

Université Paris Diderot (Paris 7)
École Doctorale Paris Centre

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Dimitri Ara

**Sur les ∞ -groupoïdes de Grothendieck
et une variante ∞ -catégorique**

dirigée par Georges MALTSINIOTIS

Soutenue le 10 septembre 2010 devant le jury composé de :

M. Clemens BERGER
M. Denis-Charles CISINSKI
M. Bernhard KELLER
M. Georges MALTSINIOTIS
M. François MÉTAYER
M. Carlos SIMPSON

Rapportée par :

M. Michael BATANIN
M. Clemens BERGER

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse, Georges Maltsiniotis, pour m'avoir appris tant de belles mathématiques, pour m'avoir consacré beaucoup de son temps sans compter, pour sa générosité et son honnêteté mathématiques, ainsi que pour son hospitalité.

Je remercie chaleureusement Michael Batanin et Clemens Berger, autant pour avoir accepté de rapporter ma thèse que pour les mathématiques profondes qu'ils ont développées et sur lesquelles mon travail s'appuie.

Je suis très heureux que Denis-Charles Cisinski, Bernhard Keller, François Métayer et Carlos Simpson aient accepté de faire partie de mon jury et je les remercie sincèrement pour cela.

Je tiens à remercier vivement Mark Weber pour les longs moments qu'il a passé à m'expliquer ses résultats, lesquels se sont révélés importants pour ma thèse.

Je remercie de nouveau Georges Maltsiniotis et Bernhard Keller pour l'organisation du groupe de travail *Algèbre et topologie homotopiques* au cours duquel j'ai tant appris ; ainsi que François Métayer pour avoir su créer une dynamique autour des catégories supérieures en organisant un groupe de travail sur ce sujet. J'en profite pour souligner le plaisir que j'ai eu à travailler avec les membres de ce groupe de travail. J'ai en particulier eu de nombreuses discussions fructueuses avec Albert Burroni, Jonathan Chiche, Jonas Frey, Paul-André Melliès et Samuel Mimram.

Je remercie tous les doctorants avec qui j'ai eu des conversations parfois mathématiques, souvent non mathématiques, et toujours passionnantes. Je tiens notamment à citer Thomas Bitoun, Luc Deléaval, Thomas Dedieu, Ngô Văn Đình, François Guignot, Erwan Huvuy, Mohedinne Imsatfia, Hussein Mourtada, Mounir Nisse, François Petit et Elhoim Sumano. J'adresse un merci particulier à Mounir Hajli avec qui j'ai tant échangé ces deux dernières années. شكرًا على كل شيء يا صديقي

Enfin, je voudrais profiter de cette occasion pour saluer Sleiman Yammine qui m'a ouvert les yeux sur ce que sont les mathématiques à une époque où je me destinais à un autre domaine.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	vii
1 ∞-catégories et ∞-groupoïdes stricts	1
1.1 Ensembles globulaires	1
1.2 Équivalences faibles de ∞ -groupoïdes stricts	4
1.3 La catégorie homotopique	8
1.4 Types d'homotopie et ∞ -groupoïdes stricts	10
1.5 Types d'homotopie et ∞ -groupoïdes quasi-stricts	17
2 Le langage globulaire	19
2.1 Extensions globulaires	19
2.2 La catégorie Θ_0	21
2.3 Description combinatoire de Θ_0	23
2.4 Lemmes sur les catégories au-dessous de Θ_0	30
2.5 Sommes globulaires généralisées	32
2.6 Complétion globulaire	36
2.7 Homogénéité	38
3 Les catégories Θ et $\tilde{\Theta}$	41
3.1 Extensions globulaires catégoriques et groupoïdales	41
3.2 La catégorie Θ	44
3.3 Description combinatoire de Θ	45
3.4 La catégorie $\tilde{\Theta}$	50
4 ∞-groupoïdes de Grothendieck	53
4.1 Cohérateurs et définitions	53
4.2 Quelques flèches structurales	55
4.3 Équivalences faibles	63
4.4 ∞ -groupoïde fondamental	67
4.5 La conjecture de Grothendieck	73

5	Cohérateurs de ∞-catégories et homogénéité	75
5.1	Θ est un pseudo-cohérateur de ∞ -catégories	75
5.2	Propriétés des adjonctions de relèvements	76
5.3	Homogénéité des complétions globulaires	80
5.4	Homogénéité des cohérateurs de ∞ -catégories	82
6	Dictionnaire ω-opéradique	85
6.1	Préliminaires monadiques	85
6.2	Globularité et extensions de Kan	87
6.3	Monade associée à une extension globulaire	91
6.4	ω -opérades	97
6.5	Extension globulaire associée à une monade	99
6.6	Équivalence avec les ω -opérades	104
6.7	Comparaison avec les ∞ -catégories de Batanin	109
7	Catégories test	117
7.1	Rappel sur les catégories test	117
7.2	La catégorie Θ est test	119
7.3	Les catégories Θ et $\tilde{\Theta}$ sont test strictes	122
	Bibliographie	143
	Index des notations	146
	Index terminologique	148

Introduction

1-types d'homotopie et groupoïdes

À tout espace topologique X , on associe un groupoïde $\Pi_1(X)$, appelé le groupoïde fondamental de X , défini de la manière suivante : les objets de $\Pi_1(X)$ sont les points de X , et ses morphismes sont les chemins de X à homotopie fixant le bord près. On obtient ainsi un foncteur

$$\Pi_1 : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Grp}$$

de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupoïdes. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est une 1-équivalence faible si l'application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ est une bijection et si pour tout point x de X , le morphisme $\pi_1(f, x) : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme. Rappelons que si G est un groupoïde et x est un objet de G , on note $\pi_0(G)$ l'ensemble des composantes connexes de G et $\pi_1(G, x)$ le groupe des automorphismes de x . De manière analogue au cas topologique, on dit qu'un foncteur $f : G \rightarrow H$ entre groupoïdes est une équivalence faible si l'application $\pi_0(f) : \pi_0(G) \rightarrow \pi_0(H)$ est une bijection et si pour tout objet x de G , le morphisme $\pi_1(f, x) : \pi_1(G, x) \rightarrow \pi_1(H, f(x))$ est un isomorphisme. On montre que f est une équivalence faible de groupoïdes si et seulement si f est une équivalence de catégories. Le foncteur Π_1 induit un foncteur

$$\bar{\Pi}_1 : \mathcal{Hot}_1 \rightarrow \mathcal{Ho}(\mathcal{Grp}),$$

où \mathcal{Hot}_1 (respectivement $\mathcal{Ho}(\mathcal{Grp})$) désigne la catégorie obtenue à partir de \mathcal{Top} (respectivement \mathcal{Grp}) en inversant formellement les 1-équivalences faibles (respectivement les équivalences faibles de groupoïdes).

Théorème. *Le foncteur $\bar{\Pi}_1$ est une équivalence de catégories.*

En d'autres termes, l'étude des 1-types d'homotopie est équivalente à celle des groupoïdes à équivalence près.

Types d'homotopie et ∞ -groupoïdes

En 1983, Grothendieck écrit une lettre à Quillen qui deviendra le point de départ de *Pursuing Stacks* ([17]). Dans cette lettre, Grothendieck propose de fonder la théorie de l'homotopie sur une généralisation du théorème précédent. Il conjecture l'existence d'une

catégorie $\infty\text{-Grpf}$ des ∞ -groupeïdes, d'une notion d'équivalence faible entre ∞ -groupeïdes et d'un foncteur ∞ -groupeïde fondamental

$$\Pi_\infty : \mathcal{Top} \rightarrow \infty\text{-Grpf},$$

qui induirait une équivalence de catégories

$$\overline{\Pi}_\infty : \text{Hot} \rightarrow \text{Ho}(\infty\text{-Grpf}),$$

où Hot (respectivement $\text{Ho}(\infty\text{-Grpf})$) désigne la catégorie obtenue à partir de \mathcal{Top} (respectivement $\infty\text{-Grpf}$) en inversant formellement les équivalences faibles topologiques (respectivement les équivalences faibles de ∞ -groupeïdes). L'étude des types d'homotopie serait ainsi ramenée à celle des ∞ -groupeïdes à équivalence près.

Grothendieck est conscient du fait que la notion de ∞ -groupeïde strict, déjà bien connue à l'époque, ne permet pas de réaliser ce programme. En effet, il sait que les ∞ -groupeïdes stricts simplement connexes ne peuvent décrire que des types d'homotopie produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Par ailleurs, Grothendieck est guidé par l'idée suivante. À un espace X , il veut associer un ∞ -graphe dont les n -flèches sont les applications continues du disque de dimension n dans X . Ainsi, les 0-flèches sont les points de X , les 1-flèches les chemins de X , les 2-flèches les homotopies entre chemins de X fixant les extrémités, les 3-flèches les homotopies entre homotopies, etc. Ces homotopies se composent de manière non canonique, et ces compositions ne vérifient les relations imposées dans la définition des ∞ -groupeïdes stricts qu'à des homotopies de cohérence près, lesquelles homotopies vérifient des relations à des homotopies supérieures près, etc. Il est ainsi naturellement conduit à sortir du monde des ∞ -groupeïdes stricts et propose donc de formuler une définition de ∞ -groupeïde faible.

Maltsiniotis a remarqué en 2006 que les réflexions exposées dans la lettre à Quillen contiennent une définition parfaitement précise d'une notion de ∞ -groupeïde faible que nous appellerons ∞ -groupeïde de Grothendieck. Cette définition est présentée dans [33]. Dans cette thèse, nous nous écartons légèrement de la version historique en remplaçant les sommes amalgamées itérées standard de Grothendieck par des sommes globulaires. Cette modification est déjà présente dans [34].

La définition de ∞ -groupeïde faible de Grothendieck

La définition de Grothendieck s'appuie sur l'intuition suivante. Donnons-nous G un ∞ -groupeïde strict et X un schéma de composition globulaire décoré de flèches de G . Soit (Λ, Λ') un couple de n -flèches de G construites à partir du schéma de composition X en utilisant les compositions, les inverses et les unités de G . Les axiomes des ∞ -groupeïdes entraînent que si les n -flèches Λ et Λ' ont même source et même but, alors $\Lambda = \Lambda'$. Si le ∞ -groupeïde G n'est plus supposé strict, on s'attend seulement à ce qu'il existe une

$(n + 1)$ -flèche de cohérence de source Λ et de but Λ' . Par exemple, soit

$$X = A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \downarrow \alpha \xrightarrow{g} \\ \downarrow \beta \\ \xrightarrow{i} \downarrow \gamma \xrightarrow{j} \end{array} C \begin{array}{c} \xrightarrow{l} \downarrow \delta \xrightarrow{k} \\ \downarrow \varepsilon \\ \xrightarrow{m} \end{array} D \quad .$$

Notons \circ la composition verticale des 2-flèches, $*$ la composition horizontale des 2-flèches et 1_f la 2-flèche identité de f . Soient

$$\Lambda = ((\varepsilon \circ \delta) * ((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)) * 1_f \quad \text{et} \quad \Lambda' = ((\varepsilon * \gamma) \circ (\delta * (\beta \circ \alpha))) * 1_f.$$

Ces deux morphismes ont pour source $(kg)f$ et pour but $(mj)f$. Le principe général énoncé ci-dessus affirme donc que ces deux morphismes sont égaux. On vérifie immédiatement que cela résulte de la loi de l'échange et de l'associativité de la composition verticale des 2-flèches. Dans un ∞ -groupeïde faible, on demandera l'existence d'une 3-flèche

$$((\varepsilon \circ \delta) * ((\gamma \circ \beta) \circ \alpha)) * 1_f \Rrightarrow ((\varepsilon * \gamma) \circ (\delta * (\beta \circ \alpha))) * 1_f.$$

Pour formaliser cette idée, Grothendieck propose de construire une catégorie C_∞ décrivant la structure d'un ∞ -cogroupeïde faible « universel » et de définir un ∞ -groupeïde faible comme un préfaisceau sur C_∞ possédant certaines propriétés d'exactitude à gauche. La catégorie C_∞ contiendra des objets D_i jouant le rôle d'objet des i -flèches et des morphismes $\sigma_i, \tau_i : D_{i-1} \rightarrow D_i$ permettant de parler de la source et du but d'une i -flèche. Elle contiendra également certaines limites inductives de D_i permettant de parler de schémas de composition. On appellera sommes globulaires ces limites inductives, et produits globulaires les limites projectives duales. La somme amalgamée $(D_i, \sigma_i) \amalg_{D_{i-1}} (\tau_i, D_i)$, qui permet d'exprimer que deux i -flèches sont composables verticalement (c'est-à-dire en codimension 1), est un exemple de somme globulaire. La condition d'exactitude que Grothendieck demande à un préfaisceau sur C_∞ pour être un ∞ -groupeïde faible est d'envoyer les sommes globulaires sur des produits globulaires.

La catégorie C_∞ dépendra de choix qui correspondent à différentes manières d'axiomatiser les cohérences supérieures. Grothendieck appelle « coherator » une catégorie C_∞ qui convient pour fonder la notion de ∞ -groupeïde faible. Suivant [33], nous traduirons ce terme par « cohérateur ».

Un cohérateur est une catégorie C_∞ qui s'obtient comme limite inductive d'une tour de catégories

$$C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \cdots \rightarrow C_n \rightarrow \cdots,$$

vérifiant certaines propriétés. La catégorie C_0 est la catégorie universelle possédant des sommes globulaires. Nous noterons Θ_0 cette catégorie suivant Berger dans [8]. Il faut penser à cette catégorie comme à la catégorie des schémas de composition globulaires. Les catégories C_n étant au-dessous de Θ_0 , elles contiennent des objets D_i et des morphismes

$\sigma_i, \tau_i : D_{i-1} \rightarrow D_i$. On demande que les catégories C_n admettent des sommes globulaires et que les foncteurs $C_n \rightarrow C_{n+1}$ y commutent. Avant de formuler les propriétés que doit vérifier cette tour, introduisons quelques définitions.

On dira qu'un couple de flèches $(f, g) : D_i \rightarrow S$ dans C_n est admissible si, ou bien $i = 0$, ou bien

$$f\sigma_{i-1} = g\sigma_{i-1} \quad \text{et} \quad f\tau_{i-1} = g\tau_{i-1}.$$

Un tel couple correspond à deux manières de produire une i -flèche à partir de flèches disposées selon le schéma de composition S en utilisant des compositions et des cohérences, de sorte que les deux i -flèches produites aient même source et même but. Un relèvement d'un tel couple $(f, g) : D_i \rightarrow S$ est une flèche $h : D_{i+1} \rightarrow S$ telle que

$$h\sigma_i = f \quad \text{et} \quad h\tau_i = g.$$

Un relèvement h correspond donc à une manière de produire une $(i+1)$ -flèche, à partir de flèches disposées selon le schéma de composition S , de sorte que la source (respectivement le but) de cette $(i+1)$ -flèche soit la i -flèche produite par f (respectivement par g).

On impose à la tour définissant un cohérateur les deux propriétés suivantes :

1. tout couple admissible de C_∞ admet un relèvement dans C_∞ ;
2. il existe un ensemble de couples admissibles F_n de C_n , tel que C_{n+1} soit la catégorie obtenue formellement à partir de C_n en gardant les même objets et en ajoutant des flèches, de sorte que tout couple admissible de F_n admette un relèvement et que le foncteur $F_n \rightarrow F_{n+1}$ (qui est l'identité sur les objets) préserve les sommes globulaires.

La première propriété correspond à l'intuition qu'on a expliqué au début de cette section et la seconde au fait qu'un cohérateur est universel pour cette propriété. Comme annoncé, ces propriétés ne caractérisent *pas* C_∞ à équivalence de catégories près. La catégorie C_∞ dépend du choix des F_n dans la condition 2 ci-dessus. Dans la suite, on fixe un cohérateur C_∞ et on notera $\infty\text{-Grpf}$ la catégorie des ∞ -groupeïdes de Grothendieck (de type C_∞), c'est-à-dire des préfaisceaux sur C_∞ envoyant les sommes globulaires sur des produits globulaires.

La conjecture de Grothendieck

Toujours dans sa lettre à Quillen, Grothendieck construit, de manière non canonique, un ∞ -cogroupeïde faible en son sens, dans la catégorie des espaces topologiques, c'est-à-dire un foncteur (non canonique) de C_∞ vers \mathcal{Top} commutant aux sommes globulaires. Ce foncteur induit un couple de foncteurs adjoints

$$R : \infty\text{-Grpf} \rightarrow \mathcal{Top}, \quad \Pi_\infty : \mathcal{Top} \rightarrow \infty\text{-Grpf}.$$

Explicitement, le foncteur Π_∞ envoie un espace topologique X sur le ∞ -groupeïde

$$\mathcal{C}_\infty^\circ \rightarrow \mathcal{Top}^\circ \xrightarrow{X} \mathcal{E}ns,$$

où on a noté X le préfaisceau représenté par X . C'est le ∞ -groupeïde fondamental de X . Notons $\text{Ho}(\infty\text{-Grpf})$ la catégorie obtenue à partir de $\infty\text{-Grpf}$, en inversant formellement les morphismes de ∞ -groupeïdes faibles qui s'envoient sur une équivalence faible topologique par R . La conjecture de Grothendieck peut alors se formuler ainsi.

Conjecture (Grothendieck). *Le foncteur*

$$\overline{R} : \text{Ho}(\infty\text{-Grpf}) \rightarrow \text{Hot}$$

induit par R , est une équivalence de catégories, et le foncteur Π_∞ induit un quasi-inverse

$$\overline{\Pi}_\infty : \text{Hot} \rightarrow \text{Ho}(\infty\text{-Grpf}).$$

Les ∞ -catégories de Grothendieck-Maltsiniotis

Les ∞ -groupeïdes de Grothendieck ne sont pas définis comme des ∞ -catégories faibles vérifiant une propriété d'inversibilité des flèches. Grothendieck ne définit pas de notion de ∞ -catégorie faible dans sa lettre. En 2006, Maltsiniotis a remarqué qu'une variation sur la définition de ∞ -groupeïde de Grothendieck conduit à une notion de ∞ -catégorie faible que nous appellerons ∞ -catégorie de Grothendieck-Maltsiniotis. Cette nouvelle définition est exposée dans [34]. Entre temps, de nombreuses autres définitions ont été proposées. Citons, par exemple, les définitions de Street ([39], puis [40]), de Joyal ([23]), de Baez et Dolan ([2]), de Batanin ([3]), de Tamsamani ([41]), de Penon ([36]), de Hermida, Makkai et Power ([19], [20] et [21]) et de Leinster ([30]). Un des objets principaux de cette thèse est de comprendre les liens entre les ∞ -catégories de Grothendieck-Maltsiniotis et les ∞ -catégories de Batanin-Leinster.

Pour effectuer cette comparaison, on introduit dans cette thèse les notions suivantes. On appelle préthéorie globulaire, une catégorie C au-dessous de Θ_0 , telle que le foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$ soit fidèle et bijectif sur les objets. Si de plus, C admet des sommes globulaires (et que le foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$ y commute), on dit que C est une théorie globulaire. Si C est une théorie globulaire, on appelle préfaisceaux globulaires sur C les préfaisceaux sur C qui transforment les sommes globulaires en des produits globulaires. Un exemple important de théorie globulaire est la catégorie Θ introduite par Joyal dans [23]. Les préfaisceaux globulaires sur Θ sont exactement les ∞ -catégories strictes. Par ailleurs, dans Θ , tout morphisme se décompose de manière unique en un morphisme dit algébrique, suivi d'un morphisme globulaire (c'est-à-dire provenant de Θ_0). On dira qu'une préthéorie globulaire C au-dessus de Θ est homogène sur Θ , si toute flèche de C se décompose de manière unique en une flèche au-dessus d'une flèche algébrique de Θ , suivi d'une flèche globulaire.

Un des résultats importants de cette thèse est le fait que la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ est équivalente à la catégorie des ω -opérades de Batanin. Ce résultat est fortement inspiré des travaux de Berger dans [8] et [7], et de ceux de Weber dans [42]. Explicitement, on définit un foncteur M qui envoie une théorie globulaire C homogène sur Θ vers la monade associée aux préfaisceaux globulaires sur C (voir la section 6.3 et notamment la proposition 6.3.4, ainsi que la proposition 6.4.6), un foncteur

T dans l'autre sens (voir la section 6.5 et notamment la proposition 6.5.11) et on montre que M est une équivalence de catégories de quasi-inverse T (voir le théorème 6.6.8). De plus, si C est une théorie globulaire homogène sur Θ , les catégories des préfaisceaux globulaires sur C et des algèbres sur la ω -opérade $M(C)$ sont canoniquement équivalentes.

Pour comparer les ∞ -catégories de Grothendieck-Maltsiniotis et les ∞ -catégories de Batanin, on voudrait associer à tout cohérateur (de ∞ -catégories) une ω -opérade. Par le théorème énoncé dans le paragraphe précédent, il suffit donc de montrer que tout cohérateur est une théorie globulaire homogène sur Θ . Ce résultat est obtenu dans cette thèse sous une hypothèse minimale sur le cohérateur. Le résultat clé permettant d'établir ce fait est le théorème 5.3.1. Celui-ci affirme que la complétion globulaire d'une préthéorie globulaire C homogène sur Θ , est elle-même homogène sur Θ , si les flèches globulaires de C sont des monomorphismes. On en déduit que tout cohérateur C , défini à partir d'une tour C_* telle que les flèches globulaires soient scindées dans C_1 , est homogène sur Θ (voir le théorème 5.4.4). Cette hypothèse sur la tour C_* est peu restrictive (voir la remarque 5.4.2). En particulier, les trois cohérateurs canoniques, introduits dans la section 4.1, sont homogènes sur Θ .

Ainsi, en vertu des théorèmes 6.6.8 et 5.3.1, on peut associer à (presque) tout cohérateur une ω -opérade. Dans la section 6.7, on étudie les propriétés de cette ω -opérade. On appelle contraction sur une théorie globulaire C homogène sur Θ , la donnée pour tout couple admissible, d'un relèvement de ce couple. On dit qu'une théorie globulaire homogène sur Θ est un pseudo-cohérateur si elle admet une contraction. On démontre que l'équivalence de catégories du théorème 6.6.8 s'étend en une équivalence de catégories entre la catégorie des pseudo-cohérateurs homogènes sur Θ et la catégorie des ω -opérades contractiles (voir le corollaire 6.7.12). On en déduit que la ω -opérade associée à (presque) tout cohérateur, est faiblement initiale dans la catégorie des ω -opérades contractiles (voir le théorème 6.7.13). Enfin, on montre, sous une conjecture technique, qu'un des cohérateurs canoniques, qu'on appellera cohérateur de Batanin-Leinster, est canoniquement munie d'une contraction. On en déduit que la ω -opérade associée à ce cohérateur est canoniquement équivalente à la ω -opérade L , introduite par Leinster dans la section 9.2 de [29] et décrite explicitement par Cheng dans [12] (voir la proposition 6.7.15). En particulier, toujours sous cette hypothèse technique, la catégorie des ∞ -catégories de Grothendieck-Maltsiniotis sur le cohérateur de Batanin-Leinster est canoniquement équivalente à la catégorie des ∞ -catégories de Batanin-Leinster (voir le corollaire 6.7.16).

Le programme de Maltsiniotis et les catégories test

Dans [33], Maltsiniotis expose une série de conjectures dont la conjonction entraîne la conjecture de Grothendieck. Ces conjectures s'appuient sur la théorie des catégories test introduite par Grothendieck dans [17], exposée par Maltsiniotis dans [32] et poursuivie par Cisinski dans [13]. La première conjecture affirme que tout cohérateur (pour une théorie de ∞ -groupoïdes) est une catégorie test. Cela signifie entre autre que la catégorie homotopique des préfaisceaux sur un cohérateur serait canoniquement équivalente à la catégorie homotopique. De plus, par des résultats de [13], il existerait une structure

de catégorie de modèles de Quillen, dite de Grothendieck-Cisinski, sur la catégories des préfaisceaux sur un cohéracteur. On pourrait alors espérer utiliser les techniques de catégories de modèles pour démontrer la conjecture de Grothendieck.

Une modeste contribution à ce programme est apportée dans cette thèse. On démontre que la catégorie Θ est une catégorie test (voir le théorème 7.2.8). Ce résultat à également été établi par Maltiniotis et Cisinski dans [15]. La preuve que nous donnons dans la section 7.2 est entièrement différente. Elle est inspirée de la démonstration de Grothendieck du caractère test de la catégorie simpliciale Δ (voir [17] ou le lemme 1.5.12 de [32]). L'ingrédient principal est le foncteur de troncation $\Theta \rightarrow \Delta$ qui permet de ramener certains calculs dans Θ à des calculs dans Δ .

On démontre également que la catégorie $\tilde{\Theta}$, variante de la catégorie Θ dans le contexte des ∞ -groupoïdes stricts, est une catégorie test (voir le théorème 7.3.15). Pour obtenir ce résultat, on utilise la technique des décalages scindables que Cisinski et Maltiniotis ont introduite dans [15] pour démontrer que Θ est une catégorie test. Leur preuve s'appuie sur la description de Θ comme produit en couronne itérée (voir [9]). La catégorie $\tilde{\Theta}$ n'admettant pas une telle description, leur preuve ne s'adapte pas. Dans la section 7.3, on donne des formules explicites, inspirées de [15], permettant de définir un décalage sur $\tilde{\Theta}$ (voir notamment les propositions 7.3.5 et 7.3.11). Ceci nous permet de démontrer uniformément le caractère test des catégories Θ et $\tilde{\Theta}$ (voir le théorème 7.3.15). De plus, on déduit de ce décalage que le foncteur canonique $i : \Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$ est asphérique (voir le théorème 7.3.17), c'est-à-dire qu'un morphisme de préfaisceaux est une équivalence faible de préfaisceaux sur $\tilde{\Theta}$ si et seulement si sa restriction à Θ est une équivalence faible de préfaisceaux sur Θ . Cela entraîne que le foncteur de restriction i^* est une équivalence de Quillen à gauche entre les deux catégories de préfaisceaux munies de la structure de catégorie de modèles de Grothendieck-Cisinski.

Plan de la thèse

Chapitre 1. — Le but du premier chapitre est d'introduire les ∞ -groupoïdes stricts et d'expliquer en quoi ils sont insuffisants pour modéliser les types d'homotopie. Ce chapitre motive donc l'étude des ∞ -groupoïdes faibles.

La première section est consacrée aux définitions des ensembles globulaires, des ∞ -catégories strictes et des ∞ -groupoïdes stricts.

Dans la deuxième section, on étudie la notion d'équivalence faible entre ∞ -groupoïdes stricts. On démontre l'équivalence entre quatre notions d'équivalence faible.

Dans la troisième section, on définit la catégorie homotopique. On en profite pour introduire le vocabulaire des localisateurs et on rappelle les différentes descriptions de la catégorie homotopique.

La quatrième section est le coeur du chapitre. On y démontre une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des ∞ -groupoïdes stricts simplement connexes et la catégorie dérivée des groupes abéliens en degré homologique supérieur ou égal à 2. On en déduit que tout foncteur de réalisation raisonnable des ∞ -groupoïdes stricts vers la catégorie homotopique, envoie un ∞ -groupoïde connexe vers un espace dont le

revêtement universel est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. En particulier, un tel foncteur n'est pas essentiellement surjectif.

Enfin, dans la cinquième section, on fait le lien entre un résultat de Deligne et les ∞ -groupoïdes quasi-stricts, c'est-à-dire les ∞ -catégories *strictes* admettant des inverses faibles. Simpson a montré dans [37] que ces ∞ -groupoïdes sont insuffisants pour modéliser les types d'homotopie. Un résultat de Deligne sur les champs de Picard entraîne que les 3-groupoïdes quasi-stricts simplement connexes sont faiblement équivalents à des 3-groupoïdes stricts *via* un *pseudo-foncteur*. En particulier, les 3-groupoïdes quasi-stricts simplement connexes ne modélisent pas plus de types d'homotopie que les 3-groupoïdes stricts simplement connexes.

Chapitre 2. — Ce chapitre introduit le langage globulaire qui nous servira à formuler beaucoup des notions importantes de cette thèse.

Dans la première section, on définit la notion de somme globulaire et on appelle extensions globulaires les catégories, au-dessous de la catégorie globulaire \mathbb{G} , possédant de telles sommes. On introduit la catégorie des préfaisceaux globulaires sur une extension globulaire, c'est-à-dire des préfaisceaux sur une extension globulaire, transformant les sommes globulaires en des produits globulaires. On définira plus loin les ∞ -groupoïdes de Grothendieck comme les préfaisceaux globulaires sur une extension globulaire bien choisie.

Dans la deuxième section, on démontre l'existence d'une extension globulaire universelle Θ_0 . Cette extension globulaire universelle nous permet d'introduire le langage des préthéories et des théories globulaires.

Dans la troisième section, on détaille la description combinatoire de Berger de la catégorie Θ_0 , exposée dans [8]. On fait le lien avec la section précédente en montrant que cette catégorie combinatoire fournit bien l'extension globulaire universelle.

Dans la quatrième section, on compile des constructions et résultats techniques sur les catégories au-dessous de Θ_0 . Nous les utiliserons dans le chapitre 5 pour démontrer que les cohérateurs de ∞ -catégories sont homogènes sur Θ .

La cinquième section est consacrée à la notion de sommes globulaires généralisées. Celles-ci apparaissent par exemple dans la formulation de l'axiome de l'échange des ∞ -catégories strictes. On explique comment ces sommes se ramènent à des sommes globulaires usuelles. On fera un usage intensif de ces sommes globulaires généralisées dans les chapitres 5 et 6.

Dans la sixième section, on établit l'existence de la complétion globulaire, c'est-à-dire d'une extension globulaire universelle associée à toute catégorie au-dessous de Θ_0 . L'existence de cette complétion globulaire est nécessaire à la formulation de la définition des cohérateurs. Par ailleurs, on utilisera explicitement la construction de cette complétion globulaire pour démontrer l'homogénéité des cohérateurs de ∞ -catégories dans le chapitre 5.

Dans la septième section, on introduit la notion de préthéorie globulaire homogène, dont l'exemple fondamental est celui de la catégorie Θ de Joyal. Une préthéorie globulaire est dite homogène si tout morphisme admet une décomposition algébrique analogue à celle de Θ . On introduit également la notion relative de préthéorie globulaire homogène

sur une préthéorie globulaire. La catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ est un des objets centraux de cette thèse.

Chapitre 3. — Ce chapitre est consacré à la catégorie Θ de Joyal et à son analogue groupoïdal $\tilde{\Theta}$.

La première section introduit les notions d’extension globulaire catégorique et d’extension globulaire groupoïdale, qui nous serviront à formuler les propriétés universelles des catégories Θ et $\tilde{\Theta}$.

Dans la deuxième section, on formule le problème de l’existence d’une extension globulaire catégorique universelle et on montre que ce problème admet une solution.

Dans la troisième section, on détaille la description combinatoire de Berger de la catégorie Θ , exposée dans [8], et on vérifie que Θ est une théorie globulaire homogène. On démontre que cette catégorie est l’extension globulaire catégorique universelle au sens de la section précédente.

La quatrième section est consacrée à l’analogue groupoïdale $\tilde{\Theta}$ de la catégorie Θ . On démontre l’existence d’une extension globulaire groupoïdale universelle et c’est ainsi qu’on définit $\tilde{\Theta}$. On décrit également $\tilde{\Theta}$ comme une certaine sous-catégorie pleine de la catégorie des ∞ -groupoïdes stricts.

Chapitre 4. — Ce chapitre est consacré aux ∞ -groupoïdes de Grothendieck et au ∞ -groupoïde fondamental d’un espace topologique.

La première section introduit les notions de couple admissible pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories), de cohérateur de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) et on définit la catégorie des ∞ -groupoïdes de Grothendieck (respectivement des ∞ -catégories de Grothendieck-Maltsiniotis) comme la catégorie des préfaisceaux globulaires sur un cohérateur. On définit trois cohérateurs canoniques, dont le cohérateur de Batanin-Leinster qu’on retrouvera dans le chapitre 6.

Dans la deuxième section, on illustre la définition des ∞ -groupoïdes de Grothendieck en construisant certaines flèches structurales des ∞ -groupoïdes. En particulier, on montre que les ∞ -groupoïdes de Grothendieck possèdent toutes les compositions des ∞ -groupoïdes stricts (c’est-à-dire que ce sont des ∞ -prégroupoïdes au sens du premier chapitre) et que pour tous entiers $k < j < i$, les k -flèches, les j -flèches et les i -flèches à $(i + 1)$ -flèche près, forment une bicatégorie.

L’objet de la troisième section est la notion d’équivalence faible de ∞ -groupoïdes de Grothendieck. On définit les groupes d’homotopie (généralisés) d’un ∞ -groupoïde de Grothendieck et on en déduit une notion d’équivalence faible. On donne deux autres définitions équivalentes des équivalences faibles.

Dans la quatrième section, on construit le foncteur ∞ -groupoïde fondamental. On se place dans le cadre d’une catégorie de modèles dont tous les objets sont fibrants (généralisant l’exemple de la catégorie des espaces topologiques). On explique comment à un objet d’une telle catégorie, on associe, de manière non canonique mais fonctorielle, un ∞ -groupoïde de Grothendieck. On montre que les groupes d’homotopie du ∞ -groupoïde fondamental sont bien définis. Enfin, on montre que si X est un espace topologique, les groupes d’homotopie du ∞ -groupoïde fondamental de X sont canoniquement isomorphes aux groupes d’homotopie de X .

Dans la cinquième section, on formule la conjecture de Grothendieck et on expose le programme de Maltiniotis, déjà évoqué dans cette introduction, pour la démontrer.

Chapitre 5. — Le but de ce chapitre est d'établir que les cohérateurs de ∞ -catégories sont des théories globulaires homogènes sur Θ . La construction d'un cohérateur fait intervenir deux opérations : l'adjonction formelle de relèvements et la complétion globulaire. Il nous faudra donc étudier la compatibilité de ces deux opérations avec la propriété d'homogénéité sur Θ .

Dans la première section, on étudie les relèvements dans la catégorie Θ . On montre que tout couple admissible de Θ admet un unique relèvement et que celui-ci est algébrique. La catégorie Θ est donc un pseudo-cohérateur au sens du chapitre précédent.

La deuxième section est consacrée aux adjonctions formelles de relèvements. On dégage une propriété sur une préthéorie globulaire C , la propriété (R), permettant de contrôler la catégorie $C[R(A)]$, obtenue à partir de C en adjoignant formellement des relèvements à des couples parallèles A . On montre que toute préthéorie globulaire C homogène sur Θ vérifie la propriété (R) et on en déduit que $C[R(A)]$ est homogène sur Θ si les couples de A sont admissibles.

Dans la troisième section, on démontre que la complétion globulaire d'une préthéorie globulaire homogène sur Θ , vérifiant une hypothèse peu restrictive, est également homogène sur Θ . La démonstration de ce résultat utilise la plupart des outils développés dans le chapitre 2, notamment les sommes globulaires généralisées et les résultats sur les catégories au-dessous de Θ_0 .

Dans la quatrième section, on cueille les conséquences des sections précédentes. Ainsi, on obtient le fait que tout cohérateur, vérifiant une hypothèse peu restrictive, est homogène sur Θ . En particulier, les trois cohérateurs canoniques sont homogènes sur Θ . On déduira de ce résultat, dans le chapitre suivant, que ces cohérateurs correspondent à des ω -opérides.

Chapitre 6. — Dans ce chapitre, on établit un dictionnaire entre les théories globulaires homogènes sur Θ et les ω -opérides, dans l'esprit des travaux de Berger dans [8] et [7], et de ceux de Weber dans [42]. Dans la dernière section, on compare les ∞ -catégories de Grothendieck-Maltiniotis et les ∞ -catégories de Batanin.

Dans la première section, on rappelle quelques définitions et constructions élémentaires de la théorie des monades.

L'objet de la seconde section est l'étude de l'extension de Kan $j_! : \widehat{\Theta}_0 \rightarrow \widehat{C}$, où $j : \Theta_0 \rightarrow C$ est une théorie globulaire homogène. On en donne une description simple en termes de décomposition algébrique et on démontre que si C est homogène sur Θ , le foncteur $j_!$ préserve les préfaisceaux globulaires. Cette propriété fondamentale utilise de manière cruciale l'homogénéité sur Θ .

Dans la troisième section, on associe à toute théorie globulaire C , une monade M_C sur les ensembles globulaires. On étend cette correspondance en un foncteur M de la catégorie des théories globulaires vers la catégorie des monades sur les ensembles globulaires. On montre que la catégorie des algèbres sur la monade M_C est canoniquement équivalente à la catégorie des préfaisceaux globulaires sur C . En exploitant les résultats de la section

précédente, on donne une description simple de la monade M_C lorsque C est homogène sur Θ .

Dans la quatrième section, on présente le langage des ω -opérades de Batanin. Les résultats de la section précédente se formulent alors en disant que le foncteur M induit un foncteur de la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ vers la catégorie des ω -opérades.

Dans la cinquième section, on associe à une monade M sur les ensembles globulaires, une extension globulaire Θ_M . On étend cette correspondance en un foncteur T de la catégorie des monades sur les ensembles globulaires vers la catégorie des extensions globulaires. On démontre que ce foncteur induit un foncteur de la catégorie des ω -opérades vers la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ .

Dans la sixième section, on établit que les foncteurs M et T induisent des équivalences de catégories, quasi-inverses l'une de l'autre, entre la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ et la catégorie des ω -opérades.

L'objet de la septième section est la comparaison des ∞ -catégories de Grothendieck-Maltsiniotis et des ∞ -catégories de Batanin. On fait le lien entre la notion de pseudo-cohérateur et la notion de ω -opérade contractile. On démontre que le foncteur M envoie tout cohérateur, vérifiant une hypothèse peu restrictive, sur un objet faiblement initial de la catégorie des ω -opérades contractiles. Par ailleurs, on démontre que, sous une conjecture technique, le cohérateur Θ_{BL} de Batanin-Leinster est canoniquement munie d'une contraction, et qu'il est envoyé par le foncteur M sur la ω -opérade initiale dans la catégorie des ω -opérades munies d'une contraction. En particulier, toujours sous cette conjecture technique, la catégorie des ∞ -catégories de Grothendieck de type Θ_{BL} est canoniquement équivalente à la catégorie des ∞ -catégories de Batanin-Leinster.

Chapitre 7. — Dans ce chapitre, on démontre que la catégorie $\tilde{\Theta}$ est test stricte et que le foncteur canonique $\Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$ est asphérique.

La première section est une brève introduction à la théorie des catégories test dont le but est de présenter les définitions et les résultats qu'on utilisera dans les sections suivantes.

Dans la deuxième section, on démontre que la catégorie Θ est une catégorie test. Ce résultat est également obtenu dans [15]. La preuve contenue dans cette section est totalement différente. Elle est inspirée de l'argument combinatoire de Grothendieck pour démontrer que la catégorie Δ est test.

La troisième section est consacrée à la démonstration du caractère test strict de la catégorie $\tilde{\Theta}$. Pour ce faire, on construit un décalage scindable sur $\tilde{\Theta}$. Cette technique a été introduite par Cisinski et Maltsiniotis dans [15] pour démontrer que la catégorie Θ est test stricte. Faute de description agréable de la catégorie $\tilde{\Theta}$, le décalage sur celle-ci est construit « à la main », ce qui engendre des calculs fastidieux. On démontre également que le foncteur canonique $\Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$ est asphérique. On a déjà explicité dans cette introduction quelques conséquences de ces deux résultats.

Notations

Si \mathcal{C} est une catégorie, on notera $\text{Ob}(\mathcal{C})$ la classe des objets de \mathcal{C} , $\text{Fl}(\mathcal{C})$ la classe des flèches de \mathcal{C} , et \mathcal{C}° la catégorie opposée. Si c et c' sont deux objets de \mathcal{C} , on notera $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c')$ l'ensemble des morphismes de c vers c' . Si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux catégories, on notera $\underline{\text{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} .

On notera $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles. Si A est une petite catégorie, on notera \widehat{A} la catégorie $\underline{\text{Hom}}(A^\circ, \mathcal{E}ns)$ des préfaisceaux sur A et \check{A} la catégorie $\underline{\text{Hom}}(A^\circ, \mathcal{E}ns^\circ)$ des copréfaisceaux sur A . Si a est un objet de A , on notera également a le préfaisceau sur A représenté par a . Si $u : A \rightarrow B$ est un foncteur et b est un objet de B , on notera A/b la catégorie dont les objets sont les couples (a, f) où a est un objet de A et f un morphisme $u(a) \rightarrow b$ de B et dont les morphismes de (a, f) vers (a', f') sont les morphismes $g : a \rightarrow a'$ de A tels que $f'u(g) = f$. On notera $b \backslash A$ la catégorie $(A^\circ/b)^\circ$ associée au foncteur opposé $u^\circ : A^\circ \rightarrow B^\circ$. Si F est un préfaisceau sur A , on notera A/F la catégorie associée au foncteur de Yoneda $A \rightarrow \widehat{A}$ et $A \backslash F$ la catégorie associée au foncteur de Yoneda $A \rightarrow \check{A}$.

Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. On notera u^* le foncteur de restriction $\widehat{B} \rightarrow \widehat{A}$, $u_!$ l'adjoint à gauche de u^* et u_* l'adjoint à droite de u^* (s'ils existent). Rappelons que $u_!$ (respectivement u_*) existe si B est cocomplète (respectivement complète).

Soient \mathcal{C} une catégorie et $c \xrightarrow{f} d \xleftarrow{f'} c'$ deux morphismes de \mathcal{C} . On notera $(c, f) \times_d (f', c')$ le produit fibré du diagramme dans \mathcal{C} formé par f et f' . Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, si on dispose pour tout k entre 1 et $n - 1$ de morphismes $f_k : c_k \rightarrow d_k$ et $f'_k : c_{k+1} \rightarrow d_k$ de \mathcal{C} , on notera

$$(c_1, f_1) \times_{d_1} (f'_1, c_2, f_2) \times_{d_2} (f'_2, c_3, f_3) \times_{d_3} \cdots \times_{d_{n-1}} (f'_{n-1}, c_n)$$

le produit fibré itéré du diagramme dans \mathcal{C} formé par les f_k et les f'_k . De même, on notera

$$(c_1, f_1) \amalg_{d_1} (f'_1, c_2, f_2) \amalg_{d_2} (f'_2, c_3, f_3) \amalg_{d_3} \cdots \amalg_{d_{n-1}} (f'_{n-1}, c_n)$$

la somme amalgamée itérée du diagramme dans \mathcal{C}° formé par les f_k et les f'_k .

Chapitre 1

∞ -catégories et ∞ -groupoïdes stricts

1.1 Ensembles globulaires

1.1.1. Pour tout entier positif n , on note \mathbb{G}_n la catégorie engendrée par le graphe

$$D_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma_1} \\ \xrightarrow{\tau_1} \end{array} D_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma_2} \\ \xrightarrow{\tau_2} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \\ \xrightarrow{\tau_{n-1}} \end{array} D_{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma_n} \\ \xrightarrow{\tau_n} \end{array} D_n$$

soumis aux relations coglobulaires

$$\sigma_{i+1}\sigma_i = \tau_{i+1}\sigma_i \quad \text{et} \quad \sigma_{i+1}\tau_i = \tau_{i+1}\tau_i, \quad i \geq 1.$$

Pour tout n positif, on a un foncteur d'inclusion $\mathbb{G}_n \rightarrow \mathbb{G}_{n+1}$. On notera \mathbb{G} la limite inductive de ce système de foncteurs.

Si i et j sont deux entiers tels que $j \geq i \geq 0$, on pose

$$\sigma_i^j = \sigma_j \cdots \sigma_{i+2} \sigma_{i+1} \quad \text{et} \quad \tau_i^j = \tau_j \cdots \tau_{i+2} \tau_{i+1}.$$

On appelle *morphismes source* (respectivement *morphismes but*) les σ_i^j (respectivement τ_i^j) pour $j \geq i \geq 0$. On dit qu'un tel morphisme est *non trivial* s'il n'est pas une identité. On vérifie facilement qu'on a

$$\text{Hom}_{\mathbb{G}}(D_i, D_j) = \begin{cases} \{\sigma_i^j, \tau_i^j\} & \text{si } i < j, \\ \{1_{D_i}\} & \text{si } i = j, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appellera *catégorie des ensembles globulaires* ou *catégorie des ∞ -graphes*, la catégorie des préfaisceaux sur \mathbb{G} . Si X est un ensemble globulaire, on notera X_n l'ensemble $X(D_n)$ et s_i (respectivement t_i) l'application $X(\sigma_i)$ (respectivement $X(\tau_i)$). Ainsi la donnée de X équivaut à celle d'un diagramme d'ensembles

$$\cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n+1}} \\ \xrightarrow{t_{n+1}} \end{array} X_n \begin{array}{c} \xrightarrow{s_n} \\ \xrightarrow{t_n} \end{array} X_{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n-1}} \\ \xrightarrow{t_{n-1}} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{s_2} \\ \xrightarrow{t_2} \end{array} X_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{s_1} \\ \xrightarrow{t_1} \end{array} X_0$$

soumis aux relations globulaires

$$s_i s_{i+1} = s_i t_{i+1} \quad \text{et} \quad t_i s_{i+1} = t_i t_{i+1}, \quad i \geq 1.$$

Si X est un ensemble globulaire et i, j sont deux entiers tels que $j \geq i \geq 0$, on pose

$$s_i^j = s_{i+1} \cdots s_{j-1} s_j \quad \text{et} \quad t_i^j = t_{i+1} \cdots t_{j-1} t_j.$$

Si X est un ensemble globulaire et n est un entier positif, on appellera X_n l'ensemble des n -flèches ou des n -cellules. Si $n = 0$, on appellera également X_0 l'ensemble des objets. Si f est une n -flèche pour un n strictement positif, on appellera *source* (respectivement *but*) de f , la $(n-1)$ -flèche $s_n(f)$ (respectivement $t_n(f)$). Pour indiquer qu'une flèche h a pour source f et pour but g , on écrira $h : f \rightarrow g$. On dit que deux n -flèches f et g sont *parallèles* si $n = 0$, ou si f et g ont même source et même but.

1.1.2. Une ∞ -précatégorie est un ensemble globulaire X muni d'applications

$$\begin{aligned} *^i_j : (X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i) &\rightarrow X_i, \quad i > j \geq 0, \\ k_i : X_i &\rightarrow X_{i+1}, \quad i \geq 0, \end{aligned}$$

telles que les axiomes suivants soient vérifiés :

1. pour tout couple (x, y) dans $(X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i)$ avec $i > j \geq 0$, on a

$$s_i(x *^i_j y) = \begin{cases} s_i(y), & j = i - 1; \\ s_i(x) *^{i-1}_j s_i(y), & j < i - 1; \end{cases}$$

2. pour tout couple (x, y) dans $(X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i)$ avec $i > j \geq 0$, on a

$$t_i(x *^i_j y) = \begin{cases} t_i(x), & j = i - 1; \\ t_i(x) *^{i-1}_j t_i(y), & j < i - 1; \end{cases}$$

3. pour tout x dans X_i avec $i \geq 0$, on a

$$s_{i+1} k_i(x) = x = t_{i+1} k_i(x), \quad i \geq 0.$$

Pour i et j deux entiers tels que $i \geq j \geq 0$, on notera

$$k_i^j = k_{i-1} \cdots k_{j+1} k_j.$$

Un *morphisme de ∞ -précatégories* est un morphisme d'ensembles globulaires qui respecte les applications $*^j_i$ et k_i . On notera $\infty\text{-PCat}$ la catégorie des ∞ -précatégories.

Une ∞ -précatégorie X est une ∞ -catégorie stricte si elle satisfait en outre les axiomes suivants :

(C1) Associativité

pour tout triplet (x, y, z) dans $(X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i)$ avec $i > j \geq 0$, on a

$$(x *^i_j y) *^i_j z = x *^i_j (y *^i_j z);$$

(C2) Loi d'échange

pour tout quadruplet (x, x', y, y') dans

$$(X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i, s_k^i) \times_{X_k} (t_k^i, X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i),$$

avec $i > j > k \geq 0$, on a

$$(x *_j^i x') *_k^i (y *_j^i y') = (x *_k^i y) *_j^i (x' *_k^i y');$$

(C3) Unités

pour tout x dans X_i avec $i \geq 1$ et tout j tel que $i > j \geq 0$, on a

$$x *_j^i k_i^j s_j^i(x) = x = k_i^j t_j^i(x) *_j^i x;$$

(C4) Functorialité des unités

pour tout couple (x, y) dans $(X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i)$ avec $i > j \geq 0$, on a

$$k_i(x *_j^i y) = k_i(x) *_j^{i+1} k_i(y).$$

On notera $\infty\text{-Cat}$ la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-PCat}$ dont les objets sont les ∞ -catégories strictes.

Soient X une ∞ -catégorie, x dans X_i pour $i \geq 1$ et j un entier tel que $0 \leq j < i$. On dit que x admet un $*_j^i$ -inverse s'il existe y dans X_i tel que

$$s_j^i(y) = t_j^i(x), \quad t_j^i(y) = s_j^i(x), \quad x *_j^i y = k_i^j(t_j^i(x)) \quad \text{et} \quad y *_j^i x = k_i^j(s_j^i(x)).$$

Le même argument qu'en théorie des groupes montre que si un tel y existe, il est unique. On appelle alors y le $*_j^i$ -inverse de x .

Une ∞ -catégorie stricte X est un ∞ -groupoïde strict si pour tous entiers i, j tels que $0 \leq j < i$, tout x dans X_i admet un $*_j^i$ -inverse. On notera $\infty\text{-Grp}$ la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Cat}$ dont les objets sont les ∞ -groupoïdes stricts.

Si X est un ∞ -groupoïde strict, pour tous i, j tels que $0 \leq j < i$, on dispose d'une application $w_j^i : X_i \rightarrow X_i$ qui envoie une i -flèche sur son $*_j^i$ -inverse. On a alors, pour x dans X_i ,

$$s_i(w_j^i(x)) = \begin{cases} t_i(x) & \text{si } j = i - 1, \\ w_j^{i-1}(s_i(x)) & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$t_i(w_j^i(x)) = \begin{cases} s_i(x) & \text{si } j = i - 1, \\ w_j^{i-1}(t_i(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un morphisme de ∞ -groupoïdes respecte automatiquement ces w_j^i . Ceci motive la définition suivante.

Un ∞ -prégroupoïde est une ∞ -précatégorie munie d'applications

$$w_j^i : D_i \rightarrow D_i, \quad 0 \leq j < i,$$

telles que pour tout x dans X_i avec $i \geq 1$ et tout j tel que $0 \leq j < i$, les flèches $s_i(w_j^i(x))$ et $t_i(w_j^i(x))$ se calculent comme ci-dessus. Un morphisme de ∞ -prégroupeïdes est un morphisme de ∞ -précatégories qui respecte les applications w_j^i . On notera $\infty\text{-}\mathcal{P}\mathcal{G}\text{rp}$ la catégorie des ∞ -prégroupeïdes.

Un ∞ -groupeïde strict X est alors un ∞ -prégroupeïde satisfaisant les axiomes (C1), (C2), (C3), (C4), ainsi que l'axiome additionnel suivant :

(G1) Inverses

pour tout x dans X_i avec $i \geq 1$ et tout j tel que $0 \leq j < i$, on a

$$x *_j^i w_j^i(x) = k_i^j(t_j^i(x)) \quad \text{et} \quad w_j^i(x) *_j^i x = k_i^j(s_j^i(x)).$$

Notons que l'unicité du $*_j^i$ -inverse entraîne immédiatement que tout ∞ -groupeïde strict vérifie automatiquement l'axiome suivante :

(G2) Functorialité des inverses

pour tout couple (x, y) dans $(X_i, s_j^i) \times_{X_j} (t_j^i, X_i)$ avec $0 \leq j < i$ et tout entier j' tel que $0 \leq j' < i$, on a

$$w_{j'}^i(x *_j^i y) = \begin{cases} w_{j'}^i(y) *_j^i w_{j'}^i(x), & \text{si } j = j', \\ w_{j'}^i(x) *_j^i w_{j'}^i(y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit n un entier positif. Une n -catégorie stricte est une ∞ -catégorie stricte telle que pour tout $m > n$, toutes les m -flèches sont des identités. On notera $n\text{-}\mathcal{C}\text{at}$ la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-}\mathcal{C}\text{at}$ formée des n -catégories. Un n -groupeïde strict est un ∞ -groupeïde strict qui est une n -catégorie. On notera $n\text{-}\mathcal{G}\text{rp}$ la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-}\mathcal{G}\text{rp}$ formée des n -groupeïdes.

1.2 Équivalences faibles de ∞ -groupeïdes stricts

1.2.1. Soient C une ∞ -catégorie stricte et f, g deux n -flèches pour un n positif. On dira que f est *homotope* à g s'il existe une $(n+1)$ -flèche h de source f et de but g . Si G est un ∞ -groupeïde strict, la relation d'homotopie sur G_n est une relation d'équivalence. En effet, l'identité d'une flèche f montre que f est homotope à elle-même. Si on dispose d'une flèche h de source f et but g , où f et g sont deux n -flèches, l'inverse $w_n^{n+1}(h)$ fournit une flèche de source g et de but f . La transitivité sur les n -flèches résulte des propriétés de source et de but de la composition $*_n^{n+1}$. On notera \sim_n cette relation d'équivalence.

Si G est un ∞ -groupeïde strict et n est un entier positif, on notera \overline{G}_n le quotient de G_n par \sim_n . La composition

$$*_n^n : G_n \times_{G_{n-1}} G_n \rightarrow G_n$$

passé au quotient en une opération

$$*_n^n : \overline{G}_n \times_{G_{n-1}} \overline{G}_n \rightarrow \overline{G}_n$$

grâce aux propriétés de source et de but de la composition $*_{n-1}^{n+1}$. On peut ainsi définir un groupoïde $\varpi_n(G)$ dont les objets sont les $(n-1)$ -flèches et les flèches sont les éléments de $\overline{G_n}$.

On rappelle que si H est un groupoïde, on note $\pi_0(H)$ l'ensemble des classes d'équivalence d'objets pour la relation « il existe une flèche entre x et y », et $\pi_1(H, x)$, pour x un objet de H , le groupe des automorphismes de x .

Soit G un ∞ -groupoïde strict. On pose

$$\pi_0(G) = \pi_0(\varpi_1(G))$$

et pour $n > 0$ et x un objet de G , on pose

$$\pi_n(G, x) = \pi_1(\varpi_n(G), k_{n-1}^0(x)).$$

Il est immédiat que $\pi_n(G, x)$ est un groupe. L'argument d'Eckmann-Hilton montre que pour $n \geq 2$, ce groupe est abélien. On appellera $\pi_0(G)$ l'ensemble des *composantes connexes* de G et on dira que G est *0-connexe* si cet ensemble est un singleton. On dira que G est *connexe* si G est le ∞ -groupoïde vide (c'est-à-dire l'unique ∞ -groupoïde sans objet), ou si G est 0-connexe. On vérifie facilement que si G est connexe et que x, y sont deux objets de G , pour tout entier $n \geq 1$, les groupes $\pi_n(G, x)$ et $\pi_n(G, y)$ sont isomorphes (de manière *non canonique*). On dira que G est *simplement connexe* si G est 0-connexe et si pour tout objet x de G , le groupe $\pi_1(G, x)$ est trivial.

On vérifie facilement que pour tout entier $n \geq 1$, ϖ_n est un foncteur de la catégorie des ∞ -groupoïdes stricts vers la catégorie des groupoïdes. De même, π_0 est un foncteur de la catégorie des ∞ -groupoïdes stricts vers la catégorie des ensembles et π_n pour $n \geq 1$, est un foncteur de la catégorie des ∞ -groupoïdes stricts pointés vers la catégorie des groupes (abéliens si $n \geq 2$).

Soit $F : G \rightarrow H$ un morphisme de ∞ -groupoïdes stricts. On dira que F est une *équivalence faible* si l'application $\pi_0(F) : \pi_0(G) \rightarrow \pi_0(H)$ est une bijection et si pour tout $n \geq 1$ et tout objet x de F , le morphisme de groupes $\pi_n(F, x) : \pi_n(G, x) \rightarrow \pi_n(H, F(x))$ est un isomorphisme.

Plus généralement, si G un ∞ -groupoïde strict, n un entier supérieur ou égal à 1 et f, g deux $(n-1)$ -flèches de G , on notera

$$\pi_n(G, f, g) = \text{Hom}_{\varpi_n(G)}(f, g) \quad \text{et} \quad \pi_n(G, f) = \pi_n(G, f, f).$$

Proposition 1.2.2. *Soit $F : G \rightarrow H$ un morphisme de ∞ -groupoïdes stricts. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. F est une équivalence faible ;
2. l'application $\pi_0(F) : \pi_0(G) \rightarrow \pi_0(H)$ est une bijection, et pour tout $n \geq 1$ et toute $(n-1)$ -flèche f de G , le foncteur F induit une bijection

$$\pi_n(G, f) \rightarrow \pi_n(H, F(f)) ;$$

3. le foncteur $\varpi_1(F) : \varpi_1(G) \rightarrow \varpi_1(H)$ est une équivalence de catégories, et pour tout $n \geq 2$ et tout couple (f, g) de $(n-1)$ -flèches parallèles de G , le foncteur F induit une bijection

$$\pi_n(G, f, g) \rightarrow \pi_n(H, F(f), F(g));$$

4. le foncteur $\varpi_1(F) : \varpi_1(G) \rightarrow \varpi_1(H)$ est plein et essentiellement surjectif, et pour tout $n \geq 2$ et tout couple (f, g) de $(n-1)$ -flèches parallèles de G , le foncteur F induit une surjection

$$\pi_n(G, f, g) \rightarrow \pi_n(H, F(f), F(g)).$$

Démonstration. L'implication $2 \Rightarrow 1$ est évidente. Montrons la réciproque. Le cas $n = 1$ est évident. Soient $n \geq 2$ et f une $(n-1)$ -flèche de G . Notons $x = s_0^{n-1}(f)$. On définit un isomorphisme

$$\pi_n(G, x) \rightarrow \pi_n(G, f)$$

en envoyant une n -flèche $u : k_{n-1}^0(x) \rightarrow k_{n-1}^0(x)$ sur la n -flèche $k_{n-1}(f) *_{0}^n u : f \rightarrow f$. Il est immédiat que le foncteur F commute à cet isomorphisme, c'est-à-dire que le carré

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(G, x) & \longrightarrow & \pi_n(G, f) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(H, F(x)) & \longrightarrow & \pi_n(H, F(f)) \end{array}$$

est commutatif. L'application $\pi_n(G, f) \rightarrow \pi_n(H, F(f))$ est donc une bijection pour $n \geq 2$.

L'implication $3 \Rightarrow 2$ est évidente. Montrons la réciproque. Soient $n \geq 1$ et f, g deux $(n-1)$ -flèches parallèles de G . Supposons qu'il existe une n -flèche $u : f \rightarrow g$ dans G . On définit alors un isomorphisme

$$\pi_n(G, f) \rightarrow \pi_n(G, f, g)$$

en envoyant une n -flèche $v : f \rightarrow f$ sur la n -flèche $u *_{n-1}^n v : f \rightarrow g$. Il est immédiat que le foncteur F commute à cet isomorphisme, c'est-à-dire que le carré

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(G, f) & \longrightarrow & \pi_n(G, f, g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(H, F(f)) & \longrightarrow & \pi_n(H, F(f), F(g)) \end{array}$$

est commutatif. Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que s'il existe une n -flèche $v : F(f) \rightarrow F(g)$ dans H , alors il existe une n -flèche $u : f \rightarrow g$ dans G . C'est clair pour $n = 1$ par injectivité de $\pi_0(F)$. Soit donc $n \geq 2$ et $v : F(f) \rightarrow F(g)$ une n -flèche de H . Posons $x = s_{n-1}(f)$. La flèche $k_{n-1}(w_{n-1}(F(f))) *_{n-2}^n v$ est une n -flèche de H de source $k_{n-2}(F(x)) : F(x) \rightarrow F(x)$ et de but $w_{n-1}(F(f)) *_{n-2}^{n-1} F(g) : F(x) \rightarrow F(x)$. Puisque l'application

$$\pi_{n-1}(G, x) \rightarrow \pi_{n-1}(H, F(x))$$

est injective, il existe une n -flèche u' de G de source $\kappa_{n-2}(x)$ et de but $w_{n-1}(f) *_{n-2}^{n-1} g$. Alors $u = k_{n-1}(f) *_{n-2}^n u'$ est une n -flèche de G de source f et de but g .

L'implication $3 \Rightarrow 4$ est évidente. Montrons la réciproque. Soient $n \geq 1$, f, g deux $(n-1)$ -flèches parallèles de G et u, v deux n -flèches de source f et de but g . Supposons qu'on ait $F(u) = F(v)$ dans $\pi_n(H, F(f), F(g))$. Il existe alors une $(n+1)$ -flèche de H de source $F(u)$ et de but $F(v)$. Par surjectivité de l'application

$$\pi_{n+1}(G, u, v) \rightarrow \pi_{n+1}(H, F(u), F(v)),$$

il existe une $(n+1)$ -flèche de G de source u et de but v . D'où $u = v$ dans $\pi_n(G, f, g)$. \square

Remarque 1.2.3. La dernière condition se reformule en la conjonction des propriétés suivantes :

- pour tout objet y de H , il existe un objet x de G tel que $F(x)$ et y soient homotopes ;
- pour tout entier $n \geq 0$, tout couple (f, g) de n -flèches parallèles de G et toute $(n+1)$ -flèche $k : F(f) \rightarrow F(g)$ de H , il existe une $(n+1)$ -flèche $h : f \rightarrow g$ de G telle que $F(h)$ soit homotope à k .

