UNIVERSITÉ DE PARIS VI - Pierre et Marie CURIE

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité :
MATHÉMATIQUES

Présentée par
Emmanuel HUMBERT

Sujet :
Inégalités optimales de types Nash et Sobolev en géométrie riemannienne

Soutenue le 8 décembre 2000 devant la commission d'examen composée de

Monsieur Thierry AUBIN

Monsieur Lionel BERARD-BERGERY (rapporteur)

Monsieur Emmanuel HEBEY

Monsieur Jacques LAFONTAINE (rapporteur)

Monsieur Harold ROSENBERG

Monsieur Michel VAUGON (directeur de thèse)

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Michel VAUGON pour le travail qu'il a fait pour moi et surtout, ce qui est bien plus important à mes yeux, pour son amitié.

Je remercie aussi tout particulièrement Emmanuel HEBEY qui s'est intéressé à mon travail et m'a encouragé tout au long de ma thèse. Ses conseils et sa sympathie m'ont beaucoup aidé.

Je suis très heureux que Thierry AUBIN et Harold ROSENBERG aient accepté de faire partie de mon jury et que Lionel BERARD-BERGERY, mon ancien professeur à l'université de Nancy, et Jacques LAFONTAINE soient rapporteurs pour ma thèse. Merci à tous pour leur travail.

Pendant ces deux dernières années, tous les problèmes administratifs que j'aurais pu avoir se sont évanouis grâce à l'efficacité et la bonne humeur chronique de Rosita MONCHANIN, Colette ORION, Christiane POIRIER et Claudine ROUSSEL. Merci aussi à Véronique CARPENTIER qui s'est occupée de la reproduction de cette thèse.

Enfin, je remercie les équipes d'analyse sur les variétés des universités de Cergy-Pontoise et de Paris VI ainsi que l'équipe d'EDP de Nancy de s'être intéressées à mon travail et de m'avoir invité à exposer parmi eux.

Table des matières

Introduction

Sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), il existe une constante A telle que, pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^N dx \right)^{\frac{2}{N}} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla u \mid^2 dx \qquad S(A)$$

où $N = \frac{2n}{n-2}$. Cette inégalité provient de l'inclusion continue de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^N(\mathbb{R}^n)$. On définit la meilleure constante $K(n,2)^2$ dans cette inégalité par

$$K(n,2)^2 = \inf\{A > 0 | S(A) \text{ est vraie pour tout } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

Soit maintenant (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. L'inégalité $S(A)$ ne peut pas être vraie sous cette forme pour tout $u \in C_c^\infty(M) = C^\infty(M)$. En effet, les fonctions constantes ne vérifient pas cette inégalité. On lui ajoute donc un autre terme. Plus précisément, on considère l'inégalité suivante, pour $u \in C^\infty(M)$:

$$\left(\int_M u^N dx \right)^{\frac{2}{N}} \leq A \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dx + B \int_M u^2 dx \qquad S(A,B)$$

Il est facile de voir qu'il existe $A,B > 0$ tels que cette inégalité soit vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$. Dès lors, on peut définir la première meilleure constante dans cette inégalité par

$$K'(n,2)^2 = \inf\{A > 0 | \exists B > 0 \text{ t.q. } S(A,B) \text{ est vraie pour tout } u \in C^\infty(M)\}$$

On peut alors se poser différentes questions :

1) Que vaut $K(n,2)^2$?
2) Que vaut $K'(n,2)^2$?
3) L'ensemble $\{A > 0 | \exists B > 0 \text{ t.q. } S(A,B) \text{ est vraie pour tout } u \in C^\infty(M)\}$ est-il un ensemble fermé ?
4) Si la réponse à la question 3) est oui, on peut définir la deuxième meilleure constante B_0 par

$$B_0 = \inf\{B > 0 | S(K(n,2)^2,B) \text{ est vraie pour tout } u \in C^\infty(M)\}$$

Existe-t-il alors des fonctions extrémales pour l'inégalité de Sobolev optimale, autrement dit qui réalisent l'égalité dans l'inégalité $S(K(n,2)^2,B)$?
5) Toujours si la réponse à la question 3) est oui, que vaut B_0 ?
6) Donner des valeurs explicites de A et B sur certaines variétés pour que $S(A,B)$ soit vraie pour tout $u \in C^\infty$.

La réponse à la question 1) a été apportée indépendamment par Aubin [3] et Talenti [33]. Ils ont montré que

$$K(n,2)^2 = \frac{4}{n(n-2)\omega_n^{\frac{2}{n}}}$$

où ω_n est le volume de la sphère unité standard de dimension n. En ce qui concerne la question 2), Aubin a montré dans [3] que $K'(n,2)^2 = K(n,2)^2$. Plus précisément, il a montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe B_ϵ tel que $S(K(n,2)^2 + \epsilon, B_\epsilon)$ est vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$. Ce résultat lui a d'ailleurs permis de résoudre une grande partie du problème de Yamabe (voir [4]). Hebey et Vaugon [26] ont répondu par l'affirmative à la question 3). La question 4) a été résolue par Djadli et Druet dans [12] et par Hebey et Vaugon dans [27]. Ils ont donné des conditions géométriques pour lesquelles il y avait ou non des fonctions extrémales. La question 5) semble être très difficile. Pour l'instant, on ne sait calculer B_0 que pour la sphère standard. C'est un résultat dû à Aubin [4]. Enfin, Ilias [28] a répondu à la question 6) dans le cas des variétés à courbure de Ricci positive. Le lecteur pourra aussi se référer aux livres d'Aubin [2] et de Hebey [24] qui regroupent tous ces résultats. C'est ce type de questions qui nous intéressera ici. Voici un résumé des problèmes abordés dans la thèse.

Chapitres 1 et 2 :

On s'intéressera dans les deux premiers chapitres à l'inégalité de Nash : il existe une constante A telle que, pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u| dx\right)^{\frac{4}{n}} \qquad N(A)$$

Pour $n \geq 3$, cette inégalité se démontre en utilisant successivement l'inégalité de Hölder :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u| dx\right)^{\frac{4}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{n}}$$

et l'inégalité de Sobolev :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

Il faut noter que cette inégalité est vraie pour tout $n \geq 1$. On peut alors se poser les mêmes questions que pour l'inégalité de Sobolev. Carlen et Loss [9] ont répondu à la question 1). Ils ont montré que la meilleure constante $A_0(n)$ dans l'inégalité de Nash vaut

$$A_0(n) = \frac{(n+2)^{\frac{n+2}{n}}}{2^{\frac{2}{n}} n \lambda_1(\mathcal{B}) |\mathcal{B}|^{\frac{2}{n}}}$$

où $|\mathcal{B}|$ est le volume euclidien de la boule unité standard $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1(\mathcal{B})$ est la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur $\mathcal{B}$. Si maintenant, (M,g) est une variété riemannienne compacte de dimension n, alors on considère pour $u \in C^\infty(M)$, l'inégalité suivante, dite inégalité de Nash «L^2» :

$$\left(\int_M u^2 dv_g\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq \left(A \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g\right) \left(\int_M |u| dv_g\right)^{\frac{4}{n}} \qquad N(A,B)$$

Le chapitre 1 répond alors aux questions 2) et 3) et aborde les questions 4) et 5). Plus précisément, on montre dans ce chapitre que

$$\inf\{A > 0 | \text{ t.q. } N(A,B) \text{ est vraie pour tout } u \in C^\infty(M)\} = A_0(n)$$

La réponse à la question 3) est le résultat principal du chapitre 1. C'est le théorème suivant qui y répond :

Théorème : *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, il existe une constante $B > 0$ telle que, pour tout $u \in C^\infty(M)$*

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} \leq (A_0(n)\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B\int_M u^2 dv_g)(\int_M \mid u \mid dv_g)^{\frac{4}{n}}$$

En d'autres termes, il existe une constante $B > 0$ pour laquelle $N(A_0(n),B)$ est vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$.

La démonstration de ce théorème s'inspire du travail de Druet [13] qui répond à cette même question pour une autre inégalité de Sobolev. Cependant, il est à noter que, du fait de la nature de l'inégalité de Nash L^2, très différente de celle des inégalités de Sobolev, les difficultés que nous devons résoudre sont tout à fait nouvelles et ne ressemblent en rien à celles rencontrées par Druet. Il faut aussi signaler que ce résultat aurait été différent si on avait ajouté un autre terme à l'inégalité de Nash standard sur $\mathbb{R}^n$. En effet, Druet, Hebey et Vaugon [14] se sont intéressés à l'inégalité de Nash dite «L^1» : pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} \leq A\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g (\int_M \mid u \mid dv_g)^{\frac{4}{n}} + B(\int_M \mid u \mid dv_g)^{2+\frac{4}{n}} \qquad N'(A,B)$$

De même, ils montrent que

$$\inf\{A > 0| \text{ t.q. } N'(A,B) \text{ est vraie pour tout } u \in C^\infty(M)\} = A_0(n)$$

Cependant, l'existence de $B > 0$ tel que $N'(A_0(n),B)$ est vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$ dépend de la géométrie de la variété. Ils trouvent des variétés riemanniennes pour lesquelles ce nombre B existe et d'autres pour lesquelles il n'existe pas. On trouve aussi dans le chapitre 1 une réponse partielle à la question 4) mais celle-ci sera abordée de manière plus approfondie dans le chapitre 2. Pour la question 5), on ne sait calculer B_0 que pour le cercle S^1 et même dans ce cas, la démonstration est loin d'être triviale. On obtient par contre une minoration de B_0 :

Théorème : *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$B_0 \geq \max\left(Vol(M)^{-\frac{2}{n}}, \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \max_{x\in M} S_g(x)\right)$$

où $\mid \mathcal{B} \mid$ est le volume euclidien de la boule unité standard $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1(\mathcal{B})$ est la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur $\mathcal{B}$, $Vol(M)$ est le volume de (M,g) et $S_g(x)$ est la courbure scalaire de g en x.

Le résultat principal du chapitre 2 est une réponse à la question 4) dans certains cas :

Théorème : *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit aussi B_0 défini comme ci-dessus. On suppose que*

$$B_0 > \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \max_{x\in M} S_g(x)$$

Alors, il existe des fonctions extrémales de classe $C^{1,a}(M)$ $(0 < a < 1)$ pour l'inégalité de Nash L^2 optimale $N(A_0(n),B_0)$.

Ce théorème a d'ailleurs, compte tenu des résultats du chapitre 1, un corollaire immédiat :

Corollaire : *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que*

$$Vol(M)^{-\frac{2}{n}} > \frac{|\,\mathcal{B}\,|^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2}+\frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}}\max_{x\in M} S_g(x)$$

Alors, il existe des fonctions extrémales de classe $C^{1,a}(M)$ $(0 < a < 1)$ pour l'inégalité de Nash L^2 optimale $N(A_0(n),B_0)$.

Remarque : Il faut noter que la variété (M,g) vérifie les hypothèses du corollaire ci-dessus si, par exemple :

– sa courbure courbure scalaire est négative ou nulle;
– (M,g) est la sphère standard de dimension 2;
– (M,g) est l'espace projectif standard de dimension 2.
– (M,g) est le quotient d'une sphère standard de dimension impaire par un groupe d'isométries suffisamment gros (en dimension paire, ces quotients n'existent pas en tant que variété).

Chapitre 3 :

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'inégalité de Nash à trace. Celle-ci est définie sur $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$ $(n \geq 2)$. On note $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ et on pose

$$\mathcal{H} = \left\{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)\middle|\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \text{ et } u_{/\mathbb{R}_0} \in L^1(\mathbb{R}_0)\cap L^2(\mathbb{R}_0)\right\}$$

Cette inégalité dit que, pour tout $u \in \mathcal{H}$,

$$\left(\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} u^2 ds\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq A\int_{\mathbb{R}^n_+} |\,\nabla u\,|^2 dx\left(\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} |\,u\,|\,ds\right)^{\frac{2}{n-1}} \qquad \tilde{N}(A)$$

où ds est l'élément de volume standard sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et où la trace de u sur $\mathbb{R}_0$ est toujours notée u. Cette inégalité découle de l'inégalité de Sobolev à trace et de l'inégalité de Hölder. La meilleure constante $\tilde{A}_0(n)$ est définie par

$$\tilde{A}_0(n) = \inf\{A > 0 | \forall u \in \mathcal{H},\ \tilde{N}(A) \text{ est vraie}\}$$

Dans ce chapitre, on ne répond pas complètement à la question 1. On donne seulement une approximation assez fine de $\tilde{A}_0(n)$ et une estimée asymptotique pour n grand. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème : *La meilleure constante $\tilde{A}_0(n)$ dans l'inégalité de Nash à trace vérifie*

$$\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{(n^2-1)}\lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}|\,\mathcal{B}^{n-1}\,|^{\frac{1}{n-1}}} \leq \tilde{A}_0(n) \leq \frac{n^{\frac{n}{n-1}}}{(n-1)\lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}|\,\mathcal{B}^{n-1}\,|^{\frac{1}{n-1}}}$$

où $\lambda_{1,n-1}$ est la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur la boule unité standard $\mathcal{B}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ et où $|\,\mathcal{B}^{n-1}\,| = Vol(\mathcal{B}^{n-1})$.

Ce résultat se démontre en utilisant un principe de symétrisation différent de celui utilisé par Aubin [3] et Talenti [33] pour trouver la meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev standard ou par Carlen et Loss pour calculer la meilleure constante dans l'inégalité de Nash standard. En effet, leur symétrisation ne s'applique pas sur un demi-espace. Soit maintenant (M,g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 2$. On considère l'inégalité suivante : pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(A \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B \int_{\partial M} u^2 ds_g\right)\left(\int_{\partial M} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}} \qquad \tilde{N}(A,B)$$

où dv_g est l'élément de volume standard de (M,g) et où ds_g est celui de $(\partial M,\bar{g})$, $\bar{g}$ étant la métrique induite par g sur ∂M. On répond alors aux questions 2) et 3). On trouve que

$$\inf\{A > 0 |\ \text{t.q. } \tilde{N}(A,B) \text{ est vraie pour tout } u \in C^\infty(M)\} = \tilde{A}_0(n)$$

On obtient aussi le résultat suivant :

Théorème : *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte C^∞ à bord régulier et de dimension $n \geq 2$. Alors, il existe $B > 0$ tel que $\tilde{N}(\tilde{A}_0(n),B)$ soit vraie. Autrement dit, il existe $B > 0$ tel que*

$$\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\tilde{A}_0(n) \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B \int_{\partial M} u^2 ds_g\right)\left(\int_{\partial M} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

pour tout $u \in C^\infty(M)$.

Ce résultat est similaire à celui obtenu dans le chapitre 1 dans le cas de l'inégalité de Nash standard. Les méthodes de démonstration de ces deux théorèmes sont assez proches. Cependant, de nombreuses difficultés apparaissent quand on veut obtenir des estimées des fonctions à l'intérieur de la variété alors que l'on n'a des informations que sur le bord. Li et Zhu [29] ont obtenu des résultats similaires dans le cas de l'inégalité de Sobolev à trace. Leur méthode est cependant très différente. Elle utilise l'invariance conforme propre à leur problème et ne peut pas être adaptée ici.

Chapitre 4 :

Le chapitre 4 répond à la question 6) dans le cas de l'inégalité de Sobolev à trace sur des domaines étoilés de $\mathbb{R}^n$. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème : *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine étoilé en $0 \in D - \partial D$ tel que la métrique $\bar{g}$, induite par la métrique standard de $\mathbb{R}^n$ sur ∂D, satisfasse $Ric_{\bar{g}} \geq (n-1)K\bar{g}$ avec $K > 0$. Soit aussi $r_0 > 0$ tel que $B(0,r_0) \subset D$. Enfin, soit $k \geq 0$ tel que $\mid < \frac{x}{|x|},\vec{v} > \mid \leq k$ pour tout $x \in \partial D$ et tout vecteur unitaire $\vec{v}$ tangent à ∂D. On suppose que $k < 1$. Pour tout $u \in C^\infty(D)$, on a alors*

$$\left(\int_{\partial D} \mid u \mid^q\right)^{\frac{2}{q}} \leq \mathcal{A}(D) \int_D \mid \nabla u \mid^2 + \mathcal{B}(D) \int_{\partial D} \mid u \mid^2$$

où

$$\mathcal{A}(D) = \frac{4\pi^2 K^{-1} Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}}{(n-2)(1-k^2)(1-k)^{n/2} r_0} \ \textit{ et } \mathcal{B}(D) = Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}$$

Ce résultat se démontre en déformant le domaine et en le comparant à la boule unité. Il utilise les résultats du chapitre 3.

Chapitre 5 : (en collaboration avec David Holcman)

Ce chapitre traite d'un problème différent. On considère ici (V,g) une variété riemannienne compacte à bord C^∞ de dimension $n \geq 3$. On s'intéresse alors à l'équation suivante

$$(E)\left\{\begin{array}{lllll}\Delta_g u & = & 0 & sur & V \\ \partial_\nu u & = & \mid u \mid^{q-2} u & sur & \partial V\end{array}\right.$$

où $\Delta_g = -\nabla^i \nabla_i$ est le laplacien standard pour la métrique g et où $q = \frac{2(n-1)}{(n-2)}$ est l'exposant critique dans l'inclusion de l'espace $H^1(V)$ dans $L^q(\partial V)$. Nous n'étudions ici que les solutions qui changent de signe. Dans un premier temps, nous donnons des conditions géométriques pour lesquelles l'équation a une solution. On obtient le résultat suivant

Théorème : *Soit (V,g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 3$. $\bar{R}$ représente ici la courbure scalaire pour la métrique induite par g sur ∂V et H est la courbure moyenne de ∂V. Plus précisément, si $P \in \partial V$, $H(P) = g^{ij} h_{ij}$ où h_{ij} est la composante (i,j) de la deuxième forme fondamentale π définie sur ∂V. Alors, l'équation (E) a une solution dans les cas suivants :*

- *$n \geq 4$ et $H(P) > 0$ en un point $P \in \partial V$;*
- *$n \geq 5$, $H(P) = 0$ et $\frac{n-4}{n-2} \| \pi \|^2(P) + Ric(\nu,\nu)(P) + \frac{\bar{R}(P)}{2} > 0$ en un point $P \in \partial V$, ν étant le vecteur unitaire normal extérieur en P.*

Escobar a étudié ce type d'équations en cherchant des solutions positives (voir [16], [17]), notamment dans le but de résoudre le problème de la courbure moyenne prescrite. Ce type de problèmes se résout par l'utilisation de bonnes fonctions-tests. Celles qu'utilise Escobar ne peuvent être reprises telles quelles. Elles sont en effet positives et notre problème porte sur les solutions nodales de (E). Il faut donc les modifier. De plus, Escobar utilise le caractère conforme de son problème, ce qui n'est pas possible ici.

Nous étudions ensuite le nombre μ suivant

$$\mu = \inf_{u \in \Lambda} \frac{\int_V \mid \nabla u \mid^2}{\left(\int_{\partial V} \mid u \mid^q\right)^{\frac{2}{q}}}$$

où

$$\Lambda = \left\{ u \in H^1(V) \,\middle|\, \int_{\partial V} \mid u \mid^{q-2} u = 0 \right\}$$

et en nous donnons une minoration en fonction de données géométriques. Ce nombre (à une puissance positive près) représente l'énergie minimum d'une solution de (E). Cette étude s'inscrit dans la continuité de travaux donnant des estimations de valeurs propres de différents problèmes (voir par exemple [10], [18], [34]). La minoration de μ est ici obtenue pour les domaines étoilés bornés de $\mathbb{R}^n$ dont le bord a une courbure de Ricci strictement positive. On montre le résultat suivant

Théorème : *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine étoilé en $0 \in D - \partial D$ tel que la métrique $\bar{g}$, induite par la métrique standard de $\mathbb{R}^n$ sur ∂D, satisfasse $Ric_{\bar{g}} \geq (n-1)K\bar{g}$ avec $K > 0$. Soit aussi $r_0 > 0$ tel que $B(0,r_0) \subset D$. Enfin, soit $k \geq 0$ tel que $\mid < \frac{x}{|x|}, \vec{v} > \mid \leq k$ pour tout $x \in \partial D$ et tout vecteur unitaire $\vec{v}$ tangent à ∂D. On suppose que $k < 1$. Alors, μ vérifie :*

$$\mu \geq \frac{K^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-k^2}\, \alpha(1) r_0^{n-1}}{\mathcal{A}(D) \alpha(1) r_0^{n-1} K^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-k^2} + \mathcal{B}(D) \pi^n}$$

où

$$\alpha(1) = \inf_{\left(\int_{S^{n-1}} |w|^{q-2} w = 0\right)} \frac{\int_{B(0,1)} \mid \nabla w \mid^2}{\int_{S^{n-1}} w^2}$$

et où

$$\mathcal{A}(D) = \frac{4\pi^2 K^{-1} Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}}{(n-2)(1-k^2)(1-k)^{\frac{n}{2}} r_0} \text{ et } \mathcal{B}(D) = Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}$$

Enfin, dans une dernière partie, nous revenons aux problèmes d'inégalités en étudiant l'inégalité suivante : pour tout $u \in C^\infty(V)$,

$$\left(\int_{\partial V} \mid u \mid^q \right)^{\frac{2}{q}} \leq A \int_V \mid \nabla u \mid^2 + B \left| \int_{\partial V} \mid u \mid^{q-2} u \right|^{\frac{2}{q-1}} \qquad I(A,B)(u)$$

Comme pour les inégalités de type Poincaré et contrairement aux inégalités précédemment étudiées, la première meilleure constante dépend de la géométrie de V et non plus de sa seule dimension. On montre qu'elle vaut μ^{-1}. Plus précisément, on obtient le résultat suivant :

Théorème : *Les assertions suivantes sont vraies :*
a– *il existe* $A,B > 0$ *tels que* $I(A,B)(u)$ *est vraie pour tout* $u \in C^\infty(V)$ *;*
b– $A_0 = \mu^{-1}$ *;*
c– *si de plus,* $n \in \{3,4\}$ *ou si* $n \geq 5$ *et* $\mu < S^{-2} = \frac{(n-2)}{2} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$*, alors il existe* $B > 0$ *tel que* $I(\mu^{-1},B)$ *est vraie.*

Chapitre 1

Problème de meilleures constantes dans l'inégalité de Nash L^2

1.1 Introduction

L'inégalité de Nash dans $\mathbb{R}^n$ dit qu'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx)^{1+\frac{2}{n}} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx (\int_{\mathbb{R}^n} |u| dx)^{\frac{4}{n}}$$

Pour $n \geq 3$, cette inégalité se démontre en utilisant successivement l'inégalité de Hölder :

$$(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx)^{1+\frac{2}{n}} \leq (\int_{\mathbb{R}^n} |u| dx)^{\frac{4}{n}} (\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx)^{\frac{n-2}{n}}$$

et l'inégalité de Sobolev :

$$(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx)^{\frac{n-2}{n}} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

Carlen et Loss [9] ont montré que la meilleure constante $A_0(n)$ dans l'inégalité de Nash vaut

$$A_0(n) = \frac{(n+2)^{\frac{n+2}{n}}}{2^{\frac{2}{n}} n \lambda_1(\mathcal{B}) |\mathcal{B}|^{\frac{2}{n}}}$$

où $|\mathcal{B}|$ est le volume euclidien de la boule unité standard $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1(\mathcal{B})$ est la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur $\mathcal{B}$.

Dans ce chapitre, (M,g) est une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Quitte à multiplier g par une constante, on peut supposer que $Vol(M) = 1$. L'inégalité de Nash telle que ci-dessus ne peut évidemment pas être vraie sur M car elle est fausse pour les fonctions constantes. Elle doit être modifiée, par exemple en ajoutant un terme dans le membre de droite. En ajoutant un terme «L^1», nous obtenons une inégalité que nous appellerons inégalité de Nash L^1 : $\forall u \in C^\infty(M)$,

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} \leq A \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g (\int_M |u| dv_g)^{\frac{4}{n}} + B(\int_M |u| dv_g)^{2+\frac{4}{n}} \qquad (0)$$

Cette inégalité a été étudiée par Druet, Hebey et Vaugon dans [14]. Ils ont montré que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $B_\epsilon > 0$ dépendant a priori de ϵ telle que l'inégalité soit vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$ avec $A = A_0(n) + \epsilon$ et $B = B_\epsilon$. Plus surprenant, ils ont montré que l'existence d'une constante $B > 0$ telle que l'inégalité soit vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$ en prenant $A = A_0(n)$ dépend de la géométrie de M. Autrement dit, ils ont exhibé des variétés pour lesquelles l'inégalité est toujours fausse en prenant $A = A_0(n)$ et ce quel que soit le choix de B, et des variétés pour lesquelles l'inégalité de Nash L^1 est vraie en prenant $A = A_0(n)$ à condition que B soit choisi suffisamment grand.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'inégalité suivante (dite inégalité de Nash L^2) : $\forall u \in C^\infty(M)$,

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} \leq (A \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g)(\int_M |u| dv_g)^{\frac{4}{n}} \qquad N(A,B)(u)$$

Nous dirons que $N(A,B)$ est *valide* si $N(A,B)(u)$ est vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$. Nous nous intéressons ici à l'inégalité de Nash L^2 optimale $N(A_0(n),B)$. L'intérêt de cette étude est qu'elle nous donne des résultats contraires à ceux obtenus pour l'inégalité de Nash L^1. Plus précisément, nous prouvons pour cette inégalité qu'il existe toujours une constante $B > 0$ pour laquelle $N(A_0(n),B)$ est valide. L'existence de B ne dépend donc plus de la géometrie. Pour l'étude de problèmes similaires à propos des inégalités de Sobolev, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes : [5], [26] et aussi l'article de Druet [13] dont nous nous inspirerons. Cependant, il est à noter que, du fait de la nature de l'inégalité de Nash L^2, très différente de celle des inégalités de Sobolev, les difficultés que nous devons résoudre sont tout à fait nouvelles et ne ressemblent en rien à celles rencontrées dans les références précédentes. Nous signalons également le livre de Hebey [24] qui propose un panel général de tout ce qui concerne les inégalités optimales de type Sobolev. L'intérêt d'étudier de telles inégalités est qu'il faut développer de nouvelles méthodes d'étude des phénomènes de concentration qui apparaissent souvent en analyse.

Définissons $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{A} = \{A > 0 \mid \exists B > 0 \text{ t.q. } N(A,B) \text{ est valide } \}$$

Une démonstration similaire à celle faite dans Druet, Hebey et Vaugon [14] montre facilement que

$$\inf(\mathcal{A}) = A_0(n)$$

Le résultat principal de ce chapitre est alors le suivant :

Théorème 1 *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, il existe une constante $B > 0$ telle que, pour tout $u \in C^\infty(M)$*

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} \leq (A_0(n) \int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g)(\int_M |u| dv_g)^{\frac{4}{n}}$$

En d'autres termes, il existe une constante $B > 0$ pour laquelle $N(A_0(n),B)$ est valide.

Il est à noter qu'un résultat similaire peut être obtenu pour les variétés complètes et pour les variétés à bord. Compte tenu du fait que toutes les difficultés se trouvent dans le cas compact, nous ne ferons qu'esquisser la preuve de ces résultats (à la fin du paragraphe 2). Pour $n = 1$ (i.e. pour $M = S^1$), une démonstration simple du théorème 1 se fait par un argument de partition de l'unité et peut même être étendue au cas des variétés plates.

Définissons maintenant

$$B_0 = \inf\{B \in \mathbb{R} \text{ t.q. } N(A_0(n),B) \text{ est valide }\}$$

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous calculons explicitement B_0 pour le cercle S^1. Pour l'instant, le cercle est la seule variété pour laquelle nous sachions le faire et même dans ce cas, la démonstration se fait de manière tout à fait non triviale. Le cas général nous semble être un problème très difficile. Le seul résultat général que nous ayons à l'heure actuelle est le suivant :

Théorème 2 *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$B_0 \geq \max\left(Vol(M)^{-\frac{2}{n}}, \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \max_{x\in M} S_g(x)\right)$$

où $\mid \mathcal{B} \mid$ est le volume euclidien de la boule unité standard $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1(\mathcal{B})$ est la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur $\mathcal{B}$, $Vol(M)$ est le volume de (M,g), et où $S_g(x)$ est la courbure scalaire de g en x.

Nous dirons maintenant que $u \in H_1^2(M)$, $u \not\equiv 0$ est une fonction extrémale pour l'inégalité de Nash L^2 optimale $N(A_0(n),B_0)$ si

$$\left(\int_M u^2 dv_g\right)^{1+\frac{2}{n}} = \left(A_0(n)\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B_0 \int_M u^2 dv_g\right)\left(\int_M \mid u \mid dv_g\right)^{\frac{4}{n}}$$

Le résultat suivant s'obtient ensuite par un argument très simple :
Théorème 3 *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe $B > 0$ tel que l'inégalité de Nash L^1 (0) soit vraie avec $A = A_0(n)$. Alors, il existe $u \in H_1^2(M)$, $u \not\equiv 0$, fonction extrémale pour l'inégalité de Nash L^2 optimale $N(A_0(n),B_0)$.*
Les résultats de Druet, Hebey et Vaugon [14] conduisent alors au corollaire suivant. Pour plus d'informations sur la conjecture de Cartan-Hadamard, le lecteur pourra se référer au livre de Hebey [24].

Corollaire 1 *Il existe au moins une fonction extrémale pour l'inégalité de Nash L^2 optimale sur toute variété riemannienne compacte de classe C^∞, de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ à courbure sectionnelle négative et pour laquelle la conjecture de Cartan-Hadamard est vraie. En particulier, il existe au moins une fonction extrémale pour l'inégalité de Nash L^2 optimale sur toute variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n = 2$, 3 ou 4 à courbure sectionnelle négative.*

Une étude plus profonde de l'existence de fonctions extrémales pour l'inégalité de Nash L^2 optimale est faite dans le chapitre suivant.

Le paragraphe 5 est consacré à l'étude de quelques exemples : celui du cercle, comme nous l'avons dit précédemment, pour lequel les fonctions constantes sont des fonctions extrémales pour l'inégalité de Nash L^2 optimale et un autre exemple qui montre que l'inégalité du théorème 2 n'est pas toujours une égalité.

1.2 Démonstration du théorème 1

Cette démonstration se déroule en quatre étapes et suit le schéma de celle de Druet [13]. Les problèmes spécifiques à l'inégalité de Nash L^2 apparaissent dès la deuxième étape pour laquelle la démonstration de Druet ne peut pas être adaptée. Cependant, les plus grosses difficultés ne viennent que dans les deux dernières étapes et demandent à être traitées de manière très différente de ce qui est fait dans [13].

La démonstration se faisant par un argument de partition de l'unité pour $n = 1$, nous supposerons que $n \geq 2$. Elle se fait par l'absurde. Faisons donc l'hypothèse suivante : pour tout $B > 0$, il existe $u \in C^\infty(M)$ telle que :

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} > (A_0(n) \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g)(\int_M \mid u \mid dv_g)^{\frac{4}{n}}$$

On se convainc facilement que cela revient à écrire que $\tilde{\mu}_\alpha = \inf_{u\in\Lambda} \tilde{I}_\alpha(u) < A_0(n)^{-1}$ pour tout $\alpha \geq 0$, où

$$\tilde{I}_\alpha(u) = (\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + \alpha)(\int_M \mid u \mid dv_g)^{\frac{4}{n}}$$

et

$$\Lambda = \{u \in C^\infty(M) \mid \int_M u^2 dv_g = 1\}$$

Afin d'éviter les problèmes liés à la non-différentiabilité de $\tilde{I}_\alpha$, définissons, pour $\epsilon,\alpha > 0$ et $u \in \Lambda$:

$$\tilde{I}_{\epsilon,\alpha}(u) = (\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + \alpha)(\int_M \mid u \mid^{1+\epsilon} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon)}}$$

et

$$\mu_{\epsilon,\alpha} = \inf_{u\in\Lambda} \tilde{I}_{\epsilon,\alpha}(u)$$

Il est clair que $\lim_{\epsilon\to 0} \mu_{\epsilon,\alpha} = \tilde{\mu}_\alpha$. Ainsi, pour $\alpha > 0$, on peut choisir ϵ_α assez petit pour que $\lim_{\alpha\to\infty} \epsilon_\alpha = 0$ et $\mu_{\epsilon_\alpha,\alpha} < A_0(n)^{-1}$. Définissons alors :

$$\mu_\alpha = \mu_{\epsilon_\alpha,\alpha} \text{ et } I_\alpha = \tilde{I}_{\epsilon_\alpha,\alpha}$$

En raisonnant comme dans [14], on prouve que toute suite minimisante pour I_α admet une sous-suite convergeant fortement dans $H^1(M)$. On montre ainsi qu'il existe $u_\alpha \in H^1(M)$ telle que $I_\alpha(u_\alpha) = \mu_\alpha$ avec $u_\alpha \geq 0$. En écrivant l'équation d'Euler de u_α, on obtient alors qu'au sens des distributions, u_α vérifie

$$2A_\alpha \Delta_g u_\alpha + \frac{4}{n} B_\alpha u_\alpha^{\epsilon_\alpha} = k_\alpha u_\alpha \qquad (E_\alpha)$$

où

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= (\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \\
B_\alpha &= (\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g{}^2 dv_g + \alpha)(\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}-1} \\
k_\alpha &= \frac{4}{n}\mu_\alpha + 2\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g (\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}
\end{aligned}$$

Les théorèmes d'inclusion de Sobolev impliquent que $u_\alpha \in L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$. Ainsi, des estimées standard sur les opérateurs elliptiques (voir [22]) montrent que $u_\alpha \in C^2(M)$.

Remarques :

1− Dans la suite, sauf mention contraire, toutes les limites seront à prendre au sens $\alpha \to \infty$. De plus, quitte à extraire des sous-suites en α, nous considèrerons que toutes les suites ont une limite, pas nécessairement finie.

2− Puisque $\mu_\alpha < A_0(n)^{-1}$, on a $\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \to 0$. L'inégalité $N(A_0(n)+\epsilon, B_\epsilon)(u_\alpha)$, où $\epsilon > 0$ est petit, implique alors que

$$\liminf \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g \Big(\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\Big)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \geq (A_0(n)+\epsilon)^{-1}$$

De plus, du fait que $\mu_\alpha < A_0(n)^{-1}$, il est clair que

$$\limsup \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g \Big(\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\Big)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \leq A_0(n)^{-1}$$

Cela conduit alors aux relations suivantes

$$\lim A_\alpha \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g = A_0(n)^{-1} \tag{1.1}$$

$$\lim B_\alpha \int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = A_0(n)^{-1} \tag{1.2}$$

$$\lim k_\alpha = \Big(2+\frac{4}{n}\Big) A_0(n)^{-1} \tag{1.3}$$

$$\lim A_\alpha \alpha = 0 \tag{1.4}$$

Maintenant, notons $a_\alpha = A_\alpha^{\frac{1}{2}}$. Soit aussi x_α, un point de M tel que $u_\alpha(x_\alpha) = \| u_\alpha \|_\infty$.

Étape 1 *Pour tout* $\delta > 0$ *:* $\liminf \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} > 0$

Posons, pour $x \in B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} g_\alpha(x) &= (exp_{x_\alpha})^* g(a_\alpha x) \\ \varphi_\alpha(x) &= \| u_\alpha \|_\infty^{-1} u_\alpha(exp_{x_\alpha}(a_\alpha x)) \end{aligned}$$

Un calcul facile montre que

$$\Delta_{g_\alpha} \varphi_\alpha + \frac{2}{n} \| u_\alpha \|_\infty^{-1+\epsilon_\alpha} B_\alpha \varphi_\alpha^{\epsilon_\alpha} = \frac{k_\alpha}{2} \varphi_\alpha \tag{$\tilde{E}_\alpha$}$$

Comme $\Delta_g u_\alpha(x_\alpha) \geq 0$, on déduit de (E_α) et (1.3) que

$$\| u_\alpha \|_\infty^{\epsilon_\alpha} B_\alpha \leq C \| u_\alpha \|_\infty \tag{1.5}$$

Puisque $\| \varphi_\alpha \|_{L^\infty(B(0,\delta))} \leq 1$ et d'après $(\tilde{E}_\alpha)$:

$$\| \Delta_{g_\alpha} \varphi_\alpha \|_{L^\infty(B(0,\delta))} \leq C$$

Des estimées standard sur les opérateurs elliptiques (voir [22]) montrent que, pour $a \in]0,1[$, $\| \varphi_\alpha \|_{C^{1,a}(B(0,\delta))} \leq C$. La suite de fonctions $(\varphi_\alpha)_\alpha$ est alors équicontinue et, grâce au théorème d'Ascoli, on sait qu'il existe $\varphi \in C^0(B(0,\delta))$ telle que $\varphi_\alpha \to \varphi$ dans $C^0(B(0,\delta))$. On a maintenant

$$\varphi(0) = \lim \varphi_\alpha(0) = 1 \tag{1.6}$$

et

$$\int_{B(0,\delta)} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{g_\alpha} = \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\epsilon_\alpha)} A_\alpha^{-\frac{n}{2}} \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

$$= \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\epsilon_\alpha)} A_\alpha^{-\frac{n}{4}(1-\epsilon_\alpha)} \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}$$

$$\leq \| u_\alpha \|_\infty^{-1} A_\alpha^{-\frac{n}{4}} \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \tag{1.7}$$

De plus, puisque $\| u_\alpha \|_\infty^{\epsilon_\alpha} \geq 1$, (1.5) entraîne que $\| u_\alpha \|_\infty \geq C.B_\alpha$ et puisque $A_\alpha \to 0$, on a, en utilisant (1.2), $B_\alpha \geq C.A_\alpha^{-\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)} \geq C.A_\alpha^{-\frac{n}{4}}$. L'inégalité (1.7) devient alors

$$\int_{B(0,\delta)} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{g_\alpha} \leq C \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}$$

Or, d'après (1.6) et du fait que $g_\alpha \to \xi$ dans $C^1(B(0,\delta))$, on a

$$\int_{B(0,\delta)} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{g_\alpha} \to \int_{B(0,\delta)} \varphi dv_\xi > 0 \tag{1.8}$$

On aboutit finalement à

$$\frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \geq C > 0$$

ce qui achève la démonstration de l'étape.

Remarque : En revenant à (1.7) et à (1.8), on voit que

$$A_\alpha^{\frac{n}{4}} \| u_\alpha \|_\infty \to C > 0 \tag{1.9}$$

Étape 2 *Soit $(c_\alpha)_\alpha$ une suite de réels strictement positifs tels que $\frac{a_\alpha}{c_\alpha} \to 0$. Alors,*

$$\lim \frac{\int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} = 1$$

Soit $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ choisie de sorte que

$$\begin{array}{cc} (i) & \eta([0,\frac{1}{2}]) = \{1\} \\ (ii) & \eta([1,+\infty[) = \{0\} \\ (iii) & 0 \leq \eta \leq 1 \end{array}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\eta_{\alpha,k} = \big(\eta(c_\alpha^{-1} d_g(x,x_\alpha))\big)^{2^k}$. En multipliant (E_α) par ${\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha$ et en intégrant sur M, il vient

$$2A_\alpha \int_M \mid \nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha \mid_g^2 dv_g - 2A_\alpha \int_M \mid \nabla \eta_{\alpha,k} \mid_g^2 u_\alpha^2 dv_g + \frac{4}{n} B_\alpha \int_M {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

$$= k_\alpha \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g \qquad (1.10)$$

L'inégalité $N(A_0(n)+\epsilon, B_\epsilon)(\eta_{\alpha,k} u_\alpha)$ implique alors que

$$2A_\alpha \int_M \mid \nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha \mid_g^2 dv_g - 2A_\alpha \int_M \mid \nabla \eta_{\alpha,k} \mid_g^2 {u_\alpha}_g^2 dv_g + \frac{4}{n} B_\alpha \int_M {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

$$\le k_\alpha \Big((A_0(n)+\epsilon) \int_M \mid \nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha \mid_g^2 dv_g \big(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\big)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} +$$
$$B_\epsilon \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g \big(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\big)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \Big)^{\frac{n}{n+2}} \qquad (1.11)$$

L'hypothèse faite sur la suite $(c_\alpha)_\alpha$ permet d'avoir

$$\mid \nabla \eta_{\alpha,k} \mid_g^2 \le \frac{C}{c_\alpha^2} \Rightarrow A_\alpha \int_M \mid \nabla \eta_{\alpha,k} \mid_g^2 u_\alpha^2 dv_g \to 0$$

Posons maintenant

$$\lambda_k = \lim \frac{\int_M {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}$$
$$\tilde{\lambda}_k = \lim \frac{\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}$$

D'après la définition de $\eta_{\alpha,k}$, on a, pour $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda_{k+1} \le \tilde{\lambda}_{k+1} \le \lambda_k \le \tilde{\lambda}_k \le \mu = \lim \frac{\int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \qquad (1.12)$$

et d'après l'étape 1,

$$\exists C > 0 \text{ t.q. } \forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k \ge C \qquad (1.13)$$

Montrons maintenant que $\lambda_k \le \tilde{\lambda}_k^2$. Dans ce but, posons $L_k = \lim A_\alpha \int_M \mid \nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha \mid_g^2 dv_g$. On remarque que, par (1.2),

$$\lim B_\alpha \int_M \eta_{\alpha,k}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = \lambda_k A_0(n)^{-1}$$

et

$$k_\alpha \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g \le C$$

En particulier, (1.10) donne $L_k < +\infty$. Il est en outre clair que, par (1.1), (1.2) et la définition de A_α,

$$\lim \int_M | \nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha |_g^2 dv_g (\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} = L_k \tilde{\lambda}_k^{\frac{4}{n}}$$

La relation (1.11) conduit alors à

$$2L_k + \frac{4}{n} A_0(n)^{-1} \lambda_k \leq (2 + \frac{4}{n}) A_0(n)^{-1} ((A_0(n) + \epsilon) L_k \tilde{\lambda}_k^{\frac{4}{n}})^{\frac{n}{n+2}}$$

En notant $\tilde{L}_k = A_0(n) L_k$, on obtient, puisque le choix de ϵ est arbitraire,

$$2\tilde{L}_k + \frac{4}{n}\lambda_k \leq (2 + \frac{4}{n}) \tilde{L}_k^{\frac{n}{n+2}} \tilde{\lambda}_k^{\frac{4}{n+2}}$$

On définit alors, pour x,y,z : $f(x,y,z) = (2 + \frac{4}{n}) x^{\frac{n}{n+2}} y^{\frac{4}{n+2}} - (\frac{4}{n} z + 2x)$. Dérivons f par rapport à la variable x. On voit que $\forall x,y,z > 0$, $f(x,y,z) \leq f(y^2,y,z)$, et ainsi $f(\tilde{L}_k,\tilde{\lambda}_k,\lambda_k) \leq f(\tilde{\lambda}_k^2,\tilde{\lambda}_k,\lambda_k) = \frac{4}{n}(\tilde{\lambda}_k^2 - \lambda_k)$. On remarque alors que $\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k^2$. Donc , en se servant de (1.12) et (1.13), on montre que $\forall N \in \mathbb{N}$, $0 < C \leq {\lambda_0}^N \leq \mu$. Puisque $\mu \leq 1$, il en découle que $\mu = 1$ ce qui termine la démonstration de l'étape 2.

