Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6

Institut de Mathématiques de Jussieu U.M.R. 7586

Spécialité :

Mathématiques

présentée par :

M. Eric Villani

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

Sujet :

Mesures d'indépendance linéaire simultanées sur les périodes d'intégrales abéliennes

Soutenue le 1er décembre 2005 devant le jury composé de :

M. Daniel Bertrand	(Université Paris 6)	Directeur
M. Jean-Benoît Bost	(Université Paris 11)	
M. Sinnou David	(Université Paris 6)	
M. Eric Gaudron	(Université Grenoble 1)	Rapporteur
M. Michel Laurent	(CNRS - Marseille)	Rapporteur
M. Jan Nekovář	(Université Paris 6)	

Remerciements

Je tiens à exprimer en premier lieu toute ma reconnaissance à Daniel Bertrand pour m'avoir initié à la recherche et pour tout ce qu'il m'a appris, durant mes stages de maîtrise et de DEA, et tout au long de ces années de doctorat.

Je remercie également Eric Gaudron et Michel Laurent pour leur travail de rapporteur, ainsi que Jean-Benoît Bost et Jan Nekovář pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Je remercie Sinnou David, et une nouvelle fois Eric Gaudron, pour leurs relectures attentives de mon travail et les nombreuses remarques et suggestions qu'ils ont pu faire, me permettant ainsi de corriger certains points et d'en améliorer d'autres.

Je remercie enfin tous mes amis et proches qui m'ont apporté leur soutien et leur confiance, et ont su me supporter pendant l'élaboration de cette thèse.

Table des matières

Notations générales

- On note $\log(x)$ le logarithme népérien de x, et on pose
$$\log^+(x) = \max\{1; \log(x)\}.$$
- Pour K un corps de nombres donné, on note M_K l'ensemble des places de K.
Les places v de K sont normalisées de la manière suivante :
  - si v est archimédienne, $|1|_v = 1$
  - si v est ultramétrique au dessus de p premier, $|p|_v = p^{-1}$.
- On définit la hauteur logarithmique absolue de $x = (x_0 : \ldots : x_N) \in \mathbb{P}_N(\overline{\mathbb{Q}})$:
$$h(x) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{0 \leq i \leq N} \{|x_i|_v\}$$
où K est un corps de nombres contenant les x_i.
- On définit la hauteur logarithmique absolue de $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \overline{\mathbb{Q}}^N$,
$$h(x) = h(1 : x_1 : \ldots : x_N).$$
- On pose, pour $x \in \mathbb{P}_N(\overline{\mathbb{Q}})$ ou $x \in \overline{\mathbb{Q}}^N$
$$h^+(x) = \max\{1; h(x)\}.$$
- Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de $\mathbb{C}^N$. On notera $\partial_{\mathbf{x}}$ la dérivée le long de $\mathbf{x}$.
Soient $X = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{C}^N$ et $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ un m-uplet d'entiers positifs. On notera :
$$D_X^{\overline{t}} = \partial_{\mathbf{x}_1}^{t_1} \circ \ldots \circ \partial_{\mathbf{x}_m}^{t_m}.$$
- pour $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ un n-uplet d'entiers, on note
$$\overline{n}! = n_1! \ldots n_m!$$

et
$$|\overline{n}| = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

- pour m et n deux entiers non nuls, et K un corps, on note $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ les matrices à m lignes, $n$colonnes, à coefficients dans K, et on note $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K)$.
- pour $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ une matrice, on note

$$|||M||| = \sup_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} |m_{i,j}|.$$

Chapitre 1

Introduction

1.1. Présentation du problème

Selon un théorème classique de Schneider (Théorème 17 de [Sch]), l'invariant modulaire $j(\tau)$ ne peut prendre une valeur algébrique en un point algébrique τ du demi-plan de Poincaré $\mathfrak{H}$ que si τ est quadratique. Ce théorème a été étendu aux cas des espaces de Siegel $\mathfrak{H}_g$ de degré g quelconque, par Cohen, Shiga et Wolfart [Coh1, Coh2, SW].

L'objectif de ce travail est d'obtenir une version effective de ce résultat. Dans le cas elliptique, cela a été fait par A. Faisant et G. Philibert [FP] (les premiers résultats dans cette direction sont dûs à Feld'man et Masser, voir [Mas, Fel]) :

Théorème. *Il existe une constante absolue $C_1 > 0$ telle que quel que soit $\tau \in \mathfrak{H}_1$, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{H}_1 \times \mathbb{C}$ de nombres algébriques vérifiant $j(\alpha) \neq \beta$, de hauteurs respectives $h(\alpha)$ et $h(\beta)$, avec $d = [\mathbb{Q}(\alpha, \beta), \mathbb{Q}]$, on a :*

$$|\tau - \alpha| + |j(\tau) - \beta| \geq e^{-C_1 d^3 (\log d + h(\alpha) + h(\beta))^3}$$

De manière similaire, nous souhaitons, étant donnés une variété abélienne $\mathcal{A}$ définie sur $\mathbb{C}$, un point τ de l'espace de Siegel la paramétrant et le point $J(\tau)$ de l'espace des modules correspondant, donner une minoration non triviale de $|||\tau - \beta||| + \|J(\tau) - \gamma\|$ (où β et γ sont des points algébriques de ces deux espaces), lorsque $\mathcal{A}$ n'est pas de type CM.

Ici, nous nous sommes contentés de minorer $|||\tau - \beta|||$ en supposant $\mathcal{A}$ (et donc $J(\tau)$) définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Dans le cas particulier où $End(\mathcal{A}) = \mathbb{Z}$, on obtient ainsi[1], (cf. Corollaire 2) :

Théorème. *Soit g un entier positif. Il existe un réel $C(g)$ vérifiant la propriété suivante. Soient*

[1] Pour les définitions précises des notions de « Siegel-réduite », des hauteurs de variétés abéliennes, etc... voir le paragraphe 2.2, et de manière générale, l'index page 67.

- $\tau \in \mathfrak{H}_g$, *Siegel-réduite, telle que* $\mathcal{A}_\tau = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$ *soit une variété abélienne principalement polarisée définie sur* $\overline{\mathbb{Q}}$
- $\beta = [\beta_{i,j}]$ *une matrice* $g \times g$ *à coefficients algébriques*
- $\log B$ *(resp.* $h^+(\mathcal{A}_\tau)$*) un majorant* ≥ 1 *de la hauteur de* β *(resp. de* $\mathcal{A}_\tau$*)*
- D *le degré sur* $\mathbb{Q}$ *du corps de définition de* β *et de* $\mathcal{A}_\tau$*.*

Si End$(\mathcal{A}_\tau) = \mathbb{Z}$*, alors on a la minoration :*

$$\log |||\tau - \beta||| \geq -C(g)(\log B + h^+(\mathcal{A}_\tau))D^5 h^+(\mathcal{A}_\tau)^4$$

Pour obtenir ce type d'énoncé, on établit un résultat un peu plus général sur l'indépendance linéaire de logarithmes abéliens (Théorème 1). Le schéma de preuve est classique (Gel'fond-Baker), et la plupart des idées utilisées ici se trouvent déjà dans [PW2]. Le résultat correspond à une généralisation partielle, dans le cas des périodes, de la première partie de la thèse d'Eric Gaudron [Gau4] : on travaille sur des sous-espaces vectoriels de codimension t quelconque au lieu d'hyperplans (mais seulement sur des variétés abéliennes, et pas sur des groupes algébriques généraux, ce qui nous permet d'expliciter la dépendance en la hauteur des variétés).

Eric Gaudron a également travaillé sur des généralisations similaires ces dernières années, mais dans des cas distincts de celui étudié ici : dans [Gau1], qui traite de variétés abéliennes, le sous-espace est de codimension arbitraire, et la dépendance en la hauteur est explicitée, mais cet article ne considère que le cas « non-périodique », et ne s'applique pas à la situation de périodes étudiée ici (une comparaison est néanmoins faite après l'énoncé du théorème général, page 14). Dans [Gau3], il traite du cas périodique, mais en limitant le résultat au cas des hyperplans. Dans l'article en collaboration avec Ably ([AG]), il traite des t-plans, les périodes sont autorisées, mais il se limite au cas d'une puissance d'une courbe elliptique $\mathcal{E}$ à multiplication complexe, et la dépendance en $h(\mathcal{E})$ n'est pas explicitée.
Il faut également signaler les travaux antérieurs de [PW1] et de [HK2], où sont déjà traités des problèmes d'approximations simultanées (on y voit d'ailleurs le même type de gain apporté par le t-plan) ainsi que [Via], qui traite d'appartenance simultanée, et [DHK1].

Sur ce type de questions, il existe d'autres approches, comme la *méthode des déterminants d'interpolation* de M.Laurent ou la *méthode des pentes* de J.-B. Bost [Bos] (voir par exemple [Gau1], ainsi que [Gra], [Via]). Toutefois, lorsqu'on recherche une dépendance optimale en la hauteur de l'approximant β, ces méthodes posent pour le moment quelques difficultés techniques : elles semblent nécessiter une extrapolation sur les points plutôt que les dérivées (ce qui explique son succès dans le cas “non périodique”). À cause de ces contraintes, nous sommes restés ici dans le cadre des fonctions auxiliaires.

Cadre de travail

Soient t et n des entiers positifs. Dans ce travail, on suppose donné un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ des variétés abéliennes de dimensions respectives $g_1, \ldots, g_n$, définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et principalement polarisées.

À chaque $\mathcal{A}_i$ est associé un point τ_i de l'espace de Siegel $\mathfrak{H}_{g_i}$ des matrices $g_i \times g_i$ symétriques de partie imaginaire définie positive. Alors on identifie $\mathcal{A}_i/\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}^{g_i}/(\mathbb{Z}^{g_i} \oplus \tau_i\mathbb{Z}^{g_i})$, l'espace tangent à l'origine $T_0\mathcal{A}_i$ à $\mathbb{C}^{g_i}$, et on a un plongement de $\mathcal{A}_i$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^{\nu_i}$ *via* les fonctions thêta classiques. On appellera “base de Siegel” la base canonique de $\mathbb{C}^{g_i}$.

Dans la suite, $\overrightarrow{\omega_i}$ désignera un élément du réseau des périodes de $\mathcal{A}_i/\mathbb{C}$, i.e. dans l'identification $T_0\mathcal{A}_i = \mathbb{C}^{g_i}$, un des éléments du groupe engendré par la base canonique et les vecteurs colonnes de τ_i.

Par ailleurs, $\mathcal{A}_i$ est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, on peut donc (cf. paragraphe 2.2.2) construire une “base de Shimura” de l'espace tangent définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, où le réseau des périodes s'écrit[2] $\Omega_1^{(i)}\mathbb{Z}^{g_i} \oplus \Omega_2^{(i)}\mathbb{Z}^{g_i}$. L'intérêt est que les dérivées des fonctions thêta dans cette base s'écrivent comme des polynômes à coefficients algébriques en les fonctions thêtas. C'est donc avec cette base que l'on travaillera.

Notons $g = \sum g_i$, et définissons :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$$
$$\dot{\omega} = (\overrightarrow{\omega_1}, \ldots, \overrightarrow{\omega_n}) \in T_0\mathcal{A}$$

On se donne t formes linéaires sur $T_0\mathcal{A}$ indépendantes, écrites dans la base duale de la base de Shimura sous la forme :

$$\mathcal{L}_k(\dot{z}) = \sum_{j=1}^{g} \beta_{k,j} z_j \quad \beta_{k,j} \in \overline{\mathbb{Q}} \tag{1.1}$$

[2] $\Omega_1^{(i)}$ est la matrice de passage de la base de Siegel à la base de Shimura, et $\Omega_2^{(i)} = \Omega_1^{(i)}\tau_i$.

où $\dot{z} = (z_1, \ldots, z_g)$.
On considère le sous-espace de codimension t de $T_0\mathcal{A}$

$$\mathcal{W} = \bigcap_{k=1}^{t} \ker \mathcal{L}_k.$$

On pose

- $\log B = \max_{1 \leq k \leq t} h^+(\beta_{k,1} : \beta_{k,2} : \ldots : \beta_{k,g})$ la « hauteur » du point β : à une multiplication par t près, c'est un majorant de la hauteur de Schmidt de $\mathcal{W}$;
- D le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps de définition commun des $\mathcal{A}_i$ et des $\beta_{k,j}$;

et on note pour tout $1 \leq i \leq n$,

- $h(\mathcal{A}_i/\overline{\mathbb{Q}}) = h(\mathcal{A}_i)$ la hauteur-thêta de la variété abélienne $\mathcal{A}_i$ (*i.e.* la hauteur des thetanullwerte à caractéristiques demi-entières au point τ_i, *cf.* paragraphe 2.2, page 27) et $h^+(\mathcal{A}_i) = \max\{1; h(\mathcal{A}_i)\}$
- pour $\overrightarrow{z}$ un vecteur de $T_0\mathcal{A}_i$, $\|\overrightarrow{z}\|_R$ la norme de Riemann attachée à la polarisation de $\mathcal{A}_i$. Si on représente $\overrightarrow{z}$ dans la base de Siegel de $T_0\mathcal{A}_i$, on a la formule : $\|\overrightarrow{z}\|_R = \left({}^t\overline{(\overrightarrow{z})}(\Im m \tau_i)^{-1}\overrightarrow{z}\right)^{1/2}$

Nous donnerons dans le Théorème 1 ci-dessous une minoration non triviale, aussi précise que possible en fonction de $\log B$, sans pour autant trop perdre sur les dépendances en $h(\mathcal{A}_i)$ et D, de l'expression

$$\max_{1 \leq k \leq t} |\mathcal{L}_k(\dot{\omega})| = \Lambda,$$

ce qui revient, lorsqu'on munit $T_0\mathcal{A}$ d'une distance d adéquate, à minorer

$$d(\dot{\omega}, \mathcal{W}).$$

Application à notre problème

On veut obtenir une minoration du maximum des valeurs absolues des coefficients de la matrice $\tau - \beta$. En prenant $t = g^2$, $n = 2g$, les $\mathcal{A}_i$ toutes égales à $\mathcal{A}_\tau$, et des formes linéaires associées aux coefficients de la matrice, on a presque le même problème que celui présenté au point précédent. (La seule différence est que les formes linéaires ne sont pas exprimées dans la base de Shimura, mais dans celle de Siegel)

Soit $(\Omega_1;\Omega_2)$ la matrice des périodes de $\mathcal{A}_\tau$ dans la base de Shimura, de sorte que $\Omega_1^{-1}\Omega_2 = \tau$. On va en fait minorer les coefficients de la matrice

$$\Omega_2 - \Omega_1.\beta = \Omega_1.(\tau - \beta),$$

car ceux-ci sont justifiables du résultat général (théorème 1), et via une majoration de $|||\Omega_1|||$, on en déduira la minoration recherchée (théorème 2).

Plus précisément, prenons $t = g^2$, $n = 2g$, choisissons les vecteurs colonnes de $(\Omega_1;\Omega_2)$ comme $\overrightarrow{\omega_i}$, et comme formes linéaires les :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{i,j}(\dot{z}) &= \mathcal{L}_{i,j}(\overrightarrow{z_1},\dots,\overrightarrow{z_{2g}}) \\ &= z_{g+i,j} - \sum_{k=1}^{g} z_{i,k}.\beta_{k,j} \quad (i,j) \in \{1;\dots;g\}^2,\end{aligned}$$

où pour tout $1 \leq i \leq 2g$, les $(z_{i,k})_{1\leq k\leq g}$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{z_i}$ dans la base de Shimura.

Avec ces notations, les $\mathcal{L}_{i,j}(\dot{\omega})$ sont donc les coefficients de la matrice $\Omega_2 - \Omega_1.\beta$, et les coefficients $\beta_{i,j}$ intervenant dans les formes linéaires sont ceux de la matrice β par laquelle on approche τ.

1.2. Énoncé des résultats

Théorème 1. *Soient $t, n, g_1, \dots, g_n$ des entiers strictement positifs, $g = \sum g_i$, qu'on suppose supérieur à t. Alors il existe des réels $C_1(g)$ et $C_2(g)$ vérifiant la propriété suivante. Soient :*

- *pour $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{A}_i$ une variété abélienne principalement polarisée de dimension g_i, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$; $\overrightarrow{\omega_i}$ un élément du réseau des périodes de $\mathcal{A}_i/\mathbb{C}$, dont on note $(\omega_{i,j})_{1\leq j\leq g_i}$ les coordonnées dans la base de Shimura de $T_0\mathcal{A}_i$; on pose de plus $(\omega_j)_{1\leq j\leq g} = ((\omega_{i,k})_{1\leq k\leq g_i})_{1\leq i\leq n}$;*
- *$\beta_{k,j}$ ($k \in \{1,\dots,t\}$, $j \in \{1,\dots,g\}$) des nombres algébriques tels que la matrice $[\beta_{k,j}]$ soit de rang maximal t ; on note de plus $\mathcal{W}$ le sous-espace de $T_0\mathcal{A}$ donné dans la base de Shimura par les équations $\forall k \in \{1\dots t\}$, $\sum_{j=1}^{g} \beta_{k,j} z_j = 0$;*
- *D le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps de définition des $\beta_{k,j}$ et des $\mathcal{A}_i$;*
- *B un réel positif tel que $\log B \geq \max_{1\leq k\leq t}\{h^+(\beta_{k,1},\dots,\beta_{k,g})\}$*

Alors,

i) ou bien les t nombres

$$\Lambda_k = \sum_{j=1}^{g} \beta_{k,j}\omega_j \quad (1 \leq k \leq t)$$

vérifient la minoration

$$\begin{aligned}\log \max_{1\leq k\leq t} |\Lambda_k| \geq \\ -C_1(g)(D\log B + D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R) \\ \times \prod_{i=1}^{n}\left(\left(D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R\right)\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2\right)^{\frac{g_i}{t}}\end{aligned}$$

ii) ou bien il existe une sous variété abélienne $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \ldots \times \mathcal{A}_n$, admettant une polarisation de degré majoré par

$$\begin{aligned}C_2(g)\deg_\phi \mathcal{A} \times \\ \max_{\substack{\sum d_i = \dim(\mathcal{W}\cap T_0\widetilde{\mathcal{A}}) \\ 0\leq d_i\leq g_i}} \prod_{i=1}^{n}\left(\left(D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R\right)\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2\right)^{d_i},\end{aligned}$$

dont l'espace tangent à l'origine contient le point $\dot{\omega} = (\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}, \dots, \overrightarrow{\omega_n})$, et qui vérifie

$$T_0\widetilde{\mathcal{A}} + \mathcal{W} \neq T_0\mathcal{A}.$$

À titre de comparaison, le théorème 1.1 de [Gau1] donne[3] :

$$\log \max_{1\leq k\leq t} |\Lambda_k| \geq -c\mathfrak{a}^{1/t}(\mathfrak{a} + D\log B)(1 + D\mathfrak{a}\log a)^{g/t},$$

où a et $\mathfrak{a}$ vérifient

$$\begin{aligned}\log a &\geq \max \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2/D \\ \mathfrak{a} &\geq D\max\{h(\mathcal{A});\ \log^+ D;\ \log^+\log a\}.\end{aligned}$$

[3] Son théorème s'applique dans un cadre similaire, si ce n'est que le point considéré $\boldsymbol{\omega}$ est « non-périodique ». Pour simplifier la lecture, on a pris $\mathfrak{e} = e$.

Pour comparer avec notre résultat, on peut voir que $\mathfrak{a}$ joue à peu près le même rôle que notre $D \max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R$.

- Le terme « $\mathfrak{a}^{1/t}$ » : ce terme n'apparaît pas, car on travaille sur une période, et du point de vue du groupe algébrique, on a qu'un seul point, $0_{\mathcal{A}}$. Aussi, au moment de l'application du lemme de zéro, au lieu d'avoir un terme en $S^{1/t}$ (qui fait que l'on s'attend à voir un facteur $(Dh(\mathcal{A}))^{1/t}$ supplémentaire), on a simplement « 1 ». Si on travaillait dans un cadre moins précis (point $\boldsymbol{\omega}$ dont un multiple est une période), ce terme apparaîtrait dans le théorème.
- Le terme $(\mathfrak{a} + D\log B)$: c'est l'analogue de notre

$$(D(\log B + \max h^+(\mathcal{A}_i)) + \log \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R).$$

- Le terme $(1 + D\mathfrak{a}\log a)^{g/t}$: c'est l'équivalent du produit

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\left(D \max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R \right) \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2 \right)^{\frac{g_i}{t}}.$$

Comme on peut le voir, les deux résultats donnent des formules de même type, bien que le cadre de travail ne soit pas le même.

On déduit du théorème 1 le

Théorème 2. *Soit g un entier positif. Il existe des réels $C_3(g)$ et $C_4(g)$ tels que, étant donnés :*

- *$\tau \in \mathfrak{H}_g$, Siegel-réduite, telle que $\mathcal{A}_\tau = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$ soit une variété abélienne principalement polarisée définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*
- *$\beta = [\beta_{i,j}]$ une matrice $g \times g$ à coefficients algébriques*
- *B un réel positif tel que $\log B \geq \max_i\{h^+(\beta_{i,1}, \ldots, \beta_{i,g})\}$*
- *D le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps de définition de β et de $\mathcal{A}_\tau$*

alors :

i) ou bien on a la minoration :

$$\log |||\tau - \beta||| \geq -C_3(g)(\log B + h^+(\mathcal{A}_\tau))D^5 h^+(\mathcal{A}_\tau)^4$$

ii) ou bien il existe une sous-variété abélienne propre $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\tau^{2g}$, admettant une polarisation de degré majoré par

$$C_4(g)D^{6g^2}h^+(\mathcal{A}_\tau)^{6g^2},$$

et dont l'espace tangent à l'origine contient le "point[4]*"* $\dot{\omega} = (I_g, \tau)$.

