Travail présenté pour obtenir le grade
de Docteur de l'Université Denis Diderot
Paris 7

Spécialité : Mathématiques

par **Genţiana DĂNILĂ**

Sujet :

Formule de Verlinde et dualité étrange sur le plan projectif

soutenu le 26 novembre 1999 devant un jury composé de :

Mme **Claire VOISIN**, Paris
Mr **Arnaud BEAUVILLE**, Paris
Mr **Michel BRION**, Grenoble - rapporteur
Mr **Geir ELLINGSRUD**, Oslo - rapporteur
Mr **Joseph LE POTIER**, Paris - directeur de thèse
Mr **Christian PESKINE**, Paris

Je veux remercier d'abord Joseph Le Potier.
Il m'a menée, sévérement, tout au long du métier.
Je lui dois de longues heures, des heures innombrables
D'explications si patientes, de conseils admirables.
Avec humour, discrétion, il m'a encouragée
Ses bonnes paroles, sa confiance, m'ont toujours renforcée.

Je suis reconnaissante ensuite, je le dis aussitôt
à Michel Brion, pour ses critiques, et le regard nouveau
qu'il a posé sur ce travail. Je remercie aussi
mon rapporteur, Geir Ellingsrud, d'avoir eu ce souci.
Et Claire Voisin, Arnaud Beauville, présents dans le jury
me font honneur, comme Christian Peskine, ce jour de vendredi.

Il y a encore Laurent Manivel à qui vont mes merci
Pour ses suggestions de généralisation dans la récurrence sur i.

Que ceux qui m'ont entourée avec leur sourire, avec leur sympathie
soient remerciés. Martin Andler, Christoph Sorger, Liliane Barenghi,
Anne Boutet de Monvel, Colette Orion, et aussi Michèle Wasse.
Le père Michel, et Marie-Claire, ma chère Hélène Péras.
Mes professeurs, Adela Hărăbor et Florian Colceag,
Qui m'ont appris : les mathématiques, c'est triompher du vague.

Viorica, Oana, Ioana, Florenţa, mes amies
Ania, Sandrine, Cornelia, mon samouraï Cami.
Mes amis Christophe, Damien, difficiles à rimer,
Greg, Patrick, Vincent, Ayham, et Mihnea, et José.
Mes collègues de bureau. Mes parents
et ma grande-mère, le café, le printemps.
Et Nicuşor, qui m'a soutenue, qui as su m'égayer,
m'aider, gronder, m'a appris à siffler.

Version révisée avec la contribution
De l'aimable monsieur Paul Gauduchon.

Table des matières

Introduction

Avant-propos

La classification des fibrés vectoriels sur une variété algébrique complexe X, projective et lisse, conduit à l'étude de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur X de classes caractéristiques topologiques fixées. Une des préoccupations fondamentales de la géométrie algébrique est la compréhension de ces espaces de modules. Soit M un tel espace de modules. Il existe sur M des faisceaux inversibles canoniques $\mathcal{D}$, appelés fibrés déterminants. Une question importante est le calcul de l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{D}^{\otimes l})$ des sections globales du fibré $\mathcal{D}^{\otimes l}$, pour un entier l positif.

Le cas classique est le suivant : X est une courbe complexe projective et lisse, de genre $g \geq 1$; M est la jacobienne $J^{g-1}(X)$ paramétrant des faisceaux inversibles de degré $g-1$ sur X ; $\mathcal{D} = \mathcal{O}_{\mathrm{M}}(\Theta)$ est le faisceau inversible associé au diviseur canonique Θ sur $J^{g-1}(X)$; alors $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{D}^{\otimes l})$ s'identifie à l'espace des fonctions thêta de niveau l sur $J^{g-1}(X)$, $\mathrm{H}^0(J^{g-1}(X), O_{\mathrm{M}}(l\Theta))$.

Soit X une courbe projective lisse de genre $g \geq 2$, M_n l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang n et déterminant trivial sur X. Il existe un fibré déterminant canonique $\mathcal{D}$ sur M_n. On démontre dans [B-N-R89] que l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$ est canoniquement isomorphe au dual de $\mathrm{H}^0(J^{g-1}(X), \mathcal{O}(n\Theta))$, l'espace des fonctions thêta de niveau n sur $J^{g-1}(X)$. On nomme cet isomorphisme dualité étrange. Le calcul de la dimension de l'espace des sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D}^{\otimes l})$ pour un entier positif l quelconque a été réalisé par Beauville et Laszlo ([B-L94]). La démarche consiste à identifier cet espace avec un espace de blocs conformes de la théorie conforme rationnelle des champs. L'ensemble des espaces de blocs conformes satisfait certaines règles, dites de factorisation, qui ont conduit Verlinde ([Verl88]) à donner une conjecture pour leur dimension. La conjecture a été prouvée par [T-U-Y89], Faltings [Falt94], Beauville [Beau93] (voir [Sorg94]).

Soit X une surface projective lisse irréductible, munie d'un faisceau très ample $\mathcal{O}_X(1)$; considérons l'espace de modules $\mathrm{M} = \mathrm{M}_X(r, c_1, c_2)$ des classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables sur X, de rang r et classes de Chern $c_1 \in \mathrm{Pic}\,(X), c_2 \in \mathrm{H}^4(X)$.

Lorsque $r = 2$ et $c_1 = 0$, l'ouvert M_μ des fibrés μ-stables dans $\mathrm{M}_X(2,0,c_2)$ s'identifie dans la théorie de Donaldson ([Dona90]) avec l'espace de modules des connexions anti-self-duales irréductibles sur un SU(2)-fibré sur X. Ainsi $\mathrm{M}_X(2,0,c_2)$ devient une compactification de ce dernier espace de modules, quand c_2 est assez grand ($c_2 \geq 2$ si $X = \mathbb{P}_2$), puisque l'ouvert M_μ est alors dense. La restriction du fibré déterminant canonique $\mathcal{D}$ sur l'ouvert des fibrés μ-stables de $\mathrm{M}_X(2,0,c_2)$ s'identifie avec le fibré déterminant de Donaldson sur l'espace des connexions. Il existe un lien entre le calcul de la cohomologie des fibrés déterminants sur $\mathrm{M}_X(2,0,c_2)$ et le calcul des polynômes de Donaldson de X, invariants de la variété réelle sous-jacente à X. Plus précisément, soit u une classe dans l'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(X)$, orthogonale à la classe $c = (2,0,c_2)$ pour la forme quadratique $v \mapsto \chi(v \cdot v)$. Si la polarisation $\mathcal{O}_X(1)$ est générique, on peut définir un fibré inversible $\mathcal{D}_u$ sur $\mathrm{M}_X(2,0,c_2)$. Pour un entier positif l, l'application $l \mapsto \chi(\mathrm{M}_X(2,0,c_2), \mathcal{D}_u^{\otimes l})$ est un polynôme en l dont le coefficient dominant détermine la valeur du polynôme de Donaldson en $c_1(u) \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$. De cette manière le calcul des dimensions $h^q(\mathrm{M}_X(2,0,c_2), \mathcal{D}_u^{\otimes l})$ contient le calcul de la restriction du polynôme de Donaldson au groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X) \subset \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$.

Une formule générale pour $h^0(\mathrm{M}_X(r, c_1, c_2), \mathcal{D}_u^{\otimes l})$ a été conjecturée par les physiciens Losev, Moore, Nekrasov, Shatashvili ([L-M-N-S95]). Une interprétation mathématique rigoureuse de leur formule semble difficile.

En général on connaît peu de choses sur l'espace de modules $\mathrm{M}_X(r,c_1,c_2)$ lorsque la surface X est différente de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Notre travail se propose d'étudier par des méthodes de géométrie algébrique classique l'espace de sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_X(r,c_1,c_2),\mathcal{D}^{\otimes l})$ pour $X=\mathbb{P}_2$ et certaines classes (r,c_1,c_2) (l'annulation des espaces de cohomologie supérieure est facile dans ces cas). La plupart des résultats obtenus sont des cas particuliers d'une conjecture de type dualité étrange due à Le Potier.

Présentation de la thèse

L'introduction de la conjecture fait l'objet du premier chapitre. On considère l'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ des classes de faisceaux algébriques cohérents sur $\mathbb{P}_2$. C'est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{Z}^3$, un isomorphisme étant donné par le rang, la classe de Chern et la caractéristique d'Euler-Poincaré (ceci nous permet de désigner chaque classe $c\in\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ par le triplet formé par son rang r, sa première classe de Chern c_1 et sa caractéristique d'Euler-Poincaré χ, ou bien, lorsque c'est indiqué, sa deuxième classe de Chern c_2). Elle est munie d'une multiplication et d'une forme bilinéaire donnée par $\langle c,u\rangle=\chi(c\cdot u)$. Pour deux classes c et u orthogonales, de rang $r>0$ et respectivement 0, on note M_c et M_u les espaces de modules des faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ de classe c et respectivement u. Sur chacun de ces espaces il existe un fibré inversible $\mathcal{D}_u$ et respectivement $\mathcal{D}_c$, appelé fibré déterminant. Alors le fibré produit tensoriel externe $\mathcal{D}_u\boxtimes\mathcal{D}_c$ sur $\mathrm{M}_c\times\mathrm{M}_u$ a une section canonique $\sigma_{c,u}$, qui fournit une application linéaire

$$\mathrm{D}_{c,u}:\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u,\mathcal{D}_c)^*\to\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c,\mathcal{D}_u)$$

appelée morphisme de dualité étrange. Remarquons que le groupe $\mathrm{SL}(3)$ agit sur $\mathbb{P}_2$. Il agit ainsi sur les espaces de modules $\mathrm{M}_c,\mathrm{M}_u$, et sur les fibrés déterminants $\mathcal{D}_c,\mathcal{D}_u$. Le morphisme $\mathrm{D}_{c,u}$ est un morphisme de $\mathrm{SL}(3)$-représentations.

Conjecture (J. Le Potier) *Si* M_c *est non-vide alors le morphisme de dualité étrange est un isomorphisme.*

Dans tous les cas abordés la démarche suivie consiste en deux étapes : calculer séparément les dimensions des espaces vectoriels de sections et établir ensuite l'injectivité du morphisme de dualité. La première étape s'apparente au calcul de la formule de Verlinde et des nombres de Donaldson, tandis que la seconde est propre à la dualité étrange. Quand la classe u est bien choisie, l'application linéaire $D_{c,u}$ a l'interprétation géométrique suivante : pour tout faisceau F semi-stable de classe de Grothendieck c, les faisceaux G tels que $h^1(F\otimes G)\neq 0$ constituent une hypersurface obtenue comme schéma des zéros d'une section de $\mathcal{D}_c$. On obtient un morphisme

$$\Phi:\mathrm{M}_c\to\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u,\mathcal{D}_c))$$

(projectif des droites de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u,\mathcal{D}_c)$), tel que $\Phi^*(\mathcal{O}(1))=\mathcal{D}_u$. L'application linéaire $D_{c,u}$ se retrouve comme l'application linéaire induite par Φ sur les espaces de sections. L'injectivité de $\mathrm{D}_{c,u}$ traduit le fait que l'image de Φ n'est pas contenue dans un hyperplan.

Plusieurs cas ont été traités par J. Le Potier. Par exemple, lorsque la classe c est de rang 1, lorsque $c=(2,-1,0)$ et $u=(0,2,1)$, lorsque $c=(2,-1,-1)$ et $u=(0,2,1)$ ou bien lorsque $c=(3,0,0)$ et $u=(0,1,0)$, la conjecture est vraie.

Les résultats obtenus dans cette thèse vont aussi à l'appui de la conjecture. Nous étudions le cas où la classe c est égale à $(2,0,c_2=n)$ (en effet, chaque fois que c_1 est pair, en tensorisant par un fibré inversible convenable, on est ramené à l'étude du cas $c_1=0$). Notons $\mathfrak{u}$ la classe $(0,1,\chi=0)$. La contribution principale est le théorème suivant :

Théorème principal *Le morphisme de dualité est un isomorphisme dans les cas suivants :*
i) $c=(2,0,c_2=n),n\leq 19$, $u=\mathfrak{u}=(0,1,\chi=0)$;
ii) $c=(2,0,c_2=n),n\leq 5$, $u=2\mathfrak{u}=(0,2,\chi=0)$;
iii) $c=(2,0,c_2=n),n\leq 5$, $u=3\mathfrak{u}=(0,3,\chi=0)$.

Le point (i) sera démontré à l'issue du deuxième et troisième chapitre. On identifie dans ce cas $\mathrm{M}_{\mathfrak{u}} = \mathbb{P}_2^*$, le plan projectif dual qui est le projectif des droites de $\mathbb{P}_2$, $\mathcal{D}_c = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)^* = \mathrm{S}^n E$, où $E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$. Le morphisme Φ décrit dans l'interprétation géométrique s'exprime ici en termes de droites de saut : à chaque faisceau F il associe la courbe de ses droites de saut. C'est le morphisme introduit par Barth [Barth77] afin de donner une description de l'espace de modules M_n.

On veut connaître l'espace de sections globales $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$ du fibré déterminant de Donaldson $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}$ considéré sur $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}_{(2,0,c_2=n)}$ et préciser la SL(3)-représentation définie par cet espace vectoriel de sections. Le résultat principal du deuxième chapitre est

Théorème 1 *Si $2 \leq n = c_2 \leq 19$, l'application linéaire*

$$\Phi^* : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$$

est un isomorphisme.

Comme le premier membre est une représentation irréductible de SL(3), le morphisme de dualité étrange est injectif, puisque équivariant et non nul. Il suffit de prouver que la dimension de l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$ est égale à celle de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))$.

L'idée de la démonstration est la suivante. On se fixe un entier positif l. On utilise des résultats de Min He sur les espaces de modules des systèmes cohérents $(\Gamma, F(l))$, où F est de classe $(2, 0, c_2 = n)$ et Γ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathrm{H}^0(F(l))$. On ramène, pour n compris entre $l(l-1)$ et $(l+1)(l+2)$, le calcul de la dimension de l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$ à l'étude des sections d'un fibré vectoriel $\mathrm{S}^l\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ sur un ouvert U du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ des sous-schémas finis de longueur $m = n + l^2$ de $\mathbb{P}_2$. Les espaces de modules de systèmes cohérents jouent le rôle d'intermédiaire entre l'espace de modules initial et $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$.

Si $\Xi \subset \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ est le sous-schéma universel, $\mathcal{I}$ est le faisceaux d'idéaux associé,

$$pr_1 : \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2 \to \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), pr_2 : \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$$

sont les deux projections, le faisceau algébrique cohérent $\mathcal{R}$ est défini par $\mathcal{R} = R^1 pr_{1*}(\mathcal{I}(2l-3))$. Ce faisceau est localement libre en dehors du fermé de Brill-Noether B des schémas $Z \in \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ tels que $h^0(I_Z(2l-3)) \neq 0$. L'ouvert noté U est l'ouvert complémentaire de B. La codimension de B est supérieure ou égale à 2, donc les résultats de cohomologie locale nous permettent de passer de $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ à U pour le calcul d'un espace de sections. Le fibré $\mathfrak{d} = \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}$ est le fibré déterminant sur le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$, vu comme espace de modules des faisceaux sans torsion de rang $r = 1$ sur $\mathbb{P}_2$, de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = m$.

Le fibré $\mathcal{R}$ admet une résolution sur U

$$0 \to \mathrm{S}^k E \otimes \mathcal{O}_U \to \mathcal{O}(k)^{[m]}|_U \to \mathcal{R} \to 0$$

pour $E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$, et $k = 2l - 3$. Le fibré $\mathcal{O}(k)^{[m]}$ est défini par $\mathcal{O}(k)^{[m]} = pr_{1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes pr_2^*(\mathcal{O}(k)))$. Par conséquent, le fibré $\mathrm{S}^l\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ admet une résolution sur U par un complexe de fibrés vectoriels de la forme

$$K^i = \Lambda^{-i}\mathrm{S}^k E \otimes \mathrm{S}^{l+i}(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}$$

pour $i = 0, \ldots, l$. Il reste ensuite à étudier les termes $\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}^q(K^{-p})$ de la suite spectrale associée à cette résolution de $\mathrm{S}^l\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ sur U.

Lorsque l augmente, le nombre de termes de la suite spectrale qui sont à déterminer augmente également. Les cas $l = 1, 2$ se résolvent sans difficultés et ils fournissent le résultat pour $n \leq 11$. Pour $l = 3$, une étude approfondie des morphismes entre les fibrés vectoriels sur le schéma de Hilbert entrant en jeu est nécessaire afin de déterminer les termes supplémentaires. On a besoin d'un théorème d'annulation de la cohomologie du fibré tautologique $\mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}$ sur le schéma de Hilbert, qui est prouvé dans le troisième chapitre et qui est un résultat intéressant en soi. Moyennant encore une partie théorique de calculs de représentations de SL(3), nous étendons le résultat jusqu'à $n \leq 19$.

Le résultat du troisième chapitre est valable sur une surface X projective et lisse sur $\mathbb{C}$ et pour des fibrés $L^{[m]}$ et $\mathfrak{d}_m^A$ sur le schéma de Hilbert $X^{[m]}$ associés à des fibrés inversibles L et A sur X. La notation $X^{[m]}$ a été considérée ici plus adaptée au contexte que $\mathrm{Hilb}^m(X)$.

On utilise le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X^m \arrow[d, "q"] \\ X^{[m]} \arrow[r, "HC"] & \mathrm{S}^m(X) \end{tikzcd}$$

pour définir le fibré $\mathfrak{d}_m^A$ associé à A. Le morphisme HC est le morphisme de Hilbert-Chow, qui associe à un sous-schéma $Z \subset X$ le cycle $\sum_{x \in X} lg(Z_x)x$, où Z_x est la composante de Z passant par x, et $lg(Z_x)$ la longueur de Z_x. Le morphisme q est le quotient par l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$. Alors

$$\mathfrak{d}_m^A = HC^*((A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A)^{\mathfrak{S}_m}).$$

Soit $\Xi_m \subset X^{[m]} \times X$, le schéma universel des couples (Z, x) tels que $x \in Z$. Il est fini de degré m et plat au-dessus de $X^{[m]}$. On note p_1 et p_2 les deux projections :

$$\begin{tikzcd} X^{[m]} \times X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \\ X^{[m]} & \end{tikzcd}$$

aussi bien que leurs restrictions à Ξ_m. Alors $L^{[m]}$ est le fibré $p_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi_m} \otimes p_2^*(L))$.

Lorsque $X = \mathbb{P}_2$, si A est le fibré $\mathcal{O}(1)$, via l'identification de $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ à l'espace de modules des faisceaux sans torsion de rang 1 sur $\mathbb{P}_2$, $\mathfrak{d}_m^{\mathcal{O}(1)}$ est le fibré déterminant sur $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ associé à $\mathfrak{u} = (0,1,0) \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. Si $L = \mathcal{O}(k)$, on retrouve la définition de $\mathcal{O}(k)^{[m]}$ sur $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$.

Nous démontrons alors :

Théorème 2 *Si* $\mathrm{H}^q(X, A) = \mathrm{H}^q(X, L \otimes A) = 0$ *pour tout* $q \geq 1$, *alors*
i) $\mathrm{H}^q(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = 0$ *pour* $q > 0$ *;*
ii) $\mathrm{H}^0(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \simeq \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{H}^0(A)) \otimes \mathrm{H}^0(X, L \otimes A)$.

Je dois à Michel Brion le fait d'avoir affaibli les hypothèses.

Pour $X = \mathbb{P}_2$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$ et $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ c'est le résultat utilisé dans le deuxième chapitre. Pour $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1)$, $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$ c'est le résultat nécessaire pour des calculs analogues à ceux du chapitre 2 et qui apparaîssent dans le chapitre 4. Nous traitons les cas $q = 0, 1$ directement et nous utilisons une récurrence sur m pour $q > 1$. On fait intervenir alors un schéma de Hilbert d'incidence $X^{[m,m+1]}$ qui permet de passer de $X^{[m+1]}$ à $X^{[m]} \times X$. Ensuite on utilise la formule de Künneth pour se ramener à $X^{[m]}$. Le schéma $X^{[m,m+1]}$ possède de jolies propriétés géométriques. En particulier, il est génériquement fini au-dessus de $X^{[m+1]}$ et birationnel à $X^{[m]} \times X$.

Le quatrième chapitre concerne le calcul du nombre de sections des puissances $\mathcal{D}^{\otimes d} = \mathcal{D}_{d\mathfrak{u}}$ du fibré déterminant de Donaldson. Ce calcul est plus délicat : ce n'est pas étonnant, car il contient en fait le calcul des nombres de Donaldson du plan projectif.

Pour $n \leq 5$, des considérations sur les espaces de modules $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$ des faisceaux ayant un support de dimension 1 et le calcul de l'espace de sections de $\mathcal{D}^{\otimes d}$ pour $d \leq 3$ selon la même méthode que celle du deuxième chapitre fournissent les points (ii) et (iii) du théorème principal :

Théorème 3 *Si* $r = 2, c_1 = 0$ *et* $n = c_2 \leq 5$ *(i.e.* $c = (2, 0, 2-n)$*) et* $u = (0, d, 0) = d\mathfrak{u}$ *alors l'application linéaire*

$$D_{c,d\mathfrak{u}} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}^{\otimes d})$$

est un isomorphisme pour $d = 2, 3$, *c'est-à-dire que dans ces conditions la conjecture de dualité étrange est vraie.*

Enfin, on démontre l'annulation de la cohomologie supérieure de $\mathcal{D}^{\otimes k}$ sur M_n, pour $k \geq -5$ (ce fait se généralise à tous les espaces de modules M_c). Alors $\chi(\mathcal{D}^{\otimes k}) = h^0(\mathcal{D}^{\otimes k})$ se calcule avec la formule de Riemann-Roch. La série de Poincaré

$$P(t) = \sum_{k\geq 0} t^k h^0(\mathrm{M}, \mathcal{D}^{\otimes k})$$

se met alors sous une forme spéciale. En utilisant des valeurs particulières de $h^0(\mathcal{D}^{\otimes k})$ pour k petit, nous calculons pour $n = 3, 4$ toutes les dimensions des espaces de sections globales de $\mathcal{D}^{\otimes k}$, pour $k \geq -5$. Le résultat s'énonce ainsi :

Théorème 4

i) Pour l'espace de modules $\mathrm{M}_{(2,0,-1)}$ *des faisceaux stables de rang* 2 *et classes de Chern* $(0,3)$*, la série de Poincaré de* $\mathcal{D}$*,* $P(t) = \sum_{k\geq 0} t^k h^0(\mathcal{D}^{\otimes k})$ *est donnée par*

$$P(t) = \frac{1 + t^2 + t^4}{(1-t)^{10}}.$$

ii) Pour l'espace de modules $\mathrm{M}_{(2,0,-2)}$ *des faisceaux semi-stables de rang* 2 *et classes de Chern* $(0,4)$*, la série de Poincaré de* $\mathcal{D}$ *est donnée par*

$$P(t) = \frac{1 + t + 7t^2 + 7t^3 + 22t^4 + 7t^5 + 7t^6 + t^7 + t^8}{(1-t)^{14}}.$$

Notations

Chapitre 1

$\mathbb{P}(V)$: l'espace projectif des droites de l'espace vectoriel V
$\mathbb{P}_\bullet(V)$: l'espace projectif de Grothendieck des espaces vectoriels quotients de dimension 1 de l'espace vectoriel V
$\mathbb{P}_2^*$: espace projectif des droites de $\mathbb{P}_2$, appelé espace projectif dual
$E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$
$C_d = \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(d))$
$\mathrm{S}^d E^* = \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1))$
η : la classe dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ du faisceau structural d'une droite
η^2 : la classe dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ du faisceau structural d'un point
$c = (2, 0, 2-n)$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$, $c_2(c) = n$, ou
$c = (1, 0, 1-n)$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$, $c_2(c) = n$, ou
$c = (r, c_1, \chi) = r[\mathcal{O}] - n\eta^2$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$, $c_2(c) = n$
$\delta = \mathrm{pgcd}\,(r, c_1)$
$\mathfrak{u} = (0, 1, 0)$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$, $c_2(\mathfrak{u}) = 2$, ou
$\mathfrak{u} = (0, \frac{r^c}{\delta}, -\frac{c_1^c}{\delta})$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$
$u = d\mathfrak{u}$
$\sigma_{c,u}$: la section globale dans $\Gamma(\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u, \mathcal{D}_u \boxtimes \mathcal{D}_c)$, bien déterminée à une constante multiplicative près
$\Theta = \det pr_!(\mathcal{G} \cdot \mathcal{O})^{-1} = \det pr_!(\mathcal{G})^{-1}$ sur $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$
θ : la section globale de Θ sur $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$, bien déterminée à une constante multiplicative près
σ_F : la restriction de $\sigma_{c,u}$ à $\{[F]\} \times \mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$
$\Phi : \mathrm{M}_c \to \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)$ défini par $F \mapsto \sigma_F$
$\mathrm{D}_{c,u} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_u)$
$\gamma : \mathrm{M}_c \to \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))$ le morphisme de Barth
$\pi : \mathrm{M}_{d\mathfrak{u}} \to C_d$ le morphisme support schématique
$s : C_3 \to \mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}$ la section de π donnée par la cubique universelle

Chapitre 2

$\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$: le schéma de Hilbert des sous-schémas de $\mathbb{P}_2$ de longueur m
$\mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2)$: la puissance symétrique m-ième de $\mathbb{P}_2$
$\Xi \subset \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$: le sous-schéma universel
$\mathcal{I}$: le faisceau d'idéaux associé à Ξ
$\mathcal{R} = R^1 pr_{1*}(\mathcal{I}(2l-3))$
$\mathcal{O}(k)^{[m]} = pr_{1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes pr_2^*(\mathcal{O}(k)))$
$\mathfrak{d}$: le fibré déterminant sur le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$
$HC : \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \to \mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2)$: le morphisme de Hilbert-Chow

Chapitre 3

$X^{[m]}$: le schéma de Hilbert des sous-schémas de longueur m de la surface X
$\mathfrak{d}_m^A = HC^*((A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A)^{\mathfrak{S}_m})$: fibré sur $X^{[m]}$ associé à un fibré inversible A sur X
$\Xi_m \subset X^{[m]} \times X$: le sous-schéma universel
$L^{[m]} = p_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi_m} \otimes p_2^*(L))$ le fibré tautologique sur $X^{[m]}$ associé à un fibré inversible L sur X
$X^{[m,m+1]}$: le sous-schéma fermé de $X^{[m+1]} \times X^{[m]}$ donné par $\{(Z,\xi) | \xi \subset Z\}$
$\phi = (p_m, q) : X^{[m,m+1]} \to X^{[m]} \times X$
$\rho : \mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) \to X^{[m]} \times X$ le morphisme d'éclatement
$\pi : \mathbb{P}(I_{\Xi_m}) \to X^{[m]} \times X$ la projection
$\eta_{univ}, \xi_{univ}, Z_{univ}$: les familles universelles de longueur relative 1, m, respectivement $m+1$ paramétrées par $X^{[m,m+1]}$
$\eta'_{univ}, \xi'_{univ}, Z'_{univ}$: les familles universelles de longueur relative 1, m, respectivement $m+1$ paramétrées par $X^{[m]} \times X$
$\eta''_{univ}, \xi''_{univ}, Z''_{univ}$: les familles universelles de longueur relative 1, m, respectivement $m+1$ paramétrées par $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$

Chapitre 4

les notations du Chapitre 1 sont reprises

Préliminaires

Par variété algébrique, on entend schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ séparé ; les points considérés sont toujours les points fermés. Les résultats restent valables sans changement sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 quelconque. On identifiera la notion de fibré et celle de faisceau localement libre. Pour un espace vectoriel V nous noterons $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V et $\mathbb{P}_\bullet(V)$ l'espace projectif de Grothendieck des espaces vectoriels quotients de dimension 1.

Si F est un faisceau algébrique cohérent sur une variété algébrique projective lisse X de dimension d, polarisée par un faisceau très ample $\mathcal{O}_X(1)$, on désigne par P_F le polynôme de Hilbert de F, c'est-à-dire la caractéristique d'Euler-Poincaré du faisceau $F(m) = F \otimes \mathcal{O}(m)$. On note $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ la classe hyperplane.

On appelle *degré de F* le nombre $\deg(F) = c_1(F) \cdot h^{d-1}$ dans $\mathbb{Z} \simeq \mathrm{H}^{2d}(X;\mathbb{Z})$.

Si $r > 0$ on introduit les rapports

$$\mu(F) = \frac{\deg(F)}{r} \quad p_F = \frac{P_F}{r}$$

appelés respectivement *pente* et *polynôme de Hilbert réduit* de F.

En particulier, pour F de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 sur $\mathbb{P}_2$ (identifiées à des nombres entiers puisque $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \cdot h$), la formule de Riemann-Roch donne

$$\chi(F) = r + \frac{1}{2}(c_1(c_1+3)) - c_2$$

et

$$P_F(m) = \frac{1}{2}m(m+1)r + (c_1+r)m + \chi(F).$$

Dans ce cas, la donnée de P_F équivaut à celle du triplet (r, c_1, c_2) ou encore (r, c_1, χ).

0.1 Stabilité et semi-stabilité sur $\mathbb{P}_2$

Définition 0.1.1 *Un faisceau algébrique cohérent F de rang $r > 0$ sur le plan projectif est dit semi-stable (resp. stable) si*

(1) il est sans torsion ;

(2) pour tout sous-faisceau cohérent $F' \subset F$ de rang $0 < r' < r$ on a $p_{F'} \leq p_F$ (resp. <).

Dans cette définition, les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique. Ainsi la dernière inégalité signifie que $\mu(F') \leq \mu(F)$ et en cas d'égalité,

$$\frac{\chi(F')}{r'} \leq \frac{\chi(F)}{r}.$$

Si on remplace dans la définition le polynôme de Hilbert réduit par la pente, nous obtenons la notion de *faisceau μ-semi-stable* et *μ-stable.*

Remarques 0.1.2 : 1) Tout fibré en droites est stable.

2) Soit L un fibré inversible sur $\mathbb{P}_2$. Alors F est semi-stable (resp. stable) si et seulement si $F \otimes L$ l'est. On peut donc pour F semi-stable de rang r se ramener au cas $-r < c_1 \leq 0$. On dit alors que F est *normalisé.*

3) Si (r, c_1, c_2) sont premiers entre eux, F est semi-stable si et seulement si il est stable.

On étend la notion de semi-stabilité (resp. stabilité) aux faisceaux algébriques cohérents F de rang nul. Dans ce cas, on appelle *dimension* de F la dimension d du support de F.

Définition 0.1.3 ([LeP3]) *Un faisceau algébrique cohérent F de dimension 1 est dit semi-stable (resp. stable) si*

(1) il est pur, c'est-à-dire qu'il n'a pas de sous-faisceau cohérent de dimension 0 ;

(2) pour tout sous-faisceau cohérent non nul $F' \subset F$, distinct de F on a

$$\frac{\chi(F')}{\deg(F')} \leq \frac{\chi(F)}{\deg(F)}$$

(resp. $<$).

0.2 Filtration de Jordan-Hölder, S-équivalence

Les faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert réduit donné constituent une catégorie abélienne. Dans cette catégorie abélienne, les suites croissantes et les suites décroissantes sont stationnaires. Il en résulte qu'étant donné un faisceau semi-stable F de polynôme de Hilbert réduit p on peut trouver une filtration croissante

$$\{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_\ell = F$$

telle que $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit stable de polynôme de Hilbert réduit p. Une telle filtration n'est pas en général unique mais le faisceau $gr(F) = \oplus_{i=1}^{\ell} gr_i(F)$ est bien déterminé à isomorphisme près. Une telle filtration s'appelle filtration de Jordan-Hölder, et le faisceau $gr(F)$ le gradué de Jordan-Hölder. Deux faisceaux semi-stables F et F' sont dits S-équivalents si les gradués de Jordan-Hölder sont isomorphes.

0.3 Espace de modules grossier

On se place dans le cadre d'une surface algébrique projective, polarisée (munie d'un faisceau $\mathcal{O}_X(1)$ très ample), et on fixe un polynôme de degré 2, H. On considère pour toute variété algébrique S l'ensemble $\underline{\mathbf{M}}_X(H)(S)$ des classes d'isomorphisme de familles $S-$plates de faisceaux semi-stables sur X de polynôme de Hilbert H, paramétrées par la variété algébrique S.

Théorème 0.3.1 *Il existe pour le foncteur $\underline{\mathbf{M}}_X(H)$ un espace de modules grossier $\mathbf{M}_X(H)$. Cet espace de modules a les propriétés suivantes :*

- (i) *La variété algébrique $\mathbf{M}_X(H)$ est projective.*
- (ii) *Les points de $\mathbf{M}_X(H)$ sont les classes de S-équivalence de faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert H.*
- (iii) *L'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux stables s'identifie à un ouvert de la variété $\mathbf{M}_X(H)$.*

La propriété de module grossier de $\mathbf{M}_X(H)$ signifie qu'il existe un morphisme fonctoriel $f : \underline{\mathbf{M}}_X(H)(S) \to \mathrm{Mor}(S, \mathbf{M}_X(H))$, dit morphisme modulaire, satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour toute autre variété algébrique $\mathbf{M}'$, et tout morphisme fonctoriel $g : \underline{\mathbf{M}}_X(H)(S) \to \mathrm{Mor}(S, \mathbf{M}')$ il existe un morphisme et un seul $\varphi : \underline{\mathbf{M}}_X(H) \to \mathbf{M}'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathbf{M}}_X(H)(S) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Mor}(S, \mathbf{M}_X(H)) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathrm{Mor}(S, \mathbf{M}') \end{tikzcd}$$

Cette propriété caractérise la variété $\mathbf{M}_X(H)$. Cet énoncé, d'abord démontré par Gieseker [Gies] sur les surfaces, a été ensuite étendu par Maruyama [Maru] sur toute variété projective lisse polarisée, puis par Simpson [Simp] pour les faisceaux de dimension quelconque.

0.4 Faisceau universel

Définition 0.4.1 *Soit X une surface algébrique irréductible lisse polarisée. Soit $f : S \to \mathbf{M}_X(H)$ un morphisme de variétés algébriques. Une famille plate $\mathcal{F}$ de faisceaux semi-stables sur X, paramétrée par la variété algébrique S est appelée faisceau universel relatif à f si le morphisme modulaire associé $f_{\mathcal{F}}$ est égal à f.*

Si $S = \mathbf{M}_X(H)$ et $f = id$ on dira simplement que $\mathcal{F}$ est un faisceau universel.

Un tel faisceau universel n'existe pas toujours. Sur le plan projectif, on a le résultat suivant :

Théorème 0.4.2 *On considère, sur le plan projectif, l'espace de modules $\mathrm{M} = \mathbf{M}_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$.*

- (i) *Si (r, c_1, c_2) sont premiers entre eux, il existe un faisceau universel sur* M.
- (ii) *Supposons que (r, c_1, c_2) ne soient pas premiers entre eux, et considérons un ouvert U non vide de* M. *Alors il n'existe pas de faisceau universel paramétré par U.*

La démonstration de ce résultat fait appel à des techniques de descente qui sont utilisées aussi pour la construction du fibré déterminant. La partie (i) résulte d'un énoncé général d à Maruyama ; la partie (ii) est due à Drézet et Narasimhan [D-N].

0.5 Nombres de Hodge $h^q(F(i))$

Prenons un faisceau F semi-stable de de rang r et classes de Chern c_1 et c_2. On désigne par χ sa caractéristique d'Euler-Poincaré. On peut supposer que la pente μ satisfait à la condition de normalisation :

$$-1 < \mu \leq 0.$$

Si F n'est pas le fibré trivial de rang r, des arguments de semi-stabilité impliquent $h^0(F(i)) = 0$ pour $i \leq 0$, et $h^2(F(i)) = 0$ pour $i \geq -2$. Par conséquence pour $i = -2, -1, 0$ les seuls espaces vectoriels de cohomologie éventuellement non nuls sont les espaces $\mathrm{H}^1(F(i))$, dont la dimension, calculée par la formule de Riemann-Roch est donnée par

$$\begin{aligned} h^1(F) &= \quad -\chi \\ h^1(F(-1)) &= \quad c_1 + r - \chi \\ h^1(F(-2)) &= \quad 2c_1 + r - \chi. \end{aligned}$$

0.6 Morphisme de Barth

On fixe un fibré F semi-stable sur $\mathbb{P}_2$ de rang 2 et classes de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = n$.

Théorème 0.6.1 (Grauert-Mülich) *On a $F\mid_l = \mathcal{O}_l^2$ pour une droite générale $l \in \mathbb{P}_2^*$.*

Sinon $F\mid_l = \mathcal{O}_l(i) \oplus \mathcal{O}_l(-i)$ (i étant un entier positif) pour certaines droites de $\mathbb{P}_2$.

Les droites mentionnées dans le théorème de Grauert-Mülich sont appelées droites de saut de F. On étend cette définition aux faisceaux F sans torsion en posant :

Définition 0.6.2 *Soit $l \subset \mathbb{P}_2$ une droite de $\mathbb{P}_2$. On dit que l est droite de saut pour F si la restriction de F à l n'est pas triviale.*

On est sr que toutes les droites passant par les points singuliers de F sont de saut.

Remarque 0.6.3 Il n'est pas difficile de remarquer que la condition d'être droite de saut pour F est équivalente à la condition cohomologique $h^0(F(-1)\mid_l) = h^1(F(-1)\mid_l) \neq 0$.

On notera $\mathrm{M}_n = \mathbf{M}_{\mathbb{P}_2}(2, 0, n)$ l'espace de modules des faisceaux F semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = n$ sur le plan projectif. C'est une variété projective irréductible et normale (lisse si n est impair) de dimension $4n - 3$ (pour $n = 0$ cet espace est réduit à un point et pour $n = 1$ il est vide).

Lemme 0.6.4 *L'ensemble des droites de saut de F est une courbe de degré n dans l'espace projectif dual $\mathbb{P}_2^*$ (l'espace des droites de $\mathbb{P}_2$).*

Preuve du lemme :
Si on considère la variété d'incidence **D** des couples (droites, points), munie des projections canoniques

$$\begin{tikzcd} \mathbf{D} \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"] & \mathbb{P}_2 \\ {\mathbb{P}_2}^* & \end{tikzcd}$$

l'ensemble des droites de saut est le support du faisceau cohérent sur le plan projectif dual

$$\Theta = R^1 pr_{1*}(pr_2^*(F(-1))).$$

Pour $p = -1$ et -2 les nombres de Hodge $h^q(F(p))$ sont nuls si $q \neq 1$ et on a $h^1(F(-1)) = h^1(F(-2)) = n$; la résolution standard $0 \to \mathcal{O}(-1,-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}} \to 0$ de **D** dans $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$, montre alors que ce faisceau Θ est le conoyau du morphisme canonique sur $\mathbb{P}_2^*$

$$\mathrm{H}^1(F(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}.$$

Ainsi, Θ est un faisceau pur de dimension 1 dont le support schématique est une courbe dont l'équation est le déterminant du morphisme φ. Cette courbe γ_F de degré n est appelée courbe des droites de saut de F.□

L'application qui associe à la classe de F la courbe γ_F définit un morphisme $F \mapsto \gamma_F$, que nous appelons morphisme de Barth :

$$\gamma : \mathrm{M}_n \to \mathbb{P}_N$$

où $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)))$. On sait que le morphisme γ est génériquement fini sur son image, et que cette image contient des courbes lisses [Barth77]. En fait, sur l'ouvert des classes de faisceaux localement libres, ce morphisme est à fibres finies [LeP2]. Pour $n = 2$, c'est un isomorphisme ([Barth77]) ; pour $n = 3$, il est surjectif et de degré 3. Pour $n \geq 4$, la dimension du système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)|$ devient supérieure à $4n - 3$, la dimension de M_n.

Au premier chapitre sera définie l'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$, la classe d'un faisceau dans cette algèbre, le morphisme λ_{M_n} et le fibré déterminant de Donaldson $\mathcal{D}$ sur M_n comme $\lambda_{\mathrm{M}_n}(-\mathfrak{u})$ où $\mathfrak{u}$ est la classe $\eta - \eta^2$ (soit la classe du faisceau $\mathcal{O}_l(-1)$ où l est une droite de $\mathbb{P}_2$) et c est la classe d'un faisceau de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0, c_2 = n$. Le lien entre le morphisme de Barth γ et le fibré $\mathcal{D}$, est donnée par la proposition suivante :

Proposition 0.6.5 *Le fibré $\mathcal{D}$ est isomorphe à l'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$ par γ.*

La preuve de cette proposition a été donnée dans [D], prop. 1.2.9. Sa preuve ainsi que celle du lemme précédent résultent aussi des considérations plus générales du premier chapitre. L'application γ conduit alors à un morphisme non nul sur les espaces de sections globales :

$$\gamma^* : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D}).$$

Chapitre 1

Dualité étrange sur le plan projectif

L'objet de cette partie est de présenter la conjecture de Le Potier sur la dualité étrange. Nous donnerons ensuite quelques propriétés préliminaires pour les espaces de modules de faisceaux semi-stables de dimension 1.

1.1 L'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$

Si S est une variété algébrique, on désigne par $\mathrm{K}(S)$ le groupe de Grothendieck des classes de faisceaux algébriques cohérents sur S. Il s'agit de prendre le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur S et de quotienter par la relation $F_1 + F_2 \sim F$ s'il existe une suite exacte

$$0 \to F_1 \to F \to F_2 \to 0.$$

Si la variété S est lisse, ce groupe coïncide avec le groupe de Grothendieck des classes de fibrés vectoriels algébriques sur S. Pour un faisceau F on note $[F]$ sa classe dans le groupe $\mathrm{K}(S)$. Dans ce qui suit, on aura à considérer en particulier le groupe de Grothendieck $K(\mathbb{P}_2)$: c'est un groupe abélien libre de rang 3 ; l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathrm{K}(\mathbb{P}_2) & \to & \mathbb{Z}^3 \\ & & [F] & \mapsto & (rg(F), c_1(F), \chi(F)) \end{array}$$

qui à la classe d'un faisceau F associe le rang r de F, la classe de Chern c_1 de F (identifiée à un entier puisque $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \cdot h$ où $h = c_1(\mathcal{O}(1))$), et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ de F, est bien définie. C'est un isomorphisme de groupes abéliens. On notera un élément de $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ par son image (r, c_1, χ) dans $\mathbb{Z}^3$. Lorsqu'on préfère utiliser la deuxième classe de Chern c_2 à la place de χ, ceci sera signalé. Si S est lisse, une loi de multiplication sur $\mathrm{K}(S)$ est définie en prolongeant par linéarité la loi de multiplication définie pour F et G faisceaux algébriques cohérents sur S par

$$F \cdot G = \sum_p (-1)^p \underline{Tor}_p(F, G)$$

Ce produit se réduit au produit tensoriel usuel si l'un des deux faisceaux F ou G est localement libre.

On parle alors d'algèbre de Grothendieck.

On peut calculer les images $\phi([\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}]) = (1,0,1), \phi(\eta) = (0,1,1), \phi(\eta^2) = (0,0,1), \phi(\eta^3) = (0,0,0)$ où $\eta = [\mathcal{O}_l]$ est la classe du faisceau structural d'une droite l, et $\eta^2 = [\mathcal{O}_p]$ celle du faisceau structural d'un point. On en déduit qu'en tant qu'algèbre, $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\eta]/(\eta^3)$.

On munit $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ de la forme bilinéaire donnée par $\langle c, u\rangle = \chi(c \cdot u)$. Pour $c = (r^c, c_1^c, \chi^c)$ et $u = (r^u, c_1^u, \chi^u)$ on a

$$\langle c, u\rangle = \chi^c r^u + \chi^u r^c + c_1^u c_1^c - r^u r^c.$$

Dans la suite l'orthogonalité sera prise relativement à cette forme. On a aussi sur $K(\mathbb{P}_2)$ une involution $u \mapsto u^*$ qui associe à la classe d'un fibré vectoriel celle de son dual.

1.2 Espaces de modules et fibrés déterminants

Soit S une variété. On note pr_1 la projection $S \times \mathbb{P}_2 \to S$ et pr_2 la projection $S \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$. Pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur $S \times \mathbb{P}_2$, on note

$$pr_{1!}([\mathcal{F}]) := [R^0 pr_{1*}\mathcal{F}] - [R^1 pr_{1*}\mathcal{F}] + [R^2 pr_{1*}\mathcal{F}]$$

dans le groupe $\mathrm{K}(S)$. Cela définit, par linéarité, une application $pr_{1!} : \mathrm{K}(S \times \mathbb{P}_2) \to \mathrm{K}(S)$.

Si F est un faisceau cohérent sur S qui admet une résolution finie par des faisceaux localement libres A_i :

$$0 \to A_n \to A_{n-1} \to \cdots \to A_0 \to F \to 0$$

on introduit le faisceau inversible

$$\det F = \det A_0 \otimes (\det A_1)^{-1} \otimes \cdots \otimes (\det A_n)^{(-1)^n}.$$

L'application qui à F associe son déterminant $\det F$ est multiplicative sur les suites exactes.

Soient $c \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ une classe de Grothendieck de rang $r > 0$ et M_c l'espace de modules des faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c. C'est une variété algébrique projective irréductible normale, de dimension $D = 1 - \langle\, c^*, c\rangle$ où c^* est la classe duale de c. On note $c^\perp$ le sous-espace de $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ des classes orthogonales à c. Dans [Dréz2], Drézet a construit un morphisme surjectif de groupes $\lambda_c : c^\perp \to \mathrm{Pic}\,(\mathrm{M}_c)$ caractérisé par la propriété universelle suivante :

Pour toute famille plate $\mathcal{F}$ de faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c, paramétrée par une variété algébrique S, la classe $\lambda_{\mathcal{F}}(u) = \det pr_{1!}(\mathcal{F} \cdot pr_2^*(u))$ définit un fibré inversible sur la variété S. Si $f_{\mathcal{F}} : S \to \mathrm{M}_c$ est le morphisme modulaire associé à la famille $\mathcal{F}$, on a

$$f_{\mathcal{F}}^*(\lambda_c(u)) = \lambda_{\mathcal{F}}(u)$$

et le fibré $\lambda_c(u)$ est le seul à isomorphisme près qui satisfait à cette propriété pour toute famille plate $\mathcal{F}$.

S'il existe un faisceau universel $\mathcal{F}$ sur M_c, d'après la propriété universelle de $\lambda_c(u)$, il résulte que $\lambda_c(u) = \lambda_{\mathcal{F}}(u)$. En général, on prouve l'existence de $\lambda_c(u)$ en écrivant $\mathrm{M}_c = \Omega^{ss}/\mathrm{SL}(H)$ comme quotient d'un ouvert dans un schéma de Hilbert par l'action d'un groupe réductif, en considérant une famille universelle sur Ω^{ss} et en utilisant un argument de descente.

On note K_c le sous-$\mathbb{Z}$-module libre de rang 1 de $c^\perp$ des classes de rang 0. Il est défini dans $\mathbb{Z}^3$ par les équations

$$\begin{cases} r^u = 0 \\ \chi^u r^c + c_1^u c_1^c = 0. \end{cases}$$

On appelle $\mathfrak{u}$ le générateur positif de K_c (i.e. $c_1(\mathfrak{u})$ est un multiple positif de h dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}_2, \mathbb{Z})$). Ce générateur $\mathfrak{u}$ a donc pour première classe de Chern et caractéristique d'Euler-Poincaré

$$c_1(\mathfrak{u}) = \frac{r^c}{\delta} \quad ; \quad \chi(\mathfrak{u}) = -\frac{c_1^c}{\delta}$$

où $\delta = \mathrm{pgcd}\,(r^c, c_1^c)$.

Définition 1.2.1 *On appelle fibré déterminant de Donaldson sur* M_c *le fibré* $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathfrak{u}} = \lambda_c(-\mathfrak{u})$.

Pour toute classe $u \in \mathrm{K}_c$ on introduit plus généralement le fibré inversible $\mathcal{D}_u = \lambda_c(-u)$; c'est donc un multiple du fibré déterminant de Donaldson.

L'objectif principal est de calculer la dimension de l'espace de sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_u)$. À cette fin Le Potier a proposé d'introduire M_u, l'espace de modules des faisceaux semi-stables de dimension 1 de classe de Grothendieck u. Dans ce cas la semi-stabilité est prise au sens de la définition 0.1.3. On sait que M_u est encore une variété algébrique irréductible normale et que la classe c (appartenant à $u^\perp$) permet de construire un fibré inversible $\mathcal{D}_c = \lambda_u(-c)$ sur M_u, de la même manière que sur M_c. Dans certains cas l'espace M_u et le fibré $\mathcal{D}_c$ sont plus faciles à décrire.

1.3 Morphisme de dualité étrange

On considère deux classes $c, u \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ dans l'algèbre de Grothendieck . On suppose qu'elles sont orthogonales, que $r(c) > 0$, que $r(u) = 0$ et $c_1(u) > 0$. Le morphisme de dualité étrange est une conséquence de la construction simultanée des fibrés déterminants $\mathcal{D}_u$ sur M_c et $\mathcal{D}_c$ sur M_u. Sa construction et son interprétation géométrique sont résumées dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *i) Il existe une section canonique, définie à une constante près, $\sigma_{c,u} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u, \mathcal{D}_u \boxtimes \mathcal{D}_c)$ qui s'annule exactement aux points $([F],[G])$ tels que $h^0(\mathbb{P}_2, F \otimes G) = h^1(\mathbb{P}_2, F \otimes G) \neq 0$.*

ii) La section $\sigma_{c,u}$ définit une application linéaire

$$\mathrm{D}_{c,u} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{D}_c)^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_u).$$

iii) On note σ_F la restriction de $\sigma_{c,u}$ à $\{[F]\} \times \mathrm{M}_u$. Si $\sigma_{c,u}$ n'est pas identiquement nulle, l'association $F \mapsto [\sigma_F]$ définit une application rationnelle

$$\Phi : \mathrm{M}_c \to \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{D}_c).$$

Si en outre σ_F n'est pas identiquement nulle pour tout $[F] \in \mathrm{M}_c$, l'application Φ est régulière.

iv) Si l'image du morphisme Φ n'est pas contenue dans un hyperplan l'application $\mathrm{D}_{c,u}$ est injective.