C'est exactement la notion d'équivalence de ∞ -catégories strictes exposée dans [27], restreinte aux ∞ -groupoïdes.

1.2.4. Soient $n \geq 2$ et A un groupe abélien. On définit un ∞ -groupoïde strict G de la manière suivante :

- l'ensemble G_i des i -flèches est un singleton qu'on notera 0 pour $i < n$, et est A pour $i \geq n$;
- les applications s_i et t_i sont égales et valent 1_0 pour i entre 1 et $n-1$, la projection $A \rightarrow 0$ pour $i = n$ et l'identité 1_A pour $i \geq n+1$;
- l'application k_i vaut 1_0 pour i entre 0 et $n-2$, l'application $0 \rightarrow A$ correspondant à l'élément neutre de A pour $i = n-1$, et 1_A pour $i \geq n$;
- pour $i > j \geq 0$, l'application $*_{j}^i$ vaut 1_0 pour $i < n$, l'addition $A \times A \rightarrow A$ pour $i \geq n$ et $j < n$, et vaut l'identité 1_A sinon (on a $G_i \times_{G_j} G_i = A \times_A A \simeq A$ si $j \geq n$).

On notera $\mathcal{K}(A, n)$ cet ∞ -groupoïde strict. On vérifie facilement que $\mathcal{K}(A, n)$ est simplement connexe, et que si on note $*$ son unique objet, on a pour tout entier $k \geq 2$,

$$\pi_k(\mathcal{K}(A, n), *) = \begin{cases} A & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit de façon analogue des ∞ -groupoïdes stricts $\mathcal{K}(E, 0)$ pour E un ensemble, et $\mathcal{K}(G, 1)$ pour G un groupe. Le ∞ -groupoïde $\mathcal{K}(E, 0)$ a pour composantes connexes E , et pour tout objet x de $\mathcal{K}(E, 0)$ et tout $k \geq 1$, le groupe $\pi_k(\mathcal{K}(E, 0), x)$ est trivial. Quant à $\mathcal{K}(G, 1)$, il possède un unique objet $*$ (il est en particulier connexe), et vérifie

$$\pi_k(\mathcal{K}(G, 1), *) = \begin{cases} G & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle les ∞ -groupoïdes définis dans ce paragraphe des *∞ -groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane*.

1.3 La catégorie homotopique

1.3.1. Un *localisateur* est la donnée d'une catégorie \mathcal{C} et d'une classe de flèches \mathcal{W} de \mathcal{C} . On notera $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ un tel localisateur. On appellera les flèches de \mathcal{W} des *équivalences faibles*.

La donnée d'un localisateur est suffisante pour définir les notions importantes de la théorie de l'homotopie (par exemple, les notions de catégorie homotopique, de limites homotopiques et foncteurs dérivés entre deux localisateurs).

Dans la pratique, à une catégorie \mathcal{C} , on associera souvent une unique classe \mathcal{W} faisant du couple $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ un localisateur. On pourra alors parler du localisateur \mathcal{C} sans ambiguïté.

Exemples 1.3.2. La catégorie \mathcal{Top} des espaces topologiques sera par défaut munie des équivalences faibles d'espaces topologiques, c'est-à-dire des applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que l'application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ soit une bijection et que pour tout x dans X et tout $i \geq 1$, le morphisme $\pi_i(f, x) : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$ soit un isomorphisme de groupes.

La catégorie \mathcal{CW} des CW-complexes sera par défaut munie des équivalences d'homotopie entre CW-complexes (qui sont également les équivalences faibles topologiques entre CW-complexes).

La catégorie $\widehat{\Delta}$ des ensembles simpliciaux sera par défaut munie des équivalences faibles d'ensembles simpliciaux, c'est-à-dire des morphismes d'ensembles simpliciaux qui s'envoient *via* le foncteur réalisation géométrique $|\cdot|$ sur une équivalence d'homotopie entre CW-complexes.

La catégorie \mathcal{Cat} des petites catégories sera par défaut munie des équivalences faibles de catégories, c'est-à-dire des foncteurs s'envoyant *via* le foncteur nerf N sur une équivalence faible d'ensembles simpliciaux.

La catégorie $\infty\text{-Grp}$ des ∞ -groupeïdes stricts sera par défaut munie des équivalences faibles de ∞ -groupeïdes stricts définies dans la section précédente.

Pour k dans $\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$, la catégorie $C_{\geq k}(\mathcal{A})$ des complexes homologiques en degré supérieur ou égal à k à valeurs dans une catégorie abélienne \mathcal{A} , sera par défaut munie des quasi-isomorphismes, c'est-à-dire des morphismes de complexes induisant des isomorphismes en homologie.

1.3.3. Si $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ est un localisateur, la catégorie homotopique de $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ est la localisation Gabriel-Zisman de \mathcal{C} par \mathcal{W} , c'est-à-dire la catégorie obtenue à partir de \mathcal{C} en inversant formellement les morphismes de \mathcal{W} . On notera cette catégorie $\text{Ho}_{\mathcal{W}}(\mathcal{C})$ ou $\text{Ho}(\mathcal{C})$ si le contexte rend claire la classe \mathcal{W} .

Notons que la catégorie $\text{Ho}_{\mathcal{W}}(\mathcal{C})$ n'existe pas toujours si l'on n'est pas prêt à changer d'univers. Nous négligerons ce problème pour les deux raisons suivantes :

- nous sommes prêts à changer d'univers ;
- dans tous les exemples que nous considérerons par la suite, la catégorie homotopique existera sans changer d'univers.

Exemples 1.3.4. La *catégorie homotopique* est la catégorie $\text{Ho}(\mathcal{Top})$. On notera Hot cette catégorie. Un *type d'homotopie* est un objet de Hot à isomorphisme canonique près.

La catégorie $\text{Hot}(C_{\geq k}(\mathcal{A}))$ est la catégorie dérivée $D_{\geq k}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} .

Théorème 1.3.5. *La chaîne de foncteurs*

$$\text{Cat} \xrightarrow{N} \widehat{\Delta} \xrightarrow{|\cdot|} \text{CW} \rightarrow \text{Top}$$

induit par les propriétés universelles des catégories homotopiques une chaîne de foncteurs

$$\text{Ho}(\text{Cat}) \xrightarrow{\overline{N}} \text{Ho}(\widehat{\Delta}) \xrightarrow{|\cdot|} \text{Ho}(\text{CW}) \rightarrow \text{Ho}(\text{Top}) = \text{Hot}.$$

Ces trois foncteurs sont des équivalences de catégories.

Démonstration. Voir le corollaire 3.3.1 de [22] pour \overline{N} . Pour les deux autres foncteurs, voir [35] ou le chapitre VII de [16]. \square

Remarque 1.3.6. Par le théorème précédent, on dispose donc de quatre définitions équivalentes de Hot . Le choix de la définition utilisant le localisateur Cat est à la base de la théorie des catégories test de Grothendieck exposée dans [17] et [32].

1.3.7. Soit n un entier positif. On notera CW_n le localisateur $(\text{CW}, \mathcal{W}_n)$ où \mathcal{W}_n est la classe des n -équivalences faibles, c'est-à-dire des applications continues $f : X \rightarrow Y$ telles que l'application $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ soit bijective, et que pour tout x dans X , le morphisme $\pi_i(f, x) : \pi_i(X, x) \rightarrow \pi_i(Y, f(x))$ soit un isomorphisme pour $1 \leq i \leq n$. On note Hot_n la catégorie homotopique $\text{Ho}(\text{CW}_n)$. On appellera n -type d'homotopie, ou plus simplement n -type, un objet de Hot_n à isomorphisme canonique près.

Notons $\text{CW}_{\leq n}$ la sous-catégorie pleine de CW constituée des CW -complexes X possédant la propriété suivante : pour tout $i > n$ et tout x dans X , le groupe $\pi_i(X, x)$ est trivial. On fait de cette catégorie un localisateur en la munissant des équivalences faibles de CW -complexes (qui coïncident évidemment avec les n -équivalences faibles).

Les propriétés universelles de Hot et Hot_n entraînent l'existence du triangle commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ho}(\text{CW}_{\leq n}) & \xrightarrow{i} & \text{Hot} \\ & \searrow j & \swarrow k \\ & & \text{Hot}_n \end{array}$$

On peut montrer que les foncteurs i et j sont pleinement fidèles. Par ailleurs, une construction classique de la théorie de l'homotopie permet de montrer que j est essentiellement surjectif et est donc une équivalence de catégories. Ainsi, on peut identifier la catégorie Hot_n à la sous-catégorie pleine de Hot dont les objets proviennent de CW_n .

Si X est un type d'homotopie, on appellera n -type d'homotopie associé à X le n -type d'homotopie $k(X)$ (qu'on verra parfois comme un objet de Hot via l'identification que l'on vient de décrire).

1.4 Types d'homotopie et ∞ -groupeïdes stricts

1.4.1. Le but de cette section est de montrer qu'un foncteur de réalisation raisonnable $R : \infty\text{-Grp} \rightarrow \text{Hot}$ (on précisera plus loin ce qu'on entend par raisonnable) ne peut-être essentiellement surjectif et d'essayer de décrire l'image essentielle d'un tel foncteur.

Soit k un entier positif. On dira qu'une ∞ -catégorie stricte C est k -suspendue si pour tout l entre 0 et $k - 1$, C possède une unique l -flèche. En particulier, toute ∞ -catégorie stricte est 0-suspendue. On notera $\infty\text{-Grp}_{\geq k}$ la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Grp}$ dont les objets sont les ∞ -groupeïdes k -suspendus (c'est-à-dire tels que leur ∞ -catégorie sous-jacente soit k -suspendue). Nous allons maintenant étudier la catégorie des ∞ -groupeïdes stricts 2-suspendus.

On notera Ab la catégorie des groupes abéliens, $\infty\text{-Grp}(\text{Ab})$ celle des ∞ -groupeïdes stricts en groupes abéliens (voir le paragraphe 2.1.2 pour une définition) et $\infty\text{-Grp}_{\geq 2}(\text{Ab})$ celle des ∞ -groupeïdes en groupes abéliens 2-suspendus. Le foncteur d'oubli $\text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$ induit un foncteur $\infty\text{-Grp}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}$ qui envoie un ∞ -groupeïde strict en groupes abéliens sur son ∞ -groupeïde strict sous-jacent. Ce foncteur se restreint en un foncteur $\infty\text{-Grp}_{\geq 2}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}_{\geq 2}$.

Proposition 1.4.2. *Le foncteur $\infty\text{-Grp}_{\geq 2}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}_{\geq 2}$ est un isomorphisme de catégories.*

Démonstration. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que tout ∞ -groupeïde strict 2-suspendu est canoniquement un ∞ -groupeïde en groupes abéliens et que les morphismes de ∞ -groupeïdes stricts préservent cette structure abélienne.

Soit donc G un tel ∞ -groupeïde. Notons $*_i$ l'unique i -flèche de G pour $i = 0, 1$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si f et g sont deux n -flèches de G , alors $s_i^n(f) = t_i^n(f) = s_i^n(g) = t_i^n(g) = *_i$ pour $i = 0, 1$. L'ensemble des n -flèches est donc muni de deux structures de groupes induites par les multiplications $*_0^n$ et $*_1^n$. Par la règle de Godement, ces deux opérations sont compatibles. De plus, elles ont les mêmes unités puisque $k_n^0(*_0) = k_n^1(*_1)$. Par l'argument d'Eckmann-Hilton, ces deux lois sont égales et commutatives. On notera $+$ cette opération. Le groupe $(G_n, +)$ est donc abélien.

Vérifions que les données de G sont compatibles à cette structure abélienne. Supposons toujours n supérieur ou égal à 2. Si f et g sont deux n -flèches, on a

$$s_n(f + g) = s_n(f *_0^n g) = s_n(f) *_0^{n-1} s_n(g) = s_n(f) + s_n(g).$$

L'application $s_n : G_n \rightarrow G_{n-1}$ est donc un morphisme de groupes. De même pour l'application t_n . Soient m un entier positif strictement inférieur à n et f', g' deux n -flèches telles que $s_m^n(f) = t_m^n(g)$ et $s_m^n(f') = t_m^n(g')$. On a

$$(f + f') *_m^n (g + g') = (f *_0^n f') *_m^n (g *_0^n g') = (f *_m^n g) *_0^n (f' *_m^n g') = (f *_m^n g) + (f' *_m^n g').$$

Ainsi $*_m^n$ est un morphisme de groupes. Supposons maintenant n seulement positif. On a

$$k_n(f + g) = k_n(f *_0^n g) = k_n(f) *_0^{n+1} k_n(g) = k_n(f) + k_n(g)$$

et k_n est un morphisme de groupes.

Montrons maintenant que cette structure abélienne est unique. Donnons-nous donc une structure de ∞ -groupeïde en groupes abéliens sur G . Fixons $n \geq 2$ et notons $+'$ la loi de groupe sur G_n de cette structure. Puisque l'application k_n^0 respecte la loi $+'$, l'unité de $+'$ est $k_n^0(*_0)$. En particulier, $+'$ et $*_0^n$ ont même unité. Par ailleurs, puisque l'application $*_0^n : G_n \times G_n \rightarrow G_n$ respecte la loi $+'$, les lois $+'$ et $*_0^n$ sont compatibles. Par l'argument d'Eckmann-Hilton, elles sont donc égales. Ainsi, la structure abélienne est uniquement déterminée par les compositions $*_0^n$.

De plus, puisque $+ = *_0^n$, un morphisme de ∞ -groupeïdes stricts 2-suspendus est automatiquement un morphisme de ∞ -groupeïdes stricts en groupes abéliens. \square

1.4.3. Nous allons maintenant montrer que la catégorie des ∞ -groupeïdes stricts en groupes abéliens est canoniquement équivalente à la catégorie $C_{\geq 0}(\mathbf{Ab})$ des complexes homologiques de groupes abéliens en degré positif (ce résultat a été démontré par Bourn dans [11]).

Soit C un tel complexe. Notons $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ sa différentielle. On associe à C un ∞ -groupeïde F défini de la manière suivante :

- l'ensemble F_n des n -flèches est $C_n \oplus C_{n-1} \oplus \cdots \oplus C_0$;
- pour $n \geq 1$, le morphisme $s_n : F_n = C_n \oplus F_{n-1} \rightarrow F_{n-1}$ est la projection canonique ;
- pour $n \geq 1$, le morphisme $t_n : F_n = C_n \oplus F_{n-1} \rightarrow F_{n-1}$ est la somme de d_n et de la projection canonique ;
- pour $n \geq 0$, le morphisme $k_n : F_n \rightarrow F_{n+1} = C_{n+1} \oplus F_n$ est l'injection canonique ;
- pour $n > m \geq 0$, le morphisme $*_m^n : (F_n, s_m^n) \times_{F_m} (t_m^n, F_n) \rightarrow F_n$ est défini par

$$(x_n, \dots, x_0) *_m^n (y_n, \dots, y_0) = (x_n + y_n, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, y_m, \dots, y_0)$$

(notons que $(x_n, \dots, x_0, y_n, \dots, y_0)$ appartient à $(F_n, s_m^n) \times_{F_m} (t_m^n, F_n)$ si et seulement si on a $(x_m, \dots, x_0) = (d_{m+1}(y_{m+1}) + y_m, y_{m-1}, \dots, y_0)$;

- pour $n > m \geq 0$, le morphisme $w_m^n : F_n \rightarrow F_n$ est défini par

$$w_m^n(x_n, \dots, x_0) = (-x_n, \dots, -x_{m+1}, d_{m+1}(x_{m+1}) + x_m, x_{m-1}, \dots, x_0).$$

On vérifie immédiatement que F est un ∞ -groupeïde strict en groupes abéliens. De plus, si $f : C \rightarrow C'$ est un morphisme de complexes, les composantes $f_k : C_k \rightarrow C'_k$ induisent pour tout n positif, un morphisme $F_n = C_n \oplus \cdots \oplus C_0 \rightarrow F'_n = C'_n \oplus \cdots \oplus C'_0$. On vérifie facilement que ces morphismes définissent un foncteur de ∞ -groupeïdes stricts en groupes abéliens. On vient ainsi de définir un foncteur $C_{\geq 0}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}(\mathbf{Ab})$.

Proposition 1.4.4. *Le foncteur $C_{\geq 0}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}(\mathbf{Ab})$ défini dans le paragraphe précédent est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Soit F un ∞ -groupeïde strict en groupes abéliens. Posons $C_0 = F_0$ et $C_n = \ker s_n$ pour $n \geq 1$. Puisque le morphisme $s_n : F_n \rightarrow F_{n-1}$ admet k_{n-1} comme section, F_n est canoniquement isomorphe à $C_n \oplus F_{n-1}$. Ainsi, on a montré que l'ensemble

globulaire sous-jacent à F est isomorphe à un ensemble globulaire en groupes abéliens de la forme

$$C_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_1} \\ \xleftarrow{t_1} \end{array} C_1 \oplus C_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_2} \\ \xleftarrow{t_2} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xleftarrow{s_n} \\ \xleftarrow{t_n} \end{array} C_n \oplus C_{n-1} \oplus \cdots \oplus C_0 \begin{array}{c} \xleftarrow{s_{n+1}} \\ \xleftarrow{t_{n+1}} \end{array} \cdots .$$

À travers cet isomorphisme, s_n devient la projection canonique $C_n \oplus F_{n-1} \rightarrow F_{n-1}$, et k_{n-1} l'inclusion canonique $F_{n-1} \rightarrow C_n \oplus F_{n-1}$. Puisque k_{n-1} est également une section de t_n , pour $(0, y)$ dans $C_n \oplus F_{n-1}$, on a $t_n(0, y) = y$. Par ailleurs, l'identité $s_{n-1}t_n = s_{n-1}s_n$ entraîne que, pour $(x, 0)$ dans $C_n \oplus F_{n-1}$, on a $t_n(x, 0) = (d_n(x), 0)$, où d_n est un morphisme de C_n vers C_{n-1} . Ainsi, t_n est la somme de la projection canonique et de ce morphisme d_n . L'identité $t_{n-1}t_n = t_{n-1}s_n$ implique immédiatement qu'on a $d_{n-1}d_n = 0$. On a ainsi associé un complexe (C, d) à F .

On montre de même que si $g : F \rightarrow F'$ est un morphisme de ∞ -groupeïdes stricts en groupes abéliens, le morphisme $g_n : F_n \rightarrow F'_n$ se décompose en une somme de deux morphismes $f_n \oplus g_n : C_n \oplus F_{n-1} \rightarrow C'_n \oplus F'_{n-1}$ et que les morphismes f_n définissent un morphisme de complexes.

On a donc construit un foncteur $H : \infty\text{-Grp}(\text{Ab}) \rightarrow C_{\geq 0}(\text{Ab})$. Montrons que celui-ci est un quasi-inverse du foncteur $K : C_{\geq 0}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}(\text{Ab})$ de l'énoncé. Il est évident que HK est isomorphe à l'identité. Montrons que KH est isomorphe à l'identité. Soit donc F un ∞ -groupeïde. On a déjà montré que $(KH)(F)$ et F ont des ensembles globulaires sous-jacents canoniquement isomorphes et que cette isomorphisme est compatible aux unités. Pour conclure, il suffit de montrer ces données suffisent à déterminer les composition $*_m^n$.

Soient donc C un complexe et $n > m \geq 0$ deux entiers. Nous utiliserons les notations du paragraphe 1.4.3. Soit $(x_n, \dots, x_0, y_n, \dots, y_0)$ un élément de $F_n \times_{F_m} F_n$. Rappelons que cela signifie que les relations, $x_m = d_{m+1}(y_{m+1}) + y_m$ et $x_i = y_i$ pour i entre 0 et $m-1$, sont satisfaites. On a alors

$$\begin{aligned} & (x_n, \dots, x_0) *_m^n (y_n, \dots, y_0) \\ &= (x_n, \dots, x_{m+1}, d_{m+1}(y_{m+1}) + y_m, y_{m-1}, \dots, y_0) *_m^n (y_n, \dots, y_0) \\ &= (x_n, \dots, x_{m+1}, 0, \dots, 0) *_m^n (0, \dots, 0) + \\ & \quad (0, \dots, 0, d_{m+1}(y_{m+1}) + y_m, y_{m-1}, \dots, y_0) *_m^n (y_n, \dots, y_0) \\ &= (x_n, \dots, x_{m+1}, 0, \dots, 0) + (y_n, \dots, y_0) \\ &= (x_n + y_n, \dots, x_{m+1} + y_{m+1}, y_m, \dots, y_0), \end{aligned}$$

où l'avant dernière égalité résulte des égalités

$$\begin{aligned} (0, \dots, 0) &= k_n^m(s_m^n(x_n, \dots, x_{m+1}, 0, \dots, 0)), \\ (0, \dots, 0, d_{m+1}(y_m) + y_m, y_{m-1}, \dots, y_0) &= k_n^m(t_m^n(y_n, \dots, y_0)), \end{aligned}$$

et de l'axiome des unités. □

Proposition 1.4.5. *Dans l'équivalence de catégories $C_{\geq 0}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}(\text{Ab})$, les équivalences faibles de ∞ -groupeïdes et les quasi-isomorphismes sont échangés.*

Démonstration. Donnons-nous G un ∞ -groupeïde strict en groupes abéliens et un entier $n \geq 1$. Rappelons qu'on note \sim_n la relation d'équivalence d'homotopie des n -flèches. Si x est un objet de G , l'application $G_n \rightarrow G_n$, qui à f associe $f - k_{n-1}^0(x)$, induit un isomorphisme de groupes $\pi_n(G, x) \rightarrow \pi_n(G, 0)$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \pi_n(G, 0) &\simeq \{f \in G_n; s_n(f) = t_n(f) = 0\} / \sim_n \\ &= \{f \in G_n; s_n(f) = t_n(f) = 0\} / \{f \in G_n; f \sim_n 0\} \\ &= \{f \in G_n; s_n(f) = t_n(f) = 0\} / \{t_{n+1}(h); h \in G_{n+1}, s_{n+1}(h) = 0\} \\ &\simeq \{(f, 0) \in C_n \oplus G_{n-1}; d_n(f) = 0\} / \{d_{n+1}(h); (h, 0) \in C_{n+1} \oplus G_n\} \\ &\simeq \{f \in C_n; d_n(f) = 0\} / \{d_{n+1}(h); h \in C_{n+1}\} \\ &= \ker(d_n) / \text{Im}(d_{n+1}) \\ &= H_n(C(G)). \end{aligned}$$

De même, on montre que $\pi_0(G) \simeq H_0(C(G))$.

On déduit facilement la proposition de ces isomorphismes. \square

Corollaire 1.4.6. *L'équivalence de catégories $C_{\geq 0}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}(\text{Ab})$ induit une équivalence de catégories $D_{\geq 0}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ho}(\infty\text{-Grp}(\text{Ab}))$*

Remarque 1.4.7. On montre de la même manière, que pour tout entier positif k , l'équivalence de catégories $C_{\geq 0}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}(\text{Ab})$ se restreint en une équivalence de catégories $C_{\geq k}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}_{\geq k}(\text{Ab})$ et que celle-ci induit une équivalence de catégories $D_{\geq k}(\text{Ab}) \rightarrow \text{Ho}(\infty\text{-Grp}_{\geq k}(\text{Ab}))$.

Corollaire 1.4.8. *On a une équivalence de catégories canonique $\infty\text{-Grp}_{\geq 2} \rightarrow C_{\geq 2}(\text{Ab})$ et celle-ci induit une équivalence de catégories $\text{Ho}(\infty\text{-Grp}_{\geq 2}) \rightarrow D_{\geq 2}(\text{Ab})$.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence de la remarque précédente et de l'équivalence de catégories $\infty\text{-Grp}_{\geq 2}(\text{Ab}) \rightarrow \infty\text{-Grp}_{\geq 2}$ établie dans la proposition 1.4.2. \square

1.4.9. Soient A un groupe abélien et n un entier positif. On notera $A[n]$ le complexe homologique de groupes abéliens concentré en degré n de valeur A . Il est immédiat que dans l'équivalence de catégories du corollaire précédent, le complexe $A[n]$ est envoyé sur le ∞ -groupeïde $\mathcal{K}(A, n)$. On rappelle le résultat suivant sur la catégorie $D_{\geq 2}(\text{Ab})$.

Proposition 1.4.10. *Soit C un complexe dans $C_{\geq 2}(\text{Ab})$. Alors, dans $D_{\geq 2}(\text{Ab})$, C est isomorphe (non canoniquement) à $\prod_{n \geq 2} H_n(C)[n]$.*

Démonstration. Nous allons utiliser la structure de catégorie triangulée sur $C_{\geq 2}(\text{Ab})$ munie de l'auto-équivalence de catégories qui à un complexe C associe le complexe $C[1]$ tel que $C[1]_i = C_{i-1}$.

Soit C un complexe dans $C_{\geq 2}(\text{Ab})$. Notons $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ la différentielle. Pour tout entier k , on notera

$$\begin{aligned} \tau_{\geq k}(C) &= \cdots \rightarrow C_{k+2} \rightarrow C_{k+1} \rightarrow \text{Ker } d_k \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ \tilde{\tau}_{\geq k}(C) &= \cdots \rightarrow C_{k+2} \rightarrow C_{k+1} \rightarrow X_k \rightarrow \text{Im } d_k \rightarrow 0 \rightarrow \cdots \\ \tau_{\leq k}(C) &= \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \text{Coker } d_{k+1} \rightarrow C_{k-1} \rightarrow C_{k-2} \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Fixons un entier n supérieur ou égal à 2. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \tilde{\tau}_{\geq n+1}(C) \rightarrow C \rightarrow \tau_{\leq n}(C) \rightarrow 0$$

dans $C_{\geq 2}(\mathbf{Ab})$. Par ailleurs, le morphisme canonique $\tau_{\geq n+1}(C) \rightarrow \tilde{\tau}_{\geq n+1}(C)$ est un quasi-isomorphisme. On dispose donc dans $D_{\geq 2}(\mathbf{Ab})$ d'un triangle distingué

$$\tau_{\geq n+1}(C) \rightarrow C \rightarrow \tau_{\leq n}(C) \rightarrow \tau_{\geq n+1}(C)[1].$$

Or tout morphisme, d'un complexe concentré en degré inférieur ou égal à n , vers un complexe concentré en degré supérieur ou égal à $n+2$, est nul dans $D_{\geq 2}(\mathbf{Ab})$ car les $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Ab}}^{(n+2)-n} = \mathrm{Ext}_{\mathbf{Ab}}^2$ sont triviaux. Ainsi, le morphisme de connexion de $\tau_{\leq n}(C)$ vers $\tau_{\geq n+1}(C)[1] = \tau_{\geq n+2}(C[1])$ est nul. Par conséquent, le triangle ci-dessus est scindé et on dispose donc d'une section $\tau_{\leq n}(C) \rightarrow C$. En composant l'inclusion canonique $H_n(C)[n] \rightarrow \tau_{\leq n}(C)$ avec cette section, on obtient un morphisme

$$H_n(C)[n] \rightarrow C$$

de $D_{\geq 2}(\mathbf{Ab})$ qui induit un isomorphisme sur le H_n .

En passant à la somme directe, on obtient un morphisme

$$\bigoplus_{n \geq 2} H_n(C)[n] \rightarrow C$$

de $D_{\geq 2}(\mathbf{Ab})$. Ce morphisme induit des isomorphismes sur tous les H_n et est donc un isomorphisme. Par ailleurs, on a $\bigoplus_{n \geq 2} H_n(C)[n] = \prod_{n \geq 2} H_n(C)[n]$, d'où le résultat. \square

Remarque 1.4.11. On démontre de même le résultat analogue dans $D_{\geq k}(\mathbf{Ab})$, pour k quelconque, fini ou non.

Corollaire 1.4.12. *Soit G un ∞ -groupeïde strict 2-suspendu. Alors, dans $\mathrm{Ho}(\infty\text{-Grp}_{\geq 2})$, G est isomorphe (non canoniquement) à $\prod_{n \geq 2} \mathcal{K}(\pi_n(G), n)$.*

Remarque 1.4.13. Le ∞ -groupeïde $\prod_{n \geq 2} \mathcal{K}(A_n, n)$, où pour tout $n \geq 2$, A_n est un groupe abélien, correspond à un complexe de différentielle nulle. Il vérifie $s_n = t_n$ pour $n \geq 1$. Réciproquement, tout ∞ -groupeïde strict 2-suspendu qui vérifie ces égalités est un produit de ∞ -groupeïdes d'Eilenberg-Mac Lane.

1.4.14. On appellera *foncteur de réalisation de Simpson* (voir [37]) la donnée d'un foncteur $Q : \infty\text{-Grp} \rightarrow \mathcal{Top}$ muni d'une application

$$e : G_0 \rightarrow Q(G)$$

naturelle en G , induisant une bijection

$$\pi_0(G) \rightarrow \pi_0(Q(G)),$$

et d'isomorphismes

$$\pi_n(G, x) \rightarrow \pi_n(Q(G), e(x)), \quad n \geq 1,$$

naturels en (G, x) .

Dans la suite, on se donne un foncteur de réalisation de Simpson Q . On notera $R : \infty\text{-Grp} \rightarrow \mathbf{Hot}$ le composé pQ où p est le foncteur de localisation $\mathcal{Top} \rightarrow \mathbf{Hot}$.

Proposition 1.4.15. *Le foncteur R commute aux produits de ∞ -groupoïdes d'Eilenberg-Mac Lane. Autrement dit, pour tout ensemble A_0 , tout groupe A_1 , et tous groupes abéliens A_n pour $n \geq 2$, le morphisme canonique*

$$R\left(\prod_{n \geq 0} \mathcal{K}(A_n, n)\right) \rightarrow \prod_{n \geq 0} R(\mathcal{K}(A_n, n))$$

est un isomorphisme dans \mathbf{Hot} .

Démonstration. Rappelons que le foncteur de localisation $p : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Hot}$ commute aux produits. Cela résulte, par exemple, du fait que tout espace topologique est fibrant pour la structure de catégorie de modèles usuelle sur \mathbf{Top} . Il suffit donc de montrer que l'application canonique

$$f : Q\left(\prod_{n \geq 0} \mathcal{K}(A_n, n)\right) \rightarrow \prod_{n \geq 0} Q(\mathcal{K}(A_n, n))$$

est une équivalence faible.

Fixons un entier positif n . On notera

$$p_n : \prod_{n \geq 0} \mathcal{K}(A_n, n) \rightarrow \mathcal{K}(A_n, n) \quad \text{et} \quad q_n : \prod_{n \geq 0} Q(\mathcal{K}(A_n, n)) \rightarrow Q(\mathcal{K}(A_n, n))$$

les projections canoniques. On dispose du triangle commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} Q\left(\prod_{n \geq 0} \mathcal{K}(A_n, n)\right) & \xrightarrow{f} & \prod_{n \geq 0} Q(\mathcal{K}(A_n, n)) \\ & \searrow^{Q(p_n)} & \swarrow_{q_n} \\ & Q(\mathcal{K}(A_n, n)) & \end{array} .$$

Pour $n = 0$, le morphisme p_0 induit une bijection sur le π_0 . Il en est donc de même de $Q(p_0)$. Par ailleurs, q_0 induit également une bijection sur le π_0 . Il en est donc de même de f .

Soit $n \geq 1$. On dira dans la suite de cette preuve qu'une application continue (respectivement un morphisme de ∞ -groupoïdes stricts) $u : V \rightarrow W$ induit un isomorphisme sur le π_n en v , où v est un élément de V (respectivement un objet de V), si le morphisme $\pi_n(V, v) \rightarrow \pi_n(W, f(v))$ est un isomorphisme. On dira que u induit un isomorphisme sur le π_n en tout point si pour tout point v de V (respectivement tout objet v de V), u induit un isomorphisme sur le π_n en v .

Le morphisme p_n induit un isomorphisme sur le π_n en tout point. Le foncteur $Q(p_n)$ induit donc un isomorphisme sur le π_n en $e(x)$, pour tout objet x de $\prod_{n \geq 0} \mathcal{K}(A_n, n)$. Puisque e induit une bijection sur le π_0 , l'application $Q(p_n)$ induit un isomorphisme sur le π_n en tout point. Par ailleurs, l'application q_n induit également un isomorphisme sur le π_n en tout point. On en déduit que c'est également le cas de f .

On a donc montré que f induit une bijection sur le π_0 et pour tout $n \geq 1$, un isomorphisme sur le π_n en tout point, c'est-à-dire que f est une équivalence faible. \square

Proposition 1.4.16. *Les types d'homotopie simplement connexes dans l'image essentielle du foncteur R sont exactement les produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

Démonstration. Un type d'homotopie simplement connexe provient d'un ∞ -groupeïde strict simplement connexe. Soit donc G un tel ∞ -groupeïde. Le choix d'un objet de x de G détermine un sous- ∞ -groupeïde G' de G tel que $G'_0 = \{x\}$, $G'_1 = \{\kappa_1^0(x)\}$ et pour n supérieur à 2, G'_n est l'ensemble des n -flèches f de G telles que $s_1^n(f) = k_1^0(x) = t_1^n(f)$. L'inclusion $G' \rightarrow G$ est clairement une équivalence faible. Puisque G' est 2-suspendu, il est relié à un produit de ∞ -groupeïdes d'Eilenberg-Mac Lane par un zigzag d'équivalences faibles. On en déduit immédiatement le résultat par la proposition précédente. \square

Proposition 1.4.17. *Soit X un CW-complexe connexe de dimension finie $n \geq 1$. Si X a un groupe d'homotopie $\pi_m(X)$ non trivial pour $m > n$, alors le type d'homotopie de X n'est pas un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. En particulier, les sphères de dimension n pour $n \geq 2$ n'ont pas le type d'homotopie d'un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

Démonstration. Si X était un tel produit, on aurait

$$H_m(X) \simeq H_m \left(\prod_{1 \leq k \leq m+1} K(\pi_k(X), k) \right).$$

Posons $Y = \prod_{\substack{1 \leq k \leq m+1 \\ k \neq m}} K(\pi_k(X), k)$. En appliquant la formule de Künneth à la décomposition $X = K(\pi_m(X), m) \times Y$, on obtient la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \pi_m(X) \oplus H_m(Y) \longrightarrow H_m(X) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

En particulier, le groupe $\pi_m(X)$ s'injecte dans $H_m(X) = 0$ et est donc trivial. Contradiction.

On peut appliquer le résultat aux sphères de dimension $n \geq 2$ car $\pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$ et $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour $n \geq 3$. \square

Corollaire 1.4.18. *Le foncteur R n'est pas essentiellement surjectif.*

Proposition 1.4.19. *L'image essentielle du foncteur R est contenue dans la classe des espaces dont chaque composante connexe a pour revêtement universel un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

Démonstration. Soit G un ∞ -groupeïde strict. Quitte à décomposer G en une somme sur ses composantes connexes, on peut supposer G connexe. Choisissons un objet z de G et appelons G' le sous- ∞ -groupeïde 2-suspendu de G déterminé par z . Notons $X = Q(G)$ et $X' = Q(G')$. L'inclusion $i : G' \rightarrow G$ induit des isomorphismes $\pi_n(G', z) \rightarrow \pi_n(G, z)$ pour $n \geq 2$ et donc des isomorphismes $\pi_n(X', x) \rightarrow \pi_n(X, x)$ pour tout x dans X' et tout $n \geq 2$. Soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ le revêtement universel de X et X'' un remplacement cellulaire de X' , c'est-à-dire un CW-complexe munie d'une équivalence faible $r : X'' \rightarrow X'$. La

simple connexité de X' et donc de X'' entraîne l'existence d'une application continue $X'' \rightarrow \tilde{X}$ telle que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow & \downarrow \pi \\ X'' & \xrightarrow{r} & X' \xrightarrow{Q(i)} X \end{array} .$$

soit commutatif. Puisque X'' et \tilde{X} sont simplement connexes, et que $Q(i)r$ et π induisent des isomorphismes sur les π_n pour $n \geq 2$, l'application $X'' \rightarrow \tilde{X}$ est une équivalence faible. D'où le résultat par la proposition 1.4.16. \square

1.5 Types d'homotopie et ∞ -groupoïdes quasi-stricts

1.5.1. Pour tenter de contourner le caractère non essentiellement surjectif d'un tel foncteur de réalisation de Simpson, Kapranov et Voedvosky ont affaibli la notion de n -groupoïde en demandant seulement l'existence d'inverses « faibles » (voir [25]). Simpson a démontré dans [37] que cela ne suffit pas. Dans ce paragraphe, nous exposons un autre argument. Nous utiliserons une notion de n -groupoïde présentée par Street dans [39]. Celle-ci est équivalente par le corollaire 4.4 de [24] à celle de Kapranov et Voedvosky. Nous nous plaçons ici dans le cas $n = \infty$ qui est développé dans [27].

Soient C une ∞ -catégorie stricte et x, y dans C_n pour $n \geq 0$. On définit par coïnduction mutuelle les deux notions suivantes :

- les n -flèches x et y sont *faiblement homotopes* s'il existe une $(n+1)$ -flèche *faiblement inversible* $u : x \rightarrow y$;
- une $(n+1)$ -flèche $u : x \rightarrow y$ est *faiblement inversible* s'il existe une $(n+1)$ -flèche $v : y \rightarrow x$ telle que uv et vu soient *faiblement homotopes* à des identités.

On dira qu'une ∞ -catégorie stricte est un *∞ -groupoïde quasi-strict* si toutes ses n -flèches pour $n \geq 1$ sont faiblement inversibles.

Soient G une ∞ -catégorie stricte et n un entier positif. On montre (proposition 6 de [27]) que la relation de faible homotopie sur C_n est une relation d'équivalence. Si de plus G est un ∞ -groupoïde quasi-strict, alors par définition, deux n -flèches u, v de G_n sont faiblement homotopes si et seulement si elles sont homotopes. On en déduit que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur G_n . On peut donc définir l'ensemble $\pi_0(G)$ et les groupes $\pi_n(G, x)$ pour x objet de G , et donc la notion d'*équivalences faibles de ∞ -groupoïdes quasi-stricts*, de la même manière que dans la section 1.2.

Soit G un 3-groupoïde quasi-strict 2-suspendu. Par définition, G est une 3-catégorie stricte 2-suspendue telle que les 2-flèches aient un $*_1^2$ -inverse à une 3-flèche près, et que les 3-flèches aient un $*_2^3$ -inverse. En désuspendant G , on obtient une catégorie monoïdale symétrique C , avec une symétrie et des contraintes triviales, qui est un groupoïde et telle que le monoïde $\pi_0(C)$ soit un groupe. La catégorie C est un champ de Picard (sur le point) au sens de l'exposé XVIII de [18]. Ainsi, en vertu du lemme 1.4.13 de *loc. cit.*, il existe une catégorie monoïdale symétrique D , avec une symétrie et des contraintes

triviales, qui soit un groupoïde et telle que le monoïde D_0 soit un groupe, ainsi qu'une équivalence faible monoïdale symétrique de D vers C . En suspendant, on obtient un 3-groupoïde strict H et un *pseudo*-foncteur $H \rightarrow G$ qui est une équivalence faible.

Ainsi, tout 3-groupoïde quasi-strict simplement connexe est faiblement équivalent à un 3-groupoïde strict *via* un *pseudo*-foncteur. Les 3-groupoïdes quasi-stricts simplement connexes ne modélisent donc pas plus de types d'homotopie que les 3-groupoïdes stricts simplement connexes. En particulier, ils ne modélisent pas le 3-type associé à la sphère de dimension 2 (comme le montre la démonstration de la proposition 1.4.17).

Chapitre 2

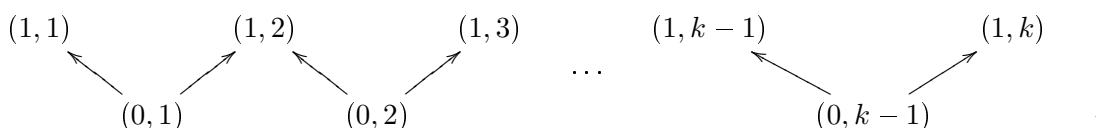
Le langage globulaire

2.1 Extensions globulaires

2.1.1. Pour tout entier $k \geq 2$, notons I_k la catégorie associée à l'ensemble

$$\{(0, 1), (0, 2), \dots, (0, k - 1), (1, 1), (1, 2), \dots, (1, k)\}$$

muni de l'ordre $(0, i) < (1, i)$ et $(0, i) < (1, i + 1)$ pour i entre 1 et $k - 1$. La catégorie I_k est donc l'unique catégorie de graphe sous-jacent privé des identités

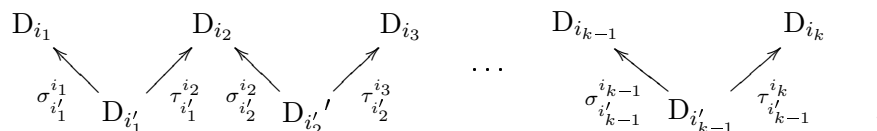


Pour $k = 1$, on note I_1 la catégorie ponctuelle.

Un foncteur $F : I_k \rightarrow \mathbb{G}$ ($k \geq 1$) est appelé un *système globulaire à valeurs dans \mathbb{G}* si chaque flèche $(0, i) \rightarrow (1, i)$ (respectivement $(0, i) \rightarrow (1, i + 1)$) de I_k est envoyée sur un morphisme source non trivial (respectivement sur un morphisme but non trivial).

Si C est une catégorie au-dessous de \mathbb{G} , on notera, quand aucune ambiguïté n'en résulte, de la même manière les objets et morphismes de \mathbb{G} , et leurs images dans C . Si $f : D_i \rightarrow X$ avec $i \geq 1$ est une flèche de C , on appellera *source globulaire* (respectivement *but globulaire*) de f le morphisme $f\sigma_i$ (respectivement $f\tau_i$).

Soit C une catégorie au-dessous de \mathbb{G} . Un foncteur $F : I_k \rightarrow C$ est appelé un *système globulaire à valeurs dans C* s'il se factorise en un système globulaire à valeurs dans \mathbb{G} suivi du foncteur $\mathbb{G} \rightarrow C$. Un système globulaire F à valeurs dans C correspond donc à un diagramme dans C de la forme



Remarquons que la donnée d'un tel système globulaire est équivalente à celle du tableau

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_{k-1} \end{pmatrix},$$

qu'on appellera son *tableau des dimensions*. Si T est un tel tableau, on notera F_T le système globulaire à valeurs dans C associé.

On dit que C est une *extension globulaire* si la limite inductive de tout système globulaire existe. On appelle *somme globulaire* une telle limite. On notera

$$D_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} D_{i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{k-1}}} D_{i_k}$$

la limite inductive associée au système globulaire décrit ci-dessus.

Si C et D sont deux extensions globulaires, un *morphisme d'extensions globulaires* de C vers D est un foncteur au-dessous de \mathbb{G} qui commute aux sommes globulaires. On obtient ainsi la catégorie des extensions globulaires, sous-catégorie de la catégorie des catégories au-dessous de \mathbb{G} .

Soient C une extension globulaire et D une catégorie. Un foncteur $C \rightarrow D$ est dit *globulaire* s'il envoie les sommes globulaires sur des sommes globulaires. On notera $\text{Hom}_{\text{glob}}(C, D)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(C, D)$ dont les objets sont les foncteurs globulaires de C vers D .

Soit C une catégorie au-dessous de \mathbb{G}° . La catégorie C° est naturellement au-dessous de \mathbb{G} . On appelle *produits globulaires* les limites projectives des foncteurs $F : I_k^\circ \rightarrow C$ où F° est un système globulaire à valeurs dans C° . On dira que C est une *extension coglobulaire* si les produits globulaires existent dans C .

Si C est une extension globulaire et D une catégorie, un foncteur $C^\circ \rightarrow D$ est dit *globulaire* s'il envoie les sommes globulaires de C sur des produits globulaires. On notera $\text{Mod}(C, D)$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(C^\circ, D)$ dont les objets sont les foncteurs globulaires de C° vers D . On notera $\text{Mod}(C)$ la catégorie $\text{Mod}(C, \text{Ens})$. Les objets de $\text{Mod}(C)$ seront appelés des *préfaisceaux globulaires* sur C .

2.1.2. Soit C une catégorie. La *catégorie des ensembles globulaires dans C* est la sous-catégorie pleine de $\underline{\text{Hom}}(\mathbb{G}^\circ, C)$ dont les objets sont les foncteurs de $\mathbb{G}^\circ \rightarrow C$ qui font de C une extension coglobulaire. On notera $\infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(C)$ cette catégorie.

La notion de ∞ -précategorie est définie par la donnée d'ensembles, d'applications entre des produits globulaires de ces ensembles et par des équations entre ces applications. Elle fait donc sens en remplaçant la catégorie des ensembles par C dès lors que certaines limites projectives existent dans C . On appellera *∞ -précategorie dans C* un ensemble globulaire X dans C , munie d'une structure de ∞ -précategorie interne à C (le fait que X soit un ensemble globulaire garantit l'existence des limites projectives nécessaires). Pour les mêmes raisons, on dispose d'une notion de *morphisme de ∞ -précategories dans C* . On notera $\infty\text{-PCat}(C)$ la catégorie des ∞ -précategories dans C .

On définit de même les catégories $\infty\text{-Cat}(C)$, $\infty\text{-PGrp}(C)$ et $\infty\text{-Grp}(C)$ des, respectivement, *∞ -catégories strictes dans C* , *∞ -prégroupeïdes dans C* et des *∞ -groupeïdes stricts dans C* .

2.2 La catégorie Θ_0

Proposition 2.2.1. *Il existe une extension globulaire Θ_0 telle que pour toute catégorie C , le foncteur*

$$U : \text{Mod}(\Theta_0, C) \rightarrow \infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(C),$$

induit par le foncteur $\mathbb{G} \rightarrow \Theta_0$ soit une équivalence de catégories, admettant un quasi-inverse G tel que UG soit le foncteur identité.

Démonstration. Le plongement de Yoneda $\mathbb{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ fait de $\widehat{\mathbb{G}}$ une extension globulaire. Soit Θ_0 la sous-catégorie strictement pleine de $\widehat{\mathbb{G}}$ constituée des sommes globulaires. Le foncteur $\mathbb{G} \rightarrow \Theta_0$ fait également de Θ_0 une extension globulaire. Montrons que Θ_0 a la propriété recherchée.

Soit C une catégorie. Nous allons construire un quasi-inverse

$$\infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(C) \rightarrow \text{Mod}(\Theta_0, C)$$

au foncteur U . Si A et B sont deux catégories, nous noterons $\underline{\text{Hom}}_*(A, B)$ la catégorie des foncteurs commutant aux limites projectives. La catégorie $(\widehat{\mathbb{G}})^\circ$ est la complétion complète libre de la catégorie \mathbb{G}° . Le foncteur

$$U' : \underline{\text{Hom}}_*((\widehat{\mathbb{G}})^\circ, \widehat{C}) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathbb{G}^\circ, \widehat{C})$$

admet donc un quasi-inverse G' tel que $U'G'$ soit le foncteur identité. En utilisant G' , on obtient un foncteur F défini comme le composé suivant :

$$\infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(C) \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathbb{G}^\circ, \widehat{C}) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_*((\widehat{\mathbb{G}})^\circ, \widehat{C}) \rightarrow \text{Mod}(\Theta_0, \widehat{C}).$$

Si X est un ensemble globulaire, son image par F dans $\text{Mod}(\Theta_0, \widehat{C})$ se factorise (à isomorphisme près) dans C car les produits globulaires existent dans C et que le plongement de Yoneda les préserve. Ainsi, le foncteur F induit un foncteur

$$G : \infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(C) \rightarrow \text{Mod}(\Theta_0, C)$$

quasi-inverse de U tel que UG soit l'identité. \square

2.2.2. La preuve du lemme de 2-Yoneda implique que deux extensions globulaires vérifiant la propriété universelle précédente sont équivalentes de manière unique à un unique isomorphisme naturel près. Il résultera de la section suivante que les objets d'une telle extension globulaire n'ont pas d'automorphismes non triviaux. Une telle extension globulaire squelettique est donc définie à un unique isomorphisme près. On appellera Θ_0 cette extension globulaire squelettique.

Proposition 2.2.3. *Pour toute extension globulaire C , il existe un morphisme d'extensions globulaires $\Theta_0 \rightarrow C$, unique à unique isomorphisme naturel près.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente appliquée à C° . \square

2.2.4. Le foncteur $\mathbb{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ fait de $\widehat{\mathbb{G}}$ une extension globulaire. Par la proposition précédente, il existe donc un foncteur canonique $\Theta_0 \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$. On appellera *schéma de composition* un ensemble globulaire dans l'image essentielle de ce foncteur.

Proposition 2.2.5. *Soit D une extension globulaire telle que le foncteur*

$$\text{Mod}(D) \rightarrow \infty\text{-Grph}$$

soit une équivalence de catégories. Alors le foncteur $\Theta_0 \rightarrow D$ est une équivalence de catégories.

Démonstration. Soit A une catégorie. Dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(D, \widehat{A}) & \longrightarrow & \infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(\widehat{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\text{Hom}}(A^\circ, \text{Mod}(D)) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}(A^\circ, \infty\text{-Grph}) \end{array} \quad ,$$

les flèches verticales sont des isomorphismes et la flèche horizontale du bas est une équivalence de catégories. Il en résulte que la flèche du haut est une équivalence de catégories.

Ainsi la flèche horizontal du bas du carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(D, A) & \longrightarrow & \infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Mod}(D, \widehat{A}) & \longrightarrow & \infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(\widehat{A}) \end{array}$$

est une équivalence de catégories. Par ailleurs, les flèches verticales de ce carré sont pleinement fidèles. Il en résulte que le foncteur du haut est pleinement fidèle. Montrons qu'il est également essentiellement surjectif. Soit $f : \mathbb{G}^\circ \rightarrow A$ une extension coglobulaire. Puisque le foncteur du bas est essentiellement surjectif, il existe un foncteur globulaire $g : D^\circ \rightarrow \widehat{A}$ tel que les foncteurs $\mathbb{G}^\circ \rightarrow D^\circ \xrightarrow{g} \widehat{A}$ et $\mathbb{G}^\circ \xrightarrow{f} A \rightarrow \widehat{A}$ soient isomorphes. Puisque le foncteur g est globulaire et que A est une extension coglobulaire, il existe un foncteur globulaire $h : D^\circ \rightarrow A$ tel que $D^\circ \xrightarrow{h} A \rightarrow \widehat{A}$ et $g : D^\circ \rightarrow \widehat{A}$ soient isomorphes. Le pleine fidélité du foncteur à droite du carré entraîne que h est envoyé sur f à isomorphisme près, ce qu'on voulait démontrer.

Ainsi D vérifie la même propriété universelle que Θ_0 et le morphisme $\Theta_0 \rightarrow D$ est donc une équivalence de catégories. \square

2.2.6. Soit $F : \Theta_0 \rightarrow C$ une catégorie au-dessous de Θ_0 .

On dira que C est une *préthéorie globulaire* si F est fidèle et bijectif sur les objets.

On dira que C est une *théorie globulaire* si c'est une préthéorie globulaire telle que le foncteur F envoie les sommes globulaires sur des sommes globulaires.

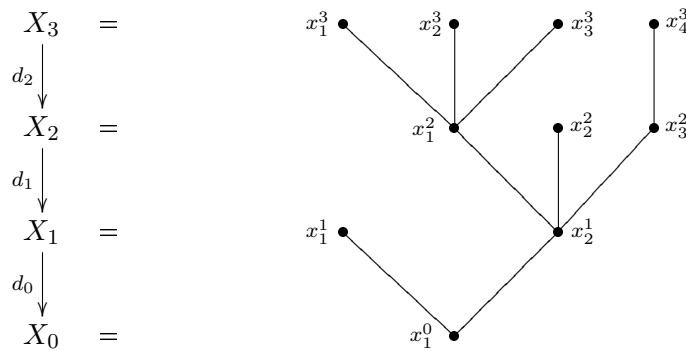
Soit C une préthéorie globulaire. On dira qu'une flèche de C est *globulaire* si elle est dans l'image de F .

2.3 Description combinatoire de Θ_0

2.3.1. Nous allons dans cette section donner une description combinatoire de la catégorie Θ_0 . Pour ne pas nous embarrasser d'une notation temporaire, nous allons oublier notre précédente définition de Θ_0 et redéfinir cette catégorie. Nous montrerons à la fin de cette section que cette nouvelle catégorie est canoniquement isomorphe à celle définie dans la section précédente.

2.3.2. Soit \mathcal{T} la catégorie des préfaisceaux en ensembles finis totalement ordonnés sur l'ensemble ordonné des entiers naturels. La catégorie des *arbres planaires finis* est la sous-catégorie pleine de \mathcal{T} formée des préfaisceaux T tels que $T(0)$ soit un singleton et que $T(i)$ soit vide pour i assez grand. Un arbre planaire fini T est donc déterminé par des ensembles totalement ordonnés (T_i, \leq_i) et des applications croissantes $d_i : T_{i+1} \rightarrow T_i$. On utilisera, par abus de langage, le terme *arbre* pour désigner un arbre planaire fini.

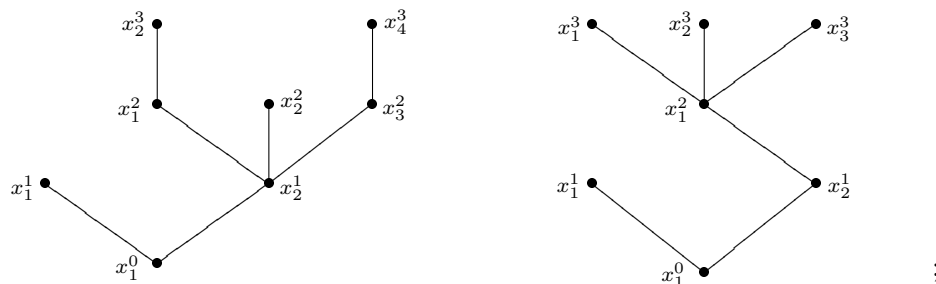
Exemple 2.3.3.



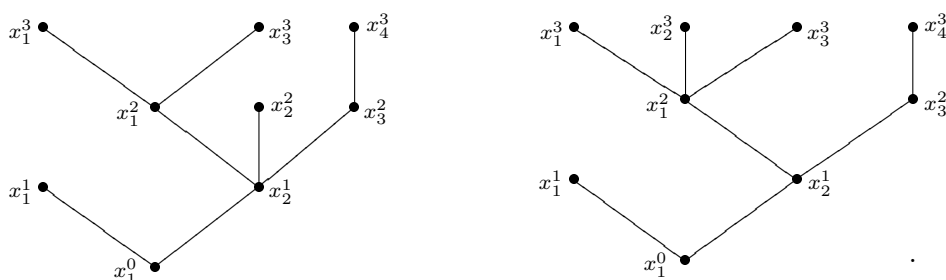
2.3.4. Un *sommet* d'un arbre T est un élément de la réunion des T_i pour $i \geq 0$. On dit qu'un sommet x est de *dimension* i si x appartient à T_i . On appelle *dimension de* T le plus grand entier d tel que T admette un sommet de dimension d . On appelle *fibre* d'un sommet x appartenant à T_i , la fibre en x de l'application $d_{i+1} : T_{i+1} \rightarrow T_i$. Si la fibre d'un sommet x est vide, on dit que x est un *sommet maximal*.

Si T est un arbre, un *sous-arbre* de T est un arbre T' muni d'un monomorphisme $j : T' \rightarrow T$, c'est-à-dire d'applications strictement croissantes $j_i : T'_i \rightarrow T_i$ qui commutent aux applications d_i pour i positif. On dit que T' est un *sous-arbre plein* si pour tout sommet x de T , le monomorphisme $j : T' \rightarrow T$ identifie la fibre de x dans T' à un segment de la fibre de $j(x)$ dans T . Cela signifie que pour tous x_1, x_2 dans la fibre de x dans T' , tout y dans la fibre de $j(x)$ dans T avec $j(x_1) \leq y \leq j(x_2)$ provient d'un élément de la fibre de x dans T' par j .

Exemples 2.3.5. Voici deux exemples de sous-arbres pleins de l'arbre de l'exemple 2.3.3 :

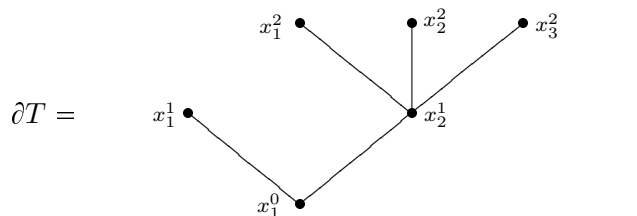


et deux exemples de sous-arbres *non* pleins :



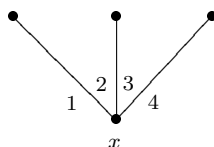
2.3.6. Soient T un arbre et i un entier positif. On appelle *tronqué en dimension i de T* le sous-arbre de T dont les sommets sont les sommets de T de dimension inférieure ou égale à i . On note ce tronqué $\partial_i T$. Si T est de dimension d non nulle, on appelle $\partial_{d-1} T$ le *bord de T* et on le note ∂T .

Exemple 2.3.7. Si T est l'arbre de l'exemple 2.3.3, on a

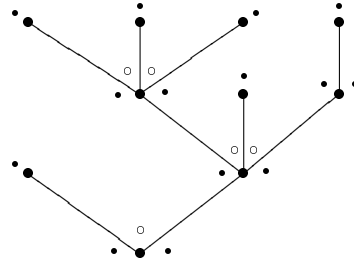


2.3.8. Soient T un arbre et x un sommet de dimension i ayant une fibre de cardinal n . Les n arêtes reliant x à un sommet de dimension $i + 1$ déterminent $n + 1$ *régions de dimension i* . On appelle *régions internes* les régions qui sont délimitées par deux arêtes. Si n est supérieur ou égal à 1, le sommet x détermine donc $n - 1$ régions internes. Si $n = 0$, l'unique région déterminée par x n'est pas interne.

Exemple 2.3.9. Voici un exemple pour $n = 3$:



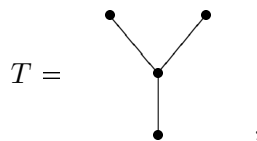
Les régions internes sont les régions 2 et 3. Voici les dix-neuf régions de l'arbre de l'exemple 2.3.3 représentées par des points. Les régions internes sont indiquées par des points d'intérieur blanc.



2.3.10. Nous pouvons maintenant donner la définition combinatoire de Θ_0 . Les objets de Θ_0 sont les arbres. Si T et T' sont deux arbres, un morphisme f dans Θ_0 , de T vers T' , est la donnée d'un monomorphisme d'arbres $j : T \rightarrow T'$ faisant de T un sous-arbre plein de T' , et du choix, pour chaque sommet maximal x de T , d'une région de $j(x)$ dans T' .

Si $f : X \rightarrow X'$ est un morphisme de Θ_0 , on notera également, par abus de notation, f le monomorphisme d'arbres sous-jacent. En particulier, si x est un sommet de T , on notera $f(x)$ le sommet correspondant à x dans T' .

Exemple 2.3.11. Si T' est l'arbre de l'exemple 2.3.3 et



il y a exactement six morphismes de T vers T' dans Θ_0 . Ceux-ci correspondent aux deux sous-arbres pleins



de T' et au choix d'une des quatre régions du sommet x_1^2 dans T' pour le premier, et d'une des deux régions du sommet x_3^2 pour le second (le sommet x_2^2 n'ayant qu'une seule région).

2.3.12. Définissons la composition des morphismes. Soient $T \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} T''$ deux flèches composables dans Θ_0 . Le composé des inclusions d'arbres pleins sous-jacentes fournit une inclusion d'arbres pleins $T \rightarrow T''$. Il s'agit donc d'explicitier un choix de régions. Soit x

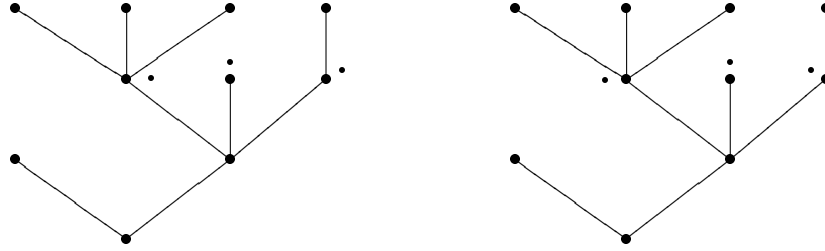
un sommet maximal de T . Le morphisme f associe à x une région α du sommet $f(x)$. Si $f(x)$ est une région maximale de T' , alors le morphisme g associe à $f(x)$ une région β du sommet $g(f(x))$. On associe alors à x la région β . Si $f(x)$ n'est pas une région maximale de T' , alors la région α correspond à une région α' du sommet $g(f(x))$ via l'inclusion du sous-arbre *plein* T' dans T'' . On associe alors à x la région α' . On vérifie facilement que cette loi de composition est associative et admet pour identité d'un arbre T , l'unique morphisme $T \rightarrow T$ de Θ_0 dont le morphisme d'arbres sous-jacent est l'identité de T dans la catégorie des arbres.

2.3.13. Soient T un arbre et i un entier positif. On définit deux morphismes $\sigma_i^T, \tau_i^T : \partial_i T \rightarrow T$ de Θ_0 par l'inclusion canonique de $\partial_i T$ dans T et le choix, pour chaque sommet maximal de $\partial_i T$, de la région la plus à droite, respectivement la plus à gauche, du sommet correspondant de T . Notons que si i est supérieur ou égal à la dimension de T , alors on a $\tau_i^T = \sigma_i^T = 1_T$. Si T est de dimension d supérieure ou égale à 1, on note $\sigma_T = \sigma_{d-1}^T : \partial T \rightarrow T$ et $\tau_T = \tau_{d-1}^T : \partial T \rightarrow T$.