Démonstration de Théorème 1⇒Théorème 2 : Comme annoncé précédemment, posons $n = 2g$, prenons $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_\tau$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (de sorte que $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_\tau)^{2g}$ et $\dim \mathcal{A} = 2g^2$), $t = g^2$, comme formes linéaires

$$\mathcal{L}_{i,j}(\dot{z}) = z_{g+i,j} - \sum_{k=1}^{g} z_{i,k}.\beta_{k,j} \quad (i,j) \in \{1;\ldots;g\}^2,$$

et pour $\overrightarrow{\omega_i}$ les vecteurs représentés dans la base de Shimura par les colonnes de Ω_1 et Ω_2. Ainsi les $\mathcal{L}_{i,j}(\dot{\omega})$ sont les coefficients de la matrice $\Omega_2 - \Omega_1\beta$. On peut appliquer le résultat du Théorème 1, qui nous dit dans le premier cas :

$$\begin{aligned}
\log |||\Omega_2 - \Omega_1\beta||| \quad &\geq \quad -C_1(g)(D\log B + Dh^+(\mathcal{A}_\tau) + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,2g\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R) \\
&\quad \prod_{i=1}^{2g} \left((Dh^+(\mathcal{A}_\tau) + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,2g\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2 \right)^{g/g^2} \\
&\geq \quad -C_1(g)(D\log B + Dh^+(\mathcal{A}_\tau) + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,2g\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R) \\
&\quad \left((Dh^+(\mathcal{A}_\tau) + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,2g\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R) \max_{i\in\{1,\ldots,2g\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2 \right)^2
\end{aligned}$$

Comme $\tau = \Omega_1^{-1}\Omega_2$, on a $|||\Omega_2 - \Omega_1\beta||| \leq g|||\tau - \beta|||.|||\Omega_1|||$. Par ailleurs, les valeurs absolues des coefficients de Ω_1 sont majorées par $\exp(c_3 Dh^+(\mathcal{A}))$ (voir lemme 2.2.2). On en déduit

$$\log |||\tau - \beta||| \quad \geq \quad \log |||\Omega_2 - \Omega_1\beta||| - \log |||\Omega_1||| - \log g$$

Les $\overrightarrow{\omega_i}$ sont, dans la base de Shimura, les vecteurs colonnes de Ω_1 et Ω_2, c'est à dire, dans la base de Siegel :

– soit $\overrightarrow{\omega_i}$ est un des vecteurs colonnes $\overrightarrow{e_i}$ de I_g, et d'après [Gra], lemme A.6 (si τ est Siegel-réduite, $\|(\Im m\tau)^{-1}\| \leq \exp(g^3 2^{g-1})$), on a alors

$$\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2 = \|\overrightarrow{e_i}\|_R^2 \leq |||(\Im m\tau)^{-1}||| \leq c_2(g)$$

[4] $\dot{\omega}$ est le point de $T_0\mathcal{A}$ dont les coordonnées sont celles, mises bout à bout, des vecteurs colonnes des matrices I_g et τ.

– soit $\overrightarrow{\omega_i}$ est un des vecteurs colonnes $\overrightarrow{\tau_i}$ de τ : dans ce cas, d'après [Dav1], lemme 1.6.3 (Il existe une constante $c(g)$ tel que, si $\mathcal{A}_\tau$ est définie sur un corps de nombre K de degré δ sur $\mathbb{Q}$, et est de hauteur majorée par h, $|||\Im m\tau||| \leq c(g)\delta h$) on a :

$$\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2 = \|\overrightarrow{\tau_i}\|_R^2 \leq c_3(g)Dh^+(\mathcal{A}_\tau)$$

On a donc finalement

$$\log|||\tau-\beta||| \geq -C_3(g)(D\log B + Dh^+(\mathcal{A}_\tau))(Dh^+(\mathcal{A}_\tau))^4$$

La même majoration sur $\max\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2$ dans le deuxième cas nous donne la majoration annoncée sur le degré de $\widetilde{\mathcal{A}}$. □

Applications

Soit $\mathcal{E}$ un ordre d'un corps, éventuellement gauche, de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. Dans [LR], C. Liebendörfer et G. Rémond attachent à toute involution positive de $\mathcal{E}\otimes\mathbb{R}$ une hauteur (multiplicative) pour les $\mathcal{E}$-modules projectifs, donc en particulier pour l'anneau $\mathcal{E}$ des endomorphismes d'une variété abélienne simple polarisée. On déduit du théorème 2 et de [LR], Thm. 5.1 :

Corollaire 1. *Pour tout $g \geq 1$, il existe $C_5(g)$ vérifiant la propriété suivante. Soit τ Siegel-réduite dans $\mathfrak{H}_g$, telle que la variété abélienne principalement polarisée $\mathcal{A}_\tau$ soit géométriquement simple, définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, et telle que $\mathcal{E} = End(\mathcal{A}_\tau)$ soit un ordre maximal, de discriminant $\Delta_\mathcal{E}$. Soient par ailleurs $\beta \in \mathfrak{H}_g(\overline{\mathbf{Q}})$, D le degré du corps de définition du couple $(\mathcal{A}_\tau, \beta)$, $\log B$ un majorant de la hauteur de β, et $h(\mathcal{A}_\tau)$ la hauteur thêta de $\mathcal{A}_\tau$. Alors,*

i) ou bien

$$|||\tau-\beta||| \geq B^{-C_5(g)D^5h^+(A_\tau)^7}$$

ii) ou bien il existe des éléments $\gamma_1,...,\gamma_g,\gamma_1',...,\gamma_g'$ de $\mathcal{E}$ non tous nuls, de $\mathcal{E}$-hauteurs majorées par $C(g)\Delta_\mathcal{E}D^{3g}h^+(\mathcal{A}_\tau)^{3g}$, tels que

$$(\gamma_1',\ldots,\gamma_g')\bullet\mathbf{I}_g = (\gamma_1,\ldots,\gamma_g)\bullet\tau.$$

Dans la relation de la dernière ligne, les γ_i, γ'_j sont les matrices $g \times g$ attachées aux différentielles de ces endomorphismes (représentation analytique de $\mathcal{E}$), et $\bullet$ est définie ainsi : pour $(\gamma_1, \ldots, \gamma_g) \in (\mathcal{M}_g(\mathbb{C}))^g$ et $M \in \mathcal{M}_g(\mathbb{C})$,

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_g) \bullet M = \sum_{i=1}^{g} \gamma_i m_i \in \mathbb{C}^g,$$

où les vecteurs m_i sont les vecteurs colonnes de la matrice M.

Démonstration : la preuve des théorèmes 1 et 2 montre que si (i) n'a pas lieu, la sous-variété abélienne $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}_\tau^{2g}$ a, relativement à la polarisation principale de $\mathcal{A}_\tau^{2g}$, un degré majoré par $C_4(g)D^{6g^2}h^+(\mathcal{A}_\tau)^{6g^2}$. D'après [LR], Thm. 5.1, la $\mathcal{E}$-hauteur multiplicative de son algèbre de Lie $T_{\tilde{\mathcal{G}}}$ est majorée par la racine $2g$-ième de cette expression. L'existence d'une équation de $T_{\tilde{\mathcal{G}}}$ de la forme annoncée résulte alors du lemme de Siegel et du lemme de dualité (*loc. cit.*, Thm. 7.1, 8.1). $\square$

Remarque : Posons $t(\gamma) = (Tr(\gamma^\dagger \gamma))^{\frac{1}{2}}$, où † désigne l'involution de Rosati sur $\mathcal{E}$. Quitte à abîmer les exposants, on peut remplacer la majoration des $\mathcal{E}$-hauteurs des γ_i dans la conclusion (ii) du corollaire par une majoration de ces normes, de la forme : $t(\gamma_i) \leq C_4(g)D^{6g^2}h^+(\mathcal{A}_\tau)^{6g^2}$, donc indépendante du discriminant $\Delta_{\mathcal{E}}$ (voir [MW], Lemma 3.1). En voici une application au cas CM : supposons que $End(\mathcal{A}_\tau)$ soit un ordre maximal d'une extension totalement imaginaire E d'un corps totalement réel F de degré g sur $\mathbb{Q}$. Alors, la norme du discriminant relatif de E sur F est majorée par $C_4(g)D^{6g^2}h^+(\mathcal{A}_\tau)^{6g^2}$. La dépendance de cette majoration en $h^+(\mathcal{A}_\tau)$ est sensiblement meilleure que celle fournie par [MW] dans ce cas particulier, et donc meilleure encore que celle de Colmez [Col]. Du fait de sa dépendance en D, elle ne couvre néanmoins pas ce dernier résultat.

Dans le cas particulier où on considère une variété abélienne $\mathcal{A}_\tau$ telle que $\mathrm{End}(\mathcal{A}_\tau) = \mathbb{Z}$, on en déduit, comme annoncé plus haut :

Corollaire 2. *Soit g un entier positif. Il existe un réel $C(g)$ vérifiant la propriété suivante. Soient*
- *$\tau \in \mathfrak{H}_g$, Siegel-réduite, telle que $\mathcal{A}_\tau = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$ soit une variété abélienne principalement polarisée définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$*
- *$\beta = [\beta_{i,j}]$ une matrice $g \times g$ à coefficients algébriques*
- *$\log B$ (resp. $h^+(\mathcal{A}_\tau)$) un majorant ≥ 1 de la hauteur de β (resp. de $\mathcal{A}_\tau$)*
- *D le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps définition de β et de $\mathcal{A}_\tau$.*

Si End($\mathcal{A}_\tau$) $= \mathbb{Z}$, alors on a la minoration :

$$\log |||\tau - \beta||| \geq -C(g)(\log B + h^+(\mathcal{A}_\tau))D^5 h^+(\mathcal{A}_\tau)^4$$

Démonstration : comme $\mathrm{End}(\mathcal{A}_\tau) = \mathbb{Z}$, les périodes sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Z}$, et la conclusion *(ii)* du Corollaire 1 ne peut donc pas avoir lieu. □

1.3. Esquisse de la preuve

Reformulation

Pour démontrer le théorème 1, de la même manière que dans [Gau3], nous n'allons pas travailler directement sur la variété abélienne $\mathcal{A}$: si la méthode utilisée peut sans problème s'appliquer directement, elle ne permet pas d'obtenir le résultat plus fin que nous recherchons. Aussi, suivant une idée d'Hirata-Kohno [HK1], nous allons travailler sur un groupe un peu plus gros, en rajoutant des groupes $\mathbf{G}_a$:

Posons $\mathbf{G} = \mathcal{A} \times \mathbf{G}_a^t$, on a $T_0\mathbf{G} \simeq \mathbb{C}^{g_1} \times \ldots \times \mathbb{C}^{g_n} \times \mathbb{C}^t$, l'isomorphisme étant donné par la base de Shimura.

Les éléments de $T_0\mathcal{A}_i$ ou de $T_0\mathbf{G}_a^t$ seront désignés par un vecteur avec une flèche, ceux de $T_0\mathcal{A}$ avec une lettre pointée, et ceux de $T_0\mathbf{G}$ par une lettre grasse. Sauf mention du contraire, ces vecteurs seront représentés dans des bases de Shimura.

$$\mathbf{z} = (\dot{z}, \overrightarrow{z_a}) = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2}, \ldots, \overrightarrow{z_n}, \overrightarrow{z_a})$$

Définissons à présent t formes linéaires indépendantes sur $T_0\mathbf{G}$ associées aux $\mathcal{L}_i$:

$$L_k(\mathbf{z}) = \mathcal{L}_k(\dot{z}) - z_{g+k} = \sum_{j=1}^{t+g} \beta_{k,j} z_j \tag{1.2}$$

où on a posé, pour $1 \leq k \leq t$, $1 \leq j \leq t$, $\beta_{k,g+j} = -\delta_{k,j}$ ($\delta_{k,j}$ étant le symbole de Kronecker)

Remarque : on peut supposer de plus que les $\beta_{i,j}$ sont de modules plus petits que 1 : en effet, quitte à les diviser par le maximum d'entre eux, comme

$$\begin{aligned}-D\log B+\log\left|\sum_{j=1}^{t+g}\frac{\beta_{k,j}}{\max|\beta_{k,j}|}z_j\right| &\leq \log\left|\sum_{j=1}^{t+g}\beta_{k,j}z_j\right| \\ &\leq \log\left|\sum_{j=1}^{t+g}\frac{\beta_{k,j}}{\max|\beta_{k,j}|}z_j\right|+D\log B,\end{aligned}$$

on pourra déduire la minoration de $\max|\Lambda_k|$ souhaitée.

Soient
- $W=\bigcap_k \ker L_k$, de sorte que $\mathcal{W}=W\cap T_0\mathcal{A}$;
- $\boldsymbol{\omega}=(\dot{\omega},\overrightarrow{0})\in T_0\mathbf{G}$ une période, de sorte que pour tout k, $L_k(\boldsymbol{\omega})=\mathcal{L}_k(\dot{\omega})$;

Notre objectif est donc maintenant de minorer $\sup_k|L_k(\boldsymbol{\omega})|$.

Démarche générale

Pour démontrer le théorème 1, on procède alors comme suit : en supposant qu'aucune des conclusions *(i)* et *(ii)* n'est vérifiée, on construit une fonction F sur le groupe algébrique $\mathbf{G}$, non-nulle, qui est la composée d'un plongement projectif de $\mathbf{G}$, et d'un polynôme de degré N, à coefficients algébriques. Cette fonction aura un zéro d'ordre T élevé en 0, le long de W.

Dans ces conditions, un lemme de zéros (cf. [Phi]) donne l'existence d'un sous-groupe connexe $\mathbf{G}'$ vérifiant une inégalité de type

$$\deg\mathbf{G}'T^{\mathrm{codim}_W W\cap T_0\mathbf{G}'}\leq N^{\mathrm{codim}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}'} \tag{1.3}$$

qui fournira une contradiction grâce à un choix judicieux des paramètres T et N. L'une des conclusions *(i)* ou *(ii)* doit alors être vérifiée.

Pour la construction de F, on doit considérer approximativement T^g équations, et il y a un nombre d'inconnues de l'ordre de N^{g+t}, puisque $\dim\mathbf{G}=g+t$ et $\mathrm{codim}_{T_0\mathbf{G}}W=t$. On peut donc estimer que $T^{1-\frac{t}{g+t}}\simeq N$ et T doit donc être un peu plus gros que N.

Si on regarde ce que cela signifie dans l'inégalité (1.3), qu'on cherche à contredire, on voit apparaître deux types de sous-groupes :

– ceux pour lesquels $\mathrm{codim}_W W \cap T_0\mathbf{G}' = \mathrm{codim}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}'$: comme T est plus gros que N, l'inégalité ne peut se produire, et il y aurait bien contradiction, comme souhaité.
– ceux pour lesquels $\mathrm{codim}_W W \cap T_0\mathbf{G}' < \mathrm{codim}_{\mathbf{G}}\mathbf{G}'$: dans ce cas là, l'inégalité (1.3) pourrait très bien se produire sans qu'il y ait contradiction.

Si on essaye de construire la fonction auxiliaire en prenant $T^{1-\frac{t}{g+t}} \simeq N$, rien n'assure d'aboutir à une contradiction, à cause du deuxième type de sous-groupes.

C'est pour cette raison que la première étape de la démonstration (voir partie 4.1, page 53) est de bien ajuster les paramètres T et N de manière à ne pas être gêné par la seconde éventualité. Cela conduit à prendre N plus petit que la valeur $T^{1-\frac{t}{g+t}}$ et surtout à choisir un paramètre $T_0 < T$, associé à une direction particulière $\mathbf{w}$ de W, le long de laquelle on dérivera moins loin[5]. (Cette construction est typique du cas périodique, voir [PW2].)

Au passage, on exhibe un sous-groupe particulier, $\widetilde{\mathbf{G}}$, lié aux sous-variétés abéliennes $\widetilde{\mathcal{A}}$ de la conclusion *(ii)* des théorèmes.

La deuxième étape (voir partie 4.3, page 58) consiste à construire une fonction dont les dérivées le long de W à l'ordre au plus T (sauf dans la direction $\mathbf{w}$ où on se restreint à l'ordre T_0) sont petites.

Enfin, la dernière étape (voir partie 4.4) consiste à appliquer la méthode de Baker : en se plaçant sur W, et en extrapolant sur la direction w, on montre, dans un premier temps que la fonction a des dérivées petites à un ordre plus élevé que celui qu'on a construit à l'étape 2, puis, par un argument de nature arithmétique, qu'elle a en fait un zéro d'ordre élevé T en 0. Cet argument arithmetique necessite une version effective du passage (maintenant classique dans ces questions) au logarithme formel : voir la Proposition 3.2.2 p. 42 et pp. 43-45. Le lemme de zéros fournit alors la contradiction recherchée.

1.4. Commentaires

Dans le cas $t = 1$, la conclusion *(ii)* « $T_0\widetilde{\mathcal{A}} + \mathcal{W} \neq T_0\mathcal{A}$ » revient à dire $T_0\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{W}$, de sorte que $\dot{\omega} \in \mathcal{W}$. Le théorème 1 recouvre donc tous les énoncés qualitatifs sur les périodes d'intégrales abéliennes fournis par le théorème de Wüstholz.

[5] Puisqu'on a nié *(i)*, $\boldsymbol{\omega}$ est proche de W et on a choisi pour $\mathbf{w}$ le projeté de $\boldsymbol{\omega}$ sur W.

En revanche, comme on le verra (cf. paragraphe 4.1, Remarque 2), dès que $t > 1$, nous ne pouvons en général pas donner d'information sur la position relative de $\mathcal{W}$ par rapport à $T_0\widetilde{\mathcal{A}}$, ni, en particulier, sur la codimension $\tilde{t}$ de $\widetilde{\mathcal{W}} := T_0\widetilde{\mathcal{A}} \cap \mathcal{W}$ dans $T_0\widetilde{\mathcal{A}}$, ou sur le quotient $\frac{\tilde{g}}{\tilde{t}}$ de la dimension $\tilde{g}$ de $\widetilde{\mathcal{A}}$ par cette codimension. De ce fait, les descentes consistant à appliquer le théorème 1 (qu'il faudrait d'ailleurs étendre au cas de polarisation non principale) à $\widetilde{\mathcal{A}}$ ne permettent pas de conserver, dans la conclusion (i) du Théorème 2, des exposants indépendants[6] de g. C'est la raison pour laquelle nous ne les avons pas développées ici. Indiquons néanmoins deux pistes de recherches possibles pour remédier à cette difficulté.

i) *Hypothèse de « semi-stabilité » sur* $\mathcal{W}$: elle consisterait à supposer, avec les notations précédentes, que

$$\frac{\tilde{g}}{\tilde{t}} \leq \frac{g}{t}$$

pour toute sous-variété abélienne $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ telle que $T_0\widetilde{\mathcal{A}} \not\subset \mathcal{W}$. Une hypothèse de ce genre semble indispensable pour établir que si la conclusion (i) du théorème 1 est mise en défaut, alors, $\boldsymbol{\omega}$ appartient nécessairement à $\mathcal{W}$.

ii) *Argument modulaire* (inspiré de [SW]) : illustrons-en le principe en supposant que la variété abélienne simple $\mathcal{A}_\tau$ étudiée au théorème 2 admet des multiplications réelles par l'anneau des entiers d'un corps F de degré g sur $\mathbb{Q}$ et de discriminant Δ_F, et que

$$|||\tau - \beta||| \leq \exp(-C(g)(\log(B\Delta_F))D^{10}h(\mathcal{A}_\tau)^{14})$$

. On souhaite en déduire que $\mathcal{A}_\tau$ est de type CM. Par hypothèse, τ appartient à la sous-variété modulaire $S_{\mathcal{O}_F}$ de $\mathfrak{H}_g$, de dimension g, attachée à $\mathcal{O}_F$, et il en est forcément de même de β. En choisissant une base de $T_0\mathcal{A}_\tau$ diagonalisant l'action de F, on déduit du Théorème 1 (avec $n = 2$, $\dim \mathcal{A}_\tau^2 = 2g, t = g$) l'existence d'un endomorphisme $\gamma \notin F$ de $\mathcal{A}_\tau$, de norme $t(\gamma) \leq C(g)D^{4g}h(\mathcal{A}_\tau)^{4g(g+1)}$. Dans ces conditions, si γ et F commutent, $End(\mathcal{A}_\tau)$ contient un corps commutatif de degré $\geq 2g$ sur $\mathbb{Q}$, donc égal à $2g$, et $\mathcal{A}_\tau$ est bien de type CM.

Sinon, $\mathcal{E} = End(\mathcal{A}_\tau)$ est nécessairement un ordre d'une algèbre de quater-

[6] Bien entendu, ces difficultés disparaissent si on ne cherche pas à atteindre ce but. Ainsi, l'hypothèse $|||\tau - \beta||| \leq \exp\left(-C(g)(\log B)(Dh(\mathcal{A}_\tau))^{6g^2}\right)$ entraîne, par simple itération du théorème 1 avec $t = 1$, que $\tau = \beta$ (et donc que $\mathcal{A}_\tau$ est de type CM).

nions sur un sous-corps F_0 de F de degré $g/2$ sur $\mathbb{Q}$, et τ appartient à une sous-variété modulaire $S_{\mathcal{E}}$ de $\mathfrak{H}_g$ de dimension $g/2$, dont les équations sont contrôlées par le discriminant de $\mathcal{E}$, donc par Δ_F et $t(\gamma)$ (voir [Mor] pour le cas $g = 2$). On en déduit que β appartient aussi à $S_{\mathcal{E}}$, et cela fournit, comme souhaité, un nombre de conditions (une « codimension ») croissant encore linéairement avec g, permettant de faire appel au théorème 1 avec cette fois, $n = 1,\ \dim \mathcal{A} = g,\ t = g/2$, donc $g/t = 2$ pour aboutir à une contradiction.

Chapitre 2

Préparatifs

2.1. Paramètres

On reprend les notations introduites au chapitre précédent : t et n sont des entiers positifs, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ des variétés abéliennes de dimensions respectives $g_1, \ldots, g_n$, définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et principalement polarisées. À chaque $\mathcal{A}_i$ est associé un point τ_i de l'espace de Siegel $\mathfrak{H}_{g_i}$. On a t formes linéaires, dont les coefficients dans la base duale de la base de Shimura sont les $\beta_{i,j} \in \overline{\mathbb{Q}}$.

On appelle K le corps de définition commun des $\mathcal{A}_i$ et des $\beta_{i,j}$.

Tout au long des démonstrations apparaissent des constantes $(c_1, c_2, \ldots c_{22})$ absolues ou *ne dépendant que* de g. Elles sont en particulier indépendantes des choix de paramètres ci-dessous. On note C_0 leur maximum, augmenté d'une unité (C_0 ne dépend donc que de g).

