

# Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité :

## Mathématiques

présentée par

### Éric Ricard

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris VI

Décompositions de  $H^1$ ,  
multiplicateurs de Schur  
et espaces d'opérateurs

soutenue le 20 décembre 2001 devant le jury composé de :

M<sup>me</sup> Aline Bonami  
M. Christian Le Merdy  
M. Bernard Maurey  
M. Vern Paulsen  
M. Gilles Pisier  
M. Alexander Volberg

*Cette thèse a été réalisée au sein de l'Équipe d'analyse fonctionnelle de l'Université Paris VI.*

*En premier lieu, je tiens à exprimer ma gratitude envers M. Gilles Pisier pour en avoir assuré la direction. Je le remercie, entre autres, pour le temps qu'il m'a consacré, la multitude des sujets qu'il m'a proposés ainsi que son immense savoir dont j'ai pu profiter au cours de ces dernières années. Il m'a permis de découvrir le monde de la recherche mathématique et d'en rencontrer ses acteurs ; en particulier MM. Christian Le Merdy et Vern Paulsen qui ont eu la gentillesse de "rapporter" sur mon travail, ce pourquoi je voudrais les remercier vivement. Je souhaite également témoigner ma reconnaissance envers M<sup>me</sup> Aline Bonami, MM. Bernard Maurey et Alexander Volberg pour l'honneur qu'il me font en participant au jury.*

*J'ai eu la chance de pouvoir préparer cette thèse à différents endroits : l'École Normale Supérieure, l'Université Paris VI et l'Université Texas A&M. Je tiens, sincèrement, à saluer tous ceux qui ont rendu cela possible.*

*Enfin, mes sentiments se tournent naturellement vers tous les gens que j'ai pu côtoyer au quotidien ces derniers temps ; leur sympathie et bonne humeur ont rendu cette activité mathématique encore plus agréable.*

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>5</b>
Chapitre 1 . . . . .	5
Chapitre 2 . . . . .	8
Chapitre 3 . . . . .	11
<b>1 <math>Q</math>-espaces et produits tensoriels</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction et notations . . . . .	13
1.2 $Q$ -espaces . . . . .	15
1.2.1 Définitions . . . . .	15
1.2.2 Espaces min et $\max_Q$ . . . . .	16
1.2.3 Caractérisation et exemples . . . . .	19
1.3 Produit minimal et $Q$ -espaces . . . . .	25
1.4 Une norme pour les $Q$ -espaces . . . . .	31
1.4.1 $Q$ -algèbres . . . . .	31
1.4.2 Le produit tensoriel $\otimes_{f_Q}$ . . . . .	36
1.4.3 $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$ en tant qu'espace de Banach . . . . .	39
<b>2 Structures d'espace sous-maximal sur <math>H^1</math></b>	<b>41</b>
2.1 Présentation . . . . .	41
2.2 Séries bilacunaires . . . . .	46
2.3 Bases inconditionnelles . . . . .	53
2.3.1 Cas du Banach $H^1$ et $H^1_{R+C}$ . . . . .	54
2.3.2 Absence de base complètement inconditionnelle pour $H^1$ . . . . .	55
2.3.3 Extensions . . . . .	58
2.4 Bases . . . . .	64
<b>3 Multiplicateurs de Schur sur <math>L^\infty/H^\infty</math></b>	<b>69</b>
3.1 Sur une question de Davidson et Paulsen . . . . .	69
3.1.1 Présentation . . . . .	69
3.1.2 Opérateurs à valeurs CAR . . . . .	70
3.2 Multiplicateurs de Schur . . . . .	72
<b>A Une remarque sur <math>\alpha(E)</math></b>	<b>81</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>83</b>



# Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des espaces d'opérateurs et de l'analyse harmonique. Elle est constituée de trois chapitres ; dans le premier, on s'intéresse à une classe particulière d'espaces d'opérateurs, les  $Q$ -espaces. Le second chapitre se propose d'analyser quelques structures de  $Q$ -espaces sur l'espace  $L^\infty/H^\infty$  et les propriétés de décomposabilité de son préduel, l'espace de Hardy  $H^1$ , classique en analyse harmonique. Enfin, le troisième chapitre traite de questions sur certains multiplicateurs de Schur en relation avec des multiplicateurs de Fourier sur  $H^1$  à valeurs vectorielles.

## Chapitre 1

La théorie des espaces d'opérateurs consiste en l'étude des sous-espaces vectoriels de l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. On considère la thèse de Ruan comme son origine ; celle-ci donne une caractérisation abstraite des espaces d'opérateurs comme les espaces de Banach  $X$  équipés de famille de normes (notée  $(\|\cdot\|_n)$ ) sur les matrices à coefficients dans  $X$  (notées  $M_n(X)$ ) satisfaisant deux axiomes :

$$\begin{aligned} (R1) \quad & \forall a, b \in M_n \forall x \in M_n(X) \quad \|a.x.b\|_n \leq \|a\|_n \|x\|_n \|b\|_n, \\ (R2) \quad & \forall x \in M_n(X), y \in M_m(X) \quad \left\| \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \right\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\}. \end{aligned}$$

Ce théorème est une sorte de contre-partie à la caractérisation abstraite des  $C^*$ -algèbres parmi les algèbres de Banach due à Gelfand-Naimark-Segal. Ce résultat a permis un développement considérable de la théorie des espaces d'opérateurs dans les années 90, notamment grâce aux travaux de Effros-Ruan et Blecher-Paulsen. Les morphismes de cette catégorie sont les applications complètement bornées ; une application  $u : X \rightarrow Y$  entre deux espaces d'opérateurs est dite complètement bornée si :

$$\|u\|_{cb} = \sup_{n \geq 1} \|Id_{M_n} \otimes u : M_n(X) \rightarrow M_n(Y)\| < \infty.$$

L'intérêt principal du théorème de Ruan réside dans le fait que l'on peut s'affranchir des représentations concrètes des espaces d'opérateurs. Par exemple, il permet de définir une dualité pour les espaces d'opérateurs, ainsi que des structures quotient : si  $Y \subset X$ , on obtient une structure d'espace d'opérateurs sur  $X/Y$ , en utilisant, pour tout entier  $n$ , les identifications algébriques

$$M_n(X/Y) = M_n(X)/M_n(Y).$$

En général, pour un espace de Banach  $X$ , il existe plusieurs réalisations de  $X$  en tant qu'espace d'opérateurs. La plus simple consiste à réaliser  $X$  comme sous-espace des fonctions continues sur la boule unité de son dual, la structure ainsi obtenue est dite minimale

ou commutative et est notée  $\min(X)$ . Celle-ci a la propriété particulière d'être la plus petite structure d'espace d'opérateurs dont  $X$  peut être équipé, cela signifie que si  $\tilde{X}$  désigne  $X$  muni d'une autre structure d'espace d'opérateurs, alors l'identité  $\tilde{X} \rightarrow \min(X)$  est complètement bornée. À l'inverse, il existe une structure d'espace d'opérateurs maximal sur  $X$  (notée  $\max(X)$ ) en quelque sorte duale de  $\min$ . Le but du premier chapitre est d'étudier une sous-classe des espaces d'opérateurs, les  $Q$ -espaces formée par les quotients des espaces minimaux.

Le début de cette première partie se consacre aux propriétés élémentaires des  $Q$ -espaces vis-à-vis des opérations algébriques de bases. De manière analogue aux espaces d'opérateurs, on introduit une notion de  $Q$ -espaces maximaux (notée  $\max_Q$ ) dont on donne plusieurs caractérisations ; notamment la suivante, à la manière de Paulsen dans [Pa1] :

**Théorème 1** *Soit  $X$  un espace de Banach et  $x$  un élément de  $M_n(X)$ , alors*

$$\|x\|_{M_n(\max_Q(X))} = \inf\{(\max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_X) \|v\|_{\ell_\infty^p \rightarrow M_n} \mid x = (v \otimes Id_X)(diag(x_i))\}.$$

Ensuite, on rappelle une caractérisation des  $Q$ -espaces parmi les espaces d'opérateurs obtenue par Junge dans [Ju] (comme cas particulier d'un principe général) dont on donne une preuve simple adaptée à la situation :

**Théorème 2** *Soit  $E$  un espace d'opérateurs, alors  $E$  est un  $Q$ -espace si et seulement si pour tout entier  $n \geq 1$  et toute application  $T : M_n \rightarrow M_n$ ,*

$$\|T \otimes Id_E : M_n(E) \rightarrow M_n(E)\| \leq \|T\|.$$

Ce résultat est ensuite utilisé pour obtenir d'autres propriétés des  $Q$ -espaces et également pour comparer les espaces d'opérateurs classiques à des  $Q$ -espaces. L'exemple central de cette thèse est l'espace des matrices de Hankel (matrices de la forme  $(a_{i+j})_{i,j \geq 0}$ ) qui peut être identifié au  $Q$ -espace  $\min(L^\infty(\mathbb{T}))/\min(H^\infty(\mathbb{T}))$  par le théorème de Nehari-Sarason-Page. Son sous-espace formé des séries lacunaires est complètement isomorphe à  $R \cap C$  et joue également un rôle important.

La section suivante 1.3 est consacrée aux rapport entre les  $Q$ -espaces et le produit tensoriel minimal des espaces d'opérateurs. La motivation principale est de savoir si la classe des  $Q$ -espaces est stable par ce produit tensoriel. On commence par donner quelques situations particulières où cela se produit avant de s'intéresser plus spécifiquement à la question de savoir si pour tout  $Q$ -espace  $X$ ,  $(R \cap C) \otimes_{\min} X$  est encore complètement isomorphe à un  $Q$ -espace. Le premier résultat dans cette direction affirme que si  $X = E/F$ , en général, on n'a pas l'identité

$$(R \cap C) \otimes_{\min} X = ((R \cap C) \otimes_{\min} E)/((R \cap C) \otimes_{\min} F).$$

Ensuite, on montre que cette question admet une formulation équivalente assez intéressante ( $t$  désigne la transposition de  $M_n$ )

**Théorème 3** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) *Pour tout  $Q$ -espace  $Q$ ,  $R \cap C \otimes_{\min} Q$  est isomorphe à un  $Q$ -espace.*
- ii) *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout entier  $n \geq 1$  et  $T : M_n \rightarrow M_n$ , il existe une décomposition  $T = \phi + \psi$  vérifiant*

$$\begin{aligned} \|Id_R \otimes \phi : R \otimes_{\min} M_n \rightarrow R \otimes_{\min} M_n\| &\leq C\|T\| \\ \|t \otimes \psi : C \otimes_{\min} M_n \rightarrow R \otimes_{\min} M_n\| &\leq C\|T\| \end{aligned}$$

La seconde assertion, si elle est vraie, consisterait un renforcement de l'inégalité de Grothendieck non commutative. Cette section se termine par quelques remarques et quelques cas où ii) se produit.

Le reste du premier chapitre est dédié à l'introduction d'une norme tensorielle pour la variété des  $Q$ -espaces à la manière du produit tensoriel de Haagerup. Pour cela, on commence par donner quelques résultats sur les  $Q$ -algèbres, c'est à dire les algèbres d'opérateurs quotient des sous-algèbres des fonctions continues par leurs idéaux. Le but est de construire pour tout espace d'opérateurs  $E$ , une sorte de  $Q$ -algèbre enveloppante  $OA_Q(E)$  universelle dans le sens où toute application complètement contractante de  $E$  dans une  $Q$ -algèbre  $A$  admet comme extension un unique morphisme d'algèbre de  $OA_Q(E)$  dans  $A$ . La propriété cruciale de cette algèbre est :

**Proposition 4**  *$OA_Q(\cdot)$  est projectif : si  $F \subset E$  alors  $\tilde{q} : OA_Q(E) \rightarrow OA_Q(E/F)$  est une surjection métrique complète. Plus précisément, si  $x \in M_n(S(E/F))$ ,  $\|x\| < 1$  alors il existe  $y \in M_n(S(E))$  tel que  $\|y\| < 1$  et  $(Id_{M_n} \otimes \tilde{q})(y) = x$ .*

Ensuite, on généralise cette construction à une famille d'espaces d'opérateurs  $(E_i)$ ; on construit une  $Q$ -algèbre universelle  $OA_Q((E_i))$  contenant des copies des espaces de Banach  $E_i$  et ayant les mêmes propriétés que  $OA_Q$ , en particulier la projectivité.

Ces algèbres permettent la construction d'une norme tensorielle pour les  $Q$ -espaces de la manière suivante :

**Définition 5** *Soient  $E$  et  $F$  deux  $Q$ -espaces, on définit  $E \otimes_{f_Q} F$  comme l'espace d'opérateurs  $OA_Q^{1,1}(E, F)$ . La norme d'un élément  $x = \sum_i k_i \otimes a_i \otimes b_i \in M_n(E \otimes F)$  est donnée par la formule :*

$$\|x\|_{f_Q} = \sup_{\sigma_i: E_i \rightarrow A} \left\| \sum_i k_i \otimes \sigma_1(a_i) \sigma_2(b_i) \right\|_{M_n(A)}$$

où le sup parcourt toutes les contractions complètes  $\sigma_i : E_i \rightarrow A$  dans n'importe quelle  $Q$ -algèbre  $A$ .

Cette définition clone celle du produit tensoriel de Haagerup. Après avoir énoncé quelques propriétés, on donne le résultat principal :

**Théorème 6** *Soient  $E_1, \dots, E_N$  des espaces d'opérateurs et  $x \in M_d(E_1 \otimes \dots \otimes E_N)$ , alors*

$$\|x\|_{M_d(E_1 \otimes_{f_Q} \dots \otimes_{f_Q} E_N)} = \inf \{ \|w\| \|x_1\|_{M_n(E_1)} \dots \|x_N\|_{M_n(E_N)} ; x = \tilde{w}(x_1, \dots, x_N) \}.$$

Dans cet infimum,  $n$  est arbitraire et  $w$  est n'importe quelle application  $N$ -linéaire de  $M_n \times \dots \times M_n$  ( $N$  fois) dans  $M_d$ .

On obtient ainsi une façon duale de calculer la norme d'un élément de ce produit tensoriel, en passant d'un sup à un inf. Ce résultat est un analogue du principe de Pietsch pour la norme de Haagerup. Le problème dans ce cadre est le manque d'objet universel injectif comme  $B(H)$  pour les  $Q$ -espaces; c'est pourquoi on a introduit les algèbres  $OA_Q$  : leur projectivité est un substitut à cette absence. Ce théorème peut se réinterpréter en terme de factorisation, ce qui permet la comparaison à la norme tensorielle minimale :

**Proposition 7** *Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux  $Q$ -espaces et  $u \in M_n(E_1 \otimes E_2)$  telle que  $\|u\|_{f_Q} < 1$ , alors comme application de  $E_1^*$  vers  $M_n(E_2)$ ,  $u$  admet une factorisation, pour un certain  $m$*

$$\begin{array}{ccc} \max(M_m) & \xrightarrow{w} & M_n(\min(S_1^m)) \\ v_1^* \uparrow & & \downarrow Id_{M_n} \otimes v_2 \\ E_1^* & \xrightarrow{u} & M_n(E_2) \end{array}$$

avec  $v_1, v_2$  complètement contractives et  $\|w\| < 1$ .

Inversement, si une telle factorisation existe avec  $\|w\|_{M_n(\min(S_1^m) \otimes_{\min} \min(S_1^m))} < 1$  alors  $\|u\|_{f_Q} < 1$ .

Ce chapitre se clôt sur une adaptation des résultats de Paulsen au cadre des  $Q$ -espaces et de cette nouvelle norme. On montre, en particulier, que du point de vue espace de Banach, elle est équivalente aux normes tensorielles projective et de Haagerup. On termine par des corollaires de ce fait

**Corollaire 8** *Il existe une constante  $k > 0$  telle que si  $E_1$  et  $E_2$  sont des  $Q$ -espaces de dimension  $n$ , alors*

$$d_{cb}(E_1, E_2^*) \geq \frac{1}{k} \sqrt{n}.$$

De plus, toute application d'un  $Q$ -espace de dimension  $n$  dans un espace sous-maximal se factorise au travers de l'identité  $R_n \cap C_n \rightarrow R_n + C_n$ .

## Chapitre 2

Le besoin d'exemples de  $Q$ -espaces du premier chapitre conduit à s'intéresser à l'espace d'opérateurs des matrices de Hankel que l'on peut identifier à  $\min(L^\infty(\mathbb{T}))/\min(H^\infty(\mathbb{T}))$ . L'analyse harmonique fournit d'autres descriptions de l'espace de Banach sous-jacent ; l'objet du second chapitre est de comparer différentes structures de  $Q$ -espace d'opérateurs dont on peut équiper cet espace de Banach et d'enchaîner sur les propriétés de décomposabilité de l'espace préduel  $H^1$  en tant qu'espace d'opérateurs.

L'espace de Hardy  $H^1(\mathbb{T})$  est le sous-espace fermé de  $L^1$  constitué des fonctions analytiques :

$$H^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \hat{f}(n) = 0, n \leq 0\}.$$

L'un des résultats remarquables en analyse harmonique réelle est sa description en terme d'atomes obtenue par Fefferman. Un atome  $a$  est une fonction du tore dans  $\mathbb{C}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} & \cdot \text{supp } a \subset I, I \subset \mathbb{T} \text{ est un intervalle.} \\ & \cdot \int_I a \, dm = 0 \\ & \cdot \|a\|_\infty \leq \frac{1}{|I|}. \end{aligned}$$

L'enveloppe convexe des atomes forme l'espace  $H_{at}^1$  :

$$H_{at}^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \exists (\lambda_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (a_i)_{i \geq 1} \text{ atomes tels que}$$

$$f = \sum_{i \geq 1} \lambda_i a_i \text{ et } \sum_{i \geq 1} |\lambda_i| < \infty\}$$

avec la norme

$$\|f\|_{at} = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} |\lambda_i|; f = \sum_{i \geq 1} \lambda_i a_i, a_i \text{ atomes} \right\}.$$

Le théorème de Fefferman relie  $H^1$  et  $H_{at}^1$  de la manière suivante :

**Théorème 9** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que toute  $f \in H^1$  vérifie  $f \in H_{at}^1$  et*

$$\|f\|_{at} \leq C \|f\|_{L^1},$$

et réciproquement si  $f \in H_{at}^1$  alors  $(Id + iH)f \in H^1$  avec

$$\|(Id + iH)f\|_{L^1} \leq C \|f\|_{at},$$

où  $H$  désigne la transformée de Hilbert.



L'espace dual de  $H_{at}^1$  est connu sous le nom de  $BMO$ , c'est un espace de fonctions sur le tore modulo les fonctions constantes, sa norme est définie par

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{I \text{ intervalle}} \frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| dm$$

où  $f_I = \frac{1}{|I|} \int f dm$  est la moyenne de  $f$  sur  $I$ . Grâce au théorème ci-dessus, on peut relier  $BMO$  à  $L^\infty/H^\infty$ .

Pour mettre des structures d'espaces d'opérateurs sur  $L^\infty/H^\infty$ , on est amené à considérer des généralisations à valeurs vectorielles de toutes ces notions. C'est à ce niveau qu'apparaissent les premiers problèmes; en particulier, le théorème de Fefferman n'est plus valable. Cependant, Bourgain a montré que l'une des inclusions reste vraie: pour tout espace de Banach  $X$ , toute fonction dans  $H^1(X)$  (une fonction analytique sur le tore à valeurs dans  $X$  considérée dans  $L^1(X)$ ) se décompose toujours en combinaison linéaire d'atomes. La seconde assertion du théorème de Fefferman, quant à elle, n'est vraie que si  $X$  est un espace de Banach UMD analytique.

La première façon de munir  $H^1$  (ou  $L^\infty/H^\infty$  ce qui revient au même par dualité) d'une structure d'espace d'opérateurs est de le considérer comme un sous-espace de l'espace d'opérateurs  $\max(L^1)$ , on obtient ainsi sur  $L^\infty/H^\infty$  la structure d'espace d'opérateurs vue précédemment. Une autre possibilité est de s'intéresser à  $BMO$ : on munit  $M_n(BMO)$  de la famille de normes, pour  $f$  une fonction sur  $\mathbb{T}$  à valeurs dans  $M_n$ :

$$\|f\|_{BMO_{R \cap C}} = \sup_{I \subset \mathbb{T} \text{ intervalle}} \left( \frac{1}{|I|} \left\| \int_I (f-f_I)^*(f-f_I) dm \right\|_{M_n}, \frac{1}{|I|} \left\| \int_I (f-f_I)(f-f_I)^* dm \right\|_{M_n} \right).$$

L'espace de Banach  $BMO$  est ainsi doté d'une structure de  $Q$ -espace. L'idée naturelle, consistant à équiper  $M_n(BMO)$  de la famille de norme provenant des identifications  $M_n(BMO) = BMO(M_n)$ , ne donne pas une structure d'espace d'opérateurs. Cette introduction et ses définitions constituent la première section de ce second chapitre.

Disposant de ces différentes structures, on se propose de les comparer dans la suite. La première approche dans ce but est d'étudier les séries bilacunaires (de la forme  $z^{2^i+2^j}$ ) dans  $BMO_{R \cap C}$ ; en effet, les séries lacunaires donnent l'espace  $R \cap C$  dans chacun des deux espaces et ne permettent pas de les distinguer. Le coeur de la seconde section est le résultat suivant:

**Théorème 10** *Soient  $x_{i,j} \in M_n$ , alors*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i>j \geq 0} x_{i,j} z^{2^i+2^j} \right\|_{M_n(BMO_{R \cap C})} &\approx \left\| \sum_{i>j \geq 0} x_{i,j} \otimes \delta_{i,j} \right\|_{M_n(R \cap C)} + \\ &\sup_{k \geq 1} \left\| \sum_{i>k > j \geq 0} x_{i,j} \otimes \delta_i \otimes e_j \right\|_{M_n((R \cap C) \otimes_{\min} \ell_1)}, \end{aligned}$$

où  $(\delta_n)_{n \geq 1}$  est une base orthonormée de  $R \cap C$ ,  $(e_i)$  est la base canonique de  $\ell_1$  et  $\delta_{i,j} = \delta_{2^i+2^j}$ .

Grâce à ce dernier, il est possible de différencier  $BMO_{R \cap C}$  et  $L^\infty/H^\infty$ ; pour cela, on calcule explicitement les normes des fonctions à valeurs dans  $M_n$  de la forme  $(x_{i,j} z^{2^i+2^j})$  dans chacun de ces deux espaces, la conclusion est la suivante:

**Théorème 11** *L'application naturelle  $Id + iH$  de  $BMO_{R \cap C}$  dans  $L^\infty/\overline{H}^\infty$  n'est pas complètement bornée.*

Il découle des travaux de Nazarov, Pisier, Treil et Volberg dans [NPTV] que la version quantitative de ce résultat est optimale.

Les deux sections suivantes de ce chapitre sont consacrées plus spécifiquement à l'espace  $H^1$ . L'un des plus anciens résultats de décomposition de  $H^1$  affirme que l'on peut trouver une décomposition inconditionnelle de rang fini de  $H^1$  : il existe une suite  $(P_n)$  d'opérateurs de rang fini sur  $H^1$  vérifiant :

$$\sup_{\epsilon_n = \pm 1} \sup_N \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n P_n \right\|_{X \rightarrow X} < \infty \quad (*)$$

et pour tout  $x \in X$ ,

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$$

où la série converge inconditionnellement. En remplaçant les normes d'applications par les normes d'applications complètement bornées, on obtient la notion de décomposition complètement inconditionnelle de rang fini. Ce résultat de la théorie des espaces de Banach admet plusieurs raffinements ; l'existence d'une base inconditionnelle (formée d'ondelettes) notamment. On en déduit que l'espace  $H^1_{R+C}$ , dual de  $BMO_{R \cap C}$ , admet une base complètement inconditionnelle. Ce cas traité, on passe à  $H^1$  en tant qu'espace d'opérateurs. La situation est radicalement différente :

**Théorème 12** *L'espace  $H^1(\mathbb{T})$  n'admet pas de décomposition complètement inconditionnelle de rang fini de l'identité et a fortiori n'a pas de base complètement inconditionnelle.*

La preuve de ce théorème utilise le lien entre l'espace d'opérateurs  $H^1$  et les généralisations de  $H^1$  à valeurs vectorielles ainsi qu'un principe de transfert introduit dans [HP2]. De ce fait, on peut étendre ce résultat. La première direction est d'analyser les espaces de Banach  $X$  pour lesquels il existe une décomposition inconditionnelle de l'identité de  $H^1$  qui se tensorise avec l'identité de  $X$ , cela revient à remplacer dans (\*),  $P_n$  par  $Id_X \otimes P_n : H^1(X) \rightarrow H^1(X)$ . En utilisant un théorème de Blower [Blo] sur certains multiplicateurs de  $H^1$ , on aboutit à une caractérisation des espaces de Banach UMD analytiques :

**Théorème 13** *Soit  $X$  un espace de Banach, alors  $X$  est UMD analytique si et seulement s'il existe une décomposition inconditionnelle de rang fini de l'identité de  $H^1$  (notée  $(P_n)$ ) qui se tensorise avec  $X$ , c'est à dire*

$$\exists C > 0, \quad \forall \epsilon_n \in \{-1; 1\}, \quad \sup_k \left\| \sum_{n=1}^k \epsilon_n Id_X \otimes P_n \right\|_{B(H^1(X))} \leq C.$$

D'autres extensions de ce résultats sont possibles en remplaçant  $H^1$  par d'autres espaces de fonctions, par exemple si  $\Lambda$  est une partie de  $\mathbb{Z}$

**Théorème 14** *L'espace*

$$\mathcal{C}_\Lambda(\mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \mid \hat{f}(n) = 0 \text{ si } n \notin \Lambda\}.$$

*n'admet pas de décomposition inconditionnelle de rang fini de l'identité dès que  $\Lambda$  contient la somme de deux sous-ensembles infinis de  $\mathbb{Z}$  ; en particulier, il n'a pas de base inconditionnelle.*

La section 2.4 termine ce chapitre avec

**Corollaire 15** *L'espace d'opérateurs  $H^1$  admet une base complètement bornée.*

Ce résultat s'inspire très largement des travaux de Lusky [Lu1, Lu2] sur l'existence de bases dans le cadre des espaces de Banach. On transpose ces résultats au cadre des espaces d'opérateurs pour  $H^1$ , on clôt ainsi le problème de l'existence de bases (inconditionnelles ou pas) au niveau espace d'opérateurs pour  $H^1$ .

### Chapitre 3

Ce dernier chapitre tourne également autour de l'espace  $L^\infty/H^\infty$  et a pour origine une question de Davidson et Paulsen.

Un opérateur  $T$  borné sur un espace de Hilbert  $H$  est dit polynômialement borné, s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout polynôme analytique  $p$

$$\|p(T)\|_{B(H)} \leq C \sup\{|p(z)|; |z| \leq 1\}.$$

$T$  est semblable à une contraction s'il existe un opérateur inversible  $L$  sur  $H$  tel que

$$\|L^{-1}TL\|_{B(H)} \leq 1.$$

Récemment, Pisier [Pi6] a construit des opérateurs polynômialement bornés, mais non semblables à des contractions. Il s'agit d'opérateurs  $R(Y_\alpha)$  de type Foguel-Hankel à valeurs dans la  $C^*$ -algèbre  $CAR$  (relations canoniques d'anticommutation) indexés par une suite  $\alpha$ . Ils font intervenir des matrices de Hankel à coefficients opérateurs. La reformulation de Davidson et Paulsen ([DP]) du résultat de Pisier donne une condition nécessaire et suffisante sur la suite  $\alpha$  pour que  $R(Y_\alpha)$  soit polynômialement borné, ainsi qu'une condition nécessaire sur  $\alpha$  pour que  $R(Y_\alpha)$  soit semblable à une contraction. Leur question est de savoir si cette condition nécessaire est bien suffisante. La réponse est affirmative :

**Corollaire 16** *L'opérateur  $R(Y_\alpha)$  est semblable à une contraction si et seulement si*

$$B_2(\alpha) = \sum_{n \geq 0} (n+1)^2 |\alpha_n|^2 < \infty.$$

La preuve repose essentiellement sur un principe de sélection.

La seconde section de ce chapitre pousse un peu plus loin l'utilisation de cette technique afin d'obtenir des résultats sur certains multiplicateurs de Schur. Un multiplicateur de Schur est une application de  $B(\ell_2)$  dans lui-même qui envoie une matrice  $(x_{i,j})$  sur  $(m_{i,j}x_{i,j})$ , par extension la matrice  $[m_{i,j}]$  désigne ce multiplicateur. Certains résultats sur les opérateurs de type Foguel-Hankel à valeurs scalaires reposent sur le lemme de Bourgain suivant :

**Lemme 17** *Il existe une constante  $C$  telle que pour toute matrice de Hankel  $[a_{i+j}]$ ,*

$$\|[ (j+1)a_{i+j} ]\| \leq C \|[ (i+j+1)a_{i+j} ]\|.$$

Les matrices de Hankel forment un espace d'opérateurs que l'on a identifié à  $L^\infty/H^\infty$ . Une des motivations du problème de Davidson et Paulsen provient du fait que ce multiplicateur  $\left[ \frac{j+1}{i+j+1} \right]$  n'est pas complètement borné. Le principal résultat de ce chapitre est une amélioration de ce lemme. Au préalable, on démontre un résultat sur des multiplicateurs de Fourier de  $H^1$  à valeurs opérateurs :

**Théorème 18** *Soit  $(m_n)$  une suite d'opérateurs sur  $\ell_2$  telle que*

$$\begin{aligned} i) \quad & \sup_{n \geq 0} \|m_n\| \leq C \\ ii) \quad & \sup_{n \geq 0} n \|m_{n+1} - m_n\| \leq C \\ iii) \quad & \sup_{n \geq 0} n^2 \|m_{n+2} - 2m_{n+1} + m_n\| \leq C \end{aligned} ,$$

alors  $(m_k)$  est un multiplicateur de Fourier sur  $H^1(\ell_2)$  de norme inférieure à  $kC$  pour une certaine constante universelle  $k$ .

Ce type de résultat sur les multiplicateurs de Mihlin a été utilisé dans la chapitre précédent. Le principe de sélection de la première section permet de transférer ces multiplicateurs de Fourier en multiplicateurs de Schur, on obtient :

**Théorème 19** Soit  $r > 0$ , alors le multiplicateur de Schur  $\left[\left(\frac{j+1}{i+j+1}\right)^r\right]_{i,j \geq 0}$  est borné sur les matrices de Hankel.

Le cas  $r = 0$  est un peu spécial

**Théorème 20** Le multiplicateur de Schur  $[\delta_{\lfloor \log_2(j+1) \rfloor > \lfloor \log_2(i+1) \rfloor}]_{i,j \geq 0}$  est borné sur les matrices de Hankel.

Ce dernier énoncé se rapproche d'un résultat plus fort (le multiplicateur de Schur  $[\delta_{j>i}]_{i,j \geq 0}$  est borné sur les matrices de Hankel) obtenu par Bonami et Bruna [BB] reposant sur les travaux de Lacey-Thiele à propos de la transformée de Hilbert bilinéaire. Les techniques présentées ici sont plus élémentaires et plus directes.

## Annexe A

L'annexe contient une remarque sur la comparaison entre les structures d'espace d'opérateurs min et max d'un espace Banach de dimension finie :

**Théorème 21** Soit  $E$  un espace de Banach de dimension  $n$ , alors

$$d_{cb}(\min(E), \max(E)) \leq 2^{-\frac{1}{4}}n.$$

La constante  $2^{-\frac{1}{4}}$  améliore l'estimation classique.

# Chapitre 1

## $Q$ -espaces et produits tensoriels

### 1.1 Introduction et notations

Ce chapitre a pour but d'introduire une classe spéciale d'espaces d'opérateurs, les  $Q$ -espaces et d'étudier leurs comportements vis-à-vis de certains produits tensoriels.

Plus précisément, on commencera par définir les  $Q$ -espaces et en donner les propriétés élémentaires. Ensuite, une caractérisation de ces espaces obtenue par Junge dans [Ju] sera utilisée afin d'obtenir quelques exemples.

Dans la section suivante, on s'attachera à obtenir quelques résultats partiels pour la stabilité des  $Q$ -espaces vis-à-vis du produit tensoriel minimal.

Enfin, on introduira, dans la dernière partie, une norme tensorielle pour les  $Q$ -espaces analogue au produit tensoriel de Haagerup pour les espaces d'opérateurs.

Dans tout ce qui suit  $B(H)$  désignera l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert complexe  $H$ ,  $\mathbb{K}$  la sous-algèbre des opérateurs compacts, dans le cas où  $H = \ell_2^n$ , on notera  $M_n$  cette dernière et  $(e_{i,j})$  sera la notation utilisée pour sa base canonique.

La théorie des espaces d'opérateurs consiste en l'étude des sous-espaces vectoriels fermés de  $B(H)$  (pour n'importe quel  $H$ ). Elle s'est développée à partir des travaux de Effros et Ruan et de Blecher et Paulsen au début des années 90. Les références standards sont [ER] et [Pi5], les notions de base dont on aura besoin sont les suivantes : si  $X$  est un sous-espace fermé de  $B(H)$  (ou de n'importe quelle  $C^*$ -algèbre, ce qui revient au même), on peut, pour chaque  $n \geq 1$ , équiper  $M_n(X) = M_n \otimes X$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $n$  à coefficients dans  $X$  d'une norme (notée  $\|\cdot\|_n$  en général) qui provient de l'inclusion  $M_n(X) \subset M_n(B(H)) = B(H^n)$  où l'on considère l'identification standard entre  $M_n(B(H))$  et  $B(H^n)$ . Un espace d'opérateurs est un tel espace  $X$  muni de cette famille de norme.

Les morphismes de la catégorie des espaces d'opérateurs sont les applications complètement bornées ; si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces d'opérateurs et si  $u : X \rightarrow Y$  est une application linéaire,  $u$  est dite complètement bornée si

$$\|u\|_{\text{cb}} = \sup_{n \geq 1} \|Id_{M_n} \otimes u\|_{M_n(X) \rightarrow M_n(Y)} < +\infty.$$

De façon naturelle,  $M_n(X)$  est équipé d'une structure de bimodule sur  $M_n$ , le produit étant défini sur les tenseurs élémentaires par la formule

$$\forall a, b, m \in M_n, \forall x \in X, \quad a.(m \otimes x).b = (amb) \otimes x.$$

Si  $x \in M_n(X)$  et  $y \in M_m(X)$ , on note  $x \oplus y$  l'élément de  $M_{n+m}(X)$  diagonal par blocs défini à partir de  $x$  et  $y$ . Dans [Ru], Ruan établit une caractérisation abstraite des espaces d'opérateurs :

Soit  $X$  un espace de Banach équipé pour chaque  $n \geq 1$  d'une norme sur  $M_n(X)$  tel que

$$\begin{aligned} (R1) \quad & \forall a, b \in M_n \forall x \in M_n(X) \quad \|a.x.b\|_n \leq \|a\|_n \|x\|_n \|b\|_n, \\ (R2) \quad & \forall x \in M_n(X), y \in M_m(X) \quad \|x \oplus y\|_{n+m} = \max\{\|x\|_n, \|y\|_m\}, \end{aligned}$$

alors  $X$  peut être réalisé comme un espace d'opérateurs.

Ce théorème est très utile car il permet de parler d'espaces d'opérateurs sans en avoir de réalisations concrètes. On peut ainsi définir pour  $Y \subset X$  espaces d'opérateurs une structure d'espace d'opérateurs sur le quotient  $X/Y$  par les identifications algébriques

$$M_n(X/Y) = M_n(X)/M_n(Y).$$

Un autre exemple, l'ensemble des applications complètement bornées de  $X$  dans  $Y$  que l'on note  $CB(X, Y)$  est un espace d'opérateurs via

$$M_n(CB(X, Y)) = CB(X, M_n(Y)),$$

dans le cas  $Y = \mathbb{C}$ , on définit ainsi une structure d'espace d'opérateurs sur  $X^*$  le dual de  $X$ . On procède de même pour équiper d'une structure d'espace d'opérateurs les sous-espaces d'un espace d'opérateurs. Les sommes directes au sens  $\ell_\infty$  sont étendues à cette classe via les identifications

$$M_n(\ell_\infty(E_i)) = \ell_\infty(M_n(E_i)),$$

pour une famille d'espaces d'opérateurs  $(E_i)$ .

La plupart des notions de théorie des espaces de Banach ont ainsi leur analogue ; une application linéaire  $u : X \rightarrow Y$  entre deux espaces d'opérateurs  $X$  et  $Y$  est dite complètement isomorphique si elle est un isomorphisme pour les espaces de Banach sous-jacents et si de plus  $\|u\|_{cb} \cdot \|u^{-1}\|_{cb} \leq C$  pour une certaine constante  $C$ . Dans le cas où  $C = 1$ ,  $u$  est alors un isométrie complète.

Si  $X$  est un espace de Banach, il existe en général plusieurs plongements de  $X$  dans  $B(H)$ . Parmi toutes ces structures d'espaces d'opérateurs, deux sont extrémales. La plus petite structure d'espace d'opérateurs sur  $X$  est notée  $\min X$ , elle est définie par le plongement isométrique canonique

$$X \subset \mathcal{C}(B_{X^*})$$

de  $X$  dans les fonctions continues sur la boule unité de son dual (en fait, on peut remplacer  $\mathcal{C}(B_{X^*})$  par n'importe quelle  $C^*$ -algèbre commutative). La propriété minimale est la suivante :

Pour toute application  $u : Y \rightarrow X$  bornée (du point de vue banachique) d'un espace d'opérateurs  $Y$  dans un Banach  $X$ , l'application  $u : Y \rightarrow \min X$  est complètement bornée et  $\|u\|_{cb} = \|u\|$ .

La structure d'espace d'opérateurs maximale sur  $X$  notée  $\max X$  est définie à l'aide du théorème de Ruan de la manière suivante, pour  $x \in M_n(X)$  :

$$\|x\|_n = \sup \{ \|(Id_{M_n} \otimes u)(x)\|; u : X \rightarrow B(H) \mid \|u\| \leq 1 \}$$

Cette définition implique immédiatement que pour toute application bornée de  $X$  dans un espace d'opérateurs  $Y$ ,  $u : \max X \rightarrow Y$  est complètement bornée avec  $\|u\|_{cb} = \|u\|$ .