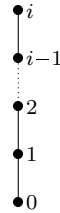
On vérifie facilement que pour tout arbre T , si i et j sont des entiers tels que $i > j \geq 0$, on a les égalités

$$\sigma_i^T \sigma_j^{\partial_i T} = \tau_i^T \sigma_j^{\partial_i T} \quad \text{et} \quad \sigma_i^T \tau_j^{\partial_i T} = \tau_i^T \tau_j^{\partial_i T}.$$

Exemple 2.3.14. Voici le choix des régions définissant respectivement σ_T et τ_T où T est l'arbre de l'exemple 2.3.3 :



2.3.15. Pour $i \geq 0$, on note D_i l'arbre



et pour $i \geq 1$, on pose $\sigma_i = \sigma_{D_i} : D_{i-1} \rightarrow D_i$ et $\tau_i = \tau_{D_i} : D_{i-1} \rightarrow D_i$. Pour $i \geq 2$, on a donc

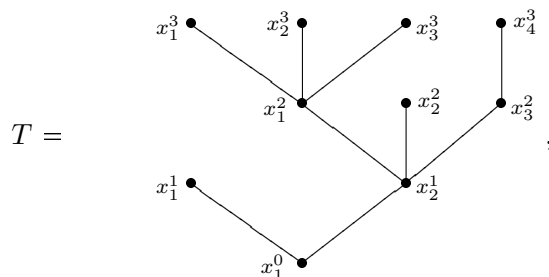
$$\sigma_i \sigma_{i-1} = \tau_i \sigma_{i-1} \quad \text{et} \quad \sigma_i \tau_{i-1} = \tau_i \tau_{i-1}$$

et la catégorie \mathbb{G} s'identifie ainsi à une sous-catégorie pleine de Θ_0 .

2.3.16. Soit T un arbre. Pour tout i positif, l'ensemble des morphismes $D_i \rightarrow T$ de Θ_0 s'identifie à l'ensemble des régions de T . Si α est une région de dimension i de T , on notera, par abus de notation, α le morphisme $D_i \rightarrow T$ de Θ_0 correspondant. On identifiera également les sommets maximaux et leur unique région associée. Si α et β sont deux régions de T , on dira que β est *au-dessus de* α ou que α est *au-dessous de* β si le morphisme α se factorise par β . Géométriquement, cela signifie que $\alpha = \beta$, ou que α est une région, adjacente à la branche joignant β à la racine, de dimension strictement inférieure à celle de β .

Soit T un arbre. On définit une relation d'ordre total \leq sur l'ensemble des sommets de T de la manière suivante. Soient x et y deux sommets de T . Appelons d_x (respectivement d_y) la dimension de x (respectivement de y) et posons $d = \inf\{d_x, d_y\}$. Les sommets x et y s'envoient *via* les applications $(d_i)_{i \geq 0}$ sur des sommets de x_d et y_d de dimension d . Si x_d et y_d sont différents, on pose $x \leq y$ si et seulement si $x_d \leq_d y_d$. Si $x_d = y_d$, on pose $x \leq y$ si et seulement si $d_x \leq d_y$.

Exemple 2.3.17. Si



où a rangé les sommets de gauche à droite (autrement dit, on a $x_i^d \leq_d x_{i+1}^d$), alors on a

$$x_0^1 \leq x_1^1 \leq x_2^1 \leq x_1^2 \leq x_3^1 \leq x_2^2 \leq x_3^2 \leq x_2^3 \leq x_3^3 \leq x_4^3.$$

Proposition 2.3.18. *Le foncteur $\mathbb{G} \rightarrow \Theta_0$ fait de Θ_0 une extension globulaire. Plus précisément, soient T un arbre et $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ l'ensemble des sommets maximaux de T . Pour k entre 1 et n , notons i_k la dimension de x_k . À chaque sommet x_k est associée une région $\alpha_k : D_{i_k} \rightarrow T$ de T . Pour k entre 1 et $n-1$, soit α'_k l'unique région de dimension maximale au-dessous de α_k et de α_{k+1} . Appelons i'_k sa dimension. Alors T est la somme globulaire*

$$T = D_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} D_{i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \dots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} D_{i_n}$$

dont le tableau des dimensions est

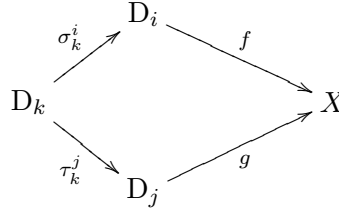
$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ i'_1 & i'_2 & \dots & i'_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Appelons D le tableau des dimensions de l'énoncé. Les morphismes α_k et α'_k déterminent un cône $c : F_D \rightarrow T$ dans Θ_0 . Soit U le foncteur d'oubli de la catégorie

des arbres vers la catégorie des préfaisceaux sur les entiers naturels. On vérifie facilement que le cône $U * c$ est un cône limite inductive. En effet, il s'agit de calculer une limite inductive dans une catégorie de préfaisceaux, ce qui se fait objet par objet.

Soit $c' : F_D \rightarrow T'$, où T' est un arbre, un cône dans Θ_0 . Puisque le cône $U * c$ est universel, le cône c' induit un unique morphisme $f : U(T) \rightarrow U(T')$. Nous allons montrer que le morphisme f respecte l'ordre sur les sommets et fait de T un sous-arbre plein de T' .

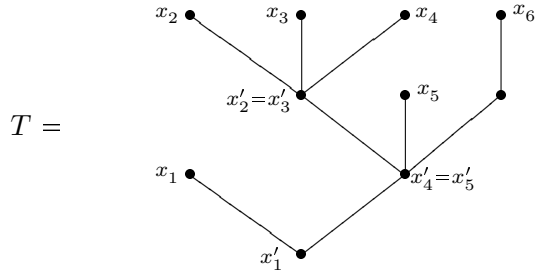
Cela résulte de l'observation suivante. Si on a un diagramme commutatif



dans Θ_0 , où i, j, k sont des entiers tels que $k < i, k < j$, et X est un arbre, alors si x (respectivement y) désigne le sommet de dimension $k + 1$ de D_i (respectivement D_j), on a $f(x) < f(y)$. De plus, si w désigne l'image du sommet maximal de D_k dans X , alors il n'existe pas de sommets de X de dimension $k + 1$ au-dessus de w strictement compris entre $f(x)$ et $f(y)$.

Pour conclure, il suffit de montrer qu'il existe un unique choix de régions faisant de f un morphisme de cônes de c vers c' . L'égalité $fc = c'$ entraîne que pour k entre 1 et n , la région associée à x_k doit être la k -ième composante du cône c' . On vérifie immédiatement que ce choix convient. \square

Exemple 2.3.19. L'arbre



où on a noté x'_k le sommet correspondant à la région α'_k de l'énoncé précédent, est donc la somme globulaire

$$T = D_1 \amalg_{D_0} D_3 \amalg_{D_2} D_3 \amalg_{D_2} D_3 \amalg_{D_1} D_2 \amalg_{D_1} D_3$$

dont le tableau des dimensions est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.20. Dans la suite du texte, on identifiera les arbres à leur tableau des dimensions. En particulier, si C est une catégorie au-dessous de \mathbb{G} et S est un arbre, on notera F_S le système globulaire à valeurs dans C associé au tableau des dimensions de S .

2.3.21. Soit

$$T = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ & i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

dans Θ_0 . Le cône $F_T \rightarrow T$ à valeurs dans Θ_0 induit un foncteur $I_n \rightarrow \mathbb{G}/T$. Ce foncteur induit un isomorphisme de I_n sur une sous-catégorie (non pleine) de \mathbb{G}/T qu'on notera \tilde{T} . Explicitons \tilde{T} . Notons $\alpha_k : D_{i_k} \rightarrow T$, pour k entre 1 et n , les régions maximales de T , et $\alpha'_k : D_{i'_k} \rightarrow T$, pour k entre 1 et $n-1$, les régions internes de T . Les objets de \tilde{T} sont les (D_{i_k}, α_k) , pour k entre 1 et n , et les $(D_{i'_k}, \alpha'_k)$ pour k entre 1 et $n-1$. Ses morphismes, outre les identités, sont les $\sigma_{i'_k}^{i_k} : (D_{i'_k}, \alpha'_k) \rightarrow (D_{i_k}, \alpha_k)$ et les $\tau_{i'_k}^{i_{k+1}} : (D_{i'_k}, \alpha'_k) \rightarrow (D_{i_{k+1}}, \alpha_{k+1})$, pour k entre 1 et $n-1$.

Lemme 2.3.22. Soient T un arbre et β une région de T . La catégorie $\beta \setminus \tilde{T}$ est non vide et connexe. Le foncteur d'inclusion $\tilde{T} \rightarrow \mathbb{G}/T$ est donc cofinal.

Démonstration. Notons d la dimension de β et $\tilde{\beta}$ la catégorie $\beta \setminus \tilde{T}$. Un objet de $\tilde{\beta}$ est un couple $((D_l, \alpha : D_l \rightarrow T), g : D_d \rightarrow D_l)$, avec (D_l, α) un objet de \tilde{T} et g un morphisme de Θ_0 , tel que $\beta = \alpha g$. Pour un α fixé, un tel g existe si et seulement si la région α est au-dessus de la région β , et, dans ce cas, g est unique. Les objets de $\tilde{\beta}$ s'identifient donc aux régions maximales ou internes de T au-dessus de β . Ainsi, si T' désigne l'arbre obtenu à partir de T en prenant le sommet associé à β pour nouvelle racine et en ne gardant que les sommets associés aux régions au-dessus de β , les catégories $\tilde{\beta}$ et \tilde{T}' sont canoniquement isomorphes. Or il est immédiat que \tilde{T}' est non vide et connexe. \square

Proposition 2.3.23. Notons ι l'inclusion $\text{Mod}(\Theta_0) \rightarrow \widehat{\Theta}_0$ et i le foncteur canonique $\mathbb{G} \rightarrow \Theta_0$. Le foncteur $i^* \iota : \text{Mod}(\Theta_0) \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ est une équivalence de catégories. Le foncteur $i_* : \widehat{\mathbb{G}} \rightarrow \widehat{\Theta}_0$ est à valeurs dans $\text{Mod}(\Theta_0)$ et induit un quasi-inverse.

Démonstration. Soit X dans $\widehat{\mathbb{G}}$ et T dans Θ_0 . On a

$$i_*(X)(T) = \varprojlim_{D_j \rightarrow T \in \mathbb{G}/T} X(D_j) = \varprojlim F,$$

où $F : (\mathbb{G}/T)^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$ est le composé du foncteur d'oubli $(\mathbb{G}/T)^\circ \rightarrow \mathbb{G}^\circ$ et du foncteur $X : \mathbb{G}^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$. Soit \tilde{T} la sous-catégorie de \mathbb{G}/T définie dans le paragraphe 2.3.21. Par le lemme précédent, le foncteur $\tilde{T}^\circ \rightarrow (\mathbb{G}/T)^\circ$ est final et on a

$$\varprojlim_{D_j \rightarrow T \in \mathbb{G}/T} X(D_j) \simeq \varprojlim_{D_j \rightarrow T \in \tilde{T}} X(D_j).$$

Le préfaisceau $i_*(X)$ est donc globulaire et i_* est bien à valeurs dans $\text{Mod}(\Theta_0)$. De plus, la formule précédente entraîne que $i_* i^*(X) \simeq X$ pour X dans $\text{Mod}(\Theta_0)$. Ainsi, l'image essentielle de i_* est $\text{Mod}(\Theta_0)$. Puisque i_* est pleinement fidèle (car i l'est), le foncteur i_* induit l'équivalence de catégories annoncée, et on a $i^* i_* X \simeq X$ pour X dans $\widehat{\mathbb{G}}$. \square

Proposition 2.3.24. *L'extension globulaire Θ_0 définie dans cette section est canoniquement isomorphe à l'extension globulaire Θ_0 définie dans le paragraphe 2.2.2.*

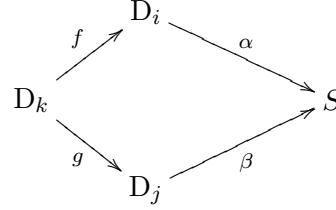
Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente et de la proposition 2.2.5. \square

Proposition 2.3.25. *Toute flèche de Θ_0 est un monomorphisme.*

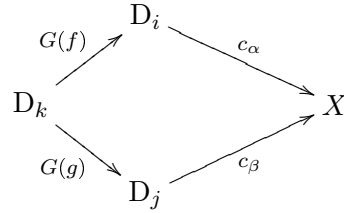
Démonstration. Soit $f : S \rightarrow T$ une flèche de Θ_0 . Supposons qu'on ait deux flèches $g, h : U \rightarrow S$ telles que $fh = fg$. Puisque U est somme amalgamée d'objets de \mathbb{G} , on peut supposer qu'on a $U = D_i$ pour un i positif. Les morphismes g et h correspondent alors à des régions α et β de S . Le morphisme $fh = fg$ correspond à la fois aux régions α et β vues dans T . D'où $\alpha = \beta$ dans T et donc dans S . Ainsi, on a $g = h$, ce qu'on voulait montrer. \square

2.4 Lemmes sur les catégories au-dessous de Θ_0

Proposition 2.4.1. *Soit C une catégorie au-dessous de Θ_0 via un foncteur G . Donnons-nous un arbre S , un objet X de C et un cône $c : F_S \rightarrow X$. Soient $\alpha : D_i \rightarrow S$ et $\beta : D_j \rightarrow S$ deux régions maximales de S . Si on a un diagramme commutatif dans Θ_0 de la forme*



où k est un entier positif, alors le diagramme dans C



est commutatif.

Démonstration. Par le lemme 2.3.22 (et avec les notations du paragraphe 2.3.21), le foncteur $I : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{G}/S$ est cofinal. Notons H_S le foncteur composé $\mathbb{G}/S \rightarrow \mathbb{G} \rightarrow \Theta_0 \xrightarrow{G} C$. La donnée du cône c correspond à celle d'un cône de source $H_S I$. Mais par cofinalité, cette donnée correspond à celle d'un cône de source H_S . Or le premier diagramme de l'énoncé peut s'interpréter comme un diagramme dans \mathbb{G}/S et le deuxième diagramme comme le diagramme de naturalité associé. \square

2.4.2. Soit C une catégorie au-dessous de Θ_0 . Donnons-nous un morphisme $f : S \rightarrow T$ dans Θ_0 , un objet X de C et un cône $c : F_T \rightarrow X$. Par le lemme 2.3.22, la donnée du cône c équivaut à la donnée d'un cône $H_T \rightarrow X$ où H_T est le composé $\mathbb{G}/T \rightarrow \mathbb{G} \rightarrow \Theta_0 \rightarrow C$. Le foncteur $\mathbb{G}/S \rightarrow \mathbb{G}/T$ induit par f permet donc d'obtenir un cône $H_S \rightarrow X$ et par suite un cône $c' : F_S \rightarrow X$.

On peut expliciter c' de la manière suivante. Soit $\alpha : D_i \rightarrow S$ une région maximale de S . Par définition, c'_α est l'évaluation en $f\alpha$ du cône $H_T \rightarrow X$, c'est-à-dire $c_\beta j$ pour n'importe quelle factorisation $f\alpha = \beta j$, où β est une région maximale de S et j un morphisme de Θ_0 .

Proposition 2.4.3. *Soit C une extension globulaire. Supposons que pour tout i strictement positif, les morphismes σ_i et τ_i admettent une rétraction commune κ_{i-1} dans C . Alors tout flèche $S \rightarrow T$ de Θ_0 est un monomorphisme scindé dans C . De plus, deux morphismes $S \rightarrow T$ dans Θ_0 , identiques en tant que morphismes d'arbres, admettent une rétraction commune dans C .*

Démonstration. Pour $j \geq i \geq 0$, posons $\kappa_j^i = \kappa_i \dots \kappa_{j-2} \kappa_{j-1}$. Le morphisme κ_j^i est une rétraction commune de σ_i^j et τ_i^j .

Soit $f : S \rightarrow T$ une flèche de Θ_0 . Supposons que

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ i'_1 & \cdots & i'_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_n \\ j'_1 & \cdots & j'_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour un entier k entre 1 et n , appelons s_k la dimension maximale d'un sommet de S (vu comme un sous-arbre de T) se trouvant sur la branche joignant la racine de T au k -ième sommet maximal de T . De même, pour k entre 1 et $n-1$, appelons s'_k la dimension maximale d'un sommet de S sur la branche joignant la racine de T à la k -ième région interne de T . On a $s_k \leq j'_k$. La définition des s_k et s'_k entraîne la propriété suivante : pour k entre 1 et $n-1$, si $s_k \geq j'_k$ ou $s_{k+1} \geq j'_k$, alors $t'_k = j'_k$ et si $s_k \leq j'_k$ ou $s_{k+1} \leq j'_k$ alors $s'_k = s_k$. Cette propriété permet de vérifier que le morphisme

$$g = \kappa_{j_1}^{s_1} \amalg_{\kappa_{j'_1}^{s'_1}} \cdots \amalg_{\kappa_{j'_{n-1}}^{s'_{n-1}}} \kappa_{j_n}^{s_n}.$$

est bien définie. La source de g est T par définition. Son but est l'arbre

$$X_{s_1} \amalg_{X_{s'_1}} \cdots \amalg_{X_{s'_{n-1}}} X_{s_n},$$

qui n'est autre que S .

Vérifions qu'on a bien $gf = 1_S$. Soit k un entier entre 1 et m . Avec les notations du paragraphe 2.4.2, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} S & \longrightarrow & T & \longrightarrow & S \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ D_{i_k} & \longrightarrow & D_{j_{f(k)}} & \xrightarrow{\kappa_{j_{f(k)}}^{i_k}} & D_{i_k} \end{array} \quad .$$

Le morphisme gf est donc la somme amalgamée itérée $1_{D_{i_1}} \amalg_{D_{i'_1}} \cdots \amalg_{D_{i'_{m-1}}} 1_{D_{i_m}}$, c'est-à-dire l'identité.

Par ailleurs, la construction du morphisme g ne dépend que du morphisme d'arbres sous-jacent à f . \square

2.5 Sommes globulaires généralisées

2.5.1. Dans toute cette section on se fixe une extension globulaire C munie d'un morphisme d'extensions globulaires $\Theta_0 \rightarrow C$.

Soient

$$X = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ & i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

un arbre et k un entier positif. On dira que X est k -suspendu si pour tout entier l entre 1 et $n-1$, on a $i'_l \geq k$. Si X est k -suspendu, pour j entre 0 et k , on pose

$$X[-j] = \begin{pmatrix} i_1 - j & \cdots & i_n - j \\ & i'_1 - j & \cdots & i'_{n-1} - j \end{pmatrix}.$$

Géométriquement, $X[-j]$ s'obtient en coupant « la tige » de X en dimension j .

Un sous-arbre Z d'un arbre X est dit *complet* si tout sommet non maximal de Z a même nombre de régions que le sommet correspondant dans X . On dit alors que X est un *prolongement* de Z . Si

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \\ & z'_1 & \cdots & z'_{n-1} \end{pmatrix}$$

et X est un prolongement de Z , le tableau des dimensions de X est de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_{p_1}^1 & x_1^2 & \cdots & x_{p_{n-1}}^{n-1} & x_1^n & \cdots & x_{p_n}^n \\ & x'_1 & \cdots & x'_{p_1-1} & z'_1 & x_1'^2 & \cdots & x'_{p_{n-1}-1} & z'_{n-1} & x_1'^n & \cdots & x'_{p_n-1} \end{pmatrix},$$

où pour tout i entre 1 et n et j entre 1 et $p_i - 1$, on a $z_i \leq x_j^i$, $x_j^i < x_j^i$ et $x_j^i < x_{j+1}^i$. On notera

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ & z'_1 & \cdots & z'_{n-1} \end{pmatrix},$$

où pour i entre 1 et n , on a posé

$$X_i = \begin{pmatrix} x_1^i & \cdots & x_{p_i}^i \\ & x_1'^i & \cdots & x_{p_i-1}^i \end{pmatrix}.$$

Les arbres X_i sont z_i -suspendus. Géométriquement, l'arbre X est obtenu en recollant au i -ième sommet maximal de Z l'arbre $X_i[-z_i]$.

Si X est un prolongement de Z , ou plus généralement, si Z est un sous-arbre plein de X , on dispose de deux morphismes σ_Z^X et τ_Z^X de source Z et de but X . On définit σ_Z^X (respectivement τ_Z^X) par l'injection canonique i de Z dans X et le choix pour chaque

sommet maximal s de Z de la région la plus à gauche (respectivement à droite) de $i(s)$. Nous appellerons ces morphismes des *morphismes source généralisés* (respectivement *morphismes but généralisés*).

Soient X_1, \dots, X_n et Y_1, \dots, Y_{n-1} des arbres tels que pour i entier entre 1 et $n-1$, l'arbre Y_i soit un sous-arbre plein de X_i et X_{i+1} . On notera

$$X_1 \amalg_{Y_1} X_2 \amalg_{Y_2} \cdots \amalg_{Y_{n-1}} X_n$$

la limite inductive

$$(X_1, \sigma_{Y_1}^{X_1}) \amalg_{Y_1} (\tau_{Y_1}^{X_2}, X_2, \sigma_{Y_2}^{X_2}) \amalg_{Y_2} \cdots \amalg_{Y_{n-1}} (\tau_{Y_{n-1}}^{X_n}, X_n).$$

Une telle limite n'existe pas toujours. Par exemple, on vérifie facilement que si $\alpha_1 < \alpha_2$ sont les deux régions maximales de $S = D_1 \amalg_{D_0} D_1$, la limite inductive $(S, \alpha_1) \amalg_{D_1} (\alpha_2, S)$ n'existe pas dans Θ_0 . Le but de cette section est de montrer que ces limites existent si pour i entre 1 et $n-1$, les arbres X_i et X_{i+1} sont des prolongements de Y_i . Nous dirons alors que les arbres X_1, \dots, X_n au-dessus des arbres Y_1, \dots, Y_{n-1} forment un *système globulaire généralisé*, et nous appellerons sa limite inductive la *somme globulaire généralisée* des X_1, \dots, X_n au-dessus des Y_1, \dots, Y_{n-1} .

Proposition 2.5.2. *Soient X un arbre, $\alpha : D_i \rightarrow X$ un morphisme source généralisé et Y un prolongement de D_i . Alors $X \amalg_{D_i} Y$ existe dans C et s'obtient en recollant à X l'arbre $Y[-i]$ à droite de la région α .*

Démonstration. Le résultat est claire si $X = D_i$. De même, si α est contenu dans la branche la plus à droite de X , on voit facilement que la somme $X \amalg_{D_i} Y$ est une somme globulaire standard.

Sinon, soit d l'indice du plus grand (pour l'ordre sur les sommets) sommet maximal de X au-dessus de α . Supposons que

$$X = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ i'_1 & \cdots & i'_{m-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_n \\ j'_1 & \cdots & j'_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a alors $d < m$. Appelons S l'arbre obtenu en recollant à X l'arbre $Y[-i]$ à droite de α . On a

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_d & j_1 & \cdots & j_n & i_{d+1} & \cdots & i_n \\ i'_1 & \cdots & i'_{d-1} & i & j'_1 & \cdots & j'_{n-1} & i'_d & i'_{d+1} & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donnons-nous un arbre T . On a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \amalg_{D_i} Y, T) &= \{(f_k : D_{i_k} \rightarrow T)_{1 \leq k \leq m}, (g_k : D_{j_k} \rightarrow T)_{1 \leq k \leq n}\}; \\ f_k \sigma_{i'_k}^{i_k} &= f_{k+1} \tau_{i'_k}^{i_{k+1}} \quad (1 \leq k \leq m-1), \\ g_k \sigma_{j'_k}^{j_k} &= g_{k+1} \tau_{j'_k}^{j_{k+1}} \quad (1 \leq k \leq n-1), \\ f_d \sigma_i^{i_d} &= g_1 \tau_i^{j_1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(S, T) = \{ & (f_k : D_{i_k} \rightarrow T)_{1 \leq k \leq m}, (g_k : D_{j_k} \rightarrow T)_{1 \leq k \leq n}; \\ & f_k \sigma_{i'_k}^{i_k} = f_{k+1} \tau_{i'_k}^{i_{k+1}} \quad (1 \leq k < d, d < k \leq m-1), \\ & g_k \sigma_{j'_k}^{j_k} = g_{k+1} \tau_{j'_k}^{j_{k+1}} \quad (1 \leq k \leq n-1), \\ & f_d \sigma_{i'_d}^{i_d} = g_1 \tau_{i'_d}^{j_1}, g_n \sigma_{i'_d}^{j_n} = f_{d+1} \tau_{i'_d}^{i_{d+1}} \}. \end{aligned}$$

Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que ces deux ensembles d'équations sont équivalents. Pour ce faire, il suffit de vérifier que sous les équations communes aux deux ensembles, on a $f_d \sigma_{i'_d}^{i_d} = g_n \sigma_{i'_d}^{j_n}$. Puisque $\alpha : D_i \rightarrow X$ est un morphisme source généralisé, on a $i'_d < i$. Puisque Y est un prolongement de D_i , par la proposition 2.4.1, si k est un entier entre 1 et $n-1$, on a $g_k \sigma_{i'_d}^{j_k} = g_{k+1} \sigma_{i'_d}^{j_{k+1}}$ ou bien $g_k \sigma_{i'_d}^{j_k} = g_{k+1} \tau_{i'_d}^{j_{k+1}}$. On a donc

$$f_d \sigma_{i'_d}^{i_d} = f_d \sigma_{i'_d}^{i_d} \sigma_{i'_d}^{i_d} = g_1 \tau_{i'_d}^{j_1} \sigma_{i'_d}^{i_d} = g_1 \sigma_{i'_d}^{j_1} \sigma_{i'_d}^{i_d} = g_2 \tau_{i'_d}^{j_2} \sigma_{i'_d}^{i_d} = g_2 \sigma_{i'_d}^{j_2} \sigma_{i'_d}^{i_d} = \cdots = g_n \sigma_{i'_d}^{j_n} \sigma_{i'_d}^{i_d} = g_n \sigma_{i'_d}^{j_n},$$

ce qu'on voulait montrer. \square

Proposition 2.5.3. *Soient X_1, \dots, X_n des arbres et i_1, \dots, i_{n-1} des entiers positifs tels que pour k entre 1 et $n-1$, les arbres X_k et X_{k+1} soient des prolongements de D_{i_k} . Alors la somme amalgamée itérée $X_1 \amalg_{D_{i_1}} \cdots \amalg_{D_{i_{n-1}}} X_n$ existe dans \mathcal{C} .*

Démonstration. Le résultat découle du précédent par récurrence. En effet, on peut mettre en place une récurrence car pour tout k entre 1 et $n-1$, le morphisme que

$$D_{i_k} \rightarrow X_1 \amalg_{D_{i_1}} \cdots \amalg_{D_{i_{k-1}}} X_k$$

est un morphisme source généralisé. \square

2.5.4. Soit Z un prolongement de Y . Supposons que

$$Z = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & \cdots & Y_n \\ i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour k entre 1 et n , puisque l'arbre Y_k est i_k -suspendu, on a $\partial_{i_k} Y_k = D_{i_k}$ et les morphismes $\sigma_{i_k}^{Y_k}, \tau_{i_k}^{Y_k}$ ont donc pour source D_{i_k} . On vérifie facilement qu'on a

$$\sigma_Z^X = \sigma_{i_1}^{X_1} \amalg_{D_{i'_1}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \sigma_{i_n}^{X_n} \quad \text{et} \quad \tau_Z^X = \tau_{i_1}^{X_1} \amalg_{D_{i'_1}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \tau_{i_n}^{X_n}.$$

Lemme 2.5.5. *Soient \mathcal{C} une catégorie et X, A, B, D, A', B' des objets de \mathcal{C} . Donnons-nous des flèches $\iota_D^A : D \rightarrow A, \iota_D^B : D \rightarrow B, \iota_D^{A'} : D \rightarrow A', \iota_D^{B'} : D \rightarrow B'$ telles que les sommes amalgamées $A \amalg_D B$ et $A' \amalg_D B'$ existent dans \mathcal{C} . Soient $(f_{A'}, f_{B'}) : A' \amalg_D B' \rightarrow X$ deux morphismes de \mathcal{C} et $g_{A'} : A' \rightarrow A, g_{B'} : B' \rightarrow B$ deux morphismes de \mathcal{C} induisant un morphisme $A' \amalg_D B' \rightarrow A \amalg_D B$. Alors on a*

$$X \amalg_{A' \amalg_D B'} (A \amalg_D B) \simeq (X \amalg_{A'} A) \amalg_{B'} B$$

dans la catégorie copréfaisceaux sur \mathcal{C} .

Démonstration. Soit Y un objet de \mathcal{C} . On a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\check{\mathcal{C}}}(X \amalg_{A' \amalg_D B'} (A \amalg_D B), Y) &= \{h_X : X \rightarrow Y, h_A : A \rightarrow Y, h_B : B \rightarrow Y; \\ &h_{A'} \iota_D^A = h_{B'} \iota_D^B, h_X f_{A'} = h_A g_{A'}, h_X f_{B'} = h_B g_{B'}\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\check{\mathcal{C}}}((X \amalg_{A'} A) \amalg_{B'} B, Y) &= \{h_X : X \rightarrow Y, h_A : A \rightarrow Y, h_B : B \rightarrow Y; \\ &h_X f_{A'} = h_A g_{A'}, h_X f_{B'} = h_B g_{B'}\}. \end{aligned}$$

Or les égalités $h_X f_{A'} = h_A g_{A'}$ et $h_X f_{B'} = h_B g_{B'}$ entraînent

$$h_A g_{A'} \iota_D^{A'} = h_X f_{A'} \iota_D^{A'} = h_X f_{B'} \iota_D^{B'} = h_B g_{B'} \iota_D^{B'},$$

et donc $h_{A'} \iota_D^A = h_{B'} \iota_D^B$ car $g_{A'} \iota_D^{A'} = \iota_D^A$ et $g_{B'} \iota_D^{B'} = \iota_D^B$. Ceci montre que les deux copréfaisceaux de l'énoncé sont canoniquement isomorphes. \square

Proposition 2.5.6. *Soient X, Y et Z trois arbres. Donnons-nous un morphisme source généralisé $Z \rightarrow X$ et supposons que Y est un prolongement de Z . Alors la somme amalgamée $X \amalg_Z Y$ existe dans \mathcal{C} .*

Démonstration. Supposons que

$$Z = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & \cdots & Y_n \\ i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par la proposition 2.5.2 et la preuve de la proposition 2.5.3, on a $Y = Y_1 \amalg_{D_{i'_1}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} Y_n$. Par ailleurs, le morphisme but généralisé $Z \rightarrow Y$ est une somme amalgamée de morphismes but généralisés au-dessus des $D_{i'_k}$ (voir le paragraphe 2.5.4). On a donc par le lemme précédent,

$$X \amalg_Z Y \simeq ((X \amalg_{D_{i_1}} Y_1) \amalg_{D_{i_2}} Y_2) \cdots \amalg_{D_{i_n}} Y_n.$$

Or le copréfaisceau de droite est représentable. En effet, cela résulte par récurrence de la proposition 2.5.2 car pour tout k entre 1 et n , le morphisme

$$D_{i_k} \rightarrow ((X \amalg_{D_{i_1}} Y_1) \amalg_{D_{i_2}} Y_2) \cdots \amalg_{D_{i_{k-1}}} Y_{k-1}$$

est un morphisme source généralisé. \square

Proposition 2.5.7. *Soient X_1, \dots, X_n et Y_1, \dots, Y_{n-1} des arbres tels que pour i entier entre 1 et $n-1$, les arbres X_i et X_{i+1} soient des prolongements de Y_i . Alors la somme globulaire généralisée*

$$X_1 \amalg_{Y_1} \cdots \amalg_{Y_{n-1}} X_n$$

existe dans \mathcal{C} .

Démonstration. Le résultat découle du précédent par récurrence. En effet, on peut mettre en place une récurrence car pour tout k entre 1 et $n - 1$, le morphisme que

$$Y_k \rightarrow X_1 \amalg_{Y_1} \cdots \amalg_{Y_{k-1}} X_k$$

est un morphisme source généralisé. \square

Proposition 2.5.8. *Soient D une catégorie et F un foncteur de C vers D . Si F commute aux sommes globulaires, alors F commute aux sommes globulaires généralisées.*

Démonstration. Cela découle du fait que les sommes globulaires généralisées peuvent s'exprimer comme des sommes globulaires usuelles. \square

2.6 Complétion globulaire

2.6.1. Soit C une catégorie au-dessous de Θ_0 . On appellera *complétion globulaire* toute extension globulaire D munie d'un foncteur $C \rightarrow D$ au-dessous de Θ_0 , telle que pour toute extension globulaire D' munie d'un foncteur $C \rightarrow D'$ au-dessous de Θ_0 , il existe un unique foncteur $D \rightarrow D'$ tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & D \\ & \nearrow & \downarrow \\ C & & D' \\ & \searrow & \end{array}$$

soit commutatif. Deux complétions globulaires sont canoniquement isomorphes et on parlera donc de la complétion globulaire. Le but de cette section est de montrer qu'elle existe toujours. On la notera $\text{Glob}(C)$.

Proposition 2.6.2. *Soit C une catégorie. Fixons $(F_k : I_k \rightarrow C)_{k \in K}$ une famille de foncteurs, indexée par un ensemble K , de source des petites catégories I_k , et une famille de cônes $(\varepsilon_k : F_k \rightarrow c_k)_{k \in K}$ où les c_k sont des objets de C .*

Il existe une catégorie D et un foncteur $p : C \rightarrow D$ qui ont les deux propriétés suivantes :

- pour tout k dans K , le cône $p * \varepsilon_k : pF_k \rightarrow p(c_k)$ est un cône limite inductive ;
- pour toute catégorie D' et tout foncteur $p' : C \rightarrow D'$ tels que pour tout k dans K , le cône $p' * \varepsilon_k : p'F_k \rightarrow p'(c_k)$ soit un cône limite inductive, il existe un unique foncteur $h : D \rightarrow D'$ tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} & & D \\ & \nearrow p & \downarrow h \\ C & & D' \\ & \searrow p' & \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. Soit α un ordinal de cofinalité strictement supérieure aux cardinaux des $\text{Fl}(I_k)$ pour k dans K , c'est-à-dire tel que pour tout k dans K et toute application $f : \text{Fl}(I_k) \rightarrow \alpha$, l'image de f n'est pas cofinale dans α . On va construire par récurrence transfinie une α -suite de catégories $(C_\beta)_{\beta < \alpha}$ telle que $\text{Ob}(C_\beta) = \text{Ob}(C)$ pour tout $\beta < \alpha$ et que les foncteurs de la suite soient l'identité sur les objets.

On pose $C_0 = C$.

Supposons la suite construite pour $\beta < \alpha$ et définissons-la jusqu'à $\beta+1$. On commence par définir un graphe $G_{\beta+1}$. Les sommets de $G_{\beta+1}$ sont les objets de C . Les arêtes sont de deux types :

- pour tout morphisme $u : c \rightarrow c'$ de C_β , on a une arête $[u]$ de source c et de but c' ;
- pour tout cône $\delta : F_k \rightarrow c$ de C_β , on a une arête $[\delta]$ de source c_k et de but c .

La catégorie $C_{\beta+1}$ est la catégorie libre sur le graphe $G_{\beta+1}$ soumise aux relations

- $[vu] = [v][u]$ pour $c \xrightarrow{u} c' \xrightarrow{v} c''$ dans C_β ;
- $[1_c] = 1_c$ pour c dans $\text{Ob}(C_\beta) = \text{Ob}(C)$;
- $[v\delta] = [v][\delta]$ pour $F_k \xrightarrow{\delta} c$ un cône dans C_β et $c \xrightarrow{v} c'$ un morphisme de C_β ;
- $[\delta_i] = [\delta][\varepsilon_{k,i}]$ pour un cône $\delta : F_k \rightarrow c$ dans C_β et i dans I_k ;
- $[\varepsilon_k] = 1_{c_k}$ pour k dans K .

On a un foncteur canonique de C_β dans $C_{\beta+1}$. Si β est un ordinal limite, on pose $C_\beta = \varinjlim_{\gamma < \beta} C_\gamma$. Enfin, on pose $D = \varinjlim_{\alpha} C_\beta$. On a un foncteur canonique de $p : C \rightarrow D$.

Montrons que $p * \varepsilon_k : pF_k \rightarrow p(c_k) = c_k$ est un cône limite inductive. Soit $\delta : pF_k \rightarrow c$ un cône de D . Il s'agit de montrer que δ se factorise par $p * \varepsilon_k$ de manière unique. Puisque la cofinalité de α est strictement supérieure au cardinal de I_k , il existe un ordinal $\beta < \alpha$ tel que les composantes de δ sont dans C_β . On a donc un morphisme $[\delta] : c_k \rightarrow c$ dans la catégorie $C_{\beta+1}$. Le triangle

$$\begin{array}{ccc} & c_k & \\ \varepsilon_k \nearrow & & \downarrow [\delta] \\ F_k & & c \\ & \delta \searrow & \end{array}$$

de $C_{\beta+1}$ est commutatif car pour tout i dans I_k , on a $[\delta][\varepsilon_{k,i}] = [\delta_i]$. Supposons maintenant qu'on a deux factorisations $u, v : c_k \rightarrow c$. Par la propriété de cofinalité de α , ces deux factorisations existent déjà dans un certain C_β . On a donc $u\varepsilon_k = v\varepsilon_k$ dans C_β . Or $[u\varepsilon_k] = [u][\varepsilon_k] = [u]$ dans $C_{\beta+1}$. De même, $[v\varepsilon_k] = [v]$. D'où $[u] = [v]$ dans $C_{\beta+1}$ et $u = v$ dans D .

Montrons maintenant que D a la propriété universelle annoncée. Soit donc p' un foncteur $C \rightarrow D'$ dans l'énoncé. Construisons par récurrence sur α des foncteurs $h_\beta : C_\beta \rightarrow D'$ au-dessous de C pour $\beta < \alpha$. Pour $\beta = 0$, on pose $h_0 = 1_C$. Pour β ordinal limite, on pose $h_\beta = \varinjlim_{\gamma < \beta} h_\gamma$. Pour définir $h_{\beta+1}$, on prolonge h_β de la manière suivante. Soit $\delta : I_k \rightarrow c$ un cône à valeurs dans C_β . On envoie $[\delta]$ sur la flèche universelle de D' correspondant au cône $h_\beta(\delta)$. On obtient ainsi un morphisme de graphes $G_{\beta+1} \rightarrow D'$ et puisqu'il vérifie les relations définissant $C_{\beta+1}$, il induit un foncteur $C_{\beta+1} \rightarrow D'$ au-dessous de C . On pose $h = \varinjlim_{\alpha} h_\beta$. Le foncteur h est bien au-dessous de C . Tout foncteur $h' : D \rightarrow D'$ au-dessous de C peut se construire par récurrence et il est clair

que le choix qu'on a fait pour l'image d'un cône est imposé par le fait que h' préserve les cônes limites ε_k . D'où l'unicité de h . \square

Corollaire 2.6.3. *Si C est une catégorie au-dessous de Θ_0 , sa complétion globulaire existe.*

Démonstration. On applique le théorème précédent avec K l'ensemble des tableaux des dimensions, $I_k = \mathbf{I}_k$, F_k les systèmes globulaires à valeurs dans C , ε_k l'image par $\Theta_0 \rightarrow C$ des cônes universels associés aux sommes globulaires. \square

Remarque 2.6.4. On peut choisir pour l'ordinal α de la preuve de la proposition 2.6.2 l'ordinal ω . La complétion globulaire est donc construite comme limite inductive d'une suite.

2.7 Homogénéité

2.7.1. Soient C une préthéorie globulaire et f une flèche de C . On rappelle que f est dite globulaire si elle est dans l'image du foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$. On dira que f est *algébrique* si, dès que $f = ia$ où i est globulaire et a est dans C , la flèche i est une identité.

On dit que C est *homogène* s'il existe une sous-catégorie A de C telle que, pour toute flèche f de C , il existe une unique décomposition $f = ia$ où i est globulaire et a est dans A .

Proposition 2.7.2. *Soit C une préthéorie globulaire. Si A est une sous-catégorie de C vérifiant la propriété de la définition précédente, alors l'ensemble des morphismes de A est l'ensemble des flèches algébriques.*

Démonstration. Soit a une flèche de A . Supposons qu'on ait $a = ia'$ avec i globulaire et a' dans C . Il existe une décomposition $a' = i'a''$ avec i' globulaire et a'' dans A . Alors $a = ii'a''$. D'où $ii' = 1$ dans C . Puisque le foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$ est fidèle, on a $ii' = 1$ dans Θ_0 et donc $i = 1$ dans Θ_0 . D'où a est algébrique.

Soit b une flèche algébrique de C . Il existe une décomposition $b = ia$ avec i globulaire et a dans A . Puisque b est algébrique, on a $i = 1$ et donc $b = a$ est dans A . \square

Exemple 2.7.3. L'exemple fondamental de théorie globulaire homogène est la catégorie Θ qui sera définie dans la section 3.2 (voir la proposition 3.3.10).

2.7.4. Si C est une préthéorie globulaire homogène, la proposition précédente entraîne que l'ensemble des flèches algébriques est stable par composition. On notera C_{alg} la catégorie des flèches algébriques. Si f est une flèche de C , on appellera *décomposition algébrique de f* la décomposition $f = ia$ avec i globulaire et a algébrique. On notera cette décomposition $f = f_{\text{glob}}f_{\text{alg}}$.

Proposition 2.7.5. *Soit C une préthéorie globulaire homogène. Les flèches globulaires sont des monomorphismes dans C .*

Démonstration. Soit i une flèche globulaire. Supposons qu'on ait $if = if'$ dans C . Soient $f = ja$ et $f' = j'a'$ les décompositions algébriques de f et f' . On a alors $ija = ij'a'$ et donc $ij = ij'$ et $a = a'$ dans C . Puisque le foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$ est fidèle, on a également $ij = ij'$ dans Θ_0 et donc $j = j'$ car toute flèche de Θ_0 est un monomorphisme. D'où $f = f'$. \square

2.7.6. Soient C et D deux préthéories globulaires homogènes. Un *morphisme de théories globulaires homogènes* ou *foncteur homogène* de C vers D est un morphisme de préthéories globulaires de C vers D qui envoie les flèches algébriques de C dans les flèches algébriques de D . On dira que C est *homogène sur D* si C est munie d'un foncteur homogène de C vers D .

Soit C une préthéorie globulaire au-dessus d'une préthéorie globulaire D via un foncteur F . On dira qu'une flèche f de C est *algébrique sur D* si $F(f)$ est algébrique dans D .

Proposition 2.7.7. *Soit $F : C \rightarrow D$ un morphisme de préthéories globulaires. Si f est une flèche de C algébrique sur D , alors f est algébrique dans C .*

Démonstration. Si $f = ia$ avec i globulaire, alors $F(f) = iF(a)$. Par hypothèse $F(f)$ est algébrique et on a $i = 1$ dans D et donc dans Θ_0 . \square

Proposition 2.7.8. *Soit $F : C \rightarrow D$ un morphisme de préthéories globulaires homogènes. Alors les flèches algébriques de C sont les flèches algébriques sur D .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. \square

Proposition 2.7.9. *Soit C une préthéorie globulaire au-dessus d'une préthéorie globulaire homogène D via un foncteur F . Si pour toute flèche f de C , il existe une unique décomposition $f = ia$ où i est globulaire et a est algébrique sur D , alors F fait de C une préthéorie globulaire homogène sur D .*

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'ensemble des morphismes envoyés par F sur une flèche algébrique est stable par composition. \square

Proposition 2.7.10. *Soit C une préthéorie globulaire au-dessus d'une préthéorie globulaire homogène D . Si les flèches globulaires sont des monomorphismes dans C , alors toute flèche f de C admet au plus une décomposition de la forme $f = ia$ avec i globulaire et a algébrique sur D .*

Démonstration. Appelons F le foncteur de C vers D . Soient $f = ia = i'a'$ deux telles décompositions. On a $F(f) = iF(a) = i'F(a')$ dans D . Puisque D est homogène, on a $i = i'$ dans D et donc dans Θ_0 . D'où $ia = ia'$ dans C et donc $a = a'$ par hypothèse. \square

Proposition 2.7.11. *Soit I une petite catégorie filtrante et $F : I \rightarrow \text{Cat}$ un foncteur. Appelons C la limite inductive du foncteur F .*

1. Si le foncteur F se factorise par la catégorie des extensions globulaires, alors les foncteurs $F(i) \rightarrow C$, pour i dans I , sont globulaires. En particulier, C est canoniquement une extension globulaire.
2. Donnons-nous une théorie globulaire homogène D . Si le foncteur F se factorise par la catégorie des théories globulaires homogènes sur D , alors C est canoniquement une théorie globulaire homogène sur D .

Démonstration. 1. Soit S un tableau des dimensions. Pour i dans I , on notera c_i le cône limite inductive $F_S \rightarrow S$ dans $F(i)$ associé à S et G_i le foncteur $F(i) \rightarrow C$. Fixons i dans I . Il s'agit de montrer que $G_i * c_i : F_S \rightarrow G_i(S)$ est un cône limite inductive dans C . Soit $d : F_S \rightarrow X$ un second cône dans C . Puisque la catégorie d'indice de F_S est finie et que I est filtrante, ce cône provient d'un cône d' dans $F(i')$ avec $i' > i$. Or le foncteur $F(i) \rightarrow F(i')$ envoie c_i sur le cône $c_{i'}$. Il existe donc un morphisme de cônes $c_{i'} \rightarrow d'$ et donc un morphisme de cône $\alpha : G_i * c_i = G_{i'} * c_{i'} \rightarrow d = G_{i'} * d'$. Soit β un second tel morphisme. Puisque la catégorie d'indice de F_S est finie et que I est filtrante, ce morphisme provient de $F(i'')$ avec $i'' > i'$. Il vient que $\alpha = \beta$ dans $F(i'')$ et donc dans C .

2. La catégorie C hérite d'un foncteur $C \rightarrow D$. Choisissons i dans I . On dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Theta_0 & \longrightarrow & F(i) & \longrightarrow & C \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & D & & \end{array} .$$

Par 1, le foncteur $F(i) \rightarrow C$ est globulaire. Il en est donc de même du foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$. Puisque les foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$ et $\Theta_0 \rightarrow D$ sont globulaires, le foncteur $C \rightarrow D$ l'est également. De plus, puisque $\Theta_0 \rightarrow D$ est fidèle, le foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$ est fidèle. Ainsi, C est une théorie globulaire.

Soit f un morphisme de C . Le morphisme f provient d'une catégorie $F(i)$ pour un i dans I et admet donc une décomposition $f = ja$ dans C , provenant de $F(i)$, où j est globulaire et a est algébrique sur D . Soit $f = j'a'$ une seconde décomposition de f dans C , où j' est globulaire et a' est algébrique sur D . Cette décomposition provient d'une décomposition algébrique dans une catégorie $F(i')$ pour un i' dans I . Puisque I est filtrante, ces deux décompositions proviennent d'une même catégorie $F(i'')$ pour un i'' dans I et il vient que $j = j'$ et $a = a'$ dans $F(i'')$ et donc dans C . Le résultat suit par la proposition 2.7.9. \square

Chapitre 3

Les catégories Θ et $\tilde{\Theta}$

3.1 Extensions globulaires catégoriques et groupoidales

3.1.1. Une extension globulaire $F : \mathbb{G} \rightarrow C$ est précatégorique (respectivement catégorique, prégroupoïdale, groupoïdale) si $F^\circ : \mathbb{G}^\circ \rightarrow C^\circ$ induit sur C° une structure de ∞ -précatégorie (respectivement de ∞ -catégorie stricte, de ∞ -prégroupoïde, de ∞ -groupoïde strict). Précisons ces notions.

Une *extension globulaire précatégorique* est une extension globulaire munie de morphismes

$$\begin{aligned} \nabla_j^i : D_i &\rightarrow D_i \amalg_{D_j} D_i, & i > j \geq 0, \\ \kappa_i : D_{i+1} &\rightarrow D_i, & i \geq 0, \end{aligned}$$

vérifiant les axiomes suivants :

1. pour tout i positif, on a

$$\kappa_i \sigma_{i+1} = 1_{D_i} \quad \text{et} \quad \kappa_i \tau_{i+1} = 1_{D_i};$$

2. pour tous i, j tels que $i > j \geq 0$, on a

$$\nabla_j^i \sigma_i = \begin{cases} \varepsilon_2 \sigma_i, & \text{si } j = i - 1, \\ (\sigma_i \amalg_{D_j} \sigma_i) \nabla_j^{i-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\nabla_j^i \tau_i = \begin{cases} \varepsilon_1 \tau_i, & \text{si } j = i - 1, \\ (\tau_i \amalg_{D_j} \tau_i) \nabla_j^{i-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$ désignent les flèches canoniques.

Si C est une extension globulaire précatégorique, on notera

$$\kappa_i^j = \kappa_j \dots \kappa_{i-2} \kappa_{i-1}, \quad i \geq j \geq 0,$$

et

$$\nabla_i = \nabla_{i-1}^i, \quad i > 0.$$

Une extension globulaire précatégorique est *catégorique* si elle satisfait les axiomes suivantes :

(CC1) Associativité

Pour tous entiers i, j tels que $i > j \geq 0$, le carré

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{\nabla_j^i} & D_i \amalg_{D_j} D_i \\ \nabla_j^i \downarrow & & \downarrow 1_{D_i} \amalg_{D_j} \nabla_j^i \\ D_i \amalg_{D_j} D_i & \xrightarrow{\nabla_j^i \amalg_{D_j} 1_{D_i}} & D_i \amalg_{D_j} D_i \amalg_{D_j} D_i \end{array}$$

est commutatif ;

(CC2) Loi d'échange

Pour tous entiers i, j, k tels que $i > j > k \geq 0$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & D_i & \\ & \swarrow \nabla_k^i & \searrow \nabla_j^i \\ D_i \amalg_{D_k} D_i & & D_i \amalg_{D_j} D_i \\ \nabla_j^i \amalg_{D_k} \nabla_j^i \downarrow & & \downarrow \nabla_k^i \amalg_{\nabla_j^i} \nabla_k^i \\ (D_i \amalg_{D_j} D_i) \amalg_{D_k} (D_i \amalg_{D_j} D_i) & \simeq & (D_i \amalg_{D_k} D_i) \amalg_{D_j \amalg_{D_k} D_j} (D_i \amalg_{D_k} D_i), \end{array}$$

où la somme amalgamée itérée à droite est la somme globulaire généralisée

$$(D_i \amalg_{D_k} D_i, \sigma_j^i \amalg_{D_k} \sigma_j^i) \amalg_{D_j \amalg_{D_k} D_j} (\tau_j^i \amalg_{D_k} \tau_j^i, D_i \amalg_{D_k} D_i),$$

qui existe d'après la proposition 2.5.7, est commutatif ;

(CC3) Unités

Pour tous entiers i, j tels que $i > j \geq 0$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & D_i & & \\ & \swarrow \sim & \downarrow \nabla_j^i & \searrow \sim & \\ D_j \amalg_{D_j} D_i & \xleftarrow{\kappa_i^j \amalg_{D_j} 1_{D_i}} & D_i \amalg_{D_j} D_i & \xrightarrow{1_{D_i} \amalg_{D_j} \kappa_i^j} & D_i \amalg_{D_j} D_j \end{array}$$

est commutatif ;

(CC4) Functorialité des unités

Pour tous entiers i, j tels que $i > j \geq 0$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 D_{i+1} & \xrightarrow{\nabla_j^{i+1}} & D_{i+1} \amalg_{D_j} D_{i+1} \\
 \kappa_i \downarrow & & \downarrow \kappa_i \amalg_{D_j} \kappa_i \\
 D_i & \xrightarrow{\nabla_j^i} & D_i \amalg_{D_j} D_i
 \end{array}$$

est commutatif.

3.1.2. Une *extension globulaire prégroupoïdale* est une extension globulaire précatégorique munie de morphismes

$$\Omega_j^i : D_i \rightarrow D_i, \quad i > j \geq 0,$$

tels que pour tous i, j vérifiant $i > j \geq 0$, on ait

$$\Omega_j^i \sigma_i = \begin{cases} \tau_i & \text{si } j = i - 1, \\ \sigma_i \Omega_j^{i-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\Omega_j^i \tau_i = \begin{cases} \sigma_i & \text{si } j = i - 1, \\ \tau_i \Omega_j^{i-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une extension prégroupoïdale est *groupoïdale* si elle satisfait les axiomes (CC1), (CC2), (CC3), (CC4), ainsi que l'axiome additionnel suivant :

(CG1) Inverse

Pour tous i, j tels que $i > j \geq 0$, les carrés

$$\begin{array}{ccc}
 D_i & \xrightarrow{\kappa_i^j} & D_j \\
 \nabla_j^i \downarrow & & \downarrow \sigma_j^i \\
 D_i \amalg_{D_j} D_i & \xrightarrow{(\Omega_j^i, 1_{D_i})} & D_i
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 D_i & \xrightarrow{\kappa_i^j} & D_j \\
 \nabla_j^i \downarrow & & \downarrow \tau_j^i \\
 D_i \amalg_{D_j} D_i & \xrightarrow{(1_{D_i}, \Omega_j^i)} & D_i
 \end{array}$$

sont commutatifs.

Pour des raisons analogues à celles exposées dans le paragraphe 1.1.2, dans une extension globulaire groupoïdale, les diagrammes suivants sont automatiquement commutatifs :

(CG2) Functorialité des inverses

Pour tous entiers i, j, j' tels que $i > j \neq j' \geq 0$, les carrés

$$\begin{array}{ccc}
 D_i & \xrightarrow{\nabla_j^i} & D_i \amalg_{D_j} D_i \\
 \Omega_j^i \downarrow & & \downarrow (\varepsilon_2 \Omega_j^i, \varepsilon_1 \Omega_j^i) \\
 D_i & \xrightarrow{\nabla_j^i} & D_i \amalg_{D_j} D_i
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 D_i & \xrightarrow{\nabla_j^i} & D_i \amalg_{D_j} D_i \\
 \Omega_{j'}^i \downarrow & & \downarrow (\varepsilon_1 \Omega_{j'}^i, \varepsilon_2 \Omega_{j'}^i) \\
 D_i & \xrightarrow{\nabla_j^i} & D_i \amalg_{D_j} D_i,
 \end{array}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_j} D_i$ désignent les flèches canoniques, sont commutatifs.

Si C est une extension globulaire groupoïdale, on notera pour $i > 0$,

$$\Omega_i = \Omega_{i-1}^i.$$

3.1.3. Si C est une extension globulaire précatégorique (respectivement catégorique, pré-groupoïdale, groupoïdale) et D est une catégorie, le foncteur $i : \mathbb{G} \rightarrow \Theta_0$ induit un foncteur de $\text{Mod}(C, D)$ vers $\infty\text{-PCat}(D)$ (respectivement $\infty\text{-Cat}(D)$, $\infty\text{-PGrp}(D)$, $\infty\text{-Grp}(D)$).

3.2 La catégorie Θ

Proposition 3.2.1. *Il existe une extension globulaire catégorique Θ telle que pour toute catégorie D , le foncteur*

$$U : \text{Mod}(\Theta, D) \rightarrow \infty\text{-Cat}(D)$$

soit une équivalence de catégories, admettant un quasi-inverse G tel que UG soit le foncteur identité.

Démonstration. Soit Θ_{pcat} la complétion globulaire de la catégorie obtenue en adjoignant formellement à Θ_0 des morphismes κ_i et ∇_j^i vérifiant les relations des extensions globulaires précatégoriques.

Appelons Θ la complétion globulaire de la catégorie obtenue à partir de Θ_{pcat} en imposant formellement les relations des extensions globulaires catégoriques. L'extension globulaire Θ est par définition catégorique.

Soit D une catégorie. Le foncteur $\text{Mod}(\Theta, D) \rightarrow \infty\text{-Cat}(D)$ se factorise en

$$\text{Mod}(\Theta, D) \rightarrow \infty\text{-Cat}'(D) \rightarrow \infty\text{-Cat}(D)$$

où $\infty\text{-Cat}'(D)$ est la catégorie des préfaisceaux globulaires X sur Θ_0 , munis de morphismes $*_j^i : X_i \times_{X_j} X_i \rightarrow X_i$ et $k_i : X_i \rightarrow X_{i+1}$, qui induisent *via* le foncteur $\mathbb{G} \rightarrow \Theta_0$ un objet de $\infty\text{-Cat}(D)$.

Les propriétés universelles successives des opérations aboutissant à la construction de Θ entraînent que le foncteur $\text{Mod}(\Theta, D) \rightarrow \infty\text{-Cat}'(D)$ est une équivalence de catégories. Par ailleurs, la propriété universelle de la catégorie Θ_0 implique que le foncteur $\infty\text{-Cat}'(D) \rightarrow \infty\text{-Cat}(D)$ est une équivalence de catégories. On en déduit que le foncteur

$\text{Mod}(\Theta, D) \rightarrow \infty\text{-Cat}(D)$ est une équivalence de catégories et la catégorie Θ convient donc.

Le fait qu'on puisse choisir un quasi-inverse G tel que UG soit l'identité résulte du fait qu'on peut choisir un tel quasi-inverse pour les équivalences $\text{Mod}(\Theta, D) \rightarrow \infty\text{-Cat}'(D)$ et $\infty\text{-Cat}'(D) \rightarrow \infty\text{-Cat}(D)$ (voir la proposition 2.2.1 pour le second foncteur). \square

3.2.2. La preuve du lemme de 2-Yoneda implique que deux extensions globulaires vérifiant la propriété universelle précédente sont équivalentes de manière unique à un unique isomorphisme naturel près. Il résultera de la section suivante que les objets d'une telle extension globulaire n'ont pas d'automorphismes non triviaux. Une telle extension globulaire squelettique est donc définie à un unique isomorphisme près. On appellera Θ cette extension globulaire squelettique. La propriété universelle de Θ_0 fournit un unique morphisme $\Theta_0 \rightarrow \Theta$.

Proposition 3.2.3. *Pour toute extension catégorique C , il existe un morphisme d'extensions catégoriques $\Theta \rightarrow C$, unique à unique isomorphisme naturel près.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente appliquée à $D = C^\circ$. \square

Proposition 3.2.4. *Soit D une extension globulaire catégorique telle que le foncteur*

$$\text{Mod}(D) \rightarrow \infty\text{-Cat}$$

soit une équivalence de catégories. Alors les catégories D et Θ sont équivalentes de manière unique à un unique isomorphisme de foncteurs près.

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 2.2.5 \square

3.3 Description combinatoire de Θ

3.3.1. Nous allons dans cette section donner une description combinatoire de la catégorie Θ . Pour ne pas nous embarrasser d'une notation temporaire, nous allons oublier notre précédente définition de Θ et redéfinir cette catégorie. Nous montrerons à la fin de cette section que cette nouvelle catégorie est canoniquement isomorphe à celle définie dans la section précédente.

3.3.2. Soit S un arbre. On appellera *sous-arbre de S dans Θ_0* un arbre T muni d'un morphisme $i : T \rightarrow S$ dans Θ_0 . On notera (T, i) ce sous-arbre. Si le contexte le permet, on le notera simplement T .

Définissons maintenant le catégorie Θ . Les objets de Θ sont les arbres. Soient S et T deux arbres. Un morphisme $f : S \rightarrow T$ dans Θ est la donnée, pour chaque région α de S de dimension i , d'un sous-arbre $f(\alpha) = (T_\alpha, f_\alpha)$ de T dans Θ_0 de dimension au plus i , telle que pour toute région α de dimension supérieure ou égale à 1, on ait

$$f_{\alpha\sigma_i} = f_\alpha\sigma_{i-1}^{T_\alpha} \quad \text{et} \quad f_{\alpha\tau_i} = f_\alpha\tau_{i-1}^{T_\alpha}.$$

Supposons qu'on ait

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & & \cdots & & i_m \\ & i'_1 & & \cdots & & i'_{m-1} \end{pmatrix}$$

et appelons $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les régions maximales de S . Alors pour tout entier k entre 1 et $m-1$, on a

$$f_{\alpha_k} \sigma_{i'_k}^{T_{\alpha_k}} = f_{\alpha_{k+1}} \tau_{i'_k}^{T_{\alpha_{k+1}}}.$$

La proposition suivante est la réciproque de cette observation.

Proposition 3.3.3. *Soient S et T deux arbres. Supposons qu'on ait*

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & & \cdots & & i_m \\ & i'_1 & & \cdots & & i'_{m-1} \end{pmatrix}$$

et appelons $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les régions maximales de S . Donnons-nous pour toute région maximale α de S , un sous-arbre (T_α, f_α) de T dans Θ_0 de dimension inférieure à la dimension de α , de sorte que pour tout entier k entre 1 et $m-1$, on ait

$$f_{\alpha_k} \sigma_{i'_k}^{T_{\alpha_k}} = f_{\alpha_{k+1}} \tau_{i'_k}^{T_{\alpha_{k+1}}}.$$

Alors, si pour tout entier k entre 1 et m et tout entier j entre 0 et i_k on pose

$$f_{\alpha_k} \sigma_j^{i_k} = f_{\alpha_k} \sigma_j^{T_{\alpha_k}} \quad \text{et} \quad f_{\alpha_k} \tau_j^{i_k} = f_{\alpha_k} \tau_j^{T_{\alpha_k}},$$

le morphisme f_β est bien défini pour toute région β de S et cette donnée définit un morphisme de S vers T dans Θ .

Démonstration. Il s'agit de montrer que les f_β sont bien définis. Le fait qu'ils définiront alors un morphisme de Θ est clair.