On définit les paramètres[1] suivants :

Posons

$$\begin{aligned} U_0 &= C_0^{2+5g/t}(D(\log B + D\max h^+(\mathcal{A}_i)) + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R) \\ &\quad \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{Dh^+(\mathcal{A}_i) + (D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)^2 \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2}{D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R}\right)^{g_i}\right)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

λ est un réel de l'intervalle $]0;1]$ qui sera précisé[2] plus tard (cf. lemme 4.1.1). On définit alors :

---

[1] Ces paramètres sont rappelés page 75, pour faciliter la lecture.

[2] le choix de λ qui sera fait n'influe pas sur les valeurs de C_0 et U_0, et ne dépendra pas des valeurs des $N_i^{\#}$... Il n'y a donc pas de problème de définition.

$$
\begin{aligned}
S^{\#} &= C_0^{9/4}(D\max h^+(\mathcal{A}_i)+\log^+\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R) \quad et \quad S=[S^{\#}] \\
T^{\#} &= \frac{C_0^{1/2}U_0}{D\max h^+(\mathcal{A}_i)+\log^+\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R} \quad et \quad T=[T^{\#}] \\
T_0^{\#} &= \frac{U_0}{C_0^{3/2}(D\max h^+(\mathcal{A}_i)+\log^+\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)} \\
&= \frac{T^{\#}}{C_0^2}=\frac{C_0^{3/4}U_0}{S^{\#}} \quad et \quad T_0=[T_0^{\#}] \\
N_a^{\#} &= \frac{\lambda U_0}{C_0^2(D\log B+D\max h^+(\mathcal{A}_i)+\log^+\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)} \\
& \quad et \quad N_a=[N_a^{\#}]
\end{aligned}
$$

et pour $i\in\{1,\ldots,n\}$,

$$
\begin{aligned}
N_i^{\#} &= \frac{\lambda U_0}{C_0^{9/2}Dh^+(\mathcal{A}_i)+(S^{\#})^2\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2} \\
& \frac{\lambda U_0}{C_0^{9/2}(Dh^+(\mathcal{A}_i)+(D\max h^+(\mathcal{A}_i)+\log^+\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)^2\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2)} \\
& et \quad N_i=[N_i^{\#}]
\end{aligned}
$$

Description des paramètres :

- U_0 est, à une constante dépendant de g près, le minorant que l'on souhaite obtenir. En fait, dans l'énoncé du théorème 1, c'est un minorant moins précis mais plus lisible de $-U_0$ qu'on a fait apparaître. C'est le paramètre central de la démonstration. Toutes les majorations et minorations sont (au final) exprimées en fonction de ce paramètre.
- T représente l'ordre de dérivation de la fonction auxiliaire. On construit la fonction en particularisant une direction dans laquelle on ne dérive qu'à l'ordre T_0.
- N_a est le degré en les variables de $\mathbf{G}_a^t$ du polynôme utilisé comme fonction auxiliaire. Il a été choisi indépendant de $\log B$.
  On utilisera en général l'indice a (pour "additif") pour les objets attachés à $\mathbf{G}_a^t$.

– N_i est le degré en les variables de $\mathcal{A}_i$ du polynôme utilisé comme fonction auxiliaire.
– S représente le nombre de périodes utilisées lors de l'extrapolation (passage de dérivées à l'ordre T_0 à des dérivées à l'ordre T)

Explication du choix des paramètres :
Au début, les paramètres sont écrits de manière "muette" : U_0 est traité comme un paramètre, et on prend $T = U_0/U_T$, $N_a = U_0/U_{N_a}$, $N_i = U_0/U_{N_i}$, où les $U_?$ restent à ajuster.
La démonstration suit des étapes classiques, qui donnent un certain nombre de contraintes sur ces différents paramètres. Par exemple :
– au moment de l'extrapolation, on a besoin d'avoir $T_0 S \simeq C_0^{3/4} U_0$, ce qui nous permet, une fois S choisi, de fixer T_0.
– quand on majore les dérivées, on voit apparaître un terme en $N_a \log B$, que l'on veut plus petit que U_0, ce qui explique la présence d'un facteur $\log B$ dans l'expression de U_{N_a}.

Les contraintes rencontrées sont détaillées dans l'annexe 4.5.

2.2. Généralités sur les variétés abéliennes

Dans cette partie, on considère un point τ du demi-espace de Siegel $\mathfrak{H}_g$, et $\mathcal{A}_\tau$ la variété abélienne de dimension g qui lui est attaché.
On dit que τ est *Siegel-réduite* si elle vérifie :

i) pour tout k, $1 \leq k \leq g$, et tout $\xi \in \mathbb{Z}^g$ dont les coordonnées $\xi_k, \ldots, \xi_g$ sont premières entre elles dans leur ensemble, on a ${}^t\xi(\Im\mathrm{m}(\tau))\xi \geq (\Im\mathrm{m}(\tau))_{k,k}$.

ii) pour tout k, $1 \leq k \leq g-1$, $(\Im\mathrm{m}(\tau))_{k,k+1} \geq 0$.

iii) $\Re\mathrm{e}(\tau)$ est à coefficients dans $[-1/2; 1/2]$.

iv) Pour tout élément σ du groupe symplectique, $|\det(\sigma.\tau)| \leq |\det \tau|$.

On identifie $\mathcal{A}_\tau/\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g)$.
$\|.\|_R$ désigne la norme de Riemann attachée à la polarisation principale de $\mathcal{A}_\tau$.

2.2.1. Fonctions thêta, plongement projectif

On définit les fonctions thêta à caractéristiques demi-entières de la variable $z \in \mathbb{C}^g$:

$$\theta_{a,b}(\tau, 2z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}{}^t(n+a)\tau(n+a) + {}^t(n+a)(2z+b)\right)\right)$$

où a et b sont des éléments de $\mathcal{Z}_g = \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)^g$.

Pour alléger les notations, elles seront notées $\theta_0(\tau, 2z), \theta_1(\tau, 2z), \ldots, \theta_\nu(\tau, 2z)$ (où $\nu = 4g - 1$), avec θ_0 telle que $|\theta_0(\tau, 0)| = \max_j |\theta_j(\tau, 0)|$, de sorte qu'au voisinage de 0, $z \mapsto \theta_0(\tau, 2z)$ est non nulle.

En identifiant $T_0\mathcal{A}_\tau$ à $\mathbb{C}^g$ via la base de Siegel, nous réécrivons ces fonctions sous la forme

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_j : T_0\mathcal{A}_\tau & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \overrightarrow{z} & \mapsto & \vartheta_j(\overrightarrow{z}) = \theta_j(\tau, 2z) \end{array}$$

On obtient ainsi un plongement projectif dans $\mathbb{P}_\nu$:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : T_0\mathcal{A}_\tau & \rightarrow & \mathbb{P}_\nu \\ \overrightarrow{z} & \mapsto & (\vartheta_0(\overrightarrow{z}) : \vartheta_1(\overrightarrow{z}) : \ldots : \vartheta_\nu(\overrightarrow{z})) \end{array}$$

La variété abélienne principalement polarisée $\mathcal{A}_\tau$, a par ce plongement dans $\mathbb{P}_\nu$ le degré (cf. [Igu])

$$\deg_\varphi \mathcal{A}_\tau = 4^g$$

et on note

$$h(\mathcal{A}_\tau) = h\left(\vartheta_0(0) : \vartheta_1(0) : \ldots : \vartheta_\nu(0)\right)$$

On pose également, dans un voisinage $\mathfrak{U}$ de l'origine :

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathfrak{U} & \rightarrow & \mathbb{C}^{\nu+1} \\ \overrightarrow{z} & \mapsto & \left(1, \dfrac{\vartheta_1(\overrightarrow{z})}{\vartheta_0(\overrightarrow{z})}, \ldots, \dfrac{\vartheta_\nu(\overrightarrow{z})}{\vartheta_0(\overrightarrow{z})}\right) \end{array}$$

Encadrement

Lemme 2.2.1. *Il existe des constantes c_1 et c_2 (qui ne dépendent que de g) telles que pour tout vecteur z de $\mathbb{C}^g$, on a l'encadrement :*

$$-c_1 D h(\mathcal{A}_\tau) \leq \log \max_{0 \leq j \leq \nu} |\vartheta_j(\overrightarrow{z})| \leq c_2 \left(1 + \|\overrightarrow{z}\|_R\right)^2$$

Démonstration :

C'est le lemme A.17 de l'appendice A de [Gra] (pour un résultat un peu moins précis, voir le théorème 3.1 de [Dav2]). Pour tout $z \in \mathbb{C}^g$, on a l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned} -(g+1)^6 \log 2 - \pi \frac{g^2+g}{8} Dh(\mathcal{A}_\tau) \leq \log \max_{0 \leq j \leq \nu} |\theta_j(\tau, z)| - \pi \|\Im m(z)\|_R^2 \\ \leq \log 6 + g^3 \log 2 \end{aligned}$$

On en déduit facilement notre lemme, en posant $c_1 = (g+1)^6 \log 2 + \pi \frac{g(g+1)}{8}$ et $c_2 = \max\{\log 6 + g^3 \log 2; \pi\}$:

$$\begin{aligned} \log \max_{0 \leq j \leq \nu} |\theta_j(\tau, z)| &\leq c_2(1 + \|\Im m(z)\|_R^2) \\ &\leq c_2(1 + \|z\|_R^2) \\ &\leq c_2 \left(1 + \|z\|_R\right)^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \log \max_{0 \leq j \leq \nu} |\theta_j(\tau, z)| &\geq -c_1 Dh(\mathcal{A}_\tau) + \pi \|\Im m(z)\|_R^2 \\ &\geq -c_1 Dh(\mathcal{A}_\tau) \end{aligned}$$

□

2.2.2. Base de Shimura, dérivations

Supposons maintenant que $\mathcal{A}_\tau$ est définie sur un corps de nombre K de degré D sur $\mathbb{Q}$. Nous définissons alors les bases de Shimura annoncées dans l'introduction. Pour les idées présentées ici, on peut se référer au lemme 2 de [BZ], ainsi qu'à [Shi] et [Dav2].
Rappel : la base de Siegel est la base canonique de $T_0\mathcal{A}_\tau$ identifié à $\mathbb{C}^g$, dans laquelle le réseau des périodes s'écrit $\mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g$.

Construction de la base

L'application $\overrightarrow{z} \mapsto (\vartheta_0(\overrightarrow{z}) : \vartheta_1(\overrightarrow{z}) : \ldots : \vartheta_\nu(\overrightarrow{z}))$ étant un plongement, la matrice suivante, où les dérivations sont écrites dans la base de Siegel,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\vartheta_1}{\partial z_1}(0) & \dots & \frac{\partial\vartheta_1}{\partial z_g}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\vartheta_\nu}{\partial z_1}(0) & \dots & \frac{\partial\vartheta_\nu}{\partial z_g}(0) \end{bmatrix}$$

est de rang g.
On peut donc en extraire une matrice $g \times g$ inversible $M(\tau)$ (voir paragraphe 4.1 de [Dav2]). Notons d'autre part que par construction, on a choisi $|\vartheta_0|$ non nulle au voisinage de l'origine.

On définit alors la matrice inversible $\Omega_1(\tau)$:

$$\Omega_1(\tau) = \vartheta_0(0)^{-1}.M(\tau)$$

D'après le théorème 30.3 de [Shi], $\Omega_1(\tau)$ est la matrice de passage de la base de Siegel à une base définie sur K de l'espace tangent à l'origine de $\mathcal{A}_\tau$, qu'on appelle base de Shimura[3], et dont les éléments $\frac{\partial}{\partial\zeta_j} = \partial_j$ s'écrivent en fonction de la base de Siegel $\frac{\partial}{\partial z_j}$ sous la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\dots,\frac{\partial}{\partial\zeta_g}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\dots,\frac{\partial}{\partial z_g}\right)\Omega_1(\tau)^{-1}$$

Et étant donné un vecteur $\overrightarrow{z} \in T_0\mathcal{A}_\tau$, si on note ses coordonnées dans la base de Siegel $z = (z_i)_{1\leq i\leq g}$ et celle dans la base de Shimura $\zeta = (\zeta_i)_{1\leq i\leq g}$, alors on a :

$$\zeta = \Omega_1(\tau)z \quad z = (\Omega_1(\tau))^{-1}\zeta,$$
$$\vartheta_j(\overrightarrow{z}) = \theta_j(\tau, 2z) = \theta_j(\tau, 2(\Omega_1(\tau))^{-1}\zeta).$$

Coefficients de la matrice de changement de base

Comme on l'a vu au paragraphe 1.1, page 12, pour la démonstration du théorème 2, on a besoin de passer d'une minoration exprimée dans la base

[3] Cette base étant construite via l'extraction d'un sous-matrice $g \times g$ d'une matrice $\nu \times g$, il n'y a pas unicité. On ne peut donc pas parler de *la base de Shimura*, mais plutôt d'*une base de Shimura*. Toutefois, dans notre preuve, seules les propriétés géométriques de ces bases nous intéressent, et les estimations sont les mêmes quelle que soit la base qui aura été construite. On supposera qu'un choix a été fait, et on dira *la base de Shimura*, comme s'il n'y avait pas d'ambiguité.

de Shimura, dans laquelle s'écrit le résultat du théorème 1, à une minoration similaire, exprimée dans la base de Siegel. Pour cela, on fait appel au

Lemme 2.2.2. *Il existe une constante c_3 ne dépendant que de g telle que les coefficients des matrices $\Omega_1(\tau)$ et $(\Omega_1(\tau))^{-1}$ soient majorés par* $\exp(c_3 Dh(\mathcal{A}_\tau))$.

C'est le lemme 1.4.14 de [Dav1], rappelons-en succintement la démonstration :

1. on commence par donner une estimation par un calcul direct des coefficients de $M(\tau)$

$$\theta_{a,b}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}(n+a)'\tau(n+a) + (n+a)'(2z+b)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial z_j}\theta_{a,b}(0)\right| &= \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}^g} 4i\pi(n_j+a_j)\exp\left(2i\pi\left(\frac{1}{2}{}^t(n+a)\tau(n+a) + (n+a)'b\right)\right)\right| \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \pi|n_j+a_j|\exp\left(-\frac{\pi}{2}{}^t(n+a)\Im m(\tau)(n+a)\right)\end{aligned}$$

On utilise alors les propriétés des matrices Siegel-réduites pour montrer que cette somme converge et la majorer. Une estimation de $|\theta_0(0)|$ (*cf.* Lemme 2.2.1) donne la majoration attendue.

2. ensuite, on minore le déterminant de $M(\tau)$(via un argument de forme modulaire) pour en déduire un majorant des coefficients de son inverse. □

Dérivation

Notons $\mathcal{K} = \{(k,l,m,j),\ 0\leq k\leq l\leq \nu,\ m\in\{0,\ldots,\nu\},\ j\in\{1,\ldots,g\}\}$.

Lemme 2.2.3. *Pour tout $\overline{k}\in\mathcal{K}$, il existe des éléments $a_{\overline{k}}$ de K, tels que la hauteur $h\left((a_{\overline{k}})_{\overline{k}\in\mathcal{K}}\right)$ est majorée par $c_4(g)h(\mathcal{A}_\tau)$, et que, au voisinage de l'origine :*

$$\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\left(\frac{\vartheta_m}{\vartheta_0}\right) = \sum_{0\leq k\leq l\leq\nu} a_{k,l,m,j}\left(\frac{\vartheta_k}{\vartheta_0}\right)\left(\frac{\vartheta_l}{\vartheta_0}\right)$$

C'est la proposition 4.11 de [Dav2].

2.3. Plongements projectifs, degrés

On reprend maintenant les notations du théorème 1 : on considère, pour $1 \leq i \leq n$, des points τ_i des espaces de Siegel $\mathfrak{H}_{g_i}$, et on note $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{\tau_i}$, les variétés abéliennes principalement polarisées correspondantes, que l'on suppose définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Comme au paragraphe 2.2, on note $\varphi_i : T_0\mathcal{A}_i \to \mathbb{P}_{\nu_i}$ et $\psi_i : T_0\mathcal{A}_i \to \mathbb{C}^{\nu_i+1}$ les fonctions attachées à $\mathcal{A}_i$.

On pose $\nu_a = t$, et on plonge "trivialement" $\mathbb{C}^t$ dans $\mathbb{P}_{\nu_a}$ par

$$\begin{array}{rcl} \varphi_a : \mathbb{C}^t & \to & \mathbb{P}_{\nu_a} \\ z & \mapsto & (1 : z_1 : \ldots : z_{\nu_a})\,. \end{array}$$

On considère alors le plongement multiprojectif dans $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\nu_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{\nu_n} \times \mathbb{P}_{\nu_a}$:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : T_0\mathbf{G} & \to & \mathbb{P} \\ \mathbf{z} & \mapsto & (\varphi_1(\overrightarrow{z_1}), \ldots, \varphi_n(\overrightarrow{z_n}), \varphi_a(\overrightarrow{z_a})) \end{array}$$

ainsi que

$$\begin{array}{rcl} \Psi : T_0\mathbf{G} & \to & \mathbb{C}^{\nu_1+1} \times \ldots \times \mathbb{C}^{\nu_n+1} \times \mathbb{C}^{t+1} \\ \mathbf{z} & \mapsto & (\psi_1(\overrightarrow{z_1}), \ldots, \psi_n(\overrightarrow{z_n}), 1, \overrightarrow{z_a}) \end{array}$$

On définit également :

– l'espace vectoriel des polynômes multihomogènes en les variables $\overline{X}_1 = (X_{1,0}, \ldots, X_{1,\nu_1})$, ..., $\overline{X}_n = (X_{n,0}, \ldots, X_{n,\nu_n})$, $\overline{X}_a = (X_{a,0}, \ldots, X_{a,\nu_a})$

$$\mathbb{C}[\mathbb{P}] = \mathbb{C}[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n, , \overline{X}_a]$$

– le sous-espace vectoriel des polynômes multihomogènes de multidegré $(D_1, ..., D_n, D_a)$ en les variables $(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n, \overline{X}_a)$

$$\mathbb{C}[\mathbb{P}]_{(D_1,\ldots,D_n,D_a)} = \mathbb{C}[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n, \overline{X}_a]_{(D_1,\ldots,D_n,D_a)}$$

– pour $\mathbf{G}'$ un sous-groupe de $\mathbf{G}$, l'idéal annulateur de $\Phi(\mathbf{G}')$

$$I(\Phi(\mathbf{G}'))$$

formé par les éléments de $\mathbb{C}[\mathbb{P}]$ nul sur $\Phi(\mathbf{G}')$.

– La fonction de Hilbert-Samuel, définie pour $(D_1, ..., D_n, D_a)$ entiers ≥ 0, par :

$$\mathcal{H}(\mathbf{G}', D_1, ..., D_n, D_a) = \dim\left(\mathbb{C}[\mathbb{P}]/I(\Phi(\mathbf{G}'))\right)_{(D_1,...,D_n,D_a)}$$

Si les $(D_1, ..., D_n, D_a)$ sont suffisamment grands, cette fonction est égale à un polynôme multihomogène, dont on note

$$\frac{H(\mathbf{G}', D_1, \ldots, D_n, D_a)}{(\dim \mathbf{G}')!}$$

la partie homogène de degré maximal.

– On définit le degré de $\mathbf{G}$ et de ses sous-groupes via le plongement multiprojectif Φ, par la formule :

$$\deg_\Phi \mathbf{G}' = H(\mathbf{G}', 1, \ldots, 1)$$

Avec cette notation,

$$\deg_\Phi \mathbf{G} = \frac{(g+t)!}{t!g_1! \ldots g_n!} \prod_{i=1}^{n} \deg_{\varphi_i} \mathcal{A}_i = \frac{(g+t)! 4^g}{t!g_1! \ldots g_n!}$$

Notons également au passage que, pour $1 \leq i \leq n$, les monômes $X_{j,k}^d$, où $j \neq i$, $0 \leq k \leq \nu_j$, $1 \leq d$, sont des éléments de $I(\Phi(\mathcal{A}_i))$

$$\mathbb{C}[\mathbb{P}]/I(\Phi(\mathcal{A}_i) \simeq \mathbb{C}[\mathbb{P}_{\nu_i}]/I(\varphi_i(\mathcal{A}_i))$$

et donc que

$$\deg_\Phi \mathcal{A}_i = \deg_{\varphi_i} \mathcal{A}_i.$$

2.4. Choix de bases

$T_0\mathbf{G}$ est naturellement muni de la « base de Siegel » $\widetilde{\mathbf{E}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_{g+t})$, où

– $(\tilde{\mathbf{e}}_{d_i+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_{d_i+g_i})$ est la base de Siegel de $T_0\mathcal{A}_i \simeq \mathbb{C}^{g_i}$ (avec $d_i = \sum_{1\leq j<i} g_j$)

– $(\tilde{\mathbf{e}}_{g+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}}_{g+t})$ est la base canonique de $T_0\mathbf{G}_a^t$

Au paragraphe 2.2.2, on a introduit une matrice de changement de bases $\Omega_1(\tau)$. Définissons, en reprenant ces notations, la matrice $(g+t) \times (g+t)$, diagonale par blocs

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Omega_1^{(1)}(\tau_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \Omega_1^{(n)}(\tau_n) & \\ 0 & & & I_t \end{bmatrix},$$

qui est la matrice de passage de la base de Siegel vers la “base de Shimura” de $T_0\mathbf{G}$ notée $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{g+t})$, où

– $(\mathbf{e}_{d_i+1}, \ldots, \mathbf{e}_{d_i+g_i})$ est la base de Shimura de $T_0\mathcal{A}_i \simeq \mathbb{C}^{g_i}$ (avec $d_i = \sum_{1\leq j<i} g_j$)
– $(\mathbf{e}_{g+1}, \ldots, \mathbf{e}_{g+t})$ est la base canonique de $T_0\mathbf{G}_a^t$ $(\tilde{\mathbf{e}}_{g+k} = \mathbf{e}_{g+k})$

Quand on écrit les coordonnées $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{g+t})$, ce sera généralement dans cette base $\mathbf{E}$, sauf mention du contraire.

