(j'-i)!}u_i(\theta_0+t\omega)$. Dividing by $e^{t\alpha}t^{j-1}$, for all $t\ne 0$, the vector $\sum_{j'\le j} a_{j'}\sum_{i=1}^{j'}\frac{t^{j'-j+1-i}}{(j'-i)!}u_i(\theta_0+t\omega)$ is in $W(\theta_0+t\omega)$. Let $\theta\in N\mathbb{T}^d$ and (t_k) an unbounded real sequence such that $t_k\omega\to\theta-\theta_0$ in $N\mathbb{T}^d$. Then, taking the limit as $k\to\infty$,

$$\sum_{j'\le j} a_{j'} \sum_{i=1}^{j'} \frac{t_k^{j'-j+1-i}}{(j'-i)!} u_i(\theta_0+t_k\omega) \to \frac{1}{(j-1)!} a_j u_1(\theta) \in W(\theta)$$

So for all θ, $u_1(\theta) \in W(\theta)$. Suppose that for all $1 \leq j'' \leq j'$, $u_{j''}(\theta) \in W(\theta)$ for all θ. Then $\sum_{i=j'+1}^{j} a_i u_i(\theta_0) \in W(\theta_0)$ so by invariance of W, for all k,

$$\sum_{i=j'+1}^{j} e^{t_k \alpha} \sum_{j''=1}^{i} a_i \frac{t_k^{i-j''}}{(i-j'')!} u_{j''}(\theta_0 + t_k\omega) \in W(\theta_0 + t_k\omega)$$

and so

$$\sum_{i=j'+1}^{j} e^{t_k \alpha} \sum_{j''=j'+1}^{i} a_i \frac{t_k^{i-j''}}{(i-j'')!} u_{j''}(\theta_0 + t_k\omega) \in W(\theta_0 + t_k\omega)$$

Dividing by $e^{t_k\alpha} t_k^{j-j'-1}$, we get

$$\sum_{i=j'+1}^{j} a_i \sum_{j''=j'+1}^{i} \frac{t_k^{i-j''+j'-j+1}}{(i-j'')!} u_{j''}(\theta_0 + t_k\omega) \in W(\theta_0 + t_k\omega)$$

and taking the limit as k goes to infinity, as $a_j \neq 0$, $u_{j'+1}(\theta) \in W(\theta)$. Eventually, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(u_1, \ldots, u_j)$ is contained in W ; therefore, since we assumed j is maximal, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(u_1, \ldots, u_j)$ is equal to W. $\square$

Remark: As a consequence of this Sublemma, a real Jordan subbundle has a real Jordan basis which is unique up to a scalar. So, we can give the following definition :

Definition: If $V_1, \ldots, V_r$ are real Jordan subbundles and $W = \bigoplus V_j$ is their direct sum, the generalized real Jordan basis of W is defined uniquely up to scalars as the union of all real Jordan bases of the V_j.

Sublemma 2.1.9. *Let $W' = \bigoplus_{i=1}^{m} W^i$ where each W^i is a real Jordan subbundle modulo N whose real Jordan basis $(w_1^i, \ldots, w_{l_i}^i)$ has exponent α. Suppose $u_j(\theta_0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{l_i} \lambda_i^l w_l^i(\theta_0)$ for some θ_0.*

Then for all $\theta \in N\mathbb{T}^d$ and all $j' \leq j$, $u_{j'}(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{1 \leq j'' \leq \min(j', l_i - j + j')} \lambda_i^{j-j'+j''} w_{j''}^i(\theta)$. In particular, $u_1(\theta) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^j w_1^i(\theta)$.

Proof: For all t,

$$\begin{aligned} 0 &= X^t(\theta_0)(u_j(\theta_0) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{l_i} \lambda_i^l w_l^i(\theta_0)) \\ &= e^{t\alpha} \sum_{j' \leq j} \frac{t^{j-j'}}{(j-j')!} u_{j'}(\theta_0 + t\omega) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{l_i} \lambda_i^l e^{t\alpha} \sum_{l'=1}^{l} \frac{t^{l-l'}}{(l-l')!} w_{l'}^i(\theta_0 + t\omega) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dividing by $e^{t\alpha}$, we get for all t

$$0 = \sum_{i \leq j} \frac{t^{j-j'}}{(j-j')!} u_{j'}(\theta_0 + t\omega) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{l_i} \lambda_i^l \sum_{l'=1}^{l} \frac{t^{l-l'}}{(l-l')!} w_{l'}^i(\theta_0 + t\omega) \tag{2.28}$$

Let L be the greatest exponent of t in this expression. Let θ be any point of $N\mathbb{T}^d$. Take a sequence $t_k \to \infty$ such that $t_k\omega \to \theta - \theta_0 \in N\mathbb{T}^d$ as $k \to \infty$. Suppose first that $L \geq j$. Then, dividing (2.28) by t^L, and making k go to infinity,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=L+1}^{l_i}\lambda_i^l\frac{1}{L!}w_{l-L}^i(\theta)=0 \tag{2.29}$$

Since $w_{l-L}^i(\theta)$ are linearly independent, $\lambda_i^l=0$ if $l\geq L+1$. Consequently, (2.28) can be rewritten

$$0=\sum_{j'\leq j}\frac{t^{j-j'}}{(j-j')!}u_{j'}(\theta_0+t\omega)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\lambda_i^l\sum_{l'=1}^{l}\frac{t^{l-l'}}{(l-l')!}w_{l'}^i(\theta_0+t\omega) \tag{2.30}$$

But this contradicts the definition of L, so the assumption under which $L\geq j$ is false. Therefore, (2.28) can be rewritten

$$0=\sum_{j'\leq j}\frac{t^{j-j'}}{(j-j')!}u_{j'}(\theta_0+t\omega)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\min(j,l_i)}\lambda_i^l\sum_{l'=1}^{l}\frac{t^{l-l'}}{(l-l')!}w_{l'}^i(\theta_0+t\omega) \tag{2.31}$$

Dividing (2.31) by $t^{j-1},\dots,t$, replacing t by t_k and making k go to ∞, we see that for all $1\leq j'\leq j$ and all $\theta\in N\mathbb{T}^d$,

$$\begin{aligned}u_{j'}(\theta)&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{l-l'=j-j'}\lambda_i^l w_{l'}^i(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=j-j'+1}^{\min(j,l_i)}\lambda_i^l w_{l-j+j'}^i(\theta)\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\min(j',l_i-j+j')}\lambda_i^{l+j-j'}w_l^i(\theta)\ \Box\end{aligned} \tag{2.32}$$

Remark: Coefficients $\lambda_i^{j-j'+j''}$ do not depend on θ.

Lemma 2.1.10. *Let W' be a generalized real Jordan subbundle modulo N with exponent $\alpha+2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\frac{\omega}{N}\rangle$. Then $W'+U$ is a generalized real Jordan subbundle modulo N with exponent $\alpha+2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\frac{\omega}{N}\rangle$.*

Proof: If $U\cap W'=\{0\}$, this is trivial.

Let us now suppose that this intersection is non trivial. It is then equal to some non trivial invariant subbundle. By Sublemma 2.1.8, it is generated by $u_1,\dots,u_j$ for some $j\leq k$.

Let $W'=\bigoplus_{i=1}^m W^i$ where W^i have real basis $(w_1^i,\dots,w_{l_i}^i)$ with exponent α.

Assume first that dim $U\leq$ dimW_i for all i.
By Sublemma 2.1.9, there exist $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ such that for all $\theta\in N\mathbb{T}^d$,

$$u_1(\theta)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i w_1^i(\theta)$$

Let $u_1'=u_2-\sum_{i=1}^m\lambda_i w_2^i$,...$u_{n-1}'=u_n-\sum_{i=1}^m\lambda_i w_n^i$. If $u_1',\dots,u_{n-1}'$ are independent, since they satisfy, for all $j\leq n-1$,

$$
\begin{aligned}
X^t(\theta)u'_j(\theta) &= X^t(\theta)(u_{j+1}(\theta) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w^i_{j+1}(\theta)) \\
&= \sum_{j' \leq j+1} \frac{e^{t\alpha} t^{j-j'}}{(j-j')!}(u_{j'}(\theta+t\omega) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w^i_{j'}(\theta+t\omega)) \\
&= \sum_{j' \leq j} \frac{e^{t\alpha} t^{j-j'}}{(j-j')!} u'_{j'}(\theta+t\omega)
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

then they are a Jordan basis with exponent α for some real Jordan subbundle modulo N. If u'_1 is in the space generated by $u'_2, \dots, u'_{n-1}$, then we carry out the same construction. After finitely many steps, we have defined a generalized real Jordan basis for $U + \bigoplus_i W_i$.

Let now U be of any dimension. We shall proceed by induction.

1. If U has dimension 1, it is included in W' so the conclusion immediatly follows.
2. Suppose now that the conclusion holds for any U of dimension $\leq n-1$. If now U has dimension n, write $W' = W_1 \oplus W_2$ où $W_1 = \bigoplus_{dimW_i<n} W_i$ and $W_2 = \bigoplus_{dimW_i \geq n} W_i$. By the above, $W_2 + U$ is a generalized real Jordan subbundle modulo N. Then, we add one by one the W_i with dimension $< n$, and by induction hypothesis we still get a generalized real Jordan subbundle modulo N. □

As a consequence of this Lemma, if W and W' are two generalized real Jordan subbundles modulo N with exponent $\alpha + 2i\pi\langle \mathbb{Z}^d, \frac{\omega}{N}\rangle$, then so is $W + W'$.

2.1.4 Minimal decomposition

A lemma

We first give a lemma saying that a Jordan subbundle can only intersect another if they have the same exponents.

Lemma 2.1.11. *Let $U, V_1, \dots, V_r$ be Jordan subbundles modulo N. Suppose $U \subset \bigoplus V_j$. Then $U \subset \bigoplus_{\exp_N(V_j)=\exp_N(U)} V_j$.*

Proof: Let $(u_1, \dots, u_m)$ be a Jordan basis of U, then for all $\theta \in \mathbb{T}^d, t \in \mathbb{R}$,

$$X^t(\theta)u_1(\theta) = e^{t(\alpha_j+i\beta_j)}u_1(\theta+t\omega) \tag{2.34}$$

Write $u_1(\theta) = \sum_{l=1}^s \gamma_l(\theta)w_l(\theta)$ with $(w_l(\theta))_{l=1,\dots,s}$ a basis of $\bigoplus V_j$ which is a union of Jordan bases, and γ_l continuous and $\mathbb{C}$-valued. Then there exist polynomials $\{P_l(t), l = 1, \dots, r\}$ such that for all t,

$$X^t(\theta)u_1(\theta) = \sum_{l=1}^{s} \gamma_l(\theta)e^{t(\alpha_l+i\beta_l)}P_l(t)w_l(\theta+t\omega) \tag{2.35}$$

So

$$e^{(\alpha_j+i\beta_j)t}\sum_{l=1}^{r} \gamma_l(\theta+t\omega)w_l(\theta+t\omega) = \sum_{l=1}^{r} \gamma_l(\theta)e^{(\alpha_l+i\beta_l)t}P_l(t)w_l(\theta+t\omega) \tag{2.36}$$

Since $w_l(\theta+t\omega)$ are linearly independent, for all l,

$$e^{(\alpha_j+i\beta_j)t}\gamma_l(\theta+t\omega)w_l(\theta+t\omega)=\gamma_l(\theta)e^{(\alpha_l+i\beta_l)t}P_l(t)w_l(\theta+t\omega) \tag{2.37}$$

so for all t

$$\gamma_l(\theta+t\omega)=\gamma_l(\theta)e^{(\alpha_l-\alpha_j-i(\beta_j-\beta_l))t}P_l(t) \tag{2.38}$$

This implies that if γ_l is non zero, then $\alpha_l=\alpha_j$, P_l is constant equal to 1 and, by Lemma 2.1.1, $\beta_j=\beta_l(\text{mod } 2\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$. In other words, for all θ,

$$u_1(\theta)\in\bigoplus_{\exp_N(V_j)=\exp_N(U)}V_j(\theta) \tag{2.39}$$

Let us now suppose by induction that $u_{l'}(\theta)\in\bigoplus_{\exp_N(V_j)=\exp_N(U)}V_j(\theta)$ for all θ and all $l'\leq k$. Write again $u_{k+1}(\theta)=\sum_{l=1}^s\gamma_l(\theta)w_l(\theta)$ with $(w_l(\theta))_{l=1,\dots,s}$ a basis of $\bigoplus V_j$ which is a union of Jordan bases, and γ_l continuous and $\mathbb{C}$-valued. Then, as above,

$$\sum_{l'=1}^{k+1}\frac{e^{t(\alpha+i\beta)}t^{k+1-l'}}{(k+1-l')!}u_{l'}(\theta+t\omega)=\sum_{l=1}^s\gamma_l(\theta)\sum_{l=1}^s e^{t(\alpha_l+i\beta_l)}P_l(t)w_l(\theta+t\omega) \tag{2.40}$$

that is to say,

$$u_{k+1}(\theta+t\omega)=\sum_{l=1}^s\gamma_l(\theta)\sum_{l=1}^s e^{t(\alpha_l-\alpha+i\beta_l-i\beta)}P_l(t)w_l(\theta+t\omega)-\sum_{l'=1}^{k}\frac{t^{k+1-l'}}{(k+1-l')!}u_{l'}(\theta+t\omega) \tag{2.41}$$

which implies that $\gamma_l(\theta)=0$ if $\alpha_l+i\beta_l\neq\alpha+i\beta(\text{mod } 2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\frac{\omega}{N}\rangle)$.

Therefore $U\subset\bigoplus_{\exp_N(V_j)=\exp_N(U)}V_j$. $\square$

Unicity and properties of the minimal decomposition

Suppose X is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible. Then by Lemma 2.1.6 and remarks following it, we have a minimal decomposition

$$\mathbb{C}^n=W_1\oplus\cdots\oplus W_r$$

where each W_j is a generalized Jordan subbundle with exponent $\alpha_j+i\beta_j$ $(\text{mod}2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle)$. Lemma 2.1.11 implies :

Corollary 2.1.12. *There exists a unique minimal decomposition of $\mathbb{C}^n$ into generalized Jordan subbundles.*

Proof: Let $\mathbb{C}^n=\bigoplus W'_j$ be another minimal decomposition. By Lemma 2.1.11, each W'_j must be included into the generalized Jordan subbundle $W_l, 1\leq l\leq r$, which has the same exponent. By symmetry, W'_j must be equal to W_l. $\square$

Unicity of the minimal decomposition into generalized Jordan subbundles implies :

Lemma 2.1.13. *For all $1\leq j\leq r$, there exists $1\leq j'\leq r$ such that $\bar{W}_j=W_{j'}$. Moreover, $W_j=\bar{W}_j$ iff $\beta_j\in\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$.*

Proof: The first part of the Lemma is an immediate consequence of Corollary 2.1.12, since $W_1 \oplus \cdots \oplus W_r = \bar{W}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{W}_r$.

Suppose that $W_j = \bar{W}_j$. Let $V_1, \dots, V_{R_j}$ be the Jordan subbundles contained in W_j, and for each V_s, $u_1^s + iv_1^s, \dots, u_{k_s}^s + iv_{k_s}^s$ a global basis with exponent $\alpha + i\beta$. Write for all θ the decomposition $u_1^s(\theta) - iv_1^s(\theta) = \sum_{s' \leq r, j \leq k_{s'}} a_j^{s'}(\theta)(u_j^{s'}(\theta) + iv_j^{s'}(\theta))$, then let $X^t(\theta)$ act on each side ; then for all t,

$$\begin{aligned}
&X^t(\theta)(u_1^s(\theta) - iv_1^s(\theta)) = e^{t(\alpha - i\beta)}(u_1^s(\theta + t\omega) - iv_1^s(\theta + t\omega)) \\
&= e^{t(\alpha - i\beta)} \sum_{s' \leq r, j \leq k_{s'}} a_j^{s'}(\theta + t\omega)(u_j^{s'}(\theta + t\omega) + iv_j^{s'}(\theta + t\omega)) \\
&= \sum_{s' \leq r, j \leq k_{s'}} a_j^{s'}(\theta) X^t(\theta)(u_j^{s'}(\theta) + iv_j^{s'}(\theta)) \\
&= \sum_{s' \leq r, j \leq k_{s'}} a_j^{s'}(\theta) e^{t(\alpha + i\beta)} \sum_{j' \leq j} \frac{t^{j-j'}}{(j-j')!}(u_{j'}^{s'}(\theta + t\omega) + iv_{j'}^{s'}(\theta + t\omega))
\end{aligned} \tag{2.42}$$

as $u_{k_s}^s(\theta + t\omega) + iv_{k_s}^s(\theta + t\omega)$ is linearly independent from the rest, then

$$e^{t(\alpha - i\beta)} a_{k_s}^s(\theta + t\omega) = a_{k_s}^s(\theta) e^{t(\alpha + i\beta)}$$

whence, by Lemma 2.1.1, the fact that $2\beta = 2\pi\langle m, \omega\rangle$ for some $m \in \mathbb{Z}^d$.

Conversely, if $2\beta = 2\pi\langle m, \omega\rangle$ for some $m \in \mathbb{Z}^d$, then W_j is it own complex conjugate. □

2.1.5 Main result

Definition: An invariant subbundle W of dimension k is reducible modulo N if there exists a basis $(z_1, \dots, z_k)$ of W which is continuous on $N\mathbb{T}^d$ and a constant matrix A of dimension $k \times k$ such that $X^t(\theta)[z_1(\theta) \dots z_k(\theta)] = [z_1(\theta + t\omega) \dots z_k(\theta + t\omega)]e^{tA}$ for all t, θ.

Remark: $GL(n, \mathbb{R})$-reducibility is equivalent to the existence of a decomposition of $\mathbb{R}^n$ into reducible invariant subbundles.

We get to the proof of Theorem 2.0.1.

Proposition 2.1.14. *Assume that the continuous cocycle X is $GL(n, \mathbb{C})$-reducible. Then there exists a decomposition of $\mathbb{R}^n$ into two invariant subbundles $\mathcal{W}$ and $\mathcal{W}'$ such that :*

1. *$\mathcal{W}$ is a reducible subbundle modulo 2, generated by a basis $(z_1, \dots, z_s)$ such that for all $(\theta, t) \in 2\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$, $X^t(\theta)[z_1(\theta) \dots z_s(\theta)] = [z_1(\theta + t\omega) \dots z_s(\theta + t\omega)]e^{A_1 t}$ where A_1 has a real spectrum ;*
2. *$\mathcal{W}'$ is a reducible subbundle modulo 1 with a basis $(z_{s+1}, \dots, z_n)$ such that for all $(\theta, t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$,*

$$X^t(\theta)[z_{s+1}(\theta) \dots z_n(\theta)] = [z_{s+1}(\theta + t\omega) \dots z_n(\theta + t\omega)]e^{A_2 t}$$

with $\sigma(A_2) \cap (\mathbb{R} + i\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle \setminus \{0\}) = \emptyset$ and if $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2 \in \sigma(A_2)$, then $\beta_1 - \beta_2$ is not in $2\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle \setminus \{0\}$.

Proof: Let $\mathbb{C}^n = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ be the minimal decomposition introduced in section 2.1.4.

By Lemma 2.1.13, there exists a decomposition $\mathbb{C}^n = W \oplus W'$ where W is the direct sum of all generalized Jordan subbundles W_j which are their own complex conjugate, $W = \bigoplus_{j=1}^{r'} W_j$, and W' the direct sum of all the others : $W' = \bigoplus_{j=r'+1}^{r} W_j$.

1. • By Lemma 2.1.13, W contains exactly the generalized Jordan subbundles whose exponent is in $\mathbb{R} + i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$. Decompose again W into $W_\mathbb{R}$ and $W_\mathbb{C}$ where $W_\mathbb{R}$ is the sum of the generalized Jordan subbundles whose exponent is in $\mathbb{R} + 2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$, and $W_\mathbb{C}$ is the sum of the generalized Jordan subbundles whose exponent is in $\mathbb{R}+i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle \setminus 2i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$.

For $W_\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^n$, we can find real generalized Jordan bases which are continuous on $\mathbb{T}^d$ (just taking either the real parts or the imaginary parts of bases with real exponents).

Proposition 2.1.5 implies that for $W_\mathbb{C}$, we can find generalized Jordan bases modulo 2 with real exponents.

• We will show by induction that each $W_j \subset W_\mathbb{C}$ is a generalized real Jordan subbundle modulo 2.
Let $V_1,\ldots,V_{R_j}$ be the Jordan subbundles included in W_j. Then each one of them is a real Jordan subbundle modulo 2. According to Lemmas 2.1.7 and 2.1.10, $(V_1+\bar{V_1})\cap\mathbb{R}^n$ is the direct sum of two real Jordan subbundles modulo 2, since it is the sum of the Jordan subbundle modulo 2 generated by the real parts of the vectors in the basis of V_1, and of the Jordan subbundle modulo 2 generated by their imaginary parts.

Let $\bar{W}$ and $\bar{W}'$ be invariant subbundles such that there exists $k \geq 2$ with $\bar{W} = (V_k+\bar{V}_k)\cap\mathbb{R}^n$ and that $\bar{W}'$ is a generalized real Jordan subbundle modulo 2.
By Lemma 2.1.10, $\bar{W}$ is the direct sum of two Jordan subbundles modulo 2, U and V.
Using Lemma 2.1.10 again, $U + \bar{W}'$ is a generalized real Jordan subbundle modulo 2.
Finally, by Lemma 2.1.10, $\bar{W} + \bar{W}' = V + U + \bar{W}'$ is a generalized real Jordan subbundle modulo 2, which ends the induction.

2. In W', choose for all $r'+1 \leq j \leq r$ and for each Jordan subbundle $V_s^j, s \leq R_j$ contained in some $W_j \subset W'$, a Jordan basis with exponent $\alpha_j + i\beta_j$ such that for all j,j', $\beta_j - \beta_{j'}$ is not in $2\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle \setminus \{0\}$. We have already showed that for all j, β_j is not in $\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$.
Let W'' be a generalized Jordan subbundle such that $W' = W'' \oplus \bar{W}''$. If $(u_1+iv_1,\ldots,u_{\frac{S}{2}}+iv_{\frac{S}{2}})$ is the generalized Jordan basis of W'' which is the union of all those Jordan bases, then Lemma 2.1.2 implies that $(u_1,v_1,\ldots,u_{\frac{S}{2}},v_{\frac{S}{2}})$ is a basis of $W'\cap\mathbb{R}^n$. Moreover, for all $(\theta,t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$,

$$X^t(\theta)\big[u_1(\theta)\ v_1(\theta)\ \ldots u_{\frac{S}{2}}(\theta)\ v_{\frac{S}{2}}(\theta)\big] = \big[u_1(\theta+t\omega)\ v_1(\theta+t\omega)\ \ldots u_{\frac{S}{2}}(\theta+t\omega)\ v_{\frac{S}{2}}(\theta+t\omega)\big]e^{tA_2}$$

where $\sigma(A_2) = \{\alpha_j + i\beta_j, r'+1 \leq j \leq r\}$.

Let $\mathcal{W} = W_\mathbb{C}\cap\mathbb{R}^n$ and $\mathcal{W}' = W_\mathbb{R}\cap\mathbb{R}^n \oplus W'\cap\mathbb{R}^n$. We have shown the existence of the required bases $(z_1,\ldots,z_s)$ for $\mathcal{W}$ and $(z_{s+1},\ldots,z_n)$ for $\mathcal{W}'$. □

Corollary 2.1.15. *With the notations of the Proposition 2.1.14, let* $Z(\theta) = \big(z_1(\theta) \dots z_n(\theta)\big)$. *Then for all* θ, t,

$$X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega) \exp \begin{pmatrix} tA_1 & 0 \\ 0 & tA_2 \end{pmatrix} Z(\theta)^{-1} \tag{2.43}$$

This proves Theorem 2.0.1. If we require higher regularity (differentiable, Gevrey or analytic) in the definition of a subbundle in section 2.1.2, and do exactly the same construction, we get the same result in higher regularity.

2.2 Reducibility in other Lie groups

We now give the proof of the reducibility theorem for the groups $SL(n, \mathbb{R})$, $Sp(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ and $U(n)$. Again, note that these results also hold in higher regularity.

2.2.1 $SL(n, \mathbb{R})$-reducibility

Proposition 2.2.1. *Let* X *be a continuous* $SL(n, \mathbb{R})$*-valued cocycle which is* $GL(n, \mathbb{R})$*-reducible modulo* N *to a cocycle* $t \mapsto e^{tB}$. *Then* $B \in sl(n, \mathbb{R})$ *and there exists* $\tilde{Z} \in C^0(N\mathbb{T}^d, SL(n, \mathbb{R}))$ *such that for all* t, θ,

$$X^t(\theta) = \tilde{Z}(\theta + t\omega)^{-1} e^{tB} \tilde{Z}(\theta) \tag{2.44}$$

so $X^t(\theta)$ *is* $SL(n, \mathbb{R})$*-reducible modulo* N.

Proof: Let $\tilde{Z}(\theta) := \frac{1}{\det Z(\theta)} Z(\theta)$. By construction, $\tilde{Z} \in C^0(N\mathbb{T}^d, SL(n, \mathbb{R}))$ and for all θ, t,

$$e^{tB} = Z(\theta + t\omega) X^t(\theta) Z(\theta)^{-1} \tag{2.45}$$

so

$$\frac{\det Z(\theta)}{\det Z(\theta + t\omega)} e^{tB} = \tilde{Z}(\theta + t\omega) X^t(\theta) \tilde{Z}(\theta)^{-1} \tag{2.46}$$

Thus the left-hand side has determinant 1. So

$$\forall t, \ \operatorname{tr}(\ln \frac{\det Z(\theta)}{\det Z(\theta + t\omega)} I + tB) = 0 \tag{2.47}$$

As $\ln \frac{\det Z(\theta)}{\det Z(\theta + t\omega)}$ is bounded, then $\operatorname{tr}(B) = 0$ and $\det Z$ is constant. Therefore, for all θ, t,

$$X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega)^{-1} \det Z e^{tB} \frac{Z(\theta)}{\det Z} = \tilde{Z}(\theta + t\omega)^{-1} e^{tB} \tilde{Z}(\theta) \tag{2.48}$$

Corollary 2.2.2. *Let* X *be a* $GL(n, \mathbb{C})$*-reducible cocycle. If it is* $SL(n, \mathbb{R})$*-valued then it is* $SL(n, \mathbb{R})$*-reducible modulo 2.*

Proof: Apply Proposition 2.1.14, then Proposition 2.2.1. □

This proves Theorem 2.0.2 when $G = SL(n, \mathbb{R})$.

2.2.2 Symplectic reducibility

Proposition 2.2.3. *If X is $Sp(2n,\mathbb{R})$-valued and $GL(2n,\mathbb{C})$-reducible, then it is $Sp(2n,\mathbb{R})$-reducible modulo 2.*

Proof: Let $\mathbb{R}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}'$ as in Proposition 2.1.14 and Z as in Corollary 2.1.15 : for all θ, $Z(\theta) = [z_1(\theta) \ \dots z_n(\theta)]$.
Write $X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega) C e^{tB} C^{-1} Z(\theta)^{-1}$ with B in Jordan normal form.
Let $Y(\theta) = C^* Z(\theta)^* J Z(\theta) C$. Then the coefficients $y_{j,k}(\theta)$ of $Y(\theta)$ satisfy $y_{j,k}(\theta) = \langle z_j(\theta), Jz_k(\theta)\rangle_{\mathbb{C}}$ where $z_j(\theta)$ is the j-th column of $Z(\theta)C$. Since $X^t(\theta)^* J X^t(\theta) = J$, then for all θ, t,

$$y_{j,k}(\theta) = \langle X^t(\theta) z_j(\theta), JX^t(\theta) z_k(\theta)\rangle_{\mathbb{C}} \tag{2.49}$$

Three cases are to be considered :

1. $y_{j,k}$ is continuous on $\mathbb{T}^d$;
2. z_j is continuous on $2\mathbb{T}^d$ and z_k is continuous on $\mathbb{T}^d$;
3. z_j and z_k are only continuous on $2\mathbb{T}^d$.

Case 1 : z_j and z_k are in $\mathcal{W}'$. Then for some r_j, r_k,

$$\begin{aligned} y_{j,k}(\theta) &= \langle e^{t(\alpha_j + i\beta_j)} \sum_{i=r_j}^{j} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} z_i(\theta + t\omega), Je^{t(\alpha_k + i\beta_k)} \sum_{i=r_k}^{k} \frac{t^{k-i}}{(k-i)!} z_i(\theta + t\omega)\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= e^{t(\alpha_j + \alpha_k + i\beta_j - i\beta_k)} \sum_{i=r_j}^{j} \sum_{i'=r_k}^{k} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} \frac{t^{k-i'}}{(k-i')!} \langle z_i(\theta + t\omega), Jz_{i'}(\theta + t\omega)\rangle_{\mathbb{C}} \\ &= e^{t(\alpha_j + i\beta_j + \alpha_k - i\beta_k)} \sum_{i=r_j}^{j} \sum_{i'=r_k}^{k} \frac{t^{j+k-i-i'}}{(j-i)!(k-i')!} y_{i,i'}(\theta + t\omega) \end{aligned} \tag{2.50}$$

In particular, if $j = r_j$ and $k = r_k$,

$$y_{j,k}(\theta) = e^{t(\alpha_j + i\beta_j + \alpha_k - i\beta_k)} y_{j,k}(\theta + t\omega) \tag{2.51}$$

Developing into Fourier series, since $y_{j,k}$ is continuous on $\mathbb{T}^d$, for all $m \in \mathbb{Z}^d$,

$$\hat{y}_{j,k}(m) = e^{t(\alpha_j + i\beta_j + \alpha_k - i\beta_k)} \hat{y}_{j,k}(m) e^{2i\pi\langle m, t\omega\rangle} \tag{2.52}$$

Thus, either $\hat{y}_{j,k}(m) = 0$, or $e^{t(\alpha_j + i\beta_j + \alpha_k - i\beta_k + 2i\pi\langle m,\omega\rangle)} = 1$ for all t, and then $\alpha_j + i\beta_j + \alpha_k - i\beta_k + 2i\pi\langle m, \omega\rangle = 0$. But if $m \neq 0$, this is impossible since $\beta_j - \beta_k$ is not in $2\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle \setminus \{0\}$. Therefore, $y_{j,k}$ is constant.
For any j, k, it is possible to show, using equations (2.50) in the appropriate order, that $y_{j,k}$ is constant : equation (2.50), once developed in Fourier series, gives for all $m \in \mathbb{Z}^d$,

$$\hat{y}_{j,k}(m) = e^{t(\alpha_j + i\beta_j + \alpha_k - i\beta_k)} \sum_{i=r_j}^{j} \sum_{i'=r_k}^{k} \frac{t^{j+k-i-i'}}{(j-i)!(k-i')!} \hat{y}_{i,i'}(m) e^{2i\pi\langle m, t\omega\rangle} \tag{2.53}$$

Assume $y_{i,i'}$ is constant for all (i, i') such that $i < j$ or $i = j, i' < k$. Then, if $m \neq 0$,

$$\hat{y}_{j,k}(m) = e^{t(\alpha_j + i\beta_j + \alpha_k - i\beta_k)} \hat{y}_{j,k}(m) e^{2i\pi\langle m, t\omega\rangle} \tag{2.54}$$

which again implies that $y_{j,k}$ is constant.

