

Doctorat de mathématiques
Université Paris Diderot - Paris 7
UFR de mathématiques
École doctorale de sciences mathématiques de Paris Centre

Acyclicité des hypergraphes et liens avec la
logique sur les structures relationnelles finies

David Duris

Thèse soutenue le 25 novembre 2009

Membres du jury : Arnaud Durand (directeur)

Anuj Dawar (rapporteur)

Luc Segoufin (rapporteur)

Cristina Bazgan

Françoise Delon

Etienne Grandjean

Michel de Rougemont

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse Arnaud Durand. Pendant plus de trois ans, il a été très disponible et nos conversations m'ont été d'une aide inestimable. Il m'a donné de précieux conseils, sur le plan scientifique bien sûr mais aussi sur tous les autres aspects de l'activité d'un enseignant-chercheur. Sans lui, je n'aurais jamais été capable de mener à bien cette thèse. Je remercie chaleureusement Anuj Dawar et Luc Segoufin d'avoir accepté d'en être les rapporteurs. Je suis reconnaissant aux autres membres du jury Cristina Bazgan, Françoise Delon, Etienne Grandjean et Michel de Rougemont d'avoir pris de leur temps pour lire ma thèse et assister à sa soutenance. Je remercie Anuj Dawar pour m'avoir accueilli une semaine au Computer Laboratory de Cambridge et pour toutes nos discussions concernant la théorie des modèles finis. Je remercie Thomas Brihaye, Richard Lassaigne, Florent Madelaine, Guillaume Malod, Luc Segoufin et Patrick Simonetta pour m'avoir permis de participer à des séminaires et conférences. Je remercie René Cori et Daniel Lascar : l'idée de m'orienter vers la logique mathématique comme futur domaine de recherche est née en avril 2005 à la lecture de leur ouvrage *Logique mathématique*.

Merci à mes collègues d'avoir supporté et/ou partagé mes moments de distraction au bureau 5C6. À Avenilde pour son amitié, sa bonne humeur et sa grande capacité d'analyse. À Rémi qui arrive à la fois à comprendre Shelah et à jouer à un *manic shooter* après une nuit blanche. À modest qui réussit à one-créditer tout ce qu'il entreprend. À Victor pour nos discussions

passionnées sur les Fab Four et pour avoir gratté avec moi des morceaux de plastique devant *Rock Band*. À Yann pour sa sympathie et les bons moments passés en déplacement, notamment au Marmotel. À Laura pour sa gaieté et ses multiples talents. À Ana&Fares. À Clément&Gönenç. À Karim le *deck builder*. À François, Dimitris et Pablo. À la jeune garde de la didactique des mathématiques : Carolina, Diana, Julia et Raquel. Aux membres du 5B1, bureau jumelé au 5C6, en particulier Caroline, Idris, Joseph, Katia, Marc et Thomas, ainsi qu'à Jérôme. Aux deux incontournables visiteurs du bureau dont la venue provoquait toujours l'allégresse : Gillet et Waaalsh.

Toute ma gratitude à mes parents Christa et Patrick pour ce qu'ils m'ont appris et pour leur affection. Un merci tout particulier à mon frère Daniel pour son inextinguible complicité. Un grand merci à Opa pour son soutien et pour la part d'atavisme qui rend moins difficile mon travail mathématique.

Mille mercis à Gaëlle pour tout ce qu'elle me donne... *and I do appreciate her being 'round.*

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Contenu de la thèse	7
1.2	Rappels et notations	11
1.2.1	Logique	11
1.2.2	Complexité	16
1.2.3	Graphes et hypergraphes	18
2	Notions d'acyclicité pour les hypergraphes	21
2.1	Berge, γ , β et α -acyclicité	21
2.2	Arbre de jointure à branches disjointes	32
2.3	Caractérisations par règles	39
2.4	Autres notions et comparaison dans le cas où l'arité est bornée	43
3	Propriétés définies par des règles destructrices du premier ordre	51
3.1	Cas général	52
3.2	Propriétés NP -complètes	58
3.3	Fragments inclus dans PTIME	65
3.4	Règles avec unicité	71
4	Théorèmes de préservation par extension sur des classes de structures finies acycliques	75
4.1	Théorèmes de préservation en théorie des modèles finis	75

4.2	Théorème pour les structures à k -quotient acyclique	81
4.3	Théorème pour les structures γ -acycliques	87
4.4	Théorème pour les structures à k -quotient γ -acyclique	94
4.5	Cas β -acyclique	96
5	Conclusion et perspectives	101
5.1	Acyclicité et bases de données	101
5.2	Règles destructrices	104
	Bibliographie	107
	Index	115

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contenu de la thèse

Cette thèse contient des contributions à la théorie des hypergraphes et à la théorie des modèles finis. La notion d'hypergraphe généralise celle de graphe dans le sens où les sommets d'un hypergraphe sont reliés par des hyperarêtes de taille quelconque au lieu d'arêtes de taille 2. Un hypergraphe peut être vu simplement comme un ensemble fini (les sommets) et une collection de ses sous-ensembles (les hyperarêtes) mais le vocable "hypergraphe" signifie qu'on s'intéresse à la généralisation de concepts essentiellement propres aux graphes : chemin, connexité, acyclicité, méthodes de décomposition... L'étude structurelle des hypergraphes se prête particulièrement bien à celle des structures relationnelles finies et donc par extension à la théorie des modèles finis. Ce domaine de la logique, ancré dans l'informatique théorique, a pour objet d'exhiber des liens entre l'interprétation de langages formels sur des structures finies (logiques du premier et second ordre et leurs restrictions, logiques de point fixe...) et des propriétés sémantiques diverses (complexité algorithmique, préservation par des opérations, lois 0-1...). On peut par exemple citer le théorème de Fagin qui établit qu'une propriété est exprimable par un énoncé existentiel du second ordre si et seulement si elle est décidable

en temps non déterministe polynomial (cf. [Fag74]) ou le récent théorème de Rossman qui dit que les énoncés du premier ordre définis par un énoncé existentiel positif sont précisément ceux préservés par homomorphisme (cf. [Ros08]). Il existe plusieurs ouvrages sur la théorie des modèles finis. On peut citer [Imm98], [EF99], [Lib04] et [GKL⁺07].

Une des notions les plus naturelles définies sur les graphes que l'on souhaiterait pouvoir étudier sur les hypergraphes est l'acyclicité, c'est-à-dire le fait de ne pas contenir de cycle. Dans le cas des hypergraphes, les hyperarêtes peuvent relier un nombre quelconque de sommets et il existe alors une certaine latitude dans le choix de ce qu'on pourrait identifier à un cycle. C'est d'ailleurs pour cette raison que différentes définitions non équivalentes de l'acyclicité des hypergraphes ont vu le jour. On peut citer par ordre strictement croissant de généralité : la Berge-acyclicité, la γ -acyclicité, la β -acyclicité et l' α -acyclicité (cf. [Fag83]). Dans cette thèse, on s'intéresse plus particulièrement à la γ et la β -acyclicité. Dans un premier temps, on considère ces notions d'un point de vue structurel et combinatoire à travers des résultats de caractérisation. On se penche ensuite sur des questions de complexité et définissabilité inspirées de caractérisations à base de règles itérées. La dernière partie aborde les hypergraphes acycliques sous un angle modèle-théorique.

Dans le chapitre 2, on procède à une étude structurelle des notions d'acyclicité des hypergraphes. Après avoir présenté un état de l'art de ces notions, on essaie de comprendre plus précisément les conditions qui font qu'un hypergraphe α -acyclique (c'est-à-dire ayant un arbre de jointure) est aussi γ ou β -acyclique. Au passage, on définit une nouvelle notion d'acyclicité : celle d'arbre de jointure à branches disjointes. On montre les propositions suivantes :

- ▷ Un hypergraphe est γ -acyclique si et seulement si il est α -acyclique et ne contient pas de γ -cycle de taille 3.
- ▷ Un hypergraphe est γ -acyclique si et seulement si il a un arbre de

jointure à branches disjointes pour tout choix de racine.

- ▷ Avoir un arbre de jointure à branches disjointes est une notion située strictement entre la γ et la β -acyclicité.

Dans le même style que le système de règles de Graham, Yu et Ozsoyoglu permettant de décider l' α -acyclicité (cf. [Gra79] et [YO79]), on introduit de nouvelles règles pour la γ et la β -acyclicité.

- ▷ Un hypergraphe est γ -acyclique si et seulement si retirer successivement des éléments e satisfaisant une des trois conditions suivantes donne l'hypergraphe vide :
 1. e est un sommet appartenant à au plus une hyperarête.
 2. e est une hyperarête telle que, pour toute hyperarête F , on a $e \subset F$ ou $e \cap F = \emptyset$.
 3. Il existe une autre hyperarête ayant les mêmes éléments que e .
- ▷ Un hypergraphe est β -acyclique si et seulement si retirer successivement des éléments e satisfaisant une des deux conditions suivantes donne l'hypergraphe vide :
 1. L'ensemble des hyperarêtes contenant e forme une chaîne pour l'inclusion.
 2. e est une hyperarête vide.

Le chapitre 3 concerne les propriétés définies en termes de règles vues sous un angle descriptif. Les conditions précédentes satisfaites par l'élément e retiré à chaque étape peuvent s'exprimer au premier ordre. Cela nous donne l'idée de regarder de manière plus générale quelles propriétés des structures finies peuvent être exprimées en termes de règles du premier ordre appliquées jusqu'à obtenir la structure vide. On retire donc successivement des éléments vérifiant $\phi(e)$ avec $\phi(x)$ une formule du premier ordre à une variable libre. Plus généralement, on peut décider de retirer des éléments e_1, \dots, e_k satisfaisant une condition exprimée par une formule à k variables libres. Définir une propriété en termes de règles revient alors à donner une

formule $\phi(x_1, \dots, x_k)$. Notre étude consiste à évaluer l'influence de la forme syntaxique de $\phi(x_1, \dots, x_k)$ sur la complexité algorithmique de la propriété ainsi définie. En fonction du nombre k de variables libres et du fragment de la logique du premier ordre auquel appartient la condition $\phi(x_1, \dots, x_k)$, on obtient une classification complète concernant la complexité de la propriété ainsi définie :

Peut définir des propriétés NP -complètes :	Définit toujours des propriétés dans P TIME :
$\exists\forall\mathbf{FO}, k = 1$	$\exists^*\mathbf{FO}, k = 1$
$\forall\exists\mathbf{FO}, k = 1$	$\forall^*\mathbf{FO}, k = 1$
$\exists\mathbf{FO}, k = 2$	FO sans quantificateur, $k = 2$
$\forall\mathbf{FO}, k = 2$	
FO sans quantificateur, $k = 3$	

On étudie aussi succinctement un système de règles où l'on ne peut retirer un élément que s'il est le seul à satisfaire une formule.

Le chapitre 4 a pour objet les théorèmes de préservation en théorie des modèles finis. On recense d'abord les principaux résultats connus dans ce domaine, puis on présente plus particulièrement le théorème de préservation par extension pour certaines classes de structures finies acycliques. Une classe de structures satisfait le théorème de préservation par extension si, sur cette classe, les énoncés du premier ordre préservés par extension sont exactement ceux définissables par un énoncé existentiel. Atserias, Dawar et Grohe ont montré que ce théorème est satisfait pour des classes de structures finies d'arité au plus 2 et acycliques au sens des graphes (cf. [ADG08]). On évalue de façon précise à quel point ce théorème peut être généralisé pour des arités quelconques et les notions d'acyclicité des hypergraphes. On prouve les résultats suivants.

- ▷ Le théorème de préservation par extension est satisfait sur toute classe de structures finies à k -quotient γ -acyclique qui est close par sous-structure et union disjointe. Ce cas inclut en particulier celui des structures finies γ -acycliques et des structures finies à k -quotient acyclique.
- ▷ Le théorème de préservation par extension n'est pas satisfait pour n'importe quelle classe de structures finies β -acycliques close par sous-structure et union disjointe. Cependant, il est tout de même vérifié par la classe de toutes les structures finies β -acycliques.

1.2 Rappels et notations

1.2.1 Logique

Dans cette thèse, on se place dans le cadre de la logique du premier ordre sur des structures relationnelles finies.

Structure

Une *signature relationnelle* $\sigma = \{R_1, \dots, R_k\}$ est la donnée d'un ensemble fini de *symboles de relation* R_1, \dots, R_k ayant chacun une *arité*, c'est-à-dire un nombre d'arguments. Dans cette thèse, on appelle *arité* d'une signature le maximum des arités de ses éléments.

Une σ -*structure finie* (ou plus simplement *structure finie* quand il n'y a pas d'ambigüité sur la signature considérée) est un couple $\mathcal{A} = (A, \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \sigma\})$ où A est un ensemble fini, appelé le *domaine* de \mathcal{A} , et chaque $R^{\mathcal{A}}$ est un ensemble d'uplets (éléments de A^r où r est l'arité de R), appelé l'*interprétation* de R sur \mathcal{A} . La *taille* d'une structure \mathcal{A} , notée $|\mathcal{A}|$, est la somme des tailles de son domaine et de ses uplets interprétant les relations de σ , c.-à-d.

$$|\mathcal{A}| := |A| + \sum_{R \in \sigma} |R^{\mathcal{A}}|.$$

Un *isomorphisme* entre deux σ -structures \mathcal{A} et \mathcal{B} est une bijection f de A vers B telle que, pour tout $R \in \sigma$ et tout uplet $(a_1, \dots, a_r) \in A^r$, on a $(a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathcal{A}}$ si et seulement si $(f(a_1), \dots, f(a_r)) \in R^{\mathcal{B}}$. En quelque sorte, f exhibe le fait que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont les mêmes structures à nommage des éléments près. On dit alors que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont *isomorphes* ou que \mathcal{A} est isomorphe à \mathcal{B} . Une *classe* \mathcal{C} est un ensemble de structures finies clos par isomorphisme, c'est-à-dire que si \mathcal{A} est dans \mathcal{C} alors toute structure isomorphe à \mathcal{A} est aussi dans \mathcal{C} . Une *sous-structure* \mathcal{B} d'une structure \mathcal{A} est une structure *engendrée* par un certain sous-ensemble B de A . Le domaine de \mathcal{B} est B et, pour tout R dans σ , $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{A}} \cap B^r$ où r est l'arité de R . Remarquons que dans la littérature on utilise souvent le terme "sous-structure engendrée" pour désigner ce qu'on appelle ici "sous-structure", laissant le terme "sous-structure" aux structures telles qu'on a juste $R^{\mathcal{B}} \subset R^{\mathcal{A}}$. Une *extension* d'une structure \mathcal{A} est une structure \mathcal{E} telle que \mathcal{A} est une sous-structure de \mathcal{E} . Une classe de structures finies \mathcal{C} est *close* par sous-structure (resp. extension) si, pour toute structure $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ et toute sous-structure (resp. extension) \mathcal{B} de \mathcal{A} , \mathcal{B} est également dans \mathcal{C} . L'*union disjointe* de deux structures \mathcal{A} et \mathcal{B} est une structure de domaine l'union disjointe de A et B (disons par exemple $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$) et telle que chaque relation R est interprétée par l'union de $\{(a_1, 0), \dots, (a_r, 0) \mid (a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathcal{A}}\}$ et de $\{(b_1, 1), \dots, (b_r, 1) \mid (b_1, \dots, b_r) \in R^{\mathcal{B}}\}$. Une classe \mathcal{C} est close par union disjointe si toute union disjointe de deux structures dans \mathcal{C} est aussi dans \mathcal{C} .

Formule du premier ordre

La *logique du premier ordre* ou **FO** (pour *first-order*) désigne à la fois l'ensemble des formules du premier ordre et la façon de les interpréter sur des structures (ici finies et relationnelles). Les *formules du premier ordre* (ou simplement *formules*) sur une signature σ sont définies par induction. Elles sont formées à partir des symboles de σ , des symboles de *négation*, *conjonction* et *disjonction* \neg , \wedge et \vee , des symboles de *quantification uni-*

verselle et existentielle \forall et \exists , des parenthèses ouvrante et fermante et des *variables* du premier ordre (a priori n'importe quel symbole ne rentrant pas en conflit avec les symboles précédents, mais typiquement des symboles comme x, y, z ou les versions avec indice x_1, \dots, x_n qui sont communément utilisés en mathématiques). Les *formules atomiques* (c'est-à-dire celles de la forme $Rx_1\dots x_r$ où R appartient à σ et est d'arité r et où x_1, \dots, x_r sont des variables) sont des formules du premier ordre ayant pour variables *libres* x_1, \dots, x_r et sans variable *liée*. Si ϕ est une formule du premier ordre, alors $\neg\phi$ est une formule du premier ordre ayant les mêmes variables libres et liées que ϕ . Si ϕ et ψ sont des formules du premier ordre, alors $(\phi \wedge \psi)$ et $(\phi \vee \psi)$ sont aussi des formules du premier ordre et ont pour variables libres (resp. liées) l'union des variables libres (resp. liées) de ϕ et de ψ . Si ϕ est une formule du premier ordre et si x n'est pas une variable liée de ϕ , alors $\forall x\phi$ et $\exists x\phi$ sont des formules du premier ordre ayant pour variables libres celles de ϕ auxquelles on a retiré x et pour variables liées celles de ϕ auxquelles on a ajouté x . Si ϕ est une formule dont les variables libres sont x_1, \dots, x_n , on désigne ϕ par $\phi(x_1, \dots, x_n)$. Un *énoncé du premier ordre* (ou *énoncé*) est une formule sans variable libre. On décrit maintenant par induction l'interprétation des formules sur une structure \mathcal{A} , c'est-à-dire qu'on donne un sens à l'expression " \mathcal{A} satisfait la formule $\phi(a_1, \dots, a_n)$ ", notée $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ où a_1, \dots, a_n sont des éléments de A . Cette interprétation est en fait assez intuitive. On a :

- $\mathcal{A} \models Ra_1\dots a_n$ si $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathcal{A}}$.
- $\mathcal{A} \models \neg\phi(a_1, \dots, a_n)$ si \mathcal{A} ne satisfait pas $\phi(a_1, \dots, a_n)$.
- $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \wedge \psi(b_1, \dots, b_m)$ si $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ et $\mathcal{A} \models \psi(b_1, \dots, b_m)$.
- $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \vee \psi(b_1, \dots, b_m)$ si $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ ou $\mathcal{A} \models \psi(b_1, \dots, b_m)$.
- $\mathcal{A} \models \forall x\phi(x, a_1, \dots, a_n)$ si, pour tout a dans A , $\mathcal{A} \models \phi(a, a_1, \dots, a_n)$.
- $\mathcal{A} \models \exists x\phi(x, a_1, \dots, a_n)$ s'il existe un a dans A tel que $\mathcal{A} \models \phi(a, a_1, \dots, a_n)$.

Si ϕ est un énoncé et $\mathcal{A} \models \phi$, alors on dit aussi que \mathcal{A} est un *modèle* de ϕ . Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, les parenthèses peuvent être omises pour alléger l'écriture. Par exemple, si (ϕ) est une formule, on la désigne plutôt

par ϕ . On utilise aussi les connecteurs \Rightarrow et \Leftrightarrow avec leur sens habituel. C'est-à-dire que $\phi \Rightarrow \psi$ désigne $\neg\phi \vee \psi$ et $\phi \Leftrightarrow \psi$ désigne $(\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$.

Soit Q_1, \dots, Q_n des quantificateurs (symboles \forall ou \exists). Le fragment de la logique du premier ordre $Q_1 \dots Q_n \mathbf{FO}$ consiste en les formules de la forme $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \psi$ où ψ est sans quantificateur. L'utilisation d'un symbole $*$ après un quantificateur signifie qu'il peut être répété n'importe quel nombre fini de fois. Plus précisément, pour tout i , $Q_1 \dots Q_i^* \dots Q_n \mathbf{FO}$ est l'union des fragments $Q_1 \dots Q_i^1 \dots Q_i^k \dots Q_n \mathbf{FO}$ pour $k \geq 0$ où, pour tout l , $Q_i^l = Q_i$. On appelle respectivement formules *universelles* et formules *existentielles* les formules de $\forall^* \mathbf{FO}$ et $\exists^* \mathbf{FO}$. Les formules existentielles *positives* sont les formules existentielles ne contenant pas de symbole de négation.

Rang de quantification

On définit maintenant le *rang de quantification* d'une formule, noté rq . Cela correspond à la hauteur de l'arbre de la formule mais où l'on ne compte que les nœuds indicés par un quantificateur. Plus précisément, on donne un définition par induction.

- $rq(\phi) := 0$ si ϕ est atomique,
- $rq(\neg\phi) := rq(\phi)$,
- $rq(\phi \alpha \psi) := \max(rq(\phi), rq(\psi))$ si α est un connecteur logique binaire \wedge ou \vee ,
- $rq(\forall x\phi) := 1 + rq(\phi)$ et
- $rq(\exists x\phi) := 1 + rq(\phi)$ pour toute variable x .

Pour toutes structures \mathcal{A} et \mathcal{B} et tout entier q , on note $\mathcal{A} \equiv_q \mathcal{B}$ le fait que \mathcal{A} et \mathcal{B} satisfont les mêmes énoncés de rang de quantification au plus q . Par commodité, on dira alors que les structures \mathcal{A} et \mathcal{B} sont *q-équivalentes*. La relation \equiv_q est une relation d'équivalence et toute classe d'équivalence pour \equiv_q est appelée un *q-type*. Étant donné qu'il y a, à équivalence près, un nombre fini d'énoncés de rang de quantification au plus q (deux énoncés sont *équivalents* s'ils ont les mêmes modèles), il y a également un nombre fini de

q -types.

Il existe un moyen pratique de déterminer si deux structures sont q -équivalentes : le jeu d'Ehrenfeucht-Fraïssé (cf. [Ehr61] et [Fra54]), dit aussi jeu EF. Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux structures. Le *jeu EF* à q coups entre \mathcal{A} et \mathcal{B} fait intervenir deux joueurs (I et II). Au i -ième coup ($1 \leq i \leq q$), I choisit un élément $a_i \in A$ puis II choisit un élément $b_i \in B$, ou bien I choisit un élément $b_i \in B$ puis II choisit un élément $a_i \in A$. On dit que II *gagne* ce jeu si, quels que soient les choix faits par I, il existe une suite de choix pour II telle que $(a_1, \dots, a_q) \mapsto (b_1, \dots, b_q)$ soit un isomorphisme partiel, c.-à-d. la fonction qui à a_i associe b_i est un isomorphisme entre la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par $\{a_1, \dots, a_q\}$ et la sous-structure de \mathcal{B} engendrée par $\{b_1, \dots, b_q\}$. Le théorème d'Ehrenfeucht nous dit que deux structures \mathcal{A} et \mathcal{B} sont q -équivalentes si et seulement si le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu EF à q coups entre \mathcal{A} et \mathcal{B} .

Propriété

Une *propriété* sur une classe \mathcal{C} est une sous-classe de \mathcal{C} (c.-à-d. une classe incluse dans \mathcal{C}). En général, on parle de propriété plutôt que de sous-classe lorsqu'on veut parler de sous-classe définie par un énoncé d'une certaine logique. Une propriété \mathcal{P} est *définie* (ou *exprimée*) par un énoncé ϕ si \mathcal{P} est l'ensemble des structures de \mathcal{C} satisfaisant ϕ . Si on ne fait pas référence à une classe \mathcal{C} particulière, on sous-entendra qu'on parle de propriété sur la classe de toutes les structures finies. Une propriété \mathcal{P} est *préservée* par sous-structure (resp. par extension) si toute sous-structure (resp. extension) d'une structure de \mathcal{P} est aussi dans \mathcal{P} . On utilise le terme "préservée" plutôt que "close" pour être cohérent avec le terme "théorème de préservation". On utilise les notations **PS** et **PE** pour désigner respectivement l'ensemble des propriétés préservées par sous-structure et l'ensemble des propriétés préservées par extension. Il est important de souligner que les notations **PS** et **PE** ne sont pas standard. On les introduit ici par commodité.

Pour plus de détails concernant la logique du premier ordre et la théorie des modèles, on pourra par exemple consulter [EFT94], [CL03a] et [CL03b].

1.2.2 Complexité

D'un point de vue général, la complexité d'un problème est l'ensemble des ressources nécessaires à une machine (temps ou espace) pour le résoudre. Cette mesure de complexité est fonction de la taille de l'entrée (ou paramètre) du problème. Dans cette thèse, quand on s'intéressera à la complexité d'un problème, on considèrera le temps d'exécution, c'est-à-dire l'ordre de grandeur du nombre d'étapes de calcul effectuées par la machine avant de donner une réponse. De plus, un problème désignera toujours un problème de décision, c'est-à-dire pour lequel la réponse attendue est "oui" ou "non". On parle alors respectivement d'*instances positives* et *negatives* du problème. Le terme "machine" fait référence à n'importe quel système formel capturant le pouvoir de calcul des fonctions récursives : machine de Turing, machine RAM... Ces formalismes sont équivalents dans le sens où ils permettent de décider les mêmes problèmes et que les principales classes de complexité (en particulier celles citées dans cette thèse) sont les mêmes. Pour énoncer les définitions de cette section, on choisit de considérer les machines de Turing. Il est communément admis que tout calcul réalisable par un procédé mécanique peut être effectué par une machine de Turing. C'est ce qu'on appelle la thèse de Church.

Pour les définitions de machines formelles et de classes de complexité et de nombreux développements, on pourra se référer à [Pap94] et [AB09].

Un problème est dit *décidable* (ou *récursif*) s'il existe une machine de Turing qui, pour toute entrée, donne une réponse en un nombre fini d'étapes. Un problème est *récursivement énumérable* si une machine de Turing peut générer exactement toutes les instances positives de ce problème (éventuelle-

ment en temps infini mais chaque élément est généré en temps fini) et elle est *co-récurivement énumérable* si ce sont les instances négatives qui peuvent être énumérées.

Les classes de complexité figurant dans cette thèse sont parmi les plus communes : **PTIME** et **NP**. Ce sont les classes de problèmes décidables en temps polynomial respectivement déterministe et non déterministe. C'est-à-dire que **PTIME** est l'ensemble des problèmes P pour lesquels il existe une machine de Turing déterministe décidant P en temps $O(|\omega|^k)$ pour un certain entier k qui est le même pour toute entrée ω . Le terme "déterministe" désigne le fait qu'il existe une seule exécution possible de la machine de Turing pour chaque entrée. La classe **NP** est la version non déterministe. Sans entrer dans les détails, cela correspond aux machines de Turing où à chaque étape un choix adéquat est fait parmi plusieurs transitions possibles et, si ω est une instance positive du problème, cette suite de choix mène à une réponse positive en $O(|\omega|^k)$ étapes de calcul. Même si cela reste un célèbre problème ouvert, on peut penser que la possibilité de deviner des transitions menant à un calcul acceptant permet de décider davantage de problèmes. Il est donc souvent supposé que **PTIME** \subsetneq **NP**. On considère parfois d'un point de vue théorique que les problèmes dans **PTIME** sont "facilement" décidables tandis que ceux dans **NP** ne le sont pas. En particulier, le fait que les problèmes de **NP** n'aient pas tous d'algorithme efficace connu pour les décider fournit un critère assez convaincant de "difficulté" algorithmique : la **NP**-difficulté. On dit qu'un problème est **NP-difficile** si le fait de savoir le décider permet aussi de décider tous les problèmes dans **NP**. Plus précisément, un problème P est **NP-difficile** si, quelque soit Q dans **NP**, il existe une procédure f (appelée *many-one reduction* ou juste *réduction* de Q à P) qui à toute entrée ω associe, en temps polynomial, une entrée $f(\omega)$ pour le problème P telle que ω est une instance positive de Q si et seulement si $f(\omega)$ est une instance positive de P . Si de plus P est lui-même dans **NP**, on dit que P est **NP-complet**. D'un point de vue pratique, pour montrer qu'un

problème est **NP**-complet, on n'est pas obligé de donner une réduction pour chaque problème dans **NP**. Si on connaît déjà un problème **NP**-complet N , alors il est clair que P est **NP**-complet s'il est dans **NP** et qu'il existe une réduction de N à P . Il existe d'ailleurs un nombre considérable de problèmes **NP**-complets : SAT, X3C, 3-COLORABILITÉ, CIRCUITHAMILTONIEN... Les définitions de ces problèmes et de nombreux autres ainsi que des preuves de **NP**-complétude sont réunies dans [GJ79]. On rappelle ici la définition du problème SAT (cf. [Coo71]).

SAT

Entrée : une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive $f = \bigwedge_{i \in [1, n]} \bigvee_{j \in [1, n_i]} B_{i,j}$ (où chaque $B_{i,j}$ est une variable propositionnelle $A_{i,j}$ ou sa négation $\neg A_{i,j}$).

Sortie : existe-t-il une assignation de valeurs de vérité 0 ou 1 pour les variables $A_{i,j}$ telle que f soit satisfaite ?