On introduit enfin une base particulière de W, qui sera utile pour la démonstration du lemme 3.2.1, en posant, pour $j \in \{1, .., g\}$

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_j - \sum_{k=1}^{t} \beta_{k,j}\mathbf{e}_{g+k}$$

Les $(\mathbf{f}_j)_{j\in\{1,\ldots,g\}}$ forment bien une base de W : ils annulent toutes les L_k, ils sont libres (coefficient non nul sur $\mathbf{e}_j$), ils sont au nombre de g, et W est un espace de codimension t dans un espace de dimension $t+g$.

Cette base nous permet de faire apparaître des termes en z_{g+k}, sur lesquels tout le poids en $(\log B)$ portera, à chaque fois que l'on dérivera. Comme N_a, le degré en $(z_{g+k})_{1\leq k\leq t}$, est beaucoup plus petit que T, cela a pour effet de remplacer un terme $T(\log B)$ par un terme $N_a(\log B)$, nettement moins gênant en ce qui concerne la dépendance en B, car N_a est indépendant de B alors que T grossit en $\log B$. Comme on l'a dit dans l'introduction, c'est à cette fin que l'on a rajouté un $\mathbf{G}_a^t$ dans notre groupe $\mathbf{G}$.

On peut compléter la famille $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_g\}$ en une base $\mathbf{F}$ de $T_0\mathbf{G}$ en rajoutant les $\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_j$ $(j \in \{g+1, \ldots, g+t\})$.

On va utiliser deux normes sur $T_0\mathbf{G}$:

– On note $\|.\|_{\mathbf{E}}$ la norme pour laquelle la base $\mathbf{E}$ est orthonormée.
  On note d la distance associée à cette norme.
– La norme associée à la forme de Riemann : $\|\overrightarrow{z}\|_R$ (attachée à la polarisation principale de $\prod \mathcal{A}_i$: $\|\overrightarrow{z}\|_R^2 = ({}^t\overline{z_{\widetilde{\mathbf{E}}}}(\Im m\tau)^{-1}z_{\widetilde{\mathbf{E}}}$, où $z_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ est le vecteur colonne repérant $\overrightarrow{z}$ dans la base de Siegel)

On introduit à présent le point $\mathbf{w}$ défini par

$$\mathbf{w} \;=\; \boldsymbol{\omega} + \sum_{k=1}^{t} L_k(\boldsymbol{\omega})\mathbf{e}_{g+k}$$

Il est facile de voir que $L_k(\mathbf{w}) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq t$, donc $\mathbf{w} \in W$ et que

$$d(\boldsymbol{\omega}, W) \leq \|\boldsymbol{\omega} - \mathbf{w}\|_{\mathbf{E}} = \left(\sum_{k=1}^{t} |L_k(\boldsymbol{\omega})|^2\right)^{1/2}$$

Notons que $\mathbf{w}$ est non nul, sinon $\boldsymbol{\omega}$ s'écrirait comme combinaison linéaire des $\{\mathbf{f}_k\}_{k\in\{g+1\ldots g+t\}}$, *i.e.* des $\{\mathbf{e}_k\}_{k\in\{g+1\ldots g+t\}}$, ce qui n'est pas le cas.

2.5. Rang du système

On rappelle que, pour une variété algébrique $\mathbb{X}$ contenu dans un espace multiprojectif $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\nu_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{\nu_n}$, on note $\mathcal{H}(\mathbb{X}, \;, \ldots, \;)$ la fonction de Hilbert attachée à $\mathbb{X}$, et $H(\mathbb{X}, \;, \ldots, \;)/(\dim \mathbb{X})!$ la partie homogène de plus haut degré du polynôme de Hilbert attaché à X.

Commençons par :

Lemme 2.5.1. *Soit* $\mathbb{X}$ *une variété algébrique irréductible de dimension* d *plongée dans un espace multiprojectif* $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\nu_1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{\nu_n}$ *et* $(L_1, \ldots, L_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. *Alors,*

$$\mathcal{H}(\mathbb{X}, L_1, \ldots, L_n) \leq H(\mathbb{X}, L_1, \ldots, L_n) + d.$$

Démonstration (voir [PW2], Lemme 6.7) : Le cas $n = 1$ est un résultat de [Cha] puisqu'alors $H(\mathbb{X}, L) = \deg(\mathbb{X}).L^d$.

Pour le cas $n > 1$, on utilise un plongement de Segre-Veronese pour se ramener au cas "$n = 1$" :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \overset{\varphi}{\longrightarrow} & \mathbb{P}_N \\ (x_{i,j})_{(0\leq j\leq \nu_i,\ 1\leq i\leq n)} & \mapsto & \left(\prod_{i,j} x_{i,j}^{l_{i,j}}\right)_{(\sum_{j=0}^{\nu_i} l_{i,j}=L_i,\ 1\leq i\leq n)} \end{array}$$

où $N = \prod_{i=1}^{n} \frac{(L_i+\nu_i)!}{\nu_i!L_i!}$.
L'image par φ d'un polynôme multihomogène de degré $(kL_1, \ldots, kL_n)$ est un polynôme homogène de degré k.

Appelons I l'idéal premier de définition de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{P}$ et I_N est l'idéal premier de définition de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{P}_N$, alors

$$(\mathbb{C}[\mathbb{P}]/I)_{(kL_1,\ldots,kL_n)} \simeq (\mathbb{C}[\mathbb{P}_N]/I_N)_k$$

Ainsi,

$$\mathcal{H}(\mathbb{X}, kL_1, \ldots, kL_n) = \mathcal{H}(\varphi(\mathbb{X}), k).$$

Prises en des points « assez grands », les fonctions de Hilbert coïncident avec des fonctions polynômiales. On peut donc écrire, en supposant k assez grand :

$$H(\mathbb{X}, L_1, \ldots, L_n)k^d/d! + \sum_{0\leq i<d} a_i k^i = \deg_\varphi \mathbb{X}.k^d/d! + \sum_{0\leq i<d} b_i k^i.$$

Donc, en identifiant les coefficients, $H(\mathbb{X}, L_1, \ldots, L_n) = \deg_\varphi \mathbb{X}$, et, pour $k = 1$:

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{H}(\mathbb{X}, L_1, \ldots, L_n) = \mathcal{H}(\varphi(\mathbb{X}), 1) & \leq & \deg_\varphi \mathbb{X} + d & \text{d'après le cas } n = 1 \\ & \leq & H(\mathbb{X}, L_1, \ldots, L_n) + d & \end{array}$$

□

On souhaite construire un polynôme P de $t + 1 + \sum(\nu_i + 1)$ variables, homogène de degré N_i en les $\nu_i + 1$ variables de $\mathcal{A}_i$, homogène de degré N_a en celles correspondant à $\mathbf{G}_a^t$, et dont les dérivées en 0 obéissent à certaines contraintes.

Lemme 2.5.2. *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe algébrique,* $\mathbf{G}'$ *un sous-groupe algébrique*

connexe de $\mathbf{G}$*,* $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m)$ *une base d'un sous-espace vectoriel* W *de* $T_0\mathbf{G}$ *telle que les* $m - \sigma$ *derniers vecteurs de* $\mathcal{B}$ *soient une base de* $W \cap T_0\mathbf{G}'$ *(*$\sigma = codim_W W \cap T_0\mathbf{G}'$*).*
Soient $T_1, \ldots, T_m$ *des entiers strictement positifs, et* $N_i' = \max(1, N_i)$*. Alors le rang du système*

$$\mathcal{S} = \begin{cases} D_{\mathcal{B}}^{\overline{t}}(P \circ \Phi)(\boldsymbol{\omega}) = 0, \\ pour\ \overline{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{N}^m \ \ et\ t_i < T_i\ (0 \leq i \leq m) \end{cases}$$

ayant pour inconnue $P \in \mathbb{C}[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_N, \overline{X}_{N_a}]_{(N_1, \ldots, N_n, N_a)}$*, est majoré par*

$$(2^{g+t} + 1)T_1 \ldots T_\sigma H(\mathbf{G}', N_1', \ldots, N_n', N_a')$$

Démonstration : Φ admet $\boldsymbol{\omega}$ comme quasi-période : il existe une focntion $c(\boldsymbol{\omega})$ non nulle telle que,

$$\forall \mathbf{x} \in T_0\mathbf{G}, \forall \overline{t} \in \mathbb{N}^m,\ D_{\mathcal{B}}^{\overline{t}}(P \circ \Phi)(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{x}) = c(\boldsymbol{\omega}).D_{\mathcal{B}}^{\overline{t}}(P \circ \Phi)(\mathbf{x}).$$

Il suffit donc d'établir le lemme dans le cas $\boldsymbol{\omega} = 0$, pour obtenir le résultat.

Considérons le système suivant :

$$\mathcal{S}' = \begin{cases} D_{\mathcal{B}}^{\overline{t}}(P \circ \Phi)(\mathbf{x}) = 0, \\ \text{pour tout } \mathbf{x} \in T_0\mathbf{G}',\ \overline{t} = (t_1, ..., t_\sigma, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^m \text{ et } t_i < T_i\ (1 \leq i \leq m) \end{cases}$$

d'inconnue $P \in \mathbb{C}[\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_n, \overline{X}_{N_a}]_{(N_1, \ldots, N_n, N_a)}$

Tout polynôme P solution de $\mathcal{S}'$ sera aussi solution de $\mathcal{S}$: en effet prenons un tel P, et $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{N}^m$, tel que $t_i < T_i$ $(1 \leq i \leq m)$. Posons $\overline{t}' = (t_1, ..., t_\sigma, 0, \ldots, 0)$

$$\begin{array}{rcl} f_{\overline{t}'} : T_0\mathbf{G}' & \to & \mathbb{C} \\ \mathbf{x} & \mapsto & D_{\mathcal{B}}^{\overline{t}'}(P \circ \Phi)(\mathbf{x}) \end{array}$$

est nulle car P est solution de $\mathcal{S}'$. Les dérivées en 0 de $f_{\overline{t}'}$ dans toutes les directions de $T_0\mathbf{G}'$, et donc dans les directions $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-\sigma}$, qui sont des vecteurs de $T_0\mathbf{G}'$, sont nulles à tout ordre. Autrement dit :

$$\forall \overline{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{N}^m,\ t_i < T_i\ (1 \leq i \leq m),\ D_{\mathcal{B}}^{\overline{t}}(P \circ \Phi)(0) = 0$$

ce qui prouve que P est solution de $\mathcal{S}$. L'ensemble des solutions de $\mathcal{S}'$ est inclus dans l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$, on a donc

$$rang(\mathcal{S}) \leq rang(\mathcal{S}').$$

Pour que $f_{\bar{t}'} \in I(\mathbf{G}')$, il faut vérifier au plus $\dim(\mathbb{C}[\mathbb{P}_N]/I(\mathbf{G}'))_{N_1,\ldots,N_n,N_a} = \mathcal{H}(\mathbf{G}', N_1, \ldots, N_n, N_a)$ conditions.

On a donc

$$\begin{aligned} rang(\mathcal{S}) &\leq rang(\mathcal{S}') \leq T_1 \ldots T_\sigma \mathcal{H}(\mathbf{G}', N_1, \ldots, N_n, N_a) \\ &\leq T_1 \ldots T_\sigma \mathcal{H}(\mathbf{G}', N_1', \ldots, N_n', N_a') \\ &\leq T_1 \ldots T_\sigma \left(H(\mathbf{G}', N_1', \ldots, N_n', N_a') + \dim \mathbf{G}'\right) \end{aligned}$$

Enfin, en minorant

$$H(\mathbf{G}', N_1', \ldots, N_n', N_a') \geq 1,$$

donc

$$\begin{aligned} rang(\mathcal{S}) &\leq T_1 \ldots T_\sigma H(\mathbf{G}', N_1', \ldots, N_n', N_a') \left(1 + \dim \mathbf{G}'\right) \\ &\leq T_1 \ldots T_\sigma H(\mathbf{G}', N_1', \ldots, N_n', N_a') \left(1 + \dim \mathbf{G}\right) \\ &\leq (1 + 2^{g+t}) T_1 \ldots T_\sigma H(\mathbf{G}', N_1', \ldots, N_n', N_a') \end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 3

Estimations archimédiennes et p-adiques

Dans ce chapitre sont démontrés quelques lemmes de majorations et minorations utilisés au cours de la démonstration. Ils sont pour la plupart bien connus (*cf.* [PW2, HK1, Gau3]), mais le lemme 3.2.1 (version effective de l'astuce de Chudnovsky, qui contitue un des points clefs de la démonstration) et sa preuve sont nouveaux : on y étend des arguments de Grinspan [Gri] et de David-Hirata [DHK1], qui permettent d'éviter le recours (*cf.* [Gra, Gau3]) aux modèles de Neron.

3.1. Majoration de dérivées

Ce premier lemme est une majoration purement analytique. Il n'est pas nécessaire d'avoir des coefficients algébriques pour le polynôme considéré, les vecteurs $\mathbf{x}_i$ et $\mathbf{u}$ qui interviennent sont quelconques.

Lemme 3.1.1. *Soit P un polynôme $\mathbb{C}[\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}, \overline{X_a}]$, dont la somme des modules des coefficients est au plus H, de degré au plus N_a en $\overline{X_a}$, et homogène de degré N_i sur chaque $\overline{X_i} = (X_{i,0}, X_{i,1}, \ldots, X_{i,\nu_i})$, et $F = P \circ \Phi$*

Soient $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{N}^m$, $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{u})$ des vecteurs de $T_0\mathbf{G}$, et pour $1 \leq i \leq m$, $(x_{i,j})_{1 \leq j \leq g+t}$ les coordonnées de $\mathbf{x}_i$ dans la base de Shimura. Alors :

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{1}{\overline{t}!}D_X^{\overline{t}}F(\mathbf{u})\right| \quad &\leq \quad \min(N_a, |\overline{t}|).\log\xi_a + |\overline{t}|\log\xi + |\overline{t}|\log m + \log H \\ &\quad + t.N_a \log \max_{i\in\{g+1,\ldots,g+t\}}(1+|u_i|) + c_2\sum_{i=1}^{n} N_i(1+\sqrt{g_i}+|\overrightarrow{u_i}|)^2\end{aligned}$$

où

$$\xi_a = \max_{j\in\{g+1,\ldots,g+t\}}(1, |x_{i,j}|) \ , \ \xi = \max_{j\in\{1,\ldots,g\}}(1, |x_{i,j}|) \ \textit{et}\ X = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
D_X^{\overline{t}}F(\mathbf{u}) &= \left(\prod_{i=1}^{m}\partial_{\mathbf{x}_i}^{t_i}\right)F(\mathbf{u}) = \left(\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{g+t}x_{i,j}\partial_j\right)^{t_i}\right)F(\mathbf{u})\\
&= \left(\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{\sum_j t_{i,j}=t_i}\frac{t_i!}{\prod_j t_{i,j}!}\prod_{j=1}^{g+t}x_{i,j}^{t_{i,j}}\partial_j^{t_{i,j}}\right)\right)F(\mathbf{u})\\
&= \sum_{\forall i,\sum_j t_{i,j}=t_i}\left(\prod_{i=1}^{m}t_i!\prod_{i,j}\frac{x_{i,j}^{t_{i,j}}}{t_{i,j}!}\prod_{j=1}^{g+t}\partial_j^{t_{1,j}+..+t_{m,j}}F(\mathbf{u})\right)
\end{aligned}$$

Posons pour chaque $j\in\{1,\ldots,g+t\}$, $\tau_j=\sum_{i=1}^m t_{i,j}$. On a $|\overline{\tau}|=\sum_j\tau_j=\sum_{i,j}t_{i,j}=\sum_i t_i=|\overline{t}|$; en passant à la valeur absolue, on déduit donc :

$$\left|\frac{1}{\overline{t}!}D_X^{\overline{t}}F(\mathbf{u})\right|\leq\left(\sum_{\forall i,\sum_j t_{i,j}=t_i}\left(\prod_{i,j}|x_{i,j}|^{t_{i,j}}\right)\left(\prod_{i,j}\frac{1}{t_{i,j}!}\right)\left(\prod_j\tau_j!\right)\right)\max_{|\overline{\tau}|=|\overline{t}|}|\frac{1}{\overline{\tau}!}D_{\mathbf{e}}^{\tau}F(\mathbf{u})|$$

$$\begin{aligned}
\prod_{i,j}|x_{i,j}|^{t_{i,j}} &= \prod_{j=g+1}^{g+t}\prod_{i=1}^{m}|x_{i,j}|^{t_{i,j}}.\prod_{j=1}^{g}\prod_{i=1}^{m}|x_{i,j}|^{t_{i,j}}\\
&\leq \xi_a^{\sum_{1+g\leq j\leq t+g,i\leq m}t_{i,j}}.\xi^{\sum_{j\leq g,i\leq m}t_{i,j}}\\
&\leq \xi_a^{|\overline{t}|}.\xi^{|\overline{t}|}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\forall i,\sum_j t_{i,j}=t_i}\left(\prod_{i,j}\frac{1}{t_{i,j}!}\right)\left(\prod_j\tau_j!\right)=\prod_{j=1}^{g+t}\left(\sum_{\sum_i t_{i,j}=\tau_j}\frac{\tau_j!}{\prod_j t_{i,j}!}\right)=\prod_{j=1}^{g+t}m^{\tau_j}=m^{|\overline{t}|}$$

Enfin, on majore $D_{\mathbf{e}}^{\tau}F$ en utilisant la formule de Cauchy, grâce aux estimations sur les θ_i mentionnées au lemme 2.2.1 : si $\mathcal{S}_i$ désigne la sphère unité de $T_0\mathcal{A}_i$ vu comme sous espace de $T_0\mathbf{G}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\tau}_{\mathbf{e}}F(\mathbf{u})\right| &= \left|\int_{a_j\in[0,2\pi]}\frac{F(\mathbf{u}+\sum e^{ia_j}\mathbf{e}_j)}{\prod (e^{ia_j})^{\tau_j}}da_1\dots da_N\right| \\
&\leq \sup_{a_j\in[0,2\pi]}\left|F(\mathbf{u}+\sum e^{ia_j}\mathbf{e}_j)\right| \\
&\leq H.\prod_{i=g+1}^{g+t}(1+|u_i|)^{N_a}.\prod_{i=1}^{n}\sup_{\overrightarrow{a_i}\in\mathcal{S}_i}\exp\left(c_2N_i(1+||\overrightarrow{u_i}+\overrightarrow{a_i}||_R)^2\right) \\
&\leq H.\prod_{i=g+1}^{g+t}(1+|u_i|)^{N_a}.\prod_{i=1}^{n}\exp\left(c_2N_i(1+\sqrt{g_i}+||\overrightarrow{u_i}||_R)^2\right) \\
&\quad \text{(le max est atteint quand } \overrightarrow{a_i} \text{ est dans la même direction que } \overrightarrow{u_i})
\end{aligned}$$

En mettant les différentes inégalités obtenues ensemble et en passant au logarithme on obtient bien le résultat annoncé. □

Remarque : en théorie, on devrait voir apparaître un terme de la forme $\xi_a^{|\overline{t}|}$, mais comme le polynôme est de degré au plus N_a sur les variables $\mathbf{G}_a$, si on dérive plus de N_a fois dans ces directions, le terme sera nul. Cela explique le terme $\min(N_a, |\overline{t}|)\log\xi_a$ là où on attendrait $|\overline{t}|\log\xi_a$.

3.2. Minoration des dérivées

Contrairement au lemme précédent, cette minoration est de nature arithmétique, et nécessite de majorer la hauteur de la valeur prise par une fonction, autrement dit de majorer les valeurs absolues (complexes et p-adiques) de la valeur prise par la fonction. On ne peut donc pas, cette fois-ci, utiliser n'importe quel polynôme, points ou base de dérivation !

Comme annoncé précédemment, ce lemme est un des points clefs de la démonstration du théorème.

On reprend les notations du paragraphe 2.4. Les g premiers vecteurs de $\{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_g\}$ forment une base de W. C'est le long de ces vecteurs que l'on dérive dans le lemme qui suit.

Lemme 3.2.1. *Soit $P\in\mathbb{C}[\overline{X_1},\overline{X_2},\dots,\overline{X_n},\overline{X_a}]$, dont les coefficients sont algébriques de hauteurs majorées par $\log H$, homogène de degré N_i en $\overline{X_i}=(X_{i,1},\dots,X_{i,\nu_i})$, et de degré N_a en $\overline{X_a}$, et $F=P\circ\Phi$.*

Soit $\overline{t} = (t_1, \ldots, t_g, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^{g+t}$, tel que pour tout $\overline{\tau} \in \mathbb{N}^{g+t}$ plus petit que $\overline{t}$ (pour l'ordre lexicographique), $D_{\mathbf{f}}^{\overline{\tau}} F(\boldsymbol{\omega}) = 0$ et tel que $D_{\mathbf{f}}^{\overline{t}} F(\boldsymbol{\omega}) \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{1}{\overline{t}!} D_{\mathbf{f}}^{\overline{t}} F(\boldsymbol{\omega})\right| \quad &\geq \quad -D\left\{\log H + N_a \log(B) + \sum_{i=1}^{n} N_i (1 + \|\overrightarrow{\omega_i}\|^2)\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{i=1}^{n} (N_i + T) h(\mathcal{A}_i) + T \log N_a \right\}\end{aligned}$$

Nous aurons besoin de la proposition suivante, dont la démonstration est donnée à la fin du paragraphe.

