

UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT - PARIS 7
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

Année 2004

N°

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

THÈSE DE DOCTORAT
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Régularité des anneaux dans les problèmes
d'excision en K-théorie algébrique

présentée par
Mr BIHLER Frank
pour obtenir le grade de docteur

soutenue le 9 juillet 2004 devant le jury composé de :

Mr KAROUBI Max
Mr KASSEL Christian
Mr KELLER Bernhard
Mr OLIVER Robert
Mr VOGEL Pierre
Mr RANICKI Andrew
Mr STAFFELDT Ross

directeur de thèse
rapporteur
rapporteur

*À mon grand-père Ferdinando Giacuzzo,
mineur à St-Pierremont (1918-2001).*

Remerciements

Je tiens à manifester ici mes plus vifs remerciements à l'égard de mon Directeur de thèse Mr Pierre VOGEL, qui, toujours plein de patience et de gentillesse, a su me faire partager son enthousiasme pour la rigueur et l'exactitude mathématiques à travers les domaines sauvages de la connaissance, qui n'a pas lésiné sur son temps pour me communiquer quelques unes de ses méthodes et idées profondes, et enfin qui a toujours été là pour m'apporter aide et réconfort dans les moments difficiles ; pour tout cela, et beaucoup d'autres choses encore, Merci Monsieur !

Merci aussi aux deux spécialistes qui ont accepté de lire mon travail, et d'être rapporteurs pour cette thèse : je veux parler de Andrew RANICKI (Écosse), et Ross STAFFELDT (USA); merci pour leur analyse experte. Merci aussi aux valeureux chercheurs, qui, en dépit du soleil du mois de juillet, ont accepté de me faire l'honneur de participer à mon jury : il s'agit ici de Mrs Max KAROUBI et Bernhard KELLER de Paris 7, de Mr Christian KASSEL de Strasbourg, et Mr Robert OLIVER de Paris 13 (Villetaneuse); j'espère me montrer digne de leur auguste assemblée lors de ma soutenance.

Je tiens aussi à citer les Chercheurs qui m'ont le plus aidé au cours de mon parcours initiatique : Mr Loday, d'abord, qui a eu la gentillesse de m'accueillir dans son laboratoire à Strasbourg lors de mon AMN ; Mr Karoubi, ensuite, pour m'avoir fait aimer la K -théorie algébrique, et permis d'assister à l'École d'été à Trieste sur le sujet ; enfin, Mrs Maltsiniotis et Keller, pour leur groupe de travail du mercredi soir, où j'ai appris les " catégories de modèles fermées ", et les " dérivateurs " .

Il me faut ensuite citer mes principaux professeurs de mathématiques, qui ont su cultiver mon amour de l'Art et m'inculquer les bases de cette belle Science : merci à Mme Marie, et Mrs Deschamps et Warusfel, tous professeurs en prépa au lycée Louis-le-Grand.

Passons maintenant à mes pairs, les thésards du couloir 7C : merci en vrac à Mr Cisinski, Mlle Panichi, à Samy, Alexei, Baptiste et au " groupe de travail de topologie algébrique " (Marco, Jens, Bertrand, Nadia) ainsi qu'à mes amis de l'École Normale (T-MoyTM, Simon) ou de prépa (Bérroul, Farouk, Éric) pour leur soutien moral.

Côté logistique, il me faut remercier Mr Tia, Mmes Courtin et Lepage, et surtout Mme Michèle Wasse, la bonne fée des services administratifs.

Un mot enfin pour citer ma famille, sans qui je ne serais pas ici : merci à Evelyne, Valel et Jean-Louis pour leur patience, ainsi qu'à mémé Dominique qui trouvera peut-être un jour le théorème de Fermat . . .

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	5
Introduction Historique	7
1 La K-théorie algébrique de Friedhelm WALDHAUSEN	9
1.1 Les axiomes	9
1.2 Théorèmes fondamentaux	12
1.3 Une application utile	13
1.4 Architecture de l'article [Wal78]	14
1.4.1 Motivation géométrique	14
1.4.2 Description des 3 cas étudiés	15
1.4.3 Suites exactes	16
1.4.4 Catégories de Mayer-Vietoris	17
1.4.5 Les 3 catégories Nil	18
1.4.6 L'obstruction à l'excision : $\tilde{K}Nil$	19
1.4.7 Le cas cohérent régulier	19
1.4.8 Classe \mathcal{G} de Waldhausen	20
2 Diverses catégories de complexes	22
2.1 Les complexes usuels \mathcal{C}_R	22
2.2 Les \mathcal{D}_0 -complexes : $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}, \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n$	23
2.3 Les \mathcal{D}_0 -complexes réduits \mathcal{B}^{red}	24
2.4 Différentes interprétations du $KNil(R, S)$	29
2.5 Les catégories \mathcal{H}_n	36
3 Divers foncteurs	39
3.1 <u>Le cas simple</u> : sur \mathcal{B}	39
3.1.1 Le foncteur inclusion i	39
3.1.2 Le foncteur translation t	39
3.1.3 Les foncteurs f_j et g_k	40
3.1.4 Le foncteur quotient q	40
3.1.5 Formulaire sur \mathcal{B}	40
3.2 <u>Le cas difficile</u> : sur \mathcal{A}	41
3.2.1 Le foncteur inclusion i	41
3.2.2 Le foncteur translation t	41

3.2.3	Les foncteurs f_j et g_k^n	41
3.2.4	Les foncteurs cycliques \mathcal{Q}_n	41
3.2.5	Formulaire sur \mathcal{H}	46
4	Localisation	48
4.1	Énoncé du théorème de localisation	48
4.2	Calculs d'objets locaux	53
4.2.1	Suite exacte courte	53
4.2.2	Morphisme homotope à zéro	53
4.2.3	Calcul de $K(\mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{B}_n)$	54
4.2.4	Calcul de $K(\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_n)$	56
4.3	Changement d'équivalences faibles	62
4.4	Une formule sur les $\tilde{K}\mathcal{N}il$	63
4.5	Un théorème d'excision	65
5	Anneaux réguliers	68
5.1	Rappels : anneau "cohérent régulier"	68
5.2	Définition générale	68
5.3	Stabilité de la notion de régularité	71
5.4	La classe \mathcal{R} de Vogel	74
5.5	Liens acyclicité-contractibilité	78
5.6	La classe \mathcal{L}_0 des modules réguliers	81
5.7	Complexes sur un anneau régulier	83
5.8	Complexes stablement réductibles	86
	Bibliographie	92

Introduction Historique

Pour avoir une intuition géométrique des problèmes abordés dans cette thèse, il faut remonter aux travaux de Novikov (dans les années 70) sur des obstructions fines liées à la chirurgie sur les variétés ; en langage moderne, la conjecture qu'il a posée se réduit à deux grands axes majeurs : l'existence d'une " assembly map " suffisamment régulière, et des propriétés d'excision en L-théorie (liée aux obstructions de Wall, cette théorie étudiée par Ranicki (cf [Ran97]), considère des modules munis de formes quadratiques). Ces problèmes sont dûs en grande partie au gros défaut de la K-théorie algébrique : contrairement aux théories cohomologiques usuelles, celle-ci ne vérifie en général pas l'axiome d'excision, sauf dans des cas très particuliers, et avec des hypothèses ad hoc. Dans la droite lignée de cet ordre d'idées géométriques, Waldhausen publie en 1978 l'article [Wal78] qui étudie la nullité des groupes d'obstruction de Whitehead, dans le cas d'un produit libre d'anneaux. En fait, il y développe un ensemble de conditions favorables sur l'anneau de base C considéré, pour que pour tout C -bimodule S libre à gauche, le spectre $\tilde{K}Nil(C; S)$ soit contractile, autrement dit pour qu'il y ait excision en K-théorie. Parmi ces conditions figure une hypothèse naturelle à tout mathématicien évoluant en géométrie algébrique : l'anneau C doit être " régulier ", c'est-à-dire usuellement noethérien-régulier, ou cohérent-régulier. Le gros problème de cette approche est que le caractère cohérent de l'anneau n'est pas stable par HNN-extension, ou somme amalgamée . . . et alors la notion de régularité habituelle perd tout son sens ! D'où les tentatives de Mr Vogel : [Vog83] où il définit le $\tilde{K}Nil$ pour des catégories de diagrammes, puis [Vog90] où il formalise la notion d'anneau régulier, et redémontre une bonne partie des résultats de Waldhausen avec des hypothèses affaiblies. La tactique utilisée, et que nous allons développer tout au long de cette thèse, consiste à remplacer systématiquement dans les constructions de Waldhausen les modules par des complexes de modules, puis les modules munis d'une flèche nilpotente (objets du $Nil(C; S)$) par des multicomplexes (cf chapitre 2), bénéficiant ainsi de catégories de Waldhausen munies de foncteurs-cylindres canoniques (plus proches ainsi du formalisme de " complicital biWaldhausen category " de Thomason-Trobaugh [Tro90]). Aidé alors par un théorème de localisation puissant, Vogel ramène le problème d'excision à des calculs d'objets locaux. Malheureusement, faute de résultat final, les deux articles ci-dessus n'ont jamais été publiés, et furent légués tels que à ses collègues Staffeldt & Schwänzl à Bielefeld, ou Loday à Strasbourg. Par la suite, les travaux de Loday se sont tournés vers l'homologie cyclique (cf [Lod92]), tandis que Staffeldt & Schwänzl étudiaient les \mathbb{S} -modules (cf [Sch02]) et la " brave new algebra " où les problèmes de

$\tilde{K}Nil$ sont éludés. En conclusion, il fallait mettre à plat les différents résultats auxquels conduit la notion (importante) de Vogel-régulier, et ainsi faire avancer l'État de l'Art. Merci à Mr Pierre Vogel pour ses nombreux conseils et sa fructueuse collaboration : la plupart des idées développées ici, et les calculs les plus compliqués sont de lui, ou lui doivent beaucoup.

Donnons maintenant l'articulation de la thèse qui va suivre.

Un premier chapitre est consacré à énoncer les axiomes et théorèmes principaux de la K-théorie algébrique développés par F. Waldhausen dans [Wal85], plus quelques rappels incontournables de D. Quillen dans [Qui73]. On analyse ensuite en détails la structure de l'article fondateur [Wal78] sur les produits libres d'anneaux, qui sert de cadre à ma thèse, mettant en évidence les endroits où apparaissent les hypothèses de régularité sur l'anneau de base C .

Un deuxième chapitre étudie différentes catégories de (multi-) complexes de C -modules et leur manipulation : leur richesse face aux C -modules tient aux nombreuses notions d'équivalences faibles dont on peut les munir. De plus, ils possèdent une structure de catégorie triangulée (d'où interprétation plus aisée de la catégorie dérivée) ; mais aussi un foncteur-cylindre naturel qui permet des calculs liés au théorème de localisation. Dans le but avoué de trouver des critères d'annulation du $\tilde{K}Nil$, on réinterprétera l'obstruction à l'excision en termes de catégories de (multi-) complexes.

Le troisième chapitre introduit toute une série de foncteurs, et leurs relations, en particulier un foncteur " cyclique " original défini sur les complexes nilpotents. Leur importance tient dans l'application du théorème d'additivité qui permet alors de scinder le $\tilde{K}Nil$ en morceaux.

Le quatrième chapitre est essentiellement une application du théorème de localisation de Waldhausen, modifié par Vogel pour les complexes, afin de calculer des objets " locaux ". C'est à cet endroit précis que manque un théorème de dévissage, qui permettrait de conclure.

Enfin le cinquième et dernier chapitre développe la notion d'anneau " régulier " au sens de Vogel, sa stabilité, son utilisation pour les complexes, la classe des groupes " réguliers " et la conjecture qui sous-tend toute l'architecture tacite de mes travaux de thèse :

Conjecture : Soit C un anneau régulier au sens de Vogel, et S un C -bimodule, plat à gauche. Alors $\tilde{K}Nil(C; S)$ est contractile.

Convention :

Désormais, dans toute la suite de la thèse, on supposera tous les anneaux unitaires et associatifs. Si C est un anneau, on notera Mod_C la catégorie des C -modules à droite : sauf mention expresse du contraire, tous les modules considérés auront une action à droite. Tous les spectres de K-théorie considérés dans cette thèse seront connexes, à l'exception notable des chapitres 4.4, 5.2 et 5.4, où les spectres non-connexes (ou " généralisés ") seront soulignés : $\underline{K}(R)$, $\underline{\tilde{K}Nil}(R; \dots)$, $\underline{Wh}^R(G)$ sont tous obtenus à l'aide du foncteur suspension Σ de Karoubi défini sur la catégorie des anneaux.

Chapitre 1

La K-théorie algébrique de Friedhelm WALDHAUSEN

1.1 Les axiomes

Nous allons donner ici les différents axiomes élémentaires, qui permettent de parler de “ catégorie de Waldhausen ” et d’utiliser les théorèmes fondamentaux énoncés au paragraphe suivant et dont le lecteur pourra trouver la démonstration dans l’article [Wal85]. Le but de ce rappel est seulement d’introduire les notations dont nous allons nous servir tout au long de cette thèse.

On considère une catégorie \mathfrak{C} “ **pointée** ” : elle possède un objet nul $*$ (à la fois initial et final). On munit $(\mathfrak{C}, *)$ d’une classe $(co\mathfrak{C} \subset FI\mathfrak{C})$ de flèches notées \twoheadrightarrow et appelées “ **cofibrations** ”, vérifiant les axiomes suivants :

- [Cof1] Tout isomorphisme est une cofibration.
- [Cof2] Pour tout objet A de \mathfrak{C} , la flèche $(* \rightarrow A)$ est une cofibration de \mathfrak{C} .
- [Cof3] Pour toute flèche $(A \rightarrow C)$ de \mathfrak{C} et toute cofibration $(A \twoheadrightarrow B)$ de \mathfrak{C} , la “ somme amalgamée ” $C \amalg_A B$ (en anglais le “ pushout ”) existe dans \mathfrak{C} et la flèche induite $(C \twoheadrightarrow C \amalg_A B)$ est une cofibration de \mathfrak{C} .

Notation : On dira que $(A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C)$ est une “ suite exacte courte ”

si dans le pushout suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 * & \twoheadrightarrow & B/A \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & C
 \end{array}$$

f est une cofibration de \mathfrak{C} ,
 $g \circ f = 0$ et la flèche
 induite $(A/B \rightarrow C)$
 est un isomorphisme.

Une telle flèche $(B \xrightarrow{g} C)$ sera appelée “ **fibration** ”.

Remarque : Cette notion est différente de celle de fibration en topologie, ou dans les catégories de modèles fermées de Quillen. Toutefois, les “ cofibrations admissibles ” d’une catégorie exacte \mathcal{E} de Quillen (les premières flèches des suites exactes courtes) forment une classe de cofibrations $co\mathcal{E}$.

Toute cette structure $(\mathcal{C}, *, co\mathcal{C})$ est appelée “ catégorie avec cofibrations ”. On la munit d’une deuxième classe $(w\mathcal{C} \subset Fl\mathcal{C})$ de flèches notées $\xrightarrow{\sim}$ et appelées “ **équivalences faibles** ”, vérifiant les axiomes suivants :

[Weq1] Tout isomorphisme est une équivalence faible.

[Weq2] Pour tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} C & \longleftarrow & A & \longrightarrow & B \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ C' & \longleftarrow & A' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

si les flèches verticales sont dans $w\mathcal{C}$, alors la flèche induite entre les pushouts $(C \amalg_A B \xrightarrow{\sim} C' \amalg_{A'} B')$ est aussi dans $w\mathcal{C}$.

On désignera par “ **catégorie de Waldhausen** ”, aussi appelée “ catégorie avec cofibrations et équivalences faibles ” une telle structure $(\mathcal{C}, *, co\mathcal{C}, w\mathcal{C})$. On appellera foncteur “ **exact** ” tout foncteur $(F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ respectant chacune de ces structures, c’est-à-dire $F(co\mathcal{A}) \subset co\mathcal{B}$, $F(w\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, et pour tout pushout décrit dans l’axiome [Cof3], on a : $F(C \amalg_A B) = F(C) \amalg_{F(A)} F(B)$. Ces axiomes suffisent à définir de manière fonctorielle le spectre connexe de K-théorie algébrique $\mathbf{K}(\mathbf{C}, \mathbf{w}) = \Omega|wS.\mathbf{C}|$ dont les groupes d’homotopie positifs redonnent les groupes de K-théorie usuels (pour une catégorie exacte \mathcal{E} de Quillen) : $\mathbf{K}_i(\mathcal{E}, \mathbf{isom}) = \pi_{i+1}(wS.\mathcal{E}) = \pi_{i+1}(Q\mathcal{E})$; le lecteur intéressé pourra trouver les détails sur la construction “ S ” de Waldhausen dans [Wal85].

Dans le but de rendre cette K-théorie plus facilement calculable, Waldhausen introduit 3 types d’axiomes supplémentaires :

[Saturation] Pour tout triangle de flèches composables (a, b, ab) , si 2 flèches sont dans $w\mathbf{C}$, alors la 3^{ième} aussi.

[Extension] Pour tout diagramme commutatif :

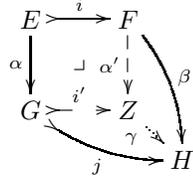
$$\begin{array}{ccccc} A & \twoheadrightarrow & B & \twoheadrightarrow & B/A \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr \\ A' & \twoheadrightarrow & B' & \twoheadrightarrow & B'/A' \end{array}$$

si les lignes sont des suites exactes courtes et les flèches verticales externes dans $w\mathbf{C}$, alors la flèche verticale du milieu (au niveau des extensions) est aussi dans $w\mathbf{C}$.

Définition : Soit \mathcal{C} une catégorie de Waldhausen. Notons $Fl(\mathcal{C})$ sa “ catégorie des flèches ”. Et soit $F_1(\mathcal{C})$ sa “ catégorie des cofibrations ”.

Elles sont munies de structures de catégorie de Waldhausen exemplaires :

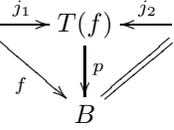
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$
 Dans $\mathcal{F}l(\mathcal{C})$, une flèche (u, v) de f vers g est un diagramme commutatif. Une équivalence faible est un diagramme où u et v sont dans $w\mathcal{C}$. Une cofibration est un diagramme où u et v sont dans $co\mathcal{C}$.



Dans $F_1(\mathcal{C})$, une flèche (α, β) de i vers j est un diagramme commutatif. Une équivalence faible est un diagramme où α et β sont dans $w\mathcal{C}$. Une cofibration est un diagramme où α et γ sont dans $co\mathcal{C}$ (donc aussi α' et β !) : cette condition équivaut à demander que le conoyau de la flèche $(\alpha, \beta) \in coF_1(\mathcal{C})$ soit encore une cofibration.

On a alors 2 foncteurs exacts $(s, b : \mathcal{F}l(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C})$ appelés “ source ” et “ but ”, qui à toute flèche $(f : A \rightarrow B)$ associent respectivement : $s(f) = A$ et $b(f) = B$. On appelle “ **foncteur-cylindre** ” \mathbb{T} la donnée d’un quadruplet (T, j_1, j_2, p) formé d’un foncteur $(T : \mathcal{F}l(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C})$ et de trois transformations naturelles $(j_1 : s \rightarrow T)$, $(j_2 : b \rightarrow T)$ et $(p : T \rightarrow b)$ tel que pour toute flèche $(f : A \rightarrow B)$ de \mathcal{C} ,

on a $A \xrightarrow{j_1} T(f) \xleftarrow{j_2} B$ vérifiant :



[Cyl1] le foncteur $(\mathcal{F}l(\mathcal{C}) \rightarrow F_1(\mathcal{C}))$ défini par : $[f \mapsto (A \vee B \xrightarrow{j_1 \vee j_2} T(f))]$ est exact pour les structures ci-dessus.
 [Cyl2] $\mathbb{T}(* \xrightarrow{f} A) = (A, f, Id_A, Id_A)$.

Le deuxième type d’axiomes relie alors le foncteur-cylindre (quand il existe) et la classe des équivalence faibles :

[Cylindre] $\forall f \in Fl(\mathcal{C}), (p : T(f) \xrightarrow{\sim} B) \in w\mathcal{C}$.

Enfin un troisième type d’axiomes, appelés “ hypothèses d’approximation ”, concerne un foncteur $(F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ “ exact ” entre 2 catégories de Waldhausen :

[App1] $\forall \alpha \in Fl\mathbf{A}, (\alpha \in w\mathbf{A} \iff F(\alpha) \in w\mathbf{B})$.
 [App2] $\forall A \in Ob\mathbf{A},$
 $\forall (\beta : F(A) \rightarrow B) \in Fl\mathbf{B},$
 $\exists (\iota : A \rightarrow A') \in Fl\mathbf{A},$
 $\exists (\theta : F(A') \xrightarrow{\sim} B) \in w\mathbf{B}$
 telles que le diagramme à droite commute :

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(\iota)} & F(A') \\ \beta \downarrow & \nearrow \theta & \\ B & & \end{array}$$

Remarque : D’après une observation de Thomason, si \mathbf{A} possède un foncteur-cylindre, et si la classe $w\mathbf{A}$ vérifie l’axiome [Cylindre], alors il est inutile d’exiger que ι soit une cofibration dans l’axiome [App2].

1.2 Théorèmes fondamentaux

Dans ce cadre, voici les 3 théorèmes principaux, tirés de [Wal85] :

Théorème 1 [Additivité]

Soit \mathbf{C} une catégorie de Waldhausen, on lui associe naturellement la catégorie $E(\mathbf{C})$ de ses suites exactes courtes. Alors le foncteur $[(A \rightrightarrows C \rightrightarrows B) \mapsto (A, B)]$ induit une équivalence d'homotopie : $K(E(\mathbf{C}), w) \xrightarrow{\sim} K(\mathbf{C}, w) \times K(\mathbf{C}, w)$.

Corollaire 1 .

Soient \mathbf{A}, \mathbf{B} deux catégories de Waldhausen, et soient $(f, g, h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ trois foncteurs exacts, tels que pour tout objet A de \mathbf{A} , on ait une suite exacte courte $(f(A) \rightrightarrows g(A) \rightrightarrows h(A))$ naturelle en A , alors au niveau des groupes positifs de K -théorie algébrique, on a l'égalité suivante : $[(g_* = f_* + h_*) : K_*(\mathbf{A}) \rightarrow K_*(\mathbf{B})]$.

Théorème 2 [Fibration]

On considère une catégorie avec cofibrations \mathbf{C} munie d'un foncteur-cylindre et de deux classes d'équivalences faibles $(v\mathbf{C} \subset w\mathbf{C})$, telle que $w\mathbf{C}$ vérifie les axiomes [Cylindre], [Saturation] et [Extension]. Notons $\mathbf{C}^w = \{A \in \mathbf{C} \mid (* \rightarrow A) \in w\mathbf{C}\}$. Alors $K(\mathbf{C}^w, w)$ est contractile, et on a la “ fibration homotopique ” suivante : $[K(\mathbf{C}^w, v) \rightrightarrows K(\mathbf{C}, v) \rightrightarrows K(\mathbf{C}, w)]$.

Théorème 3 [Approximation]

Soient \mathbf{A}, \mathbf{B} deux catégories de Waldhausen, avec $w\mathbf{A}, w\mathbf{B}$ vérifiant l'axiome de [Saturation], \mathbf{A} possédant un foncteur-cylindre et $w\mathbf{A}$ vérifiant l'axiome du [Cylindre]. On considère un foncteur exact $(F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ vérifiant les deux hypothèses d'approximation [App1] et [App2]. Alors le foncteur induit au niveau des spectres de K -théorie est une équivalence d'homotopie : $K(\mathbf{A}) \xrightarrow{\sim} K(\mathbf{B})$.

Pour les catégories exactes \mathcal{E} de D. Quillen, et la structure usuelle de Waldhausen associée : $(co\mathcal{E} = \text{début de suites exactes de } \mathcal{E})$, et $(w\mathcal{E} = \text{isomorphismes})$; on dispose de trois théorèmes supplémentaires très utiles, tirés de [Qui73].

Théorème 4 [Cofinalité]

Soit \mathbf{A} une petite catégorie exacte, et $(\mathbf{B} \subset \mathbf{A})$ une sous-catégorie additive pleine, contenant 0 et stable par extensions dans \mathbf{A} . On dit que \mathbf{B} est “ cofinale ” dans \mathbf{A} si pour tout objet A de \mathbf{A} , il existe un supplémentaire A' dans \mathbf{A} tel que la somme directe $(A \oplus A')$ appartienne à \mathbf{B} . Notons alors \mathcal{G} la catégorie associée au groupe : $G = \text{Coker}(K_0(\mathbf{B}) \rightarrow K_0(\mathbf{A}))$. Alors on a une fibration homotopique : $[K(\mathbf{B}) \rightrightarrows K(\mathbf{A}) \rightrightarrows \mathcal{G}]$. En particulier elle induit un isomorphisme sur les groupes $[K_i(\mathbf{B}) \simeq K_i(\mathbf{A})]$, pour tout $i \geq 1$, et une injection au dernier cran $[K_0(\mathbf{B}) \rightrightarrows K_0(\mathbf{A})]$.

Remarque : La notion de “ cofinalité ” a été simplifiée grâce à une remarque de D. Grayson. La démonstration est essentiellement une application du lemme B de Quillen sur les espaces simpliciaux.

Théorème 5 [Dévissage]

Soit \mathbf{A} une petite catégorie abélienne, et $(\mathbf{B} \subset \mathbf{A})$ une sous-catégorie pleine, non-vide, stable par sous-objets, quotients et produits finis dans \mathbf{A} . On suppose que tout objet M de \mathbf{A} admet une filtration $(0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M)$ telle que le gradué M_j/M_{j-1} appartienne à \mathbf{B} , pour tout indice j . Alors l'inclusion induit une équivalence d'homotopie : $K(\mathbf{B}) \xrightarrow{\sim} K(\mathbf{A})$.

Théorème 6 [Résolution]

Soit \mathbf{M} une petite catégorie exacte, et $(\mathbf{P} \subset \mathbf{M})$ une sous-catégorie pleine, contenant 0 , et vérifiant les trois propriétés de stabilité suivantes :
On considère la suite exacte

$$(1) : \quad 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

Si on suppose M', M'' dans \mathbf{P} , alors M y est aussi.

Si on suppose M dans \mathbf{P} , alors M' y est aussi.

Enfin pour tout objet M'' de \mathbf{M} , il existe une suite exacte (1) avec M dans \mathbf{P} .

Alors, l'inclusion induit une équivalence d'homotopie : $K(\mathbf{P}) \xrightarrow{\sim} K(\mathbf{M})$.

Remarque : Trouver une généralisation au cadre des catégories de Waldhausen de ces théorèmes de “ dévissage ” et “ résolution ” reste un problème d'actualité.

1.3 Une application utile

Nous présentons ici comme application des théorèmes généraux précédents une proposition classique, due à Gillet-Waldhausen :

Proposition 1 .

Soit R un anneau. Alors si on note \mathcal{P}_R la catégorie des C -modules projectifs de type fini, \mathbf{C}_R^f la catégorie des R -complexes finis, et \mathbf{C}_R la catégorie des R -complexes homotopiquement finis, alors on a le même espace de K -théorie $K(R) \simeq K(\mathcal{P}_R, \text{isom}) \simeq K(\mathbf{C}_R^f, \text{qis}) \simeq K(\mathbf{C}_R, \text{qis})$.

Démonstration :

1^{ère} étape : On applique le théorème d'approximation au foncteur d'inclusion $\mathbf{C}_R^f \subset \mathbf{C}_R$.

[Saturation] : Les quasi-isomorphismes sont les flèches qui induisent des isomorphismes en homologie ; or les isomorphismes vérifient cet axiome.

[Cylindre] : Ces deux catégories possèdent un foncteur-cylindre classique. Pour toute flèche $(f_* : A_* \rightarrow B_*)$, on pose $[T(f)_n = A_n \oplus A_{n-1} \oplus B_n]$ muni de la différentielle : $d(x, y, z) = (dx + y, -dy, dz - f(y))$, et des inclusions canoniques $(j_1 : A \rightarrow T(f))$ et $(j_2 : B \rightarrow T(f))$. Le conoyau de j_2 est alors le cône CA , qui est contractile, donc j_2 est un qis. La projection $(p : T(f) \rightarrow B)$ vérifie $[p \circ j_2 = Id_B]$ donc par saturation, p est un qis.

[App1] : Il est évident que le foncteur d'inclusion est exact, et préserve et détecte les qis.

[App2] : Soit A_* fini et B_* homotopiquement fini, avec une flèche $(f_* : A_* \rightarrow B_*)$ fixée. Alors il existe B'_* fini avec $(h : B'_* \rightarrow B_*)$ équivalence d'homotopie. On remonte la flèche f en une flèche $(g : A \rightarrow B')$ grâce à l'inverse homotopique de h . Alors $(h \circ g \sim f)$ donc $(f - h \circ g)$ se factorise par le cône CA , en $(e \circ i)$. On pose enfin $(\alpha : A \rightarrow CA \oplus B' = (i, g))$ et $(\beta : CA \oplus B' = (e, h))$; on a bien $(\beta \circ \alpha = f)$ et β est un qis, et $(CA \oplus B')$ est fini.

Ainsi nous avons vérifié toutes les hypothèses du théorème d'approximation de Waldhausen, donc le foncteur d'inclusion induit une équivalence en K -théorie : $K(\mathbf{C}_R^f, \text{qis}) \simeq K(\mathbf{C}_R, \text{qis})$.

■

2^{ième} étape : Notons \mathbf{C}_M^N la sous-catégorie pleine de \mathbf{C}_R^f formée des R -complexes C_* tels

que C_k est nul si $k \notin [M, N]$. La suspension induit bien sûr une équivalence $[K(\mathbf{C}_M^N) \simeq K(\mathbf{C}_0^{N-M})]$. Il suffit donc de considérer les catégories \mathbf{C}_0^n . On va raisonner par récurrence sur l'indice n .

On utilise le théorème de fibration avec pour cofibrations : ($co\mathbf{C}_0^n =$ morphismes de complexes ($A_i \twoheadrightarrow B_i$) injectifs en chaque degré, dont le conoyau B_i/A_i est dans \mathcal{P}_R), et comme classes d'équivalences faibles : ($v\mathbf{C}_0^n =$ isomorphismes en chaque degré), et ($w\mathbf{C}_0^n =$ quasi-isomorphismes). On sait déjà que $w\mathbf{C}_0^n$ vérifie les axiomes de [Saturation] et [Cylindre]. Elle vérifie aussi l'axiome d'[Extension] d'après le lemme des 5. On obtient donc la fibration homotopique sur les spectres de K-théorie : $[K(\mathbf{C}_0^{n,w}, v) \twoheadrightarrow K(\mathbf{C}_0^n, w) \twoheadrightarrow K(\mathbf{C}_0^n, w)]$.

Considérons la suite exacte : $[(\dots \rightarrow C_2 \rightarrow Ker(d_1) \rightarrow 0) \twoheadrightarrow C_* \twoheadrightarrow (0 \rightarrow C_0 \rightarrow C_0 \rightarrow 0)]$. Elle permet, via le théorème d'additivité, de montrer que le foncteur projection sur le terme $(p_0 : C_* \mapsto C_0)$ induit une suite exacte scindée : $[K_*(\mathbf{C}_1^{n,w}, v) \twoheadrightarrow K_*(\mathbf{C}_0^{n,w}, v) \xrightarrow{p_0} K_*(R)]$.

Considérons alors la suite exacte : $[(0 \rightarrow C_0 \rightarrow 0) \twoheadrightarrow C_* \twoheadrightarrow (0 \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow 0)]$. Elle permet, via le théorème d'additivité, de montrer que le foncteur projection sur le terme $(p_0 : C_* \mapsto C_0)$ induit une suite exacte scindée : $[K_*(\mathbf{C}_1^n, v) \twoheadrightarrow K_*(\mathbf{C}_0^n, v) \xrightarrow{p_0} K_*(R)]$.

On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant, où le carré noté $\textcircled{\text{P}}$ est " exact " (dans la catégorie abélienne des spectres, c'est à la fois un pullback et un pushout homotopiques) :

$$\begin{array}{ccccc}
 K_*(\mathbf{C}_0^{n-1,w}, v) & \twoheadrightarrow & K_*(\mathbf{C}_0^{n-1}, v) & \twoheadrightarrow & K_*(\mathbf{C}_0^{n-1}, w) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 K_*(\mathbf{C}_1^{n,w}, v) & \twoheadrightarrow & K_*(\mathbf{C}_1^n, v) & \twoheadrightarrow & K_*(\mathbf{C}_1^n, w) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 K_*(\mathbf{C}_0^{n,w}, v) & \twoheadrightarrow & K_*(\mathbf{C}_0^n, v) & \twoheadrightarrow & K_*(\mathbf{C}_0^n, w) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 K_*(R) & \xlongequal{\quad} & K_*(R) & &
 \end{array}$$

$\textcircled{\text{P}}$

Ainsi on démontre, par récurrence sur l'indice n , que $[K_*(\mathbf{C}_0^n, w) \simeq K_*(\mathbf{C}_0^0, w) \simeq K_*(R)]$. Enfin on conclut : $[K_*(\mathbf{C}_C^f) \simeq K_*(\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{C}_{-n}^n) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} K_*(\mathbf{C}_{-n}^n) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} K_*(\mathbf{C}_0^{2n}) \simeq K_*(R)]$. ■

1.4 Architecture de l'article [Wal78]

1.4.1 Motivation géométrique

Soit G un groupe, et R un anneau. Waldhausen étudie des conditions pour que le morphisme de Ω -spectres : $BG^+ \wedge K(R) \rightarrow K(R[G])$ (c'est-à-dire la fameuse " assembly map ") soit un isomorphisme. Pour cela, il construit une fibration homotopique : $(BG^+ \wedge K(R) \rightarrow K(R[G]) \rightarrow Wh^R(G))$, naturelle en (R, G) , et il définit ainsi les groupes relatifs $Wh_i^R(G) = \pi_i Wh^R(G)$ qui prolongent les groupes de Whitehead usuels : en effet, $Wh_0^{\mathbb{Z}}(G) = \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$ et $Wh_1^{\mathbb{Z}}(G) = Wh(G)$ [tout l'intérêt de considérer tout R est de pouvoir prendre aussi sa suspension ΣR]. Plaçons-nous alors dans le cas d'une somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc}
 H & \twoheadrightarrow & G_0 \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 G_1 & \longrightarrow & G_1 *_H G_0
 \end{array}$$

Alors on a une suite de Mayer-Vietoris pour la théorie homologique associée au Ω -spectre $BG^+ \wedge K(\mathbb{Z})$. Donc si on a aussi une suite de Mayer-Vietoris pour $K(\mathbb{Z}[\cdot])$, alors on en déduit une autre pour $Wh_*(\cdot)$. Dans ce cas, la nullité de $Wh_*(H), Wh_*(G_0)$ et $Wh_*(G_1)$ implique celle de $Wh_*(G_1 *_H G_0)$. Afin de démontrer ces théorèmes dans le bon cadre, Waldhausen remplace les notions de “ somme amalgamée ” et “ HNN-extension ” de groupes, par les notions de “ produit libre ” et “ extension de Laurent ” pour les anneaux de groupes correspondants [il s'avère alors qu'un 3^{ième} cas se traite de la même façon, celui d'une “ extension polynomiale ”]. Ainsi posant $(C = \mathbb{Z}H)$, $(A = \mathbb{Z}G_0)$, $(B = \mathbb{Z}G_1)$, et $(R = \mathbb{Z}G_1 *_H G_0)$ il obtient le pushout d'anneaux :

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & R \end{array}$$

avec des injections pures, $(A = C \oplus A')$ comme C -bimodules, A' libre à gauche, et $(B = C \oplus B')$ comme C -bimodules, B' libre à gauche. Waldhausen montre ensuite la nullité de $Wh_*(G)$ sur une certaine classe de groupes, en regardant l'excision au niveau de la K-théorie dans les 3 cas de “ produit libre généralisé ” (modulo une hypothèse de régularité, et de cohérence sur l'anneau de base).

1.4.2 Description des 3 cas étudiés

1. Produit libre

On considère 3 anneaux (A, B, C) munis d'injections $(\alpha : C \rightarrow A)$ et $(\beta : C \rightarrow B)$ “ pures ” [c'est-à-dire qu'on suppose les scindages suivants : $(A = \alpha(C) \oplus A')$ et $(B = \beta(C) \oplus B')$ comme C -bimodules]. On suppose de plus que A' et B' sont libres à gauche. On regarde alors le pushout (en français, “ carré cocartésien ”) d'anneaux suivant :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \beta \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & R \end{array}$$

On a la décomposition suivante en C -bimodules :

$$R = C \oplus A' \oplus B' \oplus (A' \otimes_C B') \oplus (B' \otimes_C A') \oplus (A' \otimes_C B' \otimes_C A') \oplus \dots$$

2. Extension de Laurent

On considère 2 anneaux (C, A) munis de 2 injections pures $(\alpha, \beta : C \rightarrow A)$ de compléments A' et A'' libres à gauche. On regarde l' “ extension de Laurent ” R : c'est un anneau contenant A et un élément inversible t (formel) tel que : $[\alpha(c)t = t\beta(c), \forall c \in C]$. On montre une décomposition en C -bimodules analogue à celle du 1^{ère} cas : R est la somme directe de C et de tous les produits tensoriels formés par les C -bimodules ${}_{\alpha}A'_{\alpha}$, ${}_{\beta}A_{\alpha}$, ${}_{\beta}A''_{\beta}$, ${}_{\alpha}A_{\beta}$, où 2 indices adjacents doivent être différents.

3. Extension polynomiale

On considère un anneau C et un C -bimodule S libre à gauche. On note

R l'algèbre tensorielle classique $C[S]$. On a la décomposition suivante en C -bimodules : $R = C \oplus S \oplus (S \otimes_C S) \oplus (S \otimes_C S \otimes_C S) \oplus \dots$

1.4.3 Suites exactes

Dans les 3 cas ci-dessus, Waldhausen donne une description des R -modules en termes de modules sur les anneaux intermédiaires :

Définition 1 .

Nous allons d'abord définir la notion de "splitting diagram".

(1) : c'est la donnée de modules à droite M_A, M_B, M_C sur les anneaux A, B, C , et d'une flèche R -linéaire $[K : (M_A \otimes_A R) \oplus (M_B \otimes_B R) \rightarrow (M_C \otimes_C R)]$ telle que $K(M_A) \subset (M_C \otimes_A)$ et $K(M_B) \subset (M_C \otimes_B)$. On peut aussi écrire : $K = K_\alpha - K_\beta$ avec $K_\alpha(M_B) = 0$ et $K_\beta(M_A) = 0$.

(2) : c'est la donnée de modules M_A, M_C sur les anneaux A, C , et d'une flèche R -linéaire $[K : (M_A \otimes_A R) \rightarrow (M_C \otimes_C R)]$ telle que $K(M_A) \subset M_C \otimes_C (A \oplus tA)$. On peut écrire $K = K_\alpha - K_\beta$ avec $K_\alpha(M_A) \subset (M_C \otimes_C A)$ et $K_\beta(M_A) \subset (M_C \otimes_C tA)$.

(3) : c'est la donnée de modules M_C, M'_C sur l'anneau C , et d'une flèche R -linéaire $[K : (M_C \otimes_C R) \rightarrow (M'_C \otimes_C R)]$ telle que $K(M_C) \subset M'_C \otimes_C (C \oplus S)$. On peut écrire $K = K_0 - K_1$ avec $K_0(M_C) \subset M'_C$ et $K_1(M_C) \subset (M'_C \otimes_C S)$.

Définition 2 .

Une présentation de Mayer-Vietoris est une suite exacte courte dans Mod_R dont la flèche de droite est le morphisme R -linéaire d'un "splitting diagram".

Les présentations de Mayer-Vietoris forment une catégorie de Waldhausen :

(1) Un morphisme f est la donnée de 4 flèches $(f_R : M \rightarrow N) \in \text{Fl}(\text{Mod}_R)$,

$(f_A : M_A \rightarrow N_A) \in \text{Fl}(\text{Mod}_A)$, $(f_B : M_B \rightarrow N_B) \in \text{Fl}(\text{Mod}_B)$

et $(f_C : M_C \rightarrow N_C) \in \text{Fl}(\text{Mod}_C)$, formant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M_A \otimes_A R \oplus M_B \otimes_B R & \longrightarrow & M_C \otimes_C R \\ f_R \downarrow & & \downarrow \left(\begin{array}{cc} f_A \otimes \mathbf{1}_R & 0 \\ 0 & f_B \otimes \mathbf{1}_R \end{array} \right) & & \downarrow f_C \otimes \mathbf{1}_C \\ N & \longrightarrow & N_A \otimes_A R \oplus N_B \otimes_B R & \longrightarrow & N_C \otimes_C R \end{array}$$

Une équivalence faible est une flèche $f = (f_R, f_A, f_B, f_C)$ dont les 4 composantes sont des isomorphismes. Une cofibration est une flèche f , dont les 4 composantes sont des cofibrations, et dont le conoyau est encore une présentation de Mayer-Vietoris (condition semblable à la structure de $F_1(\mathbf{C})$).

(2) Un morphisme f est la donnée de 3 flèches $(f_R : M \rightarrow N) \in \text{Fl}(\text{Mod}_R)$,

$(f_A : M_A \rightarrow N_A) \in \text{Fl}(\text{Mod}_A)$ et $(f_C : M_C \rightarrow N_C) \in \text{Fl}(\text{Mod}_C)$

formant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M_A \otimes_A R & \longrightarrow & M_C \otimes_C R \\ f_R \downarrow & & \downarrow f_A \otimes \mathbf{1}_R & & \downarrow f_C \otimes \mathbf{1}_R \\ N & \longrightarrow & N_A \otimes_A R & \longrightarrow & N_C \otimes_C R \end{array}$$

Une équivalence faible est une flèche $f = (f_R, f_A, f_C)$ dont les 3 composantes sont des isomorphismes. Une cofibration est une flèche f , dont les 3 composantes

sont des cofibrations, et dont le conoyau est encore une présentation de Mayer-Vietoris (condition semblable à la structure de $F_1(\mathbf{C})$).

(3) Un morphisme f est la donnée de 3 flèches $(f_R : M \rightarrow N) \in Fl(Mod_R)$, $(f_C : M_C \rightarrow N_C) \in Fl(Mod_C)$ et $(f'_C : M'_C \rightarrow N'_C) \in Fl(Mod_C)$ formant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M & \twoheadrightarrow & M_C \otimes_C R & \twoheadrightarrow & M'_C \otimes_C R \\ f_R \downarrow & & \downarrow f_C \otimes \mathbf{1}_R & & \downarrow f'_C \otimes \mathbf{1}_R \\ N & \twoheadrightarrow & N_C \otimes_C R & \twoheadrightarrow & N'_C \otimes_C R \end{array}$$

Une équivalence faible est une flèche $f = (f_R, f_C, f'_C)$ dont les 3 composantes sont des isomorphismes. Une cofibration est une flèche f , dont les 3 composantes sont des cofibrations, et dont le conoyau est encore une présentation de Mayer-Vietoris (condition semblable à la structure de $F_1(\mathbf{C})$).

Proposition 2 [Classification]

On se place dans chacun des 3 cas étudiés ci-dessus, avec ses hypothèses. Soit M un R -module (à droite). Alors il existe des présentations de Mayer-Vietoris :

- (1) $0 \rightarrow M \rightarrow M_A \otimes_A R \oplus M_B \otimes_B R \rightarrow M_C \otimes_C R \rightarrow 0$
- (2) $0 \rightarrow M \rightarrow M_A \otimes_A R \rightarrow M_C \otimes_C R \rightarrow 0$
- (3) $0 \rightarrow M \rightarrow M_C \otimes_C R \rightarrow M'_C \otimes_C R \rightarrow 0$

De plus, avec des hypothèses de finitude (si l'anneau de base C est noethérien, et pour le 3^{ième} cas, si S est de présentation finie comme C -module à droite) si M est de présentation finie, on peut garder la même condition pour tous les autres modules M_C, M_A, M_B, M'_C qui interviennent dans les suites exactes.

1.4.4 Catégories de Mayer-Vietoris

Définition : On notera $\mathcal{M}\mathcal{V}^\epsilon$ la catégorie des présentations de Mayer-Vietoris (ϵ) ci-dessus, où chacun des modules cités est projectif de type fini sur son anneau de base. Il y a un foncteur oubli canonique ($f^\epsilon : \mathcal{M}\mathcal{V}^\epsilon \rightarrow \mathcal{P}_R$), qui à toute suite exacte (ϵ) associe le R -module M . On notera $\mathcal{P}_R^{*,\epsilon} = Im(f^\epsilon)$ et $\mathcal{V}^\epsilon = Ker(f^\epsilon)$. Le terme \mathcal{V} est la fibre de f au-dessus de l'objet nul (ses éléments sont appelés les " admissible split modules " dans le jargon de Waldhausen).

Proposition 3 .

Dans les 3 cas étudiés, la catégorie $\mathcal{P}_R^{*,\epsilon}$ est cofinale dans \mathcal{P}_R .