La conjecture de Le Potier est alors :

Conjecture 1.3.2 *Si M_c est non-vide alors le morphisme de dualité étrange $\mathrm{D}_{c,u}$ est un isomorphisme.*

Preuve du théorème 1.3.1 :

On commence par rappeler les résultats suivants :

Lemme 1.3.3 *Soit S une variété algébrique. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des familles plates de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ de classes de Grothendieck c et respectivement u, paramétrées par S. Alors :*

a) Le faisceau $\mathcal{G}$ a une résolution

$$0 \to \mathcal{Q} \to \mathcal{R} \to \mathcal{G} \to 0 \tag{1.1}$$

sur $S \times \mathbb{P}_2$ par des faisceaux localement libres $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$.

b) Le faisceau $\mathcal{F}$ a une résolution

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{F} \to 0 \tag{1.2}$$

sur $S \times \mathbb{P}_2$ par des faisceaux localement libres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. En plus, on peut choisir $\mathcal{B}$ tel que

$$h^0(\mathcal{B}_s \otimes \mathcal{G}_s) = 0 \text{ pour tout } s \in S. \tag{1.3}$$

c) $\underline{\mathrm{Tor}}_i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ pour $i > 0$.

Preuve :

La résolution pour $\mathcal{G}$ résulte du fait que $\mathcal{G}$ est pur de dimension 1 sur chaque fibre. La résolution pour $\mathcal{F}$ résulte du fait que la restriction de $\mathcal{F}$ à chaque fibre est un faisceau sans torsion sur $\mathbb{P}_2$. On peut changer le faisceau $\mathcal{B}$ dans la résolution de $\mathcal{F}$ en $[\mathcal{B} \otimes pr_2^* \mathcal{O}(-n)]^m$, pour $n \geq 0$ et m assez grand. Pour un choix de n assez grand on obtient $h^0(\mathcal{B}_s \otimes \mathcal{G}_s) = 0$ pour tout s. Il résulte d'après a), b), que $\underline{\mathrm{Tor}}_i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ pour $i \geq 2$ et que $\underline{\mathrm{Tor}}_1(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est inclus dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{A}$ et dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}$. Comme $\mathcal{G} \otimes \mathcal{A}$ est de torsion, et $\mathcal{F} \otimes \mathcal{Q}$ sans torsion, on en déduit que $\underline{\mathrm{Tor}}_1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$. □

Soient S, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ comme dans le lemme. D'après c) on a une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{G} \xrightarrow{a} \mathcal{B} \otimes \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \to 0. \tag{1.4}$$

On considère son image directe par pr_{1*}. Le lemme 1.3.3 b) conduit à $pr_{1*}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}) = pr_{1*}(\mathcal{B} \otimes \mathcal{G}) = 0$. Le faisceau $\mathcal{G}$ est de dimension 1 dans les fibres, donc $R^2 pr_{1*}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}) = R^2 pr_{1*}(\mathcal{B} \otimes \mathcal{G}) = 0$. Alors la suite

$$0 \to pr_{1*}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \to R^1 pr_{1*}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}) \xrightarrow{a} R^1 pr_{1*}(\mathcal{B} \otimes \mathcal{G}) \to R^1 pr_{1*}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \to 0 \tag{1.5}$$

est exacte.

Lemme 1.3.4 *Les faisceaux $R^1pr_{1*}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{G})$ et $R^1pr_{1*}(\mathcal{B}\otimes\mathcal{G})$ sont localement libres de même rang sur S.*

Preuve :

Puisque les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont S-plates, on obtient que $\mathcal{A}\otimes\mathcal{G}$, $\mathcal{B}\otimes\mathcal{G}$ et $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ sont des familles S-plates. Alors les suites (1.1), (1.4), (1.5) sont compatibles avec les changements de base $S'\to S$. En particulier, pour $S'=\{s\}\in S$, on obtient à partir de la suite (1.5) une suite exacte :

$$0\to \mathrm{H}^0(\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{G}_s)\to \mathrm{H}^1(\mathcal{A}_s\otimes\mathcal{G}_s)\xrightarrow{a_s}\mathrm{H}^1(\mathcal{B}_s\otimes\mathcal{G}_s)\to \mathrm{H}^1(\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{G}_s)\to 0 \tag{1.6}$$

et $h^0(\mathcal{A}_s\otimes\mathcal{G}_s)=h^0(\mathcal{B}_s\otimes\mathcal{G}_s)=h^2(\mathcal{A}_s\otimes\mathcal{G}_s)=h^2(\mathcal{B}_s\otimes\mathcal{G}_s)=0$. Puisque les familles $\mathcal{A}\otimes\mathcal{G}$ et $\mathcal{B}\otimes\mathcal{G}$ sont plates sur S, il résulte que $h^1(\mathcal{A}_s\otimes\mathcal{G}_s)=-\chi(\mathcal{A}_s\otimes\mathcal{G}_s)$ est constant en s. On obtient que $R^1pr_{1*}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{G})$ est localement libre de rang $-\chi(\mathcal{A}_s\otimes\mathcal{G}_s)$. Le même argument montre que $R^1pr_{1*}(\mathcal{B}\otimes\mathcal{G})$ est localement libre de rang $-\chi(\mathcal{B}_s\otimes\mathcal{G}_s)$. La suite (1.6) implique

$$\chi(\mathcal{A}_s\otimes\mathcal{G}_s)-\chi(\mathcal{B}_s\otimes\mathcal{G}_s)=\chi(\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{G}_s).$$

Le lemme 1.3.3 c) implique $[\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{G}_s]=[\mathcal{F}_s]\cdot[\mathcal{G}_s]$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. Comme c et u sont orthogonales, on a $\chi(\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{G}_s)=0$. Alors les faisceaux $R^1pr_{1*}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{G})$ et $R^1pr_{1*}(\mathcal{B}\otimes\mathcal{G})$ ont même rang. □

En utilisant la suite exacte (1.5) on définit un fibré $\mathcal{D}_S$ par

$$\mathcal{D}_S:=[\det pr_{1!}(\mathcal{F}\cdot\mathcal{G})]^{(-1)}=\det R^1pr_{1*}(\mathcal{B}\otimes\mathcal{G})\otimes[\det R^1pr_{1*}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{G})]^{(-1)}.$$

L'application a fournit une section σ_S de ce fibré inversible sur S. Ni le fibré $\mathcal{D}_S$, ni la section σ_S, à une fonction inversible près, ne dépendent de la résolution choisie. La suite exacte (1.6) montre que la section σ_S s'annule exactement aux points $s\in S$ où l'application linéaire $a|_s$ n'est pas inversible. Ces points sont ceux où $h^0(\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{G}_s)=h^1(\mathcal{F}_s\otimes\mathcal{G}_s)\neq 0$.

On a vu que la suite (1.5) était compatible avec les changements de base $S'\to S$. Il résulte que le fibré inversible $\mathcal{D}_S$ et la section σ_S le sont aussi. Soit $\phi: S\to \mathrm{M}_c\times\mathrm{M}_u$ le morphisme modulaire associé aux familles $\mathcal{F},\mathcal{G}$.

Proposition 1.3.5 *Il existe un fibré inversible $\mathcal{D}_{c,u}$ sur $\mathrm{M}_c\times\mathrm{M}_u$ et une section $\sigma_{c,u}$ bien déterminée à une constante multiplicative près, qui vérifie : pour toute variété algébrique S et pour toutes familles plates $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ de faisceaux semi-stables de classes c respectivement u dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$, paramétrées par S, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_S &= \phi^*(\mathcal{D}_{c,u}) \text{ et}\\ \sigma_S &= \phi^*(\sigma_{c,u}) \text{ à une fonction inversible près.}\end{aligned}$$

Preuve :

La preuve est classique. On commence par les deux lemmes suivants.

Lemme 1.3.6 ([Simp], [LeP1], [LeP6]) *Il existe une variété lisse Ω_c, une famille plate $\mathcal{F}_c$ de faisceaux semi-stables de classe c sur $\mathbb{P}_2$ paramétrée par Ω_c et un groupe réductif G_c qui agit sur Ω_c tels que M_c soit un bon quotient de Ω_c sous l'action de G_c.*

La description de Ω_c est la suivante. On introduit pour m entier assez grand la caractéristique d'Euler-Poincaré $P(m)$ de $c(m)$, et la somme directe B de $N=P(m)$ exemplaires du fibré inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-m)$. On considère le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^c(B)$ des faisceaux cohérents F de classe de Grothendieck c quotients de B. Le groupe $G_c:=\mathrm{Aut}(B)$ opère de manière naturelle sur $\mathrm{Hilb}^c(B)$. On note $\Omega_c:=\Omega^{ss}$ l'ouvert des points semi-stables pour l'action de G_c. Ces points représentent les faisceaux semi-stables F pour lesquels le morphisme naturel $\mathrm{H}^0(B(m))\to\mathrm{H}^0(F(m))$ est un isomorphisme. L'ouvert Ω^{ss} est invariant par l'action du groupe réductif $\mathrm{Aut}(B)$. C'est un ouvert lisse et sur $\Omega^{ss}\times\mathbb{P}_2$ on dispose d'un faisceau quotient universel $\mathcal{F}$, lequel est aussi muni d'une action de G_c. L'ouvert Ω^{ss} admet pour bon quotient l'espace de modules grossier M_c des faisceaux semi-stables de classe c.

Lemme 1.3.7 ([LeP3]) *Il existe une variété lisse Ω_u, une famille plate $\mathcal{G}_u$ de faisceaux semi-stables de classe u sur $\mathbb{P}_2$ paramétrée par Ω_u et un groupe réductif G_u qui agit sur Ω_u, tels que M_u soit un bon quotient de Ω_u sous l'action de G_u.*

La description de la variété M_u est analogue à celle de la variété M_c. Il existe un entier m suffisamment grand pour que tout faisceau semi-stable G sur $\mathbb{P}_2$ de classe $u = (0, d, \chi) \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ vérifie : le faisceau $G(m)$ est engendré par ses sections globales et $\mathrm{H}^1(G(m)) = 0$. On considère H un espace vectoriel de dimension $n = dm + \chi$ sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathrm{Hilb}^u(B)$ le schéma de Hilbert-Grothendieck des faisceaux quotients de $B = H \otimes \mathcal{O}(-m)$ de classe $u \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. Le groupe $G_u := \mathrm{GL}(H)$ opère de manière naturelle sur $\mathrm{Hilb}^u(B)$. On considère l'ouvert $\Omega_u := \Omega^{ss}$ des points semi-stables pour l'action de G_u : ces points correspondent aux faisceaux quotients de B qui sont semi-stables et tels que le morphisme d'évaluation $H \to \mathrm{H}^0(F(m))$ soit un isomorphisme. Cet ouvert est lisse et M_u est le bon quotient de Ω^{ss} pour l'action du groupe G_u.

On note ρ la projection $\Omega_c \times \Omega_u \to \mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u$. On considère la construction précédente de $\mathcal{D}_S$ dans le cas où $S := \Omega_c \times \Omega_u, \mathcal{F} := pr_{13}^*(\mathcal{F}_c), \mathcal{G} := pr_{23}^*(\mathcal{G}_u)$, où $pr_{13} : \Omega_c \times \Omega_u \times \mathbb{P}_2 \to \Omega_c \times \mathbb{P}_2$ et $pr_{23} : \Omega_c \times \Omega_u \times \mathbb{P}_2 \to \Omega_u \times \mathbb{P}_2$ sont les projections. On note $\mathcal{D}_\Omega$ le fibré déterminant sur $\Omega_c \times \Omega_u$ ainsi obtenu et σ_Ω sa section canonique, à une fonction inversible près.

De la compatibilité du fibré $\mathcal{D}_S$ aux changements de base $S' \to S$, il résulte une action du groupe $G_c \times G_u$ sur le fibré $\mathcal{D}_\Omega$. La section σ_Ω est équivariante. Dans le lemme qui suit on vérifie que la condition de descente est satisfaite pour $\mathcal{D}_\Omega$.

Lemme 1.3.8 *Soit (s_c, s_u) un point de $\Omega_c \times \Omega_u$ tel que l'orbite $G_c \cdot s_c \times G_u \cdot s_u$ soit fermée dans $\Omega_c \times \Omega_u$. Alors le stabilisateur $G_{s_c} \times G_{s_u}$ du point (s_c, s_u) agit trivialement sur la fibre $\mathcal{D}_{(s_c,s_u)}$ du fibré $\mathcal{D}_\Omega$ au point (s_c, s_u).*

Preuve :

Les points (s_c, s_u) d'orbite fermée sont les points pour lesquels l'orbite $G_c \cdot s_c$ est fermée dans Ω_c et l'orbite $G_u \cdot s_u$ est fermée dans Ω_u. D'après le lemme 4.2 de [D-N], le faisceau $\mathcal{F}_{s_c}$ sur $\mathbb{P}_2$ est somme directe de faisceaux stables de même polynôme de Hilbert réduit, et de même pour $\mathcal{G}_{s_u}$. Écrivons :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{s_c} &= F_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus F_k^{m_k} \\ \mathcal{G}_{s_u} &= G_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus G_l^{n_l} \end{aligned}$$

pour des faisceaux stables F_i, G_j différents deux par deux. Le stabilisateur du point (s_c, s_u) est

$$G_{s_c} \times G_{s_u} = \mathrm{GL}(m_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(m_k) \times \mathrm{GL}(n_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_l).$$

D'après la définition de $\mathcal{D}_S$ on a

$$\mathcal{D}_{(s_c,s_u)} = [\det \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{F}_{s_c} \otimes \mathcal{G}_{s_u})]^{-1} \otimes \det \mathrm{H}^1(\mathbb{P}_2, \mathcal{F}_{s_c} \otimes \mathcal{G}_{s_u}).$$

On a également

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{P}_2, \mathcal{F}_{s_c} \otimes \mathcal{G}_{s_u}) = \oplus_{i=1}^k \oplus_{j=1}^l \mathrm{H}^q(\mathbb{P}_2, F_i^{m_i} \otimes G_j^{n_j})$$

pour $q = 0, 1$. Par conséquent, l'élément $(g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_l)$ appartenant à $G_{s_c} \times G_{s_u}$, agit sur $\mathcal{D}_{(s_c,s_u)}$ par multiplication avec

$$\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^l (\det g_i \cdot \det h_j)^{-h^0(\mathbb{P}_2, F_i \otimes G_j) + h^1(\mathbb{P}_2, F_i \otimes G_j)}.$$

Les faisceaux F_i, G_j ont le même polynôme de Hilbert réduit que $\mathcal{F}_{s_c}$ respectivement $\mathcal{G}_{s_u}$. Puisque les classes c et u sont orthogonales, on obtient $h^0(\mathbb{P}_2, F_i \otimes G_j) = h^1(\mathbb{P}_2, F_i \otimes G_j)$. Donc le stabilisateur du point (s_c, s_u) agit trivialement sur $\mathcal{D}_{(s_c,s_u)}$.$\square$

Le lemme de Kempf (lemme de descente, th. 2.3, [D-N]) implique l'existence d'un unique fibré inversible $\mathcal{D}_{c,u}$ sur $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u$ qui satisfait $\rho^*(\mathcal{D}_{c,u}) = \mathcal{D}_\Omega$. Mais $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u$ est un bon quotient de $\Omega_c \times \Omega_u$ par l'action du groupe $G_c \times G_u$, donc

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u, \mathcal{D}_{c,u}) = \mathrm{H}^0(\Omega_c \times \Omega_u, \mathcal{D}_\Omega)^{G_c \times G_u}.$$

On peut choisir une résolution (1.2) G_c-équivariante. La suite exacte (1.5) sera alors $G_c \times G_u$-équivariante. Il résulte que la section σ_Ω, bien déterminée à fonction inversible près, est $G_c \times G_u$-équivariante, et donc bien déterminée à une constante multiplicative près. On déduit l'existence d'une section $\sigma_{c,u} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u, \mathcal{D}_{c,u})$, bien déterminée à une constante multiplicative près.

Le fait que le fibré $\mathcal{D}_{c,u}$ et la section $\sigma_{c,u}$ satisfont la propriété d'universalité de l'énoncé résulte d'un argument classique ([LeP2], §2.13). Cela termine la preuve de la proposition 1.3.5.□

Lemme 1.3.9 *Le fibré inversible $\mathcal{D}_{c,u}$ sur $\mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u$ est isomorphe au fibré inversible $\mathcal{D}_u \boxtimes \mathcal{D}_c$.*

Preuve :

Prouvons que la restriction $\mathcal{D}_{c,s_u}$ du fibré $\mathcal{D}_{c,u}$ à $\mathrm{M}_c \times \{s_u\}$ est isomorphe au fibré $\mathcal{D}_u$ pour tout $s \in \mathrm{M}_u$. Soit G un faisceau sur $\mathbb{P}_2$ dans la classe du point s_u. Soit S une variété et $\mathcal{F}$ une famille plate de faisceaux semi-stables de classe $c \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$, paramétrée par S. On note $\varphi : S \to \mathrm{M}_c$ le morphisme modulaire associé à $\mathcal{F}$ et $\phi = \varphi \times s_u : S \to \mathrm{M}_c \times \mathrm{M}_u$ le morphisme modulaire associé à $\mathcal{F}, G$. D'après la propriété d'universalité on a

$$\varphi^*\mathcal{D}_{c,s_u} = \phi^*\mathcal{D}_{c,u} = \det pr_{1!}(\mathcal{F} \otimes pr_2^*(G))^{-1}.$$

Alors il y a un isomorphisme $\varphi^*\mathcal{D}_{c,s_u} \simeq \varphi^*\mathcal{D}_{c,u}$ pour tout couple $(S, \mathcal{F})$. On déduit que $\mathcal{D}_{c,s_u}$ et $\mathcal{D}_u$ sont isomorphes. Nous prouvons de la même manière que la restriction de $\mathcal{D}_{c,u}$ à $\{s_u\} \times \mathrm{M}_u$ est isomorphe au fibré $\mathcal{D}_c$ sur M_c. Les variétés M_u et M_c sont projectives et intègres. Le lemme suivant s'applique.

Lemme 1.3.10 ([M-F], p. 23, [Milne], §5, th. 5.1 et cor. 5.2) *Soit M une variété algébrique intègre, N une variété algébrique projective, et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $M \times N$. On suppose que la classe d'isomorphisme de la restriction de $\mathcal{L}$ à la fibre $\{m\} \times N$ est la même pour chaque $m \in M$. Alors $\mathcal{L}$ s'écrit $L_1 \boxtimes L_2$ pour deux faisceaux $L_1 \in \mathrm{Pic}\,(M)$, $L_2 \in \mathrm{Pic}\,(N)$.*

Du lemme et du calcul des restrictions du fibré $\mathcal{D}_{c,u}$ aux fibres on trouve $\mathcal{D}_{c,u} \simeq \mathcal{D}_u \boxtimes \mathcal{D}_c$. □

Cela prouve le point (i) du théorème 1.3.1. Les points (ii) et (iii) sont évidents. Le point (iv) résulte du lemme géométrique évident :

Lemme 1.3.11 *Soient M et N deux variétés projectives, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ des fibrés inversibles sur M respectivement N, et une section $\sigma \in \mathrm{H}^0(M \times N, \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E})$. On note $\sigma_m \in \Gamma(N, \mathcal{E})$ la restriction de σ à $\{m\} \times N$. On suppose que σ_m n'est pas identiquement nulle pour tout $m \in M$. Alors :*

i) La section σ produit un morphisme $D_{M,N} : \mathrm{H}^0(N, \mathcal{E})^* \to \mathrm{H}^0(M, \mathcal{D})$.

ii) La section σ produit une application $\Phi : M \to \mathbb{P}\mathrm{H}^0(N, \mathcal{E})$ définie par $m \mapsto [\sigma_m]$ qui vérifie $\Phi^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{D}$.

iii) L'application Φ induit sur les sections globales une application $\Phi^* : \mathrm{H}^0(N, \mathcal{E})^* \to \mathrm{H}^0(M, \mathcal{D})$. Alors $\Phi^* = D_{M,N}$.

iv) Si l'image du morphisme Φ n'est pas contenue dans un hyperplan (c'est-à-dire que les σ_m engendrent $\mathrm{H}^0(N, \mathcal{E})$), alors $D_{M,N}$ est injectif.

On applique le lemme pour $M = \mathrm{M}_c, N = \mathrm{M}_u, \mathcal{D} = \mathcal{D}_u, \mathcal{E} = \mathcal{D}_c, \sigma = \sigma_{c,u}$, lorsque σ_F n'est pas identiquement nulle pour tout $[F] \in \mathrm{M}_c$. □

Remarques 1.3.12 1) D'après le point i) du théorème 1.3.1, le fait que σ_F n'est pas identiquement nulle équivaut à : il existe $G \in \mathrm{M}_u$ tel que $h^0(F \otimes G) = h^1(F \otimes G) = 0$. Dans les situations considérées cela sera vrai pour tout $F \in \mathrm{M}_c$. Le Potier a montré cette affirmation si $2c_1^c = 0 \bmod r^c$, en utilisant l'existence d'une droite, ou bien d'une conique qui n'est pas de saut pour un faisceau stable générique F de classe c.

2) Dans la proposition 3.3 de [LeP5], pour une classe c donnée telle que l'espace M_c est non-vide, on montre l'existence de $u \in c^{\perp}$ de dimension 1 telle que $\sigma_{c,u} \neq 0$. La démonstration repose sur un théorème de Flenner, qui donne le comportement de la semi-stabilité par restriction aux courbes de degré élevé, et la version effective d'un résultat de Faltings.

1.4 Premiers résultats sur les faisceaux semi-stables de dimension 1

Nous allons étudier $\mathrm{M}_u = \mathrm{M}_{du}$, pour $\mathfrak{u} = (0, 1, 0)$. On définit $C_d = \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(d))$, l'espace des courbes de degré d dans $\mathbb{P}_2$. Pour un faisceau $G \in \mathrm{M}_{du}$, il existe une présentation

$$0 \to Q \xrightarrow{a} R \to G \to 0 \tag{1.7}$$

et $\det a \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \det R \otimes \det Q^{-1}) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(d))$ s'appelle l'équation du support schématique de G. Cela ne dépend pas, à une constante près, du choix de Q, R. On définit ainsi une application

$$\pi : \mathrm{M}_{d\mathrm{u}} \to C_d. \tag{1.8}$$

On considère la classe d'un point $\eta^2 = (0,0,1) \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. C'est une classe orthogonale à $u = d\mathrm{u}$. Dans la suite, nous allons étudier les fibrés $\mathcal{D}_c$ sur M_u, pour $\langle c, u\rangle = 0$. On peut écrire c sous la forme $r(c)[\mathcal{O}] - n\eta^2 \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. Par additivité, il suffit d'étudier $\mathcal{D}_{\eta^2}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{O}}$.

Proposition 1.4.1 *On a* $\pi^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{D}_{\eta^2}^{-1}$.

Preuve :
On note Ξ l'hypersurface universelle dans $C_d \times \mathbb{P}_2$ paramétrée par C_d. La proposition 2.8 de [LeP4] affirme que $\mathcal{D}_{\eta^2}^{-1} = \pi^*(\lambda_{\mathcal{O}_\Xi}(\eta^2))$ où

$$\lambda_{\mathcal{O}_\Xi}(\eta^2) = \det pr_{1!}(\mathcal{O}_\Xi \cdot pr_2^*(\eta^2)).$$

En partant de la résolution de $\mathcal{O}_\Xi$ sur $C_d \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \to \mathcal{O}(-1,-d) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\Xi \to 0$$

on obtient $\lambda_{\mathcal{O}_\Xi}(\eta^2) = \mathcal{O}(1)$ sur C_d. □

Soit $\mathcal{G}$ une famille de faisceaux G de dimension 1 paramétrée par une variété algébrique intègre S, et

$$\phi : S \to \mathrm{M}_{d\mathrm{u}}$$

le morphisme modulaire associé.

Corollaire 1.4.2 *On a* $\det \mathcal{G} = (\phi \circ \pi)^*(\mathcal{O}(1)) \boxtimes \mathcal{O}(d)$ *sur* $S \times \mathbb{P}_2$.

Preuve du corollaire :
On note $(\det \mathcal{G})_s$ la restriction de $\det \mathcal{G}$ à $\{s\} \times \mathbb{P}_2$ et $(\det \mathcal{G})_x$ la restriction de $\det \mathcal{G}$ à $S \times \{x\}$. D'après le lemme 1.3.10 il suffit de prouver que $(\det \mathcal{G})_s = \mathcal{O}(d)$ sur $\mathbb{P}_2$ et que $(\det \mathcal{G})_x = (\phi \circ \pi)^*(\mathcal{O}(1))$ sur S. On a évidemment $(\det \mathcal{G})_s = \mathcal{O}(d)$ car $\mathcal{G}$ est une famille de faisceaux de classe $c_1 = d$ sur $\mathbb{P}_2$ paramétrée par S. Considérons la résolution (1.1) pour $\mathcal{G}$. On note $\mathcal{Q}_x$, $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{G}_x$ les restrictions de $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, et respectivement $\mathcal{G}$ à $S \times \{x\}$. On a une suite exacte :

$$0 \to \underline{\mathrm{Tor}}_1^{S\times\mathbb{P}_2}(\mathcal{G}, pr_2^*\mathcal{O}_x) \to \mathcal{Q}_x \to \mathcal{R}_x \to \mathcal{G}_x \to 0.$$

Chacun de ces faisceaux a un support inclus dans $S \times \{x\}$, donc leur image directe supérieure $R^i pr_{1*}$ est nulle pour $i > 0$. Il résulte que

$$pr_{1!}(\mathcal{G} \cdot pr_2^*\mathcal{O}_x) = [pr_{1*}(\mathcal{G}_x)] - [pr_{1*}(\underline{\mathrm{Tor}}_1^{S\times\mathbb{P}_2}(\mathcal{G}, pr_2^*\mathcal{O}_x))] = [\mathcal{R}_x] - [\mathcal{Q}_x]$$

où on a identifié $\mathcal{Q}_x$ avec $pr_{1*}(\mathcal{Q}_x)$ et $\mathcal{R}_x$ avec $pr_{1*}(\mathcal{R}_x)$. Par la définition de $\mathcal{D}_{\eta^2}^{-1}$ on trouve :

$$\phi^*\mathcal{D}_{\eta^2}^{-1} = \phi^*\mathcal{D}_{[\mathcal{O}_x]}^{-1} = (\det \mathcal{Q}_x)^{-1} \otimes \det \mathcal{R}_x. \tag{1.9}$$

D'après la proposition il résulte que

$$\begin{aligned}(\det \mathcal{G})_s &= (\det \mathcal{Q}_x)^{-1} \otimes \det \mathcal{R}_x \\ &= \phi^*\mathcal{D}_{\eta^2}^{-1} \\ &= (\phi \circ \pi)^*(\mathcal{O}(1)).\square\end{aligned}$$

On définit le fibré inversible Θ sur M_u comme $\Theta = \mathcal{D}_{\mathcal{O}} = \det pr_{1!}(u)^{-1}$. Tout ce qu'on utilisera dans la suite est contenu dans la proposition suivante, extraite de [LeP3], chap.2 :

Proposition 1.4.3 ([LeP3]) *Le fibré Θ a une section canonique θ, unique à constante près, non identiquement nulle, qui s'annule aux points G tels que $h^0(\mathbb{P}_2, G) = h^1(\mathbb{P}_2, G) \neq 0$.*

Proposition 1.4.4 ([LeP3]) *Pour $d = 1, 2$, le morphisme π est un isomorphisme, et le fibré Θ est trivial. En conclusion, les espaces $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes r}(n))$ et $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n))$ s'identifient.*

Preuve :

Le fait que π est un isomorphisme dans ce cas est démontré dans [LeP3]. Plus précisément, l'inverse de π est donné de la manière suivante : pour $d = 1$, à une droite l on associe le faisceau $\mathcal{O}_l(-1)$, pour $d = 2$ et pour une conique C lisse, à C on associe le faisceau $\mathcal{O}_C(-a) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$ (a point de C), pour $d = 2$ et C décomposable en deux droites l_1 et l_2, à C on associe le faisceau $\mathcal{O}_{l_1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{l_2}(-1)$. Pour chacun de ces faisceaux on a $h^0 = h^1 = 0$. Il résulte que la section θ est partout non nulle sur $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$. Donc le fibré Θ est trivial. La conclusion résulte de la proposition 1.4.1, du fait que π est un isomorphisme et de la trivialité du fibré Θ. □

On déduit en corollaire :

Corollaire 1.4.5 *Pour $c = 2 - n\eta^2$ on a*

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)) = \mathrm{S}^n E^*$$

et

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{2\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(n)) = \mathrm{S}^n(\mathrm{S}^2 E^*).$$

On rappelle que $E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$.

1.5 Le cas $d = 1$, $c = (2, 0, 2 - n)$

On a construit un morphisme $\Phi : \mathrm{M}_c \to \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n)) = \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n))$ qui associe à $[F]$ la section σ_F dont le lieu des zéros est formé par les classes des faisceaux $[\mathcal{O}_l(-1)]$ (d'après la proposition 1.4.4) telles que $h^0(F(-1)|_l) = h^1(F(-1)|_l) \neq 0$. D'après la remarque 0.6.3, Φ est exactement le morphisme γ de Barth introduit au paragraphe 0.6. L'identification des deux espaces projectifs est une conséquence de la conclusion de la proposition 1.4.4. On montre au deuxième chapitre que

$$\gamma^* : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n))^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D})$$

est un isomorphisme pour $n \leq 19$. La conjecture est donc vraie pour $c = (2, 0, c_2 = n)$ et $u = \mathfrak{u} = (0, 1, 0)$.

Chapitre 2

Sections du fibré déterminant sur l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sur le plan projectif

On rappelle que M_n désigne l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2, et classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$ sur le plan projectif complexe et que M_n est une variété projective irréductible de dimension $4n - 3$.

Soit F un faisceau semi-stable de rang 2, et classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$ sur le plan projectif. On dit que la droite H est de saut pour F si la restriction de F à H n'est pas triviale (comme dans le paragraphe 0.6). Au même paragraphe on a construit un faisceau cohérent Θ sur le plan projectif dual, dont le support est l'ensemble γ_F des droites de saut pour F. L'application qui associe à la classe de F la courbe γ_F définit un morphisme γ appelé morphisme de Barth $F \mapsto \gamma_F$:

$$\gamma : \mathrm{M}_n \to \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n))) = \mathbb{P}_N$$

Le fibré déterminant de Donaldson sur M_n, noté $\mathcal{D}$, est isomorphe à l'image réciproque $\gamma^*(\mathcal{O}(1))$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$ par γ . On en déduit un morphisme non nul γ^* sur les espaces de sections globales :

$$\gamma^* : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$$

si on tient compte du fait que $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}(1)) \simeq \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^*$.

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.0.1 *Si* $2 \leq n = c_2 \leq 19$, *l'application linéaire canonique*

$$\gamma^* : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_n, \mathcal{D})$$

est un isomorphisme.

Cet énoncé répond partiellement à une question posée par A. Beauville, selon laquelle γ^* serait un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il fournit des exemples pour la conjecture 1.3.2.

Remarquons tout d'abord que, comme les deux membres sont des représentations de $\mathrm{SL}(3)$, et que le premier est une représentation irréductible, le morphisme est injectif, puisque équivariant et non nul. Il suffit donc de calculer la dimension du membre de droite pour conclure. Il suffit en outre de se placer dans le cas $n \geq 3$, puisque pour $n = 0$, l'espace M_n est réduit à un point, pour $n = 1$, il est vide, et pour $n = 2$, γ est un isomorphisme [Barth77].

La structure de la démonstration est la suivante. On se fixe un entier positif l. On introduit la notion de système cohérent, qui consiste à considérer en même temps que le faisceau F, un sous-espace vectoriel Γ de son espace de sections $\mathrm{H}^0(F)$. La dimension de Γ donne l'ordre du système cohérent. À l'aide de résultats de Min He ([He]) sur les espaces de modules de systèmes cohérents $(\Gamma, F(l))$ d'ordre 1, dont le faisceau sous-jacent est de rang 2, et de classes de Chern $c_1 = 2l, c_2 = n + l^2$, on se ramène au paragraphe 2.2, pour n compris entre $l(l-1)$ et $(l+1)(l+2)$, à l'étude de l'espace des sections d'un fibré vectoriel $\mathrm{S}^l\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d}$ sur un ouvert U du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ des sous-schémas finis de longueur $m = n + l^2$. Si $\Xi \subset \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ est le sous-schéma universel, $\mathcal{I}$ est le faisceaux d'idéaux associé, $pr_1 : \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2 \to \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$, $pr_2 : \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ sont les deux projections, le faisceau algébrique cohérent $\mathcal{R}$ est défini par $\mathcal{R} = R^1pr_{1*}(\mathcal{I}(2l-3))$. Ce faisceau est localement libre en dehors du fermé de Brill-Noether B des schémas $Z \in \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ tels que $h^0(I_Z(2l-3)) \neq 0$. On note U l'ouvert complémentaire de B. La codimension de B est supérieure ou égale à 2, donc les résultats de cohomologie locale nous permettent de passer de $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ à U pour le calcul d'un espace de sections. Le fibré $\mathfrak{d}$ est le fibré déterminant sur le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$. On désigne par E l'espace de sections $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$. Au paragraphe 2.3 on montre que $\mathrm{S}^l\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d}$ admet sur U une résolution par un complexe $K^i = \Lambda^{-i}\mathrm{S}^kE \otimes \mathrm{S}^{l+i}(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}$ pour $i = 0, \ldots, l$, où $k = 2l-3$, et $\mathcal{O}(k)^{[m]}$ est défini par $\mathcal{O}(k)^{[m]} = pr_{1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes pr_2^*(\mathcal{O}(k)))$. Par conséquent, la suite spectrale $E_1^{p,q} = \mathrm{H}^q(K^{-p})$ admet pour aboutissement en degré 0 l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^l\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d})$. Le tableau suivant représente les termes $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale :

$\mathrm{H}^l(\Lambda^l\mathrm{S}^kE\otimes\mathfrak{d})$					$q = l$
$\mathrm{H}^{l-1}(\Lambda^l\mathrm{S}^kE\otimes\mathfrak{d})$	$\mathrm{H}^{l-1}(\Lambda^{l-1}\mathrm{S}^kE\otimes L^{[m]}\otimes\mathfrak{d})$				$q = l-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			$\vdots$
$\mathrm{H}^1(\Lambda^l\mathrm{S}^kE\otimes\mathfrak{d})$	$\mathrm{H}^1(\Lambda^{l-1}\mathrm{S}^kE\otimes L^{[m]}\otimes\mathfrak{d})$	$\cdots$	$\cdots$	$\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^lL^{[m]}\otimes\mathfrak{d})$	$q = 1$
$\mathrm{H}^0(\Lambda^l\mathrm{S}^kE\otimes\mathfrak{d})$	$\mathrm{H}^0(\Lambda^{l-1}\mathrm{S}^kE\otimes L^{[m]}\otimes\mathfrak{d})$	$\cdots$	$\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^{l-1}L^{[m]}\otimes\mathfrak{d})$	$\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^lL^{[m]}\otimes\mathfrak{d})$	$q = 0$
$p = -l$	$p = -l+1$	$\ldots$	$p = -1$	$p = 0$	

où $L^{[m]} = (\mathcal{O}(k)^{[m]})$.

Nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 2.0.2 *On a sur* $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ *:*

i) $\mathrm{H}^0(\mathfrak{d}) = \mathrm{S}^mE$ *et* $\mathrm{H}^q(\mathfrak{d}) = 0$ *pour* $q > 0$ *;*

ii) $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(k)^{[m]}\otimes\mathfrak{d}) = \mathrm{S}^{2l-2}E\otimes\mathrm{S}^{m-1}E$ *et* $\mathrm{H}^q(\mathcal{O}(k)^{[m]}\otimes\mathfrak{d}) = 0$ *pour* $q > 0$ *;*

iii) $\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(k)^{[m]})\otimes\mathfrak{d}) = \dim(\mathrm{S}^{2k+1}E\otimes\mathrm{S}^{m-1}E \oplus \mathrm{S}^2(\mathrm{S}^{k+1}E)\otimes\mathrm{S}^{m-2}E) - \dim(\mathrm{S}^{2k+2}E\otimes\mathrm{S}^{m-3}E)$ *et* $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(k)^{[m]})\otimes\mathfrak{d}) = 0$ *;*

iv)

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]})\otimes\mathfrak{d}) &= \dim \mathrm{S}^{10}E\otimes\mathrm{S}^{n+8}E + \dim \mathrm{S}^7E\otimes\mathrm{S}^4E\otimes\mathrm{S}^{n+7}E - \dim \mathrm{S}^{10}E\otimes E\otimes\mathrm{S}^{n+7}E + \\
&+ \dim \mathrm{S}^{n+6}E(\dim \mathrm{S}^{6,6}E + \dim \mathrm{S}^{7,4,1}E + \dim \mathrm{S}^{8,2,2}E + \dim \mathrm{S}^{6,4,2}E + \dim \mathrm{S}^{4,4,4}E) \\
&= 278n^2 + 4644n + 19426.
\end{aligned}$$

Le (i) est une conséquence du théorème de Kawamata-Viehweg ([C-K-M]), expliquée dans le lemme 2.3.1. Le (ii) fait l'objet du troisième chapitre. On démontre (iii) au paragraphe 2.4, après avoir introduit une description appropriée de l'ouvert $\mathrm{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$ du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$, formé par les schémas avec au plus un point multiple, qui soit double. Le point le plus délicat reste (iv), et il constitue l'objet de la dernière partie. Ce groupe est obtenu comme noyau d'un morphisme de représentations de $\mathrm{SL}(3)$, que nous expliciterons.

Ces données suffisent pour conclure dans les cas $l = 2, 3$. On est ainsi en mesure de calculer la dimension de l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{D})$, dans le cas où $n \leq 19$. Pour étendre ce résultat au cas $n \geq 20$, on a besoin d'étendre le théorème d'annulation de la cohomologie supérieure des fibrés $\mathrm{S}^l(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}$ sur le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ et d'améliorer la méthode utilisée pour le calcul de $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$, afin de réussir à calculer $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^l(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$, pour $l \geq 3$.

2.1 Préliminaires

Notations : Le corps de base est $\mathbb{C}$. Pour un espace vectoriel V nous noterons $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V et $\mathbb{P}_\bullet(V)$ l'espace projectif de Grothendieck des espaces vectoriels quotients de dimension 1.

2.1.1 Calculs d'invariants

On considère un ensemble fini I muni d'une action transitive d'un groupe fini G. Soit Y une variété sur laquelle G agit à gauche. Considérons pour chaque $i \in I$ un fibré L_i sur Y de façon qu'on ait un isomorphisme canonique $h_g : L_{g^{-1}(i)} \simeq g^*(L_i)$ pour tout $i \in I$ et $g \in G$, et pour tous $g, g' \in G$, $h_g \circ h_{g'} = h_{gg'}$. En particulier pour tout g dans $\mathrm{Stab}\,\{i\}$, le stabilisateur de i, on a $g^*(L_i) \simeq L_i$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_{g^{-1}(i)} & \xrightarrow{h_g} & L_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

On considère les espaces vectoriels de sections $M_i = \mathrm{H}^0(L_i)$, et la somme directe $M = \oplus_{i \in I} M_i$ (espace vectoriel des familles $s = (s_i)_i$ avec $s_i \in M_i$).

L'isomorphisme h_g induit un isomorphisme $\lambda_g : M_i \to M_{g(i)}$ en posant pour $x \in Y$

$$\lambda_g(s)(x) = h_g s(g^{-1}(x)).$$

On peut facilement vérifier que $\lambda_{gg'} = \lambda_g \lambda_{g'}$. En particulier, ceci fournit une action à gauche du stabilisateur de i sur M_i. On définit aussi une action à gauche de G sur M en posant $g(s)_i = \lambda_g(s_{g^{-1}(i)})$. Le lemme suivant utilisé au paragraphe 2.4 est l'ingrédient essentiel des calculs d'invariants sur X^m :

Lemme 2.1.1 *Soit $i \in I$. La projection $pr_i : M \to M_i$ induit un isomorphisme $M^G \to M_i^{\mathrm{Stab}\,\{i\}}$.*

Preuve du lemme :

D'après la définition de l'action, l'image par pr_i des invariants de M par G est contenue dans le sous-espace des invariants de M_i par $\mathrm{Stab}\,\{i\}$.

Montrons l'injectivité : si $u \in M^G$, pour tout élément g tel que $g(i) = j$, on a $u_j = \lambda_g(u_i)$, ce qui montre que u est déterminé par u_i.

Montrons la surjectivité : soit $v \in M_i$, invariant par $\mathrm{Stab}\,\{i\}$. On définit $u \in M$ par la formule $u_j = \lambda_g(v)$ où g est un élément tel que $g(i) = j$. Il faut bien sr vérifier que ceci ne dépend pas du choix de g ; mais ceci résulte de l'hypothèse que v est invariant. En effet, si g' est un autre élément de G tel que $g'(i) = j$, l'élément $g^{-1}g'$ appartient à $\mathrm{Stab}\,\{i\}$ et on a $\lambda_{g'}(v) = \lambda_g \lambda_{g^{-1}g'}(v) = \lambda_g(v)$. Il est clair que l'élément u construit est invariant par G.$\square$

2.1.2 Le gradué d'un produit tensoriel

On considère deux faisceaux algébriques $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur une variété algébrique Z, munis de filtrations décroissantes $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{G}_j$, telles que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$. On pose $\mathrm{gr}_i\mathcal{F} = \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}$. Il s'agit de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.1.2 *Si*

$$\underline{\mathrm{Tor}_1}(\mathrm{gr}_i(\mathcal{F}), \mathrm{gr}_j(\mathcal{G})) = 0$$

pour tous i et j alors pour la filtration associée sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ on a un isomorphisme canonique

$$\oplus_{i+j=k}\mathrm{gr}_i\mathcal{F} \otimes \mathrm{gr}_j\mathcal{G} \to \mathrm{gr}_k(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}).$$

Preuve :

Le problème étant local on peut se placer sur un ouvert affine, spectre d'un anneau A. La donnée de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur $\mathrm{Spec}\, A$ est équivalente à la donnée de deux A-modules filtrés M et N. On se ramène à montrer que si

$$\mathrm{Tor}_1(\mathrm{gr}_i M, \mathrm{gr}_j N) = 0$$

pour tous i et j alors pour la filtration naturelle de $M \otimes N$ on a un isomorphisme canonique

$$\oplus_{i+j=k}\mathrm{gr}_i M \otimes \mathrm{gr}_j N \to \mathrm{gr}_k(M \otimes N).$$

On rappelle que la filtration naturelle sur $M \otimes N$ est donnée par $\mathrm{F}^k(M \otimes N) = \oplus_{i+j=k}\mathrm{Im}(M_i \otimes N_j)$. Ici l'hypothèse permet d'écrire $\mathrm{F}^k(M \otimes N) = \oplus_{i+j=k} M_i \otimes N_j$. On a évidemment un morphisme canonique

$$\oplus_{i+j=k}\mathrm{gr}_i M \otimes \mathrm{gr}_j N \to \mathrm{gr}_k(M \otimes N)$$

dont il s'agit de vérifier que c'est un isomorphisme. On raisonne par récurrence sur k. C'est vrai pour $k = 0$ par la proposition 6, page 8, chap. III-1 de [Bourbaki]. On a clairement pour $\ell > k$

$$\mathrm{gr}_k(M \otimes N) = \mathrm{gr}_k(M/M_\ell \otimes N)$$

de sorte que l'on peut supposer en remplaçant au besoin M par M/M_ℓ que la filtration de M est finie. On écrit la suite exacte

$$0 \to N_1 \to N \to \mathrm{gr}_0 N \to 0$$

et si on tensorise par M il résulte de l'hypothèse que $\mathrm{Tor}_1(M, \mathrm{gr}_0 N) = 0$. On a alors une suite exacte

$$0 \to M \otimes N_1 \to M \otimes N \to M \otimes \mathrm{gr}_0 N \to 0.$$

De plus, la filtration induite sur $M \otimes N_1$ est bien (au décalage d'indice près) la filtration obtenue à partir du produit tensoriel. On a alors un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \oplus_{i+j=k, j\geq 1}\mathrm{gr}_i M \otimes \mathrm{gr}_j N \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{i+j=k}\mathrm{gr}_i M \otimes \mathrm{gr}_j N \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{gr}_k M \otimes \mathrm{gr}_0 N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{gr}_{k-1}(M \otimes N_1) \arrow[r] & \mathrm{gr}_k(M \otimes N) \arrow[r] & \mathrm{gr}_k(M \otimes \mathrm{gr}_0(N)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à M et N_1 (qui satisfont bien entendu aux mêmes hypothèses que M et N) montre que la première flèche verticale est un isomorphisme ; la dernière l'est par l'hypothèse

$$\mathrm{Tor}_1(\mathrm{gr}_i(M), \mathrm{gr}_0(N)) = 0.$$

Donc la flèche verticale du milieu est un isomorphisme.□

On peut vérifier que dans les conditions dans lesquelles on va l'appliquer, les hypothèses de ce lemme sont satisfaites :

Lemme 2.1.3 *Soient X et Y deux variétés algébriques munies des faisceaux algébriques $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Alors*

$$\underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_Y}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{G}) = 0.$$

Preuve :
Le problème étant local on peut travailler sur des ouverts de $X \times Y$ qui sont de la forme $\mathrm{Spec}\, A \times \mathrm{Spec}\, B$ pour A et B deux algèbres de type fini sur le corps de base K. La donnée de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur $\mathrm{Spec}\, A$, respectivement $\mathrm{Spec}\, B$, est équivalente à la donnée d'un A-module M et un B-module N. On se ramène à prouver l'annulation de

$$\mathrm{Tor}_1^{A \otimes_K B}(M \otimes_K B, A \otimes_K N) = 0.$$

À cette fin on considère $Q^\cdot$ une résolution projective de M. Alors $Q^\cdot \otimes_K B$ est une résolution projective pour $M \otimes_K B$. On tensorise cette résolution par $A \otimes_K N$. Le complexe obtenu est en fait $Q^\cdot \otimes_K N$ qui est exact.□

2.1.3 Représentations irréductibles de $\mathrm{SL}(E)$

Fixons d'abord quelques notations. Soit E un espace vectoriel de dimension r. Un *diagramme de Young* est une configuration de boîtes associée à une suite décroissante $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_l > 0$ d'entiers, avec λ_i boîtes dans la i-ème colonne, les colonnes étant alignées de gauche à droite. Un *tableau de Young* est un diagramme de Young muni d'une numérotation des cases $(i,j)_{1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq \lambda_i}$.

Soit $d = |\lambda| := \sum_i \lambda_i$ le nombre total de boîtes. un tel tableau de Young est associée une représentation irréductible de $G = \mathrm{SL}(E)$ de la manière suivante : on considère l'action naturelle de $\mathfrak{S}_d$ sur $E^{\otimes d}$ par permutation des facteurs, le sous-groupe P_λ qui laisse invariantes les colonnes du tableau de Young, et le sous-groupe Q_λ qui laisse invariantes les lignes. Alors, si on pose $a_\lambda = \sum_{g \in P_\lambda} g$ et $b_\lambda = \sum_{g \in Q_\lambda} \mathrm{sgn}(g) g$ (les sommes sont prises dans l'algèbre du groupe G), la représentation $\mathrm{S}^\lambda E$ est définie par

$$\mathrm{S}^\lambda(E) = b_\lambda a_\lambda(E^{\otimes d}).$$

Le théorème 6.3 [F-H], page 77, nous donne la dimension de cette représentation :

$$\dim \mathrm{S}^\lambda E = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}$$

si $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r \geq 0$ et 0 si $\lambda_{r+1} \neq 0$.

Une autre interprétation, via le théorème de Bott, est obtenue en considérant la variété $D(E) = Drap(E)$ des drapeaux complets $0 \subset \mathrm{F}_r \subset \mathrm{F}_{r-1} \subset \ldots \subset \mathrm{F}_1 = E$, avec $\dim \mathrm{F}_i = r - i + 1$, puis sur $D(E)$ les fibrés Q_i de rang 1 définis par les quotients canoniques $Q_i = \mathrm{F}_i / \mathrm{F}_{i+1}$. Alors si λ est un tableau de Young, la représentation

$$\mathrm{H}^0(D(E), Q_1^{\lambda_1} \otimes \ldots \otimes Q_r^{\lambda_r})$$

est une représentation irréductible (et les autres groupes de cohomologie s'annulent, par [Dema], [Bott]). C'est la représentation $\mathrm{S}^\lambda(E)$.

On se servira pour le calcul de $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ des résultats suivants, qui constituent un court résumé de l'étude présentée dans [F-H].

Étant donnée une représentation V de $\mathrm{SL}(3)$ (ce qui revient au même que la donnée d'une représentation de son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(3)$, puisque $\mathrm{SL}(3)$ est un groupe de Lie connexe et simplement connexe : [F-H],page 109), on connaît sa décomposition en sous-représentations irréductibles . On étudie pour cela l'ensemble de ses poids, qui sont les valeurs propres pour l'action du sous-espace $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(3)$ des matrices diagonales sur V. Ces valeurs propres sont des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$. Explicitement on a

$$\mathfrak{h} = \{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} : a_1 + a_2 + a_3 = 0 \}$$

et on peut donc écrire $\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}[L_1] \oplus \mathbb{C}[L_2] \oplus \mathbb{C}[L_3] / (L_1 + L_2 + L_3)$.