Étape 3 *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in M$:*

$$u_\alpha(x) d(x,x_\alpha)^{\frac{n}{2}} \leq C$$

où d est la distance relative à g.

Pour la démonstration de cette étape, raisonnons par l'absurde. Supposons en effet que l'assertion suivante soit vraie

$$\exists y_\alpha \in M \text{ t.q. } u_\alpha(y_\alpha) d(y_\alpha,x_\alpha)^{\frac{n}{2}} \to +\infty \qquad (H)$$

Posons

$$v_\alpha = u_\alpha(y_\alpha) d(y_\alpha,x_\alpha)^{\frac{n}{2}}$$

Le point y_α peut bien sûr être choisi de manière à ce que

$$v_\alpha = \| u_\alpha(.) d(.,x_\alpha)^{\frac{n}{2}} \|_\infty$$

Montrons d'abord que, si ν est assez petit,

$$B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}) \cap B_{x_\alpha}(a_\alpha v_\alpha^\nu) = \emptyset \qquad (1.14)$$

Il suffit pour cela de montrer que $d(x_\alpha,y_\alpha) \geq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}} + a_\alpha v_\alpha^\nu$, ou, de manière équivalente, que $v_\alpha^{\frac{2}{n}-\nu} \geq v_\alpha^{-\nu} + a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n}}$. Si $\nu < \frac{2}{n}$, nous déduisons de (H) que $v_\alpha^{\frac{2}{n}-\nu} \to +\infty$ et que $v_\alpha^{-\nu} \to 0$. Il reste donc seulement à voir que $a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n}} \leq C$. On a $a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n}} \leq a_\alpha \| u_\alpha \|_\infty^{\frac{2}{n}}$. Puisque $a_\alpha = A_\alpha^{\frac{1}{2}}$, on tire de (1.9) que $a_\alpha \| u_\alpha \|_\infty^{\frac{2}{n}} \leq C$. La relation (1.14) en découle. Posons maintenant, pour $x \in B(0,1)$:

$$\begin{aligned} h_\alpha(x) &= (exp_{y_\alpha})^* g(l_\alpha x) \\ \psi_\alpha(x) &= u_\alpha(y_\alpha)^{-1} u_\alpha(exp_{y_\alpha}(l_\alpha x)) \end{aligned}$$

où

$$l_\alpha = \| u_\alpha \|_\infty^{-\frac{n+4}{2n}} u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Sur la boule $B(0,1)$, on a

$$\Delta_{h_\alpha}\psi_\alpha = \frac{k_\alpha \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\frac{4}{n})} u_\alpha(y_\alpha)}{2A_\alpha}\psi_\alpha - \frac{2B_\alpha \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\frac{4}{n})} u_\alpha(y_\alpha)^{\epsilon_\alpha}}{nA_\alpha}\psi_\alpha^{\epsilon_\alpha} \qquad (E_\alpha{}')$$

De plus

$$h_\alpha \to \xi \text{ in } C^1(B(0,1)) \qquad (1.15)$$

On a aussi $\| u_\alpha \|_{L^\infty(B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}))} \leq C.u_\alpha(y_\alpha)$. Pour le voir, on remarque que, par définition de y_α, pour tout $x \in B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})$,

$$u_\alpha(y_\alpha) d(x_\alpha,y_\alpha)^{\frac{n}{2}} \geq u_\alpha(x) d(x_\alpha,x)^{\frac{n}{2}} \qquad (1.16)$$

En outre, du fait que $x \in B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})$,

$$d(y_\alpha,x) \leq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}$$

et (H) implique que $u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{2}d(x_\alpha,y_\alpha)$. Ainsi, on obtient

$$d(x,x_\alpha) \geq d(x_\alpha,y_\alpha) - d(x,y_\alpha) \geq d(x_\alpha,y_\alpha) - u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}} \geq \frac{1}{2}d(x_\alpha,y_\alpha)$$

Le résultat provient alors de (1.16). Maintenant, puisque $l_\alpha \leq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}$, il s'ensuit que $\| \psi_\alpha \|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C$. D'après (1.5), (1.9) et le fait que, par (1.2), $B_\alpha A_\alpha^{\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)} \to C > 0$, on a

$$\| u_\alpha \|_\infty^{\epsilon_\alpha} \to C \qquad (1.17)$$

Les relations (1.5), (1.9) et (1.17) impliquent que (E'_α) est à coefficients bornés et donc

$$\| \Delta_{h_\alpha}\psi_\alpha \|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C$$

Comme à l'étape 1, on montre l'existence de $\psi \in C^0(B(0,1))$ telle que, quitte à extraire une sous-suite en α,

$$\psi_\alpha \to \psi \text{ dans } C^0(B(0,1))$$

Ici, ψ est telle que $\psi(0) = 1$ et en conséquence

$$\int_{B(0,1)} \psi dx > 0 \qquad (1.18)$$

Cependant, de (1.15), on tire que

$$\int_{B(0,1)} \psi dx = \lim \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{h_\alpha}$$

De plus,

$$\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{h_\alpha} = \beta_\alpha$$

où

$$\beta_\alpha = A_\alpha^{\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)} u_\alpha(y_\alpha)^{-(1+\epsilon_\alpha)} l_\alpha^{-n} \left(\frac{\int_{B_{y_\alpha}(l_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{A_\alpha^{\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)}} \right)$$

Si on montre que $\lim \beta_\alpha = 0$, ce qui est en contradiction avec (1.18), l'étape sera complètement démontrée. Posons d'abord

$$m_\alpha = \frac{u_\alpha(y_\alpha)}{\| u_\alpha \|_\infty}$$

Il est clair que, d'après (1.9) et les définitions de l_α et A_α :

$$\beta_\alpha \le C m_\alpha^{-(\frac{n}{2}+1)} \left(\frac{\int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(l_\alpha))} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \right)$$

L'étape précédente et (1.14) entraînent que

$$\lim \left(\frac{\int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \right) = 0 \tag{1.19}$$

Si $m_\alpha \ge C > 0$, alors $\beta_\alpha \to 0$ ce qui termine la démonstration. Supposons donc que $\lim m_\alpha = 0$. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$m_\alpha^{-\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^k} \int_{B_{y_\alpha}(2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^2 dv_g \to 0 \tag{H_k}$$

Commençons par montrer que (H_0) est vraie. Nous avons vu que

$$\| u_\alpha \|_{L^\infty(B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}))} \le C.u_\alpha(y_\alpha)$$

Ainsi, en remarquant que $u_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$, on obtient que

$$\int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^2 dv_g \le C u_\alpha(y_\alpha) \int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

$$\le C m_\alpha \| u_\alpha \|_\infty \int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

Les relations (1.9) et (1.19) ainsi que la définition de A_α impliquent alors que

$$\lim \| u_\alpha \|_\infty \int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = 0$$

(H_0) en découle. Soit maintenant $\epsilon_k = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^k$ et supposons que (H_k) est vraie. Montrons que (H_{k+1}) est vraie aussi. Soit pour cela $\eta_{\alpha,k}(x) = \eta(u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n}} 2^k d_g(x,y_\alpha))$ où η est comme à l'étape 2. Multiplions (E_α) par

$$\frac{(\eta_{\alpha,k})^2 u_\alpha}{m_\alpha^{\epsilon_k}}$$

et intégrons sur M. Cela donne :

$$2A_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M | \nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha |_g^2 dv_g - 2A_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M | \nabla \eta_{\alpha,k} |_g^2 u_\alpha^2 dv_g +$$

$$\frac{4}{n} B_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = k_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g \tag{1.20}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence (H_k) :

$$2A_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k}\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}\mid_g^2 u_\alpha^2 dv_g \le CA_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{4}{n}} m_\alpha^{-\epsilon_k}\int_{B_{y_\alpha}(2^{-k}u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^2 dv_g \le CA_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{4}{n}}$$

De plus, avec (1.9), $A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{4}{n}} = A_\alpha m_\alpha^{\frac{4}{n}} \| u_\alpha \|_\infty^{\frac{4}{n}} \le C.m_\alpha^{\frac{4}{n}} \to 0$. En appliquant encore (H_k) et aussi (1.3),

$$k_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k}\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^2 dv_g \to 0$$

Ainsi, par (1.20)

$$2A_\alpha\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}u_\alpha\mid_g^2 dv_g \le C.m_\alpha^{\epsilon_k} \tag{1.21}$$

$$\frac{4}{n}B_\alpha\int_M {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \le C.m_\alpha^{\epsilon_k}$$

Quitte à remplacer $\eta_{\alpha,k}$ par $\sqrt{\eta_{\alpha,k}}$, on a également

$$\frac{4}{n}B_\alpha\int_M {\eta_{\alpha,k}}^{1+\epsilon_\alpha} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \le C.m_\alpha^{\epsilon_k} \tag{1.22}$$

De plus, en utilisant $N(A,B)(\eta_{\alpha,k}u_\alpha)$, il est facile de voir que

$$\left(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^2 dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}} \le A.\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}u_\alpha\mid_g^2 dv_g \left(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

$$+B.\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^2 dv_g \left(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

On a même

$$\left(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^2 dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}} \le C.\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}u_\alpha\mid_g^2 dv_g \left(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

$$\le \frac{C}{A_\alpha B_\alpha^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}}\left(\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}u_\alpha\mid_g^2 dv_g A_\alpha\right)\left(B_\alpha\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

Avec (1.21) et (1.22), nous obtenons que

$$\left(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^2 dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}} \le \frac{C}{A_\alpha B_\alpha^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}}.m_\alpha^{(1+\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)})\epsilon_k}$$

D'après (1.2), $A_\alpha B_\alpha^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \ge C > 0$. De plus,

$$\int_{B_{y_\alpha}(2^{-(k+1)}u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^2 dv_g \le \int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^2 dv_g$$

Comme $\frac{n+3}{n+2} < \frac{n+4}{n+2}$, (H_{k+1}) en découle. En conséquence, (H_k) est vraie pour tout k. En revenant à (1.22), on a, pour tout k,

$$\lim m_\alpha^{-\epsilon_k} B_\alpha \int_{B_{y_\alpha}(2^{-k}u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = 0$$

En utilisant le fait que $\lim l_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}} = 0$ et en choisissant k de manière à ce que $\epsilon_k \geq \frac{n}{2}+1$, on obtient que $\lim \beta_\alpha = 0$. Cela termine la démonstration de l'étape.

Étape 4 *Différentes estimées*

Cette étape se fait en sept parties. Soit d'abord $c > 0$.

a- Montrons que :

$$\forall k > 0,\ A_\alpha^{-k} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^2 dv_g \to 0 \tag{1.23}$$

Notons $r_\alpha(x) = d_g(x,x_\alpha)$ et soit $\delta \in]0,\frac{n}{4}[$. En utilisant l'étape 3, on a :

$$\begin{aligned} A_\alpha^{-\delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^2 dv_g &\leq C.A_\alpha^{-\delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^{-\frac{n}{2}(1-\epsilon_\alpha)} dv_g \\ &\leq C.A_\alpha^{-\delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \end{aligned}$$

Avec la définition de A_α, on obtient :

$$A_\alpha^{-\delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^2 dv_g \to 0$$

Un raisonnement par récurrence similaire à celui fait dans l'étape précédente montre que

$$A_\alpha{}^{-\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^k \delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(2^k c)} u_\alpha^2 dv_g \to 0 \tag{$\tilde{H}_k$}$$

Remarque

Comme dans l'étape précédente, on a, pour $k > 0$,

$$\lim A_\alpha^{-k} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g = 0$$

$$\lim A_\alpha^{-k} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = 0 \tag{1.24}$$

b- Montrons que :

$$\exists t_0 > 0 \text{ t.q. } \Delta_g u_\alpha < 0 \text{ sur } M - B_{x_\alpha}(t_0 A_\alpha^{\frac{1}{2}}) \tag{1.25}$$

Soit $x \in M$ tel que $\Delta_g u_\alpha(x) \geq 0$. D'après (E_α), on a : $u_\alpha(x) \geq C.B_\alpha$ On a aussi, par (1.2), $B_\alpha \geq C.A_\alpha{}^{-\frac{n}{4}}$. L'étape 3 montre alors que $u_\alpha(x) \leq C.r_\alpha(x)^{-\frac{n}{2}}$. Ainsi, $r_\alpha(x)^{-\frac{n}{2}} \geq C.A_\alpha{}^{-\frac{n}{4}}$. La relation (1.25) en découle. On pose maintenant : $\eta_\alpha = \eta(\frac{1}{c} r_\alpha)$.

c- Montrons que :

$$\int_M (r_\alpha \eta_\alpha)^2 |\ \nabla u_\alpha\ |_g^{\ 2} dv_g \leq C \tag{1.26}$$

Soit : $\gamma_\alpha = \int_M (r_\alpha \eta_\alpha)^2 |\ \nabla u_\alpha\ |_g^2 dv_g$. En intégrant par partie, on voit que

$$\gamma_\alpha = \int_M (\Delta_g u_\alpha) u_\alpha (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g - 2 \int_M u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha < \nabla r_\alpha \eta_\alpha, \nabla u_\alpha >_g dv_g$$

et, par (1.25) :

$$\gamma_\alpha \leq \int_{B_{x_\alpha}(t_0 A_\alpha^{\frac{1}{2}})} (\Delta_g u_\alpha) u_\alpha (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g + C \int_M u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha |\ \nabla r_\alpha \eta_\alpha\ |_g |\ \nabla u_\alpha\ |_g dv_g$$

En utilisant (E_α), (1.5) ainsi que l'inégalité suivante (qui provient de (1.9))

$$u_\alpha(x) \leq \|\ u_\alpha\ \|_\infty \leq C.A_\alpha^{-\frac{n}{4}}$$

on peut montrer que

$$\int_{B_{x_\alpha}(t_0 A_\alpha^{\frac{1}{2}})} (\Delta_g u_\alpha) u_\alpha (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \leq C$$

De plus, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_M u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha |\ \nabla r_\alpha \eta_\alpha\ |_g |\ \nabla u_\alpha\ |_g dv_g \leq \left(\int_M u_\alpha^2 |\ \nabla r_\alpha \eta_\alpha\ |_g^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M |\ \nabla u_\alpha\ |_g^{\ 2} (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalement,

$$\gamma_\alpha \leq C + C.\gamma_\alpha^{\frac{1}{2}}$$

et (1.26) s'ensuit.

d- Montrons que :

$$\int_M (u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \leq C \sqrt{\alpha} A_\alpha \tag{1.27}$$

On a :

$$\int_M (u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g = \int_{M - B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}} a_\alpha)} (u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g + \int_{B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}} a_\alpha)} (u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \tag{1.28}$$

Il est clair que

$$\int_{B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}} a_\alpha)} (u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \leq C \sqrt{\alpha} A_\alpha \tag{1.29}$$

On a aussi, d'après l'étape 3,

$$\int_{M - B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}} a_\alpha)} (u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \leq C \int_M u_\alpha^{\epsilon_\alpha} r_\alpha^{2-n+\frac{n}{2}\epsilon_\alpha} \eta_\alpha^2 dv_g$$

$$\leq C \int_{M - B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}} a_\alpha)} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} r_\alpha^{2-n} dv_g \leq C \alpha^{\frac{2-n}{4}} A_\alpha^{1-\frac{n}{2}} \int_{M - B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}} a_\alpha)} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} dv_g \tag{1.30}$$

On a maintenant, toujours d'après l'étape 3,

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g \leq C\int_{M-B_{x_\alpha}(\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^{-(1-\epsilon_\alpha)\frac{n}{2}} dv_g$$

$$\leq CA_\alpha^{-\frac{n}{4}(1-\epsilon_\alpha)}\alpha^{\frac{n}{8}}\int_{M-B_{x_\alpha}(\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}$$

Par définition de A_α, on obtient que

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g \leq C\alpha^{\frac{n}{8}}$$

En raisonnant comme dans l'étape 3, on montre alors par récurrence que, pour tout $k > 0$,

$$\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \leq C\alpha^k$$

et donc que

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \leq C\alpha^k A_\alpha^{\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)} \tag{1.31}$$

On pose maintenant $\tilde{\eta}_\alpha = 1 - \eta(\alpha^{-\frac{1}{4}}a_\alpha^{-1}d_g(x,x_\alpha))$. On multiplie (E_α) par $\tilde{\eta}_\alpha$ et on intègre sur M. Cela donne

$$\int_M u_\alpha^{\epsilon_\alpha}\tilde{\eta}_\alpha dv_g \leq \frac{C}{B_\alpha}\left(A_\alpha\int_M \mid \Delta_g\tilde{\eta}_\alpha \mid u_\alpha dv_g + \int_M u_\alpha dv_g\right)$$

Il est clair que

$$\mid \Delta_g\tilde{\eta}_\alpha \mid \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}A_\alpha}$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité de Hölder que

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} dv_g \leq \frac{C}{B_\alpha}\int_{M-B_{x_\alpha}(\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

On a déjà vu que $\lim B_\alpha A_\alpha^{\frac{n}{4}} = C$. On tire alors de (1.31) que, pour tout $k > 0$,

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} dv_g \leq CA_\alpha^{\frac{n}{2}}\alpha^k$$

Avec (1.30), cela montre que

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\alpha^{\frac{1}{4}}a_\alpha)} (u_\alpha r_\alpha\eta_\alpha)^2 dv_g \leq C\sqrt{\alpha}A_\alpha$$

Finalement, en utilisant (1.28) et (1.29), cela montre (1.27).
e- Montrons que :

$$\frac{1-\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^2 dv_\xi\right)^{1+\frac{2}{n}}}{A_\alpha\sqrt{\alpha}} \leq C \tag{1.32}$$

Nous rappelons d'abord quelques résultats sur le développement de la métrique. Soit ξ la métrique euclidienne. Puisque $(x_\alpha)_\alpha$ est une suite convergente (à une sous-suite près), on peut écrire, d'après le développement de Cartan de g dans les coordonnées géodésiques normales en $x_0 = \lim x_\alpha$, que, pour α grand

$$\mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_\xi^2 (x) \leq \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_g^2 (x)(1 + C.r_\alpha^2)$$

et

$$(1 - C.r_\alpha^2) dv_\xi \leq dv_g \leq (1 + C.r_\alpha^2) dv_\xi \tag{1.33}$$

D'où :

$$\int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_\xi^2 dv_\xi \leq \int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_g^2 (1 + C.r_\alpha^2) dv_g \tag{1.34}$$

Montrons maintenant (1.32). On a, avec (1.33) :

$$1 - \left(\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_\xi \right)^{1+\frac{2}{n}} \leq C \left(1 - \int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_\xi \right)$$

$$\leq C \left(\int_M u_\alpha^2 dv_g - \int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g + C \int_M (u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha)^2 dv_g \right)$$

$$\leq C \left(\int_M (u_\alpha (1 - \eta_\alpha))^2 dv_g + C \int_M (u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha)^2 dv_g \right)$$

On obtient alors (1.32) avec (1.23) et (1.27).

f- Montrons que :

$$\left(\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_\xi \right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \leq \left(\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} + C.A_\alpha^2 \sqrt{\alpha} \tag{1.35}$$

Multiplions (E_α) par

$$\frac{u_\alpha (r_\alpha \eta_\alpha)^2}{A_\alpha \sqrt{\alpha}}$$

et intégrons sur M :

$$\frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_M (\Delta_g u_\alpha) u_\alpha (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g + \frac{4 B_\alpha}{n A_\alpha \sqrt{\alpha}} \int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g$$

$$= \frac{k_\alpha}{A_\alpha \sqrt{\alpha}} \int_M (u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \tag{1.36}$$

On a, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_M (\Delta_g u_\alpha) u_\alpha (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g = \int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g + 2 \int_M < \nabla u_\alpha, \nabla (r_\alpha \eta_\alpha) >_g u_\alpha r_\alpha \eta_\alpha dv_g$$

$$\leq \int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g + 2 \left(\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M u_\alpha^2 \mid \nabla (r_\alpha \eta_\alpha) \mid_g^2 dv_g \right)^2$$

D'après (1.26), on en déduit que

$$\int_M (\Delta_g u_\alpha) u_\alpha (r_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g \leq C$$

Ainsi, en se servant de (1.27), (1.36) et du fait que $B_\alpha \geq C.A_\alpha^{-\frac{n}{4}}$, on a

$$\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}(r_\alpha\eta_\alpha)^2 dv_g \leq C\frac{A_\alpha\sqrt{\alpha}}{B_\alpha} \leq C.\sqrt{\alpha}A_\alpha^{1+\frac{n}{4}}$$

Le même raisonnement montrerait qu'on a aussi

$$\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}{r_\alpha}^2 dv_g \leq C.\sqrt{\alpha}A_\alpha^{1+\frac{n}{4}} \tag{1.37}$$

Maintenant

$$\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_\xi\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \leq \left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g + C\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

$$\leq \left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}\left(1+\frac{\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 dv_g}{\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

Il est clair que

$$\frac{\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 dv_g}{\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \to 0$$

En développant, on trouve que

$$\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_\xi\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \leq \left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

$$+C.\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}-1}\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 dv_g$$

De (1.37) et du fait que $\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \leq C.A_\alpha^{\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)}$, on tire (1.35) (on a aussi utilisé le fait que $A_\alpha^{\epsilon_\alpha} \to C > 0$).

g- Conclusion

Par Carlen et Loss [9], on sait que

$$\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^2 dv_\xi\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq A_0(n)\int_M \mid \nabla u_\alpha\eta_\alpha \mid_\xi^2 dv_\xi\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_\xi\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

Il est clair que, d'après (1.26) et (1.34) :

$$\int_M \mid \nabla u_\alpha\eta_\alpha \mid_\xi^2 dv_\xi \leq \int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 \eta_\alpha^2 dv_g + C$$

Les relations (1.1) et (1.35) montrent que

$$\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^2 dv_\xi\right)^{1+\frac{2}{n}}$$

$$\leq A_0(n)\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 \eta_\alpha^2 dv_g\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} + C.\sqrt{\alpha}A_\alpha \tag{1.38}$$

Il faut se rappeler que par définition de u_α, on a

$$1 = (\frac{1}{\mu_\alpha}\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g + \frac{\alpha}{\mu_\alpha})A_\alpha \tag{1.39}$$

On calcule maintenant $((1.39)-(1.38))(A_\alpha\sqrt{\alpha})^{-1}$:

$$\frac{1-\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^2 dv_\xi\right)^{1+\frac{2}{n}}}{A_\alpha\sqrt{\alpha}} \geq -\frac{A_0(n)}{\sqrt{\alpha}}\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 \eta_\alpha^2 dv_g \frac{\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}}{A_\alpha}$$

$$+\frac{1}{\mu_\alpha\sqrt{\alpha}}\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g + \frac{\sqrt{\alpha}}{\mu_\alpha} - C$$

Notons que

$$\frac{1}{\mu_\alpha} \geq A_0(n)$$

et

$$\frac{\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}}{A_\alpha} \leq 1$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1-\left(\int_M (u_\alpha\eta_\alpha)^2 dv_\xi\right)^{1+\frac{2}{n}}}{A_\alpha\sqrt{\alpha}} \geq \frac{A_0(n)}{\sqrt{\alpha}}\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 (1-\eta_\alpha^2) dv_g + A_0(n)\sqrt{\alpha} - C$$

Le premier membre de cette inégalité est majoré par une constante (d'après (1.32)) tandis que le second tend vers $+\infty$. Cette contradiction prouve le théorème 1.

<u>Le cas des variétés à bord et des variétés complètes :</u>

Le théorème 1 reste vrai pour les variétés compactes à bord. La preuve s'adapte facilement de celle du cas des variétés sans bord. Le seul point auquel il faut faire attention est le cas où la suite x_α converge vers un point du bord. De plus, il faut noter que ce résultat reste vrai quand la métrique g n'est plus fixée. Plus précisément, si on considère $(g_\alpha)_\alpha$ une famille de métriques riemanniennes bornée dans $C^2(M)$ au sens donné dans le théorème ci-dessous, cette borne permet de contrôler chaque constante apparaissant dans la preuve. On en déduit alors le résultat suivant :

Théorème 4 *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \geq 1$. Notons $\mid Rm_g \mid$ et $\mid \nabla Rm_g \mid_g$ les normes de la courbure de Riemann de g et de son gradient. Soit r_g le rayon d'injectivité de g. Soit aussi C, C', $\delta > 0$ des constantes strictement positives telles que $\mid Rm_g \mid \leq C$, $\mid \nabla Rm_g \mid_g \leq C'$ et $r_g \geq \delta$. Alors, il existe $B > 0$ tel que, pour tout $u \in C_c^\infty(M)$,*

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} \leq (A_0(n)\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B\int_M u^2 dv_g)(\int_M \mid u \mid dv_g)^{\frac{4}{n}}$$

De plus, B ne dépend que de n, C, C' et δ.

La preuve de ce théorème se fait en utilisant un recouvrement de M avec des boules ainsi qu'une partition de l'unité liée à ce recouvrement. Le résultat dans le cas des variétés à bord appliqué à ces boules donne le théorème. Une étude complète de ce problème pour l'inégalité de Sobolev est faite dans Hebey et Vaugon [26].

1.3 Démonstration du théorème 2

Comme dans le théorème 1, on peut supposer que $Vol(M) = 1$. On écrit $N(A_0(n),B_0)(1)$. Cela donne : $B_0 \geq 1$. Maintenant, soit $x \in M$. Comme dans le théorème 1.4 de [14], on prend u, $u \not\equiv 0$ une fonction propre radiale associée à λ_1. On pose aussi

$$u_\epsilon = \begin{cases} u(\frac{r}{\epsilon}) - u(1) & \text{si} \quad r < \epsilon \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $r = d_g(x,.)$ et où d_g est la distance associée à g. On définit, pour $v \in C^\infty(M)$,

$$I_{B_0}(v) = \frac{A_0(n)(\int_M |\nabla v|_g^2 dv_g + B_0 \int_M v^2 dv_g)(\int_M |v| dv_g)^{\frac{4}{n}}}{(\int_M v^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}}}$$

D'après les résultats trouvés dans [14], on a

$$\frac{A_0(n) \int_M |\nabla u_\epsilon|_g^2 dv_g \left(\int_M |u_\epsilon| dv_g\right)^{\frac{4}{n}}}{\left(\int_M {u_\epsilon}^2 dv_g\right)^{1+\frac{2}{n}}} = 1 + \frac{1}{6n} X S_g(x)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

où

$$X = -\frac{2}{n+2} - \frac{n-2}{\lambda_1}$$

Toujours d'après [14], on a facilement

$$B_0 \frac{\left(\int_M |u_\epsilon| dv_g\right)^{\frac{4}{n}}}{\left(\int_M {u_\epsilon}^2 dv_g\right)^{\frac{2}{n}}} = B_0 Y \epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

où

$$Y = \left(\int_{\mathcal{B}} |u(x) - u(1)| dx\right)^{\frac{4}{n}} \left(\int_{\mathcal{B}} (u(x) - u(1))^2 dx\right)^{-\frac{2}{n}}$$

On a alors

$$I_{B_0}(u_\epsilon) = 1 + \epsilon^2 (\frac{1}{6n} X S_g(x) + B_0 Y) + o(\epsilon^2)$$

En conséquence, puisque $I_{B_0}(u) \geq 1$ pour tout $u \in H_1^2(M)$, on obtient que

$$B_0 \geq -\frac{X}{6nY} \max_{x \in M} S_g(x)$$

Il reste à calculer Y. Comme dans [14], on a :

$$Y = (-|\mathcal{B}| u(1))^{\frac{4}{n}} \left(\frac{n+2}{2} u(1)^2 |\mathcal{B}|\right)^{-\frac{2}{n}} = |\mathcal{B}|^{\frac{2}{n}} \left(\frac{n+2}{2}\right)^{-\frac{2}{n}}$$

d'où le théorème.

1.4 Démonstration du théorème 3

D'abord, posons

$$\tilde{B}_0 = \inf\{B > 0 \mid \tilde{N}(A_0(n),B) \text{ est valide}\}$$

Soit aussi $\alpha_0 = B_0 A_0(n)^{-1}$ et $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{B}_0 A_0(n)^{-1}$. Dans ce qui suit, les limites sont à prendre au sens $\alpha \to 0$. En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, on peut trouver une suite $(\epsilon_\alpha)_\alpha$ qui tend vers 0 et telle que, en définissant

$$\begin{aligned} J_\alpha(u) &= (\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + (\alpha_0 - \alpha))(\int_M \mid u \mid^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \\ \tilde{J}_\alpha(u) &= (\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + (\tilde{\alpha}_0 - \alpha)(\int_M \mid u \mid^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{2}{1+\epsilon_\alpha}})(\int_M \mid u \mid^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \end{aligned}$$

on ait

$$\mu_\alpha < A_0(n)^{-1} \text{ et } \mu_\alpha \to A_0(n)^{-1} \tag{1.40}$$

$$\tilde{\mu}_\alpha < A_0(n)^{-1} \text{ et } \tilde{\mu}_\alpha \to A_0(n)^{-1} \tag{1.41}$$

où $\mu_\alpha = \inf_{u \in \Lambda} J_\alpha(u)$ et où $\tilde{\mu}_\alpha = \inf_{u \in \Lambda} \tilde{J}_\alpha(u)$ (Λ est défini comme dans la démonstration du théorème 1). De plus, il existe deux fonctions positives u_α et $\tilde{u}_\alpha$ de classe C^2 telles que

$$\int_M u_\alpha^2 dv_g = 1 \text{ et } \mu_\alpha = J_\alpha(u_\alpha)$$

$$\int_M \tilde{u}_\alpha^2 dv_g = 1 \text{ et } \tilde{\mu}_\alpha = \tilde{J}_\alpha(\tilde{u}_\alpha)$$

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que

$$\liminf \int_M \mid u_\alpha \mid^{1+\epsilon_\alpha} dv_g > 0$$

En effet, du fait que $J_\alpha(u_\alpha) < A_0(n)^{-1}$, cela implique que

$$\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g \leq C$$

et les raisonnements standard (voir par exemple [14]) montrent que la suite (u_α) converge fortement dans $H^1(M)$ vers une fonction extrémale pour l'inégalité de Nash L^2. Supposons donc qu'au contraire,

$$\int_M \mid u_\alpha \mid^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \to 0$$

On peut alors trouver $a > 0$ assez petit pour que, pour tout $\alpha > 0$,

$$(\alpha_0 - a) - (\tilde{\alpha}_0 - \alpha)(\int_M \mid u_a \mid^{1+\epsilon_a} dv_g)^{\frac{2}{1+\epsilon_a}} > 0 \tag{1.42}$$

Soit $\alpha \in]0,a[$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} J_a(u_a) - \tilde{J}_\alpha(u_a) &= (\alpha_0 - a)(\int_M \mid u_a \mid^{1+\epsilon_a} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_a)}} - (\tilde{\alpha}_0 - \alpha)(\int_M \mid u_a \mid^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{1}{1+\epsilon_\alpha}(2+\frac{4}{n})} \\ &\geq (\alpha_0 - a)(\int_M \mid u_a \mid^{1+\epsilon_a} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_a)}} - (\tilde{\alpha}_0 - \alpha)(\int_M \mid u_a \mid^{1+\epsilon_a} dv_g)^{\frac{1}{1+\epsilon_a}(2+\frac{4}{n})} \end{aligned}$$

où le ϵ_α du second membre a été remplacé par ϵ_a. Ainsi,

$$J_a(u_a) - \tilde{J}_\alpha(u_a) \geq \left((\alpha_0 - a) - (\tilde{\alpha}_0 - \alpha)(\int_M \mid u_a \mid^{1+\epsilon_a} dv_g)^{\frac{2}{1+\epsilon_a}}\right)(\int_M \mid u_a \mid^{1+\epsilon_a} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_a)}}$$

Avec (1.42), on obtient $J_a(u_a) \geq \tilde{J}_\alpha(u_a)$. D'après la définition de $\tilde{u}_\alpha$, on a aussi $\tilde{J}_\alpha(u_\alpha) \leq \tilde{J}_\alpha(u_a)$. Finalement,

$$\tilde{J}_\alpha(u_\alpha) \leq J_a(u_a) \tag{1.43}$$

Les relations (1.43), (1.40) et (1.41) montrent que l'hypothèse que nous avons faite est fausse, d'où le théorème.

1.5 Exemples

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier de quelle manière la meilleure constante B_0 dans l'inégalité de Nash L^2 optimale dépend de la géométrie de (M,g) semble être un problème très difficile. Nous ne sommes actuellement en mesure de calculer explicitement B_0 que pour le cercle S^1. Même dans ce cas, la démonstration est loin d'être triviale (voir ci-dessous). L'exemple du tore $S^1(R)\times S^{n-1}(1)$ où le rayon du premier cercle tend vers 0 montre que l'idée naïve que, dans tous les cas,

$$B_0 = \max\left(Vol(M)^{-\frac{2}{n}}, \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2}+\frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \max_{x\in M} S_g(x)\right)$$

est fausse. Ce paragraphe est consacré à l'étude de ces exemples. Nous avons d'abord besoin d'un résultat général :

Proposition 1 *Supposons que l'inégalité de Nash L^1 (0) soit vraie sur M avec $A = A_0(n)$. Soit u la fonction extrémale de l'inégalité de Nash L^2 optimale donnée par le théorème 3. Si l'ensemble $\{x \in M | u(x) = 0\}$ est négligeable alors $B_0 = Vol(M)^{-\frac{2}{n}}$.*

Remarque : Ce résultat peut paraître étonnant car il montre qu'une fonction extrémale, si elle n'est pas constante, s'annule sur un ensemble de volume non nul. Cela se comprend mieux quand on remarque que les fonctions extrémales de l'inégalité de Nash standard sur $\mathbb{R}^n$ sont à support compact et ont donc elle-aussi la même propriété.

Quitte à multiplier la métrique par une constante, on peut supposer que $Vol(M) = 1$. Nous utilisons les mêmes notations que celles utilisées dans la démonstration du théorème 3. Montrons d'abord que $u \in C^1(M)$ et $u_\alpha \to u$ dans $C^1(M)$. Supposons que $\lim \| u_\alpha \|_\infty = +\infty$. Alors, soit $v_\alpha = \frac{u_\alpha}{\|u_\alpha\|_\infty}$. Remarquons que u_α vérifie la même équation que celle trouvée dans le théorème 1. On obtient facilement que $\| \Delta_g v_\alpha \|_\infty \le C$. Comme dans le théorème 1, on peut trouver $v \in C^0(M)$ telle que $v_\alpha \to v$ dans $C^0(M)$ (à une sous-suite près). Soit x_α un maximum u_α. Il existe x_0 tel que, à une sous-suite près, $x_\alpha \to x_0$. On a facilement $v(x_0) = 1$. Ainsi

$$\int_M v dv_g > 0$$

Cependant,

$$\int_M v dv_g = \lim \frac{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\| u_\alpha \|_\infty^{1+\epsilon_\alpha}} = 0$$

Cela montre que $\lim \| u_\alpha \|_\infty < +\infty$. En conséquence $\| \Delta_g u_\alpha \|_\infty \le C$. Le résultat en découle. Montrons maintenant la proposition. Puisque $Vol(\{x \in M | u(x) = 0\}) = 0$, on a

$$\lim \int_M u_\alpha^{\epsilon_\alpha} dv_g = 1$$

Posons

$$l_1 = \int_M u dv_g$$

$$l_\nabla = \int \mid \nabla u \mid^2 dv_g$$

En intégrant (E_α) (où (E_α) est la même équation que celle trouvée dans la démonstration du théorème 1), on obtient

$$\frac{4}{n} \lim B_\alpha = \lim k_\alpha l_1$$

D'après les définitions de B_α, k_α et du fait que $\lim I_\alpha(u_\alpha) = A_0(n)^{-1}$, on a

$$\frac{4A_0(n)^{-1}}{nl_1} = \left(2l_\nabla l_1^{\frac{4}{n}} + \frac{4}{n}A_0(n)^{-1}\right) l_1$$

Comme $\lim I_\alpha(u_\alpha) = A_0(n)^{-1}$, on a aussi

$$1 = \left(A_0(n)l_\nabla + B_0\right) l_1{}^{\frac{4}{n}}$$

Il est facile de voir que cela entraîne que

$$B_0 = \left((1+\frac{2}{n}) - \frac{2}{n}l_1^{-2}\right) l_1^{-\frac{4}{n}}$$

Posons maintenant, pour $0 \leq x \leq 1$:

$$f(x) = \left((1+\frac{2}{n}) - \frac{2}{n}x^{-2}\right) x^{-\frac{4}{n}}$$

Une étude très simple de f montre que $f(x) \leq 1$ avec égalité si et seulement si $x = 1$. Comme $B_0 \geq 1$, on a forcément $l_1 = 1$ et $B_0 = 1$.
Une application de ce résultat est le corollaire suivant
Corollaire 2 *: Sur le cercle standard de rayon* 1, $B_0 = (2\pi)^{-2}$.
Démonstration : Conservons les mêmes notations. D'après ce qui précède, il suffit de voir que

$$Vol(\{x \in M | u(x) = 0\}) = 0$$

Supposons qu'il existe $x \in S^1$ tel que $u(x) = 0$. Par les travaux de Carlen et Loss [9], on aurait

$$\left(\int_{S^1} u^2 dv_\xi\right)^3 \leq A_0(1) \int_{S^1} \mid \nabla u \mid_\xi^2 dv_\xi \left(\int_{S^1} u dv_\xi\right)^4$$

De plus, u étant une fonction extrémale :

$$\left(\int_{S^1} u^2 dv_\xi\right)^3 = \left(A_0(1) \int_{S^1} \mid \nabla u \mid_\xi^2 dv_\xi + B_0\right) \left(\int_{S^1} u dv_\xi\right)^4$$

On obtient ainsi une contradiction. Le résultat en découle.

Donnons un autre exemple. Remarquons qu'en prenant $M = T^{n-1}$, B_0 peut être aussi grand que l'on veut alors que la métrique est euclidienne.