Dans la suite, on s'intéresse en particulier à des questions de décidabilité et de complexité pour des propriétés \mathcal{P} sur les structures finies. Dans ce cas, le problème considéré est celui de l'appartenance à \mathcal{P} : étant donnée une représentation $\omega(\mathcal{A})$ d'une structure finie \mathcal{A} , a-t-on $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$?

1.2.3 Graphes et hypergraphes

Un *graphe* $\mathcal{G} = (V, \mathcal{E})$ est la donnée d'un ensemble fini V (ses *sommets*) et d'un ensemble \mathcal{E} (ses arêtes). Une *arête* est une paire de sommets $\{u, v\}$ ($u \neq v$). Si $V' \subset V$, le *sous-graphe de \mathcal{G} engendré par V'* est le graphe $\mathcal{G}' = (V', \{e \in \mathcal{E} \mid e \subset V'\})$. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes auxquelles il appartient. Le degré *maximal* d'un graphe est le maximum des degrés de ses sommets. Un *chemin* dans un graphe est une suite d'arêtes distinctes $(\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_n, v_n\})$ (avec $n \geq 1$) telles que, pour tout $i < n$, $v_i = u_{i+1}$. Le nombre n est appelé la *longueur* du chemin. Un chemin de

u à v est un chemin tel que $u_1 = u$ et $v_n = v$. La *distance* entre u et v est la longueur du plus court chemin de u à v . Un graphe est *connexe* si, pour tous sommets u et v distincts, il existe un chemin de u à v . Une *composante connexe* est un sous-ensemble C de V de taille maximale tel que, pour tous éléments distincts u et v dans C , il existe un chemin de u à v . Une composante connexe peut également désigner le sous-graphe de \mathcal{G} engendré par C . Un graphe est donc connexe si et seulement si il a une seule composante connexe.

Un *cycle* est un chemin de taille supérieure ou égale à 3 tel que $v_n = u_1$. Un graphe est *acyclique* s'il ne contient pas de cycle. Un *arbre* est un graphe acyclique connexe. Tout sommet de degré 1 dans un arbre s'appelle une *feuille*. Un arbre dans lequel on distingue un certain sommet r est un arbre *enraciné* et sa *racine* est r . Enraciner un arbre permet de parler de branches. Une *branche* est un chemin de taille maximale de r à un autre sommet. On peut facilement voir que cet autre sommet est nécessairement une feuille. Dans un *graphe orienté*, les arêtes (ou *arcs*) ont une orientation, c'est-à-dire que les arêtes sont des couples (u, v) qui peuvent éventuellement être des *boucles* (lorsque $u = v$). Un graphe peut donc être vu comme un graphe non orienté (c.-à-d. pour tout arc (u, v) , (v, u) est aussi un arc) sans boucle.

Il y a de nombreux ouvrages de référence sur la théorie des graphes, par exemple [Bol02] et [Die05].

Un *hypergraphe* est un couple $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ où V est un ensemble fini et \mathcal{E} est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$ (l'ensemble des sous-ensembles non vides de V). Les éléments de V sont les *sommets* de \mathcal{H} et les éléments de \mathcal{E} sont ses *hyperarêtes*. La notion d'hypergraphe est une généralisation de la notion de graphe. En effet, un graphe est un hypergraphe dont toutes les hyperarêtes sont de taille 2. L'*arité* d'une hyperarête est sa taille. L'*arité* d'un hypergraphe est le maximum des arités de ses hyperarêtes. L'*hypergraphe vide* est l'hypergraphe sans sommet et sans hyperarête, c'est-à-dire le couple

(\emptyset, \emptyset) . Un *sous-hypergraphe* d'un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est un hypergraphe $\mathcal{H}' = (V', \mathcal{E}')$ tel que $V' \subset V$, $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ et $\cup \mathcal{E}' \subset V'$. Si $\mathcal{U} \subset V$, le *sous-hypergraphe de \mathcal{H} induit par V* est $(\mathcal{U}, \{\mathcal{U} \cap E \mid E \in \mathcal{E}\} \setminus \{\emptyset\})$. On peut remarquer que les hyperarêtes d'un sous-hypergraphe induit de \mathcal{H} ne sont pas nécessairement des hyperarêtes de \mathcal{H} . En particulier, un sous-hypergraphe induit n'est pas forcément un sous-hypergraphe.

Un hypergraphe peut également être représenté par un graphe orienté symbolisant la relation d'appartenance \in . Plus précisément, le *graphe d'appartenance* (ou *graphe d'incidence*) de \mathcal{H} est un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est $V \cup \mathcal{E}$ et tel que (a, b) est une arête si et seulement si a est un sommet de \mathcal{H} , b est une hyperarête de \mathcal{H} et a appartient à b .

À toute structure relationnelle finie \mathcal{A} , on peut associer un certain graphe (son graphe de Gaifman) et un certain hypergraphe. Cela nous permettra en particulier d'utiliser pour des structures finies du vocabulaire propre aux graphes ou aux hypergraphes : degré d'un élément, distance entre deux éléments, structures acycliques, structure vide... Le *graphe de Gaifman* d'une structure \mathcal{A} est le graphe dont l'ensemble des sommets est A et dont les arêtes sont toutes les paires $\{a, b\}$ ($a \neq b$) telles qu'il existe un R dans σ et un uplet u dans R^A tels que a et b apparaissent dans u . L'hypergraphe associé à \mathcal{A} est

$$H(\mathcal{A}) := (A, \{\{a_1, \dots, a_n\} \mid \exists R \in \sigma \mathcal{A} \models Ra_1 \dots a_n\}).$$

L'hypergraphe $H(\mathcal{A})$ correspond en quelque sorte à la structure \mathcal{A} dans laquelle on oublie l'ordre induit par les uplets.

Chapitre 2

Notions d'acyclicité pour les hypergraphes

2.1 Berge, γ , β et α -acyclicité

Pour un graphe, être acyclique signifie ne pas avoir de cycle. Il existe une seule manière de définir un cycle et elle correspond très bien à l'intuition : un cycle est un chemin fermé, un "parcours qui revient à son point de départ". Décrire ce que doit être un cycle pour un hypergraphe est plus arbitraire. Il est cependant raisonnable d'exiger que la définition d'acyclicité pour un hypergraphe concorde avec celle pour les graphes dès lors que l'hypergraphe considéré est un graphe. C'est le cas dans toutes les définitions que l'on donne ici. On présente quatre notions non équivalentes. Cependant, elles sont comparables entre elles. Ce sont, par ordre strictement croissant de généralité : la Berge-acyclicité, la γ -acyclicité, la β -acyclicité et l' α -acyclicité (cf. [Fag83]). Les exemples d'hypergraphes donnés au fil de cette section témoignent du fait que ces inclusions sont bien strictes : l'hypergraphe donné en exemple dans la partie sur la γ -acyclicité n'est pas Berge-acyclique, etc.

La Berge-acyclicité est due à Berge (cf. [Ber76]). La β -acyclicité provient de la théorie des hypergraphes et de la combinatoire. Un hypergraphe β -

acyclique est aussi appelé *super-balanced hypergraph* (cf. [BK80]) ou *totally balanced hypergraph* (cf. [Leh85]). L' α -acyclicité et la γ -acyclicité sont issues de la théorie des bases de données (cf. [BFM⁺81] et [Fag83]).

Berge-acyclicité

Si on veut donner à un cycle dans un hypergraphe le sens de chemin fermé où un chemin serait une suite d'éléments incidents distincts, on obtient la notion de Berge-cycle. Un *Berge-cycle* dans un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est donc une suite $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$ avec $n \geq 2$ telle que :

- les E_i sont des hyperarêtes distinctes,
- les x_i sont des sommets distincts et
- pour tout i , x_i appartient à E_i et E_{i+1} .

Quand on parlera de cycle pour les hypergraphes, les indices seront toujours interprétés de façon à ce que E_{n+1} corresponde à E_1 . En particulier, on a donc que x_n appartient à E_n et à E_1 (ce qui correspond au fait que le chemin est fermé). Un hypergraphe *Berge-acyclique* est un hypergraphe sans Berge-cycle. Si on pose $G := (V \cup \mathcal{E}, \{\{a, b\} \mid a \in b\})$ la version non orientée du graphe d'appartenance de \mathcal{H} , alors il est clair que \mathcal{H} est Berge-acyclique si et seulement si G est acyclique.

Un exemple d'hypergraphe Berge-acyclique est représenté sur la figure 2.1.

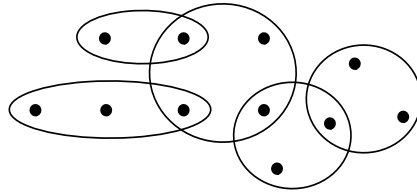


FIG. 2.1 – Un hypergraphe Berge-acyclique. Les points représentent les sommets et les ellipses les hyperarêtes. Chaque ellipse correspond à l'hyperarête contenant les sommets qu'elle entoure.

β -acyclicité

Dans un Berge-cycle, un sommet x_i appartient à E_i et E_{i+1} et peut éventuellement appartenir à d'autres hyperarêtes du cycle, c'est-à-dire en quelque sorte qu'un Berge-cycle peut contenir des "cordes" ou "raccourcis". Un Berge-cycle interdisant cette possibilité est un β -cycle. Un β -cycle est donc une suite $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$ ($n \geq 3$) telle que les E_i sont des hyperarêtes, les x_i sont des sommets et, pour tout i , x_i appartient à E_i et E_{i+1} et à aucun autre E_j . Un exemple d'hypergraphe β -acyclique est donné par la figure 2.2.

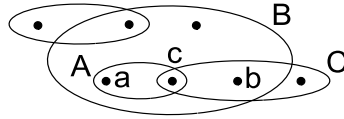


FIG. 2.2 – Un hypergraphe β -acyclique. On pourra vérifier que (A, a, B, b, C, c) est un γ -cycle (voir plus loin pour la définition).

α -acyclicité

Une autre façon d'aborder la question est de dire qu'un hypergraphe est acyclique s'il est possible "d'organiser ses hyperarêtes à la façon d'un graphe acyclique". Ceci est formalisé par la notion d'arbre de jointure. Un *arbre de jointure* d'un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est, s'il existe, un arbre T dont les sommets sont les hyperarêtes de \mathcal{H} et tel que, pour tout sommet v de \mathcal{H} , le sous-graphe de T engendré par l'ensemble des sommets de T qui contiennent v est connexe. Sans la condition de connexité, cette notion devient triviale. Cette condition permet en quelque sorte de rendre compte de la "topologie" de \mathcal{H} en obligeant les chemins de T entre deux hyperarêtes de \mathcal{H} contenant un même sommet s à ne contenir que des hyperarêtes contenant également s . Un hypergraphe est α -acyclique s'il a un arbre de jointure. Il existe aussi une caractérisation assez pratique de l' α -acyclicité en termes de règles appliquées successivement. Elle s'appelle la réduction GYO pour Graham-Yu-Ozsoyoglu

(cf. [Gra79] et [YO79]). Un hypergraphe est α -acyclique si et seulement si on obtient l'hypergraphe vide en appliquant successivement les règles de la figure 2.3.

-
1. Si un sommet est isolé (c.-à-d. s'il appartient à au plus une hyperarête), alors on retire ce sommet de V et de l'éventuelle hyperarête à laquelle il appartient.
 2. Si une hyperarête E est incluse dans une autre hyperarête, alors on retire E de \mathcal{E} .
-

FIG. 2.3 – Règles de Graham, Yu et Ozsoyoglu pour décider l' α -acyclicité.

Remarque : d'une manière générale, lorsqu'on applique successivement un tel système de règles à un hypergraphe, il arrive par moment que \mathcal{H} ne soit plus un hypergraphe parce que deux hyperarêtes se trouvent avoir les mêmes éléments ; c'est pourquoi on considère dans ce cas \mathcal{E} comme un multi-ensemble. On pourra par exemple vérifier qu'en appliquant ces règles à l'hypergraphe de la figure 2.4 on obtient l'hypergraphe vide. Il est donc α -acyclique.

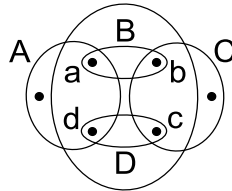


FIG. 2.4 – Un hypergraphe α -acyclique. Il contient des β -cycles, par exemple (A, a, B, b, C, c, D, d) .

γ -acyclicité

Une autre option (un peu plus élaborée) pour définir l'acyclicité d'un hypergraphe est de regarder les régions que l'on peut former en intersectant ses hyperarêtes et de chercher un cycle dans le "graphe d'inclusion" de ces régions, que l'on appelle le diagramme de Bachman (cf. [Lie82] et [Yan81]). Le *diagramme de Bachman* d'un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est un graphe $B = (I, J)$. Ses sommets sont les intersections non vides d'hyperarêtes de \mathcal{H} , c.-à-d. $I = \{\cap \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \subset \mathcal{E}\} \setminus \{\emptyset\}$. Deux sommets U et V de B sont reliés par une arête si $U \subsetneq V$ et qu'il n'existe pas de Z dans I tel que $U \subsetneq Z \subsetneq V$. Un hypergraphe est γ -acyclique si son diagramme de Bachman est acyclique. Il existe également un système de règles d'élimination dans le style de la réduction GYO qui permet de caractériser la γ -acyclicité. Celui-ci est dû à D'Atri et Moscarini (cf. [DM82]). Un hypergraphe est γ -acyclique si et seulement si on obtient l'hypergraphe vide en appliquant successivement les règles de la figure 2.5.

-
1. Si un sommet est isolé, alors on le retire de V et de l'éventuelle hyperarête le contenant.
 2. Si une hyperarête a un ou zéro élément, alors on la retire de \mathcal{E} .
 3. Si deux hyperarêtes contiennent exactement les mêmes sommets, alors on retire une de ces hyperarêtes de \mathcal{E} .
 4. Si deux sommets appartiennent exactement aux mêmes hyperarêtes, alors on retire un de ces sommets de V et de toute hyperarête le contenant.
-

FIG. 2.5 – Règles de D'Atri et Moscarini pour décider la γ -acyclicité.

De manière équivalente, un hypergraphe est γ -acyclique s'il ne contient pas de γ -cycle, un γ -cycle étant une suite $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$ ($n \geq 3$) vérifiant quasiment les mêmes conditions qu'un β -cycle. Les E_i sont donc des hy-

perarêtes et les x_i des sommets. Pour tout $i < n$, on a $x_i \in E_i \cap E_{i+1}$ et $x_i \notin E_j$ si j est différent de i et $i + 1$. On a aussi $x_n \in E_n \cap E_1$ mais x_n peut également appartenir à d'autres E_j . Le sommet x_n peut en quelque sorte avoir un rôle de “raccourci”. La figure 2.6 représente un hypergraphe γ -acyclique.

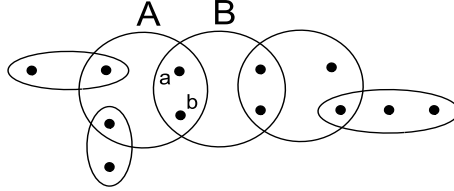


FIG. 2.6 – Un hypergraphe γ -acyclique. La suite (A, a, B, b) est un Berge-cycle.

Notons que si x_n appartient à E_j , alors la suite $(E_j, x_j, \dots, E_n, x_n)$ est également un γ -cycle. En poursuivant ce raisonnement, on obtient qu’un hypergraphe contient un γ -cycle si et seulement si il contient un β -cycle ou un γ -cycle de taille 3 (voir [Fag83]). On montre ici un résultat un peu plus général.

Proposition 2.1. *Un hypergraphe est γ -acyclique si et seulement si il est α -acyclique et ne contient pas de γ -cycle de taille 3.*

Démonstration. Comme un hypergraphe γ -acyclique est aussi α -acyclique, l’un des sens de l’équivalence est clair.

Soit maintenant $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ un hypergraphe α -acyclique sans γ -cycle de taille 3. Comme être γ -acyclique revient à être β -acyclique sans γ -cycle de taille 3, on a juste à prouver que \mathcal{H} n’a pas de β -cycle. On suppose que \mathcal{H} contient un β -cycle $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$ et on va trouver une contradiction. On a nécessairement $n \geq 4$ car sinon $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$ serait un γ -cycle de taille 3. Comme \mathcal{H} est α -acyclique, il a un arbre de jointure T .

Fait 2.2. *Pour tout $i \in [1, n - 2]$, E_i , E_{i+1} et E_{i+2} ne peuvent pas appartenir à un même chemin de T .*

Démonstration du fait. Pour toutes hyperarêtes E et F , on appelle $[E, F]$ le chemin de E à F dans T . Pour tout $x \in V$, soit T_x le sous-graphe connexe de T formé des hyperarêtes de \mathcal{H} contenant x . On a $[E_i, E_{i+1}] \subset T_{x_i}$ parce que E_i et E_{i+1} sont dans T_{x_i} et T_{x_i} est connexe. D'où, comme $x_i \notin E_{i+2}$, $E_{i+2} \notin [E_i, E_{i+1}]$. Pour les mêmes raisons, $E_i \notin [E_{i+1}, E_{i+2}]$. Supposons maintenant que $E_{i+1} \in [E_i, E_{i+2}]$. On appelle U_{i+1} l'union des composantes connexes de $T \setminus \{E_{i+1}\}$ qui ne contiennent pas E_i . En particulier, $E_{i+2} \in U_{i+1}$. Donc E_{i+3} (ou E_1 si $i = n - 2$) appartient aussi à U_{i+1} . En effet, on a déjà montré que E_{i+1} ne peut pas appartenir à $[E_{i+2}, E_{i+3}]$. Ainsi, par induction, on obtient que E_j appartient à U_{i+1} pour tout j différent de i et $i + 1$. En particulier, E_{i-1} (ou E_n si $i = 1$) appartient à U_{i+1} . Cela signifie que $E_{i+1} \in [E_{i-1}, E_i]$, ce qui est impossible comme on vient de le voir. \square

En d'autres termes, E_i , E_{i+1} et E_{i+2} sont les feuilles d'un sous-arbre de T ayant un seul sommet de degré 3 que l'on fixe comme racine du sous-arbre et que l'on note R_i . Puisque $[E_i, E_{i+1}] \subset T_{x_i}$, $[E_{i+1}, E_{i+2}] \subset T_{x_{i+1}}$ et $R_i \in [E_i, E_{i+1}] \cap [E_{i+1}, E_{i+2}]$, x_i et x_{i+1} appartiennent à R_i .

On pose $]R_i, E_{i+2}] := [E_{i+1}, E_{i+2}] \setminus [E_{i+1}, R_i]$. On a

$$R_{i+1} \in]R_i, E_{i+2}]$$

parce que $R_{i+1} \in [E_{i+1}, E_{i+2}]$ et si R_{i+1} appartenait à $[E_{i+1}, R_i]$ alors R_i serait dans $[E_{i+2}, R_{i+1}]$ (qui est inclus dans $T_{x_{i+2}}$), d'où

$$(E_{i+1}, x_i, R_i, x_{i+2}, E_{i+2}, x_{i+1})$$

serait un γ -cycle de taille 3. La figure 2.7 permet de mieux visualiser la position de ces différents sommets de T .

Par conséquent, E_{i+3} et R_i sont dans deux composantes connexes de $T \setminus \{R_{i+1}\}$ différentes (R_i est dans la même composante que E_{i+1} car $R_i \in [E_{i+1}, E_{i+2}]$ et $R_{i+1} \in]R_i, E_{i+2}]$), ce qui signifie que $R_{i+1} \in [R_i, E_{i+3}]$. D'où, si $n \geq 5$, et comme $R_{i+2} \in]R_{i+1}, E_{i+3}]$, on a $R_{i+1} \in [R_i, R_{i+2}]$ pour tout

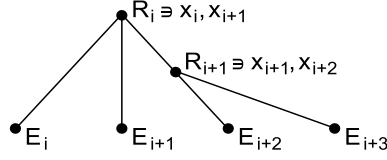


FIG. 2.7 – Un sous-arbre de T contenant les sommets $R_i, R_{i+1}, E_i, E_{i+1}, E_{i+2}$ et E_{i+3} .

$i \in [1, n - 4]$. De plus, on a :

- $R_1 \in [E_1, R_2]$ car $R_1 \in [E_1, E_3]$ et $R_2 \in]R_1, E_3]$, et
- $R_{n-2} \in [R_{n-3}, E_n]$ parce que E_{n-2}, E_{n-1} et E_n sont dans trois composantes connexes de $T \setminus \{R_{n-2}\}$ différentes et que R_{n-3} est dans la même composante connexe que E_{n-2} (car $R_{n-3} \in [E_{n-2}, E_{n-1}]$ et $R_{n-2} \in]R_{n-3}, E_{n-1}]$).

Il en résulte que tous les R_i appartiennent à $[E_1, E_n]$ (voir figure 2.8). En particulier, $R_1 \in [E_1, E_n]$. Donc, puisque $[E_1, E_n] \subset T_{x_n}$,

$$(E_1, x_n, R_1, x_2, E_2, x_1)$$

est un γ -cycle de taille 3, ce qui est une contradiction.

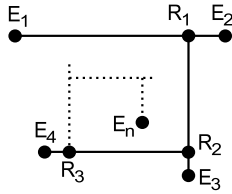


FIG. 2.8 – La position des E_i d'un β -cycle dans un arbre de jointure sans γ -cycle de taille 3. Cela mène à une contradiction.

□

Comparaison

On rappelle que, si l'on note de manière abrégée θ l'ensemble des hypergraphes θ -acycliques, on a la suite d'inclusions strictes suivante : $\text{Berge} \subsetneq \gamma \subsetneq \beta \subsetneq \alpha$. Bien que la proposition précédente puisse faire penser que la γ -acyclicité, la β -acyclicité et l' α -acyclicité sont très proches, il y a de nombreuses propriétés qu'elles ne partagent pas. Par exemple, les deux premières sont héréditaires, c'est-à-dire que les sous-hypergraphes d'un hypergraphe γ -acyclique (resp. β -acyclique) sont aussi γ -acycliques (resp. β -acycliques), tandis que ce n'est pas forcément le cas pour les hypergraphes α -acycliques. En effet, on peut vérifier (par exemple, en appliquant la réduction GYO) que l'hypergraphe

$$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 1\}, \{1, 3, 5\}\})$$

est α -acyclique, tandis que son sous-hypergraphe

$$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 1\}\})$$

ne l'est pas. On sait d'ailleurs plus précisément qu'un hypergraphe est β -acyclique si et seulement si il est α -acyclique et que tous ses sous-hypergraphes sont α -acycliques. Concernant la γ et la β -acyclicité, on peut par exemple citer une différence figurant dans cette thèse : on montre que ces notions ne concordent pas eu égard au théorème de préservation par extension pour des classes de structures finies acycliques.

Un exemple de problème séparant le cas Berge-acyclique des trois autres cas est celui du sous-hypergraphe acyclique couvrant pour les hypergraphes k -uniformes. Un hypergraphe est k -uniforme si toutes ses hyperarêtes sont de taille k . Un sous-hypergraphe de \mathcal{H} est dit *couvrant* si l'union de ses hyperarêtes est égale à l'ensemble des sommets de \mathcal{H} . Le problème de savoir si un hypergraphe k -uniforme \mathcal{H} a un sous-hypergraphe couvrant Berge-acyclique est polynomial en la taille de \mathcal{H} si k est égal à 3, par l'adaptation d'une

technique due à Lovász (cf. [Lov80]). Dès lors que k est supérieur ou égal à 4, ce problème est **NP**-complet (cf. [CMSS08]). Hirata, Kuwabara et Harao montrent que le problème du sous-hypergraphe acyclique couvrant est **NP**-complet pour les trois autres notions d'acyclicité (cf. [HKH05]). Cependant, ils ne s'intéressent pas à la valeur de k , c.-à-d. ils considèrent, dans leur exemple, des hypergraphes d'arité quelconque. En collaboration avec Yann Strozecki, nous avons déterminé la valeur de k pour laquelle ce problème est **NP**-complet.

Proposition 2.3. *Pour les trois notions γ , β et α -acyclicité, le problème de décider si un hypergraphe 3-uniforme a un sous-hypergraphe acyclique couvrant est **NP**-complet.*

Démonstration. On présente une réduction en temps polynomial du problème SAT au problème du sous-hypergraphe acyclique couvrant. Soit f une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive (instance du problème SAT). On a donc $f = \bigwedge_{i \in [1, n]} C_i$ où, pour tout i , C_i est une clause $\bigvee_{j \in [1, n_i]} B_{i,j}$ avec $B_{i,j}$ égale à $A_{i,j}$ ou $\neg A_{i,j}$. On définit un hypergraphe 3-uniforme $\mathcal{H}_f = (V_f, \mathcal{E}_f)$ tel que f soit satisfaisable si et seulement si \mathcal{H}_f a un sous-hypergraphe couvrant θ -acyclique (pour $\theta = \gamma, \beta$ et α). Pour chaque variable A , V_f contient les sommets $0_{A,a}$, $0_{A,b}$, $1_{A,a}$, $1_{A,b}$, $r_{A,a}$ et $r_{A,b}$. Pour chaque clause C , V_f contient le sommet p_C . Pour toute variable A , \mathcal{E}_f contient les hyperarêtes $\{0_{A,a}, r_{A,a}, 1_{A,a}\}$ et $\{0_{A,b}, r_{A,b}, 1_{A,b}\}$. De plus, pour toute clause C et toute variable A figurant dans C , \mathcal{E}_f contient :

- l'hyperarête $\{0_{A,a}, 0_{A,b}, p_C\}$ si $\neg A$ apparaît dans C et
- l'hyperarête $\{1_{A,a}, 1_{A,b}, p_C\}$ si A apparaît sans négation dans C .

La figure 2.9 illustre cette construction par un exemple.

Soit $\theta \in \{\gamma, \beta, \alpha\}$. Pour toute variable A , un sous-hypergraphe couvrant contient nécessairement les hyperarêtes $\{0_{A,a}, r_{A,a}, 1_{A,a}\}$ et $\{0_{A,b}, r_{A,b}, 1_{A,b}\}$ de façon à couvrir les sommets $r_{A,a}$ et $r_{A,b}$. Donc, pour être θ -acyclique, un sous-hypergraphe couvrant ne peut contenir, pour chaque A , que des hyperarêtes du type $\{0_{A,a}, 0_{A,b}, p_C\}$ ou du type $\{1_{A,a}, 1_{A,b}, p_C\}$. En d'autres termes, on doit

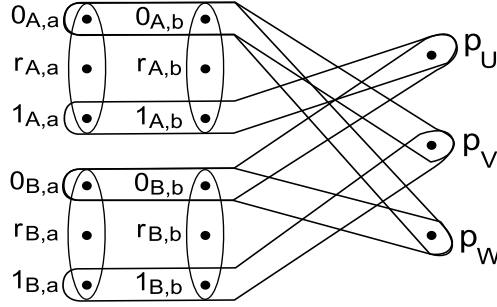


FIG. 2.9 – L’hypergraphe \mathcal{H}_f associé à la formule propositionnelle $f := U \wedge V \wedge W$ avec $U := A \vee \neg B$, $V := \neg A \vee B$ et $W := \neg A \vee \neg B$.

choisir une assignation 0 ou 1 pour chaque variable A . Pour être couvrant, le sous-hypergraphe doit aussi contenir au moins une hyperarête $\{\varepsilon_{A,a}, \varepsilon_{A,b}, p_C\}$ (avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$) pour toute clause C , ce qui revient à dire que l’assignation doit satisfaire toutes les clauses. De plus, pour éviter d’avoir des cycles, on peut conserver, pour chaque clause C , une seule hyperarête contenant C . Alors, il existe bien un hypergraphe couvrant θ -acyclique si et seulement si f est satisfaisable.

On vérifie facilement que ce raisonnement est valable pour tout θ dans $\{\gamma, \beta, \alpha\}$. Par contre, dans la plupart des cas, un sous-hypergraphe couvrant correspondant à une assignation rendant f vraie contient un Berge-cycle. Par exemple, s’il contient les hyperarêtes $\{0_{A,a}, 0_{A,b}, p_C\}$ et $\{0_{A,a}, 0_{A,b}, p_D\}$, alors il contient le Berge-cycle $(\{0_{A,a}, 0_{A,b}, p_C\}, 0_{A,a}, \{0_{A,a}, 0_{A,b}, p_D\}, 0_{A,b})$. \square

La complexité du problème du sous-hypergraphe acyclique couvrant en fonction de la taille des hyperarêtes et de la notion d’acyclicité considérée est résumée dans la figure 2.10.