Les poids $L_i - L_j \in \mathfrak{h}^*$ sont spéciaux, car ils sont les poids de la représentation adjointe, et ils sont appelés *racines*. Les racines engendrent un réseau à l'intérieur de $\mathfrak{h}^*$, noté Λ_R. Les poids α d'une représentation de dimension finie quelconque se trouvent sur le réseau $\Lambda_W \subset \mathfrak{h}^*$ engendré par les L_i et sont congrus modulo Λ_R. En choisissant un ordre sur les L_i, par exemple $L_1 > L_2 > L_3$, on peut séparer les 6 racines en 3 racines positives : $L_1 - L_2, L_1 - L_3, L_2 - L_3$ et 3 négatives. Les espaces propres correspondants aux racines positives, $\mathfrak{g}_{L_1-L_2}$, $\mathfrak{g}_{L_1-L_3}$, et $\mathfrak{g}_{L_2-L_3}$, sont engendrés par les matrices $E_{i,j} = (e_{kl})$, avec un seul terme non nul $e_{ij} = 1$ au-dessus de la diagonale. Une représentation V de SL(3) étant donnée, il existe un vecteur propre pour $\mathfrak{h}$, $v \in V$, qui est annulé par $E_{1,2}$, $E_{1,3}$, et $E_{2,3}$, appelé *vecteur de plus haut poids*. Le poids correspondant est appelé *poids dominant*. Pour une représentation irréductible le vecteur de plus haut poids est unique à multiplication par des scalaires près.

L'ensemble des poids est préservé par l'action du groupe des symétries par rapport aux droites engendrés par les L_i (le groupe de Weyl). On en déduit qu'un poids dominant doit se trouver dans le $(\frac{1}{6})$-plan délimité par L_1 et $L_1 + L_2 = -L_3$, donc il doit être de la forme $aL_1 + bL_2 + cL_3$ avec $a \geq b \geq c$.

La prop. 12.11 [F-H] nous assure que la sous-représentation W de V engendrée par les images d'un vecteur v de poids $aL_1 + bL_2 + cL_3$ par application successive des trois opérateurs $E_{1,2}$, $E_{1,3}$, et $E_{2,3}$ est irréductible. C'est la représentation $\mathrm{S}^{a,b,c}E$, où E est la représentation standard. On la note aussi $\mathrm{S}^\lambda E$ où λ est la partition (a, b, c). Comme c est superflu puisque $L_1 + L_2 + L_3 = 0$, on préfère l'écriture réduite $\mathrm{S}^\lambda E$ avec $\lambda = (a-c, b-c)$.

Maintenant, la formule de Pieri permet de calculer le produit tensoriel d'une représentation irréductible et d'une puissance symétrique. On a en effet

$$\mathrm{S}^\lambda E \otimes \mathrm{S}^p E = \sum_{\substack{\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i-1} \\ |\mu| = |\lambda| + p}} \mathrm{S}^\mu E.$$

Par exemple

$$\mathrm{S}^8 E \otimes \mathrm{S}^4 E = \mathrm{S}^{12} E + \mathrm{S}^{11,1} E + \mathrm{S}^{10,2} E + \mathrm{S}^{9,3} E + \mathrm{S}^{8,4} E. \tag{2.1}$$

Par une analyse directe on peut trouver la décomposition de n'importe quelle représentation . Par exemple, d'après le programme Lie [LiE], la décomposition du pléthysme $\mathrm{S}^3(\mathrm{S}^4 E)$ est donnée par :

$$\mathrm{S}^3(\mathrm{S}^4 E) = \mathrm{S}^{12} E + \mathrm{S}^{10,2} E + \mathrm{S}^{9,3} E + \mathrm{S}^{8,4} E + \mathrm{S}^{6,6} E + \mathrm{S}^{7,4,1} + \mathrm{S}^{8,2,2} E + \mathrm{S}^{6,4,2} E + \mathrm{S}^{4,4,4} E. \tag{2.2}$$

2.1.4 Contractions

Proposition 2.1.4 *Soit F un espace vectoriel. Soient a et b deux entiers positifs, tels que $a \geq b$. Alors le morphisme canonique (appelé par [F-H] morphisme de contraction, p.83)*

$$c : \mathrm{S}^a F \otimes \mathrm{S}^b F \to \mathrm{S}^{a+1} F \otimes \mathrm{S}^{b-1} F$$

défini par $y \otimes x_1 \cdots x_b \mapsto \sum_i y x_i \otimes x_1 \cdots \check{x}_i \cdots x_b$ est surjectif, de noyau $\mathrm{S}^{a,b}F$.

Preuve :
À cause de la décomposition de Pieri en somme directe de facteurs irréductibles, il suffit de montrer la surjectivité. Il suffit encore de montrer que l'image de c contient les tenseurs de la forme $x^{a+1} \otimes y^{b-1}$. Mais cela résulte des formules

$$c(x^a \otimes xy^{b-1}) = x^{a+1} \otimes y^{b-1} + (b-1)x^a y \otimes xy^{b-2},$$
$$c(x^{a-1}y \otimes x^2 y^{b-2}) = 2x^a y \otimes xy^{b-2} + (b-2)x^{a-1}y^2 \otimes x^2 y^{b-3},$$
$$c(x^{a-2}y^2 \otimes x^3 y^{b-3}) = 3x^{a-1}y^2 \otimes x^2 y^{b-3} + (b-3)x^{a-2}y^3 \otimes x^3 y^{b-2}, \ldots,$$
$$c(x^{a-b+1}y^{b-1} \otimes x^b) = bx^{a-b+2}y^{b-1} \otimes x^{b-1}. \square$$

2.1.5 Le noyau et le conoyau du morphisme ν

Le morphisme ν est le morphisme canonique

$$\nu : \mathrm{S}^3(\mathrm{S}^4 E) \to \mathrm{S}^8 E \otimes \mathrm{S}^4 E$$

induit par l'application linéaire $stu \mapsto st \otimes u + su \otimes t + ut \otimes s$, où $s, t, u \in \mathrm{S}^4 E$.

Lemme 2.1.5 *Le morphisme ν n'est ni injectif, ni surjectif. Son conoyau est $\mathrm{S}^{11,1}E$ et son noyau est isomorphe à*

$$\mathrm{S}^{6,6}E + \mathrm{S}^{7,4,1}E + \mathrm{S}^{8,2,2}E + \mathrm{S}^{6,4,2}E + \mathrm{S}^{4,4,4}E.$$

Preuve du lemme :

En tenant compte des décompositions (2.1), (2.2), il suffit de prouver que la restriction de ν à $\mathrm{S}^{12}E + \mathrm{S}^{10,2}E + \mathrm{S}^{9,3}E + \mathrm{S}^{8,4}E$ à valeurs dans $\mathrm{S}^{12}E + \mathrm{S}^{10,2}E + \mathrm{S}^{9,3}E + \mathrm{S}^{8,4}E$ est bijective. Soit V_1 l'espace des vecteurs propres de poids $8L_1 + 4L_2$ dans $\mathrm{S}^{12}E$ et de même V_2, V_3, V_4 dans $\mathrm{S}^{10,2}E$, $\mathrm{S}^{9,3}E$, $\mathrm{S}^{8,4}E$. D'après [F-H] $\dim V_i \geq 1$. Puisque par l'application ν, le sous-espace V_i est envoyé dans le sous-espace V_i, il suffit de prouver que :

a) $\dim V_i = 1$

b) ν est bijective sur $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.

On regarde les poids de S^4E. Ils sont donnés par des sommes de 4 poids de E, soit : $4L_i$, $3L_i + L_j$, $2L_i + 2L_j$, $2L_i + L_j + L_k$, avec i, j, k deux à deux distincts et variant de 1 à 3. Les poids de $\mathrm{S}^3(\mathrm{S}^4E)$ sont donnés par des sommes de 3 poids α, β, γ de S^4E. On écrit $\alpha + \beta + \gamma$ sous la forme $mL_1 + nL_2 + pL_3$ avec $m + n + p = 12$. Si on veut obtenir $\alpha + \beta + \gamma = 8L_1 + 4L_2$ on a $m - p = 8$, $n - p = 4$ donc $m + n - 2p = m + n + p = 12$ donc $p = 0$. On ne se sert donc pas des poids qui font apparaître L_3. Il y a exactement 4 façons d'obtenir $8L_1 + 4L_2$:

$4L_1 + 4L_1 + 4L_2$ qui correspond au vecteur propre $\omega_1 = (e_1^4)^2(e_2^4)$,

$4L_1 + 3L_1 + L_2 + 3L_2 + L_1$ qui correspond au vecteur propre $\omega_2 = (e_1^4)(e_1^3e_2)(e_1e_2^3)$,

$4L_1 + 2L_1 + 2L_2 + 2L_1 + 2L_2$ qui correspond au vecteur propre $\omega_3 = (e_1^4)(e_1^2e_2^2)^2$, et

$3L_1 + L_2 + 3L_1 + L_2 + 2L_1 + 2L_2$ qui correspond au vecteur propre $\omega_4 = (e_1^3e_2)^2(e_1^2e_2^2)$.

Cela prouve a). On vérifie que $\nu(\omega_i)$ sont indépendants. Cela prouve b). □

Corollaire 2.1.6 *Le morphisme $\widetilde{\nu} : \mathrm{S}^3(\mathrm{S}^4E) \otimes \mathrm{S}^{m-3}E \to \mathrm{S}^8E \otimes \mathrm{S}^4E \otimes \mathrm{S}^{m-3}E$ défini par $\widetilde{\nu} = \nu \otimes id$ n'est ni injectif, ni surjectif. Son conoyau est $\mathrm{S}^{11,1}E \otimes \mathrm{S}^{m-3}E$ et son noyau est isomorphe à*

$$(\mathrm{S}^{6,6}E + \mathrm{S}^{7,4,1} + \mathrm{S}^{8,2,2}E + \mathrm{S}^{6,4,2}E + \mathrm{S}^{4,4,4}E) \otimes \mathrm{S}^{m-3}E$$

Preuve du corollaire :

Comme $\widetilde{\nu} = \nu \otimes id$, par le lemme 2.1.5 on obtient le résultat.□

2.2 Systèmes cohérents

Le but de cette section est de montrer comment on peut ramener le calcul du nombre de sections du fibré déterminant de Donaldson à un calcul de sections d'un faisceau localement libre sur un ouvert du schéma de Hilbert. La méthode repose sur un résultat de Min He, qui l'utilisait pour calculer les nombres de Donaldson [He]. On commence par quelques généralités sur les systèmes cohérents.

2.2.1 Systèmes cohérents a–semi-stables

On désigne par $K(\mathbb{P}_2)$ l'algèbre de Grothendieck des classes de faisceaux algébriques cohérents sur $\mathbb{P}_2$, ou ce qui revient au même, des classes de fibrés vectoriels algébriques sur $\mathbb{P}_2$. Cette algèbre est engendrée par la classe η du faisceau structural d'une droite. En tant que groupe abélien, elle est isomorphe à $\mathbb{Z}^3$, un isomorphisme étant donné par le rang r, la classe de Chern c_1 et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ. Elle est munie de la forme quadratique entière non dégénérée définie par

$$2r\chi + c_1^2 - r^2.$$

La notion d'orthogonalité utilisée par la suite est relative à cette forme quadratique.

Une classe de Grothendieck $a \in K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$ est dite *positive* si le polynôme de Hilbert de a est positif. Étant donné un faisceau algébrique cohérent F sur $\mathbb{P}_2$, on désigne par $c(F)$ la classe de Grothendieck de F dans $K(\mathbb{P}_2)$.

Définition 2.2.1 *Un système cohérent sur $\mathbb{P}_2$ est un couple $\Lambda = (\Gamma, F)$ où F est un faisceau cohérent, et Γ un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0(F)$. L'ordre du système cohérent est la dimension de l'espace vectoriel Γ.*

Soit $a \in K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$ une classe de Grothendieck strictement positive. un système $\Lambda = (\Gamma, F)$ on associe la classe de Grothendieck $c_a(\Lambda) \in K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$ définie par

$$c_a(\Lambda) = \dim \Gamma \cdot a + c(F).$$

La catégorie des systèmes cohérents n'est pas une catégorie abélienne, mais elle se plonge dans une catégorie abélienne (la catégorie des systèmes algébriques) qui a suffisamment d'injectifs. On ne considère ici que des systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F)$ dont le faisceau F sous-jacent est de rang $r > 0$. Ce rang sera aussi appelé le rang du système cohérent.

Définition 2.2.2 *On dit qu'un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, F)$ est a–semi-stable si*

- (i) *le faisceau F est sans torsion ;*
- (ii) *pour tout sous-faisceau cohérent $F' \subset F$ de rang $r' > 0$ on a dans $K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$:*

$$\frac{c_a(\Lambda')}{r'} \leq \frac{c_a(\Lambda)}{r}.$$

où Λ' est le système cohérent $\Lambda' = (\Gamma', F')$ défini par $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(F')$.

Dans le cas particulier où c est de rang 2, et $\dim \Gamma = 1$, seul cas utile dans la suite, l'inégalité (ii) signifie que pour tout sous-faisceau cohérent $F' \subset F$ de rang 1 on a

$$c(F') \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(c(F) - a) & \text{si } \Gamma \subset \mathrm{H}^0(F') \\ \\ \frac{1}{2}(c(F) + a) & \text{sinon} \end{cases}$$

2.2.2 L'espace de modules $Syst_a(c, k)$

Soit $c \in K(\mathbb{P}_2)$ une classe de Grothendieck fixée et k un entier ≥ 0 ; il existe un espace de modules grossier de systèmes cohérents a–semi-stables $\Lambda = (\Gamma, F)$ tels que $c(F) = c$, et $\dim \Gamma = k$: c'est une variété projective qui sera notée $Syst_a(c, k)$. Lorsque a varie, la structure de l'espace de modules grossier $Syst_a(c, k)$ change au passage de certaines valeurs de a appelées valeurs critiques.

2.2.3 Valeurs critiques

Soit F un faisceau algébrique cohérent de rang 2, de classes de Chern c_1 et c_2 sur le plan projectif. On désigne par η la classe dans $K(\mathbb{P}_2)$ du faisceau structural d'une droite. Ainsi, les faisceaux considérés ont pour classe de Grothendieck

$$c(F) = 2 + c_1\eta + (\frac{c_1(c_1+1)}{2} - c_2)\eta^2.$$

Soit $l > 0$ un entier, fixé dans toute la suite. Les faisceaux cohérents F de rang $r = 2$ et de classes de Chern $c_1 = 2l$, et $c_2 = n + l^2$ ont alors pour classe de Grothendieck

$$c(l) = 2 + 2l\eta + (l(l+1) - n)\eta^2.$$

On considère l'espace de modules $S_a = Syst_a(c(l), 1)$ des classes de S-équivalence de systèmes cohérents a–semi-stables $\Lambda = (\Gamma, F)$, d'ordre 1, où F est un faisceau cohérent de classe de Grothendieck $c(F) = c(l)$. Si cet espace de modules est non-vide, une section de F donne une inclusion du faisceau trivial dans F, et donc l'inégalité

$$0 < a \leq c(l) - 2 = 2l\eta + (l(l+1) - n)\eta^2.$$

Définition 2.2.3 *Les valeurs critiques pour la famille d'espaces de modules de systèmes cohérents S_a sont les classes $a \in K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$ pour lesquelles il existe des systèmes cohérents strictement semi-stables relativement à a.*

Les valeurs critiques sont en nombre fini. On peut en fait les calculer explicitement, mais on n'aura pas besoin de cela dans la suite.

2.2.4 Les résultats de Min He

Étant donnée une valeur critique a, on désigne par a_- et a_+ des classes de Grothendieck > 0 encadrant a et telles que dans l'intervalle $]a_-, a_+[$, a soit la seule valeur critique. On désigne par $a_{max} = c(l) - 2$ la plus grande valeur critique. Pour $a > a_{max}$, l'espace de modules S_a est vide.

Théorème 2.2.4 *(Min He) On suppose $n \geq l(l-1)$ et $n \geq 3$.*

- (i) *L'espace de modules S_a est une variété irréductible, normale, de dimension $\delta = 3n + l(l+3) - 2$.*
- (ii) *Si a est une valeur critique distincte de a_{max}, on dispose de morphismes surjectifs*

$$\begin{tikzcd} S_{a_-} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "\pi_-"'] & & S_{a_+} \arrow[dl, "\pi_+"] \\ & S_a & \end{tikzcd}$$

Au-dessus de l'ouvert des points stables de S_a ces morphismes sont des isomorphismes. L'image réciproque du fermé Σ des points strictement semi-stables $\Sigma_- = \pi_-^{-1}(\Sigma)$ (resp. $\Sigma_+ = \pi_+^{-1}(\Sigma)$) est le fermé des points a_+-instables (resp. a_--instables). Les fermés $\Sigma, \Sigma_-, \Sigma_+$ sont de codimension ≥ 2.
- (iii) *Si a n'est pas valeur critique, il existe un système cohérent universel $\Lambda = (\mathcal{V}, \mathcal{F})$ paramétré par S_a.*

Ainsi, S_{a_+} s'obtient à partir de S_{a_-} en remplaçant le fermé Σ_- par le fermé Σ_+ des points a_--instables.

2.2.5 L'espace de modules $S_{a_{max-}}$

On suppose ici que $n \geq l(l-1)$ et $n \geq 3$.

L'espace de modules $S_{a_{max}}$ s'identifie au schéma de Hilbert des sous-schémas finis de longueur $n + l^2$ de $\mathbb{P}_2$, $\mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2)$. En effet, la condition de semi-stabilité nous assure que le conoyau du morphisme d'évaluation $\Gamma \otimes \mathcal{O} \to F$ est sans torsion. On connaît la description de tels faisceaux sur $\mathbb{P}_2$. Ils s'écrivent comme $I_Z(c_1)$ où I_Z est l'idéal d'un sous-schéma fini Z de longueur c_2 de $\mathbb{P}_2$. De plus l'extension :

$$0 \to \Gamma \otimes \mathcal{O} \to F \to I_Z(2l) \to 0$$

donne une filtration de Jordan-Hölder pour F, puisque $a = a_{max}$. Le schéma Z est dans ce cas de longueur $n + l^2$. L'application qui associe à F le sous-schéma Z correspondant donne l'identification désirée.

Dans le cas où $a = a_{max-}$ on dispose encore d'une extension

$$0 \to \Gamma \otimes \mathcal{O} \to F \to I_Z(2l) \to 0$$

soit d'une extension non-triviale de systèmes cohérents

$$0 \to \Lambda' \to \Lambda \to \Lambda'' \to 0$$

où $\Lambda'' = (0, I_Z(2l))$, et $\Lambda' = (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2})$. Réciproquement, pour a voisin de a_{max}, une telle extension non-triviale définit un système cohérent a–semi-stable. Pour déterminer $S_{a_{max-}}$ il s'agit donc de paramétrer les extensions non-triviales de ce type.

Mais pour un sous-schéma Z, ces extensions sont paramétrées par

$$\mathbb{P}(Ext^1(I_Z(2l), \mathcal{O})) = \mathbb{P}_\bullet(\mathrm{H}^1(I_Z(2l-3))).$$

La variété $S_{a_{max-}}$ va donc s'identifier à un fibré en espaces projectifs associé à un faisceau algébrique cohérent sur $\mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2)$ qui ait pour fibre en Z, $\mathrm{H}^1(I_Z(2l-3))$. On obtient le

Théorème 2.2.5 *Soit $\Xi \subset \mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ le sous-schéma universel, et $\mathcal{I}$ le faisceaux d'idéaux associé. Considérons le faisceau algébrique cohérent $\mathcal{R} = R^1 pr_{1*}(\mathcal{I}(2l-3))$. Alors*

$$S_{a_{max\_}} = \mathbb{P}(\mathcal{R}).$$

Ce faisceau $\mathcal{R}$ est localement libre de rang

$$\chi(\mathcal{O}_Z) - \chi(\mathcal{O}(2l-3)) = n+1-(l-1)(l-2)$$

en dehors du fermé de Brill-Noether B des $Z \in \mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2)$ tels que $h^0(I_Z(2l-3)) \neq 0$.

Lemme 2.2.6 *i) La codimension du fermé B est supérieure ou égale à $2l$.*
ii) La codimension de l'image réciproque de B dans $\mathbb{P}(\mathcal{R})$ est au moins $n - l(l-1)+2$.

Preuve du lemme :
Pour un entier s tel que $0 < s \leq 2l-3$ soit A_s l'ensemble des schémas Z vérifiant $h^0(I_Z(s)) \neq 0$. On commence par démontrer que codim $A_s \leq n + l^2 - 1 + \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$. Soit $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(s))$ l'espace des courbes de degré s dans $\mathbb{P}_2$. On considère la variété d'incidence $\Xi = \{(Z,C) | Z \subset C\} \subset \mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(s))$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Xi \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(s)) \\ \mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2) & \end{tikzcd}$$

On sait d'après Ellingsrud et Strømme (dans [He], lemme 4.9, en utilisant [E-S1], th. 1.1 et cor. 1.2), que si C est une courbe de $\mathbb{P}_2$, même non-réduite, le sous-schéma de $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ des points $Z \subset C$ est de dimension m. Donc la dimension des fibres de p_2 est égale à $n+l^2$. Alors $\dim \Xi \leq n + l^2 - 1 + \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$. D'un autre côté la suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^0(I_Z(s)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(s)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_Z)$$

prouve que A_s est l'image de Ξ par p_1. On déduit $\dim A_s \leq n + l^2 - 1 + \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$. Pour $s = 2l-3$ on obtient pour $B = A_{2l-3}$, $\dim B \leq n + 3l^2 - 3l$. Donc codim $B \geq n - l^2 + 3l$, et alors codim $B \geq 2l$ si $n \geq l(l-1)$. Ceci prouve i).

Pour démontrer ii) prenons un schéma ponctuel Z et considérons une droite d qui évite le support de Z. On obtient les suites exactes

$$0 \to I_Z(s-1) \stackrel{\cdot d}{\to} I_Z(s) \to \mathcal{O}_d(s) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{H}^0(I_Z(s-1)) \to \mathrm{H}^0(I_Z(s) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_d(s)) \to \mathrm{H}^1(I_Z(s-1)) \to \mathrm{H}^1(I_Z(s) \to 0.$$

Il résulte $A_{s-1} \subset A_s$ et $h^1(I_Z(s)) \leq h^1(I_Z(s-1))$ pour tout s. On note $B_s = A_s \setminus A_{s-1}$. Pour $Z \in B_s$ la fibre en Z du morphisme $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \to \mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2)$ est de dimension $h^1(I_Z(2l-3)) \leq h^1(I_Z(s-1)) = n + l^2 - 1 + \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$. On obtient ainsi une majoration de la dimension de l'image réciproque de B_s par

$$(n + l^2 + \frac{1}{2}(s+1)(s+2) - 1) + (n + l^2 - \frac{1}{2}s(s+1) - 1)$$

c'est-à-dire

$$2(n+l^2) + s - 1.$$

L'assertion résulte en utilisant la majoration $s \leq 2l-3$.□

On note π le morphisme canonique de $S_{a_{max\_}}$ dans $\mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2)$.

2.2.6 Le morphisme $f : S_\epsilon \to \mathrm{M}_c$

On désigne par M_c l'espace de modules des faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c. Ici c est de rang 2, $c_1 = 0$ et $c_2 = n$ donc $\mathrm{M}_c = \mathrm{M}$. Considérons une classe de Grothendieck $\epsilon > 0$ inférieure à la plus petite valeur critique. Si $\Lambda = (\Gamma, F)$ est un système cohérent ϵ–stable, le faisceau F sous-jacent est semi-stable. Par suite, on obtient un morphisme $f : S_\epsilon \to \mathrm{M}_c$ qui associe à la classe du système cohérent (Γ, F) la classe du faisceau $F(-l)$.

Théorème 2.2.7 *Si $3 \leq n < (l+1)(l+2)$, le morphisme $f : S_\epsilon \to \mathrm{M}_c$ est surjectif ; de plus, on a $f_*(\mathcal{O}_{S_\epsilon}) = \mathcal{O}_{\mathrm{M}_c}$.*

Preuve :
Si F est un faisceau stable de classe c, la condition $n < (l+1)(l+2)$ signifie que $\chi(F(l)) > 0$ et par suite on peut considérer les systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F(l))$ avec $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(F(l))$. Ces systèmes cohérents sont obligatoirement ϵ–stables. Il en résulte que la fibre de f au-dessus du point défini par F est isomorphe à l'espace projectif (des droites) $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(F(l)))$. Le morphisme f est par suite surjectif au-dessus de l'ouvert $U \subset \mathrm{M}_c$ des faisceaux stables et il vérifie $f_*(\mathcal{O}_{S_\epsilon})|_U = \mathcal{O}_U$. Par conséquent f est surjectif. Considérons la décomposition de Stein du morphisme $f : S_\epsilon \to \mathrm{M}' = \mathrm{Spec}\,(f_*(\mathcal{O}_{S_\epsilon})) \to \mathrm{M}_c$. La variété S_ϵ est intègre, donc M' est intègre. Le morphisme birationnel $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}_c$ est fini, et isomorphisme au-dessus de U. La variété M_c est normale. On déduit que le morphisme $\mathrm{M}' \to \mathrm{M}_c$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que $f_*(\mathcal{O}_{S_\epsilon}) = \mathcal{O}_{\mathrm{M}_c}$.$\square$

2.2.7 Le fibré déterminant

Si a n'est pas valeur critique, on sait qu'il existe un système cohérent universel paramétré par l'espace de modules S_a. On l'écrit sous la forme $(\mathcal{V}, \mathcal{F}(l))$, où $\mathcal{V}$ est un fibré inversible sur S_a, et $\mathcal{F}$ une famille plate de faisceaux cohérents de classe c paramétrée par S_a. On peut donc, pour toute classe $u \in c^\perp$ dans $K(\mathbb{P}_2)$, de dimension 1, (l'orthogonal est pris relativement à la forme quadratique sur $K(\mathbb{P}_2)$) définir un fibré déterminant $\mathcal{D}_{a,u}$ sur S_a par la formule

$$\mathcal{D}_{a,u} = \lambda_{\mathcal{F}}(-u) = \det p_{1!}(\mathcal{F} \cdot p_2^*(-u)).$$

Dans cette formule p_1 et p_2 sont les projections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} S_a \times \mathbb{P}_2 & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{P}_2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle p_1} & & \\ S_a & & \end{array}$$

et $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F} \cdot p_2^*(u)$ désigne la classe (dans le groupe de Grothendieck $K(S_a \times \mathbb{P}_2)$ des classes de faisceaux algébriques cohérents plats sur S_a) produit de la classe de $\mathcal{F}$ par l'image réciproque de u par la projection p_2. Le morphisme

$$p_{1!} : K(S_a \times \mathbb{P}_2) \to K(S_a)$$

est le morphisme qui associe à la classe d'un faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ plat sur S_a la classe de

$$\sum_q (-1)^q R^q p_{1*}(\mathcal{F}).$$

Ces faisceaux de cohomologie sont les faisceaux de cohomologie d'un complexe fini de fibrés vectoriels $Rp_{1*}(\mathcal{F})$. Par la propriété universelle du fibré déterminant, on a $f^*(\mathcal{D}_u) = \mathcal{D}_{\epsilon,u}$. Soit $\Xi \subset \mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ le sous-schéma universel. Soit $\mathfrak{u}$ la classe du faisceau $\mathcal{O}_H(-1)$, où H est une droite de $\mathbb{P}_2$. On note

$$\mathfrak{d} = \lambda_{\mathcal{I}_\Xi}(-\mathfrak{u}) = \lambda_{\mathcal{O}_\Xi}(\mathfrak{u})$$

le fibré déterminant sur $\mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2)$. Considérons l'ouvert U de ce schéma de Hilbert où le faisceau $\mathcal{R}$ est localement libre. Cet ouvert est l'espace tout entier pour $l = 1$ et il a son complémentaire de codimension $2l$, pour l supérieur à 1. Il est invariant sous l'action du groupe $\mathrm{SL}(3)$.

Théorème 2.2.8 *Soit n un entier ≥ 3. Soit l un entier > 0 tel que $l(l-1) \leq n < (l+1)(l+2)$. Alors on a un isomorphisme de* $\mathrm{SL}(3)$*–représentations*

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}) = \mathrm{H}^0(U, \mathrm{S}^l\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}).$$

Preuve :
D'après le théorème 2.2.7, on a

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}) = \mathrm{H}^0(S_\epsilon, \mathcal{D}_{\epsilon,\mathfrak{u}}).$$

Maintenant, d'après le résultat de Min He, les espaces de modules S_a sont des variétés normales : les espaces vectoriels de sections restent inchangés par restriction à un ouvert dont le complémentaire est de codimension ≥ 2. Puisque les fermés Σ, Σ_-, et Σ_+ du théorème 2.2.4 sont de codimension ≥ 2 on voit que la représentation $\mathrm{H}^0(S_a, \mathcal{D}_{a,\mathfrak{u}})$ est indépendante de a. Il reste à voir ce qu'est cette représentation pour $a = a_{max_-}$. Ceci résulte du calcul du fibré déterminant $\mathcal{D}_{a_{max_-},\mathfrak{u}}$ sur l'espace de modules $S_{a_{max_-}}$.

Lemme 2.2.9 *Soit $\mathfrak{a}$ le fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{R})}(1)$ sur $\mathbb{P}(\mathcal{R})$. Alors*

$$\mathcal{D}_{a_{max_-},\mathfrak{u}} = \mathfrak{a}^{\otimes l} \otimes \pi^*(\mathfrak{d}).$$

Preuve du lemme :
Rappelons que $\Xi \subset \mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ est le sous-schéma universel, $\mathcal{I}$ le faisceaux d'idéaux associé et $\mathcal{R}$ est le faisceau algébrique cohérent $R^1pr_{1*}(\mathcal{I}(2l-3))$. Considérons l'extension canonique sur $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \to \mathfrak{a} \boxtimes \mathcal{O}(-l) \to \mathcal{F} \to (\pi \times id_{\mathbb{P}_2})^*(\mathcal{I}(0,l)) \to 0$$

où $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{R}) \to \mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2)$ est le morphisme canonique. La classe $\mathfrak{u}$ est celle du faisceau $\mathcal{O}_H(-1)$, où H est une droite de $\mathbb{P}_2$. On a alors par changement de base

$$\mathcal{D}_{a_{max_-},\mathfrak{u}} \quad = \quad \mathfrak{a}^{\otimes l} \otimes \pi^*(\lambda_{\mathcal{O}_\Xi}(\mathfrak{u} \otimes \mathcal{O}(l)).$$

Dans $K(\mathbb{P}_2)$, on a $[\mathfrak{u} \otimes \mathcal{O}(l)] - [\mathfrak{u}] = l \cdot \eta^2$. D'après [LeP4], prop. 2.9, $\lambda_{\mathcal{O}_\Xi}(\mathfrak{u} \otimes \mathcal{O}(l)) = \lambda_{\mathcal{O}_\Xi}(\mathfrak{u}))$. Le fibré inversible $\lambda_{\mathcal{O}_\Xi}(\mathfrak{u})$ est le fibré déterminant $\mathfrak{d}$. Ceci démontre le lemme. □

Il reste maintenant à enlever le fermé image réciproque du lieu de Brill-Noether B, qui est de codimension ≥ 2, pour obtenir le résultat du théorème.□

2.3 Sections de $\mathrm{S}^l\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ sur le schéma de Hilbert

Le but de cette section est de terminer la démonstration du théorème 2.0.1. On supposera partout dans la suite que $n \geq 3$. On sait par le théorème 2.2.8 que pour $l(l-1) \leq n < (l+1)(l+2)$, on a un isomorphisme $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}, \mathcal{D}) = \mathrm{H}^0(U, \mathrm{S}^l\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$ où U est l'ouvert du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^{n+l^2}(\mathbb{P}_2)$ où le faisceau $\mathcal{R}$ est localement libre. Cet ouvert a son complémentaire de codimension $\geq 2l$. Il est invariant sous l'action de $\mathrm{SL}(3)$.

Lorsqu'il n'est pas spécifié, les produits tensoriels de faisceaux algébriques considérés sont des produits tensoriels sur le faisceau structural du schéma de base. Les fibrés vectoriels sont identifiés à des faisceaux localement libres de rang fini.

On va se concentrer maintenant sur ce nouvel espace de sections $\mathrm{H}^0(U, \mathrm{S}^l\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$. On note $m = n + l^2$.

Soit $\Xi \subset \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ le sous-schéma universel, $pr_1 : \Xi \to \mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ et $pr_2 : \Xi \to \mathbb{P}_2$ les deux projections, et $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux associé. Le faisceau $\mathcal{R}$ est défini comme $\mathcal{R} = R^1pr_{1*}(\mathcal{I}(2l-3))$. On note $k = 2l-3$. En partant de la suite exacte fondamentale associée à Ξ sur $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_\Xi \to 0$$

tensorisée par $pr_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k))$ et restreinte à l'ouvert $U \times \mathbb{P}_2$ de $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ on trouve la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}(k)|_{U \times \mathbb{P}_2} \to \mathcal{O}(k)|_{U \times \mathbb{P}_2} \to \mathcal{O}_\Xi(k)|_{U \times \mathbb{P}_2} \to 0$$

Par image directe sur U par la projection pr_1, on obtient une présentation SL(3)-équivariante de $\mathcal{R}$ sur U :

$$0\to pr_{1*}(\mathcal{I}(k))\to pr_{1*}(\mathcal{O}(k))\to pr_{1*}(\mathcal{O}_\Xi(k))\to\mathcal{R}\to R^1pr_{1*}(\mathcal{O}(k))\to 0$$

Par définition de U on a $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2,\mathcal{I}_Z(k))=0$ pour les schémas $Z\in U$, donc par le théorème de semi-continuité on a une suite exacte de faisceaux localement libres sur U :

$$0\to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2,\mathcal{O}(k))\otimes\mathcal{O}_U\to pr_{1*}(\mathcal{O}_\Xi(k))|_U\to\mathcal{R}\to 0 \tag{2.3}$$

On obtient par suite une résolution SL(3)-équivariante de $\mathrm{S}^l\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d}$ par le complexe de Koszul $K^{\cdot}$ défini en degré i par $K^i=\Lambda^{-i}\mathrm{S}^kE\otimes\mathrm{S}^{l+i}(\mathcal{O}(k)^{[m]})\otimes\mathfrak{d}$ pour $i=0,\ldots,l$ où $\mathcal{O}(k)^{[m]}=pr_{1*}(\mathcal{O}_\Xi(k))$, $E=\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2,\mathcal{O}(1))$:

$$K^{\cdot}\to\mathrm{S}^l\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d}. \tag{2.4}$$

Par suite la cohomologie de $\mathrm{S}^l\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d}$ se calcule à l'aide de la suite spectrale $E_1^{p,q}=\mathrm{H}^q(K^{-p})$ dont l'aboutissement en degré 0 est $\mathrm{H}^0(U,\mathrm{S}^l\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d})$.

Pour les faisceaux localement libres K^i on va se placer indifféremment sur les restrictions à U ou sur $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ tout entier, puisqu'on s'intéresse seulement à la cohomologie de ces faisceaux jusqu'en degré l ; comme le complémentaire de U est de codimension $\geq 2l$, celle-ci coïncide sur U avec la cohomologie sur tout $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ jusqu'en degré $2l-2$, par les propriétés de la cohomologie locale ([Grot2]). Pour $l=1$, $U=\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$.

Lemme 2.3.1 *Pour $q>0$, $\mathrm{H}^q(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathfrak{d})=0$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathfrak{d})=\mathrm{S}^mE$.*

Preuve du lemme :

Soit HC le morphisme de Hilbert-Chow, $HC:\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)\to\mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2)$ qui associe à un schéma fini Z le cycle $\sum_{x\in\mathbb{P}_2}lg\,Z_xx$ dans $\mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2)$, la puissance symétrique m-ième de $\mathbb{P}_2$. Naturellement, l'espace $\mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2)$ est le quotient de la puissance m-ième $\mathbb{P}_2^m$ de $\mathbb{P}_2$ par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$. Il est constitué de cycles, combinaisons linéaires de points distincts x_i de $\mathbb{P}_2$,

$$\sum_{\sum_i\lambda_i=m}\lambda_i[x_i],$$

à coefficients $\lambda_i>0$. Le support d'un schéma fini de longueur m est un tel cycle, si on tient compte des multiplicités des points. Le morphisme de Hilbert-Chow vérifie $HC_*\mathcal{O}_{\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)}=\mathcal{O}_{\mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2)}$ et (cf. lemme 4.3.5)

$$HC^*(\mathcal{O}(1,1,\ldots,1)^{\mathfrak{S}_m})=\mathfrak{d}. \tag{2.5}$$

Mais $\mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2)$ est à singularités rationnelles en tant que quotient d'une variété lisse par un groupe fini ([Bout]). Par suite $R^pHC_*\mathcal{O}_{\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)}=0$ pour $p>0$. On obtient alors

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathfrak{d}) = \mathrm{H}^q(\mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2),HC_*(\mathfrak{d})) = \mathrm{H}^q(\mathbb{P}_2^m,\mathcal{O}(1,\cdots,1))^{\mathfrak{S}_m} = \begin{cases}0 & \text{si} \quad q>0\\ \mathrm{S}^mE & \text{si} \quad q=0.\end{cases} \qquad \square$$

Dans le troisième chapitre, il est démontré que

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathcal{O}(k)^{[m]}\otimes\mathfrak{d})=\mathrm{S}^{2l-2}E\otimes\mathrm{S}^{m-1}E$$

et que $\mathrm{H}^q(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathcal{O}(k)^{[m]}\otimes\mathfrak{d})=0$ pour $q>0$. Comme annoncé dans l'introduction (th. 2.0.2), on montrera aussi que

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(k)^{[m]})\otimes\mathfrak{d})=0$$

et on calculera $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(k)^{[m]})\otimes\mathfrak{d})$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]})\otimes\mathfrak{d})$. On peut ainsi calculer

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathrm{S}^l\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d})$$

pour $l=1,2,3$. Pour aller plus loin on se heurte à des difficultés liées au calcul des $\mathrm{H}^q(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathrm{S}^l(\mathcal{O}(k)^{[m]})\otimes\mathfrak{d})$ pour $q=0,l>3$ ou $q>0,l>1$.

Ceci limite le calcul du $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathrm{S}^l\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$ à $l = 3$ ce qui restreint les valeurs de n à $n \leq 19$.

On commence par remarquer que pour le calcul d'un espace de sections d'un fibré sur $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ on peut se placer sur un grand ouvert de $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$, pourvu que cet ouvert ait un complémentaire de codimension au moins 2. Ceci est le cas pour l'ouvert $\mathrm{Hilb}^m_*(\mathbb{P}_2)$ formé par les schémas avec au plus un point multiple, qui soit double, soit les schémas dont le cycle correspondant est $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ ou $2x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_m$ avec x_i distincts. On note $\mathrm{S}^m_*(\mathbb{P}_2)$ l'ouvert des cycles de cette forme. L'avantage d'utiliser $\mathrm{Hilb}^m_*(\mathbb{P}_2)$ est qu'on peut le décrire comme quotient q de l'éclaté B de $\mathbb{P}^m_{2*} = p^{-1}(\mathrm{S}^m_*(\mathbb{P}_2))$ (où $p : \mathbb{P}^m_2 \to \mathrm{S}^m(\mathbb{P}_2)$ est le quotient de $\mathbb{P}^m_2$ sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$) selon la réunion D des diagonales $\Delta_{ij} = \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{P}^m_{2*} | x_i = x_j\}$ pour $i < j$, disjointes dans $\mathbb{P}^m_{2*}$. On note ρ cet éclatement. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{P}^m_{2*} \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ \mathrm{Hilb}^m_*(\mathbb{P}_2) & \xrightarrow{HC} & \mathrm{S}^m_*(\mathbb{P}_2) \end{array}$$

On montrera comment, à l'aide de cette description, on peut ramener les calculs de la cohomologie des fibrés sur $\mathrm{Hilb}^m_*(\mathbb{P}_2)$ à des calculs des invariants de la cohomologie de certains faisceaux sur $\mathbb{P}^m_{2*}$. On utilise les mêmes notations $\mathrm{Hilb}^m_*(X)$ et X^m_* pour une surface quelconque X.

2.3.1 Une filtration

On introduit ici des notations et des résultats très utiles pour la suite. On va se placer dans le cadre général d'une variété algébrique lisse M, munie d'un fibré de rang r, W, et d'un fibré L sur une sous-variété lisse D de M. Dans les applications, la sous-variété D sera la réunion des diagonales $\cup_{i<j}\Delta_{ij} \subset X^m_*$. On note W_D la restriction de W à D.

On considère un morphisme surjectif $\epsilon : W \twoheadrightarrow L$. Le noyau de ce morphisme définit un faisceau sans torsion V. Ce morphisme induit un morphisme surjectif de fibrés en algèbres graduées

$$\mathrm{Sym}\,\epsilon : \mathrm{Sym}\,W = \oplus_{i\geq 0}\mathrm{S}^i W \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}\,L = \oplus_{i\geq 0}\mathrm{S}^i L,$$

noté encore ϵ. On note I le faisceau noyau.

Remarque 2.3.2 Le faisceau I est engendré par V, donc I^k est engendré par $\mathrm{S}^k V$.

Considérons la filtration $\mathrm{F}^k\mathrm{Sym}\,W = I^k\mathrm{Sym}\,W$, pour $k \geq 0$; elle est compatible avec la graduation.

Proposition 2.3.3 *Soit $\mathcal{N}$ le fibré conormal de D dans M et K le noyau du morphisme canonique $\epsilon|_D$ (noté encore ϵ): $W_D \to L$. Le gradué associé à cette filtration $\mathrm{gr}_p(\mathrm{Sym}\,W) = I^p/I^{p+1}$ admet une filtration décroissante dont les gradués associés sont*

$$\mathrm{gr}_q(\mathrm{gr}_p(\mathrm{Sym}\,W)) = \mathrm{gr}_q(I^p/I^{p+1}) = \mathrm{S}^q\mathcal{N} \otimes \mathrm{S}^{p-q}K[-p+q] \otimes \mathrm{Sym}\,L \tag{2.6}$$

si $p \geq q \geq 0$ et 0 sinon.

Preuve :

Afin de décrire le gradué associé à cette filtration on va considérer $\mathrm{Sym}\,W$ comme image directe du faisceau structural $\mathcal{O}_{W^*}$ sur l'espace total du fibré dual W^*, par la projection canonique $p : W^* \to M$, et $\mathrm{Sym}\,L$ comme image directe du faisceau structural $\mathcal{O}_{L^*}$ sur l'espace total du fibré dual L^*, par la restriction de p à $L^* \subset W^*$, notée encore $p : L^* \to D$.

On désigne par W_D la restriction de W à D. Considérons les inclusions de variétés lisses

$$L^* \subset W^*_D \subset W^* \tag{2.7}$$

et désignons par $\mathcal{I}$ l'idéal de L^* dans W^*, par $\mathcal{J}$ l'idéal de W^*_D dans W^*, et par $\mathcal{I}_D$ l'idéal de L^* dans W^*_D. On a une suite exacte $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{I} \xrightarrow{r} \mathcal{I}_D \to 0$ où r est le morphisme de restriction. On considère les filtrations de $\mathcal{O}_{W^*}$ et $\mathcal{O}_{W^*_D}$ définies par les puissances des idéaux $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_D$.

Comme p est un morphisme affine, W^* est un schéma affine sur M, il y a une correspondance entre les faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_{W^*}$ et les idéaux de $\operatorname{Sym} W$ donnée par $\mathcal{I}\mapsto p_*(\mathcal{I})$. L'idéal $\mathcal{I}$ se correspond ainsi à I et $\mathcal{I}^k$ à I^k. De cette façon, la filtration de $\operatorname{Sym} W = p_*(\mathcal{O}_{W^*})$ définie par image directe coïncide avec la filtration définie par l'idéal $I = p_*(\mathcal{I})$ noyau du morphisme ϵ. Les fibrés conormaux correspondants aux inclusions (2.7) s'écrivent $\mathcal{N}_{L^*/W^*} = N^*_{L^*/W^*} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, $\mathcal{N}_{W^*_D/W^*} = N^*_{W^*_D/W^*} = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$, $\mathcal{N}_{L^*/W^*_D} = N^*_{L^*/W^*_D} = \mathcal{I}_D/{\mathcal{I}_D}^2$ et on a une suite exacte

$$0\to \mathcal{N}_{W^*_D/W^*}|_{L^*}\to \mathcal{N}_{L^*/W^*}\to \mathcal{N}_{L^*/W^*_D}\to 0 \tag{2.8}$$

Le fibré conormal $\mathcal{N}_{W^*_D/W^*}|_{L^*}$ s'identifie à $p^*(\mathcal{N})$ et $\mathcal{N}_{L^*/W^*_D}$ à $p^*(K)$. La suite (2.8) devient

$$0\to p^*(\mathcal{N})\to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2\to p^*(K)\to 0. \tag{2.9}$$

partir de cette suite exacte on obtient une filtration décroissante du $\mathcal{O}_{L^*}$-module $S^p(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = \mathcal{I}^p/\mathcal{I}^{p+1} = \operatorname{gr}_p(\mathcal{O}_{W^*})$ par des $\mathcal{O}_{L^*}$-modules

$$F^q(S^p\mathcal{N}_{L^*/W^*}) = \operatorname{Im}((\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{\otimes q}\otimes(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^{\otimes(p-q)}\to S^p(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)) = \operatorname{Im}(\mathcal{J}^q\mathcal{I}^{p-q}\to\mathcal{I}^p/\mathcal{I}^{p+1})$$

si $p\geq q\geq 0$ et 0 sinon, de gradué associé

$$\operatorname{gr}_q(S^p(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)) = S^q\mathcal{N}_{W^*_D/W^*}\otimes S^{p-q}\mathcal{N}_{L^*/W^*_D} = p^*(S^q\mathcal{N}\otimes S^{p-q}K)$$

si $p\geq q\geq 0$ et 0 sinon. Par application du foncteur image directe p_* qui est exact puisqu'il s'agit d'un morphisme affine, on obtient une filtration de $p_*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^{p+1}) = I^p/I^{p+1}$ dont le gradué en degré q est le $\operatorname{Sym} L$-module gradué fourni par la formule de projection

$$\operatorname{gr}_q(I^p/I^{p+1}) = S^q\mathcal{N}\otimes S^{p-q}K[-p+q]\otimes\operatorname{Sym} L$$

si $p\geq q\geq 0$ et 0 sinon. Pour comprendre le décalage qui apparaît dans la graduation de $p_*(p^*(S^q\mathcal{N}\otimes S^{p-q}K)) = S^q\mathcal{N}\otimes S^{p-q}K\otimes\operatorname{Sym} L$ il faut comprendre l'action de $\mathbb{C}^*$ sur le fibré conormal $\mathcal{N}_{L^*/W^*_D} = p^*(K)$ et sur le fibré conormal $\mathcal{N}$. L'action de $\mathbb{C}^*$ sur L^*, W^*_D et W^* est par homothétie, d'où une action sur les trois fibrés normaux et respectivement conormaux . Sur M et D, et par conséquent sur $\mathcal{N}$, $\mathbb{C}^*$ agit trivialement. Donc la composante homogène de degré i de $p_*(p^*(\mathcal{N}))$ est $\mathcal{N}\otimes\operatorname{Sym}^i L$. Sur $\mathcal{N}_{L^*/W^*_D} = p^*(K)$, l'action est donnée par $\lambda\cdot(x,v) = (\lambda x,\lambda^{-1}v)$ pour $x\in L^*$ et $v\in K_{p(x)}$. Donc la composante homogène de degré i de $p_*(p^*(S^pK))$ est donnée par $S^pK\otimes\operatorname{Sym}^{i-p}L$ si $i\geq p$ $\square$.

Remarque 2.3.4 Considérons maintenant un fibré inversible $\mathcal{A}$ sur M. Alors on a un morphisme de $\operatorname{Sym} W$-modules gradués

$$\mathcal{M} = \operatorname{Sym} W\otimes\mathcal{A}\to\operatorname{Sym} L\otimes\mathcal{A}$$

de noyau $I\mathcal{M}$. Considérons la filtration $I^k\mathcal{M}$. Cette filtration est compatible avec la graduation et le morphisme canonique

$$\Phi : S^kV|_D\otimes_{\mathcal{O}_D}\operatorname{Sym} L[-k]\otimes\mathcal{A}|_D\to I^k\mathcal{M}/I^{k+1}\mathcal{M}$$

est un isomorphisme en degré $\geq k$.

2.3.2 Éclatement de M le long de D

On considère l'éclatement $\rho : \widetilde{M}\to M$ de M le long de D, et les images réciproques $\widetilde{W}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}$ de W et $\mathcal{L}$ par ρ : $\widetilde{W} = \rho^*(W)$, $\widetilde{\mathcal{L}} = \rho^*(\mathcal{L})$. On note $\widetilde{V}$ le noyau du morphisme surjectif , noté encore ϵ, de $\widetilde{W}$ dans $\widetilde{\mathcal{L}}$. Puisque le support de $\widetilde{\mathcal{L}}$ est un diviseur (le diviseur exceptionnel $\mathbf{E}$), $\widetilde{V}$ est localement libre. De manière analogue, on considère le noyau $\widetilde{I}$ de $\epsilon : \operatorname{Sym}\widetilde{W}\to\operatorname{Sym}\widetilde{\mathcal{L}}$, et la filtration $\widetilde{I}^k$ de $\operatorname{Sym}\widetilde{W}$.

Lemme 2.3.5 – (i) *Le morphisme canonique* $\rho^* : \operatorname{Sym} W\to\rho_*(\operatorname{Sym}\widetilde{W})$ *induit un isomorphisme* $I^k\xrightarrow{\sim}\rho_*(\widetilde{I}^k)$

– (ii) *Les images directes* $R^q\rho_*(\widetilde{I}^k)$ *sont nulles pour* $q>0$.

Preuve :

L'éclatement ρ vérifie $\rho_*(\mathcal{O}_{\widetilde{M}}) = \mathcal{O}_M$ et $R^q\rho_*(\mathcal{O}_{\widetilde{M}}) = 0$ pour $q > 0$, d'après le lemme 3.5 de [SGA-6], exposé VII. On a alors, par la formule de projection, un morphisme

$$\operatorname{Sym} W \tilde{\to} \rho_*(\rho^* \operatorname{Sym} W) = \rho_*(\operatorname{Sym} \widetilde{W})$$

qui est un isomorphisme et de même pour $\operatorname{Sym}\mathcal{L} \tilde{\to} \rho_*(\operatorname{Sym}\widetilde{\mathcal{L}})$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \operatorname{Sym} W & \xrightarrow{\epsilon} & \operatorname{Sym}\mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & \rho_*(\widetilde{I}) & \longrightarrow & \rho_*(\operatorname{Sym}\widetilde{W}) & \xrightarrow{\rho_*\epsilon} & \rho_*(\operatorname{Sym}\widetilde{\mathcal{L}}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

qui nous assure que $\rho_*\epsilon$ est surjectif et qu'il y a aussi un isomorphisme $I \tilde{\to} \rho_*(\widetilde{I})$. D'où un morphisme $I^k \to \rho_*(\widetilde{I}^k)$.