Case 2 : z_j is in $\mathcal{W}$ and z_k in $\mathcal{W}'$. Then for some r_j, r_k,

$$y_{j,k}(\theta) = e^{t(\alpha_j+\alpha_k-i\beta_k)} \sum_{i=r_j}^{j} \sum_{i'=r_k}^{k} \frac{t^{j+k-i-i'}}{(j-i)!(k-i')!} y_{i,i'}(\theta+t\omega) \tag{2.55}$$

In particular, if $z_j(\theta)$ and $z_k(\theta)$ generate Jordan subbundles of rank 1, for all θ, t,

$$y_{j,k}(\theta) = e^{t(\alpha_j+\alpha_k-i\beta_k)} y_{j,k}(\theta+t\omega) \tag{2.56}$$

Developing this into Fourier series, since $y_{j,k}$ is continuous on $2\mathbb{T}^d$, for all $m \in \mathbb{Z}^d$,

$$\hat{y}_{j,k}(m) = e^{t(\alpha_j+\alpha_k-i\beta_k)} \hat{y}_{j,k}(m) e^{2i\pi\langle m, t\frac{\omega}{2}\rangle} \tag{2.57}$$

So, either $\hat{y}_{j,k}(m) = 0$, or $e^{t(\alpha_j+\alpha_k-i\beta_k+i\pi\langle m,\omega\rangle)} = 1$ for all t, which implies that $\alpha_j + \alpha_k - i\beta_k + i\pi\langle m, \omega\rangle = 0$. Since β_k is not in $\pi\langle \mathbb{Z}^d, \omega\rangle \setminus \{0\}$, this is impossible if $m \neq 0$, so $y_{j,k}$ is constant.
For other j, k, (2.55) implies that $y_{j,k}$ is constant.

Case 3 : z_j and z_k are in $\mathcal{W}$. Thus they are in a Jordan basis with real exponent, continuous on $2\mathbb{T}^d$.
If $z_{r_j}, \ldots, z_j$ generate a Jordan subbundle with exponent α_j and $z_{r_k}, \ldots, z_k$ generate a Jordan subbundle with exponent α_k, then for all θ, t, (2.55) holds, but with $\beta_k = 0$.
In particular, if z_j and z_k generate Jordan subbundles of rank 1, for all θ, t,

$$y_{j,k}(\theta) = e^{t(\alpha_j+\alpha_k)} y_{j,k}(\theta+t\omega) \tag{2.58}$$

Developing into Fourier series again, since $y_{j,k}$ is continuous on $2\mathbb{T}^d$,

$$\hat{y}_{j,k}(m) = e^{t(\alpha_j+\alpha_k)} \hat{y}_{j,k}(m) e^{2i\pi\langle m, t\frac{\omega}{2}\rangle} \tag{2.59}$$

Thus $y_{j,k}$ is constant.
More generally, for arbitrary j, k, for all $m \in \mathbb{Z}^d$ and all t,

$$\hat{y}_{j,k}(m) = e^{t(\alpha_j+\alpha_k)} \sum_{i=r_j}^{j} \sum_{i'=r_k}^{k} \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} \frac{t^{k-i'}}{(k-i')!} \hat{y}_{i,i'}(m) e^{2i\pi\langle m, t\omega\rangle} \tag{2.60}$$

and we can use these equations in the appropriate order to show that all the coefficients of Y are constant, so Y is constant. This implies that $Z(\theta)^* J Z(\theta)$ does not depend on θ.

- Let $\bar{Z}(\theta) = Z(\theta)Z(0)^{-1}$. Then

$$\bar{Z}(\theta)^* J \bar{Z}(\theta) = (Z(0)^{-1})^* Z(\theta)^* J Z(\theta)(Z(0)^{-1}) = J \tag{2.61}$$

since $Z^* J Z$ is constant. Moreover, $\bar{Z}$ is real, so it is $Sp(2n, \mathbb{R})$-valued. It is continuous on $2\mathbb{T}^d$. Finally, for all θ, t,

$$X^t(\theta) = Z(\theta+t\omega)e^{tA}Z(\theta)^{-1}$$

where $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ thus

$$X^t(\theta) = \bar{Z}(\theta + t\omega)e^{tZ(0)AZ(0)^{-1}}\bar{Z}(\theta)^{-1} \tag{2.62}$$

and therefore, X is $Sp(2n,\mathbb{R})$-reducible modulo 2. □

This proves Theorem 2.0.2 when $G = Sp(2n,\mathbb{R})$.

2.2.3 Orthogonal group

Proposition 2.2.4. *Let X be a $GL(n,\mathbb{C})$-reducible cocycle. If it is $O(n)$-valued, then it is $O(n)$-reducible modulo 2.*

Proof: It is possible to carry out exactly the same proof as for Proposition 2.2.3, but defining $Y(\theta)$ as $C^*Z(\theta)^*Z(\theta)C$ and not as $C^*Z(\theta)^*JZ(\theta)C$ anymore. This way, its coefficients are $y_{j,k}(\theta) = \langle z_j(\theta), z_k(\theta)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle X^t(\theta)z_j(\theta), X^t(\theta)z_k(\theta)\rangle_{\mathbb{C}}$; since X is bounded, all the Jordan subbundles have rank 1, thus the coefficients $y_{j,k}$ satisfy equations (2.51), (2.56) and (2.58) with $\alpha_j = \alpha_k = 0$. We show in exactly the same way that they are constant, then define a function $\bar{Z}$ which is continuous on $2\mathbb{T}^d$ and $O(n)$-valued and such that $X^t(\theta) = \bar{Z}(\theta + t\omega)e^{tA}\bar{Z}(\theta)^{-1}$ for some constant matrix A and for all t, θ. □

This proves Theorem 2.0.2 when $G = O(n)$.

2.2.4 $U(n)$-reducibility

Proposition 2.2.5. *Assume that the continuous cocycle X is $U(n)$-valued and $GL(n,\mathbb{C})$-reducible. Then X is $U(n)$-reducible.*

Proof: By Lemma 2.1.6, there is a decomposition of $\mathbb{C}^n$ into Jordan subbundles. Since the cocycle X is $U(n)$-valued, it is bounded, so all Jordan subbundles have rank 1 and a purely imaginary exponent. Let $z_1, \ldots, z_n$ be continuous on $\mathbb{T}^d$, each one generating a Jordan subbundle, chosen in such a way that the difference of two exponents cannot be in $2i\pi\langle\mathbb{Z}^d, \omega\rangle \setminus \{0\}$. Let $Z(\theta)$ be the matrix whose columns are $z_1(\theta), \ldots, z_n(\theta)$; then there is a diagonal matrix D with coefficients $i\beta_1, \ldots, i\beta_n$ such that for all θ, t,

$$X^t(\theta) = Z(\theta + t\omega)e^{tD}Z(\theta)^{-1}$$

Let $Y(\theta) = Z(\theta)^*Z(\theta)$, then the coefficients $y_{j,k}$ of Y satisfy

$$y_{j,k}(\theta) = e^{it(\beta_j - \beta_k)}y_{j,k}(\theta + t\omega) \tag{2.63}$$

Developing into Fourier series, for all $n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\hat{y}(n)_{j,k} = e^{it(\beta_j - \beta_k)}\hat{y}(n)_{j,k} \tag{2.64}$$

By construction, $\beta_j - \beta_k$ is either 0 or is not in $2\pi\langle\mathbb{Z}^d, \omega\rangle$, so Y is constant equal to $Z(0)^*Z(0)$. Thus, if $\bar{Z}(\theta) := Z(\theta)Z(0)^{-1}$, then $\bar{Z}(\theta) \in U(n)$ and

$$X^t(\theta) = \bar{Z}(\theta + t\omega)e^{tZ(0)DZ(0)^{-1}}\bar{Z}(\theta)^{-1} \tag{2.65}$$

Therefore X is $U(n)$-reducible. □

This completes the proof of Theorem 2.0.2.

2.3 Discrete cocycles

We now want to adapt these results to discrete cocycles. In all this section, we shall assume that $(\omega, 1)$ is rationally independent.

Definition: Let $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^D$; X is a discrete cocycle over $\bar{\omega}$ if it is defined on $\mathbb{T}^D \times \mathbb{Z}$ and for all $\bar{\theta} \in \mathbb{T}^D$, $t, s \in \mathbb{Z}$, $X^{t+s}(\bar{\theta}) = X^t(\bar{\theta} + s\bar{\omega})X^s(\bar{\theta})$.

Remark: The continuous cocycles we studied in the previous sections are all over ω. But to talk about a discrete cocycle over ω, it is necessary to assume that $(\omega, 1)$ is rationally independent. Notice that if a continuous cocycle X over $(\omega, 1)$ is G-reducible, then its restriction to integer time and to the d-dimensional subtorus $\mathcal{T} := \{(\theta, 0), \theta \in \mathbb{T}^d\}$ is a discrete cocycle over ω which is G-reducible. Indeed, let $Z : \mathbb{T}^d \to G$ and $B \in \mathcal{G}$ such that

$$X^t(\theta) = Z(\theta + t(\omega, 1))^{-1} e^{tB} Z(\theta) \tag{2.66}$$

It is enough to restrict this expression to integer time and to the subtorus $\mathcal{T}$ to get G-reducibility for the discrete cocycle $(n, \theta) \mapsto X^n(\theta, 0)$.

2.3.1 G-exponential discrete cocycles

Given a discrete G-valued cocycle X, we want to define a suspension of X, i.e a continuous G-valued cocycle whose restriction to integer times and possibly to a subtorus coincides with the initial cocycle. But this cannot be done if X takes its values in two different connected components of G, nor if $\theta \mapsto X^1(\theta)$ is not homotopic to the identity in G (since the suspension would be a homotopy). However, if there is a $\mathcal{G}$-valued function A which is continuous on $\mathbb{T}^d$ such that for all θ, $X^1(\theta) = e^{A(\theta)}$, then we can define a continuous G-valued cocycle whose restriction to integer time and to a subtorus coincides with X : this will be done in the following proposition. Recall the definition :

Definition: A discrete cocycle X over ω is called G-exponential if there exists a $\mathcal{G}$-valued function A, continuous on $\mathbb{T}^d$, such that $X^1(\theta) = e^{A(\theta)}$ for all θ.

Proposition 2.3.1. *Let X be a discrete G-exponential cocycle over ω. Then there exists a continuous cocycle $\tilde{X} : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{T} \to G, (t, \theta, \theta') \mapsto \tilde{X}^t(\theta, \theta')$ over $(\omega, 1)$ whose restriction to $t \in \mathbb{Z}$ and $\{\theta' = 0\}$ coincides with X.*

Proof: By assumption, there exists a $\mathcal{G}$-valued function A, continuous on $\mathbb{T}^d$, such that for all $\theta \in \mathbb{T}^d$, $X^1(\theta) = e^{A(\theta)}$.
For all $(\theta, \theta_{d+1}) \in \mathbb{T}^d \times [0, 1[$, let $B(\theta, \theta_{d+1}) = \phi(\theta, \theta_{d+1})A(\theta - \theta_{d+1}\omega)$ where ϕ is a real function continuous on $\mathbb{T}^d \times [0, 1[$ with support contained in $\mathbb{T}^d \times [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ such that

$$\int_0^1 \phi(\theta + s\omega, \theta_{d+1} + s)ds = 1$$

and for all $n \in \mathbb{Z}$, $B(\theta, \theta_{d+1} + n) = B(\theta, \theta_{d+1})$. So defined, B is continuous on $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ and periodic in θ_{d+1}. Let $\bar{B}$ be the continuous function on $\mathbb{T}^{d+1}$ which we obtain by taking the quotient.
Let $(t, \theta, \theta_{d+1}) \mapsto \tilde{X}^t(\theta, \theta_{d+1})$ be the continuous cocycle satisfying

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}^t(\theta, \theta_{d+1}) = \bar{B}(\theta + t\omega, \theta_{d+1} + t)\tilde{X}^t(\theta, \theta_{d+1})$$

This cocycle is G-valued. Since $\int_0^t \bar{B}(\theta+s\omega,\theta_{d+1}+s)ds$ commutes with $\bar{B}(\theta+t\omega,\theta_{d+1}+t)$ for all θ, t, we can compute $\tilde{X}^t(\theta,\theta_{d+1})$:

$$\forall t,\theta,\theta_{d+1},\ \tilde{X}^t(\theta,\theta_{d+1}) = \exp(\int_0^t \phi(\theta+s\omega,\theta_{d+1}+s)dsA(\theta-\theta_{d+1}\omega))$$

Thus, for all $\theta \in \mathbb{T}^d$,

$$\tilde{X}^1(\theta,0) = \exp(A(\theta)) = X^1(\theta)$$

and for $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$,

$$\tilde{X}^n(\theta,0) = \tilde{X}^1(\theta+(n-1)\omega,n-1)\dots\tilde{X}^1(\theta,0) = X^1(\theta+(n-1)\omega)\dots X^1(\theta) = X^n(\theta)$$

and for $n \in \mathbb{Z}, n \leq -1$,

$$\tilde{X}^n(\theta,0) = \tilde{X}^{-n}(\theta+n\omega,n)^{-1} = \tilde{X}^{-n}(\theta+n\omega,0)^{-1} = X^{-n}(\theta+n\omega)^{-1} = X^n(\theta)$$

whence the Proposition. □

Remark:
– It is possible to show that if $\theta \mapsto X^1(\theta)$ is homotopic to the identity, which is weaker than supposing that X is G-exponential, then there exists a continuous cocycle whose restriction to integer time coincides with X. However, this cocycle is not G-valued anymore.
– Proposition 2.3.1 extends to any regularity class containing compactly supported functions, in particular the differentiable and Gevrey classes. It cannot be generalized straightforwardly to the analytic class.

Definition: The continuous cocycle $\tilde{X}$ defined in Proposition 2.3.1 is called a suspension of X.

We shall show that $GL(N,\mathbb{C})$-reducibility of a discrete G-exponential cocycle implies $GL(N,\mathbb{C})$-reducibility of its suspension.

Proposition 2.3.2. *Let $\tilde{X}$ be the suspension of a discrete cocycle X which is $GL(N,\mathbb{C})$-reducible. Then $\tilde{X}$ is $GL(N,\mathbb{C})$-reducible.*

Proof: Let $Z \in C^0(\mathbb{T}^d, GL(N,\mathbb{C}))$ and $A \in GL(N,\mathbb{C})$ such that

$$X^n(\theta) = Z(\theta+n\omega)^{-1}A^nZ(\theta)$$

for all θ, n. There exists $B \in gl(N,\mathbb{C})$ such that

$$X^n(\theta) = Z(\theta+n\omega)^{-1}e^{nB}Z(\theta)$$

Let us define, for all $\theta \in \mathbb{T}^d$, $\tilde{Z}(\theta,0) := Z(\theta)$, and for all $t \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{Z}((\theta,0)+t(\omega,1)) = e^{tB}\tilde{Z}(\theta,0)\tilde{X}^t(\theta,0)^{-1}$$

Thus, for all $(\theta,\theta_{d+1}) \in \mathbb{T}^{d+1}$,

$$\tilde{Z}(\theta,\theta_{d+1}) = \tilde{Z}((\theta-\theta_{d+1}\omega,0)+\theta_{d+1}(\omega,1)) = e^{\theta_{d+1}B}Z(\theta-\theta_{d+1}\omega,0)\tilde{X}^{\theta_{d+1}}(\theta-\theta_{d+1}\omega,0)^{-1}$$

The map $(\theta,\theta_{d+1}) \mapsto \tilde{Z}(\theta,\theta_{d+1})$ is periodic in θ and for all θ,θ_{d+1},

$$\begin{aligned}
&\tilde{Z}(\theta,\theta_{d+1}+1) = e^{(\theta_{d+1}+1)B}Z(\theta-(\theta_{d+1}+1)\omega,0)\tilde{X}^{(\theta_{d+1}+1)}(\theta-(\theta_{d+1}+1)\omega,0)^{-1}\\
&= e^{\theta_{d+1}B}e^{B}Z(\theta-(\theta_{d+1}+1)\omega,0)\tilde{X}^{1}(\theta-(\theta_{d+1}+1)\omega,0)^{-1}\tilde{X}^{\theta_{d+1}}(\theta-\theta_{d+1}\omega,1)^{-1}\\
&= e^{\theta_{d+1}B}Z(\theta-\theta_{d+1}\omega,1)\tilde{X}^{\theta_{d+1}}(\theta-\theta_{d+1}\omega,1)^{-1}\\
&= e^{\theta_{d+1}B}Z(\theta-\theta_{d+1}\omega,0)\tilde{X}^{\theta_{d+1}}(\theta-\theta_{d+1}\omega,0)^{-1} = \tilde{Z}(\theta,\theta_{d+1})
\end{aligned} \tag{2.67}$$

so $\tilde{Z}$ is periodic in θ_{d+1}. Moreover, for all θ,θ_{d+1},t,

$$\begin{aligned}
&\tilde{X}^{t}(\theta,\theta_{d+1}) = \tilde{X}^{t+\theta_{d+1}}(\theta-\theta_{d+1}\omega,0)\tilde{X}^{\theta_{d+1}}(\theta-\theta_{d+1}\omega,0)^{-1}\\
&= \tilde{Z}((\theta-\theta_{d+1}\omega,0)+(t+\theta_{d+1})(\omega,1))^{-1}e^{(t+\theta_{d+1})B}\tilde{Z}(\theta-\theta_{d+1}\omega,0)\\
&\tilde{Z}(\theta-\theta_{d+1}\omega,0)^{-1}e^{-\theta_{d+1}B}\tilde{Z}((\theta-\theta_{d+1}\omega,0)+\theta_{d+1}(\omega,1))\\
&= \tilde{Z}((\theta,\theta_{d+1})+t(\omega,1))^{-1}e^{tB}\tilde{Z}(\theta,\theta_{d+1})
\end{aligned} \tag{2.68}$$

whence the $GL(N,\mathbb{C})$-reducibility of $\tilde{X}$. □

Now we can form the analogue, for discrete time, if X is a G-exponential cocycle, of Propositions 2.1.14, 2.2.1, 2.2.3, 2.2.4 and 2.2.5. They come as corollaries of the above.

Proposition 2.3.3. *Let X a discrete G-exponential cocycle where G is within $GL(N,\mathbb{R})$, $SL(N,\mathbb{R})$, $Sp(N,\mathbb{R}), SO(N), SU(N)$ and $GL(N,\mathbb{C})$-reducible. Then X is G-reducible modulo χ_G, with*

$$\chi_G = \begin{cases} 2 & \text{if } G = GL(N,\mathbb{R}), SL(N,\mathbb{R}), Sp(N,\mathbb{R}) \text{ or } G = SO(N)\\ 1 & \text{if } G = SU(N)\end{cases}$$

Proof: Let $\tilde{X}$ be a suspension of X. By Proposition 2.3.2, $\tilde{X}$ is $GL(N,\mathbb{C})$- reducible. Moreover, $\tilde{X}$ is G-valued, so by Propositions 2.1.14, 2.2.1, 2.2.3, 2.2.4 and 2.2.5, $\tilde{X}$ is G-reducible modulo χ_G with $\chi_G = 2$ if $G = GL(N,\mathbb{R}), SL(N,\mathbb{R}), Sp(N,\mathbb{R})$ or $SO(N)$ and $\chi_G = 1$ if $G = SU(N)$. Thus, X is G-reducible modulo χ_G. □

2.3.2 General case

It is possible to extend Theorems 2.0.1 and 2.0.2 to all discrete cocycles, without even assuming that their values are in a connected Lie group, because the proof of Theorems 2.0.1 and 2.0.2 does not essentially use the fact that the cocycle is continuous. This adaptation can also be made in higher regularity.

The definition of a subbundle is the same as in section 2.1.2. If X is a discrete cocycle, an invariant subbundle is a subbundle such that for all $n \in \mathbb{Z}$ and all $\theta \in \mathbb{T}^d$, $X^n(\theta)V(\theta) = V(\theta+n\omega)$. We define a Jordan subbundle of rank k modulo N, a Jordan subbundle and its exponents in the same way as in section 2.1.2, but now t varies in $\mathbb{Z}$ and not in $\mathbb{R}$ anymore. We show in the same way, using part 2. of Lemma 2.1.1, that the exponent of a Jordan subbundle modulo N is well-defined modulo $2i\pi\langle\mathbb{Z}^{d+1},(\frac{\omega}{N},1)\rangle$. We define a generalized (real) Jordan subbundle, its exponent and its generalized (real) Jordan bases in the same way.

Lemmas 2.1.6, 2.1.7, 2.1.10, 2.1.11 and 2.1.13 still hold in the discrete case, but Lemma 2.1.10 will be reformulated as follows :

Lemma 2.3.4. *Let W' be a generalized real Jordan subbundle modulo N with exponent $\alpha + 2i\pi\langle \mathbb{Z}^{d+1}, (\frac{\omega}{N}, 1)\rangle$. Then $W' + U$ is a generalized real Jordan subbundle modulo N with exponent $\alpha + 2i\pi\langle \mathbb{Z}^{d+1}, (\frac{\omega}{N}, 1)\rangle$.*

and Lemma 2.1.13 as follows :

Lemma 2.3.5. *For all $1 \leq j \leq r$, there exists $1 \leq j' \leq r$ such that $\bar{W}_j = W_{j'}$. Moreover, $W_j = \bar{W}_j$ iff $\beta_j \in \pi\langle \mathbb{Z}^{d+1}, (\omega, 1)\rangle$.*

Proposition 2.1.14 can be reformulated in an analogous way :

Proposition 2.3.6. *If X is a real discrete cocycle which is $GL(n, \mathbb{C})$-reducible, then there is a decomposition $\mathbb{R}^n = W \oplus W'$ where*

1. *W is reducible subbundle modulo 2 with a basis $z_1, \dots, z_r$ such that for all $(\theta, t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}$, $X^t(\theta)[z_1(\theta) \ \dots z_r(\theta)] = [z_1(\theta + t\omega) \ \dots z_r(\theta + t\omega)]e^{tA_1}$ where A_1 is a matrix with real spectrum ;*
2. *W' is a reducible subbundle modulo 1 with a basis $z_{r+1}, \dots, z_n$ such that for all θ, t, $X^t(\theta)[z_{r+1}(\theta) \ \dots z_n(\theta)] = [z_{r+1}(\theta + t\omega) \ \dots z_n(\theta + t\omega)]e^{tA_2}$ where $\sigma(A_2) \cap \mathbb{R} + i\pi\langle \mathbb{Z}^{d+1}, (\omega, 1)\rangle \setminus \{0\} = \emptyset$ and if $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2 \in \sigma(A_2)$, then $\beta_1 - \beta_2$ is not in $2\pi\langle \mathbb{Z}^{d+1}, (\omega, 1)\rangle \setminus \{0\}$.*

The proof is exactly the same as in Proposition 2.1.14.

Proposition 2.3.7. *If X is a discrete $SL(n, \mathbb{R})$-valued cocycle which is $GL(n, \mathbb{R})$-reducible, then it is $SL(n, \mathbb{R})$-reducible modulo 2.*

Again, the proof is the same as in Proposition 2.2.1, except that t varies in $\mathbb{Z}$ and not in $\mathbb{R}$ anymore.

Proposition 2.3.8. *If X is a discrete $Sp(n, \mathbb{R})$-valued (resp. $O(n)$-valued) cocycle which is $GL(n, \mathbb{C})$-reducible (resp. $GL(n, \mathbb{C})$-reducible), then it is $Sp(n, \mathbb{R})$-reducible (resp. $O(n)$-reducible) modulo 2.*

The proof is exactly as in Propositions 2.2.3 and 2.2.4, because the fact that t varies in $\mathbb{Z}$ and not in $\mathbb{R}$ does not change the conclusions (we use the second part of Lemma 2.1.1).

Proposition 2.3.9. *If X is a discrete $U(n)$-valued cocycle which is $GL(n, \mathbb{C})$-reducible, then X is $U(n)$-reducible.*

The proof is essentially the same as in the continuous case.

Propositions 2.3.6, 2.3.7, 2.3.8 and 2.3.9 together give Theorem 2.0.3.

2.4 Applications

The preceding sections enable us to complete some other results on the full-measure reducibility of a generic one-parameter family of cocycles.

Definition: $\omega \in \mathbb{R}^d$ is diophantine with constant κ and exponent τ, denoted by $\omega \in DC(\kappa,\tau)$, if for all $n \in \mathbb{Z}^d$, $|\langle n,\omega\rangle| > \frac{\kappa}{|n|^\tau}$.

Definition: Let Λ an interval of $\mathbb{R}$, denote for $h,\delta > 0$ by $C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda)$ the set of the complex-valued functions which are holomorphic on $\{z \in \mathbb{C}^d, |Imz| < h\} \times \{x \in \mathbb{C}, d(x,\Lambda) < \delta\}$ and 1-periodic in z on $\mathbb{R}^d$.

Also denote by $C^\omega_\delta(\Lambda)$ the set of the complex-valued functions which are holomorphic on $\{x \in \mathbb{C}, d(x,\Lambda) < \delta\}$.

Let $C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, \mathcal{G})$ the set of $\mathcal{G}$-valued maps each component of whom is in $C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda)$, and let $C^\omega_\delta(\Lambda,\mathcal{G})$ the set of $\mathcal{G}$-valued maps with components in $C^\omega_\delta(\Lambda)$.

Definition: Let Λ be an interval of $\mathbb{R}$, let $\delta > 0$ and let $A \in C^\omega_\delta(\Lambda, gl(n,\mathbb{C}))$ a one-parameter family of matrices ; we say A satisfies the non-degeneracy condition $ND(r,\chi)$ on an interval Λ if there exist $r \in \mathbb{Z}^+$ and $\chi > 0$ such that for all $\lambda \in \Lambda$, for all $u \in \mathbb{R}$, $\sup_{l\leq r} |\frac{\partial^l g(\lambda,u)}{\partial\lambda^l}| > \chi$ where

$$g(\lambda,u) = \prod_{\alpha_i(\lambda),\alpha_j(\lambda)\in\sigma(A(\lambda)),i\neq j} (\alpha_i(\lambda) - \alpha_j(\lambda) - iu)$$

2.4.1 Full-measure reducibility in the symplectic case

In [HY08], H.He and J.You claim the following :

Theorem 2.4.1. *Suppose $\omega \in DC(\kappa,\tau)$. Let $h,\delta > 0$ and $A \in C^\omega_\delta(\Lambda, gl(n,\mathbb{C}))$ a one-parameter family of matrices satisfying the non-degeneracy condition $ND(r,\chi)$ on an interval Λ. There exists $\epsilon_0 > 0$ depending on κ and τ such that if $F \in C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, gl(n,\mathbb{C})), |F|_{h,\delta} \leq \epsilon_0$, then for almost every $\lambda \in \Lambda$, the continuous cocycle satisfying for all $(\theta,t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$,*

$$\partial_\omega X(\theta) = (A(\lambda) + F(\theta,\lambda))X(\theta)$$

is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible by means of a smooth transformation.

Let us also assume that $A(\lambda) \in sp(2n,\mathbb{R})$ for all $\lambda \in \Lambda$ and $F \in C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, sp(2n,\mathbb{R}))$. Then, as a corollary of Proposition 2.2.3 and of H.He and J.You's result, we can reformulate the above in the symplectic case :

Corollary 2.4.1. *Suppose $\omega \in DC(\kappa,\tau)$. Let $h,\delta > 0$ and $A(\lambda) \in C^\omega_\delta(\Lambda, sp(2n,\mathbb{R}))$ be a one-parameter family of matrices satisfying the non-degeneracy condition $ND(r,\chi)$ on an interval Λ. There exists $\epsilon_0 > 0$ depending on κ,τ such that if $F \in C^\omega_{h,\delta}(\mathbb{T}^d \times \Lambda, sp(2n,\mathbb{R})), |F|_{h,\delta} \leq \epsilon_0$, then for almost all $\lambda \in \Lambda$, the cocycle satisfying for all $(\theta,t) \in \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$,*

$$\partial_\omega X(\theta) = (A(\lambda) + F(\theta,\lambda))X(\theta)$$

is $Sp(2n,\mathbb{R})$-reducible modulo 2 by means of a smooth transformation.

2.4.2 Full-measure reducibility in a compact semi-simple group

In [Kri99c], R.Krikorian proved the following Theorem :

Suppose $\omega \in DC(\kappa,\tau)$. Let A be a generic element of a compact semi-simple group G, $r>0$ and Λ an interval of $\mathbb{R}$. There exists $\epsilon_0>0$ depending on $\kappa,\tau,\Lambda,A,\omega,r$ such that if $F\in C_r^\omega(\mathbb{T}^d,\mathcal{G})$ and $|F|_r\leq\epsilon_0$, then for almost all $\lambda\in\Lambda$, the cocycle satisfying

$$\partial_\omega X(\theta)=(\lambda A+F(\theta))X(\theta)$$

is G-reducible modulo an integer χ_G depending only on G. If $G=U(n)$, then $\chi_G=1$.

As a corollary of H.He and J.You's result and of Proposition 2.2.4, we know as well that if $G=O(n)$, then $\chi_G=2$.