On en déduit dans chaque cas que l'inclusion induit un isomorphisme pour tout indice ($i \geq 1$), $K_i(\mathcal{P}_R^{*,\epsilon}) \xrightarrow{\sim} K_i(\mathcal{P}_R)$, et une inclusion $K_0(\mathcal{P}_R^{*,\epsilon}) \twoheadrightarrow K_0(\mathcal{P}_R)$.

Théorème 7 .

On a la fibration homotopique : $[K(\mathcal{V}^\epsilon) \twoheadrightarrow K(\mathcal{M}\mathcal{V}^\epsilon) \twoheadrightarrow K(\mathcal{P}_R^{*,\epsilon})]$.

Théorème 8 .

Les différents foncteurs oublis induisent des équivalences d'homotopies :

- (1) $K(\mathcal{M}\mathcal{V}^1) \xrightarrow{\sim} K(A) \times K(B) \times K(C)$.

$$(2) \quad K(\mathcal{M}\mathcal{V}^2) \xrightarrow{\sim} K(A) \times K(C) .$$

$$(3) \quad K(\mathcal{M}\mathcal{V}^3) \xrightarrow{\sim} K(C) \times K(C) .$$

Remarques : Dans la proposition 3, on voit que l'image de f^ϵ contient les libres. Il ne reste alors qu'à appliquer le théorème de cofinalité. Dans le théorème 7, il suffit de vérifier les hypothèses du théorème de fibration. Enfin, le théorème 8 se règle essentiellement grâce au théorème d'additivité.

1.4.5 Les 3 catégories *Nil*

Dans chacun des 3 cas décrits ci-dessus, Waldhausen montre une équivalence de catégories entre la catégorie de diagrammes \mathcal{V} et une catégorie *Nil* dont les objets sont des modules projectifs munis de flèches nilpotentes :

Produit libre :

$Nil(C; A', B')$ est la catégorie des quadruplets (P, Q, p, q) où P et Q sont deux C -modules à droite projectifs, $(p : P \rightarrow Q \otimes_C A')$ et $(q : Q \rightarrow P \otimes_C B')$ deux flèches nilpotentes (c'est-à-dire $(p \circ q)^n$ est nulle pour n assez grand).

Extension de Laurent :

$Nil(C; {}_\alpha A'_\alpha, {}_\beta A''_\beta; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta)$ est la catégorie des quadruplets (P, Q, p, q) où P et Q sont deux C -modules à droite projectifs, $(p : P \rightarrow (Q \otimes_C {}_\alpha A'_\alpha) \oplus (P \otimes_C {}_\beta A_\alpha))$ et $(q : Q \rightarrow (P \otimes_C {}_\beta A''_\beta) \oplus (Q \otimes_C {}_\alpha A_\beta))$ deux flèches nilpotentes (c'est-à-dire $(p \oplus q)^n$ est nulle pour n assez grand).

Extension polynomiale :

$Nil(C; S)$ est la catégorie des paires (M, α) où M est un C -module à droite projectif, et $(\alpha : M \rightarrow M \otimes S)$ une flèche nilpotente (c'est-à-dire α^n est nulle pour n assez grand).

Proposition 4 .

a. Il existe un $C \times C$ -bimodule X et il existe une équivalence de catégories : $Nil(C; A', B') \cong Nil(C \times C; X)$, induite par le foncteur défini par : $[(P, Q, p, q) \mapsto (P \oplus Q, p \oplus q)]$. Ce foncteur induit donc une équivalence au niveau des spectres connexes de K -théorie algébrique.

b. Il existe un $C \times C$ -bimodule Y et il existe une équivalence de catégories : $Nil(C; {}_\alpha A'_\alpha, {}_\beta A''_\beta; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta) \cong Nil(C \times C; Y)$, induite par le foncteur défini par : $[(P, Q, p, q) \mapsto (P \oplus Q, p \oplus q)]$. Ce foncteur induit donc une équivalence au niveau des spectres connexes de K -théorie algébrique.

Démonstration :

a. Il suffit de poser $X = A' \oplus B'$, où le premier facteur C agit sur A' à droite via α , et sur B' à gauche via β ; les autres actions sont triviales. Le deuxième facteur C agit sur A' à gauche via α , et sur B' à droite via β . Les autres actions sont triviales.

b. On pose $Y = {}_\alpha A'_\alpha \oplus {}_\beta A''_\beta \oplus {}_\beta A_\alpha \oplus {}_\alpha A_\beta$, où le premier facteur C agit sur les termes via α , et le deuxième via β (la notation est suggestive ; les autres actions sont triviales).

Les vérifications sont évidentes. On verra au chapitre 4.4 comment définir des spectres de K -théorie non-connexes : dans ce cadre, les équivalences ci-dessus se prolongent naturellement aux spectres " généralisés ". ■

1.4.6 L'obstruction à l'excision : $\tilde{K}Nil$

- Dans le cas d'une " extension polynomiale ", on a le foncteur " oubli " $[f : Nil(C; S) \rightarrow Mod_C]$ défini par $[(M, \alpha) \mapsto M]$. Il possède une section $[i : Mod_C \rightarrow Nil(C; S)]$ définie par $[M \mapsto (M, 0)]$. Par le théorème d'additivité, on obtient donc le scindage : $KNil(C; S) = K(C) \times \tilde{K}Nil(C; S)$.
- Dans le cas d'un " produit libre " d'anneaux, on a le foncteur " oubli " $[f : Nil(C; A', B') \rightarrow Mod_C \times Mod_C]$ défini par $[(P, Q, p, q) \mapsto (P, Q)]$. Il possède alors une section $[i : Mod_C \times Mod_C \rightarrow Nil(C; A', B')]$ définie par $[(P, Q) \mapsto (P, Q, 0, 0)]$. Par le théorème d'additivité, on obtient donc le scindage suivant : $KNil(C; A', B') = K(C) \times K(C) \times \tilde{K}Nil(C; A', B')$.
- Dans le cas d'une " extension de Laurent ", on a le foncteur " oubli " $[f : Nil(C; {}_\alpha A'_\alpha, {}_\beta A''_\beta; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta) \rightarrow Mod_C \times Mod_C]$ défini par $[(P, Q, p, q) \mapsto (P, Q)]$. Il possède une section $[i : Mod_C \times Mod_C \rightarrow Nil(C; {}_\alpha A'_\alpha, {}_\beta A''_\beta; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta)]$ définie par $[(P, Q) \mapsto (P, Q, 0, 0)]$. Par le théorème d'additivité, on obtient le scindage : $KNil(C; {}_\alpha A'_\alpha, {}_\beta A''_\beta; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta) = K(C) \times K(C) \times \tilde{K}Nil(C; {}_\alpha A'_\alpha, {}_\beta A''_\beta; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta)$.
- Enfin, tout objet de type fini de l'une des catégories Nil possède une filtration finie par des sous-objets de type fini, de quotients appartenant tous à $Im(i)$.

Théorème 9 [Obstruction]

On se place dans chacun des cas étudiés en 1.4.2 [avec ses hypothèses]. De plus, on supposera dans le 3^{ième} cas, que S est projectif de type fini à droite.

Produit libre :

Le spectre $\Omega K(R)$ est homotopiquement équivalent à la somme du spectre d'obstruction $\tilde{K}Nil(C; A', B')$ et de la fibre homotopique de $[(K(\alpha), -K(\beta)) : K(C) \rightarrow K(A) \times K(B)]$.

Extension de Laurent :

Le spectre $\Omega K(R)$ est homotopiquement équivalent à la somme du spectre d'obstruction $\tilde{K}Nil(C; {}_\alpha A'_\alpha, {}_\beta A''_\beta; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta)$ et de la fibre homotopique de $[(K(\alpha) - K(\beta)) : K(C) \rightarrow K(A)]$.

Extension polynomiale :

Le spectre $\Omega K(R)$ est homotopiquement équivalent à la somme du spectre d'obstruction $\tilde{K}Nil(C; S)$ et du spectre $\Omega K(C)$.

1.4.7 Le cas cohérent régulier

Détaillons la réduction du cas du " produit libre " d'anneaux, sous l'hypothèse supplémentaire que l'anneau de base C est cohérent régulier.

1^{ère} étape :

Notons \mathcal{M}_C^{pf} la catégorie des C -modules de présentation finis. Comme C est régulier cohérent, c'est une catégorie abélienne, où tout objet a une dimension projective finie. Par le théorème de résolution, on a donc : $K(\mathcal{P}_C) \simeq K(\mathcal{M}_C^{pf})$.

2^{ième} étape :

Notons \mathcal{V}^{pf} la même catégorie de diagrammes que \mathcal{V} mais où tous les modules qui interviennent sont de présentation finie. Tout objet de \mathcal{V}^{pf} peut être résolu par des objets de \mathcal{V} (toujours car C est régulier cohérent). Par le théorème de résolution, on a donc : $K(\mathcal{V}) \simeq K(\mathcal{V}^{pf})$.

3^{ième} étape :

Tout objet de \mathcal{V}^{pf} admet une filtration finie de quotients dans $i(\mathcal{M}_C^{pf} \times \mathcal{M}_C^{pf})$. En effet, dans la filtration évoquée plus haut, tout sous-objet d'un objet de présentation finie est de présentation finie (car C est cohérent). Par le théorème de dévissage, on a donc : $K(\mathcal{M}_C^{pf}) \times K(\mathcal{M}_C^{pf}) \simeq K(\mathcal{V}^{pf})$.

4^{ème} étape :

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{P}_C) \times K(\mathcal{P}_C) & \longrightarrow & K(\mathcal{V}) \quad \text{conclut.} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ K(\mathcal{M}_C^{pf}) \times K(\mathcal{M}_C^{pf}) & \xrightarrow{\sim} & K(\mathcal{V}^{pf}) \end{array}$$

Théorème 10 [Réduction]

On garde les hypothèses du théorème d'[Obstruction]. Supposons de plus, que l'anneau de base C est "cohérent régulier" (cf rappels au chapitre 5.1). Alors chacun des spectres d'obstruction $\tilde{K}Nil(C; \dots)$ ci-dessus devient contractile.

<p>Produit libre : <i>La fibration homotopique : $(\Omega K(R) \twoheadrightarrow K(C) \xrightarrow{(\alpha, -\beta)} K(A) \times K(B))$ fournit une suite exacte longue d'homotopie : $(\dots K_i(C) \rightarrow K_i(A) \oplus K_i(B) \rightarrow K_i(R) \rightarrow K_{i-1}(C) \dots)$.</i></p> <p>Extension de Laurent : <i>La fibration homotopique : $(\Omega K(R) \twoheadrightarrow K(C) \xrightarrow{\alpha - \beta} K(A))$ fournit une suite exacte longue d'homotopie : $(\dots K_i(C) \rightarrow K_i(A) \rightarrow K_i(R) \rightarrow K_{i-1}(C) \dots)$.</i></p> <p>Extension polynomiale : <i>Ici l'équivalence de spectres : $\Omega K(R) \simeq \Omega K(C)$ induit des isomorphismes : $K_i(R) \simeq K_i(C)$, pour tout $i > 0$.</i></p>
--

1.4.8 Classe \mathcal{G} de Waldhausen

Définition 3 .

Soit \mathcal{G} la plus petite classe de groupes vérifiant :

- (1) Le groupe trivial 1 est dans \mathcal{G} .
- (2) Si $\mathbb{Z}[G_0]$ est régulier cohérent, G_1 est dans \mathcal{G} , et α, β sont 2 injections, alors la HNN-extension de $(G_0 \xrightarrow[\beta]{\alpha} G_1)$ est dans \mathcal{G} .

- (3) Si $\mathbb{Z}[G_0]$ est régulier cohérent, G_1, G_2 sont dans \mathcal{G} , et α, β sont 2 injections, alors la somme amalgamée $G_0 \xrightarrow{\alpha} G_1$ est dans \mathcal{G} .

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{\alpha} & G_1 \\ \beta \downarrow & \lrcorner & \vdots \downarrow \\ G_2 & \twoheadrightarrow & (G_1 *_{G_0} G_2) \end{array}$$

- (4) \mathcal{G} est stable par limite inductive filtrante.

Remarque : La même classe \mathcal{G} est obtenue si dans les cas (2) et (3) de la définition ci-dessus, on impose la condition supplémentaire que G_0 soit dans \mathcal{G} .

Théorème 11 .

La classe \mathcal{G} est stable par sous-groupe et contient :

- (a) les groupes libres
- (b) les groupes abéliens libres (et donc les groupes abéliens sans torsion)
- (c) les poly- \mathbb{Z} -groupes
- (d) les groupes sans torsion à une relation
- (e) les groupes fondamentaux des surfaces autres que le plan projectif
- (f) les groupes fondamentaux des variétés de Hecke irréductibles
- (g) les groupes fondamentaux des sous-variétés de la sphère de dimension 3
- (h) tout sous-groupe d'un groupe de \mathcal{G}

Théorème 12 .

Soit R est un anneau noethérien régulier, et G un groupe dans la classe \mathcal{G} de Waldhausen, alors le spectre connexe $Wh^R(G)$ est contractile. Autrement dit, la K -théorie algébrique $K(R[G])$ se comporte comme la théorie homologique associée au Ω -spectre $BG^+ \wedge K(R)$ par rapport à la variable G des groupes dans la classe \mathcal{G} ; en particulier, elle vérifie le théorème d'excision, ce qui nous donne des suites exactes longues de Mayer-Vietoris (d'où certaines facilités calculatoires).

Chapitre 2

Diverses catégories de complexes

Désormais, afin de travailler avec des catégories de Waldhausen munies de foncteurs-cylindres, et de posséder une structure de catégorie triangulée donnant aux théorèmes de localisation leur vrai cadre, nous allons nous appliquer à systématiquement remplacer les modules de Mod_R par des complexes de \mathfrak{C}_R , et les flèches nilpotentes α par des multicomplexes de $\mathfrak{C}_{\mathcal{D}_0}$, \mathcal{B} , \mathcal{A} , ou \mathcal{H} . Nous verrons alors dans ce nouveau langage plusieurs traductions de la catégorie $Nil(R; S)$ de Waldhausen.

2.1 Les complexes usuels \mathfrak{C}_R

Définition 4 .

Soit R l'anneau de base. On fixe S un bimodule, plat à gauche.

On note Mod_R la catégorie des R -modules à droite.

On note $\bar{\mathfrak{C}}_R$ la catégorie des R -complexes projectifs.

On note \mathcal{P}_R la catégorie des R -modules projectifs de type fini.

Soit \mathfrak{C}_R^f la catégorie des complexes projectifs B_* "finis" : $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i \in \mathcal{P}_R$.

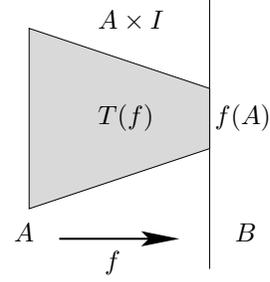
On note \mathfrak{C}_R la catégorie des complexes projectifs A_* "homotopiquement finis" : $\exists B_* \in \mathfrak{C}_R^f, \exists (f : B_* \rightarrow A_*), \exists (g : A_* \rightarrow B_*), (f \circ g \sim Id_A), (g \circ f \sim Id_B)$.

Cette catégorie des complexes usuels \mathfrak{C}_R sera à la base de toutes nos constructions, car elle regroupe 3 propriétés très utiles : d'abord elle fournit la K-théorie de l'anneau de base [$K(\mathfrak{C}_R, qis) = K(R)$ d'après la propriété 1], ensuite elle fait coïncider les notions d'acyclicité et de contractibilité [voir le chapitre 5.5, d'où des facilités de calcul d'objets locaux], enfin elle possède un foncteur-cylindre :

Définition 5 .

On considère une flèche $[f_* : A_* \rightarrow B_*]$ de \mathfrak{C}_R . Pour des espaces topologiques, le cylindre géométrique $T(f)$ est formé du produit $A \times I$ de l'espace de départ par l'intervalle $I = [0, 1]$, auquel on recolle en $(t = 1)$ l'espace d'arrivée B en assimilant $(a, 1)$ avec $f(a) \in B$. Algébriquement, cela donne une décomposition :

$T(f) = (\epsilon_0 \otimes A) \oplus (\epsilon_1 \otimes A) \oplus (\eta_0 \otimes B)$ avec 3 termes formels ϵ_0 et η_0 de degré 0 [correspondant aux sommets ($t = 0$) et ($t = 1$)] et ϵ_1 de degré 1 [correspondant à l'arête I , de bord $(\epsilon_0 - \eta_0)$]. Reste à définir la différentielle : $d(\epsilon_0 \otimes a) = \epsilon_0 \otimes d_A(a)$, puis $d(\eta_0 \otimes b) = \eta_0 \otimes d_B(b)$, et $d(\epsilon_1 \otimes a) = (\epsilon_0 \otimes a) \oplus (\epsilon_1 \otimes -d_A(a)) \oplus (\eta_0 \otimes -f(a))$.



Pour compléter cette structure de foncteur-cylindre, on a les deux inclusions ($j_1 : A \rightarrow \epsilon_0 \otimes A$) et ($j_2 : B \rightarrow \eta_0 \otimes B$) et la projection ($p : T(f) \rightarrow B$) définie par : $[p(\epsilon_0 \otimes a) = f(a), p(\epsilon_1 \otimes a) = 0, \text{ et } p(\eta_0 \otimes b) = b]$. On vérifie aisément que ($p \circ j_1 = f$) et ($p \circ j_2 = Id_B$). Cette construction géométrique est fonctorielle, et remplit les axiomes [Cyl1], [Cyl2] et [Cylindre] par rapport à la structure de catégorie de Waldhausen ($w\mathcal{C}_R = qis, co\mathcal{C}_R = \text{mono de conoyau projectif}$). Une autre définition plus compacte du foncteur-cylindre $T(f)$ est la suivante : $[T(f)_n = A_n \oplus A_{n-1} \oplus B_n]$ de différentielle $d(x, y, z) = (dx + y, -dy, dz - f(y))$.

2.2 Les \mathcal{D}_0 -complexes : $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}, \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n$

Définition 6 .

On définit la catégorie $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}$ des \mathcal{D}_0 -complexes :

$$A_* = (0 \xrightarrow{\alpha_1} A_1 \xrightarrow{\lambda_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \xrightarrow{\lambda_2} A_4 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\lambda_{n-1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} A_{n+1} \xrightarrow{\lambda_n} \dots)$$

où pour tout entier i , le complexe A_i est projectif,

la flèche ($A_i \xrightarrow{\lambda_i} A_{i+1}$) est une " cofibration " de $\bar{\mathcal{C}}_R$:

un mono en chaque degré, de conoyau projectif, morphisme de chaînes,

la flèche ($A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} A_i \otimes S$) est un morphisme de chaînes,

de plus, on a la relation de compatibilité : $[\alpha_{i+1} \circ \lambda_i = (\lambda_{i-1} \otimes Id_S) \circ \alpha_i]$.

Un morphisme de cette catégorie $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}$ est alors la donnée, pour tout entier i , de morphismes de complexes $(f_i)_{i \geq 0}$ de degré 0, faisant commuter les diagrammes :

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \xrightarrow{\lambda_i} & A_{i+1} & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & A_i \otimes S \\ \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i \otimes Id_S \\ B_i & \xrightarrow{\lambda_i} & B_{i+1} & \xrightarrow{\alpha_{i+1}} & B_i \otimes S \end{array}$$

On donne à la catégorie $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}$ une structure de catégorie de Waldhausen suivant le modèle donné par $F_1(\mathcal{C})$: on pose $w\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0} = \{(f_i)_{i \geq 0} | \forall i, f_i \in w\bar{\mathcal{C}}_R\}$ et $co\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0} = \{(f_i)_{i \geq 0} | \forall i, f_i \in co\bar{\mathcal{C}}_R \text{ et } (B_i \amalg_{A_i} A_{i+1} \rightarrow B_{i+1}) \in co\bar{\mathcal{C}}_R\}$. Cette condition assure que le conoyau d'une flèche $(f_i)_{i \geq 0} \in co\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}$ est encore un objet de $\bar{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}$.

Après cette définition conceptuelle, il est aisé de définir des variantes " finies " ou " nilpotentes " de cette catégorie de multicomplexes, puis de les graduer.

Définition 7 .

- On considère la sous-catégorie pleine \mathcal{B} de $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}$ formée des \mathcal{D}_0 -complexes (A_*) où tous les complexes A_i sont homotopiquement finis, et où les cofibrations λ_i se stabilisent : $[\exists n, \forall i \geq n, \lambda_i \in w\mathcal{C}_R]$. On notera A_∞ la limite stabilisée des A_i suivant λ . Les objets de \mathcal{B} seront appelés les \mathcal{D}_0 -complexes “ finis ”.
- Soit \mathcal{A} la sous-catégorie pleine de \mathcal{B} formée des objets (A_*) tels que A_∞ est contractile. Les objets de \mathcal{A} seront appelés les \mathcal{D}_0 -complexes “ nilpotents ”.
- \mathcal{B} et \mathcal{A} héritent de la structure de catégorie de Waldhausen induite par celle de $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0}$. De plus, ces deux catégories sont naturellement filtrées par le degré “ n ” de stabilisation des A_i : ainsi \mathcal{A}_n est la catégorie des multicomplexes $(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow * \simeq * \simeq \dots)$, les A_i étant homotopiquement finis.

Visuellement : un multicomplexe de \mathcal{B}_n est un espace A_n filtré, muni d’une application $(\alpha : A_n \rightarrow A_n \otimes S)$ graduée descendante, nilpotente d’ordre au plus n .

2.3 Les \mathcal{D}_0 -complexes réduits \mathcal{B}^{red}

Pour des raisons techniques qui apparaîtront lors des démonstrations, il est nécessaire d’introduire une sous-catégorie de \mathcal{B} composée d’objets “ réduits ”, qui se comporte beaucoup mieux vis-à-vis des calculs d’algèbre homologique, et redonne la même K-théorie.

Définition 8 .

On appelle multicomplexe “ réduit ” un \mathcal{D}_0 -complexe A_* où toutes les flèches α_i sont surjectives pour tout indice $(i \geq 1)$. On note $(\mathcal{B}^{red}, \mathcal{A}^{red}, \mathcal{B}_n^{red}, \mathcal{A}_n^{red})$ les sous-catégories respectivement de $(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)$ dont les objets sont réduits.

Lemme 1 .

Soit X un \mathcal{D}_0 -complexe quelconque. Alors il existe des \mathcal{D}_0 -complexes $(E$ acyclique réduit), et $(\tilde{X}$ réduit), et une suite exacte courte fonctorielle en X :

$$(0 \rightarrow X \xrightarrow{j} \tilde{X} \twoheadrightarrow E \rightarrow 0)$$

Démonstration :

On construit les multicomplexes \tilde{X} et E par récurrence sur i :

- Pour $(i = 0)$, on pose : $\tilde{X}_0 = X_0 = E_0 = 0$.

Pour $(i = 1)$, on pose : $\tilde{X}_1 = X_1$ et $E_1 = 0$, car α_1 est surjective.

Pour $(i = 2)$, on force l’application $\tilde{\alpha}_2$ à être surjective en posant :

$\tilde{X}_2 = X_2 \oplus C(X_1 \otimes S)$ et $E_2 = C(X_1 \otimes S)$ [le cône] est contractile.

- On suppose construite la suite exacte de l’énoncé jusqu’au rang $(i \geq 2)$.

On pose $\tilde{X}_{i+1} = (\tilde{X}_i \amalg_{X_i} X_{i+1}) \oplus C(\tilde{X}_i \otimes S)$. Les flèches λ_i et j_{i+1} sont fonctoriellement définies par le pushout, et nulles sur le cône $C(\tilde{X}_i \otimes S)$. Alors posant $E_{i+1} = E_i \oplus C(\tilde{X}_i \otimes S)$ contractile, on obtient bien une suite exacte courte au rang $(i + 1)$ compatible aux flèches λ .

Pour construire la flèche α_{i+1} , on prend d’une part, la surjection canonique $[(C(\tilde{X}_i \otimes S) \rightarrow \tilde{X}_i \otimes S)]$, obtenue géométriquement du cône vers la suspension, et d’autre part, on construit la flèche α_{i+1} sur le pushout $(\tilde{X}_i \amalg_{X_i} X_{i+1})$, grâce à la propriété universelle du pushout, et à la relation $(\lambda \circ \alpha = \alpha \circ \lambda)$: en détail, il faut montrer que les deux flèches canoniques $(\tilde{X}_i \rightarrow \tilde{X}_{i-1} \otimes S \rightarrow \tilde{X}_i \otimes S)$ et $(X_{i+1} \rightarrow X_i \otimes S \rightarrow \tilde{X}_i \otimes S)$ coïncident sur X_i . On écrit alors :

$[\lambda_{i-1} \circ \alpha_i \circ j_i = \lambda_{i-1} \circ j_{i-1} \circ \alpha_i = j_i \circ \lambda_{i-1} \circ \alpha_i = j_i \circ \alpha_{i+1} \circ \lambda_i]$. Ceci montre que la flèche α_{i+1} peut être définie sur le pushout pour que tout le diagramme commute. L'addition du cône ne change rien aux relations de commutativité, mais permet de rendre la flèche surjective. On a ainsi défini une flèche de \mathcal{D}_0 -complexes j qui est une cofibration (au sens de $F_1(\mathcal{C})$), donc le conoyau E est lui aussi muni de flèches α, λ compatibles, et par construction, il est acyclique et réduit. Par récurrence, on a donc construit la suite exacte courte fonctorielle [les pushouts et les cônes sont fonctoriels] recherchée : $(0 \rightarrow X \xrightarrow{j} \tilde{X} \twoheadrightarrow E \rightarrow 0)$. ■

Lemme 2 .

Soit X un \mathcal{D}_0 -complexe fini réduit.

Alors X est acyclique, ssi il est contractile.

Démonstration :

Commençons une remarque : X est acyclique ssi $\forall i \geq 0, X_i$ est acyclique. Or X étant fini, chacun des X_i est dans \mathcal{C}_R , où “ acyclique = contractile ”. Donc tous les X_i sont contractiles. Le problème consiste à construire une homotopie qui commute aux flèches λ_i et α_i . On considère alors les deux diagrammes suivants, qui résument les diverses compatibilités :

$$\begin{array}{ccccc}
 X_i & \xrightarrow{\quad} & X_{(i+1)} & \xrightarrow{\quad} & X_i \otimes S \\
 \downarrow h_i & \searrow \beta_i & \vdots & \searrow \gamma_i & \downarrow h_i \otimes \mathbf{1}_S \\
 X_i & \xrightarrow{\quad} & X_{(i+1)} & \xrightarrow{\quad} & X_i \otimes S
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 X_i & \xrightarrow{\quad} & X_{(i-1)} \otimes S & \xrightarrow{\quad} & X_i \otimes S \\
 \downarrow h_i & \searrow \gamma_{i-1} & \vdots & \searrow \beta_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S & \downarrow h_i \otimes \mathbf{1}_S \\
 X_i & \xrightarrow{\quad} & X_{(i-1)} \otimes S & \xrightarrow{\quad} & X_i \otimes S
 \end{array}$$

On considère alors les 4 modules différentiels gradués :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \prod_{i \geq 0} \mathcal{H}om(X_i, X_i) & \mathcal{C} &= \prod_{i \geq 0} \mathcal{H}om(X_{i+1}, X_i \otimes S) \\
 \mathcal{B} &= \prod_{i \geq 0} \mathcal{H}om(X_i, X_{i+1}) & \mathcal{D} &= \prod_{i \geq 0} \mathcal{H}om(X_i, X_i \otimes S)
 \end{aligned}$$

Soit alors le morphisme qui caractérise le “ défaut ” de compatibilité d’une homotopie : on notera $[\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}]$ le morphisme défini par $[(h_i) \mapsto (\beta_i = h_{i+1} \circ \lambda_i - \lambda_i \circ h_i, \gamma_i = [h_i \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_{i+1} - \alpha_{i+1} \circ h_i)]$. On cherche donc une homotopie (h_i) dans le noyau $\mathcal{E} = Ker(\phi)$.

Sous-lemme technique : le module différentiel gradué \mathcal{E} est acyclique.

On considère alors l’élément : $Id_X \in \mathcal{A}$. C’est un morphisme de chaînes, donc $d(Id_X) = 0$. Et il commute aux flèches α_i et λ_i , donc $\phi(Id_X) = 0$. C’est donc un cycle dans \mathcal{E} acyclique, donc c’est un bord de \mathcal{E} : c’est-à-dire il existe une suite d’homotopies $(h_i : X_i \rightarrow X_i)$ de degré 1, telle que $[\phi(h) = 0]$: cela signifie exactement les relations de compatibilité :
 (i) $dh_i = Id_{X_i}$ (ii) $h_{i+1} \circ \lambda_i = \lambda_i \circ h_i$ (iii) $[h_i \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_{i+1} = \alpha_{i+1} \circ h_{i+1}$. ■

Démonstration du sous-lemme : On va construire une suite exacte :

$$(*) : \quad (0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\quad} \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \xrightarrow{\psi} \mathcal{D} \longrightarrow 0)$$

Alors, l’homologie d’un produit étant le produit des homologies, et les complexes X_i étant contractiles, on a : $\mathcal{H}om(X_i, N)$ acycliques, et donc nos 4 complexes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont acycliques. On coupe alors la suite (*) en deux suites exactes courtes :

$$(0 \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\quad} \mathcal{A} \rightarrow Im(\phi) \rightarrow 0) \quad \text{et} \quad (0 \rightarrow Ker(\psi) \rightarrow \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0)$$

Puis on utilise le lemme des 5 pour la suite d’implications : $(\mathcal{B}, \mathcal{C} \text{ acycliques})$ nous donne $(\mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \text{ acyclique})$, or $(\mathcal{D} \text{ acyclique})$ donc $(\mathcal{F} = Ker(\psi) = Im(\phi) \text{ est acyclique})$, et enfin

(\mathcal{A} acyclique) nous donne (\mathcal{E} acyclique). Construisons maintenant la flèche ψ : elle mesure le défaut de commutativité des 2 grands rectangles ci-dessus pour un couple de flèches (β_i, γ_i) .

Ainsi le morphisme $[\psi : \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}]$ est défini par $[(\beta_0, \gamma_0) \mapsto (\delta_0 = \gamma_0 \circ \lambda_0 + \alpha_1 \circ \beta_0)]$ et $[(\beta_i, \gamma_i) \mapsto (\delta_i = \gamma_i \circ \lambda_i + \alpha_{i+1} \circ \beta_i - [\lambda_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \gamma_{i-1} - [\beta_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_i)]$. Il reste à voir : (1) ψ est surjective. (2) $Im(\phi) \subset Ker(\psi)$. (3) $Ker(\psi) \subset Im(\phi)$.

(1) : Soit $(\delta_i)_{i \geq 0}$ fixé. On va construire les flèches (β_i, γ_i) qui relèvent δ par récurrence sur i .
• Pour $i = 0$: $X_0 = 0$ et $\delta_0 = 0$, donc on pose $\beta_0 = \gamma_0 = 0$. On peut supposer : $[\beta_i = 0, \forall i \geq 0]$.
Pour $i = 1$, il s'agit de trouver $(\gamma_1 : X_2 \rightarrow X_1 \otimes S)$ telle que $[\delta_1 = \gamma_1 \circ \lambda_1]$. Or la flèche λ_1 étant une cofibration, on a la décomposition suivante : $[X_2 \simeq X_1 \oplus \tilde{X}_1]$ de modules gradués (ici on oublie les différentielles!). On prend alors $(\gamma_1|_{X_1} = \delta_1)$ et $\gamma_1|_{\tilde{X}_1}$ quelconque convient.
• Pour $i \geq 1$, on cherche $(\gamma_{i+1} : X_{i+2} \rightarrow X_i \otimes S)$ telle que $[\delta_{i+1} = \gamma_{i+1} \circ \lambda_{i+1} - [\lambda_i \otimes \mathbf{1}_S] \circ \gamma_i]$. Suivant la même remarque, λ_{i+1} étant une cofibration, on a la décomposition suivante : $[X_{i+2} \simeq X_{i+1} \oplus \tilde{X}_{i+1}]$, et on définit : $(\gamma_{i+1}|_{X_{i+1}} = \delta_{i+1} + [\gamma_i \otimes \mathbf{1}_S] \circ \gamma_i)$ et alors $(\gamma_{i+1}|_{\tilde{X}_{i+1}})$ quelconque convient. Ceci termine l'étape de récurrence, et donc ψ est surjective.

(2) : On considère les deux diagrammes déjà évoqués :

$$\begin{array}{ccc}
X_i & \xrightarrow{\quad} & X_{(i+1)} & \xrightarrow{\quad} & X_i \otimes S & & X_i & \xrightarrow{\quad} & X_{(i-1)} \otimes S & \xrightarrow{\quad} & X_i \otimes S \\
h_i \downarrow & \searrow \beta_i & \vdots & \searrow \gamma_i & h_i \otimes \mathbf{1}_S \downarrow & & h_i \downarrow & \searrow \gamma_{i-1} & \vdots & \searrow \beta_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S & h_i \otimes \mathbf{1}_S \downarrow \\
X_i & \xrightarrow{\quad} & X_{(i+1)} & \xrightarrow{\quad} & X_i \otimes S & & X_i & \xrightarrow{\quad} & X_{(i-1)} \otimes S & \xrightarrow{\quad} & X_i \otimes S
\end{array}$$

Ici $[\psi \circ \phi(h_i) = \psi((\beta_i), (\gamma_i)) = (\delta_i)]$ correspond à la différence des deux rectangles extérieurs. Or ceci est nul d'après la relation : $[\alpha_{i+1} \circ \lambda_i = [\lambda_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_i]$. Donc on a : $Im(\phi) \subset Ker(\psi)$.

(3) : On suppose $(\beta_i), (\gamma_i)$ donnés tels que $\delta = 0$. On va construire par récurrence sur i un élément (h_i) tel que $\phi(h_i) = (\beta_i, \gamma_i)$. Pour $(i = 0)$, on a $(X_0 = 0)$ et donc $[\beta_0 = \gamma_0 = h_0 = 0]$.
• Pour $(i = 1)$: on regarde le diagramme de gauche avec $(i = 0)$: h_1 quelconque convient!
• Pour $i \geq 1$, on cherche à construire h_{i+1} tel que $(h_{i+1} \circ \lambda_i = \beta_i + \lambda_i \circ h_i = b)$ et $(\alpha_{i+1} \circ h_{i+1} = [h_i \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_{i+1} - \gamma_i = a)$ sont déjà fixées : c'est-à-dire à trouver la flèche en pointillés du diagramme de gauche. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H}om(X_{i+1}, K) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}om(X_i, K) & & e & \xrightarrow{\quad} & d \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om(X_{i+1}, X_{i+1}) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}om(X_i, X_{i+1}) & & x & \xrightarrow{\quad} & b \neq b' \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om(X_{i+1}, X_i \otimes S) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{H}om(X_i, X_i \otimes S) & & a & \xrightarrow{\quad} & c & & 0 & & 0
\end{array}$$

Notant $K = Ker(\alpha_{i+1})$, on a la suite exacte courte : $(0 \rightarrow K \rightarrow X_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} X_i \otimes S \rightarrow 0)$ car le \mathcal{D}_0 -complexe X est réduit ; comme X_i est projectif, le foncteur $\mathcal{H}om(X_i, \cdot)$ est exact, donc les deux colonnes de notre diagramme sont deux suites exactes courtes. Les flèches horizontales sont données par la composition $(\cdot \circ \lambda_i)$, les verticales par la composition $(\alpha_{i+1} \circ \cdot)$, donc le diagramme commute. Enfin, la flèche λ_i étant une cofibration, toutes les flèches horizontales sont surjectives (on écrit la décomposition en somme directe de modules gradués). On va dès lors pouvoir faire une chasse-au-diagramme : relevons a en x , le défaut $(b - b')$ s'envoyant sur 0, se relève en d , que l'on relève en e . Son image y va corriger le défaut sur b sans toucher à a . Il suffit donc de poser $(h_{i+1} = x + y)$. La seule chose encore à vérifier est la suivante : a et b coïncident sur c . Avec nos notations, cela revient à voir : $[\alpha_{i+1} \circ \beta_i + \alpha_{i+1} \circ \lambda_i \circ h_i = [h_i \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_{i+1} \circ \lambda_i - \gamma_i \circ \lambda_i]$ que l'on écrira de préférence ainsi : $[-(\alpha_{i+1} \circ \lambda_i) \circ h_i + [h_i \otimes \mathbf{1}_S] \circ (\alpha_{i+1} \circ \lambda_i) \quad \quad \quad \alpha_{i+1} \circ \beta_i + \gamma_i \circ \lambda_i]$ $= -([\lambda_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_i) \circ h_i + [h_i \otimes \mathbf{1}_S] \circ ([\lambda_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_i)$ par la relation $[\alpha_{i+1} \circ \lambda_i = [\lambda_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_i]$ $= [\beta_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \alpha_i + [\lambda_{i-1} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \lambda_{i-1}$ par construction et hypothèse de récurrence

$$= \alpha_{i+1} \circ \beta_i + \gamma_i \circ \lambda_i$$

$$\text{car } \psi(\beta_i, \gamma_i) = 0.$$

Ainsi se termine la chasse-au-diagramme, et donc l'étape de récurrence. On a donc montré que : $\text{Ker}(\psi) \subset \text{Im}(\phi)$. La suite (*) est donc exacte, et le raisonnement ci-dessus permet de construire une homotopie qui commute aux flèches λ_i et α_i . Donc X est contractile. ■

Lemme 3 .

Soit $(0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0)$ une suite exacte courte de \mathcal{D}_0 -complexes quelconques, et X un \mathcal{D}_0 -complexe réduit. Alors on a la suite exacte longue d'homotopie : $(\dots \rightarrow [A, X]_{p+1} \rightarrow [C, X]_p \rightarrow [B, X]_p \rightarrow [A, X]_p \rightarrow \dots)$.

Démonstration :

On montre que l'on a la suite exacte courte de complexes : $(0 \rightarrow \mathcal{H}om_*(C, X) \rightarrow \mathcal{H}om_*(B, X) \rightarrow \mathcal{H}om_*(A, X) \rightarrow 0)$, puis on applique la suite exacte longue d'homologie pour trouver le résultat demandé. Comme le foncteur $\mathcal{H}om$ est exact à gauche, il suffit de montrer la surjection : $[\mathcal{H}om(B, X) \twoheadrightarrow \mathcal{H}om(A, X)]$, c'est-à-dire : $[\forall(f : A \rightarrow X), \exists(g : B \rightarrow X)]f = g \circ \phi$.

On va construire la flèche g par récurrence sur i : comme $A_0 = B_0 = X_0 = 0$, on pose $g_0 = 0$.
 • Pour $i = 1$, on cherche $(g_1 : B_1 \rightarrow X_1)$ telle que $[g_1 \circ \phi_1 = f_1]$ et qui commute à $\lambda_0 = 0$ et $\alpha_1 = 0$ (pas de condition !). Comme le complexe C_1 est projectif en chaque degré, la suite exacte courte $(0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow C_1 \rightarrow 0)$ est scindée algébriquement (c'est-à-dire que l'on a la somme directe : $[B_1 \simeq A_1 \oplus C_1]$ comme module gradué : on oublie les différentielles ici !). On construit alors g_1 grâce à cette décomposition : on prend $g_1|_{A_1} = f_1$ et $g_1|_{C_1}$ quelconque.
 • Pour $i \geq 1$, on cherche $(g_{(i+1)} : B_{(i+1)} \rightarrow X_{(i+1)})$ telle que $[g_{(i+1)} \circ \phi_{(i+1)} = f_{(i+1)}]$, faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} B_i & \xrightarrow{\lambda_i} & B_{(i+1)} & \xrightarrow{\alpha_{(i+1)}} & B_i \otimes S \\ g_i \downarrow & & \downarrow g_{(i+1)} & & \downarrow g_i \otimes \mathbf{1}_S \\ X_i & \xrightarrow{\lambda_i} & X_{(i+1)} & \xrightarrow{\alpha_{(i+1)}} & X_i \otimes S \end{array}$$

On vérifie que le grand rectangle commute : on utilise la relation $[\lambda \circ \alpha = \alpha \circ \lambda]$ et l'hypothèse de récurrence qui dit que g_k déjà défini pour $(k \leq i)$ commute aux flèches λ et α . On considère alors le pushout suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\quad} & A_{(i+1)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B_i & \xrightarrow{\quad} & B_i \amalg_{A_i} A_{(i+1)} \\ & & \searrow \lambda_i \circ g_i \\ & & X_{(i+1)} \end{array}$$

On vérifie que le carré externe commute : $[f_{(i+1)} \circ \lambda_i = \lambda_{(i+1)} \circ f_i = \lambda_{(i+1)} \circ g_i \circ \phi_i]$.
 Puis on regarde la commutation à $\alpha_{(i+1)}$: sur $A_{(i+1)}$ c'est $f_{(i+1)}$ qui commute; sur B_i , on écrit la relation $[\alpha \circ \lambda = \lambda \circ \alpha]$ et l'hypothèse de récurrence qui dit que les g_k déjà définis commutent à α . On obtient ainsi : $g_{(i+1)}$ est déjà définie sur le pushout, et vérifie toutes les relations de commutation voulues. On écrit alors les décompositions algébriques suivantes, dues au fait que les flèches λ_i sont des cofibrations, de conoyau projectif : $[A_{(i+1)} \simeq A_i \oplus \tilde{A}_i]$, $[B_{(i+1)} \simeq B_i \oplus \tilde{B}_i]$ et $[C_{(i+1)} \simeq C_i \oplus \tilde{C}_i]$. Puis $[B_i \simeq A_i \oplus C_i]$ et $[B_{(i+1)} \simeq A_{(i+1)} \oplus C_{(i+1)} \simeq A_i \oplus \tilde{A}_i \oplus C_i \oplus \tilde{C}_i \simeq (B_i \amalg_{A_i} A_{(i+1)}) \oplus \tilde{C}_i]$. Ainsi il reste seulement à définir une flèche $[g_{(i+1)} : \tilde{C}_i \rightarrow X_{(i+1)}]$ qui commute à $\alpha_{(i+1)}$. Or $[X_{(i+1)} \xrightarrow{\alpha_{(i+1)}} X_i \otimes S]$ est surjective, et \tilde{C}_i est projectif, donc la flèche $[(g_i \otimes \mathbf{1}_S) \circ \alpha_{(i+1)} : \tilde{C}_i \rightarrow X_i \otimes S]$ se relève en une flèche $[g_{(i+1)} : \tilde{C}_i \rightarrow X_{(i+1)}]$. Ceci termine l'étape $(i + 1)$ de récurrence. ■

Lemme 4 .

Soit $(0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0)$ une suite exacte courte de \mathcal{D}_0 -complexes, et X un \mathcal{D}_0 -complexe quelconque. On suppose A réduit. Alors on a la suite exacte longue d'homotopie : $(\dots \rightarrow [X, C]_{p+1} \rightarrow [X, A]_p \rightarrow [X, B]_p \rightarrow [X, C]_p \rightarrow \dots)$.

Démonstration :

On montre que l'on a la suite exacte courte de complexes : $(0 \rightarrow \mathcal{H}om(X, A) \rightarrow \mathcal{H}om(X, B) \rightarrow \mathcal{H}om(X, C) \rightarrow 0)$, puis on applique la suite exacte longue d'homologie pour trouver le résultat demandé. Comme le foncteur $\mathcal{H}om$ est exact à gauche, il suffit de montrer la surjection : $[\mathcal{H}om(X, B) \twoheadrightarrow \mathcal{H}om(X, C)]$, c'est-à-dire : $[\forall(\gamma : X \rightarrow C), \exists(\beta : X \rightarrow B)]g \circ \beta = \gamma$.

On va construire la flèche β par récurrence sur i : comme $B_0 = C_0 = X_0 = 0$, on pose $\beta_0 = 0$.

• Pour $i = 1$, on cherche $(\beta_1 : X_1 \rightarrow B_1)$ telle que $[g_1 \circ \beta_1 = \gamma_1]$ et qui commute à $\lambda_0 = 0$ et $\alpha_1 = 0$ (pas de condition !). Le complexe X_1 étant projectif, et g_1 surjectif, alors β_1 existe.