De nombreuses propriétés concernant toutes ces notions d’acyclicité sont regroupées dans [Fag83]. Elles ont été étudiées dans différents domaines : la théorie des hypergraphes, les bases de données, les CSP (*constraint satisfaction problems*)... Par exemple, les schémas de bases de données γ -acycliques

$\theta =$	Berge	γ, β et α
$k = 3$	PTIME (cf. [Lov80])	NP-complet
$k \geq 4$	NP-complet (cf. [CMSS08])	NP-complet

FIG. 2.10 – Complexité du problème du sous-hypergraphe couvrant θ -acyclique pour les hypergraphes k -uniformes.

ont d'intéressantes propriétés structurelles (cf. par exemple [LL89] et [ZC02]). Les requêtes conjonctives α -acycliques forment un important sous-ensemble de l'ensemble des requêtes conjonctives. Elles peuvent être reconnues en temps linéaire (cf. [TY84]) et divers algorithmes ont été développés pour leur évaluation (cf. par exemple [Yan81], [PY99], [GP01] et [BDG07]).

2.2 Arbre de jointure à branches disjointes

On définit ici les arbres de jointure à branches disjointes et on montre qu'ils fournissent une nouvelle notion d'acyclicité qui est plus générale que la γ -acyclicité et moins générale que la β -acyclicité. On montre aussi que les hypergraphes γ -acycliques sont exactement les hypergraphes qui ont un arbre de jointure à branches disjointes dont n'importe quelle hyperarête peut être choisie comme racine.

Définition 2.4. On dit qu'un arbre de jointure T d'un hypergraphe \mathcal{H} a ses *branches disjointes* s'il est enraciné et que les hyperarêtes de \mathcal{H} appartenant à des branches de T différentes sont disjointes.

Les deux propositions suivantes montrent que le fait d'avoir un arbre de jointure à branches disjointes est une notion située entre la γ et la β -acyclicité.

Proposition 2.5. *Si un hypergraphe est γ -acyclique, alors il a un arbre de jointure à branches disjointes.*

Démonstration. On montre en fait un résultat plus fort : pour tout hypergraphe γ -acyclique \mathcal{H} et toute hyperarête E de \mathcal{H} , \mathcal{H} a un arbre de jointure à branches disjointes dont la racine est E . On le prouve par récurrence sur le nombre d'hyperarêtes. C'est évident lorsque l'hypergraphe a une seule hyperarête. Soit $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ un hypergraphe γ -acyclique et supposons que l'hypothèse de récurrence soit vraie pour les hypergraphes ayant strictement moins d'hyperarêtes que \mathcal{H} . Soit E n'importe quelle hyperarête de \mathcal{H} . On doit montrer que \mathcal{H} a un arbre de jointure à branches disjointes T dont la racine est E .

Tout d'abord, on partage l'hypergraphe \mathcal{H} privé de E

$$(V, \mathcal{E} \setminus \{E\})$$

en composantes connexes $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ (on ne considère pas dans ces composantes connexes les sommets qui appartiennent seulement à l'hyperarête E). Chaque sous-hypergraphe $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ est γ -acyclique et a strictement moins d'hyperarêtes que \mathcal{H} . D'où, par hypothèse de récurrence, chaque $\mathcal{H}_i := (V_i, \mathcal{E}_i)$ a un arbre de jointure à branches disjointes et on peut choisir n'importe quelle hyperarête de \mathcal{H}_i pour racine. On précise maintenant quelle hyperarête on choisit et on définit un arbre de jointure T de \mathcal{H} avec branches disjointes et de racine E .

Pour tout i , il existe une $E_i \in \mathcal{E}_i$ telle que $V_i \cap E \subset E_i$. En effet, s'il y avait deux hyperarêtes $E_{i,1}$ et $E_{i,2}$ dans \mathcal{E}_i telles que $E_{i,1} \cap E$ et $E_{i,2} \cap E$ étaient incomparables pour l'inclusion (c.-à-d. s'il y avait un t_1 dans $(E_{i,1} \setminus E_{i,2}) \cap E$ et un t_2 dans $(E_{i,2} \setminus E_{i,1}) \cap E$) alors il y aurait un γ -cycle dans \mathcal{H} commençant par $(E_{i,1}, t_1, E, t_2, E_{i,2}, \dots)$ et se poursuivant par un chemin de $E_{i,1}$ à $E_{i,2}$ de longueur minimale (éventuellement juste un sommet si $E_{i,1}$ et $E_{i,2}$ s'intersectent). Pour tout i , soit T_i un arbre de jointure à branches disjointes de \mathcal{H}_i avec E_i pour racine. On définit l'arbre de jointure T comme suit. La racine de T est E et on connecte E à chaque T_i par une arête $\{E, E_i\}$ (cf. figure 2.11). Comme les V_i sont deux à deux disjointes (par définition

d'une composante connexe) et que chaque T_i a les branches disjointes, T a les branches disjointes. Il reste à prouver que T est un arbre de jointure c'est-à-dire que, pour tout $v \in V$, l'ensemble des hyperarêtes de \mathcal{H} qui contiennent v est connexe dans T .

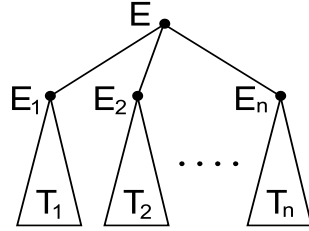


FIG. 2.11 – L'arbre T de la preuve de la proposition 2.5.

Si $v \in E$ et v n'appartient à aucune autre hyperarête, c'est évident. Si $v \in V \setminus E$, v appartient à un certain V_i et les seules hyperarêtes qui contiennent v sont dans T_i . D'où, par connexité dans T_i de l'ensemble des hyperarêtes contenant v , on a aussi la connexité dans T . Le cas restant est celui où v appartient à E et à un certain V_i . Comme $V_i \cap E \subset E_i$, on a $v \in E \cap E_i$. L'ensemble des hyperarêtes S_v^i qui contiennent v dans T_i est connexe et E_i est dans S_v^i . De plus, la seule hyperarête n'appartenant pas à T_i et qui contient v est E et elle est reliée à E_i dans T . Par conséquent, l'ensemble $\{E\} \cup S_v^i$ des hyperarêtes de \mathcal{H} qui contiennent v est connexe. \square

La preuve précédente est constructive. Elle fournit même un algorithme en temps polynomial qui, étant donné un hypergraphe γ -acyclique \mathcal{H} et une hyperarête E de \mathcal{H} , construit un arbre de jointure à branches disjointes de racine E . Cet algorithme fonctionne comme suit. Pour chaque hyperarête F intersectant E , on vérifie si c'est une E_i comme dans la preuve (c.-à-d. $F \cap E$ est maximale pour l'inclusion) et si c'est le premier candidat trouvé (c.-à-d. les hyperarêtes précédentes n'ont pas la même intersection avec E que $F \cap E$) parce qu'on ne veut pas connecter E à T_i plusieurs fois. Pour toute F satisfaisant ces conditions (F est une E_i), on connecte E au résultat de

l'algorithme appliqué récursivement à \mathcal{H}_i (que l'on peut calculer facilement) et F (ce résultat est T_i).

Proposition 2.6. *Si un hypergraphe a un arbre de jointure à branches disjointes, alors il est β -acyclique.*

Démonstration. Soit \mathcal{H} un hypergraphe avec un β -cycle $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$ et soit T un arbre de jointure de \mathcal{H} à branches disjointes. On va obtenir une contradiction. Comme E_1 et E_2 s'intersectent, ils doivent appartenir à la même branche de T . Sans perte de généralité, on peut supposer que E_1 est plus proche de la racine de T que E_2 . En effet, si c'était le contraire, on pourrait considérer à la place de $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$ le β -cycle

$$(E_2, x_1, E_1, x_n, E_n, x_{n-1}, E_{n-1}, \dots, E_3, x_2).$$

L'hyperarête E_3 doit être sur la même branche que E_2 car ils s'intersectent. Comme E_1 est au-dessus de E_2 (si on considère la racine comme le "haut" de l'arbre), E_1 et E_3 sont aussi sur cette même branche. De plus, E_3 doit être en dessous de E_2 (c.-à-d. E_2 est plus proche de la racine), sinon on aurait une contradiction :

- si E_3 était entre E_1 et E_2 alors x_1 devrait appartenir à E_3 (en effet $x_1 \in E_1 \cap E_2$ et l'ensemble des hyperarêtes contenant x_1 est connexe dans T) et
- si E_3 était au-dessus de E_1 alors x_2 devrait appartenir à E_1 (pour les mêmes raisons).

Par les mêmes arguments, on montre que tous les E_i doivent appartenir à cette même branche et dans l'ordre E_1, E_2, \dots, E_n depuis la racine de T . En particulier, E_n est la plus éloignée de la racine et donc, par exemple, E_2 est entre E_1 et E_n . Mais, à nouveau, x_n appartient à E_1 et E_n et l'ensemble des hyperarêtes contenant x_n est connexe dans T . Donc x_n appartient à E_2 , ce qui est une contradiction. \square

On peut noter que la réciproque est fautive dans les deux propositions

précédentes. En effet, l'hypergraphe

$$(\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\})$$

contient le γ -cycle $(\{1, 2\}, 1, \{1, 2, 3\}, 3, \{2, 3\}, 2)$ et a un arbre de jointure à branches disjointes (cf. figure 2.12). L'hypergraphe

$$(\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\})$$

est β -acyclique et on peut facilement vérifier qu'il n'a pas d'arbre de jointure à branches disjointes.

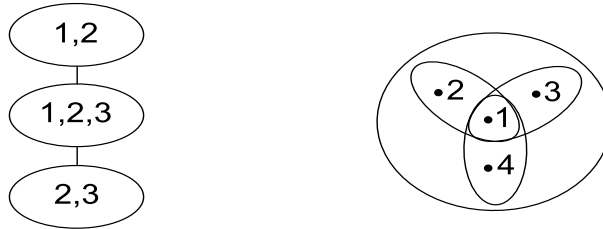


FIG. 2.12 – Un arbre de jointure à branches disjointes d'un hypergraphe γ -cyclique et un hypergraphe β -acyclique qui n'a pas d'arbre de jointure à branches disjointes.

Dans la preuve de la proposition 2.5, on a vu que l'on pouvait prendre n'importe quelle hyperarête comme racine de l'arbre de jointure à branches disjointes. Puisqu'on va montrer que la réciproque est vraie également, on obtient la caractérisation suivante de la γ -acyclicité.

Proposition 2.7. *Un hypergraphe \mathcal{H} est γ -acyclique si et seulement si, pour toute hyperarête E de \mathcal{H} , \mathcal{H} a un arbre de jointure à branches disjointes dont la racine est E .*

Démonstration. Comme on vient de le signaler, la preuve de 2.5 nous donne un des sens de l'équivalence. Il reste à prouver que, si \mathcal{H} a un γ -cycle, alors il y a une hyperarête qui ne peut pas être la racine d'un arbre de jointure de \mathcal{H}

à branches disjointes. Puisqu'un γ -cycle est soit un β -cycle soit un γ -cycle de taille 3 qui n'est pas un β -cycle, on peut distinguer deux cas. La proposition 2.6 dit que, si \mathcal{H} a un β -cycle, alors aucune hyperarête ne peut être la racine d'un arbre de jointure de \mathcal{H} à branches disjointes. Il suffit donc d'étudier le second cas. Soit (A, a, B, b, C, c) un γ -cycle de \mathcal{H} de taille 3 qui n'est pas un β -cycle. Cela signifie que $a \in (A \cap B) \setminus C$, $b \in (B \cap C) \setminus A$ et $c \in A \cap B \cap C$. On montre que B ne peut pas être la racine d'un arbre de jointure de \mathcal{H} à branches disjointes. Si B était la racine, A et C devraient être sur la même branche car ils ne sont pas disjoints ($c \in A \cap C$). Sur cette branche, A ne peut pas être en dessous de C (c.-à-d. plus loin de la racine B), parce que sinon a serait dans C (par connexité des hyperarêtes contenant a dans l'arbre). De façon similaire, C ne peut pas non plus être en dessous de A parce que cette fois b serait dans A . C'est une contradiction. \square

Il paraît difficile de trouver une condition proche de la disjonction des branches des arbres de jointure qui caractériserait la β -acyclicité. En effet, si on ajoute un sommet à chaque hyperarête d'un hypergraphe, on ne modifie pas sa β -acyclicité. La même chose vaut si on n'ajoute pas ce sommet à chaque hyperarête mais seulement à certaines hyperarêtes correctement choisies. La situation est totalement différente pour la γ -acyclicité puisqu'ajouter un sommet à toute hyperarête a de fortes chances de créer un γ -cycle.

On termine cette section avec deux corollaires de la proposition 2.5.

Corollaire 2.8. *Soit $k \geq 1$. Tout hypergraphe γ -acyclique d'arité au plus k a un arbre de jointure de degré maximal au plus $k + 1$.*

Démonstration. Soit \mathcal{H} un hypergraphe γ -acyclique. Par la proposition 2.5, il a un arbre de jointure à branches disjointes T . Soit E un sommet de T (c.-à-d. une hyperarête de \mathcal{H}) ayant au plus k éléments. Par le principe des tiroirs et comme les fils de E dans T sont disjoints, E a au plus k fils qui l'intersectent. De plus, si un fils C de E n'intersecte pas E , on peut retirer le sous-arbre T_C en dessous de C (c.-à-d. le sous-arbre de T engendré par C et tous ses

descendants dans T) et l'attacher à n'importe quelle feuille. L'arbre que l'on obtient ainsi est encore un arbre de jointure de \mathcal{H} à branches disjointes (parce que les sommets de T_C sont disjoints des autres sommets de T). En faisant la même chose pour toute hyperarête E , on obtient un arbre de jointure de \mathcal{H} à branches disjointes et de degré maximal au plus $k + 1$. \square

Le cas $k = 2$ correspond aux graphes acycliques.

Corollaire 2.9. *Tout graphe acyclique a un arbre de jointure de degré maximal au plus 3.*

On remarquera que l'arbre de jointure obtenu dans la preuve de ces corollaires est aussi à branches disjointes.

On a donc établi la position des arbres de jointure à branches disjointes dans la hiérarchie des acyclicités d'hypergraphe. Comme on sait aussi qu'avoir un arbre de jointure (sans condition supplémentaire) est équivalent à être α -acyclique, on peut synthétiser les équivalences et implications strictes entre ces notions comme suit :

arbre de jointure à branches disjointes pour tout choix de racine

\iff

γ -acyclité

$\not\iff \implies$

arbre de jointure à branches disjointes

$\not\iff \implies$

β -acyclité

$\not\iff \implies$

α -acyclité

\iff

arbre de jointure.

2.3 Caractérisations par règles

Dans cette section, on présente deux ensembles de règles telles que le fait de les appliquer successivement à un hypergraphe aussi longtemps que possible permet de décider respectivement la γ et la β -acyclicité. De telles règles peuvent être commodes pour mieux comprendre ces notions comme c'est le cas du système de règles GYO pour l' α -acyclicité. Elles peuvent également être vues comme des algorithmes pour tester la γ et la β -acyclicité. On remarquera qu'il existe déjà des règles pour décider la γ -acyclicité dues à D'Atri et Moscarini (cf. figure 2.5) mais elles ne sont pas équivalentes aux règles suivantes.

Soit $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ un hypergraphe. On considère les règles $\Gamma 1$, $\Gamma 2$ et $\Gamma 3$ de la figure 2.13.

-
- $\Gamma 1$ Si un sommet est isolé (c.-à-d. il appartient à au plus une hyperarête), alors on le retire de \mathcal{H} (c.-à-d. de V et de l'hyperarête qui le contient s'il y en a une).
 - $\Gamma 2$ Si une hyperarête E vérifie la propriété : $\forall F \in \mathcal{E} (E \subset F \vee E \cap F = \emptyset)$, alors on la retire de \mathcal{E} (remarque : on retire seulement E de la liste des hyperarêtes, on ne retire pas les sommets de E).
 - $\Gamma 3$ Si deux hyperarêtes ont les mêmes éléments, alors on retire l'une d'elles de \mathcal{E} .
-

FIG. 2.13 – Règles pour décider la γ -acyclicité.

Proposition 2.10. *Un hypergraphe est γ -acyclique si et seulement si, en appliquant les règles $\Gamma 1$, $\Gamma 2$ et $\Gamma 3$ successivement aussi longtemps que possible, on obtient l'hypergraphe vide.*

Démonstration. Si \mathcal{H} contient un γ -cycle $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$, alors la règle $\Gamma 1$ ne permet pas d'enlever un x_i parce que chaque x_i appartient à au moins

deux hyperarêtes (E_i et E_{i+1}) (remarque : on suppose que l'indice $n + 1$ correspond à 1). La règle $\Gamma 2$ ne retire pas de E_i parce que chaque E_i est reliée à au moins une autre sans être incluse dedans (E_{i+1} par exemple). La règle $\Gamma 3$ peut seulement remplacer une E_i par une hyperarête ayant les mêmes éléments. Par conséquent, après l'application successive de ces trois règles, il restera toujours au moins un γ -cycle dans \mathcal{H} et donc on n'obtiendra pas l'hypergraphe vide.

Réciproquement, soit \mathcal{H} un hypergraphe tel que, si on applique successivement $\Gamma 1$, $\Gamma 2$ et $\Gamma 3$, on obtient un hypergraphe non vide \mathcal{H}' auquel on ne peut plus appliquer aucune des trois règles. On va montrer que \mathcal{H}' contient un γ -cycle. Soit A une hyperarête de \mathcal{H}' . Comme on ne peut pas appliquer $\Gamma 2$, A intersecte une hyperarête B telle que A n'est pas incluse dans B . Parmi les B candidates, on choisit une B minimale pour l'inclusion. Si B n'est pas incluse dans A , il existe un $a \in A \cap B$ et un $b \in B \setminus A$. Si B est incluse dans A , comme on ne peut pas appliquer $\Gamma 2$ à B , il existe un B' qui intersecte B et qui ne contient pas B . On sait que B' ne peut pas être incluse dans B car B est minimale parmi les hyperarêtes intersectant A et ne contenant pas A . D'où, il existe un $u \in B \cap B'$, un $v \in A \cap (B \setminus B')$ et un $w \in B' \setminus B$. Si w est dans A , alors

$$(B, v, A, w, B', u)$$

est un γ -cycle de \mathcal{H}' et on peut déjà conclure. Dans tous les cas (même si on doit remplacer B par B' et b par w), il existe un $a \in A \cap B$ et un $b \in B \setminus A$. Avant de continuer, on remplace B par une \tilde{B} maximale pour l'inclusion, contenant B et telle que $A \cap \tilde{B} = A \cap B$.

Comme b n'est pas isolé (car on ne peut pas appliquer $\Gamma 1$), il existe une hyperarête $C \neq B$ qui contient b . On choisit C minimale pour l'inclusion parmi les candidates possibles. On peut supposer que $B \not\subseteq C$ parce que sinon on aurait $A \cap B \subsetneq A \cap C$ (car on a remplacé B par \tilde{B}), il y aurait donc un $z \in (A \cap C) \setminus B$ et

$$(A, z, C, b, B, a)$$

serait un γ -cycle. On applique alors le même argument qu'au paragraphe précédent avec les hyperarêtes C et B au lieu de B et A . On en conclut qu'il existe un $b \in B \cap C$ et un $c \in C \setminus B$.

On continue à définir des hyperarêtes de cette manière jusqu'à ce que la suite A, B, C, \dots contienne une hyperarête répétée deux fois. Finalement, on a donc une suite

$$\mathcal{S} := (E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$$

telle que, pour tout i , $x_i \in E_i \cap E_{i+1}$ (avec $E_{n+1} := E_1$) et, pour tout $i \in [2, n]$, $x_i \notin E_{i-1}$. On choisit \mathcal{S} de taille minimale parmi les suites vérifiant ces propriétés. On va montrer que \mathcal{S} nous permet de trouver un γ -cycle.

Déjà, on a nécessairement $n \geq 3$ car $x_2 \notin E_1$. Si $n = 3$, alors

$$(E_2, x_2, E_3, x_3, E_1, x_1)$$

est un γ -cycle, parce que $x_2 \in (E_2 \cap E_3) \setminus E_1$, $x_3 \in (E_3 \cap E_1) \setminus E_2$ et $x_1 \in E_1 \cap E_2$. Le cas restant est celui où $n \geq 4$. On prouve que \mathcal{S} est un γ -cycle c'est-à-dire que, pour tout i , x_i n'appartient à aucune autre E_j que E_i et E_{i+1} .

On remarque que, pour tout $j \in [2, n-1]$, $x_j \notin E_1$ car

$$(E_1, x_1, \dots, E_j, x_j)$$

contredirait sinon la minimalité de \mathcal{S} . Ceci implique que, pour tout $j \in [3, n]$, $x_1 \notin E_j$. En effet, supposons qu'il existe un $j \in [3, n-1]$ tel que $x_1 \in E_j$. Dans ce cas, comme $x_j \notin E_1$,

$$(E_1, x_1, E_j, x_j, \dots, E_n, x_n)$$

est un γ -cycle et contredit la minimalité de \mathcal{S} . De plus, $x_1 \notin E_n$ car sinon

$$(E_2, x_2, \dots, E_{n-1}, x_{n-1}, E_n, x_1)$$

contredirait la minimalité de \mathcal{S} puisqu'on vient de voir que $x_1 \notin E_{n-1}$.

On considère maintenant la suite

$$(E_2, x_2, E_3, x_3, \dots, E_n, x_n, E_1, x_1).$$

Comme $x_1 \notin E_n$, l'argument précédent montre que, pour tout $j \in [4, n] \cup \{1\}$, $x_2 \notin E_j$. En considérant la suite

$$(E_3, x_3, E_4, x_4, \dots, E_n, x_n, E_1, x_1, E_2, x_2),$$

on obtient que, pour tout j différent de 3 et 4, $x_3 \notin E_j$. Ainsi de suite, on a que, pour tout i , x_i n'appartient à aucun autre E_j que E_i et E_{i+1} , ce qui est bien ce qu'on voulait montrer. \square

On peut noter que la preuve précédente comprend la preuve du fait suivant.

Fait 2.11. *Un hypergraphe contient un γ -cycle si et seulement si il contient une suite $(E_1, x_1, \dots, E_n, x_n)$ telle que, pour tout i , $x_i \in E_i \cap E_{i+1}$ et, pour tout $i \in [2, n]$, $x_i \notin E_{i-1}$.*

Un sommet v dans un hypergraphe \mathcal{H} est un *nest point* (cf. [BK80]) si l'ensemble des hyperarêtes de \mathcal{H} le contenant forme une chaîne pour l'inclusion, c.-à-d. pour toutes hyperarêtes E et F contenant v , $E \subset F$ ou $F \subset E$.

On se donne maintenant les règles B1 et B2 de la figure 2.14.

Dans [BK80], Brouwer et Kolen montrent qu'un hypergraphe est β -acyclique si et seulement si tout sous-hypergraphe induit a un *nest point*. Donc, appliquer les deux règles successivement sur un hypergraphe β -acyclique donne l'hypergraphe vide. Réciproquement, on voit facilement que, si un hypergraphe a un β -cycle, alors on ne pourra pas appliquer les règles sur les éléments du β -cycle, et on n'obtiendra donc pas l'hypergraphe vide. Par conséquent, on a la proposition suivante.

B1 Si un sommet est un *nest point*, alors on le retire de \mathcal{H} (c.-à-d. de V et des hyperarêtes le contenant).

B2 Si une hyperarête est vide, alors on la retire de \mathcal{E} .

FIG. 2.14 – Règles pour décider la β -acyclicité.

Proposition 2.12. *Un hypergraphe est β -acyclique si et seulement si, en appliquant les règles B1 et B2 successivement aussi longtemps que possible, on obtient l'hypergraphe vide.*

Il est intéressant de noter que, si l'on veut tester la β -acyclicité, on n'a donc pas besoin de chercher un *nest point* dans tout sous-hypergraphe induit mais seulement dans $|V|$ sous-hypergraphes induits.

2.4 Autres notions et comparaison dans le cas où l'arité est bornée

On définit ici quelques autres notions d'acyclicité. Celles-ci sont paramétrées dans le sens où leur définition fait intervenir un entier k censé quantifier le “degré” d'acyclicité (plus k est petit plus un hypergraphe vérifiant la définition est acyclique). Les définitions données s'appliquent à tout hypergraphe mais on va s'attarder sur le cas des hypergraphes à arité bornée. En effet, on s'intéressera par la suite à des structures finies acycliques \mathcal{A} et donc leur hypergraphe associé $H(\mathcal{A})$ sera d'arité bornée par l'arité de σ .

Définition 2.13. Soit $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ un hypergraphe. Si $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I\}$ est une partition de V (c.-à-d. les P_i sont non vides et deux à deux disjoints et leur union est égale à V), on définit l'*hypergraphe quotient* de \mathcal{H} par rapport à \mathcal{P} , noté \mathcal{H}/\mathcal{P} , comme suit. Les sommets de \mathcal{H}/\mathcal{P} sont les éléments de \mathcal{P} et

$\{P_{i_1}, \dots, P_{i_m}\}$ est une hyperarête de \mathcal{H}/\mathcal{P} s'il existe une $E \in \mathcal{E}$ et des sous-ensembles non vides V_{i_1}, \dots, V_{i_m} de P_{i_1}, \dots, P_{i_m} tels que $E = \cup_{j \in [1, m]} V_{i_j}$. En d'autres termes, l'ensemble des hyperarêtes de \mathcal{H}/\mathcal{P} est

$$\{\{P \in \mathcal{P} \mid P \cap E \neq \emptyset\} \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Remarquons qu'une conséquence directe de la définition est que l'arité d'un hypergraphe quotient \mathcal{H}/\mathcal{P} est nécessairement inférieure ou égale à l'arité de \mathcal{H} .

Dans un sens, prendre le quotient d'un hypergraphe consiste à le voir de plus loin. Au lieu de distinguer chaque sommet, on regroupe certains ensembles et on obtient un nouvel hypergraphe respectant la position initiale des sommets mais d'une manière simplifiée (avec moins de sommets et moins d'hyperarêtes). La figure 2.15 montre un exemple d'hypergraphe quotient.

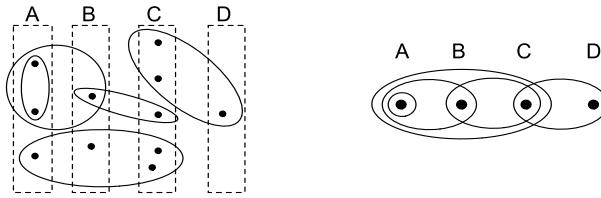


FIG. 2.15 – Un hypergraphe et son quotient par rapport à $\{A, B, C, D\}$.

Si l'on s'intéresse à la forme que peuvent avoir les quotients d'une certaine classe d'hypergraphes, il est plus judicieux de fixer une borne sur la taille maximale d'un P_i . Sans borne sur cette taille, on voit facilement qu'ils ont tous pour quotient un hypergraphe à un sommet et une hyperarête (ou sans hyperarête si $\mathcal{E} = \emptyset$).

Définition 2.14. Un k -quotient d'un hypergraphe \mathcal{H} est un quotient \mathcal{H}/\mathcal{P} tel que

$$\max\{|P| \mid P \in \mathcal{P}\} \leq k.$$

Définition 2.15. Un k -quotient d'un hypergraphe est *acyclique* si son arité est au plus 2 et le graphe formé par ses hyperarêtes de taille 2 est acyclique.

Par exemple, tout cycle (au sens des graphes) a un 2-quotient acyclique. Pour voir cela, supposons que G est un cycle de taille $n + 1$ ayant pour sommets $0, 1, \dots, n$ arrangés dans cet ordre. On considère la partition

$$\mathcal{P} := \{\{k, n - k\} \mid k \in [0, \lfloor n/2 \rfloor]\}.$$

On vérifie facilement que G/\mathcal{P} est un chemin dont les arêtes sont $\{\{k, n - k\}, \{k+1, n-(k+1)\}\}$ pour tout k dans $[0, \lfloor n/2 \rfloor - 1]$. La figure 2.16 représente le cas $n = 11$. Un exemple d'hypergraphe d'arité plus grande que 2 ayant un quotient acyclique est donné dans une preuve d'une prochaine section (cf. figure 4.2). Dans le contexte des graphes, un k -quotient acyclique est aussi appelé (en anglais) *strong tree decomposition* de largeur k ou *k -bounded tree-partite graph* (cf. [See85]). Notons aussi qu'un graphe de *domino treewidth* au plus k a nécessairement un $(k + 1)$ -quotient acyclique (cf. [BE97]).

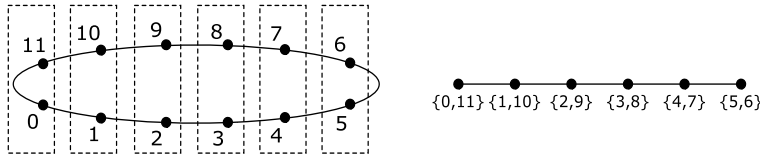


FIG. 2.16 – Un cycle de taille 12 et un de ses 2-quotients acycliques.