Les notions de structures minimales et maximales sont duales dans le sens où complètement isométriquement on a les identités (voir [Bl] )

$$(\max X)^* = \min(X^*) \quad \text{et} \quad (\min X)^* = \max(X^*).$$

Si  $X \subset B(H)$  et  $Y \subset B(K)$  sont des espaces d'opérateurs,  $X \otimes_{\min} Y$  est la fermeture en norme du produit tensoriel algébrique  $X \otimes Y \subset B(H \otimes_2 K)$ . De cette définition, il vient  $M_n(X) = M_n \otimes_{\min} X$ . Parmi les propriétés élémentaires, on peut citer que si  $u : X \rightarrow X'$  est complètement bornée, alors  $u \otimes Id_Y$  est complètement bornée de  $X \otimes_{\min} Y$  dans  $X' \otimes_{\min} Y$  avec  $\|u \otimes Id_Y\|_{cb} = \|u\|_{cb}$ . Tout élément  $x \in X \otimes_{\min} Y$  peut être vu comme une application  $v : X^* \rightarrow Y$  et on a

$$\|v\|_{cb} = \|x\|_{X \otimes_{\min} Y}.$$

## 1.2 $Q$ -espaces

### 1.2.1 Définitions

Les exemples les "plus simples" d'espaces d'opérateurs sont sans doute les espaces minimaux ; la plupart de leurs propriétés découlent des résultats de la théorie des espaces de Banach. Il est clair que les espaces minimaux sont stables par passage aux sous-espaces. À l'aide des opérations algébriques élémentaires, la première classe que l'on peut construire à partir de ces espaces minimaux sont les  $Q$ -espaces :

**Définition 1.2.1** *Un espace d'opérateurs  $E$  est un  $Q$ -espace si  $E$  est quotient au sens des espaces d'opérateurs d'un espace minimal.*

Comme conséquence directe de cette définition :

**Proposition 1.2.2** *Les  $Q$ -espaces sont stables par passage aux sous-espaces et par passage aux quotients.*

En effet, si  $E = (\min X)/(\min Y)$  est un  $Q$ -espace et  $\pi : \min X \rightarrow E$  désigne l'application quotient, alors si  $F \subset E$ , en tant qu'espace d'opérateurs on a l'identification  $F = (\min \pi^{-1}(F))/(\min Y)$  par stabilité des espaces minimaux pour l'inclusion. De même  $E/F = (\min X)/(\min \pi^{-1}(F))$ .

**Proposition 1.2.3** *Si  $(E_i)_{i \in I}$  est une famille de  $Q$ -espaces alors  $\ell_{\infty}((E_i))$  est un  $Q$ -espace.*

Il s'agit juste d'une conséquence de la définition des sommes directes  $\ell_{\infty}$  et de l'identité

$$\ell_{\infty}\left(\left(\min X_i\right)/\left(\min Y_i\right)\right) = \ell_{\infty}(\min X_i)/\ell_{\infty}(\min Y_i).$$

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille d'espace d'opérateurs et  $\mathfrak{U}$  un ultrafiltre sur  $I$ , on pose

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{U}} = \{(x_i) \in \ell_{\infty}((E_i)) \mid \lim_{\mathfrak{U}} \|x_i\| = 0\}.$$

L'ultraproduit  $\prod E_i/\mathfrak{U}$  des  $(E_i)$  suivant  $\mathfrak{U}$  en tant qu'espace d'opérateurs est le quotient

$$\ell_{\infty}((E_i))/\mathcal{N}_{\mathfrak{U}}.$$

Des propositions précédentes, il découle

**Proposition 1.2.4** *Un ultraproduit de  $Q$ -espaces est un  $Q$ -espace.*

Les autres propriétés de bases seront étudiées un peu plus loin.

Un des problèmes majeurs dans la catégorie des  $Q$ -espaces est l'absence de dualité. Si  $E$  est un  $Q$ -espace,  $E^*$  n'est pas (en général) un  $Q$ -espace (voir la fin de ce chapitre). Les espaces duaux des  $Q$ -espaces forment la classe des espaces sous-maximaux, les sous-espaces des espaces maximaux, ils sont introduits et étudiés dans [Oi].

Parmi les espaces d'opérateurs  $B(H)$  a un rôle particulier, il est universellement injectif ; toute application linéaire complètement bornée d'un espace d'opérateurs  $E \subset F$  dans  $B(H)$

admet une extension à  $F$  tout entier de même norme, c'est le théorème de Wittstock et  $B(\ell_2)$  a également la propriété de contenir tout espace d'opérateurs séparable. Parmi les espaces minimaux  $\ell_\infty$  a ces deux propriétés, mais il n'existe pas de tel analogue pour les  $Q$ -espaces ce qui pose aussi d'énormes difficultés.

### 1.2.2 Espaces min et $\max_Q$

Les constructions des structures d'espace d'opérateurs extrémales pour un espace de Banach  $X$  évoquées dans l'introduction admettent des analogues si l'on se restreint aux  $Q$ -espaces.

Les espaces minimaux étant des  $Q$ -espaces, la plus petite structure de  $Q$ -espace que l'on peut mettre sur  $X$  est donc  $\min X$ .

Pour la structure maximale, on copie la définition des espaces d'opérateurs :

**Définition 1.2.5** Soit  $X$  un espace de Banach, on définit une structure de  $Q$ -espace sur  $X$  notée  $\max_Q(X)$  en l'équipant de la famille de norme :

$$\forall x \in M_n(X) \quad \|x\|_n = \sup \{ \|Id_{M_n} \otimes u(x)\|; u : X \rightarrow E \mid E \text{ } Q\text{-espace et } \|u\| \leq 1 \}$$

Dans le sup,  $E$  est n'importe quel  $Q$ -espace et  $u$  n'importe quelle application contractante de  $X$  dans  $E$ .

Il faut justifier que  $\max_Q(X)$  est bien un  $Q$ -espace. C'est la première illustration du manque d'objet universel canonique. En fait, connaissant la cardinalité de  $X$ , on peut restreindre le sup dans la définition à un ensemble  $\mathcal{E}$  de  $Q$ -espaces  $E$ . On note

$$F = \bigoplus_{E \in \mathcal{E}}^\infty (\bigoplus_{u: X \rightarrow E, \|u\| \leq 1}^\infty E),$$

c'est un  $Q$ -espace et  $\max_Q(X)$  est alors complètement isométrique au sous-espace de  $F$  image de  $X$  par l'application

$$\begin{cases} X & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & \bigoplus_{E \in \mathcal{E}} (\bigoplus_{u: X \rightarrow E, \|u\| \leq 1} u(x)) \end{cases}$$

De cette définition, la propriété de maximalité est évidente :

**Proposition 1.2.6** Soient  $X$  un espace de Banach,  $E$  un  $Q$ -espace et  $u$  une application bornée de  $X$  dans  $E$ , alors  $u : \max_Q(X) \rightarrow E$  est complètement bornée et  $\|u\|_{cb} = \|u\|$ .

Une première caractérisation de  $\max_Q$  est donnée par

**Proposition 1.2.7** Un  $Q$ -espace  $E$  est maximal, i.e.  $E = \max_Q E$  si et seulement si  $E$  est quotient de  $\min \ell_1^I$  pour un certain ensemble  $I$ .

*Preuve* : La démonstration repose sur deux propriétés bien connues des espaces  $\ell_1$  ; tout espace de Banach est quotient d'un espace  $\ell_1^I$  pour un certain ensemble  $I$  et toute application de  $\ell_1^I$  dans un quotient admet un relèvement, plus précisément :

Soit  $u : \ell_1^I \rightarrow E/F$  une application bornée et  $\epsilon > 0$ , alors il existe une application  $\tilde{u} : \ell_1^I \rightarrow E$  telle que  $\|\tilde{u}\| \leq (1 + \epsilon)\|u\|$  et  $\pi\tilde{u} = u$  où  $\pi : E \rightarrow E/F$  est l'application quotient.

Supposons que  $E$  soit un quotient de  $\min(\ell_1^I)$  et soit  $u : E \rightarrow Q$  une application bornée de  $E$  dans un  $Q$ -espace  $Q = (\min X)/(\min Y)$ . On note  $\pi_E$  et  $\pi_Q$  les applications quotient sur  $E$  et  $Q$ . On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \min(\ell_1^I) & \xrightarrow{\phi} & \min X \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \pi_Q \\ E & \xrightarrow{u} & Q \end{array}$$



où  $\phi$  est un relèvement (banachique) de  $u\pi_E$  donné par la propriété de relèvement de  $\ell_1^I$  de norme inférieure à  $(1+\epsilon)\|u\|$ ,  $\epsilon$  étant fixé arbitrairement. On peut maintenant montrer que  $u$  est complètement bornée ; soit  $x \in M_n(E)$ , il existe  $\tilde{x} \in M_n(\min(\ell_1^I))$  un relèvement de  $x$  tel que  $\|\tilde{x}\| \leq (1+\epsilon)\|x\|$ , on a l'égalité  $(Id_{M_n} \otimes u)(x) = (Id_{M_n} \otimes (\pi_Q \phi))(\tilde{x})$  car le diagramme commute et comme  $\phi$  est à valeurs dans un espace minimal elle est complètement bornée, les applications quotient étant complètement contractives, on en déduit :

$$\|(Id_{M_n} \otimes u)(x)\| \leq (1+\epsilon)^2 \|x\|.$$

Ceci étant valable pour tout  $\epsilon$ ,  $u$  est complètement bornée et  $\|u\|_{cb} \leq \|u\|$ . Pour conclure, on applique ce résultat pour  $Q = \max_Q(E)$  et  $u$  l'identité, par définition de  $\max_Q$ ,  $Id : \max_Q(E) \rightarrow E$  est complètement contractante, on vient de voir que  $Id : E \rightarrow \max_Q(E)$  l'est aussi, donc l'identité est complètement isométrique.

On vient de montrer que si, comme  $Q$ -espace,  $E$  est quotient de  $\min \ell_1^I$  alors  $E$  est maximal pour les  $Q$ -espaces. Pour la réciproque, par la propriété d'universalité de  $\ell_1$ , le Banach sous-jacent à  $E$  est quotient d'un certain  $\ell_1^I$  et ainsi peut être équipé d'une structure d'espace d'opérateurs quotient de  $\min(\ell_1^I)$ , et donc en appliquant le résultat précédent,  $\max_Q(E)$  est un quotient de  $\min(\ell_1^I)$ .  $\square$

Un corollaire évident :

**Corollaire 1.2.8** *Il existe une unique structure de  $Q$ -espace sur  $\ell_1^I$ .*

En effet, par la proposition précédente toute structure sur  $\ell_1^I$  doit être complètement isométrique à  $\max_Q(\ell_1^I)$ . En fait, on peut remplacer  $\ell_1^I$  par n'importe quel Banach ayant la propriété de relèvement.

On retrouvera dans la suite ce genre de raisonnement qui utilise les propriétés universelles. En utilisant justement cette propriété de maximalité, Paulsen dans [Pa1] a établi une formule pour calculer la norme d'un élément dans  $\max(E)$ , on peut faire de même dans le cadre des  $Q$ -espaces :

**Théorème 1.2.9** *Soient  $X$  un espace de Banach et  $x \in M_n(X)$  alors*

$$\|x\|_{M_n(\max_Q(X))} = \inf \{ \|A\|_{M_p} \|B\|_{M_p} (\max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_X) \|v\|_{M_p \rightarrow M_n} \mid x = (v \otimes Id_X)(A \cdot \text{diag}(x_i) \cdot B) \}$$

où l'infimum parcourt toutes les possibilités de décomposer la matrice  $x$ ,  $p$  est quelconque et  $\text{diag}(x_i)$  est la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux les  $x_i$ .

*Preuve* : Pour prouver ce théorème, il faut montrer qu'ainsi on définit bien une structure de  $Q$ -espace sur  $X$  et qu'elle est maximale. Commençons par montrer qu'il s'agit bien d'une structure d'espace d'opérateurs, pour cela on montre que les axiomes (R1) et (R2) de Ruan sont satisfaits. On note  $\alpha$  la famille de "normes" construites dans le théorème. Il est clair que cet infimum est bien défini car il existe au moins une façon de décomposer  $x$  sous la forme voulue.

- Pour (R1), on considère une décomposition de  $x \in M_n(X)$  sous la forme  $x = (v \otimes Id_X)(A \cdot \text{diag}(x_i) \cdot B)$  avec

$$\|A\|_{M_p} \|B\|_{M_p} (\max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_X) \|v\|_{M_p \rightarrow M_n} \leq (1+\epsilon) \|x\|_\alpha.$$

Soient  $C$  et  $D$  des matrices de tailles  $n$ , on doit montrer que

$$\|C \cdot x \cdot D\|_\alpha \leq \|C\| \|x\|_\alpha \|D\|.$$

Il suffit de remarquer que l'on a

$$C.x.D = ((C.v.D) \otimes Id_X)(A.\text{diag}(x_i).B)$$

où  $C.v.D : M_p \rightarrow M_n$  est l'application  $v$  suivie de la multiplication à gauche par  $C$  et à droite par  $D$ , comme  $\|C.v.D\|_{M_p \rightarrow M_n} \leq \|v\|_{M_p \rightarrow M_n} \|C\| \|D\|$ , on déduit

$$\|C.x.D\|_\alpha \leq (1 + \epsilon) \|C\| \|x\|_\alpha \|D\|.$$

ce qui termine la première vérification car  $\epsilon$  est arbitraire.

- Pour  $(R_2)$ , on prend  $x \in M_n(X)$  et  $y \in M_m(X)$ , pour chaque  $\epsilon > 0$ , on peut trouver des décompositions

$$\begin{aligned} x &= (v \otimes Id_X)(A.\text{diag}(x_i).B) \\ y &= (w \otimes Id_X)(C.\text{diag}(y_i).D) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \|A\|_{M_p} \|B\|_{M_p} (\max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_X) \|v\|_{M_p \rightarrow M_n} &\leq (1 + \epsilon) \|x\|_\alpha \\ \|C\|_{M_q} \|D\|_{M_q} (\max_{1 \leq i \leq q} \|y_i\|_X) \|w\|_{M_q \rightarrow M_m} &\leq (1 + \epsilon) \|y\|_\alpha \end{aligned}$$

On peut alors décomposer  $x \oplus y$  sous la forme

$$x \oplus y = ((v \oplus w) \otimes Id_x)((A \oplus C)(\text{diag}(x_i) \oplus \text{diag}(y_i))(B \oplus D))$$

ce qui donne

$$\|x \oplus y\|_\alpha \leq (1 + \epsilon) \max\{\|x\|_\alpha, \|y\|_\alpha\},$$

et termine la preuve pour  $(R_2)$ .

On a montré que  $(R_1)$  et  $(R_2)$  sont satisfaits, pour conclure que l'on obtient bien une structure d'espace d'opérateurs sur  $X$ , il faut s'assurer que l'on a bien construit des normes et que la norme obtenue sur  $X$  correspond à la norme initiale.

Si  $x \in X$ , considérons une décomposition de  $x = (v \otimes Id_X)(A.\text{diag}(x_i).B)$  toujours avec la même estimation, alors pour tout  $f \in X^*$ , on a

$$\langle x, f \rangle = v(A.\text{diag}(\langle x_i, f \rangle).B) \leq \|A\|_{M_p} \|B\|_{M_p} (\max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_X) \|v\|_{M_p \rightarrow \mathbb{C}}$$

et donc  $\|x\|_\alpha \geq \|x\|$ , comme  $x$  admet une décomposition sous la forme  $x = (Id_{\mathbb{C}} \otimes Id_X)((1).(x).(1))$ , on a l'inégalité inverse.

Le non-dégénérescence provient du fait ci-dessus et  $(R_1)$ ,  $(R_2)$ ; en effet, grâce à  $(R_1)$  et  $(R_2)$ , on a  $\|x_{i,j}\| \leq \|x\|_\alpha$  pour  $x = (x_{i,j}) \in M_n(X)$ .

L'homogénéité est immédiate, la sous-additivité provient de  $(R_1)$  et  $(R_2)$ , on a

$$x + y = \begin{pmatrix} \|x\|_\alpha^{\frac{1}{2}} Id_{M_n} & \|y\|_\alpha^{\frac{1}{2}} Id_{M_n} \end{pmatrix} \cdot \left( \frac{x}{\|x\|_\alpha} \oplus \frac{y}{\|y\|_\alpha} \right) \cdot \begin{pmatrix} \|x\|_\alpha^{\frac{1}{2}} Id_{M_n} \\ \|y\|_\alpha^{\frac{1}{2}} Id_{M_n} \end{pmatrix}$$

d'où  $\|x + y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$ .

Il reste à s'assurer que l'on a bien une structure de  $Q$ -espace et qu'elle est maximale, pour cela on utilise la caractérisation de Junge qui sera montrée dans la sous-section suivante théorème 1.2.11 (ou plutôt son corollaire).

Soit donc  $T$  une application de  $M_n$  dans lui-même, il faut vérifier que  $\|T \otimes Id_X : M_n(X) \rightarrow M_n(X)\| \leq \|T : M_n \rightarrow M_n\|$  :

Soit  $x \in M_n(X)$  décomposé sous la forme  $x = (v \otimes Id_X)(A.\text{diag}(x_i).B)$ , on a

$$(T \otimes Id_X)(x) = (Tv \otimes Id_X)(A.\text{diag}(x_i).B)$$

d'où  $\|(T \otimes Id_X)(x)\|_\alpha \leq \|T\| \|x\|_\alpha$  et donc la structure  $\alpha$  donne bien un  $Q$ -espace.

La maximalité provient elle-aussi du théorème de Junge (dans l'autre sens) appliqué pour  $T = v$ , en effet pour toute structure  $\beta$  de  $Q$ -espace sur  $X$ , on a

$$\|x\|_\beta \leq \|v\| \|A.\text{diag}(x_i).B\|_\beta$$

mais pour toute structure d'espace d'opérateurs par (R1) et (R2), on a

$$\|A.\text{diag}(x_i).B\|_\beta \leq \|A\|_{M_p} \|B\|_{M_p} (\max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_X).$$

Ce qui termine la preuve.  $\square$

**Remarque :** Ce théorème est formulé et démontré à la manière de [Pa1] ; il peut se déduire de la proposition 1.2.7 sans recourir au théorème 1.2.11 ; si l'on part d'une décomposition comme dans le théorème, on peut en définir une nouvelle en remplaçant  $v$  par  $\tilde{v} = v(A.B)$  ainsi que  $A$  et  $B$  par l'identité, la restriction de  $\tilde{v}$  à la diagonale de  $M_p$  est alors une application bornée de  $\min(\ell_\infty^p) \rightarrow M_n$  et donc

$$\|x\|_{M_n(\max_Q(X))} = \inf\{(\max_{1 \leq i \leq p} \|x_i\|_X) \|v\|_{\ell_\infty^p \rightarrow M_n} \mid x = (v \otimes Id_X)(\text{diag}(x_i))\}$$

ce qui traduit que  $\max_Q(X)$  est un quotient d'un espace de type  $\min \ell_1^I$ , c'est le même argument que celui de la preuve du théorème de Junge (en remplaçant  $S^1$  par  $\ell_1$ ) que l'on va donner maintenant.

### 1.2.3 Caractérisation et exemples

On utilise ici la caractérisation obtenue par Junge dans [Ju] pour obtenir quelques propriétés supplémentaires des  $Q$ -espaces et comparer les espaces d'opérateurs classiques à des  $Q$ -espaces.

Si  $E$  et  $F$  sont des espaces d'opérateurs complètement isomorphes, il est possible de définir un analogue de la distance de Banach-Mazur entre  $E$  et  $F$  au sens complètement borné :

$$d_{cb}(E, F) = \inf\{\|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} ; u : E \rightarrow F \text{ isomorphisme}\}.$$

Dans le même ordre d'idée, on peut mesurer la distance d'un espace d'opérateurs aux  $Q$ -espaces :

$$d_Q(E) = \inf\{d_{cb}(E, F) ; F \text{ } Q\text{-espace}\}.$$

Une première remarque à partir de cette définition :

**Proposition 1.2.10**  *$E$  est un  $Q$ -espace si et seulement si  $d_Q(E) = 1$ .*

*Preuve :* Cela provient de la stabilité des  $Q$ -espaces par ultraproduct. Si  $d_Q(E) = 1$ , alors pour tout  $n \geq 1$ , il existe un  $Q$ -espace  $E_n$  et un isomorphisme complet  $u_n : E \rightarrow E_n$  tels que  $\|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} \leq 1 + \frac{1}{n}$ . Soit  $\mathfrak{U}$  un ultrafiltre sur  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $F = \Pi(E_n)/\mathfrak{U}$  et  $u : E \rightarrow F$  l'application produit obtenue à partir des  $u_n$ . Alors  $E$  est complètement isométrique à son image par  $u$  ; en effet, pour tout  $k$  et  $x \in M_k(E)$  :

$$\|(Id_k \otimes u)(x)\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|(Id_k \otimes u_n)(x)\| = \|x\|.$$

Comme  $F$  est un  $Q$ -espace,  $E$  l'est aussi.  $\square$

La caractérisation de Junge est la suivante :

**Théorème 1.2.11** *Soit  $E$  un espace d'opérateurs, alors  $d_Q(E)$  est la plus petite constante  $C$  telle que pour tout entier  $n \geq 1$  et toute application  $T : M_n \rightarrow M_n$ ,*

$$\|T \otimes Id_E : M_n(E) \rightarrow M_n(E)\| \leq C \|T\|.$$

Compte tenu de la proposition précédente :

**Corollaire 1.2.12**  *$E$  est un  $Q$ -espace si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite avec  $C = 1$ .*

*Preuve* : Commençons par démontrer la réciproque. Soit  $E = \min(X)/\min(Y)$  un  $Q$ -espace (et  $\pi$  l'application quotient), montrons que pour tout  $T : M_n \rightarrow M_n$ , on a  $\|T \otimes Id_E : M_n(E) \rightarrow M_n(E)\| \leq \|T\|$ .

Un élément  $x \in M_n(E)$ , se relève par définition, pour tout  $\epsilon > 0$ , en un élément  $\tilde{x} \in M_n(\min(X))$  tel que  $\|\tilde{x}\| \leq (1+\epsilon)\|x\|$ . Comme  $(T \otimes Id_E)(x) = (Id_{M_n} \otimes \pi)(T \otimes Id_{\min X})(\tilde{x})$ , il suffit de montrer le résultat pour  $\min(X)$ . Mais, en notant  $\tilde{x}_{i,j}$  les entrées de  $\tilde{x}$

$$\|\tilde{x}\| = \sup_{f \in B_{X^*}} \|(\langle f, \tilde{x}_{i,j} \rangle)\|_{M_n}$$

on a

$$\|(T \otimes Id_X)(x)\| \leq \|(T \otimes Id_X)(\tilde{x})\| = \sup_{f \in B_{X^*}} \|T(\langle f, \tilde{x}_{i,j} \rangle)\|_{M_n} \leq \|T\| \|\tilde{x}\|.$$

Pour la version complètement isomorphique (lorsque  $C > 1$ ), il suffit de remarquer que si  $d_{cb}(E, F) \leq C$ , alors

$$\|T \otimes Id_E : M_n(E) \rightarrow M_n(E)\| \leq C \|T \otimes Id_F : M_n(F) \rightarrow M_n(F)\|.$$

On rappelle que  $S_1^n = M_n^*$ . Pour le sens direct, on a besoin du résultat suivant et de sa preuve, observé pour la première fois par Blecher dans [Bl] :

**Lemme 1.2.13** *Soit  $E$  un espace d'opérateurs, alors il existe un ensemble  $I$  et pour chaque  $i \in I$  un entier  $n_i \geq 1$  tels que  $E$  soit un quotient au sens espaces d'opérateurs de  $\ell_1^I((S_1^{n_i}))$ .*

*Preuve* : Pour le voir, il suffit de prendre  $I = \cup_p \{\phi \in M_p(E), \|\phi\| \leq 1\}$ , tout élément  $i \in I$  est un élément de  $M_{n_i}(E)$  dans un certain  $n_i$ ,  $i$  peut être vu comme une application de  $S_1^{n_i}$  dans  $E$ . On définit alors

$$\rho : \begin{array}{ccc} \ell_1^I((S_1^{n_i})_{i \in I}) & \rightarrow & E \\ (s_i) & \mapsto & \sum_{i \in I} i(s_i) \end{array}$$

$\rho$  est complètement contractante par la définition des sommes  $\ell_1$  et le fait que pour chaque  $i$ ,  $\|i\|_{cb} \leq 1$ .

Si  $x \in M_n(E)$  est de norme plus petite que 1, l'élément  $\tilde{x}$  de  $M_n(\ell_1^I((S_1^{n_i})))$  ayant toutes ses composantes en  $i$  nulles sauf celle correspondant à  $x$  égale à l'identité de  $S_1^{n_i}$  (c'est un élément de  $M_n(S_1^{n_i})$ ), vérifie  $(Id_{M_n} \otimes \rho)(\tilde{x}) = x$  et  $\|\tilde{x}\| \leq 1$ , ce qui prouve que  $Id_{M_n} \otimes \rho$  est une application quotient pour tout  $n$ .  $\square$

Soit  $E$  un espace d'opérateurs vérifiant pour toute application  $T : M_n \rightarrow M_n$  :

$$\|T \otimes Id_E : M_n(E) \rightarrow M_n(E)\| \leq C \|T\| \quad (*).$$

On remarque tout d'abord que l'on peut remplacer  $T : M_n \rightarrow M_n$  par  $T : M_n \rightarrow X$  et  $M_n(E)$  par  $X \otimes_{\min} E$  pour tout espace d'opérateurs  $X$ . Cela peut être vu comme une conséquence du lemme, puisque  $X^*$  est un quotient d'un espace  $\ell_1^I((S_1^{n_i}))$ ,  $X^{**}$  se plonge

complètement isométriquement dans un espace de type  $\oplus_{\infty} M_{n_i}$  donc  $X$  aussi ; comme  $M_p$  est complètement complémenté dans  $M_q$  si  $p < q$ , (\*) est satisfaite pour  $T : M_n \rightarrow M_m$  pour n'importe quel  $m$ , et donc pour  $T : M_n \rightarrow \oplus_{\infty} M_{n_i}$  par définition de la somme directe et enfin (\*) est héréditaire pour l'espace d'arrivée. De même, on peut remplacer sans peine le  $M_n$  de l'espace de départ par  $\ell_{\infty}^F((M_{n_i}))$  pour  $F$  finie car cet espace est complètement complémenté dans  $M_{\sum_{i \in F} n_i}$ .

L'espace  $E$  est d'après le lemme quotient de  $\ell_1^I((S_1^{n_i}))$  avec  $I$  décrit précédemment et  $\rho$  l'application quotient. Soit  $F$  une partie finie de  $I$ , on note  $\rho_F$  la restriction de  $\rho$  au sous espace complètement complémenté  $\ell_1^F((S_1^{n_i}))$  de  $\ell_1^I((S_1^{n_i}))$  (on note  $P_F$  la projection sur cet espace). On applique la généralisation de (\*) pour  $T = Id : \ell_{\infty}^F((M_{n_i})) \rightarrow \max(\ell_{\infty}^F((M_{n_i})))$  (qui est bornée en norme par 1) que l'on teste sur  $\rho_F : \ell_1^F((S_1^{n_i})) \rightarrow E$  de norme plus petite que 1. On en déduit que  $\rho_F : \min(\ell_1^F((S_1^{n_i}))) \rightarrow E$  est complètement bornée de norme plus petite que  $C$ , donc de même pour  $\rho P_F : \min(\ell_1^I((S_1^{n_i}))) \rightarrow E$ .

La famille d'applications  $(\rho P_F : \min(\ell_1^I((S_1^{n_i}))) \rightarrow E)$  est uniformément bornée en norme  $cb$ , comme pour tout  $x \in \min(\ell_1^I((S_1^{n_i})))$ ,  $P_F(x)$  tend vers  $x$  le long du filtre des parties finies, on en déduit que

$$\|\rho : \min(\ell_1^I((S_1^{n_i}))) \rightarrow E\|_{cb} \leq C.$$

En résumé on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \min(\ell_1^I((S_1^{n_i}))) & \xleftarrow{Id} & \ell_1^I((S_1^{n_i})) \\ & \searrow \rho & \swarrow \rho \\ & E & \end{array}$$

Soit  $I = \text{Ker } \rho$ , en tant qu'espaces d'opérateurs,  $E = \ell_1^I((S_1^{n_i}))/I$ , comme  $Id : \ell_1^I((S_1^{n_i})) \rightarrow \min(\ell_1^I((S_1^{n_i})))$  est complètement contractante  $Id : E \rightarrow \min(\ell_1^I((S_1^{n_i}))/\min(I))$  est complètement contractante et l'estimation de la norme de  $\rho$  donne

$$\|Id : \min(\ell_1^I((S_1^{n_i}))/\min(I)) \rightarrow E\|_{cb} \leq C.$$

Et donc  $d_Q(E) \leq C$ . □

**Remarques :** Il découle de la preuve que si  $E$  est un  $Q$ -espace alors isométriquement

$$E \otimes_{\min} M_n = E \otimes_{\min} \max(M_n).$$

Dans le théorème, on peut remplacer  $M_n$ , par n'importe quel espace d'opérateurs  $Z$  1-complémenté (en tant que Banach) dans  $B(H)$  (on note  $P$  la projection). On peut raisonner ainsi : si  $E$  est un  $Q$ -espace alors son dual  $E^*$  est sous-espace d'un espace maximal  $\max(X)$ , soit  $T$  une application bornée de  $Z$  dans  $B(K)$  et soit  $v$  un élément de la boule unité de  $Z \otimes_{\min} E$  (on peut supposer que  $v$  est de rang fini), alors  $v$  peut être vu comme une application complètement contractante de  $E^*$  dans  $Z \subset B(H)$  et donc admet une extension complètement contractante  $\tilde{v} : \max(X) \rightarrow B(H)$ .  $TP\tilde{v}$  est une application bornée par  $\|T\|$ , par la propriété de maximalité, elle est donc complètement bornée, il en va de même pour sa restriction à  $E^*$  qui est exactement  $(T \otimes Id_E)(v)$ .

Passons à quelques applications de ce théorème :

**Corollaire 1.2.14** *Si  $E$  et  $F$  forment un couple compatible de  $Q$ -espaces, alors  $E + F$  est un  $Q$ -espace.*

C'est une conséquence de l'identité  $M_n(E + F) = M_n(E) + M_n(F)$ .

**Corollaire 1.2.15** *La classe des  $Q$ -espaces est stable par interpolation complexe. Plus précisément si  $E_0$  et  $E_1$  forment un couple compatible d'espaces d'opérateurs alors*

$$\forall 0 < \theta < 1, \quad d_Q(E_\theta) \leq d_Q(E_0)^{1-\theta} d_Q(E_1)^\theta.$$

*Preuve* : La démonstration de ce résultat est directe. Par définition

$$M_n((E_0, E_1)_\theta) = (M_n(E_0), M_n(E_1))_\theta,$$

si  $T : M_n \rightarrow M_n$ , par les propriétés de l'interpolation

$$\begin{aligned} \|T \otimes Id : M_n((E_0, E_1)_\theta) \rightarrow M_n((E_0, E_1)_\theta)\| &\leq \|T : M_n(E_0) \rightarrow M_n(E_0)\|^{1-\theta} \\ &\quad \|T : M_n(E_1) \rightarrow M_n(E_1)\|^\theta \\ &\leq d_Q(E_0)^{1-\theta} d_Q(E_1)^\theta \|T\| \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du sens direct du théorème 1.2.11 et par la réciproque de celui-ci, on obtient l'estimation du corollaire.  $\square$

On s'intéresse maintenant aux exemples classiques d'espaces d'opérateurs.  $R_n$  et  $C_n$  désignent les espaces hilbertiens de lignes et de colonnes dans  $M_n$  (c.a.d engendrés par  $\{e_{i,1}\}$  et  $\{e_{1,i}\}$ ).  $OH_n$  est l'espace d'opérateurs hilbertien introduit dans [Pi3] qui est  $(R_n, C_n)_{\frac{1}{2}}$ .  $\Phi_n$  est l'espace d'opérateurs engendré par les matrices de Clifford  $U_1, \dots, U_n$ , ce sont des unitaires autoadjoints et anticommuntant dans  $M_{2^n}$  et qui satisfont :

$$\begin{aligned} \cdot \forall \alpha_i \in \mathbb{C} \quad (\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}} &\leq \|\sum_{i=1}^n \alpha_i U_i\|_{M_{2^n}} \leq \sqrt{2} (\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \|\sum_{i=1}^n U_i \otimes U_i\|_{M_{2^n} \times 2^n} &= n \end{aligned}$$

**Remarque** : Les  $Q$ -espaces sont des espaces d'opérateurs symétriques dans le sens où  $E = E^{op}$ , c'est à dire que la transposition de  $M_n$  est isométrique sur  $M_n(E)$  et donc tout espace non symétrique ne peut être un  $Q$ -espace ce qui est illustré par les premières estimations suivantes :

**Corollaire 1.2.16** *On a les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned} \cdot d_Q(M_n) &= n & \cdot d_Q(R_n) &= d_Q(C_n) = n^{\frac{1}{2}} \\ \cdot d_Q(R_n \cap C_n) &\leq \sqrt{2} & \cdot d_Q(\Phi_n) &\approx n^{\frac{1}{2}} \\ \cdot d_Q(OH_n) &\approx n^{\frac{1}{4}} & \cdot d_Q(R_n + C_n) &\approx n^{\frac{1}{2}} \\ \cdot \sqrt{\log n} &\lesssim d_Q(M_n \cap M_n^{op}) \leq \sqrt{n} & \cdot d_Q(M_n + M_n^{op}) &\gtrsim \sqrt{n} \end{aligned}$$

*Preuve* :

- Pour  $M_n$ , on a  $d_{cb}(M_n, \min(M_n)) \leq n$ , il suffit de prendre l'identité formelle comme isomorphisme, en effet

$$\|(b_{i,j})\|_{M_n((B(H)))} \leq \left( \sum_{i,j=1}^n \|b_{i,j}\|_{B(H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n \max_{i,j} \|b_{i,j}\|_{B(H)} \leq n \|(b_{i,j})\|_{\min(M_n) \otimes B(H)}.$$

Pour l'autre estimation, on se sert du théorème 1.2.11 en choisissant pour  $T$  la transposition de  $M_n$ . Pour minorer  $C$ , on calcule

$$\left\| \sum_{i,j} e_{i,j} \otimes e_{j,i} \right\|_{M_n(M_n)} = 1 \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{i,j=1}^n e_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\|_{M_n(M_n)} = n,$$

d'où  $d_Q(M_n) \geq n$ , et par conséquent  $d_{cb}(M_n, \min(M_n)) = n$ .

- On raisonne de même pour  $C_n$  et  $R_n$ , en prenant pour  $T$  la transposition de  $M_n$  que l'on applique sur  $\sum_{i=1}^n e_{i,1} \otimes e_{1,i}$  pour trouver la majoration  $d_Q(R_n) \geq n^{\frac{1}{2}}$ . Pour la minoration, on utilise encore 1.2.11, soit  $T : M_p \rightarrow M_p$  :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n T(m_i) \otimes e_{1,i} \right\|_{M_p(R_n)} &= \left( \left\| \sum_{i=1}^n T(m_i) T(m_i)^* \right\|_{M_p} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \|m_i\|_{M_p}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{i=1}^n m_i \otimes e_{1,i} \right\|_{M_p(R_n)}. \end{aligned}$$

Et il vient  $d_Q(R_n) \leq n^{\frac{1}{2}}$ . Les calculs effectués pour  $M_n$  montrent en fait que

$$d_{cb}(\min(\ell_2^n), R_n) = n^{\frac{1}{2}}.$$

- Pour  $R_n \cap C_n$ , il s'agit exactement d'une forme faible de l'inégalité de Grothendieck non commutative (voir [Pi1] et [HP1]) :

Pour toute application linéaire bornée  $v$  entre deux  $C^*$ -algèbres  $A$  et  $B$ , on a

$$\|Id_{R_n \cap C_n} \otimes v\|_{(R_n \cap C_n) \otimes_{\min} A \rightarrow (R_n \cap C_n) \otimes_{\min} B} \leq \sqrt{2} \|v\|_{A \rightarrow B}.$$

- Pour minorer  $d_Q(\Phi_n)$ , on utilise l'application  $T : C_n \rightarrow M_{2n}$  qui envoie  $e_{i,1}$  sur  $U_i$ , cette application est bornée par  $\sqrt{2}$  et comme  $C_n$  est 1-complémenté dans  $M_n$ , on peut appliquer le théorème 1.2.11, on a :

$$\left\| \sum_i e_{i,1} \otimes U_i \right\| = n^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \left\| \sum_i T(e_{i,1}) \otimes U_i \right\| = n$$

soit  $d_Q(\Phi_n) \geq (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}$ . Pour la majoration, on montre que  $d_{cb}(\Phi_n, R_n \cap C_n) \approx n^{\frac{1}{2}}$ , on considère l'application précédente  $T : R_n \cap C_n \rightarrow \Phi_n$  telle que  $T((e_{1,i} \oplus e_{i,1})) = U_i$ . Par l'inégalité de Cauchy Schwarz pour les opérateurs, on a pour toute famille  $(m_i)$  dans  $M_p$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n U_i \otimes m_i \right\| &\leq \left\| \sum_{i=1}^n U_i U_i^* \otimes Id \right\|^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{i=1}^n Id \otimes m_i^* m_i \right\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{n} \left\| \sum_{i=1}^n (e_{1,i} \oplus e_{i,1}) \otimes m_i \right\|. \end{aligned}$$

Donc  $\|T\|_{cb} \leq \sqrt{n}$  et d'autre part comme les  $U_i$  anticommulent et sont autoadjoints  $\text{tr } U_i^* U_j = 0$  si  $i \neq j$  où  $\text{tr}$  est la trace normalisée et

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n U_i \otimes m_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i,j=1}^n U_i^* U_j \otimes m_i^* m_j \right\|^2 \\ &\geq \left\| \sum_{i,j=1}^n \text{tr}(U_i^* U_j) \otimes m_i^* m_j \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n m_i^* m_i \right\|. \end{aligned}$$

Donc  $T^{-1} : \Phi_n \rightarrow C_n$  est complètement contractante, en inversant les  $*$ , on obtient  $\|T^{-1} : \Phi_n \rightarrow R_n \cap C_n\|_{cb} \leq 1$ .