On suppose par récurrence que pour tout $i \leq k$ on a le résultat (pour $k = 0$ ceci est clair : $\operatorname{Sym} W \tilde{\to} \rho_*(\operatorname{Sym}\widetilde{W})$ et $R^q\rho_*(\operatorname{Sym}\widetilde{W}) = 0$ pour $q > 0$) et on va le prouver pour $k+1$. On a un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & I^{k+1} & \longrightarrow & I^k & \longrightarrow & I^k/I^{k+1} & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow a & & \downarrow \sim,b & & \downarrow c & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \rho_*(\widetilde{I}^{k+1}) & \longrightarrow & \rho_*(\widetilde{I}^k) & \xrightarrow{d} & \rho_*(\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1}) & \longrightarrow & R^1\rho_*(\widetilde{I}^{k+1}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où b est un isomorphisme. On commence par prouver que c est un isomorphisme et que

$$R^q\rho_*(\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1}) = 0$$

pour $q > 0$. On en déduira que d est surjectif d'où a sera un isomorphisme et $R^q\rho_*(\widetilde{I}^{k+1}) = 0$ pour $q > 0$.

Mais on a construit dans la précédente section une filtration de chacun des faisceaux I^k/I^{k+1} et $\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1}$ de gradués connus. Ces faisceaux sont supportés par D et $\mathbf{E}$ respectivement et le morphisme ρ en restriction à D s'écrit comme $\rho : \mathbf{E} = \mathbb{P}(\mathcal{N}_D^*) \to D$. Le noyau $\widetilde{K}$ de $\widetilde{W}|_{\mathbf{E}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ s'identifie à l'image réciproque de K. Le fibré conormal à $\mathbf{E}$, $\mathcal{N}_{\mathbf{E}}$, est dans ce cas le fibré $\mathcal{O}(1)$ relatif sur cet espace projectif (on a pris le projectif de Grothendieck). La filtration $\widetilde{\mathrm{F}}^j$ de $\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1}$ est de gradué

$$\operatorname{gr}_j(\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1}) = \mathrm{S}^j\mathcal{N}_{\mathbf{E}} \otimes \mathrm{S}^{k-j}\widetilde{K}[-k+j] \otimes \operatorname{Sym}\widetilde{\mathcal{L}}$$

si $k \geq j \geq 0$ et 0 sinon.

Comme

$$R^q\rho_*(\operatorname{gr}_j(\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1})) = R^q\rho_*(\mathrm{S}^j\mathcal{N}_{\mathbf{E}}) \otimes \mathrm{S}^{k-j}K[-k+j] \otimes \operatorname{Sym}\mathcal{L}$$

et que $\rho_*(\mathrm{S}^j\mathcal{N}_{\mathbf{E}}) = \mathrm{S}^j\mathcal{N}_D$ et $R^q\rho_*(\mathrm{S}^j\mathcal{N}_{\mathbf{E}}) = 0$ pour $q > 0$ on obtient une filtration $\mathrm{F}^j = \rho_*(\widetilde{\mathrm{F}}^j)$ de $\rho_*(\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1})$ de gradué

$$\rho_*(\operatorname{gr}_j(\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1})) = \mathrm{S}^j\mathcal{N}_D \otimes \mathrm{S}^{k-j}K[-k+j] \otimes \operatorname{Sym}\mathcal{L} = \operatorname{gr}_j(I^k/I^{k+1})$$

si $k \geq j \geq 0$ et 0 sinon, et telle que $R^q\rho_*(\mathrm{F}^j) = 0$ si $q > 0$, pour tout j. En particulier pour $j = 0$ on obtient que $R^q\rho_*(\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1}) = 0$ pour $q > 0$. Le morphisme c est compatible avec les filtrations et induit l'identité sur les gradués, d'où aussi l'isomorphisme $c : I^k/I^{k+1} \tilde{\to} \rho_*(\widetilde{I}^k/\widetilde{I}^{k+1})$.

Corollaire 2.3.6 – (i) *L'image de l'inclusion canonique* $\phi : \rho_*(\mathrm{S}^k\widetilde{V}) \hookrightarrow \mathrm{S}^kW$ *est exactement* $(I^k)_k$.
– (ii) $R^q\rho_*(\mathrm{S}^k\widetilde{V}) = 0$ *pour* $q > 0$.

Preuve :

Cela revient à écrire les résultats du lemme 2.3.5 en degré k en tenant compte de l'observation 2.3.2 et du fait que $\mathrm{S}^k\widetilde{\imath} : \mathrm{S}^k\widetilde{V} \hookrightarrow \mathrm{S}^k\widetilde{W}$ reste une inclusion, où $\widetilde{\imath}$ est l'inclusion de $\widetilde{V}$ dans $\widetilde{W}$.□

2.4 Calculs de cohomologie sur $\mathrm{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$

On appliquera ici les résultats des deux sections précédentes à notre situation particulière. On n'aura pas besoin ici de se placer sur le plan projectif. Les résultats restent valables sur une surface algébrique lisse quasi-projective quelconque X. La description de $\mathrm{Hilb}_*^m(X)$ se fait alors exactement comme pour $\mathbb{P}_2$, en utilisant l'éclatement B de X_*^m :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\rho} & X_*^m \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ \mathrm{Hilb}_*^m(X) & \xrightarrow{HC} & \mathrm{S}_*^m(X) \end{array}$$

On considère plus généralement le fibré $L^{[m]}$ sur $\mathrm{Hilb}^m(X)$ associé à un fibré L sur X,

$$L^{[m]} = pr_{1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes pr_2^*(L))$$

où pr_1 et pr_2 sont les deux projections du schéma universel $\Xi \subset \mathrm{Hilb}^m(X) \times X$ sur $\mathrm{Hilb}^m(X)$ et respectivement X.

On garde les notations introduites juste avant la section 2.3.1 pour les diagonales D et Δ_{ij} de X_*^m. Sur B, le diviseur exceptionnel E se décompose en composantes disjointes $E = \bigcup_{i<j} E_{i,j}$. Alors le schéma universel $\Xi_B \subset B \times X$, paramétré par B, a m composantes irréductibles Ξ_i et la projection $pr_1 : \Xi_i \bigcap \Xi_j \to E_{i,j}$ est un isomorphisme. On en déduit une suite exacte sur $B \times X$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\Xi_B} \to \oplus_i \mathcal{O}_{\Xi_i} \to \oplus_{i<j} \mathcal{O}_{E_{i,j}} \to 0 \tag{2.10}$$

et comme, par changement de base, $q^*(L^{[m]}) = pr_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi_B} \otimes pr_2^*(L))$, on a, après tensorisation par $pr_2^*(L)$ de la suite (2.10) et image directe par pr_1, une suite exacte sur B :

$$0 \to q^*(L^{[m]}) \to \oplus_i p_i^*(L) \to \oplus_{i<j} p_{i,j}^*(L_\Delta) \to 0$$

où p_i désigne aussi bien la i-ème projection $X_*^m \to X$ que sa composée avec $\rho : B \to X$; de même pour $p_{i,j} : X_*^m \to X \times X$ et $p_{i,j} : B \to X \times X$.

Le sous-schéma Ξ_i est l'image réciproque de la diagonale Δ de $X \times X$ par l'application (p_i, id_X). Le fibré L_Δ est l'image réciproque de L par l'une des projections de la diagonale de $X \times X$ sur X, qui sont des isomorphismes.

Le fibré $\widetilde{\mathcal{L}} = \oplus_{i<j} p_{i,j}^*(L_\Delta)$ a pour support le diviseur exceptionnel E. Il est l'image réciproque par ρ du fibré $\mathcal{L} = \oplus_{i<j} p_{i,j}^*(L_\Delta)$ sur X_*^m, dont le support est D.

On note aussi $\widetilde{W}$ et W le fibré $\oplus_i p_i^*(L)$ sur B et sur X_*^m respectivement. On note $L_i = p_i^*(L)$ et $L_{ij} = p_{i,j}^*(L_\Delta)$. On se place maintenant dans la situation décrite au paragraphe 2.3.1. On prend pour M la variété X_*^m, $\widetilde{M} = B$, et le fibré $\widetilde{V} = q^*(L^{[m]})$. Le morphisme ϵ est :

$$\begin{array}{rcl} W = \oplus_i L_i & \to & \mathcal{L} = \oplus_{i<j} L_{\Delta_{ij}} \\ (s_i)_i & \mapsto & ((s_i - s_j)|_{\Delta_{ij}})_{i,j}. \end{array}$$

Il est surjectif. Comme dans 2.3.1, V désigne le noyau de ϵ. Le groupe symétrique $G = \mathfrak{S}_m$ opère sur la situation. Toutes les filtrations qui interviennent sont invariantes sous l'action de G, et les morphismes sont G-équivariants. On munit $\mathcal{L} = \oplus_{i<j} L_{ij}$ de l'action de G par laquelle la transposition $\tau_{i,j}$ envoie les sections du fibré L_{ij} dans leurs opposées. C'est la seule action qui rend le morphisme ϵ équivariant. Ainsi $\mathcal{L}$ n'a pas de sections $\mathfrak{S}_m$-invariantes. Par suite $\mathcal{L}$ n'a pas de cohomologie $\mathfrak{S}_m$-invariante. Le groupe G étant fini, la cohomologie du faisceau des invariants F^G sur $\mathrm{Hilb}_*^m(X)$ (ou sur $\mathrm{S}_*^m(X)$), où F est un G-faisceau algébrique cohérent sur B (ou sur X_*^m) s'identifie aux invariants de la cohomologie de F.

Le théorème suivant nous montre comment on peut ramener le calcul de la cohomologie de $\mathrm{S}^l(L^{[m]})$ sur $\mathrm{Hilb}_*^m(X)$ à un calcul de cohomologie invariante sur X_*^m :

Théorème 2.4.1 – (i) *Il existe une inclusion canonique* $HC_*(\mathrm{S}^l(L^{[m]})) \hookrightarrow (\mathrm{Sym}\, W)^G$ *sur* $\mathrm{S}^m_*(X)$, *dont l'image est exactement* $(I^l)^G_l$, *partie homogène de degré* l *de* $(I^l)^G$.
– (ii) $R^q HC_*(\mathrm{S}^l(L^{[m]}))|_{\mathrm{S}^m_* X} = 0$ *pour* $q > 0$.

Preuve :
Le foncteur image directe invariante q^G_* est défini comme il suit : pour un faisceau F sur B, et un ouvert U de $\mathrm{Hilb}^m_*(X)$, $q^G_*(F)(U) = (F(q^{-1}(U)))^G$, où $q^{-1}(U)$ est automatiquement un ouvert G-invariant de B. En utilisant les propriétés des variétés quotient par un groupe fini, on obtient $\mathcal{O}^G_B = q^G_*(\mathcal{O}_B) = \mathcal{O}_{\mathrm{Hilb}^m_*(X)}$ d'où $q^G_*(\mathrm{S}^l \widetilde{V}) = \mathrm{S}^l(L^{[m]})$.
On en déduit que $HC_*(\mathrm{S}^l(L^{[m]})) = HC_* q^G_*(\mathrm{S}^l \widetilde{V}) = p^G_* \rho_*(\mathrm{S}^l \widetilde{V})$ qui se plonge canoniquement dans $p^G_*(\mathrm{S}^l W)$, avec $p^G_*((I^l)_l) = (I^l)^G_l$ pour image. Les morphismes p et q sont finis donc leurs images directes supérieures sont nulles. Par composition des foncteurs dérivés $R\,HC_*, Rp^G_* = p^G_*, R\rho_*$ et $Rq^G_* = q^G_*$ on trouve que $R\,HC_*(\mathrm{S}^l(L^{[m]})) = R\,HC_*(q^G_*(\mathrm{S}^l \widetilde{V})) = R\,HC_* \circ Rq^G_*(\mathrm{S}^l \widetilde{V}) = Rp^G_* \circ R\rho_*(\mathrm{S}^l \widetilde{V}) = p^G_* R\rho_*(\mathrm{S}^l \widetilde{V})$ d'où la nullité des $R^q HC_*(\mathrm{S}^l(L^{[m]}))$ pour $q > 0$ sur $\mathrm{S}^m_*(X)$.□

Corollaire 2.4.2 – (i) $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathrm{S}^l(L^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^m_2, (I^l)_l \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$
– (ii) $\mathrm{H}^q(\mathrm{Hilb}^m_*(\mathbb{P}_2), \mathrm{S}^l(L^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = \mathrm{H}^q(\mathbb{P}^m_{2*}, (I^l)_l \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$ *pour* $q > 0$.

Preuve :
Compte-tenu du fait que $\mathfrak{d} = HC^*(\mathcal{O}(1, \dots, 1)^G)$ il suffit d'écrire

$$R^q HC_*(\mathrm{S}^l(L^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = R^q HC_*(\mathrm{S}^l(L^{[m]})) \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s)^G = ((I^l)_l \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$

si $q = 0$ et 0 sinon, et d'utiliser les propriétés de cohomologie locale pour (i) et la suite spectrale de Leray pour (ii).□

Corollaire 2.4.3 *Le théorème 2.0.1 est vrai pour* $n \leq 11$.

Remarque 2.4.4 La démonstration utilise le corollaire 2.5.8 qui sera démontré au paragraphe 2.5.4, mais nous préfèrons la donner ici pour motiver le travail fait dans le chapitre 2.5.

Preuve du théorème 2.0.1 pour $n \leq 11$ **:**
Nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.4.5 *i) La* $\mathrm{SL}(3)$*-représentation* $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$ *est isomorphe à* $\mathrm{S}^{k+s} E \otimes \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{S}^s E)$ *;*
ii) On a pour $k + s \geq -2$ *et* $s \geq -2$,

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = 0.$$

On rappelle que $\mathcal{O}(k)^{[m]}$ a été défini dans la section 2.3, que $\mathfrak{d}$ est le fibré déterminant sur $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ défini par l'équation (2.5) et $E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$ est la représentation standard de $\mathrm{SL}(3)$.
Preuve :
i) On applique le corollaire 2.4.2 pour $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k)$. On tensorise la suite exacte $0 \to V \to W \to \mathcal{L} \to 0$ par $\mathcal{O}(s, \dots, s)$ et on écrit la suite exacte de cohomologie invariante. On a vu que $\mathcal{L}$ n'avait pas de cohomologie $\mathfrak{S}_m$-invariante. On obtient ainsi

$$\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^m_2, V \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G = \mathrm{H}^q(\mathbb{P}^m_2, \oplus_i \mathcal{O}(s, \dots, k+s, s, \dots, s))^G =$$
$$= \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad q > 0 \\ \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(k+s)) \otimes \mathrm{S}^{m-1} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(s)) = \mathrm{S}^{k+s} E \otimes \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{S}^s E) \quad \text{si} \quad q = 0. \end{cases}$$

ii) On trouve aussi
$$\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^m_{2*}, V \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G = \mathrm{H}^q(\mathbb{P}^m_2, V \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$
pour $q \leq 2$ (puisque le complémentaire de l'ouvert $\mathbb{P}^m_{2*}$ dans $\mathbb{P}^m_2$ est de codimension 4). Le membre de droite est nul pour $q > 0$, donc celui de gauche est nul pour $q = 1$ et $q = 2$. Par le corollaire 2.4.2 on obtient $\mathrm{H}^1(\mathrm{Hilb}^m_*(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = 0$. Puisque la codimension du complémentaire de cet ouvert est égale à 2, la suite exacte de cohomologie à support donne l'annulation de $\mathrm{H}^1(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$.□

Regardons le cas $l=1$. À partir de la présentation (2.3) de $\mathcal{R}$, avec k remplacé par $2l-3=2\cdot 1-3=-1$, $s=1$ et $m=n+l^2=n+1$, on obtient $\mathcal{O}(-1)^{^{[m]}}\simeq\mathcal{R}$ et

$$\dim H^0(\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d})=\dim \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(-1)^{^{[m]}}\otimes\mathfrak{d})=\dim \mathrm{S}^nE=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Pour n tel que $3\le n\le 6$, le théorème 2.2.8 permet donc de conclure.

Lemme 2.4.6 *i) La* $\mathrm{SL}(3)$*-représentation* $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(k)^{^{[m]}})\otimes\mathfrak{d}^{\otimes s})$ *est isomorphe au noyau du morphisme surjectif*

$$\mathrm{S}^{2k+s}E\otimes\mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{S}^sE)\oplus\mathrm{S}^2(\mathrm{S}^{k+s}E)\otimes\mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{S}^sE)\overset{(0,mult\otimes id)}{\to}\mathrm{S}^{2k+2s}E\otimes\mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{S}^sE),$$

où mult est le multiplication $\mathrm{S}^2(\mathrm{S}^rE)\to\mathrm{S}^{2r}E$.

ii) On a pour $k\ge -1$ *et* $s\ge 0$,

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(k)^{^{[m]}})\otimes\mathfrak{d}^{\otimes s})=0.$$

Preuve :

Il faut calculer cette fois-ci $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^m,(I^2)_2\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G$. On regarde les suites exactes associées à la filtration de S^2W :

$$0\to I_2\to\mathrm{S}^2W\to\mathrm{gr}_0(\mathrm{S}^2W)\to 0$$
$$0\to (I^2)_2\to I_2\to\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^2W)\to 0$$

On sait que $\mathrm{gr}_0(\mathrm{S}^2W)=\mathrm{S}^2\mathcal{L}$. On démontrera plus tard (cor.2.5.8) que $\mathrm{gr}_i(\mathrm{S}^lW)$ n'a pas de cohomologie invariante si $l-i$ est impair.

En écrivant les suites exactes de cohomologie invariante, après avoir tensorisé par $\mathcal{O}(s,\dots,s)$, on obtient

$$\mathrm{H}^q((I^2)_2\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G\simeq\mathrm{H}^q(I_2\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G,\forall q\ge 0,$$

et que $\mathrm{H}^0(I_2\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G$ est le noyau du morphisme

$$mor:\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^2W\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G\to\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^2\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G.$$

À l'aide de la proposition 2.1.1 ces espaces d'invariants se calculent aisément pour donner

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^2W\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G=\mathrm{S}^{2k+s}E\otimes\mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{S}^sE)\oplus\mathrm{S}^2(\mathrm{S}^{k+s}E)\otimes\mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{S}^sE)$$
$$\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^2\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G=\mathrm{S}^{2k+2s}E\otimes\mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{S}^sE).$$

La composante de mor sur le second facteur est induite par le morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2\times\mathbb{P}_2,\mathcal{O}(k+s)\boxtimes\mathcal{O}(k+s))\to\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_D(2k+2s)).$$

Le morphisme mor est alors surjectif et on peut calculer la dimension de son noyau.

ii) L'espace $\mathrm{H}^1((I^2)_2\otimes\mathcal{O}(s,\dots,s))^G$ s'injecte dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^2W\otimes\mathcal{O}(s,\cdots,s))^G=0$: il est donc nul. On obtient donc aussi la nullité de $\mathrm{H}^1(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2),\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(k)^{^{[m]}})\otimes\mathfrak{d}^{\otimes s})$.□

Passons ensuite au cas $l=2$. À partir de la présentation (2.4) de $\mathrm{S}^2\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d}$, et des annulations de la cohomologie supérieure obtenues, il résulte une suite exacte de représentations

$$0\to\Lambda^2E\otimes\mathrm{H}^0(\mathfrak{d})\to E\otimes\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1)^{^{[m]}}\otimes\mathfrak{d})\to\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(1)^{^{[m]}})\otimes\mathfrak{d})\to\mathrm{H}^0(U,\mathrm{S}^2\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d})\to 0$$

On en déduit

$$\dim\mathrm{H}^0(U,\mathrm{S}^2\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d})=\dim\mathrm{S}^3E\otimes\mathrm{S}^{n+3}E\oplus\mathrm{S}^2(\mathrm{S}^2E)\otimes\mathrm{S}^{n+2}E$$
$$-\dim\mathrm{S}^4E\otimes\mathrm{S}^{n+2}E-\dim E\otimes\mathrm{S}^2E\otimes\mathrm{S}^{n+3}E+\dim\Lambda^2E\otimes\mathrm{S}^{n+4}E.$$

Par suite,

$$\dim \mathrm{H}^0(U, \mathrm{S}^2\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}) = 10\binom{n+5}{2} + 21\binom{n+4}{2}$$

$$-15\binom{n+4}{2} - 18\binom{n+5}{2} + 3\binom{n+6}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

On a ainsi démontré le théorème pour tout n tel que $3 \leq n \leq 11$.□

Les vraies difficultés apparaîssent à partir de $l = 3$.

Lemme 2.4.7 *La* $\mathrm{SL}(3)$*-représentation* $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathrm{S}^3(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$ *est isomorphe au noyau du morphisme*

$$\alpha : \mathrm{H}^0(S^3W \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G \to \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(S^3W) \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G$$

et $\mathrm{H}^1(\mathrm{Hilb}^m_*(\mathbb{P}_2), \mathrm{S}^3(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$ *à son conoyau.*

Preuve :

On écrit à nouveau les suites associées à la filtration de S^3W :

$$0 \to I_3 \to \mathrm{S}^3W \to \mathrm{S}^3\mathcal{L} \to 0$$

$$0 \to (I^2)_3 \to I_3 \to \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W) \to 0$$

$$0 \to (I^3)_3 \to (I^2)_3 \to \mathrm{gr}_2(\mathrm{S}^3W) \to 0.$$

On a $\mathrm{S}^3\mathcal{L} = \oplus_{i<j} L_{ij}^{\otimes 3}$. En tenant compte de l'action de $\mathfrak{S}_m$ sur $\mathcal{L}$ on obtient que $\mathrm{S}^3\mathcal{L}$ n'a pas de cohomologie $\mathfrak{S}_m$-invariante. Comme on le verra dans le corollaire 2.5.8, $\mathrm{gr}_2(\mathrm{S}^3W)$ n'a pas de cohomologie invariante non plus. Les suites de cohomologie invariante associées nous fournissent :

$$\mathrm{H}^q((I^3)_3 \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G \simeq \mathrm{H}^q((I^2)_3 \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G$$

pour $q \geq 0$ et

$$\mathrm{H}^q(I_3 \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G \simeq \mathrm{H}^q(S^3W \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G$$

pour $q \geq 0$.

Alors l'espace recherché $\mathrm{H}^0((I^3)_3 \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G$ s'obtient comme le noyau du morphisme

$$\alpha : \mathrm{H}^0(S^3W \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G \to \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(S^3W) \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G$$

et puisque $\mathrm{H}^1(S^3W \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G = 0$, l'espace $\mathrm{H}^1((I^3)_3 \otimes \mathcal{O}(s,\ldots,s))^G$ s'obtient comme son conoyau.□

Le cas qui nous intéresse ici est biensûr $s = 1$. Toute la suite sera consacrée à l'étude minutieuse du morphisme α, afin de déterminer son noyau.

Pour bien comprendre la situation, on examinera d'abord le cas $m = 2$, qui est essentiel pour pouvoir comprendre le cas m général, dans un premier temps sans tensoriser avec le fibré inversible $\mathcal{O}(1,\ldots,1)$.

2.5 Le noyau du morphisme α

Dans les sections 2.5.1-2.5.5 suivantes on peut choisir X comme étant une surface lisse quasi-projective.

2.5.1 Le gradué $\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W)$

On se propose de décrire le gradué $\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W)$, dans le cas $m = 2$, L fibré inversible sur X. Dans ce cas les ouverts indexés par un étoile coïncident avec les espaces entiers, D est la diagonale Δ de $X \times X$, $\mathcal{L} = L_D = L_\Delta$ et il n'y a pas de confusion si on le note toujours L. Ici $W = L_1 \oplus L_2$. Le gradué $\mathrm{gr}_i(\mathrm{Sym}\, W)$ est un $\mathrm{Sym}\, L$-module ; pour $i = 0$, c'est l'algèbre $\mathrm{Sym}\, L$. On a vu aussi que $\mathrm{gr}_1(\mathrm{Sym}\, W)$ est $\mathcal{N}_D$ en degré 0 et V_D en degré 1.

Pour comprendre $\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^k W)$ on regarde les $k+1$ morphismes canoniques de $\mathrm{S}^k W|_D \to L^{\otimes k}$ qui sont construits de la manière suivante : on considère les deux morphismes canoniques $W|_D = L \oplus L \to L$ dont l'un, ϵ_+, est donné par la matrice (id, id) et l'autre, ϵ_-, est donné par la matrice $(id, -id)$; c'est le morphisme ϵ considéré au paragraphe 2.3.1. On obtient un isomorphisme $\varepsilon : W|_D \to L \oplus L$ défini par (ϵ_+, ϵ_-) et par suite un isomorphisme

$$\mathrm{S}^k\varepsilon : \mathrm{S}^k W|_D \to \mathrm{S}^k(L \oplus L) = L^{\otimes k} \oplus \cdots \oplus L^{\otimes k}$$

dont la i-ème composante dans la somme directe est notée $\varepsilon_{i,k-i}$. La dernière composante $\varepsilon_{k,0}$ envoie $e_1^i e_2^{k-i}$ en $(-1)^{k-i} e^k$ avec pour $e, e_1 = p_1^*(e), e_2 = p_2^*(e)$ des repères locaux de L, L_1 et respectivement L_2, et s'étend donc en un morphisme d'algèbres $\mathrm{Sym}\, W \to \mathrm{Sym}\, L$ qui n'est autre que le morphisme d'algèbres considéré auparavant, ϵ_-.

L'avant-dernière composante $\varepsilon_{k-1,1}$ définit une dérivation $\mathrm{Sym}\, W \to \mathrm{Sym}\, L$ compatible avec la graduation. En degré k, $\varepsilon_{k-1,1}$ envoie $e_1^i e_2^{k-i}$ sur $(i(-1)^{k-i} + (k-i)(-1)^{k-i-1}) e^k$ et $\mathrm{Sym}\, L$ est vu comme $\mathrm{Sym}\, W$-module par l'intermédiaire du morphisme ϵ_-. On vérifie alors que

$$\varepsilon_{k-1,1}(xy) = \varepsilon_{k-1,1}(x)\epsilon_-(y) + \epsilon_-(x)\varepsilon_{k-1,1}(y)$$

et comme $\epsilon_-(I) = 0$ on obtient que le noyau de $\varepsilon_{k-1,1}$ contient $\mathrm{F}^2(\mathrm{Sym}\, W) = I^2 \mathrm{Sym}\, W$. Donc $\varepsilon_{k-1,1}$ passe au quotient en une dérivation linéaire sur l'algèbre $\mathrm{Sym}\, L$, notée encore $\epsilon_+ : \mathrm{gr}_1(\mathrm{Sym}\, W)) \to \mathrm{Sym}\, L$ qui est elle aussi compatible avec la graduation ; cette propriété, jointe au fait qu'on connaît déjà ϵ_+ sur $V_D = \mathrm{gr}_1(W)$, caractérise la dérivation ϵ_+.

Le faisceau conormal à D, $\mathcal{N}_D$, est isomorphe au faisceau Ω^1 des formes différentielles sur X. Un tel isomorphisme s'obtient en associant à la différentielle $\mathrm{d}f$ d'une fonction régulière sur un ouvert U de X, la section de $\mathcal{N}_D$ définie par la classe $[f_2 - f_1]$ où $f_i = pr_i^*(f)$. L'image directe par p de la suite (2.9), écrite en degré k est (c'est un cas particulier de la proposition 2.3.3) :

$$0 \to \mathcal{N} \otimes L^{\otimes k} \to \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^k W) \to K \otimes L^{\otimes(k-1)} \to 0$$

et comme ici $K \simeq L$ on obtient une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules

$$0 \to \Omega^1 \otimes L^{\otimes k} \to \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^k W) \to L^{\otimes k} \to 0 \tag{2.11}$$

où la première flèche se calcule de la manière suivante : pour $f \in \mathcal{O}(U)$ et $s \in \mathrm{H}^0(U, L^{\otimes k})$,

$$\mathrm{d}f \otimes s \mapsto \frac{1}{2}[(f_2 - f_1)(s_1 + (-1)^k s_2)] = (-1)^k[(f_2 - f_1)s_2]$$

où s_i est la section de $\mathrm{S}^k W$ sur $U \times U$ définie par $pr_i^*(s)$. La seconde flèche est ϵ_+. En effet $\frac{1}{2}(s_1 + (-1)^k s_2)$ est une section de $\mathrm{S}^k W$ dont l'image par ϵ_- est s (et c'est aussi le cas pour $(-1)^k s_2$).

2.5.2 Les opérateurs ∇ et Δ

On considère l'opérateur $\mathbb{C}$-linéaire $\nabla : L^{\otimes k} \to \mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^k W$ qui associe à une section s la classe $\nabla(s)$ de la section de $\mathrm{F}^1 \mathrm{S}^k W$ définie par $(-1)^k s_2 - s_1$; autrement dit

$\nabla(s) = [(-1)^k s_2 - s_1]$ (on vérifie que $\epsilon_-(\nabla(s)) = 0$).

On a $\nabla(1) = [pr_2^* 1 - pr_1^* 1] = 0$.

Lemme 2.5.1 *Cet opérateur n'est pas linéaire, mais satisfait à la condition* $\nabla(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla(s)$ *où* f *est une fonction régulière sur un ouvert* $U \subset X$ *et* s *est une section locale de* $L^{\otimes k}$ *sur* U*. Dans cette formule* $\Omega^1 \otimes L^{\otimes k}$ *est vu comme sous-module de* $\mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^k W$ *par l'inclusion de la suite (2.11).*

Preuve :

Par définition :

$$\begin{aligned} \nabla(fs) &= [(-1)^k f_2 s_2 - f_1 s_1] = [(-1)^k (f_2 - f_1) s_2 + f_1((-1)^k s_2 - s_1)] = \\ &= \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla(s). \end{aligned}$$

Ceci signifie que ∇ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1. Ce qu'on va utiliser c'est que $-\frac{\nabla}{2k}$ est une section $\mathbb{C}$-linéaire de ϵ_+ dans la suite (2.11), en vérifiant par un calcul direct que $-\frac{1}{2k}\epsilon_+(\nabla(s)) = s$.

Au passage on peut remarquer que ∇ se factorise en un morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire, $\bar{\nabla} : J^1L^k \to \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^kW)$ (J^1L^k est le fibré des jets à valeurs dans $L^{\otimes k}$, avec sa structure naturelle de $\mathcal{O}_X$-module à gauche) qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^1_X \otimes L^{\otimes k} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & J^1L^k \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\nabla}"] & L^{\otimes k} \arrow[r] \arrow[d, "-2k"] \arrow[dl, "\nabla"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_X \otimes L^{\otimes k} \arrow[r] & \mathrm{gr}_1\mathrm{S}^kW \arrow[r] & L^{\otimes k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les deux flèches extrêmes sont des isomorphismes, donc la flèche du milieu est un isomorphisme. Cet isomorphisme induit en particulier, pour $k = 1$, un isomorphisme $J^1L \to V_D$.

Considérons maintenant deux indices i et j tels que $i + j = k$. Soient $s \in \mathrm{H}^0(U, L^{\otimes i})$ et $t \in \mathrm{H}^0(U, L^{\otimes j})$ deux sections locales au-dessus du même ouvert U. On considère les sections s_k de S^iW et t_k de S^jW définies par image réciproque par pr_k (pour $k = 1, 2$) et la section de $\mathrm{gr}_1\mathrm{S}^kW$:

$$D(s,t) = [(-1)^i s_2 t_1 - (-1)^j s_1 t_2].$$

Comme $\epsilon_-(D(s,t)) = 0$, la quantité entre crochets appartient à $\mathrm{F}^1\mathrm{S}^kW$ et par conséquent la formule a un sens.

Lemme 2.5.2 *Soient s et t comme ci-dessus. On a dans* $\mathrm{gr}_1(\mathrm{Sym}\, W)$, *considéré comme* $\mathrm{Sym}\, L$*-module :*

$$\begin{array}{rcl}
\nabla(st) & = & \nabla(s)t + s\nabla(t) \\
D(s,t) & = & \nabla(s)t - s\nabla(t)
\end{array}$$

Preuve :
Compte-tenu de la définition de l'homomorphisme $\epsilon_- : W|_D \to L$, on a dans $\mathrm{Sym}\, W$:

$$\begin{array}{rcl}
(-1)^k\nabla(st) & = & [s_2t_2 - (-1)^k s_1t_1] = [(s_2 - (-1)^i s_1)t_2 + (-1)^i s_1(t_2 - (-1)^j t_1)] \\
 & & = (-1)^k(\nabla(s)t + s\nabla(t))
\end{array}$$

De même

$$(-1)^i[s_2t_1 - (-1)^k s_1t_2] = [(-1)^i(s_2 - (-1)^i s_1)t_1] - (-1)^j[s_1(t_2 - (-1)^j t_1)]$$

compte-tenu de la définition de la structure multiplicative dans l'algèbre bigraduée $\mathrm{gr}(\mathrm{Sym}\, W)$ et que

$$gr_0(\mathrm{Sym}\, W) = \mathrm{Sym}\, L,$$

ceci n'est autre que $\nabla(s)t - s\nabla(t)$.

Corollaire 2.5.3 *Soit $k = i + j$, et $l = i - j$. L'opérateur différentiel $(s,t) \mapsto -l\nabla(st) + kD(s,t)$ prend ses valeurs dans $\Omega^1 \otimes L^{\otimes k}$.*

Ceci résulte du fait que $\epsilon_+(\nabla(s)) = -2ks$ si s est une section locale de $L^{\otimes k}$: parce que ϵ_+ est une dérivation, ceci entrane en effet que $\epsilon_+(-l\nabla(st) + kD(s,t)) = 0$.

2.5.3 Le morphisme $\alpha_2 : \mathrm{H}^0(X \times X, \mathrm{S}^kW)^\tau \to \mathrm{H}^0(X, \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^kW))^\tau$

On suppose k impair. Soit τ la transposition (12) et désignons par $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^kW)^\tau$ l'espace des sections de $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^kW)$ invariantes sous l'action de τ. Puisque dans le cas où k est impair, le gradué $\mathrm{gr}_0(\mathrm{S}^kW)$ n'a pas de cohomologie invariante (cor. 2.5.8), ces sections invariantes définissent des sections de $\mathrm{F}^1\mathrm{S}^kW$, d'où le morphisme α_2. En outre, les sections de $\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^kW)$ sont invariantes pour l'action de τ, puisque pour $k-1$ pair, τ agit trivialement sur tous les gradués de sa filtration déduite de (2.6) (voir cor. 2.5.8). On a un isomorphisme canonique

$$\oplus_{i>j, i+j=k}\mathrm{H}^0(L^{\otimes i}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(L^{\otimes j}) \simeq \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^kW)^\tau$$

donné par $s \otimes t \mapsto s_1 t_2 + s_2 t_1$ pour $s \in \mathrm{H}^0(L^{\otimes i})$ et $t \in \mathrm{H}^0(L^{\otimes j})$.

Désignons par $\mu : \mathrm{H}^0(L^{\otimes i}) \otimes \mathrm{H}^0(L^{\otimes j}) \to \mathrm{H}^0(L^{\otimes k})$ la multiplication et considérons pour $k > 1$ le scindage de la suite (2.11) sur les sections globales :

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^k W) \simeq \mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes k}) \oplus \mathrm{H}^0(L^{\otimes k})$$

défini sur le premier facteur par l'inclusion canonique, et sur le deuxième facteur par la section $s \mapsto \nabla(s)$.

Si $s \in \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes i}) \otimes \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes j})$ on pose $\Delta_l(s) = D(s) - \frac{l}{k}\nabla\mu(s)$ pour $l = i - j$ et $i + j = k$. Pour $l = k$ on obtient que $\Delta_l(s) = 0$ puisque pour s décomposable en $m \otimes 1$, $\Delta_l(s) = \nabla(m) \cdot 1 - m \cdot \nabla(1) - \nabla(m) = 0$.

Proposition 2.5.4 *La matrice de α_2 dans ces décompositions est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & (-1)^{\frac{k+l}{2}}\Delta_l & \cdots & (-1)^{\frac{k+1}{2}}\Delta_1 \\ 2k & \cdots & -(-1)^{\frac{k+l}{2}}2l\mu & \cdots & -(-1)^{\frac{k+1}{2}}2\mu \end{pmatrix}.$$

Preuve :

On part d'une section $S \in \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^k W)^\tau$ qui provient d'une section de $\mathrm{H}^0(X, L^{\otimes i}) \otimes \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes j})$ avec $i + j = k$, $i - j = l$. Supposons aussi que $j \neq 0$ et que cette section se décompose en $s \otimes t$ avec $s \in \mathrm{H}^0(L^{\otimes i})$ et $t \in \mathrm{H}^0(L^{\otimes j})$. Alors S s'écrit dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^k W)^\tau$ comme $s_1 t_2 + t_1 s_2$ et son image par α_2 dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^k W)$ est la classe $[s_1 t_2 + t_1 s_2]$ modulo $\mathrm{F}^2 \mathrm{S}^k W$.

Si i est pair et j impair, $[s_1 t_2 + t_1 s_2] = D(s,t)$ et la composante dans $\mathrm{H}^0(L^{\otimes k})$ est $\epsilon_+(D(s,t))$. Mais $\epsilon_+(-l\nabla(st) + kD(s,t)) = 0$ donc $\epsilon_+(D(s,t)) = \frac{l}{k}\epsilon_+(\nabla(st)) = \frac{l}{k} \cdot (-2k\mu(s \otimes t)) = -2l\mu(s \otimes t)$. Si i est impair on obtient l'opposé. Si $l = k$ alors $j = 0$, $s \in \mathrm{H}^0(L^{\otimes k})$ et son écriture dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^k W)^\tau$ est $s_1 + s_2$. Son image par α_2 est $[s_1 + s_2] = -\nabla(s)$ et $\epsilon_+(-\nabla(s)) = 2ks$. D'où la deuxième ligne de la matrice.

Pour trouver la composante dans $\mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes k})$ il suffit de soustraire l'image réciproque par la section $-\frac{1}{2k}\nabla$ du morphisme ϵ_+ de la composante dans $\mathrm{H}^0(L^{\otimes k})$. Par exemple pour i pair on fait $D(s,t) - (-\frac{1}{2k}\nabla(\epsilon_+(D(s,t)))) = D(s,t) + \frac{1}{2k}\nabla(-2lst) = \Delta_l(S)$. Pour i impair on trouve l'opposé et pour $j = 0$: $-\nabla(s) + \frac{1}{2k}\nabla(2ks) = 0$, d'où la première ligne.□

Corollaire 2.5.5 *Si $k = 3$, le noyau et le conoyau de α_2 sont isomorphes respectivement au noyau et au conoyau de l'opérateur linéaire*

$$3D - \nabla\mu : \mathrm{H}^0(L^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{H}^0(L) \to \mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3}).$$

Preuve :

La matrice de α_2 s'écrit ici

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta_1 = D - \frac{1}{3}\nabla\mu \\ 6 & -2\mu \end{pmatrix}$$

ce qui conduit immédiatement à l'énoncé.□

2.5.4 Généralisation à $\mathrm{Hilb}^m(X)$

Le cas général repose essentiellement sur le cas $m = 2$. Il faut considérer les invariants par rapport au groupe symétrique $G = \mathfrak{S}_m$ mais on a donné dans les préliminaires, paragraphe 2.1.1, le procédé qui nous ramène à des calculs d'invariants plus aisés.

Description de $\mathrm{H}^0(X_*^m, \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^k W))^G$

Le faisceau $\mathrm{gr}_1(\mathrm{Sym}\, W)$ a pour support la diagonale D de X_*^m. Le groupe symétrique agit sur la situation. Soit U_{12} le complémentaire de la réunion des diagonales $\Delta_{i,j}$ pour $\{i,j\} \neq \{1,2\}$ dans X_*^m. Cet ouvert contient uniquement la diagonale $\Delta_{1,2} = \Delta \times X^{m-2} \cap X_*^m$. On note $W_{12} = (L_1 \oplus L_2)|_{U_{12}}$ et $W^{12} = (L_3 \oplus \cdots \oplus L_m)|_{U_{12}}$ de sorte que $W|_{U_{12}} = (W_{12} \oplus W^{12})|_{U_{12}}$.

Proposition 2.5.6 *On a*

$$\mathrm{gr}_k(\mathrm{Sym}\,W)|_{\Delta_{12}} \simeq \oplus_{i+j=k}\mathrm{gr}_i(\mathrm{Sym}\,W_{12}) \otimes \mathrm{S}^j W^{12}[-j].$$

Preuve :

Le produit tensoriel peut être vu comme un produit tensoriel sur $\mathbb{C}$, ou bien comme un produit tensoriel externe, si, plutôt qu'utiliser W_{12} et W^{12} on utilise $W'_{12} = L_1 \oplus L_2$ sur $X \times X$ et $W^{12\prime} = L_3 \oplus \cdots \oplus L_m$ sur X^{m-2}. On a $W_{12} = pr^*_{12}(W'_{12})|_{U_{12}}$, $W^{12} = pr^*_{3\cdots m}(W^{12\prime})|_{U_{12}}$ et $W'_{12} \boxtimes W^{12\prime} = W_{12} \otimes W^{12}$. La notation $\mathrm{S}^j W^{12}[-j]$ signifie qu'on place $\mathrm{S}^j W^{12}$ en degré j.

Le morphisme ε devient en restriction à U_{12} :

$$\epsilon|_{U_{12}} : \mathrm{Sym}\,W|_{U_{12}} \to \mathrm{Sym}\,L|_{U_{12}} = \mathrm{Sym}\,L_\Delta|_{\Delta_{12}}$$

et, puisque $\mathrm{Sym}\,W|_{U_{12}} = \mathrm{Sym}\,W_{12} \otimes \mathrm{Sym}\,W^{12} = \mathrm{Sym}\,W'_{12} \boxtimes \mathrm{Sym}\,W^{12\prime}$, ce morphisme est aussi un produit tensoriel externe des morphismes

$$\epsilon_{12} : \mathrm{Sym}\,W'_{12} \to \mathrm{Sym}\,L_\Delta$$

de noyau I_{12}, qui recopie la situation étudiée dans le cas où m était égal à 2, et

$$\epsilon_{3\cdots m} : \mathrm{Sym}\,W^{12\prime} \to \mathcal{O}_{X^{m-2}}$$

qui vaut l'identité en degré 0 et 0 en degré ≥ 1, de noyau $(\mathrm{Sym}\,W^{12\prime})_{\geq 1}$.

On filtre $\mathrm{Sym}\,W'_{12}$ par les puissances de I_{12} et $\mathrm{Sym}\,W^{12\prime}$ par les puissances de $(\mathrm{Sym}\,W^{12\prime})_{\geq 1}$ qui sont égales aux $(\mathrm{Sym}\,W^{12\prime})_{\geq j}$.

Le noyau de $\epsilon|_{U_{12}}$ s'écrit alors comme

$$I = I_{12} \boxtimes \mathrm{Sym}\,W^{12\prime} + \mathrm{Sym}\,W'_{12} \boxtimes \mathrm{Sym}\,W^{12\prime}_{\geq 1}$$

et sa puissance k-ième

$$I^k = \sum_{i+j=k} I^i_{12} \boxtimes \mathrm{Sym}\,W^{12\prime}_{\geq j}.$$

On veut calculer I^k/I^{k+1}. Le calcul de ce gradué se fait à l'aide du lemme 2.1.2 du paragraphe préliminaire. La condition cohomologique d'annulation est vérifiée en vertu du lemme préliminaire 2.1.3.

On trouve

$$\mathrm{gr}_k(\mathrm{Sym}\,W)|_{\Delta_{12}} \simeq I^k/I^{k+1}|_{U_{12}} \simeq \oplus_{i+j=k}\mathrm{gr}_i(\mathrm{Sym}\,W_{12}) \otimes \mathrm{S}^j W^{12}[-j].\square$$

Corollaire 2.5.7 *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{H}^0(X^m_*, \mathrm{gr}_k(\mathrm{Sym}\,W))^G \simeq \oplus_{i+j=k}(\mathrm{H}^0(X^2, \mathrm{gr}_i(\mathrm{Sym}\,W_{12}))^{\mathfrak{S}_2} \otimes \mathrm{H}^0(X^{m-2}, \mathrm{S}^j W^{12})^{\mathfrak{S}_{m-2}}[-j]).$$

Preuve du corollaire :

Appliquons le résultat du lemme 2.1.1 pour $M = \mathrm{H}^0(X^m_*, \mathrm{gr}_k(\mathrm{Sym}\,W))$ et pour l'ensemble d'indices $I = \{\{i,j\}\}_{1\leq i<j\leq m}$ sur lequel G agit. Prenons $L_{1,2} = \mathrm{gr}_k(\mathrm{Sym}\,W)|_{U_{12}}$, calculé par la proposition 2.5.6, et $L_{i,j}$ le fibré similaire sur la diagonale Δ_{ij} : $\mathrm{gr}_k(\mathrm{Sym}\,W)|_{\Delta_{ij}}$. L'espace M^G s'obtient en prenant les invariants de $M_{1,2}$, pour le stabilisateur de $\{1,2\}$, $\mathrm{Stab}\,\{1,2\} = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{m-2}$. Le complémentaire de l'ouvert $\Delta_{i,j}$ dans $\Delta \times X^{m-2}$ est de codimension ≥ 2, donc pour le calcul de l'espace des sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_i(\mathrm{Sym}\,W_{12}) \otimes \mathrm{S}^j W^{12}[-j])$ on peut se placer sur $\Delta \times X^{m-2}$, où on applique le théorème de Künneth. Puisque $\mathfrak{S}_2$ n'agit pas sur ce qui provient de X^{m-2} et $\mathfrak{S}_{m-2}$ n'agit pas sur ce qui provient de X^2, on a

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_i(\mathrm{Sym}\,W_{12}) \otimes \mathrm{S}^j W^{12}[-j])^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{m-2}} = \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_i(\mathrm{Sym}\,W_{12}))^{\mathfrak{S}_2} \otimes \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^j W^{12})^{\mathfrak{S}_{m-2}}[-j]$$

d'où le résultat.

Corollaire 2.5.8 *Pour $l-k$ impair, le faisceau $\mathrm{gr}_k(\mathrm{S}^l W)$ n'a pas de sections invariantes sous l'action de G.*

Preuve :

En effet $\mathrm{gr}_i(\mathrm{S}^l W_{12})$ n'a pas de sections invariantes sous l'action de $\mathfrak{S}_2$ si $l-i$ est impair puisque dans la filtration déduite de (2.6), aucun de ses gradués n'a des sections invariantes ($\mathfrak{S}_2$ agit par (-1) sur le fibré conormal de la diagonale dans $X \times X$ et sur L, et trivialement sur K donc par $(-1)^{2q+l-i}$ sur $\mathrm{gr}_q(\mathrm{gr}_i(\mathrm{S}^l W_{12}))$). Mais

$$\mathrm{gr}_k(\mathrm{S}^l W) \simeq \oplus_{i+j=k} \mathrm{gr}_i(\mathrm{S}^{l-j} W_{12}) \otimes \mathrm{S}^j W^{12}$$

et donc si $l-i-j = l-k$ est impair, $\mathrm{gr}_i(\mathrm{S}^{l-j} W_{12})$ n'a pas de sections invariantes sous l'action de G. On avait déjà utilisé ce corollaire dans les sections 2.4 et 2.5.3.□

Remarque 2.5.9 Les démonstrations de la proposition 2.5.6 et du corollaire 2.5.8 n'utilisent pas les résultats des sections 2.4 et 2.5.3.

On a tout fait pour comprendre que pour l impair

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^l W)^G &= \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^l W_{12})^{\mathfrak{S}_2} \oplus \left[\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_0 \mathrm{S}^{l-1} W_{12})^{\mathfrak{S}_2} \otimes \mathrm{H}^0(W^{12})^{\mathfrak{S}_{m-2}}\right] \\ &= \mathrm{H}^0(J^1 L^{\otimes l}) \oplus \left[\mathrm{H}^0(L^{\otimes(l-1)}) \otimes \mathrm{H}^0(L)\right] \\ &= \mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes l}) \oplus \mathrm{H}^0(L^{\otimes l}) \oplus \mathrm{H}^0(L^{\otimes(l-1)}) \otimes \mathrm{H}^0(L). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Les invariants de $\mathrm{H}^0(X^m, \mathrm{S}^l W)$ se calculent facilement mais l'écriture est lourde pour l élevé. On préfère donc se limiter dans la suite au seul cas qui nous intéresse $l = 3$.

On a

$$\mathrm{S}^3 W = \oplus_{i=1}^n L_i^{\otimes 3} \oplus \oplus_{i \neq j}(L_i^{\otimes 2} \otimes L_j) \oplus \oplus_{i<j<k}(L_i \otimes L_j \otimes L_k)$$

et la même proposition appliquée à $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ et les fibrés $L_i^{\otimes 3}$, ensuite à $I = \{(i,j)\}_{1 \le i,j \le m}$ et $L_{(i,j)} = L_i^{\otimes 2} \otimes L_j$ et finalement à $I = \{\{i,j,k\}\}_{1 \le i<j<k \le m}$ et $L_{\{i,j,k\}} = L_i \otimes L_j \otimes L_k$, nous prouve que

$$\mathrm{H}^0(X, L^{\otimes 3}) \oplus \left[\mathrm{H}^0(X, L^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{H}^0(X, L)\right] \oplus \mathrm{S}^3 \mathrm{H}^0(X, L) = \mathrm{H}^0(X^m, \mathrm{S}^3 W)^{\mathfrak{S}_m} \tag{2.13}$$

l'isomorphisme étant donné par

$$(s, t \otimes u, vzw) \mapsto \Big(\sum_i s_i, \sum_{1 \le i<j \le m} (t_i u_j + t_j u_i), \sum_{i \neq j \neq k, i \neq k} v_i z_j w_k\Big)$$

(naturellement $s_i = pr_i^*(s)$, et de même pour t_i, u_i, v_i, z_i, w_i).