On va s'intéresser à des classes d'hypergraphes ayant un k -quotient acyclique et, plus généralement, un k -quotient γ -acyclique. On compare ici ces deux notions aux notions d'acyclicité déjà introduites ainsi qu'aux arbres de décomposition (cf. [RS84]). Un *arbre de décomposition* d'un hypergraphe $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est un arbre T dont les sommets sont des sous-ensembles de V et tel que :

- toute hyperarête de \mathcal{H} est incluse dans un sommet de T , et

- pour tout v dans V , l'ensemble des sommets de T contenant v est connexe dans T .

La *largeur* de T est le maximum des tailles des sommets de T moins 1. La *largeur d'arbre* de \mathcal{H} est le minimum des largeurs de tous ses arbres de décomposition. On retranche 1 dans la définition de la largeur pour que les graphes connexes de largeur d'arbre 1 soient les arbres. On peut aussi remarquer qu'un arbre de jointure de \mathcal{H} est un arbre de décomposition de \mathcal{H} de largeur l'arité de \mathcal{H} moins 1.

On rappelle que les comparaisons montrées ici concernent les hypergraphes d'arité **bornée**. Ces comparaisons sont résumées dans la figure 2.17. On pourra facilement vérifier que ces implications sont strictes (les réciproques sont fausses). On rappelle aussi que les implications γ -acyclique \Rightarrow β -acyclique \Rightarrow α -acyclique \Rightarrow largeur d'arbre bornée sont bien connues.

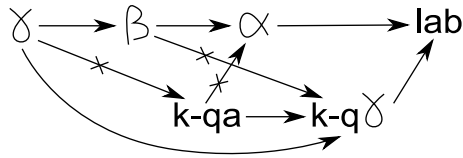


FIG. 2.17 – Implications entre différentes notions d'acyclicité sur des classes d'hypergraphes d'arité bornée : γ -acyclicité, β -acyclicité, α -acyclicité, largeur d'arbre bornée, k -quotient acyclique et k -quotient γ -acyclique.

Lemme 2.16. *Tout hypergraphe γ -acyclique a un k -quotient γ -acyclique (pour tout $k \geq 1$).*

Il existe un ensemble \mathcal{M} d'hypergraphes γ -acycliques tel que, pour tout k , il existe un hypergraphe de \mathcal{M} n'ayant pas de k -quotient acyclique.

Il existe des hypergraphes ayant un 2-quotient acyclique et qui ne sont pas α -acycliques.

Il existe un ensemble \mathcal{D} d'hypergraphes β -acycliques tel que, pour tout k , il existe un hypergraphe de \mathcal{D} n'ayant pas de k -quotient γ -acyclique.

Si \mathcal{F} est un ensemble d'hypergraphes ayant un k -quotient γ -acyclique pour un certain k , alors il existe un l tel que tous les éléments de \mathcal{F} ont une largeur d'arbre inférieure à l .

Démonstration. γ -acyclique \Rightarrow k -quotient γ -acyclique : Si $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ est un hypergraphe γ -acyclique, alors $\mathcal{H}/\{\{v\} \mid v \in V\}$ est un 1-quotient de \mathcal{H} γ -acyclique.

γ -acyclique $\not\Rightarrow$ k -quotient acyclique : Il existe un ensemble $\{\mathcal{M}_n \mid n \geq 2\}$ d'hypergraphes γ -acycliques (d'arité bornée par 3) tel que, pour tout k , il y a un \mathcal{M}_n qui n'a pas de k -quotient acyclique. Les hypergraphes $(\mathcal{M}_n)_{n \geq 2}$ sont définis comme suit. Dans \mathcal{M}_n , il y a $n + 1$ sommets p_1, \dots, p_{n+1} qui forment un chemin et, pour tout i dans $[1, n]$, il y a $2n - 1$ sommets p_i^1, \dots, p_i^{2n-1} qui sont incidents à p_i et p_{i+1} . Un exemple (pour $n = 3$) est représenté sur la figure 2.18. Plus formellement, on a $\mathcal{M}_n = (V_n, \mathcal{E}_n)$ avec

$$V_n = \{p_i \mid i \in [1, n+1]\} \cup \{p_i^j \mid i \in [1, n] \text{ et } j \in [1, 2n-1]\}$$

et

$$\mathcal{E}_n = \{\{p_i, p_{i+1}, p_i^j\} \mid i \in [1, n] \text{ et } j \in [1, 2n-1]\}.$$

Pour tout n , \mathcal{M}_n est γ -acyclique. On peut facilement le voir en appliquant les règles décrites dans la figure 2.5. Appliquer plusieurs fois la règle 1 retire tous les p_i^j , puis appliquer la règle 3 donne le chemin formé des arêtes $\{p_1, p_2\}, \dots, \{p_n, p_{n+1}\}$. On peut alors retirer les hyperarêtes restantes en utilisant alternativement les règles 1 et 2. De plus, \mathcal{M}_n n'a pas de n -quotient acyclique. En effet, soit \mathcal{P} une partition de V_n telle que tous les éléments de \mathcal{P} sont de taille au plus n et \mathcal{H}/\mathcal{P} est acyclique. Pour tout i dans $[1, n]$, si p_i est dans un autre élément de \mathcal{P} que p_{i+1} (disons par exemple $p_i \in P$ et $p_{i+1} \in Q$ avec $P \neq Q$), alors les sommets p_i^1, \dots, p_i^{2n-1} doivent tous être dans $P \cup Q$ (parce que, si un certain p_i^j appartenait à un R différent de P et Q , $\{P, Q, R\}$ serait

inclus dans une hyperarête de \mathcal{H}/\mathcal{P} et \mathcal{H}/\mathcal{P} serait d'arité plus grande que 2). D'où $|P \cup Q| \geq 2n + 1$. Cela implique que P ou Q doit être de taille plus grande que n , ce qui est une contradiction. Donc les p_i sont tous dans un même P . Cela signifie que $|P| \geq n + 1$, ce qui est impossible.

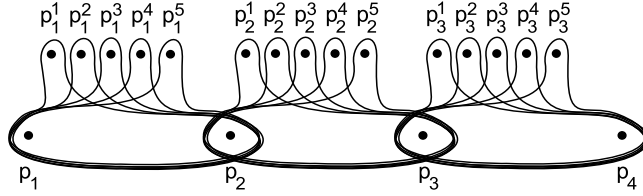


FIG. 2.18 – L'hypergraphe \mathcal{M}_3 est γ -acyclique et n'a pas de 3-quotient acyclique.

k -quotient acyclique $\not\Rightarrow \alpha$ -acyclique : Comme illustré par la figure 2.16, les cycles sont des exemples d'hypergraphes α -cycliques ayant un 2-quotient acyclique.

β -acyclique $\not\Rightarrow k$ -quotient γ -acyclique : C'est une conséquence d'un des résultats de cette thèse. La classe \mathcal{C} de la section 4.5 est un exemple de classe β -acyclique telle que, pour tout k , \mathcal{C} n'est pas à k -quotient γ -acyclique.

k -quotient γ -acyclique \Rightarrow largeur d'arbre bornée : Soit \mathcal{H} un hypergraphe et soit \mathcal{H}/\mathcal{P} un k -quotient γ -acyclique de \mathcal{H} . Comme \mathcal{H}/\mathcal{P} est γ -acyclique, il a un arbre de décomposition T de largeur au plus $h - 1$ où h est l'arité de \mathcal{H}/\mathcal{P} (qui est bornée car inférieure ou égale à l'arité de \mathcal{H}). On peut ainsi définir un arbre de décomposition de \mathcal{H} de largeur au plus $hk - 1$. Les sommets de cet arbre de décomposition sont $\{\cup X \mid X \text{ est un sommet de } T\}$ et une paire $(\cup X, \cup Y)$ forme une arête si $\{X, Y\}$ est une arête de T .

□

Remarquons que l'on considère la notion de k -quotient γ -acyclique parce qu'elle a un intérêt tout particulier dans la section 4.4. En effet, on va montrer que le théorème de préservation par extension est vrai pour des classes de structures finies ayant un k -quotient γ -acyclique. De plus, on montre que les notions de k -quotient β -acyclique et α -acyclique ne sont pas spécialement

utiles dans ce contexte, puisque ce même théorème n'est plus valide pour certaines classes de structures finies β -acycliques. Cependant, ces autres notions présentent peut-être des avantages dans un cadre différent.

Chapitre 3

Propriétés définies par des règles destructrices du premier ordre

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'il était possible de définir des notions d'acyclicité des hypergraphes en termes de règles appliquées successivement. Ces règles consistent à retirer des éléments e (sommets ou hyperarêtes) vérifiant une certaine propriété. Comme on applique ces règles en essayant d'obtenir l'hypergraphe vide, on appellera ces règles des "règles destructrices". On peut vérifier (ou cf. exemple 3.5) que ces règles peuvent être exprimées comme une formule du premier ordre $\phi(x)$ telle que e vérifie $\phi(e)$. D'un point de vue plus général, vérifier une propriété en éliminant successivement des éléments d'une structure finie satisfaisant une certaine condition est assez naturel en algorithmique. Définir la propriété revient alors à donner une formule à variables libres décrivant la condition satisfaite par les éléments à éliminer. Avec une formule exprimée au premier ordre, on peut déjà définir par cette méthode de nombreuses propriétés : ordres partiels, ordres totaux, graphes acycliques, graphes de fonction, graphes connexes, graphes ayant un couplage parfait, et même des propriétés **NP**-complètes comme les collections

de 3-ensembles ayant une couverture exacte. Il serait sans doute intéressant aussi d'examiner l'utilisation d'autres logiques que celle du premier ordre pour exprimer les règles. Cependant, une logique très expressive (comme la logique du second ordre) permet déjà de décrire le mécanisme d'élimination et donc, dans ce cas, l'application de règles destructrices est inutile.

On se propose d'aborder la question sous un angle logique. Plus précisément, on évalue le lien existant entre la syntaxe de la formule et la complexité de la propriété associée. On considère à la fois le fragment de la logique du premier ordre (de la forme $Q_1 \dots Q_n \mathbf{FO}$ où les Q_i sont des quantificateurs) dans lequel s'exprime la formule et le nombre de variables libres. On donne une classification complète des cas qui permettent de définir des propriétés **NP**-complètes et de ceux qui définissent uniquement des propriétés dans **PTIME**.

Ce système de règles destructrices peut être vu comme un cas particulier de réécriture de graphes (voir [Nag79]). Il est aussi connecté aux *deflationary fixed points* étudiés dans [GK03].

Une partie des résultats de ce chapitre est à paraître dans [Dur10].

3.1 Cas général

Par commodité, la notation $\mathcal{A} \setminus B$ désigne la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par $A \setminus B$.

Définition 3.1. Soit $\phi(x_1, \dots, x_k)$ une formule du premier ordre à k variables libres x_1, \dots, x_k et soit \mathcal{A} une structure relationnelle finie. Soit $R_{\phi(x_1, \dots, x_k)}$ la règle suivante : s'il existe des éléments a_1, \dots, a_k de A tels que $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_k)$ alors on retire a_1, \dots, a_k de \mathcal{A} , c.-à-d. on remplace \mathcal{A} par la sous-structure $\mathcal{A} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. On note $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ la propriété constituée des structures finies \mathcal{A} telles qu'il existe une manière d'appliquer successivement la

règle $R_{\phi(x_1, \dots, x_k)}$ à \mathcal{A} jusqu'à obtenir la structure vide. Plus précisément, $\mathcal{A} \in \mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ s'il existe des sous-ensembles $\{a_1^1, \dots, a_k^1\}, \dots, \{a_1^n, \dots, a_k^n\}$ de A deux à deux disjoints tels que :

- $\bigcup_{l=1}^n \{a_1^l, \dots, a_k^l\} = A$ et
- pour tout $i < n$, $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{l=1}^i \{a_1^l, \dots, a_k^l\} \models \phi(a_1^{i+1}, \dots, a_k^{i+1})$.

On note \mathbf{DR}^k l'ensemble des propriétés de la forme $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ pour un certain $\phi(x_1, \dots, x_k)$. L'ensemble \mathbf{DR} désigne l'union des \mathbf{DR}^k pour $k \geq 1$.

On notera que les ensembles $\{a_1^l, \dots, a_k^l\}$ ne sont pas nécessairement de taille k , du fait de répétitions possibles. Pour commencer, on donne quelques exemples de propriétés classiques appartenant à \mathbf{DR} . Chacune de celles-ci est un exemple assez classique de propriété non définissable par un énoncé du premier ordre (cf. par exemple [Lib04]).

Exemple 3.2. $\mathbf{DR}((\forall u \forall v (\neg Euv \wedge (Euv \Rightarrow Evu))) \wedge (\exists u Exu \vee \forall u x = u))$ est l'ensemble des graphes connexes. En effet, si un graphe est connexe, on peut retirer tous ses sommets l'un après l'autre de façon à ce que les sous-graphes successifs obtenus soient toujours connexes (donc il existe toujours au moins un sommet a relié à un autre). Réciproquement, s'il y a au moins deux composantes connexes, il restera toujours au moins deux sommets non reliés entre eux.

Exemple 3.3. • $\mathbf{DR}(x \neq y)$ est l'ensemble des structures finies ayant un domaine de taille paire.

- $\mathbf{DR}(Exy)$ est l'ensemble des graphes orientés ayant un couplage parfait, c.-à-d. un ensemble M d'arêtes deux à deux disjointes tel que chaque sommet du graphe appartient à une arête de M .
- Sur la signature $\{T\}$ (avec T d'arité 3), $\mathbf{DR}(Txyz) = \mathbf{X3C}$ l'ensemble des collections de 3-ensembles (ensembles de taille 3) ayant une couverture exacte. (Une couverture exacte pour une collection $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$ de 3-ensembles est une sous-collection $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_k}\}$

telle que les B_{i_i} sont deux à deux disjoints et leur union est égale à $\cup \mathcal{B}$.)

Exemple 3.4. $\mathbf{DR}((\forall u \forall v (\neg Euv \wedge (Euv \Rightarrow Evu))) \wedge (\forall y \forall z ((Exy \wedge Exz) \Rightarrow y = z)))$ est l'ensemble des graphes acycliques. En effet, appliquer la règle consiste à retirer tout sommet de degré au plus 1, et faire cela successivement est précisément un algorithme décidant l'acyclicité.

Exemple 3.5. Dans le cas des hypergraphes, on considère la signature $\{\in\}$ et les structures sont des graphes d'appartenance. Pour s'assurer d'avoir des structures qui représentent bien des hypergraphes, on ajoute à chaque règle la condition $\forall u \forall v \forall w \neg (u \in v \wedge v \in w)$.

- La réduction GYO (cf. figure 2.3) nous dit que la formule $\phi_\alpha(x)$ suivante est telle que $\mathbf{DR}(\phi_\alpha(x))$ est l'ensemble des hypergraphes α -acycliques.

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(x) = \quad & \forall u \forall v ((x \in u \wedge x \in v) \Rightarrow u = v) \\ & \forall \exists w (w \neq x \wedge \forall t (t \in x \Rightarrow t \in w)). \end{aligned}$$

- Dans la section 2.3, on a montré que les formules $\phi_\beta(x)$ et $\phi_\gamma(x)$ suivantes sont telles que $\mathbf{DR}(\phi_\beta(x))$ et $\mathbf{DR}(\phi_\gamma(x))$ sont respectivement l'ensemble des hypergraphes β et γ -acycliques.

$$\begin{aligned} \phi_\beta(x) = \quad & \forall u \forall v ((x \in u \wedge x \in v) \Rightarrow (\forall t (t \in u \Rightarrow t \in v) \\ & \vee \forall t (t \in v \Rightarrow t \in u))) \vee \forall t \neg (t \in x) \\ \text{et } \phi_\gamma(x) = \quad & \forall u \forall v ((x \in u \wedge x \in v) \Rightarrow \forall t (t \in u \Leftrightarrow t \in v)) \vee \\ & \forall u (\forall t (t \in x \Rightarrow t \in u) \vee \forall t (t \in x \Rightarrow \neg (t \in u))). \end{aligned}$$

On peut remarquer que $\phi_\beta(x)$ et $\phi_\gamma(x)$ sont universelles. Il n'y a pas de formule universelle pour définir l' α -acyclicité car cette notion n'est pas héréditaire et, comme on va le voir, toute propriété $\mathbf{DR}(\phi(x))$ avec $\phi(x)$ universelle

est préservée par sous-structure.

Exemple 3.6. Il n'est pas difficile de voir que, si

$$\psi(x) = \forall u \neg Eux \wedge \forall v \forall w ((Exv \wedge Exw) \Rightarrow v = w),$$

alors $\mathbf{DR}(\psi(x) \wedge \forall t(\psi(t) \Rightarrow t = x))$ est l'ensemble des chemins orientés, c'est-à-dire les graphes orientés de la forme $(\{1, \dots, n\}, \{(i, i + 1) \mid i < n\})$.

Comme on vient de le voir avec l'exemple de la propriété X3C, il existe des formules $\phi(x_1, \dots, x_k)$ telles que la propriété $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ est **NP**-complète. Nous allons voir plus précisément quels fragments de **FO** contiennent de telles formules et lesquels sont tels que $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ est toujours dans **PTIME**.

Définition 3.7. Soit Q_1, \dots, Q_n des quantificateurs (c.-à-d. $Q_i \in \{\forall, \exists\}$) éventuellement suivis par un symbole $*$. Pour tout entier k , $Q_1 \dots Q_n \mathbf{DR}^k$ est l'ensemble des propriétés de la forme $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ où $\phi(x_1, \dots, x_k)$ est une formule de $Q_1 \dots Q_n \mathbf{FO}$ à k variables libres. L'ensemble \mathbf{DR}^k sans quantificateur consiste en les propriétés $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ où $\phi(x_1, \dots, x_k)$ est sans quantificateur.

Les prochaines sections contiennent la preuve du théorème suivant. On rappelle qu'on considère la *complexité en les données*, c.-à-d. seulement en fonction de la taille de la structure finie à laquelle on applique les règles.

Théorème 3.8. *On a la classification suivante sur la signature $\{E\}$ où E est une relation binaire.*

<i>Contient des propriétés NP-complètes :</i>	<i>Inclus dans PTIME :</i>
$\exists\forall\mathbf{DR}^1$	$\exists^*\mathbf{DR}^1$
$\forall\exists\mathbf{DR}^1$	$\forall^*\mathbf{DR}^1$
$\exists\mathbf{DR}^2$	\mathbf{DR}^2 sans quantificateur
$\forall\mathbf{DR}^2$	
\mathbf{DR}^3 sans quantificateur	

À moins que $\mathbf{PTIME} = \mathbf{NP}$, ce sont précisément les fragments minimaux contenant des propriétés NP-complètes et les fragments maximaux contenant uniquement des propriétés dans \mathbf{PTIME} .

On peut noter que cette classification permet de savoir pour tout fragment $Q_1\dots Q_n\mathbf{DR}^k$ s'il contient des propriétés NP-complètes ou s'il est inclus dans \mathbf{PTIME} .

On termine cette section avec une remarque concernant les formules confluentes.

Comme, dans de nombreux cas, il est difficile de déterminer s'il existe un ordre d'application de la règle qui mène à la structure vide, il serait comode, par exemple, de détecter les formules confluentes. Ce sont les formules telles que, pour toute structure finie, le fait d'obtenir la structure vide ne dépend pas de l'ordre d'application de la règle. Plus formellement, une formule $\phi(x_1, \dots, x_k)$ est *confluente* pour \mathbf{DR}^k si, pour toute \mathcal{A} appartenant à $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$, il n'existe pas de sous-ensembles de \mathcal{A} deux à deux disjoints $\{a_1^1, \dots, a_k^1\}, \dots, \{a_1^n, \dots, a_k^n\}$ tels que :

- pour tout $i < n$, $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{l=1}^i \{a_1^l, \dots, a_k^l\} \models \phi(a_1^{i+1}, \dots, a_k^{i+1})$,
- $\bigcup_{l=1}^n \{a_1^l, \dots, a_k^l\} \neq \mathcal{A}$ et
- $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{l=1}^n \{a_1^l, \dots, a_k^l\} \models \forall x_1 \dots \forall x_k \neg \phi(x_1, \dots, x_k)$.

En particulier, il n'est pas difficile de voir que cette condition pour une formule $\phi(x_1, \dots, x_k)$ assure que la propriété $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ est dans \mathbf{PTIME} . Cependant, et cela n'est pas très surprenant, détecter les formules confluentes est un problème indécidable, même pour \mathbf{DR}^1 . On appelle $\mathbf{CONFLUENT_DR}$ le problème suivant.

$\mathbf{CONFLUENT_DR}$

Entrée : une formule du premier ordre $\phi(x)$.

Sortie : $\phi(x)$ est-elle confluente pour \mathbf{DR}^1 ?

Proposition 3.9. *Le problème $\mathbf{CONFLUENT_DR}$ est indécidable.*

Démonstration. Par le théorème 20 de [AG97], les ensembles F_0 et F_1 suivants sont récursivement inséparables (c.-à-d. il n'y a pas d'ensemble récursif E tel que $F_0 \subset E$ et $F_1 \cap E = \emptyset$) :

- F_0 est l'ensemble des énoncés du premier ordre qui n'ont pas de modèle.
- F_1 est l'ensemble des énoncés du premier ordre ayant exactement un modèle fini (et ce modèle a un domaine de taille au moins 2).

Soit not la fonction (récursive) qui associe à tout énoncé ψ sa négation $\neg\psi(x)$ considérée comme une formule à une variable libre. Soit C l'ensemble des formules confluentes. Si ψ est dans F_0 , toute structure est modèle de $\neg\psi$. D'où, pour toute structure finie \mathcal{A} et tout a dans A , on a $\mathcal{A} \models \neg\psi(a)$. Ainsi, lorsqu'on retire des éléments satisfaisant $\psi(x)$, on obtient nécessairement la structure vide, ce qui signifie que $\neg\psi(x)$ est confluente. Si ψ est dans F_1 , il existe une seule structure finie \mathcal{S} qui ne satisfait pas $\neg\psi$ et cette structure a un domaine de taille au moins 2. Il existe une structure \mathcal{A} telle que les sous-structures de \mathcal{A} dont le domaine est de taille $|S|$ ne sont pas toutes isomorphes à \mathcal{S} et au moins une de ces sous-structures est isomorphe à \mathcal{S} . De plus, pour toute structure finie \mathcal{B} non isomorphe à \mathcal{S} et pour tout $b \in B$, on a $\mathcal{B} \models \neg\psi(b)$. On a donc le choix : soit on décide de retirer des éléments successivement jusqu'à obtenir \mathcal{S} (et dans ce cas on ne peut plus appliquer $R_{\neg\psi(x)}$), soit on évite d'obtenir un \mathcal{S} (c.-à-d. on fixe une sous-structure de \mathcal{A}

dont le domaine est de taille $|S|$ et qui n'est pas isomorphe à \mathcal{S} et on retire tous les autres éléments un par un) et on peut ensuite obtenir la structure vide. Cela montre que $\neg\psi(x)$ n'est pas confluente. Par conséquent, si C était récursif, alors $\text{not}^{-1}(C)$ séparerait récursivement F_0 et F_1 , ce qui est une contradiction. \square

Corollaire 3.10. *Le problème CONFLUENT_DR n'est pas récursivement énumérable.*

Démonstration. Cela est dû au fait qu'il est co-récursivement énumérable. En effet, on peut énumérer les structures finies et les ordres totaux sur leurs éléments jusqu'à trouver une structure et deux ordres (correspondant à des ordres d'application de la règle) tels que l'un d'eux mène à la structure vide et l'autre non. \square

3.2 Propriétés NP-complètes

Dans cette section, on donne des exemples de propriétés NP-complètes appartenant aux ensembles suivants : $\exists\forall\mathbf{DR}^1$, $\forall\exists\mathbf{DR}^1$, $\exists\mathbf{DR}^2$, $\forall\mathbf{DR}^2$ et \mathbf{DR}^3 sans quantificateur. C'est la liste des fragments minimaux de \mathbf{DR} contenant des propriétés NP-complètes. Ils sont minimaux parce qu'on verra dans la section 3.3 que tout fragment plus petit (c.-à-d. contenu dans $\exists^*\mathbf{DR}^1$, $\forall^*\mathbf{DR}^1$ ou \mathbf{DR}^2 sans quantificateur) est inclus dans \mathbf{PTIME} .

Le fait que \mathbf{DR} est inclus dans \mathbf{NP} est clair par définition. Un algorithme \mathbf{NP} décidant si une structure \mathcal{A} appartient à $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ consiste à deviner les sous-ensembles $\{a_1^1, \dots, a_k^1\}, \dots, \{a_1^n, \dots, a_k^n\}$, vérifier qu'ils forment une partition de A et que, pour tout $i < n$, $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{l=1}^i \{a_1^l, \dots, a_k^l\} \models \phi(a_1^{i+1}, \dots, a_k^{i+1})$. Cette dernière condition se vérifie bien en temps polynomial en la taille de \mathcal{A} car construire la sous-structure $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{l=1}^i \{a_1^l, \dots, a_k^l\}$ prend un temps polynomial et décider la satisfaction d'une formule du premier ordre est polynomial en la taille de la structure. Plus précisément, décider si des éléments

a_1, \dots, a_k d'une structure \mathcal{S} satisfont $\phi(a_1, \dots, a_k)$ peut être effectué en temps en $O(|\phi| \cdot |\mathcal{S}|^m)$ où $|\phi|$ est la longueur de ϕ et m le nombre de variables liées dans $\phi(a_1, \dots, a_k)$ (cf. [Var95]). Il reste donc à prouver la **NP**-difficulté.

Dans chaque cas (excepté le dernier), on donne une réduction en temps polynomial du problème SAT à un certain **DR**($\phi(x_1, \dots, x_k)$) avec $\phi(x_1, \dots, x_k)$ dans le fragment de **FO** approprié. On considère donc n'importe quelle instance f de SAT, c.-à-d. une formule propositionnelle sous forme normale conjonctive $f := \bigwedge_{i \in [1, n]} C_i$. Pour tout i , C_i est une clause $\bigvee_{j \in [1, n_i]} B_{i,j}$ où $B_{i,j}$ est une variable propositionnelle $A_{i,j}$ ou la négation d'une variable propositionnelle $\neg A_{i,j}$. Pour chaque fragment de **FO** considéré, on décrit une transformation qui associe à f une structure $m(f)$ (un graphe orienté) sur la signature $\{E\}$ avec E d'arité 2. On définit alors une formule $\phi(x_1, \dots, x_k)$ dans ce fragment telle que f est satisfaisable si et seulement si $m(f) \in \mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$.

$\exists \forall \mathbf{DR}^1$: Pour chaque variable propositionnelle A apparaissant dans f , il y a deux sommets 0_A et 1_A dans $m(f)$. Ils représentent les deux valeurs de vérité possibles pour la variable A . Pour chaque clause C , il y a un sommet p_C . Chaque p_C est relié à tout 0_A ou 1_A tel que l'assignation 0 ou 1 à la variable A rende C vraie. Plus précisément, $m(f)$ contient toute arête $(1_A, p_C)$ telle que A apparaît positivement dans C (C contient A) et toute arête $(0_A, p_C)$ telle que A apparaît négativement dans C (C contient $\neg A$). De plus $m(f)$ contient les arêtes $(0_A, 0_A)$, $(1_A, 1_A)$, $(0_A, 1_A)$ et $(1_A, 0_A)$ pour toute variable A . Un exemple de formule propositionnelle f et de sa structure $m(f)$ associée est donné dans la figure 3.1.

On pose

$$\phi(x) := \exists u \forall v ((Eux \wedge ((Euv \wedge Evu) \Rightarrow v = u)) \vee Exx).$$

Appliquer successivement $R_{\phi(x)}$ à $m(f)$ consiste à choisir une valeur de vérité pour chaque variable (en retirant un point a satisfaisant Eaa) ou à retirer

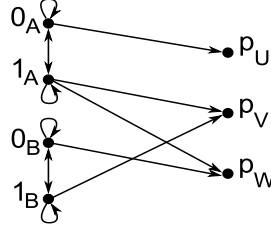


FIG. 3.1 – La structure $m(U \wedge V \wedge W)$ avec $U = \neg A$, $V = A \vee B$ et $W = A \vee \neg B$ pour le cas $\exists \forall \mathbf{DR}^1$.

une clause satisfaite par cette assignation (c.-à-d. une clause comprenant un A tel que 1_A est encore dans $m(f)$ ou un $\neg A$ tel que 0_A est encore dans $m(f)$). On ne peut pas retirer une clause avant que l'assignation soit faite (c.-à-d. quand 0_A et 1_A sont tous les deux encore présents) car la sous-formule $(Euv \wedge Evu) \Rightarrow v = u$ assure que 0_A ou 1_A a déjà été retiré. Après que chaque p_C avec C satisfaisable ait été retiré de $m(f)$, on peut retirer tous les 0_A ou 1_A restants en appliquant Exx . D'où, les seuls éléments qui resteront dans $m(f)$ seront les clauses non satisfaisables. Cela prouve que f est satisfaisable si et seulement si $m(f) \in \mathbf{DR}(\phi(x))$.