Proposition 3.2.2. *Il existe des paramètres $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g$ et un entier r non nul majoré par $e^{c_5 D \sum h(\mathcal{A})}$ tels que*

- *les différentielles invariantes $(d\zeta_j)$ vérifient : pour tout $1 \leq j \leq g$, $r d\zeta_j \in \bigoplus_{k=1}^{g} \mathcal{O}_K[[\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g]] d\mathcal{T}_k$ où $(d\zeta_1, \ldots, d\zeta_g)$ désigne la base duale de la base de Shimura de $T_0\mathcal{A}$.*
- *en repérant les vecteurs $\overrightarrow{z} = \sum_{j=1}^{g} \zeta_j \mathbf{e}_j$ de $T_0\mathcal{A}$ en fonction des paramètres $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g$, on a : $r\psi(r\overrightarrow{z}) \in (\mathcal{O}_K[[\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g]])^{\nu+1}$*

Remarque : L'intégration des formules $r d\zeta_j \in \bigoplus_{k=1}^{g} \mathcal{O}_K[[\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g]] d\mathcal{T}_k$ fournit une expression du logarithme formel de $\mathcal{A}$ sour la forme $\zeta_j = Z_j(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g)$ où les Z_j sont des séries formelles. Dans la formule qui suit, il faut interpréter $\psi(r\overrightarrow{z})$ comme la série formelle obtenue en composant $\zeta_j = Z_j(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g)$, $\overrightarrow{z} = \sum_{j=1}^{g} \zeta_j \mathbf{e}_j$ et $\psi(r\ .)$.
Démonstration du lemme 3.2.1 : En utilisant l'homogénéité de P, on écrit :

$$F(\boldsymbol{\omega}) = P \circ \Psi(\boldsymbol{\omega}). \prod_{i=1}^{n} \left(\vartheta_0^{(i)}(\overrightarrow{\omega_i})\right)^{N_i}$$

Comme les $\vartheta_0^{(i)}(\overrightarrow{\omega_i})$ sont non-nulles, l'hypothèse $\forall \overline{\tau} < \overline{t},\ D_{\mathbf{f}}^{\overline{\tau}} F(\boldsymbol{\omega}) = 0$ et les formules de Newton nous permettent d'écrire que

$$\forall \overline{\tau} < \overline{t},\ D_{\mathbf{f}}^{\overline{\tau}} P \circ \Psi(\boldsymbol{\omega}) = 0 \quad \text{et} \quad D_{\mathbf{f}}^{\overline{t}} F(\boldsymbol{\omega}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\vartheta_0^{(i)}(\overrightarrow{\omega_i})\right)^{N_i} .D_{\mathbf{f}}^{\overline{t}} P \circ \Psi(\boldsymbol{\omega})$$

D'après le lemme 2.2.1,

$$-\sum_{i=1}^{n} N_i c_1 Dh(\mathcal{A}_i) \leq \log\left(\prod_{i=1}^{n}\left|\vartheta_0^{(i)}(\overrightarrow{\omega_i})\right|^{N_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N_i c_2 \left(1+\|\overrightarrow{\omega_i}\|_R\right)^2$$

Intéressons nous à la fonction

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}^g & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & P\circ\Psi(\boldsymbol{\omega}+\sum_{i=1}^{g} z_i \mathbf{f}_i) \end{array}$$

Par construction, toutes les dérivées de f d'ordre inférieur (strictement) à $|\overline{t}|$ sont nulles, et $\frac{1}{\overline{t}!}D_{\mathbf{f}}^{\overline{t}}P\circ\Psi(\boldsymbol{\omega})$ est le premier coefficient de Taylor non nul de f en 0.

Comme $\boldsymbol{\omega}$ est une période, que Ψ fait intervenir des quotients de fonctions ϑ et que les $\vartheta_0^{(i)}$ ne sont pas nulles au voisinage de l'origine, on en déduit :

$$\begin{aligned} f(z) &= P\circ\Psi(\sum_{j=1}^{g} z_j\mathbf{f}_j) \\ &= P\circ\Psi\left(\sum_{j=1}^{g} z_j\left(\mathbf{e}_j-\sum_{k=1}^{t}\beta_{k,j}\mathbf{e}_{g+k}\right)\right) \\ &= P\circ\Psi\left(\sum_{k=1}^{t}\left(-\sum_{j=1}^{g} z_j\beta_{k,j}\right)\mathbf{e}_{g+k}+\sum_{j=1}^{g} z_j\mathbf{e}_j\right) \end{aligned}$$

On introduit à présent les logarithmes formels du lemme 3.2.2 : pour $j\leq g$, on obtient par intégration :

$$\zeta_j = l_j(\mathcal{T}_1,\ldots,\mathcal{T}_g) = \sum_{\overline{n}\in\mathbb{N}^g}\lambda_{\overline{n},j}\mathcal{T}_1^{n_1}\ldots\mathcal{T}_g^{n_g},$$

où les $\lambda_{\overline{n},j}$ sont de la forme $\sum_{k=1}^{g}\frac{a_{\overline{n},j,k}}{r.n_k}$, où $a_{\overline{n},j,k}\in\mathcal{O}_K$, on peut donc écrire

$$\lambda_{\overline{n},j} = \frac{a_{\overline{n},j}}{rm_{\overline{n},j}}, \quad \text{avec } a_{\overline{n},j}\in\mathcal{O}_K,\ m_{\overline{n},j}\in\mathbb{N}^*$$

les ζ_j étant les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{z}_0$ de $T_0\mathbf{G}$ quelconque dans la base de Shimura **E.**

Via ce changement de variable, on a $\psi_i(r.\mathbf{z}_0) = (s_{i,0}, \ldots, s_{i,\nu_i})(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g)$ où les $s_{i,j}$ sont des séries formelles à coefficients dans $\frac{1}{r}\mathcal{O}_K$.

Ainsi, en travaillant avec $r.\mathbf{z}_0$ plutôt que $\mathbf{z}_0$,

$$\begin{aligned} P \circ \Psi(r\mathbf{z}_0) &= P \circ \Psi(\sum_{j=1}^{g+t} r.\zeta_j \mathbf{e}_j) \\ &= P\left((s_{0,0}, \ldots, s_{n,\nu_n})\left(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g\right), 1, r\zeta_{g+1}, \ldots, r\zeta_{g+t}\right) \end{aligned}$$

On peut donc développer :

$$P \circ \Psi(\sum_{j=1}^{g+t} r.\zeta_j \mathbf{e}_j) = \sum_{\overline{m} \in \mathbb{N}^g} \mu_{\overline{m}} \mathcal{T}_1^{m_1} \ldots \mathcal{T}_g^{m_g} \zeta_{g+1}^{m_{g+1}} \ldots \zeta_{g+t}^{m_{g+t}} \tag{3.1}$$

où les $\mu_{\overline{m}}$ sont de la forme $\sum b_{\lambda,\overline{m}} p_\lambda$, les p_λ étant des coefficients de P, les $b_{\lambda,\overline{m}}$ des éléments de $\frac{1}{r^M}\mathcal{O}_K$, où $0 \leq M \leq \sum_{i=1}^n N_i$ et $m_{g+1} + \ldots + m_{g+t} \leq N_a$, car P est homogène de degré N_a sur la variable $\overline{X}_a$.

En appliquant ce calcul au cas particulier $\mathbf{z}_0 = \sum_{j=1}^g z_j \mathbf{f}_j$, élément de W, on a, compte-tenu des équations de définition de W :

$$\begin{aligned} \zeta_{g+k} &= -\sum_{j=1}^g \beta_{k,j}\zeta_j = -\sum_{j=1}^g \beta_{k,j} l_j(\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g) \\ &= \sum_{\overline{n}} \eta_{\overline{n},k} \mathcal{T}_1^{n_1} \ldots \mathcal{T}_g^{n_g} \quad \text{où } \eta_{\overline{n},k} = -\sum_{j=1}^g \beta_{k,j}\lambda_{\overline{n},j} \end{aligned}$$

on remplace les ζ_{g+k} dans (3.1) pour obtenir

$$\begin{aligned} P \circ \Psi(\sum_{i=1}^g r.z_i \mathbf{f}_i) &= \sum_{\overline{m}} \left[\mu_{\overline{m}} \mathcal{T}_1^{m_1} \ldots \mathcal{T}_g^{m_g} \left(\sum_{\overline{n}} \eta_{\overline{n},1} \mathcal{T}_1^{n_1} \ldots \mathcal{T}_g^{n_g} \right)^{m_{g+1}} \right. \\ & \qquad \left. \ldots \left(\sum_{\overline{n}} \eta_{\overline{n},t} \mathcal{T}_1^{n_1} \ldots \mathcal{T}_g^{n_g} \right)^{m_{g+t}} \right]. \end{aligned}$$

Le coefficient de $\mathcal{T}_1^{t_1} \dots \mathcal{T}_g^{t_g}$, étant égal à $\frac{r^{|\overline{t}|}}{\overline{t}!} D_{\mathbf{f}}^{\overline{t}} P \circ \Psi(\boldsymbol{\omega})$, c'est une combinaison linéaire *finie,* à coefficients *entiers* de termes de la forme

$$\mu_{\overline{m}}. \prod_{k=1}^{N} \eta_{\overline{n}_k, i_k} \quad \text{avec } N \leq N_a, \ \sum |\overline{n}_k| \leq |\overline{t}|$$

D'après la définition des $\mu_{\overline{m}}$ et des $\eta_{\overline{n},i}$, c'est une combinaison linéaire *finie,* à coefficients *entiers* de termes de la forme

$$b.p_\lambda.\beta_{i,j} \left(\prod_{k=1}^{N} n_k \right)^{-1} r^{N-M}$$

avec $0 \leq M \leq \sum_{i=1}^{n} N_i, \ N \leq N_a, \ \sum n_k \leq |\overline{t}|, \ b \in \mathcal{O}_K$.

La majoration qu'on déduit pour le dénominateur de $\frac{1}{\overline{t}!} D_{\mathbf{f}}^{\overline{t}} P \circ \Psi(\boldsymbol{\omega})$, combinée aux majorations de ses valeurs absolues archimédiennes données par le lemme 3.1.1, et à la formule du produit, fournit alors la minoration annoncée au lemme 3.2.1.

$\square$

Démonstration de la proposition 3.2.2 Elle repose sur une version multidimensionnelle effective du théorème d'Eisenstein, inspirée de Grinspan [Gri] et sur la présentation par David et Hirata [DHK1], dans le cas elliptique, de l'astuce de Chudnovsky.

1) Eisenstein effectif :

Lemme 3.2.3. *Soient (m,n) deux entiers positifs non nuls ; L un corps de nombre de degré D_L sur $\mathbb{Q}$; $P_1, \dots, P_n$ des polynômes en $(m+n)$ variables, à coefficients dans $\mathcal{O}_L$, de hauteurs majorées par h ; et n séries formelles $(Y_1, \dots, Y_n) \in (L[[X_1, \dots, X_m]])^n$ sans terme constant, et vérifiant le système :*

$$\forall 1 \leq i \leq n; \ P_i(X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots Y_n) = 0.$$

On suppose que
- *pour tout $1 \leq i \ \leq n$, $P_i(0, \dots, 0) = 0$*
- *La matrice $M = \left(\frac{\partial P_i}{\partial Y_j}(0)\right)$ est inversible, et on note $\Delta \in \mathcal{O}_L$ son déterminant.*

Alors, Δ est de hauteur majorée par $n(h + \log n)$, et

$$\forall 1 \leq j \leq n; \ Y_j(\Delta^2 X_1, \dots, \Delta^2 X_m) \in \mathcal{O}_L[[X_1, \dots, X_m]].$$

Démonstration : Notons $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ et $\overline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Ecrivons chacun des $P_i(\overline{X}, \overline{Y})$ sous la forme

$$P_i(\overline{X}, \overline{Y}) = Q_i(\overline{X}) + \sum_{j=1}^{n} R_{i,j}(\overline{X}) Y_j + S_i(\overline{X}, \overline{Y})$$

(les polynômes S_i sont de degré au moins 2 en $\overline{Y}$). On écrit ensuite le système sous forme vectorielle, en posant $R(\overline{X}) = (R_{i,j}(\overline{X}))_{(i,j)\in\{1\ldots n\}^2}$.

$$\begin{pmatrix} P_1(\overline{X}, \overline{Y}) \\ \vdots \\ P_n(\overline{X}, \overline{Y}) \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(\overline{X}).\overline{Y} = - \begin{pmatrix} Q_1(\overline{X}) \\ \vdots \\ Q_n(\overline{X}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_1(\overline{X}, \overline{Y}) \\ \vdots \\ S_n(\overline{X}, \overline{Y}) \end{pmatrix}$$

L'hypothèse sur $M = R(\overline{0})$ permet de dire que $R(\overline{X}) \in GL_n(L[[\overline{X}]])$:

$$\det R(\overline{X}) \quad = \quad \Delta + \rho(\overline{X}) \quad \text{où } \rho(\overline{X}) \in \mathcal{O}_L[\overline{X}], \text{ sans terme constant,}$$

et on peut écrire :

$$R(\overline{X})^{-1} = {}^t(\mathrm{com} R(\overline{X})) \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{k\geq 0} \left(-\frac{\rho(\overline{X})}{\Delta} \right)^k \right)$$

Ainsi, dans $(L[[\overline{X}]])^n$, on a l'égalité :

$$\overline{Y} = -R(\overline{X})^{-1}. \left(\overline{Q}(\overline{X}) + \overline{S}(\overline{X}, \overline{Y}) \right)$$

On identifie terme à terme les coefficients devant chaque monome $\overline{X}^{\overline{k}} = X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n}$, pour faire une récurrence sur $|\overline{k}|$, en observant qu'il n'y a pas de terme constant, et que l'on peut traiter les monômes de longueur donnée dans un ordre arbitraire (pour simplifier le calcul, on pourra introduire les variables intermédiaires $\tilde{Y}_j = Y_j/\Delta$, $\tilde{X}_i = X_i/\Delta^2$ et montrer $\tilde{Y}_j \in \mathcal{O}_L[[\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n]]$). On voit alors qu'on peut écrire les Y_j sous la forme annoncée. $\square$

2) Logarithme « formel » et démonstration de 3.2.2 :
En reprenant les notations introduites au paragraphe 2.2, posons $\mathcal{T}_i = \frac{\vartheta_i}{\vartheta_0} - \frac{\vartheta_i}{\vartheta_0}(0)$. Notons K le corps des thetanullwertes et D son degré.
Par construction, $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_g$ forment un système de paramètres (formés de

fonctions rationnelles sur $\mathcal{A}$ et régulières en 0) de l'anneau local de $\mathcal{A}$ en 0. On peut donc écrire pour tout $i > g$, $\mathcal{T}_i \in K[[\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_g]]$.
De plus $(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_\nu)$ vérifie un système d'équations polynômiales quadratiques à coefficients dans K, de hauteurs majorées par $e^{Dh(\mathcal{A})}$ (*cf.* [Mum] Chapitre II, paragraphe 6). Comme $\mathcal{A}$ est lisse à l'origine, les différentielles en $0_\mathcal{A}$ de ces polynômes engendrent dans $T_{0_\mathcal{A}}\mathcal{A}^*\mathbb{P}_\nu$ un sous espace de codimension g, et on peut en extraire un système de $\nu - g$ polynômes vérifiant les conditions du théorème d'Eisenstein, avec $n = \nu - g$, $m = g$, $L = K$, $h = Dh(\mathcal{A})$, $Y_1 = \mathcal{T}_{g+1}, \dots, Y_n = \mathcal{T}_\nu$ et $X_1 = \mathcal{T}_1, \dots, X_g = \mathcal{T}_g$. On obtient alors

$$\forall 1 + g \leq i \leq \nu;\ \mathcal{T}_i \in \mathcal{O}_K[[\Delta^2\mathcal{T}_1, \dots, \Delta^2\mathcal{T}_g]]$$

Comme de plus $\psi = (1, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_\nu)$, cela établit la deuxième conclusion du lemme.

$$\begin{pmatrix} d\mathcal{T}_1 \\ \vdots \\ d\mathcal{T}_g \end{pmatrix} = (\partial\mathcal{T}_i/\partial\zeta_j) \begin{pmatrix} d\zeta_1 \\ \vdots \\ d\zeta_g \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 2.2.3, la matrice $(\partial\mathcal{T}_i/\partial\zeta_j)$ est un élément de $\mathcal{M}_g(\frac{1}{\delta}\mathcal{O}_K[\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_\nu]) \subset \mathcal{M}_g(\frac{1}{\delta}\mathcal{O}_K[[\Delta^2\mathcal{T}_1, \dots, \Delta^2\mathcal{T}_g]])$, où δ est un entier de hauteur majorée par $c_4(g)h(\mathcal{A}_\tau)$.
De plus, en $\mathcal{T}_i = 0$, elle vaut I_g. Donc $(\partial\mathcal{T}_i/\partial\zeta_j)$ est inversible dans $\mathcal{M}_g(K[[\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_g]])$, et

$$(\partial\mathcal{T}_i/\partial\zeta_j)^{-1} \in \mathcal{M}_g(\frac{1}{\delta}\mathcal{O}_K[[\Delta^2\mathcal{T}_1, \dots, \Delta^2\mathcal{T}_g]]).$$

En prenant $r = \delta\Delta^2$, on obtient la proposition.

$\square$

3.3. Lemme de Thue-Siegel

Lemme 3.3.1. *Soit* $(a_{i,j})_{1\leq i\leq L, 1\leq j\leq C}$ *une matrice de rang au plus* ρ *(*$a_{i,j} \in \mathbb{C}$*). Soit* $(\Delta, M, m) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ *tel que*

$$\max_{1\leq i\leq L} \sum_{j=1}^{C} |a_{i,j}| \leq m \quad et \quad (2\sqrt{2}Lm\Delta/M + 1)^{2\rho} \leq \Delta^C$$

alors il existe $(x_1, \dots, x_C) \in \mathbb{Z}^C \setminus \{0\}$ *vérifiant*

$$\max_{1\le j\le C}|x_j| < \Delta \quad et \quad \max_{1\le i\le L}|\sum_{j=1}^{C} a_{i,j}x_j| \le M$$

Rappel de la démonstration (cf. lemme 6.1 de [PW2]) : Considérons

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{C}^C & \to & \mathbb{C}^L \\ (x_j) & \mapsto & (\sum_{j=1}^{C} a_{i,j}x_j)_i \end{array}$$

Soit $\mathcal{Z} = \{(x_j) \in \mathbb{Z}^C;\ 0 \le x_i < \Delta\}$, et $y \in \varphi(\mathcal{Z})$. Pour $1 \le i \le L$, $y_i = \sum_{j=1}^{C} a_{i,j}x_j$, on a donc

$$\begin{array}{rcl} |y_i| & \le & \sum_{j=1}^{C} |a_{i,j}||x_j| \\ & \le & \Delta \sum_{j=1}^{C} |a_{i,j}| \le m\Delta, \end{array}$$

ce qui donne

$$||y||^2 = \sum_{i=1}^{L} |y_i|^2 \le Lm^2\Delta^2.$$

Par hypothèse, $Im(\varphi)$ est contenu dans un $\mathbb{R}$-ev E de dimension 2ρ, $\varphi(\mathcal{Z})$ est donc contenu dans un cube $\mathcal{C}$ de E de côté $2\sqrt{L}m\Delta$.

Recouvrons $\mathcal{C}$ avec des cubes de E de côté $l = M/\sqrt{2\rho}$. Il en faut au plus

$$([2\sqrt{2\rho L}m\Delta/M] + 1)^{2\rho} \le (2\sqrt{2}Lm\Delta/M + 1)^{2\rho}$$

Le nombre de ces « petits cubes » est par hypothèse inférieur $\Delta^C = \#\mathcal{Z}$. Il existe donc deux points distincts dans $\mathcal{Z}$ qui ont une image dans le même « petit cube ». Soit x la différence de ces deux points. Les x_i sont des entiers relatifs, non tous nuls, et en valeur absolue plus petits que Δ. D'autre part,

$$\|\varphi(x)\|^2 \le (2\rho)l^2 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \le \sqrt{2\rho}l = M$$

□

3.4. Lemme de Schwarz

Ce lemme permet, quand on connaît un majorant d'une fonction analytique sur un gros disque (rayon R) et qu'on en a des estimations plus fines (jusqu'à un certain ordre de dérivation) en un nombre fini de points dans un disque plus petit (rayon r) d'obtenir une nouvelle majoration sur tout le petit disque.

C'est le point clé qui va nous permettre d'extrapoler, dans notre cas, sur l'ordre de dérivation. Rappelons que nous travaillons dans un cas « périodique », de sorte qu'une extrapolation sur les multiples entiers de $\boldsymbol{\omega}$ est immédiate[1], mais n'apporte rien lors de l'application du lemme de zéros[2].

La démonstration, assez classique, se trouve par exemple dans [CW].

Lemme 3.4.1. *Soit f une fonction analytique sur un disque de centre* 0*, rayon $R \geq 4$, $S_1 \geq 2$ un entier, T_1 un entier et $r \in [S_1, R/4]$. Alors*

$$|f|_{2r} \leq 2|f|_R \left(\frac{4r}{R}\right)^{T_1 S_1} + 5\left(\frac{18r}{S_1}\right)^{T_1 S_1} \max_{\substack{h\in\{0,\dots,S_1\}\\ 0\leq m\leq T_1}} \left\{\frac{1}{m!}|f^{(m)}(h)|\right\}$$

Rappel de la démonstration : Soit $Q(z) = \prod_{h=0}^{S_1}(z-h)^{T_1}$. On utilise une formule d'interpolation (théorème des résidus) :

$$\frac{f(z)}{Q(z)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)(\zeta - z)}\partial\zeta - \frac{1}{2i\pi}\sum_{k=0}^{T_1-1}\sum_{h=0}^{S_1}\frac{f^{(k)}(h)}{k!}\int_{\Gamma_h}\frac{(\zeta-h)^k}{Q(\zeta)(\zeta-z)}\partial\zeta$$

où $|z| \leq R$, Γ est le cercle de centre 0, rayon R, et Γ_h est le cercle de centre h, rayon $1/4$.

On va utiliser cette formule avec $|z| = 2r$:

$$r \leq |z-h| \leq 3r \Rightarrow |Q(z)| \leq (3r)^{S_1 T_1}$$

<u>Intégrale sur Γ :</u> on minore $|\zeta - z|$ par $R - 2r \geq R/2$ et $|\zeta - h|$ par $R - r \geq 3R/4$

$$|1/Q(\zeta)| \leq (3R/4)^{-S_1 T_1}$$

[1] Car d'après le choix de paramètres, la quasi-périodicité fait que les majorations de $|D^t F(s\boldsymbol{\omega})|$ pour $0 \leq s \leq S$ se déduisent (si S n'est pas trop grand) de celle de $|D^t F(\boldsymbol{\omega})|$.

[2] Les lemmes de zéros portent sur le groupe $\mathbf{G}$. Or les images des points $n\boldsymbol{\omega}$, $n \in \mathbb{Z}$, y sont réduites à un seul point, l'origine.