Proposition 2 *Soit* (M,g) *une variété riemannienne compacte de classe* C^∞ *et de dimension* $n-1$*, avec* $n \geq 2$*. Soit* G_k *le groupe des rotations de* $\mathbb{R}^2$ *de centre* 0 *et d'angle* $\frac{2\pi}{k}$*. Soit aussi* $S_k = S^1/G_k$ *et* $M_k = S_k \times M$ *munie de la métrique produit* g_k*. Alors, quand* k *tend vers* $+\infty$*,* $B_0(M_k)$ *tend vers* $+\infty$ *au sens suivant :* $\forall C > 0$*,* $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall\, k \geq k_0$*,* $B_0(M_k) \geq C.Vol(M_k)^{-\frac{2}{n}}$

Démonstration : Supposons qu'au contraire, il existe $C > 0$ et $(k_i)_i$ tels que $\lim_i k_i = +\infty$ et

$$B_0(M_{k_i}) \leq C.Vol(M_{k_i})^{-\frac{2}{n}}$$

Il est à noter que $Vol(M_{k_i}) = \frac{Vol(M_1)}{k}$. Il est alors clair qu'on peut trouver $u \in C^\infty(M)$ telle que

$$\left(\int_M u dv_g\right)^2 < C.Vol(M) \int_M u^2 dv_g$$

Soit $\tilde{u} \in C^\infty(M_{k_i})$ définie par

$$\forall\ (t,x) \in S_k \times M,\ \tilde{u}(t,x) = u(x)$$

On a

$$\left(\int_{M_{k_i}} \tilde{u}^2 dv_{g_{k_i}}\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq \left(A_0(n)\int_{M_{k_i}} \mid \nabla\tilde{u}\mid^2_{g_{k_i}} dv_{g_{k_i}} + \left(C.\frac{Vol(M_1)}{k_i}\right)^{-\frac{2}{n}} \int_{M_{k_i}} \tilde{u}^2 dv_{g_{k_i}}\right)\left(\int_{M_{k_i}} \tilde{u} dv_{g_{k_i}}\right)^{\frac{4}{n}}$$

Sur M_1, on a

$$\left(\int_{M_1} \tilde{u}^2 dv_{g_1}\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq (k_i)^{-\frac{2}{n}}\left(A_0(n)\int_{M_1} \mid \nabla\tilde{u}\mid^2_{g_1} dv_{g_1} + \left(C.\frac{Vol(M_1)}{k_i}\right)^{-\frac{2}{n}} \int_{M_1} \tilde{u}^2 dv_{g_1}\right)\left(\int_{M_1} \tilde{u} dv_{g_1}\right)^{\frac{4}{n}}$$

et sur M (en utilisant la définition de $\tilde{u}$) :

$$\left(2\pi\int_M u^2 dv_g\right)^{1+\frac{2}{n}} \leq (k_i)^{-\frac{2}{n}}\left(A_0(n)2\pi\int_M \mid \nabla u\mid^2_g dv_g + \left(C.\frac{Vol(M_1)}{k_i}\right)^{-\frac{2}{n}} 2\pi\int_M u^2 dv_g\right) \times$$

$$\left(2\pi\int_M u dv_g\right)^{\frac{4}{n}}$$

Quand $k_i \to +\infty$, on voit que (en utilisant le fait que $Vol(M_1) = 2\pi Vol(M)$)

$$\left(\int_M u dv_g\right)^2 \geq C.Vol(M)\int_M u^2 dv_g$$

Il faut se souvenir que u a justement été choisie pour que l'inégalité précédente soit fausse. Cela démontre la proposition.

Chapitre 2

Fonctions extrémales pour l'inégalité de Nash L^2 optimale

2.1 Introduction

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de classe C^∞ et de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'inégalité suivante : pour $u \in C^\infty(M)$,

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} \leq (A \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g)(\int_M \mid u \mid dv_g)^{\frac{4}{n}} \qquad N(A,B)(u)$$

On dit que $N(A,B)$ est *valide* si $N(A,B)(u)$ est vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$. Dans ce qui suit, on se référera à cette inégalité sous le nom d'inégalité de Nash L^2. Définissons maintenant

$$A_0 = \inf\{A > 0 | \text{ il existe } B > 0 \text{ t.q. } N(A,B) \text{ soit valide } \}$$

Il a été montré dans le chapitre précédent que

$$A_0 = A_0(n) = \frac{(n+2)^{\frac{n+2}{n}}}{2^{\frac{2}{n}} n \lambda_1(\mathcal{B}) | \mathcal{B} |^{\frac{2}{n}}}$$

et qu'il existe $B > 0$ tel que l'inégalité optimale $N(A_0(n),B)$ soit valide. Une autre forme d'inégalité de Nash optimale est étudiée dans Druet-Hebey-Vaugon [14]. Soit maintenant

$$B_0 = \inf\{B \in \mathbb{R} \text{ t.q. } N(A_0(n),B) \text{ est valide } \}$$

Il a aussi été montré dans le chapitre précédent que, pour toute variété riemannienne compacte de classe $C^\infty(M,g)$,

$$B_0 \geq \max\left(Vol(M)^{-\frac{2}{n}}, \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n} \left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1} \right) \left(\frac{n+2}{2} \right)^{\frac{2}{n}} \max_{x \in M} S_g(x) \right)$$

où $\mid \mathcal{B} \mid$ est le volume de la boule unité standard $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, λ_1 est la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur $\mathcal{B}$, $Vol(M)$ est le volume de (M,g), et $S_g(x)$ est la courbure scalaire de g en x. On dira maintenant que $u \in H_1^2(M)$, $u \not\equiv 0$ est une fonction extrémale pour l'inégalité de Nash L^2 optimale $N(A_0(n),B_0)$ si

$$(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}} = (A_0(n) \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B_0 \int_M u^2 dv_g)(\int_M \mid u \mid dv_g)^{\frac{4}{n}}$$

Une étude similaire a été faite dans l'article de Djadli et Druet [12] dans le cadre des inégalités de Sobolev optimales. L'étude faite ici, bien que très proche du point de vue de l'énoncé de celle de [12], est de nature très différente et les problèmes rencontrés y sont différents. Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1 *Soit* (M,g) *une variété riemannienne compacte de classe* C^∞ *et de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit aussi* B_0 *défini comme ci-dessus. On suppose que*

$$B_0 > \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n} \left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1} \right) \left(\frac{n+2}{2} \right)^{\frac{2}{n}} \max_{x \in M} S_g(x)$$

Alors, il existe des fonctions extrémales de classe $C^{1,a}(M)$ $(0 < a < 1)$ *pour l'inégalité de Nash* L^2 *optimale.*

En conséquence du théorème 1, on a immédiatement
Corollaire 1 *Soit* (M,g) *une variété riemannienne compacte de classe* C^∞ *et de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que*

$$Vol(M)^{-\frac{2}{n}} > \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n} \left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1} \right) \left(\frac{n+2}{2} \right)^{\frac{2}{n}} \max_{x \in M} S_g(x)$$

Alors, il existe des fonctions extrémales de classe $C^{1,a}(M)$ $(0 < a < 1)$ *pour l'inégalité de Nash* L^2 *optimale.*
Remarques : Il est bien connu que

$$\frac{1}{2}\sqrt{n(n+4)} \leq \lambda_1 \leq \sqrt{\frac{1}{2}(n+2)(n+6)}$$

(cf. [9] et [31]). Il est alors facile de voir que (M,g) satisfait les hypothèses du corollaire précédent si par exemple :

- sa courbure courbure scalaire est négative ou nulle;
- (M,g) est la sphère standard de dimension 2;
- (M,g) est l'espace projectif standard de dimension 2;
- (M,g) est le quotient d'une sphère standard de dimension impaire par un groupe d'isométries suffisamment gros (en dimension paire, ces quotients n'existent pas en tant que variété).

Pour $n \geq 2$, les résultats obtenus dans le chapitre précédent sur l'existence de fonctions extrémales pour l'inégalité de Nash L^2 optimale sont une conséquence du théorème 1. Pour $n = 1$, nous avons montré, toujours dans le chapitre précédent que les fonctions constantes sont des fonctions extrémales pour l'inégalité de Nash L^2 optimale.

2.2 Démonstration du théorème 1

Soit $\alpha_0 = B_0 A_0(n)^{-1}$ où B_0 est définie dans l'introduction. Pour $\alpha > 0$, on pose aussi

$$\begin{aligned} I_\alpha(u) &= \frac{(\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + (\alpha_0 - \alpha)\int_M u^2 dv_g)(\int_M \mid u \mid^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}}{(\int_M u^2 dv_g)^{1+\frac{2}{n}}} \\ \Lambda &= \{u \in C^\infty(M) \text{ t.q. } \int_M u^2 dv_g = 1\} \end{aligned}$$

et

$$\mu_\alpha = \inf_{u \in \Lambda} I_\alpha(u)$$

où ϵ_α est choisi pour que

$$\lim_{\alpha\to 0}\epsilon_\alpha = 0,\ \mu_\alpha < A_0(n)^{-1} \text{ et } \lim_{\alpha\to 0}\mu_\alpha = A_0(n)^{-1} \tag{2.1}$$

(voir à ce sujet le chapitre précédent). Alors, il existe $u_\alpha \in H_1^2(M)$, $u_\alpha \geq 0$, telle que

$$\int_M u_\alpha^2 dv_g = 1 \text{ et } \mu_\alpha = I_\alpha(u_\alpha)$$

En écrivant l'équation d'Euler de u_α, on voit que, au sens des distributions,

$$2A_\alpha \Delta_g u_\alpha + \frac{4}{n}B_\alpha u_\alpha^{\epsilon_\alpha} = k_\alpha u_\alpha \tag{E_α}$$

où Δ_g est le laplacien et où

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \left(\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}\\
B_\alpha &= \left(\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g + (\alpha_0-\alpha)\right)\left(\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}-1}\\
k_\alpha &= \frac{4}{n}\mu_\alpha + 2\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g\left(\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}
\end{aligned}$$

Par le théorème d'inclusion de Sobolev, on a $u_\alpha \in L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$. Des estimées standard sur les opérateurs elliptiques (voir [22]) montrent alors que $u_\alpha \in C^2(M)$. Pour montrer le théorème, on suppose qu'il n'existe pas de fonction extrémale pour l'inégalité de Nash L^2 optimale et on montre qu'alors,

$$B_0 \leq \frac{\mid \mathcal{B}\mid^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2}+\frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}}\max_{x\in M} S_g(x)$$

Il est facile de voir que l'assertion suivante

$$\liminf_{\alpha\to 0}\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g > 0$$

implique l'existence de fonctions extrémales. En effet, puisque $I_\alpha(u_\alpha) < A_0(n)^{-1}$, il vient

$$\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g \leq C$$

Par les méthodes classiques, on obtient alors l'existence de fonctions extrémales. Dans ce qui suit, on suppose donc que

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g = 0$$

ou, de manière équivalente,

$$\lim_{\alpha\to 0} A_\alpha = 0 \tag{2.2}$$

Maintenant, en utilisant $N(A_0(n),B_0)(u_\alpha)$, on a

$$\liminf_{\alpha\to 0}\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g(\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \geq A_0(n)^{-1}$$

De plus, puisque $\mu_\alpha < A_0(n)^{-1}$, il est clair que

$$\limsup_{\alpha \to 0} \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g (\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \leq A_0(n)^{-1}$$

Une conséquence facile est alors que

$$\lim_{\alpha \to 0} A_\alpha \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g = A_0(n)^{-1} \tag{2.3}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} B_\alpha \int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = A_0(n)^{-1} \tag{2.4}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} k_\alpha = (2 + \frac{4}{n}) A_0(n)^{-1} \tag{2.5}$$

La démonstration du théorème se fait en plusieurs étapes. Les étapes 1 à 4 sont similaires à celles faites dans le chapitre précédent mais seront tout de même reprises pour la bonne compréhension de ce chapitre, en notant de plus qu'ici, le paramètre α ne tend plus vers ∞ mais vers 0. L'étape 5 est une étape préparatoire à l'étape 6. Posons $a_\alpha = A_\alpha^{\frac{1}{2}}$. Soit aussi x_α un point de M tel que $u_\alpha(x_\alpha) = \| u_\alpha \|_\infty$. Dans ce qui suit, $B(p,r)$ est la boule de centre p et de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ et $B_p(r)$ est la boule de centre p et de rayon r dans M. On suppose de plus que toutes les suites bornées sont convergentes lorsque α tend vers 0 sans préciser à chaque fois qu'elle le sont à une suite extraite près. Enfin, C désignera une constante strictement positive indépendante de α.

Étape 1 *Pour tout* $\delta > 0$ *:* $\liminf \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} > 0$

Posons, pour $x \in B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} g_\alpha(x) & = & (exp_{x_\alpha})^* g(a_\alpha x) \\ \varphi_\alpha(x) & = & \| u_\alpha \|_\infty^{-1} u_\alpha(exp_{x_\alpha}(a_\alpha x)) \end{array}$$

Un calcul facile montre que

$$\Delta_{g_\alpha} \varphi_\alpha + \frac{2}{n} \| u_\alpha \|_\infty^{-1+\epsilon_\alpha} B_\alpha \varphi_\alpha^{\epsilon_\alpha} = \frac{k_\alpha}{2} \varphi_\alpha \tag{$\tilde{E}_\alpha$}$$

Comme $\Delta_g u_\alpha(x_\alpha) \geq 0$, on déduit de (E_α) et (2.5) que

$$\| u_\alpha \|_\infty^{\epsilon_\alpha} B_\alpha \leq C \| u_\alpha \|_\infty \tag{2.6}$$

Puisque $\| \varphi_\alpha \|_{L^\infty(B(0,\delta))} \leq 1$ et d'après $(\tilde{E}_\alpha)$:

$$\| \Delta_{g_\alpha} \varphi_\alpha \|_{L^\infty(B(0,\delta))} \leq C$$

Des estimées standard sur les opérateurs elliptiques (voir [22]) montrent que, pour $a \in]0,1[$, $\| \varphi_\alpha \|_{C^{1,a}(B(0,\delta))} \leq C$. La suite de fonctions $(\varphi_\alpha)_\alpha$ est alors équicontinue et, grâce au théorème d'Ascoli, on sait qu'il existe $\varphi \in C^0(B(0,\delta))$ telle que $\varphi_\alpha \to \varphi$ dans $C^0(B(0,\delta))$. On a maintenant

$$\varphi(0) = \lim \varphi_\alpha(0) = 1 \tag{2.7}$$

et

$$\int_{B(0,\delta)} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{g_\alpha} = \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\epsilon_\alpha)} A_\alpha^{-\frac{n}{2}} \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

$$= \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\epsilon_\alpha)} A_\alpha^{-\frac{n}{4}(1-\epsilon_\alpha)} \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}$$

$$\leq \| u_\alpha \|_\infty^{-1} A_\alpha^{-\frac{n}{4}} \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \tag{2.8}$$

De plus, puisque $\| u_\alpha \|_\infty^{\epsilon_\alpha} \geq 1$, (2.6) entraîne que $\| u_\alpha \|_\infty \geq C.B_\alpha$ et puisque $A_\alpha \to 0$, on a, en utilisant (2.4), $B_\alpha \geq C.A_\alpha^{-\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)} \geq C.A_\alpha^{-\frac{n}{4}}$. L'inégalité (2.8) devient alors

$$\int_{B(0,\delta)} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{g_\alpha} \leq C \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}$$

Or, d'après (2.7) et du fait que $g_\alpha \to \xi$ dans $C^1(B(0,\delta))$, on a

$$\int_{B(0,\delta)} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{g_\alpha} \to \int_{B(0,\delta)} \varphi dv_\xi > 0 \tag{2.9}$$

On aboutit finalement à

$$\frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \geq C > 0$$

ce qui achève la démonstration de l'étape.

Remarque : En revenant à (2.8) et à (2.9), on voit que

$$A_\alpha^{\frac{n}{4}} \| u_\alpha \|_\infty \to C > 0 \tag{2.10}$$

Étape 2 *Soit $(c_\alpha)_\alpha$ une suite de réels strictement positifs tels que $\frac{a_\alpha}{c_\alpha} \to 0$. Alors,*

$$\lim \frac{\int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} = 1$$

Soit $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ choisie de sorte que

$$\begin{array}{rc} (i) & \eta([0,\frac{1}{2}]) = \{1\} \\ (ii) & \eta([1,+\infty[) = \{0\} \\ (iii) & 0 \leq \eta \leq 1 \end{array}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\eta_{\alpha,k} = \left(\eta(c_\alpha^{-1} d_g(x,x_\alpha))\right)^{2^k}$. En multipliant (E_α) par ${\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha$ et en intégrant sur M, il vient

$$2A_\alpha \int_M | \nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha |_g^2 dv_g - 2A_\alpha \int_M | \nabla \eta_{\alpha,k} |_g^2 u_\alpha^2 dv_g + \frac{4}{n} B_\alpha \int_M {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

$$= k_\alpha \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g \tag{2.11}$$

L'inégalité $N(A_0(n)+\epsilon,B_\epsilon)(\eta_{\alpha,k}u_\alpha)$ implique alors que

$$2A_\alpha\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}u_\alpha \mid_g^2 dv_g - 2A_\alpha\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k} \mid_g^2 u_\alpha{}_g^2 dv_g + \frac{4}{n}B_\alpha\int_M \eta_{\alpha,k}{}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g$$

$$\leq k_\alpha\Big((A_0(n)+\epsilon)\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}u_\alpha \mid_g^2 dv_g(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} +$$
$$B_\epsilon\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^2 dv_g(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}\Big)^{\frac{n}{n+2}} \tag{2.12}$$

L'hypothèse faite sur la suite $(c_\alpha)_\alpha$ permet d'avoir

$$\mid \nabla\eta_{\alpha,k} \mid_g^2 \leq \frac{C}{c_\alpha^2} \Rightarrow A_\alpha\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k} \mid_g^2 u_\alpha^2 dv_g \to 0$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \lim\frac{\int_M \eta_{\alpha,k}{}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}\\ \tilde\lambda_k &= \lim\frac{\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}\end{aligned}$$

D'après la définition de $\eta_{\alpha,k}$, on a, pour $k\in\mathbb{N}$

$$\lambda_{k+1}\leq\tilde\lambda_{k+1}\leq\lambda_k\leq\tilde\lambda_k\leq\mu=\lim\frac{\int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)}u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g} \tag{2.13}$$

et d'après l'étape 1,

$$\exists C>0 \text{ t.q. } \forall k\in\mathbb{N},\lambda_k\geq C \tag{2.14}$$

Montrons maintenant que $\lambda_k\leq\tilde\lambda_k^2$. Dans ce but, posons $L_k=\lim A_\alpha\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}u_\alpha \mid_g^2 dv_g$. On remarque que, par (2.4),

$$\lim B_\alpha\int_M \eta_{\alpha,k}{}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g=\lambda_k A_0(n)^{-1}$$

et

$$k_\alpha\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^2 dv_g\leq C$$

En particulier, (2.11) donne $L_k<+\infty$. Il est en outre clair que, par (2.3), (2.4) et la définition de A_α,

$$\lim\int_M \mid \nabla\eta_{\alpha,k}u_\alpha \mid_g^2 dv_g(\int_M (\eta_{\alpha,k}u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}=L_k\tilde\lambda_k^{\frac{4}{n}}$$

La relation (2.12) conduit alors à

$$2L_k+\frac{4}{n}A_0(n)^{-1}\lambda_k\leq(2+\frac{4}{n})A_0(n)^{-1}((A_0(n)+\epsilon)L_k\tilde\lambda_k^{\frac{4}{n}})^{\frac{n}{n+2}}$$

En notant $\tilde{L}_k = A_0(n)L_k$, on obtient, puisque le choix de ϵ est arbitraire,

$$2\tilde{L}_k + \frac{4}{n}\lambda_k \leq (2+\frac{4}{n})\tilde{L}_k^{\frac{n}{n+2}}\tilde{\lambda}_k^{\frac{4}{n+2}}$$

On définit alors, pour x,y,z : $f(x,y,z) = (2+\frac{4}{n})x^{\frac{n}{n+2}}y^{\frac{4}{n+2}} - (\frac{4}{n}z + 2x)$. Dérivons f par rapport à la variable x. On voit que $\forall x,y,z > 0$, $f(x,y,z) \leq f(y^2,y,z)$, et ainsi $f(\tilde{L}_k,\tilde{\lambda}_k,\lambda_k) \leq f(\tilde{\lambda}_k^2,\tilde{\lambda}_k,\lambda_k) = \frac{4}{n}(\tilde{\lambda}_k^2 - \lambda_k)$. On remarque alors que $\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k^2$. Donc , en se servant de (2.13) et (2.14), on montre que $\forall N \in \mathbb{N}$, $0 < C \leq {\lambda_0}^N \leq \mu$. Puisque $\mu \leq 1$, il en découle que $\mu = 1$ ce qui termine la démonstration de l'étape 2. Nous avons aussi montré que $\tilde{L}_k = 1$ pour tout $k > 0$. Il en découle alors facilement que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g}{\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g} = 1 \tag{2.15}$$

En conséquence, avec (2.11), on obtient que :

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g}{\int_M u_\alpha^2 dv_g} = 1 \tag{2.16}$$

Étape 3 *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in M$:*

$$u_\alpha(x)d(x,x_\alpha)^{\frac{n}{2}} \leq C$$

où d est la distance relative à g.

Pour la démonstration de cette étape, raisonnons par l'absurde. Supposons en effet que l'assertion suivante est vraie

$$\exists y_\alpha \in M \text{ t.q. } u_\alpha(y_\alpha)d(y_\alpha,x_\alpha)^{\frac{n}{2}} \to +\infty \tag{H}$$

Posons

$$v_\alpha = u_\alpha(y_\alpha)d(y_\alpha,x_\alpha)^{\frac{n}{2}}$$

Le point y_α peut bien sûr être choisi de manière à ce que

$$v_\alpha = \parallel u_\alpha(.)d(.,x_\alpha)^{\frac{n}{2}} \parallel_\infty$$

Montrons d'abord que, si ν est assez petit,

$$B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}) \cap B_{x_\alpha}(a_\alpha v_\alpha^\nu) = \emptyset \tag{2.17}$$

Il suffit pour cela de montrer que $d(x_\alpha,y_\alpha) \geq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}} + a_\alpha v_\alpha^\nu$, ou, de manière équivalente, que $v_\alpha^{\frac{2}{n}-\nu} \geq v_\alpha^{-\nu} + a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n}}$. Si $\nu < \frac{2}{n}$, nous déduisons de (H) que $v_\alpha^{\frac{2}{n}-\nu} \to +\infty$ et que $v_\alpha^{-\nu} \to 0$. Il reste donc seulement à voir que $a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n}} \leq C$. On a $a_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n}} \leq a_\alpha \parallel u_\alpha \parallel_\infty^{\frac{2}{n}}$. Puisque $a_\alpha = A_\alpha^{\frac{1}{2}}$, on tire de (2.10) que $a_\alpha \parallel u_\alpha \parallel_\infty^{\frac{2}{n}} \leq C$. La relation (2.17) en découle. Posons maintenant, pour $x \in B(0,1)$:

$$\begin{aligned} h_\alpha(x) &= (exp_{y_\alpha})^* g(l_\alpha x) \\ \psi_\alpha(x) &= u_\alpha(y_\alpha)^{-1} u_\alpha(exp_{y_\alpha}(l_\alpha x)) \end{aligned}$$

où

$$l_\alpha = \parallel u_\alpha \parallel_\infty^{-\frac{n+4}{2n}} u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Sur la boule $B(0,1)$, on a

$$\Delta_{h_\alpha}\psi_\alpha = \frac{k_\alpha \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\frac{4}{n})} u_\alpha(y_\alpha)}{2A_\alpha}\psi_\alpha - \frac{2B_\alpha \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\frac{4}{n})} u_\alpha(y_\alpha)^{\epsilon_\alpha}}{nA_\alpha}\psi_\alpha^{\epsilon_\alpha} \qquad (E_\alpha{}')$$

De plus

$$h_\alpha \to \xi \text{ in } C^1(B(0,1)) \qquad (2.18)$$

On a aussi $\| u_\alpha \|_{L^\infty(B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}))} \leq C.u_\alpha(y_\alpha)$. Pour le voir, on remarque que, par définition de y_α, pour tout $x \in B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})$,

$$u_\alpha(y_\alpha) d(x_\alpha,y_\alpha)^{\frac{n}{2}} \geq u_\alpha(x) d(x_\alpha,x)^{\frac{n}{2}} \qquad (2.19)$$

En outre, du fait que $x \in B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})$,

$$d(y_\alpha,x) \leq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}$$

et (H) implique que $u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}} \leq \frac{1}{2}d(x_\alpha,y_\alpha)$. Ainsi, on obtient

$$d(x,x_\alpha) \geq d(x_\alpha,y_\alpha) - d(x,y_\alpha) \geq d(x_\alpha,y_\alpha) - u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}} \geq \frac{1}{2}d(x_\alpha,y_\alpha)$$

Le résultat provient alors de (2.19). Maintenant, puisque $l_\alpha \leq u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}$, il s'ensuit que $\| \psi_\alpha \|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C$. D'après (2.6), (2.10) et le fait que, par (2.4), $B_\alpha A_\alpha^{\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)} \to C > 0$, on a

$$\| u_\alpha \|_\infty^{\epsilon_\alpha} \to C \qquad (2.20)$$

Les relations (2.6), (2.10) et (2.20) impliquent que (E'_α) est à coefficients bornés et donc

$$\| \Delta_{h_\alpha}\psi_\alpha \|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C$$

Comme à l'étape 1, on montre l'existence de $\psi \in C^0(B(0,1))$ telle que, quitte à extraire une sous-suite en α,

$$\psi_\alpha \to \psi \text{ dans } C^0(B(0,1))$$

Ici, ψ est telle que $\psi(0) = 1$ et en conséquence

$$\int_{B(0,1)} \psi dx > 0 \qquad (2.21)$$

Cependant, de (2.18), on tire que

$$\int_{B(0,1)} \psi dx = \lim \int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{h_\alpha}$$

De plus,

$$\int_{B(0,1)} \psi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{h_\alpha} = \beta_\alpha$$

où

$$\beta_\alpha = A_\alpha^{\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)} u_\alpha(y_\alpha)^{-(1+\epsilon_\alpha)} l_\alpha^{-n} \left(\frac{\int_{B_{y_\alpha}(l_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{A_\alpha^{\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)}} \right)$$

Si on montre que $\lim \beta_\alpha = 0$, ce qui est en contradiction avec (2.21), l'étape sera complètement démontrée. Posons d'abord

$$m_\alpha = \frac{u_\alpha(y_\alpha)}{\| u_\alpha \|_\infty}$$

Il est clair que, d'après (2.10) et les définition de l_α et A_α :

$$\beta_\alpha \leq C m_\alpha^{-(\frac{n}{2}+1)} \left(\frac{\int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(l_\alpha))} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \right)$$

L'étape précédente et (2.17) entraînent que

$$\lim \left(\frac{\int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \right) = 0 \tag{2.22}$$

Si $m_\alpha \geq C > 0$, alors $\beta_\alpha \to 0$ ce qui termine la démonstration. Supposons donc que $\lim m_\alpha = 0$. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$m_\alpha^{-\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^k} \int_{B_{y_\alpha}(2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^2 dv_g \to 0 \tag{H_k}$$

Commençons par montrer que (H_0) est vraie. Nous avons vu que

$$\| u_\alpha \|_{L^\infty(B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}}))} \leq C.u_\alpha(y_\alpha)$$

Ainsi, en remarquant que $u_\alpha(y_\alpha) \to \infty$, on obtient que

$$\int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^2 dv_g \leq C u_\alpha(y_\alpha) \int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \leq C m_\alpha \| u_\alpha \|_\infty \int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

Les relations (2.10) et (2.22) ainsi que la définition de A_α impliquent alors que

$$\lim \| u_\alpha \|_\infty \int_{B_{y_\alpha}(u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = 0$$

(H_0) en découle. Soit maintenant $\epsilon_k = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^k$ et supposons que (H_k) est vraie. Montrons que (H_{k+1}) est vraie aussi. Soit pour cela $\eta_{\alpha,k}(x) = \eta(u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{2}{n}} 2^k d_g(x,y_\alpha))$ où η est comme à l'étape 2. Multiplions (E_α) par

$$\frac{(\eta_{\alpha,k})^2 u_\alpha}{m_\alpha^{\epsilon_k}}$$

et intégrons sur M. Cela donne :

$$2A_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M | \nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha |_g^2 dv_g - 2A_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M | \nabla \eta_{\alpha,k} |_g^2 u_\alpha^2 dv_g + \frac{4}{n} B_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

$$= k_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g \tag{2.23}$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence (H_k) :

$$2A_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M | \nabla \eta_{\alpha,k} |_g^2 u_\alpha^2 dv_g \leq C A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{4}{n}} m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_{B_{y_\alpha}(2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^2 dv_g \leq C A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{4}{n}}$$

De plus, avec (2.10), $A_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\frac{4}{n}} = A_\alpha m_\alpha^{\frac{4}{n}} \| u_\alpha \|_\infty^{\frac{4}{n}} \leq C.m_\alpha^{\frac{4}{n}} \to 0$. En appliquant encore (H_k) et aussi (2.5),

$$k_\alpha m_\alpha^{-\epsilon_k} \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g \to 0$$

Ainsi, par (2.23)

$$2A_\alpha \int_M |\nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha|_g^2 dv_g \leq C.m_\alpha^{\epsilon_k} \tag{2.24}$$

$$\frac{4}{n} B_\alpha \int_M {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \leq C.m_\alpha^{\epsilon_k}$$

Quitte à remplacer $\eta_{\alpha,k}$ par $\sqrt{\eta_{\alpha,k}}$, on a également

$$\frac{4}{n} B_\alpha \int_M {\eta_{\alpha,k}}^{1+\epsilon_\alpha} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \leq C.m_\alpha^{\epsilon_k} \tag{2.25}$$

De plus, en utilisant $N(A,B)(\eta_{\alpha,k} u_\alpha)$, il est facile de voir que

$$\left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}} \leq A. \int_M |\nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha|_g^2 dv_g \left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

$$+B. \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g \left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

On a même

$$\left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}} \leq C. \int_M |\nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha|_g^2 dv_g \left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

$$\leq \frac{C}{A_\alpha B_\alpha^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}} \left(\int_M |\nabla \eta_{\alpha,k} u_\alpha|_g^2 dv_g A_\alpha\right) \left(B_\alpha \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

Avec (2.24) et (2.25), nous obtenons que

$$\left(\int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g\right)^{\frac{n+2}{n}} \leq \frac{C}{A_\alpha B_\alpha^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}} .m_\alpha^{(1+\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)})\epsilon_k}$$

D'après (2.4), $A_\alpha B_\alpha^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \geq C > 0$. De plus,

$$\int_{B_{y_\alpha}(2^{-(k+1)} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^2 dv_g \leq \int_M (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^2 dv_g$$

Comme $\frac{n+3}{n+2} < \frac{n+4}{n+2}$, (H_{k+1}) en découle. En conséquence, (H_k) est vraie pour tout k. En revenant à (2.25), on a, pour tout k,

$$\lim m_\alpha^{-\epsilon_k} B_\alpha \int_{B_{y_\alpha}(2^{-k} u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}})} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g = 0$$

En utilisant le fait que $\lim l_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n}} = 0$ et en choisissant k de manière à ce que $\epsilon_k \geq \frac{n}{2}+1$, on obtient que $\lim \beta_\alpha = 0$. Cela termine la démonstration de l'étape.

Étape 4 *Pour tous c,$k > 0$, on a*

$$\lim_{\alpha\to 0} A_\alpha^{-k} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^2 dv_g \quad = \quad 0 \tag{2.26}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} A_\alpha^{-k} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g \quad = \quad 0 \tag{2.27}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} A_\alpha^{-k} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \quad = \quad 0 \tag{2.28}$$

Soit $r_\alpha(x) = d_g(x,x_\alpha)$ et $\delta \in]0,\frac{n}{4}[$. D'après l'étape 3, on a

$$\begin{aligned} A_\alpha^{-\delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^2 dv_g &\leq C.A_\alpha^{-\delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^{-\frac{n}{2}(1-\epsilon_\alpha)} dv_g \\ &\leq C.A_\alpha^{-\delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g \end{aligned}$$

Par définition de A_α, on voit que

$$\lim_{\alpha\to 0} A_\alpha^{-\delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(c)} u_\alpha^2 dv_g = 0$$

En raisonnant comme à l'étape 3, on montre par récurrence que, pour tout k,

$$\lim_{\alpha\to 0} A_\alpha{}^{-\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^k \delta} \int_{M-B_{x_\alpha}(2^k c)} u_\alpha^2 dv_g = 0$$

Cela donne (2.26). En utilisant les arguments de l'étape 3, on déduit facilement (2.27) et (2.28) de (2.24) et (2.25). Maintenant, on pose, pour $c > 0$ petit, $\eta_\alpha = \eta(c^{-1} r_\alpha)$ où η est comme ci-dessus. On définit aussi

$$\begin{aligned} r_\nabla &= \frac{\int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_g^2 R_{ij}(x_\alpha) x^i x^j dv_g}{\int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_g^2 dv_g} \\ r_1 &= \frac{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} R_{ij}(x_\alpha) x^i x^j dv_g}{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \\ r_2 &= \frac{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^2 R_{ij}(x_\alpha) x^i x^j dv_g}{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g} \end{aligned}$$

où $(x^1,..,x^n)$ sont les coordonnées dans la carte exponentielle et où $R_{ij}(x_\alpha)$ est la composante (i,j) de la courbure de Ricci de g au point x_α dans la carte exponentielle.

Étape 5 *On a*

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{-\frac{1}{6}\left(-r_\nabla + (1+\frac{2}{n}) r_2 - \frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)} r_1\right)}{A_\alpha}$$

$$= \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n} \left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1}\right) \left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}} S_g(x_0) \tag{2.29}$$

où $S_g(x_0)$ est la courbure scalaire de g au point $x_0 = \lim x_\alpha$.

Revenons aux notations de l'étape 1 et posons

$$C_0 = \lim_{\alpha\to 0} \| u_\alpha \|_\infty^{-1} A_\alpha^{-\frac{n}{4}} \text{ et } \tilde{C}_0 = \lim_{\alpha\to 0} A_\alpha^{\epsilon_\alpha}$$

Remarquons que, d'après (2.10) et (2.20), ces limites existent. On voit facilement que

$$\int_{B(0,\delta)} \varphi_\alpha^2 dv_{g_\alpha} = \| u_\alpha \|_\infty{}^{-2} A_\alpha^{-\frac{n}{2}} \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g$$

et

$$\int_{B(0,\delta)} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_{g_\alpha} = \| u_\alpha \|_\infty{}^{-(1+\epsilon_\alpha)} A_\alpha^{-\frac{n}{2}} \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g$$

$$= \left(\| u_\alpha \|_\infty{}^{-(1+\epsilon_\alpha)} A_\alpha^{-\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)}\right)\left(A_\alpha^{-\frac{n}{4}(1+\epsilon_\alpha)} \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g\right) A_\alpha^{\frac{n}{2}\epsilon_\alpha}$$

Faisons d'abord tendre α vers 0 puis δ vers $+\infty$. D'après (2.16) et l'étape 2, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 dv_\xi = C_0{}^2 \tag{2.30}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dv_\xi = C_0 \tilde{C}_0^{\frac{n}{2}} \tag{2.31}$$

Maintenant, calculons $\int_{\mathbb{R}^n} | \nabla\varphi |_\xi^2 dv_\xi$. D'abord, il est clair que

$$\varphi_\alpha \to \varphi \text{ dans } C^1(B) \text{ quand } \alpha \to 0 \tag{2.32}$$

pour toute boule compacte B de $\mathbb{R}^n$. Soit $\eta_\delta(x) = \eta\left((2\delta)^{-1} \mid x \mid\right)$ où η est comme dans l'étape 2. Multiplions $(\tilde{E}_\alpha)$ par $\varphi_\alpha {\eta_\delta}^2$ et intégrons sur $\mathbb{R}^n$. On trouve

$$\int_{\mathbb{R}^n} < \nabla\varphi_\alpha, \nabla\varphi_\alpha \eta_\delta^2 >_{g_\alpha} dv_{g_\alpha} + \frac{2B_\alpha}{n\| u_\alpha \|_\infty^{1-\epsilon_\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} {\eta_\delta}^2 dv_{g_\alpha} = \frac{k_\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\alpha^2 {\eta_\delta}^2 dv_{g_\alpha}$$

En utilisant (2.4), on obtient que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{2B_\alpha}{n\| u_\alpha \|_\infty^{1-\epsilon_\alpha}} = \frac{2}{n} A_0(n)^{-1} C_0 \tilde{C}_0^{-\frac{n}{2}}$$

Ainsi, par (2.5) et (2.32),

$$\int_{\mathbb{R}^n} < \nabla\varphi, \nabla\varphi\eta_\delta^2 >_\xi dv_\xi + \frac{2}{n} A_0(n)^{-1} C_0 \tilde{C}_0^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} {\eta_\delta}^2 \varphi dv_\xi$$

$$= (1 + \frac{2}{n}) A_0(n)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} {\eta_\delta}^2 \varphi^2 dv_\xi \tag{2.33}$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} < \nabla\varphi, \nabla\varphi\eta_\delta^2 >_\xi dv_\xi = 2\int_{\mathbb{R}^n} < \nabla\varphi, \nabla\eta_\delta >_\xi \varphi\eta_\delta dv_\xi + \int_{\mathbb{R}^n} | \nabla\varphi |_\xi^2 {\eta_\delta}^2 dv_\xi$$

$$\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla\eta_\delta \mid_\xi^2 \varphi^2 dv_\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla\varphi \mid_\xi^2 {\eta_\delta}^2 dv_\xi\right)^{\frac{1}{2}} + \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla\varphi \mid_\xi^2 {\eta_\delta}^2 dv_\xi$$

D'après (2.30), $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Puisque $\mid \nabla\eta_\delta \mid_\xi \leq \frac{\text{cst}}{\delta}$, on voit alors que

$$\lim_{\delta\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} < \nabla\varphi, \nabla\varphi\eta_\delta^2 >_\xi dv_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla\varphi \mid_\xi^2 dv_\xi \tag{2.34}$$

En passant à la limite sur δ dans (2.33) et en se servant de (2.30), (2.31) et (2.34), on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla\varphi \mid_\xi^2 dv_\xi = A_0(n)^{-1}{C_0}^2 \tag{2.35}$$

Posons maintenant, pour $u \in H_1^2(\mathbb{R}^n)$

$$I_\xi(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \mid \nabla u \mid_\xi^2 dv_\xi (\int_{\mathbb{R}^n} u dv_\xi)^{\frac{4}{n}}}{(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dv_\xi)^{1+\frac{2}{n}}}$$

D'après les travaux de Carlen et Loss [9], on sait que

$$\forall u \in H_1^2(\mathbb{R}^n),\ I_\xi(u) \geq A_0(n)^{-1}$$

Avec (2.30), (2.31) et (2.35), il en découle que

$$I_\xi(\varphi) = A_0(n)^{-1}\tilde{C}_0^2$$

Puisque $\tilde{C}_0 \leq 1$, il s'ensuit que $\tilde{C}_0 = 1$ (si $\tilde{C}_0 < 1$, on aurait $I_\xi(\varphi) < A_0(n)^{-1}$). Ainsi, $I_\xi(\varphi) = A_0(n)^{-1}$. Soit u, $u \not\equiv 0$, radiale, une fonction propre associée à λ_1, la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur la boule unité $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. On peut supposer que u(0)=1. Par Carlen et Loss [9], on a

$$\varphi = kv(\lambda x)$$

où $v(x) = u(x) - u(1)$. Maintenant, avec (2.30) et (2.31) et puisque $\tilde{C}_0 = 1$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 dv_\xi = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi dv_g\right)^2$$

On sait que (voir le théorème 1.3 de [14]) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^2 dv_\xi = \frac{n+2}{2} u(1)^2 \mid \mathcal{B} \mid$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} v dv_\xi = - \mid \mathcal{B} \mid u(1)$$

Cela montre que

$$\lambda^2 = \lambda_0^2$$

où

$$\lambda_0^2 = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{-\frac{2}{n}} \mid \mathcal{B} \mid^{\frac{2}{n}}$$

Soit maintenant

$$
\begin{aligned}
r_{\nabla,\delta} &= \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 R_{ij}(x_\alpha) x^i x^j dv_g}{\int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_g^2 dv_g} \\
r_{1,\delta} &= \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} (u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} R_{ij}(x_\alpha) x^i x^j dv_g}{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} \\
r_{2,\delta} &= \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} (u_\alpha)^2 R_{ij}(x_\alpha) x^i x^j dv_g}{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g}
\end{aligned}
$$

On rappelle que $\eta_\alpha = \eta(c^{-1} r_\alpha)$ où $c > 0$ est petit et où η est définie comme précédemment. En utilisant (2.15) et en développant le numérateur, on voit facilement que

$$
\lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_g^2 dv_g}{\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g} = 1
$$