2.4.3 Does one have full-measure reducibility modulo 1 in any Lie group ?

We first point out the following :

Proposition 2.4.2. *If X is a continuous G-valued cocycle which is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible to a cocycle $t\mapsto e^{tB}$ such that the eigenvalues of B are not in $\mathbb{R}+i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$, then X is G-reducible.*

Proof: In the notations of section 2.1, there is a decomposition of $\mathbb{R}^n$ into invariant subbundles $W_1\oplus\dots\oplus W_r$, each $W_j, j\leq r$ being the sum of all Jordan subbundles with the same exponent. By assumption on the eigenvalues of B, none of the subbundles W_j is its own complex conjugate. For all j, let $(u_1^j+iv_1^j,\dots,u_{k_j}^j+iv_{k_j}^j)$ be a global basis of W_j. Then $(u_1^j,v_1^j,\dots,u_{k_j}^j,v_{k_j}^j)$ is a global basis of $(W_j+\bar{W_j})\cap\mathbb{R}^n$. For all θ, let $Z(\theta)$ be the matrix whose columns are $(u_1^j(\theta),v_1^j(\theta),\dots,u_{k_j}^j(\theta),v_{k_j}^j(\theta),1\leq j\leq r)$, then Z is continuous on $\mathbb{T}^d$ and $GL(n,\mathbb{R})$-valued and for all θ,t, there exists $\tilde{B}$ such that $X^t(\theta)=Z(\theta+t\omega)e^{t\tilde{B}}Z(\theta)^{-1}$, so X is $GL(n,\mathbb{R})$-reducible modulo 1.

If $G=GL(n,\mathbb{R})$, the proof is finished. If $G=SL(n,\mathbb{R}),Sp(n,\mathbb{R})$ or $O(n)$, we do exactly as in the proof of 2.2.1, 2.2.3 and 2.2.4, but since, by assumption, only the case 1 can happen, one gets G-reducibility modulo 1. $\square$

Question : Let $A(\lambda)$ be a $\mathcal{G}$-valued one-parameter family satisfying a non-degeneracy condition for all $\lambda\in\Lambda$ and $F\in C_{h,\delta}^\omega(\mathbb{T}^d\times\Lambda)$ sufficiently small. Theorem 2.4.1 tells that the cocycle X_λ satisfying

$$X_\lambda'(t,\theta)=(A(\lambda)+F(\theta,\lambda))X_\lambda(t,\theta)$$

is $GL(n,\mathbb{C})$-reducible for almost all λ to $t\mapsto e^{tB_\lambda}$. Is it true that for almost all λ, the eigenvalues of B_λ are not in $\mathbb{R}+i\pi\langle\mathbb{Z}^d,\omega\rangle$? If it were the case, X_λ would be G-reducible modulo 1 for almost every λ.

Chapitre 3

Presque-réductibilité des cocycles quasi-périodiques symplectiques

Introduction

3.0.4 Présentation du résultat

Soit $n \geq 1$, $d \geq 1, \omega \in \mathbb{R}^d$ et $0 < \kappa < 1, \tau > \max(1, d-1)$. On supposera que ω est diophantien de constante κ et d'exposant τ, c'est-à-dire que

$$\forall\ m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ |\langle m, \omega \rangle| \geq \frac{\kappa}{|m|^\tau} \tag{3.1}$$

On peut aussi supposer sans perte de généralité que $\sup |\omega_i| \leq 1$. On note $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ le tore et $2\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/(2\mathbb{Z}^d)$ le double tore.

Définition: Soit $A : 2\mathbb{T}^d \to sp(n, \mathbb{R})$. Le cocycle quasi-périodique associé à A est la fonction $X : 2\mathbb{T}^d \times \mathbb{R} \to Sp(n, \mathbb{R})$ telle que pour tous $(\theta, t) \in 2\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} X^t(\theta) = A(\theta + t\omega) X^t(\theta);\ X^0(\theta) = Id \tag{3.2}$$

On dit que c'est un cocycle constant si A est constante.

Remarque: Le terme quasi-périodique vient du fait que A est la fonction enveloppe d'une fonction quasi-périodique. En effet, pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$, $t \mapsto A(\theta + t\omega)$ est une fonction quasi-périodique.

Un cocycle constant est toujours de la forme $t \mapsto e^{tA}$.

Nous allons introduire une notion d'équivalence sur les cocycles. Pour cela, il nous faudra préciser la régularité des applications. Donnons donc les définitions et notations suivantes :

Définition: On dit qu'une fonction f est *analytique sur un r-voisinage du tore* (resp. *double tore)* si f est holomorphe sur $\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{C}^d, \sup_j |Im\ x_j| < r\}$ et 1-périodique (resp. 2-périodique) en $Re\ x_j$ pour tout $1 \leq j \leq d$.
Notons $C_r^\omega(\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$ (resp. $C_r^\omega(\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$) l'ensemble des fonctions analytiques sur un r-voisinage du tore dont la restriction à $\mathbb{T}^d$ est à valeurs dans $sp(n, \mathbb{R})$ (resp. $Sp(n, \mathbb{R})$) et $C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$ (resp. $C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$) l'ensemble des fonctions analytiques sur

un r-voisinage du double tore dont la restriction à $2\mathbb{T}^d$ est à valeurs dans $sp(n,\mathbb{R})$ (resp. $Sp(n,\mathbb{R})$). Pour tout $f \in C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ ou $C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$, notons

$$|f|_r = \sup_{|Imx|<r} ||f(x)|| \tag{3.3}$$

où $||.||$ désigne la norme d'opérateur.

Notation : Pour toute fonction $f \in C^1(2\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$, on notera pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$

$$\partial_\omega f(\theta) = \frac{d}{dt} f(\theta + t\omega)_{|t=0} \tag{3.4}$$

la dérivée de f dans la direction ω.

Définition: Soient $r, r' > 0$ et $A, B \in C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$. On dit que A et B sont *conjugués dans* $C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$ s'il existe $Z \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$ tel que pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\partial_\omega Z(\theta) = A(\theta)Z(\theta) - Z(\theta)B(\theta)$$

Si B est constante en θ, on dit que A est *réductible dans* $C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$, ou *réductible par* Z *à* B.
Remarque: Soit X le cocycle quasi-périodique associé à A. La fonction A est réductible par Φ à A_0 si et seulement si

$$\forall (t,\theta),\ X^t(\theta) = \Phi(\theta + t\omega)^{-1} e^{tA_0} \Phi(\theta) \tag{3.5}$$

La réductibilité équivaut aussi au fait que l'application de $2\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^n$ dans lui-même :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta + \omega \\ X^1(\theta) v \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

soit conjuguée à une application χ telle que

$$\frac{d\chi}{d\theta} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Le but de cet article est de montrer qu'au voisinage d'un cocycle constant, tout cocycle analytique sur un r-voisinage du tore à valeurs dans $Sp(n,\mathbb{R})$ est presque-réductible dans un ensemble $C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$ avec $0 < r' < r$.

Nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 3.0.3. *Soit* $A \in sp(n,\mathbb{R})$, $F \in C_r^\omega(\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ *et* $r' < r$. *Il existe* $\epsilon_0 < 1$ *ne dépendant que de* $n, d, \kappa, \tau, ||A||, r - r'$ *tel que si*

$$|F|_r \leq \epsilon_0$$

alors pour tout $\epsilon > 0$, *il existe* $\bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$, $Z_\epsilon \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$ *tels que pour tout* $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\partial_\omega Z_\epsilon(\theta) = (A + F(\theta))Z_\epsilon(\theta) - Z_\epsilon(\theta)(\bar{A}_\epsilon(\theta) + \bar{F}_\epsilon(\theta))$$

où

– $\bar{A}_\epsilon$ *est réductible dans* $C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$,

– $|\bar{F}_\epsilon|_{r'} \leq \epsilon$,
– *et* $|Z_\epsilon - Id|_{r'} \leq 2\epsilon_0^{\frac{1}{2}}$.

De plus, en dimension 2, $Z_\epsilon, \bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon$ *sont continus sur* $\mathbb{T}^d$.

3.0.5 Généralisations et conséquences

Le théorème 3.0.3 dit qu'au voisinage d'un cocycle constant, tous les cocycles symplectiques sont presque-réductibles au sens où ils sont arbitrairement proches d'un cocycle réductible, ce qui signifie que la réductibilité est un phénomène prédominant. Cependant, si la réductibilité implique la presque-réductibilité, l'inverse n'est pas vrai : il existe des cocycles non réductibles même proches d'un cocycle constant.

L'intérêt de la notion de presque-réductibilité est qu'un cocycle presque réductible a une dynamique connue sur un temps très long.

Le théorème 3.0.3 est en fait vrai si l'on suppose F dans une classe plus grande que $C_r^\omega(\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$, à savoir les fonctions de $C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ vérifiant certaines "bonnes propriétés de périodicité" par rapport à la matrice A.

En dimension 2, ce résultat peut se reformuler comme un théorème de densité des cocycles réductibles au voisinage des cocycles constants :

Théorème 3.0.4. *Soit* $A \in sl(2,\mathbb{R}), F \in C_r^\omega(\mathbb{T}^d, sl(2,\mathbb{R}))$. *Il existe* ϵ_0 *ne dépendant que de* $r, d, \kappa, \tau, ||A||$ *tel que si*

$$|F|_r \leq \epsilon_0$$

alors pour tout $\epsilon > 0$ *il existe* $H \in C_{\frac{r}{2}}^\omega(\mathbb{T}^d, sl(2,\mathbb{R}))$ *réductible dans* $C_{\frac{r}{2}}^\omega(\mathbb{T}^d, sl(2,\mathbb{R}))$ *et tel que*

$$|A + F - H|_{\frac{r}{2}} \leq \epsilon$$

Notons qu'il existe un phénomène de perte d'analyticité, mais cette perte est arbitrairement petite.

La démonstration peut s'adapter au cas où les cocycles considérés prennent leurs valeurs dans d'autres groupes de Lie que $Sp(n,\mathbb{R})$, en particulier
$GL(n,\mathbb{R}), O(n), GL(n,\mathbb{C}), U(n)$.

3.0.6 Résultats déjà connus

Un résultat comparable pour les cocycles lisses à valeurs dans les groupes compacts avait été obtenu par R. Krikorian dans [Kri99b] (th.5.1.1). Dans le cas d'un cocycle au-dessus d'une rotation du cercle, le contrôle de l'analyticité est bien meilleur (voir par exemple [AK06]) car il est alors possible d'utiliser des méthodes globales. Dans cet article, nous considérons le cas d'un tore de dimension quelconque. La méthode KAM que nous allons utiliser ici avait déjà produit des résultats de réductibilité en mesure totale pour des cocycles à valeurs dans $SL(2,\mathbb{R})$ ([Eli92], [Amo06]).

Un résultat analogue au théorème 3.0.3 dans le cadre $GL(n,\mathbb{R})$ avait déjà été démontré dans [Eli01] par L.H.Eliasson :

. *Soit* $A \in gl(n,\mathbb{R})$ *et* $F \in C^\omega_r(\mathbb{T}^d, gl(n,\mathbb{R}))$. *Il existe* $\epsilon_0 < 1$ *ne dépendant que de* $n, d, \kappa, \tau, ||A||$ *tel que si* $|F|_r \leq \epsilon_0$, *alors pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $0 < r_\epsilon < r$, $Z_\epsilon \in C^\omega_{r_\epsilon}(2\mathbb{T}^d, GL(n,\mathbb{R}))$ *tels que pour tout* $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\partial_\omega Z_\epsilon(\theta) = (A + F(\theta))Z_\epsilon(\theta) - Z_\epsilon(\theta)(A_\epsilon + F_\epsilon(\theta))$$

où $A_\epsilon \in gl(n,\mathbb{R})$, $F_\epsilon \in C^\omega_{r_\epsilon}(2\mathbb{T}^d, gl(n,\mathbb{R}))$ *et* $|F_\epsilon|_{r_\epsilon} \leq \epsilon$.

Remarque: La presque-réductibilité obtenue ici vaut seulement dans $C^\omega_0(2\mathbb{T}^d, GL(n,\mathbb{R}))$, car a priori la suite de voisinages (r_ϵ) peut tendre vers 0.

La nouveauté du théorème 3.0.3 réside dans le fait qu'il est formulé dans le cadre symplectique, avec une preuve qui peut se généraliser à d'autres groupes de Lie, et surtout que la presque-réductibilité a lieu ici sur un voisinage fixe du tore et que celui-ci est de dimension plus grande que 1.

Notons que, comme dans [Eli01], la perte de périodicité dans le théorème 3.0.3 est inévitable a priori dans le groupe symplectique de dimension plus grande que 2. La notion de "bonnes propriétés de périodicité" a pour but de s'assurer qu'un seul doublement de période suffit. Le cadre symplectique introduit de nouvelles contraintes pour éliminer les résonances, par rapport au cadre réel, mais ces contraintes n'ont pas de conséquences sur la construction de la fonction de renormalisation, ce qui explique que l'on n'ait pas plus de perte de périodicité que dans le cadre $GL(n,\mathbb{R})$. On retrouve donc, comme dans [Cha], le fait qu'un seul doublement de période suffit dans le cas d'un groupe symplectique réel.

3.0.7 Plan de l'article

La preuve des théorèmes 3.0.3 et 3.0.4 reprend à peu près le même schéma de démonstration que dans [Eli01] ; il s'agit d'une preuve par itération de type KAM. En voici les principales étapes :

– Construction d'une renormalisation Φ d'ordre $R, \bar{N}$ (proposition 3.2.3) pour $R, N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bien choisis.

  Notons qu'en dimension 2, Φ est telle que pour toute fonction H continue sur $\mathbb{T}^d$, $\Phi H \Phi^{-1}$ est continue sur $\mathbb{T}^d$.

– Résolution de l'équation homologique (proposition 3.3.2) : si $\tilde{A}$ a un spectre vérifiant certaines conditions diophantiennes et que $\tilde{F}$ est une fonction qui a certaines bonnes propriétés de périodicité relatives à $\tilde{A}$, alors il existe une solution $\tilde{X}$ de l'équation

$$\partial_\omega \tilde{X} = [\tilde{A}, \tilde{X}] + \tilde{F}^{R\bar{N}};\ \hat{\tilde{X}}(0) = 0$$

  qui a les mêmes propriétés de périodicité que $\tilde{F}$; elle prend ses valeurs dans la même algèbre de Lie que $\tilde{F}$. De plus, elle vérifie une bonne estimation quitte à perdre un peu d'analyticité.

– Lemme inductif (proposition 3.5.2) : Si $\tilde{F} \in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ a certaines propriétés de périodicité (relatives à $\tilde{A}$), si

$$\partial_\omega \Psi = \bar{A}\Psi - \Psi\tilde{A}$$

et $\bar{F} = \Psi \tilde{F} \Psi^{-1}$, alors il existe $Z \in C^{\omega}_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$ telle que

$$\partial_\omega Z = (\bar{A} + \bar{F})Z - Z(\bar{A}' + \bar{F}') \tag{3.8}$$

où $\bar{A}'$ est réductible, $\bar{F}'$ est beaucoup plus petit que $\bar{F}$, Z est proche de l'identité et $\Psi'^{-1}\bar{F}'\Psi'$ a des propriétés de périodicité relatives à A' analogues à celles de $\tilde{F}$.

L'estimation de $\bar{F}'$ dépend de $\tilde{F} - \tilde{F}^{R\bar{N}}$, de la fonction de renormalisation Φ, et de la solution $\tilde{X}$ de l'équation homologique.

– Itération du lemme inductif (théorème 3.5.4) : On itèrera le lemme 3.5.2 de manière à obtenir des estimations de fonctions analytiques sur une suite de voisinages du tore qui ne tend pas vers 0 grâce à un lemme numérique (lemme 3.5.3), pour réduire arbitrairement la perturbation.

  Remarque: La fonction de renormalisation se construit selon le même principe que dans [Eli01], mais ici elle permet d'éliminer les résonances à un ordre $R\bar{N}$ qui est beaucoup plus grand que le paramètre $\bar{N}$ qui apparaît dans son estimation. Pour pouvoir itérer le lemme inductif sans que le rayon d'analyticité tende vers 0, on exploitera le paramètre R pour construire une fonction de renormalisation d'ordre $R, \bar{N}$ où $\bar{N}$ est indépendant de la perte d'analyticité. Ainsi, la fonction de renormalisation pourra rester sous contrôle sur un voisinage du tore qui ne tendra pas vers 0.

3.0.8 Notations

On notera $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire euclidien complexe, avec la convention qu'il est antilinéaire en la deuxième variable. Pour tout opérateur linéaire M, on notera M^* son adjoint, égal à la transposée de M dans le cas où M est réel. On notera aussi $M_{\mathcal{N}}$ la partie nilpotente de M, c'est-à-dire : si $M = PAP^{-1}$ avec A en forme normale de Jordan, et si A_D représente la partie diagonale de A, alors $M_{\mathcal{N}} = P(A - A_D)P^{-1}$. Pour simplifier l'écriture, si $A : 2\mathbb{T}^d \to GL(n, \mathbb{C})$, on notera A^{-1} la fonction $\theta \mapsto A(\theta)^{-1}$. Pour tout $m = (m_1, \dots, m_d) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$, on notera $\mid m \mid = \mid m_1 \mid + \cdots + \mid m_d \mid$. On désignera par J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

3.1 Bonnes propriétés de périodicité

Commençons par introduire quelques définitions. La notion de trivialité par rapport à une décomposition permettra d'expliciter plus facilement les fonctions de renormalisation ; les bonnes propriétés de périodicité ont déjà été introduites dans [Eli01] et permettent de s'assurer, à l'itération du lemme inductif, qu'un seul doublement de période est nécessaire.

3.1.1 Décompositions invariantes

Définition: $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_R\}$ est une *décomposition de* $\mathbb{C}^n$ si $\mathbb{C}^n = \bigoplus_j L_j$ et pour tout $L \in \mathcal{L}$, $\bar{L} \in \mathcal{L}$.

Définition: Soient $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ des décompositions de $\mathbb{C}^n$. On dit que $\mathcal{L}$ est *plus fine que* $\mathcal{L}'$ si pour tout $L \in \mathcal{L}$, il existe $L' \in \mathcal{L}'$ tel que $L \subset L'$; on dit que $\mathcal{L}$ est *strictement plus fine que* $\mathcal{L}'$ si $\mathcal{L}$ est plus fine que $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}'$.

Définition: Soit $A \in gl(n, \mathbb{R})$; on dit que $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_s\}$ est une *A-décomposition*, ou *décomposition A-invariante*, si c'est une décomposition de $\mathbb{C}^n$ et que pour tout i, $AL_i \subset L_i$. Les L_i sont les *sous-espaces* de $\mathcal{L}$.

Remarque: Une A-décomposition est toujours moins fine que la décomposition en sous-espaces propres généralisés. Ainsi, si deux matrices A et A' ont la même décomposition en sous-espaces propres généralisés, alors une A-décomposition est une A'-décomposition.

Notation : Soit $\mathcal{L}$ une A-décomposition. Pour tout $L \in \mathcal{L}$, on note $\sigma(A_{|L})$ le spectre de A restreint au sous-espace L.

Définition: Soit $\kappa' \geq 0$. On notera $\mathcal{L}_{A,\kappa'}$ l'unique A-décomposition $\mathcal{L}$ telle que pour tous $L \neq L' \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \sigma(A_{|L})$ et $\beta \in \sigma(A_{|L'}) \Rightarrow |\alpha - \beta| > \kappa'$ et qu'aucune A-décomposition strictement plus fine que $\mathcal{L}$ n'a cette propriété.

Définition: Soit $A \in gl(n, \mathbb{R})$. On note $\mathcal{L}_A$ la décomposition de $\mathbb{C}^n$ qui est l'ensemble des sous-espaces propres généralisés de A.

Remarque: On fera attention au fait que $\mathcal{L}_A$ n'est pas forcément identique à $\mathcal{L}_{A,0}$. En général $\mathcal{L}_A$ est plus fine.

Définition: Soit $\mathcal{L}$ une décomposition de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $u \in \mathbb{C}^n$, il existe une unique décomposition $u = \sum_{L \in \mathcal{L}} u_L$ avec $u_L \in L$ pour tout $L \in \mathcal{L}$. Pour tout $L \in \mathcal{L}$, on appelle *projection sur L relative à* $\mathcal{L}$, et on note $P_L^{\mathcal{L}}$, l'application définie par $P_L^{\mathcal{L}} u = u_L$.

Remarque: Soit $A \in gl(n, \mathbb{R})$ et $\kappa' > 0$. Si $\mathcal{L}$ est une A-décomposition moins fine que $\mathcal{L}_{A,\kappa'}$, alors on a le lemme suivant, tiré de [Eli01], appendice, lemme A [1] :

Lemme 3.1.1. *Il existe une constante $C_0 \geq 1$ ne dépendant que de n telle que tout sous-espace $L \in \mathcal{L}$ vérifie*

$$|| P_L^{\mathcal{L}} || \leq C_0 \left(\frac{1+ || A_{\mathcal{N}} ||}{\kappa'} \right)^{n(n+1)} \tag{3.10}$$

Par la suite, on notera toujours C_0 cette constante fixée dans le lemme 3.1.1.

Définition: Une (A, κ', γ)-*décomposition* est une A-décomposition $\mathcal{L}$ telle que pour tout $L \in \mathcal{L}$, la projection sur L relative à $\mathcal{L}$ vérifie l'estimation

$$|| P_L^{\mathcal{L}} || \leq C_0 \left(\frac{1+ || A_{\mathcal{N}} ||}{\kappa'} \right)^{\gamma} \tag{3.11}$$

Remarque: Pour $A \in gl(n, \mathbb{R})$, on a toujours $A = \sum_{L, L' \in \mathcal{L}} P_L^{\mathcal{L}} A P_{L'}^{\mathcal{L}}$. En particulier, si $\mathcal{L}$ est une A-décomposition, alors $A = \sum_{L \in \mathcal{L}} P_L^{\mathcal{L}} A P_L^{\mathcal{L}}$.

1. Le lemme A de [Eli01] donne en fait une estimation en fonction de $|| A ||$, mais il apparaît clairement dans sa démonstration que l'estimation ne dépend en fait que de $A_{\mathcal{N}}$.

3.1.2 Trivialité et bonnes propriétés de périodicité par rapport à une décomposition

Définition: Soit $\mathcal{L}$ une décomposition de $\mathbb{C}^n$. On dit qu'une fonction Ψ est *triviale par rapport à* $\mathcal{L}$ s'il existe $\{m_L,\ L \in \mathcal{L}\} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$, tels que pour tout L, $m_L = -m_{\bar{L}}$ et que pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\Psi(\theta) = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi\langle m_L, \theta\rangle} P_L^{\mathcal{L}} \tag{3.12}$$

Définition: On dit que la fonction Ψ est *triviale* s'il existe une décomposition $\mathcal{L}$ telle que Ψ est triviale par rapport à $\mathcal{L}$.

Remarque:
- Si Ψ est triviale par rapport à $\mathcal{L}$ et que $\mathcal{L}'$ est plus fine que $\mathcal{L}$, alors elle est triviale par rapport à $\mathcal{L}'$.
- Si $\Phi, \Psi : 2\mathbb{T}^d \to GL(n, \mathbb{C})$ sont triviales par rapport à $\mathcal{L}$, alors le produit $\Phi\Psi$ est trivial par rapport à $\mathcal{L}$.
- Si Φ est triviale par rapport à une A-décomposition $\mathcal{L}$, alors pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$, $[A, \Phi(\theta)] = 0$.

Lemme 3.1.2. *Soit $\mathcal{L}$ une décomposition de $\mathbb{C}^n$, $\{m_L,\ L \in \mathcal{L}\} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ et Ψ définie par*

$$\Psi(\theta) = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi\langle m_L, \theta\rangle} P_L^{\mathcal{L}} \tag{3.13}$$

Alors Ψ est réelle si et seulement si elle est triviale par rapport à $\mathcal{L}$.

Démonstration: Supposons que Ψ est triviale par rapport à $\mathcal{L}$. Alors dans (3.13), on peut supposer que pour tout $L \in \mathcal{L}$, $m_L = -m_{\bar{L}}$. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\overline{\Psi(\theta)u} = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi\langle -m_L, \theta\rangle} \overline{P_L^{\mathcal{L}} u} = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi\langle m_{\bar{L}}, \theta\rangle} P_{\bar{L}}^{\mathcal{L}} u = \Psi(\theta)u \tag{3.14}$$

Donc $\Psi(\theta)$ est réelle.

Inversement, supposons que Ψ est réelle. Alors pour tout θ,

$$\Psi(\theta) = \overline{\Psi(\theta)} \tag{3.15}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi\langle m_L, \theta\rangle} P_L^{\mathcal{L}} = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi\langle -m_L, \theta\rangle} \overline{P_L^{\mathcal{L}}} = \sum_{L \in \mathcal{L}} e^{2i\pi\langle -m_L, \theta\rangle} P_{\bar{L}}^{\mathcal{L}} \tag{3.16}$$

donc $m_L = -m_{\bar{L}}$. $\square$

Définition: On dit que $\mathcal{L}$ est une *décomposition symplectique* si c'est une décomposition de $\mathbb{C}^n$ avec n pair et que pour tout $L \in \mathcal{L}$, il existe un unique $L' \in \mathcal{L}$ tel que $\langle L, JL'\rangle \neq 0$.

Remarque:
- Pour tout L, il existe au moins un L' tel que $\langle L, JL'\rangle \neq 0$. Cela vient de la non-dégénérescence de la forme symplectique $\langle ., J.\rangle$.

– Si $A \in sp(n,\mathbb{R})$, alors toute A-décomposition $\mathcal{L}$ moins fine que $\mathcal{L}_{A,0}$ est une décomposition symplectique. En effet, soient $L, L' \in \mathcal{L}$ tels que $\langle L, JL'\rangle \neq 0$; soient $v \in L, v' \in L'$ des vecteurs propres de A tels que $\langle v, Jv'\rangle \neq 0$ et λ, λ' leurs valeurs propres associées. Alors

$$\lambda\langle v, Jv'\rangle = \langle Av, Jv'\rangle = \langle v, A^*Jv'\rangle = -\langle v, JAv'\rangle = -\bar{\lambda}'\langle v, Jv'\rangle \tag{3.17}$$

et comme $\langle v, Jv'\rangle \neq 0$, alors $\lambda = -\bar{\lambda}'$.

Lemme 3.1.3. *Soit $\mathcal{L}$ une décomposition symplectique et $\{m_L, L \in \mathcal{L}\}$ une famille d'éléments de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$. Soit $\Psi = \sum_{L\in\mathcal{L}} e^{2i\pi\langle m_L,\cdot\rangle} P_L^{\mathcal{L}}$. Alors Ψ est à valeurs dans $Sp(n,\mathbb{R})$ si et seulement si*
- *Ψ est triviale par rapport à $\mathcal{L}$*
- *et si $\langle L, JL'\rangle \neq 0$, alors $m_L = m_{L'}$.*

Démonstration: Par le lemme 3.1.2, Ψ est réelle si et seulement si elle est triviale par rapport à $\mathcal{L}$. Supposons donc Ψ réelle.

Montrons que si pour tous $L, L' \in \mathcal{L}$, $\langle L, JL'\rangle \neq 0 \Rightarrow m_L = m_{L'}$, alors Ψ est à valeurs dans $Sp(n,\mathbb{R})$. Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\langle u, \Psi(\theta)^* J\Psi(\theta)v\rangle = \langle \Psi(\theta)u, J\Psi(\theta)v\rangle = \sum_L e^{2i\pi\langle m_L - m_{M(L)},\theta\rangle}\langle P_L^{\mathcal{L}}u, JP_{M(L)}^{\mathcal{L}}v\rangle \tag{3.18}$$

où $M(L)$ est l'unique sous-espace tel que $\langle L, JM(L)\rangle \neq 0$. Supposons que si $\langle L, JL'\rangle \neq 0$, alors $m_L = m_{L'}$. On a donc

$$\langle u, \Psi(\theta)^* J\Psi(\theta)v\rangle = \sum_L \langle P_L^{\mathcal{L}}u, JP_{M(L)}^{\mathcal{L}}v\rangle = \langle u, Jv\rangle \tag{3.19}$$

et donc $\Psi(\theta) \in Sp(n,\mathbb{R})$.

Inversement, montrons que si $\Psi(\theta) \in Sp(n,\mathbb{R})$ et si $\langle L, JL'\rangle \neq 0$, alors $m_L = m_{L'}$. Supposons $\Psi(\theta) \in Sp(n,\mathbb{R})$. Pour tous vecteurs u, v,

$$\langle u, Jv\rangle = \langle u, \Psi(\theta)^* J\Psi(\theta)v\rangle = \langle \Psi(\theta)u, J\Psi(\theta)v\rangle \tag{3.20}$$

Si $u \in L$ et $v \in m(L)$ sont tels que $\langle u, Jv\rangle \neq 0$, alors

$$\langle u, Jv\rangle = \langle \Psi(\theta)u, J\Psi(\theta)v\rangle = e^{2i\pi\langle m_L - m_{M(L)},\theta\rangle}\langle u, Jv\rangle \tag{3.21}$$

donc $m_L = m_{M(L)}$. $\square$

Définissons les propriétés de périodicité.

Définition: Soit $\mathcal{L}$ une décomposition de $\mathbb{C}^n$. On dit que $F \in C^0(2\mathbb{T}^d, gl(n,\mathbb{R}))$ *a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à* $\mathcal{L}$ s'il existe Φ triviale par rapport à $\mathcal{L}$ telle que $\Phi^{-1}F\Phi$ soit continue sur $\mathbb{T}^d$.
Pour préciser la famille (m_L) qui définit Φ, on dira que F *a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à* $\mathcal{L}$ *et* (m_L).

Remarque:

– Si $F \in C^0(2\mathbb{T}^d, gl(n,\mathbb{R}))$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une décomposition $\mathcal{L}$ et que Φ est triviale par rapport à $\mathcal{L}$, alors $\Phi F \Phi^{-1}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$.
– Si $\mathcal{L}'$ est une décomposition de $\mathbb{C}^n$ qui est plus fine que $\mathcal{L}$ et que F a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$, alors F a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}'$.
– Soit $\mathcal{L}$ une décomposition de $\mathbb{C}^n$ et $(m_L)_{L\in\mathcal{L}}$ une famille d'éléments de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$. Si $F_1, F_2 \in C^0(2\mathbb{T}^d, gl(n,\mathbb{R}))$ ont de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et (m_L), alors le produit F_1F_2 a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et (m_L).