Commençons par traiter le cas $m = 2$. Soit β une région de T au-dessous de α_1 et α_2 (il n'y a rien à vérifier pour les autres régions). Si β est l'unique région interne de S , f_β est bien défini car on a

$$f_{\alpha_1} \sigma_{i'_1}^{T_{\alpha_1}} = f_{\alpha_2} \tau_{i'_1}^{T_{\alpha_2}}$$

par hypothèse. Sinon, β est strictement au-dessous de la région interne de S . Notons d sa dimension. On a $d < i'_1$. Supposons que β soit à droite du sommet auquel elle est associée (on traite le cas gauche de manière analogue). On a alors $\beta = \alpha_1 \sigma_d^{i'_1} = \alpha_2 \sigma_d^{i'_2}$. Il s'agit donc de vérifier que

$$f_{\alpha_1} \sigma_d^{T_{\alpha_1}} = f_{\alpha_2} \sigma_d^{T_{\alpha_2}}.$$

Or

$$f_{\alpha_1} \sigma_d^{T_{\alpha_1}} = f_{\alpha_1} \sigma_{i'_1}^{T_{\alpha_1}} \sigma_d^{i'_1} = f_{\alpha_2} \tau_{i'_1}^{T_{\alpha_2}} \sigma_d^{i'_1} = f_{\alpha_2} \sigma_{i'_1}^{T_{\alpha_2}},$$

ce qui achève la démonstration du cas $m = 2$.

Démontrons le cas général. Dans ce but, considérons la sous-catégorie \tilde{S} de \mathbb{G}/S définie dans le paragraphe 2.3.21 et β une région de S de dimension d . Le résultat découle

essentiellement de la connexité de la catégorie $\tilde{\beta} = \beta \setminus \tilde{S}$, établie dans le lemme 2.3.22, et du cas $m = 2$.

Expliquons cela. Pour k entre 1 et $m - 1$, on note $\alpha'_k : D_{i'_k} \rightarrow S$ la k -ième région interne de S , et on pose

$$f_{\alpha'_k} = f_{\alpha_k} \sigma_{i'_k}^{T_{\alpha_k}} = f_{\alpha_{k+1}} \tau_{i'_k}^{T_{\alpha_{k+1}}}.$$

On associe ainsi à toute région maximale ou interne de S , un sous-arbre $f_\alpha : T_\alpha \rightarrow T$ dans Θ_0 . Un objet de $\tilde{\beta}$ est un couple $X = ((D_l, \alpha : D_l \rightarrow S), g : D_d \rightarrow D_l)$, où α est une région maximale ou interne de S et g est un morphisme de Θ_0 , tel que $\beta = \alpha g$. À un tel objet X , on associe un sous-arbre F_X de T dans Θ_0 : si g est un morphisme source, on pose $F_X = f_\alpha \sigma_d^{T_\alpha}$, et si g est un morphisme but, on pose $F_X = f_\alpha \tau_d^{T_\alpha}$. On a ainsi défini une fonction F des objets de $\tilde{\beta}$ vers l'ensemble des sous-arbres de T dans Θ_0 . Dire que f_β est bien défini signifie exactement que la fonction F est constante.

La catégorie $\tilde{\beta}$ étant connexe, il suffit de montrer que s'il existe une flèche dans $\tilde{\beta}$ de $X' = ((D_{l'}, \alpha'), g')$ vers $X = ((D_l, \alpha), g)$, alors $F_{X'} = F_X$. Considérons u une telle flèche qui ne soit pas une identité. Par définition des morphismes de \tilde{S} , il existe k entre 1 et $m - 1$ tel que $\alpha' = \alpha'_k$ et, ou bien $\alpha = \alpha_k$ et $u = \sigma_{i'_k}^{i_k}$, ou bien $\alpha = \alpha_{k+1}$ et $u = \tau_{i'_k}^{i_k}$. Le fait que $F_{X'} = F_X$ résulte alors du cas $m = 2$ appliqué à l'arbre $D_{i_k} \amalg_{D_{i'_k}} D_{i_{k+1}}$. \square

3.3.4. Soit $f : S \rightarrow T$ un morphisme dans Θ et (S', i) un sous-arbre dans Θ_0 de S . Appelons $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ (respectivement $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$) les régions maximales (respectivement internes) de S' vues comme régions de S et classées dans l'ordre croissant. Pour tout l entre 1 et $k - 1$, les arbres T_{α_k} et $T_{\alpha_{k+1}}$ sont des prolongements de T_{β_k} et la somme amalgamée itérée

$$T_{\alpha_1} \amalg_{T_{\beta_1}} \cdots \amalg_{T_{\beta_{k-1}}} T_{\alpha_k}$$

existe donc dans Θ_0 (voir la proposition 2.5.7). Appelons $T_{(S', i)}$ cette somme globulaire généralisée. Les morphismes $f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_k}$ induisent une flèche $f_{(S', i)} : T_{(S', i)} \rightarrow T$ dans Θ_0 . On notera $f(S', i)$ ou simplement $f(S')$ ce sous-arbre de T . Si $\alpha : D_i \rightarrow S$ est une région de T , on a alors $f(\alpha) = f(D_i, \alpha)$.

On définit un morphisme $S' \rightarrow T_{(S', i)}$ dans Θ de la manière suivante : pour l entre 1 et k , on envoie la région α_l sur le l -ième morphisme canonique associé à la somme globulaire généralisée qui définit $T_{(S', i)}$. Pour $S' = S$, on notera $\text{Im}(f)$ l'arbre $T_{(S, 1_S)}$. Le morphisme f induit alors deux morphismes composables $S \rightarrow \text{Im}(f) \rightarrow T$.

Soient $f : S \rightarrow T$ et $g : T \rightarrow U$ deux morphismes de Θ composables. On définit le composé gf de la manière suivante. Soit α une région de S . On pose $(gf)(\alpha) = g(f(\alpha))$. Ceci définit clairement un morphisme $S \rightarrow U$ dans Θ . On en déduit que pour tout sous-arbre S' de S , on a $(gf)(S') = g(f(S'))$.

On vérifie immédiatement que si $f : S \rightarrow T$ est un morphisme dans Θ , alors les deux morphismes composables $S \rightarrow f(S) \rightarrow T$ ont pour composé f .

La composition est clairement associative et admet pour tout arbre S une unité 1_S définie par $1_S(\alpha) = (D_i, \alpha)$ pour toute région $\alpha : D_i \rightarrow S$ de S .

Notons que si $f : S \rightarrow T$ est un morphisme de Θ et (S', i) un sous-arbre de S , alors on a $T_{(S', i)} = \text{Im}(fi)$.

À toute flèche $f : S \rightarrow T$ de Θ_0 , on associe une flèche $j(f) : S \rightarrow T$ de Θ en posant pour toute région $\alpha : D_i \rightarrow S$, $j(f)(\alpha) = (D_i, f\alpha)$. On vérifie immédiatement que j définit un foncteur $\Theta_0 \rightarrow \Theta$. Ce foncteur j est fidèle car $f : S \rightarrow T$ est déterminé par les $f\alpha$ où α est une région maximale de S . Le foncteur j fait donc de Θ une préthéorie globulaire.

Proposition 3.3.5. *Soit $f : S \rightarrow T$ une flèche de Θ_0 . Pour tout sous-arbre (S', i) de S dans Θ_0 , on a $j(f)(S', i) = (S', fi)$.*

Démonstration. Soient $\alpha_l : D_{i_l} \rightarrow S$ (respectivement $\alpha'_l : D_{i'_l} \rightarrow S$) pour l entre 1 et k (respectivement 1 et $k-1$) les régions maximales (respectivement internes) de S classées dans l'ordre croissant.

Il s'agit de calculer le morphisme

$$T_{\alpha_1} \amalg_{T_{\alpha'_1}} \cdots \amalg_{T_{\alpha'_{k-1}}} T_{\alpha_k} \rightarrow T.$$

Or celui-ci n'est autre que le morphisme

$$D_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} \cdots \amalg_{D_{i'_{k-1}}} D_{i_k} \rightarrow T$$

induit par les morphismes $f\alpha_l : D_{i_l} \rightarrow T$, c'est-à-dire fi . \square

Proposition 3.3.6. *Le foncteur j fait de Θ une théorie globulaire.*

Démonstration. Soient S, T deux arbres et $\gamma : F_S \rightarrow T$ un cône dans Θ . Supposons que

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ & i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

et appelons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les régions maximales de S classées dans l'ordre croissant. Pour k entre 1 et n , notons $\gamma_k(\beta) = (f_{\alpha_k}, T_{\alpha_k})$ où β est l'unique région maximale de D_{i_k} . Pour k entre 1 et $n-1$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & D_{i_k} & \\ \sigma_{i'_k}^{i_k} \nearrow & & \searrow \alpha_k \\ D_{i'_k} & & T \\ \tau_{i'_k}^{i_{k+1}} \searrow & D_{i_{k+1}} & \nearrow \alpha_{k+1} \end{array}$$

entraîne par définition de la composition dans Θ que $f_{\alpha_k} \sigma_{i'_k}^{i_k} = f_{\alpha_{k+1}} \tau_{i'_k}^{i_{k+1}}$. Par la proposition 3.3.3, ces données définissent un morphisme $S \rightarrow T$. Ce morphisme est clairement l'unique morphisme de S vers T faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ F_S \nearrow & & \searrow \gamma \\ & T & \end{array} .$$

□

3.3.7. Soit $f : S \rightarrow T$ un morphisme de Θ . On dira que f est *algébrique* si $\text{Im}(f) = T$. Il est clair que les identités sont des morphismes algébriques et que les morphismes algébriques sont stables par composition.

Soient i un entier positif et T un arbre de dimension inférieure ou égale à i . Il existe un unique morphisme algébrique f de Θ de source D_i et de but T . Il est défini par $f(\alpha) = T$ où α est l'unique région maximale de D_i .

Pour $i > j \geq 0$, on appelle ∇_j^i l'unique morphisme algébrique de source D_i et de but $D_i \amalg_{D_j} D_i$. Pour i positif, on appelle κ_i l'unique morphisme algébrique de source D_{i+1} et de but D_i .

On vérifie facilement que l'extension globulaire Θ munie de ces morphismes est catégorique. On dispose donc pour toute catégorie D d'un foncteur $\text{Mod}(\Theta, D) \rightarrow \infty\text{-Cat}(D)$

Proposition 3.3.8. *L'extension globulaire Θ définie dans cette section est canoniquement isomorphe à l'extension globulaire Θ définie dans le paragraphe 3.2.2.*

Démonstration. Appelons j le foncteur $\text{Mod}(\Theta) \rightarrow \infty\text{-Cat}$. En vertu de la proposition 2.2.5, il suffit de montrer que j est une équivalence de catégories.

Appelons U_ω le foncteur d'oubli $\infty\text{-Cat} \rightarrow \infty\text{-Grph}$. Celui-ci admet pour adjoint à gauche le foncteur ∞ -catégorie stricte libre L_ω . Dans [8], l'auteur construit un foncteur $i : \Theta \rightarrow \infty\text{-Cat}$ qui envoie un arbre sur la ∞ -catégorie libre sur cet arbre. Ce foncteur i induit un foncteur nerf $\mathcal{N}_\omega : \infty\text{-Cat} \rightarrow \hat{\Theta}$. Le théorème 1.12 de *op. cit.* affirme que ce foncteur nerf induit une équivalence de catégorie sur la sous-catégorie $\text{Mod}(\Theta)$. Une preuve plus détaillée est exposée dans le paragraphe « The nerve of ω -categories and geometric realization » de la section 5 de [31]. Or, pour X dans $\text{Mod}(\Theta)$ et n positif, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\omega(j(X))(D_n) &= \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(i(D_n), j(X)) = \text{Hom}_{\infty\text{-Cat}}(L_\omega(D_n), j(X)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\infty\text{-Grph}}(D_n, U_\omega(j(X))) = \text{Hom}_{\infty\text{-Grph}}(D_n, X) \simeq X(D_n). \end{aligned}$$

Le foncteur j est donc un quasi-inverse de l'équivalence de catégories \mathcal{N}_ω et est donc lui-même une équivalence de catégories. □

Proposition 3.3.9. *Les flèches globulaires de Θ sont des monomorphismes.*

Démonstration. Soit $f : S \rightarrow T$ une flèche globulaire de Θ . Supposons qu'on ait deux flèches $g, h : U \rightarrow S$ telles que $fh = fg$. Puisque S est somme amalgamée d'objets de \mathbb{G} , on peut supposer qu'on a $U = D_i$ pour un i positif. La donnée de g (respectivement de h) correspond à un sous-arbre (S', j) (respectivement (S'', k)) de S . Le sous-arbre correspondant à f est donc $(S', fj) = (S'', fk)$. D'où $fj = fk$ dans Θ_0 . Or toute flèche de Θ_0 est un monomorphisme, on a donc $j = k$ et par conséquent $g = h$. □

Proposition 3.3.10. *Tout morphisme de Θ se décompose de manière unique en un morphisme algébrique suivi d'un morphisme globulaire.*

Démonstration. On a vu que le morphisme f se factorise en $S \xrightarrow{a} \text{Im}(f) \xrightarrow{i} T$ où i est globulaire. On a $\text{Im}(a) = \text{Im}(f)$ par définition de a et le morphisme a est donc algébrique.

Montrons l'unicité d'une telle décomposition. Soient $b : S \rightarrow U$ une flèche algébrique et $j : U \rightarrow T$ une flèche globulaire telle qu'on ait $f = jb$. On a

$$f(S, 1_S) = j(b(S, 1_S)) = j(U, 1_U) = (U, j).$$

D'où $j = i$. Puisque toute flèche globulaire est un monomorphisme, on a également $a = b$, ce qui achève la démonstration. \square

Proposition 3.3.11. *La théorie globulaire Θ est homogène et a pour flèches algébriques les flèches algébriques définies dans cette section.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition précédente et de la proposition 2.7.2. \square

3.4 La catégorie $\tilde{\Theta}$

Proposition 3.4.1. *Il existe une extension globulaire groupoïdale $\tilde{\Theta}$ telle que pour toute catégorie D , le foncteur*

$$G : \text{Mod}(\tilde{\Theta}, D) \rightarrow \infty\text{-Grp}(D)$$

soit une équivalence de catégories, admettant un quasi-inverse G tel que UG soit le foncteur identité.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.2.1. \square

3.4.2. La preuve du lemme de 2-Yoneda implique que deux extensions globulaires vérifiant la propriété universelle précédente sont équivalentes de manière unique à un unique isomorphisme naturel près. On appellera $\tilde{\Theta}$ une extension globulaire squelettique qui vérifie cette propriété universelle.

Puisque $\tilde{\Theta}$ est une extension globulaire groupoïdale et donc catégorique, en vertu de la propriété universelle de Θ (proposition 3.2.3), on dispose d'un foncteur canonique de Θ vers $\tilde{\Theta}$.

Proposition 3.4.3. *Pour toute extension groupoïdale C , il existe un morphisme d'extensions groupoïdales $\tilde{\Theta} \rightarrow C$, unique à unique isomorphisme naturel près.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente appliquée à $D = C^\circ$. \square

Proposition 3.4.4. *Le foncteur*

$$\tilde{\Theta} \rightarrow \text{Mod}(\tilde{\Theta}) \simeq \infty\text{-Grp},$$

induit par le foncteur de Yoneda, envoie un arbre S sur le ∞ -groupoïde strict libre engendré par l'ensemble globulaire associé à S .

Démonstration. Notons i le foncteur $\Theta_0 \rightarrow \tilde{\Theta}$. Celui-ci induit un foncteur de restriction $i^* : \text{Mod}(\tilde{\Theta}) \rightarrow \text{Mod}(\Theta_0)$. Le lemme 6.3.2 (qui est indépendant de cette section) appliqué à i affirme que le carré

$$\begin{array}{ccc} \Theta_0 & \longrightarrow & \tilde{\Theta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Mod}(\Theta_0) & \xrightarrow{l} & \text{Mod}(\tilde{\Theta}) \end{array} \quad ,$$

où l est l'adjoint à gauche de i^* , est commutatif à isomorphisme près. Or le foncteur l correspond *via* les isomorphismes $\text{Mod}(\Theta_0) \simeq \hat{\mathbb{G}}$ et $\text{Mod}(\tilde{\Theta}) \simeq \infty\text{-Grp}$ au foncteur $\infty\text{-groupoïde strict libre } \hat{\mathbb{G}} \rightarrow \infty\text{-Grp}$. \square

3.4.5. La proposition précédente établit que $\tilde{\Theta}$ est canoniquement isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\infty\text{-Grp}$ dont les objets sont les $\infty\text{-groupoïdes}$ libres sur un schéma de composition. Pour obtenir une description de $\tilde{\Theta}$ analogue à celle qu'on a décrite pour Θ , il suffirait donc de décrire combinatoirement les morphismes entre de tels $\infty\text{-groupoïdes}$.

Chapitre 4

∞ -groupoïdes de Grothendieck

4.1 Cohérateurs et définitions

4.1.1. Soit C une extension globulaire. Un couple de flèches (f, g) de C

$$D_i \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} X$$

est dit *parallèle* si, ou bien $i = 0$, ou bien $i \geq 1$ et on a $f\sigma_i = g\sigma_i$ et $f\tau_i = g\tau_i$.

Un *relèvement* d'un couple de flèches parallèles $(f, g) : D_i \rightarrow X$ est un morphisme $h : D_{i+1} \rightarrow X$ tel qu'on ait $f = h\sigma_{i+1}$ et $g = h\tau_{i+1}$.

Soit A un ensemble de couples parallèles de C . On note $C[R(A)]$ la catégorie obtenue à partir de C en adjoignant formellement un relèvement pour chaque couple de A . La catégorie $C[R(A)]$ peut se décrire de la manière suivante. Soit D la catégorie libre sur le graphe de C auquel on adjoint pour chaque couple $a = (a_1, a_2)$ dans A de flèches $a_1, a_2 : D_{i_a} \rightarrow X_a$, une flèche $[r_a] : D_{i_a+1} \rightarrow X_a$. Si f est une flèche de C , nous noterons $[f]$ la flèche correspondante dans D . La catégorie $C[R(A)]$ s'obtient alors comme quotient de la catégorie D par les relations suivantes :

- $[1_X] = 1_X$ pour tout objet X de C ;
- $[g][f] = [gf]$ pour $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des flèches de C ;
- $[r_a][\sigma_{i_a+1}] = [a_1]$ et $[r_a][\tau_{i_a+1}] = [a_2]$ pour tout $a = (a_1, a_2)$ dans A de source D_{i_a} .

4.1.2. Soit C une extension globulaire. Un couple de flèches $(f, g) : D_i \rightarrow X$ de C est dit *admissible pour une théorie de ∞ -groupoïdes* si les flèches f et g sont parallèles.

Soit C une préthéorie globulaire. Un couple de flèches $(f, g) : D_i \rightarrow X$ de C est dit *admissible pour une théorie de ∞ -catégories* si les flèches f et g sont parallèles et si on est dans l'une des deux situations suivantes :

1. les flèches f et g sont algébriques ;
2. il existe des décompositions $f = \sigma_X f'$ et $g = \tau_X g'$ où $f', g' : D_i \rightarrow \partial X$ sont des flèches algébriques de C .

Un couple admissible pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) est dit *strictement admissible* s'il n'admet pas de relèvement.

Si le contexte indique clairement si on est dans le cadre des ∞ -groupoïdes ou des ∞ -catégories, on parlera seulement de couples admissibles. On s'autorisera un abus de langage du même type pour toutes les définitions qui sont déclinées en une version ∞ -groupoïdale et une version ∞ -catégorique.

4.1.3. Une théorie globulaire est un *pseudo-cohérateur de ∞ -groupoïdes* (respectivement de *∞ -catégories*) si tout couple admissible pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) admet un relèvement.

Une *tour de définition pour une théorie de ∞ -groupoïdes* (respectivement de *∞ -catégories*) est une tour d'extensions globulaires

$$C_0 = \Theta_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots C_n \rightarrow \dots$$

munie pour tout n positif d'un ensemble F_n de couples de flèches admissibles pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) de C_n , telle que C_{n+1} soit l'extension globulaire obtenue à partir de C_n en ajoutant formellement des relèvements aux couples de F_n . Plus précisément, on a $C_{n+1} = \text{Glob}(C_n[R(F_n)])$. En particulier, on a $\text{Ob}(C_n) = \text{Ob}(\Theta_0)$. Si C_* est une tour de définition pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories), la *limite de C_** est la limite inductive de la tour C_* . On la notera C_∞ . On dira d'une extension globulaire isomorphe à un tel C_∞ qu'elle *admet une tour de définition* pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories).

Si C_* est une tour de définition pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) et D est un pseudo-cohérateur de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories), par la propriété universelle définissant C_{m+1} à partir de C_m , on dispose pour tout n positif de morphismes globulaires $C_n \rightarrow D$ et donc d'un morphisme globulaire $C_\infty \rightarrow D$. Ces morphismes dépendent d'un choix de relèvements dans D .

Un *cohérateur de ∞ -groupoïdes* (respectivement de *∞ -catégories*) est un pseudo-cohérateur de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) qui admet une tour de définition pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories).

Si C_* est une tour de définition pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) telle que tout couple admissible pour une théorie de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) de C_∞ provient d'un F_n pour n positif, alors C_∞ est un cohérateur de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories).

Exemples 4.1.4. La remarque précédente permet de définir les trois cohérateurs de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories) suivants.

Soit C_* l'unique tour de définition telle que F_n soit l'ensemble des couples admissibles de C_n . On appellera C_∞ le *cohérateur canonique*.

Soit C_* l'unique tour de définition telle que F_n soit l'ensemble des couples strictement admissibles de C_n . On appellera C_∞ le *cohérateur canonique strict*.

Soit C_* l'unique tour de définition telle que F_n soit l'ensemble des couples admissibles de C_n qui ne proviennent pas d'un F_m pour $m < n$. On appellera C_∞ le *cohérateur de Batanin-Leinster*.

Proposition 4.1.5. *Soient C_* une tour de définition pour une théorie de ∞ -groupoïdes et D une extension globulaire. Si tous les couples admissibles de D pour une théorie de ∞ -groupoïdes admettent un relèvement, alors il existe un foncteur globulaire (non canonique) de C_∞ vers D .*

Démonstration. On va construire par récurrence sur n positif, des foncteurs globulaires $G_n : C_n \rightarrow D$, à partir du foncteur $G_0 : C_0 = \Theta_0 \rightarrow D$. On obtiendra alors un foncteur globulaire $C_\infty \rightarrow D$ en passant à la limite inductive.

Supposons donc que l'on dispose d'un foncteur globulaire $G_n : C_n \rightarrow D$. Notons F_n l'ensemble des couples admissibles de C_n qui définit C_{n+1} à partir de C_n . Par définition d'une tour de définition, se donner un foncteur globulaire $G_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow D$ tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} C_n & \longrightarrow & C_{n+1} \\ & \searrow G_n & \swarrow G_{n+1} \\ & & D \end{array}$$

soit commutatif, revient à se donner pour chaque couple admissible (f, g) dans F_n , un relèvement dans D du couple $(G_n(f), G_n(g))$. Par functorialité, un tel couple est admissible et admet donc un relèvement par hypothèse sur D . On définit alors un foncteur globulaire $G_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow D$ en faisant des choix de relèvements arbitraires. \square

Remarque 4.1.6. Dans la preuve précédente, nous avons utilisé le fait que les foncteurs préservent les couples admissibles pour une théorie de ∞ -groupoïdes. Ce n'est pas le cas pour les couples admissibles pour une théorie de ∞ -catégories et il nous faudra travailler pour obtenir un résultat analogue dans le contexte des ∞ -catégories (voir le théorème 5.4.4).

Conjecture 4.1.7 (Conjecture de fidélité). *Soit C_* une tour de définition. Pour tout n positif, le foncteur de C_n vers C_{n+1} est fidèle.*

4.1.8. Soit C un cohérateur de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories). La catégorie $\infty\text{-Grpf}_C$ (respectivement $\infty\text{-Catf}_C$) des ∞ -groupoïdes de type C (respectivement des ∞ -catégories de type C) est la catégorie des préfaisceaux globulaires sur C . On s'attend à ce que ces notions ne dépendent pas du cohérateur C au sens où si C et C' sont deux cohérateurs de ∞ -groupoïdes (respectivement de ∞ -catégories), « les ∞ -catégories des ∞ -groupoïdes (respectivement des ∞ -catégories) de type C et C' soient ∞ -équivalentes » (en un sens à définir).

Si G est un ∞ -groupoïde (respectivement une ∞ -catégorie) de type C , on appellera *ensemble globulaire sous-jacent* de G l'ensemble globulaire $\mathbb{G}^o \rightarrow C^o \rightarrow \mathcal{E}ns$. On appellera *n -flèches* de G les n -flèches de son ensemble globulaire sous-jacent.

4.2 Quelques flèches structurales

4.2.1. Soient C un cohérateur de ∞ -groupoïdes et G un ∞ -groupoïde de type C . Dans cette section, nous allons illustrer la manière de définir des flèches structurales de G

(c'est-à-dire des opérations et des cohérences entre ces opérations) en donnant des exemples en petite dimension. Ces flèches structurales seront obtenues comme image par le foncteur $G : C^o \rightarrow \mathcal{E}ns$ de morphismes de C , eux-mêmes obtenus comme relèvements de couples admissibles de C .

Afin de mettre en lumière la hiérarchie de ces différentes flèches structurales, nous allons supposer que C est le cohérateur canonique strict et que celui-ci est muni de sa tour de définition canonique C_* . Les relèvements que nous considérerons existent également dans tout cohérateur, mais ils n'apparaissent pas nécessairement au début d'une tour de définition du cohérateur.

4.2.2. Voici quelques exemples de flèches structurales apparaissant dans C_1 :

– *Unités*

Soit $i \geq 0$. Le couple $(1_{D_i}, 1_{D_i}) : D_i \rightarrow D_i$ est admissible. Il existe donc dans C_1 un relèvement

$$\kappa_i : D_{i+1} \rightarrow D_i$$

tel que

$$\kappa_i \sigma_{i+1} = 1_{D_i} \quad \text{et} \quad \sigma_i \tau_{i+1} = 1_{D_i}.$$

Ce morphisme correspond dans G à l'unité $k_i : G_i \rightarrow G_{i+1}$.

– *Inverses en codimension 1*

Soit $i \geq 1$. Les identités coglobulaires entraînent que le couple $(\tau_i, \sigma_i) : D_{i-1} \rightarrow D_i$ est admissible. Il existe donc dans C_1 un relèvement

$$\Omega_i : D_i \rightarrow D_i$$

tel que

$$\Omega_i \sigma_i = \tau_i \quad \text{et} \quad \Omega_i \tau_i = \sigma_i.$$

Ce morphisme correspond dans G à l'inverse $w_{i-1}^i : G_i \rightarrow G_i$.

– *Compositions en codimension 1*

Soit $i \geq 1$. Appelons S l'arbre $D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$. Le couple $(\sigma_S, \tau_S) : D_{i-1} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$ est admissible. En effet, si $i \geq 2$, on a

$$\sigma_S \sigma_{i-1} = \sigma_{i-2}^S = \tau_S \sigma_{i-1} \quad \text{et} \quad \sigma_S \tau_{i-1} = \tau_{i-2}^S = \tau_S \tau_{i-1}.$$

Il existe donc dans C_1 un relèvement

$$\nabla_i : D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$$

tel que

$$\nabla_i \sigma_i = \sigma_S \quad \text{et} \quad \nabla_i \tau_i = \tau_S.$$

Ce morphisme correspond dans G à la composition $*_{i-1}^i : G_i \times_{G_{i-1}} G_i \rightarrow G_i$. Plus généralement, pour tout $n \geq 0$, on dispose dans C_1 d'un morphisme

$$D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} \cdots \amalg_{D_{i-1}} D_i,$$

où D_i apparaît n fois dans la somme globulaire de droite, qui correspond dans G à une composition n -aire.

4.2.3. Voici quelques exemples de flèches structurales apparaissant dans C_2 :

– *Inverses en codimension 2*

Soit $i \geq 2$. Le couple $(\sigma_i \Omega_{i-1}, \tau_i \Omega_{i-1})$ est admissible. En effet, on a

$$\sigma_i \Omega_{i-1} \sigma_{i-1} = \sigma_i \tau_{i-1} = \tau_{i-2}^i = \tau_i \tau_{i-1} = \tau_i \Omega_{i-1} \sigma_{i-1}.$$

De même, on a

$$\sigma_i \Omega_{i-1} \tau_{i-1} = \sigma_{i-2}^i = \tau_i \Omega_{i-1} \tau_{i-1}.$$

Il existe donc dans C_2 un relèvement

$$\Omega_{i-2}^i : D_i \rightarrow D_i$$

tel que

$$\Omega_{i-2}^i \sigma_i = \sigma_i \Omega_{i-1} \quad \text{et} \quad \Omega_{i-2}^i \tau_i = \tau_i \Omega_{i-1}.$$

Ce morphisme correspond dans G à l'inverse $w_{i-2}^i : G_i \rightarrow G_i$.

– *Compositions en codimension 2*

Soit $i \geq 2$. Appelons S l'arbre $D_i \amalg_{D_{i-2}} D_i$. Le couple $(\sigma_S \nabla_{i-1}, \tau_S \nabla_{i-1}) : D_{i-1} \rightarrow S$ est admissible. En effet, on a

$$\sigma_S \nabla_{i-1} \sigma_{i-1} = \sigma_S \sigma_{\partial S} = \sigma_{i-2}^S = \tau_S \sigma_{\partial S} = \tau_S \nabla_{i-1} \sigma_{i-1}.$$

De même, on a

$$\sigma_S \nabla_{i-1} \tau_{i-1} = \tau_{i-2}^S = \tau_S \nabla_{i-1} \tau_{i-1}.$$

Il existe donc C_2 un relèvement

$$\nabla_{i-2}^i : D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-2}} D_i$$

tel que

$$\nabla_{i-2}^i \sigma_i = \sigma_S \nabla_i \quad \text{et} \quad \nabla_{i-2}^i \tau_i = \tau_S \nabla_i.$$

Ce morphisme correspond dans G à la composition $*_{i-2}^i : G_i \times_{G_{i-2}} G_i \rightarrow G_i$.

– *Contraintes d'associativité en codimension 1*

Soit $i \geq 1$. Le couple

$$\left((\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} 1_{D_i}) \nabla_i, (1_{D_i} \amalg_{D_{i-1}} \nabla_i) \nabla_i \right) : D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$$

est admissible. En effet, si on désigne par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ les trois morphismes canoniques $D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$ et par $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ les deux morphismes canoniques $D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$, on a

$$\begin{aligned} (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \nabla_i \sigma_i &= (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \varepsilon'_2 \sigma_i = \varepsilon_3 \sigma_i \\ &= (\varepsilon_2, \varepsilon_3) \varepsilon'_2 \sigma_i = (\varepsilon_2, \varepsilon_3) \nabla_i \sigma_i \\ &= (D_i \amalg_{D_i} \nabla_i) \varepsilon'_2 \sigma_i \\ &= (D_i \amalg_{D_i} \nabla_i) \nabla_i \sigma_i. \end{aligned}$$

On montre de la même manière que

$$(\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \nabla_i \tau_i = \varepsilon_1 \tau_i = (D_i \amalg_{D_i} \nabla_i) \nabla_i \tau_i.$$

Il existe donc dans C_2 un relèvement

$$\alpha_i : D_{i+1} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$$

tel que

$$\alpha_i \sigma_{i+1} = (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \nabla_i \quad \text{et} \quad \alpha_i \tau_{i+1} = (D_i \amalg_{D_{i-1}} \nabla_i) \nabla_i.$$

Ce morphisme correspond dans G à une contrainte d'associativité pour la composition $*_{i-1}^i$. Ainsi, si f , g et h sont trois i -flèches de G , composables pour la composition $*_{i-1}^i$, on dispose d'une $(i+1)$ -flèche de G

$$a_{f,g,h} : (h *_{i-1}^i g) *_{i-1}^i f \rightarrow h *_{i-1}^i (g *_{i-1}^i f).$$

On peut construire de manière semblable une flèche de C_2 , correspondant dans G à une contrainte d'associativité entre une composition ternaire et deux compositions binaires, ou plus généralement entre deux compositions qui correspondent à deux parenthésages d'un mot de longueur fixé.

– *Contraintes d'unité en codimension 1*

Soit $i \geq 1$. Le couple $((1_{D_i}, \sigma_i \kappa_{i-1}) \nabla_i, 1_{D_i}) : D_i \rightarrow D_i$ est admissible. En effet, si on note $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ les morphismes canoniques $D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$, on a

$$(1_{D_i}, \sigma_i \kappa_{i-1}) \nabla_i \sigma_i = (1_{D_i}, \sigma_i \kappa_{i-1}) \varepsilon_2 \sigma_i = \sigma_i \kappa_{i-1} \sigma_i = \sigma_i$$

et

$$(1_{D_i}, \sigma_i \kappa_{i-1}) \nabla_i \tau_i = (1_{D_i}, \sigma_i \kappa_{i-1}) \varepsilon_1 \tau_i = \tau_i.$$

Il existe donc dans C_2 un relèvement

$$\rho_i : D_{i+1} \rightarrow D_i$$

tel que

$$\rho_i \sigma_{i+1} = (1_{D_i}, \sigma_i \kappa_{i-1}) \nabla_i \quad \text{et} \quad \rho_i \tau_{i+1} = 1_{D_i}.$$

Ce morphisme correspond dans G à une contrainte d'unité à droite pour la composition $*_{i-1}^i$. Ainsi, si $f : x \rightarrow y$ est une i -flèche de G , on dispose d'une $(i+1)$ -flèche de G

$$r_f : f *_{i-1}^i k_{i-1}(x) \rightarrow f.$$

On construit de manière semblable un morphisme

$$\lambda_i : D_{i+1} \rightarrow D_i$$

de C_2 , qui correspond dans G à une contrainte d'unité à gauche. On dispose donc également d'une $(i+1)$ -flèche de G

$$l_f : k_{i-1}(y) *_{i-1}^i f \rightarrow f.$$

– *Contraintes d'inverse en codimension 1*

Soit $i \geq 1$. Le couple $((1_{D_i}, \Omega_i) \nabla_i, \tau_i \kappa_{i-1}) : D_i \rightarrow D_i$ est admissible. En effet, si on note $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ les morphismes canoniques $D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$, on a

$$(1_{D_i}, \Omega_i) \nabla_i \sigma_i = (1_{D_i}, \Omega_i) \varepsilon_2 \sigma_i = \Omega_i \sigma_i = \tau_i = \tau_i \kappa_{i-1} \sigma_i$$

et

$$(1_{D_i}, \Omega_i) \nabla_i \tau_i = (1_{D_i}, \Omega_i) \varepsilon_1 \tau_i = \tau_i = \tau_i \kappa_{i-1} \tau_i.$$

Il existe donc dans C_2 un relèvement

$$\delta_i : D_{i+1} \rightarrow D_i$$

tel que

$$\delta_i \sigma_{i+1} = (1_{D_i}, \Omega_i) \nabla_i \quad \text{et} \quad \delta_i \tau_{i+1} = \tau_i \kappa_{i-1}.$$

Ce morphisme correspond dans G à une contrainte d'inverse à droite pour l'inverse w_{i-1}^i . Ainsi, si $f : x \rightarrow y$ est une i -flèche de G , on dispose d'une $(i+1)$ -flèche de G

$$d_f : f *_{i-1}^i w_i(f) \rightarrow k_{i-1}(y).$$

On construit de manière semblable un morphisme

$$\gamma_i : D_{i+1} \rightarrow D_i$$

de C_2 , qui correspond dans G à une contrainte d'inverse à gauche. On dispose donc également d'une $(i+1)$ -flèche de G

$$g_f : w_i(f) *_{i-1}^i f \rightarrow k_{i-1}(x).$$

4.2.4. Voici quelques exemples de flèches structurales apparaissant dans C_3 :

– *Contraintes du pentagone de Mac Lane en codimension 1*

Soit $i \geq 1$. Notons $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ les morphismes canoniques

$$D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i.$$

Soient $c_2 : D_{i+1} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$ le morphisme

$$\left((D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} \nabla_i) \alpha_i, (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \alpha_i \right) \nabla_{i+1}$$

et $c_3 : D_{i+1} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$ le morphisme

$$\begin{aligned} & \left((\varepsilon_1 \kappa_i, (\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \alpha_i) \nabla_{i-1}^{i+1}, (D_i \amalg_{D_{i-1}} \nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \alpha_i, \right. \\ & \left. (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \alpha_i, \varepsilon_4 \kappa_i \right) \nabla_{i-1}^{i+1} \left(\nabla_{i+1} \amalg_{D_i} D_{i+1} \right) \nabla_{i+1}. \end{aligned}$$

Le couple (c_3, c_2) est admissible. En effet, on a

$$\begin{aligned} c_2\sigma_{i+1} &= (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \alpha_i \sigma_{i+1} \\ &= (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \nabla_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c_3\sigma_{i+1} &= ((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \alpha_i, \varepsilon_4 \kappa_i) \nabla_{i-1}^{i+1} \sigma_{i+1} \\ &= ((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \alpha_i, \varepsilon_4 \kappa_i) (\sigma_{i+1} \amalg_{D_i} \sigma_{i+1}) \nabla_i \\ &= ((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \alpha_i \sigma_{i+1}, \varepsilon_4 \kappa_i \sigma_{i+1}) \nabla_i \\ &= ((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \nabla_i, \varepsilon_4) \nabla_i \\ &= (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \nabla_i. \end{aligned}$$

De même, on montre que

$$c_2\tau_{i+1} = (D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} \nabla_i) (D_i \amalg_{D_{i-1}} \nabla_i) \nabla_i = c_3\tau_{i+1}.$$

Il existe donc dans C_3 un relèvement

$$\pi_i : D_{i+2} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$$

tel que

$$\pi_i \sigma_{i+2} = c_3 \quad \text{et} \quad \pi_i \tau_{i+2} = c_2.$$

Ce morphisme correspond dans G à une contrainte de pentagone de Mac Lane pour les compositions $*_{i-1}^i$, $*_{i-1}^{i+1}$ et $*_{i-1}^{i+1}$. Ainsi, si e , f , g et h sont quatre i -flèches de G , composables pour la composition $*_{i-1}^i$, on dispose d'une $(i+2)$ -flèche de G

$$\begin{array}{ccc} & ((h *_{i-1}^i g) *_{i-1}^i f) *_{i-1}^i e & \\ \begin{array}{c} \swarrow \\ a_{f,g,h} *_{i-1}^{i+1} k_i(e) \end{array} & & \begin{array}{c} \searrow \\ a_{e,f,h} *_{i-1}^i g \end{array} \\ (h *_{i-1}^i (g *_{i-1}^i f)) *_{i-1}^i e & \xrightarrow{ML_{e,f,g,h}} & (h *_{i-1}^i g) *_{i-1}^i (f *_{i-1}^i e) \\ \begin{array}{c} \searrow \\ a_{e,g} *_{i-1}^i f, h \end{array} & & \begin{array}{c} \swarrow \\ a_f *_{i-1}^i e, g, h \end{array} \\ h *_{i-1}^i ((g *_{i-1}^i f) *_{i-1}^i e) & \xrightarrow{k_i(h) *_{i-1}^{i+1} a_{e,f,g}} & h *_{i-1}^i (g *_{i-1}^i (f *_{i-1}^i e)). \end{array}$$

– Contraintes de l'échange en codimension 1

Soit $i \geq 2$. Le couple

$$\left((\nabla_{i-2}^i \amalg_{\nabla_{i-1}} \nabla_{i-2}^i) \nabla_i, (\nabla_i \amalg_{D_{i-2}} \nabla_i) \nabla_{i-2}^i \right) : D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-2}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$$

est admissible. Notons que le morphisme de gauche est une somme globulaire généralisée et qu'il a même but que celui de droite car l'isomorphisme de l'axiome (CC2) du paragraphe 3.1.1 est une identité dans Θ_0 . Par ailleurs, si on note $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ les quatre morphismes canoniques $D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-2}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$, on a

$$\begin{aligned} (\nabla_i \amalg_{D_{i-2}} \nabla_i) \nabla_{i-2}^i \sigma_i &= (\nabla_i \amalg_{D_{i-2}} \nabla_i) (\sigma_i \amalg_{D_{i-2}} \sigma_i) \nabla_{i-1} \\ &= (\nabla_i \sigma_i \amalg_{D_{i-2}} \nabla_i \sigma_i) \nabla_{i-1} \\ &= (\varepsilon_2 \sigma_i \amalg_{D_{i-2}} \varepsilon_4 \sigma_i) \nabla_{i-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\nabla_{i-2}^i \amalg_{\nabla_{i-1}} \nabla_{i-2}^i) \nabla_i \sigma_i &= ((\varepsilon_1, \varepsilon_3) \nabla_{i-2}^i, (\varepsilon_2, \varepsilon_4) \nabla_{i-2}^i) \nabla_i \sigma_i \\ &= (\varepsilon_2, \varepsilon_4) \nabla_{i-2}^i \sigma_i \\ &= (\varepsilon_2, \varepsilon_4) (\sigma_i \amalg_{D_{i-2}} \sigma_i) \nabla_{i-1} \\ &= (\varepsilon_2 \sigma_i \amalg_{D_{i-2}} \varepsilon_4 \sigma_i) \nabla_{i-1}. \end{aligned}$$

De même, on montre que

$$(\nabla_i \amalg_{D_{i-2}} \nabla_i) \nabla_{i-2}^i \tau_i = (\varepsilon_1 \tau_i \amalg_{D_{i-2}} \varepsilon_3 \tau_i) \nabla_{i-1} = (\nabla_{i-2}^i \amalg_{\nabla_{i-1}} \nabla_{i-2}^i) \nabla_i \tau_i.$$

Il existe donc dans C_3 un relèvement

$$\varepsilon_i : D_{i+1} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_{i-2}} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$$

tel que

$$\varepsilon_i \sigma_{i+1} = (\nabla_{i-2}^i \amalg_{\nabla_{i-1}} \nabla_{i-2}^i) \nabla_i \quad \text{et} \quad \varepsilon_i \tau_{i+1} = (\nabla_i \amalg_{D_{i-2}} \nabla_i) \nabla_{i-2}^i.$$

Ce morphisme correspond dans G à une contrainte de l'échange pour les compositions $*_{i-2}^{i-1}$, $*_{i-1}^i$ et $*_{i-2}^i$. Ainsi, si α , β , δ et γ sont deux i -flèches de G s'insérant dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \circ & & \circ \\ \downarrow \alpha & \rightarrow & \downarrow \gamma \\ \downarrow \beta & \rightarrow & \downarrow \delta \\ \circ & & \circ \end{array},$$

alors on dispose d'une $(i+1)$ -flèche de G

$$e_{\alpha, \beta, \delta, \gamma} : (\delta *_{i-2}^i \beta) *_{i-1}^i (\gamma *_{i-2}^i \alpha) \rightarrow (\delta *_{i-1}^i \gamma) *_{i-2}^i (\beta *_{i-1}^i \alpha).$$

– *Contraintes du triangle en codimension 1*

Soit $i \geq 1$. Notons $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ les deux morphismes canoniques $D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$. Soient $d_2 : D_{i+1} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$ le morphisme

$$((\varepsilon_1 \kappa_i, \varepsilon_2 \lambda_i) \nabla_{i-1}^{i+1}, (\varepsilon_1, \varepsilon_1 \sigma_i \kappa_{i-1}, \varepsilon_2) \alpha_i) \nabla_{i+1}$$

et $d_1 : D_{i+1} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$ le morphisme

$$(\varepsilon_1 \rho_i, \varepsilon_2 \kappa_i) \nabla_{i-1}^{i+1}.$$

Le couple (d_2, d_1) est admissible. En effet, on a

$$\begin{aligned} d_1 \sigma_{i+1} &= (\varepsilon_1 \rho_i \sigma_{i+1}, \varepsilon_2 \kappa_i \sigma_{i+1}) \nabla_i \\ &= (\varepsilon_1 (1_{D_i}, \sigma_i \kappa_{i-1}) \nabla_i, \varepsilon_2) \nabla_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_2 \sigma_{i+1} &= (\varepsilon_1, \varepsilon_1 \sigma_i \kappa_{i-1}, \varepsilon_2) \alpha_i \sigma_{i+1} \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_1 \sigma_i \kappa_{i-1}, \varepsilon_2) (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \nabla_i \\ &= ((\varepsilon_1, \varepsilon_1 \sigma_i \kappa_{i-1}) \nabla_i, \varepsilon_2) \nabla_i \\ &= (\varepsilon_1 (1_{D_i}, \sigma_i \kappa_{i-1}) \nabla_i, \varepsilon_2) \nabla_i. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} d_1 \tau_{i+1} &= (\varepsilon_1 \rho_i \tau_{i+1}, \varepsilon_2 \kappa_i \tau_{i+1}) \nabla_i \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \nabla_i \\ &= \nabla_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_2 \tau_{i+1} &= (\varepsilon_1 \kappa_i, \varepsilon_2 \lambda_i) \nabla_{i-1}^{i+1} \tau_{i+1} \\ &= (\varepsilon_1 \kappa_i \tau_{i+1}, \varepsilon_2 \lambda_i \tau_{i+1}) \nabla_i \\ &= (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \nabla_i \\ &= \nabla_i. \end{aligned}$$

Il existe donc dans C_3 un relèvement

$$\nu_i : D_{i+2} \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$$

tel que

$$\nu_i \sigma_{i+2} = d_2 \quad \text{et} \quad \nu_i \tau_{i+2} = d_1.$$

Ce morphisme correspond dans G à une contrainte du triangle pour les compositions $*_{i-1}^i$, $*_i^{i+1}$ et $*_{i-1}^{i+1}$. Ainsi, si $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ sont deux i -flèches composables de G , on dispose d'une $(i+2)$ -flèche de G

$$\begin{array}{ccc} (g *_{i-1}^i k_{i-1}(y)) *_{i-1}^i f & \xrightarrow{a_{f, k_{i-1}(y), g}} & g *_{i-1}^i (k_{i-1}(y) *_{i-1}^i f) \\ & \searrow \scriptstyle r_g *_{i-1}^{i+1} k_i(f) & \swarrow \scriptstyle k_i(g) *_{i-1}^{i+1} l_f \\ & g *_{i-1}^i f & \end{array} \quad \cdot$$

On montre également qu'il existe dans C_3 les flèches structurales suivantes :

- inverses en codimension 3 ;
- compositions en codimension 3.

4.2.5. On montre comme dans les paragraphes précédents que les flèches structurales suivantes apparaissent dans C_4 :

- inverses en codimension 4 ;
- compositions en codimension 4 ;
- contraintes d’associativité en codimension 3 ;
- contraintes d’échange en codimension 2 ;
- contraintes de pentagone de Mac Lane en codimension 2 ;
- contraintes du triangle en codimension 2 ;
- contraintes sur les contraintes de C_3 (qui correspondent aux axiomes des tricatégories).

En continuant cette analyse, on montre la proposition suivante :

Proposition 4.2.6. *Tout cohérateur de ∞ -groupoïdes admet une structure (non canonique) d’extension globulaire prégroupoïdale.*

4.2.7. Celles des flèches structurales précédentes qui ne concernent pas les inverses, existent également dans tout cohérateur de ∞ -catégories D . Pour le démontrer, il suffit de vérifier que les couples admissibles pour une théorie de ∞ -groupoïdes, qu’on a considérés pour démontrer l’existence de ces flèches structurales, sont également des couples admissibles pour une théorie de ∞ -catégories. Il s’agit donc de vérifier que certains morphismes sont algébriques. Cette vérification n’est pas triviale. Elle résultera (sous certaines hypothèses peu restrictives sur D) du théorème 5.4.1 qui affirme que D est homogène sur Θ et du fait que le foncteur $D \rightarrow \Theta$ envoie tout relèvement d’un couple admissible sur un morphisme algébrique de Θ . On obtiendra en particulier la propriété suivante :

Proposition 4.2.8. *Tout cohérateur de ∞ -catégories admet une structure (non canonique) d’extension globulaire précatégorique.*

4.3 Équivalences faibles

4.3.1. Dans cette section, on se fixe un cohérateur de ∞ -groupoïdes C . Le cohérateur étant fixé, on appellera ∞ -groupoïde faible un ∞ -groupoïde de type C . Choisissons une structure prégroupoïdale sur C . En particulier, on dispose de morphismes

$$\begin{aligned} \kappa_n &: D_{n+1} \rightarrow D_n, & n \geq 0, \\ \nabla_n &: D_n \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n, & n \geq 1, \\ \nabla_{n-2}^n &: D_n \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-2}} D_n, & n \geq 2, \\ \Omega_n &: D_n \rightarrow D_n, & n \geq 1, \end{aligned}$$

dans C , et donc d'applications

$$\begin{aligned} k_n &: G_n \rightarrow G_{n+1}, \quad n \geq 0, \\ *_{n-1}^n &: G_n \times_{G_{n-1}} G_n \rightarrow G_n, \quad n \geq 1, \\ *_{n-2}^n &: G_n \times_{G_{n-2}} G_n \rightarrow G_n, \quad n \geq 2, \\ w_n &: G_n \rightarrow G_n, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

pour tout ∞ -groupeïde faible G .

Soit G un ∞ -groupeïde faible. On dira que deux n -flèches f et g de G sont homotopes s'il existe une $(n+1)$ -flèche h de G , de source f et de but g . La relation d'homotopie est une relation d'équivalence. En effet, la preuve que nous avons donnée dans le cas strict (voir le paragraphe 1.2.1) n'utilise que la structure prégroupoïdale.

Si G est un ∞ -groupeïde faible et n est un entier positif, on notera, comme dans le cas strict, \overline{G}_n le quotient de G_n par la relation d'homotopie des n -flèches. La composition

$$*_{n-1}^n : G_n \times_{G_{n-1}} G_n \rightarrow G_n$$

passse au quotient en une opération

$$*_{n-1}^n : \overline{G}_n \times_{G_{n-1}} \overline{G}_n \rightarrow \overline{G}_n$$

pour la même raison que dans le cas strict. Par ailleurs, l'unité

$$k_{n-1} : G_{n-1} \rightarrow G_n$$

induit une application

$$k_{n-1} : G_{n-1} \rightarrow \overline{G}_n.$$

Notons $\varpi_n(G)$ le graphe dont les objets sont les $(n-1)$ -flèches et les morphismes sont les éléments de \overline{G}_n , muni des applications

$$*_{n-1}^n : \overline{G}_n \times_{G_{n-1}} \overline{G}_n \rightarrow \overline{G}_n \quad \text{et} \quad k_{n-1} : G_{n-1} \rightarrow \overline{G}_n.$$

Proposition 4.3.2. $\varpi_n(G)$ est un groupeïde.

Démonstration. On a montré dans la section 4.2, l'existence dans C de flèches

$$\begin{aligned} \alpha_n &: D_{n+1} \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n, \\ \rho_n &: D_{n+1} \rightarrow D_n \quad \text{et} \quad \lambda_n : D_{n+1} \rightarrow D_n, \\ \delta_n &: D_{n+1} \rightarrow D_n \quad \text{et} \quad \gamma_n : D_{n+1} \rightarrow D_n, \end{aligned}$$

telles que

$$\begin{aligned} \alpha_n \sigma_{n+1} &= (\nabla_n \amalg_{D_{n-1}} D_n) \nabla_n \quad \text{et} \quad \alpha_n \tau_{n+1} = (D_n \amalg_{D_{n-1}} \nabla_n) \nabla_n, \\ \rho_n \sigma_{n+1} &= (1_{D_n}, \sigma_n \kappa_{n-1}) \nabla_n \quad \text{et} \quad \rho_n \tau_{n+1} = 1_{D_n}, \\ \lambda_n \sigma_{n+1} &= (\tau_n \kappa_{n-1}, 1_{D_n}) \nabla_n \quad \text{et} \quad \lambda_n \tau_{n+1} = 1_{D_n}, \\ \delta_n \sigma_{n+1} &= (1_{D_n}, \Omega_n) \nabla_n \quad \text{et} \quad \delta_n \tau_{n+1} = \tau_n \kappa_{n-1}, \\ \gamma_n \sigma_{n+1} &= (\Omega_n, 1_{D_n}) \nabla_n \quad \text{et} \quad \gamma_n \tau_{n+1} = \sigma_n \kappa_{n-1}. \end{aligned}$$

Si f , g et h sont trois n -flèches de G , composables pour la composition $*_{n-1}^n$, le morphisme $G(\alpha_n)$ induit une $(n+1)$ -flèche de G

$$a_{f,g,h} : (h *_{n-1}^n g) *_{n-1}^n f \rightarrow h *_{n-1}^n (g *_{n-1}^n f).$$

La composition de $\varpi_n(G)$ est donc associative.

De même, si $f : x \rightarrow y$ est une n -flèche de G , les morphismes ρ_n et λ_n induisent des $(n+1)$ -flèches de G

$$r_f : f *_{n-1}^n k_{n-1}(x) \rightarrow f \quad \text{et} \quad l_f : k_{n-1}(y) *_{n-1}^n f \rightarrow f.$$

Ainsi, pour x un objet de $\varpi_n(G)$, le morphisme $k_{n-1}(x)$ est une identité et $\varpi_n(G)$ est donc une catégorie.

Enfin, si $f : x \rightarrow y$ est une n -flèche de G , les morphismes δ_n et γ_n induisent des $(n+1)$ -flèches de G

$$d_f : f *_{n-1}^n w_n(f) \rightarrow y \quad \text{et} \quad g_f : w_n(f) *_{n-1}^n f \rightarrow x.$$

Ainsi, $w_n(f)$ est un inverse de f dans $\varpi_n(G)$ et la catégorie $\varpi_n(G)$ est un groupoïde. \square

Proposition 4.3.3. *Le groupoïde $\varpi_n(G)$ ne dépend pas du choix des morphismes*

$$\nabla_n : D_n \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n \quad \text{et} \quad \kappa_{n-1} : D_n \rightarrow D_{n-1}.$$

Démonstration. Soit

$$\nabla'_n : D_n \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n$$

un second morphisme de C avec même source et même but globulaires que ∇_n . Notons

$$*_{n-1}'^n : G_n \times_{G_{n-1}} G_n \rightarrow G_n$$

la composition induite sur G . Puisque le couple $(\nabla_n, \nabla'_n) : D_n \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n$ est admissible, il existe dans C un relèvement

$$\mu : D_{n+1} \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n$$

tel que

$$\mu\sigma_{n+1} = \nabla_n \quad \text{et} \quad \mu\tau_{n+1} = \nabla'_n.$$

Si f et g sont deux n -flèches de G telles que $t_n(f) = s_n(g)$, le morphisme $G(\mu)$ induit une $(n+1)$ -flèche de G

$$m_{f,g} : g *_{n-1}'^n f \rightarrow g *_{n-1}^n f.$$

D'où l'indépendance du choix de ∇_n .

De même, si on se donne

$$\kappa'_{n-1} : D_n \rightarrow D_{n-1}$$

avec même source et but globulaires que κ_{n-1} et qu'on note

$$k'_{n-1} : G_{n-1} \rightarrow G_n$$

l'application induite, le couple $(\kappa_{n-1}, \kappa'_{n-1}) : D_{n-1} \rightarrow D_n$ est admissible, et un relèvement dans C induit pour toute $(n-1)$ -flèche x de G , une n -flèche $k_{n-1}(x) \rightarrow k'_{n-1}(x)$. \square

4.3.4. Soit G un ∞ -groupeïde faible. On notera

$$\pi_0(G) = \pi_0(\varpi_1(G)).$$

Si f et g sont dans G_{n-1} avec $n \geq 1$, on notera

$$\pi_n(G, f, g) = \text{Hom}_{\varpi_n(G)}(f, g) \quad \text{et} \quad \pi_n(G, f) = \pi_n(G, f, f).$$

Notons que $\pi_n(G, f)$ est un groupe.

Comme dans le cas strict, pour $n \geq 1$, ϖ_n est un foncteur de la catégorie des ∞ -groupeïdes faibles vers la catégorie des groupeïdes. On en déduit que, π_0 est un foncteur de la catégorie des ∞ -groupeïdes faibles vers la catégorie des ensembles, et que, pour tout $n \geq 1$, π_n est un foncteur de la catégorie des ∞ -groupeïdes faibles munis d'une $(n-1)$ -flèche vers la catégorie des groupes.

Proposition 4.3.5. *Soit $F : G \rightarrow H$ un morphisme de ∞ -groupeïdes faibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'application $\pi_0(F) : \pi_0(G) \rightarrow \pi_0(H)$ est une bijection, et pour tout $n \geq 1$ et toute $(n-1)$ -flèche f de G , le foncteur F induit une bijection*

$$\pi_n(G, f) \rightarrow \pi_n(H, F(f));$$

2. *le foncteur $\varpi_1(F) : \varpi_1(G) \rightarrow \varpi_1(H)$ est une équivalence de catégories, et pour tout $n \geq 2$ et tout couple (f, g) de $(n-1)$ -flèches parallèles de G , le foncteur F induit une bijection*

$$\pi_n(G, f, g) \rightarrow \pi_n(H, F(f), F(g));$$

3. *le foncteur $\varpi_1(F) : \varpi_1(G) \rightarrow \varpi_1(H)$ est plein et essentiellement surjectif, et pour tout $n \geq 2$ et tout couple (f, g) de $(n-1)$ -flèches parallèles de G , le foncteur F induit une surjection*

$$\pi_n(G, f, g) \rightarrow \pi_n(H, F(f), F(g)).$$

Démonstration. L'implication $2 \Rightarrow 1$ est évidente. Montrons la réciproque. Soient $n \geq 1$ et f, g deux $(n-1)$ -flèches parallèles de G . Supposons qu'il existe une n -flèche $u : f \rightarrow g$ dans G . On définit alors un morphisme

$$\pi_n(G, f) \rightarrow \pi_n(G, f, g)$$

en envoyant une n -flèche $v : f \rightarrow f$ sur la n -flèche $u *_{n-1}^n v : f \rightarrow g$. Puisque $\varpi_n(G)$ est un groupeïde, ce morphisme est un isomorphisme. Il est immédiat que le foncteur F commute à cet isomorphisme, c'est-à-dire que le carré

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(G, f) & \longrightarrow & \pi_n(G, f, g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(H, F(f)) & \longrightarrow & \pi_n(H, F(f), F(g)) \end{array}$$

est commutatif. Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que s'il existe une n -flèche $v : F(f) \rightarrow F(g)$ dans H , alors il existe une n -flèche $u : f \rightarrow g$ dans G . C'est clair pour $n = 1$ par injectivité de $\pi_0(F)$. Soit donc $n \geq 2$ et $v : F(f) \rightarrow F(g)$ une n -flèche de H . Posons $x = s_{n-1}(f)$ et $y = t_{n-1}(f)$. La flèche $k_{n-1}(w_{n-1}(F(f))) *_{n-2}^n v$ est une n -flèche de H de source $w_{n-1}(F(f)) *_{n-2}^{n-1} F(f) : F(x) \rightarrow F(x)$ et de but $w_{n-1}(F(f)) *_{n-2}^{n-1} F(g) : F(x) \rightarrow F(x)$. Par injectivité de l'application

$$\pi_{n-1}(G, x) \rightarrow \pi_{n-1}(H, F(x)),$$

les $(n-1)$ -flèches $w_{n-1}(f) *_{n-2}^{n-1} f$ et $w_{n-1}(f) *_{n-2}^{n-1} g$ sont égales dans $\pi_{n-1}(G, x)$. Le fait que $\varpi_{n-1}(G)$ soit un groupoïde entraîne alors que $f = g$ dans $\pi_{n-1}(G, x, y)$ et donc l'existence d'une n -flèche $u : f \rightarrow g$.

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est évidente. Montrons la réciproque. Soient $n \geq 1$, f, g deux $(n-1)$ -flèches parallèles de G et u, v deux n -flèches de source f et de but g . Supposons qu'on ait $F(u) = F(v)$ dans $\pi_n(H, F(f), F(g))$. Il existe alors une $(n+1)$ -flèche de H de source $F(u)$ et de but $F(v)$. Par surjectivité de l'application

$$\pi_{n+1}(G, u, v) \rightarrow \pi_{n+1}(H, F(u), F(v)),$$

il existe une $(n+1)$ -flèche de G de source u et de but v . D'où $u = v$ dans $\pi_n(G, f, g)$. \square

4.3.6. On dira qu'un morphisme $F : G \rightarrow H$ de ∞ -groupoïdes faibles est une *équivalence faible* s'il satisfait les conditions équivalentes de la proposition précédente. On dispose ainsi d'un localisateur des ∞ -groupoïdes faibles.

4.4 ∞ -groupoïde fondamental

4.4.1. Dans cette section, on fixe une catégorie de modèles \mathcal{M} . Rappelons qu'un objet X de \mathcal{M} est dit *faiblement contractile* si l'unique morphisme $X \rightarrow *$ de but l'objet final est une équivalence faible. On se donne de plus un foncteur $R : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{M}$ qui fait de \mathcal{M} une extension globulaire. On désignera également par R le prolongement $\Theta_0 \rightarrow \mathcal{M}$ et on notera de la même manière les objets et morphismes de Θ_0 , et leurs images dans \mathcal{M} .

L'exemple fondamental est celui de la catégorie de modèles \mathcal{Top} des espaces topologiques. On définit le foncteur R de la manière suivante. Pour $i \geq 0$, le foncteur R envoie \mathbf{D}_i sur $\mathbf{D}_i = \{x \in \mathbb{R}^i; \|x\| \leq 1\}$, la boule de dimension i .