- On procède simultanément pour  $OH_n$  et  $R_n + C_n$ , comme  $OH_n = (R_n + C_n, R_n \cap C_n)_{\frac{1}{2}}$ , on a

$$d_Q(OH_n) \lesssim d_Q(R_n + C_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme l'identité formelle de  $\min(\ell_2)$  dans  $C_n$  a une norme  $cb$  plus petite que  $\sqrt{n}$  (voir plus haut), on a

$$d_Q(R_n + C_n) \leq d_{cb}(R_n + C_n, \min(\ell_2)) \leq \sqrt{n}.$$

Pour minorer  $d_Q(OH_n)$ , on utilise encore l'identité  $T : C_n \rightarrow \Phi_n$ . On note  $e_i$  une base orthonormée de  $OH_n$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n U_i \otimes e_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n U_i \otimes \overline{U_i} \right\|^2 = n \\ \left\| \sum_{i=1}^n e_{1,i} \otimes e_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n e_{1,i} \otimes \overline{e_{1,i}} \right\|^2 = \sqrt{n} \end{aligned}$$

d'où  $d_Q(OH_n) \lesssim n^{\frac{1}{4}}$ .

- Comme  $\phi_n$  est un espace symétrique, il est inclus dans  $M_{2n} \cap M_{2n}^{op}$  ce qui donne l'estimation inférieure pour ce dernier. Nous verrons dans la section suivante que  $(R_n \cap C_n) \otimes_{\min} (R_n \cap C_n) = M_n \cap M_n^{op} \cap R_{n^2} \cap C_{n^2}$  (voir [HP1]) est isomorphe uniformément en  $n$  à un  $Q$ -espace, la majoration de  $d_Q(M_{2n} \cap M_{2n}^{op})$  provient alors de  $d_{cb}(M_n \cap M_n^{op}, (R_n \cap C_n) \otimes_{\min} (R_n \cap C_n)) \leq \sqrt{n}$ .
- La minoration pour  $d_Q(M_n + M_n^{op})$  provient du fait que cet espace contient  $R_n + C_n$ .  $\square$

$R_n \cap C_n$  joue un rôle central pour les  $Q$ -espaces ce qui est illustré par le théorème suivant issu de [Pi3] (théorème 9.7) :

**Théorème 1.2.17** *Pour tout espace d'opérateurs  $E$  de dimension  $n$ , on a*

$$d_{cb}(E, R_n \cap C_n) \leq \sqrt{n}.$$

Ainsi

**Corollaire 1.2.18** *Pour tout espace d'opérateurs  $E$  de dimension  $n$ , on a*

$$d_Q(E) \leq \sqrt{2n}.$$

Les exemples ci-dessus montrent que ce résultat est asymptotiquement optimal.

On dispose de réalisations concrètes de  $R_n \cap C_n$  comme  $Q$ -espace. Soit  $H^\infty(\mathbb{T})$  le sous-espace de  $L^\infty(\mathbb{T})$  des fonctions ayant leurs coefficients de Fourier d'indice strictement négatif nuls, le quotient  $\min(L^\infty(\mathbb{T}))/\min(H^\infty(\mathbb{T}))$  est un  $Q$ -espace par définition et l'on dispose d'une réalisation concrète de celui-ci comme espace d'opérateurs. Une matrice de Hankel dans  $B(\ell_2(\mathbb{N}))$  est une matrice de la forme  $\sum_{n \geq 0} a_n \gamma_n$  avec  $\gamma_n = \sum_{i+j=n} e_{i,j}$ . L'ensemble des matrices de Hankel est noté  $\mathcal{H}$ . À toute fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{T}, M)$  l'ensemble des fonctions bornées préfaiblement mesurables à valeurs dans une algèbre de von Neumann  $M$ , on peut associer la matrice de Hankel à valeurs dans  $M$ ,  $\Gamma_f = \sum_{n \geq 0} \hat{f}(-n-1) \gamma_n$ , le théorème de Nehari-Sarason-Page affirme

**Théorème 1.2.19** *Les espaces d'opérateurs  $\mathcal{H}$  et  $\min(L^\infty(\mathbb{T}))/\min(H^\infty(\mathbb{T}))$  sont complètement isomorphes.*

*Plus précisément, si  $h = \sum_{n \geq 0} a_n \otimes \gamma_n$  est une matrice de Hankel à coefficients dans une algèbre de von Neumann  $M$ , alors il existe une fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{T}, M)$  telle que  $\Gamma_f = h$ .*

En remarquant que le sous-espace de  $\mathcal{H}$  engendré par  $(\gamma_{2^n})_{n \geq 0}$  est complètement complémenté dans  $\mathcal{H}$  et complètement isomorphe à  $R \cap C$ , on obtient une réalisation concrète de  $R \cap C$  comme  $Q$ -espace et une démonstration de l'inégalité de Grothendieck non commutative.



### 1.3 Produit minimal et Q-espaces

Dans cette section, on tente d'étudier les relations entre les Q-espaces et le produit tensoriel minimal. On reformule notamment un éventuel corollaire de la stabilité de la classe des Q-espaces pour ce produit tensoriel.

Commençons par les espaces minimaux, de la définition du produit tensoriel minimal, il découle que si  $X$  est un espace de Banach et  $E$  est un espace d'opérateurs alors isométriquement

$$\min(X) \otimes_{\min} E = X \otimes_{\lambda} E$$

où  $\otimes_{\lambda}$  est le produit tensoriel injectif des espaces de Banach. Comme première application de ce fait, on obtient que pour  $X$  et  $Y$  espaces de Banach

$$\min(X) \otimes_{\min} \min(Y) = \min(X \otimes_{\lambda} Y).$$

En effet, on a les identités isométriques :

$$\begin{aligned} M_n(\min(X \otimes_{\lambda} Y)) &= M_n \otimes_{\lambda} X \otimes_{\lambda} Y = M_n(\min(X)) \otimes_{\lambda} Y \\ &= M_n(\min(X)) \otimes_{\min} \min(Y) = M_n(\min(X) \otimes_{\min} \min(Y)). \end{aligned}$$

Comme généralisation

**Proposition 1.3.1** *Soient  $X$  un espace minimal et  $E$  un Q-espace alors  $\min(X) \otimes_{\min} E$  est un Q-espace.*

*Preuve* : C'est une conséquence de la caractérisation des Q-espaces du théorème 1.2.11. Comme  $X$  est minimal, il est inclus complètement isométriquement dans un certain  $\ell_{\infty}^I$ , puisque les Q-espaces sont stables par passage aux sous-espaces et la norme tensorielle minimale est injective, il suffit de considérer le cas  $X = \ell_{\infty}^I$ . Soit  $T$  une application de  $M_n$  dans lui-même bornée, alors  $T \otimes Id_{\ell_{\infty}^I} : \ell_{\infty}^I(M_n) \rightarrow \ell_{\infty}^I(M_n)$  est bornée par  $\|T\|$ . D'après la remarque suivant le théorème 1.2.11, on peut dans celui-ci remplacer  $M_n$  par n'importe quel espace d'opérateurs injectif, donc par  $\ell_{\infty}^I(M_n)$  et donc  $T \otimes Id_{\ell_{\infty}^I} \otimes Id_E$  est bornée de  $M_n(\ell_{\infty}^I \otimes_{\min} E)$  dans lui-même par  $\|T \otimes Id_{\ell_{\infty}^I}\| = \|T\|$ .  $\square$

**Remarque** : On aurait aussi pu utiliser

$$\ell_{\infty}^I(E/F) = \ell_{\infty}^I(E)/\ell_{\infty}^I(F).$$

Le cas de  $R \cap C$  est assez intéressant, en effet on peut extraire de [HP1]

**Proposition 1.3.2** *Soit  $n \geq 1$ , alors  $(R \cap C)^{\otimes_{\min}^n}$  est complètement isomorphe à un Q-espace.*

*Preuve* : On démontre ce résultat par récurrence, le cas  $n = 1$  a été traité dans la section précédente en utilisant l'inégalité de Grothendieck non commutative.

Supposons que  $(R \cap C)^{\otimes_{\min}^n}$  soit complètement isomorphe à un Q-espace.

$R \cap C$  est complètement complémenté dans  $M$ , l'algèbre de von Neumann du groupe libre à une infinité de générateurs, on note  $P$  la projection (voir [HP1]).

Soit  $T : M_n \rightarrow M_n$  une application linéaire bornée. Alors par hypothèse de récurrence  $T \otimes Id_{(R \cap C)^{\otimes_{\min}^n}}$  est bornée par  $\|T\| d_Q((R \cap C)^{\otimes_{\min}^n})$ . Donc  $T \otimes P^{\otimes n}$  de  $M_n(M^{\otimes_{\min}^n})$  dans lui-même est bornée car  $P$  est complètement bornée. Mais  $M_n(M^{\otimes_{\min}^n})$  est une  $C^*$ -algèbre, on peut donc appliquer l'inégalité de Grothendieck non commutative comme dans le cas  $n = 1$ , pour obtenir que  $T \otimes P^n \otimes Id_{R \cap C}$  est bornée et que l'on a

$$d_Q((R \cap C)^{\otimes_{\min}^{n+1}}) \leq \|P\|_{cb}^n \cdot d_Q((R \cap C)^{\otimes_{\min}^n}) \cdot d_Q(R \cap C).$$

En conclusion,  $(R \cap C)^{\otimes_{\min} n}$  est complètement isomorphe à un  $Q$ -espace pour tout entier  $n$ .  $\square$

La même démonstration, en remplaçant l'inégalité de Grothendieck non commutative par le théorème de Nehari-Sarason-Page (1.2.19) donne

**Théorème 1.3.3** *L'espace  $(R \cap C) \otimes_{\min} \mathcal{H}$  est isomorphe à un  $Q$ -espace.*

**Problème :** Est-ce que  $\mathcal{H} \otimes_{\min} \mathcal{H}$  est isomorphe à un  $Q$ -espace ?

Le problème principal pour résoudre cette question (et la suivante) est le manque d'exemples d'applications bornées et non complètement bornées  $T : M_n \rightarrow M_n$  que l'on pourrait utiliser dans la caractérisation de Junge.

Pour ces applications à valeurs dans  $M_n$ , il est possible de calculer leur norme complètement bornée en un nombre fini d'opérations, ce résultat est connu sous le nom de lemme de Smith (voir [Pa2] proposition 7.9) :

**Lemme 1.3.4** *Soient  $X$  un espace d'opérateurs et  $u : X \rightarrow M_n$  une application linéaire, alors*

$$\|u\|_{cb} = \|Id_{M_n} \otimes u\|_{M_n(X) \rightarrow M_n(M_n)}.$$

Une des premières choses à laquelle on pourrait penser pour la stabilité vis-à-vis du produit tensoriel minimal, est de montrer que

$$(R \cap C) \otimes_{\min} E/F = (R \cap C) \otimes_{\min} E / (R \cap C) \otimes_{\min} F,$$

cependant

**Théorème 1.3.5** *Soit  $E$  un espace d'opérateurs minimal et  $F \subset E$ , alors isomorphiquement on a*

$$(R \cap C) \otimes_{\min} E/F = (R \cap C) \otimes_{\min} E / (R \cap C) \otimes_{\min} F,$$

*mais il existe  $E$  et  $F$  minimaux tels que cette égalité n'ait pas lieu au sens complètement isomorphe (pour l'application naturelle).*

*Preuve :* L'identification isomorphique provient encore du théorème 1.2.11. On note  $\rho : E \rightarrow E/F$  l'application quotient.

L'application  $Id_{R \cap C} \otimes \rho : (R \cap C) \otimes_{\min} E \rightarrow (R \cap C) \otimes_{\min} E/F$  est complètement contractante. Son noyau est exactement  $(R \cap C) \otimes_{\min} F$ , en passant au quotient on peut donc bien définir une application complètement contractante et injective

$$\phi : (R \cap C) \otimes_{\min} E / (R \cap C) \otimes_{\min} F \rightarrow (R \cap C) \otimes_{\min} E/F.$$

On commence par montrer qu'elle est inversible. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe une constante  $C$  telle que chaque  $x \in (R \cap C) \otimes E/F$  (produit tensoriel algébrique),  $\|x\| < 1$ , se relève en un élément  $\tilde{x} \in (R \cap C) \otimes_{\min} E$  de norme inférieure à  $C$ .

On considère un tel  $x$ . Par homogénéité de  $R \cap C$  (ou par approximation), on peut supposer que  $x \in (R_n \cap C_n) \otimes E/F$  pour un certain  $n \geq 1$ .  $R_n \cap C_n$  est complètement isométriquement inclus dans  $M_{n+1}$  et  $y$  est 2-complémenté (au niveau Banach). Donc  $x \in M_{n+1}(E/F)$ , par définition, on peut relever  $x$  en  $y$  dans  $M_{n+1}(E)$  avec  $\|y\| \leq 2$ . Comme  $E$  est un  $Q$ -espace,  $\tilde{x} = (P \otimes Id_E)(y) \in (R_n \cap C_n) \otimes E$  est de norme inférieure à 4 et est un relèvement de  $x$ .

Pour la seconde affirmation, on raisonne par l'absurde en supposant que pour tout  $E$  minimal, complètement isomorphiquement

$$(R \cap C) \otimes_{\min} E/F \approx (R \cap C) \otimes_{\min} E / (R \cap C) \otimes_{\min} F. \quad (*)$$

Alors il existe  $C > 0$  telle que  $\|\phi^{-1}\|_{cb} \leq C$  où  $\phi$  a été définie précédemment. En effet, si tel n'est pas le cas, on considère une suite d'espaces  $E_n, F_n$  telle que la suite  $\phi_n$  associée vérifie  $\|\phi_n^{-1}\|_{cb} \geq n$ , et soit  $E = \oplus_{\infty} E_n$  et  $F = \oplus_{\infty} F_n$ . L'application  $\phi$  associée est exactement  $\oplus \phi_n$  et est inversible d'inverse complètement borné mais  $\|\phi^{-1}\|_{cb} \geq \|\phi_n^{-1}\|_{cb} \geq n$  pour tout  $n \geq 1$ , ce qui est impossible.

De façon duale, (\*) signifie que pour tout espace d'opérateurs maximal de dimension finie  $\max(X)$  et tout sous-espace  $Y \subset X$  et toute application complètement bornée  $v : Y \rightarrow M_{n+1}(R_n \cap C_n)$ , il existe une extension  $\tilde{v}$  de  $v$  sur  $X$  tout entier à valeurs dans  $M_n(R_n \cap C_n)$  vérifiant  $\|\tilde{v}\|_{cb} \leq C\|v\|_{cb}$ .

On choisit  $X = \max(M_{n+1} \otimes_{\min} M_{n+1})$ , le sous-espace  $Y = M_{n+1} \otimes (R_n \cap C_n)$  et  $v$  l'identité;  $v$  est bien complètement contractante car c'est la restriction à  $Y$  de  $Id : \max(M_{n+1} \otimes_{\min} M_{n+1}) \rightarrow M_{n+1} \otimes_{\min} M_{n+1}$  qui est complètement contractante par la propriété de maximalité.

Soit  $\tilde{v}$  une extension de  $v$ . Soit  $\mathcal{U}_{n+1}$  le groupe unitaire de  $M_{n+1}$  et  $dm$  sa mesure de Haar, on définit une nouvelle application  $u : \max(M_{n+1} \otimes_{\min} M_{n+1}) \rightarrow M_{n+1} \otimes_{\min} (R_n \cap C_n)$  par la formule :

$$u(x) = \int_{\mathcal{U}_{n+1} \times \mathcal{U}_{n+1}} (U^* \otimes Id) \tilde{v}((U \otimes Id).x.(V \otimes Id))(V^* \otimes Id) dm(U) dm(V).$$

$u$  est bornée et  $\|u\| \leq C$ . De l'invariance par translation de la mesure de Haar, pour tous  $U, V \in \mathcal{U}_{n+1}$  et  $M, N \in M_{n+1}$ , il vient

$$u(UMV \otimes N) = (U \otimes Id).u(M \otimes N).(V \otimes Id) \quad (**)$$

En prenant  $U = \text{diag}(z_i)$  et  $V = \text{diag}(z'_i)$  pour  $z_i, z'_i \in \mathbb{T}$ , puis l'espérance sur  $\mathbb{T}$  :

$$\forall 0 \leq i, j \leq n+1, \quad u(e_{i,j} \otimes N) = e_{i,j} \otimes T_{i,j}(N).$$

De plus,  $T_{i,j}(N)$  ne dépend pas de  $i$  et  $j$ , pour le voir il suffit de prendre  $U$  et  $V$  des matrices de permutation dans (\*\*). On a ainsi une fonction  $T : M_{n+1} \rightarrow (R_n \cap C_n)$  telle que

$$\|u = Id \otimes T : M_{n+1} \otimes_{\min} M_{n+1} \rightarrow M_{n+1} \otimes_{\min} (R_n \cap C_n)\| \leq C$$

et  $T$  étend l'identité de  $R_n \cap C_n$ , en effet si  $N \in R_n \cap C_n$ , comme  $\tilde{v}(e_{i,j} \otimes N) = e_{i,j} \otimes N$

$$e_{i,j} \otimes T(N) = \int_{\mathcal{U}_{n+1} \times \mathcal{U}_{n+1}} (U^* \otimes Id) (U e_{i,j} V \otimes N) (V^* \otimes Id) dm(U) dm(V) = e_{i,j} \otimes N.$$

D'après le lemme de Smith,  $T$  est complètement bornée et  $\|T\|_{cb} \leq C$ .

Mais, comme  $T$  est une projection de  $M_{n+1}$  sur  $R_n \cap C_n$ , d'après [HP1],  $\|T\|_{cb} \geq c\sqrt{n}$ , d'où une contradiction.  $\square$

On s'intéresse maintenant au

**Problème** : pour tout  $Q$ -espace  $E$ ,  $R \cap C \otimes_{\min} E$  est un  $Q$ -espace ?

Pour cela, on commence par dualiser le théorème 1.2.11 :

**Théorème 1.3.6** Soient  $E \subset B(H)$  et  $F \subset B(K)$  deux espaces d'opérateurs et  $\phi : E \rightarrow F$  une application bornée, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Il existe  $\tilde{\phi} : B(H) \rightarrow B(K)$  une extension de  $\phi$  telle que  $\|\tilde{\phi}\| \leq C\|\phi\|$ .
- ii) Pour tout  $Q$ ,  $Q$ -espace

$$\|Id_Q \otimes \phi : Q \otimes_{\min} E \rightarrow Q \otimes_{\min} F\| \leq C\|\phi\|.$$

*Preuve :*

i)  $\Rightarrow$  ii)

Soit  $Q$  un  $Q$ -espace, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes_{\min} E & \xrightarrow{Id_Q \otimes \phi} & Q \otimes_{\min} F \\ \downarrow c.i. & & \downarrow c.i. \\ Q \otimes_{\min} B(H) & \xrightarrow{Id_Q \otimes \tilde{\phi}} & Q \otimes_{\min} B(K) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des injections complètement isométriques.

D'après la caractérisation des  $Q$ -espaces :

$$\|Id_Q \otimes \tilde{\phi} : Q \otimes_{\min} E \rightarrow Q \otimes_{\min} F\| \leq \|\tilde{\phi}\|.$$

L'assertion découle de  $Id_Q \otimes \tilde{\phi}|_{Q \otimes E} = Id_Q \otimes \phi$ .

ii)  $\Rightarrow$  i)

On commence par le cas où  $E \subset B(H)$  est de dimension finie. Soit  $\tilde{E}$ , le Banach  $E$  muni de la structure d'espace d'opérateurs induite par le plongement  $\tilde{E} \subset \max(B(H))$ . On choisit  $Q = \tilde{E}^*$ , c'est bien un  $Q$ -espace. Soit  $x \in Q \otimes \tilde{E}$  représentant l'identité alors  $\|x\|_{cb} = 1$  et par hypothèse

$$\|\tilde{x} = (Id_Q \otimes \phi)(x)\|_{Q \otimes_{\min} F} \leq C.$$

$\tilde{x}$  est complètement bornée et donc admet une extension  $\tilde{\phi}$  à valeurs dans  $B(K)$  de même norme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{x}} & F \\ \downarrow c.i. & & \downarrow c.i. \\ \max B(H) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & B(K) \end{array}$$

$\tilde{\phi}$  est l'extension cherchée.

Dans le cas où  $E$  est de dimension infinie, on note  $I$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension finie de  $E$  ordonné pour l'inclusion. Pour chaque  $G \in I$ , la condition ii) reste valable pour  $\phi|_G$ , par la première partie de la preuve, on dispose d'une extension  $\tilde{\phi}_G$  de  $\phi|_G : B(H) \rightarrow B(K)$  de norme inférieure à  $C\|\phi\|$ .

Soit  $\mathfrak{U}$  un ultrafiltre sur  $I$  raffinant le filtre de l'ordre sur  $I$ , on pose pour  $x \in B(H)$

$$\tilde{\phi}(x) = w\text{-}^* \lim_{\mathfrak{U}} \tilde{\phi}_F(x)$$

ce qui est correctement défini car la boule de rayon  $C\|\phi\| \cdot \|x\|$  de  $B(K)$  est compacte pour la topologie préfaible. Cette application est bien de norme inférieure à  $C\|\phi\|$  et sa restriction à  $E$  est bien  $\phi$ .  $\square$

Dans ce qui suit, on note  $t$  la transposition de  $B(H)$  (ou  $M_n$ ), alors  $t$  est une isométrie qui envoie  $R$  sur  $C$  et inversement.

En utilisant ce résultat d'extension :

**Théorème 1.3.7** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) Pour tout  $Q$ -espace  $Q$ ,  $R \cap C \otimes_{\min} Q$  est isomorphe à un  $Q$ -espace.
- ii) Il existe  $C > 0$  tel que pour tout entier  $n \geq 1$  et  $T : M_n \rightarrow M_n$ , il existe une décomposition  $T = \phi + \psi$  vérifiant

$$\begin{aligned} \|Id_R \otimes \phi : R \otimes_{\min} M_n \rightarrow R \otimes_{\min} M_n\| &\leq C\|T\| \\ \|t \otimes \psi : C \otimes_{\min} M_n \rightarrow R \otimes_{\min} M_n\| &\leq C\|T\| \end{aligned}$$

*Preuve :*

ii)  $\Rightarrow$  i)

Par le théorème 1.2.11,

$$d_Q((R \cap C) \otimes_{\min} Q) = \sup_{T: M_n \rightarrow M_n; \|T\| \leq 1} \|Id \otimes T\|_{(R \cap C) \otimes_{\min} Q \otimes_{\min} M_n \rightarrow (R \cap C) \otimes_{\min} Q \otimes_{\min} M_n}.$$

On considère un tel  $T$ , d'après ii), on dispose d'une décomposition  $T = \phi + \psi$ .

$\phi \otimes Id_R$  est bornée et puisque  $M_n \otimes R$  est injectif (car  $R$  est 1-complètement complémenté dans  $B(H)$ ), par le théorème 1.2.11,  $\phi \otimes Id_R \otimes Id_Q$  est bornée et a fortiori

$$\|\phi \otimes Id_{R \cap C \rightarrow R} \otimes Id_Q : M_n \otimes_{\min} (R \cap C) \otimes_{\min} Q \rightarrow M_n \otimes_{\min} R \otimes_{\min} Q\| \leq C\|T\|.$$

On raisonne de même pour  $\psi \otimes t \otimes Id_Q$  (formellement  $t = Id_{C \rightarrow R}$ ) et on obtient

$$\|\psi \otimes Id_{R \cap C \rightarrow R} \otimes Id_Q : M_n \otimes_{\min} (R \cap C) \otimes_{\min} Q \rightarrow M_n \otimes_{\min} R \otimes_{\min} Q\| \leq C\|T\|.$$

En additionnant,

$$\|T \otimes Id_{R \cap C \rightarrow R} \otimes Id_Q : M_n \otimes_{\min} (R \cap C) \otimes_{\min} Q \rightarrow M_n \otimes_{\min} R \otimes_{\min} Q\| \leq 2C\|T\|.$$

En appliquant la décomposition de ii) à l'application  $tT$ , on obtient  $tT = \Phi + \Psi$  avec

$$\begin{aligned} \|Id_R \otimes \Phi : R \otimes_{\min} M_n \rightarrow R \otimes_{\min} M_n\| &\leq C\|T\| \\ \|t \otimes \Psi : C \otimes_{\min} M_n \rightarrow R \otimes_{\min} M_n\| &\leq C\|T\| \end{aligned}$$

En appliquant l'isométrie  $t \otimes t$ , on obtient une décomposition de  $T = \phi + \psi$  (avec  $\phi = t\Phi$  et  $\psi = t\Psi$ ) et

$$\begin{aligned} \|Id_C \otimes \Phi : R \otimes_{\min} M_n \rightarrow C \otimes_{\min} M_n\| &\leq C\|T\| \\ \|t \otimes \Psi : R \otimes_{\min} M_n \rightarrow C \otimes_{\min} M_n\| &\leq C\|T\| \end{aligned}$$

Comme ci-dessus, on obtient alors

$$\|T \otimes Id_{R \cap C \rightarrow C} \otimes Id_Q : M_n \otimes_{\min} (R \cap C) \otimes_{\min} Q \rightarrow M_n \otimes_{\min} C \otimes_{\min} Q\| \leq 2C\|T\|.$$

et donc

$$\|T \otimes Id_{R \cap C \rightarrow R \cap C} \otimes Id_Q : M_n \otimes_{\min} (R \cap C) \otimes_{\min} Q \rightarrow M_n \otimes_{\min} (R \cap C) \otimes_{\min} Q\| \leq 2C\|T\|.$$

et  $d_Q((R \cap C) \otimes_{\min} Q) \leq 2C$ .

i)  $\Rightarrow$  ii)

Les arguments sont semblables à ceux de la seconde partie de 1.3.5.

Tout d'abord, par un argument de somme directe, i) implique qu'il existe  $C \geq 0$  telle que pour tout  $Q$ -espace  $Q$

$$d_Q((R \cap C) \otimes_{\min} Q) \leq C.$$

On note  $R \oplus C$  le sous-espace de  $B(H)$  engendré par  $(e_{0,i})_{i \geq 1}$  et  $(e_{i,0})_{i \geq 1}$ .  $R \oplus C$  est 1-complètement complémenté dans  $B(H)$  et contient  $R \cap C$  (c'est sa "diagonale").

Soit  $T : M_n \rightarrow M_n$  par i) et le théorème de Junge

$$\|T \otimes Id_{R \cap C \rightarrow R \cap C} \otimes Id_Q : M_n \otimes_{\min} (R \cap C) \otimes_{\min} Q \rightarrow M_n \otimes_{\min} (R \cap C) \otimes_{\min} Q\| \leq C\|T\|.$$

$Id_{R \cap C} \otimes T$  admet donc par le théorème précédent une extension  $\tilde{T}$  à  $(R \oplus C) \otimes_{\min} M_n$  de norme inférieure à  $C\|T\|$  :

$$\tilde{T} : (R \oplus C) \otimes_{\min} M_n \rightarrow (R \oplus C) \otimes_{\min} M_n$$

Soit  $P_R$  la projection ( $\|P\|_{cb} = 1$ ) de  $R \oplus C$  sur  $R$  et  $P_C$  celle sur  $C$ . On décompose  $\tilde{T}$  :

$$(P_R \otimes Id_{M_n})\tilde{T} = \underbrace{(P_R \otimes Id_{M_n})\tilde{T}(P_R \otimes Id_{M_n})}_{\Phi} + \underbrace{(P_R \otimes Id_{M_n})\tilde{T}(P_C \otimes Id_{M_n})}_{\Psi}.$$

Ainsi  $\Phi : R \otimes M_n \rightarrow R \otimes M_n$  et  $\Psi : C \otimes M_n \rightarrow R \otimes M_n$ . On se restreint à  $R$  et  $C$  de dimension  $p \geq 1$ , on identifie algébriquement  $R_p, C_p, R_p \cap C_p$  à  $\ell_2^p$ .

On utilise l'argument de moyenne du théorème 1.3.5 ; on définit  $\tilde{\Phi} : \ell_2^p \otimes M_n \rightarrow \ell_2^p \otimes M_n$  par

$$\tilde{\Phi}(x) = \int_{\mathcal{U}_p} (U^* \otimes Id_{M_n})\Phi((U \otimes Id_{M_n})x)dm(U).$$

L'invariance par translation de la mesure de Haar implique que  $\tilde{\Phi}$  est de la forme  $Id \otimes \phi$  pour une certaine application linéaire  $\phi : M_n \rightarrow M_n$ . Les estimations sur  $\Phi$  impliquent que

$$\|Id_{R_p} \otimes \phi\| \leq C. \quad (1)$$

La même construction à partir de  $\Psi$  donne une application linéaire  $\psi : M_n \rightarrow M_n$  telle que

$$\|t_{C_p \rightarrow R_p} \otimes \psi\| \leq C \quad (2).$$

De plus, pour tout  $x \in \ell_2^p \otimes M_n$

$$\begin{aligned} ((P_R \otimes Id_{M_n})\tilde{T})(x) &= \int_{\mathcal{U}_p} (U^* \otimes Id_{M_n})(\Phi + \Psi)((U \otimes Id_{M_n})x)dm(U) \\ &= (Id_{\ell_2^p} \otimes \phi)(x) + (Id_{\ell_2^p} \otimes \psi)(x) \end{aligned}$$

Comme  $\tilde{T}$  est une extension de  $Id_{R_p \cap C_p} \otimes T$ , on en déduit

$$T = \phi + \psi.$$

Ce qui est la décomposition cherchée avec les estimations (1) et (2). En prenant  $p \geq n^2$ , par homogénéité de  $R$  et  $C$ , tout élément de  $C \otimes_{\min} M_n$  peut-être considéré comme élément de  $R_p \otimes_{\min} M_n$  (idem pour  $C$ ), ce qui donne les estimations sans les indices  $p$ .  $\square$

**Remarques :** On peut remplacer  $M_n$  par  $B(H)$  pour tout espace de Hilbert  $H$  dans ii).

Si ii) est vraie, c'est une généralisation de l'inégalité de Grothendieck non commutative. En effet, celui-ci dit que toute application de  $M_n$  dans lui-même se tensorise par  $R \cap C$ , ce qui est évidemment impliqué par ii).

Une stratégie naturelle pour infirmer i) est donc de trouver une application  $T$  ne satisfaisant pas ii). Pour cela,  $T$  ne doit pas être complètement bornée ou plus généralement ne doit se pas se décomposer en somme d'une application  $\phi$  complètement bornée et d'une application  $\psi$  anti-complètement bornée (i.e.  $t\phi$  est complètement bornée). Les exemples classiques d'applications non complètement bornées sont d'une part  $t$  et  $T$  l'identité formelle entre  $C_n$  et l'espace des matrices de Clifford  $\Phi_n$ . Cependant,  $t$  est anti-complètement bornée. Quant à lui  $T$  ne se décompose pas en somme d'une application bornée et d'une application anti-complètement bornée mais son cas est traité par

**Proposition 1.3.8** *Soit  $T : M_n \rightarrow M_n$  une application bornée se factorisant par un Hilbert (avec norme de factorisation  $\gamma_2(T)$ ) alors  $T$  se décompose en  $T = \phi + \psi$  avec*

$$\begin{aligned} \|Id_R \otimes \phi : R \otimes_{\min} M_n \rightarrow R \otimes_{\min} M_n\| &\leq \gamma_2(T) \\ \|t \otimes \psi : C \otimes_{\min} M_n \rightarrow R \otimes_{\min} M_n\| &\leq \gamma_2(T) \end{aligned}$$

*Preuve* : Soient  $u : M_n \rightarrow H$  et  $v : H \rightarrow M_n$  donnant une factorisation de  $T$  atteignant  $\gamma_2(T)$ .

Comme  $u : M_n \rightarrow H$  est une application bornée alors par [Pi1], il existe deux états  $f$  et  $g$  sur  $M_n$  tels que pour tout  $x \in M_n$  :

$$\|u(x)\|_H \leq \|u\|(f(xx^*) + g(x^*x))^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on note  $L_R^2(M_n, f)$  l'espace  $L^2$ -lignes non commutatif associé à  $f$  et  $L_C^2(M_n, g)$  l'espace  $L^2$ -colonnes non commutatif associé à  $g$ , ce résultat signifie que l'on a une factorisation de  $u$  par  $L_R^2(M_n, f) \cap L_C^2(M_n, g)$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & L_R^2(M_n, f) \oplus L_C^2(M_n, g) & & \\ & \nearrow & \updownarrow P & \searrow & \\ M_n & \longrightarrow & L_R^2(M_n, f) \cap L_C^2(M_n, g) & \longrightarrow & H \xrightarrow{v} M_n \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_u & & & \end{array}$$

Comme les injections  $M_n \rightarrow L_R^2(M_n, f)$  et  $M_n \rightarrow L_C^2(M_n, g)$  sont complètement contractantes,  $T$  se décompose en  $T = \phi + \psi$  avec  $\psi$  de la forme  $\psi = \beta_{R \rightarrow M_n} \cdot \alpha_{M_n \rightarrow R}$  avec  $\|\alpha\|_{cb} \leq 1$  et  $\|\beta\| \leq \gamma_2(T)$ , idem pour  $\psi$  avec  $C$  à la place de  $R$ . Pour obtenir la proposition, il suffit donc de montrer que toute application bornée de  $R \rightarrow M_n$  se tensorise par  $R$  et que toute application bornée de  $C$  dans  $M_n$  se tensorise avec  $t : C \rightarrow R$ .

Par [Pi3], tout élément de  $x \in R \otimes_{\min} R$  est une application 2-sommante de  $\ell_2$  dans lui-même et  $\pi_2(x) = \|x\|_{cb}$  et toute application  $u$  2-sommante de  $R$  dans un espace d'opérateurs est complètement bornée et  $\pi_2(u) = \|u\|_{cb}$ .

Ainsi,  $(\beta \otimes Id_R)x$  est une application 2-sommante et on a

$$\|(\beta \otimes Id_R)x\|_{M_n \otimes_{\min} R} \leq \gamma_2(T)\|x\|.$$

On raisonne de même pour  $\psi$ , et l'on obtient la proposition.  $\square$

L'autre moyen d'obtenir des applications non complètement bornées repose sur l'utilisation des matrices aléatoires mais cela semble infructueux pour notre problème.

## 1.4 Une norme pour les $Q$ -espaces

Le but de cette partie est d'introduire une norme tensorielle dans la classe des  $Q$ -espaces.

### 1.4.1 $Q$ -algèbres

Dans la théorie des algèbres de Banach, les  $Q$ -algèbres sont les algèbres quotient des sous-algèbres des fonctions continues sur un compact. De leur étude dans les années 70, il ressort deux résultats importants (voir [Di]) ; le premier est le lemme de Craw qui caractérise les  $Q$ -algèbres comme les algèbres de Banach commutatives satisfaisant l'inégalité de von Neumann à plusieurs variables, le second, prouvé par Cole, affirme que les  $Q$ -algèbres sont des algèbres d'opérateurs. Dans cette section, on s'intéresse aux  $Q$ -algèbres comme algèbres d'opérateurs (et donc munies d'une structure d'espace d'opérateurs), on va introduire pour tout espace d'opérateurs une  $Q$ -algèbre ayant une propriété universelle.

On commence par quelques définitions :

**Définition 1.4.1** *Les  $Q$ -algèbres sont les quotients au sens espace d'opérateurs des sous-algèbres des  $C^*$ -algèbres commutatives par leurs idéaux.*

Désormais, on ne considère plus les  $Q$ -algèbres que de ce point de vue. L'exemple le plus simple est sans doute donné par les quotients de l'algèbre du disque  $A(\mathbb{D})$  par un idéal engendré par une fonction intérieure.

On a des analogues des résultats pour les  $Q$ -espaces obtenus au début de ce chapitre.

**Proposition 1.4.2** *Les  $Q$ -algèbres forment une variété d'algèbres d'opérateurs ; elles sont stables par passage au quotient par un idéal, par passage aux sous-espaces et sommes directes au sens  $\ell_\infty$ .*

La stabilité des algèbres d'opérateurs par quotient a été démontrée dans [BRS].

En suivant les idées de Dixon [Di], Blecher et Le Merdy ont obtenu dans [BLem] une caractérisation des  $Q$ -algèbres, c'est une sorte d'analogue du théorème de Junge 1.2.11. On note  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des polynômes en  $n^2$  variables sans terme constant que l'on équipe de la famille de normes sur  $M_N(\mathcal{P}_n)$  :

$$\|P\|_N = \sup\{\|P(x_{i,j})\|_N ; x_{i,j} \in \mathbb{C}, \|(x_{i,j})\|_n \leq 1\}.$$

**Théorème 1.4.3** *Une algèbre  $A$  commutative équipée d'une structure d'espace d'opérateurs est une  $Q$ -algèbre si et seulement si pour tout  $P \in M_N(\mathcal{P}_n)$  et  $(a_{i,j}) \in M_n(A)$  de norme plus petite que 1 :*

$$\|P((a_{i,j}))\|_{M_N(A)} \leq \|P\|_N.$$

*Preuve* : Supposons que  $A$  vérifie les hypothèses du théorème. On note  $B_n$  la boule unité de  $M_n$  que l'on munit de la topologie de la norme. On considère  $K$  le compact :

$$K = \prod_{n \geq 1} \left( \prod_{a \in M_n(A); \|a\|_n \leq 1} B_n \right).$$

On note chaque élément  $z$  de  $K$  sous la forme  $z = (z_{a_{i,j}})$  où  $a$  décrit toutes les matrices à coefficients dans  $A$  de norme inférieure à 1. On définit  $\mathbb{A}$  comme la sous-algèbre fermée des fonctions continues de  $K$  dans  $\mathbb{C}$  engendrée par les coordonnées  $z_{a_{i,j}}$ .