3.2 Elimination des résonances

Par la suite nous serons amenés à résoudre une équation homologique avec une estimation sur la norme de la solution sur un voisinage du tore ; pour que cette estimation soit suffisante, il sera nécessaire que les coefficients de cette équation vérifient certaines conditions diophantiennes :

Soit $A \in gl(n,\mathbb{R})$ et $0 < \kappa' < 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

Définition: Soit $z \in \mathbb{C}, \nu \in \{1,2\}$. On dit que z est *diophantien modulo ν par rapport à ω, de constante κ', d'exposant τ et d'ordre N* si pour tout $m \in \frac{1}{\nu}\mathbb{Z}^d$ tel que $0 < |m| \leq N$,

$$|z - 2i\pi\langle m,\omega\rangle| \geq \frac{\kappa'}{|m|^\tau} \tag{3.22}$$

On note cette propriété

$$z \in DC^N_{\omega,\nu}(\kappa',\tau)$$

Notons que

$$DC^N_{\omega,2}(\kappa',\tau) \subset DC^N_{\omega,1}(\kappa',\tau) \tag{3.23}$$

et que tout nombre réel z est dans $DC^N_{\omega,2}(\frac{\kappa}{2^\tau},\tau)$ car pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$,

$$|z - 2i\pi\langle m,\omega\rangle| = \left(|z|^2 + (2\pi|\langle m,\omega\rangle|)^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\pi\kappa}{|2m|^\tau} \geq \frac{\kappa}{|2m|^\tau} \tag{3.24}$$

Remarque: On fera attention au fait que dans la définition ci-dessus, on a restreint la condition aux m non nuls, donc (3.22) a bien un sens.

Définition: On dit que A *a un spectre $DC^N_\omega(\kappa',\tau)$* si

$$\forall \alpha,\beta \in \sigma(A),\ \alpha - \beta \in DC^N_{\omega,1}(\kappa',\tau) \tag{3.25}$$

et si

$$\forall \alpha,\beta \in \sigma(A),\ \alpha \neq \bar{\beta} \Rightarrow \alpha - \beta \in DC^N_{\omega,2}(\kappa',\tau) \tag{3.26}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit A dans l'algèbre de Lie $sp(n,\mathbb{R})$. On veut montrer qu'il existe $\kappa' > 0$, $\tilde{A} \in sp(n,\mathbb{R})$ tels que $\tilde{A}$ a un spectre $DC^N_\omega(\kappa',\tau)$ et que A et $\tilde{A}$ soient conjugués (au sens des cocycles, selon la définition donnée dans l'introduction).

Pour cela, on construira une famille $(m_1, \ldots, m_n)$ telle que

$$\forall\ \alpha_j, \alpha_k \in \sigma(A),\ \alpha_j - \alpha_k + 2i\pi\langle m_j - m_k, \omega\rangle \in DC^N_{\omega,1}(\kappa', \tau) \tag{3.27}$$

et

$$\forall\ \alpha_j, \alpha_k \in \sigma(A),\ \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k + 2i\pi\langle m_j - m_k, \omega\rangle \in DC^N_{\omega,2}(\kappa', \tau) \tag{3.28}$$

Nous construirons la fonction Φ dite de renormalisation conjuguant (au sens des cocycles) A à la matrice obtenue en remplaçant dans A la valeur propre α_j par $\alpha_j + 2i\pi\langle m_j, \omega\rangle$, puis nous vérifierons que Φ est à valeurs dans $Sp(n, \mathbb{R})$.

3.2.1 Conditions diophantiennes

Lemme 3.2.1. *Soit $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ tel que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \overline{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}$. Soit $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ et $\kappa' \leq \frac{\kappa}{n(8\tilde{N})^\tau}$. Il existe $m_1, \ldots, m_n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ avec $\sup_j |m_j| \leq \tilde{N}$, tels qu'en notant pour tout j*

$$\tilde{\alpha}_j = \alpha_j - 2i\pi\langle m_j, \omega\rangle$$

alors pour tous $1 \leq j, k \leq n$,

$$\alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow m_j = -m_k \tag{3.29}$$

$$\alpha_j = -\bar{\alpha}_k \Rightarrow m_j = m_k \tag{3.30}$$

$$|\alpha_j - \alpha_k| \leq \kappa' \Rightarrow m_j = m_k \tag{3.31}$$

$$|Im\tilde{\alpha}_j| \leq |Im\alpha_j| \tag{3.32}$$

$$\alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow \tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_k \in DC^{\tilde{N}}_{\omega,1}(\kappa', \tau) \tag{3.33}$$

et

$$\alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \Rightarrow \tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_k \in DC^{\tilde{N}}_{\omega,2}(\kappa', \tau) \tag{3.34}$$

et tels que si tous les m_j ne sont pas nuls, alors il existe j, k avec

$$|\alpha_j - \alpha_k| \geq \kappa',\ |\tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_k| < \kappa' \tag{3.35}$$

Démonstration: Nous allons procéder en deux étapes. La première consistera à éliminer les éventuelles résonances entre deux valeurs propres dont les parties imaginaires sont presque opposées. La deuxième consistera, une fois cette première série de résonances éliminée, à supprimer les résonances entre valeurs propres dont les parties imaginaires sont loin d'être opposées.

- Soit $1 \leq j \leq n$. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{Z}^d, 0 <\mid m \mid\leq \tilde{N}$ tel que

$$\mid 2Im\alpha_j - 2\pi\langle m, \omega\rangle \mid< \frac{\kappa'}{\mid m \mid^\tau} \tag{3.36}$$

alors on pose $\alpha'_j = \alpha_j - 2i\pi\langle \frac{m}{2}, \omega\rangle$. Sinon on pose $\alpha'_j = \alpha_j$. Remarquons que si

$$|\alpha_j - \alpha_k| \leq \kappa'$$

et qu'il existe $m_j \neq m_k$ tels que

$$\mid 2Im\alpha_j - 2\pi\langle m_j, \omega\rangle \mid < \frac{\kappa'}{\mid m_j \mid^\tau} \tag{3.37}$$

et

$$\mid 2Im\alpha_k - 2\pi\langle m_k, \omega\rangle \mid < \frac{\kappa'}{\mid m_k \mid^\tau} \tag{3.38}$$

alors

$$\begin{aligned} \mid 2i\pi\langle m_j - m_k, \omega\rangle \mid &\leq \mid 2Im\alpha_j - 2\pi\langle m_j, \omega\rangle \mid + \mid 2Im\alpha_k - 2\pi\langle m_k, \omega\rangle \mid + \kappa' \\ &< \frac{\kappa'}{\mid m_j \mid^\tau} + \frac{\kappa'}{\mid m_k \mid^\tau} + \kappa' \leq \frac{\kappa}{\mid m_j - m_k \mid^\tau} \end{aligned} \tag{3.39}$$

ce qui est impossible. Ainsi les conditions (3.29) à (3.33) sont vérifiées avec $\alpha'_j = \tilde{\alpha}_j$ et m_j tel que

$$\alpha_j - \alpha'_j = 2i\pi\langle m_j, \omega\rangle \tag{3.40}$$

• Soit $I_{-r}, \ldots, I_r$ la partition la plus fine de $\{1, \ldots, n\}$ telle que

$$\mid Im(\alpha'_j - \alpha'_k) \mid \leq \kappa' \Rightarrow \exists -r \leq r' \leq r \mid j, k \in I_{r'} \tag{3.41}$$

et numérotons-là de manière à ce que

$$r' < r'' \Rightarrow \forall j \in I_{r'}, \forall k \in I_{r''}, Im\alpha'_j \leq Im\alpha'_k \tag{3.42}$$

Notons que I_0 peut être vide. Procédons par récurrence sur r' pour montrer la propriété $\mathcal{P}(r')$ suivante :

. *Il existe* $m'_1, m'_{-1}, \ldots, m'_{r'}, m'_{-r'}$ *avec* $\sup_{|j| \leq r'} |m'_j| \leq \tilde{N}$ *tels que les propriétés* (3.29) *à* (3.34) *soient vérifiées pour tous* $-r' \leq r_1, r_2 \leq r', j \in I_{r_1}, k \in I_{r_2}$ *avec* m'_j *à la place des* m_j *et* α'_j *à la place des* α_j.

• Cas $r' = 0$: si I_0 est vide, alors $\mathcal{P}(0)$ est automatiquement vraie. Supposons que I_0 ne soit pas vide. Alors pour tout $j, k \in I_0$ et tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ tel que $0 < \mid m \mid \leq \tilde{N}$,

$$\mid \alpha'_j - \alpha'_k - 2i\pi\langle m, \omega\rangle \mid \geq \mid Im(\alpha'_j - \alpha'_k) - 2\pi\langle m, \omega\rangle \mid \geq \frac{\kappa}{\mid m \mid^\tau} - n\kappa' \geq \kappa' \tag{3.43}$$

donc $\alpha'_j - \alpha'_k \in DC^{\tilde{N}}_{\omega,2}(\kappa', \tau)$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Soit $r' \leq r - 1$. Supposons que $\mathcal{P}(r')$ soit vraie. Considérons $I_{r'+1}$ et $I_{-r'-1}$. Il y a deux cas possibles.

– Il existe $-r' \leq r'' \leq r', j \in I_{r''}, k \in I_{r'+1}$ et $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ tel que $\mid m \mid \leq \tilde{N}$ et

$$\mid \alpha'_j - \alpha'_k - 2i\pi\langle m_{r''} + m, \omega\rangle \mid < \frac{\kappa'}{\mid m \mid^\tau} \tag{3.44}$$

– le cas précédent n'est pas vérifié.

Dans le premier cas, posons $m'_{r'+1} = m = -m'_{-r'-1}$. Dans le deuxième cas, posons $m'_{r'+1} = m'_{-r'-1} = 0$.

Les nombres $m'_{r'+1}$ et $m'_{-r'-1}$ sont indépendants de j, k. En effet, supposons qu'il existe $j_1, j_2 \in I_{r_1}, k_1, k_2 \in I_{r_2}, m_1 \neq m_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ tels que pour $l = 1, 2$,

$$\mid \alpha'_{j_l} - \alpha'_{k_l} - 2i\pi\langle m_l, \omega\rangle \mid < \frac{\kappa'}{\mid m_l \mid^\tau} \tag{3.45}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mid 2\pi\langle m_1 - m_2, \omega\rangle \mid &\leq \mid Im\alpha'_{j_1} - Im\alpha'_{k_1} - 2\pi\langle m_1, \omega\rangle \mid \\ &+ \mid Im\alpha'_{j_2} - Im\alpha'_{k_2} - 2\pi\langle m_2, \omega\rangle \mid \\ &+ \mid Im(\alpha'_{j_1} - \alpha'_{j_2}) \mid + \mid Im(\alpha'_{k_1} - \alpha'_{k_2}) \mid \\ &\leq \frac{\kappa'}{\mid m_1 \mid^\tau} + \frac{\kappa'}{\mid m_2 \mid^\tau} + 2n\kappa' \leq \frac{\kappa}{\mid m_1 - m_2 \mid^\tau} \end{aligned} \tag{3.46}$$

ce qui est impossible.

Ainsi $\mathcal{P}(r'+1)$ est vérifiée.

• Une fois définis $m'_1, \ldots, m'_r, m'_{-1}, \ldots, m'_{-r}$, les conditions (3.29) à (3.34) sont vérifiées avec pour tout $j \in I_{r'}, \tilde{\alpha}_j = \alpha'_j - 2i\pi\langle m'_{r'}, \omega\rangle$ et m_j tel que

$$\alpha_j - \tilde{\alpha}_j = 2i\pi\langle m_j, \omega\rangle \tag{3.47}$$

La condition (3.35) est évidente par construction. □

Lemme 3.2.2. *Soit* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C}$ *tels que* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = \overline{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}}$. *Pour tous* $R, N \in \mathbb{N}, N \geq 2, R \geq 2$, *il existe* $\bar{N}$ *tel que*

$$N \leq \bar{N} \leq R^{\frac{1}{2}n(n-1)}N$$

et $m_1, \ldots, m_n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ *avec*

$$\sup_j |m_j| \leq 2\bar{N} \tag{3.48}$$

tels qu'en notant

$$\tilde{\alpha}_j = \alpha_j - 2i\pi\langle m_j, \omega\rangle$$

et

$$\kappa'' = \frac{\kappa}{n(8R^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}N)^\tau}$$

les conditions (3.29) *à* (3.32) *du lemme 3.2.1 sont satisfaites avec* $\kappa' = \kappa''$, *et tels que*

$$\forall j,k,\ \ \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow \tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_k \in DC_{\omega,1}^{R\bar{N}}(\kappa'',\tau) \tag{3.49}$$

et

$$\forall j,k,\ \ \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \Rightarrow \tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_k \in DC_{\omega,2}^{R\bar{N}}(\kappa'',\tau) \tag{3.50}$$

Démonstration: Si les α_j vérifient pour tous j,k

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k \in DC_{\omega,1}^{RN}(\kappa'',\tau) \\ \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k \in DC_{\omega,2}^{RN}(\kappa'',\tau) \end{array}\right. \tag{3.51}$$

alors on a fini avec $\bar{N} = N$ et $m_1 = \cdots = m_n = 0$.

Supposons que (3.51) ne soit pas vérifiée. Alors on applique le lemme 3.2.1 avec $\tilde{N} = RN, \kappa' = \kappa''$ pour obtenir $m_1^1, \ldots, m_n^1$ tels que

$$\forall j,k,\ \ \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow m_j^1 = -m_k^1 \tag{3.52}$$

$$\forall j,k,\ \ \alpha_j = -\bar{\alpha}_k \Rightarrow m_j^1 = m_k^1 \tag{3.53}$$

$$\forall j,k,\ \ |\alpha_j - \alpha_k| \leq \kappa'' \Rightarrow m_j^1 = m_k^1 \tag{3.54}$$

$$\forall j,\ \ |Im\alpha_j - 2i\pi\langle m_j^1, \omega\rangle| \leq |Im\alpha_j| \tag{3.55}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k - 2i\pi\langle m_j^1 - m_k^1, \omega\rangle \in DC_{\omega,1}^{RN}(\kappa'',\tau) \\ \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k - 2i\pi\langle m_j^1 - m_k^1, \omega\rangle \in DC_{\omega,2}^{RN}(\kappa'',\tau) \end{array}\right. \tag{3.56}$$

et qu'il existe j_1, k_1 tels que $\mid Im(\alpha_{j_1} - \alpha_{k_1}) - 2i\pi\langle m_{j_1}^1 - m_{k_1}^1, \omega\rangle \mid < \kappa''$.

Supposons qu'on ait construit $m_1^r, \ldots, m_n^r$ tels que $\sup |m_j^r| \leq (R + R^2 + \cdots + R^r)N$ et que pour tous j,k,

$$\forall j,k,\ \ \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow m_j^r = -m_k^r \tag{3.57}$$

$$\forall j,k,\ \ \alpha_j = -\bar{\alpha}_k \Rightarrow m_j^r = m_k^r \tag{3.58}$$

$$\forall j,k,\ \ |\alpha_j - \alpha_k| \leq \kappa'' \Rightarrow m_j^r = m_k^r \tag{3.59}$$

$$\forall j,\ \ |Im\alpha_j - 2i\pi\langle m_j^r, \omega\rangle| \leq |Im\alpha_j| \tag{3.60}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k - 2i\pi\langle m_j^r - m_k^r, \omega\rangle \in DC_{\omega,1}^{R^rN}(\kappa'',\tau) \\ \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k - 2i\pi\langle m_j^r - m_k^r, \omega\rangle \in DC_{\omega,2}^{R^rN}(\kappa'',\tau) \end{array}\right. \tag{3.61}$$

et qu'il existe $(j_1, k_1), \ldots, (j_r, k_r)$ tous distincts tel que pour tout $l \leq r$,

$$\mid Im\alpha_{j_l} - Im\alpha_{k_l} - 2i\pi\langle m_{j_l}^r - m_{k_l}^r, \omega\rangle \mid < \kappa'' \tag{3.62}$$

Si de plus on a pour tous j,k

$$\begin{cases} \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k - 2i\pi\langle m_j^r - m_k^r, \omega\rangle \in DC_{\omega,1}^{R^{r+1}N}(\kappa'', \tau) \\ \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k - 2i\pi\langle m_j^r - m_k^r, \omega\rangle \in DC_{\omega,2}^{R^{r+1}N}(\kappa'', \tau) \end{cases} \tag{3.63}$$

alors on a fini avec $\bar{N} = R^r N$ et $m_j = m_j^r$ puisqu'on a bien

$$| m_j^r | \leq (R + R^2 + \cdots + R^r)N \leq R^r N \frac{1 - \frac{1}{R^r}}{1 - \frac{1}{R}} \leq 2R^r N \tag{3.64}$$

Sinon, on réitère le lemme 3.2.1 avec $\tilde{N} = R^{r+1}N$ et $\alpha_j - 2i\pi\langle m_j^r, \omega\rangle$ à la place des α_j pour obtenir $m_1^{r+1}, \ldots, m_n^{r+1}$ tels que $\sup |m_j^{r+1}| \leq (R + R^2 + \cdots + R^{r+1})N$ et pour tous j, k,

$$\forall j, k, \ \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow m_j^{r+1} = -m_k^{r+1} \tag{3.65}$$

$$\forall j, k, \ \alpha_j = -\bar{\alpha}_k \Rightarrow m_j^{r+1} = m_k^{r+1} \tag{3.66}$$

$$\forall j, k, \ |\alpha_j - \alpha_k| \leq \kappa'' \Rightarrow m_j^{r+1} = m_k^{r+1} \tag{3.67}$$

$$\forall j, \ |Im\alpha_j - 2i\pi\langle m_j^{r+1}, \omega\rangle| \leq |Im\alpha_j| \tag{3.68}$$

$$\begin{cases} \alpha_j = \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k - 2i\pi\langle m_j^{r+1} - m_k^{r+1}, \omega\rangle \in DC_{\omega,1}^{R^{r+1}N}(\kappa'', \tau) \\ \alpha_j \neq \bar{\alpha}_k \Rightarrow \alpha_j - \alpha_k - 2i\pi\langle m_j^{r+1} - m_k^{r+1}, \omega\rangle \in DC_{\omega,2}^{R^{r+1}N}(\kappa'', \tau) \end{cases} \tag{3.69}$$

et qu'il existe $(j_1, k_1), \ldots, (j_{r+1}, k_{r+1})$ tous distincts tels que pour tout $l \leq r + 1$,

$$| Im\alpha_{j_l} - Im\alpha_{k_l} - 2i\pi\langle m_{j_l}^{r+1} - m_{k_l}^{r+1}, \omega\rangle | < \kappa'' \tag{3.70}$$

Ainsi, pour tout $1 \leq l \leq r + 1$,

$$|\alpha_{j_l} - \alpha_{k_l} - 2i\pi\langle m_{j_l}^{r+1} - m_{k_l}^{r+1}, \omega\rangle| \ < \kappa'' \tag{3.71}$$

Ceci implique que pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ tel que $0 < |m| \leq R\bar{N}$ et tout $l, 1 \leq l \leq r + 1$,

$$|\alpha_{j_l} - \alpha_{k_l} - 2i\pi\langle m_{j_l}^{r+1} - m_{k_l}^{r+1}, \omega\rangle - 2i\pi\langle m, \omega\rangle| \geq \frac{\kappa}{2^{\tau+1}(R\bar{N})^\tau} - \kappa'' \geq \kappa'' \tag{3.72}$$

donc pour tout $l \leq r + 1$,

$$\alpha_{j_l} - \alpha_{k_l} - 2i\pi\langle m_{j_l}^{r+1} - m_{k_l}^{r+1}, \omega\rangle \in DC_{\omega,2}^{R\bar{N}}(\kappa'', \tau) \tag{3.73}$$

Donc au bout de $\bar{r} \leq \frac{n(n-1)}{2}$ étapes, on obtient les conditions (3.49) et (3.50) avec $m_j = m_j^{\bar{r}}$ et $\tilde{\alpha}_j = \alpha_j - 2i\pi\langle m_j, \omega\rangle$ et tel que $|Im\alpha_j - 2i\pi\langle m_j, \omega\rangle| \leq |Im\alpha_j|$. On a bien $| m_j^{\bar{r}} | \leq 2\bar{N}$ et les conditions (3.29) à (3.32) du lemme 3.2.1 sont également vérifiées. □

3.2.2 Renormalisation

Nous allons maintenant utiliser les lemmes précédents pour définir la fonction de renormalisation Φ qui conjuguera A à une matrice dont le spectre est $DC_\omega^{RN}(\kappa'',\tau)$ pour un certain κ'', avec R, N arbitrairement grands et Φ bornée indépendamment de R.

Proposition 3.2.3. *Soit $A \in sp(n,\mathbb{R})$, $R \geq 2$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $\bar{N}$ tel que*

$$N \leq \bar{N} \leq R^{\frac{1}{2}n(n-1)}N \tag{3.74}$$

et tel que si

$$\kappa'' = \frac{\kappa}{n(8R^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}N)^\tau} \tag{3.75}$$

alors il existe une fonction Φ triviale par rapport à $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$ et à valeurs dans $Sp(n,\mathbb{R})$ telle que

1. *pour tout $r' \geq 0$,*

$$|\Phi|_{r'} \leq C_0 \left(\frac{1+||A_\mathcal{N}||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}r'}, \ |\Phi^{-1}|_{r'} \leq C_0 \left(\frac{1+||A_\mathcal{N}||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}r'} \tag{3.76}$$

2. *Si $\tilde{A}$ est définie par*

$$\forall\theta \in 2\mathbb{T}^d, \ \partial_\omega\Phi(\theta) = A\Phi(\theta) - \Phi(\theta)\tilde{A} \tag{3.77}$$

alors

$$||\tilde{A} - A|| \leq 4\pi\bar{N} \tag{3.78}$$

et $\tilde{A}$ a un spectre $DC_\omega^{R\bar{N}}(\kappa'',\tau)$.

Démonstration: Soit $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} = \sigma(A)$. Soient $\bar{N}$ et $m_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ pour $j = 1,\ldots,n$, vérifiant la conclusion du lemme 3.2.2. Pour tout j il existe un unique $L \in \mathcal{L}_{A,\kappa''}$ tel que $\alpha_j \in \sigma(A_{|L})$. On pose alors $m_L = m_j$. Le nombre m_L est indépendant de j grâce à la propriété (3.31).
Pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$, posons

$$\Phi(\theta) = \sum_{L\in\mathcal{L}_{A,\kappa''}} e^{2i\pi\langle m_L,\theta\rangle} P_L^{\mathcal{L}_{A,\kappa''}} \tag{3.79}$$

Comme $A \in sp(n,\mathbb{R})$, $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$ est une décomposition symplectique. Le lemme 3.2.2 garantit que pour tout $L \in \mathcal{L}_{A,\kappa''}$, $m_L = -m_{\bar{L}}$ et que

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}_{A,\kappa''}, \ \langle L, JL'\rangle \neq 0 \Rightarrow m_L = m_{L'} \tag{3.80}$$

Il résulte donc du lemme 3.1.3 que pour tout θ la matrice $\Phi(\theta)$ est dans $Sp(n,\mathbb{R})$. Les propriétés (3.49) et (3.50) garantissent que $\tilde{A}$ a un spectre $DC_\omega^{R\bar{N}}(\kappa'',\tau)$.
De plus, pour tout $L \in \bar{\mathcal{L}}$, $|m_L| \leq 2\bar{N}$. D'après l'estimation de chaque $P_L^{\bar{\mathcal{L}}}$ rappelée dans le lemme 3.1.1, Φ vérifie l'estimation

$$|\Phi|_{r'} \leq C_0 \left(\frac{1+||A_\mathcal{N}||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}r'} \tag{3.81}$$

et de même pour Φ^{-1} puisque

$$\Phi^{-1} = \sum_{L \in \mathcal{L}_{A,\kappa''}} e^{-2i\pi\langle m_L,.\rangle} P_L^{\mathcal{L}_{A,\kappa''}} \tag{3.82}$$

Par définition de $\tilde{A}$,

$$\forall L \in \mathcal{L}',\ \sigma(\tilde{A}_{|L}) = \sigma(A_{|L}) - 2i\pi\langle m_L, \omega\rangle \tag{3.83}$$

et par la propriété (3.32),

$$\forall \alpha \in \sigma(A_{|L}),\ |\alpha - 2i\pi\langle m_L, \omega\rangle| \leq |\alpha| \tag{3.84}$$

Soit P telle que PAP^{-1} soit en forme normale de Jordan, α_j les valeurs propres de A et p_j les vecteurs colonnes de P, alors pour tout j,

$$\begin{aligned} ||(\tilde{A} - A)p_j|| &= ||2i\pi\langle m_j, \omega\rangle p_j|| \\ &\leq 4\pi\bar{N}||p_j|| \end{aligned} \tag{3.85}$$

Donc $||\tilde{A} - A|| \leq 4\pi\bar{N}$, d'où la propriété (3.78). □

Définition: On appellera une fonction Φ vérifiant la conclusion de la proposition 3.2.3 une *renormalisation de A d'ordre $R, \bar{N}$.*

En dimension 2, la fonction de renormalisation Φ vérifie la propriété suivante : pour toute fonction H continue sur $\mathbb{T}^d$ et à valeurs dans $gl(2,\mathbb{C})$, $\Phi H \Phi^{-1}$ et $\Phi^{-1} H \Phi$ sont continues sur $\mathbb{T}^d$.
En effet, la spécificité de la dimension 2 est que toute décomposition $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^2$ contient au plus deux sous-espaces L_1, L_2, auquel cas $m_{L_1} + m_{L_2} \in \mathbb{Z}^d$ (si la décomposition est triviale, $m_L = 0$). Dans tous les cas, $\sum_{L \in \mathcal{L}} m_L \in \mathbb{Z}^d$.

3.3 Equation homologique

Nous allons commencer par résoudre une équation dite homologique.

Notation : Pour toute fonction $F \in L^2(2\mathbb{T}^d)$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on notera F^N et on appellera troncation de F à l'ordre N la fonction obtenue en tronquant la série de Fourier de F :

$$F^N(\theta) = \sum_{|m| \leq N} \hat{F}(m) e^{2i\pi\langle m, \theta\rangle}$$

Donnons d'abord un lemme qui sera utilisé dans l'estimation de la solution de l'équation homologique.

Lemme 3.3.1. *Soient f, g des polynômes trigonométriques avec g réel sur $\mathbb{R}^d$. Soient $r > 0, r' \in]0, r[$ et supposons qu'il existe C tel que $|f|_{r'} \leq C|g|_r$. Alors pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$,*

$$|fe^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_{r'} \leq C|ge^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_r \tag{3.86}$$

Démonstration: Comme g est réelle,

$$\forall m \in \mathbb{Z}^d, \ \overline{\hat{g}(-m)} = \hat{g}(m) \tag{3.87}$$

donc pour tout x et tout $y \in [-r,r]^d$,

$$g(x-iy) = \sum_m \hat{g}(m)e^{2i\pi\langle m,x-iy\rangle} = \sum_m \overline{\hat{g}(-m)}e^{2i\pi\langle -m,-x+iy\rangle} = \overline{\sum_m \hat{g}(-m)e^{2i\pi\langle -m,x+iy\rangle}} = \overline{g(x+iy)} \tag{3.88}$$

ce qui implique que pour tous x, y,

$$\mid g(x-iy) \mid = \mid g(x+iy) \mid \tag{3.89}$$

Montrons que pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$,

$$|g|_r e^{2\pi|m|r} = |ge^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_r \tag{3.90}$$

On a par le principe du maximum

$$|g|_r = \sup_{x;|y_j|\leq r, 1\leq j\leq d} |g(x+iy)| = \sup_{x;|y_j|=r, 1\leq j\leq d} |g(x+iy)| \tag{3.91}$$

Soit y_0 tel que

$$\mid g \mid_r = \sup_x \mid g(x+iy_0) \mid \tag{3.92}$$

alors si m n'a qu'une composante m_j non nulle, on a soit

$$|g|_r e^{2\pi|m|r} = \sup_x \mid g(x+iy_0) \mid \mid e^{2i\pi\langle m,x+iy_0\rangle} \mid = |ge^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_r \tag{3.93}$$

si m_j et $(y_0)_j$ ne sont pas de même signe, soit

$$|g|_r e^{2\pi|m|r} = \sup_x \mid g(x-iy_0) \mid \mid e^{2i\pi\langle m,x-iy_0\rangle} = |ge^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_r \tag{3.94}$$

si m_j et $(y_0)_j$ sont de même signe, d'où (3.90) si m n'a qu'une composante non nulle. Supposons que l'on ait

$$\mid g \mid_r e^{2\pi|m|r} = \mid ge^{2i\pi\langle(m_1,\ldots,m_{j-1},0,\ldots,0),.\rangle} \mid_r e^{2\pi(|m_j|+\cdots+|m_d|)r} \tag{3.95}$$

et que $\mid ge^{2i\pi\langle(m_1,\ldots,m_{j-1},0,\ldots,0),.\rangle} \mid_r$ soit atteint en $\bar{y}$. Soit $\delta_j \in \{-1,1\}$ tel que m_j soit de signe opposé à celui de $\delta_j\bar{y}_j$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mid g \mid_r e^{2\pi|m|r} &=\mid g e^{2i\pi\langle(m_1,\ldots,m_{j-1},0,\ldots,0),.\rangle} \mid_r e^{2\pi(|m_j|+\cdots+|m_d|)r} \\
&= \sup_{x,y_k,k\neq j} \mid g(x+i(y_1,\ldots,\bar{y}_j,\ldots,y_d))e^{2i\pi\langle(m_1,\ldots,m_{j-1},0,\ldots,0),x+i(y_1,\ldots,\bar{y}_j,\ldots,y_d)\rangle} \mid \\
&.e^{2\pi(|m_j|+\cdots+|m_d|)r} \\
&= \sup_{x,y_k,k\neq j} \mid g(x+i(y_1,\ldots,\delta_j\bar{y}_j,\ldots,y_d))e^{2i\pi\langle(m_1,\ldots,m_{j-1},0,\ldots,0),x+i(y_1,\ldots,\delta_j\bar{y}_j,\ldots,y_d)\rangle} \\
&.e^{2i\pi m_j(x_j+i\delta_j\bar{y}_j)} \mid e^{2\pi(|m_{j+1}|+\cdots+|m_d|)r} \\
&= \sup_{x,y_k,k\neq j} \mid g(x+i(y_1,\ldots,\delta_j\bar{y}_j,\ldots,y_d))e^{2i\pi\langle(m_1,\ldots,m_j,0,\ldots,0),x+i(y_1,\ldots,\delta_j\bar{y}_j,\ldots,y_d)\rangle} \mid \\
&.e^{2\pi(|m_{j+1}|+\cdots+|m_d|)r} \\
&=\mid g e^{2i\pi\langle(m_1,\ldots,m_j,0,\ldots,0),.\rangle} \mid_r e^{2\pi(|m_{j+1}|+\cdots+|m_d|)r}
\end{aligned} \tag{3.96}
$$

et une itération simple permet d'obtenir (3.90). Ainsi,

$$
|fe^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_{r'} \leq |f|_{r'}e^{2\pi|m|r'} \leq C|g|_r e^{2\pi|m|r} = C|ge^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_r \; \square \tag{3.97}
$$

Remarque: Si f, g sont des polynômes trigonométriques à valeurs matricielles, $f = (f_{j,k}), g = (g_{j,k})$, et que g est à coefficients réels sur $\mathbb{R}^d$, on a un énoncé analogue. En effet, si

$$
|f|_{r'} = \sup_{x,|y_j|\leq r'} \| f(x+iy) \| \leq C|g|_r = C \sup_{x,|y_j|\leq r} \| g(x+iy) \| \tag{3.98}
$$

comme la norme du plus grand coefficient est équivalente à la norme d'opérateur, on a

$$
\sup_{j,k} |f_{j,k}|_{r'} \leq CC' \sup_{j,k} |g_{j,k}|_r \tag{3.99}
$$

pour un certain C' ne dépendant que de la dimension des matrices. Donc d'après le lemme 3.3.1, puisqu'il existe j_0, k_0 tels que

$$
\forall j,k, \; \mid f_{j,k} \mid_{r'} \leq CC' \mid g_{j_0,k_0} \mid_r \tag{3.100}
$$

alors

$$
\sup_{j,k} |f_{j,k}e^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_{r'} \leq CC' \sup_{j,k} |g_{j,k}e^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_r \tag{3.101}
$$

et par équivalence des normes, l'énoncé est vrai en norme d'opérateur :

$$
|fe^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_{r'} \leq CC''|ge^{2i\pi\langle m,.\rangle}|_r \tag{3.102}
$$

pour un C'' ne dépendant que de la dimension des matrices.