En effet, comme $\mathrm{H}^0(X^m, L_i^{\otimes 3}) = \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes 3})$ par la formule de Künneth (car $L_i = pr_i^* L \otimes (\otimes_{j \neq i} pr_j^* \mathcal{O}_X)$) toutes les sections de $L_i^{\otimes 3}$ sur X^m sont en effet des images réciproques $pr_i^*(s)$ avec s section de $L^{\otimes 3}$ sur X. Comme $\mathrm{H}^0(X^m, \oplus_{i=1}^m L_i^{\otimes 3})^{\mathfrak{S}_m} = \mathrm{H}^0(X^m, L_1^{\otimes 3})^{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1}}$ et que le stabilisateur de 1 n'agit pas sur $pr_1^*(s)$ on obtient que $\mathrm{H}^0(X^m, L_1^{\otimes 3})^{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1}} = \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes 3})$ et de manière analogue les autres termes dans la décomposition. Le terme $\mathrm{S}^3 \mathrm{H}^0(X, L)$ s'obtient puisqu'il faut considérer le stabilisateur de $\{1, 2, 3\}$ en tant qu'ensemble, c'est-à-dire $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{m-3}$ et

$(\mathrm{H}^0(X^m, L_1) \otimes \mathrm{H}^0(X^m, L_2) \otimes \mathrm{H}^0(X^m, L_3))^{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{m-3}} = \mathrm{S}^3 \mathrm{H}^0(X, L)$.

On dispose comme précédemment des opérateurs

$$\nabla : L^{\otimes l} \to \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^l W)$$

défini par $\nabla(s) = \sum_{i<j} \nabla_{ij}(s)$ et

$$D : \Gamma(U, L^{\otimes p}) \times \Gamma(U, L^{\otimes q}) \to \Gamma(U \times \cdots \times U, gr_1(\mathrm{S}^l W))$$

défini pour $p + q = l$ et U ouvert de X par $D(s,t) = \sum_{i<j} D_{ij}(s,t)$.

Ici ∇_{ij} et D_{ij} sont définis sur les ouverts U_{ij} contenant la seule diagonale Δ_{ij} exactement comme ∇ et D dans le cas $m = 2$, et jouissent des même propriétés :

$$\nabla_{ij} : L^{\otimes l} \to \mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^l W$$

défini par $s \mapsto [-s_i + (-1)^l s_j]$ où $s_i = pr_i^*(s)$ et

$$D_{ij} : \Gamma(U, L^{\otimes p}) \times \Gamma(U, L^{\otimes q}) \to \Gamma((U \times \cdots \times U) \cap U_{ij}, \mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^l W)$$

défini par $(s,t) \mapsto [(-1)^p s_i t_j - (-1)^q s_j t_i]$ où $t_i = pr_i^*(t)$.

La proposition qui suit est l'analogue de la proposition 2.5.4 :

Proposition 2.5.10 *Dans les sommes directes (2.12) et (2.13), la matrice du morphisme canonique :*

$$\alpha_m : \mathrm{H}^0(X^m, \mathrm{S}^3 W)^G \to \mathrm{H}^0(X^m, \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3 W))^G$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 \\ 6 & -2\mu & 0 \\ 0 & 2id & -2\nu \end{pmatrix}$$

où ν est le morphisme canonique $\mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L) \to \mathrm{H}^0(L^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{H}^0(L)$ induit par l'application linéaire $stu \mapsto st \otimes u + su \otimes t + ut \otimes s$. Dans ce contexte $\Delta = D - \frac{1}{3}\nabla\mu$.

Preuve :

Afin de calculer la première colonne de la matrice de α_m, considérons une section locale s de $L^{\otimes 3}$ sur un ouvert U. La section définie par $s_1 + s_2 + \cdots + s_m$ est $\mathfrak{S}_m$-invariante. C'est une section $\mathfrak{S}_m$-invariante de $\mathrm{F}^1\mathrm{S}^3 W$, ou bien une section $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{m-2}$-invariante de $\mathrm{F}^1\mathrm{S}^3 W|_{U_{12}} = \mathrm{F}^1\mathrm{S}^3 W_{12} \oplus \mathrm{S}^2 W_{12} \otimes W^{12} \oplus W_{12} \otimes \mathrm{S}^2 W^{12} \oplus \mathrm{S}^3 W^{12}$. Modulo $\mathrm{F}^2\mathrm{S}^3 W|_{U_{12}}$ on obtient $[s_1 + s_2] \in \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3 W_{12})$ (puisque $s_3 + \cdots + s_m \in \mathrm{S}^3 W^{12}$ qui est inclus dans $\mathrm{F}^2\mathrm{S}^3 W|_{U_{12}}$).

Son image dans la décomposition de $\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^l W))^G$ est $(-\nabla(s), 0)$. Si on décompose encore $\mathrm{H}^0(J^1 L^3) = \mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3}) \oplus \mathrm{H}^0(L^{\otimes 3})$, d'après le résultat trouvé dans le cas $m = 2$, on obtient la première colonne de la matrice comme $(0, 6, 0)$.

Pour la deuxième colonne, considérons deux sections $s \in \Gamma(U, L^{\otimes 2})$ et $t \in \Gamma(U, L)$. La section définie par $\sum_{1 \leq i < j \leq m}(s_i t_j + s_j t_i) = s_1 t_2 + s_2 t_1 + (s_1 + s_2)(t_3 + \cdots + t_m) + (t_1 + t_2)(s_3 + \cdots + s_m) + \sum_{3 \leq i < j \leq m}(s_i t_j + s_j t_i)$ est $\mathfrak{S}_m$-invariante. On procède comme auparavant. Modulo $\mathrm{F}^2\mathrm{S}^3 W|_{U_{12}}$, il reste seulement les deux premiers termes de cette expression :$D_{12}(s,t) = [s_1 t_2 + s_2 t_1] \in \mathrm{gr}_1 \mathrm{S}^3 W_{12}$ et $[s_1 + s_2]t \in \mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^2 W_{12}) \otimes (W^{12})^{\mathfrak{S}_{m-2}}$. La classe $[s_1 + s_2]$ modulo $\mathrm{F}^2\mathrm{S}^2 W_{12} = \mathrm{S}^2 I_{12}$ est son image dans $\mathrm{S}^2 L_\Delta = L_\Delta^{\otimes 2}$ soit $2s$. Au total, en utilisant aussi la décomposition de $D(s,t)$ trouvée dans le cas $m = 2$ on obtient $(\Delta, -2\mu, 2id)$.

Finalement, la troisième colonne s'obtient en partant de trois sections s, t, u de L sur un ouvert U. La section $\sum_{i \neq j \neq k, i \neq k} s_i t_j u_k$ s'écrit comme

$$\begin{gathered}(s_1 t_2 + s_2 t_1)(u_3 + \cdots + u_m) + (s_1 u_2 + s_2 u_1)(t_3 + \cdots + t_m) + (t_1 u_2 + t_2 u_1)(s_3 + \cdots + s_m) \\ + \left[(s_1 + s_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} t_i u_j\right] + \left[(t_1 + t_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} s_i u_j\right] \\ + \left[(u_1 + u_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} s_i t_j\right] + \sum_{3 \leq i \neq l \neq k \leq m, i \neq k} s_i t_j u_k\end{gathered}$$

et elle est $\mathfrak{S}_m$-invariante. La classe dans $\mathrm{gr}^1\mathrm{S}^3 W|_{U_{12}}$ de sa restriction à U_{12} est $[(s_1 t_2 + s_2 t_1)(u_3 + \cdots + u_m)] + [(s_1 u_2 + s_2 u_1)(t_3 + \cdots + t_m)] + [(t_1 u_2 + t_2 u_1)(s_3 + \cdots + s_m)]$ et chacune de ces composantes appartient à $\mathrm{S}^2 W_{12} \otimes W^{12}$. Le reste appartient à $\mathrm{F}^2\mathrm{S}^3 W|_{U_{12}}$. Pour trouver leurs images dans $\mathrm{gr}_0(\mathrm{S}^2 W_{12}) \otimes L$ on regarde les images de $s_1 t_2 + s_2 t_1$, $s_1 u_2 + s_2 u_1$ et $t_1 u_2 + t_2 u_1$ dans $L_\Delta^{\otimes 2}$ par le morphisme $\mathrm{S}^2 W_{12} \to L_\Delta^{\otimes 2}$. Or $s_i t_j \mapsto -st$. La troisième colonne s'écrit $(0, 0, -2\nu)$ où ν est le morphisme canonique $\mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L) \to \mathrm{H}^0(L^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{H}^0(L)$ induit par l'application linéaire $stu \mapsto st \otimes u + su \otimes t + ut \otimes s$. □

Corollaire 2.5.11 *Pour $m \geq 3$, l'espace vectoriel des sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3(L^{[m]}))$ sur l'ouvert $\mathrm{Hilb}_*^m(X)$ est isomorphe à $\mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L)$ et l'espace vectoriel de cohomologie $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^3(L^{[m]}))$ est isomorphe à $\mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3})$.*

Preuve du corollaire :

Les espaces considérés sont le noyau et respectivement le conoyau du morphisme α_m. On prouvera qu'ils coïncident avec le noyau et respectivement le conoyau du morphisme $\Delta\nu$:

$$\Delta\nu : \mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L) \to \mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3}).$$

On verra ensuite que ce morphisme est nul.

Considérons $(a, b, c) \in \mathrm{H}^0(X^m, \mathrm{S}^3W)^G$. Alors

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 \\ 6 & -2\mu & 0 \\ 0 & 2id & -2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta b = 0 \\ 6a - 2\mu b = 0 \\ 2b - 2\nu c = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\mu b}{3} \\ \Delta\nu c = 0 \\ b = \nu c. \end{cases}$$

Par suite $\operatorname{Ker}\alpha_m \simeq \operatorname{Ker}\Delta\nu$ et

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 \\ 6 & -2\mu & 0 \\ 0 & 2id & -2\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta b = a' \\ 6a - 2\mu b = b' \\ 2b - 2\nu c = c' \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b' + 2\mu b}{6} \\ 2a' - 2\Delta\nu c = \Delta c' \\ 2b - 2\nu c = c'. \end{cases}$$

Par conséquent $(a', b', c') \in \mathrm{Im}\alpha_m \Longleftrightarrow 2a' - \Delta c' \in \mathrm{Im}\Delta\nu$ et donc $\operatorname{coker}\alpha_m \simeq \operatorname{coker}\Delta\nu$.

Prouvons $\Delta\nu = 0$. Soit s est une section de L. On a $\nu(s^3) = 3s^2 \otimes s$ et l'image de cette classe par Δ est nulle : $3D(s^2, s) - \nabla(s^3) = 3\Delta(s^2)s - 3s^2\nabla(s) - \nabla(s^2)s - s^2\nabla(s) = 2\nabla(s^2)s - 4s^2\nabla(s) = 0$. Comme ces sections engendrent $\mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L)$, ceci montre bien que le morphisme $\Delta\nu$ est nul. Alors $\operatorname{Ker}\alpha_m \simeq \operatorname{Ker}\Delta\nu \simeq \mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L)$ et $\operatorname{coker}\alpha_m \simeq \mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3})$. $\square$

2.5.5 Introduction du fibré déterminant

On considère un autre fibré inversible A sur X auquel est associé un fibré vectoriel $\mathcal{A} = \boxtimes_i A_i$ sur X^m et un fibré inversible quotient $\mathcal{A}/\mathfrak{S}_m$ sur S^mX. On désigne par $\mathfrak{d}_m^A$ le fibré image réciproque de $\mathcal{A}/\mathfrak{S}_m$ sur $\mathrm{Hilb}^m(X)$ par le morphisme de Hilbert-Chow $\mathrm{Hilb}^m(X) \to \mathrm{S}^mX$. Le problème est de déterminer l'espace vectoriel des sections de $\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}_m^A$. Le calcul des invariants de $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3W \otimes \mathcal{A})^G$ est aisé. Il suffit d'appliquer plusieurs fois la proposition 2.1.1. On tient compte de $\mathrm{Stab}\,\{1\} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1}$, $\mathrm{Stab}\,\{(12)\} = id_{(12)} \times \mathfrak{S}_{m-2}$ et $\mathrm{Stab}\,\{1,2,3\} = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{m-3}$ et on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3W \otimes \mathcal{A})^{\mathfrak{S}_m} &= \mathrm{H}^0(L_1^{\otimes 3} \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_m)^{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1}} \\ &\quad \oplus \mathrm{H}^0(L_1^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes L_2 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m)^{id_{(12)} \times \mathfrak{S}_{m-2}} \\ &\quad \oplus \mathrm{H}^0(L_1 \otimes A_1 \otimes L_2 \otimes A_2 \otimes L_3 \otimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m)^{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{m-3}} \\ &= \mathrm{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{H}^0(A)) \\ &\quad \oplus \mathrm{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes \mathrm{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{H}^0(A)) \\ &\quad \oplus \mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-3}(\mathrm{H}^0(A)) \end{aligned} \tag{2.14}$$

En restriction à l'ouvert U_{12} on a un isomorphisme :

$$J^1L^3 \otimes A^{\otimes 2} \boxtimes (A_3 \otimes \cdots \otimes A_m) \oplus L_\Delta^2 \otimes A^{\otimes 2} \boxtimes (\oplus_{i \geq 3} L_i \otimes (A_3 \otimes \cdots \otimes A_m)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{gr}_1\mathrm{S}^3W \otimes \mathcal{A}$$

qui est d au fait que $\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W\otimes\mathcal{A})=\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W)\otimes\mathcal{A}$. En utilisant la même proposition 2.1.1 et en tenant compte de Stab $\{3\}=\mathfrak{S}_{m-3}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1\mathrm{S}^3W\otimes\mathcal{A})^{\mathfrak{S}_m} &= \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1\mathrm{S}^3W\otimes\mathcal{A}|_{U_{12}})^{\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_{m-2}} = \\
&= \left[\mathrm{H}^0(J^1L^3\otimes A^{\otimes 2})\otimes\mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{H}^0(A))\right] \\
&\quad \oplus\left[\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2}\otimes A^{\otimes 2})\otimes\mathrm{H}^0(L_3\otimes A_3\otimes\cdots\otimes A_m)^{\mathfrak{S}_{m-3}}\right] \\
&= \left[\mathrm{H}^0(J^1L^3\otimes A^{\otimes 2})\otimes\mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{H}^0(A))\right] \\
&\quad \oplus\left[\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2}\otimes A^{\otimes 2})\otimes\mathrm{H}^0(L\otimes A)\otimes\mathrm{S}^{m-3}(\mathrm{H}^0(A))\right]
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Remarque 2.5.12 Une section rationnelle est une section régulière sur un ouvert partout dense. Donc ∇ et D se prolongent de manière évidente aux sections rationnelles du fibré $L^{\otimes k}$ et la formule $\nabla(sf)=df\otimes s+f\nabla(s)$ est vraie pour f fonction rationnelle sur X, et s section rationnelle de $L^{\otimes k}$.

Proposition 2.5.13 *La matrice du morphisme canonique*

$$\alpha:\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3W\otimes\mathcal{A})^{\mathfrak{S}_m}\to\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1\mathrm{S}^3W\otimes\mathcal{A})^{\mathfrak{S}_m}$$

dans les décompositions ci-dessus est de la forme

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\nabla} & \widetilde{D} & 0\\ 0 & \rho & \widetilde{\nu}\end{pmatrix}$$

Les morphismes ρ et $\widetilde{\nu}$ sont $\mathcal{O}(X)$-linéaires et caractérisés par

$$\rho(s\otimes t\otimes a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)})=2sa\otimes t\otimes a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-3)}$$

lorsque $s\in\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2}\otimes A)$, $t\in\mathrm{H}^0(L\otimes A)$ et $a\in\mathrm{H}^0(A)$,

$$\widetilde{\nu}=-2\nu\otimes id_{\mathrm{S}^{m-3}(\mathrm{H}^0(A))}.$$

où ν est l'opérateur défini au 2.5.10 relatif à $L\otimes A$.

Enfin le morphisme $\widetilde{D}$ est caractérisé, pour s section rationnelle de $L^{\otimes 2}$, t section rationnelle de L et $a\in\mathrm{H}^0(A)$ tel que $sa\in\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2}\otimes A)$ et $ta\in\mathrm{H}^0(L\otimes A)$, par la formule

$$\widetilde{D}(sa\otimes_{\mathbb{C}}ta\otimes_{\mathbb{C}}a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)})=D(s,t)a^2\otimes_{\mathbb{C}}a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}$$

et le morphisme $\widetilde{\nabla}:\mathrm{H}^0(L^{\otimes 3}\otimes A)\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^{m-1}\mathrm{H}^0(A)\to\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W_{12})\otimes A^{\otimes 2})\otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{S}^{m-2}\mathrm{H}^0(A)$ est caractérisé par :

$$\widetilde{\nabla}(sa\otimes_{\mathbb{C}}a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-1)})=-\nabla(s)a^2\otimes a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}$$

où s est une section rationnelle de $L^{\otimes 3}$ et $a\in\mathrm{H}^0(A)$ tel que $sa\in\mathrm{H}^0(L^{\otimes 3}\otimes A)$.

Remarque 2.5.14 Les sections particulières qu'on a considérées pour décrire $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\nabla}$ sont des générateurs des espaces vectoriels sur lesquels sont définis ces morphismes. Comme les morphismes $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\nabla}$ existent ils sont caractérisés par l'image de ces générateurs. Puisqu'elles proviennent de morphismes bien définis, les images de ces générateurs, qui sont a priori des sections rationnelles, sont bien des sections régulières.

partir des expressions données, on peut facilement déduire les expressions de $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\nabla}$ sur des sections de la forme $S\otimes_{\mathbb{C}}T\otimes_{\mathbb{C}}a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}=\frac{S}{a}a\otimes_{\mathbb{C}}\frac{T}{a}a\otimes_{\mathbb{C}}a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}$ ou $S\otimes_{\mathbb{C}}a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-1)}=\frac{S}{a}a\otimes_{\mathbb{C}}a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-1)}$ en utilisant les propriétés des opérateurs ∇ et D, pour obtenir ensuite les expressions sur des sections générales par polarisation, comme dans la remarque 2.5.15. Ces expressions seront utilisées dans les lemmes 2.5.19 et 2.5.20.

Preuve de la proposition :

Pour la première colonne soit $\gamma\in\mathrm{H}^0(L^{\otimes 3}\otimes A)\otimes\mathrm{S}^{m-1}\mathrm{H}^0(A)$. D'après la remarque il suffit de traiter le cas où $\gamma=sa\otimes_{\mathbb{C}}a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-1)}$ avec pour s une section rationnelle de $L^{\otimes 3}$ et $a\in\mathrm{H}^0(A)$ tel que $sa\in\mathrm{H}^0(L^{\otimes 3}\otimes A)$. Il suffit de prouver l'égalité de l'énoncé sur l'ouvert $U\times U\times\cdots\times U$, U étant un ouvert de X où s est régulière et a est inversible. La section invariante de $\mathrm{S}^3W\otimes\mathcal{A}$ correspondante est alors

$S = s_1a_1 \otimes a_2 \cdots a_m + s_2a_2 \otimes a_1a_3 \cdots a_m + \cdots + s_ma_m \otimes a_1 \cdots a_{m-1}$ où $s_i = pr_i^*(s)$ et $a_i = pr_i^*(a)$. Comme les fibrés considérés sont inversibles les produits tensoriels s'identifient aux produits symétriques et on peut écrire cette section comme $(s_1 + s_2 + \cdots + s_m)a_1a_2 \cdots a_m$. L'image de S dans $\mathrm{F}^1\mathrm{S}^3W \otimes \mathcal{A}|_{U_{12}}$ sera alors $(s_1 + s_2)a_1 \cdots a_m + (s_3 + \cdots + s_m)a_1 \cdots a_m$. Le deuxième terme appartient à $\mathrm{F}^2\mathrm{S}^3W \otimes \mathcal{A}|_{U_{12}}$ et l'image du premier terme modulo $\mathrm{F}^2\mathrm{S}^3W_{12} \otimes \mathcal{A}$ est $-\nabla(s)a_1a_2 \otimes a_3 \cdots a_m$ dans $\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W_{12}) \otimes A_1 \otimes A_2 \boxtimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m$ soit $-\nabla(s)a^2 \otimes a_3 \cdots a_m$ dans $\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W_{12}) \otimes A_\Delta^2 \boxtimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m$ (car $A_1|_{\Delta_{12}} = A_2|_{\Delta_{12}} = A_\Delta$) ou encore $-\nabla(s)a^2 \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}$ dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^{(m-2)}\mathrm{H}^0(A)$. D'où la première colonne de la matrice comme $(\widetilde{\nabla}, 0)$.

On procède de la même manière pour les autres colonnes. Soient $a \in \mathrm{H}^0(A)$, s une section rationnelle de $L^{\otimes 2}$ et t une section rationnelle de L, telles que $sa \in \mathrm{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A)$ et $ta \in \mathrm{H}^0(L \otimes A)$. Partons d'une section de la forme $sa \otimes ta \otimes a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}$ de $\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(L \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{S}^{m-2}\mathrm{H}^0(A)$ comme dans l'énoncé. On se restreint à un ouvert $U \times U \times \cdots \times U$, U étant un ouvert de X où s et t sont régulières et a est inversible. La section invariante correspondante s'écrit

$$\left[(s_1t_2 + s_2t_1)\prod_i a_i\right] + \left[(s_1 + s_2)\sum_{i=3}^m t_i \prod_i a_i\right] + \left[(t_1 + t_2)\sum_{i=3}^m s_i \prod_i a_i\right] + \left[\sum_{3\leq i<j\leq m} (s_it_j + s_jt_i)\prod_i a_i\right].$$

Le premier terme appartient à $\mathrm{F}^1\mathrm{S}^3W_{12} \otimes \mathcal{A}$, le deuxième à $\mathrm{S}^2W_{12} \otimes W^{12} \otimes \mathcal{A}$, le troisième à $W_{12} \otimes \mathrm{S}^2W^{12} \otimes \mathcal{A}$, et le dernier à $\mathrm{S}^3W^{12} \otimes \mathcal{A}$, donc son image dans

$$\mathrm{gr}_1\mathrm{S}^3W_{12} \otimes A^2 \boxtimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m \oplus L_\Delta^{\otimes 2} \boxtimes L_3 \otimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m$$

est

$$D(s,t)a^2 \otimes a_3 \cdots a_m + 2sa^2 \otimes t_3a_3 \cdots a_m$$

soit

$$D(s,t)a^2 \otimes a^{m-2} + 2Sa \otimes T \otimes a^{m-3}$$

dans

$$[\mathrm{H}^0(J^1L^3 \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{H}^0(A))] \oplus [\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-3}(\mathrm{H}^0(A))]$$

où $S = sa$, $T = ta$.

Soient $a \in \mathrm{H}^0(A)$, s, t, u des sections rationnelles de L telles que $sa, ta, ua \in \mathrm{H}^0(L \otimes A)$. On se restreint à un ouvert $U \times U \times \cdots \times U$, U étant un ouvert de X où s, t et u sont régulières et a est inversible. Si on part d'une section $sa \cdot ta \cdot ua \otimes a^{m-3}$ de $\mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-3}\mathrm{H}^0(A)$, on obtient la section invariante :

$$\left[(s_1t_2 + s_2t_1)\sum_{i=3}^m u_i \prod_i a_i\right] + \left[(s_1u_2 + s_2u_1)\sum_{i=3}^m t_i \prod_i a_i\right] + \left[(t_1u_2 + t_2u_1)\sum_{i=3}^m s_i \prod_i a_i\right] +$$

$$+\left[(s_1 + s_2)\sum_{3\leq i\neq j\leq m} t_iu_j \prod_i a_i\right] + \left[(t_1 + t_2)\sum_{3\leq i\neq j\leq m} s_iu_j \prod_i a_i\right] + \left[(u_1 + u_2)\sum_{3\leq i\neq j\leq m} t_is_j \prod_i a_i\right] +$$

$$+\left[\sum_{3\leq i\neq j\leq m, i\neq k} s_it_ju_k \prod_i a_i\right].$$

La classe dans $\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W \otimes \mathcal{A})|_{U_{12}}$ de sa restriction à U_{12} est

$$[(s_1t_2 + s_2t_1)a_1a_2 \otimes (u_3 + \cdots + u_m)a_3 \cdots a_m] + [(s_1u_2 + s_2u_1)a_1a_2 \otimes (t_3 + \cdots + t_m)a_3 \cdots a_m]$$

$$+[(u_1t_2 + u_2t_1)a_1a_2 \otimes (s_3 + \cdots + s_m)a_3 \cdots a_m]$$

et chacune de ces composantes appartient à $\mathrm{gr}_0(\mathrm{S}^2 W_{12} \otimes A) \otimes W^{12} \otimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m$. Le reste est dans $\mathrm{F}^2\mathrm{S}^3 W \otimes \mathcal{A}|_{U_{12}}$.

Comme on l'a déjà vu, l'image dans $\mathrm{H}^0(U, L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{H}^0(U, L \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-3}\mathrm{H}^0(U, A)$ est $-2sata \otimes ua \otimes a^{m-3} - 2saua \otimes ta \otimes a^{m-3} - 2uata \otimes sa \otimes a^{m-3}$ donc si $S = sa$, $T = ta$, $U = ua$, $\widetilde{\nu}$ associe à $STU \otimes a^{m-3} \mapsto -2(ST \otimes U \otimes a^{m-3} + SU \otimes T \otimes a^{m-3} + UT \otimes S \otimes a^{m-3})$, et la troisième colonne de la matrice s'écrit $(0, \widetilde{\nu})$.□

Remarque 2.5.15 Par polarisation on peut trouver l'expression de ρ sur des sections différentes, où $\breve{a}_i$ signifie qu'on omet le terme a_i de l'expression :

$$\rho(S \otimes T \otimes a_3 a_4 \cdots a_m) = \frac{1}{m-2} \sum_{i=3}^{m} S a_i \otimes T \otimes a_3 \cdots \breve{a}_i \cdots a_m.$$

2.5.6 Sections de $\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}_m^{\mathcal{O}(1)}$

On prend $L = \mathcal{O}(3)$, et $A = \mathcal{O}(1)$ sur $X = \mathbb{P}_2$. Alors

$$\begin{array}{rcl} L^{\otimes 3} \otimes A &=& \mathcal{O}(10) \\ L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2} &=& \mathcal{O}(11) \\ L^{\otimes 2} \otimes A &=& \mathcal{O}(7) \\ L \otimes A &=& \mathcal{O}(4) \\ L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2} &=& \mathcal{O}(8). \end{array}$$

On pose $E = \mathrm{H}^2(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$. On a $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_m^{\mathcal{O}(1)}$. Pour nous $m = n + l^2 = n + 9$. Afin d'utiliser la proposition préliminaire 2.1.4, on doit supposer $m - 2 \geq 10$, c'est-à-dire $n \geq 3$. Mais les hypothèses du théorème 2.2.4 nous obligent à supposer $6 \leq n < 20$. Les calculs vont donner une nouvelle preuve du théorème 2.0.1 pour $6 \leq n \leq 11$ et une preuve du théorème 2.0.1 pour $12 \leq n \leq 19$.

On veut calculer le noyau du morphisme α :

$$\left[\mathrm{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{H}^0(A))\right] \oplus \left[\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes \mathrm{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{H}^0(A))\right] \oplus \left[\mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-3}(\mathrm{H}^0(A))\right]$$

$$\rightarrow \left[\mathrm{H}^0(J^1 L^3 \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{S}^{m-2}(\mathrm{H}^0(A))\right] \oplus \left[\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathrm{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathrm{S}^{m-3}(\mathrm{H}^0(A))\right]$$

donné par la matrice de la proposition 2.5.13 :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\nabla} & \widetilde{D} & 0 \\ 0 & \rho & \widetilde{\nu} \end{pmatrix}$$

Ici $\mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^3 \otimes A^{\otimes 2}) = \mathrm{S}^{10,1}E$ se calcule à partir de la suite exacte d'Euler. Le morphisme $\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) \rightarrow \mathrm{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2}) = \mathrm{S}^{11}E$ est un morphisme surjectif puisque non nul et que $\mathrm{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2})$ est une représentation irréductible, d'où un scindage de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^3 \otimes A^{\otimes 2}) \rightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) \rightarrow \mathrm{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2}) \rightarrow 0.$$

Cela entrane $\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) = \mathrm{S}^{10}E \otimes E$.

Avant le résultat final on va donner deux lemmes préliminaires :

Lemme 2.5.16 *Le morphisme* D'

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(L \otimes A) &=& \mathrm{S}^7 E \otimes \mathrm{S}^4 E &\rightarrow& \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) &=& \mathrm{S}^{10}E \otimes E \\ && sa \otimes ta &\mapsto& D(s,t)a^2 && \end{array}$$

est surjectif.

Preuve du lemme :

On a vu que $\epsilon_+(D(s,t)) = -2st$ donc $\epsilon_+(D(s,t)a^2) = -2sta^2$. Par suite le morphisme composé $\epsilon_+ \circ D'$ de $\mathrm{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^0(L \otimes A) = \mathrm{S}^7E \otimes \mathrm{S}^4E$ dans $\mathrm{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2}) = \mathrm{S}^{11}E$ est le morphisme de multiplication des sections, à une constante près. Il est par suite non nul.

Si on se place sur l'ouvert U défini par $X \neq 0$, $Y \neq 0$ et on considère les sections $s = Z^6$, $t = Z^3$, $a = X$, $fa = Y$ avec $f = \frac{Y}{X}$, comme

$$D'(sa \otimes tfa) = D(s,tf)a^2 = fD(s,t)a^2 - st\mathrm{d}fa^2$$

et

$$D'(sfa \otimes ta) = D(fs,t)a^2 = fD(s,t)a^2 + st\mathrm{d}fa^2,$$

on obtient que

$$D'(sfa \otimes ta - sa \otimes tfa) = 2st\mathrm{d}fa^2.$$

Ces sections sont en effet globales et ceci montre que $D'(Z^6Y \otimes Z^3X - Z^6X \otimes Z^3Y)$ est non nul et appartient à $\mathrm{H}^0(\Omega^1 \otimes L^3 \otimes A^{\otimes 2}) = \mathrm{S}^{10,1}E$, vu comme sous-espace de $\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(\mathrm{S}^3W) \otimes A^{\otimes 2})$. Le morphisme D' est donc non nul sur chacune des composantes irréductibles de la représentation $\mathrm{S}^{10}E \otimes E$, donc il est surjectif. À partir des décompositions en sous-représentations irréductibles de $\mathrm{S}^7E \otimes \mathrm{S}^4E$ et $\mathrm{S}^{10}E \otimes E$ on déduit que le noyau de D' est de la forme $\mathrm{S}^{7,4}E + \mathrm{S}^{8,3}E + \mathrm{S}^{9,2}E$. □

Lemme 2.5.17 *L'image de* $\mathrm{Ker}\,\widetilde{D}$ *par le morphisme* ρ *est incluse dans l'image de* $\widetilde{\nu}$.

Preuve du lemme :

On rappelle que $\widetilde{D} = D' \otimes id$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}^7E \otimes \mathrm{S}^4E \otimes \mathrm{S}^{m-2}E & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{S}^8E \otimes \mathrm{S}^4E \otimes \mathrm{S}^{m-3}E \\ \downarrow{\scriptstyle c' \otimes id} & & \downarrow{\scriptstyle c'' \otimes id} \\ \mathrm{S}^{10}E \otimes E \otimes \mathrm{S}^{m-2}E & \xrightarrow{\rho'} & \mathrm{S}^{11}E \otimes E \otimes \mathrm{S}^{m-3}E \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales c' et c'' sont les composées des contractions naturelles entre le premier et le second facteur, et les flèches horizontales ρ et ρ' sont des contractions entre le premier et le troisième facteur. Le noyau de c' est $\mathrm{S}^{7,4}E + \mathrm{S}^{8,3}E + \mathrm{S}^{9,2}E$, égal au noyau de D'.

Il en résulte que $\rho(\mathrm{Ker}\ D' \otimes id)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\,(c'' \otimes id)$. Ce dernier noyau est évidemment $(\mathrm{S}^{10,2}E + \mathrm{S}^{9,3}E + \mathrm{S}^{8,4}E) \otimes \mathrm{S}^{m-3}E$ lequel est bien contenu dans l'image de $\widetilde{\nu}$, d'après le lemme 2.1.6 de la section préliminaire.□

Proposition 2.5.18 – (i) *L'espace des sections* $\mathrm{Ker}\ \alpha = \mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ *est isomorphe à* $\mathrm{Ker}\,(\widetilde{\nabla}, \widetilde{D}) \oplus \mathrm{Ker}\ \widetilde{\nu}$.

– (ii) *Sur l'ouvert* $\mathrm{Hilb}^m_*(\mathbb{P}_2)$ *considéré,* $\mathrm{coker}\ \alpha = \mathrm{H}^1(\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ *est isomorphe à* $\mathrm{coker}\,(\widetilde{\nabla}, \widetilde{D}) \oplus \mathrm{coker}\ \widetilde{\nu}$.

Preuve :

Cela revient à vérifier que dans la suite exacte du serpent associé au diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\nu}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle (\widetilde{\nabla}, \widetilde{D})} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{E} & \longrightarrow & \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{E} & \longrightarrow & \mathfrak{D} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec $\mathfrak{A} = \mathrm{S}^{10}E \otimes \mathrm{S}^{m-1}E$, $\mathfrak{B} = \mathrm{S}^7E \otimes \mathrm{S}^4E \otimes \mathrm{S}^{m-2}E$, $\mathfrak{C} = \mathrm{S}^3(\mathrm{S}^4E) \otimes \mathrm{S}^{m-3}E$, $\mathfrak{D} = \mathrm{S}^{10}E \otimes E \otimes \mathrm{S}^{m-2}E$, $\mathfrak{E} = \mathrm{S}^8E \otimes \mathrm{S}^4E \otimes \mathrm{S}^{m-3}E$, c'est à dire dans la suite :

$$0 \to \mathrm{Ker}\ \widetilde{\nu} \to \mathrm{Ker}\ \alpha \to \mathrm{Ker}\,(\widetilde{\nabla}, \widetilde{D}) \xrightarrow{(0,\rho)} \mathrm{coker}\ \widetilde{\nu} \to \mathrm{coker}\ \alpha \to \mathrm{coker}\,(\widetilde{\nabla}, \widetilde{D}) \to 0$$

le morphisme de liaison $(0, \rho)$ est nul. Cela revient à vérifier que l'image de $\mathrm{Ker}\,(\widetilde{\nabla}, \widetilde{D})$ par $(0, \rho)$ est contenue dans l'image de $\widetilde{\nu}$.

On dispose également d'une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \operatorname{Ker}\widetilde{D} & \xrightarrow{\gamma} & \operatorname{Ker}(\widetilde{\nabla},\widetilde{D}) & \xrightarrow{\beta} & \mathfrak{A} \\ & & v & \mapsto & (0,v) & & \\ & & & & (u,v) & \mapsto & u. \end{array}$$

Lemme 2.5.19 *Le morphisme β est surjectif.*

Preuve du lemme :

Il suffit de montrer que les éléments u de la forme $\omega^3 a\otimes a_2\cdots a_m$ ont un antécédent par β, où $\omega\in \mathrm{H}^0(L)$ et $a,a_2,\ldots,a_m\in \mathrm{H}^0(A)$ (on rappelle que $L=\mathcal{O}(3)$ et $A=\mathcal{O}(1)$ mais on préfère travailler ici avec les fibrés quelquonques L et A de départ pour une meilleure compréhension) et ceci puisque sur $\mathbb{P}_2$ le morphisme naturel $\mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L)\otimes\mathrm{H}^0(A)\otimes\mathrm{S}^{m-1}\mathrm{H}^0(A)\to\mathrm{H}^0(L^{\otimes 3}\otimes A)\otimes\mathrm{S}^{m-1}\mathrm{H}^0(A)$ est surjectif et les éléments considérés engendrent $\mathrm{S}^3\mathrm{H}^0(L)\otimes\mathrm{H}^0(A)\otimes\mathrm{S}^{m-1}\mathrm{H}^0(A)$. On prend $v=\sum_{i=2}^m(2\omega^2 a\otimes_{\mathbb{C}}\omega a_i+\omega^2 a_i\otimes_{\mathbb{C}}\omega a)\otimes a_2\cdots\breve{a}_i\cdots a_m$ et on remarque que $(u,-v)\in\operatorname{Ker}(\widetilde{\nabla},\widetilde{D})$ est une préimage de u par β. Rappelons que la notation $\breve{a}_i$ signifie qu'on omet le terme a_i de l'expression. On utilise les formules de $\widetilde{\nabla}$ et $\widetilde{D}$ sur des sections différentes déduites de celles données dans l'énoncé de la prop. 2.5.13, par polarisation, comme dans les remarques 2.5.14 et 2.5.15 :

$$\widetilde{\nabla}(f\otimes a_2\cdots a_m)=\sum_{i=2}^m\nabla(\frac{f}{a_i})a_i^2\otimes a_2\cdots\breve{a}_i\cdots a_m$$

et

$$\widetilde{D}(s\otimes t\otimes a_3\cdots a_m)=\nabla(\frac{s}{t})t^2\otimes a_3\cdots a_m$$

et le calcul nous donne que $\widetilde{\nabla}(u)+\widetilde{D}(-v)=\widetilde{\nabla}(u)-\widetilde{\nabla}(u)=0.\square$

Lemme 2.5.20 *L'image par le morphisme $(0,\rho)$ de la préimage par β d'un élément de $\mathfrak{A}$ est contenue dans l'image de $\widetilde{\nu}$.*

Preuve du lemme :

Dans le lemme précédent on a trouvé un antécédent v pour chaque générateur de $\mathfrak{A}$. Comme deux antécédents d'un élément u de $\mathfrak{A}$ diffèrent par un élément de $\mathrm{Im}\gamma$, et que $(0,\rho)(\mathrm{Im}\gamma)\subset\mathrm{Im}\widetilde{\nu}$ (lemme 2.5.17), il suffit de trouver un antécédent w par $\widetilde{\nu}$ de la section $\rho(v)=\sum_{i\neq j}(2\omega^2 a a_j\otimes\omega a_i+\omega^2 a_i a_j\otimes\omega a)\otimes a_2\cdots\breve{a}_i\cdots\breve{a}_j\cdots a_m$. On prend $w=\sum_{i\neq j}(\omega a\cdot\omega a_i\cdot\omega a_j)\otimes a_2\cdots\breve{a}_i\cdots\breve{a}_j\cdots a_m$ et on vérifie bien que $\widetilde{\nu}(w)=\rho(v).\square$

Ceci montre que $(0,\rho)(\operatorname{Ker}(\widetilde{\nabla},\widetilde{D}))\subset\mathrm{Im}\widetilde{\nu}.\square$

2.5.7 Calcul final

À partir des annulations de la cohomologie supérieure indiquées dans la démonstration du corollaire 2.4.3, remplacées dans la suite spectrale associée à la résolution (2.4) de $\mathrm{S}^3\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d}$, on obtient une suite exacte

$$0\to\Lambda^3(\mathrm{S}^3E)\otimes\mathrm{H}^0(\mathfrak{d})\to\Lambda^2(\mathrm{S}^3E)\otimes\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(3)^{[m]}\otimes\mathfrak{d})\to\mathrm{S}^3E\otimes\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^2(\mathcal{O}(3)^{[m]})\otimes\mathfrak{d})\to$$
$$\to\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]})\otimes\mathfrak{d})\to\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d})\to 0.$$

Le résultat de la proposition 2.5.18 nous donne

$$\begin{array}{rcl} \dim\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]})\otimes\mathfrak{d}) & = & \dim\mathfrak{A}+\dim\operatorname{Ker}\widetilde{D}+\dim\operatorname{Ker}\widetilde{\nu}= \\ & = & \dim\mathrm{S}^{10}E\otimes\mathrm{S}^{n+8}E+\dim\mathrm{S}^7E\otimes\mathrm{S}^4E\otimes\mathrm{S}^{n+7}E-\dim\mathrm{S}^{10}E\otimes E\otimes\mathrm{S}^{n+7}E+ \\ & + & \dim\mathrm{S}^{n+6}E(\dim\mathrm{S}^{6,6}E+\dim\mathrm{S}^{7,4,1}E+\dim\mathrm{S}^{8,2,2}E+\dim\mathrm{S}^{6,4,2}E+\dim\mathrm{S}^{4,4,4}E). \end{array}$$

D'où, en utilisant les lemmes 2.3.1, 2.4.5, 2.4.6

$$\begin{array}{rcl} \dim\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3\mathcal{R}\otimes\mathfrak{d}) & = & \dim\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^3(\mathcal{O}(3)^{[m]})\otimes\mathfrak{d})-10(\dim\mathrm{S}^7E\otimes\mathrm{S}^{n+8}E+\dim\mathrm{S}^2(\mathrm{S}^4E)\otimes\mathrm{S}^{n+7}E- \\ & - & \dim\mathrm{S}^8E\otimes\mathrm{S}^{n+7}E)+45\dim\mathrm{S}^4E\otimes\mathrm{S}^{n+8}E-120\dim\mathrm{S}^{n+9}E \\ & = & \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{array}$$

et cela pour tout n tel que $6 \leq n \leq 19$. On voit que dans ce cas on couvre aussi le résultat obtenu au corollaire 2.4.3 pour $l = 2$.

2.6 Conclusion

Pour étendre les résultats ci-dessus au cas $n \geq 20$, on a besoin

1) d'étendre le théorème d'annulation de la cohomologie supérieure des fibrés $\mathrm{S}^l(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}$ sur le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$;

2) de faire intervenir $\mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_i(\mathrm{S}^l W) \otimes \mathfrak{d})$ (pour $i \geq 2$) pour le calcul de $\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^l(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$, pour $l \geq 3$.

Chapitre 3

Sur la cohomologie d'un fibré tautologique sur le schéma de Hilbert d'une surface

Soit X une surface projective lisse sur $\mathbb{C}$, L et A deux fibrés inversibles sur X, ω_X le fibré canonique de X. Afin d'alléger l'écriture, pour tout entier m, on renote $X^{[m]}$ le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^m(X)$ qui paramètre les sous-schémas finis de X de longueur m. Il est lisse et projectif de dimension $2m$. On utilise le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X^m \arrow[d, "q"] \\ X^{[m]} \arrow[r, "HC"] & \mathrm{S}^m(X) \end{tikzcd}$$

pour construire sur $X^{[m]}$ un fibré $\mathfrak{d}_m^A$ associé à A. Le morphisme HC est le morphisme de Hilbert-Chow, qui associe à un sous-schéma $Z \subset X$ le cycle $\sum_{x \in X} lg(Z_x)x$, où Z_x est la composante de Z passant par x, et $lg(Z_x)$ la longueur de Z_x. Le morphisme q est le quotient par l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$. On définit $\mathfrak{d}_m^A = HC^*((A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A)^{\mathfrak{S}_m})$. Via l'identification de $X^{[m]}$ à l'espace de modules des faisceaux sans torsion de rang 1 sur X, on retrouve le fibré déterminant sur $X^{[m]}$ associé à A. Soit $\Xi_m \subset X^{[m]} \times X$, le schéma universel des couples (Z, x) tels que $x \in Z$. Il est fini de degré m et plat au-dessus de $X^{[m]}$. On note p_1 et p_2 les deux projections :

$$\begin{tikzcd} X^{[m]} \times X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \\ X^{[m]} & \end{tikzcd}$$

aussi bien que leurs restrictions à Ξ_m, et $L^{[m]}$ le fibré $p_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi_m} \otimes p_2^*(L))$.

Le but de ce chapitre est de démontrer le

Théorème 3.0.1 *Si les fibrés $\omega_X^{-1} \otimes A^{\otimes k}$ et $\omega_X^{-1} \otimes L \otimes A^{\otimes k}$ sont amples pour $1 \leq k \leq m$, alors*
i) $\mathrm{H}^q(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = 0$ *pour* $q > 0$ *;*
ii) $\mathrm{H}^0(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \simeq \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{H}^0(A)) \otimes \mathrm{H}^0(X, L \otimes A)$.

Michel Brion a remarqué qu'en appliquant ce théorème on obtenait le corollaire suivant :

Corollaire 3.0.2 *Les conclusions du théorème 3.0.1 restent vraies sous les hypothèses :*

$$\mathrm{H}^q(X, A) = \mathrm{H}^q(X, L \otimes A) = 0 \quad \textit{pour} \quad q \geq 1. \tag{3.1}$$

Nous avons utilisé ce théorème dans le deuxième chapitre, pour le calcul de l'espace des sections du fibré déterminant sur l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 sur le plan projectif. Ce calcul fournit des exemples pour la conjecture 1.3.2 de Le Potier. On s'appuiera sur les travaux [E-L], [E-S2], [Lehn], [Tikh], [Cheah] de G. Ellingsrud, S. Strømme, M. Lehn, A. Tikhomirov, J. Cheah.

Corollaire 3.0.3 *Les assertions i) et ii) sont vraies si les fibrés $\omega_X^{-1} \otimes A$ et $\omega_X^{-1} \otimes L \otimes A$ sont amples.*

On utilise le théorème de Kodaira.

Corollaire 3.0.4 *Si les fibrés ω_X^{-1} et $\omega_X^{-1} \otimes L$ sont amples alors*
i) $\mathrm{H}^q(X^{[m]}, L^{[m]}) = 0$ *pour* $q > 0$ *;*
ii) $\mathrm{H}^0(X^{[m]}, L^{[m]}) \simeq \mathrm{H}^0(X, L)$.

On applique le théorème pour $A = \mathcal{O}_X$.

En particulier si X est le plan projectif complexe $\mathbb{P}_2$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$ et $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$, ou si $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1)$ et $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$ alors
i) $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}_2^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = 0$ pour $q > 0$;
ii) $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \simeq \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{H}^0(A)) \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, L \otimes A)$.

Pour $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$, $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$, c'est le résultat utilisé dans le deuxième chapitre. Pour $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1)$, $A = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)$ c'est le résultat nécessaire pour des calculs analogues à ceux du chapitre 2 et qui apparaîssent dans le chapitre 4.

Les cas $q = 0$ et $q = 1$ se traitent directement et leur démonstration est donnée dans les préliminaires. Pour $q > 1$ on utilise une récurrence sur m. Il nous faut introduire la variété auxiliaire $X^{[m,m+1]}$ d'incidence. C'est le sous-schéma fermé de $X^{[m+1]} \times X^{[m]}$ donné par $X^{[m,m+1]} = \{(Z, \xi) | \xi \subset Z\}$. Il est connu que $X^{[m,m+1]}$ est lisse et irréductible de dimension $2m + 2$ ([Cheah], [Tikh]). Il y a des morphismes évidents $p_m : X^{[m,m+1]} \to X^{[m]}$ et $p_{m+1} : X^{[m,m+1]} \to X^{[m+1]}$ induits par les projections. Il y a aussi un morphisme naturel $q : X^{[m,m+1]} \to X$ qui envoie une paire (Z, ξ) sur l'unique point η où les schémas ξ et Z diffèrent (schématiquement). Dans la démonstration du théorème 3.0.1 on utilisera le passage de $X^{[m]} \times X$ à $X^{[m+1]}$ à travers $X^{[m,m+1]}$ et les morphismes p_{m+1} et $\phi = (p_m, q)$:

$$\begin{tikzcd} X^{[m,m+1]} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_{m+1}"'] & X^{[m]} \times X \\ X^{[m+1]} & \end{tikzcd} .$$

3.1 Préliminaires

Notations : Le corps de base est $\mathbb{C}$. Pour un espace vectoriel V nous noterons $\mathbb{P}_\bullet(V)$ l'espace projectif de Grothendieck des espaces vectoriels quotients de dimension 1. Par variété algébrique on entend schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, séparé ; les points considérés sont toujours les points fermés.

3.1.1 Cohomologie à support

Pour un faisceau abélien F sur un espace topologique X, les espaces de cohomologie à support et les faisceaux de cohomologie à support dans un fermé Y de X : $\mathrm{H}^i_Y(F)$, et $\mathcal{H}^i_Y(F)$, sont définis dans le premier paragraphe de [Grot2], et ils sont reliés par une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(X, \mathcal{H}^q_Y(F)) \Rightarrow \mathrm{H}^n_Y(F)$$

d'aboutissement $\mathrm{H}^n_Y(F)$ en degré $n = p + q$ ([Grot2], prop 1.4, p.5).

On associe à $Y \subset X$ une suite exacte de cohomologie locale ([Grot2], cor. 1.9, p.9) :

$$\cdots \to \mathrm{H}^i_Y(X, F) \to \mathrm{H}^i(X, F) \to \mathrm{H}^i(X \setminus Y, F) \to \mathrm{H}^{i+1}_Y(X, F) \to \cdots$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.1.1 ([Grot2], thm. 3.8, p.44) *: Soient X une variété algébrique lisse, F un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libre sur X et $Y \subset X$ un fermé de X. Pour un entier n donné les assertions suivantes sont équivalentes :*
- (i) $\operatorname{codim} Y \geq n$
- (ii) *pour tout $i < n$, $\mathcal{H}^i_Y(F) = 0$.*

On déduit de la suite spectrale ci-dessus que si $\operatorname{codim} Y \geq n$

$$\mathrm{H}^i_Y(F) = 0 \text{ pour tout } i < n \text{ et } \mathrm{H}^n_Y(F) = \mathrm{H}^0(\mathcal{H}^n_Y(F)). \tag{3.2}$$

3.1.2 Les espaces H^0 et H^1

Soient, comme dans l'introduction, L et A deux fibrés inversibles sur une surface projective lisse X.

Proposition 3.1.2 *Si $\omega_X^{-1} \otimes A$ et $\omega_X^{-1} \otimes L \otimes A$ sont amples alors*
i) $\mathrm{H}^1(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^A_m) = 0$;
ii) $\mathrm{H}^0(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^A_m) \simeq \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{H}^0(A)) \otimes \mathrm{H}^0(X, L \otimes A)$.

La méthode utilisée consiste à calculer ces espaces sur un grand ouvert $X_*^{[m]}$ de $X^{[m]}$ et à utiliser des résultats de cohomologie à support.