Soit  $\phi$  le morphisme d'algèbres vérifiant :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \rightarrow & A \\ z_{a_{i,j}} & \mapsto & a_{i,j} \end{array}.$$

Pour justifier de l'existence de  $\phi$ , il suffit de montrer que  $\phi$ , définie sur les polynômes  $\mathcal{P}$  en les coordonnées à valeurs dans  $A$ , est complètement bornée. Un élément de  $M_N(\mathcal{P})$  ne fait intervenir qu'un nombre fini de coordonnées  $z_{a_{i,j}}$ , donc un nombre fini  $d$  de matrices  $a^k$ . On note  $\alpha = a^1 \oplus \dots \oplus a^d \in M_p(A)$  et  $\tilde{P}$  le polynôme en  $p^2$  variables à valeurs dans  $M_N$  défini de manière évidente à partir de  $P$  et  $\alpha$ . Alors avec les notations de l'énoncé

$$\|P\|_{\mathcal{C}(K, M_N)} = \|\tilde{P}\|_N$$

et

$$(Id_{M_N} \otimes \phi)(P) = \tilde{P}(\alpha)$$

donc l'hypothèse implique que  $\phi$  est complètement contractante.

Par sa définition  $\phi$  est complètement surjective, car si  $a = (a_{i,j}) \in M_n(A)$ ,  $\|a\| \leq 1$ , alors  $\sum z_{a_{i,j}} e_{i,j} \in M_n(\mathbb{A})$  est un relèvement de  $a$  par  $\phi$  de norme 1.



La réciproque est directe. Si  $A$  est l'algèbre des fonctions continues sur un compact  $K$ ,  $a = (a_{i,j}) \in M_n(A)$  avec  $\|a\| \leq 1$  et  $P \in M_N(\mathcal{P}_n)$

$$\|P((a_{i,j}))\| = \sup_{\omega \in K} \|P((a_{i,j}(\omega)))\| \leq \|P\|_N$$

car  $(a_{i,j}(\omega))$  est une matrice de  $B_n$ .

Ensuite, il suffit de remarquer que le résultat passe aux sous-algèbres de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$  puis au quotient car si  $\phi : A \rightarrow B$  est un morphisme d'algèbres, on a l'identité  $(Id_{M_N} \otimes \phi)(P((a_{i,j}))) = P(\phi((a_{i,j})))$ .  $\square$

**Remarque :** On peut également donner une version complètement isomorphe de ce théorème en rajoutant une constante dans le terme de droite de l'inégalité.

On peut en déduire

**Corollaire 1.4.4** *Tout  $Q$ -espace muni du produit nul (i.e.  $x.y = 0$ ) est une  $Q$ -algèbre.*

*Preuve :* Soit  $E$  un quotient de  $\min X \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$  et  $a \in M_n(E)$ ,  $\|a\| \leq 1$ .

Si  $P \in M_N(\mathcal{P}_n)$  est homogène de degré 1, le résultat découle de la réciproque du théorème précédent pour  $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ .

Si  $P$  n'est pas homogène, pour le produit nul sa composante homogène  $Q$  de degré 1 vérifie

$$Q(a) = P(a) \quad \text{et} \quad \|Q\| \leq \|P\|.$$

Cela résulte d'un argument de moyenne expliqué dans la suite (proposition 1.4.9). Le sens direct du théorème précédent nous permet de conclure.  $\square$

On va maintenant construire pour chaque espace d'opérateurs une  $Q$ -algèbre.

Si  $E$  est un espace vectoriel son algèbre tensorielle  $T(E) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E^{\otimes i}$  a la propriété universelle suivante :

Toute application  $\pi : E \rightarrow A$  de  $E$  dans une algèbre  $A$  s'étend de manière unique en un homomorphisme d'algèbres  $\tilde{\pi} : T(E) \rightarrow A$ .

Soit  $E$  un espace d'opérateurs, pour tout  $n \geq 1$ , on définit une norme sur  $M_n(T(E))$  par

$$\|x\|_{M_n(T(E))} = \sup_{\pi: E \rightarrow A} \{\|Id_{M_n} \otimes \tilde{\pi}(x)\| \ ; \ \|\pi\|_{cb} \leq 1, A \text{ } Q\text{-algèbre}\}$$

où le sup parcourt toutes les applications complètement contractantes  $\pi$  de  $E$  dans n'importe quelle  $Q$ -algèbre  $A$ .

On appelle  $OA_Q(E)$  l'espace de Banach obtenu après passage au quotient et complétion pour la norme obtenue sur  $T(E)$  (i. e.  $n = 1$ ). Alors pour tout  $n$ , on obtient une norme sur  $M_n(OA_Q(E))$ , ce qui induit une structure d'espace d'opérateurs sur  $OA_Q(E)$ ; en effet, on peut restreindre le sup à un ensemble  $I$  d'applications  $\pi : E \rightarrow A_\pi$  : pour chaque  $x$  dans  $M_n(OA_Q(E))$ , il suffit de choisir une suite d'applications telle que  $\|Id_{M_n} \otimes \tilde{\pi}(x)\|$  tende vers  $\|x\|_{M_n(OA_Q(E))}$  et alors l'application

$$\Pi : \begin{array}{l} E \rightarrow \ell_\infty(I, A_\pi) \\ x \mapsto (\pi(x))_{\pi \in I} \end{array}$$

vérifie  $\|Id_{M_n} \otimes \tilde{\Pi}(x)\| = \|x\|_{M_n(OA_Q(E))}$  pour tout  $x \in M_n(T(E))$ . Ainsi  $OA_Q(E)$  est la complétion de l'image de  $\Pi$  et donc est une  $Q$ -algèbre par la proposition 1.4.2.

**Définition 1.4.5** *La  $Q$ -algèbre  $OA_Q(E)$  est appelée la  $Q$ -algèbre universelle associée à  $E$ .*

On peut retrouver ce genre de construction dans [Pi4].

**Remarques :**

- Comme les  $Q$ -algèbres sont commutatives, on peut utiliser l'algèbre symétrique de  $E$  (notée  $S(E)$ ) au lieu de  $T(E)$  afin de ne pas passer au quotient.
- Il y a un plongement isométrique de  $E$  dans  $OA_Q(E)$  (car  $\min(E)$  est une  $Q$ -algèbre par le corollaire 1.4.4), qui est également une contraction complète. Toujours par le corollaire 1.4.4, ce plongement est une isométrie complète si et seulement si  $E$  est un  $Q$ -espace.

À titre d'exemple,  $OA_Q(\mathbb{C}) = A(\mathbb{D})$  complètement isométriquement.

La construction est faite pour assurer

**Proposition 1.4.6** *La  $Q$ -algèbre  $OA_Q(E)$  a la propriété universelle suivante :*

*Toute application complètement contractive  $u : E \rightarrow A$  où  $A$  est une  $Q$ -algèbre admet une unique extension complètement contractante en un morphisme d'algèbres  $\tilde{u} : OA_Q(E) \rightarrow A$ .*

Évidemment, l'injection canonique  $E \rightarrow OA_Q(E)$  s'étend en l'identité. De ce fait, si  $A$  est une algèbre de Banach commutative,  $A$  est une  $Q$ -algèbre si et seulement si l'identité de  $A$  s'étend en un morphisme de  $OA_Q(E)$  dans  $A$ , où  $E$  est l'espace d'opérateurs sous-jacent à  $A$ .

Dans ce genre de situation, il est assez aisé de déduire des propriétés de stabilité, la suivante nous sera très utile.

On rappelle qu'une application entre deux espaces d'opérateurs  $E$  et  $F$  est une surjection métrique complète si pour tout entier  $n \geq 1$ , elle envoie la boule unité ouverte de  $M_n(E)$  sur la boule unité ouverte de  $M_n(F)$ .

**Proposition 1.4.7**  *$OA_Q(\cdot)$  est projectif : si  $F \subset E$  alors  $\tilde{q} : OA_Q(E) \rightarrow OA_Q(E/F)$  est une surjection métrique complète. Plus précisément, si  $x \in M_n(S(E/F))$ ,  $\|x\| < 1$  alors il existe  $y \in M_n(S(E))$  tel que  $\|y\| < 1$  et  $(Id_{M_n} \otimes \tilde{q})(y) = x$ .*

*Preuve :* Soit  $q : E \rightarrow E/F$  l'application quotient et  $i_X$  l'inclusion complètement contractive  $X \rightarrow OA_Q(X)$ .

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 OA_Q(E) & \xrightarrow{\tilde{q}} & OA_Q(E/F) & & \\
 \uparrow i_E & \searrow \rho & \swarrow \tilde{q} & \nearrow \sigma & \uparrow i_{E/F} \\
 & & OA_Q(E)/\text{Ker } \tilde{q} & & \\
 & \nearrow & & \searrow j & \\
 F \hookrightarrow E & \xrightarrow{q} & E/F & & 
 \end{array}$$

Où  $\tilde{q}$  est le morphisme d'algèbres complètement contractant de  $OA_Q(E)$  vers  $OA_Q(E/F)$  étendant  $i_{E/F}q : E \rightarrow OA_Q(E/F)$  fourni par la propriété universelle de  $OA_Q(E)$ , ainsi on a  $\tilde{q}i_E = i_{E/F}q$ .

$OA_Q(E)/\text{Ker } \tilde{q}$  est une  $Q$ -algèbre au travers de laquelle  $\tilde{q}$  peut être factorisé ; on note  $\rho$  le morphisme complètement contractant  $\rho : OA_Q(E) \rightarrow OA_Q(E)/\text{Ker } \tilde{q}$  et  $\tilde{q}$  le morphisme complètement contractant  $OA_Q(E)/\text{Ker } \tilde{q} \rightarrow OA_Q(E/F)$  que l'on obtient ainsi, on a alors  $\tilde{q} = \tilde{q}\rho$ .

Comme  $F \subset \text{Ker } \tilde{q}$ , l'application  $j : E/F \rightarrow OA_Q(E)/\text{Ker } \tilde{q}$  est correctement définie et complètement contractive. Par la propriété universelle de  $OA_Q$ , on peut étendre  $j$  en un morphisme complètement contractant  $\sigma : OA_Q(E/F) \rightarrow OA_Q(E)/\text{Ker } \tilde{q}$ .

La restriction à  $E/F$  du morphisme  $\tilde{q}\sigma$  est exactement  $i_{E/F}$ ; pour le prouver, comme  $q$  est une application quotient il suffit de montrer que  $\tilde{q}\sigma i_{E/F}q = i_{E/F}q$ , mais par construction, on a  $\sigma i_{E/F} = j$  et  $\rho i_E = jq$ , ce qui donne

$$\tilde{q}\sigma i_{E/F}q = \tilde{q}\rho i_E = \tilde{q}i_E = i_{E/F}q.$$

Par unicité de l'extension de  $i_{E/F}$ , on a nécessairement  $\tilde{q}\sigma = Id_{OA_Q(E/F)}$ .

Si  $x \in M_n(OA_Q(E/F))$  est de norme inférieure à 1, alors  $Id_{M_n} \otimes \sigma(x)$  est dans la boule unité de  $M_n(OA_Q(E)/\text{Ker } \tilde{q})$ , et puisque  $\rho$  est une surjection métrique complète, on peut trouver un relèvement  $y$  de  $Id_{M_n} \otimes \sigma(x)$  dans la boule unité de  $M_n(OA_Q(E))$ , et ainsi on obtient le résultat en remarquant que  $Id_{M_n} \otimes q(y) = x$ .

Pour la seconde partie, on utilise exactement les mêmes arguments en remplaçant  $OA_Q(E)/\text{Ker } \tilde{q}$  par la fermeture de  $S(E)/(\text{Ker } \tilde{q} \cap S(E))$  pour la norme provenant de l'inclusion  $S(E) \subset OA_Q(E)$ . Il faut néanmoins s'assurer que qu'il s'agit bien d'une  $Q$ -algèbre; ce qui est une application directe de 1.4.3. Donc si  $x \in S(E/F)$ ,  $\|x\| < 1$ , son image dans  $\overline{S(E)/S(E) \cap \text{Ker } \tilde{q}}$  est en fait dans  $S(E)/S(E) \cap \text{Ker } \tilde{q}$  et on peut trouver  $y \in S(E)$ ,  $\|y\| < 1$  tel que  $\tilde{q}(y) = x$  (même chose au niveau matriciel).  $\square$

**Définition 1.4.8** Soit  $x$  un élément de  $OA_Q(E)$ ,  $x$  est dit homogène de degré  $d \in \mathbb{N}^*$ , si  $\pi_z(x) = z^d x$  pour tout nombre complexe  $z$  de module 1, où  $\pi_z$  est l'extension à  $OA_Q(E)$  de la multiplication scalaire par  $z$  sur  $E$  composée avec  $i_E$ .

On notera  $OA_Q^d(E)$  l'espace des éléments homogènes de degré  $d$ .

**Remarque :**  $OA_Q^d(E)$  est la fermeture de  $E^{\otimes d}$  dans  $OA_Q(E)$ , c'est une conséquence de

**Proposition 1.4.9**  $OA_Q^d(E)$  est 1-complètement complémenté dans  $OA_Q(E)$  (par la projection naturelle  $P_d$  nulle sur tout élément homogène de degré différent de  $d$ ).

En effet, on peut donner une formule explicite pour la projection :

$$P_d(x) = \int_{\mathbb{T}} \bar{z}^d \pi_z(x) \frac{dz}{2zi\pi}.$$

On peut penser à  $OA_Q^1(E)$  comme la  $Q$ -enveloppe de  $E$  en tant qu'espace d'opérateurs.

Dans la suite, on aura besoin d'une généralisation à plusieurs variables de  $OA_Q(\cdot)$ .

Soient  $E_1, \dots, E_n$   $n$  espaces d'opérateurs, on construit une  $Q$ -algèbre  $OA_Q((E_i))$  qui admet un  $n$ -uplet de contractions complètes  $E_j \rightarrow OA_Q((E_i))$  satisfaisant le propriété universelle :

**Proposition 1.4.10** Tout  $n$ -uplet d'applications complètement contractives  $u_i : E_i \rightarrow A$  à valeurs dans une  $Q$ -algèbre  $A$  s'étend de manière unique en un morphisme d'algèbres complètement contractif  $\tilde{u} : OA_Q((E_i)) \rightarrow A$ .

Soit  $S((E_i))$  l'algèbre symétrique engendrée par les  $(E_i)$ , c'est à dire

$$S((E_i)) = \bigoplus_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} E_1^{\otimes_s^{i_1}} \otimes \dots \otimes E_n^{\otimes_s^{i_n}}$$

où  $\otimes_s$  est la symétrisation du produit tensoriel algébrique, autrement dit il s'agit du sous-espace de  $E^{\otimes d}$  engendré par les tenseurs de la forme  $e \otimes e \otimes \dots \otimes e$ , ou encore, ce n'est rien d'autre que les éléments de degré  $d$  dans  $S(E)$  et donc il existe une multiplication naturelle  $m_{d,p} : E^{\otimes_s^d} \times E^{\otimes_s^p} \rightarrow E^{\otimes_s^{(d+p)}}$  telle que si  $x \in E^{\otimes_s^d}$  et  $y \in E^{\otimes_s^p}$  alors  $m_{d,p}(x, y) = m_{p,d}(y, x)$ .

La multiplication commutative sur  $S((E_i))$  est définie de la manière suivante sur les tenseurs élémentaires :

si  $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in E_1^{\otimes s_1} \otimes \cdots \otimes E_n^{\otimes s_n}$  et  $y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in E_1^{\otimes s_1} \otimes \cdots \otimes E_n^{\otimes s_n}$  alors

$$x.y = y.x = m_{i_1, j_1}(x_1, y_1) \otimes \cdots \otimes m_{i_n, j_n}(x_n, y_n),$$

on étend ensuite cette définition par  $n$ -linéarité.

$S((E_i))$  a la propriété universelle que tout  $n$ -uplet d'applications  $(u_i : E_i \rightarrow A)$  où  $A$  est une algèbre commutative s'étend de manière unique en un morphisme d'algèbres  $\tilde{u} : S((E_i)) \rightarrow A$ .

Pour définir  $OA_Q((E_i))$ , on suit la construction de  $OA_Q(E)$ . Si  $x \in M_n(S((E_i)))$ , sa norme est donnée par

$$\|x\| = \sup\{\|Id_{M_n} \otimes \tilde{u}(x)\|_A\}$$

où le sup parcourt tous les  $n$ -uplets de contractions complètes  $(u_i : E_i \rightarrow A)$  dans n'importe quelle  $Q$ -algèbre  $A$ .

$OA_Q((E_i))$  est alors la complétion de  $S((E_i))$  pour cette norme (lorsque  $n = 1$ ). Ainsi on équipe  $OA_Q((E_i))$  d'une structure de  $Q$ -algèbre.

$OA_Q((.))$  et  $OA_Q(.)$  ont les mêmes propriétés.

**Proposition 1.4.11**  *$OA_Q((.))$  est projectif; si  $F_i \subset E_i$  alors  $OA_Q((E_i)) \rightarrow OA_Q((E_i/F_i))$  est une surjection métrique complète. Plus précisément, si  $x \in M_n(S((E_i/F_i)))$ ,  $\|x\| < 1$ , il existe  $y \in M_n(S((E_i)))$ ,  $\|y\| < 1$ , tel que  $Id_{M_n} \otimes \tilde{q}(y) = x$ .*

La démonstration est exactement la même que pour  $OA_Q(.)$ .

De même, on peut définir pour tout  $n$ -uplet d'entiers  $(d_i)$ , l'espace  $OA_Q^{(d_i)}((E_i))$ , 1-complètement complété dans  $OA_Q((E_i))$ , comme la fermeture de  $\otimes E_i^{\otimes s_i}$ . Ce sont les éléments de  $OA_Q((E_i))$  qui vérifient  $\pi_z(x) = z_1^{d_1} \cdots z_n^{d_n} x$ , pour tout  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$ , où  $\pi_z$  est l'unique extension des multiplications scalaires par  $z_i$  sur  $E_i$  composées avec les injections naturelles  $E_i \rightarrow OA_Q((E_i))$ . La projection sur cet espace est donnée par

$$P_d(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \bar{z}_1^{-d_1} \cdots \bar{z}_n^{-d_n} \pi_z(x) \frac{dz_1}{2z_1 i\pi} \cdots \frac{dz_n}{2z_n i\pi}.$$

### 1.4.2 Le produit tensoriel $\otimes_{f_Q}$

Dans la section précédente, nous avons vu qu'il n'était pas clair que la classe des  $Q$ -espaces soit stable par le produit tensoriel minimal. On se propose ici d'introduire une norme tensorielle pour laquelle cette propriété est vérifiée, la construction copie celle du produit tensoriel de Haagerup pour les espaces d'opérateurs.

**Définition 1.4.12** *Soient  $E_1, E_2$  des espaces d'opérateurs. On définit  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$  comme l'espace d'opérateurs  $OA_Q^{1,1}(E_1, E_2)$ .*

*Ainsi, si  $x \in \mathbb{K} \otimes E_1 \otimes E_2$ ,  $x = \sum_i k_i \otimes a_i \otimes b_i$ ,*

$$\|x\|_{f_Q} = \sup_{\sigma_i : E_i \rightarrow A} \left\| \sum_i k_i \otimes \sigma_1(a_i) \sigma_2(b_i) \right\|_A$$

où le sup parcourt toutes les contractions complètes  $\sigma_i : E_i \rightarrow A$  dans n'importe quelle  $Q$ -algèbre  $A$ .

L'espace d'opérateurs  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$  est obtenu après complétion pour cette famille de normes.

**Remarque :** Comme  $\mathbb{C}$  est une  $Q$ -algèbre, on a une contraction  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2 \rightarrow E_1 \otimes_{\lambda} E_2$  dans le produit tensoriel injectif des espaces de Banach  $E_1$  et  $E_2$ .

Comme  $OA_Q^{1,1}(E_1, E_2)$  est un  $Q$ -espace :

**Proposition 1.4.13**  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$  est un  $Q$ -espace.

$E_1 \otimes_{f_Q} E_2$  peut dégénérer dans le sens où si les  $E_i$  ne sont pas des  $Q$ -espaces, il n'y a pas de copies complètement isométriques de chacun d'entre eux dans  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$ ; en fait, on a l'identité  $E = E \otimes_{f_Q} \mathbb{C}$  si et seulement si  $E$  est un  $Q$ -espace.

On généralise cette définition, en posant

$$E_1 \otimes_{f_Q} \cdots \otimes_{f_Q} E_n = OA_Q^{1, \dots, 1}(E_1, \dots, E_n)$$

pour n'importe quel  $n$ -uplet d'espaces d'opérateurs  $E_1, \dots, E_n$ .

**Corollaire 1.4.14** Si  $E_i, F_i$  sont des  $Q$ -espaces et  $\sigma_i : E_i \rightarrow F_i$  sont des applications complètement bornées alors  $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_n$  s'étend en une application complètement bornée  $E_1 \otimes_{f_Q} \cdots \otimes_{f_Q} E_n \rightarrow F_1 \otimes_{f_Q} \cdots \otimes_{f_Q} F_n$  de norme  $cb \|\sigma_1\|_{cb} \cdots \|\sigma_n\|_{cb}$ .

**Remarque :**  $E_1 \otimes E_2$  est exactement l'espace vectoriel constitué des produits d'éléments de  $E_1$  et de  $E_2$  dans  $OA_Q((E_i))$ .

**Corollaire 1.4.15** La norme tensorielle de Haagerup et a fortiori la norme projective des espaces d'opérateurs dominant la norme  $f_Q$ .

*Preuve :* Pour la première, cela provient directement de la définition de  $f_Q$  car la norme de Haagerup est définie exactement de la même façon sauf que le sup parcourt toutes les applications complètement contractives sans restriction sur l'algèbre d'opérateurs d'arrivée.

Pour prouver directement la seconde assertion, d'après [BIP], on a simplement à vérifier que si  $(a_{i,j}) \in M_n(E_1)$  et  $(b_{k,l}) \in M_m(E_2)$  sont de normes inférieures à 1, alors  $\|(a_{i,j} \otimes b_{k,l})\|_{f_Q} < 1$ . Grâce à la remarque précédente, on est réduit à montrer que, dans une  $Q$ -algèbre  $A$  si  $\|(a_{i,j})\|_n < 1$  et  $\|(b_{k,l})\|_m < 1$ , alors  $\|(a_{i,j} b_{k,l})\|_{mn} < 1$ ; c'est une conséquence directe de la caractérisation 1.4.3.  $\square$

Les propriétés de  $OA_Q((.))$  se transmettent à  $\otimes_{f_Q}$ .

**Proposition 1.4.16** La norme  $\otimes_{f_Q}$  est une norme complètement projective; si  $F_i \subset E_i$ , alors on a une surjection complète

$$q : E_1 \otimes_{f_Q} E_2 \rightarrow E_1/F_1 \otimes_{f_Q} E_2/F_2.$$

De façon plus précise, si  $x \in M_n(E_1/F_1 \otimes E_2/F_2)$ ,  $\|x\| < 1$ , alors il existe un relèvement  $y \in M_n(E_1 \otimes E_2)$  de  $x$  avec  $\|y\| < 1$ .

*Preuve :* Comme  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2 = OA_Q^{1,1}(E_1, E_2)$ , on les identifie. Cet espace est 1-complètement complétement dans  $OA_Q(E_1, E_2)$ , le résultat découle de la projectivité de  $OA_Q(.,.)$ . On note  $\tilde{q} : OA_Q(E_1, E_2) \rightarrow OA_Q(E_1/F_1, E_2/F_2)$ , l'extension des applications quotient  $E_i \rightarrow E_i/F_i$ , alors  $\tilde{q}|_{E_1 \otimes_{f_Q} E_2} = q$ .

Soit  $x \in E_1/F_1 \otimes E_2/F_2$ ,  $\|x\| < 1$ , grâce à la proposition 1.4.11, on peut alors relever  $x$  en un  $y \in S(E_1, E_2)$ ,  $\|y\| < 1$ . On vérifie que  $P^{1,1}(y) \in E_1 \otimes E_2$  est encore un relèvement de  $x$ .

$$q(P^{1,1}(y)) = \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} \overline{z_1} \overline{z_2} \tilde{q}(\pi_{z_1, z_2}(y)) \frac{dz_1}{2i\pi z_1} \frac{dz_2}{2i\pi z_2}.$$

Comme  $\tilde{q}$  commute avec les multiplications scalaires on a  $q(P^{1,1}(y)) = P^{1,1}(\tilde{q}y) = x$ . La preuve au niveau matriciel est identique.  $\square$

**Définition 1.4.17** Un espace d'opérateurs  $E$  a la propriété de relèvement (complètement contractive) si pour toute application  $u : E \rightarrow F/G$ ,  $\|u\|_{cb} < 1$ , il existe un relèvement  $\tilde{u} : E \rightarrow F$  satisfaisant  $\|\tilde{u}\|_{cb} < 1$ .

Cette propriété a été introduite et étudiée par Ruan et Kye [KR]. L'exemple de base est  $S_n^1$ , cela provient de la définition de la structure d'espace d'opérateurs quotient.

**Proposition 1.4.18** *Si  $E_1$  et  $E_2$  ont la propriété de relèvement (complètement contractive), alors complètement isométriquement*

$$E_1 \otimes_{f_Q} E_2 = \min(E_1 \otimes_\lambda E_2).$$

*Preuve* : Sous ces hypothèses, en revenant à la définition, si  $\sigma_i : E_i \rightarrow A$  où  $A$  est une  $Q$ -algèbre on peut relever ces applications et donc supposer que  $A$  est une  $C^*$ -algèbre commutative. Il s'ensuit que  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$  est minimal et que le Banach sous-jacent est  $\min(E_1 \otimes_\lambda E_2)$ .  $\square$

On peut maintenant énoncer un résultat général sur  $OA_Q$ .

**Notation** : Si  $w$  est une application multilinéaire de  $M_n^N$  vers  $M_d$ , on désigne par  $\tilde{w}$  l'application multilinéaire de  $M_n(E_1) \times \cdots \times M_n(E_N)$  dans  $M_d(E_1 \otimes \cdots \otimes E_N)$  définie par

$$\tilde{w}(m_1 \otimes e_1, \dots, m_N \otimes e_N) = w(m_1, \dots, m_N) \otimes e_1 \otimes \cdots \otimes e_N.$$

**Théorème 1.4.19** *Soient  $E_1, \dots, E_N$  des espaces d'opérateurs et  $x \in M_d(E_1 \otimes \cdots \otimes E_N)$ , alors*

$$\|x\|_{M_d(E_1 \otimes_{f_Q} \cdots \otimes_{f_Q} E_N)} = \inf\{\|w\| \|x_1\|_{M_n(E_1)} \cdots \|x_N\|_{M_n(E_N)}; x = \tilde{w}(x_1, \dots, x_N)\}.$$

*Dans cet infimum,  $n$  est arbitraire et  $w$  est n'importe quelle application  $N$ -linéaire de  $M_n \times \cdots \times M_n$  ( $N$  fois) dans  $M_d$ .*

*Preuve* : Pour simplifier, on prend  $N = 2$  et  $d = 1$ .

On reprend les notations du lemme 1.2.13 pour réaliser  $E_1$  et  $E_2$  comme quotients d'espaces  $\ell_1^I(S_1^{n_i})$ . On note  $\rho_i$  les applications correspondant à  $\rho$  dans ce lemme. Ces espaces ont la propriété de relèvement.

Soient  $x \in E_1 \otimes E_2$ ,  $\|x\|_{f_Q} < 1$ , par la proposition 1.4.16, on peut relever  $x$  en

$$z = \sum_t a_t \otimes b_t \in \ell_1^I(S_1^{n_i}) \otimes \ell_1^J(S_1^{n_j}) \quad \text{avec} \quad \|z\|_{f_Q} < 1.$$

Chaque  $a_t$  peut être approché par des éléments dans  $\ell_1^I(S_1^{n_i})$  de norme plus petite et à support fini que l'on note  $a'_t$ .

Si on pose

$$\hat{a}_t = a'_t + \|\rho_1(a_t - a'_t)\| 1_{\rho_1(a_t - a'_t) / \|\rho_1(a_t - a'_t)\|},$$

où  $1_x$  est l'élément de  $\ell_1^I(S_1^{n_i})$  dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice  $i = x \in M_1(E_1)$  qui vaut 1. Alors  $\rho_1(\hat{a}_t) = \rho_1(a_t)$  et  $\hat{a}_t$  ont des supports finis; de même on définit  $\hat{b}_t$ , alors  $y = \sum_t \hat{a}_t \otimes \hat{b}_t$  est un autre relèvement de  $x$  à support fini dans  $I' \times J'$  et par l'inégalité triangulaire :

$$\|y\| < \|z\| + \sum_t (\|\rho_1(a_t - a'_t)\| \|b_t\| + \|a_t\| \|\rho_2(b_t - b'_t)\| + \|\rho_1(a_t - a'_t)\| \|\rho_1(b_t - b'_t)\|)$$

En choisissant  $a'_t, b'_t$  suffisamment proches de  $a_t, b_t$ , on force  $\|y\| < 1$ .

Par la proposition 1.4.18, et le fait que  $\ell_1^{I'}(S_1^{n_i})$  est 1-complètement complétement dans  $\ell_1^I(S_1^{n_i})$ , on obtient  $1 > \|y\|_{f_Q} = \|w\|$  si  $w$  est la forme bilinéaire associée à  $y$ .

Si  $x_i$  sont les restrictions de  $\rho_i$  à  $\ell_1^{I'}(S_1^{n_i})$  et  $\ell_1^{J'}(S_1^{n_j})$ , en choisissant  $n$  suffisamment grand, on peut supposer que  $x_i \in M_n(E_i)$  et  $w$  est définie sur  $M_n \times M_n$ , ainsi  $x = \rho_1 \otimes \rho_2(y) = \tilde{w}(x_1, x_2)$  avec les bonnes estimations de norme.

Pour la réciproque, il suffit d'inverser le dernier raisonnement et d'utiliser le corollaire 1.4.14. On peut aussi utiliser le théorème 1.4.3.  $\square$

**Remarques :**

- Ce résultat est aussi valable dans le cas  $N = 1$ , il fournit un moyen explicite de calculer la norme d'un élément dans  $M_n(OA_Q^1(E))$  comme

$$\|x\|_{M_n(OA_Q^1(E))} = \inf\{\|w\|\|x_1\|_{M_k(E_1)}; x = w \otimes Id_E(x_1)\}$$

où l'infimum parcourt toutes les applications  $w : M_k \rightarrow M_n$  et tous les entiers  $k \geq 1$ . L'assertion : un espace d'opérateurs  $E$  est un  $Q$ -espace si et seulement si  $E = OA^1(E)$  est exactement le théorème de Junge 1.2.11.

- Toujours avec  $N = 1$ , en remarquant que  $OA_Q^1(\max(E)) = \max_Q(E)$ , si l'on combine ce résultat avec la caractérisation de  $\max(E)$  obtenue par Paulsen dans [Pa1], on retrouve le théorème 1.2.9.

Dans le cas  $N = 2$ , on peut réinterpréter le théorème comme un résultat de factorisation sachant que  $\max(M_m) \otimes_{\min} E = M_m(E)$ , pour tout  $Q$ -espace  $E$

**Proposition 1.4.20** *Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux  $Q$ -espaces et  $u \in M_n(E_1 \otimes E_2)$  telle que  $\|u\|_{f_Q} < 1$ , alors comme application de  $E_1^*$  vers  $M_n(E_2)$ ,  $u$  admet une factorisation, pour un certain  $m$*

$$\begin{array}{ccc} \max(M_m) & \xrightarrow{w} & M_n(\min(S_1^m)) \\ v_1^* \uparrow & & \downarrow Id_{M_n} \otimes v_2 \\ E_1^* & \xrightarrow{u} & M_n(E_2) \end{array}$$

avec  $v_1, v_2$  complètement contractives et  $\|w\| < 1$ .

*Inversement, si une telle factorisation existe avec  $\|w\|_{M_n(\min(S_1^m) \otimes_{\min} \min(S_1^m))} < 1$  alors  $\|u\|_{f_Q} < 1$ .*

**Corollaire 1.4.21** *Si  $E_i$  sont des  $Q$ -espaces alors, pour tout  $u \in M_n(E_1 \otimes E_2)$  :*

$$\|u\|_{\min} \leq \|u\|_{f_Q}.$$

*Preuve :* En effet, si  $\|u\|_{f_Q} < 1$ , le diagramme ci-dessus prouve que  $u$  est complètement bornée de norme plus petite que 1.  $\square$

**Remarque :** En général, cela n'est pas vrai pour tous les espaces d'opérateurs puisque  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$  est toujours un  $Q$ -espace.

### 1.4.3 $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$ en tant qu'espace de Banach

On étend les résultats de Paulsen [Pa1] pour  $\otimes_{f_Q}$ .

On note  $\otimes^\wedge$  le produit tensoriel projectif pour les espaces d'opérateurs et  $\otimes_h$  le produit tensoriel de Haagerup.

Il est possible de caractériser le Banach  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$  :

**Théorème 1.4.22** *Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des  $Q$ -espaces alors  $E_1 \otimes_{f_Q} E_2$  est  $K$ -isomorphe à  $E_1 \otimes_h E_2$  et  $Kk$ -isomorphe à  $E_1 \otimes^\wedge E_2$ , où  $K$  est la constante du théorème de Grothendieck non commutatif (voir [Pi1]) et  $k$  est la constante apparaissant dans [Pa1],  $k = \lim_{n \rightarrow \infty} n / \|\min(\ell_2^n) \rightarrow \max(\ell_2^n)\|_{cb}$ .*

*Preuve :* Comme les trois normes apparaissant sont projectives, il suffit de le vérifier pour les espaces minimaux. Le théorème principal dans [Pa1], peut être étendu pour les  $Q$ -espaces :  $E_1 \otimes^\wedge E_2$  est  $k$ -isomorphe à  $E_1 \otimes_h E_2$ .

Le théorème de Grothendieck non commutatif affirme que toute application contractive  $w$  d'une  $C^*$ -algèbre dans le dual d'une  $C^*$ -algèbre se factorise par un espace de Hilbert avec norme de factorisation inférieure à  $K$ .

Si  $u \in E_1 \otimes E_2$  satisfait  $\|u\|_{f_Q} < 1$ , la proposition 1.4.20 et ce théorème non commutatif nous donnent que  $u$  se factorise par un Hilbert avec norme de factorisation inférieure à  $K$ . Et alors par [Pa1],  $\|u\|_{E_1 \otimes_h E_2} \leq K$  et  $\|u\|_{E_1 \otimes^\wedge E_2} \leq Kk$ .  $\square$

**Remarques :**

- L'équivalence de ces normes au niveau matriciel n'est pas vraie en général. Par exemple, en répondant à une question de Paulsen, Le Merdy a utilisé la non symétrie du produit de Haagerup pour montrer que l'identité  $\min(\ell_2^n) \otimes_h \min(\ell_2^n) \rightarrow \min(\ell_2^n) \hat{\otimes} \min(\ell_2^n)$  a une norme complètement bornée plus grande que  $\sqrt{n}$ .
- Les normes  $f_Q$  et  $\min$  ne sont pas équivalentes sur  $E_1 \otimes E_2$  pour tous  $Q$ -espaces  $E_1$  et  $E_2$ . Il suffit de considérer  $E_1 = \min(\ell_1)$ ,  $E_2 = \min(\ell_\infty)$ . Par le théorème précédent si ces normes étaient équivalentes l'identité de  $\ell_\infty$  se factoriserait par un Hilbert.
- La norme  $f_Q$  ne semble pas être associative, au moins on peut montrer que

$$\min(\ell_2) \otimes_{f_Q} \min(\ell_2) \otimes_{f_Q} \min(\ell_1) \neq (\min(\ell_2) \otimes_{f_Q} \min(\ell_2)) \otimes_{f_Q} \min(\ell_1)$$

pour l'identité. Comme  $\mathbb{C}$ ,  $\max(\ell_1)$  et  $R$  ont la propriété de relèvement, on déduit que

$$\min(\ell_2) \otimes_{f_Q} \min(\ell_2) \otimes_{f_Q} \min(\ell_1) = \min(\ell_2 \otimes_\lambda \ell_2) \otimes_{\min} \min(\ell_1)$$

et

$$(\min(\ell_2) \otimes_{f_Q} \min(\ell_2)) \otimes_{f_Q} \min(\ell_1) = \min(\ell_2 \otimes_\lambda \ell_2) \otimes_{f_Q} \min(\ell_1).$$

Comme  $\ell_\infty$  est complémenté dans  $\ell_2 \otimes_\lambda \ell_2$ , on se ramène à la remarque précédente.

**Corollaire 1.4.23** *Si  $E_1$  et  $E_2$  sont des  $Q$ -espaces de dimension  $n$ , alors*

$$d_{cb}(E_1, E_2^*) \geq \frac{1}{k} \sqrt{n}.$$

*Preuve :* Tout d'abord, on remarque que tout  $Q$ -espace ou tout espace sous-maximal  $E$  est symétrique et vérifie  $E \otimes_{\min} C = E \otimes_{\min} R = E \otimes_{\min} (R \cap C)$  isométriquement.

Soit  $u : E_2 \rightarrow E_1^*$  telle que  $\|u\|_{cb} \|u^{-1}\|_{cb} = d_{cb}(E_1, E_2^*)$ .