Proposition 3.3.2. *Soient*
- $N \in \mathbb{N}$,
- $\kappa' \in]0,\kappa]$,
- $\gamma \geq n(n+1)$,
- $0 < r' < r$.

Soit $\tilde{A} \in sp(n, \mathbb{R})$ avec un spectre $DC_\omega^N(\kappa', \tau)$. Soit $\tilde{F} \in C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$ avec de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(\tilde{A}, \kappa', \gamma)$-décomposition $\mathcal{L}$. Alors il existe une solution $\tilde{X} \in C_{r'}^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$ de l'équation

$$\forall \theta \in 2\mathbb{T}^d,\ \partial_\omega \tilde{X}(\theta) = [\tilde{A}, \tilde{X}(\theta)] + \tilde{F}^N(\theta) - \hat{\tilde{F}}(0);\ \hat{\tilde{X}}(0) = 0 \tag{3.103}$$

telle que
- *si $\tilde{F}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et (m_L), alors $\tilde{X}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et (m_L) ; en particulier, si $\tilde{F}$ est définie sur $\mathbb{T}^d$, alors $\tilde{X}$ l'est également,*
- *si Φ est triviale par rapport à $\mathcal{L}$, alors il existe C', D ne dépendant que de n, d, τ tels que,*

$$|\Phi^{-1}\tilde{X}\Phi|_{r'} \leq C' \left(\frac{1 + ||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||}{(r - r')\kappa'} \right)^{2n^2\gamma + D} |\Phi^{-1}\tilde{F}\Phi|_r \tag{3.104}$$

De plus, la troncation de $\tilde{X}$ à l'ordre N est unique.

Démonstration: • Soit $C \in GL(n, \mathbb{C})$ telle que $C^{-1}\tilde{A}C$ soit en forme normale de Jordan. Résoudre l'équation (3.103) équivaut à résoudre

$$\forall \theta \in 2\mathbb{T}^d,\ \partial_\omega C^{-1}\tilde{X}(\theta)C = [C^{-1}\tilde{A}C, C^{-1}\tilde{X}(\theta)C] + C^{-1}(\tilde{F}^N(\theta) - \hat{\tilde{F}}(0))C;\ \hat{\tilde{X}}(0) = 0 \tag{3.105}$$

L'équation (3.105) peut se décomposer selon les coefficients $x_{j,k}(\theta)$ de $C^{-1}\tilde{X}(\theta)C$: pour tous j, k, et tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\partial_\omega x_{j,k}(\theta) = (\tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_k)x_{j,k}(\theta) + \delta_1 x_{j,k+1}(\theta) + \delta_2 x_{j-1,k}(\theta) + (C^{-1}(\tilde{F}^N(\theta) - \hat{\tilde{F}}(0))C)_{j,k} \tag{3.106}$$

où δ_1 et δ_2 valent 0 ou 1 (avec $\delta_2 = 0$ si $j = 1$ et $\delta_1 = 0$ si $k = n$). En développant en série de Fourier, cela donne, pour tout $m \in \frac{1}{\nu}\mathbb{Z}^d$, avec $\nu = 1$ ou 2 selon la périodicité de $(C^{-1}(\tilde{F}^N - \hat{\tilde{F}}(0))C)_{j,k}$,

$$i\langle m, \omega\rangle \hat{x}_{j,k}(m) = (\tilde{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_k)\hat{x}_{j,k}(m) + \delta_1 \hat{x}_{j,k+1}(m) + \delta_2 \hat{x}_{j-1,k}(m) + \hat{f}(m) \tag{3.107}$$

où $\hat{f}(m)$ est le m-ième coefficient de Fourier de la fonction $(C^{-1}(\tilde{F}^N - \hat{\tilde{F}}(0))C)_{j,k}$.
Les conditions diophantiennes données par la proposition 3.2.3 garantissent l'existence d'une solution à l'ensemble d'équations (3.106), donc d'une solution $\tilde{X}$ à (3.105) [2].

• Montrons maintenant l'unicité de $\tilde{X}^N$. Supposons que $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ soient toutes deux solutions de (3.103). Alors

$$\partial_\omega(\tilde{X} - \tilde{Y}) = [\tilde{A}, \tilde{X} - \tilde{Y}];\ \hat{\tilde{X}}(0) - \hat{\tilde{Y}}(0) = 0 \tag{3.108}$$

2. Pour résoudre l'ensemble des équations (3.106), on procède de la manière suivante : on résout d'abord (3.106) pour $j = 1, k = n$; la solution de (3.106) pour $(1, k)$ permet de trouver une solution à (3.106) pour $(1, k-1)$; la solution de (3.106) pour (j, n) permet de trouver la solution de (3.106) pour $(j+1, n)$; les solutions de (3.106) pour $(j-1, k)$ et $(j, k+1)$ permettent de trouver la solution de (3.106) pour (j, k) quelconques.

Les conditions diophantiennes sur $\tilde{A}$ impliquent que la troncation à l'ordre N de toute solution de (3.108) est constante, et la condition $\hat{\tilde{X}}(0) - \hat{\tilde{Y}}(0) = 0$ implique qu'elle est nulle, donc $\tilde{X}^N = \tilde{Y}^N$.

• Vérifions que $\tilde{X}$ est à valeurs dans $sp(n, \mathbb{R})$. Il suffit de le vérifier pour $\tilde{X}^N$, car on peut supposer que $\tilde{X} = \tilde{X}^N$. On remarque que

$$\begin{aligned} \forall \theta \in 2\mathbb{T}^d,\ \partial_\omega \tilde{X}(\theta)^* J &= [\tilde{X}(\theta)^*, \tilde{A}^*] J + \tilde{F}^N(\theta)^* J - \hat{\tilde{F}}(0)^* J \\ &= -\tilde{X}(\theta)^* J \tilde{A} - \tilde{A}^* \tilde{X}(\theta)^* J - J \tilde{F}^N(\theta) + J \hat{\tilde{F}}(0) \end{aligned} \tag{3.109}$$

et

$$\begin{aligned} \forall \theta \in 2\mathbb{T}^d,\ \partial_\omega (J \tilde{X}(\theta)) &= J[\tilde{A}, \tilde{X}(\theta)] + J \tilde{F}^N(\theta) - J \hat{\tilde{F}}(0) \\ &= -\tilde{A}^* J \tilde{X}(\theta) - J \tilde{X}(\theta) \tilde{A} + J \tilde{F}^N(\theta) - J \hat{\tilde{F}}(0) \end{aligned} \tag{3.110}$$

donc

$$\begin{aligned} \forall \theta \in 2\mathbb{T}^d,\ \partial_\omega J(\tilde{X}(\theta)^* J + J \tilde{X}(\theta)) &= -J(\tilde{X}(\theta)^* J + J \tilde{X}(\theta)) \tilde{A} - J \tilde{A}^* (\tilde{X}(\theta)^* J + J \tilde{X}(\theta)) \\ &= [\tilde{A}, J(\tilde{X}(\theta)^* J + J \tilde{X}(\theta))] \end{aligned} \tag{3.111}$$

D'après les conditions diophantiennes sur $\tilde{A}$, $\tilde{X}^* J + J \tilde{X}$ est constante. La condition $\hat{\tilde{X}}(0) = 0$ implique que pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$, $\tilde{X}(\theta)^* J + J \tilde{X}(\theta) = 0$, donc $\tilde{X}$ est à valeurs dans $sp(n, \mathbb{R})$.

• Montrons les propriétés de périodicité. L'équation (3.103) se décompose en blocs :

$$\begin{aligned} &\forall L, L' \in \mathcal{L}, \\ &\partial_\omega (P_L^{\mathcal{L}} \tilde{X} P_{L'}^{\mathcal{L}}) = P_L^{\mathcal{L}} \tilde{A} P_L^{\mathcal{L}} \tilde{X} P_{L'}^{\mathcal{L}} - P_L^{\mathcal{L}} \tilde{X} P_{L'}^{\mathcal{L}} \tilde{A} P_{L'}^{\mathcal{L}} + P_L^{\mathcal{L}} (\tilde{F}^N - \hat{\tilde{F}}(0)) P_{L'}^{\mathcal{L}} \end{aligned} \tag{3.112}$$

et cette équation se décompose en coefficients de Fourier : pour $0 < |m| \le N$,

$$2i\pi \langle m, \omega \rangle (P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{X}}(m) P_{L'}^{\mathcal{L}}) = P_L^{\mathcal{L}} \tilde{A} P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{X}}(m) P_{L'}^{\mathcal{L}} - P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{X}}(m) P_{L'}^{\mathcal{L}} \tilde{A} P_{L'}^{\mathcal{L}} + P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{F}}(m) P_{L'}^{\mathcal{L}} \tag{3.113}$$

Soit (m_L) une famille telle que $\tilde{F}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et (m_L). Si m n'est pas dans $\mathbb{Z}^d + m_L - m_{L'}$, alors $P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{F}}(m) P_{L'}^{\mathcal{L}} = 0$ donc, par unicité de $\tilde{X}^N$, $P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{X}}(m) P_{L'}^{\mathcal{L}} = 0$. Pour $|m| > N$ on peut supposer que $\hat{\tilde{X}}(m) = 0$. Donc $\tilde{X}$ a aussi de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et (m_L).

• Il reste à montrer l'estimation (3.104). Soit $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d, |m| \le N$. Nous allons montrer que pour tous $L, L' \in \mathcal{L}$,

$$||P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{X}}(m) P_{L'}^{\mathcal{L}}|| \le C' \frac{(1 + ||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||)^{n^2-1} |m|^{(n^2-1)\tau}}{\kappa'^{(n^2-1)}} ||P_L^{\mathcal{L}} \hat{\tilde{F}}(m) P_{L'}^{\mathcal{L}}|| (||P_L^{\mathcal{L}}||\ ||P_{L'}^{\mathcal{L}}||)^{n^2-1} \tag{3.114}$$

où C' ne dépend que de n.

Pour cela nous allons faire un raisonnement analogue à celui de [Eli01], lemme 2. Soit $\mathcal{A}_{L,L'}$ l'opérateur linéaire allant de $gl(n,\mathbb{C})$ dans lui-même tel que pour tout $M \in gl(n,\mathbb{C})$,

$$\mathcal{A}_{L,L'}M = \tilde{A}P_L^{\mathcal{L}}M - MP_{L'}^{\mathcal{L}}\tilde{A} \tag{3.115}$$

En décomposant (3.103) en blocs, on obtient pour tous $L, L' \in \mathcal{L}$

$$\partial_\omega(P_L^{\mathcal{L}}\tilde{X}P_{L'}^{\mathcal{L}}) = \mathcal{A}_{L,L'}P_L^{\mathcal{L}}\tilde{X}P_{L'}^{\mathcal{L}} + P_L^{\mathcal{L}}(\tilde{F}^N - \hat{\tilde{F}}(0))P_{L'}^{\mathcal{L}} \tag{3.116}$$

Donc pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ tel que $0 <| m |\leq N$,

$$2i\pi\langle m,\omega\rangle(P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{X}}(m)P_{L'}^{\mathcal{L}}) = \mathcal{A}_{L,L'}(P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{X}}(m)P_{L'}^{\mathcal{L}}) + P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{F}}(m)P_{L'}^{\mathcal{L}} \tag{3.117}$$

donc

$$(P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{X}}(m)P_{L'}^{\mathcal{L}}) = (2i\pi\langle m,\omega\rangle - \mathcal{A}_{L,L'})^{-1}P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{F}}(m)P_{L'}^{\mathcal{L}} \tag{3.118}$$

Représentons $\mathcal{A}_{L,L'}$ comme une matrice de dimension n^2. Soient $A_D \in gl(n^2,\mathbb{C})$ diagonale et $A_N \in gl(n^2,\mathbb{C})$ nilpotente telles que

$$(2i\pi\langle m,\omega\rangle - \mathcal{A}_{L,L'}) = A_D - A_N \tag{3.119}$$

Alors A_N est l'opérateur

$$A_N : B \mapsto (\tilde{A}P_L^{\mathcal{L}})_{\mathcal{N}}B - B(P_{L'}^{\mathcal{L}}\tilde{A})_{\mathcal{N}}$$

De plus,

$$(2i\pi\langle m,\omega\rangle - \mathcal{A}_{L,L'})^{-1} = A_D^{-1}(I + A_NA_D^{-1} + \cdots + (A_NA_D^{-1})^{n^2-1}) \tag{3.120}$$

Nous allons estimer $(2i\pi\langle m,\omega\rangle - \mathcal{A}_{L,L'})^{-1}$, pour $m \in \mathbb{Z}^d$ si $L = \bar{L}'$ et $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ si $L \neq \bar{L}'$. Chaque coefficient de $A_D^{-1}(A_NA_D^{-1})^{j-1}$ est de la forme $\frac{p}{q}$ avec $| p |\leq|| A_N ||^{j-1}$ et $q = \beta_1 \dots \beta_j$ où les β_i sont des valeurs propres de $2i\pi\langle m,\omega\rangle - \mathcal{A}_{L,L'}$. Or

$$\sigma(\mathcal{A}_{L,L'}) = \{\alpha - \alpha' \ \mid \ \alpha \in \sigma(\tilde{A}_{|L}), \alpha' \in \sigma(\tilde{A}_{|L'})\} \tag{3.121}$$

et de plus, pour tous $\alpha \in \sigma(\tilde{A}_{|L}), \alpha' \in \sigma(\tilde{A}_{|L'})$,

$$| \alpha - \alpha' - 2i\pi\langle m,\omega\rangle |\geq \frac{\kappa'}{| m |^\tau} \tag{3.122}$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$ si $L = \bar{L}'$ et tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ si $L \neq \bar{L}'$ Ainsi,

$$\begin{aligned} || (2i\pi\langle m,\omega\rangle - \mathcal{A}_{L,L'})^{-1} || &\leq \sum_{j=1}^{n^2} || A_N ||^{j-1} \left(\frac{| m |^\tau}{\kappa'}\right)^j \\ &\leq n^2 2^{n^2}(1+ || \tilde{A}_{\mathcal{N}} || \ (|| P_L^{\mathcal{L}} || \ + || P_{L'}^{\mathcal{L}} ||))^{n^2-1} \left(\frac{| m |^\tau}{\kappa'}\right)^{n^2-1} \end{aligned} \tag{3.123}$$

et (3.118) implique (3.114).

• L'estimation (3.114) implique que

$$
\begin{aligned}
|P_L^{\mathcal{L}}\tilde{X}P_{L'}^{\mathcal{L}}|_{r'} &\leq \sum_m ||P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{X}}(m)P_{L'}^{\mathcal{L}}||e^{2\pi|m|r'} \\
&\leq C'\frac{(1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||)^{n^2-1}}{\kappa'^{(n^2-1)}}\sum_m |m|^{(n^2-1)\tau}||P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{F}}(m)P_{L'}^{\mathcal{L}}||e^{2\pi|m|r'}(||P_L^{\mathcal{L}}||\ ||P_{L'}^{\mathcal{L}}||)^{n^2-1} \\
&\leq C'\frac{(1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||)^{n^2-1}}{\kappa'^{(n^2-1)}}\sum_m |m|^{(n^2-1)\tau}|P_L^{\mathcal{L}}\tilde{F}P_{L'}^{\mathcal{L}}|_r e^{-2\pi|m|r}e^{2\pi|m|r'}(||P_L^{\mathcal{L}}||\ ||P_{L'}^{\mathcal{L}}||)^{n^2-1}
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

où C' ne dépend que de n. Or

$$
\begin{aligned}
\sum_m |m|^{(n^2-1)\tau}e^{-2\pi|m|(r-r')} &\leq C_d\sum_{M\geq 1} M^{(n^2-1)\tau+d}e^{-2\pi M(r-r')} \\
&\leq C_d\int_0^\infty t^{(n^2-1)\tau+d}e^{-2\pi t(r-r')}dt \leq \frac{C_d}{(2\pi(r-r'))^{(n^2-1)\tau+d+1}}
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

où C_d ne dépend que de d, donc

$$
|P_L^{\mathcal{L}}\tilde{X}P_{L'}^{\mathcal{L}}|_{r'} \leq \frac{C''}{(r-r')^{(n^2-1)\tau+d+1}}\frac{(1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||)^{n^2-1}}{\kappa'^{(n^2-1)}}|P_L^{\mathcal{L}}\tilde{F}P_{L'}^{\mathcal{L}}|_r(||P_L^{\mathcal{L}}||\ ||P_{L'}^{\mathcal{L}}||)^{n^2-1} \tag{3.126}
$$

où C'' ne dépend que de n, d, τ.
Soit $(m'_L)_{L\in\mathcal{L}}$ une famille d'éléments de $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$ et Φ définie par

$$
\Phi = \sum_{L\in\mathcal{L}} P_L^{\mathcal{L}}e^{2i\pi\langle m'_L,\cdot\rangle} \tag{3.127}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
|\Phi^{-1}\tilde{X}\Phi|_{r'} &= |\sum_{L,L'\in\mathcal{L}} P_L^{\mathcal{L}}\Phi^{-1}\tilde{X}\Phi P_{L'}^{\mathcal{L}}|_{r'} \\
&= |\sum_{L,L'\in\mathcal{L}} P_L^{\mathcal{L}}\tilde{X}e^{2i\pi\langle m'_L-m'_{L'},\cdot\rangle}P_{L'}^{\mathcal{L}}|_{r'}
\end{aligned}
\tag{3.128}
$$

et donc d'après le lemme 3.3.1 appliqué à (3.126),

$$
|\Phi^{-1}\tilde{X}\Phi|_{r'} \leq \frac{C_3}{(r-r')^{(n^2-1)\tau+d+1}}\frac{(1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||)^{n^2-1}}{\kappa'^{(n^2-1)}}\sum_{L,L'\in\mathcal{L}}|P_L^{\mathcal{L}}\tilde{F}e^{2i\pi\langle m'_L-m'_{L'},\cdot\rangle}P_{L'}^{\mathcal{L}}|_r(||P_L^{\mathcal{L}}||\ ||P_{L'}^{\mathcal{L}}||)^{n^2-1} \tag{3.129}
$$

où C_3 ne dépend que de n, d, τ. D'autre part, remarquons que pour tout $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in \mathbb{C}^d$ tel que $\sup_j |Im\ \theta_j| \leq r$,

$$
\begin{aligned}
||P_L^{\mathcal{L}}\tilde{F}(\theta)e^{2i\pi\langle m'_L-m'_{L'},\theta\rangle}P_{L'}^{\mathcal{L}}|| &= ||P_L^{\mathcal{L}}\tilde{F}(\theta)P_{L'}^{\mathcal{L}}||\ |e^{2i\pi\langle m'_L-m'_{L'},\theta\rangle}| \\
&\leq ||P_L^{\mathcal{L}}||\ ||\tilde{F}(\theta)||\ ||P_{L'}^{\mathcal{L}}||\ |e^{2i\pi\langle m'_L-m'_{L'},\theta\rangle}| \\
&\leq ||P_L^{\mathcal{L}}||\ ||\tilde{F}(\theta)e^{2i\pi\langle m'_L-m'_{L'},\theta\rangle}||\ ||P_{L'}^{\mathcal{L}}||
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

d'où

$$|P_L^{\mathcal{L}} \tilde{F} e^{2i\pi\langle m'_L - m'_{L'}, \cdot\rangle} P_{L'}^{\mathcal{L}}|_r \leq ||P_L^{\mathcal{L}}|| \; |\tilde{F} e^{2i\pi\langle m'_L - m'_{L'}, \cdot\rangle}|_r ||P_{L'}^{\mathcal{L}}|| \tag{3.131}$$

et finalement

$$|\Phi^{-1}\tilde{X}\Phi|_{r'} \leq \frac{C_3}{(r-r')^{(n^2-1)\tau+d+1}} \frac{(1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||)^{n^2-1}}{\kappa'^{(n^2-1)}} \sum_{L,L'\in\mathcal{L}} ||P_L^{\mathcal{L}}||^{n^2} \; |\tilde{F} e^{2i\pi\langle m'_L - m'_{L'}, \cdot\rangle}|_r ||P_{L'}^{\mathcal{L}}||^{n^2} \tag{3.132}$$

mais comme pour tout $L \in \mathcal{L}$

$$|| \; P_L^{\mathcal{L}} \; || \leq C_0 \left(\frac{1 + || \; \tilde{A}_{\mathcal{N}} \; ||}{\kappa'} \right)^{\gamma} \tag{3.133}$$

alors

$$\begin{aligned} |\Phi^{-1}\tilde{X}\Phi|_{r'} &\leq \frac{C_4}{(r-r')^{(n^2-1)\tau+d+1}} \left(\frac{1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||}{\kappa'} \right)^{n^2(2\gamma+1)} \sum_{L,L'} |P_L^{\mathcal{L}} \tilde{F} e^{2i\pi\langle m'_L - m'_{L'}, \cdot\rangle} P_{L'}^{\mathcal{L}}|_r \\ &= \frac{C_4}{(r-r')^{(n^2-1)\tau+d+1}} \left(\frac{1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||}{\kappa'} \right)^{n^2(2\gamma+1)} \sum_{L,L'} |P_L^{\mathcal{L}} \Phi^{-1} \tilde{F} \Phi P_{L'}^{\mathcal{L}}|_r \end{aligned} \tag{3.134}$$

où C_4 ne dépend que de n, d, τ, d'où (3.104). □

Remarque: On voit apparaître ici la perte d'analyticité $r - r'$ qui est nécessaire à l'estimation de la solution.

3.4 Lemme inductif sans renormalisation

3.4.1 Lemmes auxiliaires

Donnons d'abord un lemme qui sera utilisé pour itérer le lemme inductif sans faire intervenir une fonction de renormalisation à chaque étape, ce qui améliorera de beaucoup les estimations.

Lemme 3.4.1. *Soient*
- $\kappa' \in]0,1[$, $C > 0$,
- $\tilde{F} \in sp(n, \mathbb{R})$,
- $\tilde{\epsilon} = ||\tilde{F}||$,
- $\tilde{N} \in \mathbb{N}$,
- $\tilde{A} \in sp(n, \mathbb{R})$ *avec un spectre* $DC_\omega^{\tilde{N}}(\kappa', \tau)$.

Il existe une constante c ne dépendant que de $n\tau$ telle que si $\tilde{\epsilon}$ est assez petit pour que

$$\tilde{\epsilon} \leq c \left(\frac{C^\tau \kappa'}{1+||\tilde{A}||} \right)^{2n} \tag{3.135}$$

et

$$\tilde{N} \leq \frac{|\log \tilde{\epsilon}|}{C} \tag{3.136}$$

alors $\tilde{A} + \tilde{F}$ *a un spectre* $DC_\omega^{\tilde{N}}(\frac{3\kappa'}{4}, \tau)$.

Démonstration: Si $\tilde{\alpha} \in \sigma(\tilde{A} + \tilde{F})$, d'après le lemme 3.6.1 donné en appendice, il existe $\alpha \in \sigma(\tilde{A})$ tel que $|\alpha - \tilde{\alpha}| \leq 2n(||\tilde{A}|| + 1)\tilde{\epsilon}^{\frac{1}{n}}$.

Par hypothèse, $\tilde{A}$ a un spectre $DC_\omega^{\tilde{N}}(\kappa', \tau)$. Donc pour tout $\alpha, \beta \in \sigma(\tilde{A} + \tilde{F})$ et tout $m \in \mathbb{Z}^d, 0 < |m| \leq \tilde{N}$,

$$|\alpha - \beta - 2i\pi\langle m, \omega\rangle| \geq \frac{\kappa'}{|m|^\tau} - 4n(||\tilde{A}|| + 1)\tilde{\epsilon}^{\frac{1}{n}} \tag{3.137}$$

et si $\alpha \neq \bar{\beta}$, (3.137) vaut pour tout $m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d$, $0 < |m| \leq \tilde{N}$. Il suffit donc de vérifier que

$$4n\tilde{N}^\tau(||\tilde{A}|| + 1)\tilde{\epsilon}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\kappa'}{4} \tag{3.138}$$

Il existe une constante $c \leq 1$ ne dépendant que de $n\tau$ telle que si $\tilde{\epsilon} \leq c$, alors

$$\tilde{\epsilon}\,(|\log \tilde{\epsilon}|)^{n\tau} \leq \tilde{\epsilon}^{\frac{1}{2}} \tag{3.139}$$

donc si

$$\tilde{\epsilon} \leq c\left(\frac{C^\tau \kappa'}{16n(||\tilde{A}|| + 1)}\right)^{2n} \tag{3.140}$$

puisque par l'hypothèse (3.136)

$$\tilde{\epsilon}^{\frac{1}{n}}\tilde{N}^\tau \leq \tilde{\epsilon}^{\frac{1}{n}}\left(\frac{|\log \tilde{\epsilon}|}{C}\right)^\tau \tag{3.141}$$

alors

$$4n(||\tilde{A}|| + 1)\tilde{\epsilon}^{\frac{1}{n}}\tilde{N}^\tau \leq 4n(||\tilde{A}|| + 1)\tilde{\epsilon}^{\frac{1}{2n}}C^{-\tau} \leq \frac{\kappa'}{4} \tag{3.142}$$

d'où le lemme. $\square$

Le lemme qui suit sera utilisé pour garantir qu'un seul doublement de période est nécessaire.

Lemme 3.4.2. *Soit* $A, A' \in gl(n, \mathbb{R})$ *et* $G : 2\mathbb{T}^d \to gl(n, \mathbb{R})$. *Supposons que* G *a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une* A*-décomposition* $\mathcal{L}$ *et que*

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}, P_L^{\mathcal{L}}(A' - A)P_{L'}^{\mathcal{L}} \neq 0 \Rightarrow P_L^{\mathcal{L}} G P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \tag{3.143}$$

Alors G *a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une* A'*-décomposition moins fine que* $\mathcal{L}$.

Démonstration: Soit $\mathcal{L}'$ la décomposition de $\mathbb{C}^n$ définie de la manière suivante : pour tous $L, L' \in \mathcal{L}$,

$$(\exists L_0 \in \mathcal{L}' \ \mid\ L \subset L_0, L' \subset L_0) \Leftrightarrow P_L^{\mathcal{L}} G P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \tag{3.144}$$

Soit (m_L) une famille telle que G ait de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et (m_L). Pour tout $L' \in \mathcal{L}'$, soit L un sous-espace de $\mathcal{L}$ inclus dans L' et posons $\bar{m}_{L'} = m_L$; la classe d'équivalence de $\bar{m}_{L'}$ par la relation

$$m \sim m' \Leftrightarrow m - m' \in \mathbb{Z}^d \tag{3.145}$$

est indépendante du choix de L. Alors pour tout $L' \in \mathcal{L}'$,

$$e^{2i\pi\langle \bar{m}_{L'},.\rangle} P_{L'}^{\mathcal{L}'} = \sum_{L\in\mathcal{L}, L\subset L'} e^{2i\pi\langle \bar{m}_{L'},.\rangle} P_L^{\mathcal{L}} \tag{3.146}$$

donc pour tous $L_1, L_2 \in \mathcal{L}'$,

$$P_{L_1}^{\mathcal{L}'} G P_{L_2}^{\mathcal{L}'} e^{2i\pi\langle \bar{m}_{L_1} - \bar{m}_{L_2},.\rangle} = \sum_{L_1'\subset L_1, L_2'\subset L_2} P_{L_1'}^{\mathcal{L}} G P_{L_2'}^{\mathcal{L}} e^{2i\pi\langle m_{L_1'} - m_{L_2'},.\rangle} e^{2i\pi\langle \bar{m}_{L_1} - m_{L_1'} - (\bar{m}_{L_2} - m_{L_2'}),.\rangle} \tag{3.147}$$

ce qui est continu sur $\mathbb{T}^d$. De plus, soit $L_0 \in \mathcal{L}'$, alors

$$P_{L_0}^{\mathcal{L}'} G P_{\bar{L}_0}^{\mathcal{L}'} = \sum_{L,L'\in\mathcal{L}, L\subset L_0, L'\subset \bar{L}_0} P_L^{\mathcal{L}} G P_{L'}^{\mathcal{L}} \tag{3.148}$$

ce qui est continu sur $\mathbb{T}^d$. Ainsi, G a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}'$.