De même, avec l'étape 2 et (2.16), on voit que

$$
\lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g}{\int_M u_\alpha^2 dv_g} = 1
$$

$$
\lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} = 1
$$

Maintenant, un raisonnement par l'absurde simple, utilisant l'étape 2 et les relations (2.15) et (2.16), montre que

$$
\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g}{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g} = 1
$$

$$
\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M u_\alpha^2 dv_g}{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g} = 1
$$

$$
\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} = 1
$$

Ici, la notation $\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0}$ signifie que l'on fait d'abord tendre α vers 0 et ensuite δ vers $+\infty$. On en déduit que

$$
\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha \mid_g^2 dv_g}{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g} = 1
$$

$$
\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^2 dv_g}{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g} = 1
$$

$$
\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_M (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} dv_g}{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} dv_g} = 1
$$

Cela implique alors que

$$
\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{r_{\nabla,\delta}}{A_\alpha} = \lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 R_{ij}(x_\alpha) x^i x^j dv_g}{A_\alpha \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g}
$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{r_{1,\delta}}{A_\alpha} = \lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}(u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}R_{ij}(x_\alpha)x^ix^jdv_g}{A_\alpha\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}(u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{r_{2,\delta}}{A_\alpha} = \lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}(u_\alpha)^2R_{ij}(x_\alpha)x^ix^jdv_g}{A_\alpha\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}(u_\alpha)^2dv_g}$$

Soit $(y^1,..,y^n)$ les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $(x^1,..,x^n)$ les coordonnées de la carte exponentielle sur M. Il est facile de voir que, pour une fonction radiale f:

$$\int_{B(0,\delta)}fy^iy^jdv_\xi = \delta^{ij}\frac{1}{n}\int_{B(0,\delta)}f\mid y\mid^2dv_\xi$$

On a aussi

$$\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha^px^ix^jdv_g = \parallel u_\alpha\parallel_\infty^pA_\alpha^{1+\frac{n}{2}}\int_{B(0,\delta)}\varphi_\alpha^py^iy^jdv_{g_\alpha}$$

et

$$\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}\mid\nabla u_\alpha\mid_g^2x^ix^jdv_g = \parallel u_\alpha\parallel_\infty^2A_\alpha^{\frac{n}{2}}\int_{B(0,\delta)}\mid\nabla\varphi_\alpha\mid_{g_\alpha}^2y^iy^jdv_{g_\alpha}$$

Cela entraîne, compte tenu du fait que φ est à support compact, que, pour δ assez grand

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{r_{\nabla,\delta}}{A_\alpha} = \frac{S_g(x_0)}{n}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\mid\nabla\varphi\mid_\xi^2\mid y\mid^2dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n}\mid\nabla\varphi\mid_\xi^2dv_\xi}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{r_{1,\delta}}{A_\alpha} = \frac{S_g(x_0)}{n}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\mid y\mid^2dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi dv_\xi}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{r_{2,\delta}}{A_\alpha} = \frac{S_g(x_0)}{n}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2\mid y\mid^2dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^2dv_\xi}$$

Ainsi, pour $\delta\geq\lambda_0$,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\frac{1}{6}\left(-r_{\nabla,\delta}+(1+\frac{2}{n})r_{2,\delta}-\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}r_{1,\delta}\right)}{A_\alpha} = \frac{{\lambda_0}^{-2}S_g(x_0)}{6n}\Big(-\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\mid\nabla v\mid_\xi^2\mid y\mid^2dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n}\mid\nabla v\mid_\xi^2dv_\xi}$$

$$+\frac{n+2}{n}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}v^2\mid y\mid^2dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n}v^2dv_\xi}-\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}\frac{\int_{\mathbb{R}^n}v\mid y\mid^2dv_\xi}{\int_{\mathbb{R}^n}vdv_\xi}\Big)$$

Cette expression a été calculée dans Druet, Hebey et Vaugon [14]. On a

$$\frac{-\frac{1}{6}\left(-r_{\nabla,\delta}+(1+\frac{2}{n})r_{2,\delta}-\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}r_{1,\delta}\right)}{A_\alpha} = \frac{\mid\mathcal{B}\mid^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2}+\frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}}S_g(x_0)$$

Il faut maintenant se rappeler que pour tout $\delta>0$ et pour α assez grand, $\eta_\alpha\equiv 1$ sur $B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)$. Il suffit alors de montrer que

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{r_{\nabla,\delta}-r_\nabla}{A_\alpha} = \lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}\mid\nabla u_\alpha\eta_\alpha\mid_g^2R_{ij}(x_\alpha)x^ix^jdv_g}{A_\alpha\int_M\mid\nabla u_\alpha\eta_\alpha\mid_g^2dv_g} = 0 \qquad (2.36)$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{r_{1,\delta}-r_1}{A_\alpha} = \lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}(u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}R_{ij}(x_\alpha)x^ix^jdv_g}{A_\alpha\int_M(u_\alpha\eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_g} = 0 \qquad (2.37)$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{r_{2,\delta}-r_2}{A_\alpha}=\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to\alpha_0}\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}(u_\alpha\eta_\alpha)^2R_{ij}(x_\alpha)x^ix^jdv_g}{A_\alpha\int_M(u_\alpha\eta_\alpha)^2dv_g}=0 \tag{2.38}$$

D'abord, regardons (2.38). Posons

$$T_\alpha=\left|\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}(\eta_\alpha u_\alpha)^2R_{ij}(x_\alpha)x^ix^jdv_g}{A_\alpha\int_M(\eta_\alpha u_\alpha)^2dv_g}\right|$$

D'après (2.16),

$$T_\alpha\leq C\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha^2r_\alpha^2dv_g}{A_\alpha}$$

On déduit de l'étape 3 que

$$T_\alpha\leq C\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha^{\epsilon_\alpha}r_\alpha^{2-n}r_\alpha^{\frac{n}{2}\epsilon_\alpha}dv_g}{A_\alpha}$$

$$\leq C\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha^{\epsilon_\alpha}r_\alpha^{2-n}dv_g}{A_\alpha}\leq C\frac{A_\alpha^{1-\frac{n}{2}}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha^{\epsilon_\alpha}dv_g}{A_\alpha}$$

Pour avoir une estimée de cette expression, on intègre (E_α) sur $M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)$. Cela donne

$$T_\alpha\leq C\left(\frac{A_\alpha^{-\frac{n}{2}}}{B_\alpha}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha dv_g+\frac{A_\alpha^{1-\frac{n}{2}}}{B_\alpha}\int_{\partial B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}\partial_\nu u_\alpha d\sigma\right) \tag{2.39}$$

Montrons que le second membre de (2.39) tend vers 0 quand α tend vers 0 et δ vers $+\infty$. On a, par définition de A_α,

$$\frac{A_\alpha^{-\frac{n}{2}}}{B_\alpha}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha dv_g\leq\frac{A_\alpha^{-\frac{n}{4}}}{B_\alpha}\left(\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon_\alpha}}$$

On a aussi, d'après (2.4) et le fait que $\lim_{\alpha\to0}A_\alpha^{\epsilon_\alpha}=C$,

$$\lim_{\alpha\to0}\frac{A_\alpha^{-\frac{n}{4}}}{B_\alpha}=C$$

L'étape 2 entraîne, de nouveau par un raisonnement par l'absurde simple, que

$$\lim_{\delta\to+\infty}\lim_{\alpha\to0}\left(\frac{\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}{\int_M u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon_\alpha}}=0$$

Donc :

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to0}\frac{A_\alpha^{-\frac{n}{2}}}{B_\alpha}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)}u_\alpha dv_g=0$$

Maintenant, si $r_\alpha=\delta a_\alpha$, on a

$$\mid\partial_\nu u_\alpha(x)\mid\leq\frac{\parallel u_\alpha\parallel_\infty}{A_\alpha^{\frac{1}{2}}}\parallel(\nabla\varphi_\alpha)_{g_\alpha}\parallel_{L^\infty(\partial B(0,\delta))}$$

Puisque φ est à support compact (voir plus haut), pour δ assez grand :

$$\| (\nabla\varphi_\alpha)_{g_\alpha} \|_{L^\infty(\partial B(0,\delta))} \to 0$$

Par conséquent, pour δ assez grand et d'après (2.10),

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{A_\alpha^{1-\frac{n}{2}}}{B_\alpha} \int_{\partial B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} \partial_\nu u_\alpha d\sigma = 0$$

Avec (2.39), cela prouve (2.38). Pour obtenir (2.36) et (2.37), multiplions (E_α) par $\frac{r_\alpha^2 \eta_\alpha^2 u_\alpha}{A_\alpha}$ et intégrons sur $M - B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)$:

$$-2\int_{\partial B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} (\partial_\nu u_\alpha) u_\alpha r_\alpha^2 \eta_\alpha^2 d\sigma + 2\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha |_g^2 dv_g$$

$$-2\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla \eta_\alpha r_\alpha |_g^2 u_\alpha^2 dv_g + \frac{4B_\alpha}{nA_\alpha}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 \eta_\alpha^2 dv_g$$

$$= \frac{k_\alpha}{A_\alpha}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^2 r_\alpha^2 \eta_\alpha^2 dv_g \tag{2.40}$$

Comme précédemment, on utilise le fait que, pour $r_\alpha = \delta a_\alpha$,

$$| \partial_\nu u_\alpha(x) | \le \frac{\| u_\alpha \|_\infty}{A_\alpha^{\frac{1}{2}}} \| (\nabla\varphi_\alpha)_{g_\alpha} \|_{L^\infty(\partial B(0,\delta))}$$

et :

$$u_\alpha(x) \le \| u_\alpha \|_\infty$$

En utilisant (2.10), cela montre que, pour δ assez grand, le terme de bord tend vers 0. De plus, il est clair que

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla \eta_\alpha r_\alpha |_g^2 u_\alpha^2 dv_g \le C\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g$$

Avec (2.16), cela conduit à

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla r_\alpha \eta_\alpha |_g^2 u_\alpha^2 dv_g = 0$$

Remarquons que le second membre de (2.40) tend vers 0 quand $\alpha \to 0$ et $\delta \to \infty$. Cela découle aisément du raisonnement fait pour prouver (2.38). La relation (2.40) implique alors que

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha |_g^2 dv_g = 0 \tag{2.41}$$

et aussi que

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\frac{4B_\alpha}{nA_\alpha}\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 \eta_\alpha^2 dv_g = 0$$

ce qui donne (2.37). De plus,

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha |_g^2 dv_g = \int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla u_\alpha \eta_\alpha |_g^2 r_\alpha^2 dv_g$$

$$+2\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} < \nabla u_\alpha \eta_\alpha, \nabla r_\alpha >_g u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha dv_g + \int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla r_\alpha |_g^2 \eta_\alpha {u_\alpha}^2 dv_g$$

Pour tout $x,y,\epsilon > 0$, on a : $xy \leq \frac{1}{2}(\epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon}y^2)$. En remarquant que

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} < \nabla u_\alpha \eta_\alpha, \nabla r_\alpha >_g u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha dv_g$$

$$\geq -\left(\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla u_\alpha \eta_\alpha |_g^2 r_\alpha^2 dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla r_\alpha |_g^2 \eta_\alpha {u_\alpha}^2 dv_g\right)^{\frac{1}{2}}$$

on obtient que, en fixant $0 < \epsilon < 1$

$$\int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha |_g^2 dv_g \geq (1-\epsilon) \int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla u_\alpha \eta_\alpha |_g^2 r_\alpha^2 dv_g$$

$$+(1-\frac{1}{\epsilon}) \int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla r_\alpha |_g^2 (\eta_\alpha u_\alpha)^2 dv_g$$

Ainsi, en utilisant (2.16) et (2.41), on voit alors que

$$\lim_{\delta \to \infty} \lim_{\alpha \to 0} \int_{M-B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} | \nabla u_\alpha \eta_\alpha |_g^2 r_\alpha^2 dv_g = 0 \tag{2.42}$$

Compte tenu du fait que

$$\lim A_\alpha \int_M | \nabla \eta_\alpha u_\alpha |_g^2 dv_g = A_0(n)^{-1}$$

la relation (2.36) en découle. Cela termine la preuve de l'étape 5.

Étape 6 *Démonstration du théorème*

Posons, pour $u \in H_1^2(M)$:

$$I_{g,\alpha}(u) = I_\alpha(u) - (\alpha_0 - \alpha) \int_M u^2 dv_g (\int_M | u |^{1+\epsilon_\alpha} dv_g)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}$$

a– *Montrons d'abord que :*

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{A_0(n)^{-1} - I_{g,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)}{A_\alpha} = \alpha_0 \tag{2.43}$$

D'après (2.26), (2.27) et (2.28), on trouve que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{I_{g,\alpha}(u_\alpha) - I_{g,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)}{A_\alpha} = 0 \tag{2.44}$$

De plus,

$$I_{g,\alpha}(u_\alpha) = I_\alpha(u_\alpha) - (\alpha_0 - \alpha) A_\alpha$$

Puisque $\alpha \to 0$ et $I_\alpha(u_\alpha) \leq A_0(n)^{-1}$, on a

$$\liminf_{\alpha \to 0} \frac{A_0(n)^{-1} - I_{g,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)}{A_\alpha} \geq \alpha_0 \tag{2.45}$$

On peut aussi écrire que, d'après (2.44),

$$\limsup_{\alpha\to 0} \frac{A_0(n)^{-1} - I_{g,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)}{A_\alpha} = \limsup \frac{A_0(n)^{-1} - (I_{g,\alpha}(u_\alpha) + \alpha_0 A_\alpha) + \alpha_0 A_\alpha}{A_\alpha}$$

L'inégalité de Hölder montre facilement que $I_{g,\alpha}(u_\alpha) + \alpha_0 A_\alpha \geq I_0(u_\alpha)$ où I_0 est la fonctionnelle I_α quand $\alpha = 0$ et où on considère que $\epsilon_0 = 0$. D'autre part, par définition de α_0, on a $I_0(u_\alpha) \geq A_0(n)^{-1}$. Cela implique que

$$\limsup_{\alpha\to 0} \frac{A_0(n)^{-1} - I_{g,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)}{A_\alpha} \leq \alpha_0 \tag{2.46}$$

La relation (2.43) provient alors de (2.44), (2.45) et (2.46).

b− *Montrons que :*

$$\int_M \mid \nabla \eta_\alpha u_\alpha \mid_\xi^2 dv_\xi - \int_M \mid \nabla \eta_\alpha u_\alpha \mid_g^2 dv_g = -\frac{1}{6}\int_M \mid \nabla \eta_\alpha u_\alpha \mid_\xi^2 R_{ij}(x_\alpha) x^i x^j dv_g + O(1) \tag{2.47}$$

Il faut d'abord noter que la limite du second membre de (2.47) existe. On a

$$\int_M \mid \nabla \eta_\alpha u_\alpha \mid_g^2 dv_g = \int_M \mid \nabla \eta_\alpha u_\alpha \mid_\xi^2 dv_g + \int_M (g^{ij} - \delta^{ij})\partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha \eta_\alpha^2 dv_g + C_1(\alpha) \tag{2.48}$$

où $C_1(\alpha)$ regroupe les termes comprenant les dérivées de η_α. Puisque $supp(\nabla\eta_\alpha) \subset M - B_{x_\alpha}(\frac{c}{2})$ et d'après l'étape 2 et les relations (2.15) et (2.16), on voit que $C_1(\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to 0$. On écrit que, pour $\delta > 0$,

$$\left| \int_M (g^{ij} - \delta^{ij})\partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha \eta_\alpha^2 dv_g \right| \leq \left| \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} (g^{ij} - \delta^{ij})\partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha dv_g \right|$$

$$+ \left| \int_{M - B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} (g^{ij} - \delta^{ij})\partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha \eta_\alpha^2 dv_g \right|$$

Avec le développement de Cartan Hadamard de la métrique g, on obtient alors que

$$\left| \int_M (g^{ij} - \delta^{ij})\partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha \eta_\alpha^2 dv_g \right| \leq C \left| \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} R^i{}_{kl}{}^j(x_\alpha)\partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha x^k x^l dv_g \right|$$

$$+ C \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 r_\alpha^3 dv_g + C \int_{M - B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 r_\alpha^2 dv_g$$

où $(R^i{}_{kl}{}^j(x_\alpha))$ sont les composantes de la courbure de Riemann de g au point x_α dans la carte exponentielle centrée en x_α. Le troisième terme du membre de droite de cette inégalité est petit si δ est assez grand (voir la preuve de (2.42)). Le deuxième terme tend vers 0 quand α tend vers 0. Il suffit pour le voir de majorer r_α par δa_α. Il faut maintenant montrer que le premier terme tend lui aussi vers 0 avec α. Pour cela, on écrit, en gardant les notations de l'étape 1, que

$$\left| \int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} R^i{}_{kl}{}^j(x_\alpha)\partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha x^k x^l dv_g \right|$$

$$\leq C \| u_\alpha \|_\infty^2 A_\alpha^{\frac{n}{2}} \left| \int_{B(0,\delta)} R^i{}_{kl}{}^j(x_\alpha)\partial_i \varphi_\alpha \partial_j \varphi_\alpha x^k x^l dv_{g_\alpha} \right|$$

Maintenant, puisque $\varphi_\alpha \to \varphi$ dans $C^1(B(0,\delta))$ quand $\alpha \to 0$ et puisque φ est radiale, on obtient que

$$\lim_{\alpha\to 0} R^i{}_{kl}{}^j(x_\alpha)\partial_i\varphi_\alpha\partial_j varphi_\alpha x^k x^l = 0$$

Avec (2.10), cela prouve que, quel que soit le choix de δ,

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{B_{x_\alpha}(\delta a_\alpha)} R^i{}_{kl}{}^j(x_\alpha)\partial_i u_\alpha\partial_j u_\alpha x^k x^l dv_g = 0$$

Finalement, on obtient que

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_M (g^{ij}-\delta^{ij})\partial_i u_\alpha \partial_j u_\alpha \eta_\alpha^2 dv_g = 0 \tag{2.49}$$

Enfin, on écrit, toujours d'après le développement de Cartan Hadamard de g, que

$$\int_M |\nabla\eta_\alpha u_\alpha|_\xi^2 dv_g = \int_M |\nabla\eta_\alpha u_\alpha|_\xi^2 dv_\xi + \frac{1}{6}\int_M |\nabla\eta_\alpha u_\alpha|_\xi^2 R_{ij}(x_\alpha)x^i x^j dv_g + O(1) \tag{2.50}$$

On tire finalement (2.47) de (2.48), (2.49) et (2.50).

c$-$ *Montrons que :*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{I_{\xi,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha) - I_{g,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)}{A_\alpha} = A_0(n)^{-1}\frac{|\mathcal{B}|^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2}+\frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}} S_g(x_0) \tag{2.51}$$

où I_ξ est définie comme précédemment.
Posons :

$$\begin{aligned}
t_1 &= \frac{\int_M(\eta_\alpha u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_\xi - \int_M(\eta_\alpha u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}{\int_M(\eta_\alpha u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha}dv_g}\\
t_2 &= \frac{\int_M(\eta_\alpha u_\alpha)^2 dv_\xi - \int_M(\eta_\alpha u_\alpha)^2 dv_g}{\int_M(\eta_\alpha u_\alpha)^2 dv_g}\\
t_\nabla &= \frac{\int_M|\nabla\eta_\alpha u_\alpha|_\xi^2 dv_\xi - \int_M|\nabla\eta_\alpha u_\alpha|_g^2 dv_g}{\int_M|\nabla\eta_\alpha u_\alpha|_g^2 dv_g}
\end{aligned}$$

D'après le développement de Cartan Hadamard de g, on a

$$dv_\xi = \left(1+\frac{1}{6}R_{i,j}(x_\alpha)x^i x^j + O(r_\alpha^3)\right)dv_g$$

En revenant aux notations de l'étape 5, on obtient alors que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{t_1}{A_\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{6}\frac{r_1}{A_\alpha} \tag{2.52}$$

et

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{t_2}{A_\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{6}\frac{r_2}{A_\alpha} \tag{2.53}$$

De (2.47), on tire que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{t_\nabla}{A_\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{6}\frac{r_\nabla}{A_\alpha} \tag{2.54}$$

On écrit

$$I_{\xi,\alpha}(u_\alpha\eta_\alpha) - I_{g,\alpha}(u_\alpha\eta_\alpha) = I_{g,\alpha}(u_\alpha\eta_\alpha)\frac{(1+t_\nabla)(1+t_1)^{\frac{4}{n(1+\epsilon_\alpha)}}}{(1+t_2)^{1+\frac{2}{n}}} - I_{g,\alpha}(u_\alpha\eta_\alpha)$$

La relation (2.51) découle alors de (2.29), (2.52),(2.53) et (2.54) et du fait que $\lim_{\alpha\to 0} I_{g,\alpha}(u_\alpha\eta_\alpha) = A_0(n)^{-1}$.

d− *Conclusion.*
D'après l'inégalité de Hölder et les travaux de Carlen et Loss [9], on a

$$I_{\xi,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha) \geq \frac{\int_M \mid \nabla\eta_\alpha u_\alpha \mid_\xi^2 dv_\xi \left(\int_M \eta_\alpha u_\alpha dv_\xi\right)^{\frac{4}{n}}}{\int_M (\eta_\alpha u_\alpha)^2 dv_\xi} \geq A_0(n)^{-1}$$

Ainsi

$$I_{\xi,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha) - I_{g,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha) \geq A_0(n)^{-1} - I_{g,\alpha}(\eta_\alpha u_\alpha)$$

En divisant cette inégalité par A_α et en se rappelant que $B_0 = \alpha_0 A_0(n)$, il découle de (2.43) et (2.51) que

$$B_0 \leq \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}} S_g(x_0)$$

Ainsi,

$$B_0 \leq \frac{\mid \mathcal{B} \mid^{-\frac{2}{n}}}{6n}\left(\frac{2}{n+2} + \frac{n-2}{\lambda_1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{n}} \max_{x\in M} S_g(x)$$

Cela termine la démonstration du théorème.

Chapitre 3

Inégalité de Nash à trace optimale

3.1 Le cas de $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, +\infty[$

3.1.1 Introduction

Si $n \geq 2$, on note $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. On pose aussi

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \middle| \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n_+) \text{ et } u_{/\mathbb{R}_0} \in L^1(\mathbb{R}_0) \cap L^2(\mathbb{R}_0) \right\}$$

où $\mathbb{R}_t$ est définie pour $t \geq 0$ par $\mathbb{R}_t = \mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$. L'inégalité de Nash à trace dit qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{H}$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}_0} u^2 ds \right)^{\frac{n}{n-1}} \leq C \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}_0} |u| \, ds \right)^{\frac{2}{n-1}} \qquad N(C)$$

où ds est l'élément de volume standard sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et où la trace de u sur $\mathbb{R}_0$ est toujours notée u. Cette inégalité découle de l'inégalité de Sobolev à trace et de l'inégalité de Hölder. Nous étudions ici la meilleure constante $\tilde{A}_0(n)$ dans cette inégalité. Plus précisément, $\tilde{A}_0(n)$ est définie par $\tilde{A}_0(n) = \inf\{C > 0 | \forall u \in \mathcal{H}, \, N(C) \text{ est vraie}\}$. Pour des études de ce type concernant d'autres inégalités, on peut voir les références suivantes : [2], [6], [15], [19], [33]. Il est facile de voir que

$$\tilde{A}_0(n)^{-1} = \inf_{\mathcal{H}'} \frac{\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}_0} |u| \, ds \right)^{\frac{2}{n-1}}}{\left(\int_{\mathbb{R}_0} u^2 ds \right)^{\frac{n}{n-1}}}$$

où

$$\mathcal{H}' = \{ u \in \mathcal{H} \text{ t.q. } u_{/\mathbb{R}_0} \not\equiv 0 \}$$

Ce problème a été résolu par Carlen et Loss [9] pour l'inégalité de Nash standard sans trace sur $\mathbb{R}^n$. Le premier résultat obtenu ici est le suivant :

Théorème 1 *La meilleure constante $\tilde{A}_0(n)$ dans l'inégalité de Nash à trace vérifie*

$$\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{(n^2-1)}\lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}} |\mathcal{B}^{n-1}|^{\frac{1}{n-1}}} \leq \tilde{A}_0(n) \leq \frac{n^{\frac{n}{n-1}}}{(n-1)\lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}} |\mathcal{B}^{n-1}|^{\frac{1}{n-1}}}$$

où $\lambda_{1,n-1}$ est la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur la boule unité standard $\mathcal{B}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ et où $\mid \mathcal{B}^{n-1} \mid = Vol(\mathcal{B}^{n-1})$.

Ce théorème donne une estimée asymptotique de $\tilde{A}_0(n)$ pour n grand et donne une assez bonne estimation de $\tilde{A}_0(n)$ pour toute valeur de n. Pour avoir une inégalité explicite, on rappelle que $\lambda_{1,n-1}$ vérifie

$$\frac{1}{2}\sqrt{(n-1)(n+3)} \leq \lambda_{1,n-1} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(n+5)}$$

(cf. [9] et [31]).

3.1.2 Résultats préliminaires

On rappelle que, pour $t > 0$, $\mathbb{R}_t = \mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$. Dans ce qui suit, $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans $\mathbb{R}_+^n$.

Restriction du problème à $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$

Lemme 1 *On a l'égalité suivante :*

$$\inf_{\mathcal{H}'} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} \mid \nabla u \mid^2 dx \Big(\int_{\mathbb{R}_0} \mid u \mid ds \Big)^{\frac{2}{n-1}}}{\Big(\int_{\mathbb{R}_0} u^2 ds \Big)^{\frac{n}{n-1}}} = \inf_{C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n); u_{/\mathbb{R}_0} \not\equiv 0} \frac{\int_{\mathbb{R}_+^n} \mid \nabla u \mid^2 dx \Big(\int_{\mathbb{R}_0} \mid u \mid ds \Big)^{\frac{2}{n-1}}}{\Big(\int_{\mathbb{R}_0} u^2 ds \Big)^{\frac{n}{n-1}}}$$

Preuve : Le premier terme de cette égalité est clairement plus petit que le second. Il faut donc montrer l'inégalité contraire. Soit $u \in \mathcal{H}'$. Il suffit de prouver qu'il existe une suite $(u_p) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ telle que $\lim_p \| u_p \|_{L^1(\mathbb{R}_0)} = \| u \|_{L^1(\mathbb{R}_0)}$, $\lim_p \| u_p \|_{L^2(\mathbb{R}_0)} = \| u \|_{L^2(\mathbb{R}_0)}$ et $\lim_p \| \nabla u_p \|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} = \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$. On note $(x_1,..,x_{n-1},t)$ les coordonnées standard de $\mathbb{R}_+^n$. On note aussi $r^2 = x_1^2 + .. + x_{n-1}^2$. Soit maintenant, pour $R > 0$, $C(R) = \{r \leq R; t \leq R\}$. On choisit $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ telle que $\eta_{/C(\frac{1}{2})} \equiv 1$, $\eta_{/C(1)^c} \equiv 0$ et $0 \leq \eta \leq 1$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^n$, on note $\eta_p(x) = \eta(\frac{1}{p}x)$. On pose, pour $p > 0$ et $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$u_p(x) = \eta_p(x) u(x)$$

Nous allons voir que cette suite (u_p) approxime u de la façon voulue quand p est assez grand. Montrons d'abord que, quand $R \to +\infty$:

$$\int_{C(R)} u^2 dx = o(R^2) \tag{3.1}$$

On pose

$$C(R,S,T,U) = \{R < r < S; T < t < U\}$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$, il existe $R_0 > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}_+^n - C(R_0)} \mid \nabla u \mid^2 dx \leq \epsilon \tag{3.2}$$

Pour tout $Q \in \mathbb{R}_+^n$ et $t_0 \geq 0$, on désigne la projection orthogonale de Q sur $\mathbb{R}_{t_0}$ par $p_{t_0}(Q)$. Pour tout $Q \in \mathbb{R}_t$ $(t > t_0)$, on a

$$u^2(Q) - u^2(p_{t_0}(Q)) = 2 \int_{t_0}^t u(y,t') \partial_t u(y,t') dt'$$

où (y,t) sont les coordonnées de Q dans $\mathbb{R}^n_+$. En intégrant cette relation pour $Q \in \mathbb{R}_t \cap \{R_1 < r < R_2\}$ (où $R_1,R_2 > 0$) et en utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}_t\cap\{R_1<r<R_2\}} u^2 ds - \int_{\mathbb{R}_{t_0}\cap\{R_1<r<R_2\}} u^2 ds$$

$$\leq 2\left(\int_{C(R_1,R_2,t_0,t)} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{C(R_1,R_2,t_0,t)} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

On intègre ensuite cette inégalité pour $t \in \{t_0 < t < t_1\}$ (où $t_0 < t_1$). On obtient que

$$\int_{C(R_1,R_2,t_0,t_1)} u^2 dx \leq (t_1 - t_0)\times$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}_{t_0}\cap\{R_1<r<R_2\}} u^2 ds + 2\left(\int_{C(R_1,R_2,t_0,t_1)} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{C(R_1,R_2,t_0,t_1)} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.4}$$

Soit maintenant $R > R_0$. En appliquant (3.4) avec $t_0 = R_1 = 0$ et $t_1 = R_2 = R$, on obtient que

$$\int_{C(R)} u^2 dx \leq CR^2 \tag{3.5}$$

avec $C > 0$. En utilisant (3.2) et en appliquant (3.3) avec $t_0 = 0$, $t = R_1 = R_0$ et $R_2 = R$, on voit que, quand $R \geq R_0$,

$$\int_{\mathbb{R}_{R_0}\cap\{R_0<r<R\}} u^2 ds \leq \int_{\mathbb{R}_0} u^2 ds + \sqrt{\epsilon}\left(\int_{C(R)} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Il découle alors de (3.5) que, quand R tend vers $+\infty$

$$\int_{\mathbb{R}_{R_0}\cap\{R_0<r<R\}} u^2 ds = o(R)$$

On en déduit facilement que

$$\int_{\mathbb{R}_{R_0}\cap\{0<r<R\}} u^2 ds = o(R) \tag{3.6}$$

On applique ensuite (3.4) avec $t_0 = 0$, $R_1 = R_0$ et $t_1 = R_2 = R$. Cela donne

$$\int_{C(R_0,R,0,R)} u^2 dx \leq R\int_{\mathbb{R}_0} u^2 ds + R\sqrt{\epsilon}\left(\int_{C(R_0,R,0,R)} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui implique que

$$\int_{C(R_0,R,0,R)} u^2 dx = o(R^2) \tag{3.7}$$

En appliquant de nouveau (3.4) avec $t_0 = R_0$, $R_1 = 0$ et $t_1 = R_2 = R$, on obtient que

$$\int_{C(0,R,R_0,R)} u^2 dx \leq R\int_{\mathbb{R}_{R_0}\times\{0<r<R\}} u^2 ds + R\sqrt{\epsilon}\left(\int_{C(0,R,R_0,R)} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

La relation (3.6) montre alors que

$$\int_{C(0,R,R_0,R)} u^2 dx = o(R^2) \tag{3.8}$$

On a aussi

$$\int_{C(R)} u^2 dx = \int_{C(R)-C(R_0)} u^2 dx + \int_{C(R_0)} u^2 dx$$

De plus, il est clair que $C(R) - C(R_0) \subset C(R_0,R,0,R) \cup C(0,R,R_0,R)$. La relation (3.1) se déduit alors immédiatement de (3.7) et (3.8). Il faut maintenant conclure. Il est facile de voir que $\lim_{p\to\infty} \| u_p \|_{L^1(\mathbb{R}_0)} = \| u \|_{L^1(\mathbb{R}_0)}$ et $\lim_{p\to\infty} \| u_p \|_{L^2(\mathbb{R}_0)} = \| u \|_{L^2(\mathbb{R}_0)}$. Il reste à montrer que $\lim_{p\to\infty} \| \nabla u_p \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$. On a

$$\| \nabla u_p \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla u |^2 \eta_p^2 dx + 2 \int_{\mathbb{R}^n_+} < \nabla u, \nabla \eta_p > dx + \int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla \eta_p |^2 u^2 dx$$

D'après l'ingalité de Hölder, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n_+} < \nabla u, \nabla \eta_p > u \eta_p dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla u |^2 \eta_p^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla \eta_p |^2 u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, $| \nabla \eta_p | \leq \frac{C}{p^2} 1_{C(p)}$ où $C > 0$ et où $1_{C(p)}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $C(p)$. La relation (3.1) implique alors que

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla \eta_p |^2 u^2 dx = 0$$

Finalement, $\lim_{p\to\infty} \| \nabla u_p \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}$, ce qui termine la preuve du lemme 1.

Symétrisation cylindrique

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^{n-1})$, $f \geq 0$, à support compact K. Il est connu (voir par exemple Aubin [3]) qu'il existe une unique fonction radiale f^* définie par

$$Vol\big(f \geq a\big) = Vol\big(f^* \geq a\big) \tag{3.9}$$

pour tout $a \geq 0$. De plus, la fonction f^* décroissante et à support compact. On montre le lemme suivant

Lemme 2 *Si $f,g \in C^0(\mathbb{R}^{n-1})$ sont positives et à support compact, alors, pour tout $N \geq 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f - g|^N ds \geq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f^* - g^*|^N ds$$

Preuve : On choisit $N \geq 1$. Dans ce qui suit, on note $a_0 = 0$. Si maintenant $a_1,..,a_k > 0$ sont choisis de manière à ce que $a_0 < a_1 < .. < a_k < a_{k+1}$ où $a_{k+1} > \max\big(\| f \|_\infty, \| g \|_\infty\big)$, on définit pour $u \in \big\{f; g; f^*; g^*\big\}$,

$$T(a_0,..,a_k)(u)(x) = a_{i-1} \text{ si } a_{i-1} \leq u(x) < a_i$$

Il faut noter que $\| f \|_\infty = \| f^* \|_\infty$ et $\| g \|_\infty = \| g^* \|_\infty$. On prouve alors par récurrence que, pour $k \geq 0$, on a, pour tous $0 < a_1 < .. < a_k < \max\big(\| f \|_\infty, \| g \|_\infty\big)$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big|T(a_0,..,a_k)(f) - T(a_0,..,a_k)(g)\big|^N ds$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|T(a_0,..,a_k)(f^*) - T(a_0,..,a_k)(g^*)\right|^N ds \qquad (H_k)$$

Si $k = 0$ alors $T(a_0)(f) \equiv T(a_0)(g) \equiv T(a_0)(f^*) \equiv T(a_0)(g^*) \equiv 0$. (H_0) s'en déduit immédiatement. On suppose maintenant que (H_k) est vraie pour $k \geq 0$. Montrons que (H_{k+1}) l'est aussi. Soit $(a_1,..a_{k+1})$ $k+1$ nombres réels qui vérifient $a_0 < a_1 < .. < a_{k+1} < a_{k+2}$ où a_{k+2} est choisi strictement supérieur à $\max\left(\| f \|_\infty, \| g \|_\infty\right)$. On pose alors, pour $i \in \{0,...,k+1\}$, $A_i = \left\{T(a_0,..a_{k+1})(f) = a_i\right\}$, $B_i = \left\{T(a_0,..a_{k+1})(g) = a_i\right\}$, $A_i^* = \left\{T(a_0,..a_{k+1})(f^*) = a_i\right\}$ et $B_i^* = \left\{T(a_0,..a_{k+1})(g^*) = a_i\right\}$. On remarque que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $A_i \cup A_{i+1} \cup ... \cup A_{k+1} = \{f \geq a_i\}$. Des résultats similaires sont vrais pour B_i,A_i^*,B_i^*. La relation (3.9) implique alors facilement que

$$Vol\big(A_i\big) = Vol\big(A_i^*\big) \text{ et } Vol\big(B_i\big) = Vol\big(B_i^*\big)$$

Les ensembles $(A_i \cap B_j)_{i,j\in\{0,...,k+1\}}$ forment une partition de $\mathbb{R}^{n+1}$. On sait d'autre part que deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}^{n-1}$ si et seulement si elles sont égales sur chacun de ces ensembles. Ces remarques permettent de vérifier facilement que

$$\left|T(a_0,..,a_{k+1})(f) - T(a_0,..,a_{k+1})(g)\right|^N = \left|T(a_0,..,a_k)(f) - T(a_0,..,a_k)(g)\right|^N + \gamma_1 + \gamma_2 \qquad (3.10)$$

où

$$\gamma_1 = \sum_{i=0}^{k} \left(|a_{k+1} - a_i|^N - |a_k - a_i|^N\right) 1_{A_{k+1}\cap B_i}$$

et

$$\gamma_2 = \sum_{i=0}^{k} \left(|a_{k+1} - a_i|^N - |a_k - a_i|^N\right) 1_{B_{k+1}\cap A_i}$$

Par (H_k), on a

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|T(a_0,..,a_k)(f) - T(a_0,..,a_k)(g)\right|^N ds$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left|T(a_0,..,a_k)(f^*) - T(a_0,..,a_k)(g^*)\right|^N ds \qquad (3.11)$$

On définit aussi γ_1^* et γ_2^* en remplaçant respectivement les ensembles A_j et B_j par A_j^* et B_j^* dans les définitions de γ_1 et γ_2. Montrons alors que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_1 ds \geq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_1^* ds \qquad (3.12)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_2 ds \geq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_2^* ds \qquad (3.13)$$

On montre seulement (3.12), la preuve de (3.13) se faisant de la même manière. On pose, pour $i \in \{0,..,k\}$, $b_i = |a_{k+1} - a_i|^N - |a_k - a_i|^N$ et $b_{k+1} = 0$. Il est clair que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_1 ds = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sum_{j=0}^{k+1} b_j 1_{B_j}\right) 1_{A_{k+1}} ds$$

On voit que $b_0 > b_1 > ... > b_{k+1}$ et que $\sum_{i=0}^{k+1} 1_{B_j} \equiv 1$. Cette intégrale est donc minimale quand la fonction $\left(\sum_{i=0}^{k+1} b_j 1_{B_j}\right)$ est petite sur A_{k+1}. Plus précisément, si j_0 est tel que

$$Vol\big(B_{j_0-1}\big) + ... + Vol\big(B_{k+1}\big) \geq Vol\big(A_{k+1}\big)$$

$$\geq Vol\big(B_{j_0}\big) + ... + Vol\big(B_{k+1}\big)$$

alors, l'intégrale est minimale quand $Vol\big(A_{k+1} \cap B_j\big)$ vaut 0 si $j \leq j_0 - 2$, vaut $Vol\big(B_j\big)$ si $j \geq j_0$ et vaut $Vol\big(A_{k+1}\big) - \big(Vol\big(B_{j_0}\big) + ... + Vol\big(B_{k+1}\big)\big)$ si $j = j_0 - 1$. C'est exactement ce qui se passe quand $A_{k+1} = A^*_{k+1}$ et $B_j = B^*_j$. Pour le voir, il suffit de remarquer que les ensembles A^*_{k+1} et $B^*_j \cup ... \cup B^*_{k+1}$ sont de boules centrées en 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On obtient alors que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \gamma_1 ds \geq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sum_{i=0}^{k+1} b_j 1_{B^*_j} \right) 1_{A^*_{k+1}} ds$$

Cela prouve (3.12). D'après (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13), on trouve que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big| T(a_0,..,a_{k+1})(f) - T(a_0,..,a_{k+1})(g) \big|^N ds$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big| T(a_0,..,a_k)(f^*) - T(a_0,..,a_k)(g^*) \big|^N ds + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\gamma^*_1 + \gamma^*_2) ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big| T(a_0,..,a_{k+1})(f^*) - T(a_0,..,a_{k+1})(g^*) \big|^N ds$$

Cela montre que (H_{k+1}) est vraie. On applique maintenant (H_k) avec $a_1,..,a_k$ définis par

$$a_i = \frac{i \max\big(\| f \|_\infty, \| g \|_\infty\big)}{k+1}$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, le lemme est prouvé.

Soit maintenant $u \in C^0(\mathbb{R}^n_+)$, positive et à support compact K. On suppose que, pour presque tout $t > 0$, la fonction $u(.,t)$ définie sur $\mathbb{R}^{n-1}$ n'a que des points critiques non-dégénérés et que $\partial K \cap \mathbb{R}_t$ est une sous-variété de dimension $(n-2)$ de $\mathbb{R}_t$. On suppose aussi que u est de classe C^∞ sur son support. On définit alors, pour $(x_1,..,x_{n-1},t) \in \mathbb{R}^n_+$:

$$\tilde{u}(r,t) = \sup \left\{ \lambda \,\middle|\, Vol_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\left\{ y \in \mathbb{R}^{n-1} \middle| \, | \, u(y,t) \, | \geq \lambda \right\} \right) > | \, \mathcal{B}^{n-1} \, | r^{n-1} \right\}$$

où $r^2 = x_1^2 + ... + x_{n-1}^2$. Donnons maintenant une définition

Définition 1 *Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}^n_+$. On note $(x_1,..,x_{n-1},t)$ les coordonnées standard sur $\mathbb{R}^n_+$. On dira que u est à* symétrie cylindrique *si elle peut s'écrire*

$$u(x_1,..,x_{n-1},t) = u'(r,t)$$

avec $r^2 = x_1^2 + .. + x_{n-1}^2$.