En dualisant le résultat de Paulsen, on obtient  $\|u\|_{cb} \geq \frac{1}{k} \|u\|_h$ , et donc  $u$  admet une factorisation au travers de  $R_n$ , par la symétrie de  $E_1^*$  et  $E_2$ , on a :

$$\begin{array}{ccccc} E_1^* & \xrightarrow{u^{-1}} & E_2 & \xrightarrow{u} & E_1^* \\ & & \downarrow v & & \uparrow w \\ & & C_n & \xrightarrow{Id} & R_n \end{array}$$

avec  $\|w\|_{cb} \|v\|_{cb} \leq k \|u\|_{cb}$ , ainsi  $\|w\|_{cb} \|u\|_{cb} \|v\|_{cb} \geq \|Id\|_{cb} = \sqrt{n}$ .  $\square$

En fait, on vient de montrer :

**Corollaire 1.4.24** *Toute application d'un  $Q$ -espace de dimension  $n$  dans un espace sous-maximal se factorise au travers de l'identité  $R_n \cap C_n \rightarrow R_n + C_n$ .*

*Preuve :* Dans le dernier diagramme, par symétrie, on peut considérer que  $v : E_2 \rightarrow (R_n \cap C_n)$  et  $w : R_n + C_n \rightarrow E_1^*$  avec les mêmes estimations.  $\square$

Pour clore ce chapitre, voici deux questions ayant surtout comme origine le manque d'exemples de  $Q$ -espaces :

**Problème :** La norme  $\otimes_{f_Q}$  est-elle injective et est-elle associative ?



## Chapitre 2

# Structures d'espace sous-maximal sur $H^1$

### 2.1 Présentation

L'un des principaux exemples de  $Q$ -espace du chapitre précédent est  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  muni de la structure d'opérateurs donnée par le théorème 1.2.19 de Nehari-Sarason-Page (on utilise  $\overline{H^\infty}$  à la place de  $H^\infty$  dans ce chapitre pour simplifier les formules). Il est possible de trouver d'autres structures de  $Q$ -espace sur cet espace de Banach, c'est l'objet de ce chapitre.

Si on considère  $H^1(\mathbb{T})$  le sous-espace de  $L^1(\mathbb{T})$  fermeture des polynômes analytiques

$$H^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \hat{f}(n) = 0, n \leq 0\}$$

où  $\hat{f}(n)$  sont les coefficients de Fourier de  $f$ , alors  $H^1(\mathbb{T})$  (que l'on note aussi  $H^1$ ) est isométrique au préduel de  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  en utilisant la formule de dualité

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \langle f(z), g(\bar{z}) \rangle \frac{dz}{z},$$

pour  $f \in H^1$  et  $g \in L^\infty$ . Par conséquent, munir  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  d'une structure de  $Q$ -espace revient à équiper  $H^1$  d'une structure d'espace sous-maximal. Dans cette section, on introduira de telles structures.

Ensuite, afin de les comparer, on étudiera le sous-espace des séries "bilacunaires" dans  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  pour ces différentes structures. L'étape suivante sera l'étude des propriétés de décomposition de l'espace  $H^1$ ; l'existence de bases inconditionnelles dans  $H^1$  est maintenant un résultat classique d'analyse harmonique, on s'intéressera à sa généralisation dans le cadre des espaces d'opérateurs ce qui conduira à une caractérisation des espaces de Banach UMD analytiques.

Enfin, les résultats de Lusky [Lu1] permettront de conclure à l'existence d'une base complètement bornée de  $H^1$ .

Dans ce qui suit, on choisit la dualité entre  $M_n$  et  $S_n^1$  donnée par

$$\langle (a_{i,j}), (b_{i,j}) \rangle_{M_n, S_n^1} = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}.$$

Pour  $\xi$  et  $\eta$  vecteurs dans  $\ell_2^n$ , on note  $\xi \otimes \eta = (\xi_i \eta_j)$ , l'ordre a une importance, il correspond aux identifications  $M_n = C_n \otimes_h R_n$  et  $S_n^1 = R_n \otimes_h C_n$ .

Parmi les résultats importants d'analyse harmonique sur  $H^1$ , on trouve la caractérisation de  $H^1$  en terme d'atomes :

**Définition 2.1.1** Une fonction  $a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  est un atome si

$$\begin{aligned} & \cdot \text{supp } a \subset I, \quad I \subset \mathbb{T} \text{ est un intervalle.} \\ & \cdot \int_I a \, dm = 0 \\ & \cdot \|a\|_\infty \leq \frac{1}{|I|}. \end{aligned}$$

où  $dm$  est la mesure de Haar normalisée sur  $\mathbb{T}$  et  $|I|$  désigne la mesure de  $I$  (par intervalle, on entend arc de cercle).

Ainsi tout atome est une fonction intégrable,

**Définition 2.1.2** L'espace  $H_{at}^1$  est l'enveloppe convexe des atomes dans  $L^1$  :

$$\begin{aligned} H_{at}^1(\mathbb{T}) &= \{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \exists (\lambda_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (a_i)_{i \geq 1} \text{ atomes tels que} \\ & f = \sum_{i \geq 1} \lambda_i a_i \text{ et } \sum_{i \geq 1} |\lambda_i| < \infty\} \end{aligned}$$

et pour  $f \in H_{at}^1$ , on pose

$$\|f\|_{at} = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} |\lambda_i| ; f = \sum_{i \geq 1} \lambda_i a_i, a_i \text{ atomes} \right\}$$

On peut remplacer la troisième condition pour les atomes par

$$\|a\|_p \leq \frac{1}{|I|^{\frac{p-1}{p}}},$$

pour  $1 < p \leq \infty$ , on obtient alors à l'aide de ces  $p$ -atomes un espace  $H_{at}^{1,p}$  qui s'avère être isomorphe à  $H_{at}^1$ .

En notant  $H$  la transformation de Hilbert, c'est à dire le multiplicateur de Fourier de symbole  $(-i \operatorname{sgn} n)_{n \in \mathbb{Z}}$  avec  $\operatorname{sgn} 0 = 1$ . Le fameux théorème de Fefferman peut alors se formuler en

**Théorème 2.1.3** Il existe une constante  $C > 0$  telle que toute  $f \in H^1$  vérifie  $f \in H_{at}^1$  et

$$\|f\|_{at} \leq C \|f\|_{L^1},$$

et réciproquement si  $f \in H_{at}^1$  alors  $\frac{1}{2}(Id + iH)f \in H^1$  avec

$$\left\| \frac{1}{2}(Id + iH)f \right\|_{L^1} \leq C \|f\|_{at}.$$

Par dualité, cela revient à considérer l'espace  $BMO$  : une fonction mesurable sur  $\mathbb{T}$  est dans  $BMO$  s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{T}$

$$\frac{1}{|I|} \int_I |f - f_I| \, dm \leq C$$

où  $f_I = \frac{1}{|I|} \int f \, dm$  est la moyenne de  $f$  sur  $I$ . La plus petite constante  $C$  vérifiant ces inégalités est  $\|f\|_{BMO}$ .  $BMO$  muni de cette norme est un espace de Banach modulo les fonctions constantes, le théorème de Fefferman dit alors que  $BMO$  et  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  sont isomorphes. Les relations entre  $BMO$  et  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  (identifié aux matrices de Hankel) sont données par les formules :

$$\frac{1}{2}(Id + iH) : \begin{cases} BMO & \rightarrow L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T}) \\ \sum_{n \neq 0} a_n z^n & \mapsto \sum_{n > 0} a_n \gamma_{n-1} \end{cases}$$

et

$$Id : \begin{cases} L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T}) & \rightarrow & BMO \\ \sum_{n>0} a_n \gamma_{n-1} & \mapsto & \sum_{n>0} a_n z^n \end{cases} .$$

Comme précédemment, on peut considérer la variante avec un exposant  $p$  pour la norme :

$$\frac{1}{|I|} \int |f - f_I|^p dm \leq C,$$

pour  $1 \leq p < +\infty$ , l'espace  $BMO_p$  obtenu est isomorphe à  $BMO$ .

Une structure d'espace d'opérateurs sur  $E$  revient à donner une norme sur les espaces  $M_n \otimes E$ , on est donc amené à considérer les généralisations à valeurs vectorielle de  $H^1$  et  $BMO$ . Si  $X$  est un espace de Banach,  $L^1(\mathbb{T}, X)$  est l'espace des fonctions Bochner-mesurables intégrables, on pose

$$H^1(\mathbb{T}, X) = \{f \in L^1(\mathbb{T}, X) \mid \hat{f}(n) = 0, n \leq 0\}.$$

On peut définir de la même manière l'espace  $H_{at}^1(X)$  en adaptant la définition des atomes : une fonction Bochner-mesurable  $a : \mathbb{T} \rightarrow X$  est un atome si

$$\begin{aligned} & \cdot \text{supp } a \subset I, I \subset \mathbb{T} \text{ est un intervalle.} \\ & \cdot \int_I a dm = 0 \\ & \cdot \|a\|_\infty \leq \frac{1}{|I|}. \end{aligned}$$

et

$$H_{at}^1(\mathbb{T}, X) = \{f \in L^1(\mathbb{T}, X) \mid \exists (\lambda_i)_{i \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, (a_i)_{i \geq 1} \text{ atomes tels que} \\ f = \sum_{i \geq 1} \lambda_i a_i \text{ et } \sum_{i \geq 1} |\lambda_i| < \infty\}.$$

La norme est définie de manière analogue au cas scalaire. Le théorème de Fefferman n'est plus vrai pour tout Banach  $X$ . Cependant, Bourgain [Bo2] a montré :

**Théorème 2.1.4** *Il existe  $C > 0$  telle que toute fonction  $f \in H^1(X)$  vérifie  $f \in H_{at}^1$  et*

$$\|f\|_{at} \leq C \|f\|_{L^1}.$$

L'identification inverse n'est possible que si  $X$  est UMD-analytique (voir définition 2.3.8). Par contre les résultats d'isomorphisme entre  $H_{at}^{1,p}$  et  $H_{at}^1$  restent valables à valeurs vectorielles.

Pour les généralisations de  $BMO$  et  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  à valeurs dans  $X$  un espace de Banach dual (dans la suite  $X$  sera de dimension finie ou alors Hilbertien), on reprend les mêmes définitions, en prenant les fonctions préfaiblement mesurables à valeurs dans  $X$ .

On est en mesure de décrire les structures d'espace d'opérateurs que l'on va considérer dans la suite.

La structure la plus simple de  $Q$ -espace que l'on peut mettre sur  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  est bien évidemment  $\min(L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T}))$ , du fait de la propriété universelle de  $\min$ , les résultats sur la structure de cet espace d'opérateurs sont les conséquences directes de leurs analogues au niveau banachique, idem pour  $\max H^1$  son préduel naturel.

Le théorème de Nehari-Sarason-Page nous a donné une réalisation explicite de l'espace de Banach  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$  comme espace d'opérateurs (via les matrices de Hankel  $\mathcal{H}$ ). Dans la suite  $L^\infty(\mathbb{T})/\overline{H^\infty}(\mathbb{T})$ , en tant qu'espace d'opérateurs, désignera toujours cette structure de quotient de  $\min L^\infty(\mathbb{T})$  et  $H^1$  son préduel naturel. Par dualité, on équipe ainsi  $H^1$  d'une structure d'espace d'opérateurs qui provient du plongement

$$H^1 \subset \max L^1.$$

Le préduel de  $M_n \otimes_{\min} L^\infty$  ( $= M_n \otimes_\lambda L^\infty$  isométriquement) est au niveau espace d'opérateurs  $S_n^1 \hat{\otimes} L^1$  (produit tensoriel projectif d'espaces d'opérateurs) qui est isométrique en tant que Banach à  $L^1(S_n^1)$  et donc  $H^1 \hat{\otimes} S_n^1$  est isométrique à  $H^1(S_n^1)$ .

Une autre façon de mettre des normes sur  $BMO \otimes M_n$  qui satisfassent les axiomes de Ruan est la suivante :  $BMO \otimes M_n$  peut être vu comme un espace de fonctions (modulo les constantes) de  $\mathbb{T}$  dans  $M_n$ ,

**Définition 2.1.5** *Pour  $f : \mathbb{T} \rightarrow M_n$  mesurable, on pose*

$$\|f\|_{BMO_C}^2 = \sup_{I \subset \mathbb{T} \text{ intervalle}} \frac{1}{|I|} \left\| \int_I (f - f_I)^*(f - f_I) dm \right\|_{M_n}.$$

Sur cette expression, il est évident que  $(R_2)$  est satisfait. Pour vérifier  $(R1)$  et qu'il s'agit bien d'une norme, il suffit de remarquer que :

$$\|f\|_{BMO_C} = \sup_{\xi \in \ell_2^n; \|\xi\| \leq 1} \|f \cdot \xi\|_{BMO_2(\ell_2^n)}. \quad (*)$$

On note  $BMO_C$  l'espace d'opérateurs ainsi obtenu. Par dualité, on obtient une nouvelle structure d'espace d'opérateurs sur  $H_{at}^1$  que l'on note  $H_R^1$ . La seconde expression permet d'identifier aisément l'espace de Banach  $M_n(BMO_C)^* = S_n^1 \hat{\otimes} H_R^1$ ,  $(*)$  donne un plongement isométrique

$$\begin{aligned} M_n(BMO_C) &\rightarrow \ell_\infty(BMO_2(\ell_2^n)) \\ f &\mapsto (f \cdot \xi)_{\xi \in \ell_2^n; \|\xi\| \leq 1}. \end{aligned}$$

Les éléments de  $S_n^1 \hat{\otimes} H_R^1$  sont des fonctions de  $\mathbb{T}$  dans  $S_n^1$ ; les briques élémentaires, sont les fonctions de la forme  $\xi \otimes a$  où  $\xi \in \ell_2^n$  est de norme 1 et  $a : \mathbb{T} \rightarrow \ell_2^n$  est un 2-atome à valeurs dans  $\ell_2^n$ , on les appelle  $R$ -atomes; la norme de  $f$  dans  $H^1 \hat{\otimes} S_n^1$  est donnée par

$$\|f\| = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} |\lambda_i|; f = \sum_{i \geq 1} \lambda_i a_i, a_i \text{ } R\text{-atomes et } \xi \in \ell_2^n \right\}.$$

**Remarque :** Les  $R$ -atomes sont des cas particuliers de 2-atomes à valeurs  $S_n^1$ . La transformation de Hilbert est bornée de  $H_{at}^1(\ell_2)$  dans lui-même, on en déduit que pour  $R$ -atome  $a$ ,  $\frac{1}{2}(Id + iH)(a)$  est dans  $H^1(S^1)$ .

En inversant les étoiles dans la définition de  $BMO_C$ , on obtient l'espace d'opérateurs  $BMO_R$ ;  $H_C^1$  est la notation pour son préduel naturel.

Les deux structures d'espace d'opérateurs  $BMO_C$  et  $BMO_R$  ne sont pas symétriques, elles ne sont donc pas des structures de  $Q$ -espaces, mais en prenant leur intersection, comme dans le cas de  $R$  et  $C$  (voir corollaire 1.2.16), elles le sont :

**Proposition 2.1.6** *L'espace d'opérateurs  $BMO_R \cap BMO_C$  est isomorphe à un  $Q$ -espace. On le note  $BMO_{R \cap C}$ , pour  $f : \mathbb{T} \rightarrow M_n$  mesurable, on a*

$$\|f\|_{BMO_{R \cap C}} = \sup_{I \subset \mathbb{T} \text{ intervalle}} \left( \frac{1}{|I|} \left\| \int_I (f - f_I)^*(f - f_I) dm \right\|_{M_n}, \frac{1}{|I|} \left\| \int_I (f - f_I)(f - f_I)^* dm \right\|_{M_n} \right).$$

*Preuve :* La démonstration de cette proposition repose sur l'utilisation du théorème de Junge 1.2.11 et la version faible de l'inégalité de Grothendieck utilisée dans le corollaire 1.2.16 : toute application contractante  $T : M_n \rightarrow M_n$  se tensorise par  $R \cap C$ , autrement dit, pour toute suite  $(m_i)_{i \geq 1}$  de matrices de taille  $n$  :

$$\sup_{i \geq 1} (\| \sum_{i \geq 1} T(m_i)^* T(m_i) \|, \| \sum_{i \geq 1} T(m_i) T(m_i)^* \|) \leq C \sup_{i \geq 1} (\| \sum_{i \geq 1} m_i^* m_i \|, \| \sum_{i \geq 1} m_i m_i^* \|),$$

en passant à la limite cela revient à, pour toute fonction mesurable (et intégrable)  $f$  à valeurs dans  $M_n$  :

$$\begin{aligned} & \sup(\|\int_{\mathbb{T}} T(f(z))^* T(f(z)) dm(z)\|, \|\int_{\mathbb{T}} T(f(z)) T(f(z))^* dm(z)\|) \\ & \leq C \sup(\|\int_{\mathbb{T}} f(z)^* f(z) dm(z)\|, \|\int_{\mathbb{T}} f(z) f(z)^* dm(z)\|). \quad (*) \end{aligned}$$

Il faut montrer qu'il existe  $C \geq 0$  telle que pour tout entier  $n \geq 1$ , toute application linéaire  $T : M_n \rightarrow M_n$  et toute fonction  $f : \mathbb{T} \rightarrow M_n$ , on a

$$\|T(f)\|_{BMO_{R \cap C}} \leq C \|f\|_{BMO_{R \cap C}}.$$

Cela provient directement de (\*) appliqué pour chaque intervalle  $I$  à la fonction  $f - f_I$  restreinte à  $I$ .  $\square$

On note  $H_{R+C}^1 = H_R^1 + H_C^1$  le préduel naturel de  $BMO_{R \cap C}$ . D'après [Pi2], une application  $u : E \rightarrow F$  est complètement bornée de norme inférieure à  $C$  si et seulement si pour tout  $n \geq 1$ ,  $u \otimes Id_{S_n^1} : E \hat{\otimes} S_n^1 \rightarrow F \hat{\otimes} S_n^1$  est bornée (au niveau Banach) par  $C$ . Donc, la remarque précédente associée à la définition de la somme d'espaces d'opérateurs donne

**Proposition 2.1.7** *L'application*

$$\frac{1}{2}(Id + iH) : H_{R+C}^1 \rightarrow H^1$$

*est complètement bornée.*

*Par dualité, on a donc une application complètement bornée*

$$Id : L^\infty/H^\infty \rightarrow BMO_{R \cap C}.$$

Cette structure sur  $BMO$  semble assez étrange au premier abord ; l'idée naturelle pour mettre une structure d'espace d'opérateurs sur  $BMO$  est de choisir comme norme sur  $M_n \otimes BMO$  celle provenant de l'identification  $M_n \otimes BMO = BMO(M_n)$ , ces normes vérifient (R1). Cependant

**Proposition 2.1.8** *La famille de normes sur  $BMO(M_n)$  n'est pas une structure d'espace d'opérateurs sur  $BMO$ .*

On montre que la famille de normes ne satisfait pas (R2).

**Lemme 2.1.9** *En identifiant  $\mathbb{T} = [0, 2\pi[$ , la fonction*

$$f(t) = \log \left| \tan\left(\frac{t}{2}\right) \right|$$

*est dans  $BMO$ .*

En effet, la fonction  $f$  est à une constante près la transformée de Hilbert de la fonction caractéristique de l'intervalle  $I = [0, \pi]$  (c'est à dire la convolée de  $\cotan(\frac{t}{2})$  avec cette fonction indicatrice).

*Preuve* : Notons  $f_x(t) = \log \left| \tan\left(\frac{t-x}{2}\right) \right|$  et  $(e_x)$  la base canonique de  $\ell_\infty([0, 2\pi[)$ .

Soit  $x_i$  une suite dense dans  $I$ . Si l'axiome (R2) était satisfait, on devrait avoir pour tout entier  $n$  :

$$\left\| \sum_{i=1}^n f_{x_i} \otimes e_{x_i} \right\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|f_{x_i}\|_{BMO} = \|(f_{x_i})\|_{BMO(\ell_\infty^n)}.$$

Comme la norme dans  $BMO$  est invariante par translation

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \|f_{x_i}\|_{BMO} = \|f\|_{BMO} < \infty.$$

D'autre part,

$$\|(f_{x_i})\|_{BMO(\ell_\infty^n)} \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sup_{1 \leq i \leq n} |f_{x_i}(t) - f_{x_i, I}| dt$$

comme  $f$  est continue sur un voisinage de 0 et tend vers  $-\infty$  en 0, en utilisant le théorème de convergence monotone, on obtient facilement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f_{x_i})\|_{BMO(\ell_\infty^n)} = \infty,$$

ce qui est contradictoire.  $\square$

**Remarques :** Le résultat subsiste si l'on remplace  $BMO$  par  $BMO_q$ . La preuve montre en fait que la suite de normes sur  $BMO(M_n)$  n'est pas uniformément équivalente à une structure d'espace d'opérateurs.

## 2.2 Séries bilacunaires

On a vu dans le premier chapitre que l'espace d'opérateurs  $\text{Vect}(\gamma_{2^i})$  est exactement  $R \cap C$ ; si on analyse l'espace d'opérateurs dans  $BMO_{R \cap C}$  engendré par  $(z^{2^i})$ , on trouve également  $R \cap C$  et les séries lacunaires ne suffisent pas pour différencier  $BMO_{R \cap C}$  et  $L^\infty/\overline{H^\infty}$ , c'est pourquoi on identifie l'espace engendré par  $(z^{2^i+2^j})_{i>j \geq 0}$  dans  $BMO_{R \cap C}$ .

On note  $(\delta_n)_{n \geq 1}$  une base orthonormée de  $R \cap C$  et  $(e_i)$  la base canonique de  $\ell_1$  et pour simplifier les notations, on pose  $\delta_{i,j} = \delta_{2^i+2^j}$

**Théorème 2.2.1** *Soient  $x_{i,j} \in M_n$ , alors*

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i>j \geq 0} x_{i,j} z^{2^i+2^j} \right\|_{M_n(BMO_{R \cap C})} &\approx \left\| \sum_{i>j \geq 0} x_{i,j} \otimes \delta_{i,j} \right\|_{M_n(R \cap C)} + \\ &\sup_{k \geq 1} \left\| \sum_{i>k > j \geq 0} x_{i,j} \otimes \delta_i \otimes e_j \right\|_{M_n((R \cap C) \otimes_{\min} \ell_1)}. \end{aligned}$$

*Preuve :*

On commence par montrer  $\lesssim$ . Soit  $f = \sum_{i>j \geq 0} x_{i,j} z^{2^i+2^j}$ , on note

$$\|f\|_2 = \left\| \sum_{i>j \geq 0} x_{i,j} \otimes \delta_{i,j} \right\|_{M_n(R \cap C)} + \sup_{k \geq 1} \left\| \sum_{i>k > j \geq 0} x_{i,j} \otimes \delta_i \otimes e_j \right\|_{M_n((R \cap C) \otimes_{\min} \ell_1)}.$$

On majore  $\|f\|_{M_n(BMO_C)}$  par  $\|f\|_2$ . Si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{T}$ ,  $dm_I$  est la mesure normalisée sur  $I$ . On a

$$\begin{aligned} \|f\|_{M_n(BMO_C)}^2 &= \sup_I \left\| \int_I (f - f_I)^* (f - f_I) dm_I \right\|_{M_n} \\ &= \sup_{I, h \in B_{\ell_2^n}} \int_I \|(f - f_I)h\|^2 dm_I \end{aligned}$$

On fixe  $I$  et on suppose que  $|I| \in [2^{-k-1}; 2^{-k}]$ , on pose

$$\|f\|_I^2 = \sup_{h \in B_{\ell_2^n}} \int_I \|(f - f_I)h\|^2 dm_I$$

on découpe  $f$  en trois parties

$$f = \underbrace{\sum_{i>j\geq k} x_{i,j} z^{2^i+2^j}}_{f_1} + \underbrace{\sum_{k\geq i>j} x_{i,j} z^{2^i+2^j}}_{f_2} + \underbrace{\sum_{i>k>j} x_{i,j} z^{2^i+2^j}}_{f_3}.$$

Dans ce qui suit  $\alpha$  désigne un entier de la forme  $2^i + 2^j$ , on note  $\lambda_n = \int_I z^n dm_I$  et  $h_\alpha = x_{i,j}.h$ . Si  $a$  est l'extrémité gauche de  $I$ ,

$$\lambda_n = \frac{1}{|I|} \int_a^{a+|I|} e^{2i\pi nt} dt = \frac{e^{2i\pi na}}{2\pi in|I|} (e^{2i\pi n|I|} - 1).$$

Avec ces notations,

$$\begin{aligned} \|f\|_I^2 &= \sup_{I, h \in B_{\ell_2}^2} \int_I \|f.h\|^2 dm_I - \left\| \int_I f_I.h dm_I \right\|^2 \\ &= \sup_{\alpha, \alpha'} \sum_{\alpha, \alpha'} (\lambda_{\alpha-\alpha'} - \lambda_\alpha \lambda_{\alpha'}) (h_\alpha |h_{\alpha'}). \end{aligned}$$

i) On majore  $\|f_1\|_I^2$  : on somme sur  $\alpha = 2^i + 2^j$  pour  $i > j \geq k$ .

On remarque tout d'abord que  $(\sum_\alpha \|h_\alpha\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_{i>j} x_{i,j} \otimes \delta_{i,j}\|$  et donc

$$\|f_1\|_I \leq \|(\lambda_{\alpha-\alpha'} - \lambda_\alpha \lambda_{\alpha'})_{\alpha, \alpha'}\|_{B(\ell_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))}^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

On estime

$$\begin{aligned} \left(\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \\ &\leq \frac{2^{k+1}}{2\pi} \sum_{i>j\geq k} \frac{1}{2^i + 2^j} \\ &\leq \frac{2^{k+1}}{2\pi} \sum_{j\geq k} \frac{1}{2^j} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

donc  $\|(\lambda_\alpha \lambda_{\alpha'})_{\alpha, \alpha'}\| \leq 1$ .

Pour  $\|(\lambda_{\alpha-\alpha'})\|$ , on pose  $z_0 = e^{2i\pi a}$  et  $z = e^{2i\pi t}$

$$\begin{aligned} \|(\lambda_{\alpha-\alpha'})\| &= \left\| \left( \int_I z^{\alpha-\alpha'} dm_I(t) \right) \right\| \\ &= \left\| \left( z_0^{\alpha-\alpha'} \int_0^{|I|} z^{\alpha-\alpha'} dm_I(t) \right) \right\| \\ &= \frac{1}{2^k |I|} \left\| \left( \int_0^{2^k |I|} z^{(\alpha-\alpha')2^{-k}} dt \right) \right\| \end{aligned}$$

Pour cette dernière matrice, si  $\xi$  et  $\eta$  sont dans  $\ell_2$ , comme  $\alpha 2^{-k}$  est un entier pour tout  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2^k |I|} \sum_{\alpha, \alpha'} z^{(\alpha-\alpha')2^{-k}} \xi_\alpha \eta_{\alpha'} dt \right| &= \left| \int_0^{2^k |I|} (\sum_\alpha \xi_\alpha z^{\alpha 2^{-k}}) (\sum_{\alpha'} \eta_{\alpha'} z^{\alpha' 2^{-k}}) dt \right| \\ &\leq \left\| \sum_\alpha \xi_\alpha z^{\alpha 2^{-k}} \right\|_{L^2([0,1])}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\| \sum_{\alpha'} \eta_{\alpha'} z^{\alpha' 2^{-k}} \right\|_{L^2([0,1])}^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\xi\|_{\ell_2}^{\frac{1}{2}} \cdot \|\eta\|_{\ell_2}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et donc  $\|(\lambda_{\alpha-\alpha'})\| \leq 1$ , ce qui termine le cas de  $f_1$ .

ii) On majore  $\|f_2\|_I$ .

$$\|f_2\|_I^2 = \left\| \int_I (f_2 - f_{2,I})^* (f_2 - f_{2,I}) dm_I \right\|_{M_n}.$$

On regarde  $f_2 - f_{2,I} = \sum_{k \geq i > j} (z^{2^i+2^j} - \lambda_{2^i+2^j}) x_{i,j}$  sur  $I$ , pour  $z = e^{2i\pi(a+t)} \in I$  (ici  $i^2 = -1$ ), on utilise toujours  $\alpha = 2^i + 2^j$

$$-(z^\alpha - \lambda_\alpha) = \frac{e^{2i\pi\alpha a}}{2i\pi|I|\alpha} \left[ e^{2i\pi\alpha|I|} - 1 - 2i\pi\alpha|I|(e^{2i\pi\alpha t} - 1) - 2i\pi\alpha|I| \right].$$

On utilise  $|e^{ix} - 1| \leq |x|$  et  $|e^{ix} - 1 - ix| \leq \frac{|x|^2}{2}$ , et la notation  $\theta = 2\pi\alpha|I|$

$$|z^\alpha - \lambda_\alpha| \leq \frac{1}{\theta} \left[ \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^2 t}{|I|} \right] \leq \frac{3}{2}\theta.$$

À  $i$  fixé, on a  $\theta \leq 4\pi 2^i|I|$  et en prenant  $k = i + 1$  dans le terme en sup de la définition de  $\|f\|_2$ , il vient  $\|\sum_{j=0}^i e_j \otimes x_{i,j}\|_{M_n(\min \ell_1)} \leq \|f\|_2$ ; en combinant :

$$\left\| \sum_{j=0}^i (z^{2^i+2^j} - \lambda_{2^i+2^j}) x_{i,j} \right\|_{M_n} \leq \left\| \sum_{j=0}^i e_j \otimes x_{i,j} \right\|_{M_n(\min \ell_1)} 4\pi|I|2^i \leq 4\pi|I|2^i \|f\|_2.$$

Comme

$$\|f_2(z) - (f_2)_I\| \leq \sum_{i \leq k} \left\| \sum_{j=0}^i (z^{2^i+2^j} - \lambda_{2^i+2^j}) x_{i,j} \right\|,$$

cela donne

$$\|f_2\|_I \leq \left( \int_I \left( \sum_{k \geq i \geq 1} 6\pi 2^i |I| \|f\|_2 \right)^2 dm_I \right)^{\frac{1}{2}} \leq 6\pi 2^{k+1} |I| \|f\|_2 \leq 24\pi \|f\|_2.$$

iii) On majore  $\|f_3\|_I$ . On note  $h_{i,j} = x_{i,j}h$  pour  $h \in B_{\ell_2}$ . On veut majorer uniformément en  $h$  l'expression

$$\int_I \left\| \sum_{i > k > j} z^{2^i+2^j} h_{i,j} \right\|^2 dm_I - \left\| \int_I \sum_{i > k > j} z^{2^i+2^j} h_{i,j} dm_I \right\|^2.$$

Par définition de la norme  $\|\cdot\|_2$ , pour tous complexes  $(\alpha_j)$ ,

$$\sum_{i > k} \left\| \sum_{k > j} h_{i,j} \alpha_j \right\|^2 \leq \|f\|_2^2 \max_j |\alpha_j|^2. \quad (*)$$

Quitte à translater, on peut supposer que  $I = [0, |I|]$ . On majore

$$A = \left( \int_I \left\| \sum_{i > k} z^{2^i} \sum_{k > j} z^{2^j} h_{i,j} \right\|^2 dm_I \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons ici  $z = e^{2i\pi t}$ , on a  $z^{2^j} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2i\pi t 2^j)^n}{n!}$  d'où :

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{n \geq 0} (2\pi)^n \left( \int_I \left\| \sum_{i > k} \frac{z^{2^i} t^n}{n!} \sum_{k > j} h_{i,j} 2^{nj} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dm_I(t) \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi)^n}{n!} \left( \int_{[0, 2^{-k}]} \left\| \sum_{i > k} z^{2^i} t^n \sum_{k > j} h_{i,j} 2^{nj} \right\|^2 dm_{[0, 2^{-k}]}(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi 2^{-k})^n}{n!} \left( \int_{[0, 2^{-k}]} \left\| \sum_{i > k} z^{2^i} \sum_{k > j} h_{i,j} 2^{nj} \right\|^2 dm_{[0, 2^{-k}]}(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi 2^{-k})^n}{n!} \left( \sum_{i > k} \left\| \sum_{k > j} h_{i,j} 2^{nj} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



La dernière égalité a lieu car comme  $i > k$ , la famille  $(z^{2^i})$  est un système orthonormé de  $L^2([0, 2^{-k}], dm_{[0, 2^{-k}]})$ . Par (\*),

$$\begin{aligned} A &\leq \sqrt{2} \sum_{n \geq 0} \frac{(2\pi 2^{-k})^n}{n!} 2^{n(k-1)} \|f\|_2 \\ &\leq \sqrt{2} e^\pi \|f\|_2 \end{aligned}$$

On conclut car

$$\|f_3\|_I \leq A \leq \sqrt{2} e^\pi \|f\|_2.$$

En remplaçant  $x_{i,j}$  par  $x_{i,j}^*$ , on obtient le résultat de majoration pour  $M_n(BMO_R)$  car  $\|\cdot\|_2$  ne change pas.

On passe à la minoration du théorème.

a) On commence par la partie en  $R \cap C$ . Par définition de la norme  $BMO_C$ , pour tout  $h \in B_{\ell_2}$  en prenant  $I = [0, 1]$

$$\|f\|_{BMO_C}^2 \geq \int_0^1 \|(f - 0) \cdot h\|^2 dt = \sum_{i > j} \|x_{i,j} \cdot h\|^2.$$

En raisonnant de même avec  $BMO_R$ , on obtient la minoration

$$\|f\|_{BMO_{R \cap C}} \geq \left\| \sum_{i > j} \delta_{i,j} \otimes x_{i,j} \right\|.$$

b) On fixe  $k$ , on s'intéresse à

$$\left\| \sum_{i > k > j \geq 0} x_{i,j} \otimes \delta_i \otimes e_j \right\|_{M_n((R \cap C) \otimes_{\min} \min \ell_1)} = \|(x_{i,j})\|_{B(\ell_\infty, M_n(R \cap C))}.$$

On distingue une fois de plus  $R$  et  $C$ , quitte à tester en  $h \in B_{\ell_2}$ , on est ainsi ramené à montrer que pour toute suite  $(\alpha_j)$  de complexes de module 1, on a une estimation du type

$$\sum_{i > k} \left\| \sum_{k > j} \alpha_j x_{i,j} \cdot h \right\|^2 \leq C \|f\|_{M_n(BMO_C)}^2, \quad (*)$$

avec  $C$  une constante absolue.

**Lemme 2.2.2** *Il existe un polynôme trigonométrique  $P = \sum_{n=-2^{k-1}+1}^{2^{k-1}} p_n z^n$  vérifiant*

$$\begin{aligned} &.p_0 = 0 \\ &.\forall 0 \leq j < k, p_{2^j} = \alpha_j \\ &.\|P\|_{L^1} \leq 9 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un argument classique de produit de Riesz,  $P$  est donné par la formule

$$P = 2 \left[ \prod_{\substack{j=0 \\ j \text{ pair}}}^{k-2} \left( 1 + \frac{\alpha_j}{2} z^{2^j} + \frac{\bar{\alpha}_j}{2} \bar{z}^{2^j} \right) + \prod_{\substack{j=0 \\ j \text{ impair}}}^{k-2} \left( 1 + \frac{\alpha_j}{2} z^{2^j} + \frac{\bar{\alpha}_j}{2} \bar{z}^{2^j} \right) \right] + \alpha_{k-1} z^{2^{k-1}} - 2.$$

La distinction entre  $j$  pair et impair provient du manque de lacunarité de la suite  $2^j$ .

**Lemme 2.2.3** *Pour toute famille  $(\eta_t)$  de vecteurs dans  $\ell_2$ , il existe une fonction analytique  $Q = \sum_{n \geq 0} q_n z^n$  à coefficients dans  $\ell_2$  faiblement mesurable telle que*

$$\begin{aligned} \forall t \geq 1, q_{2^t} &= \eta_t \\ \|Q\|_{L^\infty(\ell_2)} &\leq C \left( \sum_{t \geq 1} \|\eta_t\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante absolue.

*Preuve* : Par dualité, cela revient à montrer que dans  $L^1(\ell_2)/\overline{H^1}(\ell_2)$ , l'espace engendré par les fonctions  $(z^{2^t})$  est isomorphe à  $\ell_2(\ell_2)$ .

Si  $g$  est anti-analytique, comme la transformée de Hilbert est bornée de  $L^1(\ell_2)$  dans  $L^{\frac{1}{2}}(\ell_2)$ , on a

$$\|g + \sum_{t \geq 0} \eta_t z^{2^t}\|_{L^1(\ell_2)} \geq c \left\| \sum_{t \geq 0} \eta_t z^{2^t} \right\|_{L^{\frac{1}{2}}(\ell_2)} \geq c' \left\| \sum_{t \geq 0} \eta_t z^{2^t} \right\|_{L^1(\ell_2)},$$

la seconde inégalité provient des inégalités de Khintchine à valeurs  $\ell_2$ , d'où le lemme.  $\square$

Soit  $P$  donné par le premier lemme, et  $Q$  donnée par le second, on peut supposer en outre que  $q_0 = q_1 = 0$ , on pose  $R(z) = Q(z^{2^k})$ , ainsi  $PR$  est analytique et pour  $i < j$

$$\widehat{PR}(2^i + 2^j) = \begin{cases} \alpha_j \eta_{i-k} & \text{si } i > k > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

en effet, on a  $PR = \sum_{n \geq 2} \sum_{m=-2^{k-1}+1}^{2^{k-1}} p_m q_n z^{n2^k+m}$  :

– si  $i > k > j$  et  $n2^k + m = 2^i + 2^j$ , on a

$$1 - 2^{k-1} \leq 2^j - m \leq 2^{k-1} + 2^{k-1} - 1$$

et donc  $|2^j - m| < 2^k$  d'où

$$2^i - 2^k < n2^k < 2^i + 2^k \quad \text{soit} \quad n = 2^{i-k} \quad \text{puis} \quad m = 2^j,$$

le terme  $p_m q_n$  d'exposant  $2^i + 2^j$  est donc bien  $\alpha_j \eta_{i-k}$ .

– si  $i > j \geq k$  et  $n2^k + m = 2^i + 2^j$ , alors  $m$  divise  $2^k$  est donc  $m = 0$ , comme  $p_0 = 0$  le terme d'exposant  $2^i + 2^j$  est 0.