Par définition, $\mathcal{L}'$ est invariante par A. De plus, l'hypothèse (3.143) implique que

$$A' - A = \sum_{L'\in\mathcal{L}'} P_{L'}^{\mathcal{L}'} (A' - A) P_{L'}^{\mathcal{L}'}$$

donc que $\mathcal{L}'$ est invariante par $A' - A$. Ainsi, $\mathcal{L}'$ est invariante par A' et donc c'est une A'-décomposition. □

Voici un lemme standard sur l'estimation du reste de la série de Fourier d'une fonction analytique.

Lemme 3.4.3. *Soit $G \in C_r^\omega(2\mathbb{T}^d, gl(n,\mathbb{C}))$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et G^N la troncation de G à l'ordre N. Alors pour tout $r' < r$,*

$$|G - G^N|_{r'} \leq \frac{C}{(r-r')^{d+1}} |G|_r N^d e^{-2\pi N(r-r')} \tag{3.149}$$

où C ne dépend que de d.

Démonstration: C'est un simple calcul : comme

$$G - G^N = \sum_{|m|>N} \hat{G}(m) e^{2i\pi\langle m,.\rangle} \tag{3.150}$$

alors

$$\begin{aligned} |G - G^N|_{r'} &\leq \sum_{|m|>N} ||\hat{G}(m)|| e^{2\pi|m|r'} \leq |G|_r \sum_{|m|>N} e^{-2\pi|m|(r-r')} \\ &\leq C|G|_r \sum_{M>N} M^d e^{-2\pi M(r-r')} \leq C|G|_r \frac{N^d}{(r-r')^{d+1}} e^{-2\pi N(r-r')} \ \square \end{aligned} \tag{3.151}$$

3.4.2 Lemme inductif

Proposition 3.4.4. *Soient*
- $\tilde{\epsilon} > 0, \tilde{r} \leq 1,\ \tilde{r}' \in [\frac{\tilde{r}}{2}, \tilde{r}[, \kappa' > 0, \tilde{N} \in \mathbb{N}, \gamma \geq n(n+1), C > 0$;
- $\tilde{F} \in C^{\omega}_{\tilde{r}}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R})), \tilde{A} \in sp(n,\mathbb{R})$,
- $\mathcal{L}$ *une* $(\tilde{A}, \kappa', \gamma)$*-décomposition.*

Il existe une constante $C'' > 0$ *ne dépendant que de* τ, n *telle que si*

1. $\tilde{A}$ *a un spectre* $DC^{\tilde{N}}_{\omega}(\kappa', \tau)$;
2. $$||\hat{\tilde{F}}(0)|| \leq \tilde{\epsilon} \leq C'' \left(\frac{C^{\tau}\kappa'}{1+||\tilde{A}||}\right)^{2n} \tag{3.152}$$
   et
   $$\tilde{N} \leq \frac{|\log \tilde{\epsilon}|}{C} \tag{3.153}$$
3. $\tilde{F}$ *a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à* $\mathcal{L}$

alors il existe
- $C' \in \mathbb{R}$ *ne dépendant que de* n, d, κ, τ,
- $D \in \mathbb{N}$ *ne dépendant que de* n, d, τ,
- $X \in C^{\omega}_{\tilde{r}'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$,
- $A' \in sp(n,\mathbb{R})$
- *une* $(A', \frac{3\kappa'}{4}, \gamma)$*-décomposition* $\mathcal{L}'$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. A' *a un spectre* $DC^{\tilde{N}}_{\omega}(\frac{3\kappa'}{4}, \tau)$,
2. $||A' - \tilde{A}|| \leq \tilde{\epsilon}$;
3. *la fonction* $F' \in C^{\omega}_{\tilde{r}'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ *définie par*
   $$\forall \theta \in 2\mathbb{T}^d,\ \partial_{\omega} e^{X(\theta)} = (\tilde{A} + \tilde{F}(\theta))e^{X(\theta)} - e^{X(\theta)}(A' + F'(\theta)) \tag{3.154}$$
   a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}'$
4. *Si* Φ *est triviale par rapport à* $\mathcal{L}$,
   alors
   $$|\Phi^{-1} X \Phi|_{\tilde{r}'} \leq C' \left(\frac{1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||}{\kappa'(\tilde{r}-\tilde{r}')}\right)^{D\gamma} |\Phi^{-1}\tilde{F}\Phi|_{\tilde{r}} \tag{3.155}$$
5. *et si* Φ *est triviale par rapport à* $\mathcal{L}$,
   $$\begin{aligned}|\Phi^{-1} F' \Phi|_{\tilde{r}'} \leq C' \left(\frac{1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||}{\kappa'(\tilde{r}-\tilde{r}')}\right)^{D\gamma} & e^{|\Phi^{-1}X\Phi|_{\tilde{r}'}} |\Phi^{-1}\tilde{F}\Phi|_{\tilde{r}} \\ & (|\Phi|^2_{\tilde{r}} |\Phi^{-1}|^2_{\tilde{r}} \tilde{N}^d e^{-2\pi\tilde{N}(\tilde{r}-\tilde{r}')} + |\Phi^{-1}\tilde{F}\Phi|_{\tilde{r}'}(1 + e^{|\Phi^{-1}X\Phi|_{\tilde{r}'}}))\end{aligned} \tag{3.156}$$

Démonstration: Par hypothèse, $\tilde{F}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et une certaine famille (m_L) et $\tilde{A}$ a un spectre $DC^{\tilde{N}}_{\omega}(\kappa', \tau)$, donc on peut appliquer la proposition 3.3.2. Soit $X \in C^{\omega}_{r'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ une solution de

$$\forall\theta \in 2\mathbb{T}^d,\ \partial_\omega X(\theta) = [\tilde{A}, X(\theta)] + \tilde{F}^{\tilde{N}}(\theta) - \hat{\tilde{F}}(0) \tag{3.157}$$

vérifiant la conclusion de la proposition 3.3.2.

Posons $A' := \tilde{A} + \hat{\tilde{F}}(0)$. On a bien $A' \in sp(n, \mathbb{R})$ et $||\tilde{A} - A'|| = ||\hat{\tilde{F}}(0)||$, d'où la propriété 2.
De plus, soit c la constante donnée par le lemme 3.4.1, et supposons que $C'' \leq c$. Les hypothèses (3.152) et (3.153) permettent d'appliquer le lemme 3.4.1 pour déduire que A' a un spectre $DC_\omega^{\tilde{N}}(\frac{3\kappa'}{4}, \tau)$ d'où la propriété 1.
Soit $F' \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ la fonction définie par (3.154). Alors

$$F' = e^{-X}(\tilde{F} - \tilde{F}^{\tilde{N}}) + e^{-X}\tilde{F}(e^X - Id) + (e^{-X} - Id)\hat{\tilde{F}}(0) - e^{-X}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k-1} X^l(\tilde{F}^{\tilde{N}} - \hat{\tilde{F}}(0))X^{k-1-l} \tag{3.158}$$

Nous allons appliquer le lemme 3.4.2 avec $A = \tilde{A}$ et $G = F'$, pour obtenir la propriété 3. La fonction F' a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$ et une certaine famille (m_L) car X et $\tilde{F}$ les ont. De plus, comme $\tilde{F}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$,

$$P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{F}}(0)P_{L'}^{\mathcal{L}} \neq 0 \Rightarrow P_L^{\mathcal{L}}\tilde{F}P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \tag{3.159}$$

or

$$P_L^{\mathcal{L}}\tilde{F}P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \Rightarrow m_L - m_{L'} \in \mathbb{Z}^d \Rightarrow P_L^{\mathcal{L}}F'P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \tag{3.160}$$

donc

$$P_L^{\mathcal{L}}\hat{\tilde{F}}(0)P_{L'}^{\mathcal{L}} \neq 0 \Rightarrow P_L^{\mathcal{L}}F'P_{L'}^{\mathcal{L}} \in C^0(\mathbb{T}^d) \tag{3.161}$$

donc l'hypothèse (3.143) du lemme 3.4.2 est vérifiée. D'après le lemme 3.4.2, F' a donc de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une A'-décomposition $\mathcal{L}'$ qui est moins fine que $\mathcal{L}$, donc $\mathcal{L}'$ est une $(\tilde{A}, \kappa', \gamma)$-décomposition. Comme c'est une $(\tilde{A}, \kappa', \gamma)$-décomposition, chaque sous-espace $L \in \mathcal{L}'$ vérifie

$$|| P_L^{\mathcal{L}'} || \leq C_0 \left(\frac{1+ || \tilde{A}_{\mathcal{N}} ||}{\kappa'}\right)^\gamma \tag{3.162}$$

donc

$$|| P_L^{\mathcal{L}'} || \leq C_0 \left(\frac{1+ || A'_{\mathcal{N}} || + 2\tilde{\epsilon}}{\kappa'}\right)^\gamma \leq C_0 \left(\frac{1+ || A'_{\mathcal{N}} ||}{\frac{3\kappa'}{4}}\right)^\gamma \tag{3.163}$$

donc $\mathcal{L}'$ est une $(A', \frac{3\kappa'}{4}, \gamma)$-décomposition, d'où la propriété 3.

La propriété 4 est donnée par la proposition 3.3.2.

- Par le lemme 3.4.3,

$$|\tilde{F} - \tilde{F}^{\tilde{N}}|_{\tilde{r}'} \leq C_1|\tilde{F}|_{\tilde{r}}\tilde{N}^d\frac{e^{-2\pi\tilde{N}(\tilde{r}-\tilde{r}')}}{(\tilde{r} - \tilde{r}')^{d+1}} \tag{3.164}$$

où C_1 ne dépend que de d.
D'autre part,

$$|\Phi^{-1}F'\Phi|_{\tilde{r}'} \leq C_2 e^{|\Phi^{-1}X\Phi|_{\tilde{r}'}}[|\Phi^{-1}(\tilde{F}-\tilde{F}^{\tilde{N}})\Phi|_{\tilde{r}'} + |\Phi^{-1}\tilde{F}\Phi|_{\tilde{r}}|\Phi^{-1}X\Phi|_{\tilde{r}'}(1+e^{|\Phi^{-1}X\Phi|_{\tilde{r}'}})] \tag{3.165}$$

où C_2 est une constante numérique, et d'après (3.104) et le lemme 3.4.3,

$$\begin{aligned}|\Phi^{-1}F'\Phi|_{\tilde{r}'} \leq C' \left(\frac{1+||\tilde{A}_{\mathcal{N}}||}{\kappa'(\tilde{r}-\tilde{r}')}\right)^{D\gamma} & e^{|\Phi^{-1}X\Phi|_{\tilde{r}'}}|\Phi^{-1}\tilde{F}\Phi|_{\tilde{r}}(|\Phi|^2_{\tilde{r}}|\Phi^{-1}|^2_{\tilde{r}}\tilde{N}^d e^{-2\pi\tilde{N}(\tilde{r}-\tilde{r}')} \\ & + |\Phi^{-1}\tilde{F}\Phi|_{\tilde{r}'}(1+e^{|\Phi^{-1}X\Phi|_{\tilde{r}'}}))\end{aligned} \tag{3.166}$$

où C' ne dépend que de n, d, κ, τ et D ne dépend que de n, d, τ, d'où la propriété 5. $\square$

3.5 Lemme inductif avec renormalisation

3.5.1 Enoncé du lemme inductif

Proposition 3.5.1. *Soient*

- $A \in sp(n,\mathbb{R})$,
- $r \leq \frac{1}{2}, r' \in [\frac{95}{96}r, r[, \gamma \geq n(n+1)$,
- $\bar{A}, \bar{F} \in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$, $\Psi \in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$,
- $|\bar{F}|_r = \epsilon$,
- $$R = \frac{1}{(r-r')^8}80^4(\frac{1}{2}n(n-1)+1)^2 \tag{3.167}$$
- $$N = \frac{1}{2\pi r}|\log\epsilon| \tag{3.168}$$

Posons $\kappa'' = \frac{\kappa}{n(8R^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}N)^\tau}$.

Il existe $\tilde{C}' > 0$ ne dépendant que de n, d, κ, τ et $D_1 \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de n, d, τ tels que si

1. $$\epsilon \leq \tilde{C}'\left(\frac{\kappa''(r-r')}{||A||+1}\right)^{D_1\gamma} \tag{3.169}$$
2. *$\bar{A}$ est réductible à A par Ψ,*
3. *$\Psi^{-1}\bar{F}\Psi$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une (A,κ'',γ)-décomposition $\mathcal{L}$,*
4. *$|\Psi|_r \leq (\frac{1}{\epsilon})^{r-r'}$ et $|\Psi^{-1}|_r \leq (\frac{1}{\epsilon})^{r-r'}$,*

alors il existe

- $\bar{N} \in [N, R^{\frac{1}{2}n(n-1)}N]$,
- $Z' \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$,
- $\bar{A}', \bar{F}' \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$,
- $\Psi' \in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$,
- $A' \in sp(n,\mathbb{R})$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\bar{A}'$ *est réductible par* Ψ' *à* A',
2. *la fonction* $(\Psi')^{-1}\bar{F}'\Psi'$ *a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une* $(A', \frac{3\kappa''}{4C_0}, 2\gamma)$*-décomposition* $\mathcal{L}'$
3. $|\Psi'|_r \leq (\frac{1}{\epsilon})^{(r-r')+\frac{1}{96}} e^{4\pi r\bar{N}}$ *et* $|(\Psi')^{-1}|_r \leq (\frac{1}{\epsilon})^{(r-r')+\frac{1}{96}} e^{4\pi r\bar{N}}$,
4. A' *a un spectre* $DC_\omega^{R\bar{N}}(\frac{3}{4}\kappa'', \tau)$,
5. $$\partial_\omega Z' = (\bar{A}+\bar{F})Z' - Z'(\bar{A}'+\bar{F}') \tag{3.170}$$
6. $||A'|| \leq ||A|| + \epsilon^{\frac{23}{24}} + 4\pi\bar{N}$;
7. $$|Z' - Id|_{r'} \leq \frac{1}{\tilde{C}'}\left(\frac{(1+||A||)|\log\epsilon|}{r-r'}\right)^{D_1\gamma} \epsilon^{1-4(r-r')} \tag{3.171}$$
   et
   $$|(Z')^{-1} - Id|_{r'} \leq \frac{1}{\tilde{C}'}\left(\frac{(1+||A||)|\log\epsilon|}{r-r'}\right)^{D_1\gamma} \epsilon^{1-4(r-r')} \tag{3.172}$$
8. $|\Psi^{-1}\bar{F}'\Psi|_{r'} \leq \epsilon^{\frac{3}{2}}$,
9. *la fonction* $\Psi'^{-1}\Psi$ *est triviale par rapport à* $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$,
10. *pour tout* $s' \geq 0$,
    $$|\ \Psi'^{-1}\Psi\ |_{s'} \leq C\left(\frac{1+||A||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}s'};\ |\ \Psi^{-1}\Psi'\ |_{s'} \leq C\left(\frac{1+||A||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}s'} \tag{3.173}$$
    où C *ne dépend que de* n.

De plus, en dimension 2, si $\bar{A}, \bar{F}$ *sont continus sur* $\mathbb{T}^d$*, que* Ψ *est telle que pour toute fonction* H *continue sur* $\mathbb{T}^d$*,* $\Psi H\Psi^{-1}$ *est continue sur* $\mathbb{T}^d$*, alors* $Z', \bar{A}', \bar{F}'$ *sont continus sur* $\mathbb{T}^d$ *et* Ψ' *est telle que pour toute fonction* H *continue sur* $\mathbb{T}^d$*,* $\Psi' H(\Psi')^{-1}$ *est continue sur* $\mathbb{T}^d$*.*

3.5.2 Démonstration : aspects algébriques

Cas général

Soit $\bar{N}$ donné par la proposition 3.2.3 et Φ une renormalisation de A d'ordre $R, \bar{N}$. Soit $\tilde{A} \in sp(n,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall\theta \in 2\mathbb{T}^d,\ \partial_\omega\Phi(\theta) = A\Phi(\theta) - \Phi(\theta)\tilde{A} \tag{3.174}$$

La matrice $\tilde{A}$ a donc un spectre $DC_\omega^{R\bar{N}}(\kappa'', \tau)$. Posons $\Psi' = \Psi\Phi$ et soit

$$\tilde{F} := (\Psi')^{-1}\bar{F}\Psi'$$

Par hypothèse, $\Psi^{-1}\bar{F}\Psi$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une (A, κ'', γ)-décomposition $\mathcal{L}$ et une certaine famille (m_L). Par ailleurs Φ est triviale par rapport à $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$:

$$\Phi = \sum_{L\in\mathcal{L}} P_L^{\mathcal{L}} e^{2i\pi\langle m'_L,\cdot\rangle} \tag{3.175}$$

Comme $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$ sont des A-décompositions, on peut définir une A-décomposition $\bar{\mathcal{L}}$ de la manière suivante :

$$L \in \bar{\mathcal{L}} \Leftrightarrow \exists L_1 \in \mathcal{L}, L_2 \in \mathcal{L}_{A,\kappa''} \ \mid \ L = L_1 \cap L_2 \tag{3.176}$$

$\bar{\mathcal{L}}$ est une $(A, \frac{\kappa''}{C_0}, 2\gamma)$-décomposition car $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$ sont des (A,κ'',γ)-décompositions et donc

$$|| P_L^{\bar{\mathcal{L}}} || = || P_{L_1}^{\mathcal{L}} P_{L_2}^{\mathcal{L}_{A,\kappa''}} || \leq C_0^2 \left(\frac{1+ || A_{\mathcal{N}} ||}{\kappa''}\right)^{2\gamma} \tag{3.177}$$

De plus, $\tilde{F}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\bar{\mathcal{L}}$. Comme $\bar{\mathcal{L}}$ est une $(A, \frac{\kappa''}{C_0}, 2\gamma)$-décomposition, c'est aussi une $(\tilde{A}, \frac{\kappa''}{C_0}, 2\gamma)$-décomposition (puisque A et $\tilde{A}$ ont la même partie nilpotente).
De plus,

$$||\hat{\tilde{F}}(0)|| \leq |\tilde{F}|_0 \leq |\Phi|_0|\Phi^{-1}|_0|\Psi|_0|\Psi^{-1}|_0|\bar{F}|_0 \tag{3.178}$$

Or d'après (3.76), pour tout $s' \geq 0$,

$$| \Phi |_{s'} \leq C_0 \left(\frac{1+||A_{\mathcal{N}}||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}s'} \tag{3.179}$$

et

$$| \Phi^{-1} |_{s'} \leq C_0 \left(\frac{1+||A_{\mathcal{N}}||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}s'} \tag{3.180}$$

(d'où la propriété 10). Donc

$$||\hat{\tilde{F}}(0)|| \leq \epsilon^{1-2(r-r')} C_0^2 \left(\frac{1+||A_{\mathcal{N}}||}{\kappa''}\right)^{2n(n+1)} \tag{3.181}$$

d'où, si $\tilde{C}' \leq C_0^{96}$ et $D_1\gamma \geq 96n(n+1)$,

$$||\hat{\tilde{F}}(0)|| \leq \epsilon^{1-2(r-r')-\frac{1}{48}} \tag{3.182}$$

Nous allons appliquer la proposition 3.4.4 avec

$$\begin{aligned} &\tilde{\epsilon} = \epsilon^{1-2(r-r')-\frac{1}{48}}, \ \tilde{r} = r, \ \tilde{r}' = r', \ \kappa' = \frac{\kappa''}{C_0}, \\ &\tilde{N} = R\bar{N}, C = \frac{2\pi r}{R^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}}, \ \mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} \end{aligned} \tag{3.183}$$

Soit C'' une constante dont l'existence est donnée par la proposition 3.4.4 (qui ne dépend donc que de n et de τ). L'hypothèse (3.169), qui implique (3.152) avec

$$\tilde{C}' \leq C''^4 \left(\frac{C}{(r-r')^{4n(n-1)+9}}\right)^{8n\tau}, \ D_1\gamma \geq 64n(n(n-1)+2)\tau \tag{3.184}$$

(notons que $\frac{C}{(r-r')^{4n(n-1)+9}}$ est minorée indépendamment de $r-r'$), l'expression (3.168) qui implique (3.153), les bonnes propriétés de périodicité de $\tilde{F}$ et le fait que $\tilde{A}$ ait un spectre $DC_\omega^{R\bar{N}}(\kappa'',\tau)$, permettent donc d'appliquer la proposition 3.4.4 pour obtenir des fonctions $X\in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d,sp(n,\mathbb{R}))$, $F'\in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d,Sp(n,\mathbb{R}))$, et une matrice $A'\in sp(n,\mathbb{R})$ telles que

- A' a un spectre $DC_\omega^{R\bar{N}}(\frac{3}{4}\left(\frac{\kappa''}{C_0}\right),\tau)$ (d'où la propriété 4),
- $$||A'-\tilde{A}||\leq \epsilon^{\frac{23}{24}} \tag{3.185}$$

  ce qui implique

  $$||\ A'-A\ ||\leq ||A'-\tilde{A}||+||A-\tilde{A}||\leq \epsilon^{\frac{23}{24}}+4\pi\bar{N} \tag{3.186}$$

  d'où la propriété 6,
- $\partial_\omega e^X=(\tilde{A}+\tilde{F})e^X-e^X(A'+F')$,
- F' a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A',\frac{3\kappa''}{4C_0},2\gamma)$-décomposition $\mathcal{L}'$
- et comme Φ est triviale par rapport à $\bar{\mathcal{L}}$, pour un certain C' ne dépendant que de n,d,κ,τ et un certain D ne dépendant que de n,d,τ,

  $$|\Phi X\Phi^{-1}|_{r'}\leq C'\left(\frac{C_0(1+||A_{\mathcal{N}}||)}{\kappa''(r-r')}\right)^{D\gamma}|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_r \tag{3.155}$$

  et

  $$\begin{aligned}|\Phi F'\Phi^{-1}|_{r'}\leq C'\left(\frac{C_0(1+||A_{\mathcal{N}}||)}{\kappa''(r-r')}\right)^{D\gamma}&e^{|\Phi X\Phi^{-1}|_{r'}}|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_r(|\Phi|_r^2|\Phi^{-1}|_r^2(R\bar{N})^de^{-2\pi R\bar{N}(r-r')}\\&+|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_{r'}(1+e^{|\Phi X\Phi^{-1}|_{r'}}))\end{aligned} \tag{3.187}$$

Posons $\bar{F}'=\Psi\Phi F'(\Psi\Phi)^{-1}$ (ce qui satisfait la propriété 2) et $\bar{A}'\in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d,sp(n,\mathbb{R}))$ telle que

$$\partial_\omega\Psi\Phi=\bar{A}'\Psi\Phi-\Psi\Phi A' \tag{3.188}$$

ce qui est exactement la propriété 1.
La fonction $Z':=\Psi\Phi e^X(\Psi\Phi)^{-1}$ est solution de

$$\partial_\omega Z'=(\bar{A}+\bar{F})Z'-Z'(\bar{A}'+\bar{F}') \tag{3.189}$$

d'où la propriété 5.

Cas de la dimension 2

En dimension 2, comme par hypothèse $\Psi^{-1}\bar{F}\Psi$ est continue sur $\mathbb{T}^d$, et d'après la remarque faite en section 3.2.2, alors $\tilde{F}$,X et F' sont continues sur $\mathbb{T}^d$.
Donc les fonctions $\Phi F'\Phi^{-1},\Phi\hat{\tilde{F}}(0)\Phi^{-1}$ et $\Phi X\Phi^{-1}$ sont continues sur $\mathbb{T}^d$, et par hypothèse sur Ψ, alors $\Psi\Phi F'(\Psi\Phi)^{-1},\Psi\Phi\hat{\tilde{F}}(0)(\Psi\Phi)^{-1}$ et $\Psi\Phi X(\Psi\Phi)^{-1}$ sont donc continues sur $\mathbb{T}^d$ et donc $\bar{A}'=\bar{A}+\Psi\Phi\hat{\tilde{F}}(0)(\Psi\Phi)^{-1}$ est continue sur $\mathbb{T}^d$.
Il ne reste qu'à vérifier que pour toute fonction G continue sur $\mathbb{T}^d$, la fonction $(\Psi\Phi)^{-1}G\Psi\Phi$ est continue sur $\mathbb{T}^d$. Mais

$$(\Psi\Phi)^{-1}G\Psi\Phi = \Phi^{-1}\Psi^{-1}G\Psi\Phi$$

Par hypothèse, $\Psi^{-1}G\Psi$ est continue sur $\mathbb{T}^d$, et donc toujours d'après 3.2.2, $\Phi^{-1}\Psi^{-1}G\Psi\Phi$ aussi.

3.5.3 Démonstration : estimations

- Comme Φ est triviale par rapport à $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$, on a pour tout $s' \geq 0$ l'estimation

$$|\Phi|_{s'} \leq C.\left(\frac{1+||A_{\mathcal{N}}||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}s'},\ |\Phi^{-1}|_{s'} \leq C.\left(\frac{1+||A_{\mathcal{N}}||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}s'} \tag{3.76}$$

L'hypothèse (3.169), avec

$$\tilde{C}' \leq \frac{1}{C^{96}},\ D_1\gamma \geq 96n(n+1) \tag{3.190}$$

et le fait que $||\ A_{\mathcal{N}}\ ||\leq||\ A\ ||$, impliquent alors que

$$|\Phi|_r \leq \epsilon^{-\frac{1}{96}} e^{4\pi\bar{N}r} \tag{3.191}$$

donc

$$|\Psi\Phi|_r \leq |\Psi|_r|\Phi|_r \leq \epsilon^{-(r-r')-\frac{1}{96}} e^{4\pi r\bar{N}} \tag{3.192}$$

d'où la propriété 3.

- D'après la proposition 3.4.4,

$$\begin{aligned}|\Phi F'\Phi^{-1}|_{r'} \leq C'\left(\frac{C_0(1+||A_{\mathcal{N}}||)}{\kappa''(r-r')}\right)^{D\gamma} & e^{|\Phi X\Phi^{-1}|_{r'}}|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_r(e^{16\pi r\bar{N}}(R\bar{N})^d e^{-2\pi R\bar{N}(r-r')} \\ & + |\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_{r'}(1+e^{|\Phi X\Phi^{-1}|_{r'}}))\end{aligned} \tag{3.187}$$

pour un certain C' ne dépendant que de n, d, κ, τ et un certain D ne dépendant que de n, d, τ. Or

$$|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_r \leq |\Psi|_r|\Psi^{-1}|_r|\bar{F}|_r \leq \epsilon^{1-2(r-r')} \tag{3.193}$$

et d'après la propriété 4 de la proposition 3.4.4,

$$|\Phi X\Phi^{-1}|_{r'} \leq C'\left(\frac{C_0(1+||A_{\mathcal{N}}||)}{\kappa''(r-r')}\right)^{D\gamma} |\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_r \tag{3.155}$$

donc d'après (3.169), si

$$\tilde{C}' \leq \frac{1}{C'^{96}},\ D_1\gamma \geq 192(2n\gamma+D) \tag{3.194}$$

alors

$$|\Phi X\Phi^{-1}|_{r'} \leq \epsilon^{-\frac{1}{96}}|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_{r'} \leq \epsilon^{\frac{7}{8}} \tag{3.195}$$

donc

$$e^{|\Phi X\Phi^{-1}|_{r'}} \leq 2 \tag{3.196}$$

D'autre part,

$$e^{16\pi r\bar{N}-2\pi R\bar{N}(r-r')} = e^{2\pi\bar{N}(8r-R(r-r'))} \leq \epsilon^{100} \tag{3.197}$$

et donc par l'hypothèse (3.169),

$$|\Phi F'\Phi^{-1}|_{r'} \leq \epsilon^{-\frac{1}{96}}\epsilon^{1-2(r-r')}((R\bar{N})^d\epsilon^{100}+\epsilon^{1-2(r-r')}) \tag{3.198}$$

Il existe une constante c_d ne dépendant que de d telle que si $\epsilon \leq c_d$, alors

$$|\log\epsilon|^d \leq \epsilon^{-1} \tag{3.199}$$

et dans ce cas, il existe c_2, D_2 ne dépendant que de n, d, τ tels que

$$|\Phi F'\Phi^{-1}|_{r'} \leq \epsilon^{-\frac{1}{96}}\epsilon^{1-2(r-r')}(\frac{c_2}{(r-r')^{D_2}}\epsilon^{99}+\epsilon^{1-2(r-r')}) \tag{3.200}$$

donc, si $\tilde{C}'$ est assez petite et D_1 assez grande (en fonction de c_2, D_2),

$$|\Phi F'\Phi^{-1}|_{r'} \leq \epsilon^{2-4(r-r')-\frac{1}{96}} \tag{3.201}$$

d'où 8.