On montre alors le résultat suivant :

Lemme 3 *$\tilde{u}$ vérifie*

$$\forall t \geq 0, \forall m \geq 1, \int_{\mathbb{R}_t} \tilde{u}^m ds = \int_{\mathbb{R}_t} u^m ds \tag{3.14}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} | \, \nabla \tilde{u} \, |^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} | \, \nabla u \, |^2 dx \tag{3.15}$$

De plus, $\tilde{u}$ est à symétrie cylindrique, décroissante en la variable r et à support compact.

Preuve : Il est tout d'abord clair que $\tilde{u}$ est à symétrie cylindrique, décroissante en la variable r et à support compact. De plus, on a (voir par exemple Aubin [3])

$$\forall m \geq 1, t \geq 0, \int_{\mathbb{R}_t} \tilde{u}^m ds = \int_{\mathbb{R}_t} u^m ds$$

La relation (3.14) s'ensuit. Il faut maintenant montrer (3.15). On définit, pour $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $u_t(x) = u(x,t)$ et $\tilde{u}_t(x) = \tilde{u}(x,t)$. Soit $t,t' \geq 0$. On applique le lemme 2 avec $f = u_t$, $g = u_{t'}$, $N \geq 1$ et on fait tendre N vers $+\infty$. Par définition de $\tilde{u}$, on a $f^* = \tilde{u}_t$ et $g^* = \tilde{u}_{t'}$. On obtient que

$$\| \tilde{u}_t - \tilde{u}_{t'} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \| u_t - u_{t'} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})}$$

Puisque u est lipschitzienne, il vient :

$$\| \tilde{u}_t - \tilde{u}_{t'} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C|t - t'| \tag{3.16}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de t et t'. Cela implique que $\partial_t \tilde{u}$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^n_+$ (voir par exemple [20] p.617). De plus, en appliquant le lemme 2 avec $N = 2$ et en utilisant le théorème de Lebesgue (qui s'applique ici grâce à (3.16)), on a

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} (\partial_t \tilde{u})^2 dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\partial_t \tilde{u}^2) ds dy = \lim_{t' \to t} \frac{1}{(t-t')^2} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\tilde{u}_t - \tilde{u}_{t'})^2 ds dy$$

$$\leq \lim_{t' \to t} \frac{1}{(t-t')^2} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (u_t - u_{t'})^2 ds dy = \int_{\mathbb{R}^n_+} (\partial_t u)^2 dx$$

Notons que, pour toute fonction f, $| \nabla_x f |^2 = | \nabla f |^2 - (\partial_t f)^2$. Alors, d'après Aubin [3], on a, pour presque tout t (ceux pour lesquels $u(.,t)$ n'a que des points critiques non-dégénérés et pour lesquels $\partial Supp(u) \cap \mathbb{R}_t$ est une sous-variété de dimension $(n-2)$),

$$\int_{\mathbb{R}_t} | \nabla_x \tilde{u} |^2 ds \leq \int_{\mathbb{R}_t} | \nabla_x u |^2 ds$$

Il en découle que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla_x \tilde{u} |^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla_x u |^2 dx$$

On obtient finalement que

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla \tilde{u} |^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla u |^2 dx$$

ce qui démontre le lemme 3.

Étude d'une fonctionnelle sur un cylindre

Posons

$$\mathcal{C}(R) = \{ (x_1,..,x_{n-1},t) \in \mathbb{R}^n \, | r \leq R; t \geq 0 \} \text{ et } B_0(R) = \mathcal{C}(R) \cap \mathbb{R}_0$$

où $r^2 = x_1^2 + .. + x_{n-1}^2$. Soit aussi

$$\Lambda(R) = \left\{ u \in C^\infty(\mathcal{C}(R)) \middle| \| \nabla u \|_{L^2(\mathcal{C}(R))} < +\infty; u \text{ est à symétrie cylindrique } ; \int_{B_0(R)} uds = 0 \right\}$$

et

$$\lambda(n,R) = \inf \left\{ \frac{\int_{\mathcal{C}(R)} \mid \nabla u \mid^2 dx}{\int_{B_0(R)} u^2 ds} | u \in \Lambda(R) \right\}$$

On montre alors le résultat suivant :

Proposition 1 *On a*

$$\lambda(n) = \lambda(n,1) = \lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}$$

où $\lambda_{1,n-1}$ est la première valeur propre de Neumann du laplacien pour les fonctions radiales sur la boule unité standard $\mathcal{B}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Preuve : Montrons d'abord que, pour $u \in \Lambda(1)$, on a

$$\int_{B_0(1)} u^2 ds \leq \frac{1}{\lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathcal{C}(1)} \mid \nabla u \mid^2 dx$$

D'abord, remarquons que les inclusions de Sobolev sont vraies dans $\mathcal{C}(1)$. En effet, posons

$$\tilde{\mathcal{C}}(1) = \{(x_1,..,x_{n-1},t) \in \mathbb{R}^n \,| r \leq R\}$$

Alors, pour toute fonction u définie sur $\mathcal{C}(1)$, on définit $\tilde{u}$ sur $\tilde{\mathcal{C}}(1)$ de la manière suivante :

$$\tilde{u}(x_1,..,x_{n-1},t) = \begin{cases} u(x_1,..,x_{n-1},t) & \text{si } t > 0 \\ u(x_1,..,x_{n-1}, -t) & \text{sinon} \end{cases}$$

On se ramène ainsi aux inclusions de Sobolev dans $\tilde{\mathcal{C}}(1)$. Posons maintenant, pour $u \in \Lambda(1)$,

$$I(u) = \frac{\int_{\mathcal{C}(1)} \mid \nabla u \mid^2 dx}{\int_{B_0(1)} u^2 ds}$$

Soit $(u_i)_i$ une suite minimisante telle que $\parallel u_i \parallel_{L^2(B_0(1))} = 1$. Notons, pour $s > 0$, $K_s = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} | t \leq s\}$. Fixons $s > 0$. Supposons que $\lim_i \parallel u_i \parallel_{L^2(K_s)} = +\infty$. Posons alors $v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|_{L^2(K_s)}}$. Il est alors clair que $(v_i)_i$ est bornée dans $H^1(K_s)$. Quitte à extraire une sous-suite de la suite $(v_i)_i$, il existe donc $v \in H^1(K_s)$ telle que $v_i \to v$ faiblement dans $H^1(K_s)$, fortement dans $L^2(B_0(1))$ et $L^2(K_s)$ quand i tend vers $+\infty$ (on pourra à ce sujet se référer à Adams [1] p. 144). On a cependant, par définition de v_i et puisque $\lim_i \parallel u_i \parallel_{L^2(K_s)} = +\infty$, $\parallel \nabla v \parallel_{L^2(K_s)} \leq \lim_i \parallel \nabla v_i \parallel_{L^2(K_s)} = 0$. On en déduit que v est constante. De plus, on a, par construction, $\parallel v \parallel_{L^2(B_0(1))} = \lim_i \parallel v_i \parallel_{L^2(B_0(1))} = 0$ et $\parallel v \parallel_{L^2(K_s)} = \lim_i \parallel v_i \parallel_{L^2(K_s)} = 1$. C'est impossible. Ainsi, cela montre qu'il existe $C > 0$ tel que $\parallel u_i \parallel_{L^2(K_s)} \leq C$ et donc que la suite $(u_i)_i$ est bornée dans $H^1(K_s)$. Par conséquent, il existe $u_s \in H^1(K_s)$ et une sous-suite $u_{\varphi_s(i)}$ telle que $u_{\varphi_s(i)} \to u_s$ faiblement dans $H^1(K_s)$, fortement dans $L^2(B_0(1))$ et $L^2(K_s)$ quand i tend vers $+\infty$. En prenant successivement $s = m \in \mathbb{N}$, en remplaçant à chaque fois u_i par $u_{\varphi_m(i)}$ et en remarquant que si $s < s'$ alors $K_s \subset K_{s'}$, on voit qu'il existe $u \in H^1_{loc}(\mathcal{C}(1))$ telle que, pour tout $s > 0$, il existe une sous-suite $u_{\phi_s(i)}$ telle que $u_{\phi_s(i)} \to u$ faiblement dans $H^1(K_s)$, fortement dans $L^2(B_0(1))$ et $L^2(K_s)$ quand i tend vers $+\infty$. On obtient alors facilement : $\parallel u \parallel_{L^2(B_0(1))} = 1$, $\int_{B_0(1)} uds = 0$. De plus, pour tout $s > 0$, on a par convergence faible de $u_{\phi_s(i)}$ vers u dans $H^1(K_s)$,

$$\parallel \nabla u \parallel_{L^2(K_s)} \leq \liminf_i \parallel \nabla u_i \parallel_{L^2(K_s)} \leq \liminf_i \parallel \nabla u_i \parallel_{L^2(\mathcal{C}(1))}$$

Ainsi, $u \in H^1(\mathcal{C}(1))$ et vérifie $\parallel \nabla u \parallel_{L^2(\mathcal{C}(1))} \leq \liminf_i \parallel \nabla u_i \parallel_{L^2(\mathcal{C}(1))}$. Ainsi, $u \in \Lambda(1)$ et $I(u) = \lambda(n)$ (cette égalité a un sens car $\parallel u \parallel_{L^2(B_0(1))} = 1 \neq 0$). Posons maintenant

$$\Gamma_s = \{\psi = \varphi_{/\mathcal{C}(1)} | \varphi \in C^\infty(K_s) \text{ et } \psi \text{ à sym. cyl. }\}$$

et, pour $\varphi \in \Gamma_s$,

$$J(\varphi) = I(u+\varphi)$$

$\varphi \equiv 0$ réalise le minimum de la J sur Γ_s. On en déduit que pour tout s, il existe des constantes a_s et b_s telles que, pour tout $\varphi \in \Gamma_s$,

$$\int_{\mathcal{C}(1)} < \nabla u, \nabla \varphi > dx = a_s \int_{B_0} \varphi u ds + b_s \int_{B_0} \varphi ds$$

Clairement, si $s < s'$, $\Gamma_s \subset \Gamma_{s'}$. On en déduit facilement que $a_s = a$ et $b_s = b$ ne dépendent pas de s. Ainsi, l'égalité précédente est vraie pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{C}(1))$ à symétrie cylindrique. Si maintenant, φ n'est plus à symétrie cylindrique, l'égalité reste vraie. Pour le voir, remarquons que u est à symétrie cylindrique. Il suffit alors d'appliquer l'égalité avec $\psi(r,t) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-2}} \int_{B(0,r)} \varphi(x,t) d\sigma$ où $d\sigma$ est l'élément de volume sur la sphère standard S^{n-2} de dimension $n-2$. On en déduit alors facilement que u vérifie au sens des distributions l'équation suivante

$$(E) \left\{ \begin{array}{lllll} \Delta u & = & 0 & sur & \mathcal{C}(1) - \partial\mathcal{C}(1) \\ \partial_t u & = & -\lambda(n) u & sur & B_0(1) \\ \partial_r u & = & 0 & sur & \{(r,t) \in \mathcal{C}(1) \text{ s.t. } r = 1\} \end{array} \right.$$

Écrivons maintenant que, pour $t > 0$,

$$u(r,t) - u(r,0) = \int_0^t \partial_t u(r,y) dy$$

En intégrant cette inégalité sur la boule unité $\mathcal{B}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, cela donne, compte tenu du fait que $\int_{B_0} uds = 0$,

$$\int_{B_t} uds = \int_0^t \int_{B_y} \partial_t udsdy$$

De plus, puisque $\int_{B_0} uds = 0$, (E) implique que

$$\int_{B_0} \partial_\nu uds = 0 \text{ et } \int_{\{r=1\}} \partial_\nu uds = 0$$

où ν est le vecteur unitaire normal extérieur sur $\partial\mathcal{C}(1)$. Ainsi, avec la formule de la divergence, on a, pour tout $y \geq 0$,

$$\int_{B_y} \partial_t uds = \int_{\partial\mathcal{C}_y} \partial_\nu uds = \int_{\mathcal{C}_y} (\Delta u) dx$$

où $\mathcal{C}_y = \mathcal{C}(1) \cap \{t \leq y\}$. On déduit alors de (E) que

$$\int_{B_y} \partial_t uds = 0$$

et donc que

$$\int_{B_t} uds = 0$$

Par définition de $\lambda_{1,n-1}$, cela conduit à

$$\int_{B_t} u^2 ds \leq \lambda_{1,n-1}^{-1} \int_{B_t} \mid \nabla_x u \mid^2 ds$$

où $| \nabla_x u |^2 = | \nabla_u |^2 - (\partial_t u)^2$. En intégrant cette inégalité pour $t \in [0, +\infty[$, on voit que $u \in L^2(\mathcal{C}(1))$ et que

$$\int_{\mathcal{C}(1)} u^2 dx \leq \lambda_{1,n-1}^{-1} \int_{\mathcal{C}(1)} | \nabla_x u |^2 dx \tag{3.17}$$

On écrit maintenant

$$u^2(r,0) - u^2(r,t) \leq 2 \int_0^t |u| \, |\partial_t u| \, (r,y) dy$$

On intègre cette inégalité sur $\mathcal{B}^{n-1}$ et on utilise l'inégalité de Hölder. On obtient que

$$\int_{B_0} u^2 ds \leq 2 \left(\int_{\mathcal{C}(1)} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{C}(1)} (\partial_t u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \int_{B_t} u^2 ds$$

Puisque $u \in L^2(\mathcal{C}(1))$, on peut choisir une suite $(t_k)_k$ qui tend vers $+\infty$ telle que $\lim_{k \to \infty} \int_{B_{t_k}} u^2 ds = 0$. En utilisant (3.17), cela donne

$$\int_{B_0} u^2 ds \leq \frac{2}{\lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\mathcal{C}(1)} | \nabla_x u |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{C}(1)} (\partial_t u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Posons maintenant $u_k(r,t) = u(r,kt)$ pour $k > 0$. On voit facilement que $I(u_k)$ est minimum quand k est choisi pour que

$$\int_{\mathcal{C}(1)} | \nabla_x u_k |^2 dx = \int_{\mathcal{C}(1)} (\partial_t u_k)^2 dx$$

De plus, par définition de u, $I(u_k)$ est minimum quand $k = 1$. Cela montre que

$$\int_{\mathcal{C}(1)} | \nabla_x u |^2 dx = \int_{\mathcal{C}(1)} (\partial_t u)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}(1)} | \nabla u |^2 dx$$

On obtient alors que

$$\int_{B_0} u^2 ds \leq \frac{1}{\lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathcal{C}(1)} | \nabla u |^2 dx$$

Finalement, on a $I(u) = \lambda(n) \geq \lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}$. On montre maintenant que $\lambda(n) \leq \lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}$. Il suffit de trouver une fonction φ telle que $I(\varphi) = \lambda_{1,n-1}^{\frac{1}{2}}$. On peut prendre par exemple la fonction suivante

$$\varphi(r,t) = \exp\left(-\sqrt{\lambda_{1,n-1}}\, t\right) v(r)$$

où v est une fonction propre associée à $\lambda_{1,n-1}$. Plus précisément, $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifie $v'(1) = 0$ et $\Delta_s v = \lambda_{1,n-1} v$ sur $\mathcal{B}^{n-1}$, où Δ_s est le laplacien sur $\mathbb{R}^{n-1}$. La proposition 1 est démontrée.

3.1.3 Démonstration du théorème 1

Cette démonstration suit un argument développé par Carlen et Loss dans [9]. Rappelons que

$$\tilde{A}_0(n)^{-1} = \inf_{u \in \mathcal{H}'} I(u)$$

où

$$I(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla u |^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}_0} | u | \, ds \right)^{\frac{2}{n-1}}}{\left(\int_{\mathbb{R}_0} u^2 ds \right)^{\frac{n}{n-1}}} \quad \text{et } \mathcal{H}' = \{ u \in \mathcal{H} \text{ t.q. } u_{/\mathbb{R}_0} \not\equiv 0 \}$$

Soit $u \in \mathcal{H}'$. D'abord, on sait que

$$\big|\nabla u\big| = \big|\nabla |u|\big| \text{ p.p.}$$

Avec le lemme 2, on en déduit que

$$\tilde{A}_0(n)^{-1} = \inf_{\mathcal{H}'} I(u) = \inf_{\mathcal{H}''} I(u)$$

où

$$\mathcal{H}'' = \{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n) | u_{/\mathbb{R}_0} \not\equiv 0; u \geq 0\}$$

On utilise maintenant le résultat suivant qui est une adaptation d'un lemme de Milnor (voir [30]) et dont la preuve est donnée en appendice.

Lemme 4 *Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, $f \geq 0$ à support compact K. Alors f est limite dans $C^1(\mathbb{R}_+^n)$ d'une suite de fonctions (g_p) positives, à support compact $K_p \subset K$ et qui vérifient les conditions suivantes*

- *pour presque tout $t \geq 0$, les ensembles $\partial K_p \cap \mathbb{R}_t$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}_t$ de dimension $(n-2)$;*
- *g_p est de classe C^∞ sur son support K_p;*
- *pour presque tout $t \geq 0$, les fonctions $g_p(.,t)$ définies sur $\mathbb{R}^{n-1}$ n'ont que des points critiques non-dégénérés.*

Si $u \in \mathcal{H}'$, le lemme 4 implique qu'il existe une suite de fonctions (u_p) telle que, pour tout p, u_p vérifie les conditions ci-dessus et telle que $\lim_{p\to\infty} I(u_p) = I(u)$. Avec le lemme 3, il s'ensuit que

$$\inf_{\mathcal{H}'} I(u) = \inf_{\mathcal{H}'''} I(u)$$

où

$$\mathcal{H}''' = \{u \in \mathcal{H}'' | u \text{ est à symétrie cylindrique et décroissante en } r\}$$

On fixe $u \in \mathcal{H}'''$. Donnons maintenant un minorant de $I(u)$. On définit

$$v(r,t) = \begin{cases} u(r,t) & si \quad r \leq R \\ 0 & si \quad r > R \end{cases}$$

et $w = u - v$. On a alors, puisque $u(.,t)$ est décroissante, $\| w \|_\infty \leq u(R,0) \leq \frac{1}{|\mathcal{B}^{n-1}|R^{n-1}} \| v \|_{L^1(\mathbb{R}_0)}$. Il vient alors

$$\| w \|_{L^2(\mathbb{R}_0)}^2 \leq \| w \|_{L^1(\mathbb{R}_0)} \| w \|_\infty \leq \frac{1}{| \mathcal{B}^{n-1} | R^{n-1}} \| v \|_{L^1(\mathbb{R}_0)} \| w \|_{L^1(\mathbb{R}_0)} \tag{3.18}$$

Soit maintenant $< v > = \frac{1}{|\mathcal{B}^{n-1}|R^{n-1}} \| v \|_{L^1(\mathbb{R}_0)}$ et $B_0(R) = \{(r,0) | r \leq R\}$. On obtient alors que, en utilisant la même définition de $\lambda(n,R)$ que celle introduite dans la section 3.1.2

$$\int_{\mathbb{R}_0} v^2 ds = \int_{B_0(R)} (v - < v >)^2 ds + \int_{B_0(R)} < v >^2 ds$$

$$\leq \frac{1}{\lambda(n,R)} \int_{\mathcal{C}(R)} | \nabla v |^2 dx + \frac{1}{| \mathcal{B}^{n-1} | R^{n-1}} \| v \|_{L^1(\mathbb{R}_0)}^2$$

En remarquant que $\lambda(n,R) = R^{-1}\lambda(n)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}_0} v^2 ds \leq \frac{R}{\lambda(n)} \| \nabla u \|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} + \frac{1}{| \mathcal{B}^{n-1} | R^{n-1}} \| v \|_{L^1(\mathbb{R}_0)}^2$$

En écrivant que

$$\| u \|_{L^2(\mathbb{R}_0)}^2 = \| v \|_{L^2(\mathbb{R}_0)}^2 + \| w \|_{L^2(\mathbb{R}_0)}^2$$

cela donne

$$\| u \|^2_{L^2(\mathbb{R}_0)} \leq \frac{R}{\lambda(n)} \| \nabla u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \frac{1}{| \mathcal{B}^{n-1} | R^{n-1}} \| v \|^2_{L^1(\mathbb{R}_0)} + \| w \|^2_{L^2(\mathbb{R}_0)}$$

D'après (3.18) et puisque

$$\| u \|^2_{L^1(\mathbb{R}_0)} \geq \| v \|_{L^1(\mathbb{R}_0)} \Big(\| v \|_{L^1(\mathbb{R}_0)} + \| w \|_{L^1(\mathbb{R}_0)} \Big)$$

on a, pour tout $R > 0$:

$$\| u \|^2_{L^2(\mathbb{R}_0)} \leq \frac{R}{\lambda(n)} \| \nabla u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} + \frac{1}{| \mathcal{B}^{n-1} | R^{n-1}} \| u \|^2_{L^1(\mathbb{R}_0)}$$

Le membre de droite de cette égalité est minimum pour

$$R = R(u) = \left(\frac{(n-1)\lambda(n)}{| \mathcal{B}^{n-1} |} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\| u \|^2_{L^1(\mathbb{R}_0)}}{\| \nabla u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)}} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Donc, d'après la proposition 1, on a

$$\tilde{A}_0(n) \leq \frac{n^{\frac{n}{n-1}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}_{1,n-1} | \mathcal{B}^{n-1} |^{\frac{1}{n-1}} (n-1)}$$

On définit maintenant, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^n_+$,

$$u(x,t) = \begin{cases} \exp\Big(-\sqrt{\frac{n-1}{n+1}\lambda_{1,n-1}}.t \Big) \big(v(| x |) - v(1) \big) & \text{si } | x | \leq 1 \\ 0 & \text{si } | x | > 1 \end{cases}$$

où v est une fonction propre associée à $\lambda_{1,n-1}$. Les calculs standard (voir [14]) montrent que

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n_+} | \nabla u |^2 dx \Big(\int_{\mathbb{R}_0} | u | \, ds \Big)^{\frac{2}{n-1}}}{\Big(\int_{\mathbb{R}_0} u^2 ds \Big)^{\frac{n}{n-1}}} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}_{1,n-1} | \mathcal{B}^{n-1} |^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{n^2 - 1}}{2 \big(\frac{n+1}{2} \big)^{\frac{n}{n-1}}}$$

Ainsi,

$$\tilde{A}_0(n) \geq \frac{2 \big(\frac{n+1}{2} \big)^{\frac{n}{n-1}}}{\lambda^{\frac{1}{2}}_{1,n-1} | \mathcal{B}^{n-1} |^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{n^2 - 1}}$$

ce qui prouve le théorème 1.

3.2 Le cas des variétés riemanniennes compactes à bord

Nous donnons maintenant un sens à l'inégalité de Nash à trace sur les variétés riemanniennes compactes à bord. Soit donc (M,g) une variéte riemannienne compacte à bord de classe C^∞ et de dimension $n \geq 2$. L'inégalité, telle que présentée sur $\mathbb{R}_+$, ne peut pas être vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$ (il suffit de prendre par exemple $u \equiv 1$ pour le voir). Il faut donc lui ajouter un autre terme. Plus précisément, on considère, pour tout $u \in C^\infty(M)$, l'inégalité suivante,

$$\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g \right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(A \int_M | \nabla u |^2_g dv_g + B \int_{\partial M} u^2 ds_g \right) \left(\int_{\partial M} | u | \, ds_g \right)^{\frac{2}{n-1}} \qquad T(A,B)$$

où dv_g est l'élément de volume standard de (M,g) et où ds_g est celui de $(\partial M,\bar{g})$, $\bar{g}$ étant la métrique induite par g sur ∂M. Il faut noter que cette écriture a aussi un sens pour les fonctions $u \in H^1(M)$. En effet, tout $u \in H^1(M)$ se prolonge de manière unique sur ∂M en une fonction $v \in L^2(\partial M)$ appelée trace de u sur ∂M (voir par exemple [8]). On a alors le résultat suivant :

Théorème 2 *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte à bord de classe C^∞ et de dimension $n \geq 2$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B_\epsilon > 0$ tel que $T(\tilde{A}_0(n)+\epsilon,B_\epsilon)$ soit valide. En d'autres termes, il existe $B_\epsilon > 0$ tel que*

$$\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \left((\tilde{A}_0(n)+\epsilon)\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_{\partial M} u^2 ds_g\right)\left(\int_{\partial M} |u| ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

pour tout $u \in C^\infty(M)$.

On peut maintenant se demander se qui se passe quand ϵ tend vers 0. Le résultat suivant répond à cette question.

Théorème 3 *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte C^∞ à bord régulier et de dimension $n \geq 2$. Alors, il existe $B > 0$ tel que $T(\tilde{A}_0(n),B)$ soit valide. Autrement dit, il existe $B > 0$ tel que*

$$\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \left(\tilde{A}_0(n)\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + B \int_{\partial M} u^2 ds_g\right)\left(\int_{\partial M} |u| ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

pour tout $u \in C^\infty(M)$.

Ce théorème est l'analogue du théorème 1 du chapitre 1 pour le cas de l'inégalité de Nash L^2 à trace. Les démonstrations de ces deux théorèmes sont proches. Cependant, de nombreuses difficultés apparaissent quand on veut obtenir des estimées des fonctions à l'intérieur de la variété alors que l'on n'a des informations que sur le bord. Li et Zhu [29] ont obtenu des résultats similaires dans le cas de l'inégalité de Sobolev à trace. Leur méthode est cependant très différente. Elle utilise l'invariance conforme propre à leur problème et ne peut pas être adaptée ici.

3.2.1 Démonstration du théorème 2

Elle se fait en deux étapes. Tout d'abord, on montre que,

Étape 1 *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \left((\tilde{A}_0(n)+\epsilon)\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + A(\epsilon) \int_M u^2 dv_g\right)\left(\int_{\partial M} |u| ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

pour tout $u \in C^\infty(M)$.

Il faut noter que le terme $\int_{\partial M} u^2 ds_g$ du théorème 2 est ici remplacé par $\int_M u^2 dv_g$. Soit $\epsilon > 0$ et $u \in C^\infty(M)$. Il est clair qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \partial M$ et tout $v \in C_c^\infty(B_x(\delta))$, on ait

$$\left(\int_{\partial M} v^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq (\tilde{A}_0(n)+\epsilon)\int_M |\nabla v|_g^2 dv_g \left(\int_{\partial M} |v| ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

(voir [14])

On choisit un recouvrement fini $(U_k)_{1\leq k\leq K}$ de M tel que, si $x \in \partial M \cap U_k$ pour $1 \leq k \leq K$, alors il existe $y \in \partial M$ tel que $U_k = B_y(\delta)$. On choisit aussi une partition de l'unité $(\eta_k)_{1\leq k\leq K}$ de classe C^∞ associée à ce recouvrement et qui vérifie (voir [14]) :

1) pour tout $k \in \{1..K\}$, $\sqrt{\eta_k}$ est aussi $C^\infty(M)$;
2) pour tout $k \in \{1..K\}$ et $x \in M$, $\eta_k(x) \in [0,1]$.
On a

$$\int_{\partial M} u^2 ds_g = \int_{\partial M} (\sum_{k\in\mathcal{K}} \eta_k u^2) ds_g = \sum_{k\in\mathcal{K}} \int_{\partial M} (\sqrt{\eta_k} u)^2 ds_g$$

où $\mathcal{K} = \{1,..,K\}$. Par définition de δ, cela donne

$$\int_{\partial M} u^2 ds_g \leq (\tilde{A}_0(n)+\epsilon)^{\frac{n-1}{n}} \sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\int_M \mid \nabla(\sqrt{\eta_k}u) \mid_g^2 dv_g\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\partial M} \sqrt{\eta_k} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n}}$$

D'après l'inégalité de Hölder et le fait que

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \eta_k \equiv 1$$

on obtient :

$$\int_{\partial M} u^2 ds_g \leq (\tilde{A}_0(n)+\epsilon)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\partial M} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{1}{n}} \sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\int_M \mid \nabla(\sqrt{\eta_k}u) \mid_g^2 dv_g\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\partial M} \eta_k \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{1}{n}}$$

L'inégalité de Hölder dit que pour $p,q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et pour $a_j,b_j \geq 0$, on a

$$\sum_j a_j^{\frac{1}{p}} b_j^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_j a_j\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_j b_j\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ainsi,

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\int_M \mid \nabla\sqrt{\eta_k}u \mid_g^2 dv_g\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\partial M} \eta_k \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_{\partial M} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{k\in\mathcal{K}} \int_M \mid \nabla(\sqrt{\eta_k}u) \mid_g^2 dv_g\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

On écrit maintenant que

$$\int_M \mid \nabla(\sqrt{\eta_k}u) \mid_g^2 dv_g = \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 \eta_k dv_g + \int_M \mid \nabla(\sqrt{\eta_k}) \mid_g^2 u^2 dv_g + 2\int_M < \nabla(\sqrt{\eta_k}), \nabla u >_g u\sqrt{\eta_k} dv_g$$

Puisque

$$2\sum_{k\in\mathcal{K}} \sqrt{\eta_k}\nabla(\sqrt{\eta_k}) = \nabla(\sum_{k\in\mathcal{K}} \eta_k) = 0$$

on a

$$\int_M < \nabla\sqrt{\eta_k}, \nabla u >_g u\sqrt{\eta_k} dv_g = 0$$

Par conséquent, en posant

$$C = \| \sum_{k\in\mathcal{K}} \mid \nabla(\sqrt{\eta_k}) \mid_g^2 \|_\infty$$

on obtient que

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} \left(\int_M \mid \nabla\sqrt{\eta_k}u \mid_g^2 dv_g\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\partial M} \sqrt{\eta_k} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \left(\int_{\partial M} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_M \mid \nabla u \mid^2 dv_g + C\int_M u^2 dv_g\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Il en découle que

$$\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq (\tilde{A}_0(n)+\epsilon)\left(\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + C\int_M u^2 dv_g\right)\left(\int_{\partial M} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

ce qui démontre l'étape 1.

Étape 2 *Conclusion*

On raisonne par l'absurde et on suppose que le résultat est faux. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mu_\alpha = \inf_\Lambda \frac{\left(\int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + \alpha \int_{\partial M} u^2 ds_g\right)\left(\int_{\partial M} \mid u \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}}{\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}}} \leq \tilde{A}_0(n)^{-1} - \delta$$

où $\Lambda = \{u \in H^1(M) \mid u/\partial M \not\equiv 0\}$. Par définition de μ_α, il existe $u_\alpha \in \Lambda$ telle que

$$\nu_\alpha \leq \tilde{A}_0(n)^{-1} - \frac{\delta}{2} \tag{3.19}$$

où

$$\nu_\alpha = \frac{\left(\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g + \alpha \int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g\right)\left(\int_{\partial M} \mid u_\alpha \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}}{\left(\int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}}}$$

Quitte à remplacer u_α par $\frac{u_\alpha}{\|u_\alpha\|}_{L^2(M)}$, on peut supposer que

$$\int_M u_\alpha^2 dv_g = 1 \tag{3.20}$$

On choisit $\epsilon > 0$ assez petit pour que $K = (\tilde{A}_0(n)^{-1} - \frac{\delta}{2})(\tilde{A}_0(n)+\epsilon) < 1$. D'après (3.19) et l'étape 1, il existe $B_\epsilon > 0$ tel que

$$\left(\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g + \alpha\int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g\right)\left(\int_{\partial M} \mid u_\alpha \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}} \leq (\tilde{A}_0(n)^{-1} - \frac{\delta}{2})\left(\int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$\leq \left(K\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_M u_\alpha^2 dv_g\right)\left(\int_{\partial M} \mid u_\alpha \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}$$

Cela donne

$$(1-K)\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g \leq -\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g + B_\epsilon \int_M u_\alpha^2 dv_g$$

D'après (3.20), il s'ensuit qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g \leq C \tag{3.21}$$

et

$$\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g \leq C$$

Par conséquent, il existe $u \in H^1(M)$ telle que, quand α tend vers $+\infty$, u_α tend vers u faiblement dans $H^1(M)$ et fortement dans $L^1(\partial M)$ et $L^2(\partial M)$. D'après (3.21), on a facilement

$$u_{/\partial M} = 0 \tag{3.22}$$

Maintenant, posons

$$A_\alpha = \frac{\left(\int_{\partial M} \mid u_\alpha \mid ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}}}{\left(\int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}}}$$

Supposons que $\lim_{\alpha\to\infty} \int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g = 0$. Alors, clairement, u est une fonction constante et u_α tend vers u fortement dans $H^1(M)$ quand α tend vers $+\infty$. Par (3.22), $u \equiv 0$. Cependant, (3.20) implique que $u \not\equiv 0$. Cette contradiction montre qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g \geq c$$

Avec (3.19), cela conduit à

$$A_\alpha \leq C \tag{3.23}$$

où $C > 0$. Maintenant, par (3.19), on peut écrire

$$\tilde{A}_0(n)^{-1} - \frac{\delta}{2} \geq A_\alpha \left(\int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g + \alpha \int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g\right)$$

$$\geq A_\alpha \left(\int_M \mid \nabla(u - u_\alpha) \mid_g^2 dv_g + \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + \alpha \int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g\right) + o(A_\alpha)$$

En utilisant (3.21), cela donne

$$\tilde{A}_0(n)^{-1} - \frac{\delta}{2} \geq A_\alpha \int_M \mid \nabla(u - u_\alpha) \mid_g^2 dv_g + o(A_\alpha)$$

En utilisant l'étape 1 et (3.22), on obtient que

$$A_\alpha \int_M \mid \nabla(u - u_\alpha) \mid_g^2 dv_g \geq (\tilde{A}_0(n) + \epsilon)^{-1} - B_\epsilon A_\alpha \int_M (u_\alpha - u)^2 dv_g \geq (\tilde{A}_0(n) + \epsilon)^{-1} + o(A_\alpha)$$

Cela donne

$$\tilde{A}_0(n)^{-1} - \frac{\delta}{2} \geq (\tilde{A}_0(n) + \epsilon)^{-1} + o(A_\alpha)$$

D'après (3.23), cette inégalité ne peut pas être vraie si ϵ est petit. Cela termine la preuve du théorème 2.

3.2.2 Démonstration du théorème 3

Le schéma de cette démonstration est assez proche de celui de la démonstration du théorème 1 du chapitre 1. Il comprend six étapes. L'étape 2 est spécifique à l'inégalité à trace et permet de contrôler dans M les normes des fonctions étudiées alors que l'on ne possède des informations que sur ∂M. Cette difficulté est d'ailleurs le principal problème rencontré ici et il faudra avoir de temps en temps recours à des méthodes qui ne se trouvaient pas du tout dans la démonstration du théorème 1 du chapitre 1. Afin d'éviter l'apparition de constantes en utilisant l'inégalité de Hölder, on supposera par la suite que $Vol(\partial M) = 1$. La démonstration de ce théorème se fait par l'absurde. On suppose donc que le théorème est faux. Il est alors facile de voir (cf. chapitre 1) qu'il existe une suite $(\epsilon_\alpha)_\alpha$ qui tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$ et telle que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mu_\alpha < \tilde{A}_0(n)^{-1}$$

où

$$\mu_\alpha = \inf_\Lambda \frac{\left(\int_M |\nabla u|_g^2 dv_g + \alpha \int_{\partial M} u^2 ds_g\right)\left(\int_{\partial M} |u|^{1+\epsilon_\alpha} ds_g\right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}}}{\left(\int_{\partial M} u^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}}} = \inf_\Lambda I_\alpha(u)$$

et où

$$\Lambda = \{u \in H^1(M) \mid u \geq 0; \int_{\partial M} u^2 ds_g = 1\}$$

Puisque $\mu_\alpha < \tilde{A}_0(n)^{-1}$, les méthodes classiques déjà utilisées aux chapitres 1 et 2 montrent qu'il existe $u_\alpha \in \Lambda$ telle que $I_\alpha(u_\alpha) = \mu_\alpha$. En écrivant l'équation d'Euler de u_α, on obtient que :

$$(E_\alpha)\begin{cases} \Delta_g u_\alpha & = & 0 & \text{sur} & M \\ 2A_\alpha \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} + \frac{2}{n-1} B_\alpha u_\alpha^{\epsilon_\alpha} & = & k_\alpha u_\alpha & \text{sur} & \partial M \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \left(\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g\right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}} \\ B_\alpha &= \left(\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + \alpha\right)\left(\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g\right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}-1} \\ k_\alpha &= 2\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g A_\alpha + \frac{2}{n-1}\mu_\alpha \end{aligned}$$

Remarques :

1- Par la suite, sauf mention contraire, toutes les limites seront à prendre quand α tend vers $+\infty$. D'autre part, chaque suite bornée pourra être considérée comme convergente, quitte à en extraire une sous-suite.

2- Dans toute la démonstration, C représentera une constante strictement positive indépendante de α.

De $I_\alpha(u_\alpha) < \mu_\alpha$, on tire :

$$\lim A_\alpha = 0$$

On applique $T(\tilde{A}_0(n) + \epsilon, B_\epsilon)$ à u_α. Il vient :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left(\tilde{A}_0(n)\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + B_\epsilon\right)\left(\int_{\partial M} u_\alpha ds_g\right)^{\frac{2}{n-1}} \\ &\leq \left(\tilde{A}_0(n)\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + B_\epsilon\right) A_\alpha \end{aligned}$$

On en tire, en faisant tendre α vers $+\infty$ puis ϵ vers 0, que

$$\lim A_\alpha \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g \geq \tilde{A}_0(n)^{-1}$$

Enfin, en utilisant de nouveau $I_\alpha(u_\alpha) < \mu_\alpha$, on obtient facilement :

$$\lim \alpha A_\alpha = 0 \tag{3.24}$$

$$\lim A_\alpha \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g = \tilde{A}_0(n)^{-1} \tag{3.25}$$

$$\lim B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g = \tilde{A}_0(n)^{-1} \tag{3.26}$$

$$\lim k_\alpha = \frac{2n}{n-1} \tilde{A}_0(n)^{-1} \tag{3.27}$$

Notons maintenant x_α un maximum de u_α. Par le principe de maximum, $x_\alpha \in \partial M$.

Étape 1 *Montrons que, pour tout $\delta > 0$, on a :*

$$\liminf \frac{\int_{\partial M \cap B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} > 0$$

Soit $\delta > 0$ fixé. Notons $U_\alpha = A_\alpha^{-1}(exp_{x_\alpha})^{-1}(M) \cap B(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$, où exp_{x_α} a été choisie de manière à ce que les coordonnées normales $(x_1,..,x_n)$ induites vérifient $\partial_n(x_\alpha) = \frac{\partial_g}{\partial \nu}(x_\alpha)$. Posons également $V_\alpha = U_\alpha \cap A_\alpha^{-1}(exp_{x_\alpha})^{-1}(\partial M)$. Enfin, pour $x \in U_\alpha$, posons :

$$\begin{aligned} g_\alpha(x) &= (exp_{x_\alpha})^* g(A_\alpha x) \\ \varphi_\alpha(x) &= \| u_\alpha \|_\infty^{-1} u_\alpha(exp_{x_\alpha}(A_\alpha x)) \end{aligned}$$

Compte tenu de (E_α), φ_α vérifie :

$$(\tilde{E}_\alpha) \left\{ \begin{array}{cccc} \Delta_{g_\alpha} \varphi_\alpha & = & 0 & \text{sur} \quad U_\alpha \\ 2\frac{\partial_{g_\alpha} \varphi_\alpha}{\partial \nu} + \frac{2}{n-1} B_\alpha \| u_\alpha \|_\infty^{-1+\epsilon_\alpha} \varphi_\alpha^{\epsilon_\alpha} & = & k_\alpha \varphi_\alpha & \text{sur} \quad V_\alpha \\ \varphi_\alpha(0) & = & 1 & \end{array} \right.$$

Il est clair que :

$$g_\alpha \to \xi \text{ dans } C^1(U_\alpha) \tag{3.28}$$

où ξ est la métrique euclidienne standard de $\mathbb{R}^n$. On regarde maintenant (E_α) en x_α. Puisque $\frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu}(x_\alpha) \geq 0$ et d'après (3.27), on a :

$$B_\alpha \leq C \| u_\alpha \|_\infty^{1-\epsilon_\alpha} \tag{3.29}$$

En particulier, $\lim \| u_\alpha \|_\infty = +\infty$. Il découle alors de $(\tilde{E}_\alpha)$ que, par des estimées standard sur les opérateurs elliptiques (voir [22]), $(\varphi_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $C^{1,a}(B(0,\delta) \cap \mathbb{R}^n_+)$ $(0 < a < 1)$. D'après le théorème d'Ascoli, il existe $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n_+)$ telle que $\varphi_\alpha \to \varphi$ dans $C^1(B(0,\delta) \cap \mathbb{R}^n_+)$ pour tout $\delta > 0$. On a aussi, par définition de φ_α :

$$\int_{V_\alpha} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_{g_\alpha} = A_\alpha^{1-n} \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\epsilon_\alpha)} \int_{\partial M \cap B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g$$

Par définition de A_α, on a alors :

$$\int_{V_\alpha} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_{g_\alpha} = A_\alpha^{\frac{n-1}{2}(\epsilon_\alpha - 1)} \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\epsilon_\alpha)} \frac{\int_{\partial M \cap B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} \tag{3.30}$$

Puisque $\lim A_\alpha = \lim \epsilon_\alpha = 0$, la relation (3.26) implique que

$$A_\alpha^{\frac{1-n}{2}(1+\epsilon_\alpha)} \leq A_\alpha^{\frac{1-n}{2}} \leq C B_\alpha$$

La relation (3.29) entraîne alors que :

$$\int_{V_\alpha} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_{g_\alpha} \leq C \frac{\int_{\partial M \cap B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}$$

D'autre part, d'après (3.28) et le fait que $\varphi(0)$ vaut clairement 1, on a :

$$\lim \int_{V_\alpha} \varphi_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_{g_\alpha} = \int_{B(0,1)\cap\partial\mathbb{R}^n_+} \varphi ds_\xi > 0$$

Cela termine la démonstration de l'étape.