– si  $k \geq i > j$  et  $n2^k + m = 2^i + 2^j$ , on a

$$n2^k = 2^i + 2^j - m \leq 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-1} - 1 < 2 \cdot 2^k \quad \text{donc} \quad n = 0 \quad \text{ou} \quad n = 1,$$

comme  $q_0 = q_1 = 0$ , le terme d'exposant  $2^i + 2^j$  est 0.

De plus,  $\|PR\|_{H^1(\ell_2)} \leq C$  pour une constante universelle  $C$ . On utilise la dualité  $H^1(\ell_2)$ - $BMO(\ell_2)$  (le théorème de Fefferman est vrai pour le Banach  $\ell_2$ ) :

$$\left\langle \sum_{i>j} x_{i,j} \cdot h z^{2^i+2^j}, RP \right\rangle = \sum_{i>k} (\eta_{i-k} | \sum_{j<k} x_{i,j} \cdot h \alpha_j) \leq C \|f\|_{BMO_C}.$$

En prenant le sup sur les  $(\eta_t)$  dans la boule unité de  $\ell_2(\ell_2^n)$ , on obtient l'inégalité (\*).  $\square$

Ce résultat va nous permettre de comparer les espaces  $BMO_{R \cap C}$  et  $L^\infty/\overline{H^\infty}$ . On choisit des  $x_{i,j}$  particuliers, on note  $\Delta_n$  le sous-espace d'opérateurs de  $M_n(BMO_{R \cap C})$

$$\Delta_n = \text{Vect} (e_{i,j} z^{2^i+2^j})_{1 \leq j < i \leq n}.$$

$T_n$  est le sous-espace d'opérateurs de  $M_n$  constitué des matrices triangulaires supérieures.

**Théorème 2.2.4** *On a un isomorphisme complet :*

$$\Delta_n \approx M_n/T_n,$$

comme application quotient de  $j : M_n \rightarrow \Delta_n : e_{i,j} \mapsto \delta_{i>j} e_{i,j} z^{2^i+2^j}$  avec  $\delta$  le symbole de Kroenecker.

Pour la preuve, on a besoin du lemme suivant apparaissant dans [Par], comme la brique de base pour la démonstration du théorème de Nehari-Sarason-Page.

**Lemme 2.2.5** *Soit  $M$  une algèbre de von Neumann, alors pour  $a, b, c \in M$*

$$\inf_{x \in M} \left\| \begin{bmatrix} a & x \\ b & c \end{bmatrix} \right\| = \max \left\{ \left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\| ; \left\| \begin{bmatrix} b & c \end{bmatrix} \right\| \right\}.$$

*Preuve :* En fait, il y a une formule explicite pour  $x$ . Supposons que le terme de droite soit égal à 1. Alors, comme  $a^*a + b^*b \leq 1$ , il existe  $l$  de norme inférieure à 1 tel que  $a = l(1 - b^*b)^{\frac{1}{2}}$ , de même, il existe  $k$  de norme inférieure à 1, tel que  $c = k(1 - bb^*)^{\frac{1}{2}}$ , alors comme la matrice

$$\begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (1 - b^*b)^{\frac{1}{2}} & -b^* \\ b & (1 - bb^*)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

est de norme inférieure à 1, (la matrice du milieu est unitaire)  $x = -lb^*k$  convient.  $\square$

*Preuve :* Pour montrer le théorème, on calcule explicitement la norme  $\|\cdot\|_2$  avec des matrices  $x_{i,j}$  de taille  $p$  :

$$\left\| \sum_{n \geq i > j \geq 1} x_{i,j} \otimes e_{i,j} z^{2^i+2^j} \right\|_2.$$

On commence par le terme  $\sup_k$  :

$$\left\| \sum_{i > k > j} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \otimes e_j \otimes \delta_i \right\| = \sup_{|\alpha_j|=1} \left\| \sum_{i > k > j} x_{i,j} \alpha_j \otimes e_{i,j} \otimes \delta_i \right\|$$

On remarque que l'on peut enlever les  $\alpha_j$  car l'application  $e_{i,j} \mapsto \alpha_j e_{i,j}$  est une isométrie complète correspondant à la multiplication à gauche par l'unitaire  $\text{diag}(\alpha_j)$ . De même, l'application  $e_{i,j} \mapsto \delta_i \otimes e_{i,j}$  est une isométrie complète de  $M_n$  dans  $M_{n(n+1)}$  (cela résulte de  $\|\delta_i\| \leq 1$ ) donc

$$\left\| \sum_{i > k > j} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \otimes e_j \otimes \delta_i \right\| = \left\| \sum_{i > k > j} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\|.$$

La partie en  $R \cap C$  donne

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \geq i > j \geq 1} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \otimes \delta_{i,j} \right\| &= \max \left\{ \left\| \sum_{i > j} x_{i,j} x_{i,j}^* \otimes e_{i,i} \right\| ; \left\| \sum_{i > j} x_{i,j}^* x_{i,j} \otimes e_{j,j} \right\| \right\} \\ &= \max \left\{ \max_i \left\| \sum_{j=1}^{i-1} x_{i,j} x_{i,j}^* \right\| ; \max_j \left\| \sum_{i=j+1}^n x_{i,j}^* x_{i,j} \right\| \right\} \\ &= \max \left\{ \max_i \left\| \sum_{j=1}^{i-1} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\| ; \max_j \left\| \sum_{i=j+1}^n x_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\| \right\} \end{aligned}$$

ce qui, combiné avec les calculs des termes précédents, donne

$$\left\| \sum_{n \geq i > j \geq 1} x_{i,j} \otimes e_{i,j} z^{2^i+2^j} \right\|_2 \approx \max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{i \geq k > j} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\|.$$

Montrons maintenant que pour tout  $n$  et tout  $p$

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{n \geq i \geq k > j \geq 1} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\| = \left\| \sum_{i > j} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\|_{M_p(M_n/T_n)}.$$

Pour cela, on applique le lemme de Parrott  $n - 1$  fois. Soit  $(x_{i,j})_{1 \leq j < i \leq n}$  des matrices de taille  $p$  telles que

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left\| \sum_{n > i \geq k > j} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\| < 1. \quad (*)$$

On complète au fur et à mesure la matrice, on pose  $x_{1,j} = 0$ , l'estimation pour  $k = 2$  et  $k = 3$  dans (\*) combinée au lemme 2.2.5 nous permet de trouver un élément  $x_{2,2}$  tel que  $X_1 = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2}$  ait une norme strictement inférieure à 1. En effet, on a le schéma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_{2,1} & ? \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

L'estimation sur la norme de  $X_1$  avec celle provenant de (\*) pour  $k = 4$  permet de trouver  $x_{2,3}$  et  $x_{3,3}$  tels que  $X_2 = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3}$  soit de norme strictement plus petite que 1. On continue ainsi à construire  $X_3$  en utilisant  $X_2$  et l'estimation pour  $k = 5$ , etc. . .

La matrice  $X_{n-1}$  donne le sens  $\geq$  dans le théorème.

Réciproquement, il est évident que si l'on peut compléter la matrice triangulaire inférieure (strictement) en une matrice de norme plus petite que 1, alors on a les estimations (\*).  $\square$

On détermine maintenant le même sous-espace mais dans  $M_n(L^\infty/\overline{H^\infty})$  :

$$\nabla_n = \text{Vect} (e_{i,j} z^{2^i+2^j})_{1 \leq j < i \leq n}.$$

**Proposition 2.2.6** *L'espace  $\nabla_n$  est complètement isométrique au sous-espace de  $M_n$*

$$\text{Vect} (e_{i,j})_{1 \leq j < i \leq n},$$

par l'application  $e_{i,j} \mapsto e_{i,j} z^{2^i+2^j}$ .

*Preuve* : Ce type de calculs sera fait en détail dans la section suivante.

Si pour  $x_{i,j}$  des matrices de taille  $p$ ,  $\left\| \sum_{i > j} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \right\| = 1$ , alors en multipliant à gauche et à droite par la matrice diagonale  $\sum_i z^{2^i} e_{i,i}$ , on obtient une fonction de  $\mathbb{T}$  à valeurs dans  $M_{pn}$ , qui est bornée par 1 dans  $L^\infty(M_{np})$ , ce qui donne une première inégalité.

Pour la seconde, on procède par dualité pour une matrice  $X \in S_n^1[S_p^1]$  de norme 1, on construit de même une fonction de  $\mathbb{T}$  à valeurs  $S_{pn}^1$  dans  $H^1(S_{np}^1)$  de norme 1, en la testant contre  $\sum_{i > j} x_{i,j} \otimes e_{i,j} \otimes \gamma_{2^i+2^j}$  et en prenant le sup sur toutes les telles matrices  $X$ , on obtient l'autre estimation.  $\square$

**Remarque** : En fait d'une manière générale, on a

$$\left\| \sum_{i > j} x_{i,j} \otimes (e_{i,j} + e_{j,i}) \right\| \leq \left\| \sum_{i > j} x_{i,j} \otimes \gamma_{2^i+2^j} \right\|.$$

Car la matrice apparaissant à gauche est extraite de celle de droite en ne gardant que les lignes et les colonnes d'indice  $2^n$  dans les matrices  $\gamma_{2^i+2^j}$ .

**Théorème 2.2.7** *L'application naturelle  $\frac{1}{2}(Id+iH)$  de  $BMO_{R \cap C}$  dans  $L^\infty/\overline{H}^\infty$  n'est pas complètement bornée.*

*Preuve* : Si tel était le cas,  $\Delta_n$  et  $\nabla_n$  seraient isomorphes uniformément en  $n$ , ce qui impliquerait que la projection de  $M_n$  sur les matrices triangulaires inférieures serait uniformément bornée, ce qui n'est pas le cas d'après [KP].  $\square$

**Remarque** : Plus précisément, la norme  $cb$  de cette application entre  $\nabla_n$  et  $\Delta_n$  est minorée par  $\log n$  ; les résultats récents de [NPTV] montrent que c'est bien le bon ordre de grandeur.

Il serait intéressant de répondre à la question suivante :

**Problème** : Trouver une formule explicite pour la norme de  $\sum_{i>j} x_{i,j} \gamma_{2^i+2^j}$  comme matrice de Hankel à valeurs opérateurs ?

Il est assez délicat d'imaginer une telle formule ; au niveau Banach elle doit correspondre à celle du théorème 2.2.1, les remarques précédentes en donne des minoration. On sait que pour les suites lacunaires ( $j$  fixé), on doit trouver  $R \cap C$  et pour les suites dans une même plage dyadique ( $i$  fixé), on doit trouver  $\min(\ell_1)$  (ce qui est bien le cas dans le théorème 2.2.1).

## 2.3 Bases inconditionnelles

Dans la partie précédente, on a démontré que l'isomorphisme classique entre  $H_{at}^1$  et  $H^1$  ne s'étend pas au niveau espace d'opérateurs entre  $H_{R+C}^1$  et  $H^1$ . Dans cette partie, on montre qu'il n'y a pas d'isomorphisme complet entre ses deux espaces en utilisant l'existence de bases.

On commence par rappeler quelques définitions. On dit qu'un espace de Banach  $X$  admet une décomposition inconditionnelle de rang fini s'il existe une suite d'endomorphismes de  $X$  de rang fini  $(P_n)$  tels que

$$\sup_{\epsilon_n = \pm 1} \sup_N \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n P_n \right\|_{X \rightarrow X} < \infty$$

et pour tout  $x \in X$ ,  $x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$  où la série converge inconditionnellement. Si  $X$  est un espace d'opérateurs, une telle décomposition est dite complètement inconditionnelle si en outre

$$\sup_{\epsilon_n = \pm 1} \sup_N \left\| \sum_{n=0}^N \epsilon_n P_n \right\|_{CB(X, X)} < \infty.$$

On dit qu'un espace de Banach  $X$  admet une base s'il existe une famille de vecteurs  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout vecteur  $x \in X$ , il existe une unique suite  $\alpha_i$  de complexes telle que  $\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i$  converge en norme vers  $x$ . Dans cette situation, on note  $P_n : x \mapsto \alpha_n x_n$ , ce sont des projections bornées commutant deux à deux.

La suite  $(P_n)$  forme alors une décomposition de rang fini de l'identité de  $X$ , si elle est inconditionnelle, on dit que la base  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est inconditionnelle.

Si  $X$  est un espace d'opérateurs, une base  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  du Banach  $X$  est une base complètement bornée si les sommes partielles des projections  $P_n$  sont uniformément complètement bornées. Si la décomposition formée par les  $P_n$  est complètement inconditionnelle, on dit que  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une base complètement inconditionnelle.

### 2.3.1 Cas du Banach $H^1$ et $H_{R+C}^1$

Commençons par rappeler les résultats pour l'espace de Banach  $H^1$ .

Le premier résultat de théorie locale pour l'espace de Banach  $H^1$  remonte à Stein [St]. On appelle noyau de la Vallée-Poussin d'ordre  $n$ , le polynôme trigonométrique  $W_n$  défini par :

$$\hat{W}_n(p) = \begin{cases} \frac{p}{2^{n-1}} - 1 & \text{si } p \in [2^{n-1}, 2^n] \\ 1 & \text{si } p \in [2^n, 2^{n+1}] \\ 2 - \frac{p}{2^{n+1}} & \text{si } p \in [2^{n+1}, 2^{n+2}] \\ 0 & \text{si } p \notin [2^{n-1}, 2^{n+2}] \end{cases}$$

On identifie  $W_n$  et les multiplicateurs de Fourier correspondants, c'est à dire  $W_n : f \mapsto f \star W_n$ . Le résultat de Stein qui est à l'origine de la théorie de Littlewood-Paley est le suivant :

**Théorème 2.3.1** *La famille  $(W_n)$  est une décomposition inconditionnelle de l'identité de  $H^1$ .*

Ce résultat peut se démontrer en utilisant des intégrales singulières de type Calderón-Zygmund, par conséquent il reste vrai pour l'espace des fonctions analytiques dans  $H_{at}^1(\ell_2)$ , et par définition des  $C, R$ -atomes, il le reste pour  $H_R^1$  et  $H_C^1$ , par conséquent pour  $H_{R+C}^1$ , d'où

**Corollaire 2.3.2** *La famille  $(W_n)$  est une décomposition complètement inconditionnelle de l'identité pour l'espace de fonctions analytiques  $H_{R+C}^1 \cap H^1$  vu comme sous-espace de  $H_{R+C}^1$ .*

L'étape suivante était de savoir si le Banach  $H^1$  admet une base inconditionnelle, Maurey dans [Ma] a répondu par l'affirmative à cette question mais d'une façon assez indirecte ; il introduit un autre espace  $H_{dy}^1$  défini à partir de martingales dyadiques qui admet une base inconditionnelle (presque par définition) et montre qu'il est isomorphe à  $H^1$  en utilisant le théorème d'isomorphisme de Pełczyński.

Ensuite, Wojtaszczyk [W], a explicité une telle base ; le système de Franklin s'avère être une base inconditionnelle de l'espace atomique  $H_{at}^1(\mathbb{R})$  ; la démonstration repose sur des estimations assez fines pour le système de Franklin obtenues auparavant par Carleson.

Depuis lors, la théorie des ondelettes a permis de mieux comprendre la situation, Meyer dans son livre (chapitres V et VI) [Me], construit de nombreuses bases inconditionnelles de  $H^1(\mathbb{R})$ . En suivant le livre de Hernandez et Weiss [HW], on trouve : théorème 6.19 :

**Théorème 2.3.3** *Si  $\psi$  est une ondelette orthonormée telle qu'il existe une fonction décroissante  $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant*

$$|\psi(x)| + |\psi'(x)| \leq W(|x|) \quad \text{et} \quad \int_0^\infty tW(t) dt < \infty.$$

*Alors, la base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  constituée des fonctions  $\{\psi_{j,k} = \psi(2^j \cdot + k) ; j, k \in \mathbb{Z}\}$  est une base inconditionnelle pour  $H_{at}^1(\mathbb{R})$ .*

La preuve consiste à montrer que les projections sur les sous-espaces de  $H_{at}^1(\mathbb{R})$  engendrés par un nombre fini de  $\psi_{j,k}$  sont des opérateurs à noyau de type Calderón-Zygmund. Comme pour le théorème de Stein, cela implique que le résultat passe à  $H_{at}^1(\mathbb{R}, \ell_2)$ . Des techniques classiques en analyse harmonique permettent alors de passer de la droite réelle au cercle unité, on en déduit :

**Corollaire 2.3.4** *L'espace  $H_{R+C}^1$  admet une base complètement inconditionnelle.*

### 2.3.2 Absence de base complètement inconditionnelle pour $H^1$

On passe au cas de l'espace d'opérateurs  $H^1$ , on montre que les propriétés de décomposition ne passent pas au cadre complètement borné. En traduisant les résultats de [LuP], dans un langage espaces d'opérateurs, on peut dire que Françoise Piquard construit un multiplicateur de Fourier borné sur  $H^1$  mais non complètement borné ( $H^1$  n'est donc pas maximal!). C'est ce genre de construction que l'on retrouve dans la preuve du théorème suivant.

D'après la section de présentation, une application linéaire  $u$  de  $H^1$  dans lui-même est complètement bornée si  $Id \otimes u : H^1(S^1) \rightarrow H^1(S^1)$  est bornée.

Le résultat de Stein n'est plus vrai au niveau espace d'opérateurs :

**Théorème 2.3.5** *L'espace  $H^1(\mathbb{T})$  n'admet pas de décomposition complètement inconditionnelle de rang fini de l'identité.*

Cela signifie qu'on ne peut pas trouver de décomposition inconditionnelle  $(P_n)$  de rang fini de  $H^1$ , telle que la série  $\sum P_n \otimes Id_{S^1}$  soit inconditionnelle dans  $B(H^1(S^1), H^1(S^1))$ .

Plus précisément on montre que si  $(P_n)$  est une telle décomposition, alors on peut construire une suite  $a_n$  bornée en valeur absolue par 1, telle que

$$\left\| \sum a_n P_n \otimes Id \right\|_{H^1(S^1_d) \rightarrow H^1(S^1_d)} \geq K \ln d.$$

Ceci permet de conclure puisque, comme  $S^1_d$  est complémenté dans  $S^1$ , si  $(P_n)$  était une décomposition complètement inconditionnelle de constante  $C$ , alors on aurait

$$\left\| \sum a_n P_n \otimes Id \right\|_{H^1(S^1_d) \rightarrow H^1(S^1_d)} \leq C$$

pour toute telle famille  $(a_n)$ .

On a besoin du fait élémentaire suivant pour la preuve du théorème :

**Lemme 2.3.6** *Soit  $\sum f_k$  une série inconditionnelle dans  $L^1(\mathbb{T})$ , alors les séries  $\sum \epsilon_k f_k$  sont uniformément de Cauchy en  $\epsilon_k \in [-1, 1]$ .*

*Preuve :* Si ce n'est pas le cas, alors

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall K \in \mathbb{N}, \quad \exists j_K \geq i_K \geq K, \quad \exists (\epsilon_k^K) \in [-1, 1]^{\mathbb{N}} \text{ tels que } \left\| \sum_{k=i_K}^{j_K} \epsilon_k^K f_k \right\| \geq \epsilon.$$

On peut alors déterminer par récurrence une suite  $a_k$  telle que  $\sum a_k f_k$  ne soit pas de Cauchy :

On prend  $K_1 = 1$  et on pose

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k < i_1 \\ \epsilon_k^1 & \text{pour } i_1 \leq k \leq j_1 \end{cases}$$

On fixe ensuite  $K_2 > j_{K_1}$  et on définit

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{pour } j_{K_1} < k < i_{K_2} \\ \epsilon_k^{K_2} & \text{pour } i_{K_2} \leq k \leq j_{K_2} \end{cases}$$

On continue ensuite ce procédé, en prenant  $K_3 > j_{K_2} \dots$

Puisque, pour tout  $n$ ,  $\left\| \sum_{k=i_{K_n}}^{j_{K_n}} a_k f_k \right\| > \epsilon$ , la série de terme général  $f_k$  n'est pas inconditionnelle.  $\square$

*Démonstration du théorème :* On adopte la notation,  $e_n(t) = e^{2\pi int}$ . La preuve s'inspire d'un des résultats de [NPTV]. L'idée est la suivante : à partir d'une décomposition inconditionnelle de l'identité ( $P_n$ ), on construit des sortes de multiplicateurs qui permettent ensuite de transférer la projection triangulaire de  $S_d^1$  comme endomorphisme de  $H^1(S_d^1)$ .

Soit  $\eta > 0$  fixé, on construit par récurrence :

- ( $\phi_n$ ) une suite d'applications de rang fini de la forme  $\sum a_k P_k$  avec  $a_k \in \{0, 1\}$ ,
- ( $\alpha_n$ ), ( $\beta_n$ ) des suites croissantes d'entiers,
- ( $\epsilon_n$ ) une suite de réels croissante majorée par  $\eta$ ,

telles que,

$$\forall i, j \leq n \begin{cases} (i) & j \leq i & \|\phi_n(e_{\alpha_i + \beta_j})\| \leq \epsilon_n \\ (ii) & i < j & \|\phi_n(e_{\alpha_i + \beta_j}) - e_{\alpha_i + \beta_j}\| \leq \epsilon_n \end{cases}$$

On initialise, la récurrence par  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon$  un réel quelconque (petit). On choisit  $\phi_1 = 0$ , (i) et (ii) sont vérifiées.

On suppose toutes les suites construites jusqu'au rang  $n$ .

On fixe  $\delta > 0$ . D'après le lemme, on peut trouver un entier  $K$ , tel que

$$\forall i, j \leq n, \quad \forall l \geq k \geq K, \quad \forall a_k \in \{0, 1\}, \quad \left\| \sum_{t=k}^l a_t P_t(e_{\alpha_i + \beta_j}) \right\| \leq \delta$$

On peut supposer que si  $\phi_n = \sum_{k=1}^A a_k P_k$ , alors  $K > A$ .

On détermine  $\beta_{n+1}$  ;

puisque les  $P_k$  sont de rang fini, on a  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P_k(e_\beta) = 0$  dans  $H^1$  car  $e_\beta$  tend faiblement vers 0. On choisit  $\beta_{n+1}$  suffisamment grand afin que pour tout  $\beta \geq \beta_{n+1}$  et tout choix  $(a_k)_1^K \in \{0, 1\}^K$  (il y en a un nombre fini)

$$\left\| \sum_{k=1}^K a_k P_k(e_\beta) \right\| < \delta.$$

On détermine  $\phi_{n+1}$  ;

puisque  $\sum P_k$  tend simplement vers l'identité de  $H^1$ , on peut trouver un entier  $N > K$  de sorte que pour tout  $i \leq n$

$$\left\| \sum_{k=1}^N P_k(e_{\alpha_i + \beta_{n+1}}) - e_{\alpha_i + \beta_{n+1}} \right\| < \delta.$$

On pose  $\phi_{n+1} = \phi_n + \sum_{k=K}^N P_k$ . Le choix de  $K$  assure que  $\phi_{n+1}$  est de la forme  $\sum a_k P_k$  avec  $a_k \in \{0, 1\}$ .

On vérifie (ii) pour  $i < n + 1$

$$\begin{aligned} \|\phi_{n+1}(e_{\alpha_i + \beta_{n+1}}) - e_{\alpha_i + \beta_{n+1}}\| &\leq \|\phi_n(e_{\alpha_i + \beta_{n+1}})\| + \left\| \sum_{k=1}^{K-1} P_k(e_{\alpha_i + \beta_{n+1}}) \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_{k=1}^N P_k(e_{\alpha_i + \beta_{n+1}}) - e_{\alpha_i + \beta_{n+1}} \right\| \\ &\leq \delta + \delta + \delta \\ &\leq 3\delta. \end{aligned}$$

On vérifie (ii) pour  $i < j \leq n$

$$\begin{aligned} \|\phi_{n+1}(e_{\alpha_i + \beta_j}) - e_{\alpha_i + \beta_j}\| &\leq \|\phi_n(e_{\alpha_i + \beta_j}) - e_{\alpha_i + \beta_j}\| + \left\| \sum_{k=K}^N P_k(e_{\alpha_i + \beta_j}) \right\| \\ &\leq \epsilon_n + \delta \end{aligned}$$



Il reste à fixer  $\alpha_{n+1}$  et vérifier (i).

Puisque  $\phi_{n+1}$  est de rang fini,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \phi_{n+1}(e_\alpha) = 0$  dans  $H^1$ , on peut donc choisir  $\alpha_{n+1}$  de sorte que (ii) soit vérifiée pour  $i = n + 1$

$$\forall j \leq n + 1 \quad \|\phi_{n+1}(e_{\alpha_{n+1} + \beta_j})\| \leq \delta.$$

Dans le cas où  $j \leq i \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} \|\phi_{n+1}(e_{\alpha_i + \beta_j})\| &\leq \|\phi_n(e_{\alpha_i + \beta_j})\| + \|\sum_{k=K}^N P_k(e_{\alpha_i + \beta_j})\| \\ &\leq \epsilon_n + \delta \end{aligned}$$

Finalement, avec  $\epsilon_{n+1} = \max(3\delta, \epsilon_n + \delta)$ , l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour un choix convenable de  $\delta$ , et on peut en outre supposer que  $\epsilon_{n+1} \leq (1 + 2^{-(n+1)})\epsilon_n$ .

En résumé, il est possible de construire des suites avec les propriétés (i) et (ii), avec  $\epsilon_n \leq \epsilon \prod_{k=1}^n (1 + 2^{-k}) < \eta$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit.

On utilise cette construction pour minorer

$$C = \sup_{a_k \in \{0,1\}} \left\| \sum a_k P_k \otimes Id_{S_d^1} \right\|_{H^1(S_d^1) \rightarrow H^1(S_d^1)}. \quad (*)$$

En particulier, les  $\|\phi_n \otimes Id_{S_d^1}\|$  avec les  $\phi_n$  construits précédemment sont bornées par  $C$ . Soit  $X = (x_{i,j})$  une matrice de taille  $d$ , l'élément de  $H^1(S_d^1)$  défini par

$$Z = \text{diag}(e_{\alpha_i}) X \text{diag}(e_{\beta_i}),$$

où  $\text{diag}(d_i)$  est la matrice diagonale de taille  $d$  ayant pour coefficients diagonaux les  $d_i$ , vérifie  $\|Z\|_{H^1(S_d^1)} = \|X\|_{S_d^1}$ .

On note  $T$  la projection triangulaire supérieure dans  $S_d^1$ ; il s'agit de l'application linéaire de  $S_d^1$  dans lui-même qui à une matrice  $X = (x_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$  associe la matrice

$$T(X) = (x_{i,j} \delta_{j>i})_{1 \leq i,j \leq d}$$

où  $\delta$  est toujours le symbole de Kroenecker. Les propriétés (i) et (ii) impliquent

$$\|\phi_n \otimes Id_{S_d^1}(Z) - Id_{H^1} \otimes T(Z)\|_{H^1(S_d^1)} \leq \epsilon_n d^2 \|X\|_{S_d^1}.$$

D'autre part,  $Id_{H^1} \otimes T(Z) = \text{diag}(e_{\alpha_i}) T(X) \text{diag}(e_{\beta_i})$  et donc  $\|Id_{H^1} \otimes T(Z)\|_{H^1(S_d^1)} = \|T(X)\|_{S_d^1}$ , d'où

$$\|T(X)\|_{S_d^1} \leq \epsilon_n d^2 \|X\|_{S_d^1} + C \|X\|_{S_d^1}.$$

Le réel  $\epsilon_n$  pouvant être arbitrairement petit, on en déduit que  $C$  domine la norme de la projection triangulaire dans  $S_d^1$ . Celle-ci est de l'ordre de  $\ln d$  d'après [KP], comme on l'a déjà vu dans la section précédente, ceci termine la preuve.  $\square$

**Remarque :** On aurait pu supposer que les  $P_n$  sont des opérateurs compacts. En effet, on a simplement utilisé le fait que lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $P_n(e_\alpha) \rightarrow 0$  dans  $L^1$ , qui reste vrai si les  $P_n$  sont compacts.

**Corollaire 2.3.7**  $H^1$  n'admet pas de base complètement inconditionnelle.

Si tel était le cas, les projections sur les vecteurs de base formeraient une décomposition complètement inconditionnelle de l'identité.

**Remarques :** Comme dans la section précédente et pour les mêmes raisons, il découle de [NPTV] ou de [Pe] que l'estimation en  $\ln d$  pour la constante (\*) est optimale et atteinte pour la décomposition de Stein.

La constante  $\ln d$  est la constante UMD-analytique de  $S_d^1$ ; le principe de transfert de la projection triangulaire pour l'obtenir est exactement l'argument utilisé dans [HP2] pour obtenir la minoration de cette dernière. Cela suggère d'étudier le lien entre le fait pour  $X$  d'être UMD-analytique et les décompositions de  $H^1(X)$ , c'est ce que l'on fait dans la sous-section suivante.

Ce résultat et les précédents prouvent qu'il n'existe pas d'isomorphisme complet entre  $H^1$  et  $H_{R+C}^1$ .

### 2.3.3 Extensions

Le résultat sur les décompositions de  $H^1(S^1)$  admet plusieurs extensions. La première concerne l'espace de Banach d'arrivée, la seconde l'espace de fonctions lui-même.

On commence par remplacer  $S^1$ , pour cela on rappelle les notions

**Définition 2.3.8** Soit  $X$  un espace de Banach,

1. Une différence de martingale analytique  $L^1$  est une suite  $d = (d_n)$  de fonctions Bochner-intégrables dans l'espace  $L^1(\mathbb{T}^\infty, X)$  de la forme

$$d_n((z_i)) = \sum_{k>0} d_n^k(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^k,$$

où les  $d_n^k$  sont des fonctions Bochner-intégrables et telles que

$$\|d\| = \sup_k \left\| \sum_{n=1}^k d_n \right\|_{L^1(X)} < \infty.$$

2.  $X$  est dit UMD-analytique (AUMD) s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout choix de signes  $\epsilon_n \in \{-1; 1\}$  et toute différence de martingale analytique  $d$  :

$$\sup_k \left\| \sum_{n=1}^k \epsilon_n d_n \right\|_{L^1(X)} \leq C \|d\|.$$

On appelle constante UMD-analytique de  $X$  la meilleure constante  $C$  dans ces inégalités.

Avec ces définitions, on peut énoncer :

**Théorème 2.3.9** Soit  $X$  un espace de Banach, alors  $X$  est UMD-analytique si et seulement s'il existe une décomposition inconditionnelle de rang fini de l'identité de  $H^1$  (notée  $(P_n)$ ) qui se tensorise avec  $X$ , c'est à dire

$$\exists C > 0, \quad \forall \epsilon_n \in \{-1; 1\}, \quad \sup_k \left\| \sum_{n=1}^k \epsilon_n Id_X \otimes P_n \right\|_{B(H^1(X))} \leq C.$$

*Preuve :* On commence par le sens direct. Si  $X$  est AUMD, on utilise une caractérisation due à Blower (voir [Blo]) des espaces AUMD. Un multiplicateur de Fourier  $(m_k)_{k \geq 1}$  est dit de Mihlin s'il existe une constante  $C > 0$  telle que

- i)  $\sup_{k \geq 1} |m_k| \leq C$
- ii)  $\sup_{k \geq 1} k |m_{k+1} - m_k| \leq C$
- iii)  $\sup_{k \geq 1} k^2 |m_{k+2} - 2m_{k+1} + m_k| \leq C$

**Théorème 2.3.10** *Un espace de Banach  $X$  est AUMD si et seulement si tout multiplicateur de Mihlin (de norme  $C$ ) est borné sur  $H^1(X)$  (de norme inférieure à  $C'$ ).*

*Preuve :* On construit une décomposition de l'identité à l'aide de ces multiplicateurs. Soit  $\phi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  à support dans  $[\frac{1}{2}; 2]$  telle que

$$\forall x > 1, \quad \sum_{n \geq 0} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 1.$$

On considère  $P_n$  le multiplicateur de Fourier de symbole  $(\phi(\frac{k}{2^n}))_{k \geq 1}$ . Alors les multiplicateurs

$$\sum_{n \geq 0} \epsilon_n P_n$$

sont uniformément de Mihlin pour tout choix de signes  $\epsilon_n \in \{-1; 1\}$ ; tout cela sera démontré en détail dans le chapitre suivant au lemme 3.2.5.

Par conséquent, si  $X$  est AUMD, on dispose d'une décomposition inconditionnelle de rang fini de  $H^1$  formée de multiplicateurs de Mihlin qui se tensorise avec l'identité de  $X$ .

Pour la réciproque, on reprend le schéma de la preuve lorsque  $X = S_d^1$ , en utilisant un argument de transfert inventé par Bourgain [Bo3].  $e_n$  désigne toujours la fonction  $z^n$ .

Soit  $(P_n)$  une décomposition inconditionnelle de rang fini de  $H^1$  qui se tensorise avec l'identité de  $X$ .

On se fixe un choix de signes  $\epsilon_n \in \{0; 1\}$  (on peut toujours supposer que  $\epsilon_1 = 0$ ) et une différence de martingale analytique  $d = (d_n)$ , on doit montrer que

$$\sup_k \left\| \sum_{n=1}^k \epsilon_n d_n \right\|_{L^1(X)} \leq C \|d\|,$$

pour une certaine constante universelle  $C$ .

Par des arguments classiques d'approximation, on peut supposer que

$$d_n((z_i)) = \sum_{k=1}^{N_n} d_n^k(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^k$$

est un polynôme en  $(z_1, \dots, z_n)$  analytique en  $z_n$ .

Le transfert consiste à faire un changement de variables sur  $\mathbb{T}^\infty$  de la forme, pour  $z \in \mathbb{T}$

$$(z_1, \dots, z_n, \dots) \mapsto (z^{k_1} z_1, \dots, z^{k_n} z_n, \dots)$$

pour une suite bien choisie  $k_n$ , on applique ensuite la décomposition de  $H^1$ .

On se fixe  $\epsilon > 0$ , on construit par récurrence des suites  $(\alpha_n)$ ,  $(l_n)$ ,  $(k_n)$  d'entiers et  $(\phi_n)$  d'applications de  $H^1$  dans lui-même telles que pour tout  $n$

1.  $\alpha_1 + l_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_2 + l_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \alpha_n + l_n$ .
2. Pour  $p \leq n$ , le support de Fourier en  $z$  de  $d_p((z^{k_1} z_1, \dots, z^{k_p} z_p))$  est dans l'intervalle  $[\alpha_p, \alpha_p + l_p]$ .
3.  $\phi_n$  est de la forme  $\phi_n = \sum_{k=0}^{D_n} \epsilon'_k P_k$  pour un certain choix de signes  $\epsilon'_k$ .
4. Pour  $p \leq n$  et pour tout  $k \in [\alpha_p, \alpha_p + l_p]$

$$\begin{cases} \|\phi_n(e_k)\| < \epsilon & \text{si } \epsilon_p = 0 \\ \|\phi_n(e_k) - e_k\| < \epsilon & \text{si } \epsilon_p = 1 \end{cases}$$

On initialise pour  $n = 1$  :

Comme  $d_1(z_1)$  est holomorphe en  $z_1$ , on choisit  $k_1 = 1$ , le support de  $d_1(z z_1)$  en  $z$  est donc inclus dans  $[1, N_1]$ , on prend alors  $\alpha_1 = 1$  et  $l_1 = N_1$  ainsi que  $\phi_n = 0$ . La condition 4 est vérifiée car on a supposé  $\epsilon_1 = 0$ .

On suppose la construction effectuée au rang  $n$ , on la montre pour  $n + 1$ .

Soit  $\delta > 0$ , le lemme 2.3.6 assure que pour tout  $1 \leq k \leq \alpha_n + l_n$ , les séries  $\sum_t \epsilon'_t P_t(e_k)$  sont uniformément de Cauchy, donc en choisissant  $K$  suffisamment grand, pour tout  $l \geq K$  et tout choix de signes  $\epsilon'$  :

$$\forall 1 \leq k \leq \alpha_n + l_n, \quad \left\| \sum_{t=K}^l \epsilon'_t P_t(e_k) \right\| < \delta. \quad (1)$$

On démarre la construction comme dans la section précédente :

Par 3.  $\phi_n$  est de la forme  $\phi_n = \sum_{t=0}^{D_n} \epsilon'_t P_t$ . On fixe  $K > D_n$ , comme les  $P_k$  sont de rang fini  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} P_k(e_\beta) = 0$  pour tout entier  $k$ , on peut donc choisir  $\alpha_{n+1}$  tel que pour choix de signes  $(\epsilon'_t)_{1 \leq t \leq K}$  :

$$\forall \beta \geq \alpha_{n+1}, \quad \left\| \sum_{t=1}^K \epsilon'_t P_t(e_\beta) \right\| < \delta. \quad (2)$$

Comme  $d_{n+1}((z_i)_{i \leq n+1})$  est un polynôme en les  $z_i$  analytique en  $z_{n+1}$ , le support en  $z$  de  $d_{n+1}((z^{k_i} z_i)_{i \leq n})$  est de la forme

$$[k_{n+1} + f(k_1, \dots, k_n) ; N_{n+1} k_{n+1} + g(k_1, \dots, k_n)],$$

on peut donc trouver  $k_{n+1}$  et  $l_{n+1}$  tels que

$$\alpha_{n+1} \leq k_{n+1} + f(k_1, \dots, k_n) \leq N_{n+1} k_{n+1} + g(k_1, \dots, k_n) = \alpha_{n+1} + l_{n+1}.$$

Ce qui assure les conditions 1. et 2.. Comme  $\sum P_n$  tend simplement vers l'identité, on fixe  $N$  suffisamment grand pour que

$$\forall \alpha_{n+1} \leq \alpha \leq \alpha_{n+1} + l_{n+1}, \quad \left\| \sum_{t=1}^N P_t(e_\alpha) - e_\alpha \right\| < \delta. \quad (3).$$

À ce stade, on distingue deux cas :

- Si  $\epsilon_{n+1} = 1$

On définit  $\phi_{n+1} = \phi_n + \sum_{t=K}^N P_t$ , on a donc bien 4.. On vérifie 3. ; grâce à (1), on a pour tout  $1 \leq k \leq \alpha - n + l_n$ ,

$$\|\phi_n(e_k) - \phi_{n+1}(e_k)\| < \delta$$

et donc pour un choix convenable de  $\delta$ , 3. est vraie pour tout les indices  $p \leq n$ .