$\forall \exists \mathbf{DR}^1$: Pour chaque variable propositionnelle A de f , il y a trois sommets 0_A , 1_A et s_A dans $m(f)$. À nouveau, $m(f)$ contient un point p_C pour chaque clause C . Pour toute variable A et toute clause C contenant une occurrence de A (A ou $\neg A$), les arêtes suivantes sont dans $m(f)$:

- $(s_A, 0_A), (0_A, s_A), (s_A, 1_A), (1_A, s_A), (0_A, 0_A), (1_A, 1_A),$
- $(0_A, p_C), (p_C, 1_A),$
- (s_A, p_C) si $\neg A$ appartient à C et
- (p_C, s_A) si A appartient à C .

Cette construction est illustrée par un exemple dans la figure 3.2.

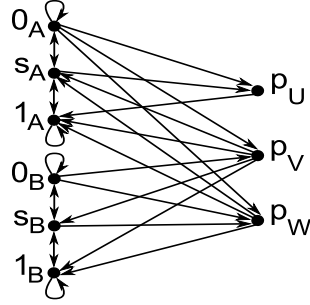


FIG. 3.2 – La structure $m(U \wedge V \wedge W)$ avec $U = \neg A$, $V = A \vee B$ et $W = A \vee \neg B$ dans le cas $\forall \exists \mathbf{DR}^1$.

On pose

$$\begin{aligned}
\phi(x) := & \quad \forall u \exists v ((\neg Euv \wedge (Eux \vee Exv)) \\
& \wedge ((Euu \wedge Eux) \Rightarrow (Eux \wedge Euv \wedge Euv)) \\
& \wedge ((Euu \wedge Eux) \Rightarrow (Exv \wedge Euv \wedge Euv))) \\
& \vee (Exv \wedge Exv).
\end{aligned}$$

Si f est satisfaisable, alors on peut appliquer la règle jusqu'à obtenir la structure vide. En effet, soit $a \in \{0, 1\}^{\text{vars}(f)}$ une assignation pour les variables de f rendant f vraie. Alors, pour tout A , on choisit de retirer le sommet ε_A (avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$) tel que $a(A) = 1 - \varepsilon$ (c.-à-d. on garde le 0_A ou 1_A qui a été assigné à A par l'assignation a). Le point ε_A peut être enlevé car il y a un v (ε_A lui-même) tel que $E\varepsilon_A v \wedge Ev\varepsilon_A$ est satisfaite. Alors tout p_C peut être enlevé parce que maintenant pour tout u il existe un v (n'importe quel s_A tel que $a(A)$ rende la clause C vraie) tel que le seul sommet relié à s_A et p_C correspond à l'assignation (soit $a(A) = 0$ et on a Eup_C et Evp_C , soit $a(A) = 1$ et on a Epc_u et Epc_v). Après avoir enlevé les p_C , on peut enlever les sommets restants $a(A)_A$ et s_A pour tout A en retirant d'abord s_A (en appliquant la formule disant qu'il existe un v ($= a(A)_A$) tel que $Euv \wedge Evu$ est satisfaite) et

ensuite $a(A)_A$ (encore en appliquant cette sous-formule). Réciproquement, supposons que l'on peut obtenir la structure vide et considérons un ordre d'exécution de la règle qui donne la structure vide. En particulier, tout p_C peut être retiré. Soit C une clause et considérons l'étape où p_C est retiré. Il n'y a pas de sommet s_A encore dans $m(f)$ tel que à la fois 0_A et 1_A ne sont plus dans $m(f)$ parce que dans ce cas s_A ne peut plus être retiré : le seul moyen de retirer s_A est d'appliquer la formule disant qu'il existe un v tel que $Exv \wedge Evx$. Ceci contredit le fait que l'on considère une exécution menant à la structure vide. Il y a nécessairement au moins un s_A relié à p_C (il y a un v tel que $\neg Evv \wedge (Evx \vee Exv)$). Les sommets 0_A et 1_A ne peuvent pas être tous les deux reliés à p_C . En effet, supposons par exemple qu' A apparaît positivement dans C (le cas où $\neg A$ est dans C est symétrique). Soit v le témoin associé à $u = 0_A$ dans la formule $\phi(x)$. On a $E0_A0_A$ et $E0_Ap_C$, donc on doit avoir $Ev p_C \wedge E0_A v \wedge Ev0_A$. Le seul v satisfaisant $E0_A v \wedge Ev0_A$ est s_A , mais on n'a pas $Es_A p_C$ car A apparaît positivement dans C . On a prouvé que soit 0_A soit 1_A est encore présent à cette étape mais pas les deux. La valeur 0 ou 1 correspondante est une assignation de A qui satisfait C . En effet, si par exemple 1_A est le sommet restant alors, puisque $E1_A1_A \wedge Ep_C1_A$ est satisfaite, on a $Ep_C s_A$ ce qui signifie que A apparaît positivement dans C ; d'où assigner la valeur 1 à A rend la clause C vraie. Soit $\varepsilon^{C,A}$ l'élément de $\{0, 1\}$ tel que $\varepsilon_A^{C,A}$ est le point restant parmi 0_A et 1_A . Soit a n'importe quelle assignation dans $\{0, 1\}^{\text{vars}(f)}$ telle que, pour tout C , $a(A) = \varepsilon^{C,A}$. Cette assignation satisfait clairement f .

$\exists\text{DR}^2$: Pour ce cas, on suppose que chaque variable apparaît dans exactement trois clauses et au moins une fois positivement et une fois négativement. Cela est une variante **NP**-complète de SAT (cf. [Tov84] preuve du théorème 2.1). On peut même supposer que A apparaît deux fois positivement et une fois négativement (en remplaçant A par $\neg A$ si nécessaire). Pour toute variable A , il y a quatre sommets $s_A, 1_A, 2_A, 3_A$ dans $m(f)$ et les arêtes $(s_A, s_A), (s_A, 1_A), (s_A, 2_A), (s_A, 3_A)$ et $(3_A, s_A)$. Pour toute A , soit C_1, C_2

et C_3 les clauses contenant A , où A apparaît positivement dans C_1 et C_2 et négativement dans C_3 . Alors $m(f)$ contient les arêtes

$$(1_A, p_{C_1}), (2_A, p_{C_2}), (1_A, p_{C_2}), (p_{C_2}, 1_A), (2_A, p_{C_1}), (p_{C_1}, 2_A) \text{ et } (3_A, p_{C_3}).$$

Un exemple est représenté dans la figure 3.3.

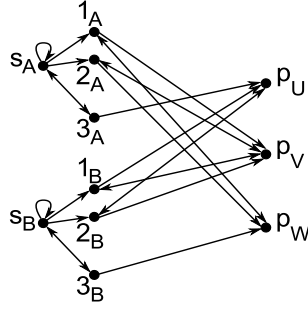


FIG. 3.3 – La structure $m(U \wedge V \wedge W)$ avec $U = \neg A \vee B$, $V = A \vee B$ et $W = A \vee \neg B$ du cas $\exists \mathbf{DR}^2$.

On pose

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &:= \exists t((E_{xx} \wedge E_{xy} \wedge \neg E_{yx} \wedge E_{yt} \wedge E_{ty}) \\ &\quad \vee (E_{tt} \wedge x \neq t \wedge E_{tx} \wedge E_{xy} \wedge \neg E_{yx}) \\ &\quad \vee (E_{tt} \wedge E_{tx} \wedge x \neq t \wedge x = y) \\ &\quad \vee (E_{xx} \wedge E_{xy} \wedge E_{yx} \wedge x \neq y)). \end{aligned}$$

On peut remarquer que les seules manières d'enlever s_A sont :

- a) enlever $\{s_A, 3_A\}$ (via la quatrième ligne de $\phi(x, y)$) ou
- b) enlever un $\{s_A, \varepsilon_A\}$ tel que $\varepsilon \in \{1, 2\}$ (via la première ligne de $\phi(x, y)$ avec $t = p_C$ pour une certaine clause C contenant A).

Dans le premier cas, le point 3_A devient indisponible pour retirer p_{C_3} via la ligne 2 avec $x = 3_A$. Dans le second cas, supposons que $\varepsilon = 1$ (sans perte

de généralité car le cas $\varepsilon = 2$ est symétrique). Alors p_{C_1} ne peut plus être enlevé en appliquant la ligne 2 avec $x = 1_A$ (la présence de 1_A est requise pour enlever $\{s_A, 1_A\}$). De plus p_{C_2} ne peut plus être enlevé via la ligne 2 avec $x = 2_A$, parce que soit p_{C_2} est retiré avant $\{s_A, 1_A\}$ et alors la ligne 1 ne peut plus retirer $\{s_A, 1_A\}$ (p_{C_2} est requis dans le rôle de t), soit $\{s_A, 1_A\}$ est retiré avant p_{C_2} et alors s_A n'est plus disponible pour utiliser la ligne 2 avec $x = 2_A$. D'où, en quelque sorte, le cas a) correspond au cas où on choisit la valeur 1 pour la variable A et le cas b) est le choix de la valeur 0. Quand ce choix est effectué (resp. a) ou b)) mais pas encore appliqué (s_A est encore dans $m(f)$), on peut soit utiliser un sommet ε_A (resp. avec $\varepsilon \in \{1, 2\}$ ou $\varepsilon = 3$) pour retirer p_{C_ε} via la ligne 2 avec $x = \varepsilon_A$ ou juste retirer ε_A via la ligne 3 si p_{C_ε} est déjà retiré avec un certain χ_B où $B \neq A$ et $\chi \in \{1, 2, 3\}$. Il existe un choix a) ou b) pour chaque variable A permettant de retirer tout p_C (et obtenir la structure vide) si et seulement si f est satisfaisable.

$\forall\text{DR}^2$: Soit A une variable de f ayant k occurrences négatives et l occurrences positives dans f . Le graphe orienté $m(f)$ contient les sommets $0_{A_1}, \dots, 0_{A_k}$ et $1_{A_1}, \dots, 1_{A_l}$ et les arêtes $(0_{A_i}, 0_{A_i})$, $(1_{A_j}, 1_{A_j})$, $(0_{A_i}, 1_{A_j})$ et $(1_{A_j}, 0_{A_i})$ pour tous $i \in [1, k]$ et $j \in [1, l]$. De plus, pour tous i et j , il y a une arête $(0_{A_i}, p_D)$ où D contient la i -ième occurrence négative de A et une arête $(1_{A_j}, p_E)$ où E contient la j -ième occurrence positive de A . Un exemple est donné dans la figure 3.4.

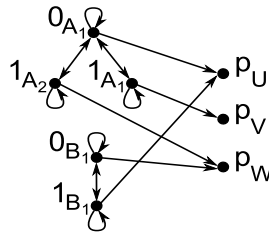


FIG. 3.4 – La structure $m(U \wedge V \wedge W)$ avec $U = \neg A$, $V = A \vee B$ et $W = A \vee \neg B$ dans le cas $\forall\text{DR}^2$.

On pose

$$\phi(x, y) := \forall u((\neg(u \neq x \wedge Eux \wedge Exu) \wedge Exy) \vee (Exy \wedge x = y)).$$

Chaque sommet p_C peut seulement être retiré avec un ε_{A_i} relié à lui et lorsqu'il n'y a plus de sommet $u = (1 - \varepsilon)_{A_j}$ dans $m(f)$. Dans ce cas, cela signifie que l'on a choisi l'assignation ε pour A . On peut retirer tout p_C (et tout autre sommet en utilisant la sous-formule $Exy \wedge x = y$) si et seulement si f est satisfaisable.

DR³ sans quantificateur : Un exemple de propriété **NP**-complète sur la signature $\{E\}$ est l'ensemble des graphes orientés ayant une partition en triangles (cf. [GJ79] p. 68). Cette propriété est égale à **DR**($Exy \wedge Eyz \wedge Ezx$).

3.3 Fragments inclus dans PTIME

Dans cette section, on examine $\forall^* \mathbf{DR}^1$, $\exists^* \mathbf{DR}^1$ et \mathbf{DR}^2 sans quantificateur, les fragments maximaux de **DR** contenant uniquement des propriétés dans **PTIME**.

On commence avec $\exists^* \mathbf{DR}^1$ et \mathbf{DR}^2 sans quantificateur. Pour illustrer ce premier cas, on peut remarquer par exemple que **DR**($\exists u(Exu \vee Eux)$) est l'ensemble des graphes orientés tels que chaque composante connexe contient une boucle. L'exemple 3.3 présente deux propriétés dans \mathbf{DR}^2 sans quantificateur (parité et couplage parfait).

Proposition 3.11. $\exists^* \mathbf{DR}^1 \subset \mathbf{PTIME}$.

Démonstration. Soit \mathcal{A} une structure finie et $\phi(x)$ une formule existentielle. On veut vérifier si \mathcal{A} appartient à **DR**($\phi(x)$) en temps polynomial. Dans cette preuve, la notation $\mathcal{A}(e_0, \dots, e_m)$ désigne la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par $\{e_0, \dots, e_m\}$.

On prend d'abord n'importe quel a_0 de A tel que $\mathcal{A}(a_0) \models \phi(a_0)$. S'il n'y a pas de tel a_0 , alors on sait déjà que $\mathcal{A} \notin \mathbf{DR}(\phi(x))$ parce que, avant d'obtenir

la structure vide, on a besoin de trouver un élément satisfaisant la règle dans une sous-structure à un élément. On prend alors un a_1 différent de a_0 tel que $\mathcal{A}(a_0, a_1) \models \phi(a_1)$. On continue de prendre des éléments (a_2, a_3 , etc.) aussi longtemps que possible. À l'étape i , on choisit un a_i différent de a_0, \dots, a_{i-1} tel que $\mathcal{A}(a_0, \dots, a_i) \models \phi(a_i)$. Il est facile de voir que ce processus peut être effectué en temps polynomial. En effet, on choisit au plus $|A|$ éléments a_i , et choisir un élément consiste à faire au plus $|A|$ tests de satisfaction de formule pour **FO** (ce qui prend un temps $O(|A|^k)$ pour un certain k). D'où, le processus complet est en temps $O(|A|^{k+2})$.

Soit a_n le dernier élément choisi. Pour finir la démonstration, on prouve que \mathcal{A} est dans **DR**($\phi(x)$) si et seulement si $\{a_0, \dots, a_n\} = A$. Clairement, par définition des éléments a_i , si $\{a_0, \dots, a_n\} = A$, alors la suite $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ est telle que la règle permet de retirer les points de A dans cet ordre et obtenir la structure vide. Réciproquement, supposons que $\mathcal{A} \in \mathbf{DR}(\phi(x))$, c.-à-d. il existe une suite (b_0, \dots, b_m) telle que $\{b_0, \dots, b_m\} = A$ et $\mathcal{A}(b_0, \dots, b_i) \models \phi(b_i)$ pour tout i . Supposons que $\{b_0, \dots, b_m\} \neq \{a_0, \dots, a_n\}$. Soit b_l le premier élément différent de a_0, \dots, a_n dans la suite (b_0, \dots, b_m) . En particulier, on a $\{b_0, \dots, b_{l-1}\} \subset \{a_0, \dots, a_n\}$. Il est bien connu que les formules existentielles sont préservées par extension. En particulier, comme $\mathcal{A}(b_0, \dots, b_l) \models \phi(b_l)$, on a aussi $\mathcal{A}(b_l, a_0, \dots, a_n) \models \phi(b_l)$. Cela signifie que le point b_l aurait pu être choisi comme point a_{n+1} dans la construction précédente. C'est une contradiction. D'où $\{a_0, \dots, a_n\} = A$. \square

Le second cas considéré est **DR**² sans quantificateur. D'une certaine manière, toute propriété dans ce fragment est une instance particulière du problème de couplage parfait.

Proposition 3.12. ***DR**² sans quantificateur est inclus dans **PTIME**.*

Démonstration. Soit \mathcal{A} une structure finie et soit $\phi(x, y)$ une formule sans quantificateur. On définit le graphe $G := (A, \{\{a, b\} \mid \mathcal{A} \models \phi(a, b)\})$. Le graphe G a un couplage parfait $\{\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\}\}$ si et seulement si il

y a une partition $\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\}$ de A telle que, pour tout $i < n$, $\mathcal{A} \setminus \bigcup_{l=1}^i \{a_l, b_l\} \models \phi(a_{i+1}, b_{i+1})$. On a cette équivalence car les formules sans quantificateur sont préservées par sous-structure et par extension (c.-à-d. pour toute sous-structure \mathcal{B} de \mathcal{A} contenant a et b , $\mathcal{A} \models \phi(a, b)$ si et seulement si $\mathcal{B} \models \phi(a, b)$). Donc, décider si \mathcal{A} est dans $\mathbf{DR}(\phi(x, y))$ prend un temps polynomial car le problème de couplage parfait est dans \mathbf{PTIME} (voir par exemple [Jun05]). \square

On considère maintenant le fragment $\forall^* \mathbf{DR}^1$. On sait par exemple que les ensembles suivants appartiennent à $\forall^* \mathbf{DR}^1$: les graphes acycliques et les hypergraphes γ et β -acycliques. Pour ce fragment, on prouve un peu plus que la décidabilité en temps polynomial.

Proposition 3.13. $\forall^* \mathbf{FO} \subsetneq \forall^* \mathbf{DR}^1$.

Démonstration. Soit ϕ un énoncé existentiel du premier ordre. Pour montrer l'inclusion, il suffit de voir ϕ comme une formule à une variable libre $\phi(x)$ (même si elle n'apparaît pas réellement). On a $\mathcal{A} \models \phi$ si et seulement si $\mathcal{A} \in \mathbf{DR}(\phi(x))$. En effet, si $\mathcal{A} \not\models \phi$, alors la règle $R_{\phi(x)}$ n'enlèvera pas d'élément. Si $\mathcal{A} \models \phi$, alors on retire n'importe quel élément et cela jusqu'à ce que tous les éléments soient retirés (car ϕ est préservé par sous-structure). L'inclusion est stricte car l'acyclicité des graphes est dans $\forall^* \mathbf{DR}^1$ et il est bien connu qu'elle n'est pas exprimable dans \mathbf{FO} (cf. par exemple [Lib04]). \square

Proposition 3.14. $\forall^* \mathbf{DR}^1 \subsetneq \mathbf{PS} \cap \mathbf{PTIME}$.

Démonstration. $\forall^* \mathbf{DR}^1 \subset \mathbf{PS}$: Supposons que $\phi(x)$ est universelle, $\mathcal{A} \in \mathbf{DR}(\phi(x))$ et que \mathcal{B} est une sous-structure de \mathcal{A} . Soit (a_1, \dots, a_n) une suite telle que l'on peut enlever ces éléments de \mathcal{A} par $R_{\phi(x)}$ dans cet ordre, c.-à-d. a_i est le i -ième élément qu'on enlève. En particulier $\{a_1, \dots, a_n\} = A$. Soit $(a_{i_k})_{k \in [1, m]}$ la sous-suite formée des éléments de B , c.-à-d. $\{a_{i_k} \mid k \in [1, m]\} = B$. Pour tout $l \in [1, m]$, on a $\mathcal{B} \setminus \{a_{i_k} \mid k \in [1, l-1]\} \models \phi(a_{i_l})$ parce que $B \setminus \{a_{i_k} \mid k \in [1, l-1]\}$ est inclus dans $A \setminus \{a_i \mid i \in [1, i_l-1]\}$, que

$\mathcal{A} \setminus \{a_i \mid i \in [1, i_l - 1]\} \models \phi(a_{i_l})$ et que $\phi(x)$ est préservée par sous-structure. Donc $(a_{i_k})_{k \in [1, m]}$ est telle que les éléments de B peuvent être retirés dans cet ordre par $R_{\phi(x)}$. D'où $\mathcal{B} \in \mathbf{DR}(\phi(x))$.

$\forall^* \mathbf{DR}^1 \subset \mathbf{PTIME}$: Toute formule $\phi(x)$ universelle est préservée par sous-structure. Donc, si un élément a peut être enlevé par $R_{\phi(x)}$ à une étape, il sera enlevé quoi qu'il arrive (éventuellement plus tard). Cela implique que $\phi(x)$ est confluente pour \mathbf{DR}^1 . À chaque étape, on peut retirer n'importe quel a satisfaisant $\phi(a)$ sans changer le résultat (obtenir ou non la structure vide). Tester si un élément a satisfait $\phi(a)$ prend un temps polynomial ($O(|A|^k)$ pour un certain k). Mettre à jour la structure (remplacer \mathcal{A} par $\mathcal{A} \setminus \{a\}$) prend un temps linéaire ($O(|A|)$). Vérifier $\mathcal{A} \in \mathbf{DR}(\phi(x))$ consiste à faire au plus $|A|$ tests à chaque étape et $|A|$ mises à jour, donc cela prend un temps $O(|A|^{k+2})$.

$\forall^* \mathbf{DR}^1 \neq \mathbf{PS} \cap \mathbf{PTIME}$: PLANARITÉ (la propriété constituée de tous les graphes planaires) est préservée par sous-structure et est dans \mathbf{PTIME} (il existe même un algorithme linéaire). Mais elle n'est pas dans $\forall^* \mathbf{DR}^1$. En fait, elle n'est même pas dans \mathbf{DR} . En effet, supposons que PLANARITÉ soit égale à $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ et soit q le rang de quantification de $\phi(x_1, \dots, x_k)$. Il existe deux graphes \mathcal{A} et \mathcal{B} $(q+k)$ -équivalents tels que \mathcal{B} est planaire, \mathcal{A} ne l'est pas et tout sous-graphe strict de \mathcal{A} est planaire (cf. figure 3.5). Ils sont $(q+k)$ -équivalents parce qu'ils ont les mêmes voisinages. Plus précisément, par Hanf-localité de la logique du premier ordre (voir par exemple [Lib04] chap. 4), il existe un entier N_{q+k} tel que, si deux structures ont les mêmes voisinages de rayon N_{q+k} , alors elles sont $(q+k)$ -équivalentes. Ainsi, si chaque chemin en pointillés de la figure 3.5 est de longueur supérieure à N_{q+k} , alors \mathcal{A} et \mathcal{B} ont les mêmes voisinages de rayon N_{q+k} et sont donc bien $(q+k)$ -équivalents. Comme \mathcal{B} est planaire, il existe des éléments b_1, \dots, b_k dans B pouvant être enlevés par $R_{\phi(x_1, \dots, x_k)}$. Mais $\mathcal{A} \equiv_{q+k} \mathcal{B}$, d'où \mathcal{A} satisfait aussi $\exists x_1 \dots \exists x_k \phi(x_1, \dots, x_k)$ et donc il y a aussi des éléments a_1, \dots, a_k dans A qui peuvent être enlevés par $R_{\phi(x_1, \dots, x_k)}$. Mais comme $\mathcal{A} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ est planaire

et $\text{PLANARITÉ} = \mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$, alors $\mathcal{A} \in \mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$. C'est une contradiction.

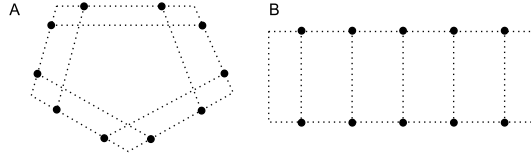


FIG. 3.5 – Les lignes en pointillés représentent des chemins suffisamment longs. On a $\mathcal{A} \equiv_{q+k} \mathcal{B}$. \mathcal{A} n'est pas planaire mais ses sous-graphes stricts le sont et \mathcal{B} est planaire.

□

On finit l'étude de $\forall^* \mathbf{DR}^1$ avec une remarque concernant les énoncés du premier ordre préservés par sous-structure. On sait que le théorème de préservation par sous-structure (dont on parle davantage dans le prochain chapitre) n'est pas satisfait sur la classe de toutes les structures finies, c.-à-d. $\mathbf{PS} \cap \mathbf{FO} \neq \forall^* \mathbf{FO}$. Il existe donc des contre-exemples d'énoncés du premier ordre préservés par sous-structure qui ne sont pas équivalents à un énoncé universel, par exemple dans [Tai59], [AG97] et [EF99]. Il est intéressant de remarquer que tous ces contre-exemples appartiennent à $\forall^* \mathbf{DR}^1$. Cependant, le contre-exemple de [EF99] peut être modifié pour montrer que $\forall^* \mathbf{DR}^1$ ne contient pas toutes les propriétés du premier ordre préservées par sous-structure. Pour résumer, on a la proposition suivante.

Proposition 3.15. $\forall^* \mathbf{FO} \subsetneq \mathbf{FO} \cap \forall^* \mathbf{DR}^1 \subsetneq \mathbf{FO} \cap \mathbf{PS}$.

Démonstration. Les inclusions sont des conséquences directes des propositions 3.13 et 3.14. Il reste à montrer que ces inclusions sont strictes.

On commence par un contre-exemple pour la seconde inclusion stricte. On considère une signature relationnelle $\sigma = \{MIN, MAX, <, R, E\}$ où MIN et MAX sont d'arité 1 et $<, R$ et E d'arité 2. Inspiré de [EF99] p. 66, on définit des énoncés ϕ_0, ϕ_1 et une famille d'énoncés $(\phi_\delta)_{\delta \in \mathbf{FO}}$ tels que chaque

ϕ_δ est préservé par sous-structure et tels que les propriétés définies par un ϕ_δ n'appartiennent pas toutes à $\forall^* \mathbf{DR}^1$. Soit ϕ_0 un énoncé signifiant

“ $<$ est un ordre total,
tout élément y satisfaisant $MINy$ ou $MAXy$
est respectivement un min ou un max pour $<$
et R est incluse dans la relation successeur de $<$ ”

et soit ϕ_1 un énoncé signifiant

“ il existe des éléments u et v satisfaisant $MINu$ et $MAXv$
et R est la relation successeur de $<$ ”.

Pour tout énoncé du premier ordre δ sur la signature $\{E\}$, on définit un énoncé $\phi_\delta := \phi_0 \wedge (\phi_1 \Rightarrow \delta)$. On peut vérifier que ϕ_δ est préservé par sous-structure pour tout δ , parce que les sous-structures de modèles de ϕ_δ satisfont $\phi_0 \wedge \neg\phi_1$. Cependant, il y a des propriétés ϕ_δ qui ne sont pas des $\mathbf{DR}(\psi(x))$ avec $\psi(x)$ universelle. En effet, on aurait sinon les équivalences suivantes sur les structures \mathcal{A} où $<$ est un ordre total avec un min u et un max v (satisfaisant $MINu$ et $MAXv$) et R est interprétée comme le successeur de $<$:

$$\mathcal{A} \models \delta \iff \mathcal{A} \models \phi_\delta \iff \mathcal{A} \in \mathbf{DR}(\psi(x)) \iff \mathcal{A} \models \exists x \psi(x)$$

parce que toute sous-structure stricte de \mathcal{A} satisfait ϕ_δ donc est aussi dans $\mathbf{DR}(\psi(x))$. Cela est une contradiction puisqu'il est bien connu que, même sur la classe des structures totalement ordonnées avec min, max et successeur, $\exists \forall^* \mathbf{FO}(\sigma)$ n'est pas aussi expressif que $\mathbf{FO}(\{E\})$.

La première inclusion est stricte pour les raisons suivantes. Ebbinghaus et

Flum montrent dans [EF99] p. 66 que, si $\rho = \exists zEzz$, alors l'énoncé du premier ordre ϕ_ρ n'est pas dans $\forall^*\mathbf{FO}$. Cet énoncé est définissable dans $\forall^*\mathbf{DR}^1$: on vérifie facilement que l'ensemble des structures finies satisfaisant ϕ_ρ est égal à

$$\mathbf{DR}(\phi_0 \wedge ((\neg \mathbf{MIN}x \wedge \forall u \neg(u < x)) \vee (\neg \mathbf{MAX}x \wedge \forall u \neg Rxu) \vee Exx)).$$

En d'autres termes, on retire un point x si ϕ_0 est satisfait et que x témoigne du fait que soit $\neg\phi_1$ soit ρ est satisfait. \square

3.4 Règles avec unicité

On consacre cette section à une variante particulière de \mathbf{DR}^1 . Cette fois, on retire un point a et on continue le processus si et seulement si a est le seul point de la structure à vérifier $\phi(a)$. On introduit la notation $!\mathbf{DR}$ par commodité mais on peut l'exprimer à partir de \mathbf{DR} . Rappelons que la notation $\exists!z\phi(z)$ signifie "il existe un unique élément z satisfaisant $\phi(z)$ ", c'est-à-dire que cette formule est équivalente à $\exists u(\phi(u) \wedge \forall v(\phi(v) \Rightarrow v = u))$.

Définition 3.16. On dit qu'une structure finie \mathcal{A} appartient à la propriété $!\mathbf{DR}(\phi(x))$ si \mathcal{A} appartient à $\mathbf{DR}(\phi(x) \wedge \exists!z\phi(z))$.