Remarque : On déduit de (3.30) que :

$$\lim A_\alpha^{\frac{n-1}{2}(\epsilon_\alpha - 1)} \| u_\alpha \|_\infty^{-(1+\epsilon_\alpha)} = C > 0$$

De plus, en écrivant que

$$\int_{V_\alpha} \varphi_\alpha^2 ds_{g_\alpha} = A_\alpha^{1-n} \| u_\alpha \|_\infty^{-2} \int_{\partial M \cap B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} u_\alpha^2 ds_g \tag{3.31}$$

et en raisonnant de même, on obtient :

$$\lim A_\alpha^{n-1} \| u_\alpha \|_\infty^2 = C > 0 \tag{3.32}$$

On en déduit que :

$$\lim \| u_\alpha \|_\infty^{\epsilon_\alpha} = C \,; \ \lim B_\alpha^{\epsilon_\alpha} = C \text{ et } \lim A_\alpha^{\epsilon_\alpha} = C \tag{3.33}$$

Étape 2 *Soit $(c_\alpha)_\alpha \subset \mathbb{R}^*_+$ une suite telle que $\lim \frac{A_\alpha}{c_\alpha} = 0$. Alors, il existe $(\gamma_\alpha)_\alpha \subset \mathbb{R}^*_+$ vérifiant :*
$(*)$ $\lim \frac{\gamma_\alpha}{c_\alpha} = 0$
$(**)$ $\lim \frac{A_\alpha}{\gamma_\alpha} = 0$
$(***)$ $\int_{B_{x_\alpha}(\gamma_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g = o(\frac{\gamma_\alpha^2}{A_\alpha})$

On reprend les notations de l'étape précédente. Soit $\delta > 0$, on a

$$\int_{U_\alpha} | \nabla \varphi_\alpha |_{g_\alpha}^2 dv_{g_\alpha} = A_\alpha^{2-n} \| u_\alpha \|_\infty^{-2} \int_{B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g$$

D'après (3.25) et (3.32), on voit que

$$\int_{U_\alpha} | \nabla \varphi_\alpha |_{g_\alpha}^2 dv_{g_\alpha} \leq C$$

où C est une constante indépendante de δ. D'autre part, on sait que $\varphi_\alpha \to \varphi$ dans $C^1(B(0,\delta) \cap \mathbb{R}^n_+)$. Donc

$$\lim \int_{U_\alpha} | \nabla \varphi_\alpha |_{g_\alpha}^2 dv_{g_\alpha} = \int_{B(0,\delta)} | \nabla \varphi |_\xi^2 dv_\xi$$

On en déduit que $| \nabla \varphi |_\xi \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$. De même, on montre que $\varphi_{/\partial\mathbb{R}^n_+} \in L^1(\partial\mathbb{R}^n_+) \cap L^2(\partial\mathbb{R}^n_+)$. En reprenant la démonstration du lemme 1, on montre alors que, quand δ tend vers $+\infty$,

$$\int_{B(0,\delta)\cap\mathbb{R}^n_+} \varphi^2 dv_\xi = o(\delta^2) \tag{3.34}$$

De plus,

$$\int_{U_\alpha} \varphi_\alpha^2 dv_g = \| u_\alpha \|_\infty^{-2} A_\alpha^{-n} \int_{B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g$$

En utilisant (3.32), on a alors :

$$\lim A_\alpha^{-1}\int_{B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g = C\int_{B(0,\delta)\cap\mathbb{R}^n_+}\varphi^2 dv_g$$

En posant

$$T_{\delta,\alpha} = \delta^{-2}A_\alpha^{-1}\int_{B_{x_\alpha}(\delta A_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g$$

on déduit de (3.34) que

$$\lim_{\delta\to\infty}\lim_{\alpha\to\infty} T_{\delta,\alpha} = 0$$

On peut alors clairement choisir une suite diagonale $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite strictement croissante et tendant vers $+\infty$ avec k telle que $\lim_{k\to\infty} T_{k,\alpha_k} = 0$. Ainsi, quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite $(\delta_\alpha)_\alpha$ tendant vers $+\infty$ telle que $\lim T_{\delta_\alpha,\alpha} = 0$. On peut par exemple définir δ_α par $\delta_{\alpha_k} = k$. Quitte à choisir α_k plus grand, on peut supposer que δ_α a une croissance aussi lente que l'on veut vers $+\infty$. En particulier, on prendra δ_α tel que $\delta_\alpha = o(\frac{c_\alpha}{A_\alpha})$. On posera alors $\gamma_\alpha = \delta_\alpha A_\alpha$. On vérifie facilement que $(\gamma_\alpha)_\alpha$ vérifie $(*)$, $(**)$ et $(***)$, ce qui termine la preuve de l'étape.

Étape 3 *Soit $(c_\alpha)_\alpha$ une suite de nombres strictement positifs telle que $\lim \frac{A_\alpha}{c_\alpha} = 0$. On a alors :*

$$\lim \frac{\int_{\partial M\cap B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} = 1$$

Soit $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{array}{rc} (i) & \eta([0,\frac{1}{2}]) = \{1\} \\ (ii) & \eta([1,+\infty[) = \{0\} \\ (iii) & 0 \le \eta \le 1 \end{array}$$

Pour $k\in\mathbb{N}$, posons : $\eta_{\alpha,k} = \left(\eta(c_\alpha^{-1}d_g(.,x_\alpha))\right)^{2^k}$. Multiplions (E_α) par $u_\alpha\eta_{\alpha,k}^2$ et intégrons sur ∂M. Cela donne

$$2A_\alpha\int_M |\nabla u_\alpha\eta_{\alpha,k}|_g^2 dv_g - 2A_\alpha\int_M |\nabla\eta_{\alpha,k}|_g^2 u_\alpha^2 dv_g + \frac{2}{n-1}B_\alpha\int_{\partial M}\eta_{\alpha,k}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g$$

$$= k_\alpha\int_{\partial M}(u_\alpha\eta_{\alpha,k})^2 ds_g \tag{3.35}$$

On remarque que, quitte à remplacer $(c_\alpha)_\alpha$ par $(\gamma_\alpha)_\alpha$ donnée par l'étape précédente, on peut supposer que :

$$\int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^2 dv_g = o(\frac{c_\alpha^2}{A_\alpha})$$

En tenant compte du fait que

$$|\nabla\eta_{\alpha,k}|_g^2 \le Cc_\alpha^{-2}$$

on en déduit facilement que

$$\lim A_\alpha\int_M |\nabla\eta_{\alpha,k}|_g^2 u_\alpha^2 dv_g = 0$$

On applique maintenant $T(\tilde{A}_0(n)+\epsilon,B_\epsilon)$ à $(u_\alpha\eta_{\alpha,k})$. Cela conduit, avec (3.35), à :

$$2A_\alpha \int_M |\nabla u_\alpha \eta_{\alpha,k}|_g^2 dv_g + \epsilon(\alpha,k) + \frac{2}{n-1} B_\alpha \int_{\partial M} \eta_{\alpha,k}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g =$$

$$k_\alpha \left((\tilde{A}_0(n) + \epsilon) \int_M |\nabla u_\alpha \eta_{\alpha,k}|_g^2 dv_g + B_\epsilon \int_{\partial M} (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^2 ds_g \right)^{\frac{n-1}{n}} \times$$

$$\left(\int_{\partial M} (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \right)^{\frac{2}{n(1+\epsilon_\alpha)}} \tag{3.36}$$

où $\lim \epsilon(\alpha,k) = 0$. Posons :

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \lim \frac{\int_{\partial M} {\eta_{\alpha,k}}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} \\
\tilde{\lambda}_k &= \lim \frac{\int_{\partial M} (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} \\
L_k &= \lim A_\alpha \int_M |\nabla u_\alpha \eta_{\alpha,k}|_g^2 dv_g
\end{aligned}$$

Par définition de $\eta_{\alpha,k}$, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_{k+1} \leq \tilde{\lambda}_{k+1} \leq \lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k \leq \mu = \lim \frac{\int_{\partial M \cap B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} \tag{3.37}$$

et, d'après l'étape 1 :

$$\exists C > 0 \text{ t.q. } \forall k \in \mathbb{N}, \lambda_k \geq C \tag{3.38}$$

La relation (3.26) implique que :

$$\lim B_\alpha \int_{\partial M} \eta_{\alpha,k}^2 u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g = \tilde{A}_0(n)^{-1} \lambda_k$$

et (3.27) conduit à :

$$\lim k_\alpha \int_{\partial M} (u_\alpha \eta_{\alpha,k})^2 ds_g \leq C$$

En particulier, (3.35) entraîne que $L_k < +\infty$. Par définition de A_α, on a :

$$\lim \int_M |\nabla u_\alpha \eta_{\alpha,k}|_g^2 dv_g \left(\int_{\partial M} (\eta_{\alpha,k} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \right)^{\frac{2}{n-1}} = L_k \tilde{\lambda}_k^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}}$$

L'équation (3.36), la relation (3.27) et le fait que $\lim A_\alpha = 0$ nous donnent alors, en passant à la limite :

$$2L_k + \frac{2}{n-1} \tilde{A}_0(n)^{-1} \leq \frac{2n}{n-1} \tilde{A}_0(n)^{-1} \left((\tilde{A}_0(n) + \epsilon) L_k \tilde{\lambda}_k^{\frac{2}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

En posant $\tilde{L}_k = \tilde{A}_0(n) L_k$ et en faisant tendre ϵ vers 0, on obtient :

$$2\tilde{L}_k + \frac{2}{n-1} \lambda_k \leq \frac{2n}{n-1} \tilde{L}_k^{\frac{n-1}{n}} \tilde{\lambda}_k^{\frac{2}{n}}$$

Posons alors, pour x,y,z : $f(x,y,z) = \frac{2n}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{2}{n}} - (\frac{2}{n-1} z + 2x)$. En dérivant f par rapport à x, on voit que : $f(x,y,z) \leq f(y^2,y,z)$. Ainsi : $f(\tilde{L}_k, \tilde{\lambda}_k, \lambda_k) \leq f(\tilde{\lambda}_k^2, \tilde{\lambda}_k, \lambda_k) = \frac{2}{n-1}(\tilde{\lambda}_k^2 - \lambda_k)$.

Cela donne $\lambda_k \leq \tilde{\lambda}_k^2$. Les relations (3.37) et (3.38) impliquent alors que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $0 < C < \lambda_0^N < \mu$. Puisque $\mu \leq 1$, on a nécessairement $\mu = 1$ ce qui démontre l'étape.
Remarque : On déduit de ce qui précède que, de plus, $\lim \tilde{L}_k = \lim \tilde{\lambda}_k^2 = 1$. En revenant à (3.35), on montre alors facilement que pour toute suite $(c_\alpha)_\alpha$ vérifiant $\lim \frac{A_\alpha}{c_\alpha} = 0$,

$$\lim \int_{\partial M \cap B_{x_\alpha}(c_\alpha)} u_\alpha^2 ds_g = 1 \tag{3.39}$$

On vient de voir que $\lim \tilde{L}_k = 1$. On en déduit facilement que, pour toute suite $(c_\alpha)_\alpha$ vérifiant $\lim \frac{A_\alpha}{c_\alpha} = 0$, on a

$$\lim A_\alpha \int_{B_{x_\alpha}(c_\alpha)} | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g = \tilde{A}_0(n)^{-1} \tag{3.40}$$

Étape 4 *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in \partial M$:*

$$u_\alpha(x) d(x,x_\alpha)^{\frac{n-1}{2}} \leq C$$

où d est la distance relative à g.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que l'assertion suivante est vraie :

$$\exists y_\alpha \in \partial M \text{ t.q. } u_\alpha(y_\alpha) d(y_\alpha,x_\alpha)^{\frac{n-1}{2}} \to +\infty \tag{H}$$

Soit :

$$v_\alpha = u_\alpha(y_\alpha) d(y_\alpha,x_\alpha)^{\frac{n-1}{2}}$$

On peut supposer que :

$$v_\alpha = \| u_\alpha(.) d(.,x_\alpha)^{\frac{n-1}{2}} \|_{L^\infty(\partial M)}$$

On a $u_\alpha(y_\alpha) d(y_\alpha,x_\alpha)^{\frac{n-1}{2}} \leq \| u_\alpha \|_\infty d(y_\alpha,x_\alpha)^{\frac{n-1}{2}}$. De (H) et (3.32), on tire alors que $\lim \frac{d(y_\alpha,x_\alpha)}{A_\alpha} = +\infty$. Par conséquent, il existe une suite $(c_\alpha)_\alpha$ tendant vers 0, telle que $\lim \frac{A_\alpha}{c_\alpha} = 0$ et telle que, pour tout $\delta > 0$,

$$B_{y_\alpha}(\delta A_\alpha) \cap B_{x_\alpha}(c_\alpha) \cap \partial M = \emptyset \tag{3.41}$$

Posons $\tilde{U}_\alpha = A_\alpha^{-1} (exp_{y_\alpha})^{-1}(M) \cap B(0,1)$. Pour $x \in \tilde{U}_\alpha$, on pose aussi

$$\begin{array}{rcl} h_\alpha(x) & = & (exp_{y_\alpha})^* g(A_\alpha x) \\ \psi_\alpha(x) & = & u_\alpha(y_\alpha)^{-1} u_\alpha(exp_{y_\alpha}(A_\alpha x)) \end{array}$$

où la carte exponentielle a été choisie comme à l'étape 1 mais centrée cette fois-ci sur y_α à la place de x_α. On a alors :

$$(E_\alpha^{'}) \left\{ \begin{array}{rcll} \Delta_{h_\alpha} \psi_\alpha & = & 0 & \text{sur } \tilde{U}_\alpha \\ 2\frac{\partial_{h_\alpha}\psi_\alpha}{\partial \nu} + \frac{2}{n-1} B_\alpha u_\alpha(y_\alpha)^{\epsilon_\alpha - 1} \psi_\alpha^{\epsilon_\alpha} & = & k_\alpha \psi_\alpha & \text{sur } \tilde{V}_\alpha \end{array} \right.$$

où $\tilde{V}_\alpha = \tilde{U}_\alpha \cap A_\alpha^{-1} (exp_{y_\alpha})^{-1}(\partial M)$. Par définition de y_α, on a, pour tout $x \in \partial M$,

$$u_\alpha(y_\alpha) d(x_\alpha,y_\alpha)^{\frac{n-1}{2}} \geq u_\alpha(x) d(x_\alpha,x)^{\frac{n-1}{2}} \tag{3.42}$$

Soit maintenant $x \in B_{y_\alpha}(A_\alpha) \cap \partial M$. D'après (H) et (3.32), on a, pour α grand,

$$d(x,y_\alpha) \leq A_\alpha \leq C \| u_\alpha \|_\infty^{-\frac{2}{n-1}} \leq C u_\alpha(y_\alpha)^{-\frac{2}{n-1}} \leq \frac{1}{2} d(x_\alpha,y_\alpha)$$

Donc

$$d(x,x_\alpha) \geq d(x_\alpha,y_\alpha) - d(x,y_\alpha) \geq d(x_\alpha,y_\alpha) - \frac{1}{2} d(x_\alpha,y_\alpha) \geq \frac{1}{2} d(x_\alpha,y_\alpha)$$

Ainsi, en utilisant (3.42),

$$u_\alpha(y_\alpha) d(x_\alpha,y_\alpha)^{\frac{n-1}{2}} \geq \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} u_\alpha(x) d(x_\alpha,y_\alpha)^{\frac{n-1}{2}}$$

Finalement, on obtient que

$$\| u_\alpha \|_{L^\infty(B_{y_\alpha}(A_\alpha) \cap \partial M)} \leq C u_\alpha(y_\alpha)$$

Ainsi, $\| \psi_\alpha \|_{L^\infty(\tilde{U}_\alpha)} \leq C$ et le second membre de $(E_\alpha^{'})$ est borné. Comme à l'étape 1, on trouve $\psi \in C^1(\mathbb{R}_+^n \cap B(0,1))$ telle que

$$\begin{cases} \psi_\alpha \to \psi & \text{dans} \quad C^1(\mathbb{R}_+^n \cap B(0,1)) \\ \psi(0) = 1 \end{cases}$$

Il en découle que

$$\lim \int_{\tilde{V}_\alpha} \psi_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_{h_\alpha} > 0 \tag{3.43}$$

Soit maintenant $\tilde{\eta}_\alpha = 1 - \eta((2A_\alpha)^{-1} d(.,y_\alpha))$ où η est défini comme à l'étape 3. On multiplie (E_α) par $\tilde{\eta}_\alpha$ et on intègre. Cela donne :

$$2A_\alpha \int_M < \nabla u_\alpha, \nabla \tilde{\eta}_\alpha >_g dv_g + \frac{2}{n-1} B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha ds_g = k_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha ds_g$$

On a donc

$$\frac{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g} \leq C \left(\frac{\int_{\partial M} u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha ds_g}{B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g} + \frac{A_\alpha}{B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha ds_g} \left| \int_M < \nabla u_\alpha, \nabla \tilde{\eta}_\alpha >_g dv_g \right| \right)$$

En intégrant (E_α), on voit que $B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g \geq C \int_{\partial M} u_\alpha ds_g$. Ainsi,

$$\frac{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g} \leq C \left(\frac{\int_{\partial M} u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha ds_g} + \frac{A_\alpha}{\int_{\partial M} u_\alpha ds_g} \left| \int_M < \nabla u_\alpha, \nabla \tilde{\eta}_\alpha >_g dv_g \right| \right) \tag{3.44}$$

De plus, puisque $supp(\nabla \tilde{\eta}_\alpha) \subset B_{y_\alpha}(A_\alpha)$ et puisque $| \nabla \tilde{\eta}_\alpha |_g \leq \frac{C}{A_\alpha}$, on a

$$\left| \int_M < \nabla u_\alpha, \nabla \tilde{\eta}_\alpha >_g dv_g \right| \leq C \left(\int_{B_{y_\alpha}(A_\alpha)} | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}} A_\alpha^{-1} \big(Vol\big(B_{y_\alpha}(A_\alpha)\big)\big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C A_\alpha^{\frac{n}{2}-1} \left(\int_{B_{y_\alpha}(A_\alpha)} | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après (3.25), (3.40) et (3.41), il en découle que

$$\left| \int_M < \nabla u_\alpha, \nabla \tilde{\eta}_\alpha >_g dv_g \right| = o(A_\alpha^{\frac{n-3}{2}}) \tag{3.45}$$

On écrit maintenant que, en utilisant (3.33),

$$\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \leq C \| u_\alpha \|_\infty^{\epsilon_\alpha} \int_{\partial M} u_\alpha ds_g \leq C \int_{\partial M} u_\alpha ds_g \tag{3.46}$$

On remarque de plus que par (3.33), l'inégalité de Hölder et par définition de A_α, on a

$$\int_{\partial M} u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha ds_g \leq \left(\int_{\partial M} (u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \right)^{\frac{1}{1+\epsilon_\alpha}} \leq C \int_{\partial M} (u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g$$

Les relations (3.44), (3.45) et (3.46) impliquent alors que

$$\frac{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g} \leq C \left(\frac{\int_{\partial M} (u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} + \frac{A_\alpha}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} o(A_\alpha^{\frac{n-3}{2}}) \right)$$

Par définition de A_α et par (3.33), on a

$$\frac{A_\alpha}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} o(A_\alpha^{\frac{n-3}{2}}) = o(A_\alpha^{\frac{n-1}{2}\epsilon_\alpha}) = o(1)$$

D'après l'étape 3 et (3.41), on a

$$\lim \frac{\int_{\partial M} (u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g} = 0$$

Cela donne

$$\lim \frac{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} \tilde{\eta}_\alpha ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g} = 0$$

Finalement, on obtient que

$$\lim \frac{\int_{B_{y_\alpha}(A_\alpha) \cap \partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g} = 0 \tag{3.47}$$

Il reste à écrire que

$$\int_{\tilde{V}_\alpha} \psi_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_{h_\alpha} = A_\alpha^{1-n} u_\alpha(y_\alpha)^{-\epsilon_\alpha} \int_{B_{y_\alpha}(A_\alpha) \cap \partial M} u_\alpha(y_\alpha)^{\epsilon_\alpha} ds_g$$

$$\leq A_\alpha^{1-n} \frac{\int_{B_{y_\alpha}(A_\alpha) \cap \partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g}{\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g} \int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g \tag{3.48}$$

En intégrant (E_α), on voit que

$$\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g \leq \frac{C}{B_\alpha} \int_{\partial M} u_\alpha ds_g \leq \frac{C}{B_\alpha} \left(\int_{\partial M} (u_\alpha \tilde{\eta}_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \right)^{\frac{1}{1+\epsilon_\alpha}}$$

D'après (3.26) et la définition de A_α, on a alors

$$\int_{\partial M} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_g \leq C A_\alpha^{n-1} \tag{3.49}$$

On obtient enfin, avec (3.47) et (3.48), que

$$\lim \int_{\tilde{V}_\alpha} \psi_\alpha^{\epsilon_\alpha} ds_{h_\alpha} = 0$$

Cela contredit (3.43) ce qui prouve que (H) est fausse et termine la démonstration de l'étape.

On fixe maintenant $c > 0$. On note $(x_{1,\alpha};..;x_{n-1,\alpha})$ les coordonnées dans la carte exponentielle de ∂M centrée en x_α. On note aussi t_α la distance d'un point de M à ∂M. Les coordonnées $(x_{1,\alpha};...;x_{n-1,\alpha};t_\alpha)$ définies sur un voisinage de x_α forment un système de coordonnées de Fermi (voir par exemple [16]). On pose alors

$$r_\alpha = (x_{1,\alpha}^2 + .. + x_{n-1,\alpha}^2 + t_\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$$

Enfin, on définit, pour $r > 0$ suffisamment petit, $B_\alpha(r) = \{y \in M \mid r_\alpha \le r\}$.

Étape 5 *Quelques estimées*

a- Montrons que :

$$B_\alpha \int_{\partial M - B_\alpha(c)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \le C A_\alpha \tag{3.50}$$

$$\int_{\partial M - B_\alpha(c)} u_\alpha^2 ds_g \le C A_\alpha \tag{3.51}$$

et

$$\int_{M - B_\alpha(c)} \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 dv_g \le C \tag{3.52}$$

Soit Φ une solution du problème suivant

$$(E_\Phi) \left\{ \begin{array}{lll} \Delta_g \Phi = 1 & sur & M \\ \Phi = 0 & sur & \partial M \end{array} \right.$$

Puisque u_α est harmonique sur M, on a

$$0 = \int_{\partial M} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} \Phi ds_g = \int_{\partial M} \frac{\partial_g \Phi}{\partial \nu} u_\alpha ds_g + \int_M (\Delta_g \Phi) u_\alpha dv_g$$

Ainsi,

$$\int_M u_\alpha dv_g \le C \int_{\partial M} u_\alpha ds_g \le C A_\alpha^{\frac{n-1}{2}} \tag{3.53}$$

De plus, on sait (voir par exemple le chapitre 1) qu'il existe deux constantes $A,B > 0$ telles que, pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$\int_M u^2 dv_g \le \left(A \int_M \mid \nabla u \mid_g^2 dv_g + B \int_M u^2 dv_g \right)^{\frac{n}{n+2}} \left(\int_M \mid u \mid dv_g \right)^{\frac{4}{n+2}}$$

En appliquant ce résultat à u_α, on obtient, grâce à (3.25) et (3.53), que

$$\int_M u_\alpha^2 dv_g \le C A_\alpha^{\frac{n-2}{n+2}} \le C \tag{3.54}$$

Grâce à l'étape 4 et en remarquant que, sur ∂M, $r_\alpha = d(.,x_\alpha)$:

$$\int_{\partial M - B_\alpha(c)} u_\alpha^2 ds_g \le C \int_{\partial M - B_\alpha(c)} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^{-\frac{(n-1)(1-\epsilon_\alpha)}{2}} ds_g \le C \int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g$$

D'où, par définition de A_α,

$$\int_{\partial M - B_\alpha(c)} u_\alpha^2 ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{n-1}{2}} \tag{3.55}$$

Posons $\eta_\alpha^{'} = 1 - \eta(c^{-1}r_\alpha)$ où η est comme à l'étape 3. On multiplie maintenant (E_α) par $(\eta_\alpha^{'})^2 u_\alpha$ et on intègre. On obtient que

$$2A_\alpha \int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha^{'} \mid_g^2 dv_g - 2A_\alpha \int_M \mid \nabla \eta_\alpha^{'} \mid_g^2 u_\alpha^2 dv_g + \frac{2}{n-1} B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} (\eta_\alpha^{'})^2 ds_g$$

$$= k_\alpha \int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^2 ds_g \tag{3.56}$$

D'après (3.54),

$$2A_\alpha \int_M \mid \nabla \eta_\alpha^{'} \mid_g^2 u_\alpha^2 dv_g \leq C A_\alpha$$

La relation (3.55) étant valable pour tout choix de c, on a

$$\int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^2 ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{n-1}{2}}$$

Si $n \geq 3$, on en déduit que

$$\int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^2 ds_g \leq C A_\alpha$$

et on tire de (3.56) que

$$B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} (\eta_\alpha^{'})^2 ds_g \leq C A_\alpha$$

et

$$A_\alpha \int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha^{'} \mid_g^2 dv_g \leq C A_\alpha$$

Il vient alors immédiatement (3.50), (3.51) et (3.52). Si par contre $n = 2$, le raisonnement précédent n'est plus suffisant. En effet, dans ce cas, on a seulement

$$\int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^2 ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{1}{2}} \tag{3.57}$$

De (3.56), on tire alors que

$$B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} (\eta_\alpha^{'})^2 ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{1}{2}}$$

et

$$A_\alpha \int_M \mid \nabla u_\alpha \eta_\alpha^{'} \mid_g^2 dv_g \leq C A_\alpha^{\frac{1}{2}} \tag{3.58}$$

Le choix de η étant arbitraire, on a en fait aussi

$$B_\alpha \int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{1}{2}} \tag{3.59}$$

On applique $T(A,B)$ à $(u_\alpha \eta_\alpha^{'})$. D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^2 ds_g \leq$$

$$\left(A\int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha^{'}|_g^2 dv_g + B\int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^2 ds_g\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g\right)^{\frac{1}{1+\epsilon_\alpha}} \tag{3.60}$$

On déduit maintenant de (3.57), (3.59), (3.58), (3.60) et du fait que $B_\alpha \geq C A_\alpha^{-\frac{1}{2}}$ que

$$\int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^2 ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{3}{4}}$$

On a aussi utilisé pour obtenir cette relation que, par (3.33), on a $A_\alpha^{\frac{1}{1+\epsilon_\alpha}} \leq C A_\alpha$. En raisonnant de même, la relation (3.56) montre que

$$B_\alpha \int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{3}{4}}$$

et

$$A_\alpha \int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha^{'}|_g^2 dv_g \leq C A_\alpha^{\frac{3}{4}}$$

et la relation (3.60) montre que

$$\int_{\partial M} (\eta_\alpha^{'} u_\alpha)^2 ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{9}{8}} \leq C A_\alpha$$

Avec (3.59), on en déduit facilement (3.50), (3.51) et (3.52).

Dans tout ce qui suit, on note $\eta_\alpha = \eta(c^{-1} r_\alpha)$, η étant définie comme à l'étape 3.

b- Montrons que :

$$\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 t_\alpha \eta_\alpha^2 dv_g \leq C \tag{3.61}$$

et

$$\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 r_\alpha^2 dv_g \leq C \tag{3.62}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla u_\alpha|^2 t_\alpha \eta_\alpha^2 dv_g &= -\int_M < \nabla u_\alpha, \nabla(t_\alpha \eta_\alpha^2) >_g u_\alpha dv_g \\ &= -\frac{1}{2}\int_M u_\alpha^2 \Delta_g(t_\alpha \eta_\alpha^2) dv_g - \frac{1}{2}\int_{\partial M} \frac{\partial_g(t_\alpha \eta_\alpha^2)}{\partial \nu} u_\alpha^2 ds_g\end{aligned}$$

Il faut en effet remarquer que les autres termes provenant de l'intégration par partie sont nuls car $t_\alpha \equiv 0$ sur ∂M. D'après (3.54), on a

$$\left|\int_M u_\alpha^2 \Delta_g(t_\alpha \eta_\alpha^2) dv_g\right| \leq C \int_M u_\alpha^2 dv_g \leq C$$

On a aussi :

$$\left|\int_{\partial M} \frac{\partial_g(t_\alpha \eta_\alpha^2)}{\partial \nu} u_\alpha^2 ds_g\right| \leq C \int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g \leq C$$

Cela prouve (3.61). Prouvons maintenant (3.62). On a

$$\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 r_\alpha^2 dv_g = \int_{\partial M} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} u_\alpha r_\alpha^2 ds_g + 2\int_M < \nabla u_\alpha, \nabla r_\alpha >_g u_\alpha r_\alpha dv_g \tag{3.63}$$

Soit $x \in \partial M$ tel que $\frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu}(x) \geq 0$. Alors, d'après (E_α) et le fait que $k_\alpha \leq C$, on voit que $B_\alpha \leq C(u_\alpha(x))^{1-\epsilon_\alpha}$. Avec l'étape 4, on obtient $(r_\alpha(x))^{\frac{1-n}{2}} \geq C(r_\alpha(x))^{\frac{1-n}{2}(1-\epsilon_\alpha)} \geq CB_\alpha$. D'après les équivalences déjà obtenues entre A_α et B_α, cela montre que $r_\alpha \leq t_0 A_\alpha$ où $t_0 > 0$. Ainsi, sur $\partial M - B_{x_\alpha}(t_0 A_\alpha)$, on a $\frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu}(x) < 0$. On en déduit que

$$\int_{\partial M} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} u_\alpha r_\alpha^2 ds_g \leq \int_{B_{x_\alpha}(t_0 A_\alpha)} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} u_\alpha r_\alpha^2 ds_g \leq CA_\alpha^2 \int_{\partial M} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} u_\alpha ds_g$$

On a, d'après (3.25) et (E_α) :

$$\int_{\partial M} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} u_\alpha ds_g = \int_M \mid \nabla u_\alpha \mid^2 dv_g \leq CA_\alpha^{-1}$$

En particulier,

$$\int_{\partial M} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} u_\alpha r_\alpha^2 ds_g \leq C \tag{3.64}$$

Écrivons que, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$2 \int_M < \nabla u_\alpha, \nabla r_\alpha >_g u_\alpha r_\alpha dv_g \leq 2\epsilon \int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 r_\alpha^2 dv_g + \frac{2}{\epsilon} \int_M \mid \nabla r_\alpha \mid_g^2 u_\alpha^2 dv_g$$

Ainsi, avec (3.54), pour tout $\epsilon > 0$,

$$2 \int_M < \nabla u_\alpha, \nabla r_\alpha >_g u_\alpha r_\alpha dv_g \leq 2\epsilon \int_M \mid \nabla u_\alpha \mid_g^2 r_\alpha^2 dv_g + C_\epsilon$$

On obtient alors (3.62) en utilisant (3.63) et (3.64).

c- Montrons que

$$\int_{\partial M} (u_\alpha r_\alpha)^2 ds_g \leq CA_\alpha \tag{3.65}$$

D'après (3.33) et en utilisant l'étape 4, on écrit que

$$\int_{\partial M} (u_\alpha r_\alpha)^2 ds_g = \int_{\partial M - B_{x_\alpha}(A_\alpha^{\frac{1}{2}})} (u_\alpha r_\alpha)^2 ds_g + \int_{B_{x_\alpha}(A_\alpha^{\frac{1}{2}})} (u_\alpha r_\alpha)^2 ds_g$$

$$\leq C \int_{\partial M - B_{x_\alpha}(A_\alpha^{\frac{1}{2}})} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} r_\alpha^{2+(2-\epsilon_\alpha)\frac{1-n}{2}} ds_g + A_\alpha \int_{B_{x_\alpha}(A_\alpha^{\frac{1}{2}})} u_\alpha^2 ds_g$$

Puisque $r_\alpha \leq C$, on obtient que

$$\int_{\partial M} (u_\alpha r_\alpha)^2 ds_g \leq C \int_{\partial M - B_{x_\alpha}(A_\alpha^{\frac{1}{2}})} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} r_\alpha^{3-n} ds_g + CA_\alpha$$

Si maintenant $n \leq 3$. Alors, on écrit que $r_\alpha^{3-n} \leq C$, ce qui donne avec (3.49) que

$$\int_{\partial M - B_{x_\alpha}(A_\alpha^{\frac{1}{2}})} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} r_\alpha^{3-n} ds_g \leq CA_\alpha^{n-1} \leq CA_\alpha$$

Si par contre, $n > 3$, on a $r_\alpha^{3-n} \geq A_\alpha^{\frac{3-n}{2}}$ ce qui implique, toujours avec (3.49) que

$$\int_{\partial M - B_{x_\alpha}(A_\alpha^{\frac{1}{2}})} u_\alpha^{\epsilon_\alpha} r_\alpha^{3-n} ds_g \leq CA_\alpha^{n-1+\frac{3-n}{2}} \leq CA_\alpha$$

On en déduit (3.65).

d- Montrons que :

$$\int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 ds_g \leq C A_\alpha^{\frac{n+1}{2}} \tag{3.66}$$

On multiplie (E_α) par $u_\alpha r_\alpha^2$ et on intègre sur ∂M. Cela donne :

$$2A_\alpha \int_{\partial M} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} u_\alpha r_\alpha^2 ds_g + \frac{2}{n-1} B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 ds_g = k_\alpha \int_{\partial M} (u_\alpha r_\alpha)^2 ds_g$$

D'après (3.27) et (3.65), on a

$$k_\alpha \int_{\partial M} (u_\alpha r_\alpha)^2 ds_g \leq C A_\alpha$$

D'autre part, d'après (3.64), on a

$$\left| 2A_\alpha \int_{\partial M} \frac{\partial_g u_\alpha}{\partial \nu} u_\alpha r_\alpha^2 ds_g \right| \leq C A_\alpha$$

Cela entraîne alors que

$$B_\alpha \int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 ds_g \leq C A_\alpha$$

On a vu d'autre part que $B_\alpha \leq C A_\alpha^{\frac{1-n}{2}}$. La relation (3.66) en découle.

Étape 6 *Conclusion*

Par définition de $\tilde{A}_0(n)$, on a, toujours dans les coordonnées de Fermi définies précédemment,

$$\left(\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^2 ds_\xi\right)^{\frac{n}{n-1}} \leq \tilde{A}_0(n) \int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_\xi^2 dv_\xi \left(\int_{\partial M} u_\alpha \eta_\alpha ds_\xi\right)^{\frac{2}{n-1}} \tag{3.67}$$

D'autre part, on sait que dans ces coordonnées, on a (voir [16])

$$1 - Ct_\alpha - Cr_\alpha^2 \leq g \leq 1 + Ct_\alpha + Cr_\alpha^2 \tag{3.68}$$

en tant que formes bilinéaires. Ainsi, puisque $t_\alpha \equiv 0$ sur ∂M,

$$\left(\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^2 ds_\xi\right)^{\frac{n}{n-1}} \geq \left(\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^2 ds_g - C \int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha)^2 ds_g\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

D'après (3.65), on a

$$\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha r_\alpha)^2 ds_g \leq C A_\alpha$$

De plus, avec (3.51),

$$\left| \int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^2 ds_g - \int_{\partial M} u_\alpha^2 ds_g \right| = \left| \int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^2 ds_g - 1 \right| \leq C A_\alpha$$

On en déduit que

$$\left(\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^2 ds_\xi\right)^{\frac{n}{n-1}} \geq (1 - C A_\alpha)^{\frac{n}{n-1}}$$

et donc qu'il existe une autre constante $C > 0$ telle que

$$\left(\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^2 ds_\xi\right)^{\frac{n}{n-1}} \geq 1 - CA_\alpha \tag{3.69}$$

Avec (3.68), on peut écrire que

$$\int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_\xi^2 dv_\xi \leq \int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_g^2 dv_g + C\int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_g^2 t_\alpha dv_g + C\int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_g^2 r_\alpha^2 dv_g$$

En développant et en utilisant (3.54) et (3.61), on voit que

$$\int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_g^2 t_\alpha dv_g \leq C\left(\int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 t_\alpha \eta_\alpha^2 dv_g + \int_M |\nabla \eta_\alpha|_g^2 t_\alpha u_\alpha^2 dv_g\right) \leq C$$

De même, avec (3.62),

$$\int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_g^2 r_\alpha^2 dv_g \leq C$$

Enfin, avec (3.52), on a

$$\int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_g^2 dv_g \leq \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + C$$

Finalement,

$$\int_M |\nabla u_\alpha \eta_\alpha|_\xi^2 dv_\xi \leq \int_M |\nabla u_\alpha|_g^2 dv_g + C \tag{3.70}$$

On remarque que si c est assez petit, $Vol_\xi\big(supp(\eta_\alpha)\big) < 1$. Ainsi, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\left(\int_{\partial M} u_\alpha \eta_\alpha ds_\xi\right)^{\frac{2}{n-1}} \leq \left(\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_\xi\right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}}$$

De (3.68), on tire :

$$\left(\int_{\partial M} u_\alpha \eta_\alpha ds_\xi\right)^{\frac{2}{n-1}} \leq \left(\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g + C\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} r_\alpha^2 ds_g\right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}}$$

Puisque $B_\alpha \geq CA_\alpha^{\frac{1-n}{2}}$, la relation (3.50) montre que

$$\int_{\partial M} (u_\alpha \eta_\alpha)^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \leq \int_{\partial M} u_\alpha^{1+\epsilon_\alpha} ds_g + CA_\alpha^{\frac{n+1}{2}}$$

Avec la relation (3.66), on obtient que

$$\left(\int_{\partial M} u_\alpha \eta_\alpha ds_\xi\right)^{\frac{2}{n-1}} \leq \left(\int_{\partial M} {u_\alpha}^{1+\epsilon_\alpha} ds_g + CA_\alpha^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}}$$

En reprenant la définition de A_α, cela donne :

$$\left(\int_{\partial M} u_\alpha \eta_\alpha ds_\xi\right)^{\frac{2}{n-1}} \leq \left(\int_{\partial M} {u_\alpha}^{1+\epsilon_\alpha} ds_g\right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}} + CA_\alpha^2 \tag{3.71}$$

On déduit alors des relations (3.67), (3.69), (3.70) et (3.71) que

$$1 \leq \tilde{A}_0(n) \left(\int_M | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g + C \right) \left(\left(\int_{\partial M} {u_\alpha}^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}} + CA_\alpha^2 \right) + CA_\alpha$$

Avec la relation (3.25) et la définition de A_α, on obtient alors que

$$1 \leq \tilde{A}_0(n) \int_M | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g \left(\int_{\partial M} {u_\alpha}^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}} + CA_\alpha \tag{3.72}$$

De plus, puisque $\mu_\alpha = I_\alpha(u_\alpha) < \tilde{A}_0(n)^{-1}$, on a

$$1 = \left(\mu_\alpha^{-1} \int_M | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g + \mu_\alpha^{-1} \alpha \right) \left(\int_{\partial M} {u_\alpha}^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}}$$

$$\geq \left(\tilde{A}_0(n) \int_M | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g + \tilde{A}_0(n) \alpha \right) \left(\int_{\partial M} {u_\alpha}^{1+\epsilon_\alpha} ds_g \right)^{\frac{2}{(n-1)(1+\epsilon_\alpha)}}$$

En divisant cette inégalité ainsi que l'inégalité (3.72) par A_α, on obtient que

$$\tilde{A}_0(n) \int_M | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g + \tilde{A}_0(n) \alpha \leq \tilde{A}_0(n) \int_M | \nabla u_\alpha |_g^2 dv_g + C$$

C'est à dire

$$\tilde{A}_0(n) \alpha \leq C$$

Ce résultat étant faux, cela prouve le théorème 3.