Pour $i \geq 1$, le foncteur R envoie σ_i sur σ_i et τ_i sur τ_i où

$$\sigma_i = (x, -\sqrt{1 - \|x\|^2}) \quad \text{et} \quad \tau_i = (x, \sqrt{1 - \|x\|^2}),$$

sont les inclusions des deux hémisphères de \mathbf{D}_i . On vérifie facilement que ces applications satisfont les relations coglobulaires et on a donc bien défini un foncteur $R : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{Top}$. La catégorie \mathcal{Top} étant cocomplète, ce foncteur fait de \mathcal{Top} une extension globulaire. Notons que l'espace topologique \mathbf{D}_i est cofibrant faiblement contractile et que les morphismes σ_i, τ_i sont des cofibrations de \mathcal{Top} .

Proposition 4.4.2. *Supposons que R envoie tout objet de \mathbb{G} sur un objet faiblement contractile de \mathcal{M} et tout morphisme de \mathbb{G} sur une cofibration de \mathcal{M} . Alors tout arbre est envoyé sur un objet faiblement contractile.*

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur le nombre n de sommets maximaux d'un arbre S . Si $n = 1$, S est faiblement contractile par hypothèse sur R . Sinon, supposons

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ & i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

et posons

$$T = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{n-1} \\ & i'_1 & \cdots & i'_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Soit $\beta : D_{i_n} \rightarrow S$ la n -ième région maximale de S et $\gamma : D_{i_{n-1}} \rightarrow T$ la $(n-1)$ -ième région maximale de T . Le carré

$$\begin{array}{ccc} D_{i'_{n-1}} & \xrightarrow{\tau_{i'_{n-1}}^{i_n}} & D_{i_n} \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ T & \longrightarrow & S \end{array}$$

est cocartésien dans \mathcal{M} . Par hypothèse sur R , le morphisme $\tau_{i'_{n-1}}^{i_n}$ est une cofibration triviale. Puisque le carré précédent est cocartésien, le morphisme $T \rightarrow S$ est également une cofibration triviale. Or, par hypothèse de récurrence, T est faiblement contractile. Il en résulte que S est faiblement contractile. \square

4.4.3. Nous allons maintenant expliciter un foncteur $R : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{M}$ analogue au foncteur défini pour \mathcal{Top} . Posons $S^{-1} = \emptyset$, l'objet initial de \mathcal{M} .

En factorisant l'unique morphisme $S^{-1} \rightarrow *$ de but l'objet final de \mathcal{M} , en une cofibration suivie d'une fibration triviale

$$\begin{array}{ccc} S^{-1} & \longrightarrow & * \\ & \searrow & \nearrow \\ & D_0 & \end{array},$$

on obtient un objet D_0 cofibrant faiblement contractile, ainsi qu'une cofibration $j_0 : S^{-1} \rightarrow D_0$.

Supposons qu'on ait défini un objet cofibrant S^{n-1} , un objet cofibrant faiblement contractile D_n , ainsi qu'une cofibration $j_n : S^{n-1} \rightarrow D_n$. On pose alors

$$S^n = (D_n, j_n) \amalg_{S^{n-1}} (j_n, D_n).$$

Puisque S^{n-1} est cofibrant et j_n est une cofibration, l'objet S^n est cofibrant. On dispose par ailleurs du morphisme canonique $(1_{D_n}, 1_{D_n}) : S^n \rightarrow D_n$. En factorisant ce morphisme

en une cofibration suivie d'une fibration triviale

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^n & \xrightarrow{(1_{\mathbf{D}_n}, 1_{\mathbf{D}_n})} & \mathbf{D}_n \\ & \searrow^{j_{n+1}} & \nearrow \\ & \mathbf{D}_{n+1} & \end{array},$$

on obtient un objet \mathbf{D}_{n+1} cofibrant faiblement contractile, ainsi qu'une cofibration $j_{n+1} : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{D}_{n+1}$.

Pour $i \geq 1$, on pose

$$\sigma_n = j_n \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad \tau_n = j_n \varepsilon_2,$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 : \mathbf{D}_{n-1} \rightarrow \mathbf{S}^{n-1} = \mathbf{D}_{n-1} \amalg_{\mathbf{S}^{n-2}} \mathbf{D}_{n-1}$ désignent les deux morphismes canoniques. On vérifie immédiatement que ces morphismes satisfont les identités coglobulaires.

Le foncteur R ainsi défini fait de \mathcal{M} une extension globulaire. De plus, celui-ci vérifie par définition les hypothèses de la proposition 4.4.2. Notons également que la construction précédente appliquée à \mathcal{Top} donne l'extension globulaire définie au début de cette section si on utilise la factorisation évidente

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^n & \longrightarrow & \mathbf{D}_n \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{D}_{n+1} & \end{array},$$

où \mathbf{S}^n désigne le bord de \mathbf{D}_{n+1} et $\mathbf{D}_{n+1} \rightarrow \mathbf{D}_n$ est la projection.

Proposition 4.4.4. *Soit $R : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{M}$ l'extension globulaire définie ci-dessus. Supposons que tous les objets de \mathcal{M} soient fibrants. Alors tout couple admissible de \mathcal{M} , pour une théorie de ∞ -groupoïdes, admet un relèvement.*

Démonstration. Soit $(f, g) : \mathbf{D}_i \rightarrow S$ un couple admissible de \mathcal{M} pour une théorie de ∞ -groupoïdes. Le couple (f, g) admet un relèvement si et seulement si le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^i = \mathbf{D}_i \amalg_{\mathbf{S}^{i-1}} \mathbf{D}_i & \xrightarrow{(f,g)} & S \\ j_{i+1} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{D}_{i+1} & \longrightarrow & * \end{array}$$

commutatif dans \mathcal{M} admet un relèvement $h : \mathbf{D}_{i+1} \rightarrow S$ qui le scinde en deux triangles commutatifs. Par hypothèse, S est fibrant. De plus, en vertu de la proposition 4.4.2, l'objet S est faiblement contractile. Le morphisme $S \rightarrow *$ est donc une fibration triviale. Puisque par hypothèse, le morphisme $j_{i+1} : \mathbf{S}^i \rightarrow \mathbf{D}_{i+1}$ est une cofibration, le relèvement h existe. \square

4.4.5. Soient \mathcal{M} une catégorie de modèles dont tous les objets sont fibrants et \mathcal{C} un cohérateur de ∞ -groupoïdes. Par la proposition précédente, l'extension globulaire \mathcal{M}

vérifie l'hypothèse de la proposition 4.1.5 et on dispose donc d'un foncteur globulaire (non canonique) $F : C \rightarrow \mathcal{M}$. Ainsi, si X est un objet de \mathcal{M} , on peut lui associer son ∞ -groupeïde *fondamental*

$$\Pi_F(X, C) = \text{Hom}_{\mathcal{M}}(F(\cdot), X) : C^{\circ} \rightarrow \mathcal{E}ns.$$

Cet ∞ -groupeïde dépend *a priori* des choix de factorisations qui interviennent dans la construction du foncteur $\mathbb{G} \rightarrow \mathcal{M}$ et des choix de relèvements qui permettent de définir le foncteur $F : C \rightarrow \mathcal{M}$.

Conjecture 4.4.6. *Le ∞ -groupeïde $\Pi_F(X, C)$ ne dépend pas du choix de F dans la catégorie homotopique des ∞ -groupeïdes faibles de type C .*

Proposition 4.4.7. *Pour tout $n \geq 1$, le groupeïde $\varpi_n(\Pi_F(X, C))$ ne dépend pas du choix de F . Plus généralement, deux morphismes quelconques de \mathcal{M}*

$$\nabla'_n : D_n \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n \quad \text{et} \quad \kappa'_{n-1} : D_n \rightarrow D_{n-1},$$

vérifiant

$$\begin{aligned} \nabla'_n \sigma_n &= \varepsilon_2 \sigma_n & \text{et} & & \nabla'_n \tau_n &= \varepsilon_1 \tau_n, \\ \kappa'_{n-1} \sigma_n &= 1_{D_{n-1}} & \text{et} & & \kappa'_{n-1} \tau_n &= 1_{D_{n-1}}, \end{aligned}$$

où ε_1 et ε_2 désignent les deux morphismes canoniques $D_n \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n$, induisent sur le graphe sous-jacent de $\varpi_n(\Pi_F(X, C))$ la structure de groupeïde de $\varpi_n(\Pi_F(X, C))$.

Démonstration. Soit $F' : C \rightarrow \mathcal{M}$ un second foncteur globulaire. Notons G l'ensemble globulaire sous-jacent des ∞ -groupeïdes $\Pi_F(X, C)$ et $\Pi_{F'}(X, C)$. Fixons $n \geq 1$ et choisissons dans C des morphismes

$$\nabla_n : D_n \rightarrow D_n \amalg_{D_{n-1}} D_n \quad \text{et} \quad \kappa_{n-1} : D_n \rightarrow D_{n-1},$$

tels que

$$\begin{aligned} \nabla_n \sigma_n &= \varepsilon_2 \sigma_n & \text{et} & & \nabla_n \tau_n &= \varepsilon_1 \tau_n, \\ \kappa_{n-1} \sigma_n &= 1_{D_{n-1}} & \text{et} & & \kappa_{n-1} \tau_n &= 1_{D_{n-1}}. \end{aligned}$$

Notons $*_{n-1}^n$ et k_{n-1} les opérations induites sur G par F ; $*'_{n-1}^n$ et k'_{n-1} les opérations induites sur G par F' . Puisque le couple $(F(\nabla_n), F'(\nabla_n))$ est admissible, il admet par la proposition 4.4.4 un relèvement dans \mathcal{M} . En particulier, si f et g sont deux n -flèches de G , les deux n -flèches $f *_{n-1}^n g$ et $f *'_{n-1}^n g$ sont homotopes. On montre de même, en considérant le couple admissible $(F(\kappa_{n-1}), F'(\kappa_{n-1}))$, que si x est une $(n-1)$ -flèche de G , alors les n -flèches $k_{n-1}(x)$ et $k'_{n-1}(x)$ sont homotopes, ce qui achève la preuve de la première assertion.

La seconde assertion se démontre de la même manière en remplaçant $F'(\nabla_n)$ par ∇'_n , et $F'(\kappa_{n-1})$ par κ'_{n-1} . \square

4.4.8. Soit X un espace topologique. Pour $n \geq 1$, on définit un groupoïde $\varpi_n(X)$ de la manière suivante. Les objets de $\varpi_n(X)$ sont les applications continues $\mathbf{D}_{n-1} \rightarrow X$. Si f, g sont deux telles applications, un morphisme de f vers g est la classe d'une application continue $u : \mathbf{D}_n \rightarrow X$, telle que $u\sigma_n = f$ et $u\tau_n = g$, pour le relation d'homotopie préservant source et but. Ainsi, $u, v : \mathbf{D}_n \rightarrow X$ représentent le même morphisme de $\varpi_n(X)$ s'il existe $H : \mathbf{D}_{n+1} \rightarrow X$ telle que $H\sigma_{n+1} = u$ et $H\tau_{n+1} = v$. On définit la composition des morphismes comme dans le cas des groupes d'homotopie en utilisant l'homéomorphisme $\mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{D}_n \amalg_{\mathbf{D}_{n-1}} \mathbf{D}_n$, qui consiste à identifier une boule au recollement de deux demi-boules. Les unités sont induites par la projection de \mathbf{D}_n sur \mathbf{D}_{n-1} . On vérifie immédiatement que la catégorie $\varpi_n(X)$ est bien un groupoïde et qu'on définit ainsi un foncteur ϖ_n de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupoïdes.

En particulier, pour $n = 1$, $\varpi_1(X)$ est le groupoïde fondamental $\Pi_1(X)$, et, pour $n \geq 1$ et x est un élément de X , si on note $f : \mathbf{D}_{n-1} \rightarrow X$ l'application constante de valeur x , alors $\text{Hom}_{\varpi_n(X)}(f, f)$ est canoniquement isomorphe au groupe d'homotopie usuel $\pi_n(X, x)$. Plus généralement, si $f, g : \mathbf{D}_{n-1} \rightarrow X$ sont deux applications quelconques, on notera

$$\pi_n(X, f, g) = \text{Hom}_{\varpi_n(X)}(f, g) \quad \text{et} \quad \pi_n(X, f) = \pi_n(X, f, f).$$

Proposition 4.4.9. *Une application continue $F : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est une équivalence faible si et seulement si $\pi_0(F) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ est une bijection et, pour tout $n \geq 1$ et toute application continue $f : \mathbf{D}_{n-1} \rightarrow X$, le morphisme $\pi_n(F, f) : \pi_n(X, f) \rightarrow \pi_n(Y, F(f))$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $F : X \rightarrow Y$ une équivalence faible. Fixons $n \geq 2$ et f une application continue $\mathbf{D}_{n-1} \rightarrow X$. Il s'agit de montrer que $\pi_n(F, f)$ est un isomorphisme. La structure de catégorie de modèles usuelle sur \mathcal{Top} induit une structure de catégorie de modèles sur la catégorie $\mathbf{S}^{n-1} \setminus \mathcal{Top}$ des espaces topologiques sous \mathbf{S}^{n-1} . Munissons l'espace X de l'application

$$(f, f) : \mathbf{S}^{n-1} = \mathbf{D}_{n-1} \amalg_{\mathbf{S}^{n-2}} \mathbf{D}_{n-1} \rightarrow X,$$

l'espace Y de l'application

$$(F(f), F(f)) : \mathbf{S}^{n-1} = \mathbf{D}_{n-1} \amalg_{\mathbf{S}^{n-2}} \mathbf{D}_{n-1} \rightarrow Y,$$

et l'espace \mathbf{D}_n de l'inclusion canonique $i : \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{D}_n$. L'application F est alors au-dessous de \mathbf{S}^{n-1} . Puisque F est une équivalence faible (entre objets fibrants) et que \mathbf{D}_n est un objet cofibrant, l'application F induit une bijection

$$[\mathbf{D}_n, X]_{\mathbf{S}^{n-1}} \rightarrow [\mathbf{D}_n, Y]_{\mathbf{S}^{n-1}},$$

où on a noté $[U, V]_{\mathbf{S}^{n-1}}$ les classes d'homotopie pour la structure de catégorie de modèles sur $\mathbf{S}^{n-1} \setminus \mathcal{Top}$.

Cette application est précisément $\pi_n(F, f)$. Pour le montrer, il suffit de vérifier que

$$\pi_n(X, f) = [\mathbf{D}_n, X]_{\mathbf{S}^{n-1}} \quad \text{et} \quad \pi_n(Y, F(f)) = [\mathbf{D}_n, Y]_{\mathbf{S}^{n-1}}.$$

Montrons par exemple la première égalité. Puisque \mathbf{D}_n est cofibrant, on peut utiliser n'importe quel objet chemin pour décrire les homotopies à droite dans $\mathbf{S}^{n-1} \setminus \mathcal{Top}$, entre deux morphismes $\mathbf{D}_n \rightarrow X$ au-dessous de \mathbf{S}^{n-1} . Choisissons l'objet chemin usuel $X^{\mathbf{D}_1}$ vu sous \mathbf{S}^{n-1} via le composé $\mathbf{S}^{n-1} \rightarrow X \rightarrow X^{\mathbf{D}_1}$. Une homotopie à droite comme ci-dessus est alors donnée par un morphisme $K : \mathbf{D}_n \rightarrow X^{\mathbf{D}_1}$ au-dessous de \mathbf{S}^{n-1} . Par adjonction, un tel morphisme induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_n & \xrightarrow{H} & X \\ \mathbf{D}_1 \times i \uparrow & & \uparrow (f,f) \\ \mathbf{D}_1 \times \mathbf{S}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{S}^{n-1} \end{array} \quad ,$$

c'est-à-dire une homotopie (au sens usuel de la topologie) constante sur \mathbf{S}^{n-1} . Par ailleurs, un tel carré correspond à la donnée d'une application $\mathbf{D}_{n+1} \rightarrow X$ au-dessous de \mathbf{S}^{n-1} . D'où le résultat. \square

Proposition 4.4.10. *Soient C un cohérateur de ∞ -groupoïdes et $\Pi(\cdot, C)$ le foncteur $\mathcal{Top} \rightarrow \infty\text{-Grpf}_C$ (non canonique) construit dans cette section. Notons \mathcal{Grp} la catégorie des groupoïdes. Pour $n \geq 1$, le triangle de foncteurs*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Top} & \xrightarrow{\Pi(\cdot, C)} & \infty\text{-Grpf}_C \\ & \searrow \varpi_n & \swarrow \varpi_n \\ & \mathcal{Grp} & \end{array}$$

est commutatif. En particulier, une application continue $F : X \rightarrow Y$ est une équivalence faible si et seulement si $\Pi(F, C)$ est une équivalence faible de ∞ -groupoïdes. On dispose donc d'un foncteur

$$\text{Hot} \rightarrow \text{Ho}(\infty\text{-Grpf}_C).$$

Démonstration. Soit X un espace topologique et n un entier supérieur ou égal à 1. Les graphes sous-jacents de $\varpi_n(X)$ et $\varpi_n(\Pi(X, C))$ sont identiques. Par la proposition 4.4.7, la structure de groupoïde sur $\varpi_n(\Pi(X, C))$ est induite par n'importe quelles applications

$$\nabla_n : \mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{D}_n \amalg_{\mathbf{D}_{n-1}} \mathbf{D}_n \quad \text{et} \quad \kappa_{n-1} : \mathbf{D}_n \rightarrow \mathbf{D}_{n-1},$$

avec les sources et buts globulaires usuels. En particulier, on peut choisir les applications qu'on a utilisé pour définir la structure de groupoïde de $\varpi_n(X)$. D'où l'égalité entre $\varpi_n(X)$ et $\varpi_n(\Pi(X, C))$. Le résultat analogue pour les morphismes est clair. \square

Corollaire 4.4.11. *Soit X un espace topologique. Les ensembles $\pi_0(X)$ et $\pi_0(\Pi(X, C))$ sont égaux. De plus, pour $n \geq 1$, si x est un élément de X et $f : \mathbf{D}_{n-1} \rightarrow X$ désigne l'application constante de valeur x , alors les groupes $\pi_n(X, x)$ et $\pi_n(\Pi(X, C), f)$ sont égaux.*

4.5 La conjecture de Grothendieck

Fixons un cohérateur de ∞ -groupoïdes C . Dans la suite de cette section, on appellera ∞ -groupoïdes faibles les ∞ -groupoïdes de type C .

Conjecture 4.5.1 (Grothendieck). *La catégorie homotopique des ∞ -groupoïdes faibles est équivalente à la catégorie homotopique \mathbf{Hot} . Plus précisément, le foncteur de \mathbf{Hot} vers $\mathbf{Ho}(\infty\text{-Grpf}_C)$ défini dans la section précédente est une équivalence de catégories.*

Nous allons maintenant exposer une stratégie de démonstration de la première partie de la conjecture Grothendieck, due à Maltiniotis (voir [33]). Nous utiliserons le langage des catégories test, qui est exposé brièvement dans la section 7.1.

Conjecture 4.5.2. *La catégorie C est une catégorie test.*

En particulier, le foncteur $i_C : \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ induirait une équivalence de catégories $\mathbf{Ho}(\widehat{C}) \rightarrow \mathbf{Hot}$. Par ailleurs, par [13] (voir le théorème 7.1.7 pour une référence plus précise), il existerait une structure de catégorie de modèles sur le localisateur \widehat{C} , à engendrement cofibrant, dont les cofibrations seraient les monomorphismes.

Conjecture 4.5.3. *Un morphisme de ∞ -groupoïdes faibles est une équivalence faible si et seulement si son image par le foncteur d'inclusion $i : \infty\text{-Grpf}_C \rightarrow \widehat{C}$ est une équivalence faible de préfaisceaux sur C .*

Notons i le foncteur d'inclusion $\infty\text{-Grpf}_C \rightarrow \widehat{C}$. Celui-ci admet un adjoint à gauche r (voir les propositions 1.27 et 1.51 [1]). Rappelons la proposition suivante de relèvement de structures de catégorie de modèles.

Proposition 4.5.4. *Soient \mathcal{M} une catégorie de modèles engendrée par un couple (I, J) , \mathcal{C} une catégorie localement présentable et $G : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur admettant un adjoint à droite D . Notons \mathcal{W}_C la classe des morphismes de \mathcal{C} qui s'envoient sur une équivalence faible de \mathcal{M} . Supposons la condition suivante :*

() tout rétracte de composés transfinis d'images directes de flèches de $G(J)$ est dans \mathcal{W}_C . Alors le couple $(G(I), G(J))$ engendre une structure de catégorie de modèles sur le localisateur $(\mathcal{C}, \mathcal{W}_C)$. De plus, l'adjonction (G, D) est une adjonction de Quillen.*

Démonstration. Voir la proposition 1.4.23 de [13]. □

Conjecture 4.5.5. *Le foncteur $i : \infty\text{-Grpf}_C \rightarrow \widehat{C}$ et son adjoint à gauche r satisfont la condition (*) de la proposition précédente.*

Les deux conjectures précédentes impliquent l'existence d'une structure de catégorie de modèles sur le localisateur des ∞ -groupoïdes faibles. De plus, l'adjonction (r, i) serait une adjonction de Quillen.

Conjecture 4.5.6. *L'adjonction de Quillen (r, i) est une équivalence de Quillen.*

Ainsi, les foncteurs

$$\infty\text{-Grpf}_C \xrightarrow{i} \widehat{C} \xrightarrow{i_C} \mathcal{C}at$$

induiraient des équivalences de catégories

$$\text{Ho}(\infty\text{-Grpf}_C) \xrightarrow{\bar{i}} \text{Ho}(\widehat{C}) \xrightarrow{\bar{i}_C} \mathcal{C}at.$$

Chapitre 5

Cohérateurs de ∞ -catégories et homogénéité

5.1 Θ est un pseudo-cohérateur de ∞ -catégories

Proposition 5.1.1. *Un couple admissible de Θ est, soit de la forme $(f, f) : D_i \rightarrow S$ où f est un morphisme algébrique, soit de la forme $(\sigma_S f', \tau_S f')$ où $f' : D_i \rightarrow \partial S$ est un morphisme algébrique tel que la dimension de ∂S soit i .*

Démonstration. On rappelle que pour un n donné et S un arbre, il existe au plus un morphisme algébrique de D_n vers S dans Θ . Pour conclure, il nous suffit donc de montrer que dans le second cas, la dimension de ∂S est nécessairement i .

Si $i = 0$, c'est clair. Sinon, puisque $\sigma_S f'$ et $\tau_S f'$ sont parallèles, on a $\sigma_S f' \sigma_i = \tau_S f' \sigma_i$. Or $(\sigma_S f' \sigma_i)_{1_{D_{i-1}}} = \sigma_S f' \sigma_i = \sigma_S \sigma_{i-1}^{\partial S}$. De même, $(\tau_S f' \sigma_i)_{1_{D_{i-1}}} = \tau_S \sigma_{i-1}^{\partial S}$. Il vient que $\sigma_S \sigma_{i-1}^{\partial S} = \tau_S \sigma_{i-1}^{\partial S}$. Ceci entraîne que la dimension de ∂S est strictement supérieure à $i-1$. Cette dimension est donc i car f' est un morphisme algébrique de source D_i et de but ∂S . \square

Proposition 5.1.2. *Tout relèvement d'un couple admissible dans Θ est algébrique.*

Démonstration. Fixons un couple admissible et donnons-nous un relèvement h . Supposons notre couple de la forme (f, f) avec $f : D_n \rightarrow S$ algébrique. Soit h un relèvement. On a $h\sigma_n = f$ et donc $(h\sigma_n)_{\text{glob}} = f_{\text{glob}} = 1_S$. Or $(h\sigma_n)_{\text{glob}}$ se factorise par h_{glob} . D'où $h_{\text{glob}} = 1_S$ ce qui prouve l'algébricité de h .

Supposons maintenant le couple de la forme $(\sigma_S f', \tau_S f')$ avec $f' : D_n \rightarrow \partial S$ algébrique. On a $h\sigma_n = \sigma_S f'$ et donc $(h\sigma_n)_{\text{glob}} = (\sigma_S f')_{\text{glob}} = \sigma_S$. Or $(h\sigma_n)_{\text{glob}}$ se factorise par h_{glob} . Il vient que σ_S se factorise par h_{glob} dans Θ_0 . De même, τ_S se factorise par h_{glob} dans Θ_0 . On conclut alors par le lemme suivant. \square

Lemme 5.1.3. *Soit $h : S \rightarrow T$ un morphisme de Θ_0 avec T de dimension au moins 1. Supposons qu'il existe $f, g : \partial T \rightarrow S$ deux morphismes de Θ_0 tels que*

$$\sigma_T = hf \quad \text{et} \quad \tau_T = hg.$$

Alors $h = 1_S$.

Démonstration. Soit n la dimension de S . Supposons que h ne soit pas l'identité. Alors il existe un sommet s de dimension n qui est dans S mais pas dans T . Appelons t le sommet de dimension $n-1$ sur la branche issue de s . Puisque σ_S se factorise par h et que t est dans ∂S , le sommet t est également dans T . Mais la région associée à ce sommet par les morphismes hf et hg ne dépend que de h . Or σ_T et τ_T associent deux régions différentes à ce sommet. Contradiction. \square

Corollaire 5.1.4. *Soit C une préthéorie globulaire homogène sur Θ . Tout relèvement d'un couple admissible de C est algébrique.*

Proposition 5.1.5. *Tout couple admissible de Θ admet un unique relèvement. En particulier, Θ est un pseudo-cohérateur.*

Démonstration. Soit $(f, g) : D_i \rightarrow S$ un couple admissible de Θ . Par la proposition 5.1.2, si le couple (f, g) admet un relèvement $h : D_{i+1} \rightarrow S$, celui-ci est algébrique. Par ailleurs, il existe au plus un morphisme algébrique de D_{i+1} vers S . Il suffit donc de montrer que (f, g) admet un relèvement.

Supposons f et g algébriques. On a alors $f = g$ et le morphisme algébrique $h = f\kappa_i$ convient.

Supposons que $f = \sigma_S f'$ et $g = \tau_S f'$. Par la proposition précédente, S est de dimension $i+1$. Soit h l'unique morphisme algébrique $h : D_{i+1} \rightarrow S$ de Θ . On a $(h\sigma_{i+1})_{1_{D_i}} = h\sigma_{i+1} = \sigma_i^S = \sigma_S$. Par ailleurs, $f_{1_{D_i}} = \sigma_S f'_{1_{D_i}} = \sigma_S$. D'où $h\sigma_{i+1} = f$. De même, $h\tau_{i+1} = g$ et h est un relèvement algébrique du couple (f, g) . \square

Corollaire 5.1.6. *Soit C une préthéorie globulaire au-dessus de Θ . Pour tout ensemble A de couples admissibles de C , il existe un foncteur globulaire canonique $C[R(A)] \rightarrow \Theta$ et donc un foncteur globulaire canonique $\text{Glob}(C[R(A)]) \rightarrow \Theta$.*

Corollaire 5.1.7. *Soit C une préthéorie globulaire homogène sur Θ . Si $(\sigma_S f', \tau_S g') : D_i \rightarrow S$ est un couple admissible de C où $f', g' : D_i \rightarrow \partial S$ sont des morphismes algébriques de C , alors ∂S est de dimension i .*

5.2 Propriétés des adjonctions de relèvements

5.2.1. On dit qu'une préthéorie globulaire C vérifie la propriété (R) si pour tout i strictement positif :

- (R1) les morphismes σ_i et τ_i sont des monomorphismes ;
- (R2) si $\sigma_i f = \tau_i g$ où $f, g : X \rightarrow D_i$ sont deux morphismes de C , alors $f = g$;
- (R3) dès que $\sigma_i f = \tau_i f$ où $f : X \rightarrow D_{i-1}$ est un morphisme de C , le morphisme f se factorise à l'arrivée par un morphisme source ou but non trivial.

Pour $i = 1$, la condition (R3) signifie qu'il n'existe pas de morphisme f de but D_0 tel que $\sigma_1 f = \tau_1 f$.

Remarque 5.2.2. La propriété (R) s'interprète de manière géométrique en termes de préfaisceaux. La condition (R1) se traduit par le fait que les σ_i , τ_i et plus généralement les σ_i^j , τ_i^j sont des monomorphismes dans \widehat{C} . Sous cette hypothèse, la conjonction des conditions (R2) et (R3) signifie exactement que

$$\text{Im } \sigma_i \cap \text{Im } \tau_i = \text{Im } \sigma_{i-2}^i \cup \text{Im } \tau_{i-2}^i$$

(et en particulier $\text{Im } \sigma_1 \cup \text{Im } \tau_1 = \emptyset$ pour $i = 1$), où \cap et \cup désignent l'intersection et la réunion des sous-préfaisceaux du préfaisceau représentable D_i . Géométriquement, cela signifie que dans \widehat{C} , l'intersection des hémisphères supérieur et inférieur de la sphère S^{i-1} est la réunion des hémisphères supérieur et inférieur de la sphère S^{i-2} , plongée dans S^{i-1} de la manière évidente.

Proposition 5.2.3. *La théorie globulaire Θ_0 vérifie la propriété (R).*

Démonstration. On a déjà établi (proposition 2.3.25) que tous les morphismes de Θ_0 sont des monomorphismes.

Supposons qu'on ait $\sigma_i f = \tau_i g$ avec f et g dans Θ_0 . Alors nécessairement, f et g ont pour source un D_j pour j positif tel que $j < i - 1$. Ainsi, f et g appartiennent à $\text{Hom}(D_j, D_{i-1}) = \{\sigma_j^{i-1}, \tau_j^{i-1}\}$. Or

$$\sigma_i \sigma_j^{i-1} = \tau_i \sigma_j^{i-1} \neq \sigma_i \tau_j^{i-1} = \tau_i \tau_j^{i-1}.$$

D'où $f = g$. De plus, σ_j^{i-1} (respectivement τ_j^{i-1}) pour $i - 1 > j$ est un morphisme source (respectivement but) non trivial. \square

Proposition 5.2.4. *Soient C une préthéorie globulaire vérifiant la propriété (R) et A un ensemble de couples de flèches parallèles de C . Alors tout morphisme de $C[R(A)]$ se décompose de manière unique en un composé de morphismes $a_n \cdots a_1 a_0$, chaque a_i étant une flèche de C ou un relèvement d'un couple de A , tel que :*

1. les a_i ne sont pas des identités ;
2. deux a_i consécutifs ne sont jamais tous les deux des flèches de C ;
3. si a_{i+1} pour $i \geq 0$ est un relèvement de source D_k d'un couple de A et que a_i est une flèche de C , alors a_i ne se factorise, à l'arrivée, ni par σ_k ni par τ_k dans C .

Démonstration. La démonstration de la proposition va utiliser la théorie des systèmes de réécriture. Nous renvoyons le lecteur à [26] pour une introduction à ce sujet.

Soit S le système de réécriture suivant sur l'ensemble des morphismes de $C[R(A)]$:

1. $[1_X] \rightarrow 1_X$ pour tout objet X de C ;
2. $[g][f] \rightarrow [gf]$ pour $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ des flèches composables de C ;
3. (a) $[r_a][\sigma_{i_a+1} f] \rightarrow [a_1 f]$;
 (b) $[r_a][\tau_{i_a+1} f] \rightarrow [a_2 f]$,
 pour tout $a = (a_1, a_2)$ dans A de source D_{i_a} et toute flèche f de C de but D_{i_a} .

Le système S est fortement normalisant. En effet, à chaque application d'une règle, le nombre de lettres du mot décroît (l'identité correspondant au mot vide). Par le lemme de Newman, pour montrer que le système S est confluent, il suffit de montrer qu'il est faiblement confluent.

Remarquons que puisque les σ_i sont des monomorphismes dans C , le morphisme f de la règle 3a est uniquement déterminé. De même pour la règle 3b. Par ailleurs, les règles 3a et 3b peuvent toutes deux s'appliquer au mot $[r_a][h]$ si $h = \sigma_{i_a+1}f = \tau_{i_a+1}g$ où f et g sont deux morphismes de C . Cependant, puisque C vérifie (R), cette situation n'est possible que si $f = g$.

Voici les paires critiques du système :

1. $([f]1_X, [f]1_X)$ provenant de $[f][1_X]$ où f est une flèche de source X ;
2. $(1_X[f], [1_X]f)$ provenant de $[1_X][f]$ où f est une flèche de but X ;
3. (a) $([r_a]1_{D_{i_a+1}}, [a_1f])$ provenant de $[r_a][\sigma_{i_a+1}f]$ où f est un morphisme de C tel que $\sigma_{i_a+1}f = 1_{D_{i_a+1}}$;
 (b) $([r_a]1_{D_{i_a+1}}, [a_2f])$ provenant de $[r_a][\tau_{i_a+1}f]$ où f est un morphisme de C tel que $\tau_{i_a+1}f = 1_{D_{i_a+1}}$;
4. $([a_1f], [a_2f])$ provenant de $[r_a][g]$ où $g = \sigma_{i_a+1}f = \tau_{i_a+1}f$ avec f un morphisme de C de but D_{i_a+1} ;
5. $([hg][f], [h][gf])$ provenant de $[h][g][f]$ où $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ sont des flèches de C ;
6. (a) $([a_1g][f], [r_a][\sigma_{i_a+1}gf])$ provenant de $[r_a][\sigma_{i_a+1}f][g]$ où $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} D_{i_a}$ sont des flèches de C ;
 (b) $([a_2g][f], [r_a][\tau_{i_a+1}gf])$ provenant de $[r_a][\tau_{i_a+1}f][g]$ où $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} D_{i_a}$ sont des flèches de C .

Les confluences des paires 1, 2, 5, 6a et 6b résultent uniquement du fait que C est une catégorie.

Pour établir la confluence de la paire 3a, il suffit de prouver que $r_a = a_2f$. Puisque σ_{i_a+1} est un épimorphisme scindé par f et un monomorphisme, c'est un isomorphisme d'inverse f . La relation $r_a\sigma_{i_a+1} = a_2$ entraîne donc $r_a\sigma_{i_a+1}f = a_2f\sigma_{i_a+1}f$ et donc, en simplifiant par σ_{i_a+1} à droite, la relation recherchée. La confluence de la paire 3b s'établit de la même manière.

Enfin, prouvons la confluence de la paire 4. Il s'agit de prouver que $a_1f = a_2f$. Puisque C vérifie (R), le morphisme f se factorise par σ_{i_a} ou τ_{i_a} . Supposons qu'il se factorise par σ_{i_a} . On a donc $f = \sigma_{i_a}g$ pour un morphisme g de C et la relation qu'on cherche à établir se réécrit $a_1\sigma_{i_a}g = a_2\sigma_{i_a}g$. Or, puisque (a_1, a_2) est un couple de flèches parallèles, on a $a_1\sigma_{i_a} = a_2\sigma_{i_a}$. On prouve de la même manière que $a_1f = a_2f$ si f se factorise par τ_{i_a} .

Le système S est donc confluent. Ainsi, tout mot se réécrit de manière unique en un mot réduit, c'est-à-dire un mot sur lequel aucune règle de S ne peut être appliquée. Il est immédiat que les mots réduits du système S correspondent exactement aux décompositions annoncées par la proposition. \square

Remarque 5.2.5. Les flèches a_0, a_1, \dots, a_{n-1} de l'énoncé sont soit des relèvements d'un couple de A , soit des morphismes algébriques de C . En effet, si a_i pour i entre 0 et $n - 1$ est un morphisme de C , alors nécessairement a_{i+1} est un relèvement. Supposons ce relèvement de source D_j . Les seuls morphismes globulaires de C de but D_j sont les morphismes source et but. Il vient que si $a_i = kb$ avec k globulaire, alors $k = 1$.

Proposition 5.2.6. *Soient C une préthéorie globulaire vérifiant la propriété (R) et A un ensemble de couples de flèches parallèles de C . Alors le foncteur $C \rightarrow C[R(A)]$ est fidèle. En particulier, $C[R(A)]$ est une préthéorie globulaire.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de l'unicité de la décomposition de la proposition précédente. \square

Proposition 5.2.7. *Toute préthéorie globulaire homogène vérifie la propriété (R).*

Démonstration. Soit C une préthéorie globulaire homogène. Par la proposition 2.7.5, les flèches globulaires sont des monomorphismes dans C . Il suffit donc de vérifier les conditions (R2) et (R3). Vérifions-les en même temps. Soit i un entier strictement positif. Supposons qu'on ait $\sigma_i f = \tau_i g$ où f et g sont deux morphismes de C . Appelons h ce morphisme. Soient $f = ja$ et $g = kb$ les décompositions algébriques de f et g . L'unicité de la décomposition algébrique de h entraîne que $\sigma_i j = \tau_i k$ et $a = b$. Puisque Θ_0 vérifie la propriété (R), on a $j = k$ et ce morphisme se factorise par un morphisme source ou but non trivial. On obtient ainsi que $f = g$ et que ce morphisme se factorise par un morphisme source ou but non trivial. \square

Proposition 5.2.8. *Soit C une préthéorie globulaire homogène sur Θ . Donnons-nous un ensemble A de couples de flèches admissibles de C . Alors le foncteur canonique $C[R(A)] \rightarrow \Theta$ (voir le corollaire 5.1.6) fait de $C[R(A)]$ une préthéorie globulaire homogène sur Θ .*

Démonstration. Par la proposition 2.7.9, il suffit de démontrer que pour toute flèche f de $C[R(A)]$, il existe une unique décomposition $f = ia$ où i est globulaire et a est algébrique sur Θ .

Par la proposition précédente, la catégorie C vérifie les hypothèses de la proposition 5.2.4. La remarque 5.2.5 s'applique donc et tout morphisme f de $C[R(A)]$ se décompose en $f = a_n \dots a_0$ où les morphismes a_0, \dots, a_{n-1} sont soit des flèches algébriques, soit des relèvements de couples de A , et a_n est soit une flèche de C , soit un relèvement d'un couple de A . Si a_n est une flèche de C , il existe une décomposition $a_n = ia$ dans C où i est une flèche globulaire et a est une flèche algébrique. Ainsi, toute flèche de $C[R(A)]$ s'écrit comme un composé de flèches algébriques et de relèvements de couples de A , suivi d'une flèche globulaire. Or le fait que C est homogène sur Θ et la définition du foncteur canonique $C[R(A)] \rightarrow \Theta$ entraîne que toute flèche algébrique de C et tout relèvement d'un couple de A s'envoie sur une flèche algébrique de Θ . D'où l'existence de la décomposition.

L'unicité résulte de la proposition 2.7.10. \square

5.3 Homogénéité des complétions globulaires

Théorème 5.3.1. *Soit C une préthéorie globulaire homogène sur Θ . Supposons que les flèches globulaires soient des monomorphismes dans la complétion globulaire de C . Alors la complétion globulaire de C est homogène sur Θ .*

Démonstration. D'après la remarque 2.6.4, la complétion globulaire $\text{Glob}(C)$ est obtenue comme limite inductive d'une chaîne de catégories C_n (avec les notations de la proposition 2.6.2). Puisque Θ est une extension globulaire, la propriété universelle de la complétion globulaire entraîne que l'extension globulaire $\text{Glob}(C)$ est naturellement au-dessus de Θ . Par définition des C_n , tout cône α d'un système globulaire à valeurs dans C_n induit une flèche f dans C_{n+1} . Dans la suite de cette démonstration, nous dirons que α est *algébrique* sur Θ si f est algébrique sur Θ .

Soit n un entier positif. Nous appellerons P_n la propriété suivante : pour toute flèche f de C_n , il existe une flèche a de C_n algébrique sur Θ et une flèche globulaire i telles qu'on ait $f = ia$ dans $\text{Glob}(C)$.

Si n est strictement positif, nous appellerons Q_n la propriété suivante : pour tout cône $\alpha : F_S \rightarrow X$ à valeurs dans C_{n-1} et toute flèche $i : T \rightarrow S$ de Θ_0 , il existe un cône $\beta : F_T \rightarrow X$ à valeurs dans C_{n-1} , algébrique sur Θ , et une flèche globulaire j tels que $[\alpha]i = j[\beta]$ dans $\text{Glob}(C)$.

Lemme 5.3.2. 1. *La propriété P_n entraîne la propriété Q_{n+1} .*

2. *La conjonction des propriétés P_n et Q_{n+1} entraîne la propriété P_{n+1} .*

Démonstration. 1. Nous allons commencer par nous ramener au cas où i est une identité. Soient donc $i : T \rightarrow S$ dans Θ_0 et $\alpha : F_S \rightarrow X$ un cône à valeurs dans C_n . Soit α' le cône obtenu à partir de ces données par le paragraphe 2.4.2. Les morphismes $[\alpha']$ et $[\alpha]i$ ont même composantes (en tant que cônes) dans $\text{Glob}(C)$ et sont donc égaux. On conclut en appliquant la propriété Q_{n+1} au cône α' et à $i = 1_S$. On peut donc supposer que i est une identité.

Soit $\alpha : F_T \rightarrow X$ un cône à valeurs dans C_n . Supposons que

$$T = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ & i'_1 & \cdots & i'_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier q entre 1 et m , par la propriété P_n , le morphisme $D_{i_q} \rightarrow X$ de C_n se factorise dans $\text{Glob}(C)$ en un morphisme $D_{i_q} \rightarrow Y_q$ de C_n algébrique sur Θ suivi d'un morphisme globulaire $Y_q \rightarrow X$. On a également une factorisation $D_{i'_q} \rightarrow Y'_q \rightarrow X$ du même type pour les morphismes $D_{i'_q} \rightarrow X$ avec q entre 1 et $m-1$.

Appelons $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ (respectivement $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{m-1}$) les régions maximales (respectivement internes) de T classées par ordre croissant et $f : T \rightarrow X$ le morphisme de Θ induit par le cône α . Les décompositions obtenues ci-dessus des $D_{i_q} \rightarrow X$ (respectivement $D_{i'_q} \rightarrow X$) s'envoient sur les décompositions algébriques des $f\gamma_q$ (respectivement $f\gamma'_q$) dans Θ . En particulier, les sous-arbres Y_q (respectivement Y'_q) de X sont les sous-arbres $f(\gamma_q)$ (respectivement $f(\gamma'_q)$). Ainsi, pour q entre 1 et $m-1$, les arbres Y_q et Y_{q+1} sont des prolongements de Y'_q .

Il vient que pour q entre 1 et $m - 1$, le diagramme commutatif dans $\text{Glob}(C)$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D_{i_q} & \longrightarrow & Y_q \\
 & \nearrow^{\sigma_{i'_q}^{i_q}} & & & \searrow \\
 D_{i'_q} & \longrightarrow & Y'_q & \longrightarrow & X \\
 & \searrow_{\tau_{i'_q}^{i_{q+1}}} & & & \nearrow \\
 & & D_{i_{q+1}} & \longrightarrow & Y_{q+1}
 \end{array}$$

se complète en un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D_{i_q} & \longrightarrow & Y_q \\
 & \nearrow^{\sigma_{i'_q}^{i_q}} & & & \searrow^{\sigma_{Y'_q}^{Y_q}} \\
 D_{i'_q} & \longrightarrow & Y'_q & \longrightarrow & X \\
 & \searrow_{\tau_{i'_q}^{i_{q+1}}} & & & \nearrow_{\tau_{Y'_q}^{Y_{q+1}}} \\
 & & D_{i_{q+1}} & \longrightarrow & Y_{q+1}
 \end{array}$$

où *a priori* seul les deux triangles à droite du diagramme sont commutatifs. Le parallélogramme en haut à gauche est alors commutatif après composition par $Y_q \rightarrow X$. Or par hypothèse, les morphismes globulaires sont des monomorphismes dans $\text{Glob}(C)$. Ce parallélogramme est donc commutatif. De même pour le parallélogramme du bas. Il en découle que la totalité du diagramme est commutative.

Par la proposition 2.5.7, les arbres Y_1, \dots, Y_m se recollent globulairement au-dessus des Y'_1, \dots, Y'_{m-1} dans $\text{Glob}(C)$ en un arbre Y . Les flèches $Y_q \rightarrow X$ induisent alors un morphisme $j : Y \rightarrow X$ dans Θ_0 . C'est le morphisme globulaire f_{glob} . Par ailleurs, on a un cône $\beta : F_T \rightarrow Y$ à valeurs dans C_n . La flèche de Θ induite par β est f_{alg} et ce cône est donc algébrique. On vérifie facilement que les morphismes $[\alpha]$ et $j[\beta]$ de $\text{Glob}(C)$ ont mêmes composantes (en tant que cônes). Ils sont donc égaux dans $\text{Glob}(C)$, ce qui achève la démonstration.

2. Montrons le résultat par récurrence sur la longueur l d'un mot w formé de morphismes de C_n et de cônes à valeurs dans C_n représentant un morphisme de C_{n+1} dans $\text{Glob}(C)$. Si k vaut 0 ou 1, le mot w représente soit un morphisme de C_n , soit un cône à valeurs dans C_n . Dans le premier cas, l'existence résulte de la propriété P_n , dans le second, de la propriété Q_{n+1} pour i une identité. Supposons que $w = w'f$, où w' est de longueur k et f de longueur 1. En appliquant le cas $l = 1$, on se ramène au cas où $f = i$ est une flèche globulaire. Écrivons $w' = w''f'$ avec f' de longueur 1. Si f' est un morphisme de C_n , alors le mot $w'i$ est équivalent à un mot de longueur k et le résultat suit par récurrence. On peut donc supposer que f' est un cône à valeurs dans C_n . Par la propriété Q_{n+1} , le morphisme $w''f'i$ s'écrit $w''j[\beta]$ dans $\text{Glob}(C)$, où j est une flèche globulaire et β est un cône algébrique à valeurs dans C_n . On conclut alors en appliquant l'hypothèse de récurrence à $w''j$. \square

Par le lemme précédent, on obtient la propriété P_n pour tout n positif et donc que

toute flèche de $\text{Glob}(C)$ se décompose en une flèche algébrique suivie d'un morphisme globulaire. L'unicité de cette décomposition est assurée par la proposition 2.7.10. \square

5.4 Homogénéité des cohérateurs de ∞ -catégories

Théorème 5.4.1. *Soit C_* une tour de définition telle que les flèches globulaires soient des monomorphismes scindés dans C_1 . Alors C_∞ est homogène sur Θ .*

Démonstration. Nous allons montrer par récurrence sur n positif que C_n est homogène sur Θ . Il en résultera par la proposition 2.7.11 que C_∞ est homogène sur Θ .

Le résultat est clair pour $n = 0$.

Supposons que C_k soit homogène sur Θ et montrons que C_{k+1} est homogène sur Θ . Par la proposition 5.2.8, la catégorie $C_k[R(F_k)]$ est une préthéorie globulaire homogène sur Θ . Les flèches globulaires sont des monomorphismes scindés dans la complétion globulaire de $C_k[R(F_k)]$ car celle-ci est au-dessous de C_1 . Par le théorème 5.3.1, cette complétion globulaire est homogène sur Θ , ce qu'on voulait montrer. \square

Remarque 5.4.2. Soit C_* une tour de définition. Une condition suffisante pour que les flèches globulaires soient scindées dans C_1 est que les couples (σ_i, τ_i) pour $i \geq 1$ appartiennent à F_0 . En effet, la catégorie $\Theta_0[R(F_0)]$ admet alors, pour tout i , une rétraction commune aux morphismes σ_i et τ_i . Il vient par la proposition 2.4.3 que les flèches globulaires de $C_1 = \text{Glob}(\Theta_0[R(F_0)])$ sont des monomorphismes scindés. En particulier, on a le résultat suivant :

Corollaire 5.4.3. *Les trois cohérateurs canoniques (voir les exemples 4.1.4) sont homogènes sur Θ .*

Théorème 5.4.4. *Soient C_* une tour de définition et D un pseudo-cohérateur. Supposons que les flèches globulaires soient des monomorphismes scindés dans C_1 et que D soit homogène sur Θ . Alors il existe un foncteur globulaire (non canonique) de C_∞ vers D homogène sur Θ .*

Démonstration. En vertu du théorème 5.4.1, pour tout n positif, le foncteur canonique $C_n \rightarrow \Theta$ fait de C_n une théorie globulaire homogène sur Θ . On va construire par récurrence sur n positif, des foncteurs globulaires $G_n : C_n \rightarrow D$ homogènes sur Θ , à partir du foncteur $G_0 : C_0 = \Theta_0 \rightarrow D$. On obtiendra alors un foncteur globulaire $C_\infty \rightarrow D$ homogène sur Θ en passant à la limite inductive.

Supposons donc que l'on dispose d'un foncteur globulaire $G_n : C_n \rightarrow D$ homogène sur Θ . Notons F_n l'ensemble des couples admissibles de C_n qui définit C_{n+1} à partir de C_n . Par définition d'une tour de définition, se donner un foncteur globulaire $G_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow D$ tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} C_n & \longrightarrow & C_{n+1} \\ & \searrow G_n & \swarrow G_{n+1} \\ & & D \end{array}$$

soit commutatif, revient à se donner pour chaque couple admissible (f, g) dans F_n , un relèvement dans D du couple $(G_n(f), G_n(g))$. Puisque le foncteur G_n est homogène, un tel couple $(G_n(f), G_n(g))$ est admissible et admet donc un relèvement par hypothèse sur D . On obtient alors un foncteur globulaire $G_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow D$ en faisant des choix de relèvements arbitraires. Par hypothèse de récurrence, le triangle

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{G_n} & D \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Theta & \end{array}$$

est commutatif. Puisque les foncteurs $C_{n+1} \rightarrow \Theta$ et $C_{n+1} \rightarrow D$ sont définis par la propriété universelle de C_{n+1} à partir des foncteurs $C_n \rightarrow \Theta$ et $C_n \rightarrow D$, il en est de même du triangle

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1} & \xrightarrow{G_{n+1}} & D \\ & \searrow & \swarrow \\ & \Theta & \end{array},$$

et le foncteur G_{n+1} est donc au-dessus de Θ . Or les foncteurs $C_{n+1} \rightarrow \Theta$ et $D \rightarrow \Theta$ font de C_{n+1} et D des théories globulaires homogènes sur Θ . Le foncteur G_{n+1} est donc homogène sur Θ . \square

Corollaire 5.4.5. *Soient C un des trois cohérateurs canoniques (voir les exemples 4.1.4) et D un pseudo-cohérateur homogène sur Θ . Alors il existe un foncteur globulaire de C vers D homogène sur Θ .*

Chapitre 6

Dictionnaire ω -opéradique

6.1 Préliminaires monadiques

6.1.1. Fixons une monade (M, μ, η) sur une catégorie A .

Nous noterons $\text{Kl}(M)$ la catégorie de Kleisli de M . Rappelons que les objets de $\text{Kl}(M)$ sont les objets de A et que si a, b sont deux objets de A , les morphismes de a vers b dans $\text{Kl}(M)$ sont les morphismes de a vers $M(b)$ dans A . Si $f : a \rightarrow M(b)$ et $g : b \rightarrow M(c)$ sont deux morphismes composables, le composé est le morphisme

$$a \xrightarrow{f} M(b) \xrightarrow{M(g)} M(M(c)) \xrightarrow{\mu_c} M(c).$$

L'identité d'un objet a est le morphisme $\eta_a : a \rightarrow M(a)$.

Nous noterons $M\text{-Alg}$ la catégorie des algèbres sur la monade M . Rappelons que le foncteur d'oubli $U_M : M\text{-Alg} \rightarrow A$ admet un adjoint à gauche $L_M : A \rightarrow M\text{-Alg}$ qui envoie un objet a de A sur l'algèbre libre $(M(a), \mu_a)$.

Nous noterons $\text{Kl}'(M)$ la catégorie définie de la manière suivante. Les objets de $\text{Kl}'(M)$ sont les objets de A . Si a et b sont deux objets de A , un morphisme de a vers b dans $\text{Kl}'(M)$ est un morphisme d'algèbres de $L_M(a)$ vers $L_M(b)$ dans $M\text{-Alg}$. L'adjonction entre les foncteurs L_M et U_M induit un isomorphisme de catégories entre $\text{Kl}(M)$ et $\text{Kl}'(M)$.

Toute adjonction $(L : A \rightarrow B, R, \eta, \varepsilon)$ induit une monade $(LR, L * \varepsilon * R, \eta)$. Notons M cette monade. On dispose d'un foncteur de comparaison $K : B \rightarrow M\text{-Alg}$ qui envoie un objet b de B sur l'algèbre $(R(b), R(\varepsilon_b))$. On dit qu'un foncteur R est *monadique* s'il est le foncteur adjoint à droite d'une adjonction telle que le foncteur de comparaison soit une *équivalence* de catégories.

Lemme 6.1.2. Soient $(L_i, R_i, \eta_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2$ deux adjonctions composables

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{L_1} \\ \xleftarrow{R_1} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{L_2} \\ \xleftarrow{R_2} \end{array} C .$$

Soit $(L_3, R_3, \eta_3, \varepsilon_3)$ le composé de ces adjonctions. Pour i entre 1 et 3, appelons M_i la monade associée à l'adjonction $(L_i, R_i, \eta_i, \varepsilon_i)$. Alors le morphisme de foncteurs

$$R_1 * \eta_2 * L_1 : R_1 L_1 \rightarrow R_3 L_3 = R_1 R_2 L_2 L_1$$

est un morphisme de monades de M_1 vers M_3 . Par ailleurs, pour a dans A , le morphisme $\eta_{2, L_1(a)}$ est l'unique morphisme $f : L_1(a) \rightarrow R_2(L_2(L_1(a)))$ tel que $\eta_{3,a} = R_1(f)\eta_{1,a}$.

Démonstration. On a $\eta_3 = (R_1 * \eta_2 * L_1)\eta_1$. Cette égalité correspond exactement au fait que le morphisme de foncteurs de l'énoncé est compatible aux unités des monades. Pour la compatibilité à la multiplication, il s'agit de vérifier que

$$(R_1 * \eta_2 * L_1)(R_1 * \varepsilon_1 * L_1) = (R_3 * \varepsilon_3 * L_3)(R_1 * \eta_2 * (L_1 R_1) * \eta_2 * L_1).$$

Puisque $\varepsilon_3 = \varepsilon_2(L_2 * \varepsilon_1 * R_2)$, $R_3 = R_1 R_2$ et $L_3 = L_2 L_1$, il suffit de montrer qu'on a $\eta_2 \varepsilon_1 = (R_2 * \varepsilon_2 * L_2)(\eta_2 * \varepsilon_1 * \eta_2)$. Or

$$\begin{aligned} (R_2 * \varepsilon_2 * L_2)(\eta_2 * \eta_2) &= (R_2 * \varepsilon_2 * L_2)(\eta_2 * R_2 L_2) \eta_2 \\ &= (((R_2 * \varepsilon_2)(\eta_2 * R_2)) * L_2) \eta_2 \\ &= \eta_2. \end{aligned}$$

Si a est dans A , on vérifie facilement que $\eta_{2, L_1(a)}$ vérifie l'équation de l'énoncé. L'unicité de la solution résulte de la propriété universelle de l'unité d'une adjonction. \square

Lemme 6.1.3. Soient $(L_i, R_i, \eta_i, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2, 3$ trois adjonctions composables

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{L_1} \\ \xleftarrow{R_1} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{L_2} \\ \xleftarrow{R_2} \end{array} C \begin{array}{c} \xrightarrow{L_3} \\ \xleftarrow{R_3} \end{array} D.$$

Par le lemme précédent, on a un triangle dans la catégorie des monades

$$\begin{array}{ccc} R_1 L_1 & \xrightarrow{\quad} & R_1 R_2 L_2 L_1 \\ & \searrow & \swarrow \\ & R_1 R_2 R_3 L_3 L_2 L_1 & \end{array}.$$

Ce triangle est commutatif.

Démonstration. Il s'agit de montrer que

$$R_1 * \eta * L_1 = (R_1 R_2 * \eta_3 * L_2 L_1)(R_1 * \eta_2 * L_1)$$

où η est l'unité de la monade $R_2 R_3 L_3 L_2$. Mais $\eta = (R_2 * \eta_3 * L_2)\eta_2$ et l'égalité en question suit. \square

6.2 Globularité et extensions de Kan

6.2.1. Fixons une théorie globulaire homogène C et notons $j : \Theta_0 \rightarrow C$ le foncteur canonique. Le but de ce paragraphe est d'expliciter l'extension de Kan $j_! : \widehat{\Theta}_0 \rightarrow \widehat{C}$.

La théorie générale des extensions de Kan nous donne la formule

$$j_!(X)(S) = \varinjlim_{(T, S \rightarrow j(T)) \in S \setminus \Theta_0} X(T),$$

où X est un préfaisceau sur Θ_0 et S un arbre. Plus précisément, $j_!(X)(S)$ est la limite inductive du foncteur $(S \setminus \Theta_0)^\circ \rightarrow \mathcal{E}ns$ qui à $(T, S \rightarrow j(T))$ associe $X(T)$.

Notons $(S \setminus \Theta_0)_{\text{alg}}$ la sous-catégorie pleine de $(S \setminus \Theta_0)$ dont les objets sont les couples $(T, S \xrightarrow{f} j(T))$ où f est algébrique. Cette catégorie est discrète. Soit $x = (T, S \xrightarrow{f} j(T))$ dans $(S \setminus \Theta_0)$. La catégorie $(S \setminus \Theta_0)_{\text{alg}}/x$ est constituée d'un unique objet correspondant à la flèche f_{alg} . En particulier, cette catégorie est non vide et connexe. Le foncteur $(S \setminus \Theta_0)_{\text{alg}}^\circ \rightarrow (S \setminus \Theta_0)^\circ$ est donc cofinal et on a un isomorphisme canonique

$$j_!(X)(S) \simeq \coprod_{(T, S \rightarrow j(T)) \in (S \setminus \Theta_0)_{\text{alg}}} X(T) = \coprod_{S \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} X(T).$$

La functorialité en X agit composante par composante. Décrivons la functorialité en S . Soit donc $f : S \rightarrow S'$ une flèche de C . Donnons-nous $(S' \rightarrow T', x)$ dans $j_!(X)(S')$. On obtient par composition une flèche $g : S \rightarrow T'$ qui n'est plus algébrique en général. Cette flèche se décompose en $S \xrightarrow{g_{\text{alg}}} T \xrightarrow{g_{\text{glob}}} T'$. À $(S' \rightarrow T', x)$, on associe l'élément $(g_{\text{alg}}, X(g_{\text{glob}})(x))$ de $j_!(X)(S)$. D'où un morphisme

$$\coprod_{S' \rightarrow T' \in C_{\text{alg}}} X(T') \rightarrow \coprod_{S \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} X(T).$$

Ce morphisme est précisément $j_!(X)(f)$.

6.2.2. Soient C une théorie globulaire homogène et j le foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$. Si G est un préfaisceau sur Θ_0 , on notera $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G$ le préfaisceau $j^*j_!(G)$ sur Θ_0 . On notera $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}$ le préfaisceau $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^1$ où 1 est le préfaisceau terminal. On appellera $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}$ le *préfaisceau des flèches algébriques de C* .

Si est G un préfaisceau sur Θ_0 et

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ & i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

est un arbre, on notera $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G(S)$ l'ensemble

$$\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G(D_{i_1}) \times \text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G(D_{i'_1}) \times \text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G(D_{i_2}) \times \text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G(D_{i'_2}) \cdots \times \text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G(D_{i'_{n-1}}) \times \text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G(D_{i_n}).$$

On notera $\text{Fl}'_{C_{\text{alg}}}(S)$ l'ensemble $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^1(S)$ où 1 est le préfaisceau terminal. On dispose d'une application canonique $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G(S) \rightarrow \text{Fl}'_{C_{\text{alg}}}(S)$. Par définition, le préfaisceau $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G$ est globulaire si pour tout arbre S , cette application est une bijection.

6.2.3. Soient D une théorie globulaire homogène et C une théorie globulaire homogène sur D via un foncteur F . Puisque F préserve les morphismes algébriques, si G est un préfaisceau sur Θ_0 , on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fl}_{C_{\mathrm{alg}}}^G(S) & \longrightarrow & \mathrm{Fl}'_{C_{\mathrm{alg}}}^G(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fl}_{D_{\mathrm{alg}}}^G(S) & \longrightarrow & \mathrm{Fl}'_{D_{\mathrm{alg}}}^G(S) \end{array} \quad ,$$

où les flèches verticales sont induites par F .

Proposition 6.2.4. *Ce carré est cartésien.*

Démonstration. Un élément a de $\mathrm{Fl}'_{C_{\mathrm{alg}}}^G(S)$ correspond à la donnée d'un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma_{i'_1}^{i_1} & D_{i_1} & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ D_{i'_1} & \nearrow & & \xrightarrow{f'_1} & X'_1 & \begin{array}{l} \nearrow k_1 \\ \searrow k_2 \end{array} \\ & \tau_{i'_1}^{i_2} & D_{i_2} & \xrightarrow{f'_2} & \vdots & X_2 \\ \vdots & & & & & \\ D_{i'_{n-1}} & \xrightarrow{f'_{n-1}} & X'_{n-1} & \xrightarrow{k_{2n-2}} & \vdots & \\ & \tau_{i'_{n-1}}^{i_n} & D_{i_n} & \xrightarrow{f_n} & X_n \end{array} \quad ,$$

commutatif dans C , où les f_i, f'_i sont algébriques dans C et les k_i sont des morphismes globulaires, et à la donnée d'un élément x dans $G(X_1) \times_{G(X'_1)} \cdots \times_{G(X'_{n-1})} G(X_n)$ (les morphismes définissant ce produit fibré itéré étant les k_i).

L'image de a par l'application $\mathrm{Fl}'_{C_{\mathrm{alg}}}^G(S) \rightarrow \mathrm{Fl}'_{D_{\mathrm{alg}}}^G(S)$ correspond au diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & \sigma_{i'_1}^{i_1} & D_{i_1} & \xrightarrow{F(f_1)} & X_1 \\ D_{i'_1} & \nearrow & & \xrightarrow{F(f'_1)} & X'_1 & \begin{array}{l} \nearrow k_1 \\ \searrow k_2 \end{array} \\ & \tau_{i'_1}^{i_2} & D_{i_2} & \xrightarrow{F(f'_2)} & \vdots & X_2 \\ \vdots & & & & & \\ D_{i'_{n-1}} & \xrightarrow{F(f'_{n-1})} & X'_{n-1} & \xrightarrow{k_{2n-2}} & \vdots & \\ & \tau_{i'_{n-1}}^{i_n} & D_{i_n} & \xrightarrow{F(f_n)} & X_n \end{array} \quad ,$$

commutatif dans D , et au même élément x .