L'ouvert $X_*^{[m]}$ est formé par les schémas avec au plus un point multiple, qui soit double, soit les schémas dont le cycle correspondant est $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ ou $2x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_m$ avec x_i distincts. On note $\mathrm{S}^m_*(X)$ l'ouvert des cycles de cette forme. Rappelons que $q : X^m \to \mathrm{S}^m(X)$ est le quotient de X^m sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_m$. L'avantage d'utiliser $X_*^{[m]}$ est qu'on peut le décrire comme quotient p de l'éclaté B de $X^m_* = q^{-1}(\mathrm{S}^m_*(X))$ selon la réunion D des diagonales $\Delta_{ij} = \{(x_1, \cdots, x_m) \in X^m_* | x_i = x_j\}$ pour $i < j$, disjointes dans X^m_*. On note ρ cet éclatement. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "p"] & X^m_* \arrow[d, "q"] \\ X_*^{[m]} \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{S}^m_*(X) \end{tikzcd}$$

On va montrer comment, à l'aide de cette description, on peut ramener les calculs de la cohomologie des fibrés sur $X_*^{[m]}$ à des calculs des invariants de la cohomologie de certains faisceaux sur X^m_*.

Preuve de la proposition :

Sur B, le diviseur exceptionnel E se décompose en composantes disjointes $E = \bigcup_{i<j} E_{i,j}$. Alors le schéma universel $\Xi_B \subset B \times X$, paramétré par B, a m composantes irréductibles Ξ_i et la projection $p_1 : \Xi_i \bigcap \Xi_j \to E_{i,j}$ est un isomorphisme. On en déduit une suite exacte sur $B \times X$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\Xi_B} \to \oplus_i \mathcal{O}_{\Xi_i} \to \oplus_{i<j} \mathcal{O}_{E_{i,j}} \to 0 \tag{3.3}$$

Comme, par changement de base, $p^*(L^{[m]}) = p_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi_B} \otimes p_2^*(L))$, on a, après tensorisation par $p_2^*(L)$ de la suite (3.3) et image directe par p_1 (qui est un morphisme fini en restriction au schéma universel), une suite sur B :

$$0 \to p^*(L^{[m]}) \to \oplus_i p_i^*(L) \xrightarrow{\epsilon} \oplus_{i<j} p_{i,j}^*(L_\Delta) \to 0. \tag{3.4}$$

La projection p_i désigne aussi bien la i-ème projection $X^m_* \to X$ que sa composée avec $\rho : B \to X$; de même pour $p_{i,j} : X^m_* \to X \times X$ et $p_{i,j} : B \to X \times X$. Le sous-schéma Ξ_i est l'image réciproque de la diagonale Δ de $X \times X$ par l'application (p_i, id_X). Le fibré L_Δ est l'image réciproque de L par l'une des projections de la diagonale de $X \times X$ sur X, qui sont des isomorphismes.

Compte-tenu du fait que $p^*(\mathfrak{d}^A_m) = \rho^*(A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A)$, il faut encore tensoriser la suite (3.4) par

$$\rho^*(A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A) = \otimes_{j=1}^m A_j$$

où $A_j = p_j^*(A)$. On introduit aussi les notations $L_i = p_i^*(L)$ et $L_{i,j} = p_{i,j}^*(L_\Delta)$. Alors on a la suite exacte

$$0 \to p^*(L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \to \oplus_i(\otimes_{j\neq i} A_j) \otimes (A_i \otimes L_i) \to \oplus_{i<j}(\otimes_{l\neq i,j} A_j) \otimes p_{i,j}^*((L\otimes A)_\Delta) \to 0. \tag{3.5}$$

Le fibré $\widetilde{\mathcal{L}} = \oplus_{i<j}(\otimes_{l\neq i,j}A_j)\otimes p_{i,j}^*((L\otimes A)_\Delta)$ a pour support le diviseur exceptionnel E. Il est l'image réciproque par ρ du fibré $\mathcal{L} = \oplus_{i<j}(\otimes_{l\neq i,j}A_j)\otimes p_{i,j}^*((L\otimes A)_\Delta)$ sur X_*^m, dont le support est D, réunion des diagonales $\Delta_{i,j}$. On note $\widetilde{W}$ et W le fibré $\oplus_i(\otimes_{j\neq i}A_j)\otimes(A_i\otimes L_i)$ sur B et sur X_*^m respectivement. Dans ces conditions on remarque que W n'a pas de cohomologie en degré positif sur X^m (par la formule de Künneth et le théorème de Kodaira en utilisant l'hypothèse). Puisque le complémentaire de X_*^m dans X^m est de codimension 4, la cohomologie à support dans le complémentaire est nulle en degré ≤ 3 et $\mathrm{H}^q(X^m, W) = \mathrm{H}^q(X_*^m, W)$ pour $q \leq 2$ (d'après 3.1.1).

Le groupe symétrique $G = \mathfrak{S}_m$ opère sur les suites exactes précédentes. La suite (3.4) est G-équivariante. Le morphisme ϵ est donné par $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{\Delta_{i,j}} - s_j|_{\Delta_{i,j}})_{i,j}$, donc l'action induite sur $\oplus_{i<j}L_{i,j}$ et sur son image réciproque par ρ est telle que la transposition $\tau_{i,j}$ change le terme d'indice (i,j) en son opposé. Aucune section non nulle du fibré $\oplus_{i<j}L_{i,j}$ n'est donc G-invariante. Considérons une section invariante s de $\mathcal{L}$. Sa restriction au fermé $\Delta_{i,j}$, invariant par $\tau_{i,j}$, est $\tau_{i,j}$-invariante. Comme l'action de $\tau_{i,j}$ est triviale sur $\Delta_{i,j}$, $\tau_{i,j}$ agit trivialement sur $\otimes_{j=1}^m A_j|_{\Delta_{i,j}}$. Par suite $\tau_{i,j}(s|_{\Delta_{i,j}}) = -s|_{\Delta_{i,j}}$, donc $s|_{\Delta_{i,j}} = 0$. Ceci est valable pour tous les (i,j), d'où $s = 0$. Donc $\mathcal{L}$ n'a pas non plus de cohomologie G-invariante.

Le groupe G étant fini, la cohomologie du faisceau des invariants $F^G := (p_*(F))^G$ sur $X_*^{[m]}$ (ou $(q_*(F))^G$ sur $\mathrm{S}_*^m(X)$), où F est un G-faisceau algébrique cohérent sur B (ou sur X_*^m) s'identifie à la cohomologie invariante de F, c'est-à-dire aux invariants de la cohomologie de F.

On écrit alors la suite exacte de cohomologie invariante associée à la suite (3.5) :

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \to & \mathrm{H}^0(B, p^*(L^{[m]}\otimes\mathfrak{d}_m^A))^G & \to & \mathrm{H}^0(B,\widetilde{W})^G & \to & \mathrm{H}^0(B,\widetilde{\mathcal{L}})^G & \to \\ & \to & \mathrm{H}^1(B, p^*(L^{[m]}\otimes\mathfrak{d}_m^A))^G & \to & \mathrm{H}^1(B,\widetilde{W})^G & \to & \mathrm{H}^1(B,\widetilde{\mathcal{L}})^G & \to \cdots \end{array}$$

Le morphisme ρ est le morphisme d'éclatement d'une sous-variété lisse d'une variété lisse. Alors d'après le lemme 3.5 de [SGA-6], exposé VII, on obtient

$$\rho_*(\mathcal{O}_B) = \mathcal{O}_{X_*^m}$$

et

$$R^q\rho_*(\mathcal{O}_B) = 0 \text{ pour } q > 0.$$

On en déduit que $\mathrm{H}^q(B,F) = \mathrm{H}^q(X_*^m, \rho_*F)$ pour un faisceau F sur B donc $\mathrm{H}^0(B,\widetilde{W})^G = \mathrm{H}^0(X_*^m, W)^G = \mathrm{H}^0(X^m,W)^G$, et $\mathrm{H}^1(B,\widetilde{W})^G = \mathrm{H}^1(X_*^m,W)^G = \mathrm{H}^1(X^m,W)^G = 0$.

L'espace $\mathrm{H}^0(X^m,W)^G = \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{H}^0(A))\otimes\mathrm{H}^0(L\otimes A)$ se calcule à l'aide de la section 2.1.1. Les annulations $\mathrm{H}^1(B,\widetilde{\mathcal{L}})^G = \mathrm{H}^0(B,\widetilde{\mathcal{L}})^G = 0$ conduisent à

$$\mathrm{H}^0(B, p^*(L^{[m]}\otimes\mathfrak{d}_m^A))^G = \mathrm{H}^0(X_*^{[m]}, L^{[m]}\otimes\mathfrak{d}_m^A) = \mathrm{S}^{m-1}(\mathrm{H}^0(A))\otimes\mathrm{H}^0(L\otimes A)$$

et

$$\mathrm{H}^1(B, p^*(L^{[m]}\otimes\mathfrak{d}_m^A))^G = \mathrm{H}^1(X_*^{[m]}, L^{[m]}\otimes\mathfrak{d}_m^A) = 0.$$

On conclut en tenant compte de la suite exacte de cohomologie locale associée à l'ouvert $X_*^{[m]}$ dont le complémentaire dans $X^{[m]}$ est de codimension 2.□

3.1.3 Le schéma en espaces projectifs de Grothendieck associé à un faisceau

On rappelle ici des résultats classiques sur le schéma en espaces projectifs de Grothendieck associé à un faisceau, qu'on peut trouver dans [EGA-1], §9.7 et [EGA-2], §4.

Si M est une variété algébrique quelconque, et $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur M, il existe une variété projective $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ munie d'un morphisme projectif $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to M$, un faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)$ et un morphisme surjectif $\pi^*\mathcal{F} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) \to 0$, qui résout le problème universel :

Pour tout schéma S, tout morphisme $f : S \to M$, tout fibré inversible L sur S et tout morphisme surjectif $f^*\mathcal{F} \to L \to 0$, il existe un morphisme unique $g : S \to \mathbb{P}(\mathcal{F})$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(\mathcal{F}) \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

et satisfait $L = g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)$.

Pour un faisceau localement libre de rang a, $\mathcal{F} = \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ est une fibration avec pour fibre au-dessus de $x \in M$, l'espace projectif $\mathbb{P}_\bullet(\mathcal{A}(x)) \simeq \mathbb{P}^{a-1}$. Lorsque $\mathcal{F}$ n'est pas localement libre, la solution du problème universel se construit à partir du cas localement libre de la façon suivante : on considère une résolution

$$\mathcal{B} \to \mathcal{A} \to \mathcal{F} \to 0$$

de $\mathcal{F}$ par des faisceaux localement libres $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$. Si on note π la fibration $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \to M$, on obtient la suite

$$\pi^*\mathcal{B} \to \pi^*\mathcal{A} \to \pi^*\mathcal{F} \to 0$$

sur $\mathbb{P}(\mathcal{A})$. Le morphisme $\pi^*\mathcal{A} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)$ se factorise à travers $\pi^*\mathcal{A} \to \pi^*\mathcal{F}$ si et seulement si l'application composée

$$\pi^*\mathcal{B} \to \pi^*\mathcal{A} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1) \tag{3.6}$$

est nulle. Ainsi $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ est le fermé de $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ donné par l'annulation de la section σ du faisceau

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\pi^*\mathcal{B} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)) = \pi^*\mathcal{B}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1),$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)$ est la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)$ à ce fermé, et le morphisme $\pi^*\mathcal{F} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1)$ est obtenu par factorisation de $\pi^*\mathcal{A} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)$.

On aura besoin dans la suite de la relation entre l'éclaté de l'idéal I d'une sous-variété Y de la variété M et le schéma en espaces projectifs associé à cet idéal. La variété $\mathrm{Bl}_I(M)$ avec le morphisme $\rho : \mathrm{Bl}_I(M) \to M$ est objet universel pour la donnée d'une variété S et d'un morphisme $f : S \to M$ tel que $f^{-1}I \cdot \mathcal{O}_S$ est un faisceau inversible.

Rappel 3.1.3 *Soit M une variété, Y une sous-variété de M d'idéal I, $\mathrm{Bl}_I(M)$ et $\mathbb{P}_M(I)$ les variétés associées. Il existe un morphisme canonique $b : \mathrm{Bl}_I(M) \to \mathbb{P}_M(I)$ au-dessus de M. On a $b^*(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathcal{O}(-E)$ où $\mathcal{O}(1)$ est le faisceau canonique sur $\mathbb{P}_M(I)$, et E est le diviseur exceptionnel.*

Preuve :

Soit $\rho : \mathrm{Bl}_I(M) \to M$ le morphisme d'éclatement. Le morphisme $\rho^*I \to \mathcal{O}(-E)$ est surjectif. Par la propriété universelle de $\mathbb{P}_M(I)$ on obtient un morphisme canonique $b : \mathrm{Bl}_I(M) \to \mathbb{P}_M(I)$ au-dessus de M, qui vérifie $b^*(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathcal{O}_{\mathrm{Bl}_I(M)}(-E)$.□

3.1.4 Images directes supérieures

Soient M une variété lisse de dimension d, $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique cohérent de rang r et de dimension homologique ≤ 1 (ce qui revient à l'existence d'une résolution de $\mathcal{F}$ par des faisceaux localement libres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$: $0 \to \mathcal{B} \to \mathcal{A} \to \mathcal{F} \to 0$.) On note $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{F}) \to M$ et on suppose que $\dim \mathbb{P}(\mathcal{F}) = d + r - 1$.

Lemme 3.1.4 *Dans ces conditions, la variété $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ est localement intersection complète.*

Preuve du lemme :

La variété $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ est un fermé de dimension $d + r - 1$ dans la variété projective lisse $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ (de dimension $d + a - 1$, où a est le rang de $\mathcal{A}$), donnée par l'annulation d'une section σ dans le fibré $\pi^*\mathcal{B}^*(1)$ de rang $a - r$. On fixe localement sur $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ une base de sections du fibré $\pi^*\mathcal{B}^*(1)$, $s_1, \ldots, s_{a-r}$. La section σ s'écrit $\sigma = \sum_i f_i s_i$ avec f_i des fonctions régulières locales sur $\mathbb{P}(\mathcal{A})$. Donc, localement, l'idéal de $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ est $(f_1, \ldots, f_{a-r})$. Comme $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ est de codimension $a - r$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, il résulte que $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ est localement intersection complète. □

Proposition 3.1.5 *Avec les mêmes hypothèses, on obtient*

i) $R^q\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})} = \begin{cases} 0 & si \quad q>0 \\ \mathcal{O}_M & si \quad q=0 \end{cases}$

ii) $R^q\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) = \begin{cases} 0 & si \quad q>0 \\ \mathcal{F} & si \quad q=0. \end{cases}$

Preuve de la proposition :

Le lemme 3.1.4 nous permet d'écrire la suite exacte de Koszul sur $\mathbb{P}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Lambda^{a-r}\pi^*\mathcal{B}(r-a) & \to & \Lambda^{a-r+1}\pi^*\mathcal{B}(r-a-1) & \to & \cdots & \to & \Lambda^2\pi^*\mathcal{B}(-2) & \to \\ & \to & \pi^*\mathcal{B}(-1) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})} & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})} & \to & 0. \end{array} \tag{3.7}$$

On utilise le résultat théorique suivant : Si $\pi : Y \to X$ est un morphisme de variétés et

$$0 \to A_n \overset{\alpha_n}{\to} A_{n-1} \overset{\alpha_{n-1}}{\to} \cdots \to A_0 \to F \to 0$$

est une suite exacte sur Y, alors il existe une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = R^q\pi_*(A_{-p}) \Longrightarrow R^{p+q}\pi_*F.$$

La différentielle $\alpha_1^{p,q} : E_1^{p,q} = R^q\pi_*(A_{-p}) \to E_1^{p+1,q} = R^q\pi_*(A_{-p-1})$ est induite par le morphisme de faisceaux $\alpha_{-p} : A_{-p} \to A_{-p-1}$. On applique cette suite spectrale pour la résolution de Koszul (3.7) :

$$E_1^{p,q} = R^q\pi_*(\Lambda^{-p}\pi^*\mathcal{B}(p)) \Longrightarrow R^{p+q}\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}.$$

Par convention $\Lambda^{-p}\cdot := \Lambda^{-p}\cdot$ si $p \le 0$ et $\Lambda^{-p}\cdot := 0$ si $p>0$. La formule de projection nous donne

$$R^q\pi_*(\Lambda^{-p}\pi^*\mathcal{B}(p)) = \Lambda^{-p}\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_M} R^q\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(p)).$$

D'après [Hart], ex. 8.4, p. 253, on a pour $1-a \le p < 0$, et tout q, $R^q\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(p)) = 0$ et pour $p=0$, $R^0\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}) = \mathcal{O}_M$ et $R^q\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}) = 0$ pour $q>0$. Parmi tous les $R^q\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(p))$ qui apparaissent, le seul non nul est $R^0\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}) = \mathcal{O}_M$. Comme toutes les flèches sont nulles on a $E_\infty = E_1$ donc $R^0\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}) = \mathcal{O}_M$ et $R^q\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}) = 0$ pour $q>0$. D'où i).

Pour ii) on tensorise par $\mathcal{O}(1)$ la suite de Koszul (3.7). On obtient la suite exacte sur $\mathbb{P}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Lambda^{a-r}\pi^*\mathcal{B}(r+1-a) & \to & \Lambda^{a-r-1}\pi^*\mathcal{B}(r+2-a) & \to & \cdots & \to & \Lambda^2\pi^*\mathcal{B}(-1) & \to \\ & \to & \pi^*\mathcal{B} & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) & \to & 0. \end{array}$$

La restriction de ces faisceaux aux fibres $\mathbb{P}^{a-1}$ est respectivement $\mathcal{O}(r+1-a)^{\cdot}, \ldots, \mathcal{O}(-1)^{\cdot}, \mathcal{O}^{\cdot}, \mathcal{O}(1)$. Il résulte ([Hart], thm. 5.1) que la cohomologie sur les fibres est nulle sauf pour H^0 des deux derniers. Par le théorème de semi-continuité il résulte que les images directes supérieures sont nulles sauf pour $\pi_*(\pi^*\mathcal{B}) = \mathcal{B} = E_1^{-1,0}$ et pour $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)) = \mathcal{A} = E_1^{0,0}$. L'application $d_1^{-1,0}$ entre ces deux faisceaux est induite par π_* de l'application $\pi^*\mathcal{B} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)$ qui était l'application composée (3.6) :$\pi^*\mathcal{B} \to \pi^*\mathcal{A} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)$. Par π_* on a l'égalité $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)) = \mathcal{A}$ ([Hart], prop. 7.11, p. 162) et le morphisme induit $\pi_*(\pi^*\mathcal{A}) = \mathcal{A} \to \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1)) = \mathcal{A}$ est l'identité. Le morphisme $\pi_*(\pi^*\mathcal{B}) \to \pi_*(\pi^*\mathcal{A})$ est le morphisme de départ $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Au total, le morphisme $d_1 : \pi_*(\pi^*\mathcal{B}) \to \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{A})}(1))$ est le morphisme $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ de départ. Mais ce morphisme satisfait la suite exacte

$$0 \to \mathcal{B} \to \mathcal{A} \to \mathcal{F} \to 0.$$

Il résulte que $E_2^{0,0} = \mathcal{F}$ et le reste des termes E_2 sont nuls. Donc

$$R^q\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F})}(1) = \begin{cases} \mathcal{F} & \text{si} \quad q=0 \\ 0 & \text{si} \quad q>0 \end{cases} .\square$$

Corollaire 3.1.6 *Soit Y une sous-variété de Cohen-Macaulay de codimension 2 de M et $\mathcal{F} = I_Y$ le faisceau d'idéaux associé. Supposons que l'inclusion de l'éclaté $\mathrm{Bl}_Y(M)$ de M selon Y dans le schéma en espaces projectifs de Grothendieck $\mathbb{P}(I_Y)$ au-dessus de M soit un isomorphisme . Alors*

$$R^q\pi_*\mathcal{O}_E = \begin{cases} \mathcal{O}_Y & si \quad q = 0 \\ 0 & si \quad q > 0 \end{cases}$$

où E est le diviseur exceptionnel.

Preuve du corollaire :

Par la propriété universelle de $\mathbb{P}(I_Y)$, comme dans le rappel 3.1.3, il existe un morphisme $\iota : \mathrm{Bl}_Y(M) \to \mathbb{P}(I_Y)$ tel que $\iota^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(-E)$, et ι est une immersion fermée, qui est un isomorphisme par hypothèse. Dans l'isomorphisme $\mathrm{Bl}_Y(M) \simeq \mathbb{P}(I_Y)$, l'idéal I_E du diviseur exceptionnel E dans $\mathrm{Bl}_Y(M)$ est la préimage du faisceau $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}(I_Y)$. La suite

$$0 \to I_E \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(I_Y)} \to \mathcal{O}_E \to 0$$

sur $\mathbb{P}(I_Y)$ induit une suite longue pour les images directes supérieures qui implique grâce à la proposition 3.1.5 :

$$0 \to \pi_*I_E \to \pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(I_Y)} \to \pi_*\mathcal{O}_E \to 0$$

et $R^q\pi_*\mathcal{O}_E = 0$ pour $q > 0$. Il résulte

$$0 \to I_Y \to \mathcal{O}_M \to \pi_*\mathcal{O}_E \to 0$$

donc $\pi_*\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_Y$.□

3.2 La géométrie de la variété d'incidence

On fera ici l'étude du morphisme $\phi = (p_m, q) : X^{[m,m+1]} \to X^{[m]} \times X$. On note $\rho : \mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) \to X^{[m]} \times X$ l'éclatement de $X^{[m]} \times X$ selon le sous-schéma universel Ξ_m et $\pi : \mathbb{P}(I_{\Xi_m}) \to X^{[m]} \times X$ le morphisme de projection associé à $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$, le schéma en espaces projectifs de Grothendieck associé au faisceau I_{Ξ_m}. Le but de la section est de démontrer le

Théorème 3.2.1 *Les variétés $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$, $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ et $X^{[m,m+1]}$ sont isomorphes au-dessus de $X^{[m]} \times X$:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathbb{P}(I_{\Xi_m}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\pi"] & X^{[m,m+1]} \arrow[dl, "\phi"] \\ & X^{[m]} \times X & \end{tikzcd}$$

Le théorème sera la conclusion des propositions 3.2.3, 3.2.13 qui suivent :

Définition-Proposition 3.2.2 ([Cheah],[Tikh]) *Soit F_1 le foncteur*

$$F_1 : \{Schémas\} \to \{Ensembles\}$$

qui associe à un schéma S l'ensemble des couples (Z, ξ) où $Z \subset S \times X$ (respectivement $\xi \subset S \times X$) est un sous-schéma de $S \times X$, S-plat, de longueur relative $m+1$ (respectivement m) au-dessus de S, tels que $\xi \subset Z$. Ce foncteur est représentable par une variété $X^{[m,m+1]}$, munie des familles $\xi_{univ} \subset Z_{univ}$.

Ainsi, il existe un schéma $X^{[m,m+1]}$ et des familles Z_{univ} et ξ_{univ} au-dessus de $X^{[m,m+1]}$ telles que pour chaque S, Z, ξ, il existe un unique morphisme $f : S \to X^{[m,m+1]}$ vérifiant $(f \times id)^{-1}(Z_{univ}) = Z, (f \times id)^{-1}(\xi_{univ}) = \xi$.

Par construction, il existe des morphismes de projection

$$\begin{tikzcd} X^{[m,m+1]} \arrow[r, "p_{m+1}"] \arrow[d, "p_m"'] & X^{[m+1]} \\ X^{[m]} & \end{tikzcd}$$

qui font de $X^{[m,m+1]}$ un fermé de $X^{[m+1]} \times X^{[m]}$ et $Z_{univ} = (p_{m+1} \times id)^{-1}(\Xi_{m+1})$ et $\xi_{univ} = (p_m \times id)^{-1}(\Xi_m)$.

Proposition 3.2.3 (cf. [E-S2], lemme 3.1, [Lehn], pag.8) *Les variétés* $X^{[m,m+1]}$ *et* $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$, *le schéma en espaces projectifs de Grothendieck associé au faisceau* I_{Ξ_m}, *sont isomorphes au-dessus de* $X^{[m]} \times X$.

Preuve de la proposition :

On rappelle la propriété universelle de $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$: Pour tout schéma S, tout morphisme $f : S \to X^{[m]} \times X$, tout fibré inversible L sur S et tout morphisme surjectif $f^* I_{\Xi_m} \to L \to 0$, il existe un morphisme unique $g : S \to \mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(I_{\Xi_m}) \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X^{[m]} \times X \end{tikzcd}$$

et satisfait $L = g^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(I_{\Xi_m})}(1)$. On rappelle aussi que pour une variété X, la variété $X^{[m]}$, munie du sous-schéma universel Ξ_m, est l'objet universel pour la donnée d'un schéma S, muni d'une famille S-plate $\xi \subset S \times X$ de sous-schémas finis de X de longueur m au-dessus de S. Sous forme de diagramme cela s'écrit :

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r, "\subset"] \arrow[dr, "(m)"'] & S \times X \arrow[d] \\ & S. \end{tikzcd}$$

Plus précisément, Grothendieck démontre ([Grot1]) qu'il existe une variété $X^{[m]}$ et un fermé Ξ_m dans $X^{[m]} \times X$, fini et plat de degré m au-dessus de $X^{[m]}$, tels que pour chaque (S, ξ) comme ci-dessus il existe un unique morphisme $f : S \to X^{[m]}$ vérifiant $(f \times id)^{-1}(\Xi_m) = \xi$. Alors la variété $X^{[m]} \times X$ munie de $\xi'_{univ} = (p_1 \times id)^{-1}(\Xi_m)$ et $\eta'_{univ} = (p_2 \times id)^{-1}(\Xi_1)$ est un objet universel pour la donnée d'un schéma S, avec un couple (ξ, η) où $\xi \subset S \times X$ (respectivement $\eta \subset S \times X$) est une famille S-plate de sous-schémas finis de X de longueur m (respectivement 1) au-dessus de S, soit

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r, "\subset"] \arrow[dr, "(m)"'] & S \times X \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \eta \arrow[r, "\subset"] \arrow[dr, "(1)"'] & S \times X \arrow[d] \\ & S. \end{tikzcd}$$

Commençons la preuve de la proposition 3.2.3 par trois lemmes :

Lemme 3.2.4 *Soit* M *une variété projective et* η *un sous-schéma fermé de* $S \times M$ *qui soit* S*-plat et de longueur relative* 1 *au-dessus de* S. *Le sous-schéma* η *est le graphe d'un morphisme* $\bar{\eta} : S \to M$.

Remarque 3.2.5 La réciproque est évidente : si $\bar{\eta} : S \to M$ est un morphisme, le graphe η de $\bar{\eta}$ est S-plat et de longueur relative 1 au-dessus de S.

Preuve du lemme 3.2.4 :

L'application $\eta \to S \times M \overset{pr_1}{\to} S$ est un morphisme fini et plat de degré 1, donc un isomorphisme. Son inverse est de la forme $i : S \to \eta$, $i(s) = (s, \bar{\eta}(s))$.$\square$

Lemme 3.2.6 *Si* F *est un faisceau cohérent sur* $S \times M$, S*-plat et de longueur relative* 1 *au-dessus de* S, *alors* F *est de la forme* $\mathcal{O}_\eta \otimes L$, *où* η *est le graphe d'un morphisme* $\bar{\eta} : S \to M$ *et* L *un faisceau inversible sur* η.

Remarque 3.2.7 Dans le lemme précédent on avait vu que η était isomorphe à S par pr_1. Par cet isomorphisme on établit une correspondance entre les faisceaux sur S et sur η. On fera des abus de notation en utilisant cette correspondance. Par exemple si E est un diviseur de Cartier sur S, on note $\mathcal{O}_\eta(-E)$ le faisceau inversible sur η qui correspond à $\mathcal{O}_S(-E)$.

Preuve du lemme 3.2.6 :

Par un résultat de Grothendieck [EGA-3], §7, cité par Mumford dans [M-F], p.19, §5 (a) , si $f : X \to Y$ est un morphisme propre de schémas noethériens, $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, plat sur Y, pour $y \in Y$, X_y

(respectivement $\mathcal{F}_y$) est la fibre de f au-dessus de y (respectivement le faisceau induit par $\mathcal{F}$ sur la fibre), et si pour tout $y \in Y$, $\mathrm{H}^1(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$, alors $f_*(\mathcal{F})$ est un faisceau localement libre sur Y. Dans notre cas, $A = pr_{1*}F$ est un faisceau inversible sur S, parce que $\mathrm{H}^1(M, F_s) = 0$ en tout point $s \in S$. Le morphisme naturel $pr_1^*A \to F$ est surjectif puisque F est de longueur relative 1 au-dessus de S, donc le morphisme $\mathcal{O}_{S\times M} \to (pr_1^*A)^{-1} \otimes F$ est surjectif. Le faisceau $(pr_1^*A)^{-1} \otimes F$ est encore plat et de longueur relative 1 au-dessus de S. On se retrouve dans la situation du lemme 3.2.4 donc $(pr_1^*A)^{-1} \otimes F = \mathcal{O}_\eta$ pour η le graphe d'un morphisme $\bar{\eta} : S \to M$. Alors $F = pr_1^*A \otimes \mathcal{O}_\eta = L \otimes \mathcal{O}_\eta$ pour $L = pr_1^*A$, faisceau inversible sur η. Dans l'abus de notation on peut écrire $F = \mathcal{O}_\eta \otimes A$.□

Lemme 3.2.8 *Pour un schéma S, la donnée d'un élément de $F_1(S)$ est équivalente à la donnée de ξ, η, L, s, où ξ et η sont des sous-schémas S-plats de $S \times X$, de longueur relative m, respectivement 1, au-dessus de S, L est un fibré inversible sur S, et s est un morphisme surjectif $s : I_\xi \to L \otimes \mathcal{O}_\eta$ (dans l'abus de langage signalé dans la remarque 3.2.7).*

Preuve du lemme 3.2.8 :

La donnée d'un élément de $F_1(S)$ nous fournit un morphisme surjectif :

$$\mathcal{O}_{S\times X}/I_Z = \mathcal{O}_Z \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{S\times X}/I_\xi = \mathcal{O}_\xi. \tag{3.8}$$

Son noyau, isomorphe à I_ξ/I_Z, est un quotient de I_ξ et a une longueur relative 1 au-dessus de S. Par le lemme 3.2.6, il est de la forme $L \otimes \mathcal{O}_\eta$.

Réciproquement, le noyau $\operatorname{Ker} s$ du morphisme $s : I_\xi \to L \otimes \mathcal{O}_\eta$ est un sous-faisceau cohérent de I_ξ. Comme $L \otimes \mathcal{O}_\eta$ a une longueur relative 1 au-dessus de S, $\operatorname{Ker} s$ est l'idéal I_Z d'un sous-schéma S-plat de $S \times X$, de longueur relative $m+1$. □

Remarque 3.2.9 À l'issue de ce lemme on obtient la définition rigoureuse du morphisme $q : X^{[m,m+1]} \to X$, à partir de la famille η_{univ} obtenue sur $X^{[m,m+1]}$ des familles Z_{univ} et ξ_{univ}.

Soit (S, ξ, Z) un élément de $F_1(S)$. On note $u : S \to X^{[m]}$ le morphisme donné par la famille ξ, $v : S \to X$ le morphisme donné par la famille η construite par le lemme 3.2.8, et $f = (u,v) : S \to X^{[m]} \times X$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} S \times X \arrow[r, "u\times id"] & X^{[m]} \times X \\ S. \arrow[u, "\bar{\eta}=(id,v)"] \arrow[ur, "f=(u,v)"'] & \end{tikzcd}$$

L'image de $\bar{\eta} = (id, v)$ est η. Un dernier lemme nous aide à conclure :

Lemme 3.2.10 *On a un isomorphisme de faisceaux sur $S \times X$, $(u \times id)^* I_{\Xi_m} = I_\xi$.*

Preuve du lemme :

À partir de la suite exacte sur $X^{[m]} \times X$:

$$0 \to I_{\Xi_m} \to \mathcal{O}_{X^{[m]}\times X} \to \mathcal{O}_{\Xi_m} \to 0,$$

par image réciproque par $u \times id$ on obtient une suite exacte :

$$0 \to (u \times id)^* I_{\Xi_m} \to \mathcal{O}_{S\times X} \to \mathcal{O}_\eta = (u \times id)^* \mathcal{O}_{\Xi_m} \to 0,$$

puisque $\mathcal{O}_{\Xi_m}$ est plat sur $X^{[m]}$. Il résulte que $(u \times id)^* I_{\Xi_m} = I_\xi$, puisque ce dernier est le noyau de la surjection $\mathcal{O}_{S\times X} \to \mathcal{O}_\eta \to 0$.□

Retour à la preuve de la proposition 3.2.3 : D'après le lemme 3.2.8, se donner un élément de $F_1(S)$ équivaut à se donner une surjection $I_\xi \to \mathcal{O}_\eta \otimes L \to 0$ sur $S \times X$. Mais $\mathcal{O}_\eta \otimes L$ est un faisceau sur le fermé $\eta = \bar{\eta}(S)$ de $S \times X$. La surjection $I_\xi \to \mathcal{O}_\eta \otimes L \to 0$ est équivalente à une surjection $I_\xi \otimes_{\mathcal{O}_{S\times X}} \mathcal{O}_\eta \to \mathcal{O}_\eta \otimes L \to 0$. Mais $\bar{\eta}$ est un isomorphisme entre S et η. Par suite la dernière surjection est équivalente à une surjection $\bar{\eta}^* I_\xi \to L = \bar{\eta}^*(\mathcal{O}_\eta \otimes L) \to 0$. Par le lemme 3.2.10 on a $\bar{\eta}^* I_\xi = \bar{\eta}^*(u \times id)^* I_{\Xi_m} = f^* I_{\Xi_m}$. Il en résulte que se donner un élément de $F_1(S)$ revient à se donner un morphisme $f : S \to X^{[m]} \times X$, un faisceau inversible L sur S, et une surjection $f^* I_{\Xi_m} \to L$. Par conséquent $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ représente F_1, et donc $\mathbb{P}(I_{\Xi_m}) \simeq X^{[m,m+1]}$.□

Remarque 3.2.11 Le fait d'avoir utilisé les familles universelles $(Z,\ \xi,\ \eta)$ sur S, nous garantit que par cet isomorphisme les familles universelles de longueurs relatives $m+1$, m et 1 qui existent naturellement sur chacune des deux variétés $X^{[m,m+1]}$ et $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ se correspondent.

Pour démontrer le théorème 3.2.1 il ne reste plus qu'à démontrer l'isomorphisme entre $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$ et $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ (prop.3.2.13).

Il faut d'abord s'assurer que :

Lemme 3.2.12 *Le faisceau I_{Ξ_m} admet une présentation*

$$0 \to \mathcal{B} \to \mathcal{A} \to I_{\Xi_m} \to 0$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont localement libres sur $X^{[m]} \times X$.

Preuve du lemme :

Soit $0 \to \mathcal{B} \to \mathcal{A} \to I_{\Xi_m} \to 0$ une présentation, où $\mathcal{A}$ est localement libre et $\mathcal{B}$ est le noyau du morphisme $\mathcal{A} \to I_{\Xi_m} \to 0$. On prouve que $\mathcal{B}$ est localement libre. On note a le rang de $\mathcal{A}$. Soit $s \in X^{[m]}$. On a $\mathcal{I}_s = I_{\Xi_m}|_{\{s\}\times X}$. Comme I_{Ξ_m} est plat sur $X^{[m]}$, on obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{B}|_{\{s\}\times X} \to \mathcal{A}|_{\{s\}\times X} \to \mathcal{I}_s \to 0.$$

Mais $\mathcal{I}_s$ est de dimension homologique 1, donc $\mathcal{B}|_{\{s\}\times X}$ est localement libre de rang $a-1$. Par conséquent le faisceau cohérent $\mathcal{B}$ a toutes ses fibres de dimension $a-1$, donc il est localement libre de rang $a-1$.□

Proposition 3.2.13 (cf. [Lehn], p.8, [E-S2], p.5) *Les variétés $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$ et $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ sont isomorphes au-dessus de $X^{[m]} \times X$.*

Preuve de la proposition :

D'après la section préliminaire 3.1.3, dans le cas qui nous intéresse : $\mathcal{F} = I_{\Xi_m}$, on obtient que $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ est le fermé donné par l'annulation de la section σ du fibré $\pi^*\mathcal{B}^*(1)$ de rang $a-1$ sur la variété $\mathbb{P}(\mathcal{A})$, de dimension $2m+2+a-1$.

Le lemme de Krull affirme que la dimension de toutes les composantes irréductibles de $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ est supérieure ou égale à $(2m+2+a-1)-(a-1) = 2m+2$. Il suffit de montrer que $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ est une variété intègre de dimension $2m+2$. Alors, par la propriété universelle de $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$, d'après le rappel 3.1.3, il existe un morphisme $\iota : \mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) \to \mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ tel que $\iota^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(-E)$, et ι est une immersion fermée. Mais $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$ est de dimension $2m+2$ puisque birationnelle à $X^{[m]} \times X$. D'où l'égalité $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) = \mathbb{P}(I_{\Xi_m})$. Ces variétés seront identifiées dans la suite, ainsi que les morphismes ϕ et π.

On commence par montrer que $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ est une variété irréductible de dimension $2m+2$. Par le lemme 3.1.4 elle est localement intersection complète, ce qui implique en particulier par [Hart], prop. 8.23(a) (p. 186) que c'est une variété de Cohen-Macaulay. On remarque ensuite que l'ensemble de ses points singuliers est de codimension ≥ 1. Par le critère de Serre ([Mats], p.183), on déduit que $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ est une variété réduite, donc intègre.

Lemme 3.2.14 (cf. [E-S2], prop.3.2(a)) *La variété $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ est irréductible de dimension $2m+2$.*

Preuve du lemme :

On utilise le résultat de la proposition 5 de l'article [E-L], qu'on applique pour $E = \mathcal{O}_X$, $r=1$, $l=m$, $\mathrm{Quot}(E,l) = X^{[m]}$, $\mathcal{N} = I_{\Xi_m}$, $Z = \mathbb{P}(I_{\Xi_m})$, $Y_m = X^{[m]} \times X$ et $Y_{m,i}$ l'ensemble localement fermé $\{y=(s,x) \in X^{[m]} \times X | e((I_{\Xi_m})_{s,x}) = i+1\}$ avec la structure réduite. Par définition, si F est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules, on note $e(F_x) = \hom_X(F, k(x))$ la dimension de l'espace vectoriel $F(x) = F \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)$, qui par le lemme de Nakayama coïncide avec le nombre minimal de générateurs de la fibre des germes F_x. La définition de $Y_{m,i}$ est équivalente à celle de la page 4 de [E-L], en utilisant le lemme 2 de [E-L]. Comme il est dit à la page 5, la fibre en $(s,x) \in Y_{m,i}$ du morphisme $\pi : \mathbb{P}(I_{\Xi_m}) \to X^{[m]} \times X$, noté ϕ par les auteurs, est $\mathbb{P}_\bullet((I_{\Xi_m})_s \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)) = \mathbb{P}^i$. La proposition 5 dit que la codimension de $Y_{m,i}$ dans $Y_m = X^{[m]} \times X$ est au moins $2i$, soit que $\dim Y_{m,i} \leq 2m+2-2i$. Il résulte que l'adhérence des fibres de π au-dessus de $Y_{m,i}$ sont de dimension au plus $2m+2-2i+i = 2m-i+2$. L'important c'est que pour $i>0$ ces ensembles sont de dimension strictement inférieure à $2m+2$.

L'ensemble $Y_{m,0}$ est le complémentaire de Ξ_m dans $X^{[m]} \times X$, puisque pour un point $s \in X^{[m]}$ et un point $x \in X$ vérifiant $x \notin \mathrm{supp}\,(s)$, on a $(I_{\Xi_m})_s \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x) = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x) = k(x)$, de dimension 1. Inversement, si

$\dim((I_{\Xi_m})_s \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)) = 1$, comme $(I_{\Xi_m})_s \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x) = ((I_{\Xi_m})_s \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = (I_{\Xi_m})_{s,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$, par le lemme de Nakayama, $(I_{\Xi_m})_{s,x}$ est engendré par un générateur g. Si ce générateur est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$, alors $(I_{\Xi_m})_{s,x} = (1)$ et I_{Ξ_m} est nul au voisinage de x donc $x \notin \mathrm{supp}\,(s)$. Si g s'annule en x, alors $(I_{\Xi_m})_{s,x} = (g)$, donc localement en x, s est donnée par le diviseur défini par $g = 0$, contradiction (puisque s est un schéma de dimension 0).

Le morphisme π est un isomorphisme au-dessus de $Y_{m,0}$, puisque $I_{\Xi_m}|_{Y_{m,0}}$ est trivial.

En résumé : On a un morphisme $\pi : \mathbb{P}(I_{\Xi_m}) \to X^{[m]} \times X$ et $X^{[m]} \times X$ est réunion disjointe des ensembles localement fermés $Y_{m,i}$. Par suite $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ est réunion disjointe des ensembles localement fermés $\phi^{-1}(Y_{m,i})$. Toutes les parties $\phi^{-1}(Y_{m,i})$ pour $i > 0$ sont de dimension $< 2m+2$, et $\phi^{-1}(Y_{m,0})$ est de dimension $2m+2$ (π est un isomorphisme au-dessus de $Y_{m,0}$, et $Y_{m,0}$ est un ouvert de $X^{[m]} \times X$). On avait vu que $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ était le schéma des zéros d'une section dans un fibré , et que par le lemme de Krull, toutes ses composantes irréductibles étaient de dimension $\geq 2m+2$.

part l'adhérence de $\phi^{-1}(Y_{m,0})$, qui est irréductible puisque $Y_{m,0}$ l'est, et qui est de dimension $2m+2$, il ne peut pas y avoir d'autres composantes irréductibles. (Précisément, $\mathbb{P}(I_{\Xi_m}) = \cup_i Y_{m,i} = \cup_i \bar{Y}_{m,i}$. Mais quand un ensemble est recouvert par un nombre fini de fermés, ses composantes irréductibles sont les éléments maximaux parmi ces fermés. S'il existait un i tel que $\bar{Y}_{m,i} \not\subset \bar{Y}_{m,0}$, $\bar{Y}_{m,i}$ engendrerait une composante irréductible de dimension $< 2m+2$, contradiction. Donc $\bar{Y}_{m,i} \subset \bar{Y}_{m,0}$, pour tout i, d'où $\mathbb{P}(I_{\Xi_m}) = \bar{Y}_{m,0}$).□

On remarque que $Y_{m,0}$ est un ouvert de $X^{[m]} \times X$, donc il est lisse, donc l'ensemble des points singuliers de $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ est de codimension ≥ 1.□

Remarque 3.2.15 Encore une fois, comme dans la remarque 3.2.9, l'isomorphisme au-dessus de $X^{[m]} \times X$ nous garantit la correspondance par ι entre les familles universelles qui existent naturellement sur chacune des deux variétés $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$ et $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$. On désignera donc par le même nom Z_{univ}, ξ_{univ} et η_{univ} ces familles de sous-schémas de longueur $m+1$, m et respectivement 1 de X, sans plus tenir compte qu'elles vivent au-dessus de $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$, $\mathbb{P}(I_{\Xi_m})$ ou $X^{[m,m+1]}$.

Proposition 3.2.16 *Sur* $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) \simeq X^{[m,m+1]}$, *avec les notations de la remarque 3.2.15, on dispose d'une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{O}_{Z_{univ}} \to \mathcal{O}_{\xi_{univ}} \oplus \mathcal{O}_{\eta_{univ}} \to \mathcal{O}_{\eta_{univ}}|_E \to 0. \tag{3.9}$$

Preuve de la proposition 3.2.16 :

On regarde la suite exacte associée au diviseur exceptionnel E sur $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$:

$$0 \to \mathcal{O}(-E) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)} \to \mathcal{O}_E = \rho^*(\mathcal{O}_{\Xi_m}) \to 0.$$

La suite correspondante sur η_{univ} est

$$0 \to \mathcal{O}_{\eta_{univ}}(-E) \to \mathcal{O}_{\eta_{univ}} \to \mathcal{O}_{\eta_{univ}} \otimes \mathcal{O}_{\xi_{univ}} \to 0.$$

Il faut expliquer le dernier terme. Dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) \times X & \xrightarrow{\rho \times id} & X^{[m]} \times X \times X \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{12}} \\ \mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) & \xrightarrow{\rho} & X^{[m]} \times X \end{array}$$

on a $\mathcal{O}_{\eta_{univ}} = (\rho \times id)^* \mathcal{O}_{\eta'_{univ}}$, $\mathcal{O}_{\xi_{univ}} = (\rho \times id)^* \mathcal{O}_{\xi'_{univ}}$ et

$$\mathcal{O}_{\eta'_{univ}} \otimes \mathcal{O}_{\xi'_{univ}} = p_{13}^* \mathcal{O}_{\Xi_m} \otimes p_{23}^* \mathcal{O}_{\Xi_1} = p_{12}^* \mathcal{O}_{\Xi_m} \otimes p_{23}^* \mathcal{O}_{\Xi_1} = p_{12}^* \mathcal{O}_{\Xi_m} \otimes \mathcal{O}_{\eta'_{univ}}.$$

Les projections pr_1, p_{12}, p_{13} et p_{23} sont naturelles et les indices indiquent sur quels facteurs elles agissent. On obtient

$$\mathcal{O}_{\eta_{univ}} \otimes \mathcal{O}_{\xi_{univ}} = (\rho \times id)^* p_{12}^* \mathcal{O}_{\Xi_m} \otimes \mathcal{O}_{\eta_{univ}} = pr_1^*(\rho^* \mathcal{O}_{\Xi_m}) \otimes \mathcal{O}_{\eta_{univ}} = pr_1^*(\mathcal{O}_E) \otimes \mathcal{O}_{\eta_{univ}}$$

et $pr_1 : \eta_{univ} \to \mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$ est l'isomorphisme qui établit la correspondance entre η_{univ} et $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)$. Donc $\mathcal{O}_E$ et $\mathcal{O}_{\eta_{univ}} \otimes \mathcal{O}_{\xi_{univ}} = \mathcal{O}_{\eta_{univ} \cap \xi_{univ}}$ sont en correspondance par cet isomorphisme. On en déduit que

$$\mathcal{O}_{\eta_{univ} \cap \xi_{univ}} = \mathcal{O}_{\eta_{univ}}|_E. \tag{3.10}$$

On dispose aussi de la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\eta_{univ}}(-E) \to \mathcal{O}_{Z_{univ}} \to \mathcal{O}_{\xi_{univ}} \to 0$$

sur $X^{[m,m+1]} \times X$ En effet, d'après le lemme 3.2.8, le noyau du morphisme $\mathcal{O}_{Z_{univ}} \to \mathcal{O}_{\xi_{univ}}$ est de la forme $L \otimes \mathcal{O}_{\eta_{univ}}$ pour un fibré L inversible sur $X^{[m,m+1]}$. D'après la proposition 3.2.3, le fibré L se correspond avec le fibré inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(I_{\Xi_m})}(1)$ (quotient universel de $\pi^*(I_{\Xi_m})$). Dans l'identification $\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X) \simeq \mathbb{P}(I_{\Xi_m})$, il se correspond avec fibré inversible $\mathcal{O}_{\mathrm{Bl}_{\Xi_m}(X^{[m]} \times X)}(-E)$ (rappel 3.1.3).

On regarde le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\eta_{univ}}(-E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Z_{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\xi_{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\eta_{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\xi_{univ}} \oplus \mathcal{O}_{\eta_{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\xi_{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\eta_{univ} \cap \xi_{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\eta_{univ} \cap \xi_{univ}} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & . &
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

Le morphisme $\mathcal{O}_{Z_{univ}} \to \mathcal{O}_{\xi_{univ}} \oplus \mathcal{O}_{\eta_{univ}}$ est donné par $t \mapsto (t|_{\xi_{univ}}, t|_{\eta_{univ}})$ et le morphisme

$$\mathcal{O}_{\xi_{univ}} \oplus \mathcal{O}_{\eta_{univ}} \to \mathcal{O}_{\eta_{univ} \cap \xi_{univ}}$$

est donné par $(u, v) \mapsto (u - v)|_{\eta_{univ} \cap \xi_{univ}}$ donc le diagramme est commutatif. Les lignes du diagramme sont exactes. La première et la troisième colonne du diagramme sont des suites exactes. On obtient que la colonne du milieu est exacte. D'après l'égalité (3.10), c'est la suite de l'énoncé.□

3.3 Le morphisme trace

On utilisera ici la propriété de lissité de $X^{[m,m+1]}$, (voir [Cheah], [Tikh]), annoncée depuis l'introduction. Le but de cette section est de démontrer :

Proposition 3.3.1 *L'espace de cohomologie* $\mathrm{H}^q(X^{[m+1]}, L^{[m+1]} \otimes \mathfrak{d}^A_{m+1})$ *est facteur direct de l'espace de cohomologie* $\mathrm{H}^q(X^{[m,m+1]}, p^*_{m+1}(L^{[m+1]} \otimes \mathfrak{d}^A_{m+1}))$.

C'est un corollaire de la proposition suivante :

Proposition 3.3.2 *Soient X et Y deux variétés analytiques compactes de même dimension d, lisses et irréductibles. Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif et V un fibré vectoriel analytique sur Y. Alors pour tout $q \geq 0$,* $\mathrm{H}^q(Y, V)$ *est facteur direct dans* $\mathrm{H}^q(X, f^*V)$.

Corollaire 3.3.3 *Si X et Y sont des variétés projectives et lisses de même dimension, $f : X \to Y$ un morphisme surjectif et V un fibré vectoriel algébrique sur Y, alors* $\mathrm{H}^q(Y, V)$ *est facteur direct dans* $\mathrm{H}^q(X, f^*V)$ *pour tout $q \geq 0$.*

Preuve du corollaire :

Puisque Y est projective et V est un fibré algébrique, le principe GAGA s'applique, et la cohomologie $\mathrm{H}^q(Y,V)$ du fibré algébrique V sur Y coïncide avec la cohomologie de V vu comme fibré analytique sur la variété analytique Y. De même pour X, f^*V. La proposition 3.3.2 s'applique.□

Preuve de la proposition 3.3.2 :

On procédera en plusieurs étapes :

1) L'espace $\mathrm{H}^q(Y,V)$ est la cohomologie en degré q du complexe de Dolbeault des formes différentielles de type $(0,p)$ sur Y à valeurs dans V : $(A^{0,\cdot}(V),\bar\partial)$.