Cette restriction est assez contraignante. Par exemple, elle ne permet pas d'exprimer des propriétés basiques comme "avoir un domaine de taille au plus 2". En effet, si on considère la structure constituée de deux points déconnectés, il n'y a pas de formule que l'un de ces deux points satisfait et l'autre pas. Comme il y a une seule façon d'appliquer la règle successivement, les propriétés que l'on peut définir sont constituées de structures ayant un aspect "ordonné" (dans un sens assez large) comme les ordres totaux mais aussi les chemins orientés ou l'exemple de la figure 3.6.

Dans le cas des graphes orientés sans boucle, on sait précisément quelles sont les propriétés qui appartiennent à la fois à $\forall^*\mathbf{DR}^1$ et $!\mathbf{DR}$. Pour tout

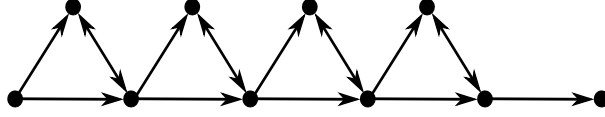


FIG. 3.6 – Une structure appartenant à $\mathbf{!DR}((\forall u\forall v u = v) \vee (\exists u\exists v u \neq v \wedge (\forall w(Ewx \Rightarrow Exw))))$.

$n \geq 0$, soit \mathcal{O}_n la propriété constituée des ordres totaux de longueur au plus n . C'est-à-dire, $\mathcal{O}_0 = \{\emptyset\}$ et, pour $n \geq 1$, \mathcal{O}_n est l'ensemble des structures isomorphes à un certain $(\{1, \dots, i\}, <)$ avec $i \leq n$ et $<$ l'ordre usuel. Soit \mathcal{O} l'ensemble de tous les ordres totaux finis. La proposition suivante est aussi un théorème de préservation par sous-structure pour $\mathbf{!DR}$.

Proposition 3.17. *Sur les graphes orientés sans boucle, on a*

$$\mathbf{!DR} \cap \forall^* \mathbf{DR}^1 = \mathbf{!DR} \cap \mathbf{PS} = \{\mathcal{O}_n \mid n \geq 0\} \cup \{\mathcal{O}\}.$$

Démonstration. On a $\mathbf{!DR} \cap \forall^* \mathbf{DR}^1 \subset \mathbf{!DR} \cap \mathbf{PS}$ car $\forall^* \mathbf{DR}^1 \subset \mathbf{PS}$. On a aussi $\{\mathcal{O}_n \mid n \geq 0\} \cup \{\mathcal{O}\} \subset \mathbf{!DR} \cap \forall^* \mathbf{DR}^1$. Chaque \mathcal{O}_n est à la fois dans $\mathbf{!DR}$ et $\forall^* \mathbf{DR}^1$ en considérant comme formule (universelle) $\phi(x)$ (la même dans les deux cas) “ E est un ordre total, il existe au plus n éléments et x est le minimum”. Pour définir \mathcal{O} , on omet la condition “il existe au plus n éléments”. Il suffit maintenant de prouver que $\mathbf{!DR} \cap \mathbf{PS} \subset \{\mathcal{O}_n \mid n \geq 0\} \cup \{\mathcal{O}\}$.

Soit $\mathcal{P} = \mathbf{!DR}(\phi(x))$ une propriété dans $\mathbf{!DR}$ préservée par sous-structure. On prouve par récurrence sur $|A|$ que tout élément \mathcal{A} de \mathcal{P} est un ordre total. Cela prouvera que \mathcal{P} est nécessairement un \mathcal{O}_n ou \mathcal{O} car \mathcal{P} est préservée par sous-structure. C'est évident pour $|A| = 0$ et $|A| = 1$. Si $|A| = 2$, la structure \mathcal{A} est nécessairement de la forme $(\{a_1, a_2\}, \{(a_1, a_2)\})$. En effet, si $E^{\mathcal{A}}$ est l'ensemble vide ou $\{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$, alors les points a_1 et a_2 satisfont les mêmes formules du premier ordre, donc aucun des deux ne peut être l'unique élément satisfaisant $\phi(u)$. Soit maintenant \mathcal{A} une structure de \mathcal{P}

telle que $|A| = k + 1$, et supposons que les structures dans \mathcal{P} ayant un domaine de taille au plus k sont des ordres totaux. Soit a n'importe quel point dans A . Comme la sous-structure \mathcal{A}' de \mathcal{A} engendrée par $A \setminus \{a\}$ est aussi dans \mathcal{P} (par préservation par sous-structure) et par hypothèse de récurrence, on sait que \mathcal{A}' est un ordre total. On appelle a_1, \dots, a_k les éléments de A' et on suppose qu'ils sont ordonnés de cette façon (c.-à-d. $\mathcal{A}' \models Ea_i a_j$ si et seulement si $i < j$). Dans \mathcal{A} , a est nécessairement relié à tous les a_i , parce que sinon la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par $(\{a_i, a\}, \emptyset)$ serait dans \mathcal{P} . Pour les mêmes raisons, il n'y a pas de a_i tel que (a_i, a) et (a, a_i) sont tous les deux dans $E^{\mathcal{A}}$. D'où, pour tout i , soit (a_i, a) soit (a, a_i) est dans $E^{\mathcal{A}}$. De plus, il n'y a pas de i et j avec $i < j$ tels que (a, a_i) et (a_j, a) sont dans $E^{\mathcal{A}}$. En effet, si c'était le cas, la sous-structure de \mathcal{A}

$$(\{a, a_i, a_j\}, \{(a, a_i), (a_i, a_j), (a_j, a)\})$$

serait dans \mathcal{P} . Mais c'est impossible parce que les points a, a_i et a_j satisfont les mêmes formules du premier ordre à une variable libre interprétées dans cette structure. C'est pourquoi, il existe un m tel que :

- pour tout $i \leq m$, $\mathcal{A} \models Ea_i a$ et
- pour tout $i > m$, $\mathcal{A} \models Eaa_i$.

Cela signifie que \mathcal{A} est un ordre total. □

Chapitre 4

Théorèmes de préservation par extension sur des classes de structures finies acycliques

Dans ce chapitre, on recense les principaux théorèmes de préservation connus pour la logique du premier ordre sur des classes de structures finies. On présente plus en détail les résultats provenant de [Dur08].

4.1 Théorèmes de préservation en théorie des modèles finis

La théorie des modèles a pour principal objet d'établir des liens entre la syntaxe et la sémantique de propriétés sur des classes de structures (structures finies et infinies pour la théorie des modèles classique et structures finies uniquement pour la théorie des modèles finis). Les théorèmes de préservation sont d'excellents exemples de tels liens. Ils s'énoncent tous sous la forme suivante : sur la classe \mathcal{C} , toute propriété est préservée par l'opération op si et seulement si elle est définissable par une formule de la logique L . Le fait

d'être préservée par op correspond au pendant sémantique du théorème et la définissabilité dans L au pendant syntaxique. On remarquera que le théorème a valeur pour une certaine classe \mathcal{C} . Comme on va le voir, celle-ci a une influence déterminante sur la validité du théorème de préservation. Cela est dû au fait que les deux parties de l'équivalence (préservation et définissabilité) dépendent fortement de la classe \mathcal{C} considérée. Par exemple, si \mathcal{P} est une propriété non définissable par un énoncé du premier ordre sur la classe de toutes les structures finies, alors elle est, sur \mathcal{P} , à la fois préservée par toute opération et définissable au premier ordre de façon triviale.

Les premiers théorèmes de préservation datent des années 1950. Ils sont issus de la théorie des modèles classique donc concernent la classe de toutes les structures (finies et infinies). On présente ici le théorème de Łoś-Tarski, le théorème de Lyndon et le théorème de préservation par homomorphisme (voir par exemple [Hod93]). On donne quelques définitions avant de les énoncer. Un énoncé est *positif* s'il ne contient pas de symbole de négation \neg . Un *homomorphisme* d'une structure \mathcal{A} vers une structure \mathcal{B} est une fonction h de A vers B telle que, pour tout R dans σ et tout uplet (a_1, \dots, a_r) d'éléments de A , $(a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathcal{A}}$ implique $(h(a_1), \dots, h(a_r)) \in R^{\mathcal{B}}$. Un énoncé est *préservé par homomorphisme* sur une classe \mathcal{C} si, pour toute structure \mathcal{A} dans \mathcal{C} et toute structure \mathcal{B} telle qu'il existe un homomorphisme de \mathcal{A} vers \mathcal{B} , \mathcal{B} appartient aussi à \mathcal{C} . On définit de façon similaire la préservation par homomorphisme surjectif.

Théorème de Łoś-Tarski. Sur la classe de toutes les structures, un énoncé du premier ordre est préservé par extension si et seulement si il est équivalent à un énoncé existentiel.

Théorème de Lyndon. Sur la classe de toutes les structures, un énoncé du premier ordre est préservé par homomorphisme surjectif si et seulement si il est équivalent à un énoncé positif.

Théorème de préservation par homomorphisme. Sur la classe de toutes les structures, un énoncé du premier ordre est préservé par homomorphisme si et seulement si il est équivalent à un énoncé existentiel positif.

Si sur une classe \mathcal{C} (pas forcément la classe de toutes les structures) une de ces équivalences est vérifiée, alors on dit que \mathcal{C} satisfait respectivement le théorème de préservation par extension (TPE), le théorème de préservation par homomorphisme surjectif (TPHS) et le théorème de préservation par homomorphisme (TPH). Ces théorèmes ont été prouvés en utilisant un puissant outil de la théorie des modèles classique : le théorème de compacité. Ce théorème n'est pas valide en théorie des modèles finis. D'ailleurs, d'autres résultats classiques comme la complétude et les théorèmes d'interpolation deviennent également faux sur la classe des structures finies (cf. [Ros02] pour une présentation détaillée de résultats invalidés dans le cas fini). Pour cette raison, on peut se poser la question de la validité des théorèmes de préservation en théorie des modèles finis.

Sur la classe de toutes les structures finies, le TPE et le TPHS ne sont pas satisfaits. Les premiers contre-exemples à ces théorèmes sont dûs respectivement à Tait ([Tai59]) et à Ajtai et Gurevich ([AG87]). On détaille ici celui de Tait.

Contre-exemple de Tait. On considère la signature $\sigma = \{\leq, R\}$ où \leq et R sont des relations binaires. Soit ψ un énoncé du premier ordre exprimant le fait que \leq est un ordre total et que tous éléments x et y satisfaisant Rxy sont tels que soit $y < x$ soit y est le successeur de x pour \leq . On définit

$$\phi := \psi \Rightarrow \exists x \exists y (Rxy \wedge y < x \wedge \forall z ((y \leq z < x) \Rightarrow \exists u (Rzu \wedge z < u))).$$

Tout modèle \mathcal{A} de ϕ et de ψ satisfait donc la partie droite de l'équivalence. Ceci implique que \mathcal{A} contient une suite (a_1, \dots, a_n) telle que : $a_1 \leq \dots \leq a_n$, $Ra_i a_{i+1}$ pour tout $i \in [1, n-1]$ et $Ra_n a_1$. On vérifie facilement que ϕ est

préservé par extension sur la classe de toutes les structures finies. De plus, les structures \mathcal{A}_n de domaine $\{1, \dots, n\}$ avec \leq interprétée comme l'ordre usuel et R formée des couples $(1, 2), \dots, (n-1, n)$ et $(n, 1)$ sont modèles de ϕ . Ce sont même des modèles minimaux de ϕ sur la classe de toutes les structures finies, ce qui montre que ϕ n'est pas équivalent à un énoncé existentiel sur cette classe (voir plus loin dans cette section).

On pouvait éventuellement penser que le TPH n'était pas davantage satisfait. Cependant, Rossman est parvenu à montrer en 2005 que le TPH est satisfait par la classe de toutes les structures finies (cf. [Ros08]). Il améliore également le TPH classique.

Théorème 4.1 (Rossman). *Le TPH est satisfait sur la classe de toutes les structures finies. Plus généralement, le TPH est vérifié pour toute classe de structures finies close par co-homomorphisme (comme la classe des graphes k -coloriables). Sur la classe de toutes les structures, tout énoncé préservé par homomorphisme est équivalent à un énoncé existentiel positif de même rang de quantification.*

Le TPH a aussi été étudié sur des classes de structures finies particulières dans [ADK06].

Théorème 4.2 (Atserias, Dawar et Kolaitis). *Le TPH est satisfait sur toute classe de structures finies close par sous-structure et union disjointe telle que :*

- *les structures sont de degré borné ou*
- *la classe exclut un mineur.*

Dans une prépublication récente ([Daw08]), Dawar obtient une généralisation de ce résultat (qui contient donc en particulier les deux cas précédents).

Théorème 4.3 (Dawar). *Le TPH est satisfait sur toute classe de structures finies close par sous-structure et union disjointe et qui est quasi-wide.*

Concernant le TPE, le premier résultat positif dans le cas fini est de Grädel et Rosen ([GR99]). Ils restreignent l'ensemble des énoncés considérés en fonction du nombre de variables utilisées. On appelle \mathbf{FO}^s l'ensemble des formules du premier ordre à s variables. Ils montrent que le TPE est satisfait par la classe de toutes les structures finies pour la logique \mathbf{FO}^2 .

Théorème 4.4 (Grädel et Rosen). *Sur la classe des structures finies, tout énoncé de \mathbf{FO}^2 est préservé par extension si et seulement si il est équivalent à un énoncé existentiel de \mathbf{FO}^2 . Ce théorème devient faux pour \mathbf{FO}^s lorsque $s > 2$.*

Dans la veine de [ADK06] qui établit le TPH sur des classes particulières, le TPE est prouvé pour certaines classes dans [ADG08].

Théorème 4.5 (Atserias, Dawar et Grohe). *Le TPE est satisfait sur les classes suivantes :*

- *toute classe de structures finies ayant un graphe de Gaifman acyclique close par sous-structure et union disjointe,*
- *toute classe dite espacée close par sous-structure et union disjointe et,*
- *pour tout k , la classe \mathcal{T}_k des structures finies ayant une largeur d'arbre inférieure à k .*

Les théorèmes 4.2, 4.3 et 4.5 s'inscrivent dans une démarche actuelle en théorie des modèles finis consistant à déterminer des classes de structures finies ayant un "bon" comportement modèle-théorique (cf. [Daw07]). Notons que les résultats des prochaines sections appartiennent en particulier à ce champ d'investigation.

Dans la section 3.3, on évoque le théorème de préservation par sous-structure qui dit qu'un énoncé ϕ est préservé par sous-structure si et seulement si il est équivalent à un énoncé universel. Il n'est pas nécessaire d'en faire un cas particulier car il est équivalent au TPE. En effet, sur toute classe,

- un énoncé ϕ est préservé par sous-structure si et seulement si $\neg\phi$ est préservé par extension, et
- un énoncé ϕ est équivalent à un énoncé universel si et seulement si $\neg\phi$ est équivalent à un énoncé existentiel.

Au lieu de chercher à obtenir un théorème de préservation classique pour certaines classes de structures finies, on peut aussi tenter de trouver de nouvelles caractérisations sémantiques des propriétés syntaxiques habituelles. Cette question est examinée dans [AG97]. On peut par exemple citer la caractérisation suivante des énoncés existentiels. Pour cela, on définit la notion de modèle minimal. Pour toute classe \mathcal{C} et tout énoncé ϕ , on dit que \mathcal{A} est un *modèle minimal* de ϕ sur \mathcal{C} si $\mathcal{A} \models \phi$ et toute sous-structure stricte de \mathcal{A} appartenant à \mathcal{C} satisfait $\neg\phi$. Sur toute classe de structures finies close par sous-structure et pour tout énoncé ϕ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- ϕ est préservé par extension et ϕ a un nombre fini de modèles minimaux.
- ϕ est équivalent à un énoncé existentiel.

Cette caractérisation est assez pratique lorsqu'on cherche à montrer qu'un énoncé ϕ est exprimable par un énoncé existentiel. Au lieu de chercher à faire des manipulations syntaxiques sur ϕ , on déplace le problème vers une question d'ordre combinatoire. On aura justement recours à cette équivalence dans les sections suivantes.

Le théorème de préservation que l'on étudie dans ce chapitre est le TPE. Le point de départ de notre travail est le TPE pour les classes acycliques de [ADG08]. Ce théorème est satisfait sur toute classe de structures finies ayant un graphe de Gaifman acyclique close par sous-structure et union disjointe. En particulier, cela implique que l'arité de la signature considérée est au plus 2, parce que le graphe de Gaifman d'une structure avec une relation d'arité supérieure contient au moins un cycle de taille 3. Pourtant, comme on l'a vu en détail dans le chapitre 2, il existe des notions d'acyclicité pour les structures finies sur des signatures d'arité quelconque. En

une réduction logique qui nous permet de nous ramener au cas acyclique de [ADG08].

Théorème 4.6. *Soit $k \geq 1$ et \mathcal{C} une classe de structures finies à k -quotient acyclique close par sous-structure et union disjointe. Alors, sur \mathcal{C} , on a $\mathbf{FO} \cap \mathbf{PE} = \exists \mathbf{FO}$.*

Démonstration. L'inclusion \supset est connue et se montre aisément. C'est le sens inverse $\mathbf{FO} \cap \mathbf{PE} \subset \exists \mathbf{FO}$ qui demande du travail.

Soit σ une signature relationnelle et \mathcal{C} une classe de σ -structures finies à k -quotient acyclique close par sous-structure et union disjointe. Soit ϕ un énoncé du premier ordre de rang de quantification q préservé par extension sur \mathcal{C} . Notre but est de montrer que les modèles minimaux de ϕ sur \mathcal{C} ne peuvent pas dépasser une certaine taille puisqu'on rappelle que c'est équivalent au fait que ϕ peut être défini par un énoncé existentiel sur \mathcal{C} . On le prouve en trouvant, pour toute structure $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$, une sous-structure stricte \mathcal{S} et une extension \mathcal{E} également dans \mathcal{C} qui sont q -équivalentes. Cela nous permettra de conclure car alors \mathcal{A} ne pourra pas être un modèle minimal de ϕ sur \mathcal{C} . En effet, si $\mathcal{A} \models \phi$ alors $\mathcal{E} \models \phi$ (par préservation par extension de ϕ) et donc $\mathcal{S} \models \phi$ (car $\mathcal{S} \equiv_q \mathcal{E}$), ce qui empêche \mathcal{A} d'être un modèle minimal de ϕ . Nous allons utiliser le résultat suivant (qui apparaît dans la preuve du théorème 3.7 de [ADG08]) : pour toute signature relationnelle θ d'arité au plus 2, il existe un entier N_θ tel que toute θ -structure acyclique (c.-à-d. dont le graphe de Gaifman est acyclique) de taille $\geq N_\theta$ a une sous-structure stricte et une extension (qui est égale à l'union disjointe de la structure elle-même et d'une de ses sous-structures et est donc acyclique) qui sont q -équivalentes.

On commence par définir une nouvelle signature $\tilde{\sigma}$ d'arité au plus 2. À chaque structure $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ telle que $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I\}$ est une partition de A et $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ est un k -quotient acyclique de $H(\mathcal{A})$, on va associer une $\tilde{\sigma}$ -structure $\tilde{\mathcal{A}}$. La signature $\tilde{\sigma}$ sera assez riche pour que $\tilde{\mathcal{A}}$ contienne une description complète de \mathcal{A} tout en utilisant uniquement des relations unaires et binaires sur les P_i . À l'aide de la signature $\tilde{\sigma}$, on pourra exprimer les

relations satisfaites dans \mathcal{A} restreintes à un P_i (relations unaires de $\tilde{\sigma}$) et les relations faisant intervenir des éléments de deux P_i différents (relations binaires de $\tilde{\sigma}$). Toute relation de \mathcal{A} sera ainsi considérée parce que $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ est d'arité au plus 2. Nous allons maintenant voir cela plus en détail.

On définit $\tilde{\sigma}$ comme l'union de

$$\begin{aligned} & \{L_j \mid j \in [1, k]\}, \\ & \{R_{i_1 \dots i_r} \mid R \in \sigma \text{ et } \{i_1, \dots, i_r\} \subset [1, k]\} \text{ et} \\ & \{R_{i_1 \dots i_r}^{d_1 \dots d_r} \mid R \in \sigma, \{i_1, \dots, i_r\} \subset [1, k] \\ & \text{ et } \{d_1, \dots, d_r\} \subset \{0, 1\}\} \end{aligned}$$

où les L_j et les $R_{i_1 \dots i_r}$ sont des relations unaires, les $R_{i_1 \dots i_r}^{d_1 \dots d_r}$ sont des relations d'arité 2 et, pour tout R dans σ , r est l'arité de R . Soit \mathcal{A} dans \mathcal{C} . Il existe une partition $\mathcal{P} = \{P_i \mid i \in I\}$ de A telle que le k -quotient $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ est acyclique. Pour chaque P_i , on se donne n'importe quel ordre total sur ses éléments de telle sorte qu'on pourra parler du premier, du deuxième, ..., du n -ième élément de P_i . On associe à chaque \mathcal{A} la $\tilde{\sigma}$ -structure $\tilde{\mathcal{A}}$ définie comme suit. On pose $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{P}$. Pour tout $i \in I$ et tout $j \in [1, k]$, on a $P_i \in L_j^{\tilde{\mathcal{A}}}$ si et seulement si $|P_i| = j$. Il reste à donner, pour chaque $R \in \sigma$, l'interprétation des relations de la forme $R_{i_1 \dots i_r}$ et $R_{i_1 \dots i_r}^{d_1 \dots d_r}$ sur $\tilde{\mathcal{A}}$.

Comme l'arité de $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ est au plus 2, on sait que tout uplet d'une relation $R^{\mathcal{A}}$ fait intervenir seulement des éléments d'au plus deux P_i différents. On a donc exactement deux cas à traiter. Soit $(a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathcal{A}}$ tel que les $(a_l)_{l \in [1, r]}$ sont tous dans un même P_i et que, pour tout l dans $[1, r]$, a_l est le i_l -ième élément de P_i . Dans ce cas et seulement ce cas, $P_i \in R_{i_1 \dots i_r}^{\tilde{\mathcal{A}}}$. Soit maintenant $(a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathcal{A}}$, tel que chaque a_l est dans $P_i \cup P_j$ (et pas uniquement dans P_i ou dans P_j). Pour tout l dans $[1, r]$, a_l est le i_l -ième élément de P_i ou P_j (celui dans lequel il se trouve) et on pose $d_l := 0$ si $a_l \in P_i$ et $d_l := 1$ si $a_l \in P_j$. Dans ce cas et seulement ce cas, $(P_i, P_j) \in R_{i_1 \dots i_r}^{d_1 \dots d_r, \tilde{\mathcal{A}}}$.

Illustrons cette construction par un exemple.

Exemple 4.7. On considère une signature $\tau = \{B, T\}$ où B est d'arité 2 et T est d'arité 3. Soit \mathcal{N} une τ -structure telle que $N = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $T^{\mathcal{N}} = \{(a, b, c), (c, d, e), (e, f, g)\}$ et $B^{\mathcal{N}} = \{(g, h)\}$. On définit une partition $\mathcal{Q} := \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ de N par $Q_1 = \{a, b, c\}$, $Q_2 = \{d, e\}$ et $Q_3 = \{f, g, h\}$. Pour chaque élément de \mathcal{Q} , on utilise l'ordre dans lequel on vient de les nommer (par exemple, c est le troisième élément de Q_1 et g est le deuxième élément de Q_3). La $\tilde{\tau}$ -structure $\tilde{\mathcal{N}}$ associée à \mathcal{N} satisfait donc L_3Q_1 , L_2Q_2 , L_3Q_3 , $T_{123}Q_1$, $B_{23}Q_3$, $T_{312}^{011}Q_1Q_2$, $T_{312}^{100}Q_2Q_1$, $T_{212}^{011}Q_2Q_3$ et $T_{212}^{100}Q_3Q_2$. Cet exemple apparaît sur la figure 4.2.

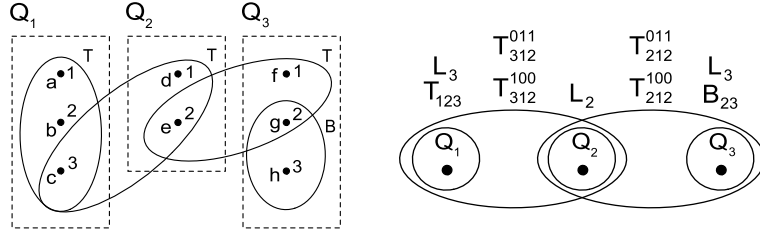


FIG. 4.2 – Une τ -structure partitionnée et sa $\tilde{\tau}$ -structure associée.

Comme $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ est acyclique, le graphe de Gaifman de $\tilde{\mathcal{A}}$ est aussi acyclique. Supposons que $|A| \geq kN_{\tilde{\sigma}}$. On a donc $|\tilde{A}| \geq N_{\tilde{\sigma}}$ parce que \mathcal{P} est une partition de A et $\max\{|P_i| \mid i \in I\} \leq k$. D'où, par le résultat de [ADG08], $\tilde{\mathcal{A}}$ a une sous-structure stricte $\tilde{\mathcal{S}}$ et une extension $\tilde{\mathcal{E}}$ (égale à l'union disjointe de $\tilde{\mathcal{A}}$ et de l'une de ses sous-structures que l'on nomme $\tilde{\mathcal{F}}$) qui sont q -équivalentes. De manière équivalente, il existe une stratégie gagnante \tilde{s} pour le joueur II dans le jeu EF à q coups entre $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$.

On définit maintenant les structures \mathcal{S} et \mathcal{E} que l'on cherchait à obtenir. \mathcal{S} est la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par $\cup\tilde{\mathcal{S}}$ et \mathcal{E} est l'union disjointe de \mathcal{A} et de la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par $\cup\tilde{\mathcal{F}}$ (de façon standard, $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ sont les domaines de $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$). Il reste à montrer que \mathcal{S} et \mathcal{E} satisfont les propriétés requises, c.-à-d.

- \mathcal{S} est une sous-structure stricte de \mathcal{A} ,
- \mathcal{E} est une extension de \mathcal{A} ,
- \mathcal{S} et \mathcal{E} appartiennent à \mathcal{C} et
- $\mathcal{S} \equiv_q \mathcal{E}$.

Tout d'abord, \mathcal{S} est par définition une sous-structure de \mathcal{A} , et elle est stricte car $\tilde{S} \subsetneq \mathcal{P}$. Comme \mathcal{C} est close par sous-structure, $\mathcal{S} \in \mathcal{C}$. La structure \mathcal{E} est une extension de \mathcal{A} parce que c'est l'union disjointe de \mathcal{A} et de sa sous-structure \mathcal{F} engendrée par $\cup \tilde{F}$. À nouveau, $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ car \mathcal{C} est close par sous-structure. D'où $\mathcal{E} \in \mathcal{C}$ parce que \mathcal{C} est close par union disjointe. Pour finir, on montre que $\mathcal{S} \equiv_q \mathcal{E}$. Pour cela, on décrit une stratégie gagnante s pour le joueur II dans le jeu EF à q coups entre \mathcal{S} et \mathcal{E} . Remarquons déjà que l'existence de s paraît intuitivement claire. En effet, la stratégie \tilde{s} décrit, d'une certaine façon, des coups sous forme d'uplets pour \mathcal{S} et \mathcal{E} (c.-à-d. le joueur I joue un uplet et le joueur II répond par un uplet) parce que les P_i sont des ensembles ordonnés. Et si le joueur II sait quoi répondre à un uplet, alors il saura quoi répondre à un simple point. On peut remarquer que l'inverse n'est pas forcément vrai. Toutefois, c'est le premier cas qui nous intéresse. Décrivons donc la stratégie s .