Donc on a

$$\left|\frac{Q(z)}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)(\zeta-z)}\partial\zeta\right| \leq |f|_R\frac{R}{R/2}.\left(\frac{4r}{R}\right)^{S_1T_1} = 2.|f|_R.\left(\frac{4r}{R}\right)^{S_1T_1}$$

Intégrale sur Γ_h : on minore $|\zeta - z|$ par $r \geq 2$

$$\frac{(\zeta-h)^k}{Q(\zeta)} = \frac{1}{(\zeta-h)^{T_1-k}}\prod_{h'\neq h}(\zeta-h')^{-T_1}$$

$|\zeta - h| = 1/4$ et $|\zeta - h'| \geq |h-h'| - |\zeta-h| = |h-h'| - 1/4$

On indexe les h' de 1 à S_1 de manière à avoir, pour $1 \leq j < S_1$, $|h-h'_{j+1}| \geq |h-h'_j|$.

On vérifie[3] alors $|h-h'_j| \geq \frac{j}{2}$, donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{Q(z)}{2i\pi}\frac{f^{(k)}(h)}{k!}\int_{\Gamma_h}\frac{(\zeta-h)^k}{Q(\zeta)(\zeta-z)}\partial\zeta\right| &\leq (3r)^{S_1T_1}\max\left\{\frac{1}{m!}|f^{(m)}(h)|\right\}.\frac{1}{4r}\left(\frac{S_1!}{2^{S_1}}\right)^{-T_1}\\ &\leq 5\left(\frac{18r}{S_1}\right)^{T_1S_1}\max_{\substack{h\in\{0,\ldots,S_1\}\\ 0\leq m\leq T_1}}\left\{\frac{1}{m!}|f^{(m)}(h)|\right\}\end{aligned}$$

□

3.5. Changement de base de dérivation

Dans la démonstration , nous sommes amené à calculer des dérivations relatives à différentes familles de vecteurs. Le lemme suivant, déjà présent dans [Gau4], nous permet de contrôler ces changements de variables.

Lemme 3.5.1. *Soient $X = (\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n)$ et $Y = (\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_m)$ deux familles de vecteurs de $T_0\mathbf{G}$ telles que l'on puisse écrire $\mathbf{y}_i = \sum_{j=1}^n y_{i,j}\mathbf{x}_j$ pour tout i, alors*

$$\max_{|\bar{t}|=T}\left|D_Y^{\bar{t}}F(\mathbf{z})\right| \leq \left(\sum_{i,j}|y_{i,j}|\right)^T.\max_{|\bar{\tau}|=T}\left|D_X^{\bar{\tau}}F(\mathbf{z})\right|$$

[3] On a deux cas possibles : ou bien les premiers h_j sont de part et d'autre de h, et la suite des $|h-h_j|$ commence par 1, 1, 2, 2, ...; ou bien les h_j sont tous du même côté (*i.e.* sont tous plus petits ou tous plus grands que h), et dans ce cas la suite des $|h-h_j|$ est 1, 2, 3, 4, ... Dans un cas comme dans l'autre, la minoration annoncée est vérifiée.

Rappel de la démonstration : Soit $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ tel que $|\overline{\tau}| = T$.

$$\begin{aligned}
D_Y^{\bar{t}} F(\mathbf{z}) &= \left(\prod_{i=1}^{m} \partial_{\mathbf{y}_i}^{t_i} \right) F(z) = \left(\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} y_{i,j} \partial_{\mathbf{x}_j} \right)^{t_i} \right) F(z) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{m} \sum_{\sum t_{i,j} = t_i} \frac{t_i!}{\prod t_{i,j}!} \left(\prod_{j=1}^{n} y_{i,j}^{t_{i,j}} \partial_{\mathbf{x}_j}^{t_{i,j}} \right) \right) F(z) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{m} \sum_{\sum t_{i,j} = t_i} t_i! \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1}{t_{i,j}!} y_{i,j}^{t_{i,j}} \partial_{\mathbf{x}_j}^{t_{i,j}} \right) \right) F(z) \\
&= \left(\sum_{\forall i,\, \sum_j t_{i,j} = t_i} \prod_{j=1}^{n} \left((\prod_{i=1}^{m} \frac{t_i!}{t_{i,j}!} y_{i,j}^{t_{i,j}}) \partial_{\mathbf{x}_j}^{t_{1,j} + \ldots + t_{m,j}} \right) \right) F(z) \\
\left| D_Y^{\bar{t}} F(\mathbf{z}) \right| &\leq \sum_{|\overline{\tau}| = T} \left((\sum_{\sum_i t_{i,j} = \tau_j} \frac{|\overline{\tau}|!}{\prod_{i,j} t_{i,j}!} \prod_{i,j} |y_{i,j}|^{t_{i,j}}) \left| D_X^{\overline{\tau}} F(z) \right| \right) \\
&\leq \left(\sum_{\sum t_{i,j} = T} \frac{T!}{\prod_{i,j} t_{i,j}!} \prod_{i,j} |y_{i,j}|^{t_{i,j}}) \right) \max_{|\overline{\tau}| = T} \left| D_X^{\overline{\tau}} F(z) \right| \\
&\leq \left(\sum_{i,j} |y_{i,j}| \right)^{T} \max_{|\overline{\tau}| = T} \left| D_X^{\overline{\tau}} F(z) \right|
\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 4

Démonstration du théorème 1

On reprend ici les notations introduites au paragraphe 2.1 : définitions des $T^{\#}$, $N_i^{\#}$, $S^{\#}$, ...

4.1. Élimination des sous groupes obstructeurs

Lemme 4.1.1. *Il existe $\lambda \in]0;1]$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) pour tout sous-groupe algébrique connexe $\mathbf{G}'$ de $\mathbf{G}$, vérifiant $T_0\mathbf{G}' + W \neq T_0\mathbf{G}$, on a, en posant $\sigma = \dim(W/W \cap T_0\mathbf{G}')$

$$(T^{\#})^{\sigma} H(\mathbf{G}', N_1^{\#}, \ldots, N_n^{\#}, N_a^{\#}) \geq C_0 H(\mathbf{G}, N_1^{\#}, \ldots, N_n^{\#}, N_a^{\#})$$

ii) il existe un sous-groupe algébrique connexe $\widetilde{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$, vérifiant $T_0\widetilde{\mathbf{G}} + W \neq T_0\mathbf{G}$ pour lequel, en posant $\tilde{\sigma} = \dim(W/W \cap T_0\widetilde{\mathbf{G}})$, on a

$$(T^{\#})^{\tilde{\sigma}} H(\widetilde{\mathbf{G}}, N_1^{\#}, \ldots, N_n^{\#}, N_a^{\#}) = C_0 H(\mathbf{G}, N_1^{\#}, \ldots, N_n^{\#}, N_a^{\#})$$

Démonstration : Soit $\mathbf{G}'$ un sous-groupe connexe de $\mathbf{G}$ vérifiant $T_0\mathbf{G}' + W \neq T_0\mathbf{G}$, $\sigma = \dim(W/W \cap T_0\mathbf{G}')$ et $r' = \dim(\mathbf{G}/\mathbf{G}')$.

Pour tout $\lambda \in]0;1]$, notons $\mathcal{N}_a = N_a^{\#}/\lambda$ et $\mathcal{N}_i = N_i^{\#}/\lambda$: ce sont des nombres positifs, *indépendants* de λ. Considérons alors

$$\begin{aligned} f(\mathbf{G}', \lambda) &= \frac{(T^{\#})^{\sigma} H(\mathbf{G}', N_1^{\#}, \ldots, N_n^{\#}, N_a^{\#})}{C_0 H(\mathbf{G}, N_1^{\#}, \ldots, N_n^{\#}, N_a^{\#})} \\ &= \frac{(T^{\#})^{\sigma} H(\mathbf{G}', \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n, \mathcal{N}_a)}{C_0 H(\mathbf{G}, \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n, \mathcal{N}_a)} . \lambda^{\dim \mathbf{G}' - \dim \mathbf{G}} \\ &= f(\mathbf{G}', 1) . \lambda^{-r'} \end{aligned}$$

Si $f(\mathbf{G}', 1) > 1$, on pose $\lambda(\mathbf{G}') = 1$, et sinon $\lambda(\mathbf{G}') = (f(\mathbf{G}', 1))^{1/r'} \leq 1$.

$H(\mathbf{G}', .)$ est un polynôme à coefficients entiers compris entre 0 et $\deg_\Phi \mathbf{G}'$: à degré de $\mathbf{G}'$ fixé, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour $H(\mathbf{G}', \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n, \mathcal{N}_a)$ lorsque $\mathbf{G}'$ varie.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \deg_\Phi \mathbf{G}'.(\min_{1\leq i\leq n}(\mathcal{N}_i; \mathcal{N}_a))^{\dim \mathbf{G}'} &\leq H(\mathbf{G}', \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n, \mathcal{N}_a) \\ &\leq \deg_\Phi \mathbf{G}'.(\max_{1\leq i\leq n}(\mathcal{N}_i; \mathcal{N}_a))^{\dim \mathbf{G}'}, \end{aligned}$$

ainsi $H(\mathbf{G}', \mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_n, \mathcal{N}_a)$ (et donc $f(\mathbf{G}', 1)$) croît proportionnellement avec $\deg \mathbf{G}'$.

Par conséquent, quand $\mathbf{G}'$ parcourt l'ensemble des sous-groupe connexes de $\mathbf{G}$ vérifiant $T_0\mathbf{G}' + W \neq T_0\mathbf{G}$, le nombre $\lambda(\mathbf{G}')$ est minimum pour un sous-groupe $\widetilde{\mathbf{G}}$. On peut donc définir :

$$\tilde{\lambda} = \lambda(\widetilde{\mathbf{G}}) = \min_{\mathbf{G}'} \lambda(\mathbf{G}')$$

Montrons enfin que le couple $(\tilde{\lambda}; \widetilde{\mathbf{G}})$ est solution du problème posé :

- $\lambda \mapsto f(\mathbf{G}', \lambda)$ est décroissante (exposant $\dim \mathbf{G}' - \dim \mathbf{G}$). Comme elle vaut (au moins) 1 en $\lambda(\mathbf{G}') \geq \tilde{\lambda}$, on a $f(\mathbf{G}', \tilde{\lambda}) \geq 1$ pour tout sous groupe $\mathbf{G}'$, et le premier point du lemme est vérifié.
- par construction, $\tilde{\lambda} \leq 1$, en effet le cas particulier $\mathbf{G}' = 0$ montre que le cas $f(\mathbf{G}', 1) \leq 1$ existe :

$$\begin{aligned} f(0,1) &= \frac{T^g}{C_0 \deg_\Phi \mathbf{G}.\mathcal{N}_1^{g_1} \ldots \mathcal{N}_n^{g_n} \mathcal{N}_a^t} \\ &= \frac{C_0^{g/2} U_0^g}{C_0 \deg_\Phi \mathbf{G} \frac{U_0^t}{(D \log B)^t} \prod_{i=1}^n \frac{U_0^{g_i}}{(C_0^{3/2}(h(\mathcal{A}_i)D + ||\overrightarrow{v_i}||^2))^{g_i}}} \\ &= \frac{1}{\deg_\Phi \mathbf{G}} \leq 1 \end{aligned}$$

  Ceci permet d'assurer que $f(\widetilde{\mathbf{G}}, \tilde{\lambda}) = 1$, le deuxième point du lemme est vérifié.

□

On suppose désormais que le paramètre λ (utilisé pour définir les $N_i^{\#}$) est fixé et vaut $\tilde{\lambda}$.

Rappelons que $T_0\mathbf{G} = T_0\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}^t$. Notons p la projection sur $T_0\mathcal{A}$. p réalise un isomorphisme de W sur $T_0\mathcal{A}$ (W est un supplémentaire de $\ker p$).

$\mathbf{G}$ étant le produit d'une variété abélienne $\mathcal{A}$ et d'une puissance de $\mathbb{C}$, son sous-groupe connexe $\widetilde{\mathbf{G}}$ s'écrit sous la forme $\widetilde{\mathcal{A}} \times V$, où V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^t$, et $\widetilde{\mathcal{A}}$ une sous-variété de $\mathcal{A}$.
Pour la conclusion de notre démonstration, c'est $\widetilde{\mathcal{A}}$ qui nous intéresse, car le véritable cadre de travail est celui du groupe $\mathcal{A}$, $\mathbf{G}$ ne constituant qu'un artifice de calcul.

Lemme 4.1.2. *Le degré du groupe $\widetilde{\mathcal{A}}$ est majoré par*

$$(C_0)^{5g+1} \deg_\Phi \mathbf{G} \max_{\substack{\sum d_i = \dim(W \cap T_0\tilde{\mathbf{G}}) \\ 0 \le d_i \le g_i}} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{Dh^+(\mathcal{A}_i) + \mathfrak{a}^2 \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2}{\mathfrak{a}} \right)^{d_i}$$

$$\textit{avec } \mathfrak{a} = D \max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R$$

et

$$T_0\widetilde{\mathcal{A}} + \mathcal{W} \neq T_0\mathcal{A}$$

Démonstration : Par définition de $\widetilde{\mathbf{G}} = \widetilde{\mathcal{A}} \times V$, on a

$$H(\widetilde{\mathbf{G}}, N_1^\#, \dots, N_n^\#, N_a^\#) = (N_a^\#)^{\dim V} H(\widetilde{\mathcal{A}}, N_1^\# \dots, N_n^\#).$$

D'autre part on a la minoration banale :

$$H(\widetilde{\mathcal{A}}, N_1^\# \dots, N_n^\#) \ge \deg_\Phi(\widetilde{\mathcal{A}}). \min_{\substack{\sum d_i = \dim \widetilde{\mathcal{A}} \\ 0 \le d_i \le g_i}} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(N_i^\# \right)^{d_i} \right\}.$$

Donc

$$\deg_\Phi(\widetilde{\mathcal{A}}) \le \frac{H(\widetilde{\mathbf{G}}, N_1^\#, \dots, N_n^\#, N_a^\#)}{(N_a^\#)^{\dim V} \min_{\substack{\sum d_i = \dim \widetilde{\mathcal{A}} \\ 0 \le d_i \le g_i}} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(N_i^\# \right)^{d_i} \right\}} \tag{4.1}$$

Par ailleurs, par définition de $\widetilde{\mathbf{G}}$ dans le lemme 4.1.1,

$$H(\widetilde{\mathbf{G}}, N_1^\#, \dots, N_n^\#, N_a^\#) = \frac{C_0 H(\mathbf{G}, N_1^\#, \dots, N_n^\#, N_a^\#)}{(T^\#)^{\tilde{\sigma}}} \tag{4.2}$$

En utilisant (4.1) et (4.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\deg_\Phi(\widetilde{\mathcal{A}}) &\leq \frac{C_0 H(\mathbf{G}, N_1^\#, \ldots, N_n^\#, N_a^\#)}{(T^\#)^{\tilde{\sigma}} (N_a^\#)^{\dim V} \min_{\substack{\sum d_i = \dim \tilde{\mathcal{A}} \\ 0 \leq d_i \leq g_i}} \left\{ \prod_{i=1}^n \left(N_i^\#\right)^{d_i} \right\}} \\
&\leq \frac{C_0 \deg_\Phi \mathbf{G} (N_a^\#)^t \prod_{i=1}^n \left(N_i^\#\right)^{g_i}}{(T^\#)^{\tilde{\sigma}} (N_a^\#)^{\dim V} \min_{\substack{\sum d_i = \dim \tilde{\mathcal{A}} \\ 0 \leq d_i \leq g_i}} \left\{ \prod_{i=1}^n \left(N_i^\#\right)^{d_i} \right\}} \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\dim(W \cap T_0 \widetilde{\mathbf{G}}) &= \dim \left(p(W \cap T_0 \widetilde{\mathbf{G}}) \right) \\
&\leq \dim \left(p(T_0 \widetilde{\mathbf{G}}) \right) = \dim \widetilde{\mathcal{A}},
\end{aligned}$$

on a finalement,

$$\begin{aligned}
\deg \widetilde{\mathcal{A}} &\leq \frac{C_0 \deg_\Phi \mathbf{G} (N_a^\#)^t (N_1^\#)^{g_1} \ldots (N_n^\#)^{g_n}}{(T^\#)^{\tilde{\sigma}} . \min_{\substack{\sum d_i = \dim(W \cap T_0 \tilde{\mathbf{G}}) \\ 0 \leq d_i \leq g_i}} \prod_{i=1}^n N_i^{\# d_i}} \\
&\leq \frac{C_0 \deg_\Phi \mathbf{G} (N_a^\#)^t \max_{\substack{\sum d_i = \dim(W \cap T_0 \tilde{\mathbf{G}}) \\ 0 \leq d_i \leq g_i}} \prod_{i=1}^n (N_i^\#)^{g_i - d_i}}{(T^\#)^{\tilde{\sigma}}}
\end{aligned}$$

En remplaçant par les valeurs des paramètres, après simplification

$$\begin{aligned}
\deg \widetilde{\mathcal{A}} \leq\ & (C_0)^{5g+1} \deg_\Phi \mathbf{G} \\
& \max_{\substack{\sum d_i = \dim(W \cap T_0 \tilde{\mathbf{G}}) \\ 0 \leq d_i \leq g_i}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{D h^+(\mathcal{A}_i) + \mathfrak{a}^2 \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2}{\mathfrak{a}} \right)^{d_i}
\end{aligned}$$

Montrons à présent la deuxième partie du lemme. Supposons que $T_0\widetilde{\mathcal{A}} + \mathcal{W} = T_0\mathcal{A}$. Par définition de $\mathcal{W}$, cela impliquerait que $T_0\widetilde{\mathcal{A}}$ contient une famille libre de t vecteurs $(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_t})$ engendrant un supplémentaire V' de $\mathcal{W}$ dans $T_0\mathcal{A}$. V' est également un supplémentaire de W dans $T_0\mathbf{G}$: en effet,

– $\dim V' + \dim W = \dim T_0\mathbf{G}$

– soit $\mathbf{v} \in W \cap V'$: $\mathbf{v} \in W$, donc pour tout $1 \leq k \leq t$, $L_k(\mathbf{v}) = 0$. Comme

$\mathbf{v} \in V'$, $\mathbf{v} \in T_0\mathcal{A}$ et en fait $L_k(\mathbf{v}) = \mathcal{L}_k(\mathbf{v})$, donc pour tout k, $\mathcal{L}_k(\mathbf{v}) = 0$, et $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$. Comme $V' \cap \mathcal{W} = \{0\}$, on en déduit $\dim W \cap V' = 0$.

Finalement, on aurait donc $T_0\mathbf{G} = V' \oplus W \subset T_0\widetilde{A} + W \subset T_0\widetilde{\mathbf{G}} + W$, ce qui contredirait $T_0\widetilde{\mathbf{G}} + W \neq T_0\mathbf{G}$. □

Remarque 1 : le majorant obtenu pour $\deg \widetilde{\mathcal{A}}$ ne dépend pas des $\beta_{i,j}$. En effet, au cours de la démonstration dans le majorant de la ligne (4.3), on voit que le terme en $\log B$ apparaît :

- au numérateur, une fois pour chaque $N_i^{\#}$ $(1 \leq i \leq n)$, donc au plus à la puissance g
- au dénominateur, une fois pour chaque $N_i^{\#}$ et une fois pour $T^{\#}$, donc au moins à la puissance $\sigma + \dim \widetilde{\mathcal{A}} = g + \dim \widetilde{\mathcal{A}} - \dim(W \cap T_0\widetilde{\mathbf{G}})$

Comme $\dim \widetilde{\mathcal{A}} - \dim(W \cap T_0\widetilde{\mathbf{G}}) \geq 0$, $\log B$ apparaît à une puissance négative (ou nulle), et on peut majorer ce terme par 1, ce qui nous donne bien un majorant sans $\log B$.

Remarque 2 : Les lemmes 4.1.1 et 4.1.2 ne décrivent pas la position de $T_0\widetilde{\mathcal{A}}$ par rapport à $\mathcal{W}$. Néanmoins, si $\log B$ est suffisamment grand par rapport aux autres données du problèmes, on déduit de la remarque précédente que nécessairement, $\dim \widetilde{\mathcal{A}} = \dim(W \cap T_0\widetilde{\mathbf{G}})$, sans quoi le terme en $1/\log B$ l'emporterait sur les autres, et on aurait alors un majorant de $\deg_\Phi \widetilde{\mathcal{A}}$ strictement plus petit que 1. Cette remarque permettrait peut-être de mettre en place une descente, puisqu'elle apporte dans ce cas un certain contrôle sur la position de W par rapport à $T_0\widetilde{\mathcal{A}}$.

Remarque 3 : Une autre démarche de descente consisterait à poser $\tilde{g} = \dim \widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \cap T_0\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\tilde{t} = \operatorname{codim}_{T_0\widetilde{A}} \widetilde{\mathcal{W}}$.

- Si $\tilde{t} = 0$, c'est que $T_0\widetilde{\mathcal{A}}$ est contenu dans $\mathcal{W}$, et la deuxième conclusion du théorème 1 deviendrait alors « $\dot{\omega}$ est dans $\mathcal{W}$ ».
- Sinon, on retrouve alors le cadre de la preuve du théorème 1, où on remplacerait le rapport $\frac{g}{t}$ apparaissant dans les exposants, par $\frac{\tilde{g}}{\tilde{t}}$. Il faudrait également tenir compte du fait que la polarisation de $\widetilde{\mathcal{A}}$ n'est plus nécessairement principale, et minorer en fonction de $h(\mathcal{W})$ le quotient $\frac{d(\boldsymbol{\omega},\mathcal{W})}{d(\boldsymbol{\omega},\widetilde{\mathcal{W}})}$.

4.2. Estimation sur w

Si $\boldsymbol{\omega} \in T_0\widetilde{\mathbf{G}}$, alors $\dot{\omega} \in T_0\widetilde{\mathcal{A}}$, et on déduit de l'estimation du degré de $\widetilde{\mathcal{A}}$ donnée par le lemme 4.1.2 la deuxième conclusion du théorème.