Pour  $p = n + 1$  et  $\alpha_{n+1} \leq k \leq \alpha_{n+1} + l_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} \|\phi_{n+1}(e_k) - e_k\| &\leq \left\| \sum_{t=1}^N P_t(e_k) - e_k \right\| + \left\| \left( \sum_{t=1}^{K-1} P_t \right) - \phi_n \right\|(e_k) \\ &\leq \delta + \delta \end{aligned}$$

La première majoration par  $\delta$  provient de (3) et la seconde de (2) car  $(\sum_{t=1}^{K-1} P_t) - \phi_n$  est de la forme  $\sum_{t=1}^K \epsilon'_t P_t$  et donc un bon choix de  $\delta$  permet de terminer ce cas.

– Si  $\epsilon_{n+1} = 0$ ,

On prend  $\phi_{n+1} = \phi_n$ , alors 4. et 3. pour  $p \leq n$  sont vérifiés. Pour  $p = n + 1$ , cela découle directement de (2) si  $\delta < \epsilon$ .

Il existe donc un choix de  $\delta$  grâce auquel la construction au rang  $n + 1$  est possible.

En conclusion, cette construction est possible pour tout  $n \geq 1$  et tout  $\epsilon > 0$ .

On a

$$\left\| \sum_{n=1}^N d_n \right\|_{L^1} = \int_{\mathbb{T}^\infty} \left\| \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{N_n} d_n^k(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^k \right\| dm((z_i)).$$

Par Fubini et l'invariance par translation de  $dm((z_i))$  par  $(z_i) \mapsto (z^{k_i} z_i)$ , on a

$$\left\| \sum_{n=1}^N d_n \right\|_{L^1} = \int_{\mathbb{T}^\infty} \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{n=1}^N d_n((z^{k_i} z_i)_{1 \leq i \leq n}) \right\| dm(z) dm((z_i)).$$

On pose  $C = \sup_n \|\phi_n\|_{B(H^1(X))}$ ,  $C < \infty$  par 3. et les hypothèses sur  $(P_n)$ . Si on fixe  $(z_1, \dots, z_N)$ , par 1. 2. et 4., pour  $n \leq N$

$$\phi_N(d_n) = \epsilon_n d_n + \epsilon f(d_n)$$

où  $f$  ne dépend que de la norme des coefficients de  $d_n$  (il y en a un nombre fini par hypothèse). D'où

$$\begin{aligned} C \left\| \sum_{n=1}^N d_n \right\|_{L^1} &\geq \int_{\mathbb{T}^\infty} \left\| \phi_N \left( \sum_{n=1}^N d_n((z^{k_i} z_i)_{1 \leq i \leq n}) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{T})} dm((z_i)) \\ &\geq \int_{\mathbb{T}^\infty} \left\| \sum_{n=1}^N \epsilon_n d_n((z^{k_i} z_i)_{1 \leq i \leq n}) \right\| dm((z_i)) + \epsilon f(d). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\epsilon \rightarrow 0$ , on en déduit que la transformation de martingale  $(\epsilon_n)$  est bien bornée indépendamment des choix et donc  $X$  est AUMD.  $\square$

**Remarque :** Comme ci-dessus, le résultat reste valable pour des  $P_n$  compacts.

Sachant que  $S^1$  n'est pas AUMD, ce théorème implique le théorème 2.3.5.

**Remarque :** Par ce théorème, si  $X$  se tensorise avec une décomposition de  $H^1$ , il se tensorise avec une décomposition de Mihlin.

**Problème :** On peut se demander à quelle condition sur  $X$ , il existe une base inconditionnelle de  $H^1$  qui se tensorise avec  $X$ . On sait que si  $X$  est UMD alors c'est le cas par les résultats sur les ondelettes, et qu'une telle condition implique que  $X$  est AUMD.

Une autre façon d'étendre ce résultat sur les décompositions est de changer l'espace de fonctions. Pour toute partie  $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ , on définit

$$L_\Lambda^1(\mathbb{T}) = \{f \in L^1(\mathbb{T}) \mid \hat{f}(n) = 0 \text{ si } n \notin \Lambda\}.$$

C'est naturellement un espace d'opérateurs comme sous-espace de  $L^1$ , et  $H^1$  correspond exactement à  $L_{\mathbb{N}^*}^1$ . Dans la preuve du théorème 2.3.5, on a juste utilisé le fait que  $\mathbb{N}^*$  contient un ensemble de la forme  $\{\alpha_i + \beta_j\}$ , on déduit de la preuve :

**Corollaire 2.3.11** *L'espace  $L_\Lambda^1(\mathbb{T})$  n'admet pas de décomposition complètement inconditionnelle de rang fini de l'identité dès que  $\Lambda$  contient la somme de deux sous-ensembles infinis de  $\mathbb{Z}$ ; a fortiori, il n'a pas de base complètement inconditionnelle.*

**Remarque :** Si  $\Lambda$  ne contient pas une telle somme, alors il est possible que  $L_\Lambda^1(\mathbb{T})$  admette une telle base ; un exemple est le cas  $\Lambda = \{2^k; k \geq 0\}$ , on a alors  $L_\Lambda^1(\mathbb{T}) \approx R + C$  qui admet bien sûr une base complètement inconditionnelle.

La démonstration du théorème 2.3.5 repose en partie sur le lemme 2.3.6 qui est vrai pour tout Banach mais aussi sur le fait que  $z^n$  tend faiblement vers 0 dans  $L^1$ , cela n'est plus vrai dans  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$  les fonctions continues sur  $\mathbb{T}$ , cependant on peut procéder autrement en utilisant un peu plus d'analyse fonctionnelle.

De manière analogue à  $L_\Lambda^1(\mathbb{T})$ , on introduit

$$\mathcal{C}_\Lambda(\mathbb{T}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \mid \hat{f}(n) = 0 \text{ si } n \notin \Lambda\}.$$

Dans ce cadre, on a un analogue du résultat précédent,

**Théorème 2.3.12** *L'espace  $\mathcal{C}_\Lambda(\mathbb{T})$  n'admet pas de décomposition inconditionnelle de rang fini de l'identité dès que  $\Lambda$  contient la somme de deux sous-ensembles infinis de  $\mathbb{Z}$ ; a fortiori, il n'a pas de base inconditionnelle.*

*Preuve :* La notation  $e_k$  est toujours utilisée pour la fonction  $z^k$ .

Comme  $\mathcal{C}_\Lambda(\mathbb{T})$  est un espace minimal, toute décomposition inconditionnelle est complètement inconditionnelle, on se place dans le cadre des espaces d'opérateurs.

Le schéma de la preuve est toujours le même sauf que cette fois, on se ramène explicitement à des multiplicateurs, pour cela on utilise :

**Lemme 2.3.13** *Les multiplicateurs de Fourier sont complétés dans  $B(\mathcal{C}_\Lambda)$ .*

Cela résulte de l'existence d'une mesure de Haar sur  $\mathbb{T}$ , on note  $\tau_z$  la translation par  $z$  sur  $\mathbb{T}$ ; pour toute application  $V : \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ , on définit

$$P(V) = \int_{\mathbb{T}} \tau_{\bar{z}} V \tau_z dm(z).$$

Il n'y a pas de problème de définition car  $\mathcal{C}_\Lambda$  est invariant par translation.

De l'invariance par translation de  $dm$ , il résulte que  $P(V)$  commute avec les translations, c'est donc un multiplicateur de Fourier. De plus  $P$  est de norme 1 et  $P$  est l'identité sur les multiplicateurs.

On peut noter que :

**Remarques :** Pour  $F \subset \Lambda$  une partie finie, alors si  $\text{Im } V \subset \text{Vect} \{e_k; k \in F\}$  alors le support du multiplicateur  $P(V)$  est inclus dans  $F$ .

$P$  est continue pour la topologie de la convergence simple, en particulier si  $V_n$  tend simplement vers l'identité alors  $P(V_n)$  aussi.

On a également besoin du résultat bien connu qu'il existe une suite  $(F_n)$  de multiplicateurs de rang fini de  $\mathcal{C}_\Lambda$  tendant simplement vers l'identité, par exemple les noyaux de Fejèr.

On considère  $(P_n)$  une décomposition inconditionnelle de rang fini de l'identité et on suppose que  $\Lambda \supset A + B$  avec  $A$  et  $B$  infinis.

On note  $V_n = \sum_{k=1}^n P_k$ , c'est une suite qui tend simplement vers l'identité.

**Lemme 2.3.14** *Soit  $\epsilon > 0$ , pour toute partie finie  $F$ , il existe des entiers  $m$  et  $n$  tels que*

$$\begin{aligned} & \cdot \|F_m V_n - V_n\| \leq \epsilon \\ & \cdot \forall \lambda \in F, \|P(F_m V_n)e_\lambda - e_\lambda\| \leq \epsilon \end{aligned}$$

On note  $M_{m,n}$  l'application  $P(F_m V_n)$ .

*Preuve* : On commence par choisir  $n$  suffisamment grand tel que pour tout  $\lambda \in F$ ,

$$\|V_n(e_\lambda) - e_\lambda\| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ensuite comme  $V_n$  est de rang fini,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|F_m V_n - V_n\| = 0$$

On peut donc trouver  $m$  tel que  $\|F_m V_n - V_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ .

On conclut car pour  $\lambda \in F$ , comme  $e_\lambda$  est vecteur propre pour  $\tau_z$ , on a :

$$\|P(V_n).e_\lambda - e_\lambda\| = \left\| \int_{\mathbb{T}} z^\lambda \tau_{\bar{z}}(V_n(e_\lambda) - e_\lambda) dm(z) \right\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et donc  $\|P(F_m V_n)e_\lambda - e_\lambda\| \leq \|F_m V_n - V_n\| + \|P(V_n).e_\lambda - e_\lambda\| \leq \epsilon$ .  $\square$

On construit par récurrence des suites d'entiers  $(\alpha_k) \subset A$ ,  $(\beta_k) \subset B$ , des suites entrelacées

$$n_1 \leq n'_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_d \leq n'_d \leq \dots \quad \text{et} \quad m_1 \leq m'_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_d \leq m'_d \leq \dots,$$

telles que si  $\phi_d = \sum_{t=1}^d M_{m'_t, n'_t} - M_{m_t, n_t}$ , alors

$$\begin{cases} \|\phi_d(e_{\alpha_i + \beta_j})\| \leq 2d\epsilon & \text{si } j \leq i \leq d \\ \|\phi_d(e_{\alpha_i + \beta_j}) - e_{\alpha_i + \beta_j}\| \leq 2d\epsilon & \text{si } i < j \leq d \end{cases}$$

On initialise en choisissant  $\alpha_1 \in A$  et  $\beta_1 \in B$  et  $n_1 = n'_1 = m_1 = m'_1 = 0$ .

Supposons la construction faite au rang  $d$ .

Comme  $\phi_d$  a un support de Fourier fini et  $A$  est infini, il est possible de trouver  $\alpha_{d+1}$  tel que pour tout  $j \leq d$ ,  $\phi_d(e_{\alpha_{d+1} + \beta_j}) = 0$ . On obtient alors  $n_{d+1}$  et  $m_{d+1}$  en prenant  $F = \{\alpha_i + \beta_j; i \leq d+1 \text{ et } j \leq d\}$  dans le lemme (on peut toujours choisir ces entiers aussi grands que l'on veut). Comme pour  $\alpha_{d+1}$ , on choisit  $\beta_{d+1}$  tel que pour  $i \leq d+1$ , on ait  $(\phi_d - M_{m_{d+1}, n_{d+1}})(e_{\alpha_i + \beta_{d+1}}) = 0$ . En prenant  $F = \{\alpha_i + \beta_j; i \leq d+1 \text{ et } j \leq d+1\}$  dans le lemme, on obtient  $n'_{d+1}$  et  $m'_{d+1}$ . Les estimations sont alors faciles à vérifier. La construction est donc possible.

Pour conclure, on reprend la fin de la démonstration du théorème 2.3.5. On se fixe  $d$ , on estime la norme de  $\phi_d$ . Par la propriété de décomposition, il vient  $\|\sum_{t=1}^d V_{n'_t} - V_{n_t}\| \leq C$ . De plus  $P$  est contractante et par les estimations du lemme :

$$\|\phi_d\| \leq \left\| \sum_{t=1}^d F_{m'_t} V_{n'_t} - F_{m_t} V_{n_t} \right\| \leq \left\| \sum_{t=1}^d V_{n'_t} - V_{n_t} \right\| + 2d\epsilon.$$

Comme  $\phi_d$  est automatiquement complètement bornée, on peut appliquer le principe de transfert (avec  $M_d$  au lieu de  $S_d^1$ ) puis faire tendre  $\epsilon \rightarrow 0$  pour en déduire que  $C$  domine la norme de la projection triangulaire sur  $M_d$  d'où une contradiction.  $\square$

**Remarques** : Ce théorème fait suite à plusieurs conversations avec Stefan Neuwirth et répond à une question posée dans sa thèse [Ne].

On peut remplacer  $\mathbb{T}$  par n'importe quel groupe compact sans changer la preuve.

## 2.4 Bases

Pour clore ce chapitre, on montre que l'espace  $H^1$  admet une base complètement bornée. Pour cela, on transpose les résultats de Lusky [Lu1, Lu2] dans le cadre des espaces d'opérateurs. Soit  $X$  un espace d'opérateurs et  $(R_n)$  une suite d'opérateurs de rang fini sur  $X$  vérifiant

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} R_n x = x \quad \forall x \in X, \\ ii) \quad & R_m R_n = R_{\min(m,n)} \quad \forall m \neq n, \end{aligned}$$

on dit alors que  $(R_n)$  est une suite approximante commutative (abrégié CAS).

Une CAS  $(R_n)$  se factorise par  $\ell_1$  (équipé de sa structure maximale) s'il existe des suites d'opérateurs  $T_n : X \rightarrow \ell_1^{d_n}$  et  $S_n : \ell_1^{d_n} \rightarrow X$  telles que

$$\begin{aligned} a) \quad & R_{n+1} - R_n = S_n T_n, \\ b) \quad & \sup_n \|T_n\|_{cb} < \infty \quad \text{et} \quad \sup_n \|S_n\|_{cb} < \infty. \end{aligned}$$

Le résultat de Lusky, étendu aux espaces d'opérateurs, est le suivant :

**Théorème 2.4.1** *Soient  $X$  un espace d'opérateurs et  $(R_n)$  une CAS de  $X$  se factorisant par  $\ell_1$ , alors  $X \oplus_1 \ell_1$  admet une base complètement bornée.*

**Remarque :** Il s'agit du théorème principal de [Lu1]. Lusky a montré dans [Lu2] que l'on peut supprimer la partie  $\oplus_1 \ell_1$  dans l'énoncé ; la preuve est un peu plus délicate mais 2.4.1 est suffisant pour  $H^1$ .

L'idée de la preuve est de construire à partir d'une CAS sur  $X$  une CAS sur  $X \oplus_1 \ell_1$  formée de projections. Comme on suit exactement la démonstration de Lusky, on esquisse seulement les preuves :

**Lemme 2.4.2** *On peut supposer que la CAS  $(R_n)$  vérifie en outre (avec  $R_{n+1} - R_n = S_n T_n$ )*

$$\begin{aligned} iii) \quad & T_m S_n = 0 & \text{si} & \quad |m - n| > 2, \\ iv) \quad & T_m (Id - R_n) = 0 & \text{si} & \quad m < n, \\ v) \quad & R_{n+j} S_n = S_n & \text{pour} & \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

*Preuve :* La preuve est exactement celle de Lusky ; on prend la CAS originale que l'on note  $(\tilde{R}_n)$  qui se factorise par  $\ell_1$  via les applications  $\tilde{T}_n : X \rightarrow \ell_1^{d_n}$  et  $\tilde{S}_n : \ell_1^{d_n} \rightarrow X$ . En posant  $E_n = \ell_1^{d_{2n-1} + d_{2n}} = \ell_1^{d_{2n-1}} \oplus_1 \ell_1^{d_{2n}}$ , on définit la nouvelle CAS par  $R_n = \tilde{R}_{2n}$ , elle se factorise par  $\ell_1$  grâce aux applications  $T_n : X \rightarrow E_n$  et  $S_n : E_n \rightarrow X$  données par

$$\begin{aligned} T_n(x) &= ((\tilde{T}_{2n-1}(\tilde{R}_{2n} - \tilde{R}_{2n-3}))(x), (\tilde{T}_{2n}(\tilde{R}_{2n+1} - \tilde{R}_{2n-2}))(x)) \\ S_n((a, b)) &= ((\tilde{R}_{2n} - \tilde{R}_{2n-3})\tilde{S}_{2n-1})(a) + ((\tilde{R}_{2n+1} - \tilde{R}_{2n-2})\tilde{S}_{2n})(b). \end{aligned}$$

Les vérifications des propriétés i)-v) sont immédiates. □

**Lemme 2.4.3** *Soit  $(R_n)$  une CAS pour  $X$  vérifiant i)-v) et se factorisant par  $\ell_1$ , alors  $X \oplus_1 \ell_1$  admet une CAS  $(P_n)$  se factorisant par  $\ell_1$  où les  $(P_n)$  sont des projections.*

*Preuve :* Là encore, la preuve de Lusky marche sans véritables modifications.

On considère une CAS  $(R_n)$  se factorisant par  $\ell_1$  grâce aux applications  $T_n : X \rightarrow \ell_1^{d_n}$  et  $S_n : \ell_1^{d_n} \rightarrow X$ , et telle que i)-v) soient satisfaites. On pose

$$F_n = \ell_1^{d_1} \oplus_1 \cdots \oplus_1 \ell_1^{d_n}.$$



On définit les applications :

$$\begin{array}{lll} V_n : X \rightarrow F_n & \text{par} & V_n(x) = (2^{n-1}T_1(x), \dots, 2^{n-m}T_m(x), \dots, 2^0T_n(x)) \\ U_n : F_n \rightarrow X & \text{par} & U_n(e_1, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n 2^{j-n}S_j e_j \\ Q_n : F_{n+m} \rightarrow F_n & \text{par} & Q_n(e_1, \dots, e_{n+m}) = (e_1, \dots, e_n) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que  $(Q_n)$ ,  $(U_n)$  et  $(V_n U_n)$  sont uniformément bornées, mais comme  $F_n$  est maximal elles sont aussi uniformément complètement bornées. De plus, iv) implique que  $(V_n(Id - R_n))$  est uniformément complètement bornée car pour tout  $x \in X$ ,

$$(V_n(Id - R_n))(x) = (0, \dots, 0, (T_n(Id - R_n))(x)).$$

Soit  $Y = X \oplus_1 (\sum \oplus_1 F_n)$ ,  $Y$  est complètement isomorphe à  $X \oplus_1 \ell_1$ . On peut introduire les applications de rang fini sur  $Y$  :

$$\begin{aligned} P_n(x, (f_k)) &= \left( R_n x + \sum_{k=n}^{\infty} 2^{n-k} U_n Q_n f_k, f_1, \dots, f_{n-1}, \right. \\ &\quad \left. (V_n(Id - R_n))(x) + \sum_{k=n}^{\infty} 2^{n-k} (Id - V_n U_n) Q_n f_k, 0, \dots \right). \end{aligned}$$

Elles sont correctement définies par les remarques ci-dessus.

Les vérifications algébriques de i) et ii) pour  $(P_n)$  et le fait que les  $P_n$  soient des projections sont élémentaires (voir [Lu1]) et découlent directement de i)-v) pour  $(R_n)$ .

Il reste alors à s'assurer que la CAS  $(P_n)$  se factorise par  $\ell_1$ , l'argument de Lusky marche encore tel quel.

On pose

$$G_n = \ell_1^{d_n} \oplus_1 F_{n-1} \oplus_1 F_{n-1} \oplus_1 F_n \oplus_1 F_n.$$

On définit  $\hat{T}_n : Y \rightarrow G_n$  par

$$\hat{T}_n(x, (f_k)) = \left( T_n X, \sum_{k=n-1}^{\infty} 2^{n-1-k} Q_{n-1} f_k, y, \sum_{k=n}^{\infty} 2^{n-k} Q_n f_k, z \right),$$

avec les notations

$$y = f_{n-1} - V_{n-1}(Id - R_{n-1})x - \sum_{k=n-1}^{\infty} 2^{n-1-k} (Id - V_{n-1} U_{n-1}) Q_{n-1} f_k$$

et

$$z = V_n(Id - R_n)x + \sum_{k=n}^{\infty} 2^{n-k} ((Id - V_n U_n) Q_n f_k).$$

Comme toutes les applications apparaissant dans ces formules sont uniformément complètement bornées,  $(\hat{T}_n)$  l'est également.

On définit  $\hat{S}_n : G_n \rightarrow Y$  par

$$\hat{S}_n(a, b, c, d, e) = \left( S_n a + U_n d - U_{n-1} b, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2}, c, e, 0, \dots \right),$$

comme  $(\hat{S}_n)$  est uniformément bornée et que  $G_n$  est maximal la famille  $(\hat{S}_n)$  est uniformément complètement bornée.

On a bien  $P_n - P_{n-1} = \hat{S}_n \hat{T}_n$ , ce qui termine le lemme.  $\square$

**Lemme 2.4.4** *Si  $(P_n)$  est une CAS sur  $Y$  comme dans le lemme précédent alors  $Y \oplus_1 \ell_1 \approx X \oplus_1 \ell_1$  admet une base complètement bornée.*

*Preuve* : On simplifie les notations  $P_n - P_{n-1} = S_n T_n$  avec  $T_n : Y \rightarrow \ell_1^{d_n}$  et  $S_n : \ell_1^{d_n} \rightarrow Y$  uniformément complètement bornées, soit  $E_n = (P_n - P_{n-1})(Y)$  ; comme  $P_n - P_{n-1}$  est une projection,  $(T_n S_n)^2 : \ell_1^{d_n} \rightarrow \ell_1^{d_n}$  est aussi une projection et  $E_n$  est complètement isomorphe à  $(T_n S_n)^2 \ell_1^{d_n}$ . On pose  $F_n = (Id - (T_n S_n)^2) \ell_1^{d_n}$ , on a alors

$$\sup_n d_{cb}(\ell_1^{d_n}, E_n \oplus_1 F_n) < \infty.$$

Soit  $Z = \sum \oplus_1 F_n$ ,  $Z$  est complémenté dans  $\ell_1$ , donc en tant qu'espace d'opérateurs  $Z$  est complètement isomorphe à  $\max(Z)$  ; par [LT] théorème 2.a.3,  $Z$  est isomorphe à  $\ell_1$ , comme il est maximal, il est donc complètement isomorphe à  $\ell_1$ . On note  $Q_n$  la projection de  $Z$  sur  $F_n$ .

On conclut car  $Y \oplus_1 Z$  admet une décomposition de rang fini de l'identité ( $V_n = (P_n - P_{n-1}) \oplus Q_n$ ) telle que chaque composante  $V_n(Y \oplus_1 Z)$  admette une base complètement bornée (car complètement isomorphe à  $\ell_1^{d_n}$ ) ; pour obtenir la base de  $Y \oplus_1 Z$ , il suffit de mettre bout à bout les bases de chaque composante.

Ceci termine la preuve du théorème 2.4.1.  $\square$

Pour montrer que  $H^1$  admet une base complètement bornée, il suffit donc de vérifier que  $H^1$  admet une CAS se factorisant par  $\ell^1$  et que  $H^1 \approx H^1 \oplus_1 \ell_1$ .

Commençons par la CAS :

**Lemme 2.4.5**  *$H^1$  admet une CAS se factorisant par  $\ell_1$  constituée de multiplicateurs de Fourier.*

*Preuve* : On utilise les multiplicateurs de la Vallée-Poussin introduits précédemment, on définit  $R_n$  comme la restriction à  $H^1$  de  $z^{-2^{2n}} W_{2^{2n}}$ , c'est un multiplicateur à support dans  $[-2^{2n+2}, 2^{2n+2}]$  valant 1 sur  $[0, 2^{2n}]$  ce qui implique que  $(R_n)$  vérifie ii). Pour i), il s'agit d'un résultat classique d'analyse harmonique (les noyaux de Fejér forment une suite approximante de l'identité de  $L^1$ ).

Chaque  $R_{n+1} - R_n$  se factorise par  $\ell_1$ . En effet, si  $E_n = (R_{n+1} - R_n)(H^1)$  alors il existe  $F_n \subset L^1$  contenant  $E_n$  complémenté dans  $L^1$  et isomorphe à  $\ell_1^{d_n}$  pour un certain  $d_n$ .  $F_n$  est donc complètement isomorphe à  $\max \ell_1^{d_n}$ . On définit  $T_n : H^1 \rightarrow F_n$  par  $T_n = R_{n+1} - R_n$ ,  $(T_n)$  est bien uniformément complètement bornée car les multiplicateurs  $T_n$  sont uniformément bornés sur  $L^1$ .  $T_n$  est à support dans  $[-2^{2n+4}, 2^{2n+4}]$  et est nul sur  $[0, 2^{2n}]$ , donc si  $M_n = W_{2^{2n}} + \dots + W_{2^{2n+3}}$  on a bien  $M_n T_n|_{H^1} = R_{n+1} - R_n$ . On pose alors  $S_n = M_n|_{F_n}$ , il s'agit bien d'applications uniformément bornées (donc uniformément complètement bornées par maximalité de  $F_n$ ) à valeurs dans  $H^1$ , ce qui donne la factorisation par  $\ell_1$  recherchée.  $\square$

**Corollaire 2.4.6** *L'espace d'opérateurs  $H^1 \oplus_1 \ell_1$  admet une base complètement bornée.*

On enlève le terme en  $\oplus_1 \ell_1$ , pour cela on a besoin du lemme :

**Lemme 2.4.7** *Il existe  $E \subset H^1$  complètement complémenté dans  $H^1$  et complètement isomorphe à  $\ell_1$ .*

*Preuve* : Il s'agit encore de l'adaptation d'un résultat classique de la théorie des espaces de Banach (voir par exemple [W2]).

Soient  $e_k$  des fonctions dans  $L^1$  à supports disjoints engendrant  $\ell_1$ . Pour chaque  $k$ , il existe  $n_k$  tel que

$$\|F_{n_k}(e_k) - e_k\| \leq \frac{1}{2 \cdot 2^{n_k}} \quad (*)$$

où  $F_n$  est le noyau de Fejèr d'ordre  $n$ , on pose alors  $f_k = z^{n_k} W_{n_k}(e_k)$ , c'est une fonction analytique de norme inférieure à 1 dans  $H^1$ . On définit  $E$  comme la fermeture de  $\text{Vect}(f_k)$ .

a)  $E$  est 2-isomorphe à  $\ell_1$ .

Si  $(\alpha_k)$  est une suite dans  $\ell_1$ , on a bien

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \right\|_1 &\geq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^{n_k} e_k \right\|_1 - \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z^{n_k} e_k - f_k) \right\|_1 \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 2^{n_k}} |\alpha_k| \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|. \end{aligned}$$

La seconde inégalité provient du fait que les fonctions  $z^{n_k} e_k$  sont à supports disjoints et engendrent donc un espace  $F$  isométrique à  $\ell_1$ , la troisième résulte des estimations (\*).

b)  $E$  est complété dans  $L^1$ .

L'espace  $F$  est complété dans  $L^1$  car engendré par des fonctions à supports disjoints, on note  $P$  la projection. Soient  $g_n$  des fonctions dans  $L^\infty$  de norme 1 formant une base duale de  $(z^{n_k} e_k)$ . Comme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_\infty \|z^{n_k} e_k - f_k\|_1 < \frac{1}{2},$$

l'application

$$U = Id_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \otimes (f_k - z^{n_k} e_k)$$

est un isomorphisme de  $L^1$  envoyant  $F$  sur  $E$ .

$E$  est complété dans  $L^1$  par l'application  $UPU^{-1}$ . Ceci implique, en outre, que comme espace d'opérateurs, il est complètement isomorphe à  $\max \ell_1$ , ce qui achève la démonstration du lemme.  $\square$

**Corollaire 2.4.8** *L'espace d'opérateurs  $H^1$  admet une base complètement bornée.*

On utilise le principe d'isomorphisme de Pełczyński (voir [LT]). Par le lemme précédent, on a un isomorphisme complet

$$H^1 \approx F \oplus_1 \ell_1.$$

Donc

$$H^1 \oplus_1 \ell_1 \approx F \oplus_1 \ell_1 \oplus_1 \ell_1 \approx F \oplus_1 \ell_1 \approx H^1.$$

Le corollaire précédent permet de conclure.  $\square$



## Chapitre 3

# Multiplicateurs de Schur sur $L^\infty/H^\infty$

Un multiplicateur de Schur  $(m_{i,j})$  est une application linéaire sur  $B(\ell_2)$  définie par  $e_{i,j} \mapsto m_{i,j}e_{i,j}$ , la projection sur les matrices triangulaires en est un exemple (non borné). Dans ce chapitre, on étudie la restriction de certains multiplicateurs de Schur aux matrices de Hankel  $\mathcal{H}$  que l'on identifie à  $L^\infty/H^\infty$  en tant qu'espace d'opérateurs, comme dans le premier chapitre, par le théorème 1.2.19 de Nehari-Sarason-Page. Ces résultats sont motivés par une question de Davidson et Paulsen dans [DP], on commence par donner une réponse affirmative à une de leurs questions et dans une seconde partie, on reprend les mêmes idées pour obtenir des multiplicateurs de Schur sur  $\mathcal{H}$  bornés mais non complètement bornés.

### 3.1 Sur une question de Davidson et Paulsen

#### 3.1.1 Présentation

Récemment, Pisier dans [Pi6] a construit le premier exemple d'opérateur sur un espace de Hilbert polynomialement borné mais non semblable à une contraction, répondant ainsi à une ancienne question de Halmos. Cet exemple est un cas particulier d'opérateur de type Foguel-Hankel à valeurs dans la  $C^*$ -algèbre CAR. L'étude de ce type d'applications a vraiment démarré avec les travaux de Foias et Williams, ils avaient même conjecturé que ces opérateurs (à valeurs scalaires) pouvaient apporter une réponse à la question de Halmos. Cependant, Aleksandrov et Peller ([AP]) ont réussi à montrer, en utilisant un résultat de Bourgain, que dans ce cadre scalaire, être semblable à une contraction ou vérifier l'inégalité de von Neumann (c'est à dire être polynomialement bornée) sont deux conditions équivalentes à  $f' \in BMOA$  pour le symbole de l'opérateur de Foguel-Hankel. La théorie des espaces d'opérateurs a conduit Pisier à chercher un contre-exemple à valeurs vectorielles.

Peu après, Davidson et Paulsen [DP] ont simplifié la preuve de Pisier en utilisant davantage de théorie des opérateurs. Ainsi, ils ont pu donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur de type Foguel-Hankel à valeurs CAR soit polynomialement borné et une condition nécessaire pour qu'il soit complètement polynomialement borné ce qui revient à être semblable à une contraction. Badea et Paulsen dans [BaP] ont utilisé des multiplicateurs de Schur pour montrer qu'une condition un peu plus forte est suffisante. Dans cette section, on va montrer que leur condition nécessaire est en fait suffisante.

On suit les notations de [BaP] et [DP].

Un opérateur  $T$  borné sur un espace de Hilbert  $H$  est dit polynomialement borné, s'il

existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout polynôme analytique  $p$

$$\|p(T)\|_{B(H)} \leq C \sup\{|p(z)|; |z| \leq 1\}.$$

$T$  est semblable à une contraction s'il existe un opérateur inversible  $L$  sur  $H$  tel que

$$\|L^{-1}TL\|_{B(H)} \leq 1.$$

Soit  $S$  le shift unilatéral sur  $\ell_2$  et  $Y = [a_{i+j}]_{i,j \geq 0}$  une matrice de Hankel à valeurs dans  $B(H)$  de symbole  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  (on note  $Y = \Gamma_f$ ),

**Définition 3.1.1** Les opérateurs de type Foguel-Hankel à valeurs vectorielles sont définis sur  $(\ell_2 \otimes_2 H)^2$  par

$$R(Y) = \begin{bmatrix} S^* \otimes Id_H & Y \\ 0 & S \otimes Id_H \end{bmatrix}.$$

Le cas scalaire correspond à  $H = \mathbb{C}$ , les travaux d'Aleksandrov et Peller évoqués précédemment donnent que  $R(\Gamma_f)$  est semblable à une contraction si et seulement si  $f$  est polynomialement borné et si et seulement si  $\Gamma_{f'} = [(i+j+1)a_{i+j}]_{i,j \geq 0}$  est bornée.

### 3.1.2 Opérateurs à valeurs CAR

On a déjà rencontré les matrices de Clifford dans le corollaire 1.2.16, ce sont des opérateurs sur un espace de Hilbert  $H$  vérifiant les relations d'anticommutation canoniques (CAR pour abrégé) :

$$\begin{cases} C_i C_j + C_j C_i = 0 \\ C_i C_j^* + C_j^* C_i = 2\delta_{i,j} Id_H \end{cases}$$

Pour toute suite  $\alpha = (\alpha_n)_{n \geq 0}$  dans  $\ell_2$ , on pose

$$Y_\alpha = [\alpha_{i+j} C_{i+j}],$$

c'est une matrice de Hankel à valeurs CAR ; l'opérateur de Foguel-Hankel associé est  $R(Y_\alpha)$ .

On introduit aussi les notations

$$A(\alpha) = \sup_{n \geq 0} (n+1)^2 \sum_{i \geq n} |\alpha_i|^2$$

et

$$B_2(\alpha) = \sum_{n \geq 0} (n+1)^2 |\alpha_n|^2.$$

Le résultat principal de [Pi6, DP] est le suivant :

**Théorème 3.1.2** *L'opérateur  $R(Y_\alpha)$  est polynomialement borné si et seulement si  $A(\alpha)$  est fini.*

*Si  $R(Y_\alpha)$  est semblable à une contraction alors  $B_2(\alpha) < \infty$ .*

À partir de cela, il est facile de trouver une suite  $\alpha$  pour laquelle  $R(Y_\alpha)$  n'est pas semblable à une contraction bien que polynomialement borné.

D'une manière générale, Foias et Williams [CCFW] ont obtenu une caractérisation abstraite du fait qu'un opérateur de type Foguel-Hankel soit semblable à une contraction, en terme d'un problème de commutateur :

$R(Y)$  est semblable à une contraction si et seulement s'il existe un opérateur borné  $Z$  sur  $\ell_2 \otimes_2 H$  tel que  $Y = (S^* \otimes Id_H)Z - Z(S \otimes Id_H)$ .

De simples calculs montrent que si  $D = [(i+1)\delta_{i+1,j}]$  est l'opérateur de dérivation sur  $\ell_2$  alors  $Z_\alpha = -Y_\alpha(D \otimes Id_H)$  est une solution formelle à ce problème de commutateur. De ce fait, pour montrer que  $B_2(\alpha) < \infty$  implique que  $R(Y_\alpha)$  est semblable à une contraction, il suffit de vérifier que la matrice  $[j\alpha_{i+j-1}C_{i+j-1}]_{i,j \geq 0}$  est bornée (cette implication est le théorème 2.2 dans [BaP]). En remarquant que la première colonne de cette matrice est nulle, on est réduit à :

**Proposition 3.1.3** *On a une estimation*

$$\|[(j+1)\alpha_{i+j}C_{i+j}]\| \leq (2B_2(\alpha))^{\frac{1}{2}}.$$

Et par conséquent

**Corollaire 3.1.4** *L'opérateur  $R(Y_\alpha)$  est semblable à une contraction si et seulement si  $B_2(\alpha) < \infty$ .*

Ce qui répond à la question de Davidson et Paulsen.

On utilise toujours la notation  $\gamma_n = \sum_{i+j=n} e_{i,j}$ , ainsi  $Y_\alpha = \sum_{n \geq 0} \alpha_n C_n \otimes \gamma_n$ .

*Preuve* : Pour la preuve de la proposition, on a besoin de l'estimation suivante :

**Lemme 3.1.5** *Pour toute suite  $(a_n)$ ,*

$$\left\| \sum_{n \geq 0} a_n C_n \otimes \gamma_n \right\| \leq \left( 2 \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Preuve* : Cela résulte du théorème de Nehari-Sarason-Page et du fait que les matrices de Clifford engendrent un espace  $\sqrt{2}$ -isomorphe à un Hilbert ; en effet, on a un relèvement explicite dans  $L^\infty$  car  $\| \sum_{n \geq 0} a_n C_n z^n \|_{L^\infty}^2 \leq 2 \sum_{n \geq 0} |a_n|^2$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition* : On considère l'opérateur formel sur  $H \otimes_2 \ell_2 \otimes_2 \ell_2$ ,

$$T = \sum_{n \geq 0} \alpha_n C_n \otimes \gamma_n \otimes \sum_{1 \leq k \leq (n+1)^2} e_{1,k}.$$

En intervertissant les sommes, on obtient

$$\|T\|^2 \leq \sum_{k \geq 1} \left\| \sum_{n+1 \geq \sqrt{k}} \alpha_n C_n \otimes \gamma_n \right\|^2$$

Par le lemme 3.1.5, on a

$$\|T\|^2 \leq 2.B_2(\alpha),$$

et  $T$  est un opérateur borné correctement défini.

Soit  $Q$  l'isométrie partielle de  $H \otimes_2 \ell_2 \otimes_2 \ell_2$  définie par

$$Q = Id_H \otimes \sum_{j \geq 0} e_{j,j} \otimes \frac{1}{j+1} \sum_{1 \leq k \leq (j+1)^2} e_{k,1},$$

on a bien  $Q^*Q = Id_{H \otimes_2 \ell_2} \otimes e_{1,1}$ .