• Pour $i \geq 1$, on cherche $(\beta_{(i+1)} : X_{(i+1)} \rightarrow B_{(i+1)})$ telle que $[g_{(i+1)} \circ \beta_{(i+1)} = \gamma_{(i+1)}]$, faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} X_i & \xrightarrow{\lambda_i} & X_{(i+1)} & \xrightarrow{\alpha_{(i+1)}} & X_i \otimes S \\ \beta_i \downarrow & & \downarrow \beta_{(i+1)} & & \downarrow \beta_i \otimes \mathbf{1}_S \\ B_i & \xrightarrow{\lambda_i} & B_{(i+1)} & \xrightarrow{\alpha_{(i+1)}} & B_i \otimes S \end{array}$$

On vérifie que le grand rectangle commute : on utilise la relation $[\lambda \circ \alpha = \alpha \circ \lambda]$ et l'hypothèse de récurrence qui dit que β_k déjà défini pour $(k \leq i)$ commute aux flèches λ et α . Comme la flèche

$[X_i \xrightarrow{\lambda_i} X_{(i+1)}]$ est une cofibration, on a la somme directe algébrique : $[X_{(i+1)} \simeq X_i \oplus \tilde{X}_i]$. Il suffit donc de définir $[\beta_{(i+1)} : \tilde{X}_i \rightarrow B_{(i+1)}]$, telle que : $[\alpha_{(i+1)} \circ \beta_{(i+1)} = (\beta_i \otimes \mathbf{1}_S) \circ \alpha_{(i+1)}]$ et $[g_{(i+1)} \circ \beta_{(i+1)} = \gamma_{(i+1)}]$. Pour cela, on va construire un grand diagramme commutatif, et faire une chasse-au-diagramme : on commence par les suites exactes $(0 \rightarrow A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i \rightarrow 0)$.

Comme S est plat, et A_* réduit, on obtient le diagramme commutatif avec deux colonnes exactes : $A_{(i+1)} \twoheadrightarrow A_i \otimes S$. Comme \tilde{X}_i est projectif, le foncteur $\mathcal{H}om(\tilde{X}_i, \cdot)$ est exact.

$$\begin{array}{ccc} A_{(i+1)} & \twoheadrightarrow & A_i \otimes S \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{(i+1)} & \twoheadrightarrow & B_i \otimes S \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{(i+1)} & \twoheadrightarrow & C_i \otimes S \end{array}$$

On obtient : $\mathcal{H}om(\tilde{X}_i, A_{(i+1)}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}om(\tilde{X}_i, A_i \otimes S)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om(\tilde{X}_i, B_{(i+1)}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}om(\tilde{X}_i, B_i \otimes S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om(\tilde{X}_i, C_{(i+1)}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}om(\tilde{X}_i, C_i \otimes S) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x \mapsto b' \neq b & & e \twoheadrightarrow d \\ \downarrow & & \downarrow \\ a \mapsto c & & y \mapsto (b - b') \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Décryptage : ici on prend $[b = (\beta_i \otimes \mathbf{1}_S) \circ \alpha_{(i+1)}]$, et $[a = \gamma_{(i+1)}]$ qui coïncident en bas, sur $[c = \alpha_{(i+1)} \circ \gamma_{(i+1)} = (g_i \otimes \mathbf{1}_S) \circ (\beta_i \otimes \mathbf{1}_S) \circ \alpha_{(i+1)}]$. On veut les remonter tous les deux en un élément $\beta_{(i+1)}$. 1^{er} essai : la flèche en bas à gauche étant surjective, on peut remonter a en x . Mais on a un défaut $b - b'$. Ce défaut s'envoyant verticalement sur 0, se remonte (par exactitude) en d , que l'on remonte par surjectivité de la flèche horizontale en haut en e . Alors son image y permet de corriger le défaut, sans toucher à a . On pose donc $\beta_{(i+1)} = x + y$. ■

Lemme 5 .

Soit \mathcal{E} une des catégorie de \mathcal{D}_0 -complexes suivantes ($\mathcal{E} = \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B}_n$, ou \mathcal{A}_n), et \mathcal{E}^{red} sa sous-catégorie formée des objets réduits. Alors on a : $K(\mathcal{E}^{red}) \simeq K(\mathcal{E})$.

Démonstration :

Remarquons tout d'abord que la sous-catégorie \mathcal{E}^{red} possède les 3 propriétés de stabilité, duales de celles du théorème de résolution : considérons une suite exacte courte $(0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0)$, si M est réduit alors M'' aussi; et si M', M'' sont réduits, alors M aussi. Enfin, le lemme 1 fournit pour tout objet M'' une suite exacte courte avec M réduit. On pourrait appliquer le théorème de résolution à l'inclusion : $(\mathcal{E}^{red, opp} \subset \mathcal{E}^{opp})$, puis écrire l'équivalence : $[K(\mathcal{E}^{red}) \simeq K(\mathcal{E}^{red, opp}) \simeq K(\mathcal{E}^{opp}) \simeq K(\mathcal{E})]$. Mais ce théorème de Quillen nous forcerait à prendre comme équivalences faibles les isomorphismes (puis à les changer grâce au théorème de fibration ...). En fait, il y a plus simple : il suffit d'appliquer le théorème d'approximation de Waldhausen au foncteur exact d'inclusion $(\mathcal{E}^{red, opp} \subset \mathcal{E}^{opp})$. Les seules vérifications non-triviales sont l'existence d'un foncteur-cylindre, et l'axiome [App2].

• Existence d'un foncteur-cylindre : soit $(f_* : A_* \rightarrow B_*)$ une flèche de \mathcal{D}_0 -complexes. On construit un \mathcal{D}_0 -complexe $T(f)$ en posant : $[T(f)]_i = T(f_i)$. Tout diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \twoheadrightarrow & A_{(i+1)} & \longrightarrow & A_i \otimes S \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{(i+1)} & & \downarrow f_i \otimes \mathbf{1}_S \\ B_i & \twoheadrightarrow & B_{(i+1)} & \longrightarrow & B_i \otimes S \end{array}$$

induit par functorialité des flèches au niveau du cylindre : $[T(f_i) \xrightarrow{\lambda_i} T(f_{(i+1)}) \xrightarrow{\alpha_{(i+1)}} T(f_i) \otimes S]$. La functorialité de $T(f)$ sur \mathcal{C}_R permet d'assurer la relation : $[\alpha \circ \lambda = \lambda \circ \alpha]$. Ensuite, le choix de $A_0 = B_0 = 0$ impose $T(f)_0 = 0$. Le fait que les λ_i se stabilisent provient du quasi-isomorphisme $[p : T(f) \rightarrow B]$. Il reste à voir que les λ_i sont des cofibrations : on écrit le diagramme commutatif suivant, où les deux lignes sont des suites exactes courtes algébriquement scindées :

$$\begin{array}{ccccc} A_i & \twoheadrightarrow & A_{(i+1)} & \twoheadrightarrow & \tilde{A}_i \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{(i+1)} & & \downarrow \tilde{f}_i \\ B_i & \twoheadrightarrow & B_{(i+1)} & \twoheadrightarrow & \tilde{B}_i \end{array}$$

somme directe algébrique : $[T(f_{(i+1)}) \simeq T(f_i) \oplus T(\tilde{f}_i)]$. D'où la flèche λ_i est une cofibration. Enfin, montrons que si A_* et B_* sont réduits, alors $T(f)_*$ est réduit aussi : on considère les deux suites exactes courtes $[A \rightarrow C(A) \rightarrow sA]$ et $[B \rightarrow T(f) \rightarrow C(A)]$. Alors, d'après la remarque préliminaire, A réduit implique sA réduit, donc le cône $C(A)$ est réduit. Puis B et $C(A)$ réduits impliquent que $T(f)$ est réduit. Le foncteur \mathbb{T} est donc interne à \mathcal{E}^{red} .

• Axiome de surjectivité : soit A_* réduit, et $(f_* : B_* \rightarrow A_*)$ une flèche de \mathcal{E} . Par le lemme 1, on lui applique la suite exacte de réduction : on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} B_* & \xrightarrow{j} & \tilde{B}_* \longrightarrow E \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ A_* & \simeq & A_* \end{array}$$

On a bien factorisé f par une flèche de \mathcal{E}^{red} précédée d'un qis : c'est l'axiome [App2]^{opp}. ■

2.4 Différentes interprétations du $KNil(R, S)$

Rappelons que la catégorie $Nil(R; S)$ définie par Waldhausen a pour objets les couples (M, α) où M est dans \mathcal{P}_R et $\alpha : M \rightarrow M \otimes S$ est une flèche nilpotente. La manière la plus naïve de généraliser cette catégorie est de remplacer les modules M par des complexes usuels C_* dans \mathcal{C}_R , et la flèche α par un morphisme de chaînes $\alpha_* : C_* \rightarrow C_* \otimes S$. On obtient ainsi une nouvelle catégorie $Nil(\mathcal{C}_R; S)$, qui redonne la même K-théorie $[K(Nil(R; S), isom) \simeq K(Nil(\mathcal{C}_R; S), qis)]$ par un raisonnement analogue au théorème de Gillet-Waldhausen (Proposition 1)]. L'étape suivante consiste à demander de plus que la filtration associée à la flèche nilpotente α soit fixée (et pas seulement à homotopie près) sur une suite crois-

sante de sous-complexes homotopiquement finis. Pour appliquer le théorème d'approximation, on doit ici utiliser précisément la description des objets locaux faite au chapitre 4.2.4, puis la décomposition des complexes nilpotents en éléments “ stablement réductibles ” rappelée au chapitre 5.8 (tirée de l'article non-publié [Vog90]), condition de finitude qui demande la régularité de l'anneau de base R (au sens de Vogel, défini au chapitre 5); on obtient alors l'équivalence : $K(\mathcal{N}il(R; S), isom) \simeq K(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

Théorème 13 .

L'inclusion canonique $[\mathcal{N}il(R; S) \subset \mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)]$ induit une suite d'équivalences en K-théorie : $K(\mathcal{N}il(R; S), isom) \simeq K(\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R^f; S), qis) \simeq K(\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S), qis)$.

Démonstration :

1^{ère} étape : On considère la catégorie \mathcal{C} des diagrammes $(A \xleftarrow{\sim} C \xrightarrow{\sim} E)$ où A est dans $\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)$, et E est dans $\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R^f; S)$, et les 2 flèches sont des équivalences d'homotopie. Nous allons utiliser le théorème d'approximation pour les 2 foncteurs projection pour montrer la suite d'équivalences : $[K(\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S), qis) \simeq K(\mathcal{C}, qis) \simeq K(\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R^f; S), qis)]$. La seule chose non-triviale à montrer est l'axiome de surjectivité [App2]^{opp} pour le foncteur projection $[p_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)]$. Soit donc $(A \xleftarrow{\sim} C \xrightarrow{\sim} E)$ dans \mathcal{C} et $(f : B \rightarrow A)$ une flèche de $\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)$. Au-dessus de C , on construit $\hat{C} \oplus E$, où \hat{C} est la désuspension du cône de C , et la flèche α sur \hat{C} est induite par le cône; sur E , a priori, les flèches $(E \rightarrow E \otimes S \rightarrow C \otimes S)$ et $(E \rightarrow C \rightarrow C \otimes S)$ sont différentes : on relève le défaut en une flèche $(E \rightarrow \hat{C} \otimes S)$ [existe car E est projectif, le défaut est homotope à zéro, et $(\hat{C} \rightarrow C)$ est surjective]. On construit alors Z le pullback $B \coprod_A \hat{C} \otimes S$. Comme Z est homotopiquement fini, il existe un $qis (F \rightarrow Z)$ avec F fini; de même, on construit $\hat{Z} \oplus F$ au-dessus de Z . On construit ainsi le diagramme commutatif suivant, où tous les morphismes respectent les flèches α nilpotentes :

$$\begin{array}{ccccc}
 B & \xleftarrow{\sim} & \hat{Z} \oplus F & \xrightarrow{\sim} & F \\
 \parallel & & \downarrow \wr & & \vdots \\
 B & \xleftarrow{\dots \sim} & Z & & \vdots \\
 \downarrow f & \lrcorner & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 A & \xleftarrow{\sim} & \hat{C} \oplus E & \xrightarrow{\sim} & E \\
 \parallel & & \downarrow \wr & & \parallel \\
 A & \xleftarrow{\sim} & C & \xrightarrow{\sim} & E
 \end{array}$$

Il suffit alors de voir que les flèches $(\hat{Z} \rightarrow Z \rightarrow \hat{C} \oplus E \rightarrow \hat{C})$ sont compatibles aux flèches α nilpotentes, pour construire la flèche $(F \rightarrow E)$ au niveau des complexes finis, et ainsi vérifier l'axiome [App2]. Par le théorème d'approximation, on a alors démontré l'équivalence : $K(\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R^f; S), qis) \simeq K(\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S), qis)$. ■

2^{ième} étape : La démonstration est calquée sur celle du théorème de Gillet-Waldhausen, mais avec une subtilité supplémentaire lors de la récurrence. Soit $\mathcal{N}il(\mathcal{C}_M^N; S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R^f; S)$ formée des R -complexes nilpotents C_* tels que C_k est nul si $k \notin [M, N]$. La suspension induit bien sûr une équivalence $[K\mathcal{N}il(\mathcal{C}_M^N; S) \simeq K\mathcal{N}il(\mathcal{C}_0^{N-M}; S)]$. Il suffit donc de considérer les catégories $K\mathcal{N}il(\mathcal{C}_0^n; S)$. On va raisonner par récurrence sur l'indice n . Notons $\mathcal{N}il^s(\mathcal{C}_0^n; S)$ la sous-catégorie pleine formée des complexes $[C_* = (0 \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0)]$ munis d'une flèche α_* telle que α_0 est strictement nilpotente (on va voir à l'étape ci-dessous que cette restriction ne change pas la K-théorie). Suivant les mêmes

notations que lors de la démonstration page 9, nous obtenons un diagramme “ exact ” :

$$\begin{array}{ccccc}
K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^{n-1,w}, v) & \xrightarrow{\quad} & K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^{n-1}, v) & \xrightarrow{\quad} & K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^{n-1}, w) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_1^{n,w}, v) & \xrightarrow{\quad} & K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_1^n, v) & \xrightarrow{\quad} & K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_1^n, w) \\
\downarrow & \text{\textcircled{D}} & \downarrow & & \downarrow \wr \\
K_*\mathcal{N}il^s(\mathfrak{C}_0^{n,w}, v) & \xrightarrow{\quad} & K_*\mathcal{N}il^s(\mathfrak{C}_0^n, v) & \xrightarrow{\quad} & K_*\mathcal{N}il^s(\mathfrak{C}_0^n, w) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K_*\mathcal{N}il(R; S) & \xlongequal{\quad} & K_*\mathcal{N}il(R; S) & &
\end{array}$$

Ceci nous permet de montrer par récurrence la suite d'équivalences : $[K_*(\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^n; S), w) \simeq K_*(\mathcal{N}il^s(\mathfrak{C}_0^n; S), w) \simeq K_*(\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^{n-1}; S), w) \simeq K_*(\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^0; S), w) \simeq K_*(\mathcal{N}il(R; S), isom)]$. La conclusion de notre calcul s'obtient par passage à la limite inductive : $[K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_R^f; S) \simeq K_*\mathcal{N}il(\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{C}_{-n}^n; S) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_{-n}^n; S) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} K_*\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^{2n}; S) \simeq K_*(\mathcal{N}il(R; S))$. ■

3^{ième} étape : Il nous reste désormais à étudier la “ strictification ”. On considère un complexe

fini $[C_* \in \mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^n; S)]$, et on va construire un diagramme $(C_* \xleftarrow{\sim} D_* \xrightarrow{\sim} E_*)$, où E_* est dans $\mathcal{N}il^s(\mathfrak{C}_0^n; S)$. Soit H_0 le plus petit groupe d'homologie de C_* (il est de type fini, car quotient de C_0). La flèche $[\alpha : H_0 \rightarrow H_0 \otimes S]$ est nilpotente (strictement) d'ordre N . Notons $[I_k = Ker(\alpha^k)]$. On a alors une filtration naturelle : $(0 = I_0 \subset I_1 \dots \subset I_N = H_0)$. On la remplace par une filtration de type fini : $(0 = J_0 \subset J_1 \dots \subset J_N = H_0)$. On procède par récurrence décroissante sur l'indice k : $[\alpha(J_k) \subset (I_{k-1} \otimes S) \cap (J_k \otimes S) = (I_{k-1} \cap J_k) \otimes S]$ car S est plat ; on écrit l'image des générateurs (ϵ_i) de J_k : $[\alpha(\epsilon_i) = \sum \mu_{ij} \otimes s_{ij}]$, les μ_{ij} sont un nombre fini d'éléments de $J_k \cap I_{k-1}$, ils engendrent J_{k-1} de type fini, et on a : $[\alpha(J_k) \subset J_{k-1} \otimes S]$. On relève alors cette filtration de H_0 de type fini, en une filtration $[K_i = L_i + dC_1]$ avec L_i de type fini : on relève les générateurs des J_k et on rajoute ce qu'il faut pour que α soit filtrée décroissante : $(L_i \rightarrow L_{i-1} \otimes S)$ et $(L_0 \rightarrow L_0 \otimes S)$. Compatibilité : supposons qu'on ait une cofibration $(f : B \rightarrow C)$ avec une filtration (M_i) sur B : on modifie alors la filtration sur C en posant : $[L'_i = L_i + fM_i]$, ce qui donne une filtration K'_i compatible à la flèche f . Enfin, pour tout i , on prend une surjection canonique $(\tilde{L}_i \rightarrow L_i)$, avec \tilde{L}_i projectifs de type fini : on relève ainsi la filtration (L_i) en $(\tilde{L}_0 \subset \tilde{L}_0 \oplus \tilde{L}_1 \subset \dots \subset \tilde{L}_0 \oplus \dots \oplus \tilde{L}_N)$ et on relève la flèche α en prenant l'image des générateurs. Enfin, on pose $[D_0 = \tilde{L}_0 \oplus \dots \oplus \tilde{L}_N \oplus C_1]$ (il est projectif de type fini). Remarquons que lors d'une compatibilité avec une cofibration $(f : B \rightarrow C)$, on peut effectuer des relèvements de α compatibles. On termine alors la construction du complexe fini D_* en posant : $[D_k = C_k]$ pour tout $(k \geq 2)$, $K = Ker[D_0 \rightarrow C_0]$ et $[D_1 = C_1 \oplus K]$. On obtient alors le diagramme commutatif suivant, qui décrit les différentielles du complexe D_* :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & \longleftarrow & K & \xlongequal{\quad} & K & \longleftarrow & 0 & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow & \\
D_* : & & 0 & \longleftarrow & (D_0 = \bigoplus \tilde{L}_i \oplus C_1) & \xleftarrow{Id_{C_1} \oplus i} & (C_1 \oplus K) & \xleftarrow{d \oplus \lambda} & C_2 & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Id \oplus 0 & & \parallel & \\
C_* : & & 0 & \longleftarrow & C_0 & \xleftarrow{d} & C_1 & \xleftarrow{d} & C_2 & \cdots
\end{array}$$

La flèche $[\lambda : C_2 \rightarrow K]$ est obtenue par factorisation, car la composée $(C_2 \rightarrow D_0 \rightarrow C_0)$ est nulle. Le complexe du dessus étant contractile, on a bien construit un qis surjectif $[D_* \rightarrow C_*]$. Enfin, le complexe E_* est obtenu grâce au quotient du complexe D_* par le sous-complexe contractile $(0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_1 \rightarrow 0)$. On a donc $[E_0 = \bigoplus \tilde{L}_i]$, $[E_1 = K]$ et $[E_k = C_k]$ pour tout $(k \geq 2)$. Compatibilité : pour une cofibration $(f : B \rightarrow C)$, on obtient, grâce à des relèvements compatibles, un morphisme de diagrammes : $(B_* \xleftarrow{\sim} A_* \xrightarrow{\sim} F_*)$, et on peut remplacer les

$$\begin{array}{ccc}
\downarrow f & & \downarrow \\
(C_* \xleftarrow{\sim} D_* \xrightarrow{\sim} E_*) & &
\end{array}$$

flèches verticales par des cofibrations, quitte à ajouter des complexes acycliques de la catégorie concernée (par exemple le cône $C(A_*)$ à D_* , et le cône $C(F_*)$ à E_*). On termine alors par un

argument de Thomason, disant qu'alors le foncteur inclusion $\mathcal{N}il^s(\mathfrak{C}_0^n; S) \subset \mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^n; S)$ induit une équivalence au niveau des catégories dérivées. Plus simplement, on peut aussi utiliser la généralisation de l'hypothèse d'approximation $[App2']$ définie ci-dessous, qui induit alors l'équivalence en K-théorie : $K\mathcal{N}il^s(\mathfrak{C}_0^n; S) \simeq K\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_0^n; S)$. ■

Définition 9 .

Soit $(F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ un foncteur exact, entre 2 catégories de \mathcal{D}_0 -complexes.

On dira que le foncteur F vérifie l'axiome $[App2']$ si

$$\forall A \in Ob\mathbf{A}, \exists (F(A) \xleftarrow{\sim} A' \xrightarrow{\sim} F(A'')) , \text{ et } \forall (f : F(A) \twoheadrightarrow B) \in co\mathbf{B} ,$$

$\exists (u : A'' \twoheadrightarrow B'') \in co\mathbf{A} , \text{ et on peut compléter le diagramme commutatif :$

$$\begin{array}{ccccc} F(A) & \xleftarrow{\sim} & A' & \xrightarrow{\sim} & F(A'') \\ f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow F(u) \\ B & \xleftarrow{\sim} & B' & \xrightarrow{\sim} & F(B'') \end{array}$$

Suivant une idée originale de Gregory Garkusha dans [Gar04], nous adaptons ci-dessous l'hypothèse $[App2]$ du théorème d'approximation de Waldhausen.

Proposition 5 [Approximation,variante]

Soit $(F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})$ un foncteur exact, entre 2 catégories de \mathcal{D}_0 -complexes.

La classe des qis vérifie alors les axiomes $[Saturation]$ et $[Cylindre]$ sur les catégories \mathbf{A} et \mathbf{B} . Supposons que le foncteur F vérifie de plus l'axiome $[App1]$, et l'un au choix des axiomes suivants : $[App2],[App2'],[App2]^{opp}$, ou $[App2']^{opp}$. Alors F induit une équivalence des spectres de K-théorie : $K(\mathbf{A}) \simeq K(\mathbf{B})$.

Démonstration :

- Grâce à l'équivalence : $K(\mathbf{A}^{opp}, qis) \simeq K(\mathbf{A}, qis)$, il suffit d'appliquer $[App2]^{opp}$ et $[App2']^{opp}$ au foncteur dual $(F^{opp} : \mathbf{A}^{opp} \rightarrow \mathbf{B}^{opp})$ pour obtenir l'équivalence de K-théorie voulue.
- Le cas $[App2]$ étant résolu par Waldhausen, il nous reste à examiner l'hypothèse $[App2']$. On montre alors par récurrence sur n que le foncteur induit $(wS_n \mathbf{A} \rightarrow wS_n \mathbf{B})$ vérifie aussi l'axiome d'approximation $[App2']$. Nous allons traiter le cas $n = 1$, le cas général s'en déduit aisément. Soit donc $(A_1 \twoheadrightarrow A_2) \in co\mathbf{A}$, $(B_1 \twoheadrightarrow B_2) \in co\mathbf{B}$, et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(A_1) \twoheadrightarrow & F(A_2) \\ f_1 \downarrow & \downarrow f_2 \\ B_1 \twoheadrightarrow & B_2 \end{array}$$

On applique l'hypothèse $[App2']$ aux flèches $(F(A_1) \rightarrow F(A_2))$ et $(F(A) \rightarrow B_1)$, puis on construit les pushouts $Z_2 = B_1 \amalg_{F(A_1)} F(A_2)$, $Z'_2 = B'_1 \amalg_{A'_1} A'_2$, et $Z''_2 = B''_1 \amalg_{A''_1} B''_2$, qui forment le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & F(A''_1) & \twoheadrightarrow & F(A''_2) & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & \sim & & \sim & \\ & & & A'_1 & \twoheadrightarrow & A'_2 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ F(A_1) & \twoheadrightarrow & F(A_2) & & & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & F(B''_1) & \twoheadrightarrow & F(Z''_2) & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & \sim & & \sim & \\ & & & B'_1 & \twoheadrightarrow & Z'_2 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ B_1 & \twoheadrightarrow & Z_2 & & & & \end{array}$$

On construit alors la flèche de diagrammes :

$$\begin{array}{ccccc} Z_2 & \xleftarrow{\sim} & Z'_2 & \xrightarrow{\sim} & F(Z''_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_2 & \xleftarrow{\sim} & \hat{B}_2 & \cdots \xrightarrow{\sim} & \tilde{B}_2 \end{array}$$

en posant : $\hat{B}_2 = T(Z'_2 \rightarrow Z_2 \rightarrow B_2)$ et en construisant le pushout : $\tilde{B}_2 = \hat{B}_2 \amalg_{Z'_2} F(Z''_2)$. On recommence alors toute la construction ci-dessus en partant de $F(A'_1)$ et en construisant un diagramme compatible jusqu'à \tilde{B}_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & F(A''''_1) & \xrightarrow{\sim} & & F(A''''_2) \\ & & & \downarrow & & & \downarrow \\ & & & A''''_1 & \xrightarrow{\sim} & & A''''_2 \\ & & & \downarrow & & & \downarrow \\ F(A'_1) & \xrightarrow{\sim} & A''_1 & \xrightarrow{\sim} & F(A''_2) & \xrightarrow{\sim} & F(A''_2) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & F(B''''_1) & \xrightarrow{\sim} & F(Z''''_2) & \xrightarrow{\sim} & F(\tilde{B}'_2) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F(B'_1) & \xrightarrow{\sim} & B''_1 & \xrightarrow{\sim} & Z''_2 & \xrightarrow{\sim} & \tilde{B}_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & F(Z''_2) & \xrightarrow{\sim} & & & \tilde{B}_2 \end{array}$$

Jusqu'ici, toutes les constructions pré-citées sont valables dans des catégories de Waldhausen générales. Ici, nous avons besoin de la structure sous-jacente de complexes pour l'existence du pullback suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \text{pull} & \\ & \swarrow \sim & \searrow \sim \\ & \hat{B}_2 & \tilde{B}'_2 \\ & \swarrow \sim & \searrow \sim \\ B_2 & & \tilde{B}_2 & & F(\tilde{B}'_2) \end{array}$$

Cette construction, appliquée à $F(A_1), F(A_2), B_1, Z_2$ et B_2 permet de réduire la profondeur du diagramme pour obtenir l'hypothèse $[App2']$ pour le foncteur induit $(wS_1\mathbf{A} \rightarrow wS_1\mathbf{B})$. Ainsi on a montré par récurrence sur n que le foncteur induit $(wS_n\mathbf{A} \rightarrow wS_n\mathbf{B})$ vérifie l'hypothèse d'approximation $[App2']$. La proposition s'ensuit par un lemme général d'espaces bisimpliciaux : si $(f_{*n} : X_{*n} \rightarrow Y_{*n})$ est une équivalence d'homotopie pour tout indice n , alors $(f_{**} : X_{**} \rightarrow Y_{**})$ est aussi une équivalence d'homotopie. ■

Théorème 14 [Vog90]

Soit R un anneau régulier. Alors on a une fibration homotopique de spectres de K -théorie : $(K(\mathcal{A}) \twoheadrightarrow K(\mathcal{B}) \twoheadrightarrow KNil(\mathcal{C}_R; S))$ où la flèche de droite est induite par le foncteur passage à la limite inductive $[(A_*, \lambda_*, \alpha_*) \mapsto (A_\infty, \alpha_\infty)]$.

Démonstration :

Cette démonstration importante devait prendre place assez tôt dans l'exposition de la thèse, pour motiver l'étude des catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} , et des foncteurs associés, en marquant le lien avec les notions déjà définies par Waldhausen. Néanmoins, pour être pleinement comprise, elle nécessite l'emploi d'un théorème de localisation que nous énoncerons au chapitre 4.1, et le calcul des objets \mathcal{A} -locaux fait en 4.2. Nous aurons, en outre, besoin d'une notion de \mathcal{D}_1 -complexe (entièrement interne à cette preuve), et du théorème sur les complexes nilpotents "stablement réductibles" pour un anneau régulier, démontré au chapitre 5.8 : nous invitons donc le lecteur à vérifier que les résultats sus-cités sont indépendants de ce théorème 14, et qu'il n'y a pas de cercle vicieux.

• Suivant les notations des chapitres 4.1 et 4.2 (localisation), nous noterons $\mathbf{L}\mathcal{A}$ la catégorie des \mathcal{D}_0 -complexes \mathcal{A} -locaux, et \mathbf{L} la sous-catégorie pleine des objets X de $\mathbf{L}\mathcal{A}$ pour lesquels il existe une suite exacte courte $(Z \rightarrow Y \rightarrow X)$ avec Z dans \mathcal{A} et Y dans \mathcal{B} . On a une équivalence d'homotopie en K-théorie : $K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \simeq K(\mathbf{L})$. Si Z est dans \mathcal{A} , son terme stabilisé Z_∞ est contractile. Par somme directe, cette propriété est vraie aussi sur \mathcal{A} . Soit X dans \mathbf{L} , on a donc : $X_\infty \sim Y_\infty$ est homotopiquement fini. Le foncteur $[(X_*) \mapsto (X_\infty, \alpha_\infty)]$ est donc bien défini de \mathbf{L} dans $\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_R; S)$. Rappelons maintenant la forme d'un \mathcal{D}_0 -complexe réduit X_* dans $\mathbf{L}\mathcal{A}$ (on trouvera les calculs détaillés au chapitre 4.2) : les symboles $\textcircled{\oplus}$ désignent les carrés “ exacts ” (à la fois pullbacks et pushouts homotopiques).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X_1 & \xrightarrow{\lambda} & X_2 & \cdots & X_i & \xrightarrow{\lambda} & X_{i+1} & \cdots \\ & & \alpha_1 \downarrow & \textcircled{\oplus} & \downarrow \alpha_2 & & \alpha_i \downarrow & \textcircled{\oplus} & \downarrow \alpha_{i+1} & \\ 0 & \rightarrow & 0 & \xrightarrow{\lambda} & X_1 \otimes S & \cdots & X_{i-1} \otimes S & \xrightarrow{\lambda} & X_i \otimes S & \cdots \end{array}$$

Par composition des carrés “ exacts ”, on obtient pour tout indice $(i \geq 1)$, la fibration homotopique : $(X_1 \xrightarrow{\lambda} X_i \xrightarrow{\alpha_i} X_{i-1} \otimes S)$. Par passage à la limite, on obtient donc la fibration

homotopique : $(X_1 \xrightarrow{\lambda} X_\infty \xrightarrow{\alpha_\infty} X_\infty \otimes S)$. Ceci permet immédiatement de montrer l'axiome [App1] : supposons donnée une flèche $(f_* : A_* \rightarrow B_*)$ de $\mathbf{L}\mathcal{A}$. Montrons l'équivalence suivante : $(f_i \text{ qis}, \forall i) \text{ ssi } (f_\infty \text{ qis})$. On considère les deux diagrammes commutatifs suivants, et on applique le lemme des 5 aux suites exactes longues d'homologie associées :

$$\begin{array}{ccc} A_1 \xrightarrow{\lambda} A_\infty \xrightarrow{\alpha_\infty} A_\infty \otimes S & & A_1 \xrightarrow{\lambda} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i-1} \otimes S \\ \downarrow f_1 \quad \wr \downarrow f_\infty \quad \wr \downarrow f_\infty & & \downarrow f_1 \quad \downarrow f_i \quad \wr \downarrow f_{i-1} \\ B_1 \xrightarrow{\lambda} B_\infty \xrightarrow{\alpha_\infty} B_\infty \otimes S & & B_1 \xrightarrow{\lambda} B_i \xrightarrow{\alpha_i} B_{i-1} \otimes S \end{array}$$

• Soit \mathcal{C} la classe des complexes N dans $\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_R; S)$ tels qu'il existe X dans \mathbf{L} et un qis $[(X_\infty, \alpha_\infty) \rightarrow N]$. Pour utiliser le théorème d'approximation de Waldhausen de la catégorie \mathbf{L} vers \mathcal{C} , la seule chose non-triviale à vérifier est l'axiome de surjectivité [App2] : soit donc $X = (C_*, \lambda_*, \alpha_*)$ un objet de \mathbf{L} et $[f : (C_\infty, \alpha_\infty) \rightarrow Y = (K, \beta)]$ une flèche de \mathcal{C} fixés. On peut considérer l'objet Y comme un \mathcal{D}_0 -complexe “ faible ” (c'est-à-dire où on oublie la condition initiale : $K_0 = 0$), et alors la flèche f induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\leftarrow} & C_1 & \xrightarrow{\leftarrow} & C_2 & \xrightarrow{\leftarrow} & \cdots \\ f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & \\ K & \xleftarrow{=} & K & \xleftarrow{=} & K & \xleftarrow{=} & \cdots \end{array}$$

On construit alors au-dessus de K_* et C_* des “ résolutions ” compatibles $(f_{ij} : C_{ij} \rightarrow K_j)$ sous la forme de \mathcal{D}_1 -complexes $(C_{**}, \epsilon, \lambda, \alpha)$ vérifiant les égalités plus loin [ces résolutions ne sont pas fonctorielles, mais sont suffisamment canoniques pour vérifier l'axiome d'approximation [App2] de Waldhausen]. À ce moment, on a 2 foncteurs ϕ_0 et ϕ_1 des \mathcal{D}_1 -complexes vers les \mathcal{D}_0 -complexes “ faibles ” : on pose $\phi_0(Z_{ij}, \epsilon, \lambda, \alpha) = (Z_{i0}, \lambda, \alpha)$ et $\phi_1(Z_{ij}, \epsilon, \lambda, \alpha) = (Ker^h(Z_{p0} \rightarrow Z_{0p}), \lambda', \alpha')$. La surjection canonique : $[Ker^h(Z_{p0} \rightarrow Z_{0p}) \rightarrow Z_{p0}]$ induit alors un morphisme de foncteurs $(\phi_1 \rightarrow \phi_0)$. Le morphisme de résolutions f_{ij} induit donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \phi_1(C_{**}) & \rightarrow & \phi_1(K_{**}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \phi_0(C_{**}) & \rightarrow & \phi_0(K_{**}) \end{array}$$

La fin de la preuve consiste à construire une section à la flèche verticale à gauche. Après avoir détaillé le plan d'attaque, attachons-nous aux détails : il existe une suite de qis surjectifs $(\pi_i : K_{i+1} \rightarrow K_i \otimes S)$ tels que les K_i soient dans \mathfrak{C}_R et $K_0 = K$ lui-même. Il n'y a pas d'obstruction à relever la flèche β en une flèche $(\beta_0 : K \rightarrow K_1)$. Par induction, on peut construire des flèches $(\beta_n : K_n \rightarrow K_{n+1})$ compatibles aux projections. Quitte à ajouter de gros complexes acycliques aux K_i , on peut même supposer que les β_n sont des cofibrations.

dans \mathbf{L} . Le diagramme ci-dessus prouve alors l'axiome [App2]. Le théorème d'approximation de Waldhausen affirme alors que le foncteur $[(A_*) \mapsto (A_\infty, \alpha_\infty)]$ induit une équivalence en K -théorie : $K(\mathbf{L}) \simeq K(\mathcal{C})$. Plus précisément, on a une fibration homotopique de spectres :

$$(K(\mathcal{A}) \twoheadrightarrow K(\mathcal{B}) \twoheadrightarrow K(\mathcal{C}))$$

• Soit alors $N = (C, \alpha)$ dans $\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)$. Comme l'anneau R est régulier, le complexe nilpotent N est “ stablement réductible ” (cf chapitre 5.8) : donc il existe N' , et un qis $(Y \rightarrow N' \oplus N)$ où le complexe Y est réductible. Ce complexe Y est une extension de complexes nilpotents $Y_i = (C_i, \alpha_i)$, où α_i est homotope à zéro. Chacun des Y_i est donc dans la classe \mathcal{C} . Comme \mathbf{L} est stable par extension, \mathcal{C} aussi, et contient donc Y . La classe \mathcal{C} est donc cofinale dans $\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)$, et donc la flèche $[K(\mathcal{C}) \rightarrow K\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)]$ induit un isomorphisme sur les π_i pour tout indice ($i > 0$) et une injection sur le π_0 . C'est pourquoi la fibre de la flèche $[K(\mathcal{B}) \rightarrow K\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)]$ est la même que celle de $[K(\mathcal{B}) \rightarrow K(\mathcal{C})]$. On a donc bien la fibration homotopique :

$$(K(\mathcal{A}) \twoheadrightarrow K(\mathcal{B}) \twoheadrightarrow K\mathcal{N}il(\mathcal{C}_R; S)) \quad \blacksquare$$

Remarquant alors que $[K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \simeq \lim_{n \in \mathbb{N}} K(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)]$, la limite inductive étant prise suivant les flèches d'inclusion i (cf chapitre suivant), le cadre de travail de Mr Vogel permet alors 2 approches prometteuses pour identifier ce terme à $K(R)$: soit le calcul d'objets locaux (cf chapitre 4), soit l'utilisation intensive du théorème d'additivité de Waldhausen, appliqué à un réseau de foncteurs sous-jacents (sur \mathcal{B}_n et \mathcal{A}_n) que nous allons mettre en place (cf chapitre 3).

2.5 Les catégories \mathcal{H}_n

Il semble que tout se passe bien sur \mathcal{B} et que le noeud du problème consiste à construire des foncteurs intéressants sur \mathcal{A} . Pour cela, on cherche à construire un foncteur quotient (qui deviendra le foncteur cyclique \mathcal{Q}_n), qui ne sera défini fonctoriellement que pour des objets munis d'une homotopie explicite, plutôt que simplement contractiles. Sachant cela, on écrit le bon cadre formel :

Définition 10 .

On note \mathcal{H}_n la catégorie des objets (B_*, h) où $[B_* \in Ob(\mathcal{A}_n)]$ et h est une homotopie $(B_n \xrightarrow{h} B_n)$ telle que $[dh = Id_{B_n}]$. Un morphisme de cette catégorie $[f_* \in Fl_{\mathcal{H}_n}((A_*, h), (B_*, h'))]$ sera la donnée de $[f_* \in Fl_{\mathcal{A}_n}(A_*, B_*)]$ rendant le diagramme suivant commutatif : $A_n \xrightarrow{h} A_n$, (soit : $[h' \circ f_n = f_n \circ h]$).

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{h} & A_n \\ \downarrow f_n & & \downarrow f_n \\ B_n & \xrightarrow{h'} & B_n \end{array}$$

Proposition 6 .

Le foncteur oubli $(F : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{A}_n)$ défini par $[(B_*, h) \mapsto B_*]$ induit une équivalence entre les spectres connexes de K -théorie algébrique : $K(\mathcal{H}_n, qis) \simeq K(\mathcal{A}_n, qis)$.

Démonstration :

On va montrer que le foncteur oubli $(F : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{A}_n)$, qui est un foncteur exact, entre deux catégories de Waldhausen munies de foncteurs-cylindres , vérifie les hypothèses du théorème d'“ approximation ” de Waldhausen.

- La construction d'un foncteur-cylindre \mathbb{T} sur la catégorie \mathcal{H}_n s'effectue comme au lemme 5 du chapitre 2.3 par functorialité. Il faut juste vérifier que l'on peut construire une homotopie compatible : prenons donc $(f : A_* \rightarrow B_*)$ une flèche respectant les homotopies h sur A_n et h' sur B_n . On construit alors l'homotopie H sur $T(f)_n = (\epsilon_0 \otimes A) \oplus (\epsilon_1 \otimes A) \oplus (\eta_0 \otimes B)$ par : $[H(\epsilon_0 a) = \epsilon_0 h a]$, $[H(\epsilon_1 a) = -\epsilon_1 h a]$ et enfin $[H(\eta_0 b) = h' b]$. On vérifie alors que $[dH = Id_{T(f)}]$ et que les flèches canoniques (j_1, j_2, p) respectent les homotopies.
- [Cylindre] : le noyau de p est le cône $C(A_*)$ contractile, donc p est un qis.
- [Saturation] : immédiat pour les isom, passe aux qis en prenant l'homologie.
- [App1] est purement formel : il suffit de voir que $(f_* \in w\mathcal{H}_n)$ si les f_i sont des quasi-isomorphismes et font commuter les diagrammes avec (α, λ, h) ; oublier l'homotopie h nous donne donc $(F(f) \in w\mathcal{A}_n)$; réciproquement, si on sait que $(F(f) \in w\mathcal{A}_n)$, il reste juste à vérifier que f commute à l'homotopie h , mais ceci est assuré car f est un morphisme de \mathcal{H}_n .
- [App2] : Le foncteur-cylindre sur \mathcal{A}_n permet le scindage du problème de relèvement des homotopies en 2 cas, traités ci-après par chasse-au-diagramme :

Lemme 6 [Homotopies]

1. Soit $(f : A_* \rightarrow B_*)$ une cofibration de \mathcal{A}_n , et h une homotopie sur A_n . Alors il existe une homotopie h' sur B_n compatible au sens que $[f \circ h = h' \circ f]$ (on peut ainsi relever le diagramme au niveau \mathcal{H}_n).
2. Soit $(g : C_* \rightarrow D_*)$ une flèche surjective de \mathcal{A}_n , et H' une homotopie sur D_n . Alors il existe une homotopie H sur C_n compatible au sens que $[g \circ H = H' \circ g]$ (on peut ainsi relever le diagramme au niveau \mathcal{H}_n).

Démonstration :

1. Écrivons la suite exacte : $(A_n \xrightarrow{f} B_n \twoheadrightarrow W_n)$; f étant une cofibration, W_n est projectif, et donc la suite est algébriquement scindée. En lui appliquant le foncteur $Hom(\cdot, B_n)$, on obtient : $(Hom(W_n, B_n) \twoheadrightarrow Hom(B_n, B_n) \xrightarrow{\cdot \circ f} Hom(A_n, B_n))$ qui va nous permettre de faire une chasse-au-diagramme. On cherche une flèche $(h' : B_n \rightarrow B_n)$ telle que $[h' \circ f = f \circ h]$ et $[dh' = Id_{B_n}]$. On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 Hom_2(B_n, B_n) & \xrightarrow{\cdot \circ f} & Hom_2(A_n, B_n) & & h'_2 \longmapsto h_2 \\
 \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \\
 Hom_1(B_n, B_n) & \xrightarrow{\cdot \circ f} & Hom_1(A_n, B_n) & \xrightarrow{h'_1} & h'_1 f \neq fh \\
 \downarrow d & & \downarrow d & \downarrow & \downarrow \\
 Hom_0(B_n, B_n) & \xrightarrow{\cdot \circ f} & Hom_0(A_n, B_n) & \xrightarrow{Id} & f \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 h'_2 & \longmapsto & h_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 dh'_2 & \longmapsto & dh_2 = fh - h'_1 f \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Décryptage : B_n étant contractile, on peut choisir une homotopie h'_1 ; on va corriger le défaut $(fh - h'_1 f)$ par un bord : en effet $d(fh - h'_1 f) = 0$ donc il s'agit d'un bord dh_2 (le complexe $Hom(A_n, B_n)$ est acyclique) ; on relève h_2 en h'_2 qui va venir corriger notre homotopie h'_1 du début sans modifier dh'_1 . On pose donc $[h' = h'_1 + dh'_2]$ qui convient.

2. Écrivons la suite exacte : $(K_n \xrightarrow{g} C_n \twoheadrightarrow D_n)$. On lui applique le foncteur exact $Hom(C_n, \cdot)$ [car C_n est projectif], on obtient : $(Hom(C_n, K_n) \twoheadrightarrow Hom(C_n, C_n) \xrightarrow{g \circ \cdot} Hom(C_n, D_n))$ qui va nous permettre de faire une chasse-au-diagramme. On cherche une flèche $(H : C_n \rightarrow C_n)$ telle que $[g \circ H = H' \circ g]$ et $[dH = Id_{C_n}]$. On considère alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
Hom_2(C_n, C_n) & \xrightarrow[g\circ]{\cong} & Hom_2(C_n, D_n) & & H_2 \xrightarrow{\quad} H'_2 \\
\downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow \\
Hom_1(C_n, C_n) & \xrightarrow[g\circ]{\cong} & Hom_1(C_n, D_n) & H_1 \xrightarrow{\quad} gH_1 \neq H'g & dH_1 \xrightarrow{\quad} dH'_2 = H'g - gH_1 \\
\downarrow d & & \downarrow d & \downarrow & \downarrow \\
Hom_0(C_n, C_n) & \xrightarrow[g\circ]{\cong} & Hom_0(C_n, D_n) & Id \xrightarrow{\quad} g & 0 \quad \quad \quad 0 \\
& & & & \downarrow & \downarrow
\end{array}$$

Décryptage : C_n étant contractile, on peut choisir une homotopie H_1 ; on va corriger le défaut $(H'g - gH_1)$ par un bord : en effet $d(H'g - gH_1) = 0$ donc il s'agit d'un bord dH'_2 (le complexe $Hom(C_n, D_n)$ est acyclique) ; on relève H'_2 en H_2 qui va venir corriger notre homotopie H_1 du début sans modifier dH_1 . On pose donc $[H = H_1 + dH_2]$ qui convient. ■

Vérifions désormais la condition [App2] de surjectivité : soit (A_*, h) un objet de \mathcal{H}_n et $(f_* : A_* \rightarrow B_*)$ une flèche de \mathcal{A}_n fixés. Grâce au foncteur-cylindre sur \mathcal{A}_n , on décompose la flèche f en une cofibration $(A \rightarrow T(f))$ suivie d'un qis surjectif $(T(f) \rightarrow B_*)$. La première partie du lemme précédent permet de trouver une homotopie h' sur $T(f)$ compatible à la cofibration. Mais alors on a relevé la flèche f_* de \mathcal{A}_n en une flèche $[\tilde{f} : (A_*, h) \rightarrow (T(f), h')]$ telle que la

flèche initiale f soit la composée : $[F((A_*, h)) \xrightarrow{F(\tilde{f})} F((T(f), h')) \xrightarrow{\sim} B_*]$. Le foncteur oubli F vérifie donc toutes les conditions du théorème d' " approximation " de Waldhausen, et l'on peut conclure : $K(\mathcal{H}_n, qis) \simeq K(\mathcal{A}_n, qis)$. ■

Chapitre 3

Divers foncteurs

Le but de ce chapitre est d'introduire les différents foncteurs sous-jacents aux catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} , et qui vont permettre, via le théorème d'additivité, de scinder le $\tilde{K}Nil(R; S)$. La situation est relativement simple sur \mathcal{B} , car on possède un foncteur quotient ($q : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}$) qui ramène par récurrence le terme $K_*(\mathcal{B}_n)$ à n copies de $K_*(R)$. La situation devient plus difficile sur \mathcal{A} , car l'équivalent "nilpotent" du foncteur q n'est défini fonctoriellement, que si on fixe une homotopie sur le cran n contractile : d'où la nécessité de définir les catégories \mathcal{H}_n , et de vérifier qu'elles gardent la K-théorie de \mathcal{A}_n (cf proposition 6 du chapitre précédent); d'autre part, le nouveau foncteur \mathcal{Q}_n ainsi défini est interne à la catégorie \mathcal{H}_n (il n'abaisse plus les degrés!), et se révèle même être cyclique. Le nouveau formulaire obtenu permet alors de montrer que le foncteur translation t est un isomorphisme sur l'espace-limite $K(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. En fait, il suffirait de montrer que $[t : K(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n) \rightarrow K(\mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+1})]$ est un isomorphisme pour tout n , pour démontrer la [Conjecture] de P. Vogel énoncée en introduction.