- Nous allons estimer $|\Psi\Phi e^X(\Psi\Phi)^{-1}-Id|_{r'}$. D'après l'estimation (3.155),

$$\begin{aligned}|\Phi e^X\Phi^{-1}-Id|_{r'} &\leq C'\left(\frac{C_0(1+||A_{\mathcal{N}}||)}{\kappa''(r-r')}\right)^{D\gamma}|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_r\\ &\leq C''\left(\frac{(1+||A_{\mathcal{N}}||)R^{\frac{1}{2}(n(n-1)+1)\tau}N^\tau}{r-r'}\right)^{D\gamma}|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_r\end{aligned} \tag{3.202}$$

pour un certain C'' ne dépendant que de n, d, κ, τ, donc

$$|\Psi\Phi e^X(\Psi\Phi)^{-1}-Id|_{r'} \leq C''\left(\frac{(1+||A_{\mathcal{N}}||)R^{\frac{1}{2}(n(n-1)+1)\tau}N^\tau}{r-r'}\right)^{D\gamma}|\Phi\tilde{F}\Phi^{-1}|_r(\frac{1}{\epsilon})^{2(r-r')} \tag{3.203}$$

c'est-à-dire

$$|\Psi\Phi e^X(\Psi\Phi)^{-1}-Id|_{r'} \leq C_3\left(\frac{(1+||A_{\mathcal{N}}||)|\log\epsilon|}{r-r'}\right)^{D_1'\gamma}|\bar{F}|_r(\frac{1}{\epsilon})^{4(r-r')} \tag{3.204}$$

pour un certain C_3 ne dépendant que de n, d, κ, τ et D_1' ne dépendant que de n, d, τ. On obtient la même estimation pour $|\Psi\Phi e^{-X}(\Psi\Phi)^{-1}-Id|_{r'}$, donc la propriété 7 est vérifiée avec

$$\tilde{C}' \leq \frac{1}{C_3},\ D_1 \geq 2D_1' \tag{3.205}$$

• De plus,

$$||A'|| \leq ||A' - \tilde{A}|| + ||\tilde{A}|| \leq ||A|| + \epsilon^{\frac{23}{24}} + 4\pi\bar{N} \tag{3.206}$$

d'où la propriété 6. □

3.5.4 Etape inductive

Nous pouvons maintenant formuler l'étape inductive en entier. Par la suite, nous noterons $\kappa''(r, r', \epsilon)$ la fonction

$$\kappa''(r, r', \epsilon) = \frac{\kappa}{n(8R(r, r')^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}N(r, \epsilon))^{\tau}} \tag{3.207}$$

où

$$R(r, r') = \frac{1}{(r - r')^8} 80^4 (\frac{1}{2}n(n-1) + 1)^2 \tag{3.208}$$

et

$$N(r, \epsilon) = \frac{1}{2\pi r} |\log \epsilon| \tag{3.209}$$

Ces fonctions coïncident avec les fonctions R, N, κ'' définies à la proposition 3.5.1.

Enoncé

Proposition 3.5.2. *Soient*
- $A \in sp(n, \mathbb{R})$,
- $r \leq \frac{1}{2}, r'' \in [\frac{95}{96} r, r[, \gamma \geq n(n+1)$,
- $\bar{A}, \bar{F} \in C^{\omega}_r(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$ *et* $\Psi \in C^{\omega}_r(2\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$,
- $\epsilon = |\bar{F}|_r$,

Il existe $C' > 0$ *ne dépendant que de* $n, d, \kappa, \tau, \gamma$ *et il existe* $D_3 \in \mathbb{N}$ *ne dépendant que de* n, d, τ *tels que si*

1. $\bar{A}$ *est réductible à* A *par* Ψ,
2. $\Psi^{-1}\bar{F}\Psi$ *a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une* $(A, \kappa''(r, r'', \epsilon), \gamma)$-*décomposition* $\mathcal{L}$
3. $$\epsilon \leq \frac{C'}{(||A|| + 1)^{D_3\gamma}} (r - r'')^{D_3\gamma} \tag{3.210}$$
4. $|\Psi|_r \leq (\frac{1}{\epsilon})^{-\frac{1}{2}(r-r'')}$ *et* $|\Psi^{-1}|_r \leq (\frac{1}{\epsilon})^{-\frac{1}{2}(r-r'')}$,

alors il existe
- $\epsilon' \leq \epsilon^{100}$;
- $Z' \in C^{\omega}_{r''}(2\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$,
- $\bar{A}', \bar{F}' \in C^{\omega}_{r''}(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$,
- $\Psi' \in C^{\omega}_r(2\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$,
- $A' \in sp(n, \mathbb{R})$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\bar{A}'$ *est réductible par* Ψ' *à* A',

2. *la fonction* $\Psi'^{-1}\bar{F}'\Psi'$ *a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une* $(A', \kappa''(r'', r'' - \frac{r-r''}{2}, \epsilon'), 2\gamma))$*-décomposition* $\mathcal{L}'$
3. $|\bar{F}'|_{r''} \leq \epsilon'$,
4. $|\Psi'|_{r''} \leq (\frac{1}{\epsilon'})^{\frac{1}{4}(r-r'')}$ *et* $|\Psi'^{-1}|_{r''} \leq (\frac{1}{\epsilon'})^{\frac{1}{4}(r-r'')}$,
5. $||A'|| \leq ||A|| + \mid \log \epsilon \mid \left(\frac{1}{r-r'}\right)^{D_3}$;
6. $$\partial_\omega Z' = (\bar{A} + \bar{F})Z' - Z'(\bar{A}' + \bar{F}') \tag{3.211}$$
7. $$|Z' - Id|_{r''} \leq \frac{1}{C'} \left(\frac{(1 + ||A||)| \log \epsilon|}{r - r''}\right)^{D_3\gamma} \epsilon^{1-4(r-r'')} \tag{3.212}$$

   et

   $$|(Z')^{-1} - Id|_{r''} \leq \frac{1}{C'} \left(\frac{(1 + ||A||)| \log \epsilon|}{r - r''}\right)^{D_3\gamma} \epsilon^{1-4(r-r'')} \tag{3.213}$$

De plus, en dimension 2, si $\bar{A}, \bar{F}$ *sont continus sur* $\mathbb{T}^d$*, et si l'hypothèse 2 est remplacée par*

2'. Ψ *est telle que pour toute fonction* H *continue sur* $\mathbb{T}^d$*,* $\Psi H \Psi^{-1}$ *est continue sur* $\mathbb{T}^d$*,*

alors $Z', \bar{A}', \bar{F}'$ *sont continus sur* $\mathbb{T}^d$ *et la propriété 2 est remplacée par*

2'. Ψ' *est telle que pour toute fonction* H *continue sur* $\mathbb{T}^d$*,* $\Psi' H \Psi'^{-1}$ *est continue sur* $\mathbb{T}^d$*.*

La démonstration comportera deux étapes : la première consistera à appliquer la proposition 3.5.1 pour réduire la perturbation en présence de résonances. La deuxième étape consistera à itérer la proposition 3.4.4 autant de fois que possible compte tenu du fait que les résonances ne réapparaissent pas immédiatement.

Elimination des résonances et première étape

Nous allons appliquer la proposition 3.5.1 avec $r' = \frac{r+r''}{2}$. Soient $R = R(r, r'); N = N(r, \epsilon); \kappa'' = \kappa''(r, r', \epsilon)$ et soit $\tilde{C}', D_1$ comme dans la proposition 3.5.1. Soit c ne dépendant que de D_1, γ, τ telle que si $\epsilon \leq c$, alors

$$\epsilon^{\frac{1}{2}} \mid \log \epsilon \mid^{D_1\gamma\tau} \leq 1 \tag{3.214}$$

L'hypothèse (3.210) avec

$$C' \leq \tilde{C}'^2 c \frac{\kappa^{2D_1\gamma}}{2^{D_1\gamma}[8.(80^4(\frac{1}{2}n(n-1)+1)^2)^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}n]^{2\tau D_1\gamma}} \tag{3.215}$$

et

$$D_3\gamma \geq 8D_1\gamma(n(n+1)+2) \tag{3.216}$$

implique que

$$\begin{aligned}\epsilon &\leq \tilde{C}'\left(\frac{\kappa(r-r')^{4n(n+1)+9}}{[8.(80^4(\frac{1}{2}n(n-1)+1)^2)^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}n \mid \log\epsilon \mid]^\tau(||A||+1)}\right)^{D_1\gamma} \\ &\leq \tilde{C}'\left(\frac{\kappa(r-r')}{n(8R^{\frac{1}{2}n(n-1)+1}N)^\tau(||A||+1)}\right)^{D_1\gamma}\end{aligned} \tag{3.217}$$

donc l'hypothèse (3.169) de la proposition 3.5.1 :

$$\epsilon \leq \tilde{C}'\left(\frac{\kappa''(r-r')}{||A||+1}\right)^{D_1\gamma} \tag{3.169}$$

est vérifiée. On peut donc appliquer la proposition 3.5.1 pour obtenir
- $\bar{N} \in [N, R^{\frac{1}{2}n(n-1)}N]$,
- $Z_1, \Psi' \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$,
- $A_1 \in sp(n,\mathbb{R})$
- $\bar{A}_1 \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$
- et $F_1 = (\Psi')^{-1}\bar{F}_1\Psi'$

tels que

1. $\bar{A}_1$ est réductible à A_1 par Ψ'
2. F_1 a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A_1, \frac{3\kappa''}{4C_0}, 2\gamma)$-décomposition $\mathcal{L}_1$
3. $\mid \Psi' \mid_{r'} \leq \epsilon^{-(r-r')-\frac{1}{96}} e^{4\pi r\bar{N}}$ et $\mid \Psi'^{-1} \mid_{r'} \leq \epsilon^{-(r-r')-\frac{1}{96}} e^{4\pi r\bar{N}}$
4. A_1 a un spectre $DC^{R\bar{N}}_\omega(\frac{3}{4}\kappa'', \tau)$,
5. $$\partial_\omega Z_1 = (\bar{A}+\bar{F})Z_1 - Z_1(\bar{A}_1+\bar{F}_1) \tag{3.218}$$
6. $$||A_1|| \leq ||A|| + \epsilon^{\frac{23}{24}} + 4\pi\bar{N} \tag{3.219}$$
7. $$|Z_1 - Id|_{r'} \leq \frac{1}{\tilde{C}'}\left(\frac{(1+||A_{\mathcal{N}}||)|\log\epsilon|}{r-r'}\right)^{D_1\gamma}\epsilon^{1-4(r-r')} \tag{3.220}$$
   et de même pour $|Z_1^{-1} - Id|_{r'}$,
8. et
   $$|\Psi^{-1}\bar{F}_1\Psi|_{r'} \leq \epsilon^{\frac{3}{2}} \tag{3.221}$$
9. $\Psi'^{-1}\Psi$ est triviale par rapport à $\mathcal{L}_{A,\kappa''}$,
10. et pour tout $s' \geq 0$,
    $$\mid \Psi'^{-1}\Psi \mid_{s'} \leq C_n\left(\frac{1+ \mid\mid A_{\mathcal{N}} \mid\mid}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}s'} \tag{3.222}$$
    et de même pour $\mid \Psi^{-1}\Psi' \mid_{s'}$, où C_n ne dépend que de n.

Deuxième étape : itération en l'absence de résonances

Soit l tel que

$$\epsilon^{(\frac{4}{3})^{l+1}} \leq e^{-2\pi(r-r'')\sqrt[4]{R\bar{N}}} := \epsilon' \leq \epsilon^{(\frac{4}{3})^{l}} \tag{3.223}$$

Pour abréger, posons $n_0 = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Définissons la suite $\epsilon_j = \epsilon^{(\frac{3}{2})^j - \frac{1}{48}}$.

Nous allons itérer $l-1$ fois la proposition 3.4.4, à partir de $j=2$, avec

- $\tilde{\epsilon} = \epsilon_{j-1}$,
- $C = \left(\frac{r-r''}{160(n_0+1)}\right)^{8(n_0+1)}$
- $\tilde{r} = r_{j-2} = \frac{r+r''}{2} - (j-2)\frac{r-r''}{2l}$,
- $\tilde{r}' = r_{j-1} = \frac{r+r''}{2} - (j-1)\frac{r-r''}{2l}$,
- $\kappa' = (\frac{3}{4})^{j-1}\frac{\kappa''}{C_0}$,
- $\tilde{N} = R\bar{N}$,
- $\tilde{F} = F_{j-1}$,
- $\tilde{A} = A_{j-1}$,
- $\Phi = \Psi^{-1}\Psi'$,
- $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$,

Remarquons déjà que pour tout j, on a

$$\epsilon_j \leq C'' \left(\frac{C^\tau (\frac{3}{4})^j \frac{\kappa''}{C_0}}{1 + ||A_1|| + \sum_{l=1}^{j-1} \epsilon_l} \right)^{2n} \tag{3.224}$$

Les estimations (3.221) et (3.222) impliquent que

$$||\hat{F}_1(0)|| \leq | F_1 |_0 \leq | \Psi'^{-1}\Psi |_0 \; | \Psi^{-1}\Psi' |_0 \;\; |\Psi^{-1}\bar{F}_1\Psi|_0 \leq C_n^2 \left(\frac{1+||A_{\mathcal{N}}||}{\kappa''}\right)^{2n(n+1)} \epsilon^{\frac{3}{2}} \leq \epsilon^{\frac{3}{2}-\frac{1}{48}} \tag{3.225}$$

De plus, A_1 a un spectre $DC_\omega^{R\bar{N}}(\frac{3}{4}\kappa'',\tau)$ et F_1 a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}$. Soit C'' la constante dont l'existence est donnée par la proposition 3.4.4. Par hypothèse sur ϵ, avec C' ne dépendant que de n, d, κ, τ et

$$D_3\gamma \geq 16n\tau(n_0+1) \tag{3.226}$$

on a la majoration

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon} \leq \epsilon &\leq \frac{C''}{(2+||A||)^{2n}} \left(\frac{3\kappa''}{4C_0}\right)^{2n} \left(\frac{r-r''}{160(n_0+1)}\right)^{8n\tau(n_0+1)} \\ &\leq \frac{C''}{(1+||A_1||)^{2n}} \left(\frac{3\kappa''}{4C_0}\right)^{2n} C^{2n\tau} \end{aligned} \tag{3.227}$$

D'autre part,

$$R\bar{N} \leq R^{n_0+1}N \leq \frac{1}{C}|\log\epsilon| \tag{3.228}$$

donc les hypothèses (3.152) et (3.153) de la proposition 3.4.4 sont satisfaites avec $\tilde{F} = F_1, \kappa' = \kappa'', \tilde{N} = R\bar{N}$.

Fixons j et supposons que A_{j-1} a un spectre $DC_\omega^{\tilde{N}}(\kappa', \tau)$, que F_{j-1} a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A_{j-1}, (\frac{3}{4})^{j-1}\frac{\kappa''}{C_0}, 2\gamma)$-décomposition, que

$$|| \hat{F}_{j-1}(0) || \leq \epsilon_{j-1} \tag{3.229}$$

et

$$CR\bar{N} \leq | \log \epsilon_{j-1} | \tag{3.230}$$

On obtient ainsi des fonctions F_j, X_j et une matrice A_j telles que

1. A_j a un spectre $DC^{R\bar{N}}((\frac{3}{4})^j \frac{\kappa''}{C_0}, \tau)$
2. $||A_j|| \leq ||A_{j-1}|| + \epsilon_{j-1}$,
3. $$\partial_\omega e^{X_j} = (A_{j-1} + F_{j-1})e^{X_j} - e^{X_j}(A_j + F_j) \tag{3.231}$$
   et F_j a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A_j, (\frac{3}{4})^j \frac{\kappa''}{C_0}, 2\gamma)$-décomposition
4. $$| \Psi^{-1}\Psi' X_j \Psi'^{-1}\Psi |_{r_{j-1}} \leq C' \left(\frac{1 + ||(A_{j-1})_{\mathcal{N}}||}{\kappa''(r_{j-2} - r_{j-1})} \right)^{D\gamma} |\Psi^{-1}\Psi' F_j \Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-1}} \tag{3.232}$$
   pour un certain C' ne dépendant que de n, d, κ, τ et un certain D ne dépendant que de n, d, τ,
5. et

$$\begin{aligned} |\Psi^{-1}\Psi' F_j \Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-1}} \leq C' \left(\frac{1 + ||(A_{j-1})_{\mathcal{N}}||}{\kappa''(r_{j-2} - r_{j-1})} \right)^{D\gamma} & e^{|\Psi^{-1}\Psi' X_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}} |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}} \\ & (| \Psi'^{-1}\Psi |^4_{r_{j-2}} (R\bar{N})^d (e^{-2\pi R\bar{N}(r_{j-2} - r_{j-1})} \\ & + (1 + 2e^{|\Psi^{-1}\Psi' X_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}}) |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}) \end{aligned} \tag{3.233}$$

Nous allons estimer $|| \hat{F}_j(0) ||$ pour itérer la proposition 3.4.4. Les estimations (3.221) et (3.210) impliquent que

$$e^{|\Psi^{-1}\Psi' X_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}} \leq 2$$

donc

$$\begin{aligned} |\Psi^{-1}\Psi' F_j \Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-1}} \leq 3C' \left(\frac{1 + ||(A_{j-1})_{\mathcal{N}}||}{\kappa''(r_{j-2} - r_{j-1})} \right)^{D\gamma} & |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}} \\ & (| \Psi'^{-1}\Psi |^4_{r_{j-2}} (R\bar{N})^d e^{-2\pi R\bar{N}(r_{j-2} - r_{j-1})} + |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}) \end{aligned} \tag{3.234}$$

et comme $r_{j-2} - r_{j-1} = \frac{r-r''}{2l}$,

$$\begin{aligned}|\Psi^{-1}\Psi' F_j \Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-1}} &\leq |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}^{\frac{3}{4}}(|\ \Psi'^{-1}\Psi\ |_{r_{j-2}}^4\ (R\bar{N})^d e^{-2\pi\frac{R\bar{N}(r-r'')}{2l}} \\ &\quad + |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}) \\ &\leq |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}^{\frac{3}{4}}(|\ \Psi'^{-1}\Psi\ |_{r_{j-2}}^4\ (R\bar{N})^d {\epsilon'}^{\frac{R^{\frac{3}{4}}}{2l}} + |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}})\end{aligned} \tag{3.235}$$

Par définition de l,

$$(\frac{4}{3})^l \mid \log\epsilon \mid \leq 2\pi(r-r'')\sqrt[4]{R}\bar{N} \tag{3.236}$$

Comme $\bar{N} \leq R^{n_0}N$, alors

$$\left(\frac{4}{3}\right)^l \leq \frac{r-r''}{r}R^{n_0+1}$$

donc

$$\begin{aligned}l &\leq \frac{1}{\log\frac{4}{3}}((n_0+1)\log R + \log\frac{r-r''}{r}) \\ &\leq 8(n_0+1)\log R \leq 8(n_0+1)\sqrt[4]{R}\end{aligned} \tag{3.237}$$

D'autre part,

$$|\ \Psi'^{-1}\Psi\ |_{r_{j-2}} \leq C_n\left(\frac{1+\,||\ A\ ||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} e^{4\pi\bar{N}r_{j-2}} \leq C_n\left(\frac{1+\,||\ A\ ||}{\kappa''}\right)^{n(n+1)} {\epsilon'}^{-\frac{2r_{j-2}}{(r-r'')\sqrt[4]{R}}} \tag{3.238}$$

et donc

$$\begin{aligned}|\Psi^{-1}\Psi' F_j \Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-1}} &\leq |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}^{\frac{3}{4}}((R\bar{N})^d {\epsilon'}^{\frac{R^{\frac{3}{4}}}{2l}-\frac{8r_{j-2}}{\sqrt[4]{R}(r-r'')}} + |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}) \\ &\leq |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}^{\frac{3}{4}}((R\bar{N})^d {\epsilon'}^{\frac{R^{\frac{1}{2}}}{16(n_0+1)}-8} + |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}) \\ &\leq |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}^{\frac{3}{4}}(\epsilon' + |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}) \\ &\leq 2|\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}^{\frac{7}{4}} \\ &\leq |\Psi^{-1}\Psi' F_{j-1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-2}}^{\frac{3}{2}}\end{aligned} \tag{3.239}$$

Par une récurrence simple, on voit que pour tout j,

$$|\Psi^{-1}\Psi' F_j \Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-1}} \leq |\Psi^{-1}\Psi' F_1 \Psi'^{-1}\Psi|_{r_0}^{(\frac{3}{2})^{j-1}} \leq \epsilon^{(\frac{3}{2})^j} \tag{3.240}$$

Finalement,

$$||\ \hat{F}_j(0)\ || \leq |\Psi^{-1}\Psi' F_j \Psi'^{-1}\Psi|_{r_{j-1}}\ ||\ \Psi^{-1}\Psi'\ ||_0\ ||\ \Psi'^{-1}\Psi\ ||_0 \leq \epsilon_j \tag{3.241}$$

ce qui nous permet d'itérer la proposition 3.4.4.

Conclusion

Au bout de $l-1$ itérations,

$$|\Psi^{-1}\Psi' F_{l+1}\Psi'^{-1}\Psi|_{r_l} \leq \epsilon'^{\frac{17}{16}} \tag{3.242}$$

Soit $Z = e^{X_2}\dots e^{X_{l+1}} \in C^{\omega}_{r'}(2\mathbb{T}^d, G)), A' = A_{l+1}, F' = F_{l+1}$.
• On a bien

$$\partial_\omega Z = (A_1 + F_1)Z - Z(A' + F') \tag{3.243}$$

et

$$||A'|| \leq ||A_1|| + \sum_{j=1}^{l} ||\hat{F}_j(0)|| + 4\pi\bar{N} \leq ||A|| + \mid \log\epsilon \mid \left(\frac{1}{r-r'}\right)^{D_4} \tag{3.244}$$

pour D_4 assez grand ne dépendant que de n, d'où la propriété 5.

• Vérifions que $\mathcal{L}_{l+1}$ est bien une $(A_{l+1}, \kappa''(r'', r - \frac{r-r''}{2}, \epsilon'), 2\gamma)$-décomposition. Il suffit de vérifier que

$$\kappa''(r'', r'' - \frac{r-r''}{2}, \epsilon') \leq (\frac{3}{4})^{l+1}\frac{\kappa''}{C_0} \tag{3.245}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\kappa}{n(8R(r'', r'' - \frac{r-r''}{2})^{n_0+1}N(r'', \epsilon'))^\tau} \leq (\frac{3}{4})^{l+1}\frac{\kappa}{C_0 n(8R(r, r')^{n_0+1}N(r, \epsilon))^\tau} \tag{3.246}$$

ou encore

$$\frac{(r'' \mid \log\epsilon \mid)^\tau}{R(r'', r'' - \frac{r-r''}{2})^{(n_0+1)\tau}} \leq (\frac{3}{4})^{l+1} \mid \log\epsilon' \mid^\tau \frac{r^\tau}{R(r, r')^{(n_0+1)\tau}C_0} \tag{3.247}$$

et il suffit pour cela que

$$\mid \log\epsilon \mid^\tau \leq (\frac{3}{4})^{l+1} \mid \log\epsilon' \mid^\tau \frac{1}{C_0} \tag{3.248}$$

Mais par définition de ϵ' et de l,

$$\epsilon' \leq \epsilon^{(\frac{4}{3})^l} \tag{3.249}$$

donc

$$(\frac{3}{4})^l \geq \frac{\mid \log\epsilon \mid}{\mid \log\epsilon' \mid} \tag{3.250}$$

donc il suffit de montrer que

$$\mid \log\epsilon \mid^{\tau-1} \leq \mid \log\epsilon' \mid^{\tau-1} \frac{3}{4C_0} \tag{3.251}$$

ce qui est évidemment vérifié.

• Montrons la propriété 4. On a

$$e^{2\pi r\bar{N}} = \epsilon'^{-\frac{2\pi r\bar{N}}{|\log\epsilon'|}} = \epsilon'^{-\frac{r}{(r-r'')\sqrt[4]{R}}} \tag{3.252}$$

donc

$$|\Psi'|_{r''} \le \epsilon^{-\frac{1}{2}(r-r'')}\epsilon^{-\frac{1}{96}}e^{4\pi r\bar{N}} \le \epsilon^{-\frac{1}{2}(r-r'')}\epsilon^{-\frac{1}{96}}\epsilon'^{-\frac{r-r''}{200}} \tag{3.253}$$

Par ailleurs,

$$\epsilon = \epsilon'^{\frac{|\log\epsilon|}{2\pi\sqrt[4]{R}\bar{N}(r-r'')}} \tag{3.254}$$

donc

$$\frac{1}{\epsilon} = (\frac{1}{\epsilon'})^{\frac{|\log\epsilon|}{2\pi\sqrt[4]{R}\bar{N}(r-r'')}} \le (\frac{1}{\epsilon'})^{\frac{1}{\sqrt[4]{R}(r-r'')}} \le (\frac{1}{\epsilon'})^{\frac{r-r''}{200}} \tag{3.255}$$

et donc

$$|\Psi'|_{r''} \le (\frac{1}{\epsilon'})^{\frac{(r-r'')^2}{400}+\frac{r-r''}{200.96}+\frac{r-r''}{200}} \le \epsilon'^{-\frac{1}{4}(r-r'')} \tag{3.256}$$

d'où 4.

- De plus

$$|\Psi'F'\Psi'^{-1}|_{r''} \le |\Psi|_r|\Psi^{-1}|_r|\Psi^{-1}\Psi'F'\Psi'^{-1}\Psi|_{r''} \le \epsilon' \tag{3.257}$$

d'où 3. Posons $Z' = Z_1\Psi'Z\Psi'^{-1}$, $\bar{F}' = \Psi'F'\Psi^{-1}$ (ce qui satisfait la propriété 2) et $\bar{A}$ telle que

$$\partial_\omega\Psi' = \bar{A}'\Psi' - \Psi'A' \tag{3.258}$$

Alors

$$\partial_\omega Z' = (\bar{A}_1 + \bar{F}_1)Z' - Z'(\bar{A}' + \bar{F}') \tag{3.259}$$

d'où 6 et 1, et d'après (3.220),

$$\begin{aligned}|Z' - Id|_{r''} &\le |Z_1 - Id|_{r_1} + |\Psi|_r|\Psi^{-1}|_r\sum_j|\Psi^{-1}\Psi'X_j\Psi'^{-1}\Psi|_{r_j}\\ &\le \frac{1}{\tilde{C}'}\left(\frac{l(1+||A_{\mathcal{N}}||)|\log\epsilon|}{r-r''}\right)^{D_1\gamma}(\frac{1}{\epsilon})^{4(r-r'')}(\epsilon + \sum_j|\Psi^{-1}\Psi'F_j\Psi'^{-1}\Psi|_{r_j})\end{aligned} \tag{3.260}$$

donc d'après (3.221) et (3.240),

$$|Z' - Id|_{r''} \le \frac{2}{\tilde{C}'}\left(\frac{l(1+||A_{\mathcal{N}}||)|\log\epsilon|}{r-r''}\right)^{D_1\gamma}(\frac{1}{\epsilon})^{4(r-r'')}\epsilon \tag{3.261}$$

d'où la propriété 7 avec $D_3\gamma \ge 2D_1\gamma$ si $C' \le \frac{\tilde{C}'}{2(l(r-r''))^{D_1\gamma}}$, sachant que $l(r-r'')$ peut être bornée indépendamment de $r-r''$. □

Cette proposition est l'étape inductive qui peut être itérée telle quelle. Il est nécessaire d'aller jusqu'à un ϵ' beaucoup plus petit que ϵ pour pouvoir contrôler $|\Psi'|_{r'}$ en fonction de ϵ' et assurer que la conclusion soit bien analogue aux hypothèses.

3.5.5 Résultat principal

Lemme numérique

Donnons d'abord un lemme qui servira à itérer la proposition 3.5.2.

Lemme 3.5.3. *Soit* $C' \leq 1, b_0 > 0, r \leq \frac{1}{2}$ *et* $r' \in [\frac{95}{96}r, r[$. *Soit* $D_5, \gamma_0 \in \mathbb{N}$. *Il existe* C *ne dépendant que de* C', D_5, γ_0 *tel que pour tout* $\epsilon \leq C\left(\frac{r-r'}{b_0+1}\right)^{2\gamma_0 D_5}$, *en choisissant une suite* (ϵ_k) *telle que pour tout* k,

$$\epsilon_k \leq \epsilon_{k-1}^{100} < 1 \tag{3.262}$$

et en posant pour tout k

$$\gamma_k = 2^k \gamma_0 \tag{3.263}$$

$$r_k = r' + \frac{r - r'}{2^k} \tag{3.264}$$

$$b_k := b_{k-1} + \mid \log \epsilon_{k-1} \mid \left(\frac{2^k}{r - r'}\right)^{D_5} \tag{3.265}$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mid \log \epsilon_k \mid^{2D_5\gamma_k} \leq \epsilon_k^{-\frac{1}{4}} \tag{3.266}$$

et

$$a_k := \left(\frac{b_k + 1}{r_k - r_{k+1}}\right)^{D_5\gamma_k} \epsilon_k \leq C' \tag{3.267}$$

Démonstration: Montrons d'abord (3.266). Cette majoration équivaut à

$$2^{k+1} D_5 \gamma_0 \log \mid \log \epsilon_k \mid \leq \frac{1}{4} \mid \log \epsilon_k \mid \tag{3.268}$$

c'est-à-dire

$$2^{k+3} D_5 \gamma_0 \leq \frac{\mid \log \epsilon_k \mid}{\log \mid \log \epsilon_k \mid} \tag{3.269}$$

La fonction $t \mapsto \frac{|\log t|}{\log |\log t|}$ est décroissante pour $t \in]0, e^{-\frac{1}{e}}]$ donc il suffit de vérifier que

$$2^{k+3} D_5 \gamma_0 \leq \frac{100^k \mid \log \epsilon \mid}{k \log 100 + \log \mid \log \epsilon \mid} \tag{3.270}$$

ce qui est vrai en choisissant C en fonction de D_5, γ_0.
• Pour tout k,

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \left(\frac{b_{k+1}+1}{r_{k+1}-r_{k+2}}\right)^{D_5\gamma_{k+1}} \epsilon_{k+1} \\
&= \left(\frac{(b_{k+1}+1)2^{k+2}}{r-r'}\right)^{D_5\gamma_{k+1}} \epsilon_{k+1} \\
&\leq \left(\frac{(b_{k+1}+1)2^{k+2}}{r-r'}\right)^{D_5\gamma_{k+1}} \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k} a_k \\
&\leq \left(\frac{(b_0+(k+1)\mid \log \epsilon_k \mid)2^{k+2}}{r-r'}\right)^{2D_5\gamma_{k+1}} \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k} a_k
\end{aligned} \tag{3.271}$$

donc d'après (3.266),

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &\leq \left(\frac{(b_0+k+1)2^{k+2}}{r-r'}\right)^{\gamma_0 2^{k+2} D_5} \epsilon^{100^k.98} a_k \\
&\leq \left(\frac{(b_0+1)}{r-r'}\right)^{\gamma_0 16^{k+1} D_5} \epsilon^{100^k.98} a_k
\end{aligned} \tag{3.272}$$

donc si ϵ est aussi plus petit que $(\frac{r-r'}{b_0+1})^{16\gamma_0 D_5}$, alors

$$a_{k+1} \leq a_k \tag{3.273}$$

Si ϵ est aussi assez petit pour que

$$a_0 = \left(\frac{b_0+1}{r-r'}\right)^{D_5\gamma_0} \epsilon \leq C' \tag{3.274}$$

par exemple si l'on a

$$\left(\frac{b_0+1}{r-r'}\right)^{D_5\gamma_0} \epsilon^{\frac{3}{4}} \leq C' \tag{3.275}$$

alors (3.267) est vérifiée pour tout k. □

Le lemme 3.5.3 implique que l'hypothèse (3.210) de la proposition 3.5.2 est vérifiée pour tout k avec $\epsilon \leq \epsilon_k$, $||A|| = b_k$, $r = r_k$ et $r'' = r_{k+1}$.