La proposition résulte alors de l'identité

$$TQ = [(j+1)\alpha_{i+j}C_{i+j}]_{i,j \geq 0} \otimes e_{1,1}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} TQ &= \left( \sum_{i,j \geq 0} \alpha_{i+j} C_{i+j} \otimes e_{i,j} \otimes \sum_{1 \leq k \leq (i+j+1)^2} e_{1,k} \right) \\ &\quad \left( Id_H \otimes \sum_{j \geq 0} e_{j,j} \otimes \frac{1}{j+1} \sum_{1 \leq k \leq (j+1)^2} e_{k,1} \right) \\ &= \sum_{i,j \geq 0} \alpha_{i+j} C_{i+j} \otimes e_{i,j} \otimes (j+1)e_{1,1}. \end{aligned}$$

**Remarque :** La proposition et le lemme sont valables pour toute suite  $(C_n)$  dans  $B(H)$  telle que  $\|\sum \alpha_n C_n\| \leq (\sum |\alpha_n|)^{\frac{1}{2}}$  pour toute suite finie de scalaires  $(\alpha_n)$ . En particulier, on peut prendre l'espace d'opérateurs  $\max(\ell_2)$ , à la place de l'espace engendré par  $(C_n)$ .

### 3.2 Multiplicateurs de Schur

Ici, on change légèrement la définition de  $H^1$  par rapport au chapitre précédent :

$$H^1(\ell_2) = \{f \in L^1(\mathbb{T}, \ell_2) \mid \forall n < 0 \hat{f}(n) = 0\}.$$

La formule de dualité, pour  $f \in H^1(\ell_2)$  et  $g \in L^\infty(\ell_2)$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \langle f(z), g(z) \rangle dz$$

où  $\langle, \rangle$  à droite est le crochet de dualité entre  $\ell_2$  et  $\ell_2^* \approx \ell_2$ , nous permet de considérer  $H^1(\ell_2)$  comme préduel de  $L^\infty(\ell_2)/H^\infty(\ell_2)$ . Comme cet espace est au niveau Banach isométrique à  $\mathcal{H} \otimes_{\min} R$ , on le réalise comme sous-espace complémenté de  $L^\infty(B(\ell_2))/H^\infty(B(\ell_2))$  en ne gardant que la première colonne.

Le résultat d'Alexandov Peller et Bourgain dans le cas scalaire ( $R(\Gamma_f)$  est semblable à une contraction si et seulement si  $\Gamma_{f'}$  est borné), utilise le lemme de Bourgain [Bo1] reformulé dans [DP] en

**Lemme 3.2.1** *Il existe une constante  $C$  telle que pour toute matrice de Hankel,*

$$\|[(j+1)a_{i+j}]\| \leq C \|[(i+j+1)a_{i+j}]\|.$$

Cela signifie que le multiplicateur de Schur  $[\frac{j+1}{i+j+1}]$  est borné sur les matrices de Hankel. Cependant il n'est pas complètement borné car si c'était le cas, par [Pi7] ou [DP] il s'étendrait en un multiplicateur de Schur borné sur  $B(\ell_2)$ , mais pour de tels multiplicateurs, on dispose du résultat suivant de Bennett [Be]

**Proposition 3.2.2** *Si  $[m_{i,j}]$  est un multiplicateur de Schur borné sur  $B(\ell_2)$  et si*

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} m_{i,j} &= A \\ \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} m_{i,j} &= B \end{aligned}$$

alors

$$A = B.$$

*Preuve :* Pour le voir on peut utiliser le fait que si  $[m_{i,j}]$  est borné alors  $m_{i,j} = (x_i | y_j)$  pour des familles de vecteurs  $(x_i), (y_j)$  uniformément bornées dans  $\ell_2$ . L'existence des limites implique que  $x_i$  converge faiblement vers un vecteur  $x$  et  $y_j$  vers  $y$  et alors  $A = B = (x | y)$ . Un autre moyen consiste à remarquer que l'on peut extraire du multiplicateur  $[m_{i,j}]$  le multiplicateur  $[A\delta_{j>i} + B\delta_{i>j}]$  qui n'est borné que si  $A = B$ , sinon il correspond à la projection triangulaire.  $\square$



Ce résultat implique que l'on ne peut pas espérer trouver une preuve du lemme de Bourgain assez formelle comme dans la section précédente. La démonstration originelle utilise la caractérisation de  $H^1$  à l'aide de la fonction carrée, Ferguson dans [Fe] en a donné une autre preuve en utilisant une caractérisation de  $BMO$  en terme de mesure de Carleson.

Dans cette section, on généralise ce lemme en utilisant le procédé de sélection de colonnes dans la démonstration de la proposition 3.1.3. La démonstration reposera sur

**Théorème 3.2.3** *Soit  $(m_n)$  une suite d'opérateurs sur  $\ell_2$  telle que*

$$\begin{aligned} i) \quad & \sup_{n \geq 0} \|m_n\| \leq C \\ ii) \quad & \sup_{n \geq 0} n \|m_{n+1} - m_n\| \leq C \\ iii) \quad & \sup_{n \geq 0} n^2 \|m_{n+2} - 2m_{n+1} + m_n\| \leq C \end{aligned} \quad ,$$

alors  $(m_k)$  est un multiplicateur de Fourier sur  $H^1(\ell_2)$  de norme inférieure à  $kC$  pour une certaine constante universelle  $k$ .

On peut déduire ce résultat de la preuve du théorème de Blower [Blo] que l'on a utilisé pour les décompositions de  $H^1$ , en faisant les bonnes modifications.

*Preuve* : Pour montrer ce théorème, on utilise des opérateurs de Calderón-Zygmund. On suppose pour l'instant que la suite  $(m_n)$  est finie pour éviter les problèmes de convergence.

Formellement le multiplicateur du théorème agit sur  $H^1(\ell_2)$  comme la convolution avec le noyau  $K(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} m_{|n|} z^n$ , dans la suite pour les intégrales on identifie  $\mathbb{T} = ]-1, 1]$ . Comme  $\ell_2$  est UMD (ou par 2.1.4), il suffit de montrer que pour tout 1-atome  $a$  à valeurs dans  $\ell_2$ , on a  $\|K \star a\|_{L^1(\ell_2)} \leq K$ .

Pour le moment, supposons que  $K$  vérifie les conditions de Hörmander :

$$\begin{aligned} a) \quad & \|\hat{K}\| < D \\ b) \quad & \sup_{y \in ]-1, 1]} \int_{|x| \geq c|y|} \|K(x+y) - K(x)\| dx < D \end{aligned}$$

On reproduit la démonstration pour les noyaux de Calderón-Zygmund. La condition a) implique directement que  $K : L^2(\ell_2) \rightarrow L^2(\ell_2)$  (c'est le point où  $\ell_2$  joue un rôle crucial). Soit  $a$  un atome supporté par un intervalle  $I$ , on note  $J$  l'intervalle de même centre et de longueur  $c|I|$  (pour  $c > 1$  fixé), on a

$$\begin{aligned} \|a \star K\|_{L^1} & \leq \|(a \star K)\chi_J\|_{L^1} + \|(a \star K)\chi_{\mathbb{T} \setminus J}\|_{L^1} \\ & \leq \sqrt{c|I|} \|a \star K\|_{L^2} + \int_{x \notin J} \left\| \int_{y \in I} (K(x+y) - K(x)) a(y) dy \right\| dx \end{aligned}$$

Comme  $\|a\|_{\infty} \leq \frac{1}{|I|}$ , le second terme est majoré par

$$\frac{1}{|I|} \int_I \int_{x \notin J} \|K(x+y) - K(x)\| dx dy \leq M$$

qui est uniformément borné par la condition b).

Grâce à la majoration  $\|a\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{|I|}}$ , on obtient

$$\|a \star K\|_{L^1} \leq M + \sqrt{c} = k.$$

Il reste à vérifier que  $K$  vérifie les conditions a) et b). Par i), on a immédiatement a).

Le reste de la preuve consiste à montrer que iii) implique b).

On pose  $S_0 = 1$  et  $S_{-1} = 0$  et pour  $n \geq 1$

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^n (z^k + z^{-k}).$$

Une transformation d'Abel donne

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (m_n - m_{n+1}) S_n(z).$$

Si on note  $F_n = \sum_{k=0}^n S_k$ , une seconde transformation d'Abel donne

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (m_n - 2m_{n+1} + m_{n+2}) F_n(z). \quad (1)$$

$F_n$  est étroitement relié au noyau de Fejer et pour  $z = e^{i\pi t}$  :

$$F_n(z) = \left( \frac{\sin(\frac{\pi(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{\pi t}{2})} \right)^2. \quad (2)$$

**Lemme 3.2.4** *On a les majorations*

$$\int_{|x| \geq c|y|} |F_n(x+y) - F_n(x)| dx \lesssim \min\left\{ \frac{1}{|y|}; \sqrt{yn^3} \right\}.$$

*Preuve* : La première majoration est directe à partir de (2). En effet, on a

$$|F_n(t)| \lesssim \frac{1}{t^2}.$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq c|y|} |F_n(x+y) - F_n(x)| dx &\leq \int_{|x| \geq c|y|} |F_n(x+y)| dx + \int_{|x| \geq c|y|} |F_n(x)| dx \\ &\leq \int_{|x| \geq (c-1)|y|} |F_n(x)| dx + \frac{2}{c|y|} \\ &\leq \frac{2}{(c-1)|y|} + \frac{2}{c|y|}. \end{aligned}$$

Pour la seconde, on pose  $z = e^{i\pi x}$ , par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq c|y|} |F_n(x+y) - F_n(x)| dx &\leq \left( \int_{|x| \geq c|y|} \frac{1}{|1-z|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left( \int_{|x| \geq c|y|} |(1-z)(F_n(x+y) - F_n(x))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \frac{1}{\sqrt{|y|}} \cdot \|(1-z)(F_n(x+y) - F_n(x))\|_{L^2(dx)} \end{aligned}$$

Pour estimer la norme  $L^2$ , on utilise la formule de Parseval. On note  $z' = e^{i\pi y}$ , les coefficients de Fourier  $(c_k)$  de  $(1-z)(F_n(zz') - F_n(z))$  en  $z$  sont (pour  $z'$  fixé) :

$$\begin{array}{ll}
k = 0, & c_0 = (z'^{-1} - 1)(n - 1), \\
\text{pour } k = 1, & c_1 = (z' - 1)(n - 1), \\
\text{pour } 2 \leq k \leq n, & c_k = (n + 1 - k)(z'^k - z'^{k-1}) - (z'^{k-1} - 1), \\
\text{pour } 1 - n \leq k \leq -1, & c_k = (n + 1 + k)(z'^k - z'^{k-1}) - (z'^{k-1} - 1), \\
\text{pour } k = n + 1, & c_{n+1} = (z'^n - 1), \\
\text{pour } k = -n, & c_{-n} = (z'^{-n} - 1), \\
\text{pour } k \notin [-n; n + 1], & c_k = 0.
\end{array}$$

Comme  $|z'^k - 1| \lesssim |ky|$  et  $\sum_{k=1}^n k^2 \lesssim n^3$ , on en déduit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \lesssim n^3 |y|^2.$$

Et donc

$$\int_{|x| \geq c|y|} |F_n(x+y) - F_n(x)| dx \lesssim \sqrt{yn^3}.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme.  $\square$

On termine la vérification de b) pour  $K$  ; en utilisant iii) et (2), puis le lemme, il vient pour tout  $N \geq 2$

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \geq c|y|} \|K(x+y) - K(x)\| dx &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{n^2} \int_{|x| \geq c|y|} |F_n(x+y) - F_n(x)| dx \\
&\lesssim \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{|y|}}{\sqrt{n}} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|y|n^2}} \\
&\lesssim \frac{1}{\sqrt{|y|N}} + \frac{1}{N|y|}
\end{aligned}$$

En choisissant  $N$  de l'ordre de  $\frac{1}{|y|}$ , on obtient b). Ce qui conclut la démonstration du théorème dans le cas où la suite  $(m_n)$  est finie. Si ce n'est pas le cas, il suffit de considérer  $K \star F_n$  avec le noyau de Fejer d'ordre  $n$  et remarquer qu'il s'agit encore de multiplieurs de Mihlin, uniformément bornés, puis faire tendre  $n$  vers l'infini.  $\square$

Comme cas particulier de ce théorème, on a

**Lemme 3.2.5** Soient  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  à support dans l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 2]$  et  $W_k$  les multiplieurs de Fourier définis par  $W_k = ((\phi(2^{-k}(n+1))))_{n \geq 0}$  pour  $k \geq 0$ , alors pour toute suite bornée d'opérateurs  $(a_k)$  sur  $\ell_2$

$$T = \sum_{k \geq 0} W_k \otimes a_k$$

est un multiplieur de Mihlin de  $H^1(\ell_2)$  à valeurs opérateurs, borné par

$$\|T\| \leq C \sup_k \{\|a_k\|\} \|\phi''\|_{\infty}.$$

*Preuve* : L'opérateur  $T$  est un multiplieur de symbole  $m_n = \sum_{k \geq 0} \phi(\frac{n+1}{2^k}) a_k$ .

Tout d'abord on remarque que pour tout  $n$ , il y a au plus deux  $k$  consécutifs pour lesquels  $\phi(\frac{n+1}{2^k})$  ne s'annule pas par hypothèse sur le support de  $\phi$ .

On vérifie les trois conditions du théorème 3.2.3.

- i) Il est clair que  $\sup_{n \geq 0} \|m_n\| \leq 2 \sup_k \{\|a_k\|\} \|\phi\|_{\infty}$ , par la remarque précédente.

– ii) Par l'inégalité triangulaire

$$n\|m_{n+1} - m_n\| \leq n \sup_k \{\|a_k\|\} \sum_{k \geq 0} \left| \phi\left(\frac{n+2}{2^k}\right) - \phi\left(\frac{n+1}{2^k}\right) \right|$$

Les  $k$  pour lesquels les termes apparaissant dans la somme ne s'annulent pas, sont ceux qui vérifient  $2^{k-1} \leq n+2 \leq 2^{k+1}$  ou  $2^{k-1} \leq n+1 \leq 2^{k+1}$ , il y en a au plus trois et pour chacun d'eux on a  $\frac{n}{2^k} \leq 2$ , donc

$$n\|m_{n+1} - m_n\| \leq 3 \sup_k \{\|a_k\|\} \|\phi'\|_\infty \frac{n}{2^k} \leq 6 \sup_k \{\|a_k\|\} \|\phi'\|_\infty$$

– iii) De la même manière,

$$n^2\|m_{n+2} - 2m_{n+1} + m_n\| \leq n^2 \sup_k \{\|a_k\|\} \sum_{k \geq 0} \left| \phi\left(\frac{n+3}{2^k}\right) - 2\phi\left(\frac{n+2}{2^k}\right) + \phi\left(\frac{n+1}{2^k}\right) \right|$$

Comme ci-dessus, le nombre d'indices  $k$  pour lesquels les termes de la somme ne s'annulent pas est plus petit que quatre et ces  $k$  vérifient  $\frac{n}{2^k} \leq 2$ , donc en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2

$$n^2\|m_{n+2} - 2m_{n+1} + m_n\| \leq 4n^2 \sup_k \{\|a_k\|\} (2 \cdot \|\phi''\|_\infty \frac{1}{2^{2k}}) \leq 32 \sup_k \{\|a_k\|\} \|\phi''\|_\infty.$$

L'estimation quantitative du lemme provient alors de la formule de Taylor.  $\square$

Le résultat principal de ce chapitre est

**Théorème 3.2.6** *Soit  $r > 0$ , alors le multiplicateur de Schur  $\left[\left(\frac{j+1}{i+j+1}\right)^r\right]_{i,j \geq 0}$  est borné sur les matrices de Hankel.*

**Remarque :** Le résultat de Bennett (proposition 3.2.2) implique que ces multiplicateurs ne sont pas complètement bornés.

*Preuve :* On reprend le schéma de la section précédente, supposons pour l'instant qu'il existe un opérateur borné  $T$  de  $L^\infty/H^\infty$  dans  $L^\infty(\ell_2)/H^\infty(\ell_2)$  de la forme

$$T\left(\sum_{n \geq 0} a_n \gamma_n\right) = \sum_{n \geq 0} a_n \gamma_n \otimes \sum_{k \geq 1} m_k^n e_{1,k},$$

pour des suites de scalaires  $(m_k^n)$  vérifiant

$$\forall 1 \leq k \leq (n+1)^{2r}, \quad m_k^n = \frac{1}{(n+1)^{2r}}.$$

On considère alors l'opérateur borné sur  $\ell_2 \otimes_2 \ell_2$  défini par

$$Q = \sum_{j \geq 0} e_{j,j} \otimes \frac{(j+1)^r}{[(j+1)^{2r}]_{1 \leq k \leq (j+1)^{2r}}} \sum_{1 \leq k \leq (j+1)^{2r}} e_{k,1},$$

où  $[x]$  est la partie entière de  $x$ . Il est facile de voir que  $\|Q\|^2 = \sup_{j \geq 0} \frac{(j+1)^{2r}}{[(j+1)^{2r}]_{1 \leq k \leq (j+1)^{2r}}} \leq 2$ .

En calculant,

$$T\left(\sum_{n \geq 0} a_n \gamma_n\right)Q = \left[\left(\frac{j+1}{i+j+1}\right)^r a_{i+j}\right]_{i,j \geq 0} \otimes e_{1,1},$$

ce qui implique le théorème.

Le reste de la preuve consiste en la construction de cet opérateur  $T$ . Par dualité,  $T$  peut-être vu comme l'adjoint d'une certaine application  $T_*$ ; si on note  $M_j$  le multiplicateur de Fourier  $(m_j^n)_{n \geq 0}$ , alors  $T_*$  est donné par la formule :

$$T_* : \begin{cases} H^1(\ell_2) & \rightarrow & H^1 \\ (f_j)_{j \geq 1} & \mapsto & \sum_{j \geq 1} M_j(f_j) \end{cases} \quad (*)$$

Pour construire  $T_*$ , on reprend les idées sous-jacentes au fait que  $H^1$  admet une décomposition inconditionnelle de rang fini.

Soit  $\psi$  une fonction  $\mathcal{C}^2$  sur  $[1, 2]$ , égale à 1 sur un voisinage de 1 et 0 sur un voisinage de 2. On définit  $\phi$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^r} \psi(x) & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{x^r} (1 - \psi(2x)) & x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 0 & x \notin [\frac{1}{2}, 2] \end{cases} .$$

Alors  $\phi$  est une fonction  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  qui satisfait

$$\forall x \geq 1, \quad \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{rk}} \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{x^r} \quad (**)$$

En effet, si  $x \geq 1$ , dans la somme précédente il y a au plus deux termes consécutifs non nuls, ils correspondent à  $k = \lfloor \log_2 x \rfloor$  et  $k = \lfloor \log_2 x \rfloor + 1$ , où  $\log_2$  est le logarithme de base 2. Et puisque  $1 \leq \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}} \leq 2$ , il vient de la définition de  $\phi$ , pour  $k_0 = \lfloor \log_2 x \rfloor$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^{rk}} \phi\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \frac{1}{2^{rk_0}} \phi\left(\frac{x}{2^{k_0}}\right) + \frac{1}{2^{rk_0+r}} \phi\left(\frac{x}{2^{k_0+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{rk_0}} \left(\frac{2^{k_0}}{x}\right)^r \psi\left(\frac{x}{2^{k_0}}\right) + \frac{1}{2^{rk_0+r}} \left(\frac{2^{k_0+1}}{x}\right)^r (1 - \psi\left(\frac{x}{2^{k_0}}\right)) \\ &= \frac{1}{x^r} . \end{aligned}$$

Pour obtenir  $T_*$ , on se sert du lemme 3.2.5 avec  $W_k = (\phi(2^{-k}(n+1)))_{n \geq 0}$  les multiplicateurs de Fourier scalaires et les opérateurs

$$a_k = \frac{1}{2^{kr}} \sum_{1 \leq j \leq 4^{r(k+1)}} e_{j,1} .$$

Cette famille est uniformément bornée par  $2^r$ , et donc le lemme nous assure que  $T_*$  est bien borné.

En identifiant  $\mathbb{C}$  avec le sous-espace de  $\ell_2$  engendré par le premier vecteur de base, alors  $T_* = \sum_{k \geq 0} W_k \otimes a_k$  est de la forme voulue (\*) avec :

$$M_j = \sum_{k \geq k_j} \frac{1}{2^{kr}} W_k ,$$

où  $k_j$  est le plus petit entier  $k$  tel que  $j \leq 4^{(k+1)r}$ .

En particulier pour  $1 \leq j \leq (n+1)^{2r}$ ,

$$\begin{aligned} m_j^n &= \sum_{k \geq k_j} \frac{1}{2^{kr}} W_k(n) \\ &= \sum_{k \geq k_j} \frac{1}{2^{kr}} \phi(2^{-k}(n+1)) . \end{aligned}$$

Pour montrer  $m_j^n = \frac{1}{(n+1)^r}$ , il faut vérifier que les deux termes non nuls dans (\*\*) sont bien dans la somme ci-dessus ; c'est le cas si  $2^{-k_j}(n+1)$  est plus grand que 1.

En prenant la puissance  $2r$ , il faut vérifier que  $4^{-k_j r}(n+1)^{2r} \geq 1$ . Par la minimalité de  $k_j$ , on doit avoir  $j \geq 4^{k_j r}$ , et donc

$$4^{-k_j r}(n+1)^{2r} \geq \frac{(n+1)^{2r}}{j} \geq 1.$$

Ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Remarque :** La preuve donne explicitement une majoration de la norme de la forme  $K(r+1)^2 4^r$ . On peut l'améliorer en  $K(r+1)^2$  en remplaçant les intervalles dyadiques par des intervalles de taille de base  $1 + \frac{1}{r}$  lorsque  $r$  est grand.

Le cas  $r = 0$  est un peu spécial, en notant  $\delta_A$  la fonction caractéristique de l'ensemble  $A$  :

**Théorème 3.2.7** *Le multiplicateur de Schur  $[\delta_{[\log_2(j+1)] > [\log_2(i+1)]}]_{i,j \geq 0}$  est borné sur les matrices de Hankel.*

*Preuve :* Il faut modifier quelque peu la preuve, on prend les mêmes notations.  $\phi$  est toujours une fonction qui vérifie (\*\*) avec  $r = 0$  (c'est une partition régulière de l'identité), pour des raisons techniques, on suppose en outre que  $\text{supp } \phi \subset [\frac{5}{8}, \frac{3}{2}]$ . On change les choix des  $a_k$  en prenant  $a_k = e_{[\log_2(k+1)], 1}$ ,  $T$  est toujours l'adjoint du multiplicateur  $\sum_{k \geq 0} W_k \otimes a_k$ , ainsi

$$T(\gamma_n) = \sum_{k \geq 0} \phi\left(\frac{n+1}{2^k}\right) \gamma_n \otimes e_{1, [\log_2(k+1)]}.$$

En utilisant  $Q = \sum_{j \geq 0} e_{j,j} \otimes (e_{[\log_2(j+1)], 1} + e_{[\log_2(j+1)]+1, 1})$ , on obtient

$$T(\gamma_n)Q = \sum_{i+j=n} \left( \phi\left(\frac{n+1}{2^{[\log_2(j+1)]}}\right) + \phi\left(\frac{n+1}{2^{[\log_2(j+1)]+1}}\right) \right) e_{i,j} \otimes e_{1,1}.$$

Si on note  $\alpha_{i,j} = \phi\left(\frac{n+1}{2^{[\log_2(j+1)]}}\right) + \phi\left(\frac{n+1}{2^{[\log_2(j+1)]+1}}\right)$ , le multiplicateur  $[\alpha_{i,j}]$  est borné sur les matrices de Hankel, on analyse sa valeur pour certains indices  $i$  et  $j$ .

1. Si  $[\log_2(j+1)] > [\log_2(i+1)] + 1$ , alors  $\alpha_{i,j} = 1$ . Car par (\*\*)

$$\sum_{k \geq 0} \phi\left(\frac{n+1}{2^k}\right) = 1,$$

en effet, il suffit de vérifier que pour tout  $k \neq [\log_2(j+1)], [\log_2(j+1)] + 1$ , on a  $\phi\left(\frac{n+1}{2^k}\right) = 0$ .

- Si  $k > [\log_2(j+1)] + 1$ , alors

$$\frac{n+1}{2^k} = \frac{i}{2^k} + \frac{j+1}{2^k} \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

et  $\phi\left(\frac{n+1}{2^k}\right) = 0$  par hypothèse sur le support de  $\phi$ .

- Si  $k < [\log_2(j+1)]$ , alors

$$\frac{n+1}{2^k} = \frac{i}{2^k} + \frac{j+1}{2^k} \geq 0 + 2 = 2$$

ce qui clôt ce cas.

2. Si  $[\log_2(i+1)] > [\log_2(j+1)]$ , alors pour tout  $k \leq [\log_2(j+1)] + 1$

$$\frac{n+1}{2^k} = \frac{i}{2^k} + \frac{j}{2^k} + \frac{1}{2^k} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

et  $\alpha_{i,j} = 0$  toujours par hypothèse sur le support de  $\phi$ .

On a donc un multiplicateur de Schur  $M = [\alpha_{i,j}]$  borné sur les Hankel presque égal à celui du théorème. On le corrige. Les multiplicateurs de Schur

$$\Delta = (\delta_{[\log_2(j+1)]=[\log_2(i+1)]}) \quad \text{et} \quad \Delta' = (\delta_{[\log_2(j+1)]=[\log_2(i+1)]+1})$$

sont bornés sur  $B(\ell_2)$  tout entier. Comme le multiplicateur du théorème est exactement  $(Id - \Delta - \Delta')M + \Delta'$ , on a terminé la preuve.  $\square$

**Remarque :** En fait, le multiplicateur de Schur  $[\delta_{j>i}]_{i,j \geq 0}$  est borné sur les matrices de Hankel. On peut trouver ce résultat dans [BB], où il est montré que la bornitude de ce multiplicateur est équivalente à la bornitude d'une transformée de Hilbert bilinéaire, ce qui a été établi par Lacey et Thiele.

On peut se demander

**Problème :** Trouver une preuve "simple" de la bornitude de la projection triangulaire sur les Hankel.





# Annexe A

## Une remarque sur $\alpha(E)$

Comme rappelé dans le premier chapitre, si  $E$  est un espace de Banach, on peut le considérer comme un espace d'opérateurs de nombreuses manières. Les structures extrémales sont  $\min$  et  $\max$ ; on les utilise pour mesurer la richesse des structures d'espace d'opérateurs possibles sur  $E$ . Pour cela, on considère :

$$\alpha(E) = \|Id : \min(E) \rightarrow \max(E)\|_{cb}.$$

Cette quantité a été introduite et étudiée par Paulsen dans [Pa3]. Il y est démontré entre autres que si  $E$  est de dimension plus grande que 5 alors  $\alpha(E) > 1$  (ce résultat a été étendu aux dimensions plus grandes que 3 par Pisier), ainsi que l'inégalité

$$\max\left\{\frac{n}{2}, \sqrt{n}\right\} \leq \alpha(\ell_2^n) \leq \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Pour un espace de Banach  $E$  de dimension  $n$ , l'inégalité  $\alpha(E) \leq n$  est assez simple à obtenir. Le but de cette annexe est de donner une légère amélioration de ce fait.

**Théorème 1** *Soit  $E$  un espace de Banach de dimension  $n$ , on a*

$$\alpha(E) \leq \sqrt{\alpha(\ell_2^n) \cdot n} \leq 2^{-\frac{1}{4}} n.$$

*Preuve :* Par la version de Lewis du théorème de John ([Pi1]), l'identité de  $E$  est 2-sommante et  $\pi_2(Id_E) = \sqrt{n}$ . Par conséquent, il existe une factorisation de l'identité de  $E$  de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\alpha} & S & \xrightarrow{\beta} & E \\ \downarrow i & & \updownarrow p & & \\ L^\infty(\mu) & \xrightarrow{\pi} & L^2(\mu) & & \end{array}$$

où  $\mu$  est une probabilité sur un espace compact,  $i$  est une injection isométrique de  $E$  dans  $L^\infty(\mu)$ ,  $\pi$  est l'injection naturelle 2-sommante de  $L^\infty(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ , enfin  $S$  est un sous-espace de dimension  $n$  de  $L^2(\mu)$  et on a les estimations  $\|\alpha\| \leq 1$  et  $\|\beta\| \leq \sqrt{n}$ .

On se place au niveau espace d'opérateurs. On considère  $L^\infty$  muni de sa structure minimale et  $L^2$  muni de la structure  $R \cap C$ . Comme  $\pi$  est 2-sommante par [Pi3],

$$\pi : L^\infty(\mu) \rightarrow L^2(\mu)_{R \cap C}$$

est complètement contractante. De même, la projection

$$p : L^2(\mu)_{R \cap C} \rightarrow S_{R \cap C}$$

est complètement contractante. On note

$$\rho : S_{R \cap C} \rightarrow \max(S) = \max(\ell_2^n),$$

l'identité formelle.

En composant toutes ces applications, on obtient une factorisation de l'identité de  $E$  :

$$Id_{\min(E) \rightarrow \max(E)} = \beta \rho \pi i.$$

Comme  $L^\infty$  est minimal, on a  $\|i\|_{cb} = \|i\|$  et par maximalité

$$\|\beta : \max(S) \rightarrow \max(E)\|_{cb} = \|\beta\|.$$

Ainsi,

$$\alpha(E) \leq \|Id_{R_n \cap C_n} \rightarrow \max(\ell_2^n)\|_{cb} \sqrt{n}.$$

Pour conclure, on intercale l'espace  $OH_n$  :

$$\|Id_{R_n \cap C_n} \rightarrow \max(\ell_2^n)\|_{cb} \leq \underbrace{\|Id_{R_n \cap C_n} \rightarrow OH_n\|_{cb}}_1 \cdot \underbrace{\|Id_{OH_n} \rightarrow \max(\ell_2^n)\|_{cb}}_{\sqrt{\alpha(\ell_2^n)}}.$$

L'identification du second terme provient du résultat d'interpolation

$$OH_n = (\max(\ell_2^n), \min(\ell_2^n))_{\frac{1}{2}}.$$

L'estimation de Paulsen donne la seconde inégalité de l'énoncé.  $\square$

Comme application directe, on peut citer

**Corollaire 2** *Soit  $u$  une application linéaire de rang  $n$  entre deux espaces d'opérateurs, alors*

$$\|u\|_{cb} \leq 2^{-\frac{1}{4}} n \|u\|.$$

*Preuve* : Si  $u : E \rightarrow F$ , on peut factoriser  $u$  au travers de  $\tilde{u} : E/\text{Ker } u \rightarrow F$ . Par le théorème précédent,  $d_{cb}(E/\text{Ker } u, \max(E/\text{Ker } u)) \leq 2^{-\frac{1}{4}} n$ , on conclut en remarquant que  $E \rightarrow E/\text{Ker } u$  est complètement contractante et  $\tilde{u} \max(E/\text{Ker } u) \rightarrow F$  a pour norme complètement bornée  $\|\tilde{u}\| = \|u\|$ .  $\square$

On peut se demander

**Problème** : Quel est asymptotiquement en  $n$  le coefficient optimal dans l'inégalité précédente ?

# Bibliographie

- [AP] A.B. Aleksandrov ; V.V. Peller : Hankel operators and similarity to a contraction, *Internat. Math. Res. Notices* 6 (1996), 263-275.
- [BaP] C. Badea ; V.I. Paulsen : Schur multipliers and operator-valued Foguel-Hankel operators, *Indiana Univ. Math.* 50 (2001).
- [Be] G. Bennett : Schur multipliers, *Duke Math. J.* 44 (1977), 603-639.
- [BB] A. Bonami ; J. Bruna : On truncation of Hankel and Toeplitz operators, *Publicacions Matemàtiques*, 43 (1999), 235-250.
- [Bl] D. Blecher : The standard dual of an operator space, *Pacific J. Math.* 153 (1992), 15-30.
- [BLeM] D. Blecher ; C. Le Merdy : On quotients of function algebras and operator algebra structures on  $\ell_p$ . *J. Operator Theory* 34 (1995), 315-346.
- [BIP] D. Blecher ; V. Paulsen : Tensor products of operator spaces, *J. Funtional Analysis* 99 (1991), 262-292.
- [BRS] D. Blecher ; Z-J. Ruan ; A. Sinclair : A characterization of operator algebras, *J. Funtional Analysis* 89 (1990), 188-201.
- [Blo] G. Blower : A multiplier characterization of analytic UMD spaces, *Studia Math.* 96 (1990), 116-124.
- [Bo1] J. Bourgain : On the similarity problem for polynomially bounded operators, *Israel J. Math.* 54 (1986), 227-241.
- [Bo2] J. Bourgain : Vector valued singular integrals and the  $H^1 - BMO$  duality, *Probability theory and harmonic analysis* (Cha-Woyczynski ed.) Marcel Dekher, New-York 1986, 1-19.
- [Bo3] J. Bourgain : Extension of a result of Benedick, Calderón and Panzone, *Ark. Mat.* 22 (1983) 91-95.
- [CCFW] J.F. Carlson ; D.N. Clark ; C. Foias ; J.P. Williams : Projective Hilbert  $A(\mathbb{D})$ -modules, *New York J. Math.* 1 (1994), 26-38.
- [DP] K.R. Davidson ; V.I. Paulsen : Polynomially bounded operators, *J. Reine Angew. Math.* 487 (1997), 153-170.
- [Di] P.G. Dixon : Varieties of Banach algebras. *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 27 (1976), 481-487.
- [ER] E.G. Effros ; Z-J. Ruan : *Operator spaces*. LMS monographs, new series, 23, 2000.
- [Fe] S. Ferguson : Polynomially bounded operators and Ext groups, *Proc. Amer. Soc.* 15 (1996), 2779-2785.
- [HP1] U. Haagerup ; G. Pisier : Bounded linear operator between  $C^*$ -algebras. *Duke Math. J.* 71 (1993), 882-906.

- [HP2] U. Haagerup; G. Pisier : Factorization of analytic functions with values in non-commutative  $L^1$ -spaces, Canadian Journal of Math. 41 (1989) 882-906.
- [HW] E. Hernandez; G. Weiss : *A first course on wavelets*, Studies in Advanced Math., 1996.
- [Ju] M. Junge : *Factorization theory for spaces of operator*. Habilitation thesis. Kiel university, 1996.
- [KP] S. Kwapien; A. Pełczyński : The main triangle projection in matrix spaces and its applications, Studia Math. 34 (1970) 43-68.
- [KR] S.-H. Kye; Z.-J. Ruan : On local lifting property for operator space, J. Functional Analysis, 168 (1999) 355-379.
- [LT] J. Lindenstrauss; L. Tzafriri : *Classical Banach spaces I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 92, Springer-Verlag.
- [Lu1] W. Lusky : On Banach spaces with the commuting bounded approximation property, Arch. Math. 58 (1992), 568-574.
- [Lu2] W. Lusky : On Banach spaces with bases, J. Functional Analysis, 138 (1996), 410-425.
- [LuP] F. Lust-Piquard : Opérateurs de Hankel 1-sommant de  $\ell_1^N$  dans  $\ell_\infty^N$  et multiplicateurs de  $H^1(\mathbb{T})$ , C. R. Acad. Sci. Paris Série I Math. 299 (1984), no. 18, 915-918.
- [Ma] B. Maurey : Isomorphismes entre espace  $H^1$ , Acta math. 145 (1980), 79-120.
- [Me] Y. Meyer : *Ondelettes*, Hermann 1990.
- [NPTV] F. Nazarov; G. Pisier; S. Treil; A. Volberg : Sharp estimates in vector Carleson imbedding theorem and for vector paraproducts, J. für die Reine und Ang.,  $\hat{A}$  paraître.
- [Ne] S. Neuwirth : *Multiplicateurs et analyse fonctionnelle*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI 1999.
- [Oi] T. Oikhberg : Subspaces of maximal operator spaces. Preprint.
- [Pag] L.B. Page : Bounded and compact vectorial Hankel operators, Trans. Amer. Math. Soc. 150 (1970), 529-539.
- [Par] S. Parrott : On a quotient Norm and the Sz. Nagy-Foias lifting theorem, J. Functional Analysis 30 (1978), 311-328.
- [Pa1] V. Paulsen : The maximal operator space of a normed space, Proc. Edinburgh Math. Soc. 39 (1996), 309-323.
- [Pa2] V. Paulsen : *Completely bounded maps and dilations*, Pitman Research Notes 146. Pitman Longman (Wiley) 1986.
- [Pa3] V. Paulsen : Representations of function algebras, abstract operator spaces, and Banach space geometry. J. Funct. Anal. 109 (1992), no. 1, 113-129.
- [Pe] S. Petermichl : Dyadic shift and a logarithmic estimate for Hankel operator with matrix symbol, Preprint Michigan State Univ, 1999.
- [Pi1] G. Pisier : *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., vol. 60, 1986.
- [Pi2] G. Pisier : *Non commutative vector valued  $L_p$ -spaces and completely  $p$ -summing maps*, Asterisque Soc. Math. France 247 (1998).
- [Pi3] G. Pisier : *The operator Hilbert space  $OH$ , complex interpolation and tensor norms*, Memoirs Amer. Math. Soc. 585 (1996).

- [Pi4] G. Pisier : The similarity degree of an operator algebra, St. Petersburg Math. J. 10 (1999), 103-146.
- [Pi5] G. Pisier : *An introduction to the theory of operator spaces*, Preprint.
- [Pi6] G. Pisier : A polynomially bounded operator on Hilbert space which is not similar to a contraction, J. Amer. Soc. 10 (1997), 351-369.
- [Pi7] G. Pisier : *Similarity problems and completely bounded maps*, Springer Lecture Notes 1618 (1995).
- [Ru] Z.-J. Ruan : Subspaces of  $C^*$ -algebras, J. London Math. Soc 27 (1983), 157-166.
- [St] E. Stein : Multiplicateurs et fonctions de Littlewood-Paley, C. R. Acad. Sci. Paris Série A-B 263 (1966) A, 716-719.
- [W] P. Wojtaszczyk : The Franklin system is an unconditional basis in  $H^1$ , Arkiv för Mat. 20 (1982), 293-300.
- [W2] P. Wojtaszczyk : *Banach spaces for analysts*, Cambridge studies in advances mathematics 25 (1991).