3.1 Le cas simple : sur \mathcal{B}

3.1.1 Le foncteur inclusion i

On considère le foncteur d'inclusion naturelle ($i : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}$) défini par $[(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots) \mapsto (0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_n \simeq \dots)]$. C'est un foncteur exact, qui préserve les foncteurs-cylindres. On obtient la catégorie \mathcal{B} en prenant la limite inductive des \mathcal{B}_n selon i . Le foncteur i induit alors l'identité : ($i = Id : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$).

3.1.2 Le foncteur translation t

Le foncteur translation décale d'un cran vers la droite les multicomplexes : ($t : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_{n+1}$) est défini par $[(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots) \mapsto (0 \rightarrow 0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots)]$. C'est un foncteur exact, qui préserve les foncteurs-cylindres. Ses itérations permettent de décaler un multicomplexe de n crans vers la droite.

En fait, t commute à l'action de i , il est donc défini sur la catégorie-limite : $(t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})$.

3.1.3 Les foncteurs f_j et g_k

Les foncteurs $(f_j, 1 \leq j \leq n)$ sont une famille de projecteurs : $(f_j : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathfrak{C}_R)$ est défini par $[(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots) \mapsto A_j]$. De leur côté, les foncteurs $(g_k, 1 \leq k \leq n)$ forment une famille de sections : $(g_k : \mathfrak{C}_R \rightarrow \mathcal{B}_n)$ est définie par $[A \mapsto (0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow \dots \rightarrow A \simeq \dots)]$, où on commence par k termes nuls, et où la flèche α est identiquement nulle. Tous ces foncteurs sont exacts et préservent les foncteurs-cylindres. En fait, ils commutent tous à l'action du foncteur d'inclusion i , et sont donc définis sur la catégorie-limite : $(f_j : \mathcal{B} \rightarrow \mathfrak{C}_R)$ et $(g_k : \mathfrak{C}_R \rightarrow \mathcal{B})$; c'est pourquoi on utilise la même notation indépendamment de l'indice n .

3.1.4 Le foncteur quotient q

On considère le foncteur quotient $(q : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_{n-1})$ défini par $[(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots) \mapsto (0 \rightarrow A_2/A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n/A_1 \simeq \dots)]$. C'est un foncteur exact, qui préserve les foncteurs-cylindres. En fait, il commute à l'action du foncteur d'inclusion i ; il est donc défini sur la catégorie-limite : $(q : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B})$.

3.1.5 Formulaire sur \mathcal{B}

Le cas de la catégorie \mathcal{B} est simple, car l'existence du foncteur quotient q (qui diminue le nombre de crans des multicomplexes) nous permet, via le théorème d'additivité, de découper \mathcal{B}_n récursivement en termes isomorphes à \mathfrak{C}_R .

$\begin{aligned} i \circ t &= t \circ i \\ f_j \circ i &= f_j \\ i \circ g_k &= g_k \\ q \circ i &= i \circ q \\ q \circ g_k &= g_{k-1} \\ q \circ g_1 &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} f_j \circ t &= f_{j-1} \\ f_1 \circ t &= 0 \\ t \circ g_k &= g_{k+1} \\ q \circ t &= Id \\ f_j \circ g_k &= Id \times \mathbf{1}_{(j \geq k)} \\ f_j \circ q &= f_{j+1} - f_1 \end{aligned}$
--	---

À ce formulaire, il convient d'ajouter la suite exacte de foncteurs :

$$g_1 \circ f_1 \twoheadrightarrow Id_{\mathcal{B}_n} \twoheadrightarrow t \circ q$$

Proposition 7 .

Le spectre de K -théorie de la catégorie \mathcal{B}_n s'identifie à la somme directe de n copies de la K -théorie de l'anneau de base : $K_*(\mathcal{B}_n) \simeq nK(\mathfrak{C}_R) \simeq nK_*(R)$.

Démonstration :

Utilisons les égalités du formulaire induites au niveau des spectres de K -théorie :

- $(q_* \circ t_* = Id_*) : [K_*(\mathcal{B}_n) \rightarrow K_*(\mathcal{B}_n)]$ donc q_* est surjective, et t_* est injective. D'où $[Im(t_* \circ q_*) \simeq K_*(\mathcal{B}_{n-1})]$.
- $(f_{1*} \circ g_{1*} = Id_*) : [K_*(\mathfrak{C}_R) \rightarrow K_*(\mathfrak{C}_R)]$ d'où f_{1*} est surjective, et g_{1*} injective. D'où $[Im(g_{1*} \circ f_{1*}) \simeq K_*(\mathfrak{C}_R)]$.
- $(Id_* = t_* \circ q_* + g_{1*} \circ f_{1*})$ par théorème d'additivité.
- $(q_* \circ g_{1*} = 0)$ et $(f_{1*} \circ t_* = 0)$: les deux sous-espaces sont en somme directe.

Nous venons donc de démontrer : $K_*(\mathcal{B}_n) \simeq K_*(\mathfrak{C}_R) \oplus K_*(\mathcal{B}_{n-1})$.
Par récurrence sur n , on obtient donc la décomposition de l'énoncé. ■

3.2 Le cas difficile : sur \mathcal{A}

3.2.1 Le foncteur inclusion i

On a deux foncteurs d'inclusion naturelle : $(i_1 : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_{n+1})$ est défini par $[(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots) \mapsto (0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_n \simeq \dots)]$; tandis que $(i_2 : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_{n+1})$ est défini par $[(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots) \mapsto (0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow CA_n \simeq \dots)]$. On peut définir ces deux foncteurs au niveau de la catégorie \mathcal{H}_n : Soit h l'homotopie sur A_n . Dans le cas de i_1 , on garde la même homotopie. Dans le cas de i_2 , on a fonctoriellement une homotopie $C(h)$ définie par h sur le cône de A_n ; mais aussi une autre homotopie (tout aussi naturelle) liée à la structure contractile du cône (et indépendante de $h!$). En fait, n'importe lequel de ces choix induit la même flèche au niveau des spectres $[K_*(\mathcal{A}_n) \rightarrow K_*(\mathcal{A}_{n+1})]$. À qis près, on a défini un seul foncteur $(i : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n+1})$.

3.2.2 Le foncteur translation t

On considère le foncteur translation $(t : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_{n+1})$ défini par $[(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots) \mapsto (0 \rightarrow 0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots)]$. Ici on garde la même homotopie sur A_n : ceci définit donc bien un foncteur $(t : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n+1})$.

3.2.3 Les foncteurs f_j et g_k^n

Les foncteurs $(f_j, 1 \leq j \leq n)$ sont une famille de projecteurs : $(f_j : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathfrak{C}_R)$ est défini par $[(0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \simeq \dots) \mapsto A_j]$. De leur côté, les foncteurs $(g_k^n, 1 \leq k \leq n)$ forment une famille de sections : $(g_k^n : \mathfrak{C}_R \rightarrow \mathcal{A}_n)$ est définie par $[A \mapsto (0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow \dots \rightarrow A \rightarrow CA \simeq \dots)]$, où on commence par k termes nuls, puis $(n - k)$ termes égaux à A , et où la flèche α est identiquement nulle. Pour définir ces foncteurs au niveau de la catégorie \mathcal{H}_n , on pose : f_j "oublie" l'homotopie h sur A_n , et g_k^n munit le cône CA de son homotopie naturelle. On a ainsi bien défini des foncteurs $(f_j : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathfrak{C}_R)$ et $(g_k^n : \mathfrak{C}_R \rightarrow \mathcal{H}_n)$.

3.2.4 Les foncteurs cycliques \mathcal{Q}_n

Avant d'entamer la description du foncteur cyclique \mathcal{Q}_n , il est bon de rappeler une description algébrique des cônes multiples $C^n A$: par définition, le cône $CA = T(0 : A \rightarrow *)$ a pour éléments les termes $(e_i a)$ avec $i \in \{0, 1\}$ et $a \in A$. La

différentielle est donnée par les règles : $[d(e_0a) = e_0da]$ et $[d(e_1a) = e_0a - e_1da]$. L'homotopie naturelle H est la suivante : $[H(e_1a) = 0]$ et $[H(e_0a) = e_1a]$. Si le complexe A est lui-même contractile, muni d'une homotopie h , il existe une autre homotopie naturelle \tilde{h} sur CA qui prolonge h : on pose $[\tilde{h}(e_0a) = e_0h(a)]$ et $[\tilde{h}(e_1a) = -e_1h(a)]$. Avec ces notations, le cône double C^2A aura pour éléments les termes $(e_j e_i a)$ avec $i, j \in \{0, 1\}$ et $a \in A$, munie de l'inclusion canonique : $(CA \subset C^2A)$ qui sera de préférence représentée par : $(e_0CA \subset C^2A)$ et sur les éléments $[e_0e_i a \mapsto e_j e_i a]$. Enfin, on notera généralement les éléments du cône multiple $C^n A$ par les termes $(e_{i_n} \dots e_{i_1} a)$: les cônes $(C^k A)_{1 \leq k \leq n}$ sont emboîtés de la droite vers la gauche, tous contractiles munis de l'homotopie naturelle H .

Proposition 8 .

Il existe un foncteur $(\mathcal{Q}_n : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n)$, qui à tout couple (A_*, h) associe le \mathcal{D}_0 -complexe suivant, muni de l'homotopie naturelle du cône H définie ci-dessus :

$$\mathcal{Q}_n(A_*) = (0 \rightarrow A_2/A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1}/A_1 \rightarrow */A_1 \xrightarrow{\alpha'} C(* / A_1) = \dots)$$

Démonstration :

Donnons maintenant une description heuristique de la construction du foncteur cyclique \mathcal{Q}_n : en fait, c'est un raffinement du foncteur quotient q qui reste interne à la catégorie \mathcal{A}_n des objets nilpotents (détail technique : la construction est fonctorielle, pourvu qu'on prenne en compte l'homotopie explicite h qui rend A_n contractile ; on passe donc de \mathcal{A}_n à \mathcal{H}_n , ce qui ne change pas la K-théorie, le foncteur \mathcal{Q}_n est donc bien défini sur $\tilde{K}Nil(R; S)$). Considérons un multicomplexe $A_* \in \mathcal{A}_n$ et son quotient $q(A_*)$, en particulier la flèche α au cran A_n contractile :

$$\begin{array}{l} A_* \quad = (0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow * \xrightarrow{\alpha} * = \dots) \\ \downarrow \\ A_*/A_1 \quad = (0 \rightarrow 0 \rightarrow A_2/A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1}/A_1 \rightarrow */A_1 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} */A_1 = \dots) \end{array}$$

La remarque de base, qui permet de “ corriger ” $q(A_*)$ pour en faire un élément de \mathcal{A}_{n+1} est la suivante : la flèche $\tilde{\alpha}$ est homotope à zéro, et donc se factorise par le cône $C(* / A_1)$. En effet, on a le diagramme commutatif qui définit $\tilde{\alpha}$:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\quad} & * \xrightarrow{\pi} (* / A_1) \\ \downarrow 0 & \searrow 0 & \downarrow \alpha \\ A_1 \otimes S & \xrightarrow{\quad} & * \otimes S \xrightarrow{\pi \otimes \mathbf{1}_S} (* / A_1) \otimes S \end{array}$$

Par conoyau, la flèche $\hat{\alpha}$ est un morphisme de chaînes. Le complexe $(A_n = *)$ est contractile, et muni d'une homotopie h explicite telle que $[Id_{A_n} = dh]$ (c'est-à-dire : $d \circ h + h \circ d$) et donc on a : $\tilde{\alpha} = [\pi \otimes \mathbf{1}_S] \circ [Id_{A_n} \otimes \mathbf{1}_S] \circ \hat{\alpha} = d([\pi \otimes \mathbf{1}_S] \circ [h \otimes \mathbf{1}_S] \circ \hat{\alpha})$.

On obtient ainsi une factorisation de $[\tilde{\alpha} : (* / A_1) \rightarrow C(* / A_1) \xrightarrow{\alpha'} (* / A_1) \otimes S]$.

D'où $\mathcal{Q}_n(A_*) = (0 \rightarrow A_2/A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1}/A_1 \rightarrow */A_1 \xrightarrow{\alpha'} C(* / A_1) = \dots)$ ■

Proposition 9 .

Grâce à la description algébrique des cônes multiples, on peut décrire les itérées

du foncteur \mathcal{Q}_n , donner l'allure du terme général, et une formule donnant α :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n^k(A_*) &= (0 \rightarrow e_0^k \frac{A_{k+1}}{A_k} \rightarrow \dots \rightarrow e_0^k \frac{A_n}{A_k} \rightarrow e_0^{k-1} \frac{CA_n}{CA_1+A_k} \rightarrow e_0^{k-2} \frac{C^2 A_n}{C^2 A_1+C A_2+A_k} \\ &\rightarrow \dots \rightarrow e_0^{k-l} \frac{C^l A_n}{C^l A_1+C^{l-1} A_2+\dots+CA_1+A_k} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{C^k A_n}{C^k A_1+C^{k-1} A_2+\dots+CA_k} = \dots) \\ &\text{dont les éléments du terme médian s'écrivent : } (e_0^{k-l} e_{i_1} \dots e_{i_l} z) \text{ modulo} \\ &(e_0^{k-l} e_{i_1} \dots e_{i_l} z_1), (e_0^{k-l} e_{i_1} \dots e_{i_{l-1}} e_0 z_2), \dots, (e_0^{k-l} e_{i_1} e_0 \dots e_0 z_l), (e_0 \dots e_0 z_k). \end{aligned}$$

Enfin, si on note $[\alpha_0 = \alpha]$ et $[\alpha_1 = h\alpha]$, on a la formule compacte :

$$\boxed{\alpha_j(e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_l} z) = e_j e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_{l-1}} \alpha_{i_l} z}$$

Démonstration :

Nous allons désormais prendre un point de vue calculatoire, pour montrer comment on peut itérer cette construction, définir une vue fonctorielle des multicomplexes $(\mathcal{Q}_n^k(A_*))_{1 \leq k \leq n}$, puis définir un morphisme du multicomplexe de départ A_* vers $\mathcal{Q}_n^n(A_*)$ qui soit un quasi-isomorphisme en chaque cran (en fait, on obtient un morphisme $\phi \in Fl(\mathcal{A}_n)$ qui ne respecte pas l'homotopie, mais un dernier lemme technique corrigera ce défaut). Commençons par des identifications canoniques : $\frac{C(A_n/A_1)}{A_2/A_1} \simeq \frac{CA_n}{CA_1+A_2}$, puis $\frac{CA_n/(CA_1+A_2)}{A_3/A_2} \simeq \frac{CA_n}{CA_1+A_3}$ et enfin le cône quotienté $\frac{C[CA_n/(CA_1+A_2)]}{A_3/A_2} \simeq \frac{C^2 A_n}{C^2 A_1+C A_2+A_3}$. Cela promet de vite devenir inextricable, néanmoins on arrive à des formules calculatoires très synthétiques : il faut voir la donnée de base comme étant un espace Z filtré, muni d'une flèche α graduée descendante, et d'une homotopie $[h : Z \rightarrow Z]$ telle que $[dh = Id_Z]$. Le foncteur \mathcal{Q}_n lui associe alors le cône $C(Z/Z_1)$ naturellement filtré, muni de l'homotopie H naturelle du cône (indépendante de h), et de la flèche λ graduée descendante, définie par : $[\lambda(e_0 z) = \alpha(z)]$ et $[\lambda(e_1 z) = h\alpha(z)]$. On vérifie en particulier que la flèche λ est forcément un morphisme de chaînes. On itère cette construction fonctorielle pour obtenir l'allure du terme général de l'énoncé. On vérifie trivialement que les inclusions de cônes passent bien au quotient. On obtient alors par récurrence la flèche α_i graduée descendante, qui vérifie l'identité voulue. ■

Théorème 15 .

Le foncteur \mathcal{Q}_n est cyclique d'ordre n . Plus précisément, pour tout (A_*, h) dans \mathcal{H}_n , il existe une flèche $[\phi : A_* \rightarrow \mathcal{Q}_n^n(A_*)]$ dans $Fl(\mathcal{A}_n)$ qui soit un qis. Cette flèche ϕ correspond à un système qui commute aux inclusions et à la flèche α définie dans la proposition ci-dessus.

$$[\phi^k : A_k \rightarrow e_0^{n-k} \frac{C^k A_n}{C^k A_1 + C^{k-1} A_2 + \dots + CA_k + A_n}]$$

Chacune des flèches ϕ^k est alors définie via l'égalité :

$$\boxed{\phi^k(z_k) = \sum_{l=0}^{k-2} e_0^{n-l-2} e_1^l e_0^l z_k + e_0^{n-1} e_1 h z_k}$$

Démonstration :

La construction s'effectue par induction. Une fois trouvée la formule, il faut vérifier les compatibilités, puis montrer que ϕ est une équivalence d'homologie sur le gradué associé. Enfin, un lemme technique nous montrera comment corriger ϕ pour obtenir 2 qis internes à la catégorie \mathcal{H}_n : on aura alors démontré que $\mathcal{D}_n^n \sim Id$, c'est-à-dire que \mathcal{D}_n est cyclique d'ordre n .

- Compatibilité avec l'inclusion : soit $z_{k-1} \in A_{k-1}$.
Alors $\phi^k(z_{k-1}) = \phi^{k-1}(z_{k-1}) + \underbrace{e_0^{n-k} e_1^2 e_0^{k-2} z_{k-1}}_{\in C^2 A_{k-1}}$.

- Compatibilité avec la surjection α : on calcule et on compare

$$\begin{aligned} \phi^{k-1} \circ \alpha(z_k) &= \sum_{m=0}^{k-3} e_0^{n-m-2} e_1^2 e_0^m \alpha z_k + e_0^{n-1} e_1 h \alpha z_k. \\ \alpha \circ \phi^k(z_k) &= \sum_{l=1}^{k-2} e_0^{n-l-1} e_1^2 e_0^{l-1} \alpha z_k + e_0^{n-1} e_1 h \alpha z_k + \underbrace{e_0^n h \alpha h z_k}_{\in A_n}. \end{aligned}$$

- Morphisme de chaînes : on calcule $d[\phi^k(z_k)] =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^{k-2} [e_0^{n-l-2} (e_0 e_1 - e_1 e_0) e_0^l z_k + e_0^{n-l-2} e_1^2 e_0^l (dz_k)] + e_0^{n-1} (e_0 h z_k - e_1 z_k + e_1 h dz_k) \\ &= \left[\sum_{l=1}^{k-2} e_0^{n-l-1} e_1 e_0^l z_k - \sum_{l=0}^{k-3} e_0^{n-l-2} e_1 e_0^{l+1} z_k \right] - \underbrace{e_0^{n-k} e_1 e_0^{k-1} z_k}_{\in CA_k} + \underbrace{e_0^n h z_k}_{\in A_n} + \phi^k[dz_k] + \end{aligned}$$

$[-e_0^{n-1} e_1 z_k + e_0^{n-1} e_1 z_k] = \phi^k[dz_k]$ après simplifications.

- Montrons que ϕ est une équivalence d'homologie sur le gradué associé :

On commence par traiter séparément le cas ($k = 1$). On considère la flèche ($\phi^1 : A_1 \rightarrow Gr_1 = e_0^{n-1} \frac{CA_n}{CA_1+A_n}$) définie par ($z \mapsto e_0^{n-1} e_1 h z$). Les éléments de Gr_1 sont les termes ($e_0^{n-1} e_i z$) modulo $[(e_0^{n-1} e_i z_1), (e_0^n z)]$. Les ($e_0^n z$) étant contractiles, le quotient est une équivalence d'homotopie de Gr_1 sur les ($e_1 z$) modulo ($e_1 z_1$) : l'image de ϕ^1 s'écrit alors $[\phi^1(z) = e_1 h z]$. Mais cet espace se projette sur les termes (z modulo z_1) par une équivalence d'homotopie : notre flèche s'écrit ici $[\phi^1(z) = h z]$. De ces équivalences, on tire la suite exacte :

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\delta} & \\ A_1 & \xrightarrow{\sim} & Gr_1 \\ & \searrow & \uparrow \phi^1 \\ & & A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & h z_1 \xrightarrow{\quad} h z_1 \\ & & \downarrow d \\ z_1 & \xrightarrow{\quad} & z_1 - h d z_1 \end{array}$$

Le complexe A_n étant contractile, la flèche de bord δ est une équivalence d'homotopie. Vérifier que ϕ^1 est un qis revient alors à montrer que $(\delta \circ \phi^1)$ est un. Pour cela, on choisit z_1 représentant une classe d'homologie de A_1 (donc $dz_1 = 0$) et on calcule le bord de $[h z_1 = \phi^1(z_1)]$. Comme $[dz_1 = 0]$, l'élément se remonte en z_1 , c'est-à-dire que $(\delta \circ \phi^1)$ induit l'identité en homologie !

Passons maintenant au cas général ($2 \leq k \leq n$). On considère alors la flèche graduée ($\phi^k : A_k/A_{k-1} \rightarrow Gr_k$) définie par ($z \mapsto e_0^{n-k} e_1^2 e_0^{k-2} z$). Les éléments

de Gr_k sont les termes $(e_0^{n-k} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} z)$ modulo des expressions du type : $[(e_0^{n-k} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k} z_1), (e_0^{n-k} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_{k-1}} e_0 z_2), \dots, (e_0^{n-k} e_{i_1} e_0^{k-1} z_k), \text{ et enfin } (e_0^{n+1-k} e_{i_2} e_{i_3} \dots e_{i_k} z)]$. Les $(e_0^{n+1-k} e_{i_2} e_{i_3} \dots e_{i_k} z)$ étant contractiles, le quotient est une équivalence d'homotopie de Gr_k sur les $(e_1 e_{i_2} \dots e_{i_k} z)$ modulo $[(e_1 e_{i_2} \dots e_{i_k} z_1), (e_1 e_{i_2} \dots e_{i_{k-1}} e_0 z_2), \dots, (e_1 e_0^{k-1} z_k)]$: l'image de ϕ^k s'écrit alors $[\phi^k(z) = e_1^2 e_0^{k-2} z]$. Mais cet espace se projette sur les termes $(e_{i_2} \dots e_{i_k} z)$ modulo $[(e_{i_2} \dots e_{i_k} z_1), (e_{i_2} \dots e_{i_{k-1}} e_0 z_2), \dots, (e_0^{k-1} z_k)]$ par une équivalence d'homotopie : notre flèche s'écrit ici $[\phi^k(z) = e_1 e_0^{k-2} z]$. De ces réécritures successives du gradué Gr_k associé à $\mathcal{Q}_n(A_*)$, on tire la suite exacte courte suivante :

$$\begin{array}{ccc}
C^{k-1} A_1 + C^{k-2} A_2 + \dots + A_k & \xrightarrow{\quad \delta \quad} & C^{k-1} A_n & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & Gr_k \\
\downarrow p \wr & & & & \uparrow \phi^k \\
A_k / A_{k-1} & & & & A_k / A_{k-1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& & e_1 e_0^{k-2} z_k & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & e_1 e_0^{k-2} z_k \\
& & \downarrow d & & \uparrow \phi^k \\
e_0^{k-1} z_k - e_1 e_0^{k-2} z_{k-1} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & e_0 e_0^{k-2} z_k - e_1 e_0^{k-2} dz_k & & \\
\downarrow p & & & & \downarrow \\
z_k(\text{mod } A_{k-1}) & & & & z_k
\end{array}$$

Les cônes étant contractiles, la projection p définie par $p(e_{i_2} \dots e_{i_k} z_1) = 0, \dots, p(e_{i_2} e_0^{k-2} z_{k-1}) = 0$ et $p(e_0^{k-1} z_k) = z_k(\text{mod } A_{k-1})$ et le bord δ sont des équivalences d'homotopie. Vérifier que ϕ^k est un qis revient alors à montrer que $(p \circ \delta \circ \phi^k)$ en est un. Pour cela, on choisit z_k représentant une classe d'homologie de A_k / A_{k-1} (donc $dz_k = z_{k-1} \in A_{k-1}$) et on calcule le bord de $[e_1 e_0^{k-2} z_k = \phi^k(z_k)]$. Comme $[dz_k = z_{k-1}]$, l'élément se remonte en $[e_0^{k-1} z_k - e_1 e_0^{k-2} z_{k-1}]$ dont la projection p redonne $z_k(\text{mod } A_{k-1})$, c'est-à-dire que $(p \circ \delta \circ \phi^k)$ induit l'identité en homologie ! On a donc bien démontré que ϕ est un qis de \mathcal{A}_n . ■

Lemme 7 [Technique]

Soient $A_*, B_* \in \mathcal{H}_n$ et un quasi-isomorphisme $(f : A_* \xrightarrow{\sim} B_*) \in Fl(\mathcal{A}_n)$. Alors il existe deux flèches $(y : A_* \xrightarrow{\sim} C_*) \in Fl(\mathcal{H}_n)$ et $(z : B_* \xrightarrow{\sim} C_*) \in Fl(\mathcal{H}_n)$, qui soient des cofibrations et des quasi-isomorphismes.

Démonstration :

La preuve se fait en 2 étapes :

- Si f est une cofibration, on construit le multicomplexe C_* comme étant la somme directe $[C_* = C(A_*) \oplus B_*]$, muni de la différentielle scindée : $[d_{C_*} = d_{C(A_*)} \oplus d_{B_*}]$. La flèche $(z : B_* \rightarrow C_*)$ est alors l'inclusion sur le deuxième facteur : c'est un qis, car son conoyau est le cône $C(A_*)$ contractile. La flèche $(y : A_* \rightarrow C_*)$ est définie comme la somme directe

$(A_* \twoheadrightarrow C(A_*)) \oplus (A_* \xrightarrow[f]{} B_*)$. C'est une cofibration, et on a alors le diagramme commutatif

$$\text{suivant : } \begin{array}{ccc} A \twoheadrightarrow C & \twoheadrightarrow & \text{Coker}(y) \\ \parallel & \downarrow \wr & \downarrow \wr \\ A \twoheadrightarrow B & \twoheadrightarrow & \text{Coker}(f) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Les 2 flèches verticales à gauche étant des qis, la} \\ \text{3}^{i\text{ème}} \text{ est aussi un qis (d'après le lemme des 5),} \\ \text{et comme } f \text{ est un qis, alors } y \text{ est aussi un qis.} \end{array}$$

Il reste maintenant à construire une homotopie sur C_* compatible à la cofibration somme $(y \oplus z : A_* \oplus B_* \rightarrow C_*)$: son existence est prouvée par le lemme 6 du chapitre 2.5.

• Dans le cas général, on remplace la flèche f par une cofibration, grâce à l'utilisation du foncteur-cylindre $T(f)$ sur la catégorie \mathcal{A}_n : d'après le lemme 6, il existe une homotopie \tilde{h}' compatible à l'inclusion $(j_2 : B_* \rightarrow T(f))$. On applique alors le 1^{er} cas à la flèche $(j_1 : A_* \rightarrow T(f))$ pour obtenir des flèches $(y_1 : A_* \rightarrow C_*)$ et $(z_1 : T(f) \rightarrow C_*)$ qui soient des qis respectant les homotopies h et \tilde{h}' . Puis on compose z_1 par $(j_2 : B_* \rightarrow T(f))$ pour obtenir un qis, qui soit une cofibration respectant l'homotopie h' . On obtient alors le diagramme suivant : ■

$$\begin{array}{ccc} (A_*, h) & \xrightarrow[\sim]{f} & (B_*, h') \\ \downarrow \wr & \searrow \wr & \swarrow \wr \\ & (T(f), \tilde{h}') & \\ \downarrow \wr & \swarrow \wr & \\ C(A_*) \oplus T(f) & & \end{array}$$

Remarque :

Ce lemme permet de corriger la flèche définie par récurrence $(\phi : A_* \rightarrow \mathcal{Q}_n^n(A_*))$ en 2 qis respectant les homotopies, et donc $[\mathcal{Q}_n^n \sim Id_{\mathcal{A}_n}]$: le foncteur est cyclique ! Il montre aussi que tous les foncteurs définis dans ce chapitre : $[i, t, f_j, g'_k]$ ne dépendent pas (à qis près, donc au niveau de la K-théorie), du choix de l'homotopie. En particulier : $[i_1 \sim i_2]$ donnent le même foncteur i sur le $\tilde{K}Nil(R; S)$.

3.2.5 Formulaire sur \mathcal{H}

Le cadre naturel du foncteur cyclique \mathcal{Q} étant la catégorie \mathcal{H} , on écrira un formulaire sur \mathcal{H} et non sur \mathcal{A} (même si les flèches induites au niveau de la K-théorie sont les mêmes!). Ici le foncteur \mathcal{Q} joue le rôle du foncteur quotient q , mais avec une différence notable : la suite exacte obtenue ne décompose pas l'identité de \mathcal{H}_n mais la flèche d'injection i ; c'est pourquoi on n'obtient que des résultats partiels sur la K-théorie de \mathcal{A} ... Néanmoins, la partie non-nilpotente (identifiable à $K(R)^{n-1}$ dans $K(\mathcal{A}_n)$) se comporte comme celle de $K(\mathcal{B}_n)$: les relations liant \mathcal{Q}, f et g sont les mêmes que dans le formulaire 3.1.5.

$i \circ t = t \circ i$	$f_j \circ t = f_{j-1}$
$f_j \circ i = f_j$	$f_1 \circ t = 0$
$i \circ g_k^n = g_k^n$	$t \circ g_k^n = g_{k+1}^{n+1}$
$\mathcal{Q}_n \circ g_k^n = g_{k-1}^n$	$\mathcal{Q}_n \circ t = i$
$\mathcal{Q}_n \circ g_1^n = 0$	$g_n^n = 0$
$f_j \circ g_k^n = Id \times \mathbf{1}_{(k \leq j < n)}$	$f_n = 0$
$f_j \circ \mathcal{Q}_n = f_{j+1} - f_1 \times \mathbf{1}_{(j < n)}$	$(\mathcal{Q}_n)^n = Id_{\mathcal{H}_n}$

À ce formulaire, il convient d'ajouter les suites exactes de foncteurs :

$$g_1^{n+1} \circ f_1 \twoheadrightarrow i \twoheadrightarrow t \circ \mathcal{Q}_n$$

$$(t)^{n-2} \circ g_1^2 \twoheadrightarrow g_{n-1}^{n-1} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}_n \circ g_1^n$$

D'où on tire les égalités en K-théorie (grâce au théorème d'additivité) :

$$\left[\begin{array}{l} i \\ \mathcal{Q}_n \circ g_1^n \\ \mathcal{Q}_{n+1} \circ i \end{array} = \begin{array}{l} t \circ \mathcal{Q}_n + g_1^{n+1} \circ f_1 \\ -(t)^{n-2} \circ g_1^2 \\ -(t)^{n-1} \circ g_1^2 \circ f_1 + i \circ \mathcal{Q}_n \end{array} \right]$$

Proposition 10 .

Les foncteurs induits au niveau du spectre d'obstruction réduit $\tilde{K}\mathcal{N}il(R; S)$ par le foncteur d'inclusion i et le foncteur de translation t sont égaux : $\tilde{t} = \tilde{i}$.

Démonstration :

Au niveau du $\tilde{K}\mathcal{N}il(R; S)$, les foncteurs f_j s'annulent (et donc aussi les g_k^n).
On obtient les relations simplifiées suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{Q}_{n+1} \circ t = i = t \circ \mathcal{Q}_n \\ \mathcal{Q}_{n+1} \circ i = i \circ \mathcal{Q}_n \\ (\mathcal{Q}_n)^n = Id \end{array} \right]$$

On en tire la suite d'égalités suivante :

$$t = (\mathcal{Q}_n)^{n+1} \circ t = t \circ (\mathcal{Q}_n)^{n+1} = t \circ \mathcal{Q}_n = i$$

d'où découle l'égalité de l'énoncé. ■

$$t = i \text{ sur } \tilde{K}\mathcal{N}il(R; S)$$

Nous verrons des conséquences de cette formule dans le chapitre de localisation.

Chapitre 4

Localisation

4.1 Énoncé du théorème de localisation

Le but de ce chapitre est d'énoncer, et de démontrer, l'important analogue du théorème de fibration de Waldhausen, que Mr Vogel a introduit dans le cadre de ses \mathcal{D}_0 -complexes, dans son article [Vog90] non-publié à ce jour.

Définition 11 .

Soit \mathbf{A} une classe de \mathcal{D}_0 -complexes.

- On dit que \mathbf{A} est exacte si elle est stable par “ 2/3 ” et contient les acycliques.
- On dit qu'une flèche $[f : (A \rightarrow B)]$ entre 2 \mathcal{D}_0 -complexes est une \mathbf{A} -équivalence, si son cône $[C(f) = T(f)/j_1(A)]$ est dans \mathbf{A} .
- On dit que \mathbf{A} est petite si il existe un ensemble de \mathcal{D}_0 -complexes X_i dans \mathbf{A} tel que pour tout \mathcal{D}_0 -complexe Y dans \mathbf{A} , il existe un qis de l'un des X_i vers Y .
- On note $\tilde{\mathbf{A}}$ la complétion de \mathbf{A} : c'est la plus petite classe de \mathcal{D}_0 -complexes contenant \mathbf{A} , exacte et stable par somme directe.
- On dit que \mathbf{A} est compacte si pour toute flèche $[f : (X \rightarrow \bigoplus Y_i)]$ d'un objet X dans \mathbf{A} vers une somme directe dans $\tilde{\mathbf{A}}$, il existe un qis $[g : (X' \rightarrow X)]$ dans \mathbf{A} tel que la composée $[f \circ g]$ se factorise à travers une somme finie de Y_i .
- On dit qu'un \mathcal{D}_0 -complexe X est \mathbf{A} -local si toute flèche $[f : (Y \rightarrow X)]$ d'un objet Y dans \mathbf{A} vers X se factorise par un \mathcal{D}_0 -complexe acyclique.

Remarque : tout \mathcal{D}_0 -complexe de \mathcal{B} a le type d'homotopie d'un multicomplexe C_* stationnaire, où tous les C_i sont finis. Ceci montre en particulier que les classes $\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n$ sont petites et compactes.

Lemme 8 .

Une classe \mathbf{A} est exacte ssi elle est stable par conoyau de cofibration, stable par désuspension, et elle contient les acycliques.

Démonstration :

Soit $(0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0)$ une suite exacte de \mathcal{D}_0 -complexes. Supposons Z dans \mathbf{A} . On trouve un acyclique E qui se surjecte sur Y . On peut alors faire “ tourner le triangle ” : la suite $(0 \rightarrow s^{-1}Z \rightarrow X \oplus E \rightarrow Y \rightarrow 0)$ est exacte, avec $s^{-1}Z$ la désuspension de Z dans \mathbf{A} . Maintenant, si X est dans \mathbf{A} , cette suite exacte nous dit que Y y est aussi. La classe \mathbf{A} est

donc stable par extension. Réciproquement, si Y est dans \mathbf{A} , alors $(X \oplus E)$ y est aussi, et donc $[X = \text{Coker}(E \rightarrow X \oplus E)]$ aussi. La classe \mathbf{A} est donc stable par “2/3”, elle est exacte. ■

Proposition 11 .

Soit \mathbf{A} une classe exacte de \mathcal{D}_0 -complexes, petite et compacte. Soit X un \mathcal{D}_0 -complexe. Alors il existe une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence de X vers un \mathcal{D}_0 -complexe \mathbf{A} -local.

Démonstration :

On va construire par récurrence une suite : $(X = Z_0 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \dots)$ où toutes les flèches $[Z_i \rightarrow Z_{i+1}]$ sont des cofibrations, et des \mathbf{A} -équivalences, et où la limite Z sera \mathbf{A} -locale. Comme \mathbf{A} est petite, notons $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'ensemble de \mathcal{D}_0 -complexes générateurs. Supposons que Z_i soit construit pour $[i \leq n]$. Soit T_n l'ensemble des couples (λ, u) avec $[\lambda \in \Lambda]$ et $[u : X_\lambda \rightarrow Z_n]$. On note U_n la somme directe de tous les X_λ pour $[(\lambda, u) \in T_n]$. On a une flèche canonique de U_n dans Z_n . Soit $[U_n \rightarrow E_n]$ une cofibration vers un acyclique, et le pushout $[Z_{n+1} = Z_n \amalg_{U_n} E_n]$. La flèche $[Z_n \rightarrow Z_{n+1}]$ est bien une cofibration, c'est une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence car $[X_\lambda \in \mathbf{A}]$ implique $[U_n \in \tilde{\mathbf{A}}]$. Soit maintenant Z la limite de cette suite, Y dans \mathbf{A} et une flèche $[f : Y \rightarrow Z]$. Soit $[\alpha : \bigoplus_0^\infty Z_n \rightarrow \bigoplus_0^\infty Z_n]$ définie par la différence de l'identité et de la stabilisation $[Z_n \rightarrow Z_{n+1}]$. On trouve un acyclique E qui se surjecte sur le pullback $[\bigoplus_0^\infty Z_n \amalg_Z Y]$ pour obtenir le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \bigoplus_0^\infty Z_n & \xrightarrow{\alpha} & \bigoplus_0^\infty Z_n & \rightarrow & Z \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow f \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & E & \rightarrow & Y \rightarrow 0 \end{array}$$

On utilise alors 2 fois l'hypothèse de compacité pour réduire les 2 sommes à des sommes finies (modulo qis) : ainsi il existe un qis $[K' \rightarrow K]$ tel que $[K' \rightarrow K \rightarrow \bigoplus_0^p Z_n]$ se factorise par $\bigoplus_0^p Z_n$. Quitte à ajouter un acyclique à K et E , on peut supposer que $[K' \rightarrow K]$ est une cofibration. La flèche α envoie $\bigoplus_0^p Z_n$ sur $\bigoplus_{p+1}^\infty Z_n$; par quotient, la flèche du milieu envoie E/K' sur $\bigoplus_{p+2}^\infty Z_n$. Par compacité, on trouve un qis $[V \rightarrow E/K']$ qui envoie V sur une somme finie. Soit alors le pullback $[E' = E \amalg_{E/K'} V]$. On a ainsi construit une factorisation finie du diagramme pour un certain entier q (le conoyau Y' est homologiquement équivalent à Y) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \bigoplus_0^{q-1} Z_n & \xrightarrow{\alpha} & \bigoplus_0^q Z_n & \rightarrow & Z_q \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow f \\ 0 & \rightarrow & K' & \rightarrow & E' & \rightarrow & Y' \rightarrow 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Z_q & \rightarrow & Z \\ \uparrow & & \uparrow f \\ Y' & \rightarrow & Y \end{array}$$

Mais Y' étant dans \mathbf{A} est équivalent à un certain X_λ , alors la flèche $[u : X_\lambda \rightarrow Y' \rightarrow Z_q]$ appartient à T_q , et donc la flèche composée $[X_\lambda \rightarrow Z_{q+1}]$ se factorise par construction par un acyclique F . On forme alors le pushout $[G = F \amalg_{X_\lambda} Y]$, qui est acyclique : $[X_\lambda \rightarrow Y' \rightarrow Y]$ est un qis, donc $[F \rightarrow G]$ aussi. Par construction, la flèche f se factorise par G , et donc l'objet-limite Z est bien \mathbf{A} -local. Enfin, la suite exacte $(0 \rightarrow \bigoplus_0^\infty Z_n/X \rightarrow \bigoplus_0^\infty Z_n/X \rightarrow Z/X \rightarrow 0)$ montre que la flèche-limite $[X \rightarrow Z]$ est bien une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence. ■

Proposition 12 .

Soit \mathbf{A} une classe exacte de \mathcal{D}_0 -complexes. Alors la classe \mathbf{LA} de tous les \mathcal{D}_0 -complexes \mathbf{A} -locaux est exacte.

Démonstration :

La classe \mathbf{LA} contient tous les \mathcal{D}_0 -complexes acycliques. Comme \mathbf{A} , la classe \mathbf{LA} est stable

par désuspension. Il reste à prouver la stabilité par conoyau de cofibration. Soit $(0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0)$ une suite exacte, avec X et Y dans \mathbf{LA} . Soit U un objet de \mathbf{A} et $[f : U \rightarrow Z]$. Soit un acyclique E qui se surjecte sur le pullback $U \prod_Z Y$. On note V le noyau de $[E \rightarrow U]$: la classe \mathbf{A} étant exacte, contient U et E , donc aussi V . On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & E & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La flèche $[V \rightarrow X]$ se factorise par un acyclique F . Construisons le pushout $[W = F \prod_V E]$: c'est un objet de \mathbf{A} , donc la flèche $[W \rightarrow Y]$ se factorise par un acyclique G . Quitte à ajouter un acyclique, on peut supposer que $[F \rightarrow G]$ est une cofibration, de conoyau H . Alors la flèche f se factorise par H acyclique (cf le diagramme suivant), et la classe \mathbf{LA} est bien exacte. ■

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & E & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Proposition 13 .

Tout \mathcal{D}_0 -complexe \mathbf{A} -local est $\tilde{\mathbf{A}}$ -local.

Démonstration :

On considère la classe \mathcal{C} de tous les \mathcal{D}_0 -complexes Y tels que, pour tout L dans \mathbf{LA} , toute flèche $[Y \rightarrow L]$ se factorise par un acyclique. Cette classe contient \mathbf{A} . Comme \mathbf{LA} , elle est stable par désuspension. Elle est stable par somme directe : en effet, soit $[Y = \oplus Y_i]$, et $[f = \oplus f_i : Y_i \rightarrow L]$ vers L dans \mathbf{LA} ; chacune des f_i se factorise par un acyclique E_i , donc f se factorise par $[E = \oplus E_i]$ acyclique. Montrons que \mathcal{C} est stable par conoyau de cofibration : soit $(0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0)$ une suite exacte, avec X et Y dans \mathcal{C} ; soit L dans \mathbf{LA} , et $[f : Z \rightarrow L]$. La composée $[Y \rightarrow Z \rightarrow L]$ se factorise par E acyclique. On peut choisir E tel que $[E \rightarrow L]$ soit surjective, de noyau L' . Comme \mathbf{LA} est une classe exacte, L' est dans \mathbf{LA} et donc la flèche au niveau des noyaux $[X \rightarrow L']$ se factorise par F acyclique. Soit alors E' la somme de E et d'un acyclique contenant F par cofibration. Notant G le conoyau (acyclique aussi) de $[F \rightarrow E']$, on peut compléter le diagramme de suites exactes compatibles :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ainsi la classe \mathcal{C} est exacte, stable par somme directe, et contient \mathbf{A} . Donc \mathcal{C} contient $\tilde{\mathbf{A}}$. ■

Théorème 16 [Localisation] [Vog90]

Soient $(\mathbf{A} \subset \mathbf{B})$ 2 classes exactes de \mathcal{D}_0 -complexes. On suppose la classe \mathbf{B} petite et compacte, et \mathbf{A} stable dans \mathbf{B} par facteur direct. Soit \mathbf{L} la classe des \mathcal{D}_0 -complexes L \mathbf{A} -locaux, tels qu'il existe un \mathcal{D}_0 -complexe X dans \mathbf{B} et une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence de X vers L . Alors la classe \mathbf{L} est exacte, et on a une équivalence d'homotopie au niveau des spectres de K -théorie : $K(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \simeq K(\mathbf{L})$.