Par ailleurs, si $b = (g : S \rightarrow U \in \mathrm{Fl}(D_{\mathrm{alg}}), y \in G(U))$ est un élément de $\mathrm{Fl}_{D_{\mathrm{alg}}}^G(S)$, en

utilisant les décompositions algébriques dans D , on obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \sigma_{i'_1}^{i_1} & D_{i_1} & \xrightarrow{g_1} & U_1 & \\
 D_{i'_1} & \nearrow & & & \xrightarrow{g'_1} & U'_1 & \nearrow \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \end{array} \\
 & \searrow & & & & & \searrow p_1 \\
 & & \tau_{i'_1}^{i_2} & D_{i_2} & \xrightarrow{g_2} & U_2 & \xrightarrow{p_2} \\
 \vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & \xrightarrow{g'_{n-1}} & U'_{n-1} & \nearrow \begin{array}{l} l_{2n-2} \\ \vdots \end{array} \\
 D_{i'_{n-1}} & \nearrow & & & & & \searrow p_n \\
 & \searrow & \tau_{i'_{n-1}}^{i_n} & D_{i_n} & \xrightarrow{g_n} & U_n & \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & U
 \end{array} ,$$

commutatif dans D , où les g_i, g'_i sont algébriques, les l_i, p_i sont globulaires. L'image de cet élément par l'application $\text{Fl}_{\text{Dalg}}^{\text{G}}(S) \rightarrow \text{Fl}'_{\text{Dalg}}^{\text{G}}(S)$ correspond donc au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \sigma_{i'_1}^{i_1} & D_{i_1} & \xrightarrow{g_1} & U_1 & \\
 D_{i'_1} & \nearrow & & & \xrightarrow{g'_1} & U'_1 & \nearrow \begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \end{array} \\
 & \searrow & & & & & \searrow \\
 & & \tau_{i'_1}^{i_2} & D_{i_2} & \xrightarrow{g_2} & U_2 & \\
 \vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & \xrightarrow{g'_{n-1}} & U'_{n-1} & \nearrow \begin{array}{l} l_{2n-2} \\ \vdots \end{array} \\
 D_{i'_{n-1}} & \nearrow & & & & & \searrow \\
 & \searrow & \tau_{i'_{n-1}}^{i_n} & D_{i_n} & \xrightarrow{g_n} & U_n & \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & U
 \end{array} ,$$

commutatif dans D et à l'élément y .

Ainsi, si le couple (b, a) est dans le produit fibré $\text{Fl}_{\text{Dalg}}^{\text{G}}(S) \times_{\text{Fl}'_{\text{Dalg}}^{\text{G}}(S)} \text{Fl}'_{\text{Calg}}^{\text{G}}(S)$, il induit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \sigma_{i'_1}^{i_1} & D_{i_1} & \xrightarrow{f_1} & X_1 & \\
 D_{i'_1} & \nearrow & & & \xrightarrow{f'_1} & X'_1 & \nearrow \begin{array}{l} k_1 \\ k_2 \end{array} \\
 & \searrow & & & & & \searrow p_1 \\
 & & \tau_{i'_1}^{i_2} & D_{i_2} & \xrightarrow{f_2} & X_2 & \xrightarrow{p_2} \\
 \vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & \xrightarrow{f'_{n-1}} & X'_{n-1} & \nearrow \begin{array}{l} k_{2n-2} \\ \vdots \end{array} \\
 D_{i'_{n-1}} & \nearrow & & & & & \searrow p_n \\
 & \searrow & \tau_{i'_{n-1}}^{i_n} & D_{i_n} & \xrightarrow{f_n} & X_n & \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & U
 \end{array} ,$$

commutatif dans C . Posons $r = (p_1 f_1, \dots, p_n f_n) : S \rightarrow U$. Le morphisme r s'envoie sur g par le foncteur F et est donc algébrique. Le couple (r, y) appartient ainsi à $\text{Fl}_{\text{Calg}}^{\text{G}}(S)$. On a donc construit une application

$$\text{Fl}_{\text{Dalg}}^{\text{G}}(S) \times_{\text{Fl}'_{\text{Dalg}}^{\text{G}}(S)} \text{Fl}'_{\text{Calg}}^{\text{G}}(S) \rightarrow \text{Fl}_{\text{Calg}}^{\text{G}}(S).$$

On vérifie facilement que cette application est l'inverse de l'application canonique

$$\mathrm{Fl}_{\mathrm{C}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S) \rightarrow \mathrm{Fl}_{\mathrm{D}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S) \times_{\mathrm{Fl}'_{\mathrm{D}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S)} \mathrm{Fl}'_{\mathrm{C}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S).$$

□

Corollaire 6.2.5. *Soient D une théorie globulaire telle que $\mathrm{Fl}_{\mathrm{D}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}$ soit globulaire, pour G un préfaisceau sur Θ_0 , et C une théorie globulaire homogène au-dessus de D . Alors le préfaisceau $\mathrm{Fl}_{\mathrm{C}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}$ est globulaire.*

Démonstration. Par la proposition précédente, pour tout arbre S , le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fl}_{\mathrm{C}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Fl}'_{\mathrm{C}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Fl}_{\mathrm{D}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S) & \longrightarrow & \mathrm{Fl}'_{\mathrm{D}_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S) \end{array}$$

est cartésien. L'hypothèse sur D entraîne que le flèche horizontale du bas est une bijection. Il en est donc de même de celle du haut, d'où le résultat. □

6.2.6. Soit

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ & i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

un arbre. Nous allons décrire $\mathrm{Fl}'_{\Theta_{\mathrm{alg}}}(S)$.

Rappelons que si i est un entier positif, il existe un morphisme algébrique $D_i \rightarrow X$ dans Θ si et seulement si la dimension de X est inférieure ou égale à i , et que dans ce cas ce morphisme est unique. On en déduit immédiatement qu'un élément de $\mathrm{Fl}'_{\Theta_{\mathrm{alg}}}(S)$ correspond à la donnée d'un système globulaire généralisé constitué d'arbres X_1, \dots, X_n au-dessus d'arbres X'_1, \dots, X'_{n-1} tels que la dimension de X_k (respectivement X'_k) est inférieure ou égale à i_k (respectivement i'_k) pour k entre 1 et n (respectivement entre 1 et $n-1$).

Plus généralement, si G est un préfaisceau sur Θ_0 , un élément de $\mathrm{Fl}'_{\Theta_{\mathrm{alg}}}(S)$ correspond à la donnée d'un système globulaire généralisé constitué d'arbres X_1, \dots, X_n au-dessus d'arbres X'_1, \dots, X'_{n-1} vérifiant les mêmes hypothèses de dimension que ci-dessus, et à la donnée d'un élément de $G(X_1) \times_{G(X'_1)} \cdots \times_{G(X'_{n-1})} G(X_n)$.

Proposition 6.2.7. *Si G est un préfaisceau globulaire sur Θ_0 , le préfaisceau $\mathrm{Fl}_{\Theta_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}$ est globulaire.*

Démonstration. Soit

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_n \\ & i'_1 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

un arbre. Appelons h le morphisme canonique $\mathrm{Fl}_{\Theta_{\mathrm{alg}}}^{\mathrm{G}}(S) \rightarrow \mathrm{Fl}'_{\Theta_{\mathrm{alg}}}(S)$.

Si $f : S \rightarrow T$ est une flèche de C_{alg} et $\alpha_k : D_{i_k} \rightarrow S$, pour k entre 1 et n , sont les régions maximales de S classées dans l'ordre croissant, on a

$$h(f) = ((f\alpha_1)_{\text{alg}}, \dots, (f\alpha_n)_{\text{alg}}).$$

Notons que la flèche $(f\alpha_k)_{\text{alg}}$ a pour source D_{i_k} et but T_{α_k} .

Par le paragraphe précédent, un élément de $\text{Fl}_{\Theta_{\text{alg}}}^G(S)$ correspond à un système globulaire généralisé constitué d'arbres X_1, \dots, X_n au-dessus d'arbres X'_1, \dots, X'_{n-1} et à un élément e' de $G(X_1) \times_{G(X'_1)} \cdots \times_{G(X'_{n-1})} G(X_n)$. Appelons X la somme globulaire généralisée du système. Puisque G est globulaire, il préserve les sommes globulaires généralisées et e' induit un élément e de $G(X)$. Par ailleurs, on dispose d'un morphisme canonique $S \rightarrow X$ dans Θ . Ce morphisme est clairement algébrique. Le couple $(S \rightarrow X \in \text{Fl}(\Theta_{\text{alg}}), e \in G(X))$ appartient donc à $\text{Fl}_{\Theta_{\text{alg}}}^G(S)$ et on a ainsi défini une application $g : \text{Fl}_{\Theta_{\text{alg}}}^G(S) \rightarrow \text{Fl}_{\Theta_{\text{alg}}}^G(S)$.

On vérifie facilement que g est un inverse de h , ce qui établit la proposition. \square

Corollaire 6.2.8. *Soient C une théorie globulaire homogène sur Θ et G un préfaisceau globulaire sur Θ_0 . Le préfaisceau $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G$ est globulaire.*

Remarque 6.2.9. Le corollaire précédent peut se reformuler de la manière suivante. Soit C une théorie globulaire homogène sur Θ et $j : \Theta_0 \rightarrow C$ le foncteur canonique. Alors le foncteur $j_! : \widehat{\Theta}_0 \rightarrow \widehat{C}$ envoie les préfaisceaux globulaires sur des préfaisceaux globulaires. En effet, si G est un préfaisceau globulaire sur Θ_0 , $j_!(G)$ est globulaire si et seulement si $j^*j_!(G) = \text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G$ est globulaire.

6.3 Monade associée à une extension globulaire

6.3.1. Soit C une extension globulaire. On notera U_C le foncteur d'oubli de $\text{Mod}(C)$ vers $\widehat{\mathbb{G}}$, obtenu en restreignant à $\text{Mod}(C)$ le foncteur $\widehat{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$, induit par le foncteur $\mathbb{G} \rightarrow C$.

Si $F : C \rightarrow D$ est un morphisme d'extensions globulaires, on dispose d'un foncteur $\text{Mod}(D) \rightarrow \text{Mod}(C)$, obtenu en restreignant le foncteur $F^* : \widehat{D} \rightarrow \widehat{C}$ à $\text{Mod}(D)$ (il est immédiat que F^* envoie $\text{Mod}(D)$ dans $\text{Mod}(C)$).

Lemme 6.3.2. 1. *Soit C une extension globulaire. Alors le foncteur d'inclusion de $\text{Mod}(C)$ dans \widehat{C} admet un adjoint à gauche.*

2. *Soit $C \rightarrow D$ un morphisme d'extensions globulaires. Alors le foncteur associé $\text{Mod}(D) \rightarrow \text{Mod}(C)$ admet un adjoint à gauche L . De plus, le carré*

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Mod}(C) & \xrightarrow{L} & \text{Mod}(D) \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près.

3. Soit C une extension globulaire. Alors le foncteur $\text{Mod}(C) \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ admet un adjoint à gauche.

Démonstration. 1. Cela résulte, par la proposition 1.27 de [1], du fait que la catégorie $\text{Mod}(C)$ est cocomplète (proposition 1.51 de *op. cit.*) et que le foncteur de C vers $\text{Mod}(C)$ est pleinement fidèle.

2. On a le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(D) & \longrightarrow & \widehat{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Mod}(C) & \longrightarrow & \widehat{C} \end{array} .$$

Par le point précédent, le foncteur $\text{Mod}(D) \rightarrow \widehat{D}$ admet un adjoint à gauche r . Le foncteur $\widehat{D} \rightarrow \widehat{C}$ admet également un adjoint à gauche $F_!$. La pleine fidélité du foncteur $\text{Mod}(C) \rightarrow \widehat{C}$ entraîne donc que le foncteur $\text{Mod}(D) \rightarrow \text{Mod}(C)$ admet un adjoint à gauche. Pour E une extension globulaire, notons y_E^1 le foncteur $E \rightarrow \text{Mod}(E)$ et par y_E^2 le foncteur $\text{Mod}(E) \rightarrow \widehat{E}$. L'adjoint à gauche de $\text{Mod}(D) \rightarrow \text{Mod}(C)$ s'écrit alors $rF_!y_C^2$.

De plus, le carré

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{C} & \xrightarrow{F_!} & \widehat{D} \end{array}$$

étant commutatif à isomorphisme près, on dispose d'un isomorphisme $F_!y_C^2y_C^1 \rightarrow y_D^2y_D^1F$ et donc d'un isomorphisme $rF_!y_C^2y_C^1 \simeq Ly_C^1 \rightarrow ry_D^2y_D^1F$. Mais puisque y_D^2 est pleinement fidèle, ry_D^2 est canoniquement isomorphe à l'identité de $\text{Mod}(D)$ et on obtient donc un isomorphisme $Ly_C^1 \rightarrow y_D^1F$.

3. Par la proposition 2.3.23, on a $\widehat{\mathbb{G}} \simeq \text{Mod}(\Theta_0)$ et 3. est un cas particulier de 2. On peut aussi arguer que le foncteur $\text{Mod}(C) \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ est le composé du foncteur $\text{Mod}(C) \rightarrow \widehat{C}$ et du foncteur $\widehat{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ qui admettent tous deux des adjoints à gauche. \square

6.3.3. Par le lemme précédent, le foncteur U_C admet un adjoint à gauche. Dans toute la suite du texte, on supposera fixé le choix d'un tel adjoint. On le notera L_C . Cette adjonction donne lieu à une monade $U_C L_C$ qu'on notera M_C et qu'on appellera la *monade associée à C* .

Soit $F : C \rightarrow D$ un morphisme d'extensions globulaires. Le foncteur U de $\text{Mod}(D)$ vers $\text{Mod}(C)$ admet par le lemme 6.3.2 un adjoint à gauche L . Par le lemme 6.1.2, on a un morphisme de monades de M_C vers $U_C U L L_C$. Or la monade $U_C U L L_C$ est canoniquement isomorphe à M_D . Nous avons défini un morphisme de monades M_F de M_C vers M_D .

Proposition 6.3.4. *Le morphisme M_F ne dépend pas du choix de l'adjoint à gauche L . L'application qui à une extension globulaire C associe M_C et à un morphisme d'extensions globulaires F associe M_F définit un foncteur M de la catégorie des extensions globulaires vers celle des monades sur $\widehat{\mathbb{G}}$.*

Démonstration. Soit $F : C \rightarrow D$ un morphisme d'extensions globulaires. Montrons que le morphisme $M_F : M_C \rightarrow M_D$ ne dépend pas du choix de L . Soit L' un second adjoint à gauche de U . Il suffit de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L_C & \longrightarrow & ULL_C \\ \downarrow & & \downarrow \\ UL'L_C & \longrightarrow & UL_D \end{array}$$

est commutatif. Pour cela, on considère la flèche $ULL_C \rightarrow UL'L_C$ induite par l'isomorphisme canonique entre L et L' et on montre que les deux triangles obtenus sont commutatifs en utilisant la propriété d'unicité de l'isomorphisme canonique entre deux adjoints.

Soient $C \rightarrow D \rightarrow E$ deux morphismes d'extensions globulaires composables. Appelons U_1 (respectivement U_2) le foncteur $\text{Mod}(D) \rightarrow \text{Mod}(C)$ (respectivement le foncteur $\text{Mod}(E) \rightarrow \text{Mod}(D)$) et L_1 (respectivement L_2) son adjoint à gauche.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M_C & \longrightarrow & U_C U_1 L_1 L_C & \longrightarrow & M_D \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & U_C U_1 U_2 L_2 L_1 L_C & \longrightarrow & M_E \\ & & & & \downarrow \\ & & & & U_D U_2 L_2 L_D \end{array}$$

Par le lemme 6.1.3, le triangle est commutatif. Par ailleurs, l'isomorphisme canonique entre $L_1 L$ et L_D induit un isomorphisme entre $U_C U_1 U_2 L_2 L_1 L_C$ vers $U_D U_2 L_2 L_D$ qui divise le rectangle de droite en un carré et un triangle. On vérifie par le calcul que le nouveau carré est commutatif. La commutativité du triangle résulte de celle du diagramme

$$\begin{array}{ccc} L_2 L_1 L_C & \longrightarrow & L_2 L_D \\ & \searrow & \downarrow \\ & & L_E \end{array}$$

qui s'obtient en utilisant la propriété d'unicité de l'isomorphisme canonique entre deux adjoints. \square

6.3.5. Soient C une théorie globulaire et $j : \Theta_0 \rightarrow C$ le foncteur canonique. Notons i le foncteur d'inclusion de \mathbb{G} dans Θ_0 . Considérons le diagramme

$$(*_C) \quad \begin{array}{ccc} \text{Mod}(C) & \longrightarrow & \widehat{C} \\ U_C \downarrow & & \downarrow j^* \\ \widehat{\mathbb{G}} & \xrightarrow{i_*} & \widehat{\Theta}_0 \end{array}$$

Le carré $(*_C)$ est commutatif à isomorphisme canonique près. En effet, on a l'égalité $i_*(ji)^* = i_*i^*j^*$. Or le foncteur j^* envoie les préfaisceaux globulaires sur C sur des préfaisceaux globulaires sur Θ_0 et par la proposition 2.3.23, la restriction de i_*i^* à $\text{Mod}(C)$ est isomorphe à l'identité. On a donc $i_*(ji)^* \simeq j^*$ sur $\text{Mod}(C)$ et ce qui correspond exactement à la commutativité du diagramme.

Proposition 6.3.6. *Si C est une théorie globulaire, le foncteur U_C est monadique.*

Démonstration. Le commutativité du carré $(*_C)$ et la proposition 2.3.23 entraînent que le foncteur U_C est canoniquement isomorphe au foncteur $U : \text{Mod}(C) \rightarrow \text{Mod}(\Theta_0)$ induit par le foncteur canonique $j : \Theta_0 \rightarrow C$. Nous allons montrer que U est monadique en utilisant le critère de Beck (théorème 4.4.4 de [10]).

Commençons par observer que puisque j est bijectif sur les objets, le foncteur U est conservatif. Par ailleurs, on sait que U admet un adjoint à gauche.

Vérifions la troisième hypothèse du théorème *op. cit.* Soit (f, g) un couple de flèches parallèles dans $\text{Mod}(C)$. Supposons que le couple $(U(f), U(g))$ admette un coégalisateur absolu Z dans $\text{Mod}(\Theta_0)$. En particulier, Z est également un coégalisateur dans $\widehat{\Theta}_0$. Puisque la catégorie \widehat{C} est cocomplète, le couple (f, g) admet un coégalisateur Z' dans \widehat{C} . Le foncteur j^* est exact et envoie donc Z' sur un conoyau de $(U(f), U(g))$ dans \widehat{C} . Ainsi, Z et $j^*(Z')$ sont canoniquement isomorphes dans \widehat{C} . Il en résulte que $j^*(Z')$ appartient à $\text{Mod}(\Theta_0)$ et donc que Z' appartient à $\text{Mod}(C)$. Ainsi Z' est également un conoyau de (f, g) dans $\text{Mod}(C)$. Le foncteur U envoie Z' sur un coégalisateur isomorphe à Z , ce qu'on voulait démontrer. \square

Proposition 6.3.7. *Soit C une théorie globulaire homogène au-dessus de Θ . Notons i le foncteur $\mathbb{G} \rightarrow \Theta_0$, j le foncteur $\Theta_0 \rightarrow C$ et y le foncteur $\text{Mod}(C) \rightarrow \widehat{C}$. On a*

$$yL_C \simeq j_!u_* \quad \text{et} \quad M_C \simeq i^*j^*j_!i_*.$$

En particulier, pour X un ensemble globulaire et S un arbre, on a

$$L_C(X)(S) = \coprod_{S \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{C}}(T, X),$$

et pour n un entier positif, on a

$$M_C(X)(D_n) = \coprod_{D_n \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{C}}(T, X).$$

L'unité η_C de M_C évaluée sur un ensemble globulaire X et sur D_n est l'application

$$\eta_{C, X, D_n} : X(D_n) \rightarrow \coprod_{D_n \rightarrow S \in C_{\text{alg}}} X(S),$$

qui envoie un élément x sur le couple $(1_{D_n}, x)$.

La multiplication μ_C de M_C évaluée sur un ensemble globulaire X et sur D_n est l'application

$$\mu_{C,X,D_n} : \coprod_{D_n \rightarrow S \in C_{\text{alg}}} \coprod_{S \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} X(T) \rightarrow \coprod_{D_n \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} X(T),$$

qui correspond à la composition des flèches en indices.

Démonstration. Soit X dans $\widehat{\mathbb{G}}$ et Y dans $\text{Mod}(C)$. On a la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(X, U_C(Y)) &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Theta}_0}(i_*(X), i_*U_C(Y)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Theta}_0}(i_*(X), j^*y(Y)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{C}}(j_!i_*(X), y(Y)), \end{aligned}$$

où le premier isomorphisme résulte de la pleine fidélité de i_* (qui découle de la pleine fidélité de i) et le deuxième de la commutativité du carré du paragraphe 6.3.5. Puisque par la remarque 6.2.9, le foncteur $j_!i_*$ est à valeurs dans $\text{Mod}(C)$, on a bien $yL_C = j_!i_*$. Il en découle immédiatement que $M_C = i^*j^*j_!i_*$. Pour établir les formules décrivant $L_C(X)$ et $M_C(X)$, où X est un ensemble globulaire, il suffit alors de remarquer que pour tout arbre T , par la proposition 2.3.23, on a $\text{Hom}_{\widehat{\Theta}_0}(T, i_*(X)) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, X)$.

Soit S un arbre et X un ensemble globulaire. On a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(S, M_C(X)) &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Theta}_0}(i_*(S), i_*M_C(X)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Theta}_0}(i_*(S), i_*i^*j^*j_!i_*(X)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Theta}_0}(i_*(S), j^*j_!i_*(X)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\widehat{\Theta}_0}(i_*(S), L_C(X)) \\ &\simeq L_C(Y)(S). \end{aligned}$$

Passons à la description de l'unité et de la multiplication. Tout foncteur $u : A \rightarrow B$ entre petites catégories cocomplètes induit une adjonction $(u_! : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}, u^*, \eta, \varepsilon)$ qui induit elle-même une monade (M, μ, η) sur \widehat{A} . Explicitement, si X est un préfaisceau sur A , on a

$$M(X)(a) = \varinjlim_{(a', u(a) \rightarrow u(a'))} X(a').$$

Pour X un préfaisceau et a dans A , l'unité $\eta_{X,a} : X(a) \rightarrow M(X)(a)$ envoie un élément f de $X(a)$ sur la classe d'équivalence du couple $((a, u(a) \rightarrow u(a)), f)$ dans la limite inductive ci-dessus. La multiplication $\mu : u^*u_!u^*u_! \rightarrow u^*u_!$ évaluée sur un préfaisceau X sur A et un objet a de A est donnée par la flèche

$$\varinjlim_{(a', u(a) \rightarrow u(a'))} \varinjlim_{(a'', u(a') \rightarrow u(a''))} X(a'') \rightarrow \varinjlim_{(a'', u(a) \rightarrow u(a''))} X(a'')$$

qui correspond à la composition des flèches en indices. Les descriptions recherchées en découle. \square

Exemple 6.3.8. Notons ω la monade associée à la théorie globulaire Θ . Par la proposition précédente, on a

$$\omega(X)(D_n) = \coprod_{D_n \rightarrow T \in \Theta_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, X) = \coprod_{T \text{ arbre de dimension inférieure à } n} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, X)$$

où X est un ensemble globulaire et n un entier positif. C'est exactement la monade ω définie dans [8]. Le premier paragraphe de la preuve de la proposition 1.12 de *op. cit.* montre que c'est la monade des ∞ -catégories strictes. Ce résultat est fortement lié à la proposition 4.2 de [3] et au théorème 4.6 [31].

Proposition 6.3.9. *Soit $F : C \rightarrow D$ un morphisme de théories globulaires homogènes sur Θ . Alors $M_F : M_C \rightarrow M_D$ est au-dessus de ω et peut se décrire de la manière suivante. Soit X un ensemble globulaire et n un entier positif. On a $M_{F,X,D_n}(f, g) = (F(f), g)$ où $f : D_n \rightarrow T$ est une flèche algébrique de C et $g : T \rightarrow X$ une flèche de $\widehat{\mathbb{G}}$.*

Démonstration. Le fait que M_F soit au-dessus de ω résulte immédiatement du fait que F est au-dessus de Θ et de la functorialité du foncteur M .

Appelons U le foncteur d'oubli $\text{Mod}(D) \rightarrow \text{Mod}(C)$ et L son adjoint à gauche. Nous allons décrire l'unité η de cette adjonction sur l'image de L_C .

Soit $\alpha_X : L_C(X) \rightarrow U(L(L_C(X)))$ défini par $\alpha_{X,T}(f, g) = (F(f), g)$ où $f : T \rightarrow T'$ est un morphisme algébrique de C et $g : T' \rightarrow X$ est un morphisme d'ensembles globulaires. Vérifions que α_X est naturel en X . Soient T' un second arbre et $h : T' \rightarrow T$ une flèche de C . La naturalité de α en h équivaut à l'égalité

$$((fh)_{\text{alg}}, g(fh)_{\text{glob}}) = (F(fh)_{\text{alg}}, gF(fh)_{\text{glob}}).$$

Celle-ci résulte du fait que F est un morphisme de théories homogènes au-dessus de Θ et qu'il préserve donc les décompositions algébriques.

Par le lemme 6.1.2, pour montrer que $\eta_{L_C(X)} = \alpha_X$, il suffit de vérifier qu'on a $\eta_{D,X} = U_C(\alpha_X)\eta_{C,X}$, ce qui est clair par la description de η_C et η_D donnée par la proposition 6.3.7.

Par définition, on a $M_{F,X} = U_C(\eta_{L_C(X)})$. C'est exactement la description donnée dans l'énoncé de la proposition.

Montrons maintenant que la monade M_F est cartésienne. Soit $f : X \rightarrow Y$ dans $\widehat{\mathbb{G}}$ et n un entier positif. Il s'agit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{D_n \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, X) & \longrightarrow & \coprod_{D_n \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{D_n \rightarrow T \in D_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, X) & \longrightarrow & \coprod_{D_n \rightarrow T \in D_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, Y) \end{array}$$

est cartésien. Or, le produit cartésien du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \coprod_{D_n \rightarrow T \in C_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, Y) & \\
 & \downarrow & \\
 \coprod_{D_n \rightarrow T \in D_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, X) & \longrightarrow & \coprod_{D_n \rightarrow T \in D_{\text{alg}}} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(T, Y)
 \end{array}$$

est constitué des couples $((f_1, g_1), (f_2, g_2))$ où $f_1 : D_n \rightarrow T$ est un morphisme de D_{alg} , $g_1 : T \rightarrow X$ un morphisme d'ensembles globulaires, $f_2 : D_n \rightarrow T$ un morphisme de C_{alg} , $g_2 : T \rightarrow Y$ un morphisme d'ensembles globulaires tels que $F(f_2) = f_1$ et $g_2 = f g_1$. Cet ensemble est canoniquement isomorphe à l'ensemble des couples (f_2, g_1) où $f_2 : D_n \rightarrow T$ est un morphisme de C_{alg} et $g_1 : T \rightarrow X$ est un morphisme d'ensembles globulaires. Cet ensemble est précisément l'ensemble en haut à gauche du carré commutatif. Celui-ci est donc bien cartésien. \square

6.4 ω -opérades

6.4.1. Une catégorie est dite *cartésienne* si elle admet des produits fibrés.

Un foncteur est dit *cartésien* s'il commute aux produits fibrés.

Une transformation naturelle est dite *cartésienne* si ses diagrammes de naturalité sont cartésiens.

Une monade (M, η, μ) sur une catégorie C est dite *cartésienne* si la catégorie C , le foncteur M et les transformations naturelles η et μ sont cartésiens.

Un morphisme de monades est dit *cartésien* s'il l'est en tant que transformation naturelle.

Exemple 6.4.2. La monade ω est cartésienne (voir la proposition F.2.2 de [29]).

Proposition 6.4.3. 1. Soient $F, G : A \rightarrow B$ deux foncteurs et $\alpha : F \rightarrow G$ une transformation naturelle cartésienne. Si G est cartésien, alors F est cartésien.

2. Soient $F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$ deux transformations naturelles composables. Si β est cartésienne, alors α est cartésienne si et seulement si $\beta\alpha$ est cartésienne.

3. Soient M et N deux monades sur une catégorie A et $\alpha : M \rightarrow N$ un morphisme de monades cartésien. Si la monade N est cartésienne, alors la monade M est cartésienne.

4. Soient $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P$ deux morphismes de monades composables. Si β est cartésien, alors α est cartésien si et seulement si $\beta\alpha$ est cartésien.

Démonstration. Ces résultats découlent facilement du lemme usuel sur les compositions de carrés cartésiens. \square

6.4.4. Une ω -collection est un endofoncteur F de $\widehat{\mathbb{G}}$ munie d'une transformation naturelle cartésienne $F \rightarrow \omega$. Par la proposition précédente, un tel foncteur est cartésien.

Un morphisme de ω -collections est une transformation naturelle au-dessus de ω . Par la proposition précédente, une telle transformation naturelle est cartésienne.

Une ω -opérade est une monade M sur $\widehat{\mathbb{G}}$ munie d'un morphisme de monades cartésien $M \rightarrow \omega$. Par la proposition précédente, une telle monade est cartésienne.

Un morphisme de ω -opérades est un morphisme de monades au dessus de ω . Par la proposition précédente, un tel morphisme est cartésien.

Remarque 6.4.5. L'évaluation en l'ensemble globulaire terminal 1 définit un foncteur de la catégorie des ω -collections vers la catégorie des ensembles globulaires au-dessus de $\omega(1)$. Ce foncteur est une équivalence de catégories. En effet, si F est une ω -collection et X est un ensemble globulaire, le diagramme de naturalité

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \omega(X) & \longrightarrow & \omega(1) \end{array},$$

associé à l'unique morphisme $Y \rightarrow 1$, est cartésien. Il vient que F est uniquement déterminée par l'ensemble globulaire $F(1)$ muni du morphisme $F(1) \rightarrow \omega(1)$. On vérifie immédiatement qu'il en est de même pour les morphismes de ω -collections.

Proposition 6.4.6. *Le foncteur M induit un foncteur de la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ vers la catégorie des ω -opérades.*

Démonstration. C'est une reformulation de la proposition 6.3.9. □

Proposition 6.4.7. *Le foncteur sous-jacent d'une ω -opérade est fidèle.*

Démonstration. La formule (voir l'exemple 6.3.8) décrivant le foncteur sous-jacent de la monade ω entraîne immédiatement que celui-ci est fidèle. Par conséquent l'unité de la monade ω est un monomorphisme. Or, par définition, l'unité d'une ω -opérade se factorise par celle de ω et est donc un monomorphisme. D'où le résultat. □

6.4.8. Soit $f : S \rightarrow \omega(T)$ un morphisme dans $\widehat{\mathbb{G}}$ où S et T sont deux arbres. Un tel morphisme correspond à un élément de $L_{\Theta}(T)(S)$, c'est-à-dire à un couple $(S \xrightarrow{a} T', T' \xrightarrow{i} T)$ où a est un morphisme algébrique de Θ et i est globulaire. On dira que f est ω -générique si i est une identité.

Soit M une ω -opérade. On dira qu'un morphisme $f : S \rightarrow M(T)$ dans $\widehat{\mathbb{G}}$, où S et T sont des arbres, est M -générique si $S \rightarrow M(T) \rightarrow \omega(T)$ est ω -générique.

Proposition 6.4.9. *Soient M une ω -opérade et $f : S \rightarrow M(X)$ un morphisme dans $\widehat{\mathbb{G}}$, où S est un arbre et X est un ensemble globulaire. Alors f se factorise de manière unique dans $\widehat{\mathbb{G}}$ en un composé $S \xrightarrow{g} M(T) \xrightarrow{j} M(X)$, où $g : S \rightarrow M(T)$ est M -générique et $j = M(i)$ où i est un morphisme $T \rightarrow X$ dans $\widehat{\mathbb{G}}$.*

Démonstration. Commençons par établir le résultat pour $M = \omega$. Soit $f : S \rightarrow \omega(X)$ un morphisme de $\widehat{\mathbb{G}}$. Supposons qu'on ait $f = M(i)a$ où $a : S \rightarrow \omega(T)$ est un morphisme ω -générique et $i : T \rightarrow X$ est un morphisme de $\widehat{\mathbb{G}}$. Puisque le morphisme a est ω -générique, il correspond à un couple $(a_{\text{alg}}, 1_T)$ dans $\omega(T)(S)$. Le morphisme $M(i)a$ correspond alors au couple (a_{alg}, i) dans $\omega(X)(S)$. Ainsi f détermine de manière unique a_{alg} , et donc a , et i . Réciproquement, f correspond à un couple $(f_{\text{alg}}, f_{\text{glob}})$ dans $\omega(X)(S)$ et la décomposition $f = M(f_{\text{glob}})f_{\text{gen}}$, où f_{gen} est le morphisme qui correspond au couple $(f_{\text{alg}}, 1)$ dans $\omega(X)(S)$, convient.

Passons au cas général. Soient M une ω -opérade et $f : S \rightarrow M(X)$ un morphisme dans $\widehat{\mathbb{G}}$. Supposons qu'on ait $f = M(i)a$ où $a : S \rightarrow M(T)$ est M -générique et $i : T \rightarrow X$ est un morphisme de $\widehat{\mathbb{G}}$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{f} & M(T) \\
 \downarrow \alpha_{T'} a & \searrow a & \nearrow M(i) \\
 & & M(T') \\
 \downarrow \alpha_{T'} a & \swarrow \alpha_{T'} & \downarrow \alpha_T \\
 w(T') & \xrightarrow{w(i)} & w(T)
 \end{array} \cdot$$

La flèche $\alpha_{T'} a$ est ω -générique et $\omega(i)(\alpha_{T'} a)$ est donc la décomposition unique, établie au début de cette preuve, du morphisme $\alpha_T f$. Ainsi, les flèches i et $\alpha_{T'} a$ ne dépendent que de f . Par ailleurs, le carré de naturalité

$$\begin{array}{ccc}
 M(T') & \xrightarrow{M(i)} & M(T) \\
 \alpha_{T'} \downarrow & & \downarrow \alpha_T \\
 \omega(T') & \xrightarrow{\omega(i)} & \omega(T)
 \end{array}$$

étant cartésien, le morphisme a ne dépend pas non plus de f . D'où l'unicité de la décomposition.

L'existence de la décomposition résulte de l'existence de la décomposition de $\alpha_T f$ et du fait que le carré ci-dessus est cartésien. \square

Corollaire 6.4.10. *Soit M une ω -opérade. Un morphisme $S \rightarrow M(T)$ de $\widehat{\mathbb{G}}$, où S et T sont des arbres, est générique si et seulement s'il ne se factorise par aucun morphisme $M(i)$ où $i : T' \rightarrow T$ est un morphisme de $\widehat{\mathbb{G}}$ qui n'est pas une identité.*

6.5 Extension globulaire associée à une monade

6.5.1. Soit $\alpha : M \rightarrow N$ un morphisme de monades sur une catégorie C admettant des coégalisateurs. On a un foncteur d'oubli $U : N\text{-Alg} \rightarrow M\text{-Alg}$ qui envoie l'algèbre

$(X, NX \rightarrow X)$ sur l'algèbre $(X, MX \xrightarrow{\alpha_X} NX \rightarrow X)$. On dispose alors du triangle commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} N\text{-Alg} & \xrightarrow{U} & M\text{-Alg} \\ & \searrow U_N & \swarrow U_M \\ & & C \end{array}$$

Par le théorème 4.5.6 de [10], le foncteur U admet un adjoint à gauche L .

Par ailleurs, on dispose d'un foncteur $L' : \text{Kl}'(M) \rightarrow \text{Kl}'(N)$ défini de la manière suivante. Le foncteur L' est l'identité sur les objets et son action sur les morphismes est donné par l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Kl}'(M)}(c, c') &\simeq \text{Hom}_{M\text{-Alg}}(L_M(c), L_M(c')) \\ &\simeq \text{Hom}_C(c, M(c')) \\ &\xrightarrow{\alpha_{c'}} \text{Hom}_C(c, N(c')) \\ &\simeq \text{Hom}_{N\text{-Alg}}(L_N(c), L_N(c')) \\ &\simeq \text{Hom}_{\text{Kl}'(N)}(c, c'), \end{aligned}$$

où c et c' sont dans C .

Proposition 6.5.2. *Le carré*

$$\begin{array}{ccc} \text{Kl}'(M) & \xrightarrow{L'} & \text{Kl}'(N) \\ L_M \downarrow & & \downarrow L_N \\ M\text{-Alg} & \xrightarrow{L} & N\text{-Alg} \end{array},$$

où L_M et L_N désignent par abus de notation les inclusions canoniques, est commutatif à isomorphisme canonique près.

Démonstration. Commençons par définir un morphisme $LL_M \rightarrow L_NL'$. Par adjonction, il suffit de définir un morphisme $L_M \rightarrow UL_NL'$. Soit c un objet de C . Le morphisme $\alpha_c : M(c) \rightarrow N(c)$ définit un morphisme d'algèbres de

$$L_M(c) = \left(M(c), MM(c) \xrightarrow{\mu_{M,c}} M(c) \right)$$

vers

$$UL_NL'(c) = \left(N(c), MN(c) \xrightarrow{(\mu_N(\alpha * N))_c} N(c) \right).$$

En effet, on a $\mu_N(\alpha * N)(M * \alpha) = \mu_N(\alpha * \alpha) = \alpha\mu_M$. De plus, ce morphisme d'algèbres est naturel en c dans $\text{Kl}'(M)$. En effet, il s'agit de vérifier que pour $f : a \rightarrow b$ dans $\text{Kl}'(M)$, c'est-à-dire $f : L_M(a) \rightarrow L_M(b)$ dans $M\text{-Alg}$, le carré

$$\begin{array}{ccc} M(a) & \xrightarrow{U_M(f)} & M(b) \\ \alpha_a \downarrow & & \downarrow \alpha_b \\ N(a) & \xrightarrow{U_N(L'(f))} & N(b) \end{array}$$

est commutatif. Or, on a

$$\begin{aligned} U_N(L'(f)) &= U_N(\varepsilon_{N,L_N(b)}L_N(\alpha_b U_M(f)\eta_{M,a})) \\ &= \mu_{N,b}N(\alpha_b U_M(f)\eta_{M,a}) \\ &= \mu_{N,b}N(\alpha_b)N(f'), \end{aligned}$$

où $f' = U_M(f)\eta_{M,a} : a \rightarrow M(b)$, et donc

$$\begin{aligned} U_M(L'(f))\alpha_a &= \mu_{N,b}N(\alpha_b)N(f')\alpha_a \\ &= \mu_{N,b}N(\alpha_b)\alpha_{M(b)}M(f') \\ &= \mu_{N,b}(\alpha * \alpha)_b M(f') \\ &= \alpha_b \mu_{M,b}M(f') \\ &= \alpha_b U_M(\varepsilon_{L_M(b)}L_M(U_M(f)\eta_{M,a})) \\ &= \alpha_b U_M(f). \end{aligned}$$

Nous avons donc bien défini un morphisme $\beta : LL_M \rightarrow L_N L'$. Pour conclure, il suffit de montrer que β est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout c dans C et toute N -algèbre A , la composition par β_c induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{N\text{-Alg}}(L_N L'(c), A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{N\text{-Alg}}(LL_M(c), A),$$

ou encore, par adjonction, que la composition par α_c induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_{N\text{-Alg}}(L_N(c), A) \rightarrow \mathrm{Hom}_{M\text{-Alg}}(L_M(c), U(A)).$$

Soit donc c dans C et A une N -algèbre. On a un triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{N\text{-Alg}}(L_N(c), A) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{Hom}_{M\text{-Alg}}(L_M(c), U(A)) \\ & \searrow \simeq & \swarrow \simeq \\ & \mathrm{Hom}_C(c, U_N(A)) & \end{array} ,$$

où les flèches obliques sont les isomorphismes d'adjonction. Un morphisme de N -algèbres $f : L_N(c) \rightarrow A$ est envoyé dans $\mathrm{Hom}_C(c, U_N(A))$, sur $U_N(f)\eta_{N,c}$ en passant par la gauche, et sur $U_N(f)\alpha_c\eta_{M,c}$ en passant par la droite. Or $\alpha_c\eta_{M,c} = \eta_{N,c}$ car α est un morphisme de monades. Le triangle est donc commutatif et l'application étudiée est bien bijective. \square

Proposition 6.5.3. *Pour tout morphisme $f : c \rightarrow c'$ de C , le foncteur L' de $\mathrm{Kl}'(M)$ vers $\mathrm{Kl}'(N)$ envoie le morphisme $L_M(f)$ sur le morphisme $L_N(f)$.*

Démonstration. Posons $h = L'(L_M(f))$. Par définition de L' , on a

$$\begin{aligned} h &= \varepsilon_{N,L_N(c')}L_N(\alpha_{c'}M(f)\eta_{M,c}) \\ &= \varepsilon_{N,L_N(c')}L_N(N(f)\alpha_c\eta_{M,c}) \\ &= \varepsilon_{N,L_N(c')}L_N(N(f)\eta_{N,c}) \\ &= L_N(f), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer. \square

Proposition 6.5.4. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ H \downarrow & \cong & \downarrow G \\ C & \xrightarrow{I} & D \end{array}$$

un carré dans la catégorie des catégories, commutatif à une transformation naturelle α près. Si H est bijectif sur les objets et G est pleinement fidèle, alors il existe un unique foncteur $K : C \rightarrow B$ qui partage le carré en deux triangles, le triangle de gauche étant commutatif et le triangle de droite étant commutatif à une transformation naturelle $\beta : I \rightarrow GK$ près, vérifiant $\beta_{H(a)} = \alpha_a$ pour tout a dans A .

Démonstration. On peut supposer que H est l'identité sur les objets. Supposons qu'il existe un foncteur $K : C \rightarrow B$ comme dans l'énoncé. La commutativité du triangle de gauche entraîne $K(c) = F(c)$ pour c dans C . Soit $f : c \rightarrow d$ un morphisme de C . La commutativité du triangle de droite à transformation naturelle près implique que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I(c) & \xrightarrow{I(f)} & I(d) \\ \alpha_c \downarrow & & \downarrow \alpha_d \\ FK(c) & \xrightarrow{FK(f)} & FK(d) \end{array}$$

est commutatif. En particulier, $K(f)$ est l'unique flèche de $K(a)$ vers $K(b)$ qui s'envoie sur $\alpha_d I(f) \alpha_c^{-1}$ via G . D'où l'unicité de K .

Réciproquement, il est immédiat que les formules précédentes définissent un foncteur $K : C \rightarrow B$ tel que le triangle de droite soit commutatif à la transformation naturelle α près. De plus, si $g : a \rightarrow b$ est un morphisme de A , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I(a) & \xrightarrow{IH(g)} & I(b) \\ \alpha_a \downarrow & & \downarrow \alpha_b \\ GF(a) & \xrightarrow{GF(g)} & GF(b) \end{array}$$

est commutatif et on a donc $KH(g) = F(g)$. \square

6.5.5. Soit M une monade sur $\widehat{\mathbb{G}}$. On notera Θ_M la sous-catégorie pleine de $\text{Kl}'(M)$ dont les objets sont les arbres. Ainsi, on a $\text{Hom}_{\Theta_M}(S, T) = \text{Hom}_{M\text{-Alg}}(L_M(S), L_M(T))$. Par adjonction, on a $\text{Hom}_{\Theta_M}(S, T) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(S, M(T))$ et le fait que le foncteur $\text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(\cdot, M(T))$ transforme les limites inductives en des limites projectives entraîne que Θ_M est une extension globulaire. On appellera Θ_M l'extension globulaire associée à M .

Soient $\alpha : M \rightarrow N$ un morphisme de monades sur $\widehat{\mathbb{G}}$, $U : N\text{-Alg} \rightarrow M\text{-Alg}$ le foncteur induit par α et L son adjoint à gauche. Le carré

$$\begin{array}{ccc} \Theta_0 & \longrightarrow & \Theta_N \\ \downarrow & \searrow \kappa & \downarrow i_N \\ \Theta_M & \xrightarrow{i_M} M\text{-Alg} \xrightarrow{L} & N\text{-Alg} \end{array}$$

est commutatif à un isomorphisme canonique κ près. En effet, les deux composés qui interviennent dans ce carré sont des restrictions à Θ_0 d'adjoints à gauche du foncteur $U_N : N\text{-Alg} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$. Puisque le morphisme vertical de gauche est bijectif sur les objets et que le morphisme vertical de droite est pleinement fidèle, ce carré détermine par la proposition précédente, un unique foncteur $\Theta_\alpha : \Theta_M \rightarrow \Theta_N$. Puisque ce foncteur est au-dessous de Θ_0 , il est globulaire.

La proposition suivante décrit explicitement ce foncteur, et par la même occasion, montre qu'il ne dépend pas du choix de l'adjoint L .

Proposition 6.5.6. *Soit $\alpha : M \rightarrow N$ un morphisme de monades sur $\widehat{\mathbb{G}}$. Alors Θ_α est la restriction à Θ_M du foncteur $L' : \text{Kl}'(M) \rightarrow \text{Kl}'(N)$ défini au début de cette section.*

Démonstration. Le foncteur L' étant l'identité sur les objets, il induit bien un foncteur $\Theta_M \rightarrow \Theta_N$. Par les propositions 6.5.2 et 6.5.3, ce foncteur vérifie la propriété qui caractérise Θ_α , d'où le résultat. \square

Proposition 6.5.7. *L'application $\alpha \mapsto \Theta_\alpha$ définit un foncteur \mathbb{T} de la catégorie des monades sur $\widehat{\mathbb{G}}$ vers la catégorie des extensions globulaires.*

Démonstration. Il suffit de vérifier la functorialité. Le respect des unités est clair. Soit $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P$ deux morphismes de monades sur $\widehat{\mathbb{G}}$ composables. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Theta_0 & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \Theta_M & \xrightarrow{\Theta_\alpha} & \Theta_N & \xrightarrow{\Theta_\beta} & \Theta_P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M\text{-Alg} & \longrightarrow & N\text{-Alg} & \longrightarrow & P\text{-Alg} \end{array} .$$

Les deux triangles sont commutatifs et les deux carrés sont commutatifs à isomorphisme près. Le foncteur $\Theta_\beta\Theta_\alpha$ fait donc commuter le grand triangle strictement et le grand rectangle à isomorphisme près. Ainsi $\Theta_\beta\Theta_\alpha$ vérifie la propriété qui caractérise $\Theta_{\beta\alpha}$ (pour le choix de l'adjoint composé $M\text{-Alg} \rightarrow N\text{-Alg} \rightarrow P\text{-Alg}$). D'où le résultat. \square

Proposition 6.5.8. *Soit M une ω -opéade. Alors M est une théorie globulaire.*

Démonstration. Par définition, le foncteur $\Theta_0 \rightarrow \Theta_M$ est bijectif sur les objets. On sait déjà que Θ_M est une extension globulaire. Il suffit donc de montrer que le foncteur $\Theta_0 \rightarrow \Theta_M$ est fidèle. Or celui-ci est le composé des foncteurs $\Theta_0 \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ et $\widehat{\mathbb{G}} \rightarrow M\text{-Alg}$ qui sont tous les deux fidèles (par la proposition 6.4.7 pour le second). \square

6.5.9. Soit M une ω -opérade. Par le corollaire 6.4.10, un morphisme $f : S \rightarrow T$ dans Θ_M , c'est-à-dire un morphisme $L_M(S) \rightarrow L_M(T)$ dans $M\text{-Alg}$, est algébrique si et seulement le morphisme $S \rightarrow M(T)$ correspondant par adjonction est M -générique.

La proposition 6.4.9 se reformule alors de la manière suivante. Soit f un morphisme $L_M(S) \rightarrow L_M(X)$ de M -algèbres, où S est un arbre et X un ensemble globulaire. Alors f se décompose de manière unique en $f = L_M(i)a$ où a est un morphisme de Θ_M , c'est-à-dire un morphisme $L_M(S) \rightarrow L_M(T)$ de M -algèbres pour T un arbre, qui est algébrique, et $i : T \rightarrow X$ est un morphisme de $\widehat{\mathbb{G}}$. En particulier, Θ_M est une théorie globulaire homogène.

La description obtenue dans la proposition 6.5.6 du foncteur $\Theta_\alpha : \Theta_M \rightarrow \Theta_\omega$, où α est la transformation naturelle $M \rightarrow \omega$, entraîne que le morphisme de Θ_M correspondant à $S \rightarrow M(T)$ par adjonction est envoyé sur le morphisme correspondant à $S \rightarrow M(T) \xrightarrow{\alpha_T} \omega(T)$ par adjonction. Ainsi, par définition des morphismes M -génériques, et par le lien entre les morphismes M -génériques et les morphismes algébriques, Θ_α préserve les morphismes algébriques. La théorie globulaire Θ_M est donc homogène sur Θ_ω .

Proposition 6.5.10. *Les catégories Θ et Θ_ω sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. Ce résultat sera démontré indépendamment des résultats de la suite de cette section dans la section suivante (proposition 6.6.3). \square

Proposition 6.5.11. *Le foncteur \mathbb{T} induit un foncteur de la catégorie des ω -opérades dans la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ .*

Démonstration. On a montré dans le paragraphe 6.5.9 que si M est une ω -opérade, alors Θ_M est une théorie globulaire homogène sur Θ_ω . Le résultat découle donc immédiatement du fait que Θ_ω et Θ sont canoniquement isomorphes. \square

6.6 Équivalence avec les ω -opérades

Proposition 6.6.1. *Soit C une théorie globulaire homogène. Appelons K le foncteur de comparaison monadique $\text{Mod}(C) \rightarrow M_C\text{-Alg}$. Alors le carré*

$$\begin{array}{ccc} \Theta_0 & \xrightarrow{\quad} & \Theta_{M_C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\quad} & \text{Mod}(C) \xrightarrow{K} M_C\text{-Alg} \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près.

Démonstration. Fixons un arbre S . Par définition de K , on a $K(S) = (U_C(S), U_{C\varepsilon_{C,S}})$. Nous noterons S_C l'ensemble globulaire $U_C(S)$ sous-jacent à $K(S)$. Ainsi, si T est un arbre, on a $S_C(T) = \text{Hom}_C(S, T)$. On définit un morphisme $s_S : M_C(S) \rightarrow S_C(S)$ de la manière suivante. À un couple $(D_n \xrightarrow{f} T \in C_{\text{alg}}, T \xrightarrow{g} S \in \widehat{\mathbb{G}})$ dans $M_C(S)(D_n)$, on associe le composé gf dans $S_C(D_n)$. Ces applications sont bijectives puisque la théorie globulaire C est homogène et que les flèches entre arbres de $\widehat{\mathbb{G}}$ correspondent aux flèches de Θ_0 . Le morphisme s_S est donc un isomorphisme d'ensembles globulaires de $M_C(S)$ vers S_C .

Nous allons montrer que s_S est le morphisme sous-jacent d'un isomorphisme d'algèbres $L_C(S) \rightarrow K(S)$. Il s'agit de montrer la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_C M_C(S) & \xrightarrow{M_C(s)} & M(S_C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_C(S) & \xrightarrow{s} & S_C \end{array} .$$

La flèche $M_C(S_C) \rightarrow S_C$ peut se décrire de la manière suivante. Soit n un entier positif. On associe au couple $(D_n \xrightarrow{f} T \in C_{\text{alg}}, T \xrightarrow{g} S \in C_{\text{alg}})$ dans $M_C(S_C)(D_n)$ le composé gf dans $S_C(T)(D_n)$. On a maintenant une description concrète de toutes les flèches du carré ci-dessus. Ces flèches correspondent à des compositions de morphismes dans la catégorie C et on vérifie facilement que la commutativité du carré découle de l'associativité de la composition dans C .

Montrons la naturalité en S de s_S . Soit $f : S \rightarrow T$ un morphisme de Θ_0 . Il s'agit de prouver que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_C(S) & \xrightarrow{M_C(f)} & M_C(T) \\ s_S \downarrow & & \downarrow s_T \\ S_C & \xrightarrow{f} & T_C \end{array}$$

est commutatif. Cela résulte comme pour le carré précédent de la description explicite des flèches du carré et de l'associativité de la composition dans C . \square

6.6.2. Soit C une théorie globulaire homogène. Considérons le carré commutatif à isomorphisme près de la proposition précédente. Appelons α l'isomorphisme qui rend le carré commutatif. Puisque le foncteur vertical de gauche est bijectif sur les objets et que le foncteur vertical de droite est pleinement fidèle, il existe un unique foncteur $G_C : C \rightarrow \Theta_{M_C}$ qui partage le carré entre deux triangles tels que le triangle supérieur soit commutatif et que le triangle inférieur soit commutatif à l'isomorphisme α près. En particulier, le foncteur G_C est globulaire.

Explicitement, le foncteur G_C est l'identité sur les objets et envoie tout morphisme $f : S \rightarrow T$ dans C sur le morphisme $G_C(f)$ qui, pour tout i positif, associe à un couple $(D_i \xrightarrow{a} U, U \xrightarrow{i} S)$ dans $M_C(S)(D_i)$ le couple $((fi)_{\text{alg}}, (fi)_{\text{glob}})$ dans $M_C(T)(D_i)$.

Proposition 6.6.3. *Soit C une théorie globulaire homogène sur Θ . Alors le foncteur $G_C : C \rightarrow \Theta_{M_C}$ est un isomorphisme de catégories.*

Démonstration. Le carré

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \text{Mod}(C) \\ G_C \downarrow & & \downarrow K \\ \Theta_{M_C} & \longrightarrow & M_C\text{-Alg} \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près par la proposition précédente. Les foncteurs horizontaux de ce carré sont clairement pleinement fidèles et le foncteur K est une équivalence de catégories par la proposition 6.3.6. Le foncteur G_C est donc pleinement fidèle. Par ailleurs, G_C est bijectif sur les objets. Il suit que G_C est un isomorphisme de catégories. \square

6.6.4. Soit M un ω -opérade. Le foncteur d'inclusion $\iota : \Theta_M \rightarrow M\text{-Alg}$ induit un foncteur nerf $N_M : M\text{-Alg} \rightarrow \widehat{\Theta}_M$ défini par

$$N_M(A)(S) = \text{Hom}_{M\text{-Alg}}(L_M(S), A).$$

pour toute M -algèbre A et tout arbre S . Ce foncteur se factorise par $\text{Mod}(\Theta_C)$. En effet, il suffit de vérifier que $j^* N_M$, où j est le foncteur canonique de Θ_0 vers Θ_M , se factorise par $\text{Mod}(\Theta_0)$. Or, ceci découle du fait qu'on a

$$j^* N_M(A)(S) = \text{Hom}_{M\text{-Alg}}(L_M(S), A) \simeq \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(S, U_M(A)).$$

Un calcul analogue montre que la restriction de $N_M(A)$ à $\widehat{\mathbb{G}}$ est canoniquement isomorphe au préfaisceau représentable par $U_M(A)$. On en déduit un isomorphisme κ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M\text{-Alg} & \xrightarrow{N_M} & \text{Mod}(\Theta_M) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \widehat{\mathbb{G}} & \end{array} \quad \cdot$$

Si A est la M -algèbre libre sur X , alors $N_M(A)(S) = \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(L_M(S), L_M(X))$. On dispose d'une flèche canonique $L_{\Theta_M}(X)(S) \rightarrow N_M(A)(S)$ définie de la manière suivante. À un élément $(L_M(S) \xrightarrow{f} L_M(T) \in M\text{-Alg}, T \xrightarrow{g} X \in \widehat{\mathbb{G}})$ dans $L_{\Theta_M}(X)(S)$, on associe l'élément $L_M(g)f$ de $N_M(A)(S)$. Par la proposition 6.4.9, cette flèche est un isomorphisme. On obtient ainsi un isomorphisme ψ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M\text{-Alg} & \xrightarrow{N_M} & \text{Mod}(\Theta_M) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \widehat{\mathbb{G}} & \end{array} \quad \cdot$$

En recollant κ et ψ , on obtient donc un isomorphisme de monades

$$H_M : M_{\Theta_M} = U_{\Theta_M} L_{\Theta_M} \xrightarrow{U_{\Theta_M} * \kappa} U_{\Theta_M} N_M L_M \xrightarrow{\psi * L_M} U_M L_M = M$$

Explicitement, pour X un ensemble globulaire et n un entier positif, H_{M,X,D_n} est donné par le composé

$$\coprod_{D_n \rightarrow S \in \Theta_M} \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(S, X) \rightarrow \text{Hom}_{M\text{-Alg}}(L_M(D_n), L_M(X)) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{G}}}(\mathbb{D}_n, M(X)) \simeq M(X)(\mathbb{D}_n).$$

Proposition 6.6.5. *Soit M une ω -opérate. Alors $H_M : M_{\Theta_M} \rightarrow M$ est un isomorphisme de monades.*

Démonstration. Voir le paragraphe précédent. \square

Proposition 6.6.6. *Soit $F : C \rightarrow D$ un morphisme de théories globulaires homogènes au-dessus de Θ . Alors le carré*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{G_C} & \Theta_{M_C} \\ F \downarrow & & \downarrow \Theta_{M_F} \\ D & \xrightarrow{G_D} & \Theta_{M_D} \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Ce carré est clairement commutatif sur les objets. Il s'agit donc de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_C(S, T) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}_{\Theta_{M_C}}(L_{M_C}(S), L_{M_C}(T)) \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Hom}_D(S, T) & \xrightarrow{\delta} & \text{Hom}_{\Theta_{M_D}}(L_{M_D}(S), L_{M_D}(T)) \end{array}$$

est commutatif pour tous arbres S et T .

Soit $f : S \rightarrow T$ un morphisme de C . Fixons n un entier positif. Alors, on a

$$\gamma(f) = F(f) \quad \text{et} \quad \delta(\gamma(f))(\mathbb{D}_n) = (\mathbb{D}_n \xrightarrow{a} S', S' \xrightarrow{i} S) \mapsto ((F(f)i)_{\text{alg}} a, (F(f)i)_{\text{glob}}).$$

Par ailleurs,

$$\alpha(f)(\mathbb{D}_n) = (\mathbb{D}_n \xrightarrow{a} S', S' \xrightarrow{i} S) \mapsto ((fi)_{\text{alg}} a, (fi)_{\text{glob}}).$$

Calculons maintenant $\beta(\alpha(f))(\mathbb{D}_n)$. Rappelons que

$$\beta(h) = \varepsilon_{M_D, L_D(T)} L_{M_D}(M_F U_{M_C}(h) \eta_{M_C, S})$$

et donc que

$$U_{M_D}(\beta(h)) = \mu_{M_D, T} M_D(M_F U_{M_C}(h) \eta_{M_C, S}).$$

On vérifie facilement que

$$M_F U_{M_C}(\alpha(f))\eta_{M_C, S}(\mathbb{D}_n) = (\mathbb{D}_n \xrightarrow{j} S) \mapsto ((F(f)j)_{\text{alg}}, (F(f)j)_{\text{glob}})$$

et donc que

$$\begin{aligned} M_C(M_F U_{M_C}(\alpha(f))\eta_{M_C, S}(\mathbb{D}_n)) \\ = (\mathbb{D}_n \xrightarrow{a} S', S' \xrightarrow{j} S) \mapsto (a, ((F(f)j)_{\text{alg}}, (F(f)j)_{\text{glob}})). \end{aligned}$$

Il résulte de la description explicite de μ_{M_C} que

$$U_{M_D}(\beta(\alpha(f)))(\mathbb{D}_n) = (\mathbb{D}_n \xrightarrow{a} S', S' \xrightarrow{j} S) \mapsto ((F(f)j)_{\text{alg}} a, (F(f)j)_{\text{glob}}).$$

Ainsi, on a $U_{M_D}(\beta(\alpha(f))) = U_{M_D}(\delta(\gamma(f)))$ et le résultat suit par la fidélité de U_{M_D} . \square

Proposition 6.6.7. *Soit $\alpha : M \rightarrow N$ un morphisme de ω -opérades. Alors le carré*

$$\begin{array}{ccc} M_{\Theta_M} & \xrightarrow{H_M} & M \\ M_{\Theta_\alpha} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ M_{\Theta_N} & \xrightarrow{H_N} & N \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que pour tout ensemble globulaire X et tout entier positif n , le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_{\mathbb{D}_n \rightarrow S \in \Theta_M} \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{G}}}(S, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{M\text{-Alg}}(L_M(\mathbb{D}_n), L_M(X)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{G}}}(\mathbb{D}_n, M(X)) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \coprod_{\mathbb{D}_n \rightarrow S \in \Theta_N} \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{G}}}(S, X) & \longrightarrow & \text{Hom}_{N\text{-Alg}}(L_N(\mathbb{D}_n), L_N(X)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{G}}}(\mathbb{D}_n, N(X)), \end{array}$$

est commutatif. Soit donc $(L_M(\mathbb{D}_n) \xrightarrow{f} L_M(S), S \xrightarrow{i} X)$ un élément de l'ensemble en haut à gauche du diagramme ci-dessus. Cet élément est envoyé en bas à droite sur

$$\begin{aligned} \alpha_X U_M(L_M(i)f)\eta_{M, \mathbb{D}_n} &= \alpha_X M(i)U_M(f)\eta_{M, \mathbb{D}_n} \\ &= N(i)\alpha_S U_M(f)\eta_{M, \mathbb{D}_n} \end{aligned}$$

en passant par le coin en haut à droite ; sur

$$\begin{aligned} U_N(L_N(i)\varepsilon_{N, L_N(S)} L_N(\alpha_S U_M(f)\eta_{M, \mathbb{D}_n}))\eta_{N, \mathbb{D}_n} \\ = N(i)U_N(\varepsilon_{N, L_N(S)} L_N(\alpha_S U_M(f)\eta_{M, \mathbb{D}_n}))\eta_{N, \mathbb{D}_n} \\ = N(i)\alpha_S U_M(f)\eta_{M, \mathbb{D}_n} \end{aligned}$$

en passant par le coin en bas à gauche. D'où le résultat. \square

Théorème 6.6.8. *Le foncteur M induit une équivalence de catégories entre la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ et la catégorie des ω -opérades. Le foncteur T est un quasi-inverse de M . De plus, si C est une théorie globulaire homogène sur C , alors les catégories $\text{Mod}(C)$ et $M_C\text{-Alg}$ sont canoniquement isomorphes.*

6.7 Comparaison avec les ∞ -catégories de Batanin

6.7.1. Dans cette section, on identifiera un objet X de $\widehat{\mathbb{G}}$ avec le foncteur constant $\widehat{\mathbb{G}} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ de valeurs X . Soit n un entier positif. On notera S^{n-1} le sous-ensemble globulaire de D_n qui a les mêmes k -cellules pour k entre 0 et $n-1$ et qui n'a pas de k -cellules pour $k \geq n$. Si X est un ensemble globulaire et si $n \geq 1$, la donnée d'un morphisme $S^{n-1} \rightarrow X$ équivaut à la donnée de deux n -cellules x, y dans X_{n-1} qui sont parallèles. Si $n = 0$, $S^{-1} = \emptyset$ et il existe un unique morphisme $S^{-1} \rightarrow X$.