On obtient, comme conséquence de ce qui précède, le résultat principal, dont nous allons donner différentes formulations.

Presque réductibilité

Théorème 3.5.4. *Soit* $r \leq \frac{1}{2}, A \in sp(n,\mathbb{R})$ *et* $F \in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ *avec de bonnes propriétés par rapport à* $\mathcal{L}_A$. *Soit*

$$r' \in [\frac{95}{96}r, r[$$

Il existe D_7 *ne dépendant que de* n, d, τ, κ, A *tel que si*

$$|F|_r \leq \epsilon'_0(r,r') = \left(\frac{r-r'}{|| A || +1}\right)^{D_7}$$

alors pour tout $\epsilon \leq \epsilon'_0$, *il existe*

– $Z_\epsilon \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$,
– $A_\epsilon \in sp(n,\mathbb{R})$,
– $\bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$,

tels que

1. $\bar{A}_\epsilon$ *est réductible à* A_ϵ,
2. $|\bar{F}_\epsilon|_{r'} \leq \epsilon$
3. *pour tout* $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,
$$\partial_\omega Z_\epsilon(\theta) = (A + F(\theta))Z_\epsilon(\theta) - Z_\epsilon(\theta)(\bar{A}_\epsilon(\theta) + \bar{F}_\epsilon(\theta))$$
4. $$|Z_\epsilon - Id|_{r'} \leq 2^{D_7}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r-r')}$$
et
$$|Z_\epsilon^{-1} - Id|_{r'} \leq 2^{D_7}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r-r')}$$
5. $Z_\epsilon, \partial_\omega Z_\epsilon$ *sont bornées dans* $C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, gl(n,\mathbb{C}))$ *indépendamment de* ϵ *;*

De plus, en dimension 2, si F *est continu sur* $\mathbb{T}^d$*, alors* $\bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon$ *et* Z_ϵ *sont en faits continus sur* $\mathbb{T}^d$.

Démonstration: La preuve se fait par itération de la manière suivante. Soit $r'' = \frac{r+r'}{2}$. Soit $R(r,r''), N(r,\epsilon_0'), \kappa''(r,r'',\epsilon_0')$ comme en (3.207), (3.208) et (3.209). Il existe $\gamma_0 \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de n,d,τ,κ,A, tel que $\mathcal{L}_A$ soit une (A,κ,γ_0)-décomposition (on peut supposer $\gamma_0 \geq n(n+1)$). Soient C', D_3 comme dans la proposition 3.5.2. Soient $D_5 = 2D_3$. Soit C comme dans le lemme 3.5.3 et D_7 tel que

$$\left(\frac{r-r''}{||A||+1}\right)^{D_7} \leq C\left(\frac{r-r''}{||A||+1}\right)^{4\gamma_0 D_5} \tag{3.276}$$

Soit

$$\epsilon_0' = \left(\frac{r-r''}{||A||+1}\right)^{D_7} \tag{3.277}$$

pour un certain D_7 ne dépendant que de n,d,κ,τ,A.
Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} r_k = r'' + \frac{r-r''}{2^k}, \\ b_0 = ||A||, \\ b_{k+1} = ||A|| + \sum_{j\leq k} \frac{|\log \epsilon_j|}{(r_{j-1}-r_j)^{D_5}} \end{cases} \tag{3.278}$$

où (ϵ_j) sera définie par la suite de manière inductive. Supposons que $|F|_r \leq \epsilon_0'$. On peut appliquer la proposition 3.5.2 une première fois : il existe des fonctions

– $Z_1 \in C^\omega_{r_1}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$,
– $\bar{A}_1, \bar{F}_1 \in C^\omega_{r_1}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$,
– $A_1 \in sp(n,\mathbb{R})$,
– $\Psi_0 \in C^\omega_{r_1}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$

et un réel $\epsilon_1 \leq \mid F\mid_r^{100}$ tels que

1. $\bar{A}_1$ est réductible à A_1 par Ψ_0.

2. $\Psi_0^{-1}\bar{F}_1\Psi_0$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A_1, \kappa''(r_1, r_2, \epsilon_1), 2\gamma_0)$-décomposition,
3. $|\bar{F}_1|_{r_1} \leq \epsilon_1$,
4. $|\Psi_0|_{r_1} \leq \epsilon_1^{-\frac{1}{2}(r_1-r_2)}$ et $|\Psi_0^{-1}|_{r_1} \leq \epsilon_1^{-\frac{1}{2}(r_1-r_2)}$,
5. $||A_1|| \leq b_1$;
6. pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,
$$\partial_\omega(Z_1(\theta)) = (A + F(\theta))Z_1(\theta) - Z_1(\theta)(\bar{A}_1(\theta) + \bar{F}_1(\theta))$$
7.
$$|Z_1 - Id|_{r_1} \leq \frac{1}{C'}\left(\frac{(1+||A||)|\log \epsilon_0|}{r_0 - r_1}\right)^{D_3\gamma_0} \epsilon_0^{1-4(r_0-r_1)}$$
ce qui implique, grâce au lemme 3.5.3, que
$$|Z_1 - Id|_{r_1} \leq \frac{1}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)}$$
et de même
$$|Z_1^{-1} - Id|_{r_1} \leq \frac{1}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)}$$

• Soit $k \geq 1$. Soient
  - $\bar{A}_k \in C^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$,
  - $A_k \in sp(n, \mathbb{R})$,
  - $\bar{F}_k \in C^\omega_{r_k}(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$
  - $\Psi_{k-1} \in C^\omega_{r_k}(2\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$
  - $\epsilon_k \leq\mid F \mid^{100^k}$

tels que
  - $\bar{A}_k$ est réductible à $A_k \in sp(n, \mathbb{R})$ par Ψ_{k-1},
  - $\Psi_{k-1}^{-1}\bar{F}_k\Psi_{k-1}$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A_k, \kappa''(r_k, r_{k+1}, \epsilon_k), 2^k\gamma_0)$ -décomposition,
  - $|\bar{F}_k|_{r_k} \leq \epsilon_k$,
  - $|\Psi_{k-1}|_r \leq \epsilon_k^{-\frac{1}{2}(r_k-r_{k+1})}$ et $|\Psi_{k-1}^{-1}|_r \leq \epsilon_k^{-\frac{1}{2}(r_k-r_{k+1})}$,

Le lemme 3.5.3 dit que
$$\left(\frac{b_k+1}{r_k - r_{k+1}}\right)^{2^k D_3\gamma_0} \epsilon_k \leq C' \tag{3.279}$$
On peut donc appliquer la proposition 3.5.2 et déduire qu'il existe
  - $Z_{k+1} \in C^\omega_{r_{k+1}}(2\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$,
  - $A_{k+1} \in sp(n, \mathbb{R})$,
  - $\bar{A}_{k+1} \in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$,
  - $\Psi_k \in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d, Sp(n, \mathbb{R}))$,
  - $\bar{F}_{k+1} \in C^\omega_{r_{k+1}}(2\mathbb{T}^d, sp(n, \mathbb{R}))$
  - $\epsilon_{k+1} \leq\mid F \mid^{100^{k+1}}$

tels que

1. $\bar{A}_{k+1}$ est réductible à A_{k+1} par Ψ_k,
2. $\Psi_k^{-1}\bar{F}_{k+1}\Psi_k$ a de bonnes propriétés de périodicité par rapport à une $(A_{k+1}, \kappa''(r_{k+1}, r_{k+2}, \epsilon_{k+1}), 2^{k+1}\gamma_0)$-décomposition,
3. $|\bar{F}_{k+1}|_{r_{k+1}} \leq \epsilon_{k+1}$,
4. $|\Psi_k|_r \leq \epsilon_{k+1}^{-\frac{1}{2}(r_{k+1}-r_{k+2})}$ et $|\Psi_k^{-1}|_r \leq \epsilon_{k+1}^{-\frac{1}{2}(r_{k+1}-r_{k+2})}$,
5. $||A_{k+1}|| \leq b_{k+1}$,
6. $$\partial_\omega Z_{k+1} = (\bar{A}_k + \bar{F}_k)Z_{k+1} - Z_{k+1}(\bar{A}_{k+1} + \bar{F}_{k+1})$$
7. $$|Z_{k+1} - Id|_{r_{k+1}} \leq \frac{1}{C'}\left(\frac{(1+||A_k||)|\log \epsilon_k|}{r_k - r_{k+1}}\right)^{2^k D_3\gamma_0} \epsilon_k^{1-4(r_k-r_{k+1})}$$

   et

   $$|Z_{k+1}^{-1} - Id|_{r_{k+1}} \leq \frac{1}{C'}\left(\frac{(1+||A_k||)|\log \epsilon_k|}{r_k - r_{k+1}}\right)^{2^k D_3\gamma_0} \epsilon_k^{1-4(r_k-r_{k+1})}$$

   ce qui implique, grâce au lemme 3.5.3, que

   $$|Z_{k+1} - Id|_{r_{k+1}} \leq \frac{1}{C'}\epsilon_k^{\frac{1}{4}-4(r_k-r_{k+1})}$$

   et

   $$|Z_{k+1}^{-1} - Id|_{r_{k+1}} \leq \frac{1}{C'}\epsilon_k^{\frac{1}{4}-4(r_k-r_{k+1})}$$

• Soit $\epsilon \leq \epsilon_0'$ et $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|F|_r^{100^{k_\epsilon}} \leq \epsilon$. Il suffit de poser

$$\begin{cases} Z_\epsilon = Z_1 \dots Z_{k_\epsilon} \\ \bar{A}_\epsilon = \bar{A}_{k_\epsilon} \\ \bar{F}_\epsilon = \bar{F}_{k_\epsilon} \end{cases} \tag{3.280}$$

de manière à satisfaire les propriétés 1 et 2. Ainsi, pour tout $\theta \in 2\mathbb{T}^d$,

$$\partial_\omega Z_\epsilon(\theta) = (A + F(\theta))Z_\epsilon(\theta) - Z_\epsilon(\theta)(\bar{A}_\epsilon(\theta) + \bar{F}_\epsilon(\theta)) \tag{3.281}$$

d'où la propriété 3. De plus, soit $a_k := |Z_1 \dots Z_k - Id|_{r''}$, alors

–

$$a_1 = |Z_1 - Id|_{r''} \leq \frac{1}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \tag{3.282}$$

donc

$$|Z_1|_{r''} \leq 1 + \frac{1}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \tag{3.283}$$

– soit $k \geq 2$ et supposons que pour tout $j \leq k-1$,

$$|Z_1 \dots Z_j|_{r''} \leq 1 + \frac{3}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \tag{3.284}$$

alors

$$\begin{aligned} a_k &\leq |Z_k - Id|_{r''}|Z_1 \dots Z_{k-1}|_{r''} + |Z_1 \dots Z_{k-1} - Id|_{r''} \\ &\leq |Z_1 \dots Z_{k-1}|_{r''}\frac{1}{C'}\epsilon_{k-1}^{\frac{1}{4}-4(r_{k-1}-r_k)} + a_{k-1} \end{aligned} \tag{3.285}$$

donc

$$\begin{aligned} a_k &\leq a_1 + \frac{1}{C'}\sum_{j=1}^{k-1}|Z_1 \dots Z_j|_{r''}\epsilon_j^{\frac{1}{4}-4(r_j-r_{j+1})} \\ &\leq \frac{1}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} + \frac{1}{C'}\sum_{j=1}^{k-1}(1+\frac{3}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)})\epsilon_j^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \end{aligned} \tag{3.286}$$

or pour tout $j \geq 1$,

$$(1+\frac{3}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)})\epsilon_j^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \leq \frac{1}{2}\epsilon_{j-1}^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} + \frac{3}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)+100^j(\frac{1}{4}-4(r_0-r_1))} \leq \epsilon_{j-1}^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \tag{3.287}$$

et donc

$$a_k \leq \frac{3}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \tag{3.288}$$

et

$$|Z_1 \dots Z_k|_{r''} \leq 1 + \frac{3}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \tag{3.289}$$

d'où la propriété 4. Ceci implique aussi que

$$|Z_\epsilon|_{r''} \leq 2 + \frac{3}{C'}\epsilon_0^{\frac{1}{4}-4(r_0-r_1)} \tag{3.290}$$

D'autre part, une estimation de Cauchy donne

$$|\partial_\omega Z_\epsilon|_{r'} \leq \frac{1}{r''-r'}|Z_\epsilon|_{r''} \tag{3.291}$$

d'où 5.

En dimension 2, si F est continu sur $\mathbb{T}^d$, on construit à chaque étape

– $Z_{k+1} \in C^\omega_{r_{k+1}}(\mathbb{T}^d, SL(2,\mathbb{R}))$,
– $A_{k+1} \in sl(2,\mathbb{R})$,
– $\bar{A}_{k+1} \in C^\omega_r(\mathbb{T}^d, sl(2,\mathbb{R}))$,
– $\bar{F}_{k+1} \in C^\omega_{r_{k+1}}(\mathbb{T}^d, sl(2,\mathbb{R}))$

et donc au bout du processus on obtiendra $Z_\epsilon, \bar{A}_\epsilon$ et $\bar{F}_\epsilon$ continus sur $\mathbb{T}^d$. $\Box$

Ceci prouve le théorème 3.0.3.

En général la presque-réductibilité n'implique pas la réductibilité. On a la réductibilité si la méthode donne un nombre fini de renormalisations, ou si la suite (Ψ_k) construite dans le théorème 3.5.4 converge dans $C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$. Mais en général cette suite n'est même pas bornée dans $C^\omega_0(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$. En revanche, si l'on a conjugué par cette méthode le système $A+F$ à un système $\bar{A}_\epsilon + \bar{F}_\epsilon$ où $\bar{A}_\epsilon$ est réductible par Ψ_ϵ à une constante A_ϵ, et où $\bar{F}_\epsilon$ est borné par ϵ, on peut également estimer $\Psi_\epsilon^{-1}\bar{F}_\epsilon\Psi_\epsilon$.

Corollaire 3.5.5. *Soit $r \leq \frac{1}{2}, A \in sp(n,\mathbb{R})$ et $F \in C^\omega_r(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ avec de bonnes propriétés de périodicité par rapport à $\mathcal{L}_A$. Soit*

$$r' \in [\frac{95}{96}r, r[$$

Il existe D_8 ne dépendant que de n, d, κ, τ, A tels que si

$$|F|_r \leq (r-r')^{D_8}$$

alors il existe

- *$Z \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$,*
- *une famille (A_l) de fonctions réductibles de $C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$*
- *et $A_\infty \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$*

telles que

$$\partial_\omega Z(\theta) = (A + F(\theta))Z(\theta) - Z(\theta)A_\infty(\theta) \tag{3.292}$$

et

$$\lim_{l\to\infty} |A_l - A_\infty|_{r'} = 0 \tag{3.293}$$

De plus, en dimension 2, si F est continue sur $\mathbb{T}^d$, alors Z, A_l et A_∞ sont en fait continues sur $\mathbb{T}^d$.

Démonstration: Soient D_7 comme dans le théorème 3.5.4 et D_8 tel que

$$(r-r')^{D_8} \leq \left(\frac{r-r'}{1+ || A ||}\right)^{D_7} \tag{3.294}$$

Soient $Z_\epsilon \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R})), A_\epsilon \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ les fonctions définies au théorème 3.5.4. Alors Z_ϵ et $\partial_\omega Z_\epsilon$ sont bornées dans $C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$ quand $\epsilon \to 0$. Soit Z la limite dans $C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$ d'une sous-suite $(Z_{\frac{1}{k_l}})$ de $(Z_{\frac{1}{k}})_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et

$$A_\infty(\theta) := Z(\theta)^{-1}(A + F(\theta))Z(\theta) - Z(\theta)^{-1}\partial_\omega Z(\theta)$$

alors

$$A_\infty \in C^\omega_{r'}(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R})), \lim_{l\to\infty} |A_{\frac{1}{k_l}} - A_\infty|_{r'} = 0$$

et l'équation (3.292) est vérifiée.

en dimension 2, si F est continue sur $\mathbb{T}^d$, tout reste continu sur $\mathbb{T}^d$. $\Box$

Remarque: Dans le corollaire 3.5.5, la fonction A_∞ n'est en général pas réductible, elle est seulement limite de fonctions réductibles.

Densité des cocycles réductibles au voisinage d'un cocycle constant

Corollaire 3.5.6. *Soit $r \leq \frac{1}{2}, A \in sp(n,\mathbb{R})$ et $G \in C_r^\omega(\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$. Il existe ϵ_0' ne dépendant que de n, d, τ, κ, A, r tel que si $|G-A|_r \leq \epsilon_0'$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $H \in C_{\frac{r}{2}}^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ tel que $|G-H|_{\frac{r}{2}} \leq \epsilon$ et H est réductible.*

Démonstration: Soit D_7 comme dans le théorème 3.5.4. Supposons que

$$|G-A|_r \leq (\frac{r}{2})^{D_7} =: \epsilon_0' \tag{3.295}$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème 3.5.4, il existe $Z_\epsilon \in C_{\frac{r}{2}}^\omega(2\mathbb{T}^d, Sp(n,\mathbb{R}))$, $\bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon \in C_{\frac{r}{2}}^\omega(2\mathbb{T}^d, sp(n,\mathbb{R}))$ et $A_\epsilon \in sp(n,\mathbb{R})$ tels que

- $\bar{A}_\epsilon$ est réductible à A_ϵ,
- $\partial_\omega Z_\epsilon = GZ_\epsilon - Z_\epsilon(\bar{A}_\epsilon + \bar{F}_\epsilon)$,
- $|Z_\epsilon|_{\frac{r}{2}} \leq 2$, $|Z_\epsilon^{-1}|_{\frac{r}{2}} \leq 2$,
- $|\bar{F}_\epsilon|_{\frac{r}{2}} \leq \frac{\epsilon}{4}$.

On a donc

$$\partial_\omega Z_\epsilon = HZ_\epsilon - Z_\epsilon \bar{A}_\epsilon \tag{3.296}$$

où $H = G - Z_\epsilon \bar{F}_\epsilon Z_\epsilon^{-1}$ est réductible à A_ϵ et vérifie

$$|H-G|_{\frac{r}{2}} \leq 4|\bar{F}_\epsilon|_{\frac{r}{2}} \leq \epsilon \; \square \tag{3.297}$$

Corollaire 3.5.7. *Soit $r \leq \frac{1}{2}, A \in sl(2,\mathbb{R})$ et $G \in C_r^\omega(\mathbb{T}^d, sl(2,\mathbb{R}))$. Il existe ϵ_0' ne dépendant que de n, d, τ, κ, A, r tel que si $|G-A|_r \leq \epsilon_0'$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $H \in C_{\frac{r}{2}}^\omega(\mathbb{T}^d, sl(2,\mathbb{R}))$ tel que $|G-H|_{\frac{r}{2}} \leq \epsilon$ et H est réductible.*

Démonstration: Reprenons la même construction que dans le corollaire 3.5.6. Le théorème 3.5.4 donne des fonctions $\bar{A}_\epsilon, \bar{F}_\epsilon, Z_\epsilon$ qui sont en fait continues sur $\mathbb{T}^d$. Donc H est continu sur $\mathbb{T}^d$. $\square$

Ceci prouve le théorème 3.0.4.

3.6 Appendice

Lemme 3.6.1. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et $A, F \in \mathcal{G}$ avec $||F|| \leq 1$. Soient $\alpha_1(\lambda), \ldots, \alpha_n(\lambda)$ un choix continu des valeurs propres de $A + \lambda F$ pour λ variant entre 0 et 1. Alors pour tout $1 \leq j \leq n$,*

$$| \alpha_j(\lambda) - \alpha_j(0) | \leq 2n\lambda^{\frac{1}{n}}(|| A || + 1) \tag{3.298}$$

Démonstration: Fixons $j \leq n$. Soit $\lambda_0 > 0$. Pour tout λ, soit

$$f(\lambda) = det(\alpha_j(\lambda_0)I - A - \lambda F) \tag{3.299}$$

Alors $f(\lambda_0) = 0$ et

$$f(0) = \sum \prod [(\alpha_j(0)I - A)_{k,\sigma(k)} + (\alpha_j(\lambda_0) - \alpha_j(0))] \geq (\alpha_j(\lambda_0) - \alpha_j(0))^n \tag{3.300}$$

donc

$$(\alpha_j(\lambda_0) - \alpha_j(0))^n \leq \mid f(\lambda_0) - f(0) \mid \leq \sup_\lambda \mid f'(\lambda) \mid \mid \lambda_0 \mid \tag{3.301}$$

Mais

$$\begin{aligned} \mid f'(\lambda) \mid &= \mid \sum_\sigma \frac{d}{d\lambda} \prod_k (\alpha_j(\lambda_0)I - A - \lambda F)_{k,\sigma(k)} \mid \\ &\leq nn![\mid\mid A(\lambda_0) \mid\mid + \mid\mid A(\lambda) \mid\mid]^{n-1} \\ &\leq 2^{n-1} nn![\mid\mid A \mid\mid +1]^{n-1} \end{aligned} \tag{3.302}$$

Finalement,

$$(\alpha_j(\lambda_0) - \alpha_j(0)) \leq 2n\lambda_0^{\frac{1}{n}} [\mid\mid A \mid\mid +1] \square \tag{3.303}$$

Bibliographie

[ABD09] A. Avila, J. Bochi, and D. Damanik. Cantor spectrum for schrödinger operators with potential arising from generalized skew-shifts. *Duke Mathematical Journal*, 146 :253–280, 2009.

[AJ] A. Avila and S. Jitomirskaia. Almost localization and almost reducibility. à paraître.

[AK06] A. Avila and R. Krikorian. Reducibility or non-uniform hyperbolicity for quasi-periodic schrödinger cocycles. *Annals of Mathematics*, 164 :911–940, 2006.

[Amo06] S. Hadj Amor. *Opérateur de Schrödinger quasi-périodique unidimensionnel.* PhD thesis, Université Paris 7, 2006.

[Amo09] S. Hadj Amor. Hölder continuity of the rotation number for quasi-periodic cocycles in $sl(2,\mathbb{R})$. *Communications in Mathematical Physics*, 287(2) :565–588, 2009.

[Boh51] H.A. Bohr. *Almost Periodic Functions.* Chelsea Publishing, 1951.

[Bou02] J. Bourgain. On the spectrum of lattice schrödinger operators with deterministic potential. *Journal d'analyse mathématique*, 88 :221–254, 2002.

[Cas97] J.W.S. Cassels. *An Introduction to the Geometry of Numbers.* Springer, 1997.

[CD93] V. Chulaevsky and E.I. Dinaburg. Methods of kam-theory for long range quasi-periodic operators on $\mathbb{Z}^\nu$. pure point spectrum. *Communications in Mathematical Physics*, 153 :559–577, 1993.

[Cha] C. Chavaudret. Reducibility of quasiperiodic cocycles in linear lie groups. Arxiv 0810.0651.

[DS75] E.I. Dinaburg and Ya.G. Sinai. The one-dimensional schrödinger equation with a quasi-periodic potential. *Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya*, 9(4) :8–21, 1975.

[DS83] P. Deift and B. Simon. Almost periodic schrödinger operators, iii. the absolutely continuous spectrum in one dimension. *Communications in Mathematical Physics*, 90 :389–411, 1983.

[EJ82] R. Ellis and R. Johnson. Topological dynamics and linear differential systems. *Journal of Differential Equations*, 44 :21–39, 1982.

[Eli88] L.H. Eliasson. Perturbations of stable invariant tori for hamiltonian systems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 15(1) :115–147, 1988.

[Eli92] L.H. Eliasson. Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic schrödinger equation. *Communications in mathematical physics*, 146 :447–482, 1992.

[Eli96] L.H. Eliasson. Absolutely convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Mathematical Physics Electronic Journal*, 2(4), 1996.

[Eli97] L.H. Eliasson. Discrete one-dimensional quasi-periodic schrödinger operators with pure point spectrum. *Acta Mathematica*, 179 :153–196, 1997.

[Eli98] L.H. Eliasson. Reducibility and point spectrum for linear quasi-periodic skew-products. *Documenta mathematica*, Extra volume ICM(II) :779–787, 1998.

[Eli01] L.H. Eliasson. Almost reducibility of linear quasi-periodic systems. *Proceedings of symposia in pure mathematics*, 69 :679–705, 2001.

[Eli02] L.H. Eliasson. Ergodic skew-systems on $\mathbb{T}^d \times so(3,\mathbb{R})$. *Ergodic theory and dynamical systems*, 22 :1429–1449, 2002.

[Eli06] L.H. Eliasson. Linear quasi-periodic systems- reducibility and almost-reducibility. In *14th International Congress on Mathematical Physics*, pages 195–205, 2006.

[FSW90] J. Fröhlich, T. Spencer, and P. Wittwer. Localisation for a class of one-dimensional quasi-periodic schrödinger operators. *Communications in Mathematical Physics*, 132 :5–25, 1990.

[Her83] M. Herman. Une méthode pour minorer les exposants de lyapunov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'arnold et de moser sur le tore de dimension 2. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 58 :453–502, 1983.

[HY08] H. He and J. You. Full measure reducibility for generic one-parameter family of quasi-periodic linear systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 20 :831–866, 2008.

[JM82] R. Johnson and J. Moser. The rotation number for almost periodic potentials. *Communications in Mathematical Physics*, 84 :403–438, 1982.

[JN94] R. Johnson and M. Nerurkar. Exponential dichotomy and rotation number for linear hamiltonian systems. *Journal of Differential Equations*, 108 :201–216, 1994.

[Joh80] R. Johnson. Analyticity of spectral subbundles. *Journal of differential equations*, 35(3) :366–387, 1980.

[Joh86] R. Johnson. Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients. *Journal of differential equations*, 61 :54–78, 1986.

[Joh87] R. Johnson. m-functions and floquet exponents for linear differential systems. *Ann. mat. pura appl.*, 147 :211–248, 1987.

[JS81] R.A. Johnson and G.R. Sell. Smoothness of spectral subbundles and reducibility of quasi-periodic linear differential systems. *Journal of differential equations*, 41 :262–288, 1981.

[JS92] A. Jorba and C. Simo. On the reducibility of linear differential equations with quasi-periodic coefficients. *Journal of differential equations*, 98(1) :111–124, 1992.

[Kri99a] R. Krikorian. c^0-densité globale des systèmes produit-croisé sur le cercle réductibles. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 19 :61–100, 1999.

[Kri99b] R. Krikorian. *Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts*, volume 259 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1999.

[Kri99c] R. Krikorian. Réductibilité presque partout des flots fibrés quasi-périodiques à valeurs dans des groupes compacts. *Annales scientifiques de l'ENS, 4e série*, 32(2) :187–240, 1999.

[Kri01] R. Krikorian. Global density of reducible quasi-periodic cocycles on $\mathbb{T}^1 \times su(2)$. *Annals of Mathematics*, 154(2) :269–326, september 2001.

[Kri04] R. Krikorian. Reducibility, differentiable rigidity and lyapunov exponents for quasi-periodic cocycles on $\mathbb{T} \times sl(2, \mathbb{R})$. Arxiv-0402333, février 2004.

[Mil68] V.M. Millionscikov. Proof of the existence of irregular systems of linear differential with almost periodic coefficients. *Differential Equations*, 4 :203–205, 1968.

[Mos67] J. Moser. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Mathematische Annalen*, 169 :136–176, 1967.

[MP84] J. Moser and J. Pöschel. An extension of a result by dinaburg and sinai on quasi-periodic potentials. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 59 :39–85, 1984.

[Ner88] M.G. Nerurkar. On the construction of smooth ergodic skew-products. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 8 :311–326, 1988.

[NS60] V.V. Nemytskii and V.V. Stepanov. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Princeton University Press, 1960.

[PF92] L. Pastur and A. Figotin. *Spectra of random and almost-periodic operators*. Springer, 1992.

[Pui02] J. Puig. Reducibility of linear equations with quasi-periodic coefficients. a survey, 2002.

[Pui04] J. Puig. Cantor spectrum for the almost mathieu operator. *Communications in Mathematical Physics*, 244 :297–309, 2004.

[Pui06] J. Puig. A non-perturbative eliasson's reducibility theorem. *Nonlinearity*, 19 :355–376, 2006.

[Pya69] A.S. Pyartli. Diophantine approximations on submanifolds of euclidean spaces. *Funkt. Anal. i priloz.*, 3 :303–306, 1969.

[Ryc92] M. Rychlik. Renormalization of cocycles. *Inventiones Mathematicae*, 110 :173–206, 1992.

[Sin87] Ya.G. Sinai. Anderson localization for the one-dimensional difference schrödinger operator with a quasi-periodic potential. *Journal of Statistical Physics*, 46 :861–909, 1987.

[SS74] R.J. Sacker and G.R. Sell. Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems i. *Journal of differential equations*, 15 :429–458, 1974.

[SS78] R.J. Sacker and G.R. Sell. A spectral theory for linear differential systems. *Journal of differential equations*, 27 :320–358, 1978.

[SS91] E. Sorets and T. Spencer. Positive lyapunov exponents for schrödinger operators with quasi-periodic potential. *Communications in Mathematical Physics*, 142 :543–566, 1991.

[You97] L.S. Young. Lyapunov exponents for some quasi-periodic cocycles. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 17 :483–504, 1997.