Démonstration :

La preuve s'effectue à travers les 4 lemmes suivants.

Lemme 9 .

Toute flèche d'un objet de \mathbf{B} vers un objet de $\tilde{\mathbf{A}}$ se factorise par un objet de \mathbf{A} .

Démonstration :

On considère la classe \mathcal{C} de tous les \mathcal{D}_0 -complexes Y dans $\tilde{\mathbf{B}}$ tels que, pour tout objet X dans \mathbf{B} , toute flèche $[X \rightarrow Y]$ se factorise par un objet de \mathbf{A} . Cette classe contient \mathbf{A} . Comme $\tilde{\mathbf{B}}$, elle est stable par désuspension. Montrons qu'elle est stable par somme directe : soit (Y_i) des objets de \mathcal{C} et une flèche $[f = \oplus f_i : X \rightarrow Y = \oplus Y_i]$. Par compacité, il existe un qis $[X' \rightarrow X]$ tel que $[X' \rightarrow X \rightarrow Y]$ se factorise par une somme finie $Y' = \bigoplus_0^p Y_i$. La flèche $[X' \rightarrow Y']$ se

factorise par un objet Z dans \mathbf{A} , car \mathcal{C} est évidemment stable par somme directe finie (en effet, " produit = somme " dans le cas fini). La flèche f se factorise alors par le pushout $[U = X \amalg_{X'} Z]$ qui est dans \mathbf{A} : en effet, $[X' \rightarrow X]$ est un qis, donc $[Z \rightarrow U]$ aussi ; Z étant dans \mathbf{A} , alors U aussi ! Tout ceci est résumé dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 X' \rightarrow (Z \in \mathbf{A}) & & \\
 [qis] \downarrow & [qis] \downarrow & \\
 X \dashrightarrow U & \xrightarrow{\quad} & (Y' = \bigoplus_0^p Y_i) \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & (Y = \oplus Y_i)
 \end{array}$$

\swarrow (arrow from X to $(Y = \oplus Y_i)$)
 f

Montrons maintenant que la classe \mathcal{C} est stable par conoyau de cofibration. Soit $(0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0)$ une suite exacte, avec X et Y dans \mathcal{C} . Soit U dans \mathbf{B} et $[f : U \rightarrow Z]$. Soit E un acyclique qui se surjecte sur le pullback $[Y \amalg_Z U]$. On note K le noyau de $[E \rightarrow U]$. Comme X est dans \mathcal{C} , la flèche noyau $[K \rightarrow X]$ se factorise par X_1 dans \mathbf{A} . Comme Y est dans \mathcal{C} , la flèche du pushout $[X_1 \amalg_K E]$ vers Y se factorise par un objet Y_1 de \mathbf{A} (quitte à rajouter des acycliques, on peut supposer que la flèche $[X_1 \rightarrow Y_1]$ est une cofibration, de conoyau Z_1). Par factorisation du conoyau, la flèche $[U \rightarrow Z]$ se factorise alors par Z_1 , comme on le voit sur le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & E & \longrightarrow & U & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Ainsi, la classe \mathcal{C} est exacte, stable par somme directe, et contient \mathbf{A} , donc elle contient $\tilde{\mathbf{A}}$. ■

Lemme 10 .

Soit \mathbf{B}' la classe des \mathcal{D}_0 -complexes X tels qu'il existe un objet U de \mathbf{B} et une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence de U vers X . Alors \mathbf{B}' est une classe exacte, et l'inclusion $(\mathbf{B} \subset \mathbf{B}')$ induit une équivalence des spectres de K -théorie : $K(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \simeq K(\mathbf{B}', \tilde{\mathbf{A}})$.

Démonstration :

Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème d'approximation pour le foncteur d'inclusion $[F : \mathbf{B} \subset \mathbf{B}']$, [App1] : soit X un objet de \mathbf{B} tel que $F(X)$ soit dans $\tilde{\mathbf{A}}$. Alors l'identité $[Id : X \rightarrow X]$ se factorise par un complexe de \mathbf{A} . Donc il existe X' dans \mathbf{B} tel que $[X \oplus X']$ soit dans \mathbf{A} . Comme \mathbf{A} est stable par facteur direct dans \mathbf{B} , X est déjà dans \mathbf{A} . [App2] : soit X dans \mathbf{B} et $[f : X \rightarrow Y]$ une flèche de $\tilde{\mathbf{B}}$. Il existe Z dans \mathbf{B} et une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence $[Z \rightarrow Y]$. On injecte Z dans un acyclique E , puis on pose U le conoyau de la cofibration $[Z \rightarrow Y \oplus E]$. Le \mathcal{D}_0 -complexe U est dans $\tilde{\mathbf{A}}$, et la flèche $[X \rightarrow Y \rightarrow U]$ se factorise par un objet V de \mathbf{A} . On construit le pullback $[X' = V \amalg_U (Y \oplus E)]$: alors la flèche $[V \rightarrow U]$ est une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence, donc $[X' \rightarrow (Y \oplus E)]$ aussi ; enfin, X' est l'extension de Z par V (2 objets de \mathbf{B}), donc

X' est dans \mathbf{B} . Le diagramme suivant prouve alors l'hypothèse de surjectivité, et le théorème d'approximation nous donne l'équivalence des spectres de K-théorie : $K(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \simeq K(\mathbf{B}', \tilde{\mathbf{A}})$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & \xlongequal{\quad} & Z \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y \oplus E \\
 & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & V & \longrightarrow & U
 \end{array}$$

Remarquons que la classe \mathbf{B}' contient les acycliques. Elle est stable par désuspension (car \mathbf{B} et $\tilde{\mathbf{A}}$ le sont). Enfin elle est stable par conoyau de cofibration : soit $(X_1 \twoheadrightarrow X_2 \twoheadrightarrow X_3)$ une suite exacte, où X_1 et X_2 sont dans \mathbf{B}' . Alors il existe une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence $(U_1 \rightarrow X_1)$ avec U_1 dans \mathbf{B} . Par l'axiome [App2] appliqué à la flèche composée $(U_1 \rightarrow X_1 \rightarrow X_2)$, on trouve une flèche $(u : U_1 \rightarrow U_2)$ dans \mathbf{B} , et une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence $(U_2 \rightarrow X_2)$ telle que le carré commute. Posant alors $U_3 = \text{Coker}^h(u)$ dans \mathbf{B} , on obtient par passage au conoyau la $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence $(U_3 \rightarrow X_3)$ voulue : en effet, \mathbf{B} et $\tilde{\mathbf{A}}$ sont stables par " 2/3 ". Ainsi la classe \mathbf{B}' est exacte. ■

Lemme 11 .

Soit \mathbf{E} la catégorie des suites exactes courtes $(0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0)$ où X est dans $\tilde{\mathbf{A}}$ et Z dans \mathbf{L} . C'est une catégorie de Waldhausen pour $w\mathbf{E}$ les qis au niveau du quotient Z . Alors le foncteur F envoyant toute suite exacte courte sur son terme du milieu, induit une équivalence d'homotopie : $K(\mathbf{E}) \simeq K(\mathbf{B}', \tilde{\mathbf{A}})$.

Démonstration :

Soit F le foncteur envoyant chaque suite exacte courte sur son terme du milieu. On va vérifier les hypothèses du théorème d'approximation pour F . [App1] : soit $(0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0)$ une suite exacte. Si Y est dans $\tilde{\mathbf{A}}$, alors Z est dans \mathbf{L} et dans $\tilde{\mathbf{A}}$. D'après la proposition 12, Z est $\tilde{\mathbf{A}}$ -local, et l'identité $[Id : Z \rightarrow Z]$ se factorise par un acyclique. Donc Z est acyclique. On applique cela au Coker^h de toute flèche f de \mathbf{E} , pour en déduire : $F(f)$ est dans $\tilde{\mathbf{A}}$ ssi f est une équivalence faible dans \mathbf{E} . [App2] : soit $(0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0) = [S]$ dans \mathbf{E} , et $[f : Y \rightarrow Y_0]$ une flèche de \mathbf{B}' . On construit le pushout $[Z_0 = Z \coprod_Y Y_0]$. Comme \mathbf{B} est petite et compacte, il en est de même pour \mathbf{A} , et donc par la proposition 10, il existe une $\tilde{\mathbf{A}}$ -équivalence $[Z_0 \rightarrow Z']$ vers un objet Z' \mathbf{A} -local. On ajoute un acyclique E qui se surjecte sur Z' pour obtenir une flèche surjective $[Y' = Y_0 \oplus E \rightarrow Z']$ de noyau X' , et l'on a une nouvelle suite exacte dans \mathbf{E} : $(0 \rightarrow X' \rightarrow Y' \rightarrow Z' \rightarrow 0) = [S']$, munie d'un morphisme ϕ de suites exactes $[\phi : S \rightarrow S']$ et la flèche f se factorise par $F(\phi)$ puis un qis (cf le diagramme commutatif suivant). ■

$$\begin{array}{ccccc}
 [S] & & (X \in \tilde{\mathbf{A}}) \twoheadrightarrow & (Y \in \mathbf{B}') \twoheadrightarrow & (Z \in \mathbf{L}) \\
 \downarrow \phi & & \vdots & \downarrow f & \vdots \\
 [S'] & & X' \twoheadrightarrow & (Y' = Y_0 \oplus E) \twoheadrightarrow & Z' \\
 & & \downarrow (Id \oplus 0) & \downarrow [qis] & \downarrow [\tilde{\mathbf{A}}\text{-}éq] \\
 & & & Y_0 & Z_0
 \end{array}$$

Lemme 12 .

La classe \mathbf{L} est exacte, et le foncteur envoyant toute suite exacte courte de \mathbf{E} sur son terme quotient, induit une équivalence d'homotopie : $K(\mathbf{E}) \simeq K(\mathbf{L})$.

Démonstration :

La classe \mathbf{L} est l'intersection $[\mathbf{B}' \cap \mathbf{LA}]$, elle est donc exacte. Par le théorème d'additivité, le spectre de K-théorie $K(\mathbf{E})$ est équivalent au produit $K(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}) \times K(\mathbf{L})$ et donc à $K(\mathbf{L})$. ■

Ceci termine la démonstration du théorème 12. ■

4.2 Calculs d'objets locaux

4.2.1 Suite exacte courte

On rappelle ici les constructions naturelles dans le cas d'une suite exacte courte de complexes projectifs, qu'on applique ensuite à la suite exacte courte du cône.

$$0 \longrightarrow E \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi} \\ \xrightarrow{i} \end{array} F \begin{array}{c} \xleftarrow{j} \\ \xrightarrow{p} \end{array} G \longrightarrow 0$$

$\delta(-1)$ (courbe au-dessus de $F \rightarrow G$)

Le choix d'un scindage algébrique est équivalent au choix de la flèche $[\delta : G \rightarrow E]$ de degré (-1) telle que l'on ait la décomposition et les différentielles suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{l} Id_E = \pi \circ i \\ Id_G = p \circ j \\ Id_F = i \circ \pi + j \circ p \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Ker(p) = Im(i) \\ Ker(\pi) = Im(j) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} di = dp = d\delta = 0 \\ dj = +i \circ \delta \\ d\pi = -\delta \circ p \end{array}}$$

Dans le cas de la suite exacte naturelle associée au cône, on écrira de préférence :

$$0 \longrightarrow E \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi} \\ \xrightarrow{i} \end{array} CE \begin{array}{c} \xleftarrow{J} \\ \xrightarrow{P} \end{array} E \longrightarrow 0$$

On a remplacé la flèche δ par l'identité $[Id : E \rightarrow E]$, et simplifié les notations :

$$\boxed{\begin{array}{l} P = \delta \circ p \quad (\text{de degré } -1) \\ J = j \circ \delta^{-1} \quad (\text{de degré } +1) \end{array}}$$

$$\boxed{Id_{CE} = i \circ \pi + J \circ P}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} d\pi = -P \\ dJ = +i \end{array}}$$

4.2.2 Morphisme homotope à zéro

Proposition 14 .

Considérons le diagramme : $E \xrightarrow{i} CE$ où les flèches i et α sont données.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & CE \\ & \searrow \alpha & \downarrow \tilde{\alpha} \\ & & F \end{array}$$

Alors l'existence d'une factorisation via le cône CE est équivalente à dire que la flèche $[\alpha : E \rightarrow F]$ est homotopiquement nulle : le choix d'un relèvement $\tilde{\alpha}$ est même bijectivement associé à celui d'une homotopie h telle que $[dh = \alpha]$.

Démonstration :

- S'il existe un morphisme de complexes $\tilde{\alpha}$ qui factorise le diagramme de l'énoncé, alors on écrit l'homotopie sur le cône : $[Id_{CE} = dH]$, puis on différencie : $[\alpha = \tilde{\alpha} \circ H \circ i = d(\tilde{\alpha} \circ H \circ i)]$.
- Réciproquement, on considère le diagramme commutatif suivant, où les flèches dessinées ne sont pas forcément des morphismes de chaînes, mais des morphismes au sens algébrique :

$$E \begin{array}{c} \xleftarrow{\pi} \\ \xrightarrow{i} \end{array} CE \begin{array}{c} \xleftarrow{J} \\ \xrightarrow{P} \end{array} E \quad \text{De l'égalité } [Id_{CE} = i \circ \pi + J \circ P], \text{ on déduit : } \boxed{\tilde{\alpha} = \alpha \circ \pi + \beta \circ p}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & CE \\ & \searrow \alpha & \downarrow \tilde{\alpha} \\ & & F \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \beta \\ \end{array}$$

On différencie : $[d\tilde{\alpha} = d\alpha \circ \pi + \alpha \circ d\pi + d\beta \circ P - \beta \circ dP]$ (car β est de degré $+1$).

On sait que : $[d\alpha = dP = 0]$ car ce sont des morphismes de chaînes, et $[d\pi = -P]$, on obtient donc : $[d\tilde{\alpha} = (-\alpha + d\beta) \circ P]$ qui nous donne l'équivalence de l'énoncé.

En effet : si on choisit une homotopie β telle que $[d\beta = \alpha]$, alors la flèche $[\tilde{\alpha} = \alpha \circ \pi + \beta \circ p]$ est un morphisme de chaînes car $[d\tilde{\alpha} = 0]$. Dans l'autre sens, $[d\tilde{\alpha} = 0]$ implique $[d\beta = \alpha]$ (car P est surjective), et la flèche β du début de construction est donc bien une homotopie de α . ■

4.2.3 Calcul de $K(\mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{B}_n)$

Théorème 17 .

Un \mathcal{D}_0 -complexe C_* réduit est \mathcal{B}_n -local ssi “ C_i est contractile, $\forall(0 \leq i \leq n)$ ”.

Démonstration :

•(i) \rightarrow (ii) : On va imposer des conditions sur un objet réduit C_* pour être \mathcal{B}_n -local. Pour cela, on va considérer les objets-tests $D_* = g_m(D)$, où le complexe $D = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow R \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ est l'anneau de base R concentré en degré 0 (ceci pour les indices $1 \leq m \leq n$). On va regarder de près les morphismes algébriques $[f : D_* \rightarrow C_*]$. Notons $\mathcal{H}om(D_*, C_*)$ l'ensemble des flèches $[f : D_* \rightarrow C_*]$ respectant les graduations $[f_k : D_k \rightarrow C_k]$, les flèches structurelles (α, λ) des \mathcal{D}_0 -complexes, mais a priori, ni les degrés, ni les différentielles ! C'est un R -module, gradué : $\mathcal{H}om(D_*, C_*)_p = \{f : D_k^l \rightarrow C_k^{l-p}\}$, et différentiel : suivant la règle de Leibniz,

$$[d \circ f(x) = (df)(x) + (-1)^{\deg(f)} f \circ (dx)] \text{ d'où l'on pose : } \boxed{(df) = d \circ f - (-1)^{\deg(f)} f \circ d}$$

Par R -linéarité, un morphisme $[f : D_* \rightarrow C_*]$ est donné par l'image $[x = f(\mathbf{1}_R) \in C_m]$. Pour avoir la commutation avec les λ , il suffit alors de poser : $[f_k = 0]$ pour $(k < m)$, et $[f_{m+k+1} = \lambda_{m+k} \circ \lambda_{m+k-1} \circ \dots \circ \lambda_m \circ f]$. Par contre, la commutation à la flèche α impose la condition : $[\alpha_m(x) = 0]$. Puis on écrit : $[\alpha_{m+k} \circ f_{m+k}(\mathbf{1}_R) = \lambda_{m+k-2} \circ \dots \circ \lambda_m \circ \lambda_{m-1} \circ \alpha_m(x) = 0]$ grâce à la relation des \mathcal{D}_0 -complexes : $[\alpha \circ \lambda = \lambda \circ \alpha]$. Ainsi on a un isomorphisme de R -modules gradués : $[\mathcal{H}om(D_*, C_*) \simeq \text{Ker}(\alpha_m)]$ qui fait correspondre f avec $[x = f(\mathbf{1}_R)]$. De plus, $[df = 0]$ correspond à un cycle $[dx = 0]$; et $[f = dg]$ s'interprète comme : $[x = f(\mathbf{1}_R)], [y = g(\mathbf{1}_R)] \in \text{Ker}(\alpha_m)$ et $[x = dy]$ (c'est-à-dire un bord). C'est donc un isomorphisme de R -modules différentiels gradués. Calculer l'homologie de $\text{Ker}(\alpha_m)$ revient à calculer celle de $\mathcal{H}om(D_*, C_*)$. Soit alors $f \in \mathcal{H}om(D_*, C_*)_p$ tel que $[df = 0]$: c'est un morphisme de chaînes de degré p . Comme l'objet C_* est \mathcal{B}_n -local, et $[D_* \in \mathcal{B}_n]$, la flèche f se factorise par E_* contractile. Donc $[f = dg]$ est un bord. En conclusion : le complexe $\text{Ker}(\alpha_m)$ est acyclique ! Une récurrence finie montre alors que tous les complexes C_k pour $(k \leq n)$ sont contractiles : en effet, c'est vrai pour $(k = 0)$, puis on regarde la suite exacte courte $[0 \rightarrow \text{Ker}(\alpha_k)_* \rightarrow C_k^* \rightarrow C_{k-1}^* \otimes S \rightarrow 0]$, due au fait que l'objet C_* est réduit. Alors C_{k-1}^* est contractile par hypothèse de récurrence, donc aussi $[C_{k-1}^* \otimes S]$ car le module S est plat ; $\text{Ker}(\alpha_k)_*$ est contractile car on a des conditions reliées à des objets-tests pour $(1 \leq m \leq n)$; donc C_k^* aussi. On a donc montré la condition (ii).

•(ii) \rightarrow (i) : Réciproquement, il faut maintenant vérifier que tout objet de cette forme est bien \mathcal{B}_n -local. Soit $[D_* \in \mathcal{B}_n]$ quelconque, et C_* de la forme ci-dessus, muni d'une flèche $[f : D_* \rightarrow C_*]$. On va construire par récurrence sur i un objet E_* contractile, qui factorise f . Pour $(i \leq n)$, on pose $[E_i = C_i]$ muni des mêmes flèches structurelles (α, λ) . Pour $(i \geq n)$, on pose : $[E_{i+1} = E_i \coprod_{D_i} D_{i+1}]$, il reste à définir les flèches $[\lambda_i : E_i \rightarrow E_{i+1}]$ et $[\alpha_{i+1} : E_{i+1} \rightarrow E_i \otimes S]$, de manière compatible avec celle de D_* et C_* . Comme $[D_i \rightarrow D_{i+1}]$ est une cofibration et un qis (car D_* est dans \mathcal{B}_n), le pushout donne $[\lambda_i : E_i \rightarrow E_{i+1}]$ cofibration et qis (compatible avec D_*). On considère alors le pushout suivant qui va définir la flèche $[E_{i+1} \rightarrow C_{i+1}]$ compatible aux flèches λ (par propriété universelle) :

$$\begin{array}{ccc}
 D_i & \xrightarrow{\sim} & D_{i+1} \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
 E_i & \xrightarrow{\sim} & E_{i+1} \\
 \searrow & & \searrow \\
 C_i & \longrightarrow & C_{i+1}
 \end{array}$$

En effet : le “ carré ” extérieur commute, car la flèche initiale f commute à λ . Il reste maintenant à définir $[\alpha_{i+1} : E_{i+1} \rightarrow E_i \otimes S]$: sur D_{i+1} , il s’agit de la composée $[D_{i+1} \rightarrow D_i \otimes S \rightarrow E_i \otimes S]$, et sur E_i , il s’agit de la boucle $[E_i \rightarrow E_{i-1} \otimes S \rightarrow E_i \otimes S]$. Elles coïncident sur D_i grâce à la manipulation suggérée par le diagramme suivant :

$$\left[\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{2} \\ \cdot \\ \downarrow 3 \\ \cdot \\ \xrightarrow{1} \\ \cdot \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{1} \\ \cdot \\ \downarrow 2 \\ \cdot \\ \downarrow 3 \\ \cdot \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \xrightarrow{1} \\ \cdot \\ \downarrow 2 \\ \cdot \\ \xrightarrow{3} \\ \cdot \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \downarrow 2 \\ \cdot \\ \xrightarrow{3} \\ \cdot \\ \downarrow 1 \\ \cdot \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \cdot \\ \downarrow 1 \\ \cdot \\ \xrightarrow{3} \\ \cdot \\ \downarrow 2 \\ \cdot \end{array} \right]$$

on peut donc définir α_{i+1} sur E_{i+1} par propriété universelle du pushout, et elle sera compatible avec celle définie sur D_* . Il reste à vérifier la compatibilité avec C_* : elle se scinde en 2 parties, sur D_{i+1} , il s’agit de la compatibilité de la flèche initiale f avec α ; et sur E_i , on se ramène à l’hypothèse de récurrence grâce à la même manipulation que ci-dessus, mais prise entre E_i et C_{i+1} . Ainsi, on a bien construit par récurrence sur i , un \mathcal{D}_0 -complexe E_* contractile, qui factorise $[f : D_* \rightarrow C_*]$. Les objets C_* vérifiant l’hypothèse (ii) sont donc bien \mathcal{B}_n -locaux. ■

Théorème 18 .

Soit \mathbf{L} la classe des \mathcal{D}_0 -complexes L réduits et \mathcal{B}_n -locaux, tels qu’il existe un \mathcal{D}_0 -complexe B dans \mathcal{B}_{n+1} , et une $\tilde{\mathcal{B}}_n$ -équivalence de B dans L . Le foncteur exact de projection $(F : \mathbf{L} \rightarrow \mathfrak{C}_R)$ défini par $(L_* \mapsto L_{n+1})$ induit alors par le théorème d’approximation, une équivalence des spectres connexes de K -théorie algébrique : $K(\mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{B}_n) \simeq K(R)$.

Démonstration :

- Le théorème 16 de localisation de Vogel nous donne l’équivalence : $K(\mathcal{B}_{n+1}^{red}, \mathcal{B}_n^{red}) \simeq K(\mathbf{L})$. Il reste à identifier précisément les objets L de \mathbf{L} : d’après le théorème précédent, on sait que L_i est contractile pour tout $(0 \leq i \leq n)$. De plus, on a une suite exacte courte : $(A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow L)$, avec A dans $\tilde{\mathcal{B}}_n$ et B dans \mathcal{B}_{n+1} . En particulier, les flèches λ_i sont des qis, pour tout indice $(i \geq n+1)$. Montrons que $L_{n+1} \in \mathfrak{C}_R$, et donc que le foncteur F est bien défini : on regarde la suite exacte $(A_n \rightarrow B_n \rightarrow *)$; B_n est dans \mathfrak{C}_R , donc A_n aussi. Puis la suite exacte $(A_{n+1} \rightarrow B_{n+1} \rightarrow L_{n+1})$: $A_{n+1} = A_n$ est dans \mathfrak{C}_R , et B_{n+1} aussi, donc L_{n+1} est dans \mathfrak{C}_R !
- Le foncteur projection F envoie un qis de la catégorie des objets locaux vers un qis de \mathfrak{C}_R . Réciproquement, soit $[f : A_* \rightarrow B_*]$ une flèche entre objets locaux, telle que f_{n+1} soit un qis. Comme $A_i \simeq A_{n+1}$ et $B_i \simeq B_{n+1}$ pour tout indice $(i \geq n+1)$ (ce sont des équivalences d’homotopie, car on travaille dans \mathfrak{C}_R), alors $f_i \simeq f_{n+1}$ est un qis. Pour les indices $(i \leq n)$, tous les complexes A_i et B_i sont contractiles, donc f_i est un qis ! Ainsi $f_* = (f_i)$ est un qis, et l’axiome [App1] est vérifié.
- Regardons maintenant la surjectivité [App2] : soit C_* un objet local décrit au théorème précédent, et $[f : C_{n+1} \rightarrow D]$ une flèche de \mathfrak{C}_R . On veut construire un \mathcal{D}_0 -complexe D_* local et une flèche f_* qui prolongent f . Par factorisation par le foncteur-cylindre sur \mathfrak{C}_R , on peut supposer f cofibration. On va construire D_* par récurrence sur i . Pour les indices $(i \leq n-1)$, on pose $[D_i = C_i]$ avec les mêmes flèches structurelles (α, λ) . Pour $(i = n)$, posons $[D_n = C_n]$, même flèche α_n , mais $[\lambda_n = f \circ \lambda_n]$. Problème : peut-on définir $[\alpha_{n+1} : D \rightarrow C_n \otimes S]$ qui prolonge la flèche α_{n+1} déjà définie sur C_{n+1} ? Comme C_n est acyclique, et S plat, $C_n \otimes S$ est acyclique ; il n’y a pas d’obstruction à prolonger suivant la cofibration f . Il reste alors à construire le côté droit de D_* . Pour cela, on utilise la même méthode que pour la preuve $[(ii) \rightarrow (i)]$ ci-dessus : le pushout ! Pour $(i \geq n+1)$, on pose $[D_{i+1} = D_i \coprod_{C_i} C_{i+1}]$ et toutes les flèches (α, λ) découlent par fonctorialité ! On a bien construit une flèche de \mathcal{D}_0 -complexes

f_* qui prolonge f , (suivie éventuellement d'une équivalence d'homotopie après la factorisation par le cylindre ...), et le multicomplexe D_* ainsi construit a les mêmes propriétés que C_* : contractile pour les indices ($i \leq n$), puis les λ_i qis et cofibrations se propagent au pushout. Ainsi D_* est local. De plus, ($D_{n+1} = D$) $\in \mathfrak{C}_R$, donc l'objet D_* construit est bien dans \mathbf{L} ! Tout est en place pour appliquer le théorème d'approximation de Waldhausen. Donc $[K(\mathcal{B}_{n+1}^{red}, \mathcal{B}_n^{red}) \simeq K(\mathbf{L}) \simeq K(\mathfrak{C}_R, qis) \simeq K(R)]$. ■

Remarque : Regardons enfin avec un peu plus de détails la manipulation des objets réduits. Appliquant les lemmes 1 et 3 du chapitre 2.3, on voit que si C_* est réduit, c'est la même chose de tester si C_* est \mathcal{B}_n -local ou \mathcal{B}_n^{red} -local. Puis le lemme 5 montre que $[K(\mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{B}_n) \simeq K(\mathcal{B}_{n+1}^{red}, \mathcal{B}_n^{red})]$. Par le théorème de localisation de Mr Vogel, il s'agit de la K-théorie des objets C_* réduits, tels que C_i est contractile pour ($i \leq n$), et les autres C_i valent alors C_{n+1} (qui est dans \mathfrak{C}_R), via les qis λ_i . On peut objecter que la construction du E_* contractile ne vérifie pas s'il est réduit : c'est vrai, mais le lemme 1 fournit un procédé fonctoriel qui envoie alors notre diagramme entier vers des objets réduits. Enfin, la surjectivité du théorème d'approximation voudrait un objet D_* réduit : il suffit de composer à droite par le lemme 1, pour obtenir $[C_* \rightarrow D_* \rightarrow D_*^{red}]$ qui convienne. On termine en voyant que : $[D_{n+1}^{red} \leftarrow D_{n+1} \rightarrow D]$ vaut mieux que 2 qis opposés (car "acyclique = contractile" dans \mathfrak{C}_R), ce sont 2 équivalences d'homotopie opposées [mais elles possèdent des inverses !], donc $[D_{n+1}^{red} \simeq D]$ termine la démonstration. ■

4.2.4 Calcul de $K(\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_n)$

Théorème 19 .

Un \mathcal{D}_0 -complexe C_* réduit est \mathcal{A}_n -local ssi " la flèche λ induit un qis entre $Ker(\alpha_m)$ et $Ker(\alpha_{m+1})$, pour tout indice ($1 \leq m < n$) ". On peut aussi visualiser plus facilement les multicomplexes \mathcal{A}_n -locaux en écrivant horizontalement leurs flèches λ , et verticalement leurs flèches α , les logos \textcircled{D} désignent les carrés " exacts " (à la fois pushout et pullback homotopiques) :

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \twoheadrightarrow & C_1 & \twoheadrightarrow & C_2 & \twoheadrightarrow & C_3 & \cdots & C_{n-1} & \twoheadrightarrow & C_n & \twoheadrightarrow & C_{n+1} & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \twoheadrightarrow & 0 & \twoheadrightarrow & C_1 \otimes S & \twoheadrightarrow & C_2 \otimes S & \cdots & C_{n-2} \otimes S & \twoheadrightarrow & C_{n-1} \otimes S & \twoheadrightarrow & C_n \otimes S & \cdots \end{array}$$

Démonstration :

• $(i) \rightarrow (ii)$: on va imposer des conditions nécessaires sur un objet réduit C_* pour être \mathcal{A}_n -local. Pour cela, on va considérer les objets-tests $D_* = g_m^{m+1}(D)$, où le complexe $D = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow R \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ est l'anneau de base R concentré en degré 0 (ceci pour les indices $1 \leq m < n$). Regardons de près les morphismes algébriques $[f : D_* \rightarrow C_*]$: par R -linéarité, f est donnée par l'image $[x = f(\mathbf{1}_R) \in C_m]$. La commutation à α impose alors $[x \in Ker(\alpha_m)]$. Au cran ($m+1$), le cône CD est donné par 2 copies de R : une engendrée par $\mathbf{1}_R$ en degré 0, qui est l'image par λ de D , et une autre engendrée par e en degré -1 . La flèche f_{m+1} est donc donnée par les images $[\lambda(x) = f_{m+1}(\mathbf{1}_R) \in Ker(\alpha_{m+1})]$ et $[y = f_{m+1}(e) \in Ker(\alpha_{m+1})]$. On n' a plus qu'à compléter à droite par les composées : $[f_{m+1+k} = \lambda_{m+k} \circ \dots \circ \lambda_{m+1} \circ f_{m+1}]$ pour obtenir les commutations

à toutes les flèches structurelles. Ainsi on a un isomorphisme de R -modules gradués $[\mathcal{H}om(D_*, C_*) \simeq Ker(\alpha_m) \times Ker(\alpha_{m+1})]$ défini par $[f \leftrightarrow (x, y)]$. Voyons comment s'exprime la différentielle dans cette correspondance : la formule de Leibniz $[f \mapsto df = d \circ f - (-1)^{deg(f)} f \circ d]$ appliquée à D donne $[x \mapsto dx]$, et sur le cône CD nous donne $[y \mapsto dy - (-1)^{deg(f)} \lambda(x)]$, soit la correspondance : $[df \leftrightarrow (dx, dy - (-1)^{deg(f)} \lambda(x))]$. On considère alors cette suite exacte courte :

$$Ker(\alpha_{m+1})_{p+1} \xrightarrow{i} \mathcal{H}om(D_*, C_*)_p \xrightarrow{\pi} Ker(\alpha_m)_p$$

où l'injection est donnée par $[i(y) = (0, y)]$ respectant $[i(dy) = ((0, dy))]$, et la projection par $[\pi(x, y) = x]$ respectant $[\pi(d(x, y)) = dx]$. Les 2 flèches i , et π sont donc des morphismes de chaînes, et induisent une suite exacte longue d'homologie ; comme de plus, C_* est \mathcal{A}_n -local et D_* est dans \mathcal{A}_n , le complexe $\mathcal{H}om(D_*, C_*)$ est acyclique, et on obtient l'isomorphisme en homologie $[\delta : H_p(Ker(\alpha_m)) \simeq H_p(Ker(\alpha_{m+1}))]$. Il nous faut identifier ce morphisme-bord : soit un cycle $[x \in Ker(\alpha_m)]$ tel que $[dx = 0]$. On prend un antécédent $[(x, 0) \in \mathcal{H}om(D_*, C_*)]$, puis son bord $[d(x, 0) = -(-1)^{deg(f)} \lambda(x)]$. L'homomorphisme " de bord ", ou " connectant ", s'identifie donc (au signe près) à λ . En conclusion : λ induit un qis entre $Ker(\alpha_m)$ et $Ker(\alpha_{m+1})$, $\forall (1 \leq m < n)$.

• (ii) \rightarrow (i) : La réciproque est beaucoup plus technique, et sera montrée d'un seul coup pour tout indice n , par la construction inductive d'une homotopie explicite, qui s'étend au cas " $n = \infty$ " (autrement dit, le cas des objets \mathcal{A} -locaux). Revoyons un peu nos notations, afin d'être plus clair. On se donne un \mathcal{D}_0 -complexe B_* réduit dans \mathcal{A} (c'est-à-dire : B_∞ est contractile) du type :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & B_{-1} & \xrightarrow{\quad} & B_0 & \xrightarrow{\quad} & B_1 & \xrightarrow{\quad} & B_2 & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & \textcircled{\text{D}} & \downarrow & \textcircled{\text{D}} & \downarrow & \\ \dots & B_{-2} \otimes S & \xrightarrow{\quad} & B_{-1} \otimes S & \xrightarrow{\quad} & B_0 \otimes S & \xrightarrow{\quad} & B_1 \otimes S & \dots \end{array}$$

où tous les carrés positifs sont " exacts ". Soit un objet-test $A_* = (\dots 0 \rightarrow A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots)$ dans \mathcal{A} , muni d'une flèche de \mathcal{D}_0 -complexes $[f_* : (A_* \rightarrow B_*)]$ donnée par la famille de flèches $[\hat{f}_i : (A_i \rightarrow B_i)]$ pour $(i \geq 0)$. On veut montrer que $[f \sim 0]$. Prenons une famille compatible de scindages algébriques des suites exactes suivantes : (à droite pour $n \geq 0$)

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccccc} & \phi_{n+1} & & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ A_n & \xrightarrow{u_n} & A_{n+1} & \xrightarrow{v_{n+1}} & C_{n+1} \\ & \swarrow \lambda_n & & \swarrow \pi_{n+1} & \\ & & & & \end{array} & & \begin{array}{ccccc} & \delta_{n-1} & & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ K & \xrightarrow{\theta_n} & B_n & \xrightarrow{\sigma_n} & B_{n-1} \otimes S \\ & \swarrow j_n & & \swarrow \beta_n & \end{array} \end{array}$$

avec les 2 flèches structurelles :

$$\begin{array}{l} \alpha_n : (A_n \rightarrow A_{n-1} \otimes S) \\ \mu_n : (B_n \rightarrow B_{n+1}) \end{array}$$

la relation de compatibilité :

$$\theta_{n+1} \mu_n = \theta_n$$

et les différentielles :

$$\begin{array}{l} d\theta_n = \delta_{n-1} \beta_n \\ d\sigma_n = -j_n \delta_{n-1} \\ du_n = \phi_{n+1} \pi_{n+1} \\ dv_{n+1} = -\lambda_n \phi_{n+1} \end{array}$$

(tous les autres sont des morphismes de chaînes, de degré 0 pour $\lambda, \pi, j, \beta, \alpha, \mu$ et de degré -1 pour les " bords " δ et ϕ)

Nous aurons en outre besoin de notations spécifiques (indépendantes de n) :

$$\forall p \geq 0, \text{ on notera : } \boxed{\begin{array}{l} T_0 = \delta_n j_n : K \otimes S \longrightarrow K \\ T_p = \delta \underbrace{\sigma \sigma \dots \sigma}_p j_n : K \otimes S^{p+1} \longrightarrow K \end{array}}$$

Lemme 13 .

Ces morphismes de chaînes de degré -1 vérifient la relation fonctionnelle :

$$\boxed{dT_p = \sum_{i+j=p-1} T_i T_j}$$

Démonstration :

En effet, on sait que $[d\delta_k = dj_k = 0]$ pour tout k , donc la différentielle dT_p ne fait intervenir que des termes avec $[d\sigma_k = -j_k \delta_{k-1}]$. En les numérotant ($k^{ième}$ parmi p depuis la fin), et en oubliant les ($\otimes S$) inutiles et encombrants, on écrit :

$$\begin{aligned} [dT_p &= \sum_{k=1}^p (-1) \delta_{n+p} \sigma_{n+p} \dots \sigma_{n+k+1} (-j_{n+k} \delta_{n+k-1}) \sigma_{n+k-1} \dots \sigma_{n+1} j_n \\ &= \sum_{k=1}^p (\delta_{n+p} \sigma_{n+p} \dots \sigma_{n+k+1} j_{n+k}) (\delta_{n+k-1} \sigma_{n+k-1} \dots \sigma_{n+1} j_n) \\ &= \sum_{k=1}^p T_{p-k} T_{k-1} = \sum_{i+j=p-1} T_i T_j] \text{ d'où le résultat. } \blacksquare \end{aligned}$$

Lemme 14 .

On procède à diverses réécritures et réinterprétations des flèches issues de f_ : on part de ($\hat{f}_n : A_n \rightarrow B_n$) d'abord, qu'on exprime ensuite à partir de flèches ($f_n : A_n \rightarrow K$), puis de manière plus synthétique, à partir d'une flèche unique ($F : A \rightarrow K$). Les formules intermédiaires importantes sont les suivantes :*

$$\boxed{\hat{f}_{n+1} = j_{n+1} \theta_n \hat{f}_n u_n + \sigma_{n+1} \hat{f}_n u_{n+1} + j_{n+1} f_{n+1} \pi_{n+1}}$$

$$\boxed{f_n = F \lambda_n^\infty v_n}$$

$$\boxed{\hat{f}_n = \sum_{k=0}^n \sigma_n \dots \sigma_{k+1} j_k F \lambda_k^\infty \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}$$

Démonstration :

• Compatibilité des flèches de \mathcal{D}_0 -complexes : d'après le diagramme commutatif, on va écrire les flèches ($\hat{f}_n : A_n \rightarrow B_n$) inductivement sur n , à partir des flèches ($f_k : A_k \rightarrow K$) (on procédera par condition nécessaire, puis suffisante).

$$\begin{array}{ccccc} A_n & \xrightleftharpoons[\lambda_n]{u_n} & A_{n+1} & \xrightarrow{\alpha_{n+1}} & A_n \otimes S \\ \hat{f}_n \downarrow & & \vdots \downarrow \hat{f}_{n+1} & & \downarrow \hat{f}_n \otimes \mathbb{1}_S \\ B_n & \xrightarrow{\mu_n} & B_{n+1} & \xrightleftharpoons[\beta_{n+1}]{\sigma_{n+1}} & B_n \otimes S \end{array}$$

Il faut alors vérifier les 2 conditions par récurrence :

$$\boxed{\begin{array}{l} \hat{f}_{n+1} \lambda_n = \mu_n \hat{f}_n \\ \beta_{n+1} \hat{f}_{n+1} = \hat{f}_n \alpha_{n+1} \end{array}}$$

L'approche naïve consiste à utiliser les sections algébriques, puis à corriger et raffiner le " défaut " éventuel : posons $[\hat{f}_{n+1} = \mu_n \hat{f}_n u_n + \sigma_{n+1} \hat{f}_n \alpha_{n+1} + \mathbf{W}]$.

On écrit les 2 conditions en utilisant l'hypothèse de récurrence, et les 2 égalités : $[Id_{A_{n+1}} = \lambda_n u_n + v_{n+1} \pi_{n+1}]$ et $[Id_{B_{n+1}} = j_{n+1} \theta_{n+1} + \sigma_{n+1} \beta_{n+1}]$. On obtient : $[\mathbf{W} = -\sigma_{n+1} \mu_{n-1} \beta_n \hat{f}_n u_n + (j_{n+1} \theta_{n+1} \mathbf{W} v_{n+1} \pi_{n+1})]$. En fait, le deuxième terme mixte peut être interprété comme $[j_{n+1} f_{n+1} \pi_{n+1}]$ avec $(f_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow K)$ quelconque. Regroupons les termes se terminant par $[\hat{f}_n u_n]$, on peut écrire de manière synthétique :

$$\hat{f}_{n+1} = j_{n+1} \theta_n \hat{f}_n u_n + \sigma_{n+1} \hat{f}_n u_{n+1} + j_{n+1} f_{n+1} \pi_{n+1}$$

- Faisons désormais un autre saut conceptuel, et voyons notre construction inductive, non plus comme un passage de $(f_n : C_n \rightarrow K)$ à $(\hat{f}_n : A_n \rightarrow B_n)$, mais plus algébriquement comme une correspondance $[(f_n) \leftrightarrow (F : A \rightarrow K)]$, où $[A = A_\infty = \oplus C_n]$ est l'espace total, et $[\lambda_n^\infty : A_n \rightarrow A]$ donnent les projections sur chaque facteur : $f_n = F \lambda_n^\infty v_n$. Ainsi, pour une homotopie, on cherchera une flèche $(g_n : C_n \rightarrow K) \leftrightarrow (\hat{g}_n = d\hat{f}_n)$ plutôt sous la forme $(g_n) \leftrightarrow (G : A \rightarrow K)$.

- Après quelques tâtonnements, on arrive à la formule donnant \hat{f}_n en fonction de F , que l'on démontre par récurrence :

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^n \sigma_n \dots \sigma_{k+1} j_k F \lambda_k^\infty \alpha_{k+1} \dots \alpha_n$$

Pour $(n = 0)$, on a : $[\hat{f}_0 = j_0 f_0 \pi_0 = j_0 F \lambda_0^\infty v_0 \pi_0 = j_0 F \lambda_0^\infty]$ car $[C_0 = A_0]$. $[HR(n) \rightarrow HR(n+1)]$: on écrit la formule donnant \hat{f}_{n+1} par récurrence, en remplaçant f_{n+1} par $[F \lambda_{n+1}^\infty v_{n+1}]$ et $[v_{n+1} \pi_{n+1}]$ par $[Id - \lambda_n u_n]$. On obtient alors $HR(n+1)$ plus le défaut : $[j_{n+1} (\theta_n \sum_{k=0}^n \sigma_n \dots \sigma_{k+1} j_k F \lambda_k^\infty \alpha_{k+1} \dots \alpha_n - F \lambda_n^\infty) u_n]$. Mais la composée $[\theta_n \sigma_n]$ est nulle, et donc tous les termes disparaissent, sauf le terme $(k = n)$. Il reste : $[j_{n+1} (\theta_n j_n F \lambda_n^\infty - F \lambda_n^\infty) u_n]$. Mais $[\theta_n j_n = Id]$ et donc la parenthèse s'annule. Ainsi, la formule est démontrée par récurrence. ■

Lemme 15 .

La différentiation des formules de récurrence pour \hat{f}_n donne lieu à la formule suivante, donnant G associée à $\hat{g}_n = d\hat{f}_n$:

$$dF - G = \sum_{i \geq 0} T_i F \alpha^{i+1}$$

On construit alors une nouvelle différentielle δ définie par :

$$F \mapsto \delta F = dF - \sum_{i \geq 0} T_i F \alpha^{i+1}$$

Selon le principe d'inversion des séries formelles, on trouve alors, pour tout cycle $\delta F = 0$, la formule générale donnant une homotopie $\delta G = F$:

$$G = \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} (-1)^{(p+1) \cdot \text{deg}(F)} T_{i_p} T_{i_{p-1}} \dots T_{i_1} F k \alpha^{i_1+1} k \alpha^{i_2+1} k \dots k \alpha^{i_p+1} k \right)$$

Démonstration :

- On différencie la relation de récurrence donnant \hat{f}_{n+1} , en identifiant $[\hat{g}_n = d\hat{f}_n]$. La simplification donne : $[g_{n+1} = df_{n+1} + (-1)^{\deg(f)}\theta_n\hat{f}_n\phi_{n+1} - \delta_n\hat{f}_n\alpha_{n+1}v_{n+1}]$. On différencie alors l'expression $[f_n = F\lambda_n^\infty v_n]$ et on trouve par identification la valeur de G d'après ses coordonnées $[g_{n+1} = G\lambda_{n+1}^\infty v_{n+1}]$ projetées sur C_{n+1} : $[g_{n+1} = dF\lambda_{n+1}^\infty v_{n+1} - \sum_{k=0}^n T_{n-k}F\lambda_k^\infty \alpha^{n-k}\alpha v_{n+1}]$. De manière plus compacte, on a prouvé par projection la formule suivante :

$$dF - G = \sum_{i \geq 0} T_i F \alpha^{i+1}$$

- Après réinterprétation, on a donc $[\mathcal{H}om(A_*, B_*) = (\mathcal{H}om(A, K), \delta : F \mapsto G)]$ où la nouvelle différentielle est définie par

$$F \mapsto \delta F = dF - \sum_{i \geq 0} T_i F \alpha^{i+1}$$

Commençons par vérifier que δ est bien une différentielle :

$$[\delta^2 F = d^2 F - \sum_{i \geq 0} (dT_i)F\alpha^{i+1} + \sum_{i \geq 0} T_i(dF)\alpha^{i+1} - \sum_{i \geq 0} T_i(dF - \sum_{j \geq 0} T_j F \alpha^{j+1})\alpha^{i+1}]$$

La différentielle double $d^2 F$ s'annule, ainsi que le terme ($i = 0$) de la 1^{ère} somme, car $[dT_0 = 0]$; la 2^{ième} somme se simplifie avec le début de la 3^{ième}, et il nous reste : $[\delta^2 F = - \sum_{i \geq 1} (\sum_{k+l=i-1} T_k T_l F \alpha^{i+1}) + \sum_{i \geq 0} (\sum_{j \geq 0} T_i T_j F \alpha^{i+j+2})]$ mais après réindexation, ces 2 sommes doubles valent également $[\sum_{a \geq 0} (\sum_{k+l=a} T_k T_l F \alpha^{a+2})]$ et donc $\delta^2 F = 0$: δ est bien une différentielle!