Supposons que, aux m premiers coups (avec $m < q$), les joueurs I et II aient choisi, pour tout i dans $[1, m]$, les éléments a_i et b_i dans les parties P_{a_i} (élément de \tilde{S}) et P_{b_i} (élément de \tilde{E}), et que ceci formât une stratégie gagnante pour le joueur II, c.-à-d. l'application

$$g : a_1 \dots a_m \mapsto b_1 \dots b_m$$

est un isomorphisme partiel entre \mathcal{S} et \mathcal{E} . Dans la stratégie que l'on décrit, on s'assure que, pour tout i dans $[1, m]$, a_i et b_i sont les n_i -ièmes éléments de P_{a_i} et P_{b_i} (c.-à-d. la position de a_i dans P_{a_i} est la même que celle de b_i dans P_{b_i}) et que les choix $P_{a_1} \dots P_{a_m}$ et $P_{b_1} \dots P_{b_m}$ correspondent à une stratégie gagnante pour le joueur II. Au $(m + 1)$ -ième coup, supposons que le joueur

I choisisse un point a_{m+1} dans S et que a_{m+1} soit le i_{m+1} -ième élément d'un certain $P_{a_{m+1}}$. Soit $P_{b_{m+1}}$ le point choisi par le joueur II dans la stratégie \tilde{s} (cf. plus haut) au $(m+1)$ -ième coup après que I et II aient choisi P_{a_1}, \dots, P_{a_m} et P_{b_1}, \dots, P_{b_m} . Comme l'application

$$\tilde{h} : P_{a_1} \dots P_{a_{m+1}} \longmapsto P_{b_1} \dots P_{b_{m+1}}$$

est un isomorphisme partiel entre $\tilde{\mathcal{S}}$ et $\tilde{\mathcal{E}}$, $P_{a_{m+1}}$ et $P_{b_{m+1}}$ satisfont la même L_t (avec $t \geq i_{m+1}$), c.-à-d. $P_{a_{m+1}}$ et $P_{b_{m+1}}$ ont la même taille. Le joueur II choisit alors pour b_{m+1} le i_{m+1} -ième élément de $P_{b_{m+1}}$. Montrons que l'application

$$h : a_1 \dots a_{m+1} \longmapsto b_1 \dots b_{m+1}$$

est un isomorphisme partiel entre \mathcal{S} et \mathcal{E} . Soit $R \in \sigma$ une relation d'arité r et j_1, \dots, j_r des indices dans $\{1, \dots, m+1\}$. Supposons d'abord que $\{j_1, \dots, j_r\} \subset \{1, \dots, m\}$. Dans ce cas, on a immédiatement $\mathcal{S} \models Ra_{j_1} \dots a_{j_r}$ si et seulement si $\mathcal{E} \models Rb_{j_1} \dots b_{j_r}$ car g est un isomorphisme partiel. Supposons maintenant qu'au moins un des j_u vaut $m+1$. On distingue alors deux cas. Le premier est celui où $\mathcal{S} \models Ra_{j_1} \dots a_{j_r}$ et tous les a_{j_v} sont dans le même P_i . Ils appartiennent donc tous à $P_{a_{m+1}}$ car $j_u = m+1$ et $a_{m+1} \in P_{a_{m+1}}$. D'où, dans ce cas, $\mathcal{S} \models Ra_{j_1} \dots a_{j_r}$ si et seulement si $\tilde{\mathcal{S}} \models R_{i_{j_1} \dots i_{j_r}} P_{a_{m+1}}$, ce qui est équivalent à $\tilde{\mathcal{E}} \models R_{i_{j_1} \dots i_{j_r}} P_{b_{m+1}}$ car \tilde{h} est un isomorphisme partiel. Ceci est aussi équivalent à $\mathcal{E} \models Rb_{j_1} \dots b_{j_r}$, et c'est ce qu'on voulait montrer. Le second cas est celui où les a_{j_v} sont soit dans $P_{a_{m+1}}$, soit dans un certain P_{a_l} . Cette fois, on a l'équivalence de $\mathcal{S} \models Ra_{j_1} \dots a_{j_r}$ avec

$$\tilde{\mathcal{S}} \models R_{i_{j_1} \dots i_{j_r}}^{d_1 \dots d_r} P_{a_l} P_{a_{m+1}}$$

(les d_w dépendent de l'appartenance de a_{j_w} à P_{a_l} ou $P_{a_{m+1}}$) et donc avec

$$\tilde{\mathcal{E}} \models R_{i_{j_1} \dots i_{j_r}}^{d_1 \dots d_r} P_{b_l} P_{b_{m+1}},$$

à nouveau car \tilde{h} est un isomorphisme partiel. Ceci est également équivalent à $\mathcal{E} \models Rb_{j_1} \dots b_{j_r}$, ce qui prouve bien que h est un isomorphisme partiel. On applique exactement les mêmes arguments (mais en échangeant E et S , \mathcal{E} et \mathcal{S} , ...) si le joueur I choisit, au $(m + 1)$ -ième coup, un point a_{m+1} dans E au lieu de S . \square

4.3 Théorème pour les structures γ -acycliques

On montre maintenant le théorème de préservation par extension sur des classes de structures finies γ -acycliques. Pour l'obtenir, on va en particulier utiliser le théorème 4.6. Cependant, aucun de ces deux théorèmes n'implique l'autre. En effet, comme cela a déjà été remarqué (cf section 2.4), on a les deux faits suivants : il existe des classes de structures à 2-quotient acyclique qui ne sont pas α -acycliques (et donc pas γ -acycliques) et il existe des classes de structures γ -acycliques qui ne sont à k -quotient acyclique pour aucun k .

On aura également besoin de l'assertion suivante, dite lemme du tournesol, qui est un résultat classique en combinatoire (cf. [ER60]).

Définition 4.8. Une famille $F = \{X_1, \dots, X_p\}$ de p ensembles est un *tourne-sol* à p pétales si les intersections $X_i \cap X_j$ (pour $i \neq j$) sont toutes égales à un même ensemble Y (éventuellement vide) et les pétales $X_i \setminus Y$ sont non vides.

Lemme 4.9 (Lemme du tournesol). *Soit $r \geq 1$, $p \geq 1$ et H une famille d'ensembles non vides tous de taille au plus r . Il existe une constante $c_{r,p}$ telle que si $|H| > c_{r,p}$ alors il existe $F \subset H$ tel que F soit un tournesol à p pétales.*

Théorème 4.10. *Sur toute classe \mathcal{C} de structures finies γ -acycliques close par sous-structure et union disjointe, on a $\mathbf{FO} \cap \mathbf{PE} = \exists \mathbf{FO}$.*

Démonstration. Comme déjà remarqué, la seule inclusion que l'on a à prouver est $\mathbf{FO} \cap \mathbf{PE} \subset \exists \mathbf{FO}$. Soit ϕ un énoncé du premier ordre préservé par exten-

sion sur \mathcal{C} et de rang de quantification q . On utilise à nouveau la méthode décrite dans [ADG08], c.-à-d. on montre que toute structure de \mathcal{C} suffisamment grande a une sous-structure stricte et une extension q -équivalentes. Pour arriver à cela, on montre qu'il y a un entier k tel que, pour toute structure \mathcal{A} de \mathcal{C} assez grande, \mathcal{A} a une hyperarête reliée à beaucoup d'autres hyperarêtes ou \mathcal{A} a un k -quotient acyclique. Dans le premier cas, on utilise des arguments combinatoires et un jeu EF. Dans le second cas, on conclut comme dans la preuve du théorème 4.6.

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ une structure de grande taille et $H(\mathcal{A}) = (A, \mathcal{E})$ son hypergraphe associé. On commence par décrire une partition \mathcal{P} de A telle que $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ soit un graphe acyclique. On choisira alors un k suffisamment grand et on distinguera le cas où un élément de \mathcal{P} est de taille plus grande que k et le cas où tous les éléments de \mathcal{P} sont de taille plus petite que k . On définit la partition \mathcal{P} de façon inductive. On commence par choisir n'importe quelle E_0 de $H(\mathcal{A})$ et on pose $P_{0,0} := E_0$ et $n_0 := 1$. À chaque étape i (avec $i \geq 1$), on définit n_i éléments $(P_{i,j})_{j \in [0, n_i - 1]}$ de \mathcal{P} . Supposons qu'on a déjà défini les $P_{k,j}$ pour k dans $[0, i - 1]$ et j dans $[0, n_k - 1]$. Soit S_{i-1} l'ensemble des sommets déjà considérés, c'est-à-dire les sommets qui appartiennent à un certain $P_{k,j}$:

$$S_{i-1} := \bigcup_{0 \leq k \leq i-1, 0 \leq j \leq n_k - 1} P_{k,j}.$$

Soit F_i l'ensemble des hyperarêtes qui coupent S_{i-1} et ne sont pas incluses dans S_{i-1} . Si $F_i \neq \emptyset$, on partage l'hypergraphe $(\cup F_i, F_i)$ associé à F_i en composantes connexes $(Q_{i,j})_{j \in [0, n_i - 1]}$. Pour tout j dans $[0, n_i - 1]$, on définit alors $P_{i,j}$ comme la partie de $Q_{i,j}$ hors de S_{i-1} :

$$P_{i,j} := Q_{i,j} \setminus S_{i-1}.$$

Si $F_i = \emptyset$ et $S_{i-1} \neq A$, on choisit n'importe quelle hyperarête E_i disjointe de S_{i-1} et on pose $P_{i,0} := E_i$ et $n_i := 1$. On répète ce processus jusqu'à ce que

$S_{i-1} = A$. On pose :

$$\mathcal{P} := \{P_{k,j} \mid 0 \leq k \leq n-1 \text{ et } 0 \leq j \leq n_k - 1\}$$

où n est la dernière étape de la construction. On donne un exemple de cette construction sur la figure 4.3. Pour tout i , on définit P_i comme l'ensemble des éléments de \mathcal{P} qui ont été définis à l'étape i , c.-à-d.

$$P_i := \{P_{i,j} \mid 0 \leq j \leq n_i - 1\}.$$

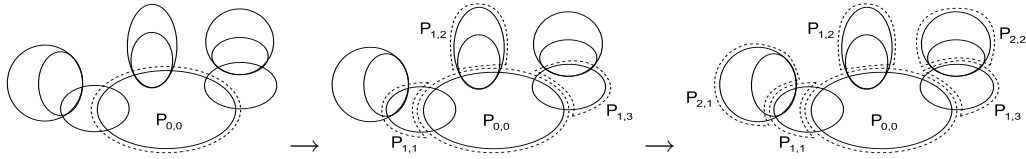


FIG. 4.3 – Un hypergraphe γ -acyclique \mathcal{H} et la construction d'une partition \mathcal{P} telle que \mathcal{H}/\mathcal{P} soit un graphe acyclique. Les zones entourées par des pointillés correspondent à des éléments de \mathcal{P} .

On montre que $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ est un graphe acyclique. Pour obtenir cela, il suffit de prouver le fait suivant.

Fait 4.11. *Pour tout i dans $[1, n-1]$ et tout j dans $[0, n_i - 1]$, on a les assertions suivantes concernant $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$:*

1. $P_{i,j}$ est relié à au plus un élément de P_{i-1} .
2. $P_{i,j}$ n'est pas relié à un élément de P_l avec l plus petit que $i-1$.
3. $P_{i,j}$ n'est pas relié à un autre élément de P_i .

Démonstration du fait. On rappelle que deux éléments U et V de \mathcal{P} sont reliés dans $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ s'il existe une hyperarête de $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ qui contient U et V . Dit autrement, U et V sont reliés s'il existe une hyperarête de $H(\mathcal{A})$ qui contient au moins un élément de U et un élément de V .

Preuve de 1. Supposons $P_{i,j}$ relié à deux éléments P_{i-1,j_1} et P_{i-1,j_2} de P_{i-1} . Il est facile de voir que deux éléments différents Q_{t,t_1} et Q_{t,t_2} définis à la même étape t coupent la même composante connexe de S_{t-1} . Il y a donc un chemin Δ dans S_{i-2} qui relie un sommet $d_1 \in P_{i-1,j_1}$ et un sommet $d_2 \in P_{i-1,j_2}$. On suppose Δ de longueur minimale. En prenant Δ' un chemin de d_1 à d_2 constitué d'hyperarêtes intersectant $P_{i,j}$ (hyperarêtes de $Q_{i,j}$), on ferme le chemin Δ et on obtient un γ -cycle. En effet, exceptés d_1 et d_2 , les sommets et hyperarêtes de Δ' sont différents de ceux de Δ parce que, si une hyperarête de Δ' intersectait S_{i-2} , alors cette hyperarête serait dans un $Q_{i-1,l}$ au lieu de $Q_{i,j}$.

Preuve de 2. Si $P_{i,j}$ était relié à un élément d'un P_l avec l plus petit que $i - 1$, $P_{i,j}$ appartiendrait par définition à P_{l+1} , ce qui est une contradiction.

Preuve de 3. Pour prouver que $P_{i,j}$ ne peut pas être relié à un autre élément $P_{i,j'}$ de P_i , on distingue deux cas. S'il y a une hyperarête intersectant S_{i-1} , $P_{i,j}$ et $P_{i,j'}$, elle appartiendrait à F_i et elle relierait les deux composantes connexes $Q_{i,j}$ et $Q_{i,j'}$ de $(\cup F_i, F_i)$ (ce qui est une contradiction). Il n'y a pas d'hyperarête disjointe de S_{i-1} qui intersecte $P_{i,j}$ et $P_{i,j'}$ car sinon il y aurait un γ -cycle passant par cette hyperarête, $P_{i,j}$, S_{i-1} et $P_{i,j'}$. \square

On vient de voir que $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ est un graphe acyclique mais il n'est pas forcément un quotient borné de $H(\mathcal{A})$, c'est-à-dire que la taille du plus grand $P_{i,j}$ peut ne pas être bornée si on considère tous les éléments \mathcal{A} de \mathcal{C} . Cependant, dans le cas où il y a un $P_{i,j}$ de taille supérieure à un certain k suffisamment grand, on trouve une sous-structure stricte \mathcal{S} de \mathcal{A} telle que $\mathcal{S} \equiv_q \mathcal{A}$. On va voir que cette structure \mathcal{S} est \mathcal{A} à laquelle on a coupé une certaine branche parmi les nombreuses branches reliées à $P_{i,j}$.

On appelle $F_{i,j}$ le sous-ensemble des hyperarêtes de F_i qui induisent $Q_{i,j}$, c.-à-d.

$$F_{i,j} := \{E \mid E \in F_i \text{ et } E \subset Q_{i,j}\}.$$

(On remarque que les autres hyperarêtes de F_i sont disjointes de $Q_{i,j}$ car les

$Q_{i,j}$ sont les composantes connexes de $(\cup F_i, F_i)$.

Fait 4.12. *Tout ensemble $Q_{i,j} \cap S_{i-1}$ est inclus dans une hyperarête de $F_{i,j}$.*

Démonstration du fait. Soit E l'hyperarête de $F_{i,j}$ telle que $E \cap S_{i-1}$ est maximal pour l'inclusion, c.-à-d. il n'y a pas de E' dans $F_{i,j}$ vérifiant $E \cap S_{i-1} \subsetneq E' \cap S_{i-1}$. Supposons que $Q_{i,j} \cap S_{i-1}$ n'est pas inclus dans E . On peut alors partitionner $F_{i,j}$ en deux sous-ensembles non vides : les hyperarêtes D telles que $D \cap S_{i-1} \subset E \cap S_{i-1}$ et les autres hyperarêtes de $F_{i,j}$. Comme $Q_{i,j}$ est connexe, il y a deux hyperarêtes qui s'intersectent et qui appartiennent à différents sous-ensembles de la partition précédente, c.-à-d. il y a des hyperarêtes D et F dans $F_{i,j}$ telles que : $D \cap F \neq \emptyset$, $D \cap S_{i-1} \subset E$ et $F \cap S_{i-1} \not\subset E$. Si F intersecte E , on change la définition de D et on décide que D désigne E . Si F et E sont disjointes, on garde le D précédent. Dans les deux cas, on a les propriétés suivantes :

- il y a un sommet e dans $D \cap F$,
- il y a un sommet d dans $(D \setminus F) \cap S_{i-1}$ et
- il y a un sommet f dans $(F \setminus D) \cap S_{i-1}$.

S'il y a une hyperarête C contenant d et f , alors

$$(D, d, C, f, F, e)$$

est un γ -cycle. Sinon, soit C_1 une hyperarête reliant d et S_{i-2} , C_l une hyperarête reliant f et S_{i-2} , et (c_1, \dots, c_l) un chemin de longueur minimale constitué d'hyperarêtes incluses dans S_{i-2} tel que $c_1 \in C_1$ et $c_l \in C_l$. Dans ce cas,

$$(D, d, C_1, c_1, \dots, c_l, C_l, f, F, e)$$

est un γ -cycle. C'est une contradiction, donc $Q_{i,j} \cap S_{i-1} \subset E$. □

Le fait précédent implique, en particulier, que l'ensemble $Q_{i,j} \cap S_{i-1}$ est de taille au plus r , où r est l'arité de σ . D'où, si $P_{i,j}$ est suffisamment grand, on peut supposer qu'il y a au moins un élément x dans $Q_{i,j} \cap S_{i-1}$ qui appartient

à de nombreuses hyperarêtes de $F_{i,j}$. Soit E_x l'ensemble des restrictions à $P_{i,j}$ des hyperarêtes de $F_{i,j}$ qui contiennent x , c.-à-d.

$$E_x := \{E \setminus S_{i-1} \mid E \in F_{i,j} \text{ et } x \in E\}.$$

On peut appliquer, pour toute valeur de p , le lemme du tournesol à r , p et E_x , et on obtient un tournesol F_x (sous-ensemble de E_x) à p pétales. Remarquons que si $P_{i,j}$ est assez grand alors E_x l'est aussi, et donc on peut obtenir un tournesol F_x de taille p aussi grande que l'on veut.

Soit I l'intersection commune du tournesol F_x et soit $F_{xt} \setminus I$ avec t dans $[1, p]$ les pétales. Soit $T_{i,j}$ l'union de $Q_{i,j}$ et de tout élément a de $A \setminus S_{i-1}$ tel qu'il existe un chemin de a à un élément de $P_{i,j}$ sans qu'une hyperarête du chemin ne soit incluse dans S_{i-1} . Enlever $I \cup S_{i-1}$ de $T_{i,j}$ le partage en composantes connexes dans l'hypergraphe $H(\mathcal{A})$ moins $I \cup S_{i-1}$:

$$(A \setminus (I \cup S_{i-1}), \{E \setminus (I \cup S_{i-1}) : E \in \mathcal{E}\} \setminus \{\emptyset\}).$$

On nomme T_u ces composantes connexes. On observe qu'un T_u ne peut pas intersecter deux pétales différents. En effet, supposons qu'il y ait deux pétales $F_{xg} \setminus I$ et $F_{xh} \setminus I$ d'hyperarêtes associées E_{xg} et E_{xh} (c.-à-d. $F_{xg} = E_{xg} \setminus S_{i-1}$ et $F_{xh} = E_{xh} \setminus S_{i-1}$) contenant toutes les deux x telles qu'il y ait un chemin de E_{xg} à E_{xh} ($E_{xg}, c_1, C_1, \dots, C_l, c_{l+1}, E_{xh}$) où chaque C_t est une hyperarête non incluse dans $I \cup S_{i-1}$ et les c_t sont dans $A \setminus (I \cup S_{i-1})$. Alors, si l est minimal, le chemin

$$(E_{xg}, c_1, C_1, \dots, C_l, c_{l+1}, E_{xh}, x)$$

est un γ -cycle (en effet on a $l \geq 1$ car sinon c_1 serait un sommet commun de $F_{xg} \setminus I$ et $F_{xh} \setminus I$). D'où, pour chaque pétale $F_{xt} \setminus I$, il y a exactement un T_t qui le contient, et on peut définir une structure \mathcal{A}_t comme la sous-structure de \mathcal{A} engendrée par $T_t \cup I \cup (Q_{i,j} \cap S_{i-1})$. La figure 4.4 illustre la construction

précédente.

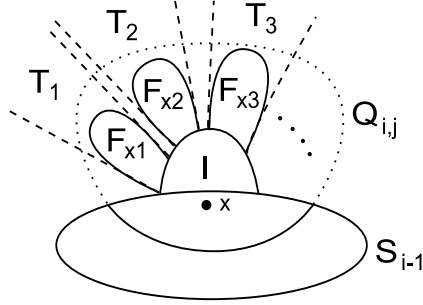


FIG. 4.4 – Un pétale dans $Q_{i,j}$ et le T_t associé.

On va considérer les q -types des \mathcal{A}_t sur la signature σ à laquelle on ajoute quelques constantes. Pour chaque élément e de $I \cup (Q_{i,j} \cap S_{i-1})$, on définit la constante c_e . Soit

$$\tau := \sigma \cup \{c_e \mid e \in I \cup (Q_{i,j} \cap S_{i-1})\}.$$

Comme I et $Q_{i,j} \cap S_{i-1}$ sont tous deux contenus dans une hyperarête de $H(\mathcal{A})$, on sait que $|I \cup (Q_{i,j} \cap S_{i-1})| \leq 2r$. Par conséquent, la signature τ est de taille bornée par une valeur ne dépendant pas de \mathcal{A} et donc le nombre de q -types sur τ est borné aussi. Dans chaque \mathcal{A}_t (vue comme une τ -structure), on interprète la constante c_e par l'élément e , c.-à-d. $c_e^{\mathcal{A}_t} := e$. Si p est assez grand, il y a au moins $q+1$ \mathcal{A}_{t_h} avec h dans $[1, q+1]$ ayant le même q -type sur τ . On peut vérifier, via un jeu EF à q coups, que \mathcal{A} et sa sous-structure stricte \mathcal{S} engendrée par $A \setminus T_{t_1}$ sont q -équivalentes. Voici une stratégie gagnante pour le joueur II. Si le joueur I choisit un élément qui n'est pas dans un \mathcal{A}_{t_h} avec h dans $[1, q+1]$, le joueur II choisit le même élément (mais dans l'autre structure évidemment). Si le joueur I choisit un élément d'un \mathcal{A}_{t_h} , le joueur II choisit un élément approprié dans un certain \mathcal{A}_{t_i} . Un élément approprié, c.-à-d. un élément qui permet au joueur II de gagner le jeu, existe nécessairement parce que $\mathcal{A}_{t_h} \equiv_q \mathcal{A}_{t_i}$, il n'y a pas d'hyperarête contenant des éléments de différents

T_t et, dans la partie restante de \mathcal{A}_t (c.-à-d. $I \cup (Q_{i,j} \cap S_{i-1})$), chaque élément est associé à lui-même (puisque c'est l'interprétation d'une constante de τ). Notons qu'il y a suffisamment de \mathcal{A}_{t_i} disponibles pour le joueur II à chaque coup parce qu'il y a q \mathcal{A}_{t_h} dans \mathcal{S} et $q + 1$ \mathcal{A}_{t_h} dans \mathcal{A} , et il y a seulement q coups dans le jeu.

On pose maintenant la valeur de k de façon à ce que, pour tout \mathcal{A} dans \mathcal{C} , s'il y a un $P_{i,j}$ de taille plus grande que k , alors on peut trouver une \mathcal{S} comme ci-dessus (on a vu que c'était possible si k était assez grand). Les modèles minimaux de ϕ sur \mathcal{C} ne peuvent pas avoir un $P_{i,j}$ de taille plus grande que k parce que l'existence d'une \mathcal{S} pour un tel modèle minimal contredit sa minimalité. D'où, les modèles minimaux de ϕ sur \mathcal{C} ont nécessairement un k -quotient acyclique et sont donc, par le théorème 4.6, de taille bornée. \square

4.4 Théorème pour les structures à k -quotient γ -acyclique

On est maintenant en mesure d'établir le théorème sous une forme plus générale. En effet, le théorème de cette section implique les théorèmes de préservation par extension des deux sections précédentes (cas à k -quotient acyclique et cas γ -acyclique). Cependant, les arguments que l'on a utilisés précédemment vont nous permettre de prouver le théorème suivant de façon plus courte et plus claire.

Théorème 4.13. *Soit $k \geq 1$ et \mathcal{C} une classe de structures finies à k -quotient γ -acyclique close par sous-structure et union disjointe. Alors, sur \mathcal{C} , on a $\mathbf{FO} \cap \mathbf{PE} = \exists\mathbf{FO}$.*

Démonstration. Comme d'habitude, on a juste à montrer que $\mathbf{FO} \cap \mathbf{PE} \subset \exists\mathbf{FO}$. On utilise le théorème 4.10 et la même méthode que dans la preuve du théorème 4.6. Soit ϕ un énoncé du premier ordre sur σ de rang de quantification q préservé par extension sur \mathcal{C} . Toute structure \mathcal{A} dans \mathcal{C} a un k -quotient

γ -acyclique $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$. Ce quotient nous permet de définir une structure γ -acyclique $\tilde{\mathcal{A}}$ de domaine $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{P}$ sur une nouvelle signature $\tilde{\sigma}$. Cette signature $\tilde{\sigma}$ doit être suffisamment riche pour que l'interprétation des éléments de $\tilde{\sigma}$ sur $\tilde{\mathcal{A}}$ décrive complètement \mathcal{A} , exactement comme la signature $\tilde{\sigma}$ dans la preuve du théorème 4.6. On définit $\tilde{\sigma}$ comme l'union de

$$\begin{aligned} & \{L_j \mid j \in [1, k]\} \text{ et} \\ & \{R_{i_1 \dots i_r}^{m, d_1 \dots d_r} \mid R \in \sigma, \{i_1, \dots, i_r\} \subset [1, k] \\ & \text{ et } \{d_1, \dots, d_r\} \subset [0, m-1]\} \end{aligned}$$

pour m dans $[1, p]$, où les L_j sont des relations unaires, p est l'arité de $H(\mathcal{A})/\mathcal{P}$ (qui est majorée par l'arité de σ), et, pour tout R dans σ , r est l'arité de R et les $R_{i_1 \dots i_r}^{m, d_1 \dots d_r}$ sont des relations d'arité m . Comme dans la preuve du théorème 4.6, les L_j sont interprétées comme les tailles des P_i . On fixe n'importe quel ordre total pour chaque $P_i \in \mathcal{P}$. Soit R une relation dans σ et (a_1, \dots, a_r) un r -uplet dans $R^{\mathcal{A}}$ tel que, pour tout l dans $[1, r]$, a_l est le i_l -ième élément de P_{n_l} où les P_{n_l} sont m différents éléments de \mathcal{P} . On étiquette chaque P_{n_l} par un nombre d_l dans $[0, m-1]$ de manière à ce que deux P_{n_l} aient des étiquettes différentes si et seulement si ils sont différents. Pour chaque R , chaque uplet (a_1, \dots, a_r) dans $R^{\mathcal{A}}$ et chaque étiquetage possible $(d_l)_{l \in [1, r]}$, on ajoute à $R_{i_1 \dots i_r}^{m, d_1 \dots d_r} \tilde{\mathcal{A}}$ (l'interprétation de $R_{i_1 \dots i_r}^{m, d_1 \dots d_r}$ dans $\tilde{\mathcal{A}}$) le m -uplet $(P_{j_0}, \dots, P_{j_{m-1}})$ où, pour tout d dans $[0, m-1]$, P_{j_d} est le P_{n_l} d'étiquette d .

Par le théorème 4.10, on sait que toute structure γ -acyclique suffisamment grande a une sous-structure stricte et une extension q -équivalentes. D'où, si une structure \mathcal{A} dans \mathcal{C} est assez grande alors, comme les éléments de \mathcal{P} sont de taille au plus k , $\tilde{\mathcal{A}}$ (qui est γ -acyclique) doit être grande aussi et donc doit avoir une sous-structure stricte $\tilde{\mathcal{S}}$ et une extension $\tilde{\mathcal{E}}$ q -équivalentes. On vérifie facilement, par un jeu EF à q coups (comme dans la preuve du

théorème 4.6), que la sous-structure stricte \mathcal{S} de \mathcal{A} engendrée par $\cup\tilde{S}$ (sa $\tilde{\sigma}$ -structure associée est $\tilde{\mathcal{S}}$) et l'extension \mathcal{E} de \mathcal{A} de $\tilde{\sigma}$ -structure associée $\tilde{\mathcal{E}}$ sont q -équivalentes. D'où, on a montré que les modèles minimaux de ϕ sur \mathcal{C} sont de taille bornée. \square

4.5 Cas β -acyclique

Dans cette section, on donne un contre-exemple montrant que le théorème 4.13 n'est plus vrai lorsque l'on considère des classes de structures β -acycliques au lieu de structures à k -quotient γ -acyclique. Cependant, on montre le théorème de préservation par extension pour un cas particulier de classe de structures β -acycliques : la classe de **toutes** les structures finies β -acycliques (pour n'importe quelle signature).

Le contre-exemple doit être constitué d'une classe \mathcal{C} de structures finies et d'un énoncé du premier ordre ϕ vérifiant les propriétés suivantes :

1. \mathcal{C} est close par sous-structure et union disjointe.
2. Toute structure $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ est β -acyclique.
3. ϕ est préservé par extension sur \mathcal{C} .
4. ϕ n'est pas équivalent à un énoncé existentiel sur \mathcal{C} (c.-à-d. le nombre de modèles minimaux de ϕ sur \mathcal{C} est infini).

On considère une signature $\{T\}$ avec T d'arité 3. Notons que la signature dans un contre-exemple doit nécessairement contenir une relation d'arité au moins 3, parce que pour les structures d'arité au plus 2 les différentes notions d'acyclicité coïncident. Pour obtenir notre contre-exemple, on décrit d'abord un ensemble \mathcal{D} de structures β -acycliques \mathcal{D}_n ($n \geq 2$). Alors \mathcal{C} sera la clôture de \mathcal{D} par sous-structure et union disjointe et ϕ sera un énoncé signifiant "contenir un \mathcal{D}_n ". Commençons par la description de \mathcal{D}_n .