On suppose donc désormais que

$$\boldsymbol{\omega} \notin T_0\widetilde{\mathbf{G}}$$

(cela correspond à l'hypothèse « si $\boldsymbol{\omega} \in T_0\mathbf{G}'$, alors $W + T_0\mathbf{G}' = T_0\mathbf{G}$ » qui apparaît dans les hypothèses du théorème principal chez [PW2]).

Alors, d'après le théorème principal de [BP] (voir également [Gau4] proposition I.9.2),

$$d(\boldsymbol{\omega}, T_0\widetilde{\mathbf{G}}) \geq \frac{1}{\deg(\widetilde{\mathbf{G}})} = \frac{1}{\deg(\widetilde{\mathcal{A}})}.$$

Si $d(\boldsymbol{\omega}, T_0\widetilde{\mathbf{G}}) \leq 2t\Lambda$, alors $\Lambda \geq \frac{1}{2g\deg(\widetilde{\mathcal{A}})}$, et toujours via la majoration obtenue au lemme 4.1.2, on obtient cette fois la première conclusion du théorème. On peut donc maintenant supposer que

$$d(\boldsymbol{\omega}, T_0\widetilde{\mathbf{G}}) > 2t\Lambda$$

Ceci entraîne que le point $\mathbf{w}$, défini au paragraphe 2.4, n'est pas un élément de $T_0\widetilde{\mathbf{G}} \cap W$: sans quoi, on aurait $d(\boldsymbol{\omega}, T_0\widetilde{\mathbf{G}}) \leq \|\boldsymbol{\omega} - \mathbf{w}\|_{\mathbf{E}} = \left(\sum_{k=1}^{t} (\Lambda_k)^2\right)^{1/2} \leq t\Lambda$.

En conclusion, on peut désormais supposer que $\mathbf{w}$ n'appartient pas à $T_0\widetilde{\mathbf{G}}$.

4.3. Construction de la fonction auxiliaire

Dans cette partie, on construit une fonction sur $T_0\mathbf{G}$, petite au point $\boldsymbol{\omega}$, ainsi que ses dérivées le long de W jusqu'à un certain ordre. La fonction sera cherchée de la forme $F = P \circ \Phi$, où P est un polynôme.

Notre problème revient ainsi à étudier un système linéaire en les coefficients de P.

On introduit ici une base $\mathbf{F}' = (\mathbf{f}'_j)_{1 \leq j \leq g}$ de W, construite de la manière suivante :

- on utilise une base intermédiaire $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}'_j)_{1 \leq j \leq g}$ telle que la matrice de passage de $(\mathbf{e}'_j)_{1 \leq j \leq g}$ à $(\mathbf{f}_j)_{1 \leq j \leq g}$ soit unitaire et que les derniers vecteurs de $\mathbf{E}'$ forment une base de $T_0\widetilde{\mathbf{G}} \cap W$ (pour j allant de $\tilde{d}+1$ à g).
- comme $\mathbf{w}$ n'appartient pas à $T_0\widetilde{\mathbf{G}}$, il a une composante non nulle sur un des premiers $\mathbf{e}'_j$. Quitte à les réindexer, on va supposer que c'est sur $\mathbf{e}'_1$ et que cette composante est maximale.
- On définit alors $\mathbf{f}'_1 = \mathbf{w}$ et $\mathbf{f}'_j = \mathbf{e}'_j$ pour $2 \leq j \leq g$.

Avec ces notations, on a :

Lemme 4.3.1. *Les coordonnées* $(w_1, w_2, \ldots, w_g)$ *de* $\mathbf{w}$ *dans la base* $\mathbf{E}'$ *vérifient :*

$$|w_1| \geq \frac{d(\boldsymbol{\omega}, T_0\widetilde{\mathbf{G}})}{2g} \quad et \quad 1 + |w_2| + \ldots + |w_g| \leq 1 + (g-1)(\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{E}} + t\Lambda)$$

Démonstration (cf. Proposition 6.13 et Remarque 6.17 de [Gau3]) : on introduit, le temps de ce lemme, la norme $\|.\|_{\mathbf{F}}$ associée au produit scalaire pour lequel la base $\mathbf{F}$ (ainsi que la base $\mathbf{E}'$) est orthonormée. En écrivant un vecteur $\mathbf{x}$ quelconque dans les bases $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$, on voit facilement que (les $\beta_{i,j}$ sont de modules plus petits que 1) :

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{F}} \leq \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{E}} \leq \sqrt{g}\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{F}}.$$

On écrit alors $\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{\tilde{d}} w_i\mathbf{e}'_i + \sum_{i=\tilde{d}+1}^{g} w_i\mathbf{e}'_i$, et on pose $\mathbf{x} = \sum_{i=\tilde{d}+1}^{g} w_i\mathbf{e}'_i \in T_0\widetilde{\mathbf{G}}$.

$$\begin{aligned}
|w_1|\sqrt{g} &\geq \left(\sum_{i=1}^{\tilde{d}} |w_i|^2\right)^{1/2} \geq \|\mathbf{w}-\mathbf{x}\|_{\mathbf{F}} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{g}}\|\mathbf{w} - \mathbf{x}\|_{\mathbf{E}} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{g}}(\|\boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}\|_{\mathbf{E}} - \|\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{E}}) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{g}}(d(\boldsymbol{\omega}, T_0\widetilde{\mathbf{G}}) - t\Lambda) \geq \frac{1}{\sqrt{g}}\left(d(\boldsymbol{\omega}, T_0\widetilde{\mathbf{G}}) - \frac{1}{2}d(\boldsymbol{\omega}, T_0\widetilde{\mathbf{G}})\right),
\end{aligned}$$

ce qui établit la première inégalité.

$$\begin{aligned}
1 + |w_2| + \ldots + |w_g| &\leq 1 + (g-1)\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{F}} \leq 1 + (g-1)\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{E}} \\
&\leq 1 + (g-1)(\|\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{E}} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{E}}) \\
&\leq 1 + (g-1)(t\Lambda + \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{E}})
\end{aligned}$$

□

Étude du système

On souhaite dériver le long des vecteurs $(\mathbf{f}'_j)$ comme suit :
– un ordre global (i.e. toutes directions confondues sauf celle de $\mathbf{w}$) au plus T .
– un ordre moindre (et au plus égal à T_0) dans la direction $\mathbf{f}'_1 = \mathbf{w}$.
On pose

$$\mathcal{T} = \{\tau = (\tau_j)_{j=1\dots g},\ \tau_j \leq T\} \text{ et } \mathcal{T}_0 = \{\tau \in \mathcal{T},\ \tau_1 \leq T_0\} \tag{4.4}$$

Notre système est ainsi composé des inéquations :

$$\{|D^{\tau}_{\mathbf{f}'} F(\mathbf{u})| \leq M, \quad \tau \in \mathcal{T}_0\}$$

<u>Nombre d'inconnues :</u> on cherche P homogène de degré N_a sur $\overline{X_a} = (X_{a,0}, \dots, X_{a,t})$, et homogène de degré N_i sur chaque $\overline{X_i} = (X_{i,1}, X_{i,2}, \dots, X_{i,\nu_i})$.

La dimension de l'espace des polynômes de cette forme est la valeur prise par le polynôme de Hilbert Samuel de $\mathbf{G}$ en $(N_1, \dots, N_n, N_a)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(I) &= \dim(\mathbb{C}[\mathbb{P}]/I(\mathbf{G}))_{(N_1,\dots,N_n,N_a)} = \dim(\mathbb{C}[\mathbb{P}_{\nu_a}]/I(\mathbf{G}^t_a))_{N_a} \prod_{i=1}^{n} \dim(\mathbb{C}[\mathbb{P}_{\nu_i}]/I(\mathcal{A}_i))_{N_i} \\
&\geq c_8 N'^t_a \prod_{i=1}^{n} N'^{g_i}_i \quad (\text{si } N_i \neq 0, \text{ c'est évident} \\
&\qquad \text{et sinon, il y a au moins } 1 = N'_i \text{ polynôme}) \\
&\geq c_9 H(\mathbf{G}, N'_1, \dots, .N'_n, N'_a)
\end{aligned}$$

<u>Rang du système :</u> l'intérêt d'avoir introduit la base $\mathbf{F}'$ est de pouvoir appliquer le lemme 2.5.2 avec comme sous-groupe $\widetilde{\mathbf{G}}$, en prenant $T_1 = T_0$, et $T_j = T$ pour $2 \leq j \leq g$. Puisque $\mathbf{f}'_1 = \mathbf{w} \notin T_0\widetilde{\mathbf{G}}$, un facteur T_0 y apparaît

$$\begin{aligned}
\rho &\leq (2^{g+t}+1) T_0 T^{\sigma-1} H(\widetilde{\mathbf{G}}, N'_1, \dots, N'_n, N'_a) \\
&\leq 2^{2g+1} H(\mathbf{G}, N'_1, \dots, N'_n, N'_a) \frac{(T^{\#})^{\sigma} H(\widetilde{\mathbf{G}}, N'_1, \dots, N'_n, N'_a)}{C_0^2 H(\mathbf{G}, N'_1, \dots, N'_n, N'_a)}
\end{aligned}$$

Par « décroissance » de $\frac{H(\widetilde{\mathbf{G}},\,)}{H(\mathbf{G},\,)}$, en remarquant (suivant l'idée de [PW2]) que $N'_i \geq N_i^{\#}/2$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et que $N'_a \geq N_a^{\#}/2$, on en déduit

$$\begin{aligned}\rho &\leq 2^{2g+1} C_0^{-1} H(\mathbf{G}, N'_1, \ldots, N'_n, N'_a) \frac{(T^{\#})^{\sigma} H(\widetilde{\mathbf{G}}, N_1^{\#}/2, \ldots, N_n^{\#}/2, N_a^{\#}/2)}{C_0 H(\mathbf{G}, N_1^{\#}/2, \ldots, N_n^{\#}/2, N_a^{\#}/2)} \\ &\leq 2^{3\dim \mathbf{G}+1-\dim \widetilde{\mathbf{G}}} C_0^{-1} H(\mathbf{G}, N'_1, \ldots, N'_n, N'_a) \frac{(T^{\#})^{\sigma} H(\widetilde{\mathbf{G}}, N_1^{\#}, \ldots, N_n^{\#}, N_a^{\#})}{C_0 H(\mathbf{G}, N_1^{\#}, \ldots, N_n^{\#}, N_a^{\#})}.\end{aligned}$$

Enfin, d'après la définition de $\widetilde{\mathbf{G}}$ dans le lemme 4.1.1, on peut finalement simplifier en :

$$\begin{aligned}\rho &\leq 2^{3\dim \mathbf{G}+1-\dim \widetilde{\mathbf{G}}} C_0^{-1} H(\mathbf{G}, N'_1, \ldots, N'_n, N'_a) \\ &\leq c_{10} C_0^{-1} H(\mathbf{G}, N'_1, \ldots, N'_n, N'_a).\end{aligned}$$

Lemme 4.3.2. *Les nombres $N_1, \ldots, N_n$ et N_a sont tous non nuls.*

Démonstration : Supposons qu'il existe i_0 entre 1 et n tel que $N_{i_0} = 0$ (on traite le cas $N_a = 0$ de façon similaire) . On considère le système suivant :

$$\{D_{\mathbf{f}'}^{\tau} P \circ \Phi(\boldsymbol{\omega}) = 0, \quad \tau \in \mathcal{T}_0\}$$

où l'inconnue est le polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{C}$, de degré N_a sur $\overline{X_0}$ et homogène de degré N_i sur $\overline{X_i}$ $(1 \leq i \leq n)$. On vient de voir au dessus que le nombre d'inconnues est minoré par le rang du système. Il y a donc une solution non triviale.

D'autre part, le fait que $N_{i_0} = 0$ entraîne que $P \circ \Phi$ est indépendant des variables de $T_0\mathcal{A}_{i_0}$: ses dérivées à tout ordre le long de $T_0\mathcal{A}_{i_0}$ sont également nulles.

Donc si[1] $\mathbf{x} \in T_0\mathcal{A}_{i_0} \setminus W$ (*resp.* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^t \setminus W$), $P \circ \Phi$ a un zéro d'ordre T_0 en $\boldsymbol{\omega}$ le long de $\widetilde{W} = W \oplus \mathbb{C}\mathbf{x}$. On applique le lemme de zéros de Philippon [Phi] : il existe un sous-groupe connexe algébrique et propre $\mathbf{G}' \subset \mathbf{G}$ tel que :

$$T_0^{\widetilde{\sigma}} H(\mathbf{G}', N'_1, \ldots, N'_n, N'_a) \leq c_{11} H(\mathbf{G}, N'_1, \ldots, N'_n, N'_a) \tag{4.5}$$

[1] On peut, sans restreindre la généralité, supposer qu'un tel vecteur $\mathbf{x}$ existe. En effet, si ce n'est pas le cas, $T_0\mathcal{A}_{i_0} \subset \mathcal{W} \subset W$, on fait la démonstration, mais sans tenir compte de $\mathcal{A}_{i_0}$, et en gardant le même nombre de formes linéaires. On établit les minorations et majorations du Théorème 1 avec « $g - g_{i_0}$ » dans les exposants au lieu de « g ». On en déduit alors le théorème avec $T_0\mathcal{A}_{i_0}$ puisque les minorants et majorants annoncés sont moins bons que ceux qu'on vient d'obtenir.

où $\sigma' = codim_{\widetilde{W}}(\widetilde{W} \cap T_0\mathbf{G}')$

- Si $\sigma' = codim_{T_0\mathbf{G}}(T_0\mathbf{G}')$, alors l'inégalité 4.5 est en contradiction avec la définition de T_0 : en effet, on tire de cette inégalité

$$T_0^{\sigma'} \leq c_{11} \max\{N_i'; N_a'\}^{\sigma'}$$

ce qui revient à écrire $C_0 \leq c_{11}$, en contradiction avec la définition de C_0.
- Sinon, on est dans le cas où $\widetilde{W} + T_0\mathbf{G}' \neq T_0\mathbf{G}$. On a donc également $W + T_0\mathbf{G}' \neq T_0\mathbf{G}$, le groupe $\mathbf{G}'$ entre donc dans le cadre du lemme 4.1.1. L'inégalité 4.5 est en contradiction avec la conclusion de ce lemme, puisque $\sigma' = \sigma$ ou $\sigma + 1$ et $T_0 \simeq T/C_0^2$

□

Choix du polynôme

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{T}_0$ (ainsi que l'ensemble $\mathcal{T}$) est défini à la formule 4.4.

Lemme 4.3.3. *Il existe un élément P non nul de $K[\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}, \overline{X_a}]_{(N_1,\ldots,N_n,N_a)}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

i) pour $\tau \in \mathcal{T}_0$, $|D^{\tau}_{\mathbf{f}'} F(\boldsymbol{\omega})| \leq e^{-C_0 U_0}$, où $F = \Phi \circ P$

ii) les coefficients de P sont de hauteurs majorées par $C_0^{1/2} U_0/D$

Démonstration :

On écrit $P(X) = \sum p_\lambda X^\lambda$, avec $p_\lambda \in K$. Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_D) \in K$ une base de K comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

K est engendré sur $\mathbb{Q}$ par les $\beta_{i,j}$ et les $\frac{\theta_j^{(i)}}{\theta_0^{(i)}}(0)$. Si on note $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_M$ ces nombres, on peut prendre pour $\xi_1, \ldots, \xi_D$ des nombres de la forme :

$$\varsigma_1^{a_1} \cdots \varsigma_M^{a_M}$$

où $0 \leq a_i \leq [\mathbb{Q}(\varsigma_i) : \mathbb{Q}]$ et $\sum a_i \leq D$.
Avec ce choix, on a (rappelons que M_K désigne l'ensebmle des places de K)

$$\begin{aligned}
h(\xi_1 : \ldots : \xi_D) &= \sum_{\nu \in M_K} \frac{D_\nu}{D} \log \max\{|\xi_i|_\nu\} \\
&\leq \sum_{\nu \in M_K} \frac{D_\nu}{D} D. \log \max\{|\varsigma_j|_\nu\} \\
&\leq D \sum_{\nu \in M_K} \frac{D_\nu}{D} \left(\sum_{i=1}^{t} \log \max_j \{|\beta_{i,j}|_\nu\} + \sum_{i=1}^{n} \log \max_j \left\{ \left| \frac{\theta_j^{(i)}(0)}{\theta_0^{(i)}(0)} \right|_\nu \right\} \right) \\
&\leq D \left(t \log B + \sum_{i=1}^{n} h(\mathcal{A}_i) \right)
\end{aligned}$$

On va chercher le polynôme voulu sous la forme $P(X) = \sum n_{\lambda,i} \xi_i X^\lambda$, où les $n_{\lambda,i} \in \mathbb{Z}$.

Posons $a_{\lambda,\tau} = \frac{1}{\tau!} D^\tau(\Phi^\lambda)(\boldsymbol{\omega})$: ainsi, les nombres que l'on veut minimiser sont les

$$\sum_\lambda \sum_{i=1}^{D} (\xi_i a_{\lambda,\tau}).n_{\lambda,i}$$

D'après le lemme 3.1.1, on sait que

$$|a_{\lambda,\tau}| \leq \exp\left(N_a \log B + T \log g + \sum_{i=1}^{n} N_i c_2 (1 + \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)^2 \right) \leq e^{c_{12} C_0^{1/2} U_0}$$

On fait maintenant appel au lemme 3.3.1 (Siegel), avec comme inconnues les $n_{\lambda,i}$, comme coefficients de la matrice du système les $\xi_i a_{\lambda,\tau}$, et comme données numériques :

$$\begin{aligned}
\rho &\leq c_{10} C_0^{-1} H(\mathbf{G}, N_1, \ldots, N_n, N_a) \\
C &= D\#I \geq c_9 D H(\mathbf{G}, N_1, \ldots, N_n, N_a) \\
L &= \#\mathcal{T}_0 = T^{g-1}.T_0 \leq C_0^{g/2-2} U_0^g \leq e^{c_{13} C_0^{1/2} U_0} \\
m &= C. \max |\xi_i|.e^{c_{12} C_0^{1/2} U_0} \leq e^{c_{14} C_0^{1/2} U_0} \\
\Delta &= e^{C_0^{1/4} U_0 / D} \\
M &= e^{-C_0 U_0}
\end{aligned}$$

Comme
$$\frac{Lm\Delta}{M} \leq e^{c_{13}C_0^{1/2}U_0+c_{14}C_0^{1/2}U_0+C_0^{1/4}U_0/D+C_0U_0} \leq e^{c_{15}C_0U_0}$$
et
$$\begin{aligned}\Delta^{C/2\rho} &\geq \left(e^{C_0^{1/4}U_0/D}\right)^{\frac{c_9DH(\mathbf{G},N_1,\dots,N_n,N_a)}{c_{10}C_0^{-1}H(\mathbf{G},N_1,\dots,N_n,N_a)}} \\ &\geq e^{c_{16}C_0^{5/4}U_0} \\ &\geq 2\sqrt{2}\frac{Lm\Delta}{M}+1,\end{aligned}$$
elles vérifient les conditions du lemme de Siegel, et on obtient l'existence de P. De plus,
$$p_\lambda = \sum_{i=1}^{D} n_{\lambda,i}\xi_i$$
de sorte que,
$$\begin{aligned} v \not| \infty \qquad & |p_\lambda|_v \leq \max|\xi_i|_v \\ v|\infty \qquad & |p_\lambda|_v \leq De^{C_0^{1/4}U_0/D}\max|\xi_i|_v \end{aligned}$$
et donc finalement
$$h(p_\lambda) \leq \log D + \frac{C_0^{1/4}U_0}{D} + h(\xi_1 : \ldots : \xi_D)$$
Le terme $C_0^{1/4}U_0$ étant plus gros que $D\log D$ et $Dh(\xi_1 : \ldots : \xi_D)$, on peut simplifier, et on obtient le résultat donné dans l'énoncé du lemme □

Remarque 1 : si on compare notre résultat à celui de [Gau3] (Théorème 3.1), on voit chez lui des termes
$$\max(U, D(\log D + h(\xi_1 : \ldots : \xi_D))).$$
Cela s'explique par le fait que le paramètre U qu'il utilise peut, dans certains cas, être plus petit que $D\log D$, ce qui n'est pas le cas dans notre travail.

Remarque 2 : l'utilisation d'un lemme de Siegel absolu comme chez [DHK2] permettrait sans doute de laisser libre le choix du corps de base K dans nos énoncés.

4.4. Extrapolation

On suppose donc dans cette partie que

$$\log \Lambda \leq -C_0 U_0 \tag{4.6}$$

Cette hypothèse permet de passer d'une majoration de F en $\boldsymbol{\omega}$ à une majoration de F en $\mathbf{w}$, et réciproquement : comme les deux points sont proches, F s'y comporte de manière similaire. On montre ainsi que les majorations du lemme 4.3.3 sont en réalité valables à un ordre de dérivation plus grand que ce que l'on a construit, en remplaçant l'ensemble $\mathcal{T}_0$ de l'énoncé par l'ensemble $\mathcal{T}$, défini en (4.4).

Ce passage de $\boldsymbol{\omega}$ à $\mathbf{w}$ est important : pour utiliser le lemme de Schwarz 3.4.1, il est nécessaire que le point où on extrapole soit aussi une direction de dérivation. Comme on ne sait pas si $\boldsymbol{\omega}$ est un élément de W, cela ne nous apporterait rien, dans cette démonstration, d'utiliser le lemme directement.

Lemme 4.4.1. *Pour $\overline{\tau} \in \mathcal{T}$, $s \leq S$, on a*

$$\left| \frac{1}{\overline{\tau}!} D_{\mathbf{f}'}^{\overline{\tau}} F(s\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{\overline{\tau}!} D_{\mathbf{f}'}^{\overline{\tau}} F(s\mathbf{w}) \right| \leq \exp(-C_0 U_0)$$

Démonstration : Soit $\overline{\tau} \in \mathcal{T}$, et $s \leq S$. Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\overline{\tau}!} D_{\mathbf{f}'}^{\overline{\tau}} F(s\boldsymbol{\omega} + x(s\mathbf{w} - s\boldsymbol{\omega})) \end{array}$$

On utilise le lemme 3.1.1 pour majorer $|f'(x)|$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{g+t} x(\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega})_i \frac{1}{\overline{\tau}!} D_{\mathbf{e}_i} \circ D_{\mathbf{f}'}^{\overline{\tau}} F(s\boldsymbol{\omega} + x(s\mathbf{w} - s\boldsymbol{\omega}))$$

Rappelons que

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{t} L_i(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{e}_{g+i}$$

Donc, pour $i \leq g$, $(\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega})_i = 0$, et pour $i \geq g+1$, $(\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega})_i = L_{i-g}(\boldsymbol{\omega})$, donc, d'après notre hypothèse (4.6),

$$|(\mathbf{w} - \boldsymbol{\omega})_i| \leq \Lambda \leq \exp(-C_0 U_0)$$

Pour estimer la valeur de $\frac{1}{\overline{\tau}!}D_{\mathbf{e}_i}\circ D_{\mathbf{f}'}^{\overline{\tau}}F(s\boldsymbol{\omega}+z(s\mathbf{w}-s\boldsymbol{\omega}))$, on utilise le lemme 3.1.1, avec $(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{g+1})=(\mathbf{f}'_1,\ldots,\mathbf{f}'_g,\mathbf{e}_i)$, $\overline{t}=(t_1,\ldots,t_{g+1})=(\tau_1,\ldots,\tau_g,1)$ et $\mathbf{u}=s\boldsymbol{\omega}+z(s\mathbf{w}-s\boldsymbol{\omega})$. Notons que $\overline{t}!=\overline{\tau}!$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{1}{\overline{t}!}D_{\mathbf{e}_i}\circ D_{\mathbf{f}'}^{\overline{\tau}}F(s\boldsymbol{\omega}+x(s\mathbf{w}-s\boldsymbol{\omega}))\right| &\leq N_a\log\xi_a+(T+1)\log\xi\\ &\quad+(T+1)\log(g+1)\\ &\quad+\log H+t.N_a\log\max_{i\in\{g+1,\ldots,g+t\}}(1+|u_i|)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}2c_2N_i\left(g_i+(1+|\overrightarrow{u_i}|)^2\right)\end{aligned}$$

Dans le cas présent, $\xi_a=\max(1,|\beta_{i,j}|,|L_i(\boldsymbol{\omega})|)$ et $\xi=\max(1,|\overrightarrow{w_i}|)$.

On a donc la majoration, pour $z\in[0;1]$,

$$\begin{aligned}\log|f'(x)| &\leq \log(tS)+\log\Lambda+N_a\log\xi_a+(T+1)\log\xi\\ &\quad+(T+1)\log(g+1)+\log H \qquad (4.7)\\ &\quad+t.N_a\log\max_{i\in\{g+1,\ldots,g+t\}}(1+|u_i|)+\sum_{i=1}^{n}2c_2N_i\left(g_i+(1+|\overrightarrow{u_i}|)^2\right)\end{aligned}$$

Enfin, on utilise le théorème des accroissements finis entre 0 et 1 pour la fonction f :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D_{\mathbf{f}'}^{\overline{\tau}}F(s\boldsymbol{\omega})-\frac{1}{\overline{\tau}!}D_{\mathbf{f}'}^{\overline{\tau}}F(s\mathbf{w})\right| &= |f(0)-f(1)|\\ &\leq \max_{z\in[0;1]}|f'(x)|\end{aligned}$$

qui nous donne le lemme, compte tenu de (4.7). □

Remarque : dans la définition de $\mathbf{u}$, on voit apparaître le terme $s\in\{0,\ldots,S\}$. C'est à cause de ce s qu'on a besoin de mettre un S^2 au dénominateur, dans la définition des N_i.

Nous sommes maintenant dans les conditions d'application de la méthode de Baker, qui ici prend la forme d'extrapolation dans une direction proche de la période $\boldsymbol{\omega}$, permettant de passer de l'ordre T_0 à l'ordre T.

Lemme 4.4.2. *Pour $\overline{\tau}\in\mathcal{T}$, $s\leq S/2$, on a*

$$\left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\boldsymbol{\omega})\right| \leq \exp(-c_{21}C_0^{3/4}U_0)$$

Démonstration : Soit $\overline{\tau} \in T$, on définit $\overline{\tau}' = (0, \overline{\tau}_2, \ldots, \overline{\tau}_g)$. En d'autres termes, on "oublie" de dériver dans la direction $\mathbf{f}'_1 = \mathbf{w}$. On étudie alors la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{\overline{\tau}'!}D^{\overline{\tau}'}_{\mathbf{f}'}F(z\mathbf{w})$$

Grâce au lemme 4.4.1, on sait que pour $m \leq T_0$, $s \in 0, \ldots, S$

$$\begin{aligned} |\frac{1}{m!}f^{(m)}(s)| &\leq \left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\mathbf{w})\right| + \left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\boldsymbol{\omega})\right| \\ &\leq \exp(-c_{17}C_0U_0) \end{aligned}$$

D'après le lemme de Schwarz 3.4.1, avec $T_1 = T_0$, $r = S_1 = S$, $R = 4eS$. Ainsi,

$$|f|_{2S} \leq 2|f|_{4eS}\left(\frac{1}{e}\right)^{T_0S} + 5.(18)^{T_0S}\max_{\substack{h\in\{0,\ldots,S\}\\ m\leq T_0}}\left\{\frac{1}{m!}|f^{(m)}(h)|\right\}$$

Par le lemme 3.1.1, on sait que

$$\begin{aligned} |f|_{4eS} &\leq \exp(N_a.(\log B) + T\log(N^2) + \log H + t.N_a(\log B)\log(4eS) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} 2c_2N_i\left(g_i + (1+4eS)^2\right)) \\ &\leq \exp(C_0^{1/2}U_0) \end{aligned}$$

Comme on a choisi T_0 et S tels que $T_0S \simeq C_0^{3/4}U_0$, on en déduit d'une part que $2|f|_{4eS}\left(\frac{1}{e}\right)^{T_0S} \leq \exp(-c_{18}C_0^{3/4}U_0)$, et d'autre part que
$5.(18)^{T_0S}\max_{m\leq T_0, 0\leq h\leq S}\left\{\frac{1}{m!}|f^{(m)}(h)|\right\} \leq \exp(-c_{19}C_0^{3/4}U_0)$
On conclut via les inégalités de Cauchy :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\mathbf{w})\right| &= \left|\frac{1}{\overline{\tau}_1!}\frac{\partial^{\tau_1}}{\partial z^{\tau_1}}f(s)\right| \leq |f|_{2S} \\ &\leq \exp(-c_{20}C_0^{3/4}U_0) \end{aligned} \tag{4.8}$$

En appliquant une nouvelle fois le lemme 4.4.1

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\boldsymbol{\omega})\right| &\leq \left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\mathbf{w})\right| + \left|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(s\mathbf{w})\right| \\
&\leq \exp(-C_0U_0) + \exp(-c_{20}C_0^{3/4}U_0) \\
&\leq \exp(-c_{21}C_0^{3/4}U_0).
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.4.3. *Pour* $\overline{\tau} \in \mathcal{T}$, *on a*

$$D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}}F(\boldsymbol{\omega}) = 0$$

Démonstration : D'après le lemme 4.4.2, pour $\overline{\tau} \in \mathcal{T}$,

$$|\frac{1}{\overline{\tau}!}D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}'}F(\boldsymbol{\omega})| \leq \exp(-c_{21}C_0^{3/4}U)$$

Le lemme 3.5.1 fournit une estimation similaire dans la base $\mathbf{f}$. En effet, la matrice de changement de base est :

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{w_1} & & & & & \\
\frac{-w_2}{w_1} & 1 & & & 0 & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
\frac{-w_g}{w_1} & & & 1 & & \\
 & & 0 & & \ddots & \\
 & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

On a donc

$$|D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}}F(\boldsymbol{\omega})| \leq \left(g + t - 1 + \frac{1 + |w_2| + \ldots + |w_g|}{|w_1|}\right)^T \exp(-c_{21}C_0^{3/4}U)$$

On utilise alors le lemme 4.3.1 pour évaluer la première parenthèse.

$$|D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}}F(\boldsymbol{\omega})| \leq c_{22}\exp(-c_{21}C_0^{3/4}U) \tag{4.9}$$

Supposons que les $|D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}}F(\boldsymbol{\omega})|$ ne soient pas tous nuls pour tout élément $\overline{\tau}$ de $\mathcal{T}$, et prenons un $\overline{\tau}$ minimal (pour $|\overline{\tau}|$) pour lequel $|D^{\overline{\tau}}_{\mathbf{f}}F(\boldsymbol{\omega})|$ est non nulle. Le lemme 3.2.1 nous donne alors l'estimation suivante :

$$|D_{\mathbf{f}}^{\overline{\tau}} F(\boldsymbol{\omega})| \geq \exp(-C_0^{1/2} U) \tag{4.10}$$

Pour C_0 assez grand, les estimations (4.9) et (4.10) se contredisent, on en déduit donc le lemme. □

4.5. Conclusion

On a construit une fonction non nulle ayant un zéro d'ordre au moins T le long de W en $\boldsymbol{\omega}$. Le lemme de zéros de [Phi, Den] entraîne alors l'existence d'un sous-groupe algébrique connexe $\mathbf{G}'$ de $\mathbf{G}$ tel que

$$T^{\sigma} H(\mathbf{G}', N_1, \ldots, N_n, N_a) \leq c_{23} H(\mathbf{G}, N_1, \ldots, N_n, N_a), \tag{4.11}$$

avec $\sigma = \operatorname{codim}_W(T_0\mathbf{G}' \cap W)$.

Deux cas peuvent se présenter :

– ou bien $T_0\mathbf{G}' + W \neq T_0\mathbf{G}$, le lemme 4.1.1 est en contradiction avec l'inégalité (4.11).

– ou bien $T_0\mathbf{G}' + W = T_0\mathbf{G}$, et donc nécessairement, $\sigma = \dim(\mathbf{G}/\mathbf{G}')$:

$$\begin{aligned} \dim(T_0\mathbf{G}) &= \dim(T_0\mathbf{G}' + W) \\ &= \dim(W) + \dim(T_0\mathbf{G}') - \dim(T_0\mathbf{G}' \cap W), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{G}/\mathbf{G}') &= \dim(T_0\mathbf{G}) - \dim(T_0\mathbf{G}') \\ &= \dim(W) - \dim(T_0\mathbf{G}' \cap W). \end{aligned}$$

On peut alors réécrire (4.11) sous la forme :

$$C_0 U^{\sigma} \leq c_{23} U^{\sigma}.$$

On en déduit $C_0 \leq c_{23}$. Comme on a choisi $C_0 = \max_{1 \leq i \leq 23}\{c_i\} + 1$, on aboutit ici aussi a une contradiction.

Annexe - Constantes

Catalogue des constantes

On a défini des constantes $c_1, c_2, \ldots$ ne dépendant que de g. C_0 est choisi supérieur à leur maximum.

c_1 et c_2 : lemme 2.2.1, encadrement des fonctions thêta.

c_3 : lemme 2.2.2, estimation des coefficients des matrices $\Omega_1(\tau)$ et $(\Omega_1(\tau))^{-1}$.

c_4 : lemme 2.2.3, dérivées des fonctions thêta.

c_5, c_6, c_7 : lemme 3.2.2, logarithmes formels de $\mathcal{A}$.

c_8, c_9, c_{10} : paragraphe 4.3, estimations du nombres d'inconnues et du rang du système.

c_{11} : lemme 4.3.1, non-nullité des N_i (application du lemme de zéro).

$c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}$: lemme 4.3.2, construction du polynôme.

$c_{17}, c_{18}, c_{19}, c_{20}, c_{21}$: lemme 4.4.2, extrapolation de T_0 à T.

c_{22} : lemme 4.4.3, nullité des $D_{\mathbf{f}}^{\bar{t}}(P \circ \Phi)(\boldsymbol{\omega})$.

c_{23} : conclusion (application du lemme de zéros).

Contraintes

On reprend les notations $T = U_0/U_T$, $N_a = U_0/U_{N_a}$, $N_i = U_0/U_{N_i}$. Voici les principales contraintes rencontrées au cours de la démonstration.

– Élimination des sous-groupes obstructeurs :

$$\frac{T^g}{C_0 \deg_\Phi \mathbf{G}.N_1^{g_1} \ldots N_n^{g_n} N_a^t} \leq 1$$

On se contente en fait d'imposer $\frac{T^g}{C_0.N_1^{g_1}...N_n^{g_n}N_a^t} = 1$, ce qui équivaut à

$$U_0 = \left(\frac{U_{N_a}^t \cdot \prod_{i=1}^n (U_{N_i})^{g_i}}{C_0(U_T)^g} \right)^{1/t}$$

Cette contrainte sert à justifier l'existence de $\widetilde{\mathbf{G}}$, et une fois les $U_?$ choisis, donne la valeur de U_0.

- Non nullité des N_i :
$$T_0 > \max\{N_i; N_a\}$$
- Construction de P :
$$T_0 \leq \frac{T}{C_0^2}$$
cette contrainte permettra d'avoir un rapport "rang du système/nombre d'inconnues" en notre faveur, grâce à l'apparition d'un terme T_0 dans le calcul du rang.
$$\max \left\{ N_a \log B;\ T;\ \sum_{i=1}^n N_i c_2 (1 + \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)^2 \right\} \leq C_0^{1/2} U_0$$
- Passage de $\boldsymbol{\omega}$ à $\mathbf{w}$:
$$\max \left\{ N_a \log B;\ T \log |\overrightarrow{w_i}|;\ N_i S^2 (1 + \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)^2 \right\} \leq C_0 U_0$$
- Extrapolation :
$$T_0.S \simeq C_0^{3/4} U_0$$
$$\max \{ Th(\mathcal{A}_i);\ N_i h(\mathcal{A}_i) \} \leq C_0^{1/2} U_0$$

Index

Rappel des paramètres

$$
\begin{aligned}
U_0 &= C_0^{2+5g/t}(D\log B + D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R) \\
&\quad \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{Dh^+(\mathcal{A}_i) + (D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)^2 \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2}{D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R}\right)^{g_i}\right)^{\frac{1}{t}}
\end{aligned}
$$

λ est un réel de l'intervalle $]0;1]$ qui sera précisé[2] plus tard (cf. lemme 4.1.1). On définit alors :

$$
\begin{aligned}
S^{\#} &= C_0^{9/4}(D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R) \quad et \quad S = [S^{\#}] \\
T^{\#} &= \frac{C_0^{1/2} U_0}{D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R} \quad et \quad T = [T^{\#}] \\
T_0^{\#} &= \frac{U_0}{C_0^{3/2}(D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)} \\
&= \frac{T^{\#}}{C_0^2} = \frac{C_0^{3/4} U_0}{S^{\#}} \quad et \quad T_0 = [T_0^{\#}] \\
N_a^{\#} &= \frac{\lambda U_0}{C_0^2(D\log B + D\max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i\in\{1,\dots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)} \quad et \quad N_a = [N_a^{\#}]
\end{aligned}
$$

[2] le choix de λ qui sera fait n'influe pas sur les valeurs de C_0 et U_0, et ne dépendra pas des valeurs des $N_i^{\#}$... Il n'y a donc pas de problème de définition.

et pour $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$N_i^{\#} = \frac{\lambda U_0}{C_0^{9/2} D h^+(\mathcal{A}_i) + (S^{\#})^2 \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R^2}$$
$$\frac{\lambda U_0}{C_0^{9/2} (D h^+(\mathcal{A}_i) + (D \max h^+(\mathcal{A}_i) + \log^+ \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \|\overrightarrow{\omega_i}\|_R)^2 ||\overrightarrow{\omega_i}||_R^2)} \quad et \quad N_i = [N_i^{\#}]$$

Bibliographie

[AG] M. Ably et É. Gaudron. Approximation diophantienne sur les courbes elliptiques à multiplication complexe. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 337(10) :629–634, 2003.

[Bos] J.B. Bost. Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz). *Astérisque*, (237) :Exp. No. 795, 4, 115–161, 1996.

[BP] D. Bertrand et P. Philippon. Sous-groupes algébriques des groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2) :263–280, 1988.

[BZ] D. Bertrand et W. Zudilin. On the transcendance degree of the differential field generated by siegel modular forms. *J. reine angew. Math.*, (554) :47–68, 2003.

[Cha] M. Chardin. Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique. *Bull. Soc. Math. France*, 117(3) :305–318, 1989.

[Coh1] P.B. Cohen. Propriétés transcendantes des fonctions automorphes. *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris*, pages 81–89, 1992-93.

[Coh2] P.B. Cohen. Humbert surfaces and transcendence properties of automorphic functions. *Rocky Mountain J. Math.*, 26(3) :987–1001, 1996.

[Col] P. Colmez. Sur la hauteur de Faltings des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Compositio Math.*, 111(3) :359–368, 1998.

[CW] P.L. Cijsouw et M. Waldschmidt. Linear forms and simultaneous approximations. *Compositio Math.*, 34(2) :173–197, 1977.

[Dav1] S. David. Fonctions thêta, formes modulaires et approximation diophantienne. *Université Paris VI*, 1989, Thèse.

[Dav2] S. David. Fonctions thêta et points de torsion des variétés abéliennes. *Compositio Math.*, 78(2) :121–160, 1991.

[Den] L. Denis. Lemmes de zéros et intersections. In *Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990)*, pages 99–104. de Gruyter, Berlin, 1992.

[DHK1] S. David et N. Hirata-Kohno. Linear forms in elliptic logarithms. *en préparation*, 2002.

[DHK2] S. David et N. Hirata-Kohno. Recent progress on linear forms in elliptic logarithms. In *A panorama of number theory or the view from Baker's garden (Zürich, 1999)*, pages 26–37. G. Wüstholz ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[Fel] N.I. Feld'man. Sur les périodes de fonctions elliptiques [en russe]. *Acta Arith.*, 24 :477–489, 1974.

[FP] A. Faisant et G. Philibert. Quelques résultats de transcendance liés à l'invariant modulaire j. *J. Number Theory*, 25(2) :184–200, 1987.

[Gau1] É. Gaudron. Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. *http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ gaudron/art2bis.pdf*, 2004.

[Gau2] É. Gaudron. Étude du cas rationnel de la théorie des formes linéaires de logarithmes. *math.NT/0410082*, 2004.

[Gau3] É. Gaudron. Mesures d'indépendance linéaires de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. *Inventiones Math.*, à par., 2005.

[Gau4] E. Gaudron. Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. *Université Jean Monnet de Saint-Étienne*, 2001, Thèse.

[Gra] P. Graftieaux. Groupes formels et critères d'isogénie. *Université Paris VI*, 1998, Thèse.

[Gri] P. Grinspan. Approximation et indépendance algébrique de quasi-périodes de variétés abéliennes. *Université Paris VI*, 2000, Thèse, http ://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/13/28/index.html.

[HK1] N. Hirata-Kohno. Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques. *Invent. Math.*, 104(2) :401–433, 1991.

[HK2] N. Hirata-Kohno. Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Compositio Math.*, 86(1) :69–96, 1993.

[Igu] J. Igusa. *Theta functions.* Springer-Verlag, New York, 1972.

[LR] C. Liebendörderfer et G. Rémond. Hauteurs de sous-espaces sur les corps non commutatifs. *Prep. Institut Fourier*, 662 :24 p., 2004.

[Mas] David Masser. *Elliptic functions and transcendence.* Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 437.

[Mor] Y. Morita. On the transcendency of special values of arithmetic automorphic functions. *J. Math. Soc. Japan*, 24 :268–274, 1972.

[Mum] David Mumford. *Tata lectures on theta. I*, volume 28 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1983. With the assistance of C. Musili, M. Nori, E. Previato and M. Stillman.

[MW] D. Masser et G. Wüstholz. Endomorphism estimates for abelian varieties. *Math. Zeitschrift*, 215 :641–653, 1994.

[Phi] P. Philippon. Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mountain J. Math.*, 26(3) :1069–1088, 1996.

[PW1] P. Philippon et M. Waldschmidt. Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. In *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87*, volume 75 of *Progr. Math.*, pages 313–347. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1988.

[PW2] P. Philippon et M. Waldschmidt. Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2) :281–314, 1988.

[Sch] T. Schneider. *Introduction aux nombres transcendants.* Traduit de l'allemand par P. Eymard. Gauthier-Villars, Paris, 1959.

[Shi] G. Shimura. *Abelian varieties with complex multiplication and modular functions*, volume 46 of *Princeton Mathematical Series.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

[SW] H. Shiga et J. Wolfart. Complex multiplication and automorphic functions. *J. reine angew. Math.*, 463 :1–25, 1995.

[Via] E. Viada. Slopes and abelian subvariety theorem. *J. Number Theory*, 112(1) :67–115, 2005.

[Wal] M. Waldschmidt. *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, volume 326 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

Résumé
L'objectif de cette thèse est d'obtenir une démonstration effective d'un résultat de Cohen, Shiga et Wolfart, généralisant aux espaces de Siegel $\mathfrak{H}_g$ de degré g quelconque le théorème classique de Schneider sur l'invariant modulaire $j(\tau)$. Un premier pas dans cette direction consiste, étant donnée une variété abélienne $\mathcal{A}$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et paramétrée par un point τ de l'espace de Siegel, à minorer $|||\tau - \beta|||$ où β est un point algébrique de l'espace de Siegel, en fonction des données géométriques du problème. C'est ce qui est réalisé ici, en affinant des outils d'indépendance linéaire de logarithmes de la méthode de Gel'fond-Baker.

Mots clefs : Formes linéaires de logarithmes, variétés abéliennes, méthode de Gel'fond-Baker, logarithme formel.

Abstract
The purpose of this thesis is to obtain an effective demonstration of a result of Cohen, Shiga and Wolfart, which is a generalisation, in the case of Siegel spaces $\mathfrak{H}_g$ of arbitrary degree g, of the classical theorem of Schneider on the modular invariant $j(\tau)$. A first step in this direction consists, given an abelian variety$\mathcal{A}$ defined over $\overline{\mathbb{Q}}$ and parametrised by a point τ of the Siegel space, in giving a minoration of $|||\tau - \beta|||$, where β is an algebraic point of the Siegel space, in terms of the geometrical data of the problem. To achieve this, we sharpen some tools of linear independence of logarithms of the Gel'fond-Baker's method.

Keywords : Linear forms of logarithms, abelian varieties, Gel'fond-Baker's method, formal logarithm.