3.3 Appendice : preuve du lemme 4

Définissons, pour $p = (p_1,..,p_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^n_+$:

$$L(p)(x,t) = \left((f(x,t) - p_1)^2 + (p_2 - x^1)^2 + .. + (p_n - x^{n-1})^2 \right)$$

où $\| \ \|$ désigne la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Choisissons

$$p = (-c + \epsilon_1, .., \epsilon_n)$$

où c est grand et où $\epsilon_i \leq \frac{1}{c}$. Si $t > 0$ fixé, le théorème 6.6 de Milnor [30] dit que l'ensemble $E_t \subset \mathbb{R}^n$ des p pour lesquels $L(p)(.,t)$ a au moins un point critique dégénéré est de mesure nulle. L'ensemble des $(p,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ tels que $L(p)(.,t)$ a au moins un point critique dégénéré est donc aussi de mesure nulle. Cela permet de choisir les ϵ_i tels que l'ensemble des t tels que $p \notin E_t$ soit de mesure nulle dans $\mathbb{R}_+$. Posons maintenant, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^n_+$

$$g(x,t) = \frac{L(p)(x,t) - c^2}{2c}$$

Comme :

$$L(p,t)(x) = \left((f(x,t) + c - \epsilon_1)^2 + (\epsilon_2 - x^1)^2 + .. + (\epsilon_n - x^{n-1})^2 \right)$$

on voit que l'on peut supposer $g \geq 0$ (car si $0 \in supp(f)$ et si ϵ_1 est assez petit, alors $(f(x,t) + c - \epsilon_1)^2 \geq c^2$). On voit également que g (resp. $\partial_1 g,..,\partial_{n-1} g, \partial_t g$) tend vers f (resp. $\partial_1 g,..,\partial_{n-1} g, \partial_t g$) uniformément quand c tend vers $+\infty$ (il ne faut pas oublier que $\epsilon_i \leq \frac{1}{c}$). Pour tout $p > 0$, nous avons donc montré que l'on pouvait trouver g_p telle que $\| g_p - f \|_\infty \leq$

$\frac{1}{p}$, $\| \partial_i g_p - \partial_i f \|_\infty \leq \frac{1}{p}$ et $\| \partial_t g_p - \partial_t f \|_\infty \leq \frac{1}{p}$. De plus, g_p est de classe C^∞ sur son support $K_p \subset K$. Pour presque tout $t \geq 0$, le nombre de points critiques de $g_p(.,t)$ est fini (car les points critiques non dégénérés sont des points isolés). Ainsi, l'ensemble des $(\alpha,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que α est une valeur critique de $g_p(.,t)$ est de mesure nulle. On peut donc choisir $\alpha_p \in [\frac{1}{p},\frac{2}{p}]$ tel que, pour presque tout $t > 0$, α_p ne soit pas une valeur critique pour $g(.,t)$. Posons :

$$A_p = \{g_p(x,t) \geq \alpha_p\} \text{ et } A_{-p} = \{g_p(x,t) \leq -\alpha_p\}$$

Quitte à remplacer g_p par $(g_p - \alpha_p)1_{A_p} + (g_p + \alpha_p)1_{A_{-p}}$ (1_C désignant la fonction indicatrice de l'ensemble C) et à raisonner comme dans le théorème de [3], on peut supposer que, pour presque tout $t > 0$, $\partial K_p \cap \mathbb{R}_t$ est une sous-variété de dimension $n-2$ de $\mathbb{R}_t$. Cela termine la démonstration du lemme.

Chapitre 4

Inégalité de Sobolev à trace explicite pour les domaines étoilés bornés dont le bord est à courbure de Ricci positive

4.1 Introduction

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$. Un résultat classique montre qu'il existe deux constantes $A,B > 0$ telles que, pour tout $u \in C^\infty(M)$

$$\left(\int_V | u |^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq A \int_V | \nabla u |^2 + B \int_V | u |^2 \qquad S(A,B)$$

Si $\partial M \neq \emptyset$, un résultat similaire dit qu'il existe $A,B > 0$ tels que, pour tout $u \in C^\infty(M)$,

$$\left(\int_{\partial V} | u |^q\right)^{\frac{2}{q}} \leq A \int_V | \nabla u |^2 + B \int_{\partial V} | u |^2 \qquad \bar{S}(A,B)$$

où $q = \frac{2(n-1)}{(n-2)}$ est l'exposant critique dans l'inclusion de l'espace $H^1(V)$ dans $L^q(\partial V)$. L'étude des constantes A et B dans ces deux inégalités a fait l'objet de nombreux travaux (voir par exemple [2], [5], [13], [12], [19], [26], [27], [29]). En particulier, si la courbure de Ricci de M est positive, Ilias a calculé explicitement dans [28] des constantes A et B positives telles que $S(A,B)$ soit vraie pour tout $u \in C^\infty(M)$. Ce chapitre vise à obtenir des résultats similaires à ceux d'Ilias dans le cas de l'inégalité $\bar{S}(A,B)$ pour les variétés à bord. La méthode utilisée suit celle d'Ilias. Cependant, les problèmes rencontrés y sont différents. En effet, la symétrisation utilisée par Ilias n'est pas adaptée au cas des inégalités à trace. Il faut donc avoir recours à une symétrisation cylindrique telle que rencontrée dans le chapitre précédent et qui apporte beaucoup de difficultés. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 1 *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine étoilé en $0 \in D - \partial D$ tel que la métrique $\bar{g}$, induite par la métrique standard de $\mathbb{R}^n$ sur ∂D, satisfasse $Ric_{\bar{g}} \geq (n-1)K\bar{g}$ avec $K > 0$. Soit aussi $r_0 > 0$ tel que $B(0,r_0) \subset D$. Enfin, soit $k \geq 0$ tel que $| < \frac{x}{|x|},\vec{v} > | \leq k$ pour tout $x \in \partial D$ et tout vecteur unitaire $\vec{v}$ tangent à ∂D. On suppose que $k < 1$. Pour tout $u \in C^\infty(D)$, on a alors*

$$\left(\int_{\partial D} | u |^q\right)^{\frac{2}{q}} \leq \mathcal{A}(D) \int_D | \nabla u |^2 + \mathcal{B}(D) \int_{\partial D} | u |^2$$

où

$$\mathcal{A}(D) = \frac{4\pi^2 K^{-1} Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}}{(n-2)(1-k^2)(1-k)^{n/2} r_0} \quad et\ \mathcal{B}(D) = Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}$$

4.2 Démonstration du théorème 1

La démonstration du théorème 1 consiste à déformer la boule unité standard de $\mathbb{R}^n$ afin de la comparer au domaine D. Elle se fait en deux étapes, la première ayant pour but de contrôler la métrique lors de cette déformation. En premier lieu, quitte à remplacer D par $\sqrt{K}D$, on peut supposer que $K = 1$. Puisque pour tout $u \in C^\infty(D)$, $\big|\nabla \mid u \mid \big| = \big|\nabla u\big|$ presque partout, on peut montrer le théorème pour $u \geq 0$. Considérons le difféomorphisme

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc}]0,1] \times \partial D & \longrightarrow & \text{D-}\{\ 0\ \} \\ (t,x) & \longmapsto & tx \end{array} \right.$$

Par construction, ϕ est une isométrie de $(]0,1] \times \partial D, \phi^*\xi)$ sur $(D - \{0\}, \xi)$ où ξ est la métrique standard de $\mathbb{R}^n$. Montrons d'abord que

Étape 1

$$\phi^*\xi \geq (1-k)(r_0^2 dt^2 + t^2 \bar{g})$$

Calculons $\phi^*\xi$. Fixons $(t_0,x_0) \in]0,1] \times \partial D$. Chaque vecteur v de l'espace tangent $T_{(t_0,x_0)}]0,1] \times \partial D$ peut s'écrire $(\gamma_1'(0),\gamma_2'(0))$ où (γ_1,γ_2) est un chemin de $]0,1] \times \partial D$ défini sur un voisinage de 0 et qui vérifie $\gamma_1(0) = t_0$ et $\gamma_2(0) = x_0$. On calcule alors

$$\phi^*\xi(v,v) =< \phi_*(\gamma_1'(0),\gamma_2'(0)), \phi_*(\gamma_1'(0),\gamma_2'(0)) >$$

où $< .,. >$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$. Il faut voir que

$$\phi_*(\gamma_1'(0),\gamma_2'(0)) = \frac{d}{ds}\gamma_1(s)\gamma_2(s)_{s=0} = \gamma_1'(0)x_0 + t_0\gamma_2'(0)$$

Ainsi,

$$\phi^*\xi(v,v) = \gamma_1'(0)^2 \|\ x_0\ \|^2 + t_0^2 \|\ \gamma_2'(0)\ \|^2 + 2t_0\gamma_1'(0) < x_0, \gamma_2'(0) >$$

La définition de k implique que

$$2t_0\gamma_1'(0)| < x_0,\gamma_2'(0) > | \leq 2t_0\gamma_1'(0)k \|\ \gamma_2'(0)\ \|.\|\ x_0\ \| \leq kt_0^2 \|\ \gamma_2'(0)\ \|^2 + k\gamma_1'(0)^2 \|\ x_0\ \|^2$$

D'où :

$$\phi^*\xi(v,v) \geq (1-k)(\gamma_1'(0)^2 \|\ x_0\ \|^2 + t_0^2 \|\ \gamma_2'(0)\ \|^2)$$

Considérons $\Omega = r_0^2 dt^2 + t^2\bar{g}$. On a

$$\frac{\phi^*\xi(v,v)}{\Omega(v,v)} \geq (1-k)\frac{\gamma_1'(0)^2 \|\ x_0\ \|^2 + t_0^2 \|\ \gamma_2'(0)\ \|^2}{\gamma_1'(0)^2 r_0^2 + t_0^2 \|\ \gamma_2'(0)\ \|^2}$$

En utilisant la définition de r_0, on a $\|\ x_0\ \|^2 \geq r_0^2$, ce qui prouve l'étape 1.

Étape 2 *Conclusion*

Considérons les ensembles suivants :

$$\mathcal{M}(\partial D) = \{v \in C^\infty(\partial D) \text{ t.q. } v \text{ n'a que des points critiques non-dégénérés } \}$$

et

$$\mathcal{M}'(D) = \{u \in C^\infty(D) \text{ t.q. pour tout } t \in]0,1],\ u(t,.) \in \mathcal{M}(\partial D)\}$$

D'après des résultats standard de la théorie de Morse (voir le chapitre précédent), on peut se restreindre à $\mathcal{M}'(D)$ (autrement dit, si l'inégalité cherchée est vraie pour tout $u \in \mathcal{M}'(D)$, elle sera vraie pour tout $u \in C^\infty(D)$). Soit maintenant $\beta = Vol\big(\partial D\big)/\omega_{n-1}$ où ω_{n-1} est le volume de la sphère standard (S^{n-1},h) de dimension $n-1$. On rappelle un résultat de Gromov [23] : si Γ est un domaine de ∂D, et $\mathcal{B}$ une boule géodésique de (S^{n-1},h) avec $Vol_{\bar{g}}\big(\Gamma\big) = \beta Vol_h\big(\mathcal{B}\big)$, alors

$$Vol_{\bar{g}}(\partial\Gamma) \leq \beta Vol_h(\partial\mathcal{B})$$

À chaque $v \in \mathcal{M}(\partial D)$, on associe une fonction radiale décroissante v^* sur S^{n-1} definie par

$$Vol_{\bar{g}}\big(v > \lambda\big) = \beta Vol_h\big(v^* > \lambda\big)$$

pour tout $\lambda > 0$. Il est bien connu (voir [28] ou le théorème 5.4 de [24]) que v^* est unique, bien définie, que

$$\int_{\partial D} v^m dv(\bar{g}) = \beta \int_{S^{n-1}} (v^*)^m dv(h) \tag{4.1}$$

et que

$$\int_{\partial D} \mid \nabla v \mid_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}} \geq \beta \int_{S^{n-1}} \mid \nabla v^* \mid_h^2 dv(h) \tag{4.2}$$

De plus, en utilisant les résultats du chapitre précédent, on peut montrer le lemme suivant :
Lemme 1 *Soit $f,g \in C^\infty(\partial D)$. On a alors*

$$\int_{\partial D} |f-g|^N dv(\bar{g}) \geq \beta \int_{S^{n-1}} \big|f^*-g^*\big|^N dv(h)$$

pour tout $N > 1$.
Fixons $u \in \mathcal{M}'(D)$, $u \not\equiv 0$. On définit $\tilde{u}$ sur $B(0,1)$ en coordonnées polaires $(t,x) \in]0,1] \times \partial D$ par $\tilde{u}(t,.) = \big(u(t,.)\big)^*$. Soit $t,t' \in]0,1]$. On utilise le lemme 1 avec $f = u(t,.)$ et $g = u(t',.)$. Cela donne :

$$\lim_{N\to\infty} \parallel \tilde{u}(t,.) - \tilde{u}(t',.) \parallel_{L^N(S^{n-1})} \leq \beta^{-\frac{1}{N}} \lim_{N\to\infty} \parallel u(t,.) - u(t',.) \parallel_{L^N(\partial D)}$$

Ainsi,

$$\parallel \tilde{u}(t,.) - \tilde{u}(t',.) \parallel_\infty \leq \parallel u(t,.) - u(t',.) \parallel_\infty$$

Cela entraîne donc facilement que

$$\parallel \tilde{u}(t,.) - \tilde{u}(t',.) \parallel_\infty \leq C|t'-t| \tag{4.3}$$

où $C > 0$ ne dépend pas de t et t'. Il s'ensuit que $\tilde{u}$ est presque partout différentiable en t. On applique une nouvelle fois le lemme 1 avec $f = u(t,.)$, $g = u(t',.)$ et $N = 2$. Cela donne, en utilisant (4.3) pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\int_{\partial D} (\partial_t u)^2(t,x)dv(\bar{g})(x) = \int_{\partial D} \lim_{t'\to t} \left(\frac{|u(t,x)-u(t',x)|}{|t'-t|}\right)^2 dv(\bar{g})(x)$$

$$\geq \beta \int_{S^{n-1}} \lim_{t'\to t} \left(\frac{|\tilde{u}(t,x)-\tilde{u}(t',x)|}{|t'-t|}\right)^2 dv(h)(x) \geq \beta \int_{S^{n-1}} (\partial_t \tilde{u})^2(t,x)dv(h)(x)$$

En multipliant cette inégalité par $r_0 t^{n-1}$ et en intégrant pour $t \in]0,1[$, on obtient que

$$\int_{]0,1]\times\partial D} (\partial_t u)^2 dv(\Omega) \geq \beta r_0 \int_{B(0,1)} (\partial_t \tilde{u})^2 \tag{4.4}$$

où Ω est la métrique $\Omega = r_0^2 dt^2 + t^2 \bar{g}$ sur $]0,1] \times \partial D$. Maintenant, d'après (4.1), on a

$$\int_{\partial D} u^m dv(\bar{g}) = \beta \int_{S^{n-1}} \tilde{u}^m dv(h) \tag{4.5}$$

et d'après (4.2),

$$\int_{\partial D} | \nabla u(t,.) |_{\bar{g}}^2 dv_{\bar{g}} \geq \beta \int_{S^{n-1}} | \nabla \tilde{u}(t,.) |_h^2 dv(h)$$

Multiplions cette dernière inégalité par t^{n-3}. Cela donne :

$$\int_{\partial D} t^{-2} | \nabla u(t,.) |_{\bar{g}}^2 dv(t^2 \bar{g}) \geq \beta \int_{S^{n-1}} | \nabla \tilde{u}(t,.) |_{t^2 h}^2 dv(t^2 h) \tag{4.6}$$

où $t^2 h$ est la métrique standard sur tS^{n-1}. Considérons maintenant, pour $(t,x) \in]0,1] \times \partial D$

$$| \nabla_T u |^2 (t,x) = | \nabla u |_\xi^2 (t,x) - (\partial_{\vec{n}(x)} u)^2 (t,x)$$

où $\vec{n}(x)$ est le vecteur normal unitaire extérieur pour D en $x \in \partial D$. Soit $(t,x) \in]0,1] \times \partial D$. Considérons $(x_1,...,x^{n-1})$ la carte exponentielle en $x \in \partial D$ pour la métrique $\bar{g}$. Puisque $\bar{g}$ est induite par la métrique euclidienne sur ∂D, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(x),...,\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x) \right\}$ est une famille orthonormée de vecteurs orthogonaux à $\vec{n}(x)$. Ainsi, $| \nabla_T u |^2 (t,x) = \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i u)^2 (t,x)$. Par ailleurs, $u(t,x)$ s'écrit $u(tx)$ dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi

$$t^{-2} | \nabla u(t,.) |_{\bar{g}}^2 = t^{-2} | \nabla u(t.) |_{\bar{g}}^2 = t^{-2} \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i u(t.))^2 (t,x) = \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i u)^2 (t,x)$$

Finalement,

$$t^{-2} | \nabla u(t,.) |_{\bar{g}}^2 (x) = | \nabla_T u |^2 (t,x)$$

On multiplie maintenant la relation (4.6) par $r_0 t^{n-1}$ et on intègre pour $t \in [0,1]$. On obtient

$$\int_{]0,1] \times \partial D} | \nabla_T u |^2 dv(\Omega) \geq \beta r_0 \int_{B(0,1)} | \nabla_T \tilde{u} |^2 dv(\xi) \tag{4.7}$$

où, en coordonnées polaires $(t,x) \in]0,1] \times S^{n-1}$ sur $B(0,1)$:

$$| \nabla_T \tilde{u} |^2 (t,x) = | \nabla \tilde{u} |_\xi^2 (t,x) - (\partial_t \tilde{u})^2 (t,x)$$

On écrit maintenant, pour $x \in \partial D$ et $K = 1$, $x = a(x)\vec{n}(x) + b(x)\vec{T}(x)$ où $\vec{n}(x)$ est le vecteur unitaire normal extérieur pour D en x et où $\vec{T}(x)$ est un vecteur unitaire appartenant à l'espace tangent $T_x \partial D$. Il faut noter que, dans les coordonnées (t,x) sur $]0,1] \times \partial D$, on a $\partial_s(s,x)_{/s=t} = \partial_s(sx)_{/s=t} = x$. Cela implique que $\frac{\partial}{\partial t} = x$. En conséquence, $\partial_{\vec{n}(x)} u = \frac{1}{a} \partial_t u - \frac{b}{a} \partial_{\vec{T}(x)} u$. Cela donne

$$\int_{]0,1] \times \partial D} (\partial_{\vec{n}(x)} u)^2 dv(\Omega) = \int_{]0,1] \times \partial D} \big(\frac{1}{a^2} (\partial_t u)^2 + \frac{b^2}{a^2} (\partial_{\vec{T}(x)} u)^2 - 2 \frac{b}{a^2} (\partial_t u)(\partial_{\vec{T}(x)} u) \big) dv(\Omega)$$

Écrivons maintenant que pour tout $X,Y \geq 0$, $2XY \leq \frac{1+k^2}{2} X^2 + \frac{2}{1+k^2} Y^2$. Il en découle que

$$2\big(\frac{b}{a^2} (\partial_t u)(\partial_{\vec{T}(x)} u)\big) \leq \frac{1+k^2}{2a^2} (\partial_t u)^2 + \frac{2b^2}{(1+k^2)a^2} (\partial_{\vec{T}(x)} u)^2$$

De plus, si $x \in \partial D$, on a $b^2 = | < x,\vec{T} > |^2 \leq k^2|x|^2 = k^2(a^2+b^2)$. Donc $\frac{b^2}{a^2} \leq \frac{k^2}{1-k^2}$. En remarquant que $(\partial_{\vec{T}(x)} u)^2 \leq | \nabla_T u |^2$, on obtient que

$$\int_{]0,1]\times\partial D} (\partial_{\vec{n}(x)} u)^2 dv(\Omega) \geq \frac{1-k^2}{2\sup_{\partial D} a^2} \left(\int_{]0,1]\times\partial D} (\partial_t u)^2 dv(\Omega) \right) - \frac{k^2}{1+k^2} \int_{]0,1]\times\partial D} (\partial_{\vec{T}(x)} u)^2 dv(\Omega)$$

$$\geq \frac{1-k^2}{2\sup_{\partial D} a^2} \int_{]0,1]\times\partial D} (\partial_t u)^2 dv(\Omega) - \frac{k^2}{1+k^2} \int_{]0,1]\times\partial D} | \nabla_T u |^2 dv(\Omega)$$

Ainsi,

$$\int_{]0,1]\times\partial D} | \nabla u |_\xi^2 dv(\Omega) = \int_{]0,1]\times\partial D} (\partial_{\vec{n}(x)} u)^2 dv(\Omega) + \int_{]0,1]\times\partial D} | \nabla_T u |^2 dv(\Omega)$$

$$\geq \min\left(\frac{1-k^2}{2\sup_{\partial D} a^2}, \frac{1}{1+k^2} \right) \left(\int_{]0,1]\times\partial D} (\partial_t u)^2 dv(\Omega) + \int_{]0,1]\times\partial D} | \nabla_T u |^2 dv(\Omega) \right)$$

D'après le théorème de Myers (voir [25]), comme on a supposé $K = 1$, on sait que $Diam(\partial D) \leq \pi$ et donc que $\sup_{\partial D} a^2 \leq \pi^2$. Par conséquent, $\min\left(\frac{1-k^2}{2\sup_{\partial D} a^2}, \frac{1}{1+k^2}\right) \geq \frac{1-k^2}{2\pi^2}$. Avec l'étape 1, (4.4) et (4.7), on obtient :

$$\int_D | \nabla u |_\xi^2 dv(\xi) \geq (1-k)^{n/2} \int_{]0,1]\times\partial D} | \nabla u |_\xi^2 dv(\Omega)$$

$$\geq \beta r_0 \frac{(1-k^2)(1-k)^{n/2}}{2\pi^2} \left(\int_{B(0,1)} (\partial_t \tilde{u})^2 + \int_{B(0,1)} | \nabla_T \tilde{u} |^2 \right)$$

Finalement,

$$\int_D | \nabla u |_\xi^2 dv(\xi) \geq \beta r_0 \frac{(1-k^2)(1-k)^{n/2}}{2\pi^2} \int_{B(0,1)} | \nabla \tilde{u} |_\xi^2 \tag{4.8}$$

D'après les travaux d'Escobar [15], pour tout $v \in C^\infty(B(0,1))$, on a

$$\left(\int_{S^{n-1}} |v|^q dv(h) \right)^{\frac{2}{q}} \leq \frac{2\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}}}{(n-2)} \int_{B(0,1)} | \nabla v |^2 + \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}} \int_{S^{n-1}} v^2 dv(h)$$

Ainsi, en utilisant (4.1) et (4.8),

$$\left(\int_D u^q dv(\bar{g}) \right)^{\frac{2}{q}} = \beta^{\frac{2}{q}} \left(\int_{B(0,1)} \tilde{u}^q dv(h) \right)^{\frac{2}{q}}$$

$$\leq \beta^{\frac{2}{q}} \left(\frac{2\omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}}}{(n-2)} \int_{B(0,1)} | \nabla \tilde{u} |^2 + \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}} \int_{S^{n-1}} \tilde{u}^2 dv(h) \right)$$

$$\leq \beta^{\frac{2}{q}} \left(\frac{4\pi^2 \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}} \beta^{-1}}{r_0(1-k^2)(1-k)^{n/2}(n-2)} \int_D | \nabla u |^2 + \beta^{-1} \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n-1}} \int_{\partial D} u^2 dv(\bar{g}) \right)$$

En se rappelant de la définition de β, cela termine la démonstration du théorème 1.

Chapitre 5

Solutions nodales pour une équation de type courbure moyenne prescrite

En collaboration avec David Holcman

5.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles elliptiques sur les variétés riemanniennes faisant intervenir l'exposant critique dans les injections de Sobolev ont fait l'objet de nombreuses études car elles sont à la base de problèmes géométriques célèbres comme par exemple le problème de Yamabe résolu par Aubin [4] et Schoen [32]. On considère ici (V,g) une variété riemannienne compacte à bord C^∞ de dimension $n \geq 3$. On s'intéresse alors à l'équation suivante

$$(E)\left\{\begin{array}{lclcl} \Delta_g u & = & 0 & sur & V \\ \partial_\nu u & = & \mid u \mid^{q-2} u & sur & \partial V \end{array}\right.$$

où $\Delta_g = -\nabla^i \nabla_i$ est le laplacien standard pour la métrique g et où $q = \frac{2(n-1)}{(n-2)}$ est l'exposant critique dans l'inclusion de l'espace $H^1(V)$ dans $L^q(\partial V)$. Nous n'étudions ici que les solutions qui changent de signe. Escobar a étudié ce type d'équations en cherchant des solutions positives (voir [16], [17]), notamment dans le but de résoudre le problème de la courbure moyenne prescrite. Ce type de problèmes se résout par l'utilisation de bonnes fonctions-tests. Celles qu'utilise Escobar ne peuvent être reprises telles quelles. Elles sont en effet positives et notre problème porte sur les solutions nodales de (E). Il faut donc les modifier. De plus, Escobar utilise le caractère conforme de son problème ce qui n'est pas possible ici.

Tout d'abord, définissons $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ et

$$S^{-2} = \inf_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)} \frac{\int_{\mathbb{R}^n_+} \mid \nabla u \mid^2 dx}{\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \mid u \mid^q ds}$$

Escobar [15] et Beckner [6] ont montré que $S^{-2} = \frac{(n-2)}{2} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$ où ω_{n-1} est le volume de la sphère unité standard de dimension $n-1$. On définit aussi

$$\mu = \inf_{u \in \Lambda} \frac{\int_V \mid \nabla u \mid^2}{\left(\int_{\partial V} \mid u \mid^q\right)^{\frac{2}{q}}}$$

où

$$\Lambda = \left\{ u \in H^1(V) \left| \int_{\partial V} | u |^{q-2} u = 0 \right. \right\}$$

Il faut noter que les points critiques de la fonctionnelle associée à μ sont des solutions de l'équation (E). Nous donnons d'abord le résultat suivant. Sa démonstration est classique (voir par exemple [2]) et sera omise ici.

Théorème 1 *On suppose que $\mu < S^{-2}$, où $S^{-2} = \frac{(n-2)}{2}\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$. Alors, il existe une fonction $u \in C^3(V)$ telle que*

$$\mu = \frac{\int_V | \nabla u |^2}{\left(\int_{\partial V} | u |^q\right)^{\frac{2}{q}}} \ ; \int_{\partial V} | u |^{q-2} u = 0 \ et \int_{\partial V} | u |^q = 1$$

De plus, u vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{rclcc} \Delta_g u & = & 0 & sur & V \\ \partial_\nu u & = & \mu | u |^{q-2} u & sur & \partial V \end{array} \right.$$

Il faut noter que la solution obtenue dans ce théorème est, à multiplication par une constante près, une solution de l'équation (E). Nous donnons maintenant des conditions explicites sous lesquelles les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées. C'est l'objet du résultat suivant.

Théorème 2 *Soit (V,g) une variété riemannienne compacte à bord de dimension $n \geq 3$. $\bar{R}$ représente ici la courbure scalaire pour la métrique induite par g sur ∂V et H est la courbure moyenne de ∂V. Plus précisément, si $P \in \partial V$, $H(P) = g^{ij} h_{ij}$ où h_{ij} est la composante (i,j) de la deuxième forme fondamentale π définie sur ∂V. Alors, $\mu < S^{-2}$ dans les cas suivants :*

- *$n \geq 4$ et $H(P) > 0$ en un point $P \in \partial V$;*
- *$n \geq 5$, $H(P) = 0$ et $\frac{n-4}{n-2} \| \pi \|^2(P) + Ric(\nu,\nu)(P) + \frac{\bar{R}(P)}{2} > 0$ en un point $P \in \partial V$, ν étant le vecteur unitaire normal extérieur en P.*

Ce théorème est démontré dans la première partie de ce chapitre.

Nous étudions ensuite le nombre μ introduit plus haut et en donnons une minoration en fonction de données géométriques. Il faut remarquer que l'exemple de Cheeger (voir [10]) s'applique ici et montre que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver une variété riemannienne compacte à bord (V_ϵ,g_ϵ) pour laquelle $\mu \leq \epsilon$. Cela justifie l'étude d'une minoration de ce nombre. De nombreux travaux de ce type, notamment ceux visant à trouver des bornes géométriques de certaines valeurs propres, ont été effectués (voir par exemple [7], [10], [18], [34]). La minoration de μ est ici obtenue pour les domaines étoilés bornés de $\mathbb{R}^n$ dont le bord a une courbure de Ricci strictement positive. Plus précisément, on démontre le résultat suivant :

Théorème 3 *Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine étoilé en $0 \in D - \partial D$ tel que la métrique $\bar{g}$, induite par la métrique standard de $\mathbb{R}^n$ sur ∂D, satisfasse $Ric_{\bar{g}} \geq (n-1)K\bar{g}$ avec $K > 0$. Soit aussi $r_0 > 0$ tel que $B(0,r_0) \subset D$. Enfin, soit $k \geq 0$ tel que $| < \frac{x}{|x|},\vec{v} > | \leq k$ pour tout $x \in \partial D$ et tout vecteur unitaire $\vec{v}$ tangent à ∂D. On suppose que $k < 1$. Alors, le minimum μ du problème variationnel introduit dans l'énoncé du théorème 1 vérifie :*

$$\mu \geq \frac{K^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-k^2}\alpha(1) r_0^{n-1}}{\mathcal{A}(D)\alpha(1) r_0^{n-1} K^{\frac{n}{2}} \sqrt{1-k^2} + \mathcal{B}(D)\pi^n}$$

où

$$\alpha(1) = \inf_{\int_{S^{n-1}} |w|^{q-2} w = 0} \frac{\int_{B(0,1)} | \nabla w |^2}{\int_{S^{n-1}} w^2}$$

et où

$$\mathcal{A}(D) = \frac{4\pi^2 K^{-1} Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}}{(n-2)(1-k^2)(1-k)^{\frac{n}{2}} r_0} \ et \ \mathcal{B}(D) = Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}$$

À propos de l'énoncé de ce théorème, il faut noter que le nombre $\alpha(1)$ ne dépend que de la dimension. La démonstration de ce théorème est faite dans la deuxième partie ce chapitre.

Les problèmes de meilleures constantes dans les inégalités de Sobolev ont été très largement étudiés (voir par exemple [2], [5], [13], [12], [19], [26], [27], [29] et voir aussi le livre de Hebey [24] qui présente un panel de ce type de résultats). On considère alors, pour $u \in C^\infty(V)$ et $A,B \geq 0$, l'inégalité suivante :

$$\left(\int_{\partial V} \mid u \mid^q\right)^{\frac{2}{q}} \leq A \int_V \mid \nabla u \mid^2 + B \left|\int_{\partial V} \mid u \mid^{q-2} u\right|^{\frac{2}{q-1}} \qquad I(A,B)(u)$$

On rappelle que $q = \frac{2(n-1)}{(n-2)}$ est l'exposant critique dans l'inclusion de l'espace $H^1(V)$ dans $L^q(\partial V)$. Elle est obtenue en remplaçant dans l'inégalité de Sobolev à trace classique le dernier terme par un terme non linéaire lié à notre équation :

$$\left(\int_{\partial V} \mid u \mid^q\right)^{\frac{2}{q}} \leq S^2 \int_V \mid \nabla u \mid^2 + A \int_{\partial V} \mid u \mid^2$$

définie pour tout $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$. Cette inégalité est de type Poincaré et est liée à l'équation (E) comme l'inégalité de Poincaré usuelle l'est à l'équation $\Delta u = \lambda u$. On obtient d'ailleurs le même type de résultats ici que ceux connus pour l'inégalité de Poincaré. En particulier, la première meilleure constante vaut μ^{-1} et dépend donc de la géométrie de V et non plus de sa seule dimension. Il faut d'ailleurs remarquer que celle de l'inégalité de Sobolev à trace usuelle ne dépend elle que de la dimension. Li et Zhu ont en effet montré dans [29] qu'elle vaut S^2 (définie plus haut). On rappelle que la meilleure constante A_0 dans l'inégalité $I(A,B)$ est définie par

$$A_0 = \inf \{A > 0 \,|\exists B > 0 \text{ t.q. } I(A,B)(u) \text{ est vraie pour tout } u \in C^\infty(V)\}$$

Nous démontrons dans la dernière partie de ce chapitre le résultat suivant :

Théorème 4 *Les assertions suivantes sont vraies*

a– *il existe $A,B > 0$ tels que $I(A,B)(u)$ est vraie pour tout $u \in C^\infty(V)$;*

b– *$A_0 = \mu^{-1}$;*

c– *si de plus, $n \in \{3,4\}$ ou si $n \geq 5$ et $\mu < S^{-2} = \frac{(n-2)}{2}\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, alors il existe $B > 0$ tel que $I(\mu^{-1},B)(u)$ est vraie pour tout $u \in C^\infty(V)$.*

5.2 Démonstration du théorème 2

Tout d'abord, on définit $\mathbb{R}_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \times [0,+\infty[$ et on pose

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{t^2 dt dx}{\left((1+t)^2 + r^2\right)^{n-1}} \\ K &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{t^2 r^2 dt dx}{\left((1+t)^2 + r^2\right)^{n}} \\ L &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{r^2 dt dx}{\left((1+t)^2 + r^2\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

avec $r^2 = |x|^2$.

Lemme 1 *On a*

$$K = \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)} \left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1} \qquad (5.1)$$

$$L = \frac{n-1}{(n-4)(n-3)}\left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1} \tag{5.2}$$

$$J = \frac{2}{(n-2)(n-3)(n-4)}\left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1} \tag{5.3}$$

La preuve de ce lemme s'appuie sur des calculs classiques faits par exemple dans Escobar [16]. Nous ne donnons donc pas ici le détail de chaque calcul. Le changement de variable $x = (1+t)y$ donne

$$L = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{n-3}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\mid y \mid^2 dy}{(1+\mid y \mid^2)^{n-1}}$$

En utilisant les coordonnées polaires, on voit que

$$L = \frac{\omega_{n-2}}{n-4}\int_0^\infty \frac{u^n du}{(1+u^2)^{n-1}} = \frac{(n-1)\omega_{n-2}}{(n-4)(n-3)}\int_0^\infty \frac{u^{n-2}du}{(1+u^2)^{n-1}}$$

De plus, des calculs standard donnent

$$K = \frac{\omega_{n-2}}{(n-2)(n-3)(n-4)}\int_0^\infty \frac{u^{n-2}du}{(1+u^2)^{n-1}}$$

ce qui conduit à

$$L = (n-1)(n-2)K$$

Maintenant, par le changement de variable $v = \epsilon u$:

$$K = \frac{\omega_{n-2}}{(n-2)(n-3)(n-4)}\int_0^\infty \frac{u^{n-2}du}{(1+u^2)^{n-1}} = \frac{1}{(n-2)(n-3)(n-4)}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} v_\epsilon^q$$

On sait que (voir Escobar [16])

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} v_\epsilon^q = \left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1}$$

Il est de plus connu que $J = 2K$. Cela termine la démonstration du lemme.

Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^n_+$, on considère maintenant la fonction v_ϵ définie par

$$v_\epsilon(t,x) = \left(\frac{\epsilon}{(\epsilon+t)^2 + r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

où $r = \sqrt{(x^1)^2 + .. + (x^{n-1})^2}$. On a alors le résultat suivant :

Lemme 2 *Les assertions suivantes sont vraies :*
a- $\int_{B_P(\delta)\cap\partial V} v_\epsilon^{q-1} dv_g \leq C.\epsilon^{\frac{n-2}{2}}$
b- $\int_{B_P(\delta)\cap\partial V} v_\epsilon dv_g \leq C.\epsilon^{\frac{n-2}{2}}$

La démonstration de ce lemme est facile et est omise ici. Passons à la démonstration du théorème proprement dit. Il est facile de voir que v_ϵ satisfait l'équation suivante

$$(E_\epsilon)\begin{cases} \Delta v_\epsilon = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ \partial_\nu v_\epsilon = (n-2)v_\epsilon^{q-1} & \text{sur} \quad \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

Soit maintenant $P \in \partial V$ et soit $(t,x) = (t,x^1,..,x^{n-1})$ les coordonnées de Fermi en P où t est la longueur de la géodésique partant de P dans la direction normale à ∂V. On a le développement suivant (cf. [16]) :

$$\sqrt{g} = 1 - H(P)t + \frac{1}{2}\Big(H(P)^2 - \parallel \pi \parallel^2(P) - Ric(\eta,\eta)(P)\Big)\, t^2$$

$$- t\partial_i H(P)x^i - \frac{1}{6}\bar{R}_{ij}(P)x^j x^i + O\big(\mid (t,x) \mid^3\big) \tag{5.4}$$

où $\bar{R}_{ij}$ sont les composantes de la courbure de Ricci pour la métrique induite par g sur ∂V. On considère, pour $\epsilon > 0$, l'ensemble suivant :

$$\Gamma_\epsilon = \Big\{(t,x)\,\Big|\,t \geq 0 \text{ et } (t+\epsilon)^2 + r^2 \leq \epsilon^2 + \delta^2\,\Big\}$$

où $\delta > 0$ est un réel fixé, petit et strictement positif. On définit alors

$$\phi_\epsilon = \begin{cases} v_\epsilon - \mu_\epsilon - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\delta^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} & \text{sur} \quad \Gamma_\epsilon \\ -\mu_\epsilon & \text{sur} \quad V - \Gamma_\epsilon \end{cases}$$

où $\mu_\epsilon > 0$ est choisi tel que

$$\int_{\partial V} \mid \phi_\epsilon \mid^{q-2} \phi_\epsilon = 0 \tag{5.5}$$

Ainsi, $\phi_\epsilon \in \Lambda$. Montrons maintenant que, sous les hypothèses du théorème 2, on a, pour ϵ suffisamment petit,

$$Q(\phi_\epsilon) = \frac{\int_V \mid \nabla\phi_\epsilon \mid^2}{\left(\int_{\partial V} \mid \phi_\epsilon \mid^q\right)^{\frac{2}{q}}} < S^{-2}$$

Pour cela, on montre d'abord que

$$\mu_\epsilon \leq C\epsilon^{\frac{(n-2)^2}{2n}} \tag{5.6}$$

Posons

$$T_\epsilon = \mu_\epsilon + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2+\delta^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

On écrit

$$\int_{B_P(\delta)\cap\partial V} \mid \phi_\epsilon \mid^{q-2}\phi_\epsilon dv_g \leq \int_{B_P(\delta)\cap\partial V} \mid \phi_\epsilon \mid^{q-2} v_\epsilon dv_g$$

$$\leq C\int_{B_P(\delta)\cap\partial V} \left(v_\epsilon^{q-2} + T_\epsilon^{q-2}\right) v_\epsilon dv_g$$

D'après le lemme 2, on obtient que :

$$\int_{B_P(\delta)\cap\partial V} \mid \phi_\epsilon \mid^{q-2}\phi_\epsilon dv_g \leq C\epsilon^{\frac{n-2}{2}} + CT_\epsilon^{q-2}\epsilon^{\frac{n-2}{2}}$$

Or, d'après (5.5),

$$0 = \int_{\partial V} \mid \phi_\epsilon \mid^{q-2}\phi_\epsilon dv_g = \int_{B_P(\delta)\cap\partial V} \mid \phi_\epsilon \mid^{q-2}\phi_\epsilon dv_g + \int_{\partial V - B_P(\delta)} \mid \phi_\epsilon \mid^{q-2}\phi_\epsilon dv_g$$

Ainsi, en se rappelant de la définition de ϕ_ϵ sur $\partial V - B_P(\delta)$,

$$0 \leq C\epsilon^{\frac{n-2}{2}} + CT_\epsilon^{q-2}\epsilon^{\frac{n-2}{2}} - Vol_g\big(\partial V - B_P(\delta)\big)\mu_\epsilon^{q-1}$$

Il est facile de voir que cela entraîne (5.6). Montrons maintenant que

$$\left(\int_{\partial V} \phi_\epsilon^q\right)^{\frac{2-n}{n-1}} \leq \left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{2-n} \times$$

$$\left(1 + \frac{n-2}{6(n-3)(n-1)}\bar{R}(P)\epsilon^2\right) + o(\epsilon^2) + O(\epsilon^{\frac{(n-2)(n-1)}{n}}) \tag{5.7}$$

où $C > 0$. On a

$$\int_{\partial V} \phi_\epsilon^q = \int_{\partial V - B_P(\delta)} \phi_\epsilon^q + \int_{\partial V \cap B_P(\delta)} \phi_\epsilon^q$$

En conséquence,

$$\int_{\partial V} \phi_\epsilon^q = \mu_\epsilon^q Vol\big(\partial V - B_P(\delta)\big) + \int_0^\delta \int_{S(r)} \left|\left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \delta^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} - \mu_\epsilon\right|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \sqrt{g}drd\sigma$$

En utilisant un développement limité de la métrique g, Gray a prouvé dans [21] que

$$\int_{S(r)} \sqrt{g}d\sigma = w_{n-2}r^{n-2}\left(1 - \frac{\bar{R}(P)r^2}{6(n-1)} + 0(r^3)\right)$$

où $\bar{R}$ est la courbure scalaire intrinsèque de ∂V. Par conséquent, en posant $r = \epsilon u$, il vient

$$\int_{\partial V} \phi_\epsilon^q \geq \mu_\epsilon^q Vol\big(\partial V - B_P(\delta)\big) + \omega_{n-2}\int_0^{\frac{\delta}{\epsilon}} \left|\left(\frac{1}{1+u^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} - \frac{\epsilon^{n-2}}{(\epsilon^2+\delta^2)^{\frac{n-2}{2}}} - \epsilon^{\frac{n-2}{2}}\mu_\epsilon\right|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \times$$

$$u^{n-2}\left(1 - \frac{\bar{R}(P)\epsilon^2u^2}{6(n-1)} - C\epsilon^3u^3\right)du \tag{5.8}$$

Maintenant, il faut voir qu'en utilisant (5.6), on a

$$\left|\left(\frac{1}{1+u^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} - \frac{\epsilon^{n-2}}{(\epsilon^2+\delta^2)^{\frac{n-2}{2}}} - \epsilon^{\frac{n-2}{2}}\mu_\epsilon\right|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \geq \left(\frac{1}{1+u^2}\right)^{n-1} + O(\epsilon^{\frac{(n-2)(n-1)}{n}})\left(\frac{1}{1+u^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

On remarque de plus que

$$\int_{\frac{\delta}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{u^{n-2}du}{(1+u^2)^{n-1}} \leq \int_{\frac{\delta}{\epsilon}}^{+\infty} \frac{du}{u^n} \leq C\epsilon^{n-1}$$

On en déduit alors, en utilisant (5.6) pour minorer μ_ϵ^q, que

$$\int_{\partial V} \phi_\epsilon^q \geq \omega_{n-2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u^{n-2}}{(1+u^2)^{n-1}}\right)\left(1 - \frac{\bar{R}(P)\epsilon^2u^2}{6(n-1)} - C\epsilon^3u^3\right)du +$$

$$o(\epsilon^2) + O(\epsilon^{\frac{(n-2)(n-1)}{n}})$$

où $C > 0$. On a aussi, en posant $v = \epsilon u$ et en utilisant des calculs standard (voir [16])

$$\omega_{n-2}\int_0^\infty \frac{u^{n-2}du}{(1+u^2)^{n-1}} = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} v_\epsilon^q = \left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1}$$

De plus,

$$\int_0^\infty \frac{u^n du}{(1+u^2)^{n-1}} = \frac{n-1}{2(n-2)}\int_0^\infty \frac{u^{n-2}du}{(1+u^2)^{n-2}}$$
$$= \frac{n-1}{n-3}\int_0^\infty \frac{u^{n-2}du}{(1+u^2)^{n-1}} = \frac{(n-1)(n-2)(n-4)}{\omega_{n-2}}K$$

On a donc, d'après (5.1) :

$$\int_{\partial V}\phi_\epsilon^q \geq \left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1} - \frac{(n-2)(n-4)}{6}\bar{R}(P)K\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$
$$= \left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{\bar{R}(P)}{6(n-3)}\epsilon^2\right) + o(\epsilon^2)$$

On en déduit (5.7).