- On sait que A est acyclique : il existe donc une homotopie $[k : A \rightarrow A]$ de degré 1 telle que $[Id_A = dk]$. Soit un cycle F tel que $[dF = 0]$. Alors $[d(Fk) = (-1)^{\deg(F)}F]$: c'est une solution de " $[F = \delta G]$ " à l'ordre 0 en T ! Le problème est alors, sachant que $[d(k\alpha k) = \alpha k - k\alpha]$, de deviner une solution à notre problème d'homotopie, suivant le principe général (et compliqué...) d'inversion des séries formelles. Ici je préfère parachuter le résultat (dû essentiellement à Mr Vogel), et nous allons le vérifier formellement.

$$G = \sum_{p \geq 0} (\sum_{i_1, \dots, i_p} (-1)^{(p+1) \cdot \deg(F)} T_{i_p} T_{i_{p-1}} \dots T_{i_1} F k \alpha^{i_1+1} k \alpha^{i_2+1} k \dots k \alpha^{i_p+1} k)$$

Écrivons méthodiquement sa différentielle $[\delta G]$ et on va obtenir 4 sommes triples : la 1^{ère} correspond à ajouter T_i devant et α^{i+1} derrière; la 2^{ième} à dériver un des T_j ; la 3^{ième} est la différentielle dF (qui se déduit comme somme de l'hypothèse que F est un cycle : $[\delta F = 0]$); enfin, la 4^{ième} correspond à dériver un des k .

$$\begin{aligned}
[\delta G = & - \sum_i \left(\sum_p \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} (-1)^{(p+1).deg(F)} T_i T_{i_p} \dots T_{i_1} F k \alpha^{i_1+1} k \dots k \alpha^{i_p+1} k \alpha^{i+1} \right) \right) \\
& + \sum_p \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} \left(\sum_{w=1}^p \left(\sum_{l+m=i_w-1} (-1)^{(p+1).deg(F)} (-1)^{w-1} T_{i_p} \dots (T_l T_m) \dots T_{i_1} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. F k \alpha^{i_1+1} k \dots k \alpha^{i_p+1} k \right) \right) \right) \\
& + \sum_p \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} \left(\sum_i (-1)^{(p+1).deg(F)} (-1)^p T_{i_p} \dots T_{i_1} (T_i F \alpha^{i+1}) k \alpha^{i_1+1} k \dots k \alpha^{i_p+1} k \right) \right) \\
& + \sum_p \left(\sum_{i_1, \dots, i_p} \left(\sum_{w=0}^p (-1)^{(p+1).deg(F)} (-1)^{deg(F)+p+w} T_{i_p} \dots T_{i_1} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. F k \alpha^{i_1+1} k \dots \alpha^{i_w+1} \alpha^{i_{w+1}+1} k \dots k \alpha^{i_p+1} k \right) \right)]
\end{aligned}$$

Réinterprétons chacune de ces sommes : pour la 1^{ère}, on pose ($i = i_{p+1}$), alors il manque un k à la fin ; pour la 2^{ième}, on coupe [$\alpha^{i_w+1} = \alpha^{l+1} \alpha^{m+1}$], alors il manque un k entre les 2 ; pour la 3^{ième}, on pose ($i = i_0$), alors il manque un k au début. Avec ces simplifications, la 4^{ième} somme [avec l'indice ($p + 1$)] s'annule avec les termes des 3 premières [avec l'indice p]. Pour cela, on prend un indice ($1 \leq w \leq p$) et on impose 3 conditions d'annulation de signes : (soit [$w' = p + 1 - w$] quand on compte de p vers 1 !), les conditions correspondent respectivement au “ milieu ”, au “ début ”, et à la “ fin ” pour le k manquant.

$$\boxed{
\begin{aligned}
\epsilon_{p+1} \cdot (-1)^{deg(F)+p+1+w} + \epsilon_p \cdot (-1)^{w'-1} &= 0 \\
\epsilon_{p+1} \cdot (-1)^{deg(F)+p+1} + \epsilon_p \cdot (-1)^p &= 0 \\
\epsilon_{p+1} \cdot (-1)^{deg(F)+p+1+p+1} - \epsilon_p &= 0
\end{aligned}
}$$

Remarque : la notation ϵ_p permet d'effectuer la vérification théorique des signes dans les sommes indexées par (i_1, \dots, i_p) . En fait, les conditions encadrées sont équivalentes à : [$\epsilon_{p+1} = \epsilon_p \cdot (-1)^{deg(F)}$]. D'où l'existence d'un “ signe ” : [$\epsilon_p = \epsilon_0 \cdot (-1)^{p \cdot deg(F)}$] or on a vu “ à la main ” sur les 1^{ers} développements que [$\epsilon_0 = (-1)^{deg(F)}$]. Donc la formule se compense bien. Il reste alors 2 détails mineurs : d'abord le changement de variables dans le terme du “ milieu ”. On indexe les points entiers du plan soit par leurs coordonnées usuelles (m, l), soit par les diagonales ($l + m = i_w - 1, w \geq 1$); en effet, le cas ($i_w = 0$) a une différentielle nulle . Enfin, la compensation laisse tout de même le terme ($p = 0$) de la 4^{ième} somme : ici, il s'agit de [$\epsilon_0 \cdot (-1)^{deg(F)} \cdot F = F$], et on a bien prouvé que [$\delta G = F$]. ■ Ceci termine la démonstration du théorème 19. ■

Remarque : on a vu dans quelle mesure le cas “ nilpotent ” sur les catégories \mathcal{A}_n peut être plus difficile à gérer que le cas “ linéaire ” sur les catégories \mathcal{B}_n . Les foncteurs sont moins simples, les objets locaux moins aisément identifiables, et surtout, on ne peut pas appliquer naïvement le théorème d'approximation pour réduire $K(\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_n)$ à $K(R)$. Néanmoins, les résultats montrent que le critère de \mathcal{A}_n -local est valable pour tout \mathcal{D}_0 -complexe réduit (dans $\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{B}_k, \dots$). Il se peut qu'un jour (avec un théorème de localisation plus puissant, ou une variante d'un des suivants), cette identification des objets locaux serve de base à montrer la conjecture de Mr Vogel [évoquée en introduction].

4.3 Changement d'équivalences faibles

Le but de cette section est de voir comment le théorème de fibration de Waldhausen permet de donner une interprétation spécifique aux foncteurs t et i au niveau des spectres de K-théories $K(\mathcal{B}_n)$ et $K(\mathcal{A}_n)$. Partant du constat que : $K_*(\mathcal{B}_1, \mathcal{A}_1) = K_*(R)$, et $K_*\mathcal{N}il(R; S) = K_*(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \varinjlim K_*(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)$, on voit que pour démontrer la [Conjecture] énoncée en introduction, il suffirait de montrer que le foncteur de translation t induit un isomorphisme : $K(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n) \simeq K(\mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+1})$. Les méthodes ci-dessous n'arrivent pas à ce résultat, mais presque : on montre qu'à la limite, t induit un isomorphisme $t : K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \simeq K(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. De plus, on identifie à chaque cran le " défaut " \tilde{K}_n , et le comportement de i induit. Peut-être une étude plus attentive du foncteur cyclique \mathcal{Q}_n induit sur \tilde{K}_n permettra-t-elle de conclure ... On va commencer par définir 3 sortes d'équivalences faibles sur la catégorie \mathcal{B}_n : posons ainsi $w\mathcal{B}_n = \{f_i \text{ qis}, \forall 1 \leq i \leq n\}$ ——— $v\mathcal{B}_n = \{f_n \text{ qis}\}$ ——— $u\mathcal{B}_n = \{f_1 \text{ qis}\}$. Ces 3 classes vérifient les axiomes : [Cylindre], [Saturation], et [Extension]. On peut donc appliquer le théorème de fibration à l'inclusion $[w\mathcal{B}_n \subset v\mathcal{B}_n]$:

$$K(\mathcal{B}_n^v, w) \twoheadrightarrow K(\mathcal{B}_n, w) \twoheadrightarrow K(\mathcal{B}_n, v)$$

Cette fibration homotopique formalise en fait le théorème de localisation usuel :

$$K(\mathcal{A}_n) \twoheadrightarrow K(\mathcal{B}_n) \twoheadrightarrow K(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)$$

Il est temps ici de préciser ce que l'on entend par " fibration homotopique ", issue du théorème de fibration de Waldhausen : la flèche de droite est une vraie fibration f , et la composée des 2 flèches étant homotope à zéro, il existe une flèche canonique du terme de gauche vers $Ker^h(f)$ (la fibre homotopique de notre fibration). Le théorème affirme que cette flèche est une équivalence d'homotopie. Remarquons enfin qu'étant une fibration de spectres connexes, la flèche f n'est pas forcément surjective sur le π_0 ! Néanmoins, on peut prolonger la suite exacte longue d'homotopie associée en une suite à indices dans \mathbb{Z} , grâce au foncteur suspension de Karoubi (cf chapitre suivant).

Proposition 15 .

Le foncteur de translation t induit un isomorphisme $t : K_(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \simeq K_*(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.*

Démonstration :

Nous reprenons la fibration homotopique ci-dessus, tout en faisant varier l'indice n grâce au foncteur t (car il transporte f_n en f_{n+1}) : on obtient ainsi un diagramme commutatif où les lignes et colonnes sont des fibrations homotopiques. On se servira ensuite des 2 suites exactes des formulaires sur \mathcal{B} et \mathcal{H} , pour identifier chacun des termes du tableau. Enfin, on passera à la limite inductive selon le foncteur i pour atteindre le $K\mathcal{N}il(R; S)$.

$$\begin{array}{ccccc} K(\mathcal{B}_n^v, w) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_n, w) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_n, v) \\ \downarrow t & & \downarrow t & & \downarrow t \\ K(\mathcal{B}_{n+1}^v, w) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_{n+1}, w) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_{n+1}, v) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ K(\mathcal{B}_{n+1}^v, u) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_{n+1}, u) & & \end{array}$$

On connaît déjà les deux premières lignes, il reste alors à identifier le conoyau du foncteur t : dans \mathcal{B}_{n+1} , on a la suite exacte $(g_1 \circ f_1 \twoheadrightarrow Id \twoheadrightarrow t \circ q)$, donc modulo u , $[Id_{\mathcal{B}_{n+1}} \simeq g_1 \circ f_1]$ et $[K(\mathcal{B}_{n+1}, u) \simeq K(R)]$.

$$\begin{array}{ccccc}
K(\mathcal{A}_n) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_n) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n) \\
\downarrow t & & \downarrow t & & \downarrow t \\
K(\mathcal{A}_{n+1}) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_{n+1}) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+1}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
K(\mathcal{A}_{n+1}, u) & \twoheadrightarrow & K(R) & &
\end{array}$$

Le terme $K(\mathcal{A}_{n+1}, u)$ pose plus de problèmes à identifier : en effet, le formulaire sur \mathcal{H} ne décompose pas l'identité, mais seulement le foncteur i . Il nous faut donc imaginer un diagramme en 3 dimensions (chaque page représentant le foncteur t , reliées entre elles par le foncteur i , tout commutant car $[t \circ i = i \circ t]$), commençant à $[K(\mathcal{B}_1, \mathcal{A}_1) = K(R)]$ et dont la limite selon i nous donne l'action de t sur $[K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \varinjlim K(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)]$. La suite exacte $(g_1^{n+1} \circ f_1 \twoheadrightarrow i \twoheadrightarrow t \circ \mathcal{Q}_n)$ nous dit alors que modulo u , la flèche i se factorise par $K(R)$, c'est-à-dire que : $[i : K(\mathcal{A}_n, u) \rightarrow K(\mathcal{A}_{n+1}, u)]$ se décompose ainsi : $[K(R) \oplus \tilde{K}_n \rightarrow K(R) \oplus \tilde{K}_{n+1}]$ ($[Id : K(R) \rightarrow K(R)]$, 0 ailleurs). Passons le diagramme à la limite selon i :

$$\begin{array}{ccccc}
K(\mathcal{A}) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \\
\downarrow t & & \downarrow t & & \downarrow t \\
K(\mathcal{A}) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}) & \twoheadrightarrow & K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
K(R) & = & K(R) & &
\end{array}$$

Ceci montre en particulier, que le carré en haut à gauche est exact, et donc que le foncteur t induit une équivalence d'homotopie au niveau des espaces $K(\mathcal{B}, \mathcal{A}) = K\mathcal{N}il(R; S)$, et donc un isomorphisme au niveau des spectres associés. Remarquons enfin que l'égalité $[t = i]$ sur $\tilde{K}\mathcal{N}il(R; S)$ obtenue au chapitre 3.2.5, n'est rien d'autre sur le diagramme que la flèche induite par i est la flèche nulle $[0 : \tilde{K}_n \rightarrow \tilde{K}_{n+1}]$. ■

4.4 Une formule sur les $\tilde{K}\mathcal{N}il$

Théorème 20 [Vog90]

Soient R_0 et R_1 2 anneaux, et ${}_0S_1$ un $(R_0 \times R_1)$ -bimodule [respectivement ${}_1S_0$ un $(R_1 \times R_0)$ -bimodule] plat à gauche. Alors le foncteur de composition $[F : (C_0, C_1, \alpha_0, \alpha_1) \mapsto (C_0, \alpha_1 \circ \alpha_0)]$ induit une équivalence entre les spectres " généralisés " de K -théorie : $\tilde{K}\mathcal{N}il(R_0, R_1; {}_0S_1, {}_1S_0) \simeq \tilde{K}\mathcal{N}il(R_0; {}_0S_1 \otimes_{R_1} {}_1S_0)$.

Démonstration :

Soit \mathcal{A} la sous-classe de $\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_{R_0}, \mathfrak{C}_{R_1}; {}_0S_1, {}_1S_0)$ définie par : $[(C_0, C_1; \alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{A}]$ ssi C_0 est acyclique, et \mathcal{L} la classe de tous les \mathcal{D}_0 -complexes \mathcal{A} -locaux. Soit $L = (C_0, C_1; \alpha_0, \alpha_1)$ dans \mathcal{L} . À homotopie près, on peut supposer que α_1 est surjective. La classe \mathcal{A} contient en particulier l'objet-test $N_0 = (0, A_1; 0, 0)$ et toute flèche de N_0 vers L se factorise par un acyclique. Pour cette raison, le noyau de α_1 est acyclique, et α_1 est un qis. Réciproquement, il est facile de voir qu'un \mathcal{D}_0 -complexe $N = (C_0, C_1; \alpha_0, \alpha_1)$ est \mathcal{A} -local ssi α_1 est un qis. Soit alors $\tilde{\mathcal{A}}$ la complétion de \mathcal{A} , et $\mathcal{L}\tilde{\mathcal{A}}$ la classe des \mathcal{D}_0 -complexes N $\tilde{\mathcal{A}}$ -locaux, tels qu'il existe une $\tilde{\mathcal{A}}$ -équivalence d'un objet de $\mathcal{N}il(\mathfrak{C}_{R_0}, \mathfrak{C}_{R_1}; {}_0S_1, {}_1S_0)$ vers N . Si N est dans $\mathcal{L}\tilde{\mathcal{A}}$, α_1 est un qis, et C_0 est un complexe homotopiquement fini. Réciproquement, soit N un \mathcal{D}_0 -complexe vérifiant ces 2 conditions. Alors il existe un complexe C'_1 dans \mathfrak{C}_{R_1} (h. fini), et des flèches

$[f : C'_1 \rightarrow C_1]$ et $[\alpha'_0 : C_0 \rightarrow C'_1 \otimes S]$ telles que $[\alpha_0 = f \circ \alpha'_0]$. On obtient ainsi un \mathcal{D}_0 -complexe $N' = (C_0, C'_1; \alpha'_0, \alpha_1 \circ f)$ et une $\tilde{\mathcal{A}}$ -équivalence de N' vers N . Ainsi N est dans $\mathcal{L}\mathcal{A}$, et cette classe est exactement celle des \mathcal{D}_0 -complexes $(C_0, C_1; \alpha_0, \alpha_1)$ tels que C_0 est dans \mathfrak{C}_{R_0} , et α_1 est un qis. Par le théorème d'approximation, le foncteur $[(C_0, C_1; \alpha_0, \alpha_1) \mapsto (C_0; \alpha_0 \circ \alpha_1)]$ induit une équivalence : $K(\mathcal{L}\mathcal{A}) \simeq K\tilde{\mathcal{N}}il(\mathfrak{C}_{R_0}; {}_0S_1 \otimes_{R_1} {}_1S_0)$; et le foncteur $[(C_0, C_1; \alpha_0, \alpha_1) \mapsto C_1]$ induit une équivalence : $K(\mathcal{A}) \simeq K(\mathfrak{C}_{R_1})$. On obtient alors une fibration de spectres connexes : $[K(\mathfrak{C}_{R_1}) \twoheadrightarrow K\tilde{\mathcal{N}}il(\mathfrak{C}_{R_0}, \mathfrak{C}_{R_1}; {}_0S_1, {}_1S_0) \twoheadrightarrow K\tilde{\mathcal{N}}il(\mathfrak{C}_{R_0}; {}_0S_1 \otimes_{R_1} {}_1S_0)]$ et donc une équivalence : $\tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(\mathfrak{C}_{R_0}, \mathfrak{C}_{R_1}; {}_0S_1, {}_1S_0) \simeq \tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(\mathfrak{C}_{R_0}; {}_0S_1 \otimes_{R_1} {}_1S_0)$. Cette équivalence est valable pour toutes les suspensions de $R_0, R_1, {}_0S_1, {}_1S_0$. Ainsi, pour chaque anneau R et chaque R -bimodule S , plat à gauche, la famille d'espaces $\Omega^\infty \tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(\mathfrak{C}_{\Sigma^n R}; \Sigma^n S)$ donne naissance à un spectre non-connexe $\tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(R; S)$, et on a une équivalence d'homotopie de spectres " généralisés " : $\tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(R_0, R_1; {}_0S_1, {}_1S_0) \simeq \tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(R_0; {}_0S_1 \otimes_{R_1} {}_1S_0)$. ■

Corollaire 2 .

Soient R_0 et R_1 2 anneaux, ${}_0S_1$ un $(R_0 \times R_1)$ -bimodule, et ${}_1S_0$ un $(R_1 \times R_0)$ -bimodule. Supposons ${}_0S_1$ et ${}_1S_0$ plats à gauche. Alors on a une équivalence entre les spectres " généralisés " : $\tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(R_0; {}_0S_1 \otimes_{R_1} {}_1S_0) \simeq \tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(R_1; {}_1S_0 \otimes_{R_0} {}_0S_1)$.

Rappels : le foncteur suspension Σ et le spectre non-connexe $\underline{K}(R)$:

Suivant les constructions de Max Karoubi (cf [Kar78]), on définit l'anneau $C(\mathbb{Z})$ des matrices infinies à coefficients entiers, n'ayant sur chaque ligne et chaque colonne, qu'un nombre fini de coefficients non-nuls. On note $M(\mathbb{Z})$ le sous-anneau des matrices finies, et $\Sigma(\mathbb{Z})$ le quotient (qui est plat sur \mathbb{Z}). Par produit tensoriel par l'anneau R , on obtient la suite exacte : $[M(R) \rightarrow C(R) \rightarrow \Sigma(R)]$, d'où Karoubi déduit la fibration homotopique : $[K(M(R)) \twoheadrightarrow K(C(R)) \twoheadrightarrow K(\Sigma(R))]$. Le terme de gauche est la K-théorie de R par Morita-équivalence. Quant au terme central, il disparaît grâce à un foncteur flasque F tel que : $[F_* = F_* + Id_*]$. On obtient donc l'équivalence de spectres : $K(R) \simeq \Omega K(\Sigma(R))$, qui permet de définir les groupes de K-théorie négatifs : $K_{-i}(R) = K_0(\Sigma^i(R))$, grâce à l'itération du foncteur suspension ($\Sigma : \underline{Ann} \rightarrow \underline{Ann}$) explicité ci-dessus. On définit alors le spectre " généralisé " (ou non-connexe) comme la limite :

$$\underline{K}(R) = \varinjlim \Omega^n K(\Sigma^n(R)) = \Omega^\infty K(\Sigma^\infty(R))$$

Application : le spectre non-connexe $\tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(R; S)$:

On utilise alors le théorème 9 (nommé " Obstruction " au chapitre 1.4.6, et dû à Waldhausen), appliqué au produit libre d'anneaux suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \twoheadrightarrow & R \oplus S \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ R \oplus R & \twoheadrightarrow & T \end{array}$$

pour obtenir la décomposition (\star) suivante (simplifiée grâce au théorème 20) :

$$K_i(T) \simeq \pi_{i-1} \tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(R; S) \oplus Coker^h[K_i(R) \rightarrow K_i(R \oplus S) \oplus K_i(R \oplus R)]$$

Appliquant le foncteur suspension à tout le monde, on obtient l'isomorphisme canonique : $\pi_{i-1} \tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(R; S) \simeq \pi_i \tilde{K}\tilde{\mathcal{N}}il(\Sigma(R); \Sigma(S))$, qui permet de définir les

groupes de K-théorie négatifs : $\pi_{-i}\tilde{K}\mathcal{N}il(R; S) = \pi_0\tilde{K}\mathcal{N}il(\Sigma^i(R); \Sigma^i(S))$. On définit alors le spectre “ généralisé ” (ou non-connexe) comme la limite :

$$\tilde{K}\mathcal{N}il(R; S) = \varinjlim \Omega^n \tilde{K}\mathcal{N}il(\Sigma^n(R); \Sigma^n(S)) = \Omega^\infty \tilde{K}\mathcal{N}il(\Sigma^\infty(R); \Sigma^\infty(S))$$

Théorème 21 .

Soit R un anneau régulier, et S un R -bimodule, plat à gauche. Supposons que la [Conjecture] énoncée au chapitre 5.2 soit vraie. Alors, le spectre non-connexe $\tilde{K}\mathcal{N}il(R; S)$ est contractile ; en particulier, tous ses groupes d’homotopie $\mathcal{N}il_i(R; S)$ sont nuls pour tout indice ($i \in \mathbb{Z}$).

Démonstration :

On considère le théorème dit “ fondamental ”, dû à Bass-Heller-Swann-Quillen (cf [Bas68]) : pour tout anneau A associatif, unitaire, et tout indice ($i \in \mathbb{Z}$), on a la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow K_i(A) \oplus K_i(A[t]) \oplus K_i(A[t^{-1}]) \rightarrow K_i(A[t, t^{-1}]) \rightarrow K_{i-1}(A) \rightarrow 0$$

En particulier que la flèche $[K_{i+1}(A[\mathbb{Z}]) \rightarrow K_i(A)]$ est surjective pour tout anneau A .

On écrit alors la décomposition (\star) pour l’anneau $R[\mathbb{Z}]$ et le bimodule $S[\mathbb{Z}]$: on en déduit que la flèche $[\pi_i \tilde{K}\mathcal{N}il(R[\mathbb{Z}]; S[\mathbb{Z}]) \rightarrow \pi_{i-1} \tilde{K}\mathcal{N}il(R; S)]$ est alors surjective. D’après la proposition 20, l’hypothèse (R régulier) implique ($R[\mathbb{Z}]$ régulier) ; la [Conjecture] affirme : $\mathcal{N}il_i(R; S) = 0$ et $\mathcal{N}il_i(R[\mathbb{Z}]; S[\mathbb{Z}]) = 0$ pour tout indice ($i \geq 0$) ; cette surjection induit donc par récurrence descendante la nullité de tous les groupes négatifs d’obstruction : $\mathcal{N}il_i(R; S) = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$. ■

4.5 Un théorème d’excision

Définition 12 .

Soient \mathbf{A}, \mathbf{B} 2 classes de \mathcal{D}_0 -complexes, exactes et petites. On dira que “ \mathbf{A} est transverse à \mathbf{B} ”, et on notera “ $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$ ” si toute flèche ($f : A \rightarrow B$) d’un objet A de \mathbf{A} , vers un objet B de \mathbf{B} , se factorise par un objet C dans l’intersection $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$. On notera alors $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ la plus petite classe exacte de \mathcal{D}_0 -complexes contenant \mathbf{A} et \mathbf{B} .

Remarque : On peut aussi définir la classe $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ comme étant la plus petite classe contenant \mathbf{A} et \mathbf{B} , et stable par extension par un élément de \mathbf{A} ou de \mathbf{B} . Le lemme ci-dessous va alors nous en fournir une caractérisation plus pratique.

Lemme 16 .

En fait : $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \{X \in \overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{D}_0} \mid \exists A \in \mathbf{A}, \exists B \in \mathbf{B}, \exists (B \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow X) \text{ exacte} \}$. Cette classe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ possède un foncteur-cylindre, et elle est stable par “ 2/3 ”.

Démonstration :

• Avec la définition ci-dessus, on montre les inclusions naturelles $[\mathbf{A} \subset \mathbf{A} + \mathbf{B}]$ par la suite exacte $(0 \rightarrow A \rightarrow A)$; et $[\mathbf{B} \subset \mathbf{A} + \mathbf{B}]$ par la suite exacte $(s^{-1}B \rightarrow 0 \rightarrow B)$. Le premier réflexe est de vérifier si une suite exacte “ dans l’autre sens ” ($A \rightarrow B \rightarrow X$) donne aussi un objet de $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Pour cela, on factorise $(A \rightarrow B)$ par $[C \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}]$ et on écrit le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} A & \twoheadrightarrow & C & \twoheadrightarrow & \mathbf{A} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & = & B & \twoheadrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \twoheadrightarrow & \mathbf{B} & \twoheadrightarrow & \mathbf{A} \end{array}$$

- Regardons maintenant les 4 cas élémentaires d'extension : on prendra comme notations $[X \in \mathbf{A} + \mathbf{B}]$, $[A, A', A'' \in \mathbf{A}]$, et $[B, B', B'' \in \mathbf{B}]$, puis $[C \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}]$ obtenu par factorisation.

$$\begin{array}{cccc}
 B \rightarrow A' \rightarrow ? & 0 \rightarrow B' \equiv B' & \mathbf{A} \rightarrow A' \rightarrow C & \mathbf{A} \rightarrow ? \rightarrow \mathbf{B} \\
 \parallel \downarrow \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow \downarrow \\
 B \rightarrow A \rightarrow X & A \rightarrow X \rightarrow B & A \rightarrow X \rightarrow B & A \rightarrow X \rightarrow B \\
 \downarrow \downarrow \downarrow & \parallel \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow \downarrow \\
 0 \rightarrow A' \equiv A' & A \rightarrow ? \rightarrow B'' & \mathbf{A} \rightarrow ? \rightarrow \mathbf{B} & C \rightarrow B' \rightarrow \mathbf{B}
 \end{array}$$

Ces 4 diagrammes se lisent verticalement, et montrent que la classe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est stable par : noyau d'un flèche allant vers \mathbf{A} ; conoyau d'une flèche venant de \mathbf{B} ; conoyau d'une flèche venant de \mathbf{A} ; et enfin noyau d'une flèche allant vers \mathbf{B} . En composant ces 4 opérations élémentaires, on va traiter le cas de l'axiome " 2/3 ". Soit $[(A \rightarrow X \rightarrow B), (A' \rightarrow Y \rightarrow B')] \in \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

$$\begin{array}{ccc}
 A \rightarrow X \rightarrow B & & \\
 \parallel \downarrow \textcircled{\text{D}} \downarrow & & \\
 A \rightarrow Y \rightarrow Z & & \\
 \downarrow \downarrow \downarrow & & \\
 0 \rightarrow K \equiv K & &
 \end{array}$$

On considère le pushout Z du diagramme ci-contre. Le 3^{ème} cas ci-dessus montre que : $[A \in \mathbf{A}]$ et $[Y \in \mathbf{A} + \mathbf{B}]$ impliquent $[Z \in \mathbf{A} + \mathbf{B}]$. Puis le 2^{ème} cas ci-dessus montre que : $[Z \in \mathbf{A} + \mathbf{B}]$ et $[B \in \mathbf{B}]$ impliquent $[K \in \mathbf{A} + \mathbf{B}]$. D'où l'axiome " 2/3 ".

- Pour le cas du foncteur-cylindre $T(f : [X \rightarrow Y])$, il suffit de considérer la suite exacte $(Y \rightarrow T(f) \rightarrow sX)$, et d'appliquer les stabilités par suspension, puis par l'axiome " 2/3 ". ■

Théorème 22 [Excision]

Soient \mathbf{A}, \mathbf{B} 2 petites classes exactes de \mathcal{D}_0 -complexes. On suppose : $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$. Alors on a l'excision : $K(\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A}) \simeq K(\mathbf{B}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B})$.

Démonstration :

On va appliquer le théorème d'approximation de Waldhausen au foncteur d'inclusion $[K(\mathbf{B}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \rightarrow K(\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A})]$. Pour cela, il faut définir les équivalences faibles par $[f : (X \rightarrow Y) \in v(\mathbf{A} + \mathbf{B})]$ ssi $[Coker^h(f) \in \mathbf{A}]$, et de même $[g : (B \rightarrow B') \in w\mathbf{B}]$ ssi $[Coker^h(g) \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}]$. La seule hypothèse non-triviale à vérifier est l'axiome [App2] de surjectivité. Soit $[B' \in \mathbf{B}]$ et $[(A \rightarrow X \rightarrow B) \in \mathbf{A} + \mathbf{B}]$ munis d'une flèche $[f : X \rightarrow B']$. On veut factoriser f par une flèche de \mathbf{B} modulo une v -équivalence. Alors la flèche composée $(A \rightarrow X \rightarrow B')$ se factorise par $[C \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}]$, et on forme le pushout $[Y = X \coprod_A C]$. La flèche $(X \rightarrow Y)$ est une v -équivalence : en effet, $[Coker^h(X \rightarrow Y) = Coker^h(A \rightarrow C) \in \mathbf{A}]$. D'autre part, la flèche f se factorise en $(X \rightarrow Y \rightarrow B')$. Enfin, l'objet Y est dans \mathbf{B} car c'est l'extension de C par B , tous 2 dans \mathbf{B} , qui est stable par " 2/3 ". L'axiome [App2] est donc bien vérifié, et le théorème d'approximation donne $[K(\mathbf{B}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \simeq K(\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A})]$. Tout ceci est résumé dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \twoheadrightarrow & X & \twoheadrightarrow & B \\
 \downarrow v & & \downarrow v & \searrow f & \parallel \\
 C & \twoheadrightarrow & Y & \twoheadrightarrow & B \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & B'
 \end{array}$$

Il est important de remarquer que même si l'hypothèse de factorisation n'est pas symétrique, la conclusion du théorème l'est, elle ! En effet, il suffit de considérer le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
K(\mathbf{B}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B}) & \xrightarrow{\simeq} & K(\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A}) & & \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
K(\mathbf{B}) & \xrightarrow{\simeq} & K(\mathbf{A} + \mathbf{B}) & \longrightarrow & K(\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{B}) \\
\uparrow & \textcircled{\text{D}} & \uparrow & & \uparrow \\
K(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) & \xrightarrow{\simeq} & K(\mathbf{A}) & \longrightarrow & K(\mathbf{A}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B})
\end{array}$$

Au choix : une de ces 2 inclusions (en haut ou à droite) donne une équivalence en K-théorie. Dans la catégorie abélienne des spectres, ceci implique que le carré $\textcircled{\text{D}}$ est “ exact ”. Ceci implique que l’autre flèche est une équivalence faible. ■

Application :

Dans la catégorie ambiante \mathcal{B}_{n+1} , on regarde les classes $[\mathbf{A} = g_1 \circ f_1(\mathcal{B}_n) \simeq \mathfrak{C}_R]$ et $[\mathbf{B} = t(\mathcal{B}_n) \simeq \mathcal{B}_n]$. Alors $[\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathcal{B}_{n+1}]$ et $[\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = 0]$. Factorisation :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & B_1 & = & B_1 & = & B_1 = \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & B_2 & \rightarrow & B_3 \rightarrow \dots
\end{array}$$

D’où on tire l’équivalence : $[K(\mathcal{B}_{n+1}, \mathcal{B}_n) \simeq K(R)]$, puis par récurrence : $[K(\mathcal{B}_n) \simeq K(R)^n]$. Hélas, on n’a pas d’équivalent utilisable de suite dans \mathcal{A}_n .

Chapitre 5

Anneaux réguliers

5.1 Rappels : anneau “ cohérent régulier ”

Dans le cadre classique de la géométrie algébrique, tous les anneaux C considérés sont toujours noethériens, ou (au pire) cohérents. Dans ce cas, la catégorie des C -modules de présentation finie est alors abélienne, et Waldhausen dans [Wal78] applique le théorème de dévissage de Quillen pour montrer la réduction des $\tilde{K}Nil$. L'obtention d'une résolution projective s'effectue ainsi : Soit M un C -module de présentation finie. Par définition, il existe une présentation $K_0 \twoheadrightarrow P_0 \twoheadrightarrow M$ où P_0 est projectif de type fini et le noyau K_0 est lui-même de présentation finie (car C est cohérent). On peut donc recommencer, et écrire $K_1 \twoheadrightarrow P_1 \twoheadrightarrow K_0$ avec P_1 projectif de type fini et K_1 de présentation finie. En recollant ces suites exactes courtes, on obtient ainsi une résolution de M par des modules P_k projectifs de type fini :

$$(\dots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M)$$

Définition 13 .

Soit C un anneau cohérent. Alors C est dit “ régulier ” si tout C -module M de présentation finie admet une résolution finie $(0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M)$, les P_k étant des modules projectifs de type fini.

5.2 Définition générale

On fixe désormais C un anneau. Nous allons définir pour C une notion de régularité qui se comporte bien vis-à-vis de constructions catégorielles usuelles (HNN-extensions, extensions polynomiales, sommes amalgamées ...) issues de constructions géométriques, ou topologiques (quand on considère le π_1 de CW-complexes auxquels on rajoute des cellules) ; on verra au chapitre 5.7 que cette notion coïncide avec celle ci-dessus dans le cas d'un anneau cohérent. Enfin, on conjecture que le théorème de réduction du $\tilde{K}Nil$ de Waldhausen est plus généralement vrai dans ce cadre d'anneaux “ réguliers ” mais pas forcément cohérents.

Définition 14 .

Soit \mathcal{E} une sous-catégorie de Mod_C .

On dit que \mathcal{E} est “ exacte ” si

(i) \mathcal{E} est stable par limite inductive filtrante.

(ii) \mathcal{E} vérifie l’axiome “ 2/3 ” :

soit $(M' \twoheadrightarrow M \twoheadrightarrow M'')$ une suite exacte courte dans Mod_C ,
si 2 des modules sont dans \mathcal{E} , alors le 3^{ème} y est aussi .

Lemme 17 .

Supposons qu’une classe \mathcal{E} dans Mod_C soit stable par limite inductive filtrante,
alors cette classe \mathcal{E} est stable par facteur direct.

Démonstration :

Supposons qu’on ait $(M \simeq N \oplus P)$ avec M dans \mathcal{E} . On écrit le système inductif suivant : pour tout indice i entier, on pose $(E_i = M)$ et $(f_i : E_i \rightarrow E_{i+1})$ définie par l’identité $(Id : N \rightarrow N)$ et les flèches nulles $(0 : N \rightarrow P), (0 : P \rightarrow P), (0 : P \rightarrow P)$. Alors on a : $(\varinjlim_{i \in \mathbb{N}} E_i \simeq N)$, chaque

E_i appartenant à \mathcal{E} , la limite inductive filtrante N appartient donc à \mathcal{E} . ■

Remarque :

Ainsi, pour une classe exacte \mathcal{E} contenir l’anneau de base C revient à contenir tous les C -modules projectifs, et même tous les C -modules plats¹.

Définition 15 .

On note \mathcal{E}_0 la plus petite classe exacte de Mod_C contenant C : c’est la classe des modules dits “ réguliers ”. On dit que l’anneau C est “ régulier ” (au sens de Pierre Vogel), si cette classe \mathcal{E}_0 contient tous les modules de Mod_C .

Remarque :

Sachant que la notion d’objet “ projectif ” est stable par Morita-équivalence, on voit donc que la notion d’anneau “ régulier ” est Morita-invariante, et peut par là-même être définie dans toute catégorie abélienne.

Exemple :

L’axiome (i) nous dit que tout C -module plat est dans \mathcal{E}_0 . Par l’axiome (ii), tout C -module de dimension homologique finie est dans \mathcal{E}_0 . Ainsi, tout anneau C de dimension homologique finie est régulier ; (plus précisément : il suffit que tout C -module de présentation finie soit de dimension homologique finie).

Contre-exemples :

- Soit $C = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, la classe des modules libres est exacte, c’est la classe \mathcal{E}_0 . Mais elle ne contient pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc C n’est pas régulier.
- Soit $D = \mathbb{Z}[G]$ un anneau de groupe, avec G fini. Soit \mathcal{E} la classe des modules M tels que tous les groupes de cohomologie $H^i(G, M)$ s’annulent pour tout $i > 0$. C’est une classe exacte, mais elle ne contient pas le module \mathbb{Z} muni de l’action triviale. Donc D n’est pas régulier.

À ce stade, il convient de préciser les hypothèses exactes de la conjecture posée par Mr Vogel dans [Vog90], ainsi que les conséquences faciles de la proposition 4 (alinéas a et b) du chapitre 1.4.5, qui donnent ensemble l’analogie du théorème de “réduction” de Waldhausen (cf chapitre 1.4.7) :

Conjecture : [Vog90]

Soit C un anneau régulier (au sens de Vogel), et S un C -bimodule, plat à gauche. Alors le spectre connexe $\tilde{K}Nil(C; S)$ est contractile.

Remarque : On ne demande pas que l’anneau de base C soit cohérent, ni que le bimodule S soit libre à gauche (plat suffit), et l’hypothèse projective de type fini à droite est supprimée! Par contre, la conjecture n’affirme pas que ce spectre $\tilde{K}Nil(C; S)$ est alors le défaut entre $\Omega K(R)$ et $\Omega K(C)$... La construction du foncteur suspension Σ de Karoubi, faite au chapitre 4.4 (voir [Kar78]), permet alors d’étendre le résultat ci-dessus au spectre “généralisé” $\underline{K}Nil(C; S)$.

Théorème 23 [Produit libre] [Vog90]

Supposons que la [Conjecture] énoncée ci-dessus soit vraie. Soit C un anneau régulier (au sens de Vogel). Soient $(\alpha : C \rightarrow A)$ et $(\beta : C \rightarrow B)$ deux injections pures, de compléments A' et B' plats à gauche. Alors le spectre non-connexe $\underline{K}Nil(C; A', B')$ est contractile : en particulier, tous ses groupes d’homotopie $Nil_i(C; A', B')$ sont nuls, y -compris pour les indices i négatifs! Ceci signifie qu’il y a excision sur le carré cartésien d’anneaux, et on a donc une suite exacte longue de Mayer-Vietoris qui se prolonge pour tout indice ($i \in \mathbb{Z}$) : $(\dots K_i(C) \rightarrow K_i(A) \oplus K_i(B) \rightarrow K_i(R) \rightarrow K_{i-1}(C) \dots)$.

Remarque : L’hypothèse sur les supplémentaires A' et B' des injections pures, est “plats à gauche” et non forcément “libres”! L’idée de la démonstration repose essentiellement sur le foncteur suspension Σ de Karoubi exposé au chapitre 4.4, et sur la proposition 4a du chapitre 1.4.5 qui ramène la nullité de l’obstruction du cas du pushout d’anneaux au cas de la [Conjecture].

Théorème 24 [HNN-extension] [Vog90]

Supposons que la [Conjecture] énoncée ci-dessus soit vraie. Soit C un anneau régulier (au sens de Vogel). Soient $(\alpha : C \rightarrow A)$ et $(\beta : C \rightarrow A)$ deux injections pures, de compléments A' et A'' plats à gauche. Alors le spectre non-connexe $\underline{K}Nil(C; {}_\alpha A', {}_\beta A''; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta)$ est contractile : en particulier, tous ses groupes d’homotopie $Nil_i(C; {}_\alpha A', {}_\beta A''; {}_\beta A_\alpha, {}_\alpha A_\beta)$ sont nuls, y -compris pour les indices i négatifs! Ceci signifie qu’il y a excision sur la HNN-extension, et on a alors une suite exacte longue qui se prolonge pour tout indice ($i \in \mathbb{Z}$) : $(\dots K_i(C) \rightarrow K_i(A) \rightarrow K_i(R) \rightarrow K_{i-1}(C) \dots)$.

Remarque : L’hypothèse sur les supplémentaires A' et A'' des injections pures, est “plats à gauche” et non forcément “libres”! L’idée de la démonstration repose essentiellement sur le foncteur suspension Σ de Karoubi exposé au chapitre 4.4, et sur la proposition 4b du chapitre 1.4.5 qui ramène la nullité de l’obstruction du cas de la HNN-extension au cas de la [Conjecture].

5.3 Stabilité de la notion de régularité

1. Morphisme d'anneaux

Proposition 16 .

On considère un morphisme d'anneaux $(A \rightarrow B)$, où B , considéré comme A -module à droite, est plat sur A . On a alors les deux cas suivants :

- Si B est isomorphe à la somme directe $(A \oplus C)$ comme A -bimodule, et B est régulier, alors A est régulier.
- Si la surjection canonique $(B \otimes_A B \twoheadrightarrow B)$ admet une section en tant que morphisme de B -bimodules, et A est régulier, alors B est régulier.

Démonstration :

a. Soit \mathcal{C}_0 une classe exacte de Mod_A contenant A .

Le morphisme d'anneaux induit un foncteur de restriction des scalaires $(R : Mod_B \rightarrow Mod_A)$ qui est exact, et qui commute aux limites inductives [en effet, comme oubli de structure, il possède un adjoint à droite]. On considère alors la classe : $\mathcal{C} = \{M \in Mod_B \mid R(M) \in \mathcal{C}_0\}$. Comme le foncteur R est exact, cette classe \mathcal{C} est stable par 2/3. Comme le foncteur R commute aux limites inductives, la classe \mathcal{C} est stable par limites inductives filtrantes. Enfin, tout module plat étant limite inductive filtrante de modules projectifs de type fini ¹, la condition “ B plat à droite sur A ” implique que B est dans \mathcal{C} . Appliquant alors la régularité de l'anneau B , on en déduit : $\mathcal{C} = Mod_B$.

Soit maintenant N un A -module quelconque. Utilisant l'hypothèse de somme directe, on obtient la décomposition : $[N \otimes_A B \simeq N \oplus (N \otimes_A C)]$. Notre module quelconque N est donc facteur direct d'un module $N \otimes_A B$ déjà dans \mathcal{C}_0 (car il appartient à \mathcal{C}), donc appliquant le lemme 17, lui-même appartient à \mathcal{C}_0 . Donc $\mathcal{C}_0 = Mod_A$ et l'anneau A est régulier.

b. Soit \mathcal{D}_0 une classe exacte de Mod_B contenant B .

Le morphisme d'anneaux induit un foncteur $(B \otimes_A . : Mod_A \rightarrow Mod_B)$ qui est exact car B est plat à droite sur A , et commute aux limites inductives [car il est l'adjoint à gauche d'un foncteur Hom interne]. On considère alors : $\mathcal{D} = \{N \in Mod_A \mid B \otimes_A N \in \mathcal{D}_0\}$. Comme précédemment, les deux conditions sur le foncteur $(B \otimes_A .)$ impliquent que \mathcal{D} est une classe exacte de Mod_A . Ensuite $(B \otimes_A A \simeq B)$ dit que A est dans \mathcal{D} , et donc, puisque l'anneau A est régulier, on en déduit : $\mathcal{D} = Mod_A$. Soit maintenant M un B -module quelconque. On écrit : $(B \otimes_B M \simeq M)$ et aussi : $[(B \otimes_A B) \otimes_B M \simeq B \otimes_A M]$. D'après l'hypothèse de section, ceci implique que M est facteur direct de $B \otimes_A M$ appartenant à \mathcal{D}_0 , donc d'après le lemme 17, M appartient à \mathcal{D}_0 . Finalement, on a bien : $\mathcal{D}_0 = Mod_B$ et l'anneau B est régulier. ■

2. Stabilité par limite inductive filtrante

Proposition 17 .