2) Il existe un morphisme bien défini $f^* : \mathrm{H}^q(Y,V) \to \mathrm{H}^q(X,f^*V)$ qui associe à une forme fermée sur Y sa préimage sur X. On dispose de la dualité de Serre : le morphisme bilinéaire

$$\mathrm{H}^q(Y,V)\otimes \mathrm{H}^{d-q}(Y,V^*\otimes\omega_Y)\to \mathrm{H}^d(Y,\omega_Y)\simeq\mathbb{C}$$

est non-dégénéré, c'est-à-dire qu'il identifie chacun des espaces $\mathrm{H}^q(Y,V)$ et $\mathrm{H}^{d-q}(Y,V^*\otimes\omega_Y)$ au dual de l'autre. (Concrètement ce morphisme se réalise ainsi : on représente l'élément de $\mathrm{H}^q(Y,V)$ par une forme différentielle $\bar\partial$-fermée α de type $(0,q)$ à valeurs dans V -qui s'écrit localement $\sum_i s_i\otimes\omega_i$, s_i section locale holomorphe de V et ω_i forme différentielle C^∞ de type $(0,q)$- et l'élément de $\mathrm{H}^{d-q}(Y,V^*\otimes\omega_Y)$ par une forme différentielle $\bar\partial$-fermée β de type $(0,d-q)$ à valeurs dans $V^*\otimes\omega_Y$ -qui s'écrit localement $\sum_i s_i\otimes\eta_i\otimes\omega_i$, s_i section locale holomorphe de V^*, η_i section locale holomorphe de ω_Y et ω_i forme différentielle C^∞ de type $(0,d-q)$-. Si on regarde les formes différentielles holomorphes comme des formes C^∞, on obtient que $\alpha\beta$ est une forme différentielle (d,d) à valeurs dans $V^*\otimes V$, soit un élément dans $\Gamma(V^*\otimes_{\mathcal{O}_Y}V\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{A}^{d,d}(Y))$. Il existe un morphisme trace tr : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(V,V)\to\mathcal{O}_Y$. L'image $tr(\alpha\beta)$ est un élément de $A^{d,d}(Y)=\Gamma(\mathcal{O}_Y\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{A}^{d,d}(Y))$. L'application qui donne la dualité de Serre est $(\alpha,\beta)\mapsto\int_Y\alpha\beta$.)

3) On note $\omega_{X/Y}$ le fibré inversible sur X égal à $\omega_X\otimes f^*(\omega_Y)^{-1}$.

Lemme 3.3.4 *Le fibré $\omega_{X/Y}$ admet une section canonique σ.*

Preuve du lemme :

L'existence d'une section canonique équivaut à l'existence d'un morphisme injectif $\mathcal{O}_X\hookrightarrow\omega_X\otimes f^*(\omega_Y)^{-1}$, ou bien, en tensorisant par $f^*(\omega_Y)$, à l'existence d'un morphisme $f^*(\omega_Y)\to\omega_X$. Ce morphisme s'obtient à partir du morphisme entre les espaces tangents $T_X\to f^*T_Y$ en prenant le dual et la puissance extérieure maximale :$f^*\omega_Y=f^*\Lambda^dT_Y^*\to\omega_X=\Lambda^dT_X^*$.

4) La dualité de Serre induit un morphisme

$$f_*:\mathrm{H}^q(X,f^*V\otimes\omega_{X/Y})\to\mathrm{H}^q(Y,V).$$

Plus précisément

$$\mathrm{H}^q(X,f^*V\otimes\omega_{X/Y})\overset{Serre}{\simeq}\mathrm{H}^{d-q}(X,f^*V^*\otimes\omega_{X/Y}^*\otimes\omega_X)^*\simeq\mathrm{H}^{d-q}(X,f^*V^*\otimes f^*\omega_Y)^*$$

et

$$\mathrm{H}^q(Y,V)\overset{Serre}{\simeq}\mathrm{H}^{d-q}(Y,V^*\otimes\omega_Y)^*.$$

On dispose d'un morphisme image réciproque

$$f^*:\mathrm{H}^{d-q}(Y,V^*\otimes\omega_Y)\to\mathrm{H}^{d-q}(X,f^*(V^*\otimes\omega_Y)).$$

Compte-tenu des isomorphismes ci-dessus, on trouve par dualité un morphisme

$$f_*:\mathrm{H}^q(X,f^*V\otimes\omega_{X/Y})\to\mathrm{H}^q(Y,V).$$

Concrètement, ce morphisme associe à la classe $[\gamma]$ représentée par la forme différentielle $(0,q)$ à valeurs dans $f^*V\otimes\omega_{X/Y}$, l'unique classe de cohomologie de $\mathrm{H}^q(Y,V)$ qui vérifie : pour toute forme différentielle δ de cette classe, et pour toute $(0,d-q)$-forme différentielle $\bar\partial$-fermée ϵ à valeurs dans $V^*\otimes\omega_Y$, on a

$$\int_X\gamma\cdot f^*\epsilon=\int_Y\delta\cdot\epsilon.$$

La dualité de Serre assure l'existence de cette classe $[\delta] = f_*[\gamma]$.

5) En composant les morphismes obtenus aux étapes 1, 3, 4, on obtient un morphisme

$$\mathrm{H}^q(Y,V) \overset{(1),f^*}{\to} \mathrm{H}^q(X,f^*V) \overset{(3)}{\to} \mathrm{H}^q(X,f^*V\otimes\omega_{X/Y}) \overset{(4),f_*}{\to} \mathrm{H}^q(Y,V).$$

D'après le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs critiques d'un morphisme propre de variétés analytiques lisses est un fermé analytique sans point intérieur (ce qui signifie pour nous isomorphisme local, les deux variétés étant de même dimension). On montre que la composée des trois applications est la multiplication par une constante c égale au nombre des points de la fibre au-dessus d'un point lisse.

Si $[\alpha]$ est une classe de cohomologie de $\mathrm{H}^q(Y,V)$, il faut démontrer que $f_*(f^*[\alpha]\cdot[\sigma]) = c\cdot[\alpha]$ où σ était la section canonique construite à l'étape (3). Le lemme suivant fait une première simplification :

Lemme 3.3.5 (formule de projection) *On a* $f_*(f^*[\alpha]\cdot[\sigma]) = [\alpha]\cdot f_*([\sigma])$.

Remarque 3.3.6 On voit ici $[\sigma]$ comme élément de $\mathrm{H}^0(X,\omega_{X/Y})$ qui est envoyé comme à l'étape (4) par f_* dans $\mathrm{H}^0(Y,\mathcal{O}_Y)$. Par la compacité de Y, ce dernier espace est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve de la formule de projection :

La classe $f_*([\sigma])$ est représenté par une 0-forme différentielle holomorphe ρ sur Y (donc une constante) qui vérifie

$$\int_Y \rho\cdot\epsilon = \int_X \sigma\cdot f^*\epsilon$$

pour tout $\epsilon\in A^{0,d}(Y,\omega_Y)$. Mais pour $\epsilon = \alpha\cdot\epsilon'$ avec $\epsilon'\in A^{0,d-q}(Y,V^*\otimes\omega_Y)$ on obtient :

$$\int_Y \alpha\cdot\rho\cdot\epsilon' = \int_Y \rho\cdot\alpha\epsilon' = \int_X \sigma\cdot f^*(\alpha\epsilon') = \int_X f^*\alpha\cdot\sigma\cdot f^*\epsilon'$$

c'est-à-dire exactement

$$f_*(f^*[\alpha]\cdot[\sigma]) = [\alpha]\cdot f_*([\sigma]).\square$$

Il reste à montrer que $f_*([\sigma]) = c\in\mathrm{H}^0(Y,\mathcal{O}_Y)\simeq\mathbb{C}$. On sait que $f_*([\sigma])$ est une constante

$$cst\in\mathrm{H}^0(Y,\mathcal{O}_Y)\simeq\mathbb{C}.$$

Il faut déterminer cst. Pour cela il suffit de choisir $\epsilon\in A^{0,d}(Y,\omega_Y)$ tel que $\int_Y\epsilon\neq 0$. Alors $f_*([\sigma]) = cst$ implique

$$cst\cdot\int_Y\epsilon = \int_Y cst\cdot\epsilon\int_X\sigma\cdot f^*\epsilon$$

et on peut déterminer cst. Plus précisément, on choisit $y\in Y$ un point de l'ouvert de lissité. Sur un ouvert dans la topologie C^∞ au-dessus de y, f est la réunion de c isomorphismes $W_i\overset{f}{\to}T$, $f^{-1}(T) = \cup_{i=1}^c W_i$. On choisit un système de coordonnées $z_1,\ldots,z_d$ sur T qu'on transporte par f^{-1} sur chacun des W_i. On choisit, dans cet abus de notations pour les coordonnées, $dz_1\cdots dz_d$ un générateur pour $\omega_Y|_T$ et pour $\omega_X|_{W_i}$. Alors $\sigma = 1$ dans cette trivialisation. Pour ϵ on choisit une forme à support compact inclus dans T et telle que $\int_T\epsilon = 1$. Alors

$$\int_X f^*\epsilon\cdot\sigma = \int_{f^{-1}(T)} f^*\epsilon\cdot\sigma = \sum_{i=1}^c\int_{W_i} f^*\epsilon =$$

$$= \sum_{i=1}^c\int_T\epsilon = c\cdot\int_T\epsilon.$$

Comme $\int_Y\epsilon = 1\neq 0$ alors $cst = c$ et $c\neq 0$ puisque par hypothèse, f était surjectif. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.3.2. $\square$

Une variante algébrique particulière de la proposition qu'on vient de démontrer est la suivante :

Proposition 3.3.7 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme fini, plat, de degré c, entre deux schémas X et Y. Soit L un faisceau localement libre sur Y. Alors $\mathrm{H}^q(Y, L)$ est facteur direct de $\mathrm{H}^q(Y, L \otimes f_* \mathcal{O}_X)$.*

Cette proposition est une conséquence du lemme :

Lemme 3.3.8 *Soit $f : X \to Y$ comme dans la proposition. Alors $\mathcal{O}_Y$ est facteur direct de $f_* \mathcal{O}_X$.*

Effectivement, soit

$$\mathcal{O}_Y \overset{i}{\hookrightarrow} f_* \mathcal{O}_X \overset{p}{\to} \mathcal{O}_Y$$

les morphismes d'inclusion et projection donnés par le lemme, avec $p \circ i = id$. Alors la composée des applications induites

$$\mathrm{H}^q(Y, L) \to \mathrm{H}^q(Y, L \otimes f_* \mathcal{O}_X) \to \mathrm{H}^q(Y, L)$$

est égale à l'identité, d'où le résultat de la proposition.

Preuve du lemme :

Le faisceau $f_* \mathcal{O}_X$ est localement libre de rang c sur Y. La multiplication induit un morphisme

$$f_* \mathcal{O}_X \to \underline{\mathrm{End}}_Y(f_* \mathcal{O}_X, f_* \mathcal{O}_X),$$

qui par composition avec le morphisme trace

$$Tr : \underline{\mathrm{End}}_Y(f_* \mathcal{O}_X, f_* \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y$$

donne le morphisme $p : f_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$. Le morphisme composé

$$f : \mathcal{O}_Y \overset{i}{\hookrightarrow} f_* \mathcal{O}_X \overset{p}{\to} \mathcal{O}_Y$$

est égal à $c \cdot id$. Modulo une reparamétrisation on obtient le résultat. $\square$

3.4 Preuve du théorème 3.0.1

On raisonne par récurrence sur m. On établira tout d'abord les 6 pas suivants :

1) On a une suite exacte (3.9) sur $X^{[m,m+1]} \times X$:

$$0 \to \mathcal{O}_{Z_{univ}} \to \mathcal{O}_{\xi_{univ}} \oplus \mathcal{O}_{\eta_{univ}} \to \mathcal{O}_{\eta_{univ}}|_E \to 0$$

où $\mathcal{O}_{\eta_{univ}}|_E$ est le faisceau correspondant à $\mathcal{O}_E$ sur $X^{[m,m+1]}$ par l'isomorphisme $\eta_{univ} \to X^{[m,m+1]}$.

2) On a une suite exacte sur $X^{[m,m+1]}$:

$$0 \to p_{m+1}^*(L^{[m+1]} \otimes \mathfrak{d}_{m+1}^A) \to \phi^* \left((L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \boxtimes A \right) \oplus \phi^* \left(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A) \right) \to$$

$$\to \phi^* \left(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A) \right)|_E \to 0$$

où $\phi = (p_m, q)$.

3) On a une suite longue de cohomologie associée à la suite exacte de (2).

4) On peut ramener le calcul de cohomologie sur $X^{[m,m+1]}$ à un calcul de cohomologie sur $X^{[m]} \times X$:

$$\mathrm{H}^q(X^{[m,m+1]}, \phi^* \left((L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \boxtimes A \right) \oplus \phi^* \left(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A) \right)) =$$

$$= \mathrm{H}^q(X^{[m]} \times X, (L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \boxtimes A) \oplus \mathrm{H}^q(X^{[m]} \times X, \mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A)).$$

5) L'espace $\mathrm{H}^q(X^{[m+1]}, L^{[m+1]} \otimes \mathfrak{d}_{m+1}^A)$ est facteur direct de $\mathrm{H}^q(X^{[m,m+1]}, p_{m+1}^*(L^{[m+1]} \otimes \mathfrak{d}_{m+1}^A))$.

6) On a

$$\mathrm{H}^q(X^{[m,m+1]}, \phi^* \left(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A) \right)|_E) = \mathrm{H}^q(E, \phi^*(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A))) =$$

$$= \mathrm{H}^q(\Xi_m, p_1^* \mathfrak{d}_m^A \otimes p_2^*(L \otimes A)) = \mathrm{H}^q(X^{[m]}, (L \otimes A)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A).$$

La suite du premier pas est la suite (3.9) obtenue dans la section 3.2. Afin d'établir le deuxième pas, on aura besoin de quelques notations et résultats préliminaires.

On s'était donné un faisceau inversible A sur X. On a une suite d'applications

$$X^{m+1} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{S}^m(X) \times X \xrightarrow{\beta} \mathrm{S}^{m+1}(X)$$

et un faisceau inversible $A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A$ sur X^{m+1} muni d'une action de $\mathfrak{S}_{m+1}$. On a une application

$$\gamma : X^m \to \mathrm{S}^m(X)$$

et un faisceau inversible $A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A$ sur X^m, muni d'une action de $\mathfrak{S}_m$. En appliquant le lemme de descente, par passage au quotient du fibré $A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A$ sur X^m, on obtient un faisceau $\mathcal{D}_m$ sur $\mathrm{S}^m(X)$, vérifiant $\gamma^*\mathcal{D}_m = A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A$ (m fois).

Proposition 3.4.1 *Il existe un faisceau $\mathcal{D}_{m+1}$ sur $\mathrm{S}^{m+1}(X)$, vérifiant $\beta^*\mathcal{D}_{m+1} = \mathcal{D}_m \boxtimes A$.*

Remarque 3.4.2 Par conséquent, on a

$$\alpha^*\beta^*\mathcal{D}_{m+1} = (\gamma \times id)^*(\mathcal{D}_m \boxtimes A) = \gamma^*\mathcal{D}_m \boxtimes A = A \boxtimes A \boxtimes \cdots \boxtimes A.$$

On introduit alors un fibré $\mathfrak{d}^A_{m,1}$ sur $X^{[m,m+1]}$ par image réciproque de la manière suivante : $\mathfrak{d}^A_{m,1} = \mu^*(\mathcal{D}_m \boxtimes A)$, où μ est défini comme dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X^{[m+1]} \arrow[d, "HC"'] & X^{[m,m+1]} \arrow[l, "p_{m+1}"'] \arrow[r, "\phi=(p_m,q)"] \arrow[d, "\mu"'] & X^{[m]} \times X \arrow[d, "HC\times id"] \\
\mathrm{S}^{m+1}(X) & \mathrm{S}^m(X) \times X \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "id"] & \mathrm{S}^m(X) \times X.
\end{tikzcd}$$

On obtient

$$\mathfrak{d}^A_{m,1} = \mu^*\beta^*\mathcal{D}_{m+1} = p^*_{m+1}HC^*\mathcal{D}_{m+1} = p^*_{m+1}\mathfrak{d}^A_{m+1}. \tag{3.12}$$

Preuve de la proposition 3.4.1 :

Le fibré $\mathcal{D}_{m+1}$ est défini naturellement par passage au quotient du fibré $A\boxtimes A\boxtimes\cdots\boxtimes A$ sur X^{m+1}. Il faut montrer que $\beta^*\mathcal{D}_{m+1} = \mathcal{D}_m \boxtimes A$. Puisque leurs images réciproques dans $\mathrm{Pic}\,(X^{m+1})$ sont égales, il suffit de démontrer que l'application $a : \mathrm{Pic}\,(Y/G) \to \mathrm{Pic}\,(Y)$ est injective, où $Y = X^{m+1}$, $G = \mathfrak{S}_m \times \{id\}$, et $Y/G = \mathrm{S}^m(X) \times X$ est le quotient de Y par l'action de G. Notons $\mathrm{Pic}^G(Y)$ le groupe de Picard des G-fibrés inversibles sur Y, $\mathrm{Hom}\,(G, \mathbb{C}^*)$ le groupe des caractères de G, G_y le stabilisateur d'un point $y \in Y$, et $\mathrm{Hom}\,(G_y, \mathbb{C}^*)$ le groupe des caractères de G_y. Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \prod_{y\in Y} \mathrm{Hom}\,(G_y, \mathbb{C}^*) & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}\,(G, \mathbb{C}^*) \arrow[r, "e"] & \mathrm{Pic}^G(Y) \arrow[r, "c"] \arrow[u, "d"] & \mathrm{Pic}\,(Y) \\
 & & \mathrm{Pic}\,(Y/G) \arrow[u, "b"] \arrow[ur, "a"'] & \\
 & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

l'application b est l'image réciproque, l'application c est l'oubli, l'application a est la composée $c \circ b$, l'application e associe à chaque caractère de G la G-action sur $\mathcal{O}_Y$ induite par la G-action sur Y associée, et l'application d associe à chaque G-fibré L et chaque point $y \in Y$, le caractère associé à l'action induite par G_y sur la fibre au-dessus de y, L_y. Il est facile de voir et il est démontré dans [LeP4] que la suite horizontale est exacte.

L'exactitude de la suite verticale est une conséquence du lemme de Kempf ([LeP4]) qui dit exactement qu'un G-fibré L sur Y provient du quotient Y/G si et seulement si l'action du stabilisateur G_y sur la fibre L_y est triviale pour chaque $y \in Y$. L'application b est injective, puisque si l'image réciproque du fibré F sur Y/G est un G-fibré trivial $b^*F = \mathcal{O}_Y$ sur Y, elle est munie d'une section G-invariante partout non nulle, qui descend en une section partout non nulle de F, qui trivialise F. Pour se convaincre que a est injective, il suffit de vérifier que l'intersection $\mathrm{Hom}\,(G,\mathbb{C}^*) \cap \mathrm{Pic}\,(Y/G)$ dans $\mathrm{Pic}^{\,G}(Y)$ est réduite à l'élément trivial avec G-action triviale. Mais si $f \in \mathrm{Hom}\,(G,\mathbb{C}^*)$ est telle que $d(e(f)) = 1$ dans $\prod_{y\in Y} \mathrm{Hom}\,(G_y,\mathbb{C}^*)$, alors $f|_{G_y} = 1$ pour tout $y \in Y$. Si y est un point de la forme $(x_l)_l$ avec $x_i = x_j$ alors la transposition $\tau_{i,j} \in G$ appartient à G_y, donc $f(\tau_{i,j}) = 1$. Mais G est engendré par toutes ses transpositions, donc forcément f est le caractère trivial. $\square$

Proposition 3.4.3 *On peut faire un changement de base dans le diagramme*

$$\begin{tikzcd} Z_{univ} \arrow[r, "(p_{m+1}\times id)"] \arrow[d, "p_1"'] & \Xi_{m+1} \arrow[d, "p_1"] \\ X^{[m,m+1]} \arrow[r, "p_{m+1}"] & X^{[m+1]} \end{tikzcd}$$

pour le faisceau $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\Xi_{m+1}} \otimes p_2^*L$ sur Ξ_{m+1}.

C'est-à-dire qu'on a

$$p_{1*}(\mathcal{O}_{Z_{univ}} \otimes p_2^*L) = p_{m+1}^*(L^{[m+1]}). \tag{3.13}$$

Ici, on note p_2 la deuxième projection $X^{[m+1]} \times X \to X$, aussi bien que la deuxième projection $X^{[m,m+1]} \times X \to X$.

Cette proposition est une conséquence d'un résultat de Grothendieck [EGA-3], §7, cité par Mumford dans [M-F], p.19, §5 (a) :

Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre de schémas noethériens, $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, plat sur Y, pour $y \in Y$, X_y (respectivement $\mathcal{F}_y$) est la fibre de f au-dessus de y (respectivement le faisceau induit par $\mathcal{F}$ sur la fibre), et que pour tout $y \in Y$, $\mathrm{H}^1(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$, alors $f_*(\mathcal{F})$ est un faisceau localement libre sur Y, et "la formation de f_* commute avec le changement de base", i.e. dans toutes les situations de produit fibré :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

le morphisme naturel :

$$g^*(f_*\mathcal{F}) \to f'_*(g'^*(\mathcal{F}))$$

est un isomorphisme. Ce résultat découle du théorème 7.7.5 et la proposition 7.7.10 appliquée à $p = 1$, et la proposition 7.8.4. appliquée à $p = 0$ (toutes dans [EGA-3]). On avait déjà utilisé la première partie de ce résultat dans la démonstration du lemme 3.2.6.

Toutes ces conditions sont satisfaites dans notre cas, donc la proposition en découle.

Remarque 3.4.4 Le même résultat vaut pour p_{m+1} remplacé par p_m, respectivement q, $X^{[m+1]}$ remplacé par $X^{[m]}$, respectivement X, et $\mathcal{F}$ remplacé par $\mathcal{O}_{\Xi_m} \otimes p_2^*L$, respectivement $\mathcal{O}_\Delta \otimes p_2^*L$. On obtient ainsi sur $X^{[m,m+1]}$:

$$p_{1*}(\mathcal{O}_{\xi_{univ}} \otimes p_2^*L) \simeq p_m^*(L^{[m]}), \tag{3.14}$$

$$p_{1*}(\mathcal{O}_{\eta_{univ}} \otimes p_2^*L) \simeq q^*(L) \tag{3.15}$$

et ce dernier isomorphisme nous donne

$$p_{1*}(\mathcal{O}_{\eta_{univ}}|_E \otimes p_2^*L) \simeq q^*(L)|_E. \tag{3.16}$$

En effet, p_1 est un isomorphisme entre η_{univ} et $X^{[m,m+1]}$ et p_{1*} établit un isomorphisme entre les faisceaux sur η_{univ} et $X^{[m,m+1]}$. Le dernier isomorphisme nous dit que, par l'isomorphisme p_{1*}, $\mathcal{O}_{\eta_{univ}} \otimes p_2^* L$ correspond à $q^* L$. Mais $\mathcal{O}_{\eta_{univ}}|_E$ correspond à $\mathcal{O}_E$, donc $\mathcal{O}_{\eta_{univ}}|_E \otimes p_2^* L$ correspond à $q^*(L^{[m]})|_E$.

Maintenant, le deuxième pas résulte du premier pas par image directe par p_1 de la suite (3.9) tensorisée par $p_2^* L \otimes p_1^* \mathfrak{d}_{m,1}^A$. Plus exactement il faut montrer :

a) $p_{1*}(\mathcal{O}_{Z_{univ}} \otimes p_2^* L \otimes p_1^* \mathfrak{d}_{m,1}^A) \simeq p_{m+1}^*(L^{[m+1]} \otimes \mathfrak{d}_{m+1}^A)$;

b) $p_{1*}(\mathcal{O}_{\xi_{univ}} \otimes p_2^* L \otimes p_1^* \mathfrak{d}_{m,1}^A) \simeq p_m^*(L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \otimes q^* A$;

c) $p_{1*}(\mathcal{O}_{\eta_{univ}} \otimes p_2^* L \otimes p_1^* \mathfrak{d}_{m,1}^A) \simeq p_m^*(\mathfrak{d}_m^A) \otimes q^*(L \otimes A)$;

d) $p_{1*}(\mathcal{O}_{\eta_{univ}}|_E \otimes p_2^* L \otimes p_1^* \mathfrak{d}_{m,1}^A) \simeq p_m^*(\mathfrak{d}_m^A) \otimes q^*(L \otimes A)|_E$.

Ces formules découlent de celles déjà établies (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), en utilisant la formule de projection et la description de $\mathfrak{d}_{m,1}^A$, (3.12).

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} p_m^*(L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \otimes q^*(L \otimes A) &= \phi^*((L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \boxtimes A) \\ p_m^*(\mathfrak{d}_m^A) \otimes q^*(L \otimes A) &= \phi^*(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A)) \end{aligned}$$

où $\phi = (p_m, q)$.

On passe au quatrième pas. On peut montrer que

$$R^q \phi_* \mathcal{O}_{X^{[m,m+1]}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q > 0 \\ \mathcal{O}_{X^{[m]} \times X} & \text{si} \quad q = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 3.1.5(i), après l'étude de la variété d'incidence et les identifications obtenues dans la section 3.2. Alors

$$R^q \phi_*(\phi^*((L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \boxtimes A)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q > 0 \\ (L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \boxtimes A & \text{si} \quad q = 0. \end{cases}$$

Par la suite spectrale de Leray on obtient

$$\mathrm{H}^q(X^{[m,m+1]}, \phi^*((L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \boxtimes A)) = \mathrm{H}^q(X^{[m]} \times X, (L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \boxtimes A).$$

De même

$$\mathrm{H}^q(X^{[m,m+1]}, \phi^*(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A))) = \mathrm{H}^q(X^{[m]} \times X, \mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A)).$$

Le cinquième pas est une conséquence de la section 3.3.

Le sixième pas s'obtient comme le quatrième en utilisant le corollaire 3.1.6 :

$$R^q \phi_* \mathcal{O}_E = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q > 0 \\ \mathcal{O}_{\Xi_m} & \text{si} \quad q = 0 \end{cases}$$

(l'étude faite dans la section 3.2 nous assure une fois de plus que toutes les conditions d'application du corollaire 3.1.6 sont satisfaites). Alors

$$R^q \phi_*(\phi^*(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A))|_E) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad q > 0 \\ \mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A)|_{\Xi_m} & \text{si} \quad q = 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$\mathrm{H}^q(E, \phi^*(\mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A))) = \mathrm{H}^q(\Xi_m, \mathfrak{d}_m^A \otimes (L \otimes A)).$$

Le morphisme $\Xi_m \xrightarrow{p_1} X^{[m]}$ est fini, donc ses images directes supérieures sont nulles. En appliquant encore une fois la suite spectrale de Leray on obtient

$$\mathrm{H}^q(\Xi_m, \mathfrak{d}_m^A \boxtimes (L \otimes A)) = \mathrm{H}^q(X^{[m]}, \mathfrak{d}_m^A \otimes (L \otimes A)^{[m]}).$$

Preuve du théorème 3.0.1 :
On utilisera une récurrence sur m, pour tous les m et L à la fois, pour A fixé.
Le cas $m = 1$ découle du théorème d'annulation de Kodaira. Les cas $q = 0$ et $q = 1$ sont démontrés dans les préliminaires. On suppose connus les cas $1, m$ et on démontre le résultat pour $m + 1$, $m \geq 1$.
Le résultat du pas (4) s'écrit après application de la formule de Künneth :

$$\mathrm{H}^q(X^{[m,m+1]}, p_m^*(L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \otimes q^*A \oplus p_n^*\mathfrak{d}_m^A \otimes q^*(L \otimes A)) =$$

$$= \oplus_{i+j=q}(\mathrm{H}^i(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) \otimes \mathrm{H}^j(X, A)) \oplus \oplus_{i+j=q}(\mathrm{H}^i(X^{[m]}, \mathfrak{d}_m^A) \otimes \mathrm{H}^j(X, L \otimes A)).$$

Si $q > 0$ on a :
ou bien $i > 0$ et alors
$\mathrm{H}^i(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = 0$ par hypothèse de récurrence pour m, L (on a $\omega_X^{-1} \otimes L \otimes A^{\otimes k}$ ample pour $1 \leq k \leq m + 1$ donc aussi pour $1 \leq k \leq m$, et de même pour $\omega_X^{-1} \otimes A^{\otimes k}$) et
$\mathrm{H}^i(X^{[m]}, \mathfrak{d}_m^A) = 0$ puisque par hypothèse de récurrence pour $m, L = \mathcal{O}$ on a
$\mathrm{H}^i(X^{[m]}, \mathfrak{d}_m^A \otimes \mathcal{O}^{[m]}) = \mathrm{H}^i(X^{[m]}, \mathfrak{d}_m^A \otimes p_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi_m})) = 0$ et $\mathrm{H}^i(X^{[m]}, \mathfrak{d}_m^A)$ est facteur direct dans ce dernier espace de cohomologie par la proposition 3.3.7 de la section 3.3 ;
ou bien $j > 0$ et alors
$\mathrm{H}^j(X, A) = 0$ par Kodaira puisque $\omega_X^{-1} \otimes A$ est ample et
$\mathrm{H}^j(X, L \otimes A) = 0$ par Kodaira puisque $\omega_X^{-1} \otimes L \otimes A$ est ample.
Si $q > 0$ on a aussi $\mathrm{H}^q(X^{[m]}, (L \otimes A)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = 0$ par hypothèse de récurrence pour $m, L \otimes A$ (on vérifie que les conditions d'amplitude vérifiées par $\omega_X^{-1} \otimes L \otimes A^{\otimes k}$ pour $1 \leq k \leq m+1$ sont vérifiées par $\omega_X^{-1} \otimes (L \otimes A) \otimes A^{\otimes k}$ pour $1 \leq k \leq m$).
Par conséquent, dans la suite longue de cohomologie du pas (3), on obtient

$$\mathrm{H}^q(X^{[m,m+1]}, p_{m+1}^*(L^{[m+1]} \otimes \mathfrak{d}_{m+1}^A)) = 0$$

pour $q \geq 2$. On conclut avec le pas (5).$\square$

Remarque 3.4.5 Pour montrer l'annulation de l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^i(X^{[m]}, \mathfrak{d}_m^A)$ pour $i > 0$, on aurait pu remarquer que le fibré canonique de $X^{[m]}$, $\omega_{X^{[m]}}$, est le fibré déterminant $\mathfrak{d}_m^{\omega_X}$ sur $X^{[m]}$ associé au fibré canonique de X, ω_X, et que l'application de $\mathrm{Pic}\,(X)$ dans $\mathrm{Pic}\,(X^{[m]})$ qui associe à A, le fibré déterminant associé à A, $\mathfrak{d}_m^A$, est un homomorphisme de groupes. Alors l'annulation souhaitée est une conséquence du théorème de Kawamata-Viehweg, le fibré déterminant associé à $\omega_X^{-1} \otimes A$ étant big et nef. Il n'y a donc pas besoin de toute l'hypothèse ; l'amplitude de $\omega_X^{-1} \otimes A$ suffit pour ce point.

3.5 Preuve du corollaire 3.0.2

Cette preuve est due à Michel Brion. Elle donne en outre une preuve indépendante pour le calcul des sections globales $\mathrm{H}^0(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A)$.

Proposition 3.5.1 *On a*

$$HC_*(L^{[m]}) = q_*^G(\oplus_{i=1}^m pr_i^* L),$$

où $q : X^m \to \mathrm{S}^m(X)$ est le quotient par le groupe symétrique $G = \mathfrak{S}_m$.

Preuve : On remarque que les deux faisceaux sont réflexifs et on établit l'égalité sur un ouvert dont le complémentaire est de codimension au moins 2. On peut appliquer alors la proposition 1.6 de [Hart2] pour déduire l'égalité partout.
Considérons le schéma universel Ξ_m avec les projections $p_1 : \Xi_m \to X^{[m]}$ et $p_2 : \Xi_m \to X$. On a une application

$$\begin{array}{rcccl} \pi & : & \Xi_m & \to & \mathrm{S}^{m-1}X \times X \\ & & (Z, x) & \mapsto & (HC(Z) - x, x). \end{array}$$

On veut montrer que π est un morphisme. La projection $p_1 : \Xi_m \to X^{[m]}$ munit Ξ_m d'une famille plate $Z = (p_1 \times id)^{-1}(\Xi_m)$ de sous-schémas de X de longueur m. La projection $p_2 : \Xi_m \to X$ munit Ξ_m d'une famille plate $\eta = (p_2 \times id)^{-1}(\Xi_1)$ de sous-schémas de X de longueur 1. On a une inclusion $\eta \subset Z$. Puisque $\mathcal{O}_\eta$ est de longueur relative 1 au-dessus de Ξ_m, et de support inclus dans le support de $\mathcal{O}_Z$, il y a une surjection $\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_\eta$. Le noyau de cette surjection est une famille plate de $\mathcal{O}_X$-modules de longueur relative $m-1$. Cette famille nous fournit un morphisme $\pi' : \Xi_m \to \mathrm{S}^{m-1}X$ (car $\mathrm{S}^{m-1}X$ s'identifie avec l'espace de modules des faisceaux de longueur $(m-1)$ sur X, modulo la relation de S-équivalence, voir [H-L], exemple 4.3.6, pag. 91). L'application π s'écrit $\pi = (\pi', p_2) : \Xi_m \to \mathrm{S}^{m-1}X \times X$. Par conséquent π est un morphisme. On introduit le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Xi_m \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathrm{S}^{m-1}X \times X \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"] & X \\ X^{[m]} \arrow[r, "HC"] & \mathrm{S}^m(X) & \end{tikzcd}$$

où $q_1((d,x)) = d + x$ et $q_2((d,x)) = x$. Alors q_1 est un morphisme fini surjectif et $p_2 = q_2 \circ \pi : \Xi_m \to X$. On a donc

$$HC_*(L^{[m]}) = HC_* p_{1*}(p_2^* L) = q_{1*}\pi_*(\pi^* q_2^* L) = q_{1*}(q_2^* L \otimes \pi_* \mathcal{O}_{\Xi_m}).$$

Mais $\pi_* \mathcal{O}_{\Xi_m} = \mathcal{O}_{\mathrm{S}^{m-1}X \times X}$ puisque $\mathrm{S}^{m-1}X \times X$ est normale, et π est birationnelle propre. On a donc

$$HC_*(L^{[m]}) = q_{1*}(q_2^* L).$$

Comme $q_2^* L$ est un fibré en droites sur $\mathrm{S}^{m-1}X \times X$, et q_1 est fini surjectif sur la variété normale $\mathrm{S}^m(X)$ (en tant que quotient par un groupe fini d'une variété lisse), il suit que $HC_*(L^{[m]})$ est réflexif (voir [Hart2], cor. 1.7).

Le faisceau $q_*^G(\oplus_{i=1}^m pr_i^* L)$ est facteur direct dans $q_*(\oplus_{i=1}^m pr_i^* L)$ qui est réflexif par le même corollaire 1.7 de [Hart2]. Il est donc réflexif.

L'égalité sur un grand ouvert se voit aisément sur l'ouvert $\mathrm{S}^m_{dist}(X)$ de $\mathrm{S}^m(X)$ formé par des sommes de m points distincts. Le complémentaire de cet ouvert est de codimension 2. Au-dessus de $\mathrm{S}^m_{dist}(X)$, le morphisme de Hilbert-Chow est un isomorphisme et $X^{[m]}_{dist} = HC^{-1}(\mathrm{S}^m_{dist}(X))$ est le quotient par q de $X^m_{dist} = q^{-1}(\mathrm{S}^m_{dist}(X))$. L'image réciproque $Z = (q \times id)^{-1}(\Xi_m)$ du schéma universel au-dessus de X^m_{dist} est la réunion disjointe de m composantes $Z_i = \{((x_1, \ldots, x_m), x) | x = x_i\} \subset X^m_{dist} \times X$. Regardons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "r"'] & \Xi_m \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X \\ X^m_{dist} \arrow[r, "q"'] & X^{[m]}_{dist}. & \end{tikzcd}$$

En restriction à Z_i le morphisme r est un isomorphisme. Si on note $\psi = p_2 \circ q$, on a $\psi|_{Z_i} = pr_i$. Alors en restriction aux ouverts considérés, après changement de base, on a

$$q^*(L^{[m]}) = r_*(\psi^*(L)) = r_*(\oplus_{i=1}^m \psi^*(L)|_{Z_i}) = r_*(\oplus_{i=1}^m pr_i^* L) = \oplus_{i=1}^m pr_i^* L.$$

Par conséquent $L^{[m]} = q_*^G(\oplus_{i=1}^m pr_i^* L)$ sur $X^{[m]}_{dist} = \mathrm{S}^m_{dist}(X)$.□

Remarque 3.5.2 L'égalité des deux faisceaux considérés sur un grand ouvert est aussi une conséquence du théorème 2.4.1 i). En effet ce point donne l'égalité souhaitée sur l'ouvert plus grand $\mathrm{S}^m_*(X)$.

Proposition 3.5.3 *Si A est ample et $\mathrm{H}^p(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^{(A^{\otimes k})}) = 0$ pour $p > 0$ et tout k assez grand, alors*

$$R^p HC_* L^{[m]} = 0 \quad pour \quad p > 0.$$

Preuve : La suite spectrale de Leray

$$E_2^{q,p} = \mathrm{H}^q(\mathrm{S}^m(X), R^p HC_*(L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^{(A^{\otimes k})}))$$

a pour aboutissement en degré $q+p=n$ l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^n(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^{(A^{\otimes k})})$. D'après la formule de projection

$$E_2^{q,p} = \mathrm{H}^q(\mathrm{S}^m(X), R^p HC_*(L^{[m]}) \otimes (A^{\otimes k})^{(m)})$$

où la notation $A^{(m)}$ désigne le faisceau $(A^{\boxtimes m})^{\mathfrak{S}_m}$. Mais $(A^{\otimes k})^{(m)} = (A^{(m)})^{\otimes k}$ et $A^{(m)}$ est ample. Par le théorème d'annulation de Serre on a $E_2^{q,p}=0$ pour $q>0$. La suite spectrale dégénère et

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{S}^m(X), R^p HC_*(L^{[m]}) \otimes (A^{\otimes k})^{(m)}) = \mathrm{H}^p(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^{(A^{\otimes k})}) = 0$$

pour $p>0$ et tout k assez grand par hypothèse. Puisque $\mathrm{S}^m(X)$ est une variété projective, $A^{(m)}$ est ample et l'annulation a lieu pour tout k grand, on obtient

$$R^p HC_* L^{[m]} = 0$$

pour $p>0$.□

Proposition 3.5.4 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) $R^p HC_* L^{[m]} = 0$ *pour* $p>0$
ii) $R^p \pi_* \mathcal{O}_{\Xi_m} = 0$ *pour* $p>0$.

Remarque 3.5.5 En particulier l'assertion i) ne dépend pas du choix du fibré L.

Preuve : On a

$$R^p HC_*(L^{[m]}) = R^p HC_*(p_{1*} p_2^* L) = R^p(HC \circ p_1)_*(p_2^* L)$$

puisque p_1 est fini. D'où

$$R^p HC_*(L^{[m]}) = R^p(q_1 \circ \pi)_*(p_2^* L) = q_{1*} R^p \pi_*(p_2^* L)$$

puisque q_1 est fini. Comme $p_2^* L = \pi^* q_2^* L$, on a d'après la formule de projection :

$$R^p HC_*(L^{[m]}) = q_{1*}(q_2^* L \otimes R^p \pi_* \mathcal{O}_{\Xi_m}).$$

Comme q_1 est fini, l'annulation de $R^p HC_*(L^{[m]})$ équivaut donc à celle de $R^p \pi_* \mathcal{O}_{\Xi_m}$.□

On est en mesure maintenant de donner la démonstration du corollaire 3.0.2. D'après la remarque 3.5.5, il suffit d'appliquer le théorème 3.0.1 pour L le fibré trivial et A un fibré ample. Puisque pour k assez grand $\omega_X^{-1} \otimes A^{\otimes k}$ et $\omega_X^{-1} \otimes L \otimes A^{\otimes k}$ sont amples. D'après la proposition 3.5.3 on a $R^p HC_*(L^{[m]}) = 0$ pour $p>0$.

On applique une fois de plus la suite spectrale de Leray et la formule de projection :

$\mathrm{H}^p(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = \mathrm{H}^p(\mathrm{S}^m(X), HC_*(L^{[m]}) \otimes A^{(m)})$.

On utilise la proposition 3.5.1 et on obtient

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{S}^m(X), q_*^G(\oplus_{i=1}^m pr_i^*(L)) \otimes A^{(m)}) = \mathrm{H}^p(\mathrm{S}^m(X), q_*^G(\oplus_{i=1}^m pr_i^*(L) \otimes q^* A^{(m)})).$$

Puisque $q^* A^{(m)} = A^{\boxtimes m}$, on en déduit que

$$\mathrm{H}^p(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = \mathrm{H}^p(X^m, \oplus_{i=1}^m pr_i^*(L) \otimes A^{\boxtimes m})^G.$$

La formule de Künneth entraîne alors que $\mathrm{H}^p(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = 0$ pour $p \geq 1$, si $\mathrm{H}^p(X,A) = \mathrm{H}^p(X, L \otimes A) = 0$.
□

Remarque 3.5.6 Pour $p=0$, on retrouve le fait que

$$\mathrm{H}^0(X^{[m]}, L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A) = \mathrm{S}^{m-1}\mathrm{H}^0(X,A) \otimes \mathrm{H}^0(X, L \otimes A)$$

en n'utilisant que la proposition 3.5.1.

Chapitre 4

Sections des puissances du fibré déterminant

Dans cette partie nous considérons la classe c de Grothendieck donnée par $r = 2, c_1 = 0$ et $n = c_2 \leq 5$. Nous montrons à l'issue de ce chapitre le théorème suivant, qui correspond aux points ii) et iii) du théorème principal.

Théorème 4.0.7 *Soit* $\mathfrak{u} = (1,0,0) \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. *Si* $r = 2, c_1 = 0$ *et* $n = c_2 \leq 5$ *(i.e.* $c = (2,0,2-n)$*) et* $u = (0,d,0) = d\mathfrak{u}$, *alors l'application linéaire*

$$D_{c,d\mathfrak{u}} : \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)^* \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_\mathfrak{u}^{\otimes d})$$

est un isomorphisme pour $d = 2, 3$, *c'est-à-dire que dans ces conditions la conjecture de dualité étrange est vraie.*

Au paragraphe 4.2 on utilise [LeP3] pour décrire les espaces de modules $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$. Il existe un morphisme π : $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}} \to C_d$ (espaces des courbes de degré d dans $\mathbb{P}_2$) qui associe au faisceau G l'équation de son support schématique. C'est un isomorphisme pour $d = 1, 2$ et un morphisme dont la fibre générique est de dimension 1 pour $d = 3$. Ceci nous permet de calculer $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)$.

Au paragraphe 4.3 on démontre l'injectivité du morphisme $\mathrm{D}_{c,u}$ en utilisant l'interprétation géométrique du théorème 1.3.1 (iv). On utilise les propriétés de $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$ établies au chapitre 1.

On calcule au paragraphe 4.4 les espaces $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_\mathfrak{u}^{\otimes 2})$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_\mathfrak{u}^{\otimes 3})$ en tant que SL(3)-représentations, selon la technique développée au chapitre 2.

Proposition 4.0.8 *Avec les notations du théorème précédent, le* SL(3)*-module* $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_\mathfrak{u}^{\otimes 2})$ *est isomorphe à* $\mathrm{S}^n(\mathrm{S}^2E)$ *et le* SL(3)*-module* $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}_\mathfrak{u}^{\otimes 3})$ *est isomorphe à* $\mathrm{S}^n(\mathrm{S}^3E) \oplus \mathrm{S}^{n-2}(\mathrm{S}^3E)$*(où* $E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$ *est la représentation standard de* SL(3) *).*

Ceci nous permet de conclure la preuve du théorème. De plus, nous calculons au paragraphe 4.5 la dimension des espaces de sections de $\mathcal{D}_\mathfrak{u}^{\otimes k}$ pour $n = 3, 4$, qu'on écrit sous forme de série de Poincaré :

Théorème 4.0.9 *i) Pour l'espace de modules* $\mathrm{M}_{(2,0,-1)}$ *des faisceaux stables de rang* 2 *et classes de Chern* $(0,3)$, *la série de Poincaré de* $\mathcal{D}_\mathfrak{u}$, $P(t) = \sum_{k\geq 0} t^k h^0(\mathcal{D}_\mathfrak{u}^{\otimes k})$ *est donnée par*

$$P(t) = \frac{1 + t^2 + t^4}{(1-t)^{10}}.$$

ii) Pour l'espace de modules $\mathrm{M}_{(2,0,-2)}$ *des faisceaux semi-stables de rang* 2 *et classes de Chern* $(0,4)$, *la série de Poincaré de* $\mathcal{D}_\mathfrak{u}$ *est donnée par*

$$P(t) = \frac{1 + t + 7t^2 + 7t^3 + 22t^4 + 7t^5 + 7t^6 + t^7 + t^8}{(1-t)^{14}}.$$

4.1 Préliminaires

4.1.1 Le faisceau canonique sur $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$

Soit $\mathfrak{u}$ la classe $(0,1,0) \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. La description de la variété $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$ comme quotient d'un ouvert lisse Ω^{ss} d'un schéma de Hilbert-Grothendieck par l'action d'un groupe réductif $\mathrm{SL}(H)$ a été donnée au paragraphe 1.3, lemme 1.3.7.

Proposition 4.1.1 *Soient $d \geq 1$, $u = d\mathfrak{u}$ et $\pi : \mathrm{M}_u \to C_d$ le morphisme qui associe à G l'équation de son support schématique. Alors le faisceau dualisant $\omega = \omega_{\mathrm{M}_u}$ est inversible et isomorphe à $\pi^*\mathcal{O}(-3d)$.*

Preuve :
On peut supposer $d \geq 3$, puisque pour $d = 1, 2$, π est un isomorphisme et l'égalité est vérifiée.

Il résulte du théorème de Boutot, [Bout], que M_u est une variété à singularités rationnelles. En particulier c'est une variété normale et de Cohen-Macaulay. Soient M_u^s l'ouvert de M_u des classes de faisceaux stables, j l'inclusion canonique $j : \mathrm{M}_u^s \to \mathrm{M}_u$ et $Y = C_{\mathrm{M}_u^s}$ le complémentaire de M_u^s dans M_u. Il est démontré dans [LeP3], prop 3.4, que $\operatorname{codim} Y \geq 2$. Soit $\underline{p} \in Y$ le point générique d'une sous-variété irréductible de Y. Puisque M_u est de Cohen-Macaulay on obtient $\operatorname{prof}(\omega_{\underline{p}}) \geq 2$. Or on a l'énoncé suivant ([Grot2]) :

Théorème 4.1.2 *Soit X un schéma et $Y \subset X$ un fermé. Soit F un faisceau algébrique cohérent sur X dont le support est X. Soit n un entier. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) Pour tout point $x \in Y$, on a

$$\operatorname{prof}(F_x) \geq n.$$

ii) Pour $i < n$

$$\mathcal{H}_Y^i(F) = 0.$$

Cet énoncé entraîne que $\mathcal{H}_Y^i(\mathrm{M}_u, \omega) = 0$ pour $i = 0, 1$. De la suite longue de cohomologie à support on déduit que $\omega = j_*(j^*(\omega))$. Le même argument appliqué au faisceau inversible $\pi^*\mathcal{O}(-3d)$ implique $\pi^*\mathcal{O}(-3d) = j_*(j^*(\pi^*\mathcal{O}(-3d)))$, donc il suffit de démontrer l'isomorphisme souhaité sur l'ouvert M_u^s.

On note Ω^s la préimage de M_u^s par le morphisme $\rho : \Omega^{ss} \to \mathrm{M}_u$.