Chaque \mathcal{D}_n contient n points p_1, \dots, p_n et un point particulier s relié à tous les p_i . Les p_i forment un segment pour la relation T avec p_1 et p_n pour

extrémités. Plus précisément, on a

$$T^{\mathcal{D}_n} = \{(s, p_i, p_{i+1}) \mid i \in [1, n-1]\} \cup \{(p_1, p_1, p_1), (p_n, p_n, p_n)\}.$$

La figure 4.5 représente \mathcal{D}_5 .

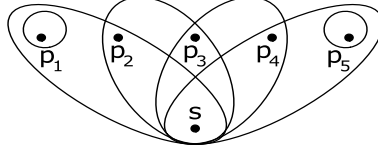


FIG. 4.5 – La structure \mathcal{D}_5 . Chaque ovale correspond à un élément de $T^{\mathcal{D}_5}$.

Comme déjà mentionné, \mathcal{C} est la clôture de $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_n, n \geq 2\}$ par sous-structure et union disjointe. La propriété 1 est donc satisfaite.

Chaque $\mathcal{D}_n \in \mathcal{D}$ est β -acyclique. En effet, un β -cycle ne peut pas contenir le sommet s car il appartient à toutes les hyperarêtes, et les autres sommets et hyperarêtes forment un chemin qui ne se ferme pas et donc ne contiennent pas de β -cycle. Par ailleurs, toute sous-structure et union disjointe de structures β -acycliques est aussi β -acyclique. Cela montre la propriété 2. Notons que, pour tout n plus grand que 3, \mathcal{D}_n est γ -cyclique. Par exemple,

$$(\{p_1, p_2, s\}, p_2, \{p_2, p_3, s\}, p_3, \{p_3, p_4, s\}, s)$$

est un γ -cycle.

Soit ϕ l'énoncé

$$\begin{aligned} & \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Txyz \wedge \forall u \forall v \\ & (Txuv \Rightarrow (Tuuu \vee \exists a Txa u) \wedge (Tvvv \vee \exists b Txb v))). \end{aligned}$$

L'énoncé ϕ dit qu'il existe un x (le point s) appartenant à au moins une relation et tel que tous points u et v dans une relation $Txuv$ satisfont les conditions suivantes :

- si u n'est pas l'extrémité gauche, il est relié à un autre point sur sa gauche et
- si v n'est pas l'extrémité droite, il est relié à un autre point sur sa droite.

Sur \mathcal{C} , cet énoncé signifie “contenir un \mathcal{D}_n ”. Les modèles minimaux de ϕ sur \mathcal{C} sont les \mathcal{D}_n (parce qu'aucun \mathcal{D}_n n'est sous-structure d'un \mathcal{D}_m avec $m \neq n$) et toute extension d'une structure contenant un \mathcal{D}_n contient également \mathcal{D}_n . Cela prouve les propriétés 3 et 4.

Même si les conditions de clôture du théorème 4.13 ne suffisent pas dans le cas β -acyclique, on a le théorème de préservation par extension dans le cas particulier suivant.

Théorème 4.14. *Pour toute signature σ , la classe $\mathcal{C}_{\beta,\sigma}$ de toutes les σ -structures finies β -acycliques satisfait le théorème de préservation par extension.*

Démonstration. C'est une application du critère de clôture par “union over bottleneck” de [ADG08]. Un *bottleneck* est un ensemble de sommets de taille bornée dont la suppression produit un grand ensemble éparsé (c.-à-d. un ensemble dans lequel la distance entre deux éléments quelconques est supérieure à une certaine constante). L'union $\mathcal{A} \oplus_S \mathcal{B}$ de deux structures (ou deux hypergraphes) \mathcal{A} et \mathcal{B} par un ensemble S est la structure dont le domaine est l'union de A et B où l'on identifie les éléments de S et les éléments restants sont disjoints. Atserias, Dawar et Grohe montrent que si \mathcal{C} est une classe de structures finies avec la propriété que chaque élément de \mathcal{C} a un *bottleneck* et telle que \mathcal{C} est close par union par ces *bottlenecks*, alors \mathcal{C} satisfait le théorème de préservation par extension.

Un hypergraphe β -acyclique \mathcal{H} est aussi α -acyclique et donc a un arbre de jointure T . Par l'argument dans la preuve du lemme 2 de [ADK06] appliqué

à T , on trouve un *bottleneck* parmi les sous-ensembles des hyperarêtes de \mathcal{H} . On peut même s'assurer que les *bottlenecks* sont des hyperarêtes de \mathcal{H} (par exemple, en appliquant leur argument avec $p + 1$ pétales). Il suffit donc de prouver que $\mathcal{C}_{\beta,\sigma}$ est close par union par hyperarête.

Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} des structures de $\mathcal{C}_{\beta,\sigma}$ et soit $\mathcal{I} = H(\mathcal{A})$ et $\mathcal{J} = H(\mathcal{B})$ leurs hypergraphes (β -acycliques) associés. On suppose qu'il y a une hyperarête S commune à \mathcal{I} et \mathcal{J} . S'il y a un β -cycle dans $\mathcal{I} \oplus_S \mathcal{J}$, il doit comporter des hyperarêtes :

- E_1, \dots, E_i de \mathcal{I} ,
- E_{i+1}, \dots, E_{j-1} de \mathcal{J} et
- E_j, \dots, E_n de \mathcal{I}

avec E_i et E_j intersectant S respectivement en x_i et x_{j-1} . Les hyperarêtes E_i et E_j ne peuvent pas être toutes deux égales à S (les E_l sont nécessairement différentes). Si $E_j = S$, alors $(E_1, \dots, E_i, x_i, E_j, \dots, E_n)$ est un β -cycle de \mathcal{I} . Si $E_i = S$, alors $(E_1, \dots, E_i, x_{j-1}, E_j, \dots, E_n)$ est un β -cycle de \mathcal{I} . Si E_i et E_j sont différentes de S , alors $(E_1, \dots, E_i, x_i, S, x_{j-1}, E_j, \dots, E_n)$ est un β -cycle de \mathcal{I} . Dans chaque cas, on a une contradiction. D'où $\mathcal{I} \oplus_S \mathcal{J}$ (qui est égale à $H(\mathcal{A} \oplus_S \mathcal{B})$) est β -acyclique. Donc $\mathcal{A} \oplus_S \mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{C}_{\beta,\sigma}$. \square

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Acyclicité et bases de données

Dans le domaine des bases de données, on s'intéresse notamment au problème suivant : étant données une structure relationnelle finie \mathcal{A} et une formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$, quels sont les uplets (a_1, \dots, a_n) tels que $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$? La question de la satisfaction d'un énoncé ϕ correspond au cas $n = 0$. Ce problème joue un rôle central en bases de données puisque cela revient à donner une réponse à une requête (la formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$) formulée par un utilisateur qui interroge une base de données (la structure \mathcal{A}). Ce problème est a priori très difficile (d'un point de vue algorithmique) dans le cas où $\phi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule du premier ordre quelconque et \mathcal{A} n'importe quelle structure finie (il est **PSPACE**-complet en la somme des tailles de \mathcal{A} et de ϕ). Même si la formule est supposée existentielle, ce problème reste difficile puisqu'il devient alors **NP**-complet. Pour contourner cette difficulté, des restrictions sur la formule ou sur la structure sont nécessaires. C'est pourquoi, de nombreuses méthodes de décomposition ont été introduites. En particulier, il existe diverses définitions paramétrées par un certain entier k ayant pour but de quantifier l'acyclicité de la formule (c.-à-d. de l'hypergraphe formé par ces atomes) ou de la structure. Ce "degré" d'acyclicité k

est alors appelé la largeur de la décomposition. On peut par exemple citer la *treewidth* (largeur d'arbre, cf. section 2.4), la *clique-width* (cf. [CO00]), la *query-width* (cf. [CR97]), la *branchwidth* (cf. [RS91]), l'*hypertreewidth* et la *generalized hypertreewidth* (cf. [GLS02]), ainsi que la *component hypertreewidth* (cf. [GMS07]). Cela permet alors de raisonner à k fixé et dans certains cas de réduire la complexité du problème initial. L'un des cas de base est celui des requêtes conjonctives acycliques : si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ est existentielle positive et sans connecteur \vee et que l'hypergraphe formé par ses atomes a un arbre de jointure, alors le problème de requête se résout en temps polynomial (il est même **LogCFL**-complet, cf. [GLS98]). Plus généralement, pour la plupart des notions précédentes, lorsque k est fixé (considéré comme une constante pour la complexité) on peut détecter et évaluer les requêtes de largeur de décomposition au plus k en temps polynomial. La méthode consistant à fournir des algorithmes efficaces pour détecter et évaluer des instances de formules ayant une petite largeur k se montre très utile en pratique puisque la plupart des requêtes formulées par des utilisateurs pour leurs usages habituels rentrent dans ce cadre. Pour une étude approfondie des méthodes de décomposition, on pourra consulter [GLS00] ou [Mik08].

Dans de nombreux cas, comme celui de la *treewidth*, la *query-width*, l'*hypertreewidth*, la *generalized hypertreewidth* et la *component hypertreewidth*, la décomposition associée est définie par l'existence d'un arbre de jointure dont les sommets sont formés d'au plus k sommets et/ou hyperarêtes de l'hypergraphe considéré. À cela s'ajoute bien sûr une condition pour que la forme de l'hypergraphe considéré influe sur la largeur des décompositions possibles : chaque hyperarête doit être incluse dans au moins un sommet de l'arbre de jointure. Sans rentrer dans les détails de chaque variante possible, on peut remarquer que, comme un hypergraphe a un arbre de jointure si et seulement si il est α -acyclique, le cas de base (hypergraphes de largeur de décomposition égale à 1) correspond aux hypergraphes α -acycliques. Comme déjà remarqué, cette notion n'est pas héréditaire. Plus généralement, la no-

tion de largeur de décomposition inférieure à k n'est pas héréditaire (sauf pour la *treewidth*). En effet, un hypergraphe de largeur de décomposition au plus k peut avoir des sous-hypergraphes de largeur de décomposition plus grande que k . Comme la détection et l'évaluation de requêtes de largeur bornée peut déjà se faire de manière efficace, un objectif possible serait d'avoir en plus des décompositions plus "régulières", héréditaires par exemple. C'est pourquoi, on pourrait essayer de définir des décompositions ayant pour cas de base des notions héréditaires comme la β ou la γ -acyclicité. Citons deux options envisageables inspirées des résultats de cette thèse.

1. Comme les hypergraphes γ -acycliques sont ceux ayant un arbre de jointure à branches disjointes pour tout choix de racine (cf. section 2.2), on pourrait essayer de définir des méthodes de décomposition avec la condition supplémentaire que, pour suffisamment de choix de racines possibles, il existe une décomposition dont l'arbre de jointure associé est à branches disjointes. Il existe différentes façons de définir ces choix de racines possibles, par exemple : toute hyperarête de l'hypergraphe est incluse dans la racine d'une décomposition à branches disjointes. A priori, on obtient dans tous les cas une notion de largeur de décomposition telle que les requêtes de largeur bornée sont facilement évaluables. Ce qui demande du travail est de les repérer de façon efficace et de savoir si la notion de largeur inférieure à k est bien héréditaire.
2. Comme il existe des règles définies par des formules du premier ordre $\phi_\beta(x)$ et $\phi_\gamma(x)$ permettant de décider la β et la γ -acyclicité (cf. section 2.3), il serait peut-être intéressant de définir des formules $\phi_{\beta,k}(x)$ et $\phi_{\gamma,k}(x)$ paramétrées par un entier k telles que : $\phi_{\beta,0}(x)$ et $\phi_{\gamma,0}(x)$ sont équivalentes à $\phi_\beta(x)$ et $\phi_\gamma(x)$ et, pour tout k , $\mathbf{DR}(\phi_{\beta,k}(x)) \subsetneq \mathbf{DR}(\phi_{\beta,k+1}(x))$ et $\mathbf{DR}(\phi_{\gamma,k}(x)) \subsetneq \mathbf{DR}(\phi_{\gamma,k+1}(x))$. Pour tout $\delta \in \{\beta, \gamma\}$ et tout entier k , si $\phi_{\delta,k}(x)$ est universelle, alors l'ensemble des hypergraphes de largeur au plus k (c.-à-d. $\mathbf{DR}(\phi_{\delta,k}(x))$) est bien héréditaire

et reconnaissable en temps polynomial (cf. proposition 3.14). Cette fois, la question est de savoir si les requêtes de largeur bornée sont évaluable en temps polynomial et si les ensembles $\mathbf{DR}(\phi_{\delta,k}(x))$ capturent suffisamment d'hypergraphes comparativement aux méthodes de décomposition habituelles.

5.2 Règles destructrices

Dans le chapitre 3, on montre quels fragments de \mathbf{FO} permettent de définir en termes de règles des propriétés nécessairement dans \mathbf{PTIME} . Cependant, parmi les fragments de \mathbf{DR} contenant des propriétés \mathbf{NP} -complètes, il existe également des propriétés décidables en temps polynomial et qui n'appartiennent pas à un fragment inclus dans \mathbf{PTIME} . Par exemple, l'ensemble \mathcal{P}_α des hypergraphes α -acycliques est dans $\exists^*\forall^*\mathbf{DR}^1$ et pas dans $\forall^*\mathbf{DR}^1$ (cf. exemple 3.5). Il n'est pas non plus dans \mathbf{DR}^2 sans quantificateur ni dans $\exists^*\mathbf{DR}^1$. En effet, supposons que \mathcal{P}_α soit égal à $\mathbf{DR}(\phi(x,y))$ avec $\phi(x,y)$ sans quantificateur ou à $\mathbf{DR}(\psi(x))$ avec $\psi(x)$ existentielle. La $\{\in\}$ -structure $\mathcal{A} := (\{a, b\} \mid \{(a, b)\})$ est un hypergraphe α -acyclique, c'est-à-dire que $\mathcal{A} \in \mathcal{P}_\alpha$. Comme $\phi(x,y)$ et $\psi(x)$ sont préservées par extension, on vérifie facilement que la structure $(\{a, b, c, d\} \mid \{(a, b), (b, c), (c, d)\})$ est aussi dans $\mathbf{DR}(\phi(x,y))$ et $\mathbf{DR}(\psi(x))$. C'est une contradiction dans les deux cas parce que cette structure n'est même pas un hypergraphe. On propose ici quelques pistes pour être capable de détecter davantage de propriétés appartenant à \mathbf{PTIME} et définissables par des règles destructrices.

Cas particuliers. La classification du théorème 3.8 concerne la classe de tous les graphes orientés. En effet, par définition, $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ est l'ensemble de **toutes** les structures finies telles que l'application successive de la règle définie par $\phi(x_1, \dots, x_k)$ mène à la structure vide. On peut donc se poser la question de la complexité de $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ lorsqu'on restreint

la classe des structures auxquelles on applique la règle, c.-à-d. la complexité du problème “ $\mathcal{A} \in \mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k))$ ” sachant que \mathcal{A} appartient déjà à une certaine classe \mathcal{C} . Par exemple, considérons la classe \mathcal{C}_h des hypergraphes vue comme la classe des $\{\in\}$ -structures finies qui ne contiennent pas de points a, b et c tels que $a \in b \in c$. Si on obtenait une classification des fragments de **FO** pour lesquels $\mathbf{DR}(\phi(x_1, \dots, x_k)) \cap \mathcal{C}_h$ est toujours dans **PTIME**, il est probable qu’elle soit différente de celle du théorème 3.8. En particulier, la propriété \mathcal{P}_α serait peut-être dans un tel fragment. Par ailleurs, dans les preuves de **NP**-complétude de la section 3.2, la présence de boucles et l’orientation des arêtes semblent jouer un rôle essentiel. Il est donc possible que l’on obtienne des classifications différentes en fonction de la présence de boucles et du fait que les graphes considérés soient orientés ou non. Remarquons pour illustrer que la distinction entre le cas des graphes (non orientés sans boucle) et les autres cas est décisive dans [GKS00].

Variantes. Une autre optique serait de donner une définition différente pour les règles destructrices qui permette d’exprimer seulement des propriétés dans **PTIME**. Une technique possible est de donner une règle déterministe pour l’application des règles (comme les règles avec unicité de la section 3.4). Par exemple, on peut décider d’appliquer la règle de manière simultanée : on retire à chaque application de la règle tous les éléments a de la structure qui satisfont $\phi(a)$. Avec cette définition, on capture, entre autres, toutes les propriétés du premier ordre. On peut aussi décider d’ajouter des variables libres aux propriétés définies. Pour les interpréter, on aurait par exemple $(\mathcal{A}, a) \in \mathbf{DR}(\phi(x, y))(y)$ si appliquer successivement la règle “retirer un élément u différent de a tel que $\mathcal{A} \models \phi(u, a)$ ” mène à la sous-structure de domaine $\{a\}$. Cela permet alors de quantifier sur ces variables. Remarquons également que, lorsqu’on retire un point via une règle, on ne garde pas d’information concernant la structure originale. On pourrait donc ajouter la possibilité de garder en mémoire les éléments déjà retirés. On peut facilement

montrer que cet ajout de mémoire utilisé dans le cadre des règles simultanées avec variables libres permet par exemple de définir la clôture transitive de toute formule $\chi(x, y)$. De plus, ce formalisme de règles destructrices définit bien uniquement des propriétés décidables en temps polynomial.

Bibliographie

- [AB09] S. ARORA et B. BARAK : *Computational Complexity : A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [ADG08] A. ATSERIAS, A. DAWAR et M. GROHE : Preservation under extensions on well-behaved finite structures. *SIAM J. on Computing*, 38:1364–1381, 2008.
- [ADK06] A. ATSERIAS, A. DAWAR et P. G. KOLAITIS : On preservation under homomorphisms and unions of conjunctive queries. *J. of the ACM*, 53:208–237, 2006.
- [AG87] M. AJTAI et Y. GUREVICH : Monotone versus positive. *J. of the ACM*, 34:1004–1015, 1987.
- [AG97] N. ALECHINA et Y. GUREVICH : Syntax vs semantics on finite structures. *In Structures in logic and computer science*, pages 14–33. Springer, 1997.
- [BDG07] G. BAGAN, A. DURAND et E. GRANDJEAN : On acyclic conjunctive queries and constant delay enumeration. *In Proceedings of the 16th EACSL Annual Conference on Computer Science and Logic (CSL 2007)*, numéro 4646 de LNCS, pages 208–222, 2007.
- [BE97] H. L. BODLAENDER et J. ENGELFRIET : Domino treewidth. *J. of algorithms*, 24:94–123, 1997.
- [Ber76] C. BERGE : *Graphs and Hypergraphs*. North-Holland, 1976.

- [BFM⁺81] C. BEERI, R. FAGIN, D. MAIER, A. O. MENDELZON, J. D. ULLMAN et M. YANNAKAKIS : Properties of acyclic database schemes. *In 13th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 355–362, 1981.
- [BK80] A. E. BROUWER et A. W. J. KOLEN : A super-balanced hypergraph has a nest point. Rapport technique, Math. centr. report ZW146, Amsterdam, 1980.
- [Bol02] B. BOLLOBÁS : *Modern Graph Theory*. Springer, 2002.
- [CL03a] R. CORI et D. LASCAR : *Logique mathématique*, volume 1. Dunod, 2003.
- [CL03b] R. CORI et D. LASCAR : *Logique mathématique*, volume 2. Dunod, 2003.
- [CMSS08] S. CARACCILO, G. MASBAUM, A. D. SOKAL et A. SPORTIELLO : A randomized polynomial-time algorithm for the spanning hypertree problem on 3-uniform hypergraphs. arXiv :0812.3593v1, 2008.
- [CO00] B. COURCELLE et S. OLARIU : Upper bounds to the clique-width of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 101:77–114, 2000.
- [Coo71] S. COOK : The complexity of theorem proving procedures. *In Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 151–158, 1971.
- [CR97] C. CHEKURI et A. RAJARAMAN : Conjunctive query containment revisited. *In Proceedings of the 6th International Conference on Database Theory (ICDT'97)*, numéro 1186 de LNCS, pages 130–144, 1997.
- [Daw07] A. DAWAR : Finite model theory on tame classes of structures. *In Proceedings of the 32nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2007)*, LNCS, pages 2–12, 2007.

- [Daw08] A. DAWAR : Homomorphism preservation on quasi-wide classes. arXiv :0811.4497v2, 2008.
- [Die05] R. DIESTEL : *Graph Theory*. Springer, 2005.
- [DM82] A. D’ATRI et M. MOSCARINI : Acyclic hypergraphs : their recognition and top-down versus bottom-up generation. Rapport technique R. 29, Consiglio Nazionale Delle Ricerche, Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica, 1982.
- [Dur08] D. DURIS : Hypergraph acyclicity and extension preservation theorems. *In Proceedings of the 23rd Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2008)*, pages 418–427, 2008.
- [Dur10] D. DURIS : Destructive rule-based properties and first-order logic. *In Proceedings of SOFSEM 2010*, LNCS, 2010. À paraître.
- [EF99] H.-D. EBBINGHAUS et J. FLUM : *Finite model theory*. Springer, 1999.
- [EFT94] H.-D. EBBINGHAUS, J. FLUM et W. THOMAS : *Mathematical Logic*. Springer, 1994.
- [Ehr61] A. EHRENFEUCHT : An application of games to the completeness problem for formalized theories. *Fundamenta mathematicae*, 49: 129–141, 1961.
- [ER60] P. ERDÖS et R. RADO : Intersection theorems for systems of sets. *J. of London mathematical society*, 35:85–90, 1960.
- [Fag74] R. FAGIN : Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets. *In R. KARP, éditeur : Complexity of Computation*, volume 7 de *SIAM-AMS Proceedings*, pages 43–73, 1974.
- [Fag83] R. FAGIN : Degrees of acyclicity for hypergraphs and relational database schemes. *J. of the ACM*, 30(3):514–550, 1983.
- [Fra54] R. FRAÏSSÉ : Sur quelques classifications des systèmes de relations. *Université d’Alger, Publications Scientifiques, Série A*, 1:35–182, 1954.

- [GJ79] M. R. GAREY et D. S. JOHNSON : *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.
- [GK03] E. GRÄDEL et S. KREUTZER : Will deflation lead to depletion ? on non-monotone fixed point inductions. *In Proceedings of the 18th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2003)*, pages 158–167, 2003.
- [GKL⁺07] E. GRÄDEL, P. G. KOLAITIS, L. LIBKIN, M. MARX, J. SPENCER, M. Y. VARDI, Y. VENEMA et S. WEINSTEIN : *Finite Model Theory and Its Applications*. Springer, 2007.
- [GKS00] G. GOTTLOB, P. G. KOLAITIS et T. SCHWENTICK : Existential second-order logic over graphs : Charting the tractability frontier. *J. of the ACM*, 51:664–674, 2000.
- [GLS98] G. GOTTLOB, N. LEONE et F. SCARCELLO : The complexity of acyclic conjunctive queries. *In J. of the ACM*, pages 706–715, 1998.
- [GLS00] G. GOTTLOB, N. LEONE et F. SCARCELLO : A comparison of structural CSP decomposition methods. *Artificial Intelligence*, 124(2):243–282, 2000.
- [GLS02] G. GOTTLOB, N. LEONE et F. SCARCELLO : Hypertree decompositions and tractable queries. *J. of Computer and System Sciences*, 64(3):579–627, 2002.
- [GMS07] G. GOTTLOB, Z. MIKLOS et T. SCHWENTICK : Generalized hypertree decompositions : NP-hardness and tractable variants. *In Proceedings of the twenty-sixth ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART symposium on Principles of database systems (PODS '07)*, pages 13–22, 2007.
- [GP01] G. GOTTLOB et R. PICHLER : Hypergraphs in model checking : acyclicity and hypertree-width versus clique-width. *In Procee-*

- dings of the 28th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2001)*, numéro 2076 de LNCS, pages 708–719, 2001.
- [GR99] E. GRÄDEL et E. ROSEN : On preservation theorems for two-variable logic. *Mathematical logic quarterly*, 45:315–325, 1999.
- [Gra79] M. H. GRAHAM : On the universal relation. Rapport technique, University of Toronto, 1979.
- [HKH05] K. HIRATA, M. KUWABARA et M. HARAO : On finding acyclic subhypergraphs. *In Fundamentals of Computation Theory*, volume 3623 de LNCS, pages 491–503, 2005.
- [Hod93] W. HODGES : *Model Theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [Imm98] N. IMMERMANN : *Descriptive Complexity*. Springer, 1998.
- [Jun05] D. JUNGNIKKEL : *Graphs, Networks and Algorithms*. Springer, 2005.
- [Leh85] J. LEHEL : A characterization of totally balanced hypergraphs. *Discrete mathematics*, 57:59–65, 1985.
- [Lib04] L. LIBKIN : *Elements of finite model theory*. Springer, 2004.
- [Lie82] Y. E. LIEN : On the equivalence of database models. *J. of the ACM*, 29(2):333–363, 1982.
- [LL89] M. LEVENE et G. LOIZOU : gamma-acyclic database schemes and nested relations. *LNCS*, 361:313–323, 1989.
- [Lov80] L. LOVÁSZ : Matroid matching and some applications. *J. of Combinatorial Theory (B)*, 28:208–236, 1980.
- [Mik08] Z. MIKLÓS : *Understanding Tractable Decompositions for Constraint Satisfaction*. Thèse de doctorat, University of Oxford, 2008.
- [Nag79] M. NAGL : *Graph-Grammatiken : Theorie, Anwendungen, Implementierung*. Vieweg, 1979.

- [Pap94] C. H. PAPADIMITRIOU : *Computational Complexity*. Addison Wesley, 1994.
- [PY99] C. H. PAPADIMITRIOU et M. YANNAKAKIS : On the complexity of database queries. *J. of computer and system sciences*, 58:407–427, 1999.
- [Ros02] E. ROSEN : Some aspects of model theory and finite structures. *Bulletin of Symbolic Logic*, 8(3):380–403, 2002.
- [Ros08] B. ROSSMAN : Homomorphism preservation theorems. *J. of the ACM*, 55(3):1–53, July 2008.
- [RS84] N. ROBERTSON et P. D. SEYMOUR : Graph minors III : Planar tree-width. *J. of Combinatorial theory, Series B*, 36:49–64, 1984.
- [RS91] N. ROBERTSON et P.D. SEYMOUR : Graph minors X : Obstructions to tree-decomposition. *J. of Combinatorial Theory, Series B*, 52:153–190, 1991.
- [See85] D. SEESE : Tree-partite graphs and the complexity of algorithms. In L. BUDACH, éditeur : *Proceedings of Fundamentals of Computation Theory (FCT'85)*, numéro 199 de LNCS, pages 412–421, 1985.
- [Tai59] W. TAIT : A counterexample to a conjecture of Scott and Suppes. *J. of symbolic logic*, 24:15–16, 1959.
- [Tov84] C. A. TOVEY : A simplified NP-complete satisfiability problem. *Discrete applied mathematics*, 8(1):85–90, 1984.
- [TY84] R. E. TARJAN et M. YANNAKAKIS : Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs. *SIAM J. on computing*, 13:566–579, 1984.
- [Var95] M. Y. VARDI : On the complexity of bounded-variable queries. In *Proceedings of the Fourteenth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART*

Symposium on Principles of Database Systems (PODS'95), pages 266–276, 1995.

- [Yan81] M. YANNAKAKIS : Algorithms for acyclic database schemes. *In Proceedings of the 7th International Conference on Very Large Data Bases (VLDB 1981)*, pages 82–94, 1981.
- [YO79] C. T. YU et M. Z. OZSOYOGLU : An algorithm for tree-query membership of a distributed query. *In Proceedings of 1979 IEEE COMPSAC*, pages 306–312, 1979.
- [ZC02] H. ZHONGXIAO et Y. CHUNLONG : The existence condition of gamma-acyclic database schemes with MVDs constraints. *J. of Computer Science and Technology*, 17:517–521, 2002.

Index

- arbre de décomposition, 45
- arbre de jointure, 23

- branche, 19
- branches disjointes, 32

- clôture par sous-structure, 12
- clôture par union disjointe, 12
- confluence, 56
- Berge-cycle, 22
- γ -cycle, 25
- β -cycle, 23

- DR**, 53
- \mathbf{DR}^k , 53
- $Q_1 \dots Q_n \mathbf{DR}^k$, 55

- q -équivalence, \equiv_q , 14
- extension, 12

- graphe d'appartenance, 20
- graphe de Gaifman, 20

- $H(\mathcal{A})$, 20
- hypergraphe quotient, 43

- jeu EF, 15

- largeur d'arbre, 46

- modèle minimal, 80

- préservation par extension, **PE**, 15
- préservation par homomorphisme, 76
- préservation par
 - sous-structure, **PS**, 15

- k -quotient, 44
- quotient acyclique, 45

- racine, 19

- SAT, 18
- sous-structure, 12

- taille d'une structure, 11
- q -type, 14

- union disjointe, 12