Soit $(A_i)_{i \in \mathcal{J}}$ un système inductif d'anneaux, où la catégorie d'indices \mathcal{J} est filtrante, et pour toute flèche $(i \rightarrow j)$ dans \mathcal{J} , l'anneau A_j est plat sur A_i via la flèche structurelle. Notons A sa limite inductive. On suppose que tous les anneaux A_i sont réguliers. Alors A est un anneau régulier.

¹cf le théorème 1 page 14 de D. Lazard dans [Bou80]

Démonstration :

Soit \mathcal{E}_0 la plus petite classe exacte de Mod_A contenant A .

Soit M un A -module de présentation finie. Soit la suite exacte $(A^p \xrightarrow{\alpha} A^q \twoheadrightarrow M \rightarrow 0)$.

Soit (e_λ) une base de A^p . Comme la catégorie \mathcal{J} est filtrante, il existe un indice i tel que l'anneau A_i contienne toutes les images $\alpha(e_\lambda)$ de la base. D'où le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} A^p & \xrightarrow{\alpha} & A^q & \twoheadrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ A_i^p & \xrightarrow{\alpha} & A_i^q & \twoheadrightarrow & M_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où on garde la même base (e_λ) pour A_i^p . On lui applique le foncteur $(. \otimes_{A_i} A)$ pour obtenir : $(A^p \xrightarrow{\alpha} A^q \twoheadrightarrow M_i \otimes_{A_i} A \simeq M \rightarrow 0)$. Désormais i est fixé. On considère la classe : $\mathcal{E}_1 = \{M_i \in Mod_{A_i} \mid M_i \otimes_{A_i} A \in \mathcal{E}_0\}$. Cette classe contient A_i , est stable par limite inductive filtrante [le foncteur considéré est un adjoint à gauche], et est stable par 2/3 [en effet, l'hypothèse implique " A plat sur A_i " donc le foncteur est exact]. Comme A_i est régulier, on a : $\mathcal{E}_1 = Mod_{A_i}$ et donc M est dans \mathcal{E}_0 . Enfin, comme tout module est limite inductive filtrante de modules de présentation finie ², ceci montre : $\mathcal{E}_0 = Mod_A$ et donc l'anneau A est régulier. ■

3. Stabilité par produit

Proposition 18 .

Soient A et B deux anneaux réguliers. Alors le produit $A \times B$ est régulier.

Démonstration :

Soit P un module sur $A \times B$, alors on a la décomposition : $P = M \times N$ avec M dans Mod_A et N dans Mod_B . En effet $(1, 0)$. et $(0, 1)$. sont des projecteurs centraux et on a les relations : $[(1, 0).(0, 1) = (0, 0)]$ et $[(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)]$; ainsi si on note $[M = (1, 0).P]$ et $[N = (0, 1).P]$, alors on a : $P \simeq M \oplus N \simeq M \times N$.

Soit \mathcal{E}_0 la plus petite classe exacte de $Mod_{(A \times B)}$ contenant $A \times B$. Regardons maintenant le foncteur $(. \times 0 : Mod_A \rightarrow Mod_{(A \times B)})$; il est exact et commute aux limites inductives. Donc la classe : $\mathcal{E}_1 = \{M \in Mod_A \mid M \times 0 \in \mathcal{E}_0\}$ est exacte. Or $(A \times 0)$ est la limite inductive filtrante du système $(A \times B \xrightarrow{(1,0)} A \times B \xrightarrow{(1,0)} A \times B \rightarrow \dots)$

donc $A \times 0$ est dans \mathcal{E}_0 . Comme A est régulier, ceci prouve que : $\mathcal{E}_1 = Mod_A$. Un raisonnement analogue avec le foncteur $(0 \times . : Mod_B \rightarrow Mod_{A \times B})$ montre que : $\mathcal{E}_2 = \{N \in Mod_B \mid 0 \times N \in \mathcal{E}_0\}$ est une classe exacte contenant B ; et comme B est régulier, on a : $\mathcal{E}_2 = Mod_B$. Finalement soit $(P = M \times N)$ un module quelconque sur $A \times B$. On écrit : $[(M \times N) \simeq (M \times 0) \oplus (0 \times N)]$ qui appartient à \mathcal{E}_0 . D'où $\mathcal{E}_0 = Mod_{(A \times B)}$ et $A \times B$ est régulier. ■

4. Anneaux de groupe

Proposition 19 .

Soit G un groupe de dimension homologique finie, et A un anneau régulier. Alors l'anneau de groupe $A[G]$ est régulier.

²cf la proposition 7 page 11 de [Bou80]

Démonstration :

On considère \mathcal{E}_0 la plus petite classe exacte de $Mod_{A[G]}$ contenant $A[G]$. Soit $(0 \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0)$ une résolution plate de \mathbb{Z} en $\mathbb{Z}[G]$ -bimodules (existe car $dim_h(G) < \infty$). Soit M un $A[G]$ -module à droite quelconque. On tensorise notre suite exacte par M au-dessus de \mathbb{Z} (muni de l'action diagonale) : $(0 \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} C_n \rightarrow \dots \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} C_1 \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} C_0 \rightarrow M \rightarrow 0)$ est aussi une suite exacte car la suite spectrale $[Tor_*(M, C_*) \Rightarrow 0]$ est nulle à partir de la deuxième ligne [les C_i sont plats]. La structure de $A[G]$ -module sur M est ainsi : A agit sur M seul à droite, et G agit sur les $(M \otimes C_i)$ diagonalement. La suite exacte ci-dessus est donc une résolution de M en $A[G]$ -modules. Pour montrer que M est dans \mathcal{E}_0 , il suffit de voir que $(M \otimes_{\mathbb{Z}} C)$ est dans \mathcal{E}_0 , pour tout module C plat. Or on sait ¹ que tout module plat est limite inductive filtrante de modules projectifs de type fini. La classe \mathcal{E}_0 étant stable par limite inductive filtrante, il suffit donc de voir que $(M \otimes_{\mathbb{Z}} P)$ est dans \mathcal{E}_0 , pour tout module P projectif de type fini. La classe \mathcal{E}_0 étant stable par facteur direct, il suffit de voir que $(M \otimes_{\mathbb{Z}} L)$ est dans \mathcal{E}_0 , pour tout module L libre de dimension finie. Enfin, la classe \mathcal{E}_0 étant stable par “ 2/3 ”, il suffit que $(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G])$ est dans \mathcal{E}_0 . On écrit alors l'isomorphisme suivant, où M_0 est le module M muni de sa structure de A -module, mais où l'action de G est triviale :

$$\begin{array}{ccc}
 M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \simeq M_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] & & \text{(on écrit l'action diagonale de } \gamma \in G \text{)} \\
 u \otimes g \longmapsto (ug^{-1}) \otimes g & & \text{L'action diagonale de } G \text{ à gauche du diagramme} \\
 \downarrow & & \text{est envoyée sur une action triviale à droite.} \\
 u\gamma \otimes g\gamma \longmapsto (u\gamma\gamma^{-1}g^{-1}) \otimes g\gamma & & \text{L'isomorphisme naturel de } A\text{-modules est donc} \\
 & & \text{aussi un isomorphisme de } A[G]\text{-modules.}
 \end{array}$$

On termine en considérant : $\mathcal{E}_1 = \{N \in Mod_A \mid N \otimes \mathbb{Z}[G] \in \mathcal{E}_0\}$. C'est une classe exacte contenant A , et donc puisque A est régulier, on a : $\mathcal{E}_1 = Mod_A$. Mais alors $(M_0 \otimes \mathbb{Z}[G])$ est dans \mathcal{E}_0 et notre cas suffisant est résolu. D'où $\mathcal{E}_0 = Mod_{A[G]}$ et l'anneau $A[G]$ est régulier. ■

5. Polynômes de Laurent

Proposition 20 .

Soit A un anneau régulier.
Alors pour tout entier n , l'anneau de groupe $A[\mathbb{Z}^n]$ est régulier.

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence sur n : il suffit de voir (“ A régulier ” \Rightarrow “ $A[\mathbb{Z}]$ régulier ”), car on a l'isomorphisme : $A[\mathbb{Z}^{n+1}] \simeq A[\mathbb{Z}^n][\mathbb{Z}]$. On écrit : $A[\mathbb{Z}] \simeq A[t, t^{-1}]$ (polynômes de Laurent). Soit \mathcal{E}_0 la plus petite classe exacte de $Mod_{A[t, t^{-1}]}$ contenant $A[t, t^{-1}]$. Soit M un module de $Mod_{A[t, t^{-1}]}$ quelconque : M est un groupe abélien (c'est-à-dire un \mathbb{Z} -module) avec une action de A et une action de t, t^{-1} compatibles. Posons alors : $\mathcal{E}_1 = \{N \in Mod_A \mid N \otimes_A A[t, t^{-1}] \in \mathcal{E}_0\}$. C'est une classe exacte : en effet le foncteur $(. \otimes_A A[t, t^{-1}])$ est exact [car $A[t, t^{-1}]$ est libre sur A] et adjoint à gauche du foncteur “ oublié ”. De plus, elle contient A , et l'anneau A étant régulier, on obtient : $(\mathcal{E}_1 = Mod_A)$. On considère ensuite la suite exacte : $(A[\mathbb{Z}] \xrightarrow{\times(1-t)} A[\mathbb{Z}] \twoheadrightarrow A)$ qui est scindée sur A . En tensorisant par M au-dessus de A (action diagonale), on obtient

la suite exacte : $(M_0[t, t^{-1}] \xrightarrow{\times(1-t)} M_0[t, t^{-1}] \twoheadrightarrow M)$ [ici M_0 est le module M où l'on "oublie" l'action de t]. Alors M_0 est dans \mathcal{C}_1 et par axiome "2/3", M est dans \mathcal{C}_0 . Ainsi on a : $(\mathcal{C}_0 = \text{Mod}_{A[t, t^{-1}]})$ et l'anneau $A[\mathbb{Z}]$ est régulier. ■

6. Stabilité par diagramme de Waldhausen

Proposition 21 ;

Dans chacun des 3 cas décrits au chapitre 1.4.2, si on suppose les anneaux de base (A, B, C) réguliers, alors l'anneau obtenu R est régulier.

Démonstration :

La proposition de classification du chapitre 1.4.3 nous donne 3 suites exactes, permettant de ramener par axiome "2/3" le problème " M est dans \mathcal{C}_0 " à " $(M_{A_i} \otimes_{A_i} R)$ est dans \mathcal{C}_0 ". On considère alors la classe $\mathcal{C}_i = \{N_i \in \text{Mod}_{A_i} \mid N_i \otimes_{A_i} R \in \mathcal{C}_0\}$ qui est une classe exacte car le foncteur sous-jacent est exact [R est plat sur A_i], et adjoint à gauche; comme de plus elle contient A_i et que cet anneau A_i est régulier, on a : $(\mathcal{C}_i = \text{Mod}_{A_i})$ ce qui termine le raisonnement. ■

Remarque :

En particulier, cette proposition permet de traiter le cas d'une extension polynomiale $A[t]$ comme cas particulier de $A[S]$ avec le bimodule $S = A$ lui-même.

5.4 La classe \mathcal{R} de Vogel

Il est temps désormais d'introduire ici une nouvelle classe de groupes, introduite par P. Vogel dans [Vog83], plus vaste que la classe \mathcal{G} de Waldhausen, et qui permettra moralement de montrer les mêmes théorèmes, grâce à notre définition plus souple de la régularité d'un anneau R , et en particulier grâce aux propriétés de stabilité du chapitre précédent appliquées à des anneaux de groupes $R[G]$.

Définition 16 .

Soit \mathcal{R} la plus petite classe de groupes vérifiant :

- (1) Le groupe trivial 1 est dans \mathcal{R} .
- (2) Si G_0 et G_1 sont dans \mathcal{R} , et α, β sont 2 injections,

alors la HNN-extension de $(G_0 \xrightarrow[\beta]{\alpha} G_1)$ est dans \mathcal{R} .

- (3) Si G_0, G_1 et G_2 sont dans \mathcal{R} , et α, β sont 2 injections,

alors la somme amalgamée $G_0 \xrightarrow{\alpha} G_1$ est dans \mathcal{R} .

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{\alpha} & G_1 \\ \beta \downarrow & \lrcorner & \downarrow \dots \\ G_2 & \twoheadrightarrow & (G_1 *_{G_0} G_2) \end{array}$$

- (4) \mathcal{R} est stable par limite inductive filtrante.

Remarque :

D'après la construction inductive des objets de la classe \mathcal{R} , dont les étapes élémentaires respectent le caractère régulier de l'anneau (cf propositions 11,14 et 15 du chapitre 5.3), on a : pour tout anneau R régulier, et tout groupe G dans \mathcal{R} , alors l'anneau de groupe $R[G]$ est régulier. Cette propriété est aussi vérifiée par les groupes H de dimension homologique finie (proposition 13); il serait intéressant de voir si ces groupes appartiennent forcément à la classe \mathcal{R} .

Théorème 25 [Vog90]

- (i) \mathcal{R} est stable par sous-groupe.
- (ii) \mathcal{R} est stable par extension.
- (iii) \mathcal{R} contient tous les groupes abéliens sans torsion.
- (iv) \mathcal{R} contient tous les groupes sans torsion à une relation.
- (v) \mathcal{R} contient tous les groupes fondamentaux des variétés de Hecke irréductibles.
- (vi) Pour tout CW-complexe connexe X , il existe un groupe G dans \mathcal{R} tel que X est obtenu à partir de BG par une construction “+” de Quillen.

Démonstration :

(i) On considère la classe \mathcal{E} des groupes B tels que tous leurs sous-groupes A sont dans \mathcal{R} . Alors \mathcal{E} contient 1. Elle est stable par limite inductive filtrante : soit $(B = \varinjlim_{i \in J} B_i)$, avec B_i dans \mathcal{E} , et A est un sous-groupe de B , on considère le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc}
 A_i \twoheadrightarrow B_i & \text{par construction, } A_i \text{ est un sous-groupe de } B_i, \\
 \downarrow \quad \ulcorner \quad \downarrow & \text{et donc } A_i \text{ est dans } \mathcal{R}. \text{ On applique alors} \\
 A \twoheadrightarrow B & \text{le foncteur } \varinjlim \text{ à tout le diagramme :}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim_{i \in J} A_i \twoheadrightarrow \varinjlim_{i \in J} B_i & \text{qui reste un pullback car la limite inductive est filtrante} \\
 \downarrow \quad \ulcorner \quad \parallel & \text{(cf [Zis67]), et donc on obtient l'isomorphisme :} \\
 A \twoheadrightarrow B & \text{(} A \simeq \varinjlim_{i \in J} A_i \text{) est dans } \mathcal{R}, \text{ soit finalement : } B \text{ est dans } \mathcal{E}.
 \end{array}$$

Il reste à prouver que \mathcal{E} est stable par “somme amalgamée” et par “HNN-extension” : on aura alors $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$, c'est-à-dire la classe \mathcal{R} est stable par sous-groupe. Pour cela, on utilise le lemme géométrique qui suit.

(ii) Soit A un groupe de \mathcal{R} fixé. On considère la classe \mathcal{D} des groupes C tels que pour toute extension $(A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow C)$, alors B est dans \mathcal{R} . Alors \mathcal{D} contient 1.

Elle est stable par limite inductive filtrante : soit $(C = \varinjlim_{i \in J} C_i)$, avec C_i dans \mathcal{E} , alors par pullback le long de la flèche structurelle $(C_i \rightarrow C)$, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 A \twoheadrightarrow B_i \twoheadrightarrow C_i & \text{où la ligne du haut est aussi une extension, et donc} \\
 \parallel \quad \downarrow \quad \ulcorner \quad \downarrow & B_i \text{ est dans } \mathcal{R}. \text{ On applique alors le foncteur } \varinjlim \\
 A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow C & \text{qui respecte les suites exactes à tout le diagramme :}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A \twoheadrightarrow \varinjlim_{i \in J} B_i \cdots \twoheadrightarrow \varinjlim_{i \in J} C_i & \text{et donc par le lemme des 5, on obtient l'isomorphisme :} & \\
\parallel & & (B \simeq \varinjlim_{i \in J} B_i) \text{ est dans } \mathcal{R}, \text{ soit finalement : } C \text{ est dans } \mathcal{D} \\
\downarrow & \lrcorner & \\
A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow C & &
\end{array}$$

Il reste à prouver que \mathcal{D} est stable par “somme amalgamée” et par “HNN-extension” : on aura alors $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$, c'est-à-dire la classe \mathcal{R} est stable par extension. Pour cela, on utilise le petit lemme géométrique qui suit.

(iii) à (v) : La catégorie \mathcal{R} définie ici est par définition plus large que la classe \mathcal{G} de Waldhausen présentée au chapitre 1.4.8 car on n'impose pas ici de condition de cohérence sur les anneaux lors d'une somme amalgamée ou d'une HNN-extension ; nous récupérons donc ses résultats du théorème 11.

(vi) On se reporte ici à la démonstration de Baumslag-Dyer-Heller dans leur article [Bau80] ; il suffit juste de vérifier que les différents groupes G qui interviennent restent dans la classe \mathcal{R} . ■

Lemme 18 [Géométrie].

Soit Γ un graphe. On suppose que pour tout sommet x dans Γ_0 , on a un espace topologique E_x qui est la réunion disjointe d'espaces d'Eilenberg-Mac-Lane $\coprod K(G, 1)$, avec G un groupe de la classe \mathcal{R} . De même pour toute arête a dans Γ_1 , on a un espace topologique E_a qui s'écrit : $\coprod K(G', 1)$, avec G' un groupe dans \mathcal{R} . On suppose que pour toute relation d'incidence ($x \in a$), on a une flèche ($i : E_a \rightarrow E_x$) injective sur le π_1 pour tout choix de point-base. On construit par recollement une application cellulaire ($f : E_\Gamma \rightarrow \Gamma$) qui sera localement un fibré trivial au-dessus des arêtes ; pour cela, on effectue le pushout :

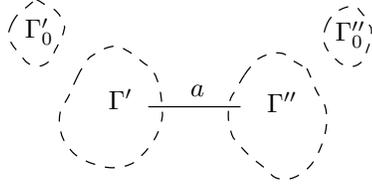
$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{CW-complexe } E_\Gamma \\ \text{---} \\ E_x \quad E_y \quad \dots \end{array} & & \begin{array}{ccc} \coprod_{\sigma \in \Gamma_1} E_\sigma \times \delta\sigma & \longrightarrow & \coprod_{\sigma \in \Gamma_0} E_\sigma \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{\sigma \in \Gamma_1} E_\sigma \times \sigma & \cdots \cdots \cdots \longrightarrow & E_\Gamma \end{array} \\
\downarrow f & & \\
\begin{array}{c} \text{Graphe } \Gamma \\ \text{---} \\ x \quad y \quad \dots \end{array} & & \left[\begin{array}{l} \text{Alors l'espace } E_\Gamma \text{ obtenu par recollement} \\ \text{est lui-même la réunion disjointe d'espaces} \\ \text{d'Eilenberg-Mac-Lane } \coprod K(\pi, 1) \text{ avec des} \\ \text{groupes } \pi \text{ dans la classe } \mathcal{R} ; \text{ et pour tout } \sigma \\ \text{(sommet ou arête du graphe } \Gamma \text{), la flèche} \\ \text{structurelle } (E_\sigma \rightarrow E_\Gamma) \text{ est injective} \\ \text{sur le } \pi_1 \text{ pour tout choix de point-base.} \end{array} \right]
\end{array}$$

Démonstration :

a. Comme l'espace E_Γ est obtenu par limite inductive filtrante indexée par les sous-graphes

finis Γ_0 de Γ : ($E_\Gamma = \varinjlim_{\Gamma_0 \subset \Gamma} E_{\Gamma_0}$), on peut supposer désormais que le graphe Γ est fini.

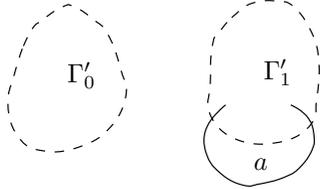
b. On raisonne par récurrence sur le nombre de cellules (c'est-à-dire le nombre de sommets et d'arêtes) : on pose l'hypothèse de récurrence [“pour tous sommets x et toutes arêtes a , les flèches ($E_x \rightarrow E_\Gamma$) et ($E_a \rightarrow E_\Gamma$) sont injectives sur le π_1 pour chaque point-base”]. On supposera de plus comme hypothèse de travail supplémentaire que tous les espaces E_x et E_a sont connexes. Si le graphe ne contient pas d'arête, alors l'espace E_Γ est réunion disjointe des espaces E_x et le lemme est démontré. Dans le cas contraire, on choisit une arête a dans Γ_1 et on décompose : ($\Gamma = \Gamma' \coprod a$). Deux cas se présentent alors :



1^{er} cas : l'arête a relie deux composantes connexes distinctes Γ' et Γ'' . Dans ce cas, la flèche $(E_a \rightarrow E_{\Gamma'})$ est injective sur le π_1 car composée de $(E_a \rightarrow E_x)$ injective sur le π_1 par hypothèse de départ, et $(E_x \rightarrow E_{\Gamma'})$ injective sur le π_1 par hypothèse de récurrence. De même pour la flèche $(E_a \rightarrow E_{\Gamma''})$. Mais alors nous sommes dans le cas d'une somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} E_a \times a & \longrightarrow & E_{\Gamma'} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ E_{\Gamma''} & \dashrightarrow & E \end{array}$$

D'après le théorème de Van-Kampen (essentiellement une manipulation de l'homologie à coefficients tordus...), le pushout E est alors connexe, c'est un espace d'Eilenberg-Mac-Lane $K(G, 1)$ avec G une somme amalgamée de groupes déjà dans \mathcal{R} , donc G est dans la classe \mathcal{R} .



2^{ème} cas : l'arête a a ses deux sommets dans la même composante connexe Γ'_1 . Pour les mêmes raisons que ci-dessus, les flèches $(E_a \rightarrow E_{\Gamma'_1})$ sont injectives sur le π_1 , et on se trouve alors dans le cas d'une HNN-extension : $(E_a \times a \rightrightarrows E_{\Gamma'_1})$. Ici le théorème de Van-Kampen nous dit que le recollement E est connexe, que c'est un $K(G, 1)$ avec G une HNN-extension de groupes déjà dans \mathcal{R} , donc G est dans la classe \mathcal{R} .

c. Par récurrence, le lemme est donc démontré quand les espaces E_x et E_a sont connexes. Le cas général s'y ramène par le changement de variables suivant : on construit un autre graphe Γ' avec Γ'_0 l'ensemble des couples (x, u) où x est un sommet de Γ et u une composante connexe de E_x . De même, on pose Γ'_1 l'ensemble des couples (a, v) où a est une arête de Γ et v une composante connexe de E_a . Puis on pose : $(E'_{(x,u)} = u)$ et $(E'_{(a,v)} = v)$. Alors on retrouve : $(E'_{\Gamma'} = E_\Gamma)$, et le lemme est démontré. ■

Application :

Pour une HNN-extension $(C \rightrightarrows A)$, on prendra pour Γ un point x muni d'une arête circulaire a , avec $[E_x = K(A, 1)]$ et $[E_a = K(C, 1)]$.

Pour une somme amalgamée $C \twoheadrightarrow A$, on prendra pour Γ un segment a de sommets x et y distincts, avec $[E_x = K(A, 1)]$, $[E_y = K(B, 1)]$ et $[E_a = K(C, 1)]$.

$$\begin{array}{ccc} C & \twoheadrightarrow & A \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \twoheadrightarrow & G \end{array}$$

mets x et y distincts, avec $[E_x = K(A, 1)]$, $[E_y = K(B, 1)]$ et $[E_a = K(C, 1)]$.

Stabilité par sous-groupe : Soit H un sous-groupe de G dans \mathcal{E} . On pose $(X = E_G)$, on construit l'application $(f : X \rightarrow \Gamma)$ du lemme, puis on prend le sous-révêtement $(\tilde{X} = E_H)$ du revêtement universel, de groupe fondamental $(\pi_1 \tilde{X} = H)$. On effectue alors des pullbacks : (ce procédé étant fonctoriel de la catégorie des objets au-dessus de X vers la catégorie des objets au-dessus de \tilde{X})

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X}_a & \dashrightarrow & \tilde{X}_x & \twoheadrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X_a & \twoheadrightarrow & X_x & \twoheadrightarrow & X \end{array}$$

Le choix d'un point-base dans \tilde{X}_a se propage dans X_a puis X_x , et donc dans une composante connexe de \tilde{X}_x . La flèche composée $(\pi_1 \tilde{X}_a \rightarrow \pi_1 X_a \rightarrow \pi_1 X_x)$ étant injective, on en déduit que la flèche $(\pi_1 \tilde{X}_a \rightarrow \pi_1 \tilde{X}_x)$ est injective, donc les hypothèses du lemme sont vérifiées pour la flèche composée $(\tilde{X} \rightarrow X \rightarrow \Gamma)$.

L'espace E_H est donc obtenu par recollement d'espaces \tilde{X}_σ de groupe fondamental ($H_\sigma = \pi_1 \tilde{X}_\sigma$) est un sous-groupe de ($G_\sigma = \pi_1 X_\sigma$). Or G_σ est dans \mathcal{C} par hypothèse de départ, donc H_σ est dans \mathcal{R} , et d'après le lemme, H est donc dans \mathcal{R} ; ceci revient à dire que G est dans \mathcal{C} . ■

Stabilité par extension : Supposons A fixé dans \mathcal{R} et C obtenu par le diagramme Γ à partir de cellules C_σ dans la classe \mathcal{D} . On considère une extension ($A \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow C$). On veut montrer que B est dans \mathcal{R} . On construit au-dessus de l'espace total C un fibré ($X \rightarrow E_C$) de fibre fixe $F = K(A, 1)$, qui donne par pullback des fibrés induits ($F \twoheadrightarrow X_\sigma \twoheadrightarrow E_\sigma$). Le groupe $B = \pi_1 X$ est alors obtenu par recollement de groupes ($B_\sigma = \pi_1 X_\sigma$), cellules-extensions obtenues par pullback : ($A \twoheadrightarrow B_\sigma \twoheadrightarrow C_\sigma$). Mais alors chaque C_σ est dans la classe \mathcal{D} par hypothèse de départ, donc B_σ est dans \mathcal{R} ; donc d'après le lemme (les hypothèses d'injectivité sont vérifiées comme ci-dessus), B est donc dans la classe \mathcal{R} ; ceci revient à dire que C est dans la classe \mathcal{D} . ■

Remarque : On notera que ce petit lemme géométrique permet de simplifier bon nombre de problèmes algébriques ardues. Par exemple, montrer que “ tout sous-groupe d'un groupe libre est libre ” revient grâce à ce lemme à voir que tout revêtement d' un arbre est un arbre [ce qui est quand même plus évident !]. On notera enfin que ce genre d'idées est proche de la notion de “ splitting ” de groupe développée par Waldhausen à la page 249 de son article [Wal78].

À ce stade, il est bon d'énoncer clairement une conséquence de la conjecture évoquée en introduction, et qui représente l'analogie du théorème 12 de Waldhausen (cf chapitre 1.4.8).

Théorème 26 [Vog90]

Supposons que la [Conjecture] énoncée au chapitre 5.2 soit vraie. Soit R un anneau régulier, et G un groupe dans la classe \mathcal{R} . Alors le spectre d'obstruction “ généralisé ” de Whitehead $Wh^R(G)$ est contractile. Autrement dit, le spectre “ généralisé ” de K -théorie algébrique $\underline{K}(R[G])$ se comporte alors comme la théorie homologique associée au Ω -spectre $BG^+ \wedge \underline{K}(R)$ par rapport à la variable des groupes G dans la classe \mathcal{R} ; en particulier elle vérifie le théorème d'excision, et donne lieu à des suites exactes de Mayer-Vietoris (d'où certaines facilités calculatoires).

Indication : L'idée est justement de calculer $K(R[G])$ localement, en montrant que la [Conjecture] du chapitre 5.2 implique l'excision dans les cas d'une somme amalgamée, ou d'une HNN-extension. La comparaison des 2 théories homologiques implique alors que le défaut (l'obstruction $Wh^R(G)$) est contractile.

5.5 Liens acyclicité-contractibilité

Commençons par deux résultats classiques :

Proposition 22 .

Soit C_* un complexe de R -modules (à droite) contractile. Alors pour tout module M à droite, et N à gauche, de coefficients, et pour tout indice i , les groupes de (co)homologie $H_i(C_*, N)$ et $H^i(C_*, M)$ sont nuls.

Démonstration :

Dire que C est contractile revient à affirmer l'existence d'un morphisme de R -complexes de degré 1 (une " homotopie ") $[k : C \rightarrow C]$ vérifiant $[Id_C = d \circ k + k \circ d]$. Dans ce cas, la flèche $[k \otimes Id : C_* \otimes M \rightarrow C_* \otimes N]$ est une homotopie montrant que le complexe d'homologie $C_* \otimes N$ est contractile. Et la flèche $[. \circ k : Hom(C_*, M) \rightarrow Hom(C_*, M)]$ est une homotopie montrant que le complexe de cohomologie $Hom(C_*, M)$ est contractile. Il reste alors à montrer que les groupes d'homologie (ordinaires) d'un complexe contractile sont nuls : soit un cycle z tel que $[dz = 0]$; on écrit : $z = dkz + kdz = d(kz)$ donc c'est un bord, et l'homologie est nulle. ■

Proposition 23 .

On suppose donnés C_* un complexe projectif minoré, E_* un complexe acyclique, et $[f_* : C_* \rightarrow E_*]$ un morphisme de complexes. Alors f est homotope à 0 : autrement dit, il existe un morphisme de complexes $[g_* : C_* \rightarrow E_*]$ de degré 1 et vérifiant $[f = d \circ g + g \circ d]$.

Démonstration :

On peut supposer sans perte de généralité que $C_i = 0$ pour tout indice i négatif (et donc $f_i = 0$ aussi !). Le premier cran non-trivial consiste à trouver $[g_0 : C_0 \rightarrow E_1]$ telle que $[f_0 = d \circ g_0]$. Mais alors (C_0 projectif et E_* acyclique) impliquent que le complexe $Hom(C_0, E_*)$ est acyclique. L'existence de g_0 revient alors à montrer que $[d \circ f_0 = 0]$. Mais ceci résulte du fait que f_* est un morphisme de complexes, et que $[f_{-1} = 0]$. Supposons maintenant avoir construit la flèche g_* jusqu'au cran $(n-1)$. On cherche $[g_n : C_n \rightarrow E_{n+1}]$ telle que $[f_n = d \circ g_n + g_{n-1} \circ d]$. C'est-à-dire $[d \circ g_n = (f_n - g_{n-1} \circ d)]$ déjà définie. Remarquant que (C_n projectif et E_* acyclique) impliquent que le complexe $Hom(C_n, E_*)$ est acyclique, il suffit de calculer : $[d \circ (f_n - g_{n-1} \circ d) = d \circ f_n - (d \circ g_{n-1}) \circ d = f_{n-1} \circ d - (f_{n-1} - g_{n-2} \circ d) \circ d = 0]$ grâce à l'hypothèse de récurrence, et au fait que le carré de la différentielle est nul. ■

Application :

En particulier, pour tout complexe projectif minoré, les notions d'acyclicité et de contractibilité coïncident : il suffit d'appliquer la proposition précédente à la flèche $[Id_C : C_* \rightarrow C_*]$. Cette propriété s'étend évidemment à la catégorie des complexes projectifs homotopiquement finis \mathfrak{C}_R .

Le cas des complexes non-minorés est beaucoup plus mal connu ; néanmoins, on a les critères de contractibilité suivants :

Lemme 19 .

Soit C_* un complexe projectif (non-forcément minoré), acyclique. Pour tout indice n , notons $Z_n = Ker[d : C_n \rightarrow C_{n-1}] = Im[d : C_{n+1} \rightarrow C_n]$. Alors C_* est contractile ssi tous les modules Z_n sont projectifs.

Démonstration :

On regarde les suites exactes courtes $(Z_n \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{d} Z_{n-1}) \cdot \underline{(ii)} \rightarrow \underline{(i)}$: Si le module Z_{n-1} est projectif, elle est scindée, et $[C_n \simeq Z_n \oplus Z_{n-1}]$. L'homotopie $[k : C_n \rightarrow C_{n+1}]$ est alors

induite par l'identité $Id_{Z_n} \cdot \underline{(i)} \rightarrow (ii)$: Réciproquement, soit k telle que $[Id_{C_n} = d \circ k + k \circ d]$. Appliquons cette égalité à un élément x dans Z_{n-1} : on obtient $[x = d \circ k(x)]$. Donc la flèche k fournit une section à la suite exacte courte sus-citée, et le module Z_n étant facteur direct de C_n projectif, est lui-même projectif. ■

Proposition 24 .

Soit C_ un complexe projectif, acyclique. Supposons que pour tout module à droite M de coefficients, et tout indice i , les groupes de cohomologie $H^i(C_*, M)$ [ou au choix $H^i(M, C_*)$] sont nuls. Alors le complexe C_* est contractile.*

Démonstration :

D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que les modules Z_n sont projectifs. Appliquons l'hypothèse (i) au module $M = Z_n$ muni de la flèche $[d : C_{n+1} \rightarrow Z_n]$ dont la différentielle est nulle. Elle provient donc d'une flèche $[r : C_n \rightarrow Z_n]$ qui est une rétraction de l'inclusion i de la suite exacte courte ci-dessus. Avec l'hypothèse (ii), on prend $M = Z_n$ muni de la flèche $[i : Z_n \rightarrow C_n]$ dont la différentielle est nulle. Elle provient donc d'une flèche $[k : Z_n \rightarrow C_{n+1}]$ qui est une section de la différentielle d de la suite exacte courte ci-dessus. Dans les 2 cas, la suite est scindée, et donc Z_n est facteur direct de C_n projectif. ■

Dans le cas d'un anneau régulier, on a quelques résultats complémentaires :

Lemme 20 .

Supposons ici que l'anneau de base R est régulier (à gauche). Soit C_ un complexe de R -modules à droite projectifs, acyclique. Alors pour tout R -module à gauche N , et tout indice i , les groupes d'homologie $H_i(C_*, N)$ sont nuls.*

Démonstration :

On considère la classe \mathcal{C} des modules à gauche N tels que tous les groupes d'homologie $H_i(C_*, N)$ soient nuls. C'est une classe exacte : elle est stable par limite inductive car on a l'isomorphisme : $C_* \otimes_R (\varinjlim_{\alpha} N_{\alpha}) \simeq \varinjlim_{\alpha} (C_* \otimes_R N_{\alpha})$, et la stabilité par " 2/3 " résulte de la suite exacte longue (le foncteur $C_n \otimes \cdot$ est exact, car C_n est projectif). De plus, elle contient l'anneau de base R , car le complexe C_* est acyclique . Comme R est régulier à gauche, alors $\mathcal{C} = {}_R Mod$. ■

Proposition 25 .

Soit R un anneau de base régulier (à droite). Soit C_ un complexe (non-forcément minoré) de R -modules (à gauche) projectifs, de type fini : un tel complexe est appelé quasi-cohérent. Alors C_* est acyclique ssi il est contractile.*

Démonstration :

On trouvera ci-après 2 preuves indépendantes de cette proposition importante (la 1^{ère}, due à Mr Vogel, utilise pleinement l'hypothèse de type fini, la 2^{nde} pourrait se généraliser grâce la remarque ² et aux suites spectrales de [Boa98] et [Jen72]) :

- On considère la classe \mathcal{D} des modules à droite M tels que tous les groupes de cohomologie $H^i(C_*, M)$ soient nuls. C'est une classe exacte : elle est stable par " 2/3 " grâce à la suite exacte longue (le foncteur $Hom(C_n, \cdot)$ est exact, car C_n est projectif); elle est stable par limite inductive : soit $M = \varinjlim_{\alpha} M_{\alpha}$ et $(x : C_i \rightarrow M)$ tel que $[dx = 0]$. Comme C_i est de type fini et la limite est filtrante, x se factorise par un certain M_{β} fixé (il suffit de prendre l'image des générateurs). Alors $M_{\beta} \in \mathcal{D}$ donne $(y : C_{i-1} \rightarrow M_{\beta})$ tel que $[x = dy]$. Donc $Hom(C_*, M)$

est acyclique, et $M \in \mathcal{D}$. Enfin les C_i étant de type fini, le complexe dual \hat{C}_* est acyclique, donc l'anneau de base R est dans \mathcal{D} . Comme R est régulier à droite, alors $\mathcal{D} = \text{Mod}_R$. ■

• On va montrer l'hypothèse (ii) de la proposition 24, grâce au lemme 20 et au résultat suivant, tiré de [Bourbaki, Algèbre, chapitre II page 77 et chapitre X page 12] : l'homomorphisme canonique

$$E^* \otimes_A F \longrightarrow \text{Hom}_A(E, F)$$

est bijectif si (au choix)

- a. F est un A -module projectif de type fini.
- b. E est un A -module projectif de type fini.
- c. F est plat, et E est de présentation finie.

On applique cet isomorphisme avec $E = Z_n$ (R -module à gauche). Alors $E^* = \text{Hom}(E, R)$ est aussi un R -module à gauche, et grâce au raisonnement du lemme 20, on sait que $Z_n^* \otimes_R C_*$ est acyclique. Si C_* est quasi-cohérent, alors chacun des $F = C_k$ est projectif de type fini (hypothèse a) ou bien (F est plat et la présentation $[C_{n+2} \rightarrow C_{n+1} \rightarrow Z_n \rightarrow 0]$ assure l'hypothèse c). On a donc $\text{Hom}_R(Z_n, C_*)$ acyclique, ce qui prouve que Z_n est projectif, et le scindage permet d'obtenir l'homotopie recherchée. ■

Proposition 26 .

Supposons l'anneau de base R de dimension cohomologique (à droite) finie n . Soit C_* un complexe de R -modules (à droite, ou à gauche) quasi-cohérent. Alors C_* est acyclique ssi il est contractile.

Démonstration :

- Si les modules sont à gauche : on remarque que $\dim_{\text{cohom}}(R) < \infty$ (à droite) implique que l'anneau R est régulier à droite. Puis on applique la proposition précédente.
- Si les modules sont à droite : on suppose C_* acyclique, et on note $[Z_n = \text{Im}(d : C_{n+1} \rightarrow C_n) = \text{Ker}(d : C_n \rightarrow C_{n-1})]$. La troncature : $[(0 \rightarrow Z_p \rightarrow C_p \rightarrow C_{p-1} \dots) \mapsto C_*]$ est un qis. Soit alors $(0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow Z_p)$ une résolution projective finie de Z_p . En recollant, on obtient un qis : $[(0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow C_p \rightarrow C_{p-1} \dots) \mapsto C_*]$ où le complexe de gauche est majoré par $(p+n)$. Ceci montre que pour tout indice ($i > p+n$), le module Z_i est projectif. En faisant varier l'indice p au début de notre raisonnement, on obtient ainsi : Z_i est projectif pour tout i ; et donc C_* est contractile. ■

Conjecture 2 :

Soit R un anneau régulier. Alors tout R -complexe projectif acyclique est contractile.

Remarque : ici, le fait qu'on regarde des complexes de modules à droite ou à gauche, et que l'hypothèse de régularité de R soit valable sur Mod_R ou sur ${}_R\text{Mod}$ dépendra très fortement du mode de démonstration choisi. Il serait en outre intéressant de trouver un exemple d'anneau régulier d'un côté seulement.

5.6 La classe \mathcal{E}_0 des modules réguliers

- Commençons par affaiblir un peu les conditions pour trouver la classe \mathcal{E}_0 des modules réguliers (nous donnons ci-après la démonstration tirée de [Vog90]) :

Proposition 27 .

\mathcal{C}_0 est la plus petite classe \mathcal{C} contenant les modules libres, stable par limite inductive filtrante et par conoyau de cofibration (autrement dit, dans l'axiome " 2/3 " on ne considère que le cas : $[M', M \in \mathcal{C} \Rightarrow M'' \in \mathcal{C}]$).

Démonstration :

Donnons ici une esquisse de la démonstration de Mr Vogel.

Pour chaque ordinal α , on construit inductivement une classe \mathcal{D}_α de la manière suivante : \mathcal{D}_0 est la classe des modules libres. Si α est un ordinal-limite, M appartient à \mathcal{D}_α ssi c'est la limite inductive filtrante de modules appartenant à $(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{D}_\beta)$. Si $(\alpha = \beta + 1)$, un module M appartient à \mathcal{D}_α ssi c'est le conoyau d'un monomorphisme $(A \rightarrow B)$, avec A et B dans \mathcal{D}_β . On a immédiatement l'inclusion : $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{C}_0$. Il faut alors prouver que l'union \mathcal{C} des classes \mathcal{D}_α est exactement la classe des modules réguliers \mathcal{C}_0 . La seule chose qui reste à prouver est que cette classe \mathcal{C} est stable par "2/3". Pour cela, on vérifie 3 lemmes :

Lemme 21 .

Pour tout ordinal α , le noyau d'un épimorphisme d'un module libre vers un module de \mathcal{D}_α appartient à \mathcal{C} .

Démonstration :

C'est vrai pour $(\alpha = 0)$. Procédons par récurrence, et supposons le lemme vrai pour tout $(\beta < \alpha)$. Soit $(f : F \twoheadrightarrow M)$ un épimorphisme d'un module libre F vers un module M de \mathcal{D}_α . Si $(\alpha = \beta + 1)$, on a une suite exacte courte $(0 \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow 0)$ avec M' et M'' dans \mathcal{D}_β . On peut compléter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow f' & & \uparrow f'' & & \uparrow f & & \\
 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, les flèches verticales surjectives, et les modules (F', F'', F) libres. Par hypothèse de récurrence, $Ker(f')$ et $Ker(f'')$ sont dans \mathcal{C} . Donc $(Ker(f) = Coker[Ker(f') \rightarrow Ker(f'')])$ est dans \mathcal{C} aussi. Si α est un ordinal-limite, M est la limite inductive filtrante d'un système de modules $(M_i, i \in \mathcal{J})$ où \mathcal{J} est une catégorie filtrante (au sens de MacLane dans [Mac71]) et chaque M_i est dans un \mathcal{D}_β avec $(\beta < \alpha)$. La difficulté consiste à trouver un système inductif $(F_i, i \in \mathcal{J})$ avec des suites exactes courtes compatibles $(K_i \twoheadrightarrow F_i \twoheadrightarrow M_i)$ tel que $(\varinjlim_{i \in \mathcal{J}} F_i)$ soit un module libre. Une manière fonctorielle de le faire est la suivante : notons

M_\bullet ce système de modules. Pour tout indice i , soit $F_{i\bullet}$ le système suivant : pour tout indice j , soit F_{ij} le C -module libre engendré par les flèches de \mathcal{J} allant de i à j . Pour toute flèche $(j \rightarrow k)$ de \mathcal{J} , la flèche induite $(F_{ij} \rightarrow F_{ik})$ est donnée par la composition. Clairement, $Hom(F_{i\bullet}, M_\bullet)$ est isomorphe à M_i [isomorphisme induit par l'image de $(Id : i \rightarrow i)$] et la limite inductive des $F_{i\bullet}$ est isomorphe à C [la flèche $(Id : i \rightarrow i)$ induit toutes les flèches $(i \rightarrow j)$ dans la limite inductive]. Soit \mathcal{J} l'ensemble des couples (i, u) avec i un indice dans \mathcal{J} et u une flèche de $F_{i\bullet}$ vers M_\bullet . Posons $(F_\bullet = \bigoplus_{(i,u) \in \mathcal{J}} F_{i\bullet})$. On a une flèche évidente $(\phi_\bullet : F_\bullet \rightarrow M_\bullet)$.

Pour tout indice i , $(\phi_i : F_j \rightarrow M_j)$ est surjective, de noyau noté K_j appartenant à \mathcal{C} (par hypothèse de récurrence). Passons à la limite inductive filtrante selon les indices j : c'est un foncteur exact, et on a donc la suite exacte courte $(\varinjlim_{j \in \mathcal{J}} K_j \twoheadrightarrow \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} F_j \twoheadrightarrow M)$ à comparer avec la suite exacte courte de départ $(K \twoheadrightarrow F \twoheadrightarrow M)$. Le lemme de Schanuel nous dit alors que : $(\varinjlim_{j \in \mathcal{J}} K_j \oplus F \simeq \varinjlim_{j \in \mathcal{J}} F_j \oplus K)$. Dans le terme de gauche, la limite inductive est dans

\mathcal{E} car chacun des K_j y est. Une démonstration par récurrence [simple] montre alors qu'un objet de \mathcal{E} à qui on ajoute [en somme directe] un module libre fixe F reste un objet de \mathcal{E} . Conclusion : K est facteur direct d'un objet de \mathcal{E} donc d'après le lemme 1, K est dans \mathcal{E} . Ainsi se termine le cas ordinal-limite, et donc la démonstration. ■

Lemme 22 .