Lemme 4.1.3 *L'application $\rho^* : \operatorname{Pic}(\mathrm{M}_u^s) \to \operatorname{Pic}(\Omega^s)$ est injective.*

Preuve :
L'action de $\mathrm{SL}(H)$ sur Ω^{ss} se factorise à travers une action propre et libre du groupe $G = \mathrm{PSL}(H)$, et M_u^s est le quotient de cette action (cf. [LeP3], lemme 2.4). En appliquant le lemme de descente de Kempf (th. 2.3, p. 63, et remarque p. 66, [D-N]), on obtient un isomorphisme $\operatorname{Pic}(\mathrm{M}_u^s) = \operatorname{Pic}^G(\Omega^s)$, où Pic^G désigne le groupe des fibrés inversibles munis d'une action de G. On a la suite exacte ([LeP4], §3.3) :

$$0 \to \mathrm{H}^1(G, \mathcal{O}^*(\Omega^s)) \to \operatorname{Pic}^G(\Omega^s) \to \operatorname{Pic}(\Omega^s)$$

où $\mathrm{H}^1(G, \mathcal{O}^*(\Omega^s))$ est l'espace des morphismes croisés $\phi : G \times \Omega^s \to \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire qui vérifient

$$\phi(gg', x) = \phi(g, g'x) \cdot \phi(g', x).$$

Mais $G = \mathrm{PGL}(H)$ et les seules fonctions régulières inversibles sur $\mathrm{GL}(H)$ sont les caractères de $\mathrm{GL}(H)$, donc les seules fonctions régulières inversibles sur $\mathrm{PGL}(H)$ sont les constantes. Pour un morphisme croisé $\phi : G \times \Omega^s \to \mathbb{C}^*$ on a $\phi(e, x) = 1$ et la fonction $\phi_x : G \to \mathbb{C}^*$ est régulière inversible. Cela implique que tout morphisme croisé est constant égal à 1, et la conclusion. □

Par conséquent, il suffit de montrer

$$\rho^*\omega = \rho^*\pi^*\mathcal{O}(-3d) \tag{4.1}$$

dans $\operatorname{Pic}(\Omega^s)$. Il suffit encore de le prouver dans $\operatorname{Pic}(\Omega^s) \otimes \mathbb{Q}$, puisque $\operatorname{Pic}(\mathrm{M}_u) = \operatorname{Pic}(\mathrm{M}_u^s)$ est sans torsion (cf. th. 3.5, [LeP3]). On démontre cette affirmation en appliquant la formule de Riemann-Roch-Grothendieck. Si $\mathbf{T}_{\mathrm{M}_u^s}$ est le fibré tangent à M_u^s et $\mathcal{G}$ est la famille universelle de faisceaux stables de dimension 1 paramétrée par

Ω^s, on a $\rho^*\mathbf{T}_{\mathrm{M}_u^s} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{pr_1}(\mathcal{G},\mathcal{G})$. Puisque pour chaque $s \in \Omega^s$, $\mathcal{G}_s$ est un faisceau stable, on a $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}_s,\mathcal{G}_s) = 0$ pour tout s, donc $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G},\mathcal{G}) = \mathcal{O}$. Alors $\underline{\mathrm{Ext}}^0_{pr_1}(\mathcal{G},\mathcal{G}) = pr_{1*}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G},\mathcal{G}) = pr_{1*}\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\Omega^s}$. Chaque faisceau $\mathcal{G}_s$ est de dimension 1, donc on a aussi $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{pr_1}(\mathcal{G},\mathcal{G}) = 0$ pour $i \geq 2$. Alors

$$\det\underline{\mathrm{Ext}}^\bullet_{pr_1}(\mathcal{G},\mathcal{G}) = [\det\underline{\mathrm{Ext}}^1_{pr_1}(\mathcal{G},\mathcal{G})]^{-1}.$$

On peut calculer $\rho^*\omega = \rho^*(\det\mathbf{T}_{\mathrm{M}_u^s})^{-1} = (\det\rho^*\mathbf{T}_{\mathrm{M}_u^s})^{-1} = \det\underline{\mathrm{Ext}}^\bullet_{pr_1}(\mathcal{G},\mathcal{G})$ dans $\mathrm{Pic}\,(\Omega^s)\otimes\mathbb{Q}$ avec la formule de Riemann-Roch-Grothendieck :

$$\rho^*\omega = pr_{1*}([(ch\mathcal{G})^*(ch\mathcal{G})Td(\mathbb{P}_2)]_3).$$

On a

$$[(ch\mathcal{G})^*(ch\mathcal{G})Td(\mathbb{P}_2)]_3 = -(ch_1\mathcal{G})^2Td_1(\mathbb{P}_2) = \frac{1}{2}c_1^2(\mathcal{G})c_1(\omega_{\mathbb{P}_2}). \tag{4.2}$$

Calculons $c_1(\mathcal{G}) \in \mathrm{Pic}\,(\Omega^s\times\mathbb{P}_2)$. Par le corollaire 1.4.2 on a $c_1(\mathcal{G}) = \rho^*\pi^*\mathcal{O}(1)\boxtimes\mathcal{O}(d)$. On note $\mathfrak{h} = \rho^*\pi^*\mathcal{O}(1)$ et $h = pr_2^*\mathcal{O}(1)$ dans $\mathrm{Pic}\,(\Omega^s\times\mathbb{P}_2)$. En notation additive on trouve $c_1(\mathcal{G}) = \mathfrak{h} + dh$. On obtient dans (4.2) :

$$\rho^*\omega = pr_{1*}([\frac{1}{2}(\mathfrak{h}+dh)^2(-3h)]) = -3d\mathfrak{h} = \rho^*\pi^*\mathcal{O}(-3d)$$

par la formule de projection. L'égalité (4.1) est prouvé, donc la proposition.□ □

4.1.2 Le faisceau canonique et le fibré déterminant de Donaldson sur M_c

Le long de ce paragraphe c désignera une classe générale $c = (r, c_1, \chi)$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$ telle que $r > 0$ et M_c soit non-vide. Le fibré $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}$ sera le fibré déterminant de Donaldson associé à la classe orthogonale à c, $\mathfrak{u} = (0, \frac{r}{\delta}, -\frac{c_1}{\delta})$ où $\delta = \mathrm{pgcd}(\mathrm{r}, \mathrm{c}_1)$.

Proposition 4.1.4 *Le faisceau dualisant ω_{M_c} est inversible et on a $\omega_{\mathrm{M}_c} \simeq \mathcal{D}^{\otimes -3\delta}$ dans* $\mathrm{Pic}\,(\mathrm{M}_c)$.

Preuve :
Soit M_c^s l'ouvert des classes représentant des faisceaux stables. Il y a deux cas à considérer : quand la codimension du complémentaire $C_{\mathrm{M}_c^s}$ de M_c^s dans M_c est ≥ 2 et quand ce fermé est une hypersurface.

Dans le premier cas le démonstration est identique à celle de la proposition 4.1.1. On se ramène à prouver l'isomorphisme sur M_c^s. Comme le groupe $\mathrm{Pic}\,(\mathrm{M}_c) = \mathrm{Pic}\,(\mathrm{M}_c^s)$ est sans torsion, il suffit de prouver l'isomorphisme dans $\mathrm{Pic}\,(\Omega^s)\otimes\mathbb{Q}$, où Ω^s est l'image réciproque de M_c^s dans Ω^{ss}. Les calculs pour les premières classes de Chern des fibrés $\rho^*(\omega_{\mathrm{M}_c})$ et $\rho^*(\mathcal{D}^{\otimes -3\delta})$ dans $\mathrm{Pic}\,(\Omega^s)\otimes\mathbb{Q}$ ont été faits par O'Grady ([O'Gra]) en utilisant la formule de Riemann-Roch-Grothendieck. Puisque ces classes coïncident, le résultat découle.

Une analyse du second cas a été faite par Drézet ([Dréz1]). Il est prouvé que : la classe c est divisible par 2, l'espace de modules $\mathrm{M}_{\frac{c}{2}}$ s'identifie à $\mathbb{P}_2$, le fibré déterminant $\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}$ sur $\mathrm{M}_{\frac{c}{2}}$ s'identifie à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ et l'espace de modules M_c s'identifie à $\mathbb{P}_5$. L'hypersurface des points strictement semi-stables est l'image du morphisme

$$\mathrm{Sym}^2(\mathrm{M}_{\frac{c}{2}}) \to \mathrm{M}_c$$

qui associe aux classes $[E],[F]$ la classe $[E]\oplus[F]$ dans M_c. Lorsque la classe $[F]$ est fixée, le morphisme

$$\phi_F : \mathrm{M}_{\frac{c}{2}} = \mathbb{P}_2 \to \mathrm{M}_c = \mathbb{P}_5$$

qui associe à $[E]$ la classe $[E]\oplus[F]$ est linéaire.

Cela suffit pour terminer la preuve de la proposition. En effet, le fibré canonique sur $\mathbb{P}_5$ est $\omega_{\mathbb{P}_5} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(-6)$ et il suffit de prouver que $\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}$ s'identifie avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)$. On prouve facilement que $\phi_F^*(\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}) = \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}$. Puisque ϕ_F est linéaire on a aussi $\phi_F^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$. On avait vu que l'isomorphisme $\mathcal{D}_{\mathfrak{u}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ était satisfait sur $\mathrm{M}_{\frac{c}{2}} = \mathbb{P}_2$. Puisque l'application ϕ_F^* est bijective on obtient que $\mathcal{D}_{\mathfrak{u}} = \mathcal{O}(1)$ dans $\mathrm{Pic}\,(\mathrm{M}_c)$. □

Remarque 4.1.5 Le calcul du faisceau dualisant sur M_c a déjà été fait par Drézet à partir des monades, sans qu'il ait reconnu le rôle du fibré déterminant de Donaldson ([Dréz2], th. F), et par O'Grady ([O'Gra]), sur l'ouvert des points stables. Le calcul fait dans la proposition 4.1.1 pour le faisceau dualisant de $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$ est calqué sur ce dernier.

Proposition 4.1.6 *Le fibré $\mathcal{D}$ est nef et big.*

Preuve :
D'après ([LeP2], [Li]) il existe un entier k satisfaisant aux conditions suivantes :
-le fibré $\mathcal{D}^{\otimes k}$ est engendré par ses sections ;
-considérons le morphisme associé

$$\phi_k : \mathrm{M}_c \to \mathbb{P}_\bullet \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes k})$$

dans l'espace projectif des hyperplans de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes k})$. La restriction de ϕ_k à l'ouvert des fibrés μ-stables est à fibres finies.

De la première condition on déduit que $\mathcal{D}$ est nef, de la seconde que le nombre $\int_{\mathrm{M}_c} c_1(\mathcal{D})^{\dim \mathrm{M}_c}$ est strictement positif, c'est-à-dire que $\mathcal{D}$ est big.□

Par un théorème de Boutot ([Bout]), l'espace de modules M_c est à singularités rationnelles. Par ailleurs le théorème de Kawamata-Viehweg est valable sur les variétés à singularités rationnelles ([E-V]). Nous obtenons d'après les propositions 4.1.4 et 4.1.6 le théorème :

Théorème 4.1.7 *Pour $q > 0$ et $k > -3\delta$, on a $\mathrm{H}^q(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes k}) = 0$.*

4.2 Les espaces de modules $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$

Soit $\mathfrak{u}$ la classe $(0,1,0) \in \mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$. La référence principale de ce paragraphe est l'article [LeP3]. On a défini au paragraphe 1.4, un morphisme $\pi : \mathrm{M}_{d\mathfrak{u}} \to C_d$ qui associe à un faisceau G l'équation de son support schématique. On a prouvé (prop. 1.4.1) que $\pi^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{D}_{\eta^2}^{-1} = \det pr_{1!}(\mathcal{G} \cdot \mathcal{O}_a)$, pour un point a de $\mathbb{P}_2$, et pour une famille $\mathcal{G}$ qui paramètre les faisceaux G de dimension 1. On rappelle :

Définition 4.2.1 *On appelle fibré Θ le fibré inversible $\mathcal{D}_\mathcal{O} = \det pr_{1!}(G \cdot \mathcal{O})^{-1}$ sur $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$.*

Ce fibré a une section globale θ qui s'annule aux points G tels que $h^0(G) = h^1(G) \neq 0$ (prop. 1.4.3).

4.2.1 Les cas $d = 1, 2$

Ces cas ont été examinés au paragraphe 1.4 du premier chapitre. On avait la

Proposition 4.2.2 ([LeP3]) *Pour $d = 1, 2$, le morphisme π est un isomorphisme, et le fibré Θ est trivial.*

4.2.2 Le cas $d = 3$

Soit $c = (2, 0, c_2 = n)$. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer la :

Proposition 4.2.3 *En tant que $\mathrm{SL}(3)$-représentation l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)$ s'identifie à $\mathrm{S}^n(\mathrm{S}^3 E^*) \oplus \mathrm{S}^{n-2}(\mathrm{S}^3 E^*)$ (où $E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$).*

On considère la cubique universelle $\mathcal{C} \subset C_3 \times \mathbb{P}_2$. La projection $\mathcal{C} \to C_3$ induit par la propriété universelle de l'espace de modules $\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}$ un morphisme $s : C_3 \to \mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}$ qui associe à une cubique C son faisceau structural $\mathcal{O}_C$. Le morphisme s est une section de π : la résolution

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \xrightarrow{\cdot \underline{C}} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_C \to 0$$

démontre que $(\pi \circ s)(C) = C$. Ici $\underline{C}$ désigne l'équation de la cubique C.

Prenons $D \in \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2^*$ la variété d'incidence et p et q les projections :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}_2 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ \mathbb{P}_2^*. & & \end{array}$$

L'application $G \to q_*(p^*(G(-2)))(-1)$ définit (cf. [LeP3]) un morphisme $\phi : \mathrm{M}_{3\mathfrak{u}} \to \mathrm{M}^*_{(3,0,0)}$ dans l'espace de modules de faisceaux semi-stables de classe $(r = 3, c_1 = 0, \chi = 0)$ sur $\mathbb{P}_2^*$. On note encore $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u$ le fibré déterminant sur $\mathrm{M}^*_{(3,0,0)}$, associé à la classe $\mathfrak{u} = (0,1,0)$. La proposition suivante est prouvée dans [LeP3] :

Proposition 4.2.4 *i) Le diviseur des zéros* $\operatorname{div}\theta$ *de la section* θ *coïncide avec l'image du morphisme* s.

ii) Le morphisme ϕ *est l'éclatement d'un point lisse et la fibre exceptionnelle est* $\operatorname{div}\theta$.

On obtient que les morphismes π, s établissent un isomorphisme entre $\operatorname{div}\theta$ et C_3. On identifiera $\operatorname{div}\theta$ et C_3 dans la suite. Puisque $\operatorname{div}\theta$ est le diviseur exceptionnel, son fibré conormal est $\mathcal{O}_{C_3}(1)$. De la suite exacte courte

$$0 \to \Theta^{-1} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\operatorname{div}\theta} \to 0 \tag{4.3}$$

il résulte que

$$\Theta^{-1}|_{\operatorname{div}\theta} \simeq \mathcal{O}_{C_3}(1). \tag{4.4}$$

Proposition 4.2.5 *On a* $\Theta(1) = \phi^*\mathcal{D}$ *dans* $\operatorname{Pic}(\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}})$.

Preuve :

Compte-tenu du fait que $\operatorname{Pic}(\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}})$ est sans torsion (cf. th. 3.5, [LeP3]) il suffit de démontrer que

$$\phi^*\mathcal{D}^{\otimes -9} = \Theta^{\otimes -9}(-9).$$

Par la proposition 4.1.4, on a $\mathcal{D}^{\otimes -9} = \omega_{\mathrm{M}^*_{(3,0,0)}}$, et par la proposition 4.1.1, on a $\mathcal{O}(-9) = \omega_{\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}}$. L'égalité à démontrer devient

$$\phi^*\omega_{\mathrm{M}^*_{(3,0,0)}} = \omega_{\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}} \otimes \Theta^{\otimes -9}.$$

Mais on a vu que $\Theta = \mathcal{O}(\operatorname{div}\theta)$ et que $\operatorname{div}\theta$ est le diviseur exceptionnel. L'égalité à démontrer est

$$\omega_{\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}} = \phi^*\omega_{\mathrm{M}^*_{(3,0,0)}} \otimes \mathcal{O}(9\operatorname{div}\theta)$$

qui est valable chaque fois qu'on éclate un point lisse dans une variété de dimension 10 ([Hart], ex. II 8.5, p. 188).□

Puisque $c = 2 - n\eta^2$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{P}_2)$, on a $\mathcal{D}_c \simeq \Theta^{\otimes 2}(n)$ sur $\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}$. On passe au calcul de l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n))$.

Proposition 4.2.6 $\mathrm{H}^q(\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}, \Theta(n)) = 0$ *pour* $q \geq 1$ *et* $n \geq -8$.

Preuve :

L'espace de modules $\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}$ est le quotient d'une variété lisse par un groupe réductif, donc elle est à singularités rationnelles, par un résultat de Boutot [Bout]. Le théorème de Kawamata-Viehweg s'applique ([E-V]). D'après la proposition 4.1.6 le fibré $\mathcal{D}$ est nef et big sur $\mathrm{M}^*_{(3,0,0)}$ et d'après les propositions 4.2.4 et 4.2.5 le fibré $\Theta(1)$ est l'image réciproque de $\mathcal{D}$ par un éclatement. On en déduit que le fibré $\Theta(1)$ est big et nef sur $\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}$. Le fibré $\mathcal{O}(n-1) = \pi^*(\mathcal{O}(n-1))$ est globalement engendré pour $n \geq 1$ donc $\Theta(n)$ est big et nef pour $n \geq 1$. La proposition 4.1.1 fournit le faisceau dualisant sur $\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}$: $\omega_{\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}} = \pi^*(\mathcal{O}(-3d))$. Alors $\Theta(n) \otimes \omega^{-1}_{\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}} = \Theta(n+9)$ est big et nef pour $n \geq -8$. Le résultat en découle.□

On tensorise la suite (4.3) par $\Theta^{\otimes 2}(n)$. On obtient, après l'identification $\operatorname{div}\theta = C_3$, et en utilisant l'isomorphisme (4.4), la suite exacte courte sur $\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}$:

$$0 \to \Theta(n) \to \Theta^{\otimes 2}(n) \to \mathcal{O}_{C_3}(n-2) \to 0.$$

La proposition 4.2.6 conduit à une suite exacte courte sur les sections globales, pour $n \geq -8$:

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}, \Theta(n)) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n)) \to \mathrm{H}^0(C_3, \mathcal{O}_{C_3}(n-2)) \to 0. \tag{4.5}$$

Proposition 4.2.7 *Soit $u = 3\mathfrak{u}$. Alors les morphismes :*

$$\mathrm{H}^0(C_3, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\cdot\theta} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \Theta(n))$$

sont des isomorphismes.

Preuve :

On considère l'ouvert $U \subseteq C_3$ des courbes irréductibles. Son complémentaire C_U est de codimension ≥ 2. La proposition résulte des lemmes suivants :

Lemme 4.2.8 *Le complémentaire de l'image réciproque $\pi^{-1}(U)$ de l'ouvert U par le morphisme π est de codimension au moins 2 dans M_u. En plus on a l'isomorphisme $\pi_*(\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}) = \mathcal{O}_U$.*

Lemme 4.2.9 *Le morphisme $\pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{M}_u} \xrightarrow{\cdot\theta} \pi_*\Theta$ est un isomorphisme sur C_3.*

Effectivement, le lemme 4.2.8 implique :

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{O}(n)) &= \mathrm{H}^0(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}(n)) = \mathrm{H}^0(U, \pi_*(\mathcal{O}(n))) \\ &= \mathrm{H}^0(U, \mathcal{O}(n)) = \mathrm{H}^0(C_3, \mathcal{O}(n)).\end{aligned}$$

Il résulte du lemme 4.2.9 que $\pi_*\mathcal{O}(n) \xrightarrow{\cdot\theta} \pi_*\Theta(n)$ est un isomorphisme. En prenant les sections globales sur C_3 on obtient que $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{O}(n)) \xrightarrow{\cdot\theta} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \Theta(n))$ est un isomorphisme.

Preuve du lemme 4.2.8 :

Soit $V \subseteq \mathrm{M}_u$ l'ouvert des faisceaux stables et localement libres sur leur support. Le lemme 3.2 et la proposition 3.4 de [LeP3] démontrent que $\operatorname{codim} C_V \geq 2$, où C_V désigne le complémentaire de V. La proposition 2.8 de [LeP3] affirme que le morphisme $V \xrightarrow{\pi} C_3$ est lisse. Il résulte que ses fibres au-dessus de C_U sont de dimension $\dim \mathrm{M}_u - \dim C_3 = 1$. L'inclusion $\pi^{-1}(C_U) \subset C_V \cup (V \cap \pi^{-1}(C_U))$ entraîne $\operatorname{codim} \pi^{-1}(C_U) \geq 2$. Le théorème 9 de [A-I-K] nous assure que le morphisme projectif $\pi^{-1}(U) \to U$ est plat et à fibres intègres. D'où $\pi_*(\mathcal{O}_{\pi^{-1}(U)}) = \mathcal{O}_U$.
□

Preuve du lemme 4.2.9 :

On déduit de la suite exacte (4.3) et de l'isomorphisme 4.4 la suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{\cdot\theta} \Theta \to \mathcal{O}_{C_3}(-1) \to 0$$

sur $\mathrm{M}_{3\mathfrak{u}}$. On applique le foncteur π_*. On obtient la suite exacte :

$$0 \to \pi_*(\mathcal{O}) \to \pi_*(\Theta) \xrightarrow{\cdot\theta} \mathcal{O}_{C_3}(-1) \xrightarrow{\delta} R^1\pi_*(\mathcal{O}) \tag{4.6}$$

sur C_3.

Soit $W \subset C_3$ l'ouvert des cubiques lisses. La fibre P_C du morphisme π au-dessus de $C \in W$ s'identifie à la jacobienne de C, $\operatorname{Jac}(C)$. La restriction du fibré Θ à P_C s'identifie au fibré Θ usuel sur $\operatorname{Jac}(C)$. Alors le morphisme $\mathrm{H}^0(P_C, \mathcal{O}) \to \mathrm{H}^0(P_C, \Theta)$ est un isomorphisme entre des espaces de dimension 1. Puisque la fibration

$$\pi^{-1}(W) \to W$$

est plate, par le théorème de semi-continuité, le morphisme $\pi_*\mathcal{O} \to \pi_*(\Theta)$ est un isomorphisme de fibrés inversibles sur W.

Il résulte de la suite exacte (4.6) que le morphisme $\mathcal{O}_{C_3}(-1) \xrightarrow{\delta} R^1\pi_*(\mathcal{O})$ est injectif sur W. Comme $\mathcal{O}_{C_3}(-1)$ est un faisceau inversible, le morphisme δ est injectif partout sur C_3. Par conséquent le morphisme $\pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{M}_u} \xrightarrow{\cdot\theta} \pi_*\Theta$ est un isomorphisme partout sur C_3. □ □

D'après la proposition 4.2.7 et de la suite exacte (4.5) on obtient le

Corollaire 4.2.10 *On a une suite exacte courte*

$$0 \to \mathrm{H}^0(C_3, \mathcal{O}(n)) \stackrel{\theta^2 \cdot \pi^*}{\to} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{3\mathrm{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n)) \stackrel{s^*}{\to} \mathrm{H}^0(C_3, \mathcal{O}(n-2)) \to 0$$

pour $n \geq -8$.

D'où la proposition 4.2.3. □

4.3 Injectivité du morphisme $\mathrm{D}_{c,u}$

On commence par regarder le cas où la classe c est de rang 1. On utilise ensuite un argument de récurrence pour étendre le résultat au cas qui nous intéresse, où c est de rang 2. Le début de la récurrence utilise le cas $c = (1, 0, c_2 = n)$ étudié en préalable.

4.3.1 Le cas $c = (1, 0, c_2 = n), u = d\mathrm{u}$

Proposition 4.3.1 *Pour* $d = 1, 2, 3$ *et* $n \geq 0$*, l'image du morphisme* $\Phi : \mathrm{M}_c \to \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathrm{u}}, \mathcal{D}_c)$ *n'est pas contenue dans un hyperplan.*

On a vu que le morphisme

$$\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n)) \stackrel{\pi^*}{\to} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \mathcal{O}(n)) \stackrel{\cdot\theta}{\to} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_u, \Theta(n))$$

était bijectif pour $d = 1, 2, 3$. Le lemme suivant sera utile :

Lemme 4.3.2 *Si* $F = I_Z$ *est l'idéal du sous-schéma* Z *des* n *points distincts* $a_1, \dots, a_n$ *de* $\mathbb{P}_2$*, si* $[G] \in \mathrm{M}_{d\mathrm{u}}$*, et s'il existe un point* $a_k \in \operatorname{supp} G$*, alors*

$$h^0(F \otimes G) = h^1(F \otimes G) \neq 0.$$

Preuve :

Sans restreindre la généralité, on peut supposer $a_1, \dots, a_i \in \operatorname{supp} G$, $a_{i+1}, \dots, a_n \notin \operatorname{supp} G$, pour un nombre $i \in \{1, \dots, n\}$. On tensorise par G la suite exacte :

$$0 \to F \to I_{\hat{Z}} \to \oplus_{j=1}^{i} \mathcal{O}_{a_j} \to 0$$

où $I_{\hat{Z}}$ désigne l'idéal du sous-schéma des $n - i$ points distincts $a_{i+1}, \dots, a_n$ et $\mathcal{O}_{a_j}$ le faisceau structural du point a_j. En utilisant l'annulation $\underline{\mathrm{Tor}}_1(I_{\hat{Z}}, G) = 0$ (puisque $I_{\hat{Z}}$ est trivial au voisinage du support de G), on obtient une inclusion $0 \to \underline{\mathrm{Tor}}_1(G, \mathcal{O}_{a_i}) \to F \otimes G$. Mais à partir de la résolution de longueur 1 de G par des faisceaux localement libres A et B :

$$0 \to A \stackrel{\alpha}{\to} B \to G \to 0$$

on obtient après tensorisation par $\mathcal{O}_{a_i}$:

$$0 \to \underline{\mathrm{Tor}}_1(G, \mathcal{O}_{a_i}) \to A|_{a_i} \stackrel{\alpha|_{a_i}}{\to} B|_{a_i} \to G \otimes \mathcal{O}_{a_i} \to 0$$

et $\det\alpha$ est l'équation du support de G donc $\det\alpha|_{a_i} = 0$ et $\underline{\mathrm{Tor}}_1(G, \mathcal{O}_{a_i}) \neq 0$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Tor}}_1(G, \mathcal{O}_{a_i})$ a pour support le point a_i, donc $\mathrm{H}^0(\underline{\mathrm{Tor}}_1(G, \mathcal{O}_{a_i})) \neq 0$, d'où $\mathrm{H}^0(F \otimes G) \neq 0$.□

On introduit quelques notations. Pour $E = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$, le point a_i est un élément de $\mathbb{P}(E^*)$. Alors a_i^d est un élément de $\mathbb{P}(\mathrm{S}^d E^*)$ et il représente, à une constante près, un élément dans $\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1))$. C'est l'équation H_{a_i} de l'hyperplan des courbes de degré d qui passent par le point $a_i \in \mathbb{P}_2$. Alors $H_{a_1} \cdot \dots \cdot H_{a_n} \in \mathrm{S}^n \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1)) = \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n))$.

Lemme 4.3.3 *Pour* $F = I_Z$ *comme dans le lemme 4.3.2 on a* $\sigma_F = \sigma_{c,u}(F) = cst \cdot \theta \cdot \pi^*(H_{a_1} \cdot \dots \cdot H_{a_n})$*, pour une constante* $cst \in \mathbb{C}^*$.

Ce lemme suffit pour démontrer la proposition 4.3.1, puisque $\{H_{a_i}\}_i$ engendrent $\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1))$ et les produits de $\{H_{a_i}\}_i$ engendrent $\mathrm{S}^n\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1))$.

Preuve du lemme 4.3.3 :
Le lemme 4.3.2 nous dit que σ_F s'annule sur tous les faisceaux G dont le support contient le point a_i. Ces faisceaux appartiennent à l'ensemble d'équation $\pi^*(H_{a_i}) = 0$. La section $\alpha = \frac{\sigma_F}{\prod_{i=1}^n \pi^*(H_{a_i})}$ est une section rationnelle du fibré Θ sur $\mathrm{M}_{d\mathrm{u}}$. Puisque σ_F s'annule sur $\pi^{-1}(\{H_{a_i} = 0\})$, α est une section régulière. La proposition 4.2.7 appliqué pour $n = 0$ nous assure que $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathrm{u}}, \Theta) = \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathrm{u}}, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$. Donc $\alpha = cst \cdot \theta$. □

On remarque que, au passage, la dualité étrange dans le cas $r^c = 1, d = 1, 2, 3$ a été prouvée.

Proposition 4.3.4 *Le morphisme de dualité étrange est un isomorphisme dans le cas $c = (1, 0, 1-n)$, $u = (0, d, 0)$, pour $d = 1, 2, 3$ et pour un entier positif n.*

Preuve :
En effet, le premier membre de la dualité est $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathrm{u}}, \Theta(n))^*$, isomorphe par la proposition 4.2.7 à

$$\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n))^* = \mathrm{S}^n(\mathrm{S}^d E).$$

Pour identifier le second membre on utilise le fait que $\mathrm{M}_{(1,0,c_2=n)}$ coïncide avec le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{P}_2)$ des sous-schémas finis de longueur n de $\mathbb{P}_2$.

Soit $\mathrm{S}^n(\mathbb{P}_2)$ le quotient de la puissance n-ième $\mathbb{P}_2^n$ de $\mathbb{P}_2$ par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. On dispose du morphisme de Hilbert-Chow $HC : \mathrm{Hilb}^n(\mathbb{P}_2) \to \mathrm{S}^n(\mathbb{P}_2)$ qui associe à un schéma fini Z le cycle $\sum_{x \in \mathbb{P}_2} lg\, Z_x x$. On note $\mathcal{O}(1, 1, \ldots, 1)^{\mathfrak{S}_n}$ le quotient du fibré $\mathcal{O}(1, 1, \ldots, 1)$ par l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Lemme 4.3.5 *Les fibrés inversibles $\mathcal{D}_\mathrm{u}$ et $HC^*(\mathcal{O}(1, 1, \ldots, 1)^{\mathfrak{S}_n})$ sont isomorphes sur* $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{P}_2)$.

Preuve :
On considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \overbrace{\mathbb{P}_2 \times \cdots \times \mathbb{P}_2}^{n} \arrow[d, "\mathfrak{S}_n"] \\
\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{P}_2) \arrow[r, "HC"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathrm{S}^n(\mathbb{P}_2) \arrow[d, "\Psi"] \\
\mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_\mathrm{u}, \mathcal{O}(n)) & \mathbb{P}\mathrm{H}^0(C_1, \mathcal{O}(n)). \arrow[l, "\theta\cdot\pi^*"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Ici, $C_1 = \mathbb{P}_2^*$. Le morphisme Ψ est défini par $\Psi(a_1, \ldots, a_n) = [H_{a_1} \cdots H_{a_n}]$. Le lemme 4.3.3 prouve que

$$\Phi = (\theta \cdot \pi^*) \circ \Psi \circ HC$$

sur l'ouvert des points distincts de $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{P}_2)$. Puisque cet ouvert est dense, le diagramme considéré est commutatif.

L'image réciproque du fibré $\mathcal{O}(1)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(C_1, \mathcal{O}(n))$, par $\Psi \circ \mathfrak{S}_n$, est le fibré $\mathcal{O}(1, 1, \ldots, 1)$ sur $\mathbb{P}_2^n$ (on peut le vérifier sur chaque composante). On tient compte de l'isomorphisme (cf. [LeP4],§3.4) :

$$\mathrm{Pic}\,(\mathrm{S}^n(\mathbb{P}_2)) \to \mathrm{Pic}\,(\mathbb{P}_2^n)^{\mathfrak{S}_n}.$$

On obtient que l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}(1)$ de $\mathbb{P}\mathrm{H}^0(C_1, \mathcal{O}(n))$ sur $\mathrm{S}^n(\mathbb{P}_2)$ est $\mathcal{O}(1, 1, \ldots, 1)^{\mathfrak{S}_n}$. Par la commutativité du diagramme on obtient la conclusion.□

En passant aux puissances tensorielles supérieures, on trouve ${\mathcal{D}_\mathrm{u}}^{\otimes d} = HC^*(\mathcal{O}(d, d, \ldots, d)^{\mathfrak{S}_n})$. Cela entraîne que $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)), {\mathcal{D}_\mathrm{u}}^{\otimes d}) = \mathrm{S}^n(\mathrm{S}^d E)$. L'injectivité de $\mathrm{D}_{c,u}$ a été prouvé dans la proposition 4.3.1.□

4.3.2 Le cas $c = (2, 0, c_2 = n), u = d\mathfrak{u}$

Proposition 4.3.6 *Pour* $1 \leq d \leq 3$ *et pour* $n \geq 2$*, l'image du morphisme* $\Phi : \mathrm{M}_c \to \mathbb{P}\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \mathcal{D}_c)$ *n'est pas contenue dans un hyperplan.*

La proposition résulte des quatre lemmes suivants :

Lemme 4.3.7 *La proposition est vraie pour* $n = 2$.

Lemme 4.3.8 *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n)) \otimes \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1)) & \to & \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n+1)) \\ s \otimes t & \mapsto & s \cdot \pi^* t \end{array}$$

est surjective.

Lemme 4.3.9 *Soit* $n \geq 2$ *et* $\mathrm{M}_c^0 \subset \mathrm{M}_c$ *l'ouvert des points stables. Si l'image* $\Phi(\mathrm{M}_c)$ *n'est pas contenue dans un hyperplan, alors* $\Phi({\mathrm{M}_c}^0)$ *n'est pas contenue dans un hyperplan.*

Lemme 4.3.10 *Soit* $F \in \mathrm{M}^0_{(2,0,c_2=n)}$, $x \in \mathbb{P}_2$ *et* $a : F \twoheadrightarrow \mathcal{O}_x$ *un morphisme surjectif. Alors* $F' = \operatorname{Ker} a$ *est un faisceau semi-stable et on a* $\sigma_{F'} = \sigma_F \cdot \pi^* H_x$ *par l'application* $id \cdot \pi^*$ *du lemme 4.3.8. Ici*

$$\sigma_{F'} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n+1)), \quad \sigma_F \in \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n)) \quad \text{et} \quad H_x \in \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1)).$$

Les lemmes 4.3.7, 4.3.8, 4.3.9 et 4.3.10 fournissent une démonstration par récurrence de la proposition 4.3.6. Le lemme 4.3.9 dit que les σ_F, pour F stable, engendrent $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n))$. Mais les H_x engendrent $\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1))$ lorsque x varie. Par le lemme 4.3.8 on obtient que les $\sigma_F \cdot \pi^* H_x$ engendrent $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n+1))$. Le lemme 4.3.10 assure que de tels éléments sont de la forme $\sigma_{F'}$, donc des images par Φ de $\mathrm{M}_{(2,0,c_2=n+1)}$. □

Preuve du lemme 4.3.8 :
Pour $d = 1, 2$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n)) \otimes \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1)) \arrow[r, "(\theta^2 \cdot \pi^*) \otimes id"] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n)) \otimes \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1)) \arrow[d] \\ \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n+1)) \arrow[r, "\theta^2 \cdot \pi^*"] & \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n+1)). \end{tikzcd}$$

Par la proposition 1.4.4, les morphismes horizontaux sont des isomorphismes. Le lemme résulte de la surjectivité du morphisme vertical gauche.

Pour $d = 3$, on note $H = \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(1))$. Le lemme est une conséquence du diagramme analogue, commutatif :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n)) \otimes H \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n)) \otimes H \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n-2)) \otimes H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n+1)) \arrow[r, "\theta^2 \cdot \pi^*"] & \mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{d\mathfrak{u}}, \Theta^{\otimes 2}(n+1)) \arrow[r, "s^*"] & \mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(n-1)) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Les suites horizontales sont exactes d'après le corollaire 4.2.10. Les morphismes verticaux latéraux sont surjectifs, donc aussi le morphisme vertical central. □

Preuve du lemme 4.3.9 :
Ceci est évident, puisque M_c^0 est un ouvert dense de M_c. □

Preuve du lemme 4.3.10 :
Pour un sous-faisceau F'' de rang 1 de F' on a $c_1(F'') \leq 0$ puisque F'' est aussi un sous-faisceau de F, et F est stable. Si $c_1(F'') = 0$ alors $\chi(F'') < \frac{2-n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2-(n+1)}{2}$. Donc F' est semi-stable.

On tensorise par G la suite exacte

$$0 \to F' \to F \to \mathcal{O}_x \to 0.$$

Soit $[G] \in \mathrm{M}_{du}$. En tenant compte du lemme 1.3.3c), on obtient une suite exacte

$$0 \to \underline{\mathrm{Tor}}_1(G, \mathcal{O}_x) \to F' \otimes G \to F \otimes G \to G \otimes \mathcal{O}_x \to 0.$$

Si $x \in \operatorname{supp} G$ alors $\underline{\mathrm{Tor}}_1(G, \mathcal{O}_x) \neq 0$ (voir la démonstration du lemme 4.3.2) et donc $h^0(F' \otimes G) \neq 0$. Sinon $h^0(F' \otimes G) = h^0(F \otimes G)$. On déduit que $\sigma_{F'} = cst \cdot \sigma_F \cdot H_x$. □

Preuve du lemme 4.3.7 :

Pour $a, b \in \mathbb{P}_2$, la classe du faisceau $F = I_a \oplus I_b$ appartient à $\mathrm{M}_{(2,0,c_2=2)}$. On commence par prouver que $\sigma_F = cst \cdot \theta^2 \cdot \pi^*(H_a \cdot H_b)$. La section σ_F s'annule sur $\pi^{-1}(\{H_a = 0\})$ et sur $\pi^{-1}(\{H_b = 0\})$ d'après le lemme 4.3.2. Alors la section rationnelle $\alpha = \frac{\sigma_F}{\pi^*(H_a \cdot H_b)}$ de $\Theta^{\otimes 2}$ est régulière. Si $d = 1, 2$ on applique la proposition 1.4.4 pour avoir un isomorphisme $\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}) = \mathrm{H}^O(\mathrm{M}_{du}, \Theta^{\otimes 2})$. Pour $d = 3$ cet isomorphisme découle du corollaire 4.2.10 appliqué pour $n = 0$. Par conséquent $\alpha = cst \cdot \theta^2$.

Puisque les produits $H_a \cdot H_b$ engendrent $\mathrm{H}^0(C_d, \mathcal{O}(2))$, le lemme 4.3.7 est prouvé pour $d = 1, 2$.

Pour $d = 3$, en regardant la suite exacte du corollaire 4.2.10, on montre que les σ_F engendrent le sous-espace $\theta^2 \cdot \pi^* \mathrm{H}^0(C_3, \mathcal{O}(2))$ de $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{du}, \Theta^{\otimes 2}(2))$. Pour montrer le lemme, en tenant compte du fait que $h^0(C_3, \mathcal{O}) = 1$, il suffit de trouver un faisceau F pour lequel $s^* \sigma_F \neq 0$. Ceci équivaut à trouver une cubique C pour laquelle $h^0(F|_C) = h^1(F|_C) = 0$. Cette condition est satisfaite pour tout faisceau F localement libre stable et toute cubique C. Effectivement, si on reconsidère la résolution de $\mathcal{O}_C$:

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \stackrel{\cdot C}{\to} \mathcal{O} \to \mathcal{O}_C \to 0,$$

comme $\underline{\mathrm{Tor}}_1(F, \mathcal{O}_C) = 0$, on obtient

$$0 \to F(-3) \stackrel{\cdot C}{\to} F \to F|_C \to 0.$$

Alors la suite

$$\mathrm{H}^1(F) \to \mathrm{H}^1(F|_C) \to \mathrm{H}^2(F(-3))$$

est exacte. Le nombre de Hodge $h^1(F) = n - 2$ est nul pour $n = 2$ et par la dualité de Serre on a $\mathrm{H}^2(F(-3)) = \mathrm{H}^0(F^*) = \mathrm{Hom}\,(F, \mathcal{O})$. Ce dernier groupe est nul, d'où $h^1(F|_C) = 0$. L'annulation de $\mathrm{Hom}\,(F, \mathcal{O})$ s'obtient ainsi : S'il existe un morphisme non nul $m : F \to \mathcal{O}$, alors $\operatorname{im} m \subset \mathcal{O}$, donc $\operatorname{im} m = I_Z$, pour Z sous-schéma dans $\mathbb{P}_2$. La stabilité de F implique $c_1(I_Z) = 0$ et $\chi(I_Z) > 0$, soit que $I_Z = \mathcal{O}$. Alors $\operatorname{Ker} m$ est localement libre de $c_1 = 0$ et $\chi = -1$, ce qui est contradictoire. Donc $\mathrm{Hom}\,(F, \mathcal{O}) = 0$.□

4.4 Preuve de la proposition 4.0.8

On reprend la démarche et les notations des sections 2.2 et 2.3 du deuxième chapitre. Le théorème 2.2.8 appliqué au cas $l = 1$ nous donne un isomorphisme de SL(3)-représentations

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes d}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^{n+1}\mathbb{P}_2, \mathrm{S}^d\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes d}) \text{ pour } 3 \leq n \leq 5.$$

À partir de la présentation (2.3) de $\mathcal{R}$, appliquée pour $k = 2l - 3 = -1$ et $m = n + l^2 = n + 1$, on obtient $\mathcal{O}(-1)^{[m]} \simeq \mathcal{R}$ et donc

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes d}) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^{n+1}\mathbb{P}_2, \mathrm{S}^d(\mathcal{O}(-1)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes d}).$$

Pour $d = 2$ on applique le lemme 2.4.6 avec $k = 2l - 3 = -1$, $s = 2$ et $m = n + l^2 = n + 1$: $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes 2})$ est le noyau du morphisme surjectif

$$\mathrm{S}^n(\mathrm{S}^2E) \oplus \mathrm{S}^2E \otimes \mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{S}^2E) \stackrel{(0,id)}{\to} \mathrm{S}^2E \otimes \mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{S}^2E).$$

Par suite, la représentation $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes 2})$ est isomorphe à $\mathrm{S}^n(\mathrm{S}^2E)$ de dimension C^n_{n+5}. Pour $d = 3$ on s'intéresse à l'espace $\mathrm{H}^0(\mathrm{Hilb}^{n+1}\mathbb{P}_2, \mathrm{S}^3(\mathcal{O}(-1)^{[m]})\otimes\mathfrak{d}^{\otimes 3})$. Par le lemme 2.4.7 on est amenés à étudier le noyau du morphisme

$$\alpha : \mathrm{H}^0(S^3W \otimes \mathcal{O}(3, \ldots, 3))^G \to \mathrm{H}^0(\mathrm{gr}_1(S^3W) \otimes \mathcal{O}(3, \ldots, 3))^G$$

où $G = \mathfrak{S}_m$. C'est le morphisme α de la proposition 2.5.13 avec pour $L = \mathcal{O}(-1)$ et $A = \mathcal{O}(3)$. Dans les décompositions (2.14, 2.15), le morphisme α :

$$\begin{aligned}\alpha : \mathrm{S}^n(\mathrm{S}^3E) \oplus E \otimes \mathrm{S}^2E \otimes \mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{S}^3E) \oplus \mathrm{S}^3(\mathrm{S}^2E) \otimes \mathrm{S}^{n-2}(\mathrm{S}^3E)\\ \to E \otimes \mathrm{S}^2E \otimes \mathrm{S}^{n-1}(\mathrm{S}^3E) \oplus \mathrm{S}^4E \otimes \mathrm{S}^2E \otimes \mathrm{S}^{n-2}(\mathrm{S}^3E)\end{aligned}$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\nabla} & \widetilde{D} & 0 \\ 0 & \rho & \widetilde{\nu} \end{pmatrix}.$$

On montre successivement selon une démarche analogue à celle du paragraphe 2.5.6, que $\widetilde{D}$ est un isomorphisme, que le noyau de $\widetilde{\nu}$ est égal à $\mathrm{S}^{2,2,2}E \otimes \mathrm{S}^{n-2}(\mathrm{S}^3E) = \mathbb{C} \otimes \mathrm{S}^{n-2}(\mathrm{S}^3E)$ et son conoyau à $\mathrm{S}^{5,1}E \otimes \mathrm{S}^{n-2}(\mathrm{S}^3E)$, et que le morphisme de liaison $(0, \rho) : \mathrm{Ker}\,(\widetilde{\nabla}, \widetilde{D}) \to \mathrm{coker}\,\widetilde{\nu}$ est nul. Par conséquent le noyau de α est isomorphe à $\mathrm{S}^n(\mathrm{S}^3E) \oplus \mathrm{S}^{n-2}(\mathrm{S}^3E)$ de dimension $C^9_{n+9} + C^9_{n+7}$. □

4.5 Sections de $\mathcal{D}^{\otimes k}$ pour $n = c_2 \leq 4$

Le but de ce paragraphe est de calculer les dimensions des espaces de sections $\mathrm{H}^0(\mathrm{M}_{(2,0,c_2=n)}, {\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}}^{\otimes k})$ pour $n \leq 4$.

Dans le cas $n = 2$, le morphisme de Barth nous fournit un isomorphisme entre l'espace de modules M_c et $\mathbb{P}_5$, et le fibré déterminant s'identifie à $\mathcal{O}(1)$. Les cas intéressants sont donc $n = 3$ et $n = 4$.

On commence par un résultat général sur la fonction $k \mapsto h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes k}_{\mathfrak{u}})$ pour toute classe $c = (r, c_1, c_2)$ satisfaisant $r > 0$ et M_c non-vide. On rappelle (§4.1.2) la notation $\mathfrak{u} = (0, \frac{r}{\delta}, -\frac{c_1}{\delta})$ où $\delta = \mathrm{pgcd}(\mathrm{r}, \mathrm{c}_1)$. D'après le théorème 4.1.7, la cohomologie supérieure $\mathrm{H}^q(\mathrm{M}_c, {\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}}^{\otimes k})$ s'annule pour $k \geq -3\delta$.

Ce résultat, l'isomorphisme $\omega_{\mathrm{M}_c} \simeq {\mathcal{D}_{\mathfrak{u}}}^{\otimes -3\delta}$ et la dualité de Serre nous assurent que

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{D}^{\otimes j}) &= 0 \quad \text{si} \quad j < 0 \\ h^q(\mathcal{D}^{\otimes j}) &= 0 \quad \forall j \qquad \text{si} \quad 0 < q < D \\ h^D(\mathcal{D}^{\otimes j}) &= 0 \quad \text{si} \quad j > -3\delta. \end{aligned}$$

On note $D = \dim \mathrm{M}_c = 1- < c, c^* >$. On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathfrak{u}}$.

Proposition 4.5.1 *i) Supposons $d \geq 2$. Pour $k > -3\delta$, la fonction*

$$k \mapsto h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes k})$$

est un polynôme de degré D, de coefficient dominant

$$q_D = \frac{1}{D!} \int_{\mathrm{M}_c} c_1(\mathcal{D})^D.$$

ii) La série de Poincaré $P(t)$ est de la forme

$$\frac{Q(t)}{(1-t)^{D+1}}$$

où Q est un polynôme de degré $D + 1 - 3\delta$, à coefficients entiers, tel que $Q(1) = \int_{\mathrm{M}_c} c_1(\mathcal{D})^D$;

iii) Le polynôme Q satisfait à la condition de symétrie

$$t^{D+1-3\delta} Q(\frac{1}{t}) = Q(t).$$

Preuve :

La formule de Riemann-Roch pour des variétés éventuellement singulières ([B-F-M]) et le théorème 4.1.7 donnent

$$\begin{array}{rcccc} h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes k}) & = & \chi(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes k}) & = & \int_{\mathrm{M}_c} ch(\mathcal{D}^{\otimes k}) Td(\mathrm{M}_c) \\ & = & \int_{\mathrm{M}_c} e^{kc_1(\mathcal{D})} Td(\mathrm{M}_c) & = & \sum_{0\le j\le D} \frac{k^j}{j!} \int_{\mathrm{M}_c} c_1(\mathcal{D})^j Td(\mathrm{M}_c). \end{array}$$

Puisque $\mathcal{D}$ est big $q_D > 0$, d'où i).

Posons $a_j = \int_{\mathrm{M}_c} c_1(\mathcal{D})^j Td(\mathrm{M}_c)$. La série de Poincaré est

$$\sum_{0\le j\le D} a_j \left(\sum_{k\ge 0} \frac{k^j}{j!} t^k\right).$$

La somme de la série $\sum_{k\ge 0} \frac{k^j}{j!} t^k$ (de rayon de convergence 1) est une fonction rationnelle de la forme $\frac{Q_j(t)}{(1-t)^{j+1}}$ où les polynômes Q_j sont de degré inférieur où égal à j, et $Q_j(1) = 1$. Ceci se voit par récurrence sur j. Il en résulte que la série de Poincaré est de la forme voulue. Puisque $Q(t) = (1-t)^{D+1} P(t)$ et que $P(t)$ est une série formelle à coefficients entiers, le calcul de ce produit montre que $Q(t)$ est bien à coefficients entiers.

La relation classique (voir par exemple [Fult]) $Td(V^*) ch(\lambda_{-1}(V)) = c_{top}(V^*)$ appliqué au fibré $V = W \otimes \mathcal{D}^{-1}$, où W est un espace vectoriel de dimension $m = D+1$, prouve que

$$ch(\lambda_{-1}(W \otimes \mathcal{D}^{-1})) = c_{top}(W^* \otimes \mathcal{D}) Td^{-1}(W^* \otimes \mathcal{D}).$$

Ici

$$\lambda_{-1}(V) = \Lambda^0 V - \Lambda^1 V + \Lambda^2 V - \cdots + (-1)^{\dim V} \Lambda^{\dim V} V$$

désigne la somme alternée des puissances extérieures du fibré V et c_{top} d'un fibré vectoriel de rang r désigne la classe de Chern c_r de ce fibré.

Mais $V = W \otimes \mathcal{D}^{-1}$ est un fibré de rang $D+1$, donc sa classe de Chern maximale $c_{D+1}(W \otimes \mathcal{D}^{-1})$ appartient à l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^{2(D+1)}(\mathrm{M}_c)$ qui est nul en raison de la dimension de M_c ($\dim \mathrm{M}_c = D$). Donc $ch(\lambda_{-1}(W \otimes \mathcal{D}^{-1}) \otimes \mathcal{D}^{\otimes k}) = 0$ et par la formule de Riemann-Roch on obtient

$$\chi(\lambda_{-1}(W \otimes \mathcal{D}^{-1}) \otimes \mathcal{D}^{\otimes k}) = \int_{\mathrm{M}_c} ch(\lambda_{-1}(W \otimes \mathcal{D}^{-1}) \otimes \mathcal{D}^{\otimes k}) Td(\mathrm{M}_c) = 0$$

soit, en tenant compte de $\Lambda^i(W \otimes \mathcal{D}^{-1}) = \Lambda^i W \otimes \mathcal{D}^{\otimes -i}$,

$$S_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i \chi(\mathcal{D}^{\otimes k-i}) = 0$$

quelque soit k.

Comme $Q(t) = (1-t)^{D+1} P(t)$, le coefficient k-ième de Q s'écrit

$$\begin{array}{rcl} Q_k & = & \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} h^0(\mathcal{D}^{\otimes k}) - \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} h^0(\mathcal{D}^{\otimes k-1}) + \cdots + (-1)^m \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} h^0(\mathcal{D}^{\otimes k-m}) \\ & = & \sum_{i=0}^{m} (-i)^i C_m^i h^0(\mathcal{D}^{\otimes k-i}) \end{array}$$

(en tenant compte du fait que $h^0(\mathcal{D}^{\otimes j}) = 0$ si $j < 0$). Pour $k < m - 3\delta$ on obtient $Q_k = S_k = 0$ en raison de l'annulation de la cohomologie supérieure $\mathrm