Cas 1 *$n \geq 5$; $H(P) = 0$ et $\frac{n-4}{n-2}\| \pi \|^2(P) + Ric(\nu,\nu)(P) + \frac{\bar{R}(P)}{2} > 0$*

On estime le terme en gradient du quotient $Q(\phi_\epsilon)$. On pose

$$B_\delta^+ = \left\{(t,x)\,\middle|\, t \geq 0 \text{ et } t^2 + r^2 \leq \delta^2\right\}$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons souvent la relation suivante, provenant des symétries de B_δ^+ : pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{B_\delta^+} x^i x^j f(r,t)drdt = \frac{\delta^{ij}}{n-1}\int_{B_\delta^+} r^2 f(r,t)drdt \tag{5.9}$$

où δ^{ij} est le symbole de Kronecker. Remarquons que

$$\Gamma_\epsilon \subset B_\delta^+$$

si bien que

$$\int_V |\nabla\phi_\epsilon|^2 = \int_{\Gamma_\epsilon} |\nabla\phi_\epsilon|^2 \leq \int_{B_\delta^+} |\nabla v_\epsilon|^2$$

De plus, dans les coordonnées de Fermi (voir [16]),

$$\begin{aligned} g^{ij} = \delta^{ij} + 2h^{ij}(P)t - \frac{1}{3}\bar{R}^i{}_{kl}{}^j(P)x^k x^l + g^{ij}_{,tm}(P)tx^m \\ +\big(3h^{im}(P)h_m{}^j(P) + R^i{}_n{}^j{}_n(P)\big)t^2 + O\big(|(t,x)|^3\big) \end{aligned} \tag{5.10}$$

où $h^{ij} = g^{ik}g^{jl}h_{kl}$, (h_{kl}) étant les composantes de la seconde forme fondamentale, où δ^{ij} est le symbole de Kronecker, où $(\bar{R}^i{}_{kl}{}^j(P))$ sont les composantes en P du tenseur de Riemann pour la métrique induite par g sur ∂V et enfin où $g^{ij}_{,tm}$ est la dérivée (t,m) de g^{ij} exprimée dans les coordonnées de Fermi. On estime maintenant

$$I_\epsilon = \int_{B_\delta^+} |\nabla v_\epsilon|^2$$

On peut supposer que P est un maximum de H, sinon on est ramené au cas suivant. Ainsi, pour $1 \le i \le n-1$, $\partial_i H = 0$. Maintenant, par (5.4) :

$$\sqrt{g} = 1 - \frac{1}{2}\big(\| \pi \|^2 + Ric(\nu,\nu)\big)(P)t^2 - \frac{1}{6}\bar{R}_{ij}(P)x^i x^j + O\big(| (t,x) |^3\big) \tag{5.11}$$

et, par (5.10),

$$I_\epsilon = \int_{B_\delta^+} | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dv_g + 2h^{ij}(P)\int_{B_\delta^+} t v_{\epsilon,i} v_{\epsilon,j} dv_g - \frac{1}{3}\int_{B_\delta^+} \bar{R}^i{}_{kl}{}^j(P)x^k x^l v_{\epsilon,i} v_{\epsilon,j} dv_g$$

$$+ g^{ij}_{,tm}(P)\int_{B_\delta^+} t x^m v_{\epsilon,i} v_{\epsilon,j} dv_g + \big(3h^{im}(P)h_m{}^j(P) + R^i{}_n{}^j{}_n(P)\big)\int_{B_\delta^+} t^2 v_{\epsilon,i} v_{\epsilon,j} dv_g$$

$$+ \int_{B_\delta^+} O\big(| (t,x) |^3\big) | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dv_g$$

Il en découle que (voir les formules de la troisième partie de [16]) :

$$I_\epsilon = \int_{B_\delta^+} | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dv_g$$

$$+ \big(3h^{im}(P)h_m{}^j(P) + R^i{}_n{}^j{}_n(P)\big)\int_{B_\delta^+} t^2 v_{\epsilon,i} v_{\epsilon,j} dv_g + O(\epsilon^3) \tag{5.12}$$

De plus,

$$\big(3h^{im}(P)h_m{}^j(P) + R^i{}_n{}^j{}_n(P)\big)\int_{B_\delta^+} t^2 v_{\epsilon,i} v_{\epsilon,j} dv_g$$

$$\le \big(3\| \pi \|^2 + Ric(\nu,\nu)\big)(P)K\frac{(n-2)^2}{n-1}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \tag{5.13}$$

Une intégration par partie montre que, en se servant de l'équation (E_ϵ),

$$\int_{B_\delta^+} | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dxdt = (n-2)\int_{B_\delta^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+} v_\epsilon^{\frac{2(n-1)}{n-2}} dxdt + \int_{\partial B_\delta^+ - \partial\mathbb{R}^n_+} v_\epsilon (d_\nu v_\epsilon) dxdt$$

Cependant, sur $\partial B_\delta^+ - \partial\mathbb{R}^n_+$, on a

$$d_\nu v_\epsilon = -\frac{(n-2)\big(r^2 + t(\epsilon + t)\big)}{| (t,x) |\big((\epsilon+t)^2 + r^2\big)} v_\epsilon < 0$$

On en déduit que

$$\int_{B_\delta^+} | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dxdt \le (n-2)\int_{B_\delta^+ \cap \partial\mathbb{R}^n_+} v_\epsilon^{\frac{2(n-1)}{n-2}} dxdt \le (n-2)\left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1} \tag{5.14}$$

Par conséquent, en utilisant (5.9), (5.11) et (5.14) ainsi que des estimées classiques, on trouve que

$$\int_{B_\delta^+} | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dv_g \le (n-2)\left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1}$$

$$- \int_{B_\delta^+} \left(\frac{1}{2}\big(\| \pi \|^2 + Ric(\nu,\nu)\big)(P)t^2 + \frac{\bar{R}_{ij}(P)}{6}x^i x^j\right) | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dxdt + O(\epsilon^3)$$

Un calcul direct montre que

$$| \nabla v_\epsilon |_\delta^2 = (n-2)^2 \frac{\epsilon^{n-2}}{\big((\epsilon+t)^2+r^2\big)^{n-1}}$$

Ainsi

$$\int_{B_\delta^+} | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dv_g \le (n-2)\Big(\frac{S^{-2}}{n-2}\Big)^{n-1}$$

$$-(n-2)^2\epsilon^{n-2}\int_{B_\delta^+}\Big(\frac{1}{2}\big(\| \pi \|^2+Ric(\nu,\nu)\big)(P)t^2+\frac{\bar{R}_{ij}(P)}{6}x^ix^j\Big)\frac{1}{\big((\epsilon+t)^2+r^2\big)^{n-1}}dxdt+O(\epsilon^3)$$

Remarquons que

$$J = \int_{\frac{1}{\epsilon}B_\delta^+}\frac{t^2dtdx}{\big((1+t)^2+r^2\big)^{n-1}}+O(\epsilon^{n-4})$$

$$L = \int_{\frac{1}{\epsilon}B_\delta^+}\frac{r^2dtdx}{\big((1+t)^2+r^2\big)^{n-1}}+O(\epsilon^{n-4})$$

Pour $n \ge 5$, on a $O(\epsilon^{n-4}) = O(\epsilon)$. Ainsi, en posant $t = \epsilon u$ et $y = \epsilon x$, on obtient avec (5.9) que

$$\int_{B_\delta^+} | \nabla v_\epsilon |_\delta^2 dv_g$$

$$\le (n-2)\Big(\frac{S^{-2}}{n-2}\Big)^{n-1} - \frac{(n-2)^2}{2}\big(\| \pi \|^2+Ric(\nu,\nu)\big)(P)\epsilon^2 J$$

$$-\frac{(n-2)^2\bar{R}(P)}{6(n-1)}\epsilon^2 L+O(\epsilon^3) \tag{5.15}$$

En se servant de (5.12), (5.13) et (5.15) et en se rappelant que $J = 2K$, il vient

$$I_\epsilon \le (n-2)\Big(\frac{S^{-2}}{n-2}\Big)^{n-1} + (n-2)^2\Big(\Big(\frac{3}{n-1}-1\Big)K\| \pi \|^2(P)+$$

$$\Big(\frac{1}{n-1}-1\Big)Ric(\nu,\nu)(P)K-\frac{L\bar{R}(P)}{6(n-1)}\Big)\epsilon^2+o(\epsilon^2)$$

Maintenant, avec (5.3) et (5.2), on obtient

$$I_\epsilon \le (n-2)\Big(\frac{S^{-2}}{n-2}\Big)^{n-1}\times$$

$$\Bigg(1-\Big(\frac{1}{(n-1)(n-3)}\| \pi \|^2(P)+\frac{(n-2)}{(n-1)(n-3)(n-4)}Ric(\nu,\nu)(P)+$$

$$\frac{(n-2)\bar{R}(P)}{6(n-3)(n-4)}\Big)\epsilon^2+o(\epsilon^2)\Bigg)$$

Avec (5.7), cela donne :

$$Q(\phi_\epsilon) \le S^{-2}$$

$$\Big(1-\big(\frac{1}{(n-1)(n-3)}\parallel \pi \parallel^2(P)+\frac{(n-2)}{(n-1)(n-3)(n-4)}Ric(\nu,\nu)(P)+$$

$$\frac{(n-2)\bar{R}(P)}{2(n-1)(n-3)(n-4)}\big)\epsilon^2+o(\epsilon^2)\Big)$$

Finalement, avec les hypothèses, quand ϵ est petit, $Q(\phi_\epsilon)<S^{-2}$. Cela prouve le théorème dans ce cas.

Cas 2 *On suppose que $n\geq 4$ et $H(P)>0$*

En utilisant les mêmes notations que dans le cas précédent, on déduit de (5.10) que

$$I_\epsilon \leq \int_{B_\delta^+} \mid \nabla v_\epsilon \mid_\delta^2 dv_g + 2h^{ij}(P)\int_{B_\delta^+} tv_{\epsilon,i}v_{\epsilon,j}dv_g+\int_{B_\delta^+} O\big(\mid (t,x)\mid^2\big)\mid \nabla v_\epsilon \mid_\delta^2 dv_g$$

Par (5.4), on obtient facilement que

$$I_\epsilon \leq \int_{B_\delta^+} \mid \nabla v_\epsilon \mid_\delta^2 dxdt - H(P)\int_{B_\delta^+} t\mid \nabla v_\epsilon \mid_\delta^2 dxdt$$

$$+2h^{ij}(P)\int_{B_\delta^+} tv_{\epsilon,i}v_{\epsilon,j}dxdt+\int_{B_\delta^+} O\big(\mid (t,x)\mid^2\big)\mid \nabla v_\epsilon \mid_\delta^2 dxdt \tag{5.16}$$

On a

$$v_{\epsilon,i}=-\epsilon^{\frac{n-2}{2}}\frac{(n-2)x_i}{((\epsilon+t)^2+r^2)^{\frac{n}{2}}}$$

et

$$\mid \nabla v_\epsilon \mid_\delta^2=(n-2)^2\frac{\epsilon^{n-2}}{\big((\epsilon+t)^2+r^2\big)^{n-1}}$$

En utilisant le fait que

$$\sqrt{g}=1+O\big(\mid (t,x)\mid\big)$$

on a donc, par (5.9) :

$$-H(P)\int_{B_\delta^+} t\mid \nabla v_\epsilon \mid_\delta^2 dxdt+2h^{ij}(P)\int_{B_\delta^+} tv_{\epsilon,i}v_{\epsilon,j}dxdt=$$

$$-H(P)(n-2)^2\epsilon^{n-2}\int_{B_\delta^+}\frac{tdtdx}{((\epsilon+t)^2+r^2)^{n-1}}$$

$$+\epsilon^{n-2}\frac{2(n-2)^2H(P)}{n-1}\int_{B_\delta^+}\frac{\big(1+O(\mid (t,x)\mid)\big)tr^2dtdx}{\big((\epsilon+t)^2+r^2\big)^n}$$

Notons que

$$\frac{t}{((\epsilon+t)^2+r^2)^{n-1}}\geq\frac{tr^2}{((\epsilon+t)^2+r^2)^n}$$

Puisque $H(P)\geq 0$, il vient

$$-H(P)\int_{B_\delta^+} t\mid \nabla v_\epsilon \mid_\delta^2 dxdt+2h^{ij}(P)\int_{B_\delta^+} tv_{\epsilon,i}v_{\epsilon,j}dxdt$$

$$\leq (n-2)^2H(P)\left(\frac{2}{n-1}-1\right)\epsilon^{n-2}\int_{B_\delta^+}\frac{\big(1+O(\mid (t,x)\mid)\big)tr^2dtdr}{\big((\epsilon+t)^2+r^2\big)^n}$$

En posant $t = \epsilon u$ et $x = \epsilon y$, cela donne

$$-H(P)\int_{B_\delta^+} t|\nabla v_\epsilon|_\delta^2 dtdx + 2h^{ij}(P)\int_{B_\delta^+} tv_{\epsilon,i}v_{\epsilon,j}dxdt \leq$$

$$(n-2)^2 H(P)\left(\frac{2}{n-1}-1\right)\epsilon\int_{\frac{1}{\epsilon}B_\delta^+}\frac{ududy|\ y\ |^2}{\left((1+u)^2+|\ y\ |^2\right)^n}+O(\epsilon^2)$$

Comme $n \geq 4$, on a $\frac{2}{n-1}-1<0$. Donc, quand ϵ tend vers 0,

$$-H(P)\int_{B_\delta^+} t|\nabla v_\epsilon|_\delta^2 dxdt + 2h^{ij}(P)\int_{B_\delta^+} tv_{\epsilon,i}v_{\epsilon,j}dxdt \leq -\epsilon CH(P)+O(\epsilon^2) \tag{5.17}$$

où $C>0$. De plus, en posant $t=\epsilon u$ et $x=\epsilon y$, on voit facilement que

$$\int_{B_\delta^+} O\big(|\ (t,x)\ |^2\big)|\ \nabla v_\epsilon\ |_\delta^2 dv_g = O(\epsilon^2) \tag{5.18}$$

En utilisant (5.14), (5.16), (5.17) et (5.18), on a

$$I_\epsilon \leq (n-2)\left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{n-1} - \epsilon H(P)C + O(\epsilon^2)$$

où $C>0$ peut être calculé explicitement. De plus, d'après (5.7), comme $n \geq 4$, on a

$$\left(\int_{\partial V}\phi_\epsilon^q\right)^{\frac{2-n}{n-1}} \leq \left(\frac{S^{-2}}{n-2}\right)^{2-n} + o(\epsilon)$$

Finalement, on a

$$Q(\phi_\epsilon) \leq S^{-2} - C\epsilon + o(\epsilon)$$

Si ϵ est suffisament petit, on a donc $Q(\phi_\epsilon) < S^{-2}$. Cela termine la démonstration du théorème.

5.3 Une borne inférieure géométrique de μ : démonstration du théorème 3

La preuve suit un argument utilisé par Bramble et Payne dans [7] et par Escobar dans [18]. On suppose que $\mu < S^{-2}$. Alors, d'après le théorème 1, il existe $u \in C^2(D)$ telle que

$$\mu = \frac{\int_D|\ \nabla u\ |^2}{\left(\int_{\partial D}|u|^q\right)^{\frac{2}{q}}} \text{ et } \int_{\partial D}|\ u\ |^{q-2}u = 0 \tag{5.19}$$

On note $B_0 = B(0,r_0)$. Posons maintenant $v = u + c$ où c est choisi de manière à ce que v vérifie

$$\int_{r_0 S^{n-1}} |\ v\ |^{q-2}v = 0 \tag{5.20}$$

En posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Omega(x) = \int_{\partial D}|u+x|^q$, on voit que $\Omega'(0) = q\int_{\partial D}|\ u\ |^{q-2}u = 0$ et que $\Omega''(x) = q(q-1)\int_{\partial D}|u+x|^{q-2} > 0$ et 0 est donc un minimum pour Ω. D'après (5.19), on a

$$\mu \geq \frac{\int_D|\ \nabla v\ |^2}{\left(\int_{\partial D}|v|^q\right)^{\frac{2}{q}}} \tag{5.21}$$

Quitte à multiplier v par une constante, on peut supposer que

$$\int_D |v|^q = 1 \tag{5.22}$$

De plus, en utilisant les résultats du chapitre précédent ainsi que (5.22), on a

$$1 \leq \mathcal{A}(D) \int_D |\nabla v|^2 + \mathcal{B}(D) \int_{\partial D} v^2$$

où

$$\mathcal{A}(D) = \frac{4\pi^2 K^{-1} Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}}{(n-2)(1-k^2)(1-k)^{\frac{n}{2}} r_0} \text{ et } \mathcal{B}(D) = Vol(\partial D)^{-\frac{1}{n-1}}$$

Par (5.21) et (5.22), on obtient que

$$1 \leq \mathcal{A}(D)\mu + \mathcal{B}(D)\mu Q(v)^{-1}$$

où

$$Q(v) = \frac{\int_D |\nabla v|^2}{\int_{\partial D} v^2}$$

Cela donne

$$\mu \geq \frac{Q(v)}{\mathcal{A}(D)Q(v) + \mathcal{B}(D)} \tag{5.23}$$

Pour démontrer le théorème 3, nous allons estimer le quotient $Q(v)$. Considérons le champ de vecteurs $X = \frac{\nabla r}{r^n}$ où r est la distance usuelle à 0 dans $\mathbb{R}^n$. Par le théorème de la divergence, on a

$$\int_{D-B_0} \operatorname{div}(Xv^2) = \int_{\partial D} v^2 < X,\vec{n} > - \int_{\partial B_0} v^2 < X,\vec{n} > \tag{5.24}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal extérieur. Comme dans le chapitre précédent, on écrit, pour tout $x \in \partial D$, $x = a(x)\vec{n}(x) + b(x)\vec{T}(x)$ où $\vec{T}(x)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{n}(x)$. En remarquant que $\nabla r = \frac{x}{|x|}$, on a, sur ∂D, $< X,\vec{n} >= \frac{a}{|x|^{n+1}} = \frac{\sqrt{|x|^2 - b^2}}{|x|^{n+1}}$. Nous avons vu dans le chapitre précédent que $b^2 \leq k^2|x|^2$. Ainsi, $< X,\vec{n} >\geq \frac{\sqrt{(1-k^2)|x|^2}}{|x|^{n+1}} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{|x|^n}$. Par le théorème de Myers (voir [25]), on a $Diam(\partial D) \leq \pi K^{-\frac{1}{2}}$ et donc $|x| \leq \pi K^{-\frac{1}{2}}$. Par conséquent,

$$< X,\vec{n} >\geq \frac{K^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-k^2}}{\pi^n}$$

Sur ∂B_0, $< X,\nu >\leq \frac{1}{r_0^n}$. Ainsi, d'après l'équation (5.24), on a

$$\frac{K^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-k^2}}{\pi^n} \int_{\partial D} v^2 \leq \frac{1}{r_0^n} \int_{\partial B_0} v^2 + \int_{D-B_0} \operatorname{div}(X)v^2 + 2\int_{D-B_0} v < X,\nabla v >$$

À cause de la contrainte (5.20), on a

$$\int_{\partial B_0} v^2 \leq \alpha(r_0)^{-1} \int_{B_0} |\nabla v|^2$$

où

$$\alpha(r_0) = \inf_{\left(\int_{r_0 S^{n-1}} |w|^{q-2}w = 0\right)} \frac{\int_{B(0,r_0)} |\nabla w|^2}{\int_{r_0 S^{n-1}} w^2}$$

On en déduit que

$$\frac{K^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-k^2}}{\pi^n}\int_{\partial D} v^2 \leq \frac{\alpha(r_0)^{-1}}{r_0^n}\int_{B_0} \mid \nabla v\mid^2 + \int_{D-B_0} \mathrm{div}(X) v^2 + 2\int_{D-B_0} v\frac{\mid \nabla v\mid}{r^n}$$

On obtient donc que

$$\frac{K^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-k^2}}{\pi^n}\int_{\partial D} v^2 \leq \frac{\alpha(r_0)^{-1}}{r_0^n}\int_{B_0} \mid \nabla v\mid^2 + \int_{D-B_0} (\mathrm{div}(X) + \frac{1}{r^{n+1}}) v^2 + \int_{D-B_0} \mid \nabla v\mid^2 \frac{1}{r^{n-1}}$$

On voit que

$$(\mathrm{div}(X) + \frac{1}{r^{n+1}}) \equiv 0$$

Enfin, on trouve que

$$\frac{K^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-k^2}}{\pi^n}\int_{\partial D} v^2 \leq C\int_{B_0} \mid \nabla v\mid^2$$

où $C = \max\big(\frac{\alpha(r_0)^{-1}}{r_0^n}, \frac{1}{r_0^{n-1}}\big) = \max\big(\frac{\alpha(1)^{-1}}{r_0^{n-1}}, \frac{1}{r_0^{n-1}}\big)$. Notons maintenant $(x^1,...,x^n)$ les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$. Définissons aussi f par $f(x) = x^1$. Par symétrie, on voit que

$$\int_{S^{n-1}} \mid f\mid^{q-2} f = 0$$

De plus, il est clair que

$$\int_{B(0,1)} \mid \nabla f\mid^2 = Vol\big(B(0,1)\big) = \frac{\omega_{n-1}}{n}$$

Enfin, on a, toujours par symétrie,

$$\int_{S^{n-1}} f^2 = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} (x^1)^2 + ... + (x^n)^2 = \frac{\omega_{n-1}}{n}$$

On en déduit facilement que $\alpha(1) \leq 1$ et donc finalement

$$Q(v) \geq \alpha(1) r_0^{n-1}\frac{K^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-k^2}}{\pi^n}$$

Cela démontre le théorème 3.

5.4 Démonstration du théorème 4

5.4.1 Preuve de la partie (a)

On raisonne par l'absurde : supposons qu'il existe $u_B \in C^\infty(V)$ telle que

$$\int_{\partial V} \mid u_B\mid^q = 1 \tag{5.25}$$

et

$$B\left(\int_V \mid \nabla u_B\mid^2 + \left|\int_{\partial V} \mid u_B\mid^{q-2} u_B\right|^{\frac{2}{q-1}}\right) < 1 \tag{5.26}$$

Supposons aussi que $\| u_B \|_{L^2(V)} \to \infty$ quand $B \to \infty$. Alors, posons $v_B = \frac{u_B}{\|u_B\|_{L^2(V)}}$,

$$\lim_{B\to\infty} \int_V \mid \nabla v_B \mid^2 = 0 \text{ et } \| v_B \|_{L^2(V)} = 1$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $v_B \to C$ faiblement dans $H^1(V)$ et fortement dans $L^{q-1}(\partial V)$ et $L^2(V)$ quand $B \to \infty$. De plus, la relation (5.26) implique que

$$\int_{\partial V} \mid C \mid^{q-2} C = 0$$

Ainsi, $C = 0$. Puisque $\| v_B \|_{L^2(V)} = 1$, on a $C \neq 0$ ce qui est impossible. On en déduit que, nécessairement, (u_B) est bornée dans $L^2(V)$ et donc aussi dans $H^1(V)$ puisque $(\| \nabla u_B \|_{L^2(V)})_B$ est une suite majorée. On en déduit alors (voir par exemple [2] ou [25]) l'existence de $u \in H^1(V)$ telle que $u_B \to u$ fortement dans $L^2(\partial V)$ et faiblement dans $H^1(V)$. On a :

$$\int_V \mid \nabla u \mid^2 \leq \liminf_{B\to\infty} \int_V \mid \nabla u_B \mid^2$$

D'après l'inégalité (5.26)

$$\liminf_{B\to\infty} \int_V \mid \nabla u_B \mid^2 = 0$$

Donc u est une fonction constante. On a

$$\lim_{B\to\infty} \| u_B \|_{H^1(V)} = \| u \|_{H^1(V)}$$

Avec la convergence faible de u_B vers u dans $H^1(V)$, cela montre que u_B converge vers u fortement dans $H^1(V)$. Par le théorème d'inclusion de Sobolev et par (5.25) et (5.26), on obtient que

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mid u \mid^q &= 1 \\ \int_{\partial V} \mid u \mid^{q-2} u &= 0 \end{aligned}$$

Cela contredit le fait que u est une fonction constante et termine la preuve de (a).

5.4.2 Preuve de la partie (b)

Soit $u \in C^\infty(V)$ telle que

$$\int_{\partial V} \mid u \mid^{q-2} u = 0$$

Par définition de A_0, on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\left(\int_{\partial V} \mid u \mid^q \right)^{\frac{2}{q}} \leq (A_0 + \epsilon) \int_V \mid \nabla u \mid^2$$

Il s'ensuit que $\mu^{-1} \leq A_0$. Il suffit donc de montrer que $\mu^{-1} \geq A_0$. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\mu^{-1} < A_0$. Soit $\tilde{A}_0 \in]\mu^{-1}, A_0[$. Considérons, pour $u \in C^\infty(V)$,

$$I_B(u) = \int_V \mid \nabla u \mid^2 + B \left| \int_{\partial V} \mid u \mid^{q-2} u \right|^{\frac{2}{q-1}}$$

et son minimum

$$\mu_B = \inf_{u \in \mathcal{H}} I_B(u)$$

où

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in H^1(V) \middle| \int_{\partial V} | u |^q = 1 \right\}$$

Remarquons que la preuve du théorème 2 implique que $\mu \le S^{-2}$. Puisque $\tilde{A}_0 < A_0$, on a, par définition de A_0, pour tout $B > 0$, $\mu_B < \tilde{A}_0^{-1}$. Puisque $\tilde{A}_0 > \mu^{-1} \ge S^2$, on a $\mu_B < S^{-2}$. Un raisonnement standard (voir [2] ou [25]) montre alors que toute suite minimisante pour I_B admet une sous-suite convergeant fortement dans $H^1(M)$. On peut donc trouver $u_B \in \mathcal{H}$ telle que $\mu_B = I_B(u_B)$. Posons

$$C_B = \left| \int_{\partial V} | u_B |^{q-2} u_B \right|$$

On a $C_B \neq 0$. En effet, sinon, on aurait

$$\int_V | \nabla u_B |^2 = \mu_B \left(\int_{\partial V} | u_B |^q \right)^{\frac{2}{q}} \le \mu_B \mu^{-1} \int_V | \nabla u_B |^2$$

C'est absurde car $\mu_B < \mu$. Ainsi, on peut écrire l'équation d' Euler-Lagrange pour u_B. On obtient

$$(E_B) \begin{cases} \Delta_g u_B & = & 0 & sur \quad V \\ \partial_\nu u_B + B C_B^{\frac{3-q}{q-1}} | u_B |^{q-2} & = & \mu_B | u_B |^{q-2} u_B & sur \quad \partial V \end{cases}$$

Comme dans la preuve de la partie (a), la suite (u_B) est bornée dans $H^1(V)$. Par conséquent, il existe $u \in H^1(V)$ telle que, quand $B \to \infty$, $u_B \to u$ faiblement dans $H^1(V)$ et fortement dans $L^k(\partial V)$, avec $k < q$. Puisque $\mu_B = I_B(u_B) < \tilde{A}_0$, on a, en utilisant la définition de I_B,

$$\left| \int_{\partial V} | u |^{q-2} u \right| = \lim_{B \to \infty} C_B = 0 \tag{5.27}$$

Montrons maintenant que $u \not\equiv 0$. En effet, on sait (voir [29]) qu'il existe $B_0 > 0$ tel que, pour tout $B > 0$,

$$1 = \left(\int_{\partial V} | u_B |^q \right)^{\frac{2}{q}} \le S^2 \int_V | \nabla u_B |^2 + B_0 \int_{\partial V} u_B^2$$

Puisque $\mu_B < \tilde{A}_0^{-1}$, on a

$$\limsup_{B \to \infty} \int_V | \nabla u_B |^2 \le \tilde{A}_0^{-1}$$

Puisque $\tilde{A}_0 > \mu^{-1} \ge S^2$, on a

$$0 < 1 - S^2 \tilde{A}_0^{-1} \le B_0 \int_{\partial V} u^2$$

ce qui prouve que $u \not\equiv 0$. Les méthodes standard (voir par exemple [2] ou [25]) impliquent alors qu'il n'y a pas de phénomène de concentration et que la suite $(u_B)_B$ converge vers u fortement dans $H^1(V)$ quand $B \to \infty$. Ainsi,

$$\frac{\int_V | \nabla u |^2}{\left(\int_{\partial V} | u |^q \right)^{\frac{2}{q}}} = \lim_{B \to \infty} \frac{\int_V | \nabla u_B |^2}{\left(\int_{\partial V} | u_B |^q \right)^{\frac{2}{q}}} \le \lim_{B \to \infty} \mu_B \le \tilde{A}_0^{-1} < \mu$$

Avec (5.27), cela contredit la définition de μ.

5.4.3 Preuve de la partie (c)

Encore une fois, on raisonne par l'absurde et on suppose que, en gardant les mêmes notations que dans la preuve de la partie (b), $\mu_B < A_0^{-1}$. Alors, grâce à la partie (b), on a $\mu_B < A_0^{-1} = \mu < S^{-2}$. Ainsi, comme précédemment, on peut trouver $u_B \in \mathcal{H}$ telle que $\mu_B = I_B(u_B)$. Comme dans la preuve de la partie (b) , on montre que u_B est solution de

$$(E_B)\begin{cases} \Delta_g u_B & = & 0 & sur \quad V \\ \partial_\nu u_B + BC_B^{\frac{3-q}{q-1}} \mid u_B \mid^{q-2} & = & \mu_B \mid u_B \mid^{q-2} u_B & sur \quad \partial V \end{cases}$$

où C_B est défini par

$$C_B = \left| \int_{\partial V} \mid u_B \mid^{q-2} u_B \right|$$

avec $\lim C_B = 0$ quand $B \to \infty$.

Cas 3 *On suppose que* $\mu < S^{-2}$

En raisonnant comme dans la preuve de la partie (b), on montre qu'il existe $u \in H^1(V)$ telle que $u_B \to u$ quand $B \to \infty$, la convergence étant faible dans $H^1(V)$ et forte dans $L^k(\partial V)$, avec $k < q$. Comme dans la preuve de la partie (b), il s'ensuit que $u \not\equiv 0$. En intégrant (E_B) sur V, on obtient que

$$BC_B^{\frac{2(2-q)}{q-1}} \int_{\partial V} \mid u_B \mid^{q-2} = \mu_B \leq S^{-2}$$

Maintenant, observons que $\frac{2(2-q)}{q-1} = -\frac{4}{n} < 0$. Ainsi, $BC_B^{\frac{2(2-q)}{q-1}} \to \infty$ quand $B \to \infty$. Donc, $\int_{\partial V} \mid u_B \mid^{q-2} \to 0$ quand $B \to \infty$ ce qui est impossible car $u \not\equiv 0$.

Cas 4 $n \in \{3,4\}$ *et* $\mu = S^{-2}$

On définit $u_B^+ = \sup(u_B,0)$. Multiplions (E_B) par u_B^+ et intégrons sur V. On obtient, en remarquant que $\int_{\partial V} \mid u_B^+ \mid^q \leq 1$

$$\int_V \mid \nabla u_B^+ \mid^2 + BC_B^{\frac{n-4}{n}} \int_{\partial V} \mid u_B^+ \mid^2 = \mu_B \int_{\partial V} \mid u_B^+ \mid^q \leq \mu_B \left(\int_{\partial V} \mid u_B^+ \mid^q \right)^{\frac{2}{q}}$$

D'après un résultat de Li et Zhu [29] disant qu'il existe $B_0 > 0$ tel que $I(S^2,B_0)(u)$ est vraie pour tout $u \in H^1(V)$, $u \geq 0$, on obtient que

$$\int_V \mid \nabla u_B^+ \mid^2 + BC_B^{\frac{n-4}{n}} \int_{\partial V} \mid u_B^+ \mid^2 \leq \mu_B S^2 \int_V \mid \nabla u_B^+ \mid^2 + \mu_B B_0 \int_{\partial V} \mid u_B^+ \mid^2$$

Cela donne :

$$(1 - \mu_B S^2) \int_V \mid \nabla u_B^+ \mid^2 + (BC_B^{\frac{n-4}{n}} - \mu_B B_0) \int_{\partial V} \mid u_B^+ \mid^2 \leq 0$$

Rappelons que $\mu_B < S^{-2}$ et remarquons que, comme $\frac{n-4}{n} \leq 0$, $\lim_{B \to +\infty} BC_B^{\frac{n-4}{n}} = +\infty$. Cette assertion est donc fausse quand B est grand. Cela termine la démonstration du théorème 4.

Bibliographie

[1] R.A. ADAMS– Sobolev spaces, *Academic Press, Pure and Applied Mathematics, 1975.*

[2] T. AUBIN– Some nonlinear problems in Riemannian geometry, *Berlin Springer-Verlag, 1998.*

[3] T. AUBIN– Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev *Journal of Differential Geometry, 11, 1976, p. 573-598.*

[4] T. AUBIN– Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 55, 1976, p. 269-296.*

[5] T. AUBIN Y.Y. LI– On the best Sobolev inequality, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 78, No4, 1999, p353-382.*

[6] W. BECKNER– Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality, *Annals of Mathematics, 138, 1993, p. 213-242.*

[7] J.H. BRAMBLE L.E. PAYNE– Bounds in the Neumann problem for second-order uniformly elliptic operators, *Pacific Journal of Mathematics, 12, 1962, p. 823-833.*

[8] H. BRÉZIS– Analyse fonctionnelle, théorie et applications, *Masson, Paris, 1983.*

[9] E.A. CARLEN M. LOSS– Sharp constant in Nash's inequality, *International Mathematics Research Notices, 7, 1993, 213-215.*

[10] J. CHEEGER– A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian, *Problem in Analysis, a symposium in honor of S. Bochner, Princeton University Press, 1970.*

[11] P. CHERRIER– Meilleures constantes dans les inégalités relatives aux espaces de Sobolev, *Bulletin des Sciences Mathématiques, 108, 1984 p. 225-262.*

[12] Z. DJADLI O. DRUET –Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds, *À paraître dans Calculus of Variations and Partial Differential Equations.*

[13] O. DRUET– The best constant problem in Sololev inequalities, *Mathematische Annalen, 314, No2, 1999, p.327-346.*

[14] O. DRUET E. HEBEY M. VAUGON– Optimal Nash's inequalities on riemannian manifolds, *International Mathematics Research Notices, 14, 1999, p. 735-779.*

[15] J. ESCOBAR– Sharp constant in a Sobolev trace inequality, *Indiana University Mathematics Journal, 37, 1988, p. 687-698.*

[16] J. ESCOBAR– Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary, *Annals of Mathematics, 136, 1992, p. 1-50.*

[17] J. ESCOBAR– Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 4, No6, 1996, p. 559-592.*

[18] J. ESCOBAR– An isoperimetric Inequality and the First Steklov Eigenvalue, *Journal of Functional Analysis, 165, 1999, p. 101-116.*

[19] Z. FAGET– Calcul de la meilleure constante dans les inégalités de Sobolev pour les fonctions invariantes par un groupe d'isométrie, *Prépublications de l'Université de Cergy-Pontoise, 2000.*

[20] J. Favard– Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique , *Tome I, Cahiers Scientifiques, Gauthier-Villars Editeur.*

[21] A. Gray The volume of small geodesic balls, Michigan Journal of Mathematics, 20, 1973, p. 329-344.

[22] G. Gilbarg N.S. Trudinger– Elliptic partial differential equations of second order, *2nd ed, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 224, Berlin-New York, 1983.*

[23] M. Gromov– Paul Levy's isoperimetric inequality, *Prépublication de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1980.*

[24] E. Hebey– Nonlinear analysis on manifolds : Sobolev spaces and inequalities, *Courant Lecture Notes in Mathematics, 5, 1999.*

[25] E. Hebey– Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés, *Diderot Éditeur, Fondations, Paris, 1997.*

[26] E. Hebey M. Vaugon– Meilleures constantes dans le théorème d'inclusion de Sobolev, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 13, 1996, p. 57-93.*

[27] E. Hebey M. Vaugon– From best constants to critical functions, *À paraître dans Mathematische Zeitschrift.*

[28] S. Ilias– Constantes explicites pour les inégalités de Sobolev sur les variétés Riemanniennes compactes, *Annales de l'Institut Fourier, 33, 1983, p. 151-165.*

[29] Y.Y. Li M. Zhu– Sharp Sobolev trace inequality on Riemannian manifolds with boundary, *Communications on Pure and Applied Mathematics, 50, 1997, p. 449-487.*

[30] J.W. Milnor– Morse theory, *Annals of Mathematical Studies, 51, Princeton University Press, Princeton, 1963.*

[31] G. Petiau– La théorie des fonctions de Bessel, *CNRS, 1955.*

[32] R. Schoen– Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature, *Journal of Differential Geometry, 20, 1984, p. 479-485.*

[33] G. Talenti– Best constants in Sobolev inequality, *Annali di Matematica Pura ed Applicata, 110, 1974, p. 353-372.*

[34] S.T. Yau– Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4ème série, t. 8, 1975, p. 487-507.*