Soit $\alpha : M \rightarrow \omega$ une ω -collection. Un *carré admissible* est la donnée pour $n \geq 0$ d'un carré

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & M \\ i_n \downarrow & & \downarrow \alpha \\ D_n & \longrightarrow & \omega \end{array} ,$$

commutatif dans la catégorie des endofoncteurs de $\widehat{\mathbb{G}}$. Un relèvement d'un tel carré est un morphisme $D_n \rightarrow M$ divisant le carré en deux triangles commutatifs. Une *contraction* sur M est la donnée du choix d'un relèvement pour tout carré admissible. La ω -collection M est dite *contractile* si elle admet une contraction.

Rappelons que la donnée d'un morphisme $D_n \rightarrow \omega$ correspond à celle d'un arbre S et d'un morphisme algébrique $D_n \rightarrow S$ dans Θ , et qu'un tel morphisme existe si et seulement si S est de dimension inférieure ou égale à n et qu'il est alors unique. Un carré admissible tel que le morphisme $D_n \rightarrow \omega$ corresponde à un morphisme $D_n \rightarrow S$ dans Θ avec S de dimension strictement inférieure à n sera appelé *carré de cohérence admissible*. Si au contraire, la dimension de S est n , on parlera de *carré d'opération admissible*. On prendra garde au fait que cette terminologie peut se révéler trompeuse : les unités des ∞ -catégories correspondront à des relèvements de carrés de *cohérence* admissibles, et les relèvements des carrés d'opération admissibles pourront correspondre à des mélanges de cohérences et d'opérations de ∞ -catégories. Une *cohérence* sur M est la donnée du choix d'un relèvement pour tout carré de cohérence admissible. La ω -collection M est dite *cohérente* si elle admet une cohérence.

Nous allons définir une sous- ω -collection Bin de ω . Pour cela, il suffit de définir $\text{Bin}(1)$. Les éléments de $\omega(1)_n$ pour $n \geq 0$ correspondent aux morphismes algébriques $D_n \rightarrow S$ de Θ . On pose pour tout n positif

$$\text{Bin}(1)_n = \{1_{D_n}, \nabla_0^n, \dots, \nabla_{n-1}^n\}.$$

On vérifie immédiatement que $\text{Bin}(1)$ est stable par but et source, et donc que Bin est bien une sous- ω -collection de ω . L'unité de la monade ω se factorise par Bin . On dispose donc d'un morphisme $1_{\widehat{\mathbb{G}}} \rightarrow \text{Bin}$.

Supposons maintenant que M soit une ω -opérate. La ω -collection sous-jacente est en particulier munie d'un morphisme de ω -collections $1_{\widehat{\mathbb{G}}} \rightarrow M$. On appellera *système de compositions binaires* sur M la donnée d'un morphisme de ω -collection $\text{Bin} \rightarrow M$ au-dessous de $1_{\widehat{\mathbb{G}}}$. On dira que M *admet des compositions binaires* s'il existe un système de compositions binaires sur M .

De même, on définit la sous- ω -collection Comp de ω en posant pour tout n positif,

$$\text{Comp}(1)_n = \{\nabla_S; S \text{ arbre de dimension } n\},$$

où ∇_S désigne l'unique morphisme algébrique $D_n \rightarrow S$ dans Θ . On appellera *système de compositions générales* sur M la donnée d'un morphisme de ω -collection $\text{Comp} \rightarrow M$ au-dessous de $1_{\widehat{\mathbb{G}}}$. On dira que M *admet des compositions générales* s'il existe un système de compositions générales sur M .

6.7.2. Si \mathcal{C} est une catégorie, on appellera objet *faiblement initial* de \mathcal{C} tout objet X tel que pour tout objet Y , il existe au moins un morphisme de X vers Y .

Considérons la catégorie des ω -opérades cohérentes munies d'un système de compositions binaires. La démonstration du théorème 8.1 de [3] construit un objet faiblement initial K de cette catégorie. La remarque 2 qui suit ce théorème affirme que K est « initial à homotopies supérieures près » (en un sens non précisé). Moralement, une ∞ -catégorie de Batanin est une algèbre sur n'importe quel tel objet « initial à homotopie supérieure près ». Faute de pouvoir donner un sens à la phrase précédente, la catégorie des ∞ -catégories de Batanin est définie comme la catégorie des algèbres sur la ω -opérade K du théorème 8.1. C'est la définition 8.7 de *op. cit.*

Considérons la catégorie des ω -opérades munies d'une contraction. Dans l'annexe G de [29], Leinster démontre que cette catégorie admet un objet initial L . La catégorie des ∞ -catégories de Batanin-Leinster est la catégorie des algèbres sur L . C'est la définition 9.2.3 de *op. cit.*

Le paragraphe précédent suggère le grand nombre de variations que l'on peut faire sur ces définitions. On peut par exemple remplacer les compositions binaires par les compositions générales dans la définition de Batanin. On peut également supposer l'existence des compositions sans se les donner.

6.7.3. Soit \mathcal{C} une théorie globulaire homogène sur Θ . L'équivalence de catégories M (voir le théorème 6.6.8) envoie \mathcal{C} sur une ω -opérade M . L'ensemble globulaire $M(1)$ est la restriction de $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}$ à $\widehat{\mathbb{G}}$ (voir le paragraphe 6.2.2). Rappelons que pour tout n positif, on a

$$\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}(D_n) = \{f : D_n \rightarrow S \in C_{\text{alg}}; S \text{ arbre}\},$$

et pour tout $i : D_n \rightarrow D_m$ morphisme de \mathbb{G} et tout $f : D_n \rightarrow S$ morphisme algébrique de \mathcal{C} , on a

$$\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}(i)(f) = (fi)_{\text{alg}}.$$

Proposition 6.7.4. *Soit $f : D_n \rightarrow S$ un morphisme algébrique de Θ avec $n \geq 1$. Alors les décompositions algébriques de $f\sigma_n$ et $f\tau_n$ sont respectivement*

$$f\sigma_n = \sigma_{n-1}^S(f\sigma_n)_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad f\tau_n = \tau_{n-1}^S(f\tau_n)_{\text{alg}}.$$

Explicitement,

- si la dimension de S est strictement inférieure à n , alors $f\sigma_n$ et $f\tau_n$ sont algébriques (et donc égaux);

- si la dimension de S est n , alors $(f\sigma_n)_{\text{alg}}$ et $(f\tau_n)_{\text{alg}}$ sont égaux à l'unique morphisme algébrique $D_{n-1} \rightarrow \partial T$ et on a

$$f\sigma_n = \sigma_S(f\sigma_n)_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad f\tau_n = \tau_S(f\tau_n)_{\text{alg}}.$$

Démonstration. Notons α la région maximale de D_{n-1} . On a

$$(f\sigma_n)(\alpha) = f(\sigma_n) = (\partial_{n-1}S, \sigma_{n-1}^S) \quad \text{et} \quad (f\tau_n)(\alpha) = f(\tau_n) = (\partial_{n-1}S, \tau_{n-1}^S)$$

Les décompositions algébriques de $f\sigma_n$ et $f\tau_n$ sont donc

$$f\sigma_n = \sigma_{n-1}^S a \quad \text{et} \quad f\tau_n = \tau_{n-1}^S a,$$

où on a noté a l'unique morphisme algébrique de source D_{n-1} et de but $\partial_{n-1}S$. On en déduit immédiatement le résultat. \square

Corollaire 6.7.5. *Soient C une théorie globulaire homogène sur Θ et $f : D_n \rightarrow S$ un morphisme algébrique de C avec $n \geq 1$. Les décompositions algébriques de $f\sigma_n$ et $f\tau_n$ sont respectivement*

$$f\sigma_n = \sigma_{n-1}^S(f\sigma_n)_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad f\tau_n = \tau_{n-1}^S(f\tau_n)_{\text{alg}}.$$

Explicitement,

- si la dimension de S est strictement inférieure à n , alors $f\sigma_n$ et $f\tau_n$ sont algébriques ;
- si la dimension de S est n , alors $(f\sigma_n)_{\text{alg}}$ et $(f\tau_n)_{\text{alg}}$ ont même but égal à ∂S et on a

$$f\sigma_n = \sigma_S(f\sigma_n)_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad f\tau_n = \tau_S(f\tau_n)_{\text{alg}}.$$

Proposition 6.7.6. *Soient C une théorie globulaire homogène sur Θ et $f, g : D_n \rightarrow S$ deux morphismes algébriques de C tels que*

$$(f\sigma_n)_{\text{alg}} = (g\sigma_n)_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad (f\tau_n)_{\text{alg}} = (g\tau_n)_{\text{alg}}.$$

Alors, on a

$$f\sigma_n = g\sigma_n \quad \text{et} \quad f\tau_n = g\tau_n.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$(f\sigma_n)_{\text{glob}} = (g\sigma_n)_{\text{glob}} \quad \text{et} \quad (f\tau_n)_{\text{glob}} = (g\tau_n)_{\text{glob}}.$$

Puisque C est homogène sur Θ , on peut calculer la partie globulaire de ces morphismes dans Θ . Le résultat est donc une conséquence de la proposition 6.7.4. \square

Proposition 6.7.7. *Soient C une théorie globulaire homogène sur Θ , et f et g deux n -cellules de $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}$ pour $n \geq 0$. Si f et g ont même but en tant que morphismes de C , alors ces deux morphismes sont parallèles dans C si et seulement s'ils sont parallèles dans l'ensemble globulaire $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}$.*

Démonstration. C'est une reformulation immédiate de la proposition précédente. \square

Remarque 6.7.8. Le résultat est faux si f et g n'ont pas même but en tant que morphismes de C . Par exemple, les morphismes 1_{D_1} et $\nabla_1 : D_1 \rightarrow D_1 \amalg_{D_0} D_1$ ne sont évidemment pas parallèles dans Θ mais sont parallèles en tant que cellules de $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}$.

Proposition 6.7.9. Soient C une théorie globulaire homogène sur Θ via un foncteur F et M la ω -collection associée à C . Pour $n \geq 0$, la donnée d'un carré admissible

$$\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{n+1} & \longrightarrow & \omega \end{array}$$

équivaut à celle de deux morphismes parallèles $f, g : D_n \rightarrow S$ algébriques dans C et d'un morphisme $H : D_n \rightarrow U$ tel que

$$F(f) = (H\sigma_{n+1})_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad F(g) = (H\tau_{n+1})_{\text{alg}}.$$

De plus, la donnée d'un relèvement équivaut à celle d'un morphisme $h : D_{n+1} \rightarrow U$ algébrique dans C tel que

$$F(h) = H, \quad F(f) = (H\sigma_{n+1})_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad F(g) = (H\tau_{n+1})_{\text{alg}}.$$

Démonstration. A priori, le morphisme $S^n \rightarrow M$ équivaut à la donnée de deux morphismes $f : D_n \rightarrow S$ et $g : D_n \rightarrow T$ algébriques dans C et parallèles en tant que n -cellules de $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}$. Le morphisme $D_{n+1} \rightarrow \omega$ équivaut à la donnée d'un morphisme $H : D_{n+1} \rightarrow U$ algébrique dans Θ . La commutativité du diagramme équivaut aux égalités

$$F(f) = (H\sigma_{n+1})_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad F(g) = (H\tau_{n+1})_{\text{alg}}.$$

Ainsi, par la proposition 6.7.4, on a $S = T = \partial_n U$. Les morphismes f et g sont donc parallèles par la proposition 6.7.7. Le morphisme $D_{n+1} \rightarrow \omega$ correspond à un morphisme $D_{n+1} \rightarrow U$ algébrique dans Θ . La commutativité du diagramme correspond aux relations

$$F(f) = (H\sigma_{n+1})_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad F(g) = (H\tau_{n+1})_{\text{alg}}.$$

On démontre la deuxième partie de la proposition de manière analogue. \square

Proposition 6.7.10. Soient C une théorie globulaire homogène sur Θ via un foncteur F et M la ω -collection associée à C .

1. Pour $n \geq 0$, la donnée d'un carré de cohérence admissible

$$\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{n+1} & \longrightarrow & \omega \end{array}$$

équivalent à celle de deux morphismes parallèles $f, g : D_n \rightarrow S$ algébriques dans C . De plus, la donnée d'un relèvement équivalent à celle d'un morphisme $h : D_{n+1} \rightarrow U$ algébrique dans C tel que

$$f = h\sigma_{n+1} \quad \text{et} \quad g = h\tau_{n+1}.$$

2. Pour $n \geq 0$, la donnée d'un carré d'opération admissible

$$\begin{array}{ccc} S^n & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{n+1} & \longrightarrow & \omega \end{array}$$

équivalent à celle de deux morphismes parallèles $f, g : D_n \rightarrow \partial U$ algébriques dans C pour U un arbre de dimension $n + 1$.

De plus, la donnée d'un relèvement équivalent à celle d'un morphisme $h : D_{n+1} \rightarrow U$ algébrique dans C tel que

$$\sigma_U f = h\sigma_{n+1} \quad \text{et} \quad \tau_U g = h\tau_{n+1}.$$

Ainsi, la donnée d'un carré admissible correspond à la donnée d'un couple admissible et la donnée d'un relèvement du carré correspond à la donnée d'un relèvement du couple.

Démonstration. Commençons par le cas d'un carré de cohérence admissible. Par la proposition 6.7.4, on a

$$(H\sigma_{n+1})_{\text{alg}} = H\sigma_{n+1} \quad \text{et} \quad (H\tau_{n+1})_{\text{alg}} = H\tau_{n+1}.$$

Les relations

$$F(f) = (H\sigma_{n+1})_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad F(g) = (H\tau_{n+1})_{\text{alg}}$$

sont donc équivalentes aux relations

$$F(f) = H\sigma_{n+1} \quad \text{et} \quad F(g) = H\tau_{n+1}.$$

Or par la proposition 5.1.5, il existe un unique tel H . Pour les mêmes raisons, les relations

$$f = (h\sigma_{n+1})_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad g = (h\tau_{n+1})_{\text{alg}}$$

sont équivalentes aux relations

$$f = h\sigma_{n+1} \quad \text{et} \quad g = h\tau_{n+1},$$

d'où la première assertion.

Passons au cas d'un carré d'opération admissible. Par la proposition 6.7.4 et la proposition précédente, on a

$$H\sigma_{n+1} = \sigma_U(H\sigma_{n+1})_{\text{alg}} = \sigma_U F(f) = F(\sigma_U f).$$

De même, on a $H\tau_{n+1} = F(\tau_U g)$ et ces deux égalités sont équivalentes aux égalités

$$F(f) = (H\sigma_{n+1})_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad F(g) = (H\tau_{n+1})_{\text{alg}}.$$

Or par la proposition 5.1.5, il existe un unique tel H . Pour les mêmes raisons, les relations

$$f = (h\sigma_{n+1})_{\text{alg}} \quad \text{et} \quad g = (h\tau_{n+1})_{\text{alg}}$$

sont équivalentes aux relations

$$\sigma_U f = h\sigma_{n+1} \quad \text{et} \quad \tau_U g = h\tau_{n+1},$$

d'où la deuxième assertion. \square

Corollaire 6.7.11. *Soient C une théorie globulaire homogène sur Θ et M la ω -collection associée.*

1. *La ω -collection M est contractile si et seulement si la théorie globulaire C est un pseudo-cohérateur.*
2. *La ω -collection M est cohérente si et seulement si tout couple admissible de C de la forme (f, g) avec f et g algébriques dans C admet un relèvement algébrique.*

Corollaire 6.7.12. *La catégorie des ω -opérades contractiles est canoniquement équivalente à la catégorie des pseudo-cohérateurs homogènes sur Θ .*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 6.6.8 et du corollaire précédent. \square

Théorème 6.7.13. *Soit C un cohérateur vérifiant les hypothèses du théorème 5.4.1 (par exemple un des trois cohérateurs définis dans le paragraphe 4.1.3). La ω -opérade M associée à C est un objet faiblement initial de la catégorie des ω -opérades contractiles.*

Démonstration. En vertu des théorèmes 5.4.1 et 5.4.4, C est un objet faiblement initial de la catégorie des pseudo-cohérateurs homogènes sur Θ . Le résultat suit par le corollaire précédent. \square

6.7.14. Soit C une théorie globulaire. On appellera *contraction* sur C la donnée d'un relèvement pour chaque couple admissible de C . En vertu du théorème 6.6.8 et de la proposition 6.7.10, la catégorie des ω -opérades munies d'une contraction est canoniquement équivalente à la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ munies d'une contraction.

Sous la conjecture 4.1.7, le cohérateur de Batanin-Leinster, qu'on notera Θ_{BL} dans la suite de cette section, est canoniquement muni d'une contraction. En effet, si (f, g) est un couple admissible de Θ_{BL} , avec les notations du paragraphe 4.1.3, ce couple appartient à un unique F_n . On peut donc associer à (f, g) le relèvement ajouté dans C_{n+1} .

Proposition 6.7.15. *Sous la conjecture 4.1.7, le cohérateur Θ_{BL} , muni de sa contraction canonique, est un objet initial de la catégorie des théories globulaires homogènes sur Θ munies d'une contraction.*

Démonstration. Soit D une théorie globulaire homogène sur Θ munie d'une contraction. Notons C_* la tour de définition de Θ_{BL} et F_n l'ensemble des couples admissibles de C_n qui définit C_{n+1} à partir de C_n . On va construire, comme dans la preuve du théorème 5.4.4, par récurrence sur n positif, des foncteurs globulaire $G_n : C_n \rightarrow D$ homogènes sur Θ , à partir du foncteur $G_0 : C_0 = \Theta_0 \rightarrow D$.

Supposons donc que l'on dispose d'un foncteur globulaire $G_n : C_n \rightarrow D$ homogène sur Θ . Par définition d'une tour de définition, se donner un foncteur globulaire $G_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow D$ tel que le triangle

$$\begin{array}{ccc} C_n & \longrightarrow & C_{n+1} \\ & \searrow G_n & \swarrow G_{n+1} \\ & & D \end{array}$$

soit commutatif, revient à se donner pour chaque couple admissible (f, g) dans F_n , un relèvement dans D du couple $(G_n(f), G_n(g))$. On a vu dans la preuve du théorème 5.4.4 qu'un tel foncteur G_{n+1} est automatiquement homogène sur Θ . Puisque le foncteur G_n est homogène sur Θ , pour tout couple admissible (f, g) , le couple $(G_n(f), G_n(g))$ est admissible et la contraction de D lui choisit donc un relèvement. On définit alors, en choisissant les relèvements associés à la contraction, un foncteur globulaire $G_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow D$ homogène sur Θ . On obtient un foncteur globulaire $G : \Theta_{\text{BL}} \rightarrow D$ homogène sur Θ en passant à la limite inductive.

Le foncteur G respecte la contraction. En effet, si (f, g) est un couple admissible de Θ_{BL} , il provient d'un unique F_n et le relèvement que choisit la contraction de Θ_{BL} est le relèvement ajouté dans C_{n+1} . Or, par définition, G envoie ce relèvement sur le relèvement du couple admissible $(G(f), G(g))$ choisi par la contraction de D .

Enfin, le morphisme $G : \Theta_{\text{BL}} \rightarrow D$ est unique. En effet, il est clair que tout foncteur globulaire de $\Theta_{\text{BL}} \rightarrow D$ s'obtient par les propriétés universelles successives des C_n . Par ailleurs, le choix qu'on a fait pour obtenir G_n à partir de G_{n+1} est imposé par la compatibilité du foncteur G aux contractions. \square

Corollaire 6.7.16. *Sous la conjecture 4.1.7, la catégorie des ∞ -catégories de type Θ_{BL} est canoniquement équivalente à la catégorie des ∞ -catégories de Batanin-Leinster.*

Démonstration. Par le paragraphe 6.7.14 et la proposition précédente, Θ_{BL} est envoyé par M sur un objet initial L de la catégorie des ω -opéades munies d'une contraction. Or les catégories $\text{Mod}(\Theta_{\text{BL}})$ et $M_{\Theta_{\text{BL}}}\text{-Alg} = L\text{-Alg}$ sont canoniquement isomorphes par le théorème 6.6.8. \square

Chapitre 7

Catégories test

7.1 Rappel sur les catégories test

7.1.1. Soit Cat la catégorie des petites catégories et \mathcal{W} la classe des équivalences faibles de petites catégories, c'est-à-dire des foncteurs entre petites catégories qui s'envoient *via* le foncteur nerf sur une équivalence faible d'ensembles simpliciaux. On pose $\mathbf{Hot} = Cat[\mathcal{W}^{-1}]$. Rappelons que la catégorie \mathbf{Hot} est canoniquement équivalente à la catégorie homotopique des CW-complexes.

Soit A une petite catégorie. On dispose d'un couple de foncteur adjoints

$$\begin{array}{ccc} i_A : \widehat{A} & \rightarrow & Cat \\ F & \mapsto & A/F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} i_A^* : Cat & \rightarrow & \widehat{A} \\ C & \mapsto & (a \mapsto \mathbf{Hom}_{Cat}(A/a, C)). \end{array}$$

On notera $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$ la classe $i_A^{-1}(\mathcal{W})$ des morphismes de préfaisceaux sur A qui s'envoient sur des équivalences faibles et on appellera *équivalences faibles de préfaisceaux sur A* les éléments de $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$. On notera $\mathbf{Ho}(A)$ la catégorie localisée $\widehat{A}[\mathcal{W}_{\widehat{A}}^{-1}]$. Le foncteur i_A induit un foncteur $\overline{i_A} : \mathbf{Ho}(A) \rightarrow \mathbf{Hot}$. Pour que le foncteur i_A^* induise un foncteur $\overline{i_A^*} : \mathbf{Hot} \rightarrow \mathbf{Ho}(A)$, il suffit qu'on ait $i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$, c'est-à-dire $i_A i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$. Dans ce cas, le couple de foncteurs adjoints (i_A, i_A^*) induit un couple de foncteurs adjoints $(\overline{i_A}, \overline{i_A^*})$.

On dira que A est une *catégorie test faible* si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- on a $i_A^*(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_{\widehat{A}}$;
- pour tout préfaisceau F sur A , le morphisme d'unité $\eta_F : F \rightarrow i_A^* i_A(F)$ appartient à $\mathcal{W}_{\widehat{A}}$;
- pour toute petite catégorie C , le morphisme de counité $\varepsilon_C : i_A i_A^*(C) \rightarrow C$ appartient à \mathcal{W} .

Les deux dernières conditions de la définition sont les conditions suffisantes évidentes pour que le couple $(\overline{i_A}, \overline{i_A^*})$ soit une adjonction d'équivalences de catégories. En particulier, si A est une catégorie test faible, la catégorie $\mathbf{Ho}(A)$ est canoniquement équivalente à \mathbf{Hot} .

On dira que A est *test locale* si pour tout a de A , la catégorie A/a est test faible. On dira que A est *test* si A est test faible et test locale.

On dira que A est *asphérique* si l'unique foncteur de A vers la catégorie finale e est une équivalence faible. Il est bien connu que les catégories admettant un objet final sont asphériques. On montre ([32], remarque 1.5.4) qu'une catégorie test locale A est test si et seulement si elle est asphérique. Nous aurons seulement besoin du cas particulier évident suivant : une catégorie test locale admettant un objet final est test.

Une catégorie test sera dite *test stricte* si le foncteur i_A commute aux produits binaires à équivalence près, c'est-à-dire si pour tous préfaisceaux F et G sur A , le foncteur canonique

$$A/(F \times G) \rightarrow A/F \times A/G$$

est une équivalence faible.

7.1.2. Nous allons maintenant exposer l'un des principaux critères pour montrer qu'une catégorie est test.

Soit A une petite catégorie. Notons $\emptyset_{\hat{A}}$ le préfaisceau initial sur A et $e_{\hat{A}}$ le préfaisceau final sur A . Un *segment séparant* sur \hat{A} est la donnée d'un préfaisceau F sur A muni de deux morphismes $\partial_0, \partial_1 : e_{\hat{A}} \rightarrow F$ tel que le noyau de (∂_0, ∂_1) soit le morphisme canonique $\emptyset_{\hat{A}} \rightarrow e_{\hat{A}}$.

Un préfaisceau F sur A est dit *asphérique* si l'unique morphisme de F vers le préfaisceau final $e_{\hat{A}}$ est une équivalence faible de préfaisceaux, c'est-à-dire si la catégorie A/F est asphérique. Si F est représentable alors F est asphérique. En effet, la catégorie A/F admet alors un objet final et est donc asphérique.

Un préfaisceau F sur A est dit *localement asphérique* si pour tout objet a dans A , le préfaisceau $F \times a$ est asphérique.

Théorème 7.1.3. *Une petite catégorie A est test locale si et seulement si \hat{A} admet un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ tel que I soit localement asphérique.*

Démonstration. Voir [17] ou le théorème 1.5.6 de [32]. □

Pour démontrer la locale asphéricité d'un préfaisceau, on utilisera le critère suivant.

Proposition 7.1.4. *Soient A une petite catégorie, F un préfaisceau sur A et F_1, F_2 deux sous-préfaisceaux de F tels que $F = F_1 \cup F_2$. Si les préfaisceaux F_1, F_2 et $F_1 \cap F_2$ sont asphériques, alors le préfaisceau F est asphérique.*

Démonstration. Voir [17] ou la proposition 1.2.7 de [32]. □

7.1.5. Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. Le foncteur u est dit *asphérique* si pour tout b dans B , la catégorie A/b est asphérique. On dispose du foncteur de restriction $u^* : \hat{B} \rightarrow \hat{A}$.

Proposition 7.1.6. *Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories asphériques. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- le foncteur u est asphérique ;

- pour tout morphisme $\varphi : F \rightarrow G$ de préfaisceaux sur B , le morphisme φ est une équivalence faible de préfaisceaux sur B si et seulement si le morphisme $u^*(\varphi)$ est une équivalence faible de préfaisceaux sur A .

Démonstration. Voir [17] ou la proposition 1.2.9 de [32]. \square

Théorème 7.1.7. *Soit A une catégorie test locale. Alors le localisateur $(\widehat{A}, \mathcal{W}_{\widehat{A}})$ est munie d'une structure de catégorie de modèles, à engendrement cofibrant, propre, dont les cofibrations sont les monomorphismes.*

Si de plus la catégorie A est test stricte, les équivalences faibles sont stables par produit binaire.

Démonstration. Voir le corollaire 4.2.18 de [13] pour la structure de catégorie de modèles. La propriété résulte du théorème 4.3.24 de *loc. cit.* et du cas des ensembles simpliciaux.

L'assertion sur la stabilité par produit binaire est évidente. \square

7.2 La catégorie Θ est test

7.2.1. Dans [15], les auteurs démontrent que Θ est une catégorie test. Le but de cette section est d'exposer une preuve alternative de ce résultat. Puisque Θ admet D_0 pour objet final, il suffit de montrer que Θ est une catégorie test locale. Pour cela, en vertu du théorème 7.1.3, il suffit de montrer le segment (D_1, σ_1, τ_1) est séparant et que le préfaisceau D_1 de $\widehat{\Theta}$ est localement asphérique.

Proposition 7.2.2. *Le segment (D_1, σ_1, τ_1) est un segment séparant de $\widehat{\Theta}$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que l'unique flèche $F \rightarrow D_0$ de $\widehat{\Theta}$ égalisée par σ_1 et τ_1 est $\emptyset \rightarrow D_0$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de $f : S \rightarrow D_0$, où S est un objet de Θ , égalisée par σ_1 et τ_1 . Supposons qu'un tel f existe. Alors quitte à considérer $f\alpha$, où α est une région de dimension 0 de S , on peut supposer que $S = D_0$ et donc que f est l'identité. D'où $\sigma_1 = \tau_1$. Contradiction. \square

7.2.3. Démontrons maintenant la locale asphéricité de D_1 . Nous allons utiliser la même stratégie que celle employée dans [17] ou dans le lemme 1.5.12 de [32] pour démontrer la locale asphéricité de l'ensemble simplicial Δ_1 . Nous utiliserons des faits établis dans cette preuve. C'est pourquoi nous l'exposons ci-dessous. Les notations, qui pourront sembler maladroites, seront justifiées dans le paragraphe 7.2.5.

Proposition 7.2.4. *L'ensemble simplicial Δ_1 est localement asphérique.*

Démonstration. Soit $X = \Delta_p$ un simplexe. Il s'agit de montrer que $X \times \Delta_1$ est asphérique.

Pour k entre 0 et p , on pose $X_k = \Delta_{p+1}$. On note $\varphi'_k : X_k \rightarrow X$ la k -ième dégénérescence et $\varphi''_k : X_k \rightarrow \Delta_1$ l'unique morphisme qui envoie k sur 0 et $k+1$ sur 1. Soit $\varphi_k = (\varphi'_k, \varphi''_k) : X_k \rightarrow X \times \Delta_1$. Ce morphisme est clairement un monomorphisme. Son image, qu'on désignera par F_k , est donc un préfaisceau représentable.

Pour l entre 0 et p , posons

$$G_l = \bigcup_{0 \leq k \leq l} F_k.$$

Nous allons montrer

- (a) que $G_p = X \times \Delta_1$ dans $\widehat{\Delta}$;
- (b) que pour k tel que $0 \leq k < p$, le préfaisceau $G_k \cap F_{k+1}$ est représentable.

La condition (b) impliquera par récurrence que G_l est asphérique pour l entre 0 et p par la proposition 7.1.4 et donc, en vertu de la condition (a), que $X \times \Delta_1$ est asphérique.

Montrons la condition (a). Soit $T = \Delta_q$ un simplexe et $f = (f', f'') : T \rightarrow X \times \Delta_1$ un morphisme d'ensembles simpliciaux. Il s'agit de montrer qu'il existe un entier k entre 0 et p tel que f se factorise par φ_k . Notons $\delta_r : \Delta_q \rightarrow \Delta_{q+1}$ la r -ième face. Si $f'' = 0$, on a $f = \varphi_p \delta_{p+1} f'$. Si $f'' = 1$, on a $f = \varphi_0 \delta_0 f'$. Sinon, il existe l tel que $f''(l) = 0$ et $f''(l+1) = 1$ et on définit $\psi : T \rightarrow X_l$ de la manière suivante :

$$\psi(m) = \begin{cases} f'(m), & \text{si } 0 \leq m \leq l, \\ f'(m) + 1, & \text{si } l < m \leq q. \end{cases}$$

On a alors $f = \varphi_k \psi$ pour $k = f'(l)$.

Montrons maintenant la condition (b). Pour un entier k tel que $0 \leq k < p$, considérons $\chi'_k = 1_X$ et $\chi''_k : X \rightarrow \Delta_1$ l'unique morphisme qui envoie k sur 0 et $k+1$ sur 1. Soit $\chi_k = (\chi'_k, \chi''_k) : X \rightarrow X \times \Delta_1$. Le morphisme χ_k est clairement un monomorphisme. Son image F'_k est donc un préfaisceau représentable.

Montrons que $F'_k = G_k \cap F_{k+1}$. Soit $t = (t', t'') : T \rightarrow X \times \Delta_1$ un morphisme d'ensembles simpliciaux se factorisant par φ_{k+1} et par $\varphi_{k'}$ pour k' entre 0 et k . Le morphisme t se factorise alors par χ_k . Plus précisément, on a $t = \chi_k t'$. En effet, la première composante de cette égalité est claire et il suffit de démontrer que $t'' = \chi''_k t'$. Cette identité est équivalente aux deux suivantes : si $t'(m) \leq k$, alors $t''(m) = 0$; si $t'(m) > k$, alors $t''(m) = 1$. La première identité et la deuxième, sauf pour le cas $t'(m) = k+1$, résultent du fait que t se factorise par φ_{k+1} . Le cas $t'(m) = k+1$ de la deuxième identité résulte de la factorisation par $\varphi_{k'}$.

Réciproquement, soit $t : T \rightarrow X \times \Delta_1$ se factorisant par χ_k . Montrons que t se factorise par φ_k et φ_{k+1} . Pour cela, il suffit de montrer que χ_k se factorise par φ_k et φ_{k+1} . Pour ce faire, considérons $\psi'_k : X \rightarrow X_k$ la $(k+1)$ -ième face et $\psi''_k : X \rightarrow X_k$ la k -ième face. On a $\chi_k = \varphi_k \psi'_k$ et $\chi_k = \varphi_{k+1} \psi''_{k+1}$, ce qui conclut la démonstration. \square

7.2.5. Passons à l'asphéricité locale de D_1 . Soient X un arbre et $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ ses régions de dimension 0, classées dans l'ordre croissant. Fixons un entier k compris entre 0 et p . On désignera par X_k l'arbre obtenu en ajoutant à X une arête séparant la région α_k en deux régions $\alpha'_k < \alpha''_k$. Appelons β la région de dimension 1 associée à cette nouvelle arête. À un sous-arbre de X , on associe canoniquement un sous-arbre (non plein en général) de X_k . On définit ainsi une application i_k .

On dispose d'un morphisme $\varphi'_k : X_k \rightarrow X$ qui contracte l'arête issue de β . Plus précisément, φ'_k envoie $\alpha'_k, \alpha''_k, \beta$ sur α_k et toute autre région γ sur l'unique région δ

telle que $i_k(\delta) = \gamma$. Soit $\varphi_k'' : X_k \rightarrow D_1$ l'unique morphisme qui envoie α_k' sur 0 et α_k'' sur 1. On notera φ_k le morphisme $(\varphi_k', \varphi_k'') : X_k \rightarrow X \times D_1$ et on désignera par F_k le sous-préfaisceau image de φ_k .

On dispose également de morphismes $\psi_k' : X \rightarrow X_k$ et $\psi_k'' : X \rightarrow X_k$ définis de la manière suivante. Le morphisme ψ_k' envoie α_k sur α_k' , toute région γ telle qu'on ait $\alpha_k < \gamma < \alpha_{k+1}$ (c'est-à-dire sur la branche immédiatement à gauche de α_k) sur $\beta_{\Pi_{D_0}} i_k(\gamma)$ et toute autre région γ sur $i_k(\gamma)$. On définit ψ_k'' de manière symétrique en remplaçant α_k' par α_k'' et « droite » par « gauche » dans la définition de ψ_k' .

Pour k tel que $0 \leq k < p$, posons $\chi_k = (\chi_k', \chi_k'') : X \rightarrow X \times D_1$ où $\chi_k' = 1_X$ et χ_k'' est l'unique morphisme qui envoie α_k sur 0 et α_{k+1} sur 1. Le morphisme χ_k est clairement un monomorphisme. Son image F_k' est donc représentable.

Enfin, notons $p : \Theta \rightarrow \Delta$ le foncteur de troncation des arbres en dimension 1. Celui-ci envoie un objet ou une flèche de Θ désigné par une notation définie dans ce paragraphe, sur l'objet ou la flèche de Δ désigné par la même notation dans la preuve de la proposition 7.2.4.

Lemme 7.2.6. *Le morphisme φ_k' est hypercartésien (relativement au foncteur p).*

Démonstration. Soient $f : Y \rightarrow X$ un morphisme de Θ et $\psi : p(Y) \rightarrow p(X_k)$ un morphisme d'ensembles simpliciaux tel que $p(\varphi_k')\psi = p(f)$. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme $g : Y \rightarrow X_k$ de Θ tel que $p(g) = \psi$ et $\varphi_k'g = f$.

Appelons $\gamma_0, \dots, \gamma_q$ les régions de dimension 0 de Y classées dans l'ordre croissant. La relation $p(g) = \psi$ impose la valeur de g sur ces régions. Soit l l'unique entier (s'il existe) tel que $g_{\gamma_l} \leq \alpha_k'$ et $g_{\gamma_{l+1}} \geq \alpha_k''$. Alors, toute région γ telle que $\gamma_l \leq \gamma \leq \gamma_{l+1}$ (c'est-à-dire adjacente à la branche bordée par ces deux régions) doit être envoyée par g sur la « réunion » des sous-arbres $i_k(f_\gamma)$ et β , et tout autre région γ doit être envoyée sur $i_k(f_\gamma)$.

On vérifie facilement que g est bien un morphisme de Θ . □

Proposition 7.2.7. *Le préfaisceau D_1 sur Θ est localement sphérique.*

Démonstration. Nous allons montrer que pour k entre 0 et p , le préfaisceau F_k est représentable et que si on pose pour l entre 0 et p ,

$$G_l = \bigcup_{0 \leq k \leq l} F_k,$$

alors

- (a) on a $G_p = X \times D_1$ dans $\hat{\Theta}$;
- (b) pour k tel que $0 \leq k < p$, le préfaisceau $G_k \cap F_{k+1}$ est représentable.

Commençons par montrer que F_k est représentable pour k entre 0 et p . Il suffit pour cela de montrer que φ_k est un monomorphisme. Il s'agit donc de montrer que pour tout arbre T , si on a deux flèches $T \rightarrow X_k$ égalisées par φ_k , alors ces deux flèches sont égales. Puisque T est une limite inductive d'objets D_j et que les applications universelles $D_j \rightarrow T$ sont dans Θ_0 , il suffit de montrer que si on a deux morphismes $\alpha, \beta : D_j \rightarrow X_k$

dans Θ_0 égalisées par φ_k alors $\alpha = \beta$. Or α et β correspondent à des régions et les seules régions différentes de même dimension qui sont envoyées sur le même sous-arbre par φ'_k sont α'_k et α''_k . Mais φ''_k envoie ces deux régions sur des régions différentes et φ_k est donc un monomorphisme.

Montrons maintenant la condition (a). Soit T un arbre. Il s'agit de montrer que toute flèche $f = (f', f'') : T \rightarrow X \times D_1$ de Θ se factorise à travers l'un des φ_k . En vertu du résultat analogue pour les ensembles simpliciaux (voir la preuve de la proposition 7.2.4), il existe k entre 0 et p , et $\psi : p(T) \rightarrow p(X_k)$ tels que

$$p(\varphi'_k)\psi = p(f') \quad \text{et} \quad p(\varphi''_k)\psi = p(f'').$$

Par le lemme 7.2.6, il existe $g : T \rightarrow X_k$ tel que $\varphi'_k g = f'$. On a de plus $\varphi''_k g = f''$. En effet, cette relation est une égalité entre des flèches à valeurs dans D_1 et ces flèches correspondent sur les régions de dimension 0 puisque $p(\varphi''_k)\psi = p(f'')$.

Nous allons maintenant démontrer la condition (b). Il suffit de montrer que pour k tel que $0 \leq k < p$, l'image de χ_k est $G_k \cap F_{k+1}$.

Soit $t = (t', t'') : T \rightarrow X \times D_1$ un morphisme de $\hat{\Theta}$ se factorisant par F_{k+1} et $F_{k'}$ pour k' entre 0 et k . Alors t se factorise par χ_k . Plus précisément, on a $t = \chi_k t'$. La première projection de cette identité est claire et il suffit donc de montrer que $t'' = \chi''_k t'$. Mais on a $p(t'') = p(\chi''_k)p(t')$ (voir la preuve de la proposition 7.2.4). D'où l'identité recherchée car les deux membres sont à valeurs dans D_1 .

Réciproquement, soit $t = (t', t'') : T \rightarrow X \times D_1$ se factorisant par χ_k . Montrons que t se factorise par φ_k et φ_{k+1} . Pour cela, il suffit de montrer que χ_k se factorise par φ_k et φ_{k+1} . Or on a $\chi_k = \varphi_k \psi'_k$ et $\chi_k = \varphi_{k+1} \psi''_{k+1}$. En effet, la première projection de ces identités est claire et la deuxième résulte des égalités $p(\chi''_k) = p(\varphi''_k)p(\psi'_k)$ et $p(\chi''_k) = p(\varphi''_{k+1})p(\psi''_{k+1})$ que l'on a rencontrées dans la preuve de la proposition 7.2.4. \square

Théorème 7.2.8. *La catégorie Θ est une catégorie test.*

7.3 Les catégories Θ et $\tilde{\Theta}$ sont test strictes

7.3.1. Dans [15], les auteurs introduisent la technique des « décalages scindables » et l'utilisent pour démontrer que la catégorie Θ est test stricte. Leur démonstration est basée sur la description de Θ comme produit en couronnes itéré (voir [9]). La catégorie $\tilde{\Theta}$ ne s'obtenant pas comme un produit en couronnes itéré, leur preuve ne s'adapte pas. Dans cette section, nous donnons une preuve inspirée de [15] qui s'applique à Θ et à $\tilde{\Theta}$.

Soit A une petite catégorie. Un *décalage* \mathcal{D} sur A est la donnée d'un endofoncteur $D : A \rightarrow A$, d'un objet a_0 de A et de deux transformations naturelles

$$1_A \xrightarrow{\alpha} D \xleftarrow{\beta} a_0$$

(où a_0 désigne l'endofoncteur constant de A de valeur a_0). On notera $(A, a_0, D, \alpha, \beta)$ le décalage \mathcal{D} . Un *scindage* de \mathcal{D} est la donnée pour tout objet a de A , d'une rétraction $r_a : D(a) \rightarrow a$ de α_a (on ne demande pas la functorialité de r_a en a). Un décalage est dit *scindable* s'il admet un scindage.

Soient $\mathcal{D} = (A, a_0, D, \alpha, \beta)$ et $\mathcal{D}' = (B, b_0, E, \gamma, \delta)$ deux décalages. Un morphisme de décalages de \mathcal{D} vers \mathcal{D}' est un foncteur $u : A \rightarrow B$ tel que

$$uD = Eu, \quad u(a_0) = b_0, \quad u * \alpha = \gamma * u, \quad \text{et} \quad u * \beta = \delta * u.$$

Proposition 7.3.2. *Soit A une petite catégorie. Si A admet un décalage scindable, et si \hat{A} admet un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ tel que I soit asphérique, alors A est une catégorie test stricte.*

Démonstration. Voir la proposition 3.6 et le corollaire 3.7 de [15]. \square

Proposition 7.3.3. *Soit $u : A \rightarrow B$ un foncteur entre petites catégories. S'il existe un décalage \mathcal{D} sur A et un décalage scindable \mathcal{D}' sur B tels que le foncteur u induise un morphisme de décalages \mathcal{D} vers \mathcal{D}' , alors le foncteur u est asphérique.*

Démonstration. Voir la proposition 3.8 de [15]. \square

7.3.4. Nous allons maintenant construire des décalages sur Θ et $\tilde{\Theta}$. Les formules qui vont suivre sont inspirées par la définition du décalage sur Θ de [15]. Ainsi, dans le cas de Θ on retrouvera le même décalage.

Commençons par introduire quelques notations. Si C est une extension globulaire, on notera

$$\begin{aligned} \tilde{D}_n &= D_1 \amalg_{D_0} D_2 \amalg_{D_1} \cdots \amalg_{D_{n-1}} D_{n+1}, \quad n \geq 0, \\ \tilde{D}_{i,j} &= D_{i+1} \amalg_{D_i} D_{i+2} \amalg_{D_{i+1}} \cdots \amalg_{D_{j-1}} D_{j+1}, \quad 0 \leq i \leq j. \end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{0,n} &= \tilde{D}_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{D}_n &= \tilde{D}_{0,i} \amalg_{D_i} \tilde{D}_{i+1,n}, \quad 0 \leq i < n, \\ \tilde{D}_{i,j} &= \tilde{D}_{i,k} \amalg_{D_k} \tilde{D}_{k+1,j}, \quad i \leq k < j. \end{aligned}$$

Si

$$T = \begin{pmatrix} i_1 & & & & & & i_n \\ & i'_1 & & & & & \\ & & i'_2 & & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & i'_{n-1} & & \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

est un arbre et l est un entier entre 1 et n , on notera ε_l^T le morphisme canonique $D_{i_l} \rightarrow T$.

Si $T = \tilde{D}_i$ et l est un entier entre 1 et $i + 1$, on notera ε_l^i ou η_l^i le morphisme $\varepsilon_l^{\tilde{D}_i} : D_l \rightarrow \tilde{D}_i$.

Si $T = \tilde{D}_{i,j}$ et l est un entier entre 1 et $j - i + 1$, on notera $\varepsilon_l^{i,j}$ le morphisme $\varepsilon_l^{\tilde{D}_{i,j}} : D_{i+l} \rightarrow \tilde{D}_{i,j}$; si l est entre $i + 1$ et $j + 1$, on notera $\eta_l^{i,j}$ le morphisme $\varepsilon_{l-i}^{i,j} = \varepsilon_{l-i}^{\tilde{D}_{i,j}} : D_l \rightarrow \tilde{D}_{i,j}$. Pour $i = 0$ et $j = n$, on a $\varepsilon_l^{0,n} = \varepsilon_l^n = \eta_l^n = \eta_l^{0,n}$.

Si $T = D_i \amalg_{D_k} D_j$, on notera $\varepsilon_1^{i,k,j}$ le morphisme $\varepsilon_1^T : D_i \rightarrow T$ et $\varepsilon_2^{i,k,j}$ le morphisme $\varepsilon_2^T : D_j \rightarrow T$. Pour $i \geq 1$, on a $\varepsilon_1^{i-1,i+1} = \varepsilon_1^{i-1,i}$ et $\varepsilon_2^{i-1,i+1} = \varepsilon_2^{i-1,i}$.

Proposition 7.3.5. Soit $F : \mathbb{G} \rightarrow C$ une extension globulaire munie de morphismes

$$\nabla_i : D_i \rightarrow D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i, \quad i \geq 1,$$

tels que pour $i \geq 1$, on ait

$$\nabla_i \sigma_i = \varepsilon_2^{i-1} \sigma_i \quad \text{et} \quad \nabla_i \tau_i = \varepsilon_1^{i-1} \tau_i.$$

Alors les applications

$$\begin{aligned} D_i &\mapsto \tilde{D}_i = D_1 \amalg_{D_0} D_2 \amalg_{D_1} \cdots \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1}, \quad i \geq 0, \\ \sigma_i &\mapsto \tilde{\sigma}_i = \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} [(D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i], \quad i \geq 1, \\ \tau_i &\mapsto \tilde{\tau}_i = \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \varepsilon_1^{i-1, i}, \quad i \geq 1, \end{aligned}$$

définissent un foncteur $K : \mathbb{G} \rightarrow C$, et les applications

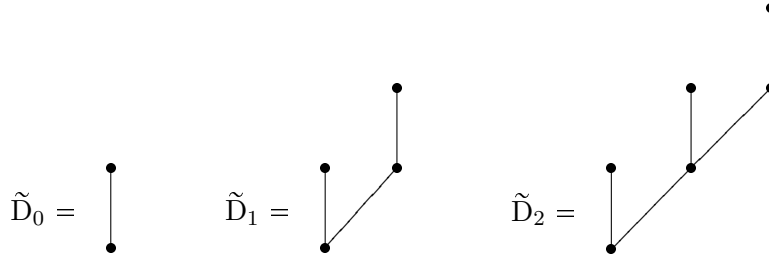
$$\begin{aligned} D_i &\mapsto \alpha_i = \varepsilon_{i+1}^i \sigma_{i+1} : D_i \rightarrow \tilde{D}_i, \quad i \geq 0, \\ D_i &\mapsto \beta_i = \varepsilon_1^i \tau_1 : D_0 \rightarrow \tilde{D}_i, \quad i \geq 0, \end{aligned}$$

définissent des transformations naturelles

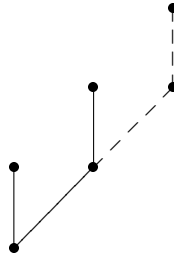
$$F \xrightarrow{\alpha} K \xleftarrow{\beta} D_0$$

(où D_0 désigne le foncteur $\mathbb{G} \rightarrow C$ constant de valeur D_0).

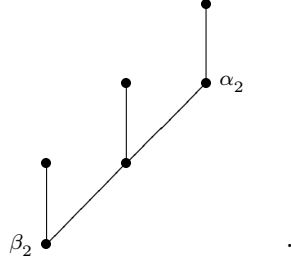
Remarque 7.3.6. Les objets \tilde{D}_n et les morphismes $\tilde{\tau}_i$, α_i et β_i vivent dans Θ_0 . On peut donc les représenter en termes d'arbres. On a par exemple



Le morphisme $\tilde{\sigma}_2$ est l'inclusion canonique de \tilde{D}_1 dans $\tilde{D}_2 = \tilde{D}_1 \amalg_{D_1} D_3$. On peut le représenter de la manière suivante :



Les morphisme α_2 et β_2 correspondent aux deux régions suivantes de \tilde{D}_2 :



Il pourra être utile au lecteur de garder cette représentation en tête pour suivre certains des calculs du reste de ce chapitre.

Démonstration de la proposition 7.3.5. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{n+1}\tilde{\sigma}_n &= \left(\tilde{D}_{n-1} \amalg_{D_{n-1}} \left[(D_{n+1} \amalg_{D_n} \tau_{n+2}) \nabla_{n+1} \right] \right) \left(\tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \left[(D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \nabla_n \right] \right) \\
&= \tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \left[(D_n \amalg_{D_{n-1}} D_{n+1} \amalg_{D_n} \tau_{n+2}) (D_n \amalg_{D_{n-1}} \nabla_{n+1}) (D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \nabla_n \right] \\
&= \tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \\
&\quad \left[(D_n \amalg_{D_{n-1}} D_{n+1} \amalg_{D_n} \tau_{n+2}) (D_n \amalg_{D_{n-1}} \varepsilon_1^{n+1, n+1}) (D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \nabla_n \right] \\
&= \tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \left[(D_n \amalg_{D_{n-1}} \varepsilon_1^{n, n+1}) (D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \nabla_n \right] \\
&= (\tilde{D}_{n-1} \amalg_{D_{n-1}} \varepsilon_1^{n, n+1}) (\tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \left[(D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \nabla_n \right]) \\
&= \tilde{\tau}_{n+1} \tilde{\sigma}_n
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{n+1}\tilde{\tau}_n &= \left(\tilde{D}_{n-1} \amalg_{D_{n-1}} \left[(D_{n+1} \amalg_{D_n} \tau_{n+2}) \nabla_{n+1} \right] \right) \left(\tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \varepsilon_1^{n-1, n} \right) \\
&= \tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \varepsilon_1^{n-1, n+1} \\
&= (\tilde{D}_{n-1} \amalg_{D_{n-1}} \varepsilon_1^{n, n+1}) (\tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \varepsilon_1^{n-1, n}) \\
&= \tilde{\tau}_{n+1} \tilde{\tau}_n,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que K est bien un foncteur.

Montrons maintenant la naturalité de α . Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_n \alpha_{n-1} &= \left(\tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \left[(D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \nabla_n \right] \right) \varepsilon_n^{n-1} \sigma_n \\
&= (\varepsilon_n^n, \varepsilon_{n+1}^n) \left[(D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \nabla_n \sigma_n \right] \\
&= (\varepsilon_n^n, \varepsilon_{n+1}^n) \left[(D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \varepsilon_2^{n, n-1} \sigma_n \right] \\
&= \varepsilon_{n+1}^n \tau_{n+1} \sigma_n \\
&= \varepsilon_{n+1}^n \sigma_{n+1} \sigma_n \\
&= \alpha_n \sigma_n
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_n \alpha_{n-1} &= (\tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \varepsilon_1^{n-1,n}) \varepsilon_n^{n-1} \sigma_n \\
&= \varepsilon_n^n \sigma_n \\
&= \varepsilon_{n+1}^n \tau_{n+1} \tau_n \\
&= \varepsilon_{n+1}^n \sigma_{n+1} \tau_n \\
&= \alpha_n \tau_n.
\end{aligned}$$

Enfin, montrons la naturalité de β . Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_n \beta_{n-1} &= (\tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} [(D_n \amalg_{D_{n-1}} \tau_{n+1}) \nabla_n]) \varepsilon_1^{n-1} \tau_1 \\
&= \varepsilon_1^n \tau_1 \\
&= \beta_n
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_n \beta_{n-1} &= (\tilde{D}_{n-2} \amalg_{D_{n-2}} \varepsilon_1^{n-1,n}) \varepsilon_1^{n-1} \tau_1 \\
&= \varepsilon_1^n \tau_1 \\
&= \beta_n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

7.3.7. Nous allons maintenant montrer que le foncteur K défini dans la proposition précédente fait de C une extension globulaire. Introduisons quelques notations. Pour i et j deux entiers tels que $i \geq j$, on notera

$$\tilde{\sigma}_i^j : \tilde{D}_i \rightarrow \tilde{D}_j = \tilde{\sigma}_j \dots \tilde{\sigma}_{i+2} \tilde{\sigma}_{i+1} \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}_i^j : \tilde{D}_i \rightarrow \tilde{D}_j = \tilde{\tau}_j \dots \tilde{\tau}_{i+2} \tilde{\tau}_{i+1}.$$

Remarquons que $\tilde{\tau}_i^j$ est le morphisme canonique $\tilde{D}_i \rightarrow \tilde{D}_i \amalg_{D_i} \tilde{D}_{i+1,j}$.

Il s'agit de montrer que si on a un tableau des dimensions

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ & i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_{k-1} \end{pmatrix},$$

la somme amalgamée itérée

$$(\tilde{D}_{i_1}, \tilde{\sigma}_{i'_1}^{i_1}) \amalg_{\tilde{D}_{i'_1}} (\tilde{\tau}_{i'_1}^{i_2}, \tilde{D}_{i_2}, \tilde{\sigma}_{i'_2}^{i_2}) \amalg_{\tilde{D}_{i'_2}} \cdots \amalg_{\tilde{D}_{i'_{k-1}}} (\tilde{\tau}_{i'_{k-1}}^{i_k}, \tilde{D}_{i_k})$$

existe. Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 7.3.8. *Soient \mathcal{C} une catégorie, $f : X \rightarrow Y$, $f_x : A \rightarrow X$, $f_z : A \rightarrow Z$ des morphismes de \mathcal{C} . Posons $f_y : A \rightarrow Y = f f_x$. Si les sommes amalgamées $(X, f_x) \amalg_A (f_z, Z)$ et $(Y, f_y) \amalg_A (f_z, Z)$ existent, alors la somme amalgamée $(Y, f) \amalg_X (X \amalg_A Z)$ existe et le carré*

$$\begin{array}{ccc}
X & \longrightarrow & X \amalg_A Z \\
f \downarrow & & \downarrow f \amalg_A Z \\
Y & \longrightarrow & Y \amalg_A Z
\end{array}$$

est cocartésien.

Démonstration. Il s'agit de voir que le morphisme canonique de copréfaisceaux

$$\alpha : Y \amalg_X (X \amalg_A Z) \rightarrow Y \amalg_A Z$$

est un isomorphisme. Soit T un objet de \mathcal{C} . On a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(Y \amalg_X (X \amalg_A Z), T) &= \{h_x : X \rightarrow T, h_y : Y \rightarrow T, h_z : Z \rightarrow T; \\ &\quad h_x = h_y f, h_x f_x = h_y f_y\}, \\ \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(Y \amalg_A Z, T) &= \{h_y : Y \rightarrow T, h_z : Z \rightarrow T; \\ &\quad h_y f_y = h_x f_x\}, \end{aligned}$$

et l'application

$$\alpha_T : \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(Y \amalg_A Z, T) \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(Y \amalg_X (X \amalg_A Z), T)$$

envoie (h_y, h_z) sur $(h_y f, h_y, h_z)$. Il est clair que cette application est une bijection, d'où le résultat. \square

7.3.9. Commençons par montrer l'existence des sommes globulaires binaires. Soient donc i, j et k trois entiers positifs tels que $i > k$ et $j > k$. Montrons l'existence de la somme globulaire $\tilde{D}_i \amalg_{\tilde{D}_k} \tilde{D}_j$. Nous allons montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_k & \longrightarrow & \tilde{D}_j = \tilde{D}_k \amalg_{D_k} \tilde{D}_{k+1,j} \\ \tilde{\sigma}_k^i \downarrow & & \downarrow \tilde{\sigma}_k^i \amalg_{D_k} \tilde{D}_{k+1,j} \\ \tilde{D}_i & \longrightarrow & \tilde{D}_i \amalg_{D_k} \tilde{D}_{k+1,j} \end{array}$$

est cocartésien en appliquant le lemme précédent pour

$$Y = \tilde{D}_i, \quad X = \tilde{D}_k, \quad Z = \tilde{D}_{k+1,j}, \quad A = D_k, \quad f = \tilde{\sigma}_k^i, \quad f_x = \varepsilon_{k+1}^k \sigma_{k+1} \quad \text{et} \quad f_z = \varepsilon_1^{k+1,j} \tau_k^{k+2}.$$

Pour cela, puisque la somme $\tilde{D}_k \amalg_{D_k} \tilde{D}_{k+1,j}$ est globulaire, il suffit de montrer l'existence de la somme amalgamée $\tilde{D}_i \amalg_{D_k} \tilde{D}_{k+1,j}$. Le morphisme de D_k vers \tilde{D}_i est $f_y = f f_x = \tilde{\sigma}_k^i \varepsilon_{k+1}^k \sigma_{k+1}$. Or, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_k^i \varepsilon_{k+1}^k \sigma_{k+1} &= \tilde{\sigma}_{k+1}^i \tilde{\sigma}_{k+1} \varepsilon_{k+1}^k \sigma_{k+1} \\ &= \tilde{\sigma}_{k+1}^i \left(\tilde{D}_{k-1} \amalg_{D_{k-1}} \left[(D_{k+1} \amalg_{D_k} \tau_{k+2}) \nabla_{k+1} \right] \right) \varepsilon_{k+1}^k \sigma_{k+1} \\ &= \tilde{\sigma}_{k+1}^i (\varepsilon_{k+1}^{k+1}, \varepsilon_{k+2}^{k+1}) (D_{k+1} \amalg_{D_k} \tau_{k+2}) \nabla_{k+1} \sigma_{k+1} \\ &= \tilde{\sigma}_{k+1}^i (\varepsilon_{k+1}^{k+1}, \varepsilon_{k+2}^{k+1}) (D_{k+1} \amalg_{D_k} \tau_{k+2}) \varepsilon_2^{k+1} \tau_k^{k+1} \sigma_{k+1} \\ &= \tilde{\sigma}_{k+1}^i \varepsilon_{k+2}^{k+1} \tau_{k+2} \sigma_{k+1} \\ &= \tilde{\sigma}_{k+1}^i \varepsilon_{k+2}^{k+1} \sigma_k^{k+2}. \end{aligned}$$

On montre ainsi par récurrence qu'on a $\tilde{\sigma}_k^i \varepsilon_{k+1}^k \sigma_{k+1} = \varepsilon_{i+1}^i \sigma_k^{i+1}$. La somme amalgamée $\tilde{D}_i \amalg_{D_k} \tilde{D}_{k+1, j}$ est donc une somme globulaire au sens de l'extension globulaire $F : \mathbb{G} \rightarrow C$ et elle existe donc.

Passons au cas général.

Proposition 7.3.10. *Soit*

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_{k-1} \end{pmatrix}$$

un tableau des dimensions. La somme globulaire $\tilde{D}_{i_1} \amalg_{\tilde{D}_{i'_1}} \cdots \amalg_{\tilde{D}_{i'_{k-1}}} \tilde{D}_{i_k}$ existe et est canoniquement isomorphe à la somme globulaire

$$\tilde{D}_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} \tilde{D}_{i'_1+1, i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \tilde{D}_{i'_2+1, i_3} \amalg_{D_{i'_3}} \cdots \amalg_{D_{i'_{k-1}}} \tilde{D}_{i'_{k-1}+1, i_k}.$$

En particulier, le foncteur $K : \mathbb{G} \rightarrow C$ fait de C une extension globulaire.