\mathcal{E} est stable par extension.

Démonstration :

Soit $(0 \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow 0)$ une suite exacte telle que M' et M soient dans \mathcal{E} . Soit $(f : F \twoheadrightarrow M)$ un épimorphisme d'un module libre F vers M . Soit N le pullback (" produit fibré " en français) de F et M'' au-dessus de M . Comme F est libre, la suite exacte se scinde, et le module N est isomorphe à $(M' \oplus F)$; il appartient donc à \mathcal{E} . D'après le lemme 21, $\text{Ker}(f)$ est dans \mathcal{E} . Donc $(M'' = \text{Coker}[\text{Ker}(f) \twoheadrightarrow N])$ est aussi dans \mathcal{E} . ■

Lemme 23 .

\mathcal{E} est stable par noyau d'épimorphismes.

Démonstration :

Soit $(0 \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow 0)$ une suite exacte telle que M'' et M soient dans \mathcal{E} . Soit $(f : F \twoheadrightarrow M'')$ un épimorphisme d'un module libre F vers M'' . Notons K le noyau de la flèche composée $(F \twoheadrightarrow M'' \twoheadrightarrow M)$. On a une suite exacte courte $(0 \rightarrow K \rightarrow M' \oplus F \rightarrow M'' \rightarrow 0)$. D'après le lemme 21, K est dans \mathcal{E} . D'après le lemme 22, l'extension $(M' \oplus F)$ est aussi dans \mathcal{E} . Or M' est un facteur direct de $(M' \oplus F)$, et donc, grâce à la stabilité par limite inductive filtrante, M' est dans \mathcal{E} . ■

La classe \mathcal{E} vérifie donc les trois axiomes du "2/3", elle est donc exacte, et c'est exactement la classe \mathcal{E}_0 des modules réguliers. ■

5.7 Complexes sur un anneau régulier

- Rappelons maintenant quelques définitions :

Définition 17 ;

Fixons R un anneau, et \mathcal{E}_0 la classe des R -modules réguliers.

Un " R -complexe " C_ est un complexe de R -modules projectifs.*

On dira que C_ est " minoré " si C_n est nul pour n assez petit.*

On dira que C_ est " quasi-cohérent " si tous les C_n sont de type fini.*

On dira que C_ est " fini " si $(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_n)$ est de type fini.*

On dira que D_ est " homotopiquement fini " s'il existe C_* fini, et deux flèches $(f : C_* \rightarrow D_*)$ et $(g : D_* \rightarrow C_*)$, telles que : $[(f \circ g) \sim \text{Id}_{D_*}]$ et $[(g \circ f) \sim \text{Id}_{C_*}]$.*

Avec ces notations, nous pouvons aborder le théorème fondamental des anneaux réguliers (démontré par P. Vogel dans son article [Vog90]) :

Lemme 24 [Technique].

Soit C_ un R -complexe quasi-cohérent, et $M \in \mathcal{E}_0$ un module régulier.*

Tout morphisme de chaînes de C_ dans M se factorise par un R -complexe fini.*

Démonstration :

Ici le module M est regardé comme un module différentiel gradué, concentré en degré 0 et à différentielle nulle. Soit \mathcal{E} la classe des R -modules M tels que, pour tout R -complexe C_* quasi-cohérent, tout morphisme de chaînes de C_* dans M se factorise par un R -complexe fini.

(i) Soit F un R -module libre, et $(f : C_* \rightarrow F)$ un morphisme de chaînes. Alors f est donnée par $(f_0 : C_0 \rightarrow F)$ et donc f se factorise par un R -module F' libre de type fini contenu dans F . Comme F' est un R -complexe fini, alors F est dans \mathcal{E} .

(ii) Soit $(M = \varinjlim_{i \in J} M_i)$, avec chacun des M_i dans \mathcal{E} . Soit f un morphisme de chaînes de C_* quasi-cohérent dans M . Comme f est définie par une flèche du module $\text{Coker}(C_1 \rightarrow C_0)$ [de présentation finie] dans M , f se factorise par l'un des M_i ; or la flèche $(C_* \rightarrow M_i)$ se factorise par un R -complexe fini; ainsi M est dans \mathcal{E} .

(iii) Soit $(0 \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow 0)$ une suite exacte de R -modules. Supposons M' et M'' dans \mathcal{E} . Soit f un morphisme de chaînes de C_* quasi-cohérent dans M . Notons C' le cône de l'identité $(Id : \Sigma^{-1}C \rightarrow \Sigma^{-1}C)$. Le R -complexe C' est contractile, quasi-cohérent, et s'envoie surjectivement sur C_* . Comme C' est contractile, il n'y a pas d'obstruction à relever le morphisme de chaînes $(C' \rightarrow C \rightarrow M)$ au niveau de M'' et on obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma^{-1}C & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme M' est dans \mathcal{E} et $\Sigma^{-1}C$ est quasi-cohérent, la flèche $(\Sigma^{-1}C \rightarrow M')$ se factorise par un complexe fini K' . Soit C'' le pushout de C' et K' au-dessus de $\Sigma^{-1}C$. Le complexe C'' est quasi-cohérent et M'' appartient à \mathcal{E} . Donc la flèche $(C'' \rightarrow M'')$ se factorise par un complexe fini K'' . Notons E le cône de l'identité $(Id : K' \rightarrow K')$. Comme E est contractile, le morphisme de chaînes $(K' \rightarrow E)$ s'étend à C'' . Soit L la somme directe $(K'' \oplus E)$. La construction ci-dessus nous donne une factorisation de $(C'' \rightarrow M'')$ par L et la flèche $(K' \rightarrow L)$ est injective, de conoyau projectif noté K . Les complexes K', L et K sont finis, et la flèche $(C \rightarrow M)$ se factorise par K . Ceci est résumé dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & L & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & \searrow & \uparrow & \swarrow & \uparrow & & \\ & & & & C' & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma^{-1}C & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Alors \mathcal{E} contient tous les modules libres, est stable par limite inductive filtrante, et par conoyau de cofibration; par la Proposition 27, \mathcal{E} contient donc la catégorie \mathcal{E}_0 des modules réguliers. ■

Théorème 27 [Fondamental] [Vog90]

Soit R un anneau régulier. Soit C_* un R -complexe quasi-cohérent, et C'_* un R -complexe minoré ayant un nombre fini de groupes d'homologie non-nuls. Alors tout morphisme de chaînes de C vers C' se factorise, à homotopie près, par un R -complexe fini.

Démonstration :

La preuve se fait par induction sur le nombre de groupes d'homologie non-nuls de C' . Si C'

Proposition 28 .

Soit R un anneau cohérent.

$\left[\begin{array}{l} \text{Alors } R \text{ est régulier (au sens classique)} \\ \text{ssi } R \text{ est régulier (au sens de P. Vogel).} \end{array} \right]$

Démonstration :

Un anneau R est régulier cohérent au sens classique si tout R -module de présentation finie admet une résolution : $(0 \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow M \rightarrow 0)$ où les C_i sont projectifs de type fini. (i) \rightarrow (ii) : Comme tout R -module est limite inductive filtrante de modules de présentation finie², il suffit de montrer que tout M de présentation finie appartient à \mathcal{E}_0 . On découpe la résolution finie de M en suites exactes courtes, et on applique l'axiome " 2/3 ". (ii) \rightarrow (i) : Supposons R régulier (au sens de Vogel) et cohérent. Soit M un R -module de présentation finie. Comme R est cohérent, M admet une résolution projective C_* , qui est un R -complexe quasi-cohérent, minoré, avec un seul groupe d'homologie non-nul. Le corollaire ci-dessus nous dit alors que C_* a le type d'homotopie d'un R -complexe fini. Donc M admet une résolution projective finie, et l'anneau R est régulier (au sens classique). ■

Ainsi la notion de régularité introduite par Mr Vogel prolonge bien la notion pré-existante en géométrie algébrique, et les résultats obtenus sur les $\tilde{K}Nil$ dans ce cadre prolongeront ceux de Waldhausen dans [Wal78].

5.8 Complexes stablement réductibles

- Nous nous intéressons désormais au théorème structurel décrivant les complexes nilpotents sur un anneau R régulier (nous reproduisons ci-après les démonstrations de Mr P. Vogel, tirées de l'article [Vog90], non-publié à ce jour).

Rappelons qu'un objet de $Nil(\mathfrak{C}_R; S)$ est un complexe homotopiquement fini C_* muni d'un morphisme de chaînes $(\alpha : C_* \rightarrow C_* \otimes S)$ homotopiquement nilpotent : il existe un entier n tel que $(\alpha^n : C_* \rightarrow C_* \otimes S^n)$ est homotope à zéro. On dira que $N = (C_*, \alpha)$ est " élémentaire ", si α est homotope à zéro. Un complexe nilpotent N sera " réductible ", s'il existe une filtration de N par des complexes nilpotents $(0 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_p = N)$, telle que, pour tout indice i , le quotient N_{i+1}/N_i est élémentaire. Plus généralement, on dira que N est " stablement réductible " s'il existe un complexe nilpotent N' , un complexe N'' réductible, et un qis surjectif : $(N'' \rightarrow N \oplus N')$. Soit un entier p . On notera \mathcal{F}_p la catégorie des triplets (M, I_*, α) , où (M, α) est un objet de $Nil(R; S)$ et $(0 = I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_p = M)$ est une filtration de M par des sous-modules tels que : $[\alpha(I_{i+1}) \subset I_i \otimes S]$ pour tout i . On dira qu'un objet $E = (M, I_*, \alpha)$ de \mathcal{F}_p est " de type fini " si tous les modules I_i et M/I_i sont projectifs de type fini. Enfin on notera \underline{E} le module sous-jacent M . Après toutes ces notations, nous allons démontrer le théorème structurel essentiel, dont dépend la démonstration du théorème 14, et dont l'énoncé stipule :

Théorème 28 [Vog90]

Soit R un anneau régulier, et S un R -bimodule plat à gauche.

Alors tout complexe nilpotent N dans $Nil(\mathfrak{C}_R; S)$ est " stablement réductible ".

Remarque :

Soit (M, α) un objet de $\mathcal{N}il(R; S)$. Posons $[I_i = \text{Ker}(\alpha^i : M \rightarrow M \otimes S^n)]$. Comme α est nilpotente, on obtient ainsi une filtration finie de M . Comme S est plat à gauche, on a exactement : $[I_{i+1} = \alpha^{-1}(I_i \otimes S)]$.

Lemme 25 .

Soit E un objet de \mathcal{F}_p . Il existe un objet E' de type fini, et une flèche $(E' \rightarrow E)$ de \mathcal{F}_p induisant une surjection $(\underline{E}' \rightarrow \underline{E})$.

Démonstration :

Soit $E = (M, I_*, \alpha)$ un objet de \mathcal{F}_p . On construit par récurrence décroissante des modules projectifs de type fini M_i (pour des indices $p \geq i \geq 0$), des flèches $(f_i : M_i \rightarrow I_i)$ et $(\beta_i : M_{i+1} \rightarrow M_i \otimes S)$ telles que f_p est un isomorphisme, $M_0 = 0$ et pour tout $i < p$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} M_i \otimes S & \xleftarrow{\beta_i} & M_{i+1} \\ \downarrow f_i \otimes \mathbf{1}_S & & \downarrow f_{i+1} \\ I_i \otimes S & \xleftarrow{\alpha_i} & I_{i+1} \end{array}$$

Pour tout i , on note J_i le module somme $M_0 \oplus \dots \oplus M_i$ et $\beta = \oplus \beta_i$ la flèche $(J_p \rightarrow J_p \otimes S)$. On a construit un objet $E' = (J_p, J_*, \beta)$ dans \mathcal{F}_p et un morphisme $(E' \rightarrow E)$, surjectif $(J_p \rightarrow M)$. ■

Lemme 26 .

Soit E un objet de \mathcal{F}_p . Il existe une suite infinie :

$(\dots \xrightarrow{d} E_n \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} E_1 \xrightarrow{d} E_0 \xrightarrow{d} E \rightarrow 0)$ telle que :

(i) Les E_i sont des objets de type fini de \mathcal{F}_p .

(ii) Dans la catégorie \mathcal{F}_p , on a : $d \circ d = 0$.

(iii) La suite induite sur les modules sous-jacents

$(\dots \xrightarrow{d} \underline{E}_n \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \underline{E}_1 \xrightarrow{d} \underline{E}_0 \xrightarrow{d} \underline{E} \rightarrow 0)$ est exacte.

Démonstration :

Par récurrence sur i : $\text{Ker}(d : E_i \rightarrow E_{i-1})$ est dans \mathcal{F}_p , donc le lemme 25 donne E_{i+1} . ■

Lemme 27 .

Soit $E = (M, I_*, \alpha)$ un objet de \mathcal{F}_p . Il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 = C_0 & \subset & C_1 & \cdots & \subset & C_p = C \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & & \downarrow f_p \\ 0 = I_0 & \subset & I_1 & \cdots & \subset & I_p = M \end{array}$$

et un morphisme de chaînes $(\beta : C \rightarrow C \otimes S)$ tel que :

- les complexes C_i sont positifs et quasi-cohérents,
- les inclusions sont des cofibrations,
- les f_i sont des morphismes de chaînes, et f_p est un qis,
- $\beta(C_{i+1}) \subset C_i \otimes S$ et on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_i \otimes S & \xleftarrow{\beta} & C_{i+1} \\ \downarrow f_i \otimes \mathbf{1}_S & & \downarrow f_{i+1} \\ I_i \otimes S & \xleftarrow{\alpha} & I_{i+1} \end{array}$$

Démonstration :

Soit $(\dots \rightarrow E_n \rightarrow \dots \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow E \rightarrow 0)$ la suite dans la catégorie \mathcal{F}_p obtenue par le lemme 26. L'objet E_i est un triplet (M_i, I_{i*}, α_i) et $(\dots \rightarrow I_{in} \rightarrow \dots \rightarrow I_{i1} \rightarrow I_{i0} \rightarrow 0)$ est un complexe positif quasi-cohérent C_i . La flèche $(I_{i0} \rightarrow I_i)$ est un morphisme de chaînes $(f_i : C_i \rightarrow I_i)$ et α_0 est un morphisme de chaînes $(C = C_p \rightarrow C_p \otimes S)$. ■

Lemme 28 .

Soit (M, α) un objet de $\text{Nil}(R; S)$ considéré comme un complexe nilpotent N_0 particulier. Alors il existe des complexes nilpotents N et N' , et des morphismes $(N \rightarrow N')$ et $(N' \rightarrow N_0)$ de $\text{Nil}(\mathfrak{C}_R; S)$, tels que :

- (i) N' est réductible.
- (ii) la composée $(N \rightarrow N' \rightarrow N_0)$ est un qis surjectif.

Démonstration :

Grâce aux lemmes précédents, on a construit une filtration I_* de M , et un complexe nilpotent (C_*, β) satisfaisant aux conditions du lemme 27. Par récurrence sur i : supposons construits des complexes positifs finis $(K_0 \subset \dots \subset K_i)$ et des morphismes de chaînes $(\gamma_j : K_j \rightarrow K_{j-1} \otimes S)$ pour tout indice $1 \leq j \leq i$, et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 = C_0 & \subset & C_1 & \cdots & \subset & C_i & \\
 \downarrow g & & \downarrow g & & & \downarrow g & \\
 0 = K_0 & \subset & K_1 & \cdots & \subset & K_i & \\
 \downarrow h & & \downarrow h & & & \downarrow h & \\
 0 = I_0 & \subset & I_1 & \cdots & \subset & I_i &
 \end{array}$$

où g et h sont des morphismes de chaînes tels que $[h \circ g = f]$ et :

- pour tout indice $1 \leq j \leq i$, l'inclusion $(K_{j-1} \subset K_j)$ est une cofibration
- les flèches γ_j sont compatibles aux inclusions
- pour tout indice $1 \leq j \leq i$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 C_{j-1} \otimes S & \xleftarrow{\beta} & C_j \\
 \downarrow g & & \downarrow g \\
 K_{j-1} \otimes S & \xleftarrow{\gamma_j} & K_j \\
 \downarrow h & & \downarrow h \\
 I_{j-1} \otimes S & \xleftarrow{\alpha} & I_j
 \end{array}$$

La construction est faite pour $i = 0$. Pour l'étendre au cran suivant, on effectue les constructions suivantes : Soit L le pushout $K_i \amalg_{C_i} C_{i+1}$. On étend fonctoriellement les flèches à $(g : C_{i+1} \rightarrow L)$, $(h : L \rightarrow I_{i+1})$, et $(\gamma' : L \rightarrow K_i \otimes S)$. De plus, L est positif, quasi-cohérent, et l'inclusion $(K_i \subset L)$ est une cofibration. Comme l'anneau R est régulier, la flèche $(h : L \rightarrow I_{i+1})$ se factorise par un complexe fini K (grâce au lemme technique 24). Quitte à tuer le (-1) -squelette de K , on peut supposer que K est positif. Notons alors L_n les modules de L , et d la différentielle. Comme $K_i \otimes S$ est de dimension finie, la flèche γ' est triviale sur L_i pour tout $(i > n = \dim K_i)$, et donc se factorise par le R -module différentiel gradué $X = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow dL_{n+1} \rightarrow L_n \rightarrow \dots)$. Soit L' le n -squelette de X et Y le quotient X/L' . Par le lemme technique 24, la flèche $(L \rightarrow X \rightarrow Y)$ se factorise par K' fini, puis par le quotient K'_0 de K' par son n -squelette. Ainsi la flèche $(L \rightarrow X)$ se factorise par le pullback $K'_1 = X \amalg_Y K'_0$. Le complexe K'_1 est fini, et la flèche composée $(K_i \rightarrow K'_1)$ est une cofibration. Notons K'_2 la somme directe $K \oplus K'_1$. Les flèches composées $(K_i \rightarrow K'_1 \rightarrow K'_2)$, $(K'_2 \rightarrow K \rightarrow I_{i+1})$ et $(K'_2 \rightarrow K'_1 \rightarrow K_i \otimes S)$ forment le diagramme suivant, qui est commutatif, sauf éventuellement

dans le petit carré :

$$\begin{array}{ccccc}
K_i & \longrightarrow & L & & \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
& & K'_2 & \longrightarrow & K_i \otimes S \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
I_i & \longrightarrow & I_{i+1} & \longrightarrow & I_i \otimes S
\end{array}$$

De plus, K'_2 est un complexe positif fini, et la flèche $(K_i \rightarrow K'_2)$ est une cofibration. Soit u le défaut de commutativité $(K'_2 \rightarrow I_i \otimes S)$, soit Z son noyau, et Z_0 son 0-squelette : Z_0 est juste un module, et Z/Z_0 est un complexe fini. Soit E un complexe acyclique fini qui s'envoie surjectivement par $(\lambda : E \rightarrow Z/Z_0)$. Comme E est acyclique, λ se factorise en $(E \rightarrow Z \rightarrow Z/Z_0)$. Soit alors Σ le noyau de la flèche composée $(L \oplus E \rightarrow Z \rightarrow Z/Z_0)$. Le complexe Σ est quasi-cohérent, et la flèche $(\Sigma \rightarrow Z_0)$ se factorise par un complexe fini positif H . Donc la flèche composée $(L \rightarrow L \oplus E \rightarrow Z)$ se factorise par le pushout $H' = H \coprod_{\Sigma} L \oplus E$, qui est positif et fini.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Z_0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Z/Z_0 \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H' & \longrightarrow & Z/Z_0 \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \Sigma & \longrightarrow & L \oplus E & \longrightarrow & Z/Z_0 \longrightarrow 0 \\
& & & & \uparrow & & \\
& & & & L & &
\end{array}$$

Soit E' un complexe positif fini acyclique contenant K_i par une cofibration $(v : K_i \rightarrow E')$. Comme E' est acyclique, la flèche v s'étend à $(v' : L \rightarrow E')$. Notons H_{i+1} la somme $H' \oplus E'$. La somme directe de v' et de la flèche $(L \rightarrow H')$ donne une flèche $(L \rightarrow K_{i+1})$ induisant une cofibration $(K_i \rightarrow K_{i+1})$. La flèche recherchée $(g : C_{i+1} \rightarrow K_{i+1})$ est la composée $(C_{i+1} \rightarrow L \rightarrow K_{i+1})$, la flèche $(h : K_{i+1} \rightarrow I_{i+1})$ est la composée $(K_{i+1} \rightarrow H' \rightarrow Z \rightarrow K'_2 \rightarrow I_{i+1})$, et la flèche γ_{i+1} est la composée $(K_{i+1} \rightarrow H' \rightarrow Z \rightarrow K'_2 \rightarrow K_i \otimes S)$. Toutes ces données se combinent dans un diagramme de compatibilité :

$$\begin{array}{ccccc}
C_i & \subset & C_{i+1} & \xrightarrow{\beta_{i+1}} & C_i \otimes S \\
\downarrow g & & \downarrow g & & \downarrow g \\
K_i & \subset & K_{i+1} & \xrightarrow{\gamma_{i+1}} & K_i \otimes S \\
\downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h \\
I_i & \subset & I_{i+1} & \xrightarrow{\alpha} & I_i \otimes S
\end{array}$$

Ainsi se termine l'étape de récurrence. Par induction, on aboutit ainsi à deux complexes nilpotents $N = (C_p, \beta_p)$ et $N' = (K_p, g_{amma_p})$ et deux morphismes $(N \rightarrow N')$ et $(N' \rightarrow N_0)$. La composée $(N \rightarrow N' \rightarrow N_0)$ est un qis surjectif, et N' est évidemment réductible. ■

Lemme 29 .

Soit $N = (C_*, \alpha)$ un objet de $Nil(\mathfrak{C}_R; S)$ tel que le complexe sous-jacent C soit de longueur 1. Alors N est stablement réductible.

Démonstration :

Si C_* est de longueur 1, c'est un R -module projectif de type fini M , et (M, α) est un objet de $Nil(R; S)$. Le lemme précédent nous donne deux complexes nilpotents $N' = (C'_*, \alpha')$ et $N'' = (C''_*, \alpha'')$ réductible, et des morphismes $(N' \rightarrow N'' \rightarrow N)$ tels que la composée $(N' \rightarrow N)$ soit un qis surjectif. Soit E le noyau de $(C' \rightarrow C)$, il est contractile, et C' est isomorphe à $C \oplus E$. La composée $(C \rightarrow C' \rightarrow C'')$ donne une section de $(C'' \rightarrow C)$, et alors C'' est isomorphe à la somme directe de C et du noyau K de $(C'' \rightarrow C)$. À isomorphisme près, on peut supposer que $C' = C \oplus E$ et $C'' = C \oplus K$. Alors la flèche $(C' \rightarrow C'')$ est donnée par la matrice : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ et

la flèche $(C'' \rightarrow C)$ est la première projection. Comme ces deux flèches respectent les flèches nilpotentes, α' et α'' sont données par les matrices :

$$\alpha' : \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ x' & y \end{bmatrix} \quad \alpha'' : \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ x'' & \beta \end{bmatrix}$$

et on a les égalités : $[x'' = ux']$ et $[\beta u = uy]$. Considérons alors le complexe $\Sigma = C \oplus K \oplus E$. On a un morphisme de chaînes $(\gamma : \Sigma \rightarrow \Sigma \otimes S)$ et un morphisme de chaînes $(\phi : \Sigma \rightarrow C \oplus K)$ donnés par les matrices :

$$\gamma : \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ x'' & \beta & 0 \\ -x' & 0 & y \end{bmatrix} \quad \phi : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u \end{bmatrix}$$

On a alors une suite exacte courte de complexes nilpotents : $[0 \rightarrow (E, y) \rightarrow (\Sigma, \gamma) \rightarrow (C'', \alpha'') \rightarrow 0]$ et le complexe nilpotent (Σ, γ) est réductible. La flèche ϕ est un morphisme de (Σ, γ) vers $N \oplus (K, \beta)$ induisant un qis surjectif de Σ vers $C \oplus K$. ■

Lemme 30 .

Si deux complexes nilpotents N et N'' sont stablement réductibles, et si on a une extension : $(0 \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow N'' \rightarrow 0)$, alors N est stablement réductible.

Démonstration :

Il existe des complexes nilpotents N_0, N'_0, N_1, N''_1 et des qis surjectifs $(N_1 \rightarrow N \oplus N_0)$ et $(N''_1 \rightarrow N'' \oplus N'_0)$, tels que N_1 et N''_1 soient réductibles. Soit L le pullback $N' \oplus N_0 \oplus N'_0 \prod_{N''_1} N'' \oplus N'_0$. Posons $(C, \alpha) = N \oplus N_0$, $(C', \alpha') = L$, et $(E, \beta) = \text{Ker}(N_1 \rightarrow N \oplus N_0)$. Comme E est acyclique, le complexe sous-jacent de N_1 est $C \oplus E$, et la flèche nilpotente $[C \oplus E \rightarrow (C \oplus E) \otimes S]$ est donnée par la matrice : $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$. Comme E est acyclique, il n'y a pas d'obstruction à étendre la flèche $(x : C \rightarrow E \otimes S)$ en $(x' : C' \rightarrow E \otimes S)$. C'est pourquoi le complexe $C' \oplus E$ et la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ x' & y \end{bmatrix}$ définissent un complexe nilpotent L' . Comme N_1 et N''_1 sont réductibles, et comme la suite $(0 \rightarrow N_1 \rightarrow L' \rightarrow N''_1 \rightarrow 0)$ est exacte, alors L' est réductible, et la flèche composée $(L' \rightarrow L \rightarrow N' \oplus N_0 \oplus N'_0)$ est un qis surjectif. ■

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N \oplus N_0 & \longrightarrow & N' \oplus N_0 \oplus N'_0 & \longrightarrow & N'' \oplus N''_0 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & N \oplus N_0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & N''_1 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & N''_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Remarque : Soit $(f : N \rightarrow N')$ un qis surjectif, issu d'un complexe nilpotent N stablement réductible. Alors N' est stablement réductible (par définition!).

Démonstration du Théorème 28 :

Soit $N = (C, \alpha)$ un complexe nilpotent, et n la plus petite longueur d'un complexe C' homotopiquement équivalent à C . Si C est acyclique, N est évidemment réductible. Sinon, soit p le degré du plus petit groupe d'homologie non-trivial de C , et q le plus petit entier tel que α^q soit trivial sur $H_p(C)$. On notera $[N]$ la paire (n, q) . Comme $H_p(C)$ est de type fini, l'image de α^{q-1} est un sous-module de type fini de $H_p(C) \otimes S^{q-1}$ contenu dans $(\text{Ker}\alpha) \otimes S^{q-1}$, et il existe un sous-module I de $(\text{Ker}\alpha)$ tel que l'image de α^{q-1} soit contenue dans $I \otimes S^{q-1}$. Soit P un R -module projectif de type fini, qui se surjecte sur I par $(f : P \rightarrow I)$. Le module P peut être considéré comme un complexe C' concentré en dimension p . Soit $(\phi : C' \rightarrow C)$ un représentant de la classe d'homologie

f , et $(\psi : E \rightarrow C)$ une flèche surjective, d'un complexe acyclique E sur C . Comme E est acyclique, il n'y a pas d'obstruction à construire un morphisme de chaînes $[\alpha' : C' \oplus E \rightarrow (C' \oplus E) \otimes S]$ tel que $[\alpha \circ (\phi \oplus \psi) = (\phi \oplus \psi) \circ \alpha']$ et $\alpha'(C' \oplus E)$ est inclus dans $E \otimes S$. Soit un complexe E_0 acyclique, et une cofibration $(u : C' \oplus E) \rightarrow E_0$. Comme E_0 est acyclique, il existe un morphisme de chaînes $(\beta : E_0 \rightarrow E_0 \otimes S)$ tel que $[\beta \circ u = u \circ \alpha']$. Les flèches $\phi \oplus \psi$ et u induisent un morphisme du complexe réductible $(C' \oplus E, \alpha')$ vers $N \oplus (E_0, \beta)$, de conoyau N' . Si le complexe sous-jacent à N' est acyclique, alors n vaut 1. Sinon, posons $|N'| = (n', q')$. Si $n > 1$, alors $(n' < n)$ ou bien $(n' = n \text{ et } q' = q - 1)$. Par récurrence sur (n, q) , N' est stablement réductible. Par le lemme 30, $N \oplus (E_0, \beta)$ est stablement réductible, et d'après la remarque évidente qui suit, N l'est aussi. Supposons désormais que $n = 1$. Le module $H_p(C)$ est projectif, et peut être considéré comme un complexe C' concentré en dimension p . Par le lemme 29, le couple (C', α') est stablement réductible. Soit $(\phi : C' \rightarrow C)$ un morphisme induisant l'identité en homologie, et $(\psi : E \rightarrow C)$ une surjection d'un complexe acyclique E sur C . Comme E est acyclique, il n'y a pas d'obstruction à construire une flèche $[\alpha' : C' \oplus E \rightarrow (C' \oplus E) \otimes S]$ telle que $[(\phi \oplus \psi) \circ \alpha' = \alpha \circ (\phi \oplus \psi)]$ et $\alpha'(E)$ est inclus dans $E \otimes S$. Le complexe nilpotent $(C' \oplus E, \alpha')$ est une extension de deux complexes stablement réductibles. Par le lemme 30, il est donc stablement réductible, et par la remarque qui suit, N aussi. ■

Bibliographie

- [Bas68] **H. Bass.** – “Algebraic K-Theory”. Benjamin, 1968.
- [Bau80] **G. Baumslag & E. Dyer & A. Heller.** – “The Topology of Discrete Groups”. In *J.Pure Appl.Algebra*, volume 16, pages 1–47, 1980.
- [Boa98] **M. Boardman.** – “Conditionally Convergent Spectral Sequences”. In *Contemp.Math.*, volume 239, 1998.
- [Bou80] **N. Bourbaki.** – “Éléments de Mathématique”. Algèbre, chapitre X : “Algèbre Homologique”. Masson, 1980.
- [Dol63] **A. Dold.** – “Partitions of Unity in the Theory of Fibrations”. In *Annals of Math.*, volume 78, pages 223–255, 1963.
- [Eil56] **H. Cartan & S. Eilenberg.** – “Homological Algebra”. Princeton University Press, 1956.
- [Gar04] **G. Garkusha.** – “Systems of Diagram Categories & K-Theory II”. In *Front for the Mathematics ArXiv : KT*, number 0401433, 2004.
- [Ger72] **S.M. Gersten.** – “On the Spectrum of Algebraic K-Theory”. In *Bull. Amer. Math. Soc.*, volume 78, pages 216–219, 1972.
- [Ger73] **K. Brown & S. Gersten.** – “Algebraic K-Theory as Generalized Sheaf Cohomology”. In *Springer-Verlag*, volume 341 of *Lecture Notes in Math.*, 1973.
- [God58] **R. Godement.** – “Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux”. Hermann, 1958.
- [God71] **C. Godbillon.** – “Eléments de Topologie Algébrique”. Hermann, 1971.
- [Gra69] **B. Gray.** – “Cohomology Theories”. Aarhus Universitet, 1969.
- [Gra75] **B. Gray.** – “Homotopy Theory : an Introduction to Algebraic Topology”. Academic Press, 1975.
- [Gra76] **D. Grayson.** – “Higher Algebraic K-Theory : II (after D. Quillen)”. In *Lecture Notes in Math.*, volume 551. Springer-Verlag, 1976.
- [Gra87] **D. Grayson.** – “Exact Sequences in Algebraic K-Theory”. In *Illinois J.Math.*, volume 31, pages 598–617, 1987.
- [Gra03] **D. Grayson.** – “The Additivity Theorem in K-Theory”. In *K-theory preprint archives*, number 657, 2003.
- [Gre67] **M. Greenberg.** – “Lectures on Algebraic Topology”. Benjamin, 1967.
- [Gro80] **A. Gröthendieck.** – “Pursuing Stacks”. (manuscrit), 1980.

- [Hus66] **D. Husemoller.** – “Fibre Bundles”. McGraw-Hill, 1966.
- [Ill71] **L. Illusie.** – “Complexe Cotangent et Déformations”, volume 239 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1971.
- [Jen72] **C. Jensen.** – “Les Foncteurs Dérivés de \varinjlim et leurs Applications en Théorie des Modules”, volume 254 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1972.
- [Kan59] **D.M. Kan.** – “On c.s.s. Complexes”. In *Amer.J.Math.*, volume 79, pages 449–476, 1959.
- [Kan72] **A.K. Bousfield & D.M. Kan.** – “Homotopy Limits, Completions and Localizations”. Springer-Verlag, 1972.
- [Kar78] **M. Karoubi.** – “K-Theory”. Springer-Verlag, 1978.
- [Kel94] **B. Keller.** – “Deriving DG-Categories”. In *Ann.Sci.ENS*, volume 27, pages 63–102, 1994.
- [Kel96] **B. Keller.** – “Derived Categories and their Uses”. In *Handbook of algebra*, volume 1, pages 671–701, 1996.
- [Las59] **A. Dold & R. Lashof.** – “Principal Quasifibrations and Fibre Homotopy Equivalence of Bundles”. In *Ill. J. Math.*, number 3, pages 285–305, 1959.
- [Lod74] **J.L. Loday.** – “Structure Multiplicative en K-Théorie Algébrique”. In *C.R. Acad. Sc. Paris*, volume 279A, pages 321–324, 1974.
- [Lod76] **J.L. Loday.** – “K-Théorie Algébrique et Représentation des Groupes”. In *Annales Sci. de l'ENS*, volume 9, 1976.
- [Lod92] **J.L. Loday.** – “Cyclic Homology”. Springer-Verlag, 1992.
- [Mac71] **S. MacLane.** – “Categories for the Working Mathematician”. Springer-Verlag, 1971.
- [May67] **J.P. May.** – “Simplicial Objects in Algebraic Topology”. Van Nostrand, 1967.
- [May74] **J.P. May.** – “ e_∞ Ring Spaces, Group Completions and Permutative Categories”. In *London Math. Soc. Lecture Notes*, volume 11, pages 61–93. Cambridge Univ. Press, 1974.
- [May75] **J.P. May.** – “Classifying Spaces and Fibrations”. In *Amer. Math. Soc.*, volume 155, 1975.
- [May95] **A.D. Elmendorf & I. Kriz & M.A. Mandell & J.P. May.** – “Modern Foundations for Stable Homotopy theory”. In *Handbook of Algebraic Topology*, pages 213–253, 1995.
- [Maz69] **M. Artin & B. Mazur.** – “Étale Homotopy”, volume 100 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1969.
- [Mil56] **J. Milnor.** – “Construction of Universal Bundles”. In *Annals of Math.*, 1956.
- [Mil57] **J. Milnor.** – “The Geometric Realization of a Semi-simplicial Complex”. In *Annals of Math.*, 1957.
- [Mil71] **J. Milnor.** – “Introduction to Algebraic K-Theory”. In *Annals of Math.*, volume Study 72. Princeton Univ. Press, 1971.

- [Moe95] **I. Moerdijk.** – “Classifying Spaces and Topoi”. Springer, 1995.
- [Pic92] **R.A. Piccini.** – “Lectures on Homotopy Theory”, volume 171. North-Holland Math. Studies, 1992.
- [Pup70] **T. Dieck & K.H. Kamps & D. Puppe.** – “Homotopietheorie”, volume 157 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1970.
- [Pup75] **V. Puppe.** – “A Remark on Homotopy Fibrations”. *Manuscripta Math.*, 1975.
- [Qui67] **D. Quillen.** – “Homotopical Algebra”, volume 43 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1967.
- [Qui73] **D. Quillen.** – “Higher Algebraic K-Theory : I”. In *Lecture Notes in Math.*, volume 341, pages 85–147. Springer-Verlag, 1973.
- [Ran97] **A. Ranicki.** – “45 Slides on Chain Duality, Surgery, and Geometric Topology”. In *Sci.Bull.Josai Univ.*, volume 2, pages 105–118, 1997.
- [Ran01] **A. Neeman & A. Ranicki.** – “Noncommutative Localization and Chain Complexes. I. Algebraic K- & L-Theory”. In *K-Theory Preprint Archives*, number 517, 2001.
- [Ros94] **J. Rosenberg.** – “Algebraic K-Theory and its Applications”. Springer-Verlag, 1994.
- [Sag03] **S. Sagave.** – “On the Algebraic K-Theory of Model Categories”. In *K-Theory Preprint Archives*, number 655, 2003.
- [Sch95] **R. Staffeldt & R. Schwänzl.** – “The Approximation Theorem and the K-Theory of Generalized Free Products”. In *Trans.Amer.Math.Soc.*, volume 437, pages 3319–3345, 1995.
- [Sch02] **R. Staffeldt & R. Schwänzl.** – “The Seifert-Van Kampen Theorem and Generalized Free Products of \mathbb{S} -algebras”. In *Proc.Amer.Math.Soc.*, volume 130, pages 3193–3208, 2002.
- [Sch03a] **J. Hornborstel & M. Schlichting.** – “Localization in Hermitian K-Theory of Rings”. In *K-Theory Preprint Archives*, number 653, 2003.
- [Sch03b] **M. Schlichting.** – “Negative K-Theory of Derived Categories”. In *K-Theory Preprint Archives*, number 636, Appendice A, 2003.
- [Seg68] **G.B. Segal.** – “Classifying Spaces and Spectral Sequences”. In *Publ. Math. I.H.E.S.*, volume 34, pages 105–112, 1968.
- [Seg72] **G.B. Segal.** – “Operations in Stable Homotopy Theory”. In *Proc. of Conference on Algebraic Topology*, Oxford, 1972.
- [Seg74] **G.B. Segal.** – “Categories and Cohomology Theories”. In *Topology*, volume 13, pages 293–312, 1974.
- [Spa66] **E.H. Spanier.** – “Algebraic Topology”. Mc Graw-Hill, 1966.
- [Sri91] **V. Srinivas.** – “Algebraic K-Theory”. Birkhauser, 1991.
- [Sta84] **R. Staffeldt.** – “On Fundamental Theorems of Algebraic K-Theory”. In *K-Theory*, volume 2, pages 511–532, 1984.
- [Ste51] **N.E. Steenrod.** – “The Topology of Fibre Bundles”. Princeton University Press, 1951.

- [Ste52] **S. Eilenberg & N. Steenrod.** – “Foundations of Algebraic Topology”. Princeton University Press, 1952.
- [Ste67] **N.E. Steenrod.** – “A Convenient Category of Topological Spaces”. In *Mich. Math.J.*, volume 14, pages 133–152, 1967.
- [Swi75] **R. Switzer.** – “Algebraic Topology : Homotopy and Homology”. Springer-Verlag, 1975.
- [Tho80] **R.W. Thomason.** – “Cat as a Closed Model Category”. In *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*, volume XXI-3, pages 305–324, 1980.
- [Tro90] **R.W. Thomason & T. Trobaugh.** – “Higher K-Theory of Schemes and of Derived Categories”. In *The Gröthendieck Festschrift*, pages 247–435. Birkhauser, 1990.
- [Vil73] **M. Karoubi & O. Villamayor.** – “K-Théorie Algébrique et K-Théorie Topologique I, II”. In *Math. Scand.*, volume 28,32, pages 265–307,57–86, 1971,1973.
- [Vog70] **R. Vogt.** – “Boardman’s Stable Homotopy Category”. Aarhus Universitet, 1970.
- [Vog83] **P. Vogel.** – “Algebraic K-Theory of Generalized Free Products III”. Notes de Loday non-publiées, Strasbourg, mai 1983.
- [Vog90] **P. Vogel.** – “Regular Rings”. Communication de Staffeldt & Schwänzl non-publiée, Bielefeld, 1990.
- [Wag72] **J. Wagoner.** “Delooping Classifying Spaces in Algebraic K-Theory”. In *Topology*, volume 11, pages 349–370, 1972.
- [Wal78] **F. Waldhausen.** – “Algebraic K-Theory of Generalized Free Products I,II”. In *Annals of Math.*, volume 108, pages 135–256, 1978.
- [Wal85] **F. Waldhausen.** – “Algebraic K-Theory of Spaces”. In *Lecture Notes in Math.*, volume 1126. Springer-Verlag, 1985.
- [Whi49] **J.H.C. Whitehead.** – “Combinatorial Homotopy”. In *Bull. A.M.S.*, volume 55, pages 213–245, 1949.
- [Whi66] **G.W. Whitehead.** – “Homotopy Theory”. The M.I.T. Press, 1966.
- [Wil98] **M. Weiss & B. Williams.** – “Duality in Waldhausen Categories”. In *Forum Math.*, volume 10, pages 533–603, 1998.
- [Zis67] **P. Gabriel & M. Zisman.** – “Calculus of Fractions and Homotopy Theory”. Springer-Verlag, 1967.

Regularity of rings in excision problems in algebraic K-theory

Mr BIHLER Frank

SUMMARY : This thesis is concerned with Waldhausen's algebraic K-theory; unlike usual cohomological theories, it does not verify the "excision" axiom. In a 1978 article, "Algebraic K-theory of generalized free products", Waldhausen links the groups that measure the obstruction to excision, with $\tilde{K}_i\text{Nil}(R; S)$, and shows that these ones vanish, when the ring R is "coherent regular". The aim of this work is to demonstrate a conjecture of Vogel (1990), that generalizes this result to non-coherent rings : we obtain a series of partial results, through calculations in homological algebra concerning categories of diagrams on graded differential modules. We then identify the groups $\tilde{K}_i\text{Nil}(R; S)$ as the inductive limit of a series of groups $K_i(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)$. Towards the aim of demonstrating the vanishing of these groups, we construct many functors on these categories \mathcal{A}_n and \mathcal{B}_n , and we show constraining algebraic conditions and relations among them : in particular, we obtain a devissage via additivity on $K(\mathcal{B}_n)$ and a family of cyclic functors \mathcal{Q}_n on $K(\mathcal{A}_n)$. The use of a powerful localization theorem of Vogel then allows detailed calculations of local objects. Finally, last chapter studies the stability of the notion of "regular" ring, first introduced by Vogel (1990), and its application to the link acyclicity/contractibility for unbounded complexes of modules.

FIELD :

Mathematics

KEY-WORDS : Waldhausen's algebraic K-theory — groups $\tilde{K}_i\text{Nil}(R; S)$ — excision in K-theory — Vogel's conjecture — homological algebra — cyclic functors \mathcal{Q}_n — localization — "regular" ring — acyclicity/contractibility for unbounded complexes

U.F.R.'S ADDRESS :

U.F.R. de Mathématiques
Case 7012
Université de Paris 7 - Denis Diderot
2, Place Jussieu
75251 PARIS cedex 05
FRANCE

E-MAIL ADDRESS :

bihler@math.jussieu.fr

Régularité des anneaux dans les problèmes d'excision en K-théorie algébrique

Mr BIHLER Frank

RÉSUMÉ : Le cadre de cette thèse est la K-théorie algébrique de Waldhausen ; contrairement aux théories cohomologiques usuelles, celle-ci ne vérifie pas l'axiome d' "excision". Dans un article de 1978, "Algebraic K-theory of generalized free products", Waldhausen exprime les groupes d'obstruction à l'excision en terme de $\tilde{K}_i Nil(R; S)$, et montre que ceux-ci sont nuls, lorsque l'anneau R est "régulier cohérent". Le but de ce travail est de montrer une conjecture de Vogel (1990), qui généralise ce résultat à des anneaux non-forcément cohérents : on obtient une série de résultats partiels, grâce à des calculs d'algèbre homologique concernant des catégories de diagrammes de modules différentiels gradués. On identifie alors les groupes $\tilde{K}_i Nil(R; S)$ comme la limite inductive d'une suite de groupes $K_i(\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n)$. Dans le but de montrer la nullité de ces groupes, on construit plusieurs foncteurs sur ces catégories \mathcal{A}_n et \mathcal{B}_n , et on montre des propriétés algébriques contraignantes sur ceux-ci : on obtient en particulier un dévissage par additivité sur $K(\mathcal{B}_n)$ et une famille de foncteurs cycliques \mathcal{Q}_n sur $K(\mathcal{A}_n)$. L'usage d'un théorème de localisation puissant de Vogel permet alors des calculs détaillés d'objets locaux. Enfin, une dernière partie étudie la stabilité de la notion d'anneau "régulier" introduite par Vogel (1990), et son application aux liens acyclicité/contractibilité pour les complexes de modules non-forcément bornés.

DISCIPLINE :

Mathématiques

MOTS-CLEFS :

K-théorie algébrique de Waldhausen — groupes $\tilde{K}_i Nil(R; S)$ — excision en K-théorie — conjecture de Vogel — algèbre homologique — foncteurs cycliques \mathcal{Q}_n — localisation — anneau "régulier" — acyclicité/contractibilité pour complexes non-bornés

ADRESSE DE L'U.F.R. :

U.F.R. de Mathématiques
Case 7012
Université de Paris 7 - Denis Diderot
2, Place Jussieu
75251 PARIS cedex 05
FRANCE

ADRESSE ÉLECTRONIQUE :

bihler@math.jussieu.fr