Démonstration. On a déjà montré le cas $k = 2$. Montrons le cas général par récurrence sur k . Supposons le résultat connu pour $k = n - 1$ et montrons-le pour $k = n$. Soit donc

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

un tableau des dimensions. Il s'agit de montrer l'existence de la somme globulaire

$$\tilde{D}_{i_1} \amalg_{\tilde{D}_{i'_1}} \cdots \amalg_{\tilde{D}_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i_n}.$$

Or par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{i_2} \amalg_{\tilde{D}_{i'_2}} \cdots \amalg_{\tilde{D}_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i_n} &= \tilde{D}_{i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \tilde{D}_{i'_2+1, i_3} \amalg_{D_{i'_3}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i'_{n-1}+1, i_n} \\ &= \tilde{D}_{i'_1} \amalg_{D_{i'_1}} \left(\tilde{D}_{i'_1+1, i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \tilde{D}_{i'_2+1, i_3} \amalg_{D_{i'_3}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i'_{n-1}+1, i_n} \right). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_{i'_1} & \longrightarrow & \tilde{D}_{i'_1} \amalg_{D_{i'_1}} \left(\tilde{D}_{i'_1+1, i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i'_{n-1}+1, i_n} \right) \\ \tilde{\sigma}_{i'_1}^{i_1} \downarrow & & \downarrow \tilde{\sigma}_{i'_1}^{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} 1 \\ \tilde{D}_{i_1} & \longrightarrow & \tilde{D}_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} \left(\tilde{D}_{i'_1+1, i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i'_{n-1}+1, i_n} \right) \end{array}$$

est cocartésien, en appliquant le lemme 7.3.8 pour

$$Y = \tilde{D}_{i_1}, \quad X = \tilde{D}_{i'_1}, \quad Z = \tilde{D}_{i'_1+1, i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i'_{n-1}+1, i_n} \quad \text{et} \quad A = D_{i'_1}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que la somme amalgamée

$$\tilde{D}_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} \left(\tilde{D}_{i'_1+1, i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i'_{n-1}+1, i_n} \right)$$

existe. Or, nous avons montré dans le paragraphe précédent que le morphisme de $D_{i'_1}$ vers \tilde{D}_{i_1} est $\varepsilon_{i_1+1}^{i_1} \sigma_{i'_1}^{i_1+1}$. Cette somme amalgamée est donc une somme globulaire au sens de l'extension globulaire $F : \mathbb{G} \rightarrow C$ et elle existe donc. \square

Proposition 7.3.11. *Soit C une extension globulaire catégorique et $K : \mathbb{G} \rightarrow C$ l'extension globulaire construite ci-dessus. Alors les morphismes*

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_l^i &= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \mu_{l+3}^{l,i} \nabla_l^{l+3}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}), \quad 0 \leq l < i, \\ \tilde{\kappa}_i &= \tilde{D}_i \amalg_{D_i} \kappa_{i+2}^i, \quad i \geq 0, \end{aligned}$$

où

$$\mu_j^{l,i} = \eta_j^{l+1,i} \amalg_{D_l} \eta_j^{l+1,i} : D_j \amalg_{D_l} D_j \rightarrow \tilde{D}_{l+1,i} \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i}, \quad 0 \leq l < i, \quad l+2 \leq j \leq i+1,$$

sont bien définis dans C et font de $K : \mathbb{G} \rightarrow C$ une extension globulaire catégorique.

Si de plus, C est une extension globulaire groupoïdale, alors les morphismes

$$\tilde{\Omega}_l^i = \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1} \right), \quad 0 \leq l < i,$$

sont bien définis dans C et font de $K : \mathbb{G} \rightarrow C$ une extension globulaire groupoïdale.

Démonstration. Soit donc C une extension globulaire catégorique. Commençons par montrer que les morphismes $\tilde{\nabla}_l^i$ sont bien définis. Il s'agit de vérifier les identités

$$\mu_k^{l,i} \nabla_l^k \sigma_k = \mu_{k+1}^{l,i} \nabla_l^{k+1} \tau_{k-1}^{k+1}, \quad l+2 \leq k \leq i,$$

et l'identité

$$\varepsilon_1^T \tau_l^{l+2} = (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \mu_{l+3}^{l,i} \nabla_l^{l+3}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \varepsilon_1^{l+1,i} \tau_l^{l+2},$$

où $T = \tilde{D}_{l+1,i} \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i}$. Pour la première, on a

$$\begin{aligned} \mu_k^{l,i} \nabla_l^k \sigma_k &= \mu_k^{l,i} (\sigma_k \amalg_{D_l} \sigma_k) \nabla_l^{k-1} \\ &= \mu_{k+1}^{l,i} (\tau_{k-1}^{k+1} \amalg_{D_l} \tau_{k-1}^{k+1}) \nabla_l^{k-1} \\ &= \mu_{k+1}^{l,i} \nabla_l^{k+1} \tau_{k-1}^{k+1}, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de l'identité $\eta_k^{l+1,i} \sigma_k = \eta_{k+1}^{l+1,i} \tau_{k-1}^{k+1}$. Pour la seconde, on a

$$\begin{aligned} &(\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \mu_{l+3}^{l,i} \nabla_l^{l+3}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \varepsilon_1^{l+1,i} \tau_l^{l+2} \\ &= \mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2} \tau_l^{l+2} \\ &= \mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2} \tau_{l+2} \tau_{l+1} \\ &= \mu_{l+2}^{l,i} (\tau_{l+2} \amalg_{D_l} \tau_{l+2}) \varepsilon_1^{l+1,i} \tau_{l+1} \\ &= \mu_{l+2}^{l,i} \varepsilon_1^{l+2,i} \tau_l^{l+2} \\ &= \varepsilon_1^T \tau_l^{l+2}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que les morphismes $\tilde{\nabla}_l^i$ ont les sources et buts globulaires attendus. Soit $i \geq 1$. On pose

$$\tilde{\nabla}_i = \tilde{\nabla}_{i-1}^i = \tilde{D}_{i-1} \amalg_{D_{i-1}} \nabla_{i-1}^{i+1}.$$

Notons $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2$ le deux morphismes canoniques $\tilde{D}_i \rightarrow \tilde{D}_i \amalg_{\tilde{D}_{i-1}} \tilde{D}_i$. On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_i \tilde{\sigma}_i &= (\tilde{D}_{i-1} \amalg_{D_{i-1}} \nabla_{i-1}^{i+1}) \left[\tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \right] \\ &= \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \left[(D_i \amalg_{D_{i-1}} \nabla_{i-1}^{i+1}) (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \right] \\ &= \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \left[(D_i \amalg_{D_{i-1}} (\tau_{i+1} \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i) \nabla_i \right] \\ &= \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \left[(D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1} \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) (D_i \amalg_{D_{i-1}} \nabla_i) \nabla_i \right] \\ &= \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \left[(D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1} \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) (\nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_i) \nabla_i \right] \\ &\quad (\text{par l'axiome d'associativité (CC1) dans } C) \\ &= \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \left[((D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \right] \\ &= \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \left[((D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1}) (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \right] \\ &= \left[\tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} ((D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1}) \right] \left[\tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \right] \\ &= (\tilde{\sigma}_i \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1}) \tilde{\sigma}_i \\ &= \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\sigma}_i, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_i \tilde{\tau}_i &= (\tilde{D}_{i-1} \amalg_{D_{i-1}} \nabla_{i-1}^{i+1}) (\tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \varepsilon_1^{i-1, i}) \\ &= \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \left[(D_i \amalg_{D_{i-1}} \nabla_{i-1}^{i+1}) \varepsilon_1^{i-1, i} \right] \\ &= \tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \varepsilon_1^U \\ &\quad (\text{où } U = D_i \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1} \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1}) \\ &= \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\tau}_i. \end{aligned}$$

Pour $i-1 > l \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_l^i \tilde{\sigma}_i &= \left[\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l, i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{l+1}^{l, i} \nabla_l^{i+1}) \right] \left[\tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \right] \\ &= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} \left(\mu_{l+2}^{l, i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{l-1}^{l, i} \nabla_l^{i-1}, (\mu_i^{l, i} \nabla_l^i, \mu_{i+1}^{l, i} \nabla_l^{i+1} \tau_{i+1}) \nabla_i \right) \\ &= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} \left(\mu_{l+2}^{l, i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{l-1}^{l, i} \nabla_l^{i-1}, (\mu_i^{l, i} \nabla_l^i, \mu_{i+1}^{l, i} (\tau_{i+1} \amalg_{D_l} \tau_{i+1}) \nabla_l^i) \nabla_i \right). \end{aligned}$$

Or si on note ε_i pour i entre 1 et 4, les morphismes canoniques associés à la somme globulaire $D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i \amalg_{D_l} D_i \amalg_{D_{i-1}} D_i$, on a

$$\begin{aligned}
& (\mu_i^{l,i} \nabla_l^i, \mu_{i+1}^{l,i} (\tau_{i+1} \amalg_{D_l} \tau_{i+1}) \nabla_l^i) \nabla_i \\
&= (\gamma \amalg_{D_l} \gamma) (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1} \amalg_{D_l} D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) ((\varepsilon_1, \varepsilon_3) \nabla_l^i, (\varepsilon_2, \varepsilon_4) \nabla_l^i) \nabla_i \\
&\quad (\text{où } \gamma \text{ désigne le morphisme canonique} \\
&\quad\quad D_i \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1} \rightarrow \tilde{D}_{l+1,i} = \tilde{D}_{l+1,i-2} \amalg_{D_{i-2}} (D_i \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1})) \\
&= (\gamma \amalg_{D_l} \gamma) (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1} \amalg_{D_l} D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) (\nabla_i \amalg_{D_l} \nabla_i) \nabla_l^i \\
&\quad (\text{par l'axiome de l'échange (CC4) dans } C).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_l^i \tilde{\sigma}_i &= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} \left(\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i-1}^{l,i} \nabla_l^{i-1}, \right. \\
&\quad \left. (\gamma \amalg_{D_l} \gamma) (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1} \amalg_{D_l} D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) (\nabla_i \amalg_{D_l} \nabla_i) \nabla_l^i \right) \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} \left((\delta \amalg_{D_l} \delta) \mu_{l+2}^{l,i-1} \nabla_l^{l+2}, \dots, (\delta \amalg_{D_l} \delta) \mu_{i-1}^{l,i-1} \nabla_l^{i-1}, \right. \\
&\quad \left. (\gamma \amalg_{D_l} \gamma) (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1} \amalg_{D_l} D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) (\nabla_i \amalg_{D_l} \nabla_i) \nabla_l^i \right) \\
&\quad (\text{où } \delta \text{ désigne le morphisme canonique} \\
&\quad\quad \tilde{D}_{l+1,i-1} \rightarrow \tilde{D}_{l+1,i} = \tilde{D}_{l+1,i-1} \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1}) \\
&= [\tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i} \amalg_{D_{i-2}} (D_i \amalg_{D_{i-1}} \tau_{i+1}) \nabla_i] \\
&\quad \left[\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i-1} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_i^{l,i-1} \nabla_l^i) \right] \\
&= (\tilde{\sigma}_i \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{\sigma}_i) \tilde{\nabla}_l^{i-1},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_l^i \tilde{\tau}_i &= \left[\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right] (\tilde{D}_{i-2} \amalg_{D_{i-2}} \varepsilon_1^{i-1,i}) \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_i^{l,i} \nabla_l^i) \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} [(\delta \amalg_{D_l} \delta) \mu_{l+2}^{l,i-1} \nabla_l^{l+2}, \dots, (\delta \amalg_{D_l} \delta) \mu_i^{l,i-1} \nabla_l^i] \\
&\quad (\text{où } \delta \text{ désigne le morphisme canonique} \\
&\quad\quad \tilde{D}_{l+1,i-1} \rightarrow \tilde{D}_{l+1,i} = \tilde{D}_{l+1,i-1} \amalg_{D_{i-1}} D_{i+1}) \\
&= (\tilde{D}_l \amalg_{D_l} \delta \amalg_{D_l} \delta) \left[\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i-1} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_i^{l,i-1} \nabla_l^i) \right] \\
&= (\tilde{\tau}_i \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{\tau}_i) \tilde{\nabla}_l^{i-1}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'axiome d'associativité (CC1). On a

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_l^i \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{D}_i) \tilde{\nabla}_l^i &= (\tilde{\nabla}_l^i \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i}) \tilde{\nabla}_l^i \\
&= \left[\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i} \right] \\
&\quad \left[\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right] \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} \left[\left((\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i} \right) \right. \\
&\quad \left. (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right].
\end{aligned}$$

Or pour h entre $l+2$ et $i+1$, on a

$$\begin{aligned}
&\left[(\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i} \right] \mu_h^{l,i} \nabla_l^h \\
&= (\mu_h^{l,i} \nabla_l^h \amalg_{D_l} \eta_h^{l+1,i}) \nabla_l^h \\
&= (\eta_h^{l+1,i} \amalg_{D_l} \eta_h^{l+1,i} \amalg_{D_l} \eta_h^{l+1,i}) (\nabla_l^h \amalg_{D_l} D_h) \nabla_l^h \\
&= (\eta_h^{l+1,i} \amalg_{D_l} \eta_h^{l+1,i} \amalg_{D_l} \eta_h^{l+1,i}) (D_h \amalg_{D_l} \nabla_l^h) \nabla_l^h \\
&\quad (\text{par l'axiome d'associativité (CC1) dans } C) \\
&= (\eta_h^{l+1,i} \amalg_{D_l} \mu_h^{l,i} \nabla_l^h) \nabla_l^h \\
&= \left[\tilde{D}_{l+1,i} \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right] \mu_h^{l,i} \nabla_l^h.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_l^i \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{D}_i) \tilde{\nabla}_l^i &= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} \left[\left((\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i} \right) \right. \\
&\quad \left. (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right] \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} \left[\left(\tilde{D}_{l+1,i} \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right) \right. \\
&\quad \left. (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right] \\
&= \left[\tilde{D}_i \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right] \\
&\quad \left[\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right] \\
&= (\tilde{D}_i \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{\nabla}_l^i) \tilde{\nabla}_l^i,
\end{aligned}$$

ce qui établit (CC1).

Démontrons maintenant l'axiome de l'échange (CC2). Soient l , l' et n trois entiers tels que $0 \leq l < l' < n$. La formulation de cet axiome fait intervenir l'arbre

$$T = \tilde{D}_n \amalg_{\tilde{D}_{l'}} \tilde{D}_n \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{D}_n \amalg_{\tilde{D}_{l'}} \tilde{D}_n = \tilde{D}_n \amalg_{D_{l'}} \tilde{D}_{l'+1,n} \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,n} \amalg_{D_{l'}} \tilde{D}_{l'+1,n}.$$

On notera $\tilde{\varepsilon}_i$ (respectivement ε_i) pour i entre 1 et 4, les applications canoniques qui correspondent à l'expression de T comme la somme amalgamée itérée de gauche (respectivement de droite) ci-dessus.

Pour i entre 1 et 4, j entre 1 et $n+1$ si $i = 1$, et j entre $l'+2$ et $n+1$ sinon, on notera $\eta_{i,j} : D_j \rightarrow T$ le morphisme canonique qui correspond à la i -ième occurrence de D_j (de la gauche vers la droite) dans la décomposition canonique de T en somme globulaire. On a

$$\begin{aligned}
& ((\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_3) \tilde{\nabla}_l^n, (\tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_4) \tilde{\nabla}_l^n) \tilde{\nabla}_{l'}^n \\
&= \left((\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_3) [\tilde{D}_l \amalg_{\tilde{D}_l} (\mu_{l+2}^{l,n} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{n+1}^{l,n} \nabla_l^{n+1})], \right. \\
&\quad \left. (\tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_4) [\tilde{D}_l \amalg_{\tilde{D}_l} (\mu_{l+2}^{l,n} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{n+1}^{l,n} \nabla_l^{n+1})] \right) \tilde{\nabla}_{l'}^n \\
&= \left(\eta_{1,1}, \dots, \eta_{1,l+1}, (\eta_{1,l+2}, \eta_{3,l+2}) \nabla_l^{l+2}, \dots, (\eta_{1,n+1}, \eta_{3,n+1}) \nabla_l^{n+1}, \right. \\
&\quad \left. (\eta_{2,l+2}, \eta_{4,l+2}) \nabla_l^{l+2}, \dots, (\eta_{2,n+1}, \eta_{4,n+1}) \nabla_l^{n+1} \right) \\
&\quad \left(\tilde{D}_{l'} \amalg_{D_{l'}} (\mu_{l'+2}^{l',n} \nabla_{l'}^{l'+2}, \dots, \mu_{n+1}^{l',n} \nabla_{l'}^{n+1}) \right) \\
&= \left(\eta_{1,1}, \dots, \eta_{1,l+1}, (\eta_{1,l+2}, \eta_{3,l+2}) \nabla_l^{l+2}, \dots, (\eta_{1,l'+1}, \eta_{3,l'+1}) \nabla_l^{l'+1}, \right. \\
&\quad \left. ((\eta_{1,l'+2}, \eta_{3,l'+2}) \nabla_l^{l'+2}, (\eta_{2,l'+2}, \eta_{4,l'+2}) \nabla_l^{l'+2}) \nabla_{l'}^{l'+2}, \dots, \right. \\
&\quad \left. ((\eta_{1,n+1}, \eta_{3,n+1}) \nabla_l^{n+1}, (\eta_{2,n+1}, \eta_{4,n+1}) \nabla_l^{n+1}) \nabla_{l'}^{n+1} \right) \\
&= \left(\eta_{1,1}, \dots, \eta_{1,l+1}, (\eta_{1,l+2}, \eta_{3,l+2}) \nabla_l^{l+2}, \dots, (\eta_{1,l'+1}, \eta_{3,l'+1}) \nabla_l^{l'+1}, \right. \\
&\quad \left. (\eta_{1,l'+2}, \eta_{2,l'+2}, \eta_{3,l'+2}, \eta_{4,l'+2}) (\nabla_{l'}^{l'+2} \amalg_{D_l} \nabla_{l'}^{l'+2}) \nabla_l^{l'+2}, \dots, \right. \\
&\quad \left. (\eta_{1,n+1}, \eta_{2,n+1}, \eta_{3,n+1}, \eta_{4,n+1}) (\nabla_{l'}^{n+1} \amalg_{D_l} \nabla_{l'}^{n+1}) \nabla_l^{n+1} \right) \\
&\quad (\text{par l'axiome de l'échange (CC2) dans } C) \\
&= \left(\eta_{1,1}, \dots, \eta_{1,l'+1}, (\eta_{1,l'+2}, \eta_{2,l'+2}) \nabla_{l'}^{l'+2}, \dots, (\eta_{1,n+1}, \eta_{2,n+1}) \nabla_{l'}^{n+1}, \right. \\
&\quad \left. \eta_{3,l+2}, \dots, \eta_{3,l'+1}, (\eta_{3,l'+2}, \eta_{4,l'+2}) \nabla_{l'}^{l'+2}, \dots, (\eta_{3,n+1}, \eta_{4,n+1}) \nabla_{l'}^{n+1} \right) \\
&\quad \left(\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,n} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{n+1}^{l,n} \nabla_l^{n+1}) \right) \\
&= \left[\left(\tilde{D}_{l'} \amalg_{D_{l'}} (\mu_{l'+2}^{l',n} \nabla_{l'}^{l'+2}, \dots, \mu_{n+1}^{l',n} \nabla_{l'}^{n+1}) \right) \amalg_{D_l} \right. \\
&\quad \left. \left(\tilde{D}_{l+1,l'} \amalg_{D_{l'}} (\mu_{l'+2}^{l',n} \nabla_{l'}^{l'+2}, \dots, \mu_{n+1}^{l',n} \nabla_{l'}^{n+1}) \right) \right] \\
&\quad \left[\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,n} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{n+1}^{l,n} \nabla_l^{n+1}) \right] \\
&= (\tilde{\nabla}_{l'}^n \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{\nabla}_{l'}^n) \tilde{\nabla}_l^n,
\end{aligned}$$

ce qui établit l'axiome (CC2).

Passons aux morphismes $\tilde{\kappa}_i$. Le fait que ces morphismes soient bien définis résulte de l'identité $\kappa_{i+2}^i \mathcal{T}_i^{i+2} = 1_{D_i}$ dans C pour $i \geq 0$. Vérifions qu'ils ont bien les sources et

buts globulaires attendus. Pour $i \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa}_i \tilde{\sigma}_{i+1} &= (\tilde{D}_i \amalg_{D_i} \kappa_{i+2}^i) (\tilde{D}_{i-1} \amalg_{D_{i-1}} [(D_{i+1} \amalg_{D_i} \tau_{i+2}) \nabla_{i+1}]) \\
&= \tilde{D}_{i-1} \amalg_{D_{i-1}} [(D_{i+1} \amalg_{D_i} \kappa_i \kappa_{i+1}) (D_{i+1} \amalg_{D_i} \tau_{i+2}) \nabla_{i+1}] \\
&= \tilde{D}_{i-1} \amalg_{D_{i-1}} [(D_{i+1} \amalg_{D_i} \kappa_i) \nabla_{i+1}] \\
&= \tilde{D}_{i-1} \amalg_{D_{i-1}} 1_{D_{i+1}} \\
&\quad (\text{par l'axiome des unités (CC3) dans } C) \\
&= 1_{\tilde{D}_i},
\end{aligned}$$

et la relation

$$\tilde{\kappa}_i \tilde{\tau}_{i+1} = 1_{\tilde{D}_i}$$

est immédiate.

Montrons maintenant l'axiome des unités (CC3). On montre facilement par récurrence qu'on a

$$\tilde{\kappa}_i^j = \tilde{D}_j \amalg_{D_j} \kappa_{j+2}^j \amalg_{\kappa_{j+1}^j} \cdots \amalg_{\kappa_{i-1}^j} \kappa_{i+1}^j.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&(\tilde{D}_i \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{\kappa}_i^l) \tilde{\nabla}_l^i \\
&= [\tilde{D}_i \amalg_{D_l} \kappa_{l+2}^l \amalg_{\kappa_{l+1}^l} \cdots \amalg_{\kappa_{i-1}^l} \kappa_{i+1}^l] [\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1})] \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\varepsilon_{l+2}^i (D_{l+2} \amalg_{D_l} \kappa_{l+2}^l) \nabla_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i+1}^i (D_{i+1} \amalg_{D_l} \kappa_{i+1}^l) \nabla_l^{i+1}) \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\varepsilon_{l+2}^i, \dots, \varepsilon_{i+1}^i) \\
&= 1_{\tilde{D}_i},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&(\tilde{\kappa}_i^l \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{D}_i) \tilde{\nabla}_l^i \\
&= [\tilde{D}_l \amalg_{D_l} \kappa_{l+2}^l \amalg_{\kappa_{l+1}^l} \cdots \amalg_{\kappa_{i-1}^l} \kappa_{i+1}^l \amalg_{D_l} \tilde{D}_{l+1,i}] [\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1})] \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\varepsilon_{l+2}^i (\kappa_{l+2}^l \amalg_{D_l} D_{l+2}) \nabla_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i+1}^i (\kappa_{i+1}^l \amalg_{D_l} D_{i+1}) \nabla_l^{i+1}) \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\varepsilon_{l+2}^i, \dots, \varepsilon_{i+1}^i) \\
&\quad (\text{par l'axiome des unités (CC3) dans } C) \\
&= 1_{\tilde{D}_i},
\end{aligned}$$

ce qui établit l'axiome (CC3).

Démontrons maintenant l'axiome de functorialité des unités (CC4). On a

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\kappa}_i \amalg_{\tilde{D}_l} \tilde{\kappa}_i) \tilde{\nabla}_l^{i+1} \\
&= [(\tilde{D}_i \amalg_{D_i} \kappa_{i+2}^i) \amalg_{D_l} (\tilde{D}_{l+1,i} \amalg_{D_i} \kappa_{i+2}^i)] [\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i+1} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+2}^{l,i+1} \nabla_l^{i+2})] \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}, \mu_{i+1}^{l,i} (\sigma_{i+1} \amalg_{D_l} \sigma_{i+1}) (\kappa_{i+2}^i \amalg_{D_l} \kappa_{i+2}^i) \nabla_l^{i+2}) \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}, \mu_{i+1}^{l,i} (\sigma_{i+1} \amalg_{D_l} \sigma_{i+1}) \nabla_l^i \kappa_{i+2}^i) \\
&\quad (\text{par l'axiome de functorialité des unités (CC4) dans } C) \\
&= \tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1} \sigma_{i+1} \kappa_{i+2}^i) \\
&= [\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1} \sigma_{i+1})] [\tilde{D}_i \amalg_{D_i} \kappa_{i+2}^i] \\
&= [\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1})] [\tilde{D}_i \amalg_{D_i} \kappa_{i+2}^i] \\
&= \tilde{\nabla}_l^i \tilde{\kappa}_i,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la première partie de la proposition.

Supposons maintenant que C soit une extension globulaire groupoidale. Montrons que les morphismes $\tilde{\Omega}_l^i$ sont bien définis. Il s'agit de vérifier qu'on a

$$\varepsilon_l^i \sigma_l = (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1} \tau_{l-1}^{l+1}, \quad (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1} \sigma_{l+1} = \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2} \tau_l^{l+2},$$

et, pour tout j tel que $l+2 \leq j \leq i$,

$$\varepsilon_j^i \Omega_l^j \sigma_j = \varepsilon_{j+1}^i \Omega_l^{j+1} \tau_{j-1}^{j+1}.$$

Pour la première identité, on a

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1} \tau_{l-1}^{l+1} &= (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1} \tau_{l+1} \tau_l \\
&= (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \varepsilon_1^{l+1} \tau_{l+1}^{l+1} \tau_{l+1} \tau_l \\
&= \varepsilon_{l+1}^i \tau_{l-1}^{l+1} \\
&= \varepsilon_l^i \sigma_l.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1} \sigma_{l+1} &= (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \varepsilon_2^{l+1} \tau_{l+1}^{l+1} \sigma_{l+1} \\
&= \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2} \sigma_{l+1} \\
&= \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2} \Omega_{l+1} \tau_{l+1} \\
&= \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2} \tau_{l+2} \tau_{l+1} \\
&= \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2} \tau_l^{l+2}.
\end{aligned}$$

Enfin, la troisième résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j^i \Omega_l^j \sigma_j &= \varepsilon_j^i \sigma_j \Omega_l^{j-1} = \varepsilon_{j+1}^i \tau_{j+1} \tau_j \Omega_l^{j-1} \\
&= \varepsilon_{j+1}^i \tau_{j+1} \Omega_l^j \tau_j = \varepsilon_{j+1}^i \Omega_l^{j+1} \tau_{j+1} \tau_j \\
&= \varepsilon_{j+1}^i \Omega_l^{j+1} \tau_{j-1}^{j+1}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que les morphismes $\tilde{\Omega}_l^i$ ont bien les sources et buts globulaires attendus. Soit $i \geq 1$. On pose

$$\tilde{\Omega}_i = \tilde{\Omega}_{i-1}^i = \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_{i-1}^{i+1} \right).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_i \tilde{\sigma}_i &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_{i-1}^{i+1} \right) \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i \right) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, \left((\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_{i-1}^{i+1} \tau_{i+1} \right) \nabla_i \right) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, \left((\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1} \Omega_i \right) \nabla_i \right) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, \left(\varepsilon_i^i, (\varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1} \Omega_i) \nabla_i \right) \nabla_i \right) \\ &\quad (\text{par l'axiome d'associativité (CC1) dans } C) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1} \tau_i \kappa_{i-1}) \nabla_i \right) \\ &\quad (\text{par l'axiome des inverses (CG1) dans } C) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, \varepsilon_i^i \right) \\ &\quad (\text{par l'axiome de functorialité des unités (CC4) dans } C) \\ &= \tilde{\tau}_i, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_i \tilde{\tau}_i &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_{i-1}^{i+1} \right) (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_i^i) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i \right) \\ &= \tilde{\sigma}_i. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant les sources et buts globulaires des Ω_l^i pour $l < i - 1$. Soit donc $i \geq 2$ et l entre 0 et $i - 2$. On a

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_l^i \tilde{\sigma}_i &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1} \right) \\ &\quad \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_{l+1} \right) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i-1}^i \Omega_l^{i-1}, (\varepsilon_i^i \Omega_l^i, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1} \tau_{i+1}) \nabla_i \right). \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} (\varepsilon_i^i \Omega_l^i, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1} \tau_{i+1}) \nabla_i &= (\varepsilon_i^i \Omega_l^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1} \Omega_l^i) \nabla_i \\ &= (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i \Omega_l^i, \end{aligned}$$

la deuxième égalité résultant de la propriété de functorialité des inverses (CG2) dans C .
D'où

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_l^i \tilde{\sigma}_i &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i-1}^i \Omega_l^{i-1}, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i \Omega_l^i \right) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i-1}^i, (\varepsilon_i^i, \varepsilon_{i+1}^i \tau_{i+1}) \nabla_i \right) \\ &\quad \left(\varepsilon_1^{i-1}, \dots, \varepsilon_l^{i-1}, (\varepsilon_{l+1}^{i-1}, \varepsilon_{l+2}^{i-1} \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^{i-1} \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_i^{i-1} \Omega_l^i \right) \\ &= \tilde{\sigma}_i \tilde{\Omega}_l^{i-1}.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_l^i \tilde{\tau}_i &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1} \right) (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_i^i) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_i^i \Omega_l^i \right) \\ &= (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_i^i) \left(\varepsilon_1^{i-1}, \dots, \varepsilon_l^{i-1}, (\varepsilon_{l+1}^{i-1}, \varepsilon_{l+2}^{i-1} \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^{i-1} \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_i^{i-1} \Omega_l^i \right) \\ &= \tilde{\tau}_i \tilde{\Omega}_l^{i-1},\end{aligned}$$

ce qui achève nos calculs de sources et de buts globulaires. Montrons maintenant l'axiome des inverses (CG1). Pour $i > l \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}(1_{\tilde{D}_i}, \tilde{\Omega}_l^i) \tilde{\nabla}_l^i &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{i+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1} \right) \left(\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{l+1}^i, (\varepsilon_{l+2}^i, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}) \nabla_l^{l+2}, \dots, (\varepsilon_{i+1}^i, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1}) \nabla_l^{i+1} \right) \\ &= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_l^{l+2} \kappa_{l+2}^l, \dots, \varepsilon_{i+1}^i \tau_l^{i+1} \kappa_{i+1}^l \right) \\ &\quad (\text{par l'axiome des inverses (CG1) dans } C) \\ &= (\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_{l+1}^i) (\varepsilon_1^l, \dots, \varepsilon_{l+1}^l, \varepsilon_{l+1}^l \sigma_l^{l+1} \kappa_{l+2}^l, \dots, \varepsilon_{l+1}^l \sigma_l^{l+1} \kappa_{i+1}^l) \\ &= \tilde{\tau}_l^i \tilde{\kappa}_i^l,\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant de l'identité

$$\varepsilon_{l+1}^i \sigma_l^{l+1} = \varepsilon_j^i \tau_l^j,$$

pour j entre $l + 2$ et $i + 1$. Toujours pour $i > l \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
& (\tilde{\Omega}_l^i, 1_{\tilde{D}_i}) \tilde{\nabla}_l^i \\
&= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \dots, \varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1}, \varepsilon_{l+2}^i, \dots, \varepsilon_{i+1}^i \right) \\
&\quad \left(\tilde{D}_l \amalg_{D_l} (\mu_{l+2}^{l,i} \nabla_l^{l+2}, \dots, \mu_{i+1}^{l,i} \nabla_l^{i+1}) \right) \\
&= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, (\varepsilon_{l+2}^i \Omega_l^{l+2}, \varepsilon_{l+2}^i) \nabla_l^{l+2}, \dots, (\varepsilon_{i+1}^i \Omega_l^{i+1}, \varepsilon_{i+1}^i) \nabla_l^{i+1} \right) \\
&= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1}, \varepsilon_{l+2}^i \sigma_l^{l+2} \kappa_{l+2}^l, \dots, \varepsilon_{i+1}^i \sigma_l^{i+1} \kappa_{i+1}^l \right) \\
&\quad \text{(par l'axiome des inverses (CG1) dans } C \text{)} \\
&= \left(\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_l^i, (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1} \right) \left(\varepsilon_1^l, \dots, \varepsilon_{l+1}^l, \varepsilon_{l+1}^l \sigma_{l+1} \kappa_{l+2}^l, \dots, \varepsilon_{l+1}^l \sigma_{l+1} \kappa_{i+1}^l \right) \\
&= \tilde{\sigma}_l^i \tilde{\kappa}_i^l,
\end{aligned}$$

où pour établir l'avant-dernière égalité, il suffit d'établir l'identité suivante :

$$(\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1} \sigma_{l+1} \kappa_j^l = \varepsilon_j^i \sigma_l^j \kappa_j^l$$

pour j entre $l + 2$ et $i + 1$. Or, on a

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \nabla_{l+1} \sigma_{l+1} &= (\varepsilon_{l+1}^i, \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2}) \varepsilon_2^{l+1} l^{l+1} \sigma_{l+1} \\
&= \varepsilon_{l+2}^i \tau_{l+2} \sigma_{l+1} \\
&= \varepsilon_{l+2}^i \sigma_l^{l+2} \\
&= \varepsilon_j^i \sigma_l^j,
\end{aligned}$$

ce qui achève la vérification de l'axiome (CG1) et la démonstration de la proposition. \square

7.3.12. Appliquons le résultat précédent à Θ . Puisque les foncteurs $F : \mathbb{G} \rightarrow \Theta$ et $K : \mathbb{G} \rightarrow \Theta$ font chacun de Θ une extension globulaire catégorique, la propriété universelle de Θ (proposition 3.2.3) entraîne que ceux-ci se prolongent en des foncteurs globulaires

$$F' : \Theta \rightarrow \Theta \quad \text{et} \quad K' : \Theta \rightarrow \Theta,$$

et que les transformations naturelles α et β se prolongent en des transformations naturelles

$$F' \xrightarrow{\alpha'} K' \xleftarrow{\beta'} D_0.$$

Le foncteur F' est évidemment l'identité et on a donc construit un décalage

$$1_{\Theta} \xrightarrow{\alpha'} K' \xleftarrow{\beta'} D_0$$

sur Θ . On notera \mathcal{D}_{Θ} ce décalage.

De même, les foncteurs $F : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\Theta}$ et $K : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\Theta}$ font chacun de $\tilde{\Theta}$ une extension globulaire groupoïdale et on déduit de la propriété universelle de $\tilde{\Theta}$ (proposition 3.4.3) l'existence d'un décalage

$$1_{\tilde{\Theta}} \xrightarrow{\alpha''} K'' \xleftarrow{\beta''} D_0$$

sur $\tilde{\Theta}$. On notera $\mathcal{D}_{\tilde{\Theta}}$ ce décalage.

Il est immédiat que le foncteur canonique $\Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$ induit un morphisme de décalages de \mathcal{D}_{Θ} vers $\mathcal{D}_{\tilde{\Theta}}$.

Proposition 7.3.13. *Les décalages \mathcal{D}_{Θ} et $\mathcal{D}_{\tilde{\Theta}}$ sont scindables.*

Démonstration. Il s'agit de définir pour tout arbre S , une rétraction $r_S : \tilde{S} \rightarrow S$ dans Θ (respectivement dans $\tilde{\Theta}$) du morphisme α'_S (respectivement α''_S). Nous allons donner une construction uniforme de ces deux retractions. Plaçons-nous dans Θ (respectivement dans $\tilde{\Theta}$) et notons $\tilde{\alpha}_S$ le morphisme α'_S (respectivement le morphisme α''_S).

Commençons par définir r_S pour $S = D_i$. On pose

$$r_{D_i} = (\tau_0^i \kappa_0, \dots, \tau_{i-1}^i \kappa_{i-1}, \kappa_i).$$

On vérifie immédiatement que r_{D_i} est bien défini. On notera r_i ce morphisme. On a

$$r_i \tilde{\alpha}_{D_i} = r_i \varepsilon_{i+1}^i \sigma_{i+1} = \kappa_i \sigma_{i+1} = 1_{D_i}.$$

L'application $D_i \mapsto r_i$ n'est pas fonctorielle. Par exemple, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D}_0 & \xrightarrow{r_0} & D_0 \\ \tilde{\sigma}_1 \downarrow & & \downarrow \sigma_1 \\ \tilde{D}_1 & \xrightarrow{r_1} & D_1 \end{array}$$

n'est pas commutatif. Ainsi, on ne peut pas étendre r à tous les arbres de manière formelle et on doit donc définir directement r_S pour tout arbre S .

Soit donc

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$$

un arbre. Il s'agit de définir un morphisme

$$r_S = \tilde{D}_{i_1} \amalg_{\tilde{D}_{i'_1}} \cdots \amalg_{\tilde{D}_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i_n} \rightarrow D_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} D_{i_n}.$$

Rappelons qu'on a

$$\tilde{D}_{i_1} \amalg_{\tilde{D}_{i'_1}} \cdots \amalg_{\tilde{D}_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i_n} = \tilde{D}_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} \tilde{D}_{i'_1+1, i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \tilde{D}_{i'_{n-1}+1, i_n}.$$

On pose

$$r_S = r_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} r_{i'_1+1, i_2} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} r_{i'_{n-1}+1, i_n}$$

où $r_{i,j}$ est le composé du morphisme canonique $\tilde{D}_{i,j} \rightarrow \tilde{D}_j$ et du morphisme $r_j : \tilde{D}_j \rightarrow D_j$. Pour montrer que r est bien défini, il suffit d'établir, pour p entre 1 et $n-1$, les identités

$$r_{i'_{p-1}+1, i_p} \eta_{i_p+1}^{i'_{p-1}+1, i_p} \sigma_{i'_p}^{i_p+1} = \sigma_{i'_p}^{i_p} \quad \text{et} \quad r_{i'_p+1, i_{p+1}} \eta_{i'_p+2}^{i'_p+1, i_{p+1}} \tau_{i'_p}^{i'_p+2} = \tau_{i'_p}^{i_p+1},$$

où on a posé $i'_{-1} = -1$. Or

$$r_{i'_{p-1}+1, i_p} \eta_{i_p+1}^{i'_{p-1}+1, i_p} \sigma_{i'_p}^{i_p+1} = \kappa_{i_p} \sigma_{i'_p}^{i_p+1} = \sigma_{i'_p}^{i_p}$$

et

$$r_{i'_p+1, i_{p+1}} \eta_{i'_p+2}^{i'_p+1, i_{p+1}} \tau_{i'_p}^{i'_p+2} = \sigma_{i'_p+1}^{i_p+1} \kappa_{i'_p+1} \tau_{i'_p}^{i'_p+2} = \tau_{i'_p}^{i_p+1}.$$

Il nous reste à montrer que r_S est bien une rétraction de $\tilde{\alpha}_S$. Rappelons que $\tilde{\alpha}$ a été défini en étendant α par naturalité. On a donc

$$\tilde{\alpha}_S = \eta_{i_1+1}^{i_1} \sigma_{i_1+1} \amalg_{D_{i'_1}} \eta_{i_2+1}^{i_1+1, i_2} \sigma_{i_2+1} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \eta_{i_n+1}^{i_{n-1}+1, i_n} \sigma_{i_n+1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} r_S \tilde{\alpha}_S &= r_{i_1} \eta_{i_1+1}^{i_1} \sigma_{i_1+1} \amalg_{D_{i'_1}} r_{i'_1+1, i_2} \eta_{i_2+1}^{i_1+1, i_2} \sigma_{i_2+1} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} r_{i'_{n-1}+1, i_n} \eta_{i_n+1}^{i_{n-1}+1, i_n} \sigma_{i_n+1} \\ &= \kappa_{i_1} \sigma_{i_1+1} \amalg_{D_{i'_1}} \kappa_{i_2} \sigma_{i_2+1} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} \kappa_{i_n} \sigma_{i_n+1} \\ &= 1_{D_{i_1}} \amalg_{D_{i'_1}} 1_{D_{i_2}} \amalg_{D_{i'_2}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} 1_{D_{i_n+1}} \\ &= 1_S. \end{aligned}$$

□

Proposition 7.3.14. *Le segment (D_1, σ_1, τ_1) est un segment séparant de $\widehat{\tilde{\Theta}}$.*

Démonstration. Rappelons que la catégorie $\tilde{\Theta}$ est équivalente à la sous-catégorie pleine des ∞ -groupoïdes stricts dont les objets sont les ∞ -groupoïdes libres sur un schéma de composition (voir le paragraphe 3.4.5).

Il s'agit de montrer que l'unique flèche $F \rightarrow D_0$ de $\widehat{\tilde{\Theta}}$ égalisée par σ_1 et τ_1 est $\emptyset \rightarrow D_0$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de morphisme $f : S \rightarrow D_0$ dans $\tilde{\Theta}$, égalisée par σ_1 et τ_1 . Supposons qu'un tel f existe.

Le ∞ -groupoïde libre engendré par D_0 est la ∞ -catégorie finale. Ainsi les morphismes $D_0 \rightarrow S$ dans $\tilde{\Theta}$ correspondent aux objets du ∞ -groupoïde libre engendré par S . En particulier, il existe un morphisme $\alpha : D_0 \rightarrow S$ et quitte à considérer $f\alpha$, on peut supposer que $S = D_0$. Or le ∞ -groupoïde libre engendré par D_0 a un unique objet et il existe donc un unique morphisme $D_0 \rightarrow D_0$ dans $\tilde{\Theta}$ qui n'est autre que l'identité. D'où $\sigma_1 = \tau_1$. Mais ces deux morphismes correspondent à deux objets différents du ∞ -groupoïde libre engendré par D_1 . Contradiction. □

Théorème 7.3.15. *Les catégories Θ et $\tilde{\Theta}$ sont des catégories test strictes.*

Démonstration. Ces deux catégories admettent chacune, un segment séparant $(I, \partial_0, \partial_1)$ avec I asphérique (proposition 7.2.2 et proposition précédente), ainsi qu'un décalage scindable (proposition 7.3.13). Le théorème résulte donc de la proposition 7.3.2. \square

Corollaire 7.3.16. *Les localisateurs $(\hat{\Theta}, \mathcal{W}_{\hat{\Theta}})$ et $(\hat{\tilde{\Theta}}, \mathcal{W}_{\hat{\tilde{\Theta}}})$ sont chacun munis d'une structure de catégorie de modèles, à engendrement cofibrant, propre, dont les cofibrations sont les monomorphismes. De plus, les équivalences faibles de ces catégories de modèles sont stables par produit binaire.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème précédent et du théorème 7.1.7. \square

Théorème 7.3.17. *Le foncteur canonique $\Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$ est asphérique.*

Démonstration. On a vu dans le paragraphe 7.3.12 que le foncteur $\Theta \rightarrow \tilde{\Theta}$ induit un morphisme de décalages de \mathcal{D}_{Θ} vers $\mathcal{D}_{\tilde{\Theta}}$. Par ailleurs, le décalage $\mathcal{D}_{\tilde{\Theta}}$ est scindable par la proposition 7.3.13. Le théorème résulte donc de la proposition 7.3.3. \square

Bibliographie

- [1] J. ADÁMEK & J. ROSICKÝ – *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189, Cambridge University Press, 1994.
- [2] J. C. BAEZ & J. DOLAN – « Higher-dimensional algebra. III. n -categories and the algebra of opetopes », *Adv. Math.* **135** (1998), no. 2, p. 145–206.
- [3] M. A. BATANIN – « Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n -categories », *Adv. Math.* **136** (1998), no. 1, p. 39–103.
- [4] — , « On the Penon method of weakening algebraic structures », *J. Pure Appl. Algebra* **172** (2002), no. 1, p. 1–23.
- [5] M. A. BATANIN & R. STREET – « The universal property of the multitude of trees », *J. Pure Appl. Algebra* **154** (2000), no. 1-3, p. 3–13.
- [6] C. BERGER – « Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic 3-type of space », in *Higher homotopy structures in topology and mathematical physics*, Contemp. Math., vol. 227, Amer. Math. Soc., 1999, p. 49–66.
- [7] — , « Théories homogènes et ω -catégories », Notes, 1999.
- [8] — , « A cellular nerve for higher categories », *Adv. Math.* **169** (2002), no. 1, p. 118–175.
- [9] — , « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », *Adv. Math.* **213** (2007), no. 1, p. 230–270.
- [10] F. BORCEUX – *Handbook of categorical algebra. 2*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, 1994.
- [11] D. BOURN – « Another denormalization theorem for abelian chain complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **66** (1990), no. 3, p. 229–249.
- [12] E. CHENG – « Monad interleaving: a construction of the operad for Leinster’s weak ω -categories », *J. Pure Appl. Algebra* **214** (2010), no. 6, p. 809–821.
- [13] D.-C. CISINSKI – *Les préfaisceaux comme modèles des types d’homotopie*, Astérisque, no. 308, Soc. Math. France, 2006.
- [14] — , « Batanin higher groupoids and homotopy types », in *Categories in algebra, geometry and mathematical physics*, Contemp. Math., vol. 431, Amer. Math. Soc., 2007, p. 171–186.

- [15] D.-C. CISINSKI & G. MALTSINIOTIS – « La catégorie Θ de Joyal est test », Preprint, 2010.
- [16] P. GABRIEL & M. ZISMAN – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 35, Springer-Verlag, 1967.
- [17] A. GROTHENDIECK – « Pursuing stacks », Manuscrit, 1983.
- [18] A. GROTHENDIECK, M. ARTIN & J.-L. VERDIER – *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972–1973.
- [19] C. HERMIDA, M. MAKKAI & J. POWER – « On weak higher dimensional categories. I. 1 », *J. Pure Appl. Algebra* **154** (2000), no. 1-3, p. 221–246.
- [20] — , « On weak higher-dimensional categories. I. 2 », *J. Pure Appl. Algebra* **157** (2001), no. 2-3, p. 247–277.
- [21] — , « On weak higher-dimensional categories. I. 3 », *J. Pure Appl. Algebra* **166** (2002), no. 1-2, p. 83–104.
- [22] L. ILLUSIE – *Complexe cotangent et déformations. II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 283, Springer-Verlag, 1972.
- [23] A. JOYAL – « Disks, duality and Θ -categories », Preprint, 1997.
- [24] S. KANSANGIAN, G. METERE & E. VITALE – « Weak inverses for strict n -categories », Preprint, 2009.
- [25] M. M. KAPRANOV & V. A. VOEVODSKY – « ∞ -groupoids and homotopy types », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **32** (1991), no. 1, p. 29–46.
- [26] J. W. KLOP – « Term rewriting systems », in *Handbook of logic in computer science*, Vol. 2, Handb. Log. Comput. Sci., vol. 2, Oxford Univ. Press, 1992, p. 1–116.
- [27] Y. LAFONT, F. MÉTAYER & K. WORYTKIEWICZ – « A folk model structure on omega-cat », *Adv. Math.* (2010), A paraître.
- [28] T. LEINSTER – « A survey of definitions of n -category », *Theory Appl. Categ.* **10** (2002), p. 1–70.
- [29] — , *Higher operads, higher categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 298, Cambridge University Press, 2004.
- [30] — , « Operads in higher-dimensional category theory », *Theory Appl. Categ.* **12** (2004), p. 73–194.
- [31] M. MAKKAI & M. ZAWADOWSKI – « Duality for simple ω -categories and disks », *Theory Appl. Categ.* **8** (2001), p. 114–243.
- [32] G. MALTSINIOTIS – *La théorie de l'homotopie de Grothendieck*, Astérisque, no. 301, Soc. Math. France, 2005.
- [33] — , « Infini groupoides non stricts, d'après Grothendieck », Preprint, 2007.
- [34] — , « Infini catégories non strictes, une nouvelle définition », Preprint, 2007.
- [35] J. MILNOR – « The geometric realization of a semi-simplicial complex », *Ann. of Math. (2)* **65** (1957), p. 357–362.

- [36] J. PENON – « Approche polygraphique des ∞ -categories non strictes », *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég.* **40** (1999), no. 1, p. 31–80.
- [37] C. SIMPSON – « Homotopy types of strict 3-groupoids », arXiv :math/9810059v1 [math.CT], 1998.
- [38] — , « Homotopy theory of higher categories », arXiv :1001.4071v1 [math.CT], Livre à paraître, 2010.
- [39] R. STREET – « The algebra of oriented simplexes », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), no. 3, p. 283–335.
- [40] — , « Weak omega-categories », in *Diagrammatic morphisms and applications*, Contemp. Math., vol. 318, Amer. Math. Soc., 2003, p. 207–213.
- [41] Z. TAMSAMANI – « Sur des notions de n -catégorie et n -groupoïde non strictes *via* des ensembles multi-simpliciaux », *K-Theory* **16** (1999), no. 1, p. 51–99.
- [42] M. WEBER – « Familial 2-functors and parametric right adjoints », *Theory Appl. Categ.* **18** (2007), p. 665–732.

Index des notations

$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ i'_1 & \dots & i'_{n-1} \end{pmatrix}$, 2.1.1	$\eta_l^i, \eta_l^{i,j}$, 7.3.4
$\begin{pmatrix} X_1 & \dots & X_n \\ z'_1 & \dots & z'_{n-1} \end{pmatrix}$, 2.5.1	Θ , 3.2.2
(T_α, f_α) , 3.3.2	$\tilde{\Theta}$, 3.4.2
$(T_{(S',i)}, f_{(S',i)})$, 3.3.4	Θ_0 , 2.2.2
$*_j^i$, 1.1.2	Θ_{BL} , 6.7.14
\leq (ordre sur les régions), 2.3.16	Θ_M, Θ_α , 6.5.5
\sim_n , 1.2.1	κ_i, κ_i^j , 3.1.1, 3.3.7
$ \cdot $, 1.3.2	$\tilde{\kappa}_i$, 7.3.11
$h : f \rightarrow g$ (n -flèche), 1.1.1	$\mu_l^{i,j}$, 7.3.11
$\partial T, \partial_i T$, 2.3.6	$\pi_0(G)$, 1.2.1, 4.3.4
∇_i, ∇_j^i , 3.1.1, 3.3.7	$\pi_n(G, x), \pi_n(G, f), \pi_n(G, f, g)$, 1.2.1, 4.3.4
$\tilde{\nabla}_j^i$, 7.3.11	$\pi_n(X, f), \pi_n(X, f, g)$, 4.4.8
$n\text{-Cat}$, 1.1.2	$\varpi_n(G)$, 1.2.1, 4.3.1
$n\text{-Grp}$, 1.1.2	$\varpi_n(X)$, 4.4.8
$\infty\text{-Cat}$, 1.1.2	$\Pi_F(X, C)$, 4.4.5
$\infty\text{-Cat}(C)$, 2.1.2	σ_i, σ_i^j , 1.1.1, 2.3.15
$\infty\text{-Grph}_{\text{glob}}(C)$, 2.1.2	σ_i^T , 2.3.13
$\infty\text{-Grp}$, 1.1.2	σ_Z^X , 2.5.1
$\infty\text{-Grp}(\text{Ab}), \infty\text{-Grp}(\text{Ab})_{\geq 2}$, 1.4.1	$\tilde{\sigma}_i$, 7.3.5
$\infty\text{-Grp}(C)$, 2.1.2	$\tilde{\sigma}_i^j$, 7.3.7
$\infty\text{-Grp}_{\geq k}$, 1.4.1	σ_i , 4.4.1
$\infty\text{-Grpf}_C$, 4.1.8	τ_i, τ_i^j , 1.1.1, 2.3.15
$\infty\text{-PCat}$, 1.1.2	τ_i^T , 2.3.13
$\infty\text{-PCat}(C)$, 2.1.2	τ_Z^X , 2.5.1
$\infty\text{-PGrp}$, 1.1.2	$\tilde{\tau}_i$, 7.3.5
$\infty\text{-PGrp}(C)$, 2.1.2	$\tilde{\tau}_i^j$, 7.3.7
α , 7.3.5	τ_i , 4.4.1
α', α'' , 7.3.12	ω , 6.3.8
β , 7.3.5	Ω_i, Ω_j^i , 3.1.2
β', β'' , 7.3.12	$\tilde{\Omega}_j^i$, 7.3.11
Δ , 1.3.2	$A[n]$, 1.4.9
$\varepsilon_l^i, \varepsilon_l^{i,j}$, 7.3.4	Ab , 1.4.1
$\varepsilon_1^{i,k^j}, \varepsilon_2^{i,k^j}$, 7.3.4	Bin , 6.7.1
	C_∞ , 4.1.3

- C_{alg} , 2.7.4
 $C_{\geq k}(\mathcal{A})$, 1.3.2
 $C[R(A)]$, 4.1.1
 Cat , 1.3.2
 $Comp$, 6.7.1
 CW , 1.3.2
 CW_n , 1.3.7
 D_i , 1.1.1, 2.3.15, 4.4.3
 $D_{i_1} \amalg_{D_{i'_1}} \cdots \amalg_{D_{i'_{n-1}}} D_{i_n}$, 2.1.1
 $\tilde{D}_n, \tilde{D}_{i,j}$, 7.3.4
 \mathbf{D}_i , 4.4.1
 $D_{\geq k}(\mathcal{A})$, 1.3.4
 $\mathcal{D}_\Theta, \mathcal{D}_{\tilde{\Theta}}$, 7.3.12
 $f(\alpha)$, 3.3.2
 $f(S')$, $f(S', i)$, 3.3.4
 $f_{\text{glob}}, f_{\text{alg}}$, 2.7.4
 $\text{Fl}_{C_{\text{alg}}}, \text{Fl}_{C_{\text{alg}}}^G$, 6.2.2
 $\text{Fl}'_{C_{\text{alg}}}(S), \text{Fl}'_{C_{\text{alg}}}^G(S)$, 6.2.2
 F_S , 2.1.1, 2.3.20
 G_C , 6.6.2
 \overline{G}_n , 1.2.1, 4.3.1
 \mathbb{G}_n, \mathbb{G} , 1.1.1
 $\text{Glob}(C)$, 2.6.1
 H_M , 6.6.4
 $\text{Ho}(A)$, 7.1.1
 $\text{Ho}(C), \text{Ho}_{\mathcal{W}}(C)$, 1.3.3
 $\text{Hom}_{\text{glob}}(C, D)$, 2.1.1
 Hot , 1.3.4
 Hot_n , 1.3.7
 i_A, i_A^* , 7.1.1
 I_k , 2.1.1
 $\text{Im}(f)$, 3.3.4
 k_i, k_i^j , 1.1.2
 $\mathcal{K}(E, 0), \mathcal{K}(G, 1), \mathcal{K}(A, n)$, 1.2.4
 $\text{Kl}(M), \text{Kl}'(M)$, 6.1.1
 L_C , 6.3.3
 L_M , 6.1.1
 M , 6.3.4
 $M\text{-Alg}$, 6.1.1
 M_C, M_F , 6.3.3
 $\text{Mod}(C), \text{Mod}(C, D)$, 2.1.1
 N , 1.3.2
 N_M , 6.6.4
 s_i, s_i^j , 1.1.1
 S^i , 4.4.3, 6.7.1
 \mathbf{S}^i , 4.4.3
 t_i, t_i^j , 1.1.1
 T , 6.5.7
 \mathcal{T} , 2.3.2
 Top , 1.3.2
 U_C , 6.3.1
 U_M , 6.1.1
 w_j^i , 1.1.2
 $\mathcal{W}_{\hat{A}}$, 7.1.1
 X_n , 1.1.1
 $X_1 \amalg_{Y_1} \cdots \amalg_{Y_{n-1}} X_n$, 2.5.1
 $X[-i]$, 2.5.1

Index terminologique

- $*_j^i$ -inverse, 1.1.2
- ω -collection, 6.4.4
- ω -collection cohérente, 6.7.1
- ω -collection contractile, 6.7.1
- ω -opéade, 6.4.4
- n -catégorie stricte, 1.1.2
- n -cellule d'un ensemble globulaire, 1.1.1
- n -flèche d'un ensemble globulaire, 1.1.1
- n -flèche faiblement inversible, 1.5.1
- n -flèches faiblement homotopes, 1.5.1
- n -flèches homotopes, 1.2.1
- n -flèches parallèles, 1.1.1
- n -groupeïde strict, 1.1.2
- n -type (d'homotopie), 1.3.7
- n -type associé à un type d'homotopie, 1.3.7
- ∞ -catégorie k -suspendue, 1.4.1
- ∞ -catégorie (faible) de type C , 4.1.8
- ∞ -catégorie de Batanin, 6.7.2
- ∞ -catégorie de Batanin-Leinster, 6.7.2
- ∞ -catégorie stricte, 1.1.2
- ∞ -catégorie stricte dans une catégorie, 2.1.2
- ∞ -graphe, 1.1.1
- ∞ -groupeïde 0-connexe, 1.2.1
- ∞ -groupeïde (faible) de type C , 4.1.8
- ∞ -groupeïde connexe, 1.2.1
- ∞ -groupeïde d'Eilenberg-Mac Lane, 1.2.4
- ∞ -groupeïde fondamental, 4.4.5
- ∞ -groupeïde quasi-strict, 1.5.1
- ∞ -groupeïde simplement connexe, 1.2.1
- ∞ -groupeïde strict, 1.1.2
- ∞ -groupeïde strict dans une catégorie, 2.1.2
- ∞ -précatégorie, 1.1.2
- ∞ -précatégorie dans une catégorie, 2.1.2
- ∞ -prégroupeïde, 1.1.2
- ∞ -prégroupeïde dans une catégorie, 2.1.2
- arbre k -suspendu, 2.5.1
- arbre (planaire fini), 2.3.2
- bord d'un arbre, 2.3.6
- but d'une n -flèche, 1.1.1
- but globulaire, 2.1.1
- carré admissible, 6.7.1
- carré de cohérence admissible, 6.7.1
- carré d'opération admissible, 6.7.1
- catégorie asphérique, 7.1.1
- catégorie cartésienne, 6.4.1
- catégorie homotopique, 1.3.4
- catégorie test, 7.1.1
- catégorie test faible, 7.1.1
- catégorie test locale, 7.1.1
- catégorie test stricte, 7.1.1
- cohérateur, 4.1.3
- cohérateur canonique, 4.1.4
- cohérateur canonique strict, 4.1.4
- cohérateur de Batanin-Leinster, 4.1.4
- cohérence sur une ω -collection, 6.7.1
- complétion globulaire, 2.6.1
- composantes connexes d'un ∞ -groupeïde, 1.2.1
- contraction sur une ω -collection, 6.7.1
- contraction sur une théorie globulaire, 6.7.14
- couple admissible, 4.1.2
- couple de flèches parallèles, 4.1.1
- couple strictement admissible, 4.1.2
- décalage scindable, 7.3.1
- décalage sur une catégorie, 7.3.1
- décomposition algébrique, 2.7.4
- dimension d'un arbre, 2.3.4
- dimension d'un sommet, 2.3.4
- ensemble globulaire, 1.1.1
- ensemble globulaire dans une catégorie, 2.1.2
- équivalence faible ∞ -groupeïdes stricts, 1.2.1
- équivalence faible de ∞ -groupeïdes (faibles) de type C , 4.3.6
- équivalence faible de ∞ -groupeïdes quasi-stricts, 1.5.1

- équivalence faible de préfaisceaux, 7.1.1
- équivalence faible d'un localisateur, 1.3.1
- extension coglobulaire, 2.1.1
- extension globulaire, 2.1.1
- extension globulaire associée à une monade, 6.5.5
- extension globulaire catégorique, 3.1.1
- extension globulaire groupoïdale, 3.1.2
- extension globulaire précatégorique, 3.1.1
- extension globulaire prégroupoïdale, 3.1.2

- fibre d'un sommet d'un arbre, 2.3.4
- flèche algébrique, 2.7.1
- flèche algébrique de Θ , 3.3.7
- flèche algébrique sur D , 2.7.6
- flèche globulaire, 2.2.6
- foncteur sphérique, 7.1.5
- foncteur cartésien, 6.4.1
- foncteur de réalisation de Simpson, 1.4.14
- foncteur globulaire, 2.1.1
- foncteur homogène, 2.7.6
- foncteur monadique, 6.1.1

- limite d'une tour de définition, 4.1.3
- localisateur, 1.3.1

- monade associée à une extension globulaire, 6.3.3
- monade cartésienne, 6.4.1
- morphisme M -générique, 6.4.8
- morphisme but, 1.1.1
- morphisme but généralisé, 2.5.1
- morphisme de monades cartésien, 6.4.1
- morphisme source, 1.1.1
- morphisme source généralisé, 2.5.1
- morphisme source ou but non trivial, 1.1.1

- objet d'un ensemble globulaire, 1.1.1
- objet faiblement contractile, 4.4.1
- objet faiblement initial, 6.7.2

- préfaisceau sphérique, 7.1.2
- préfaisceau des flèches algébriques, 6.2.2
- préfaisceau globulaire, 2.1.1
- préfaisceau localement sphérique, 7.1.2
- préthéorie globulaire, 2.2.6
- préthéorie globulaire homogène, 2.7.1
- préthéorie globulaire homogène sur D , 2.7.6
- produit globulaire, 2.1.1
- prolongement d'un arbre, 2.5.1

- propriété (R), 5.2.1
- pseudo-cohérateur, 4.1.3

- région au-dessous d'une région, 2.3.16
- région au-dessus d'une région, 2.3.16
- région d'un arbre, 2.3.8
- région interne d'un arbre, 2.3.8
- relèvement d'un couple de flèches parallèles, 4.1.1

- schéma de composition, 2.2.4
- scindage d'un décalage, 7.3.1
- segment séparant sur \hat{A} , 7.1.2
- somme globulaire, 2.1.1
- somme globulaire généralisée, 2.5.1
- sommet d'un arbre, 2.3.4
- sommet maximal d'un arbre, 2.3.4
- source d'une n -flèche, 1.1.1
- source globulaire, 2.1.1
- sous-arbre, 2.3.4
- sous-arbre complet, 2.5.1
- sous-arbre d'un arbre dans Θ_0 , 3.3.2
- sous-arbre plein, 2.3.4
- système de compositions binaires, 6.7.1
- système de compositions générales, 6.7.1
- système globulaire, 2.1.1
- système globulaire généralisé, 2.5.1

- tableau des dimensions, 2.1.1
- théorie globulaire, 2.2.6
- tour de définition, 4.1.3
- transformation naturelle cartésienne, 6.4.1
- tronqué d'un arbre, 2.3.6
- type d'homotopie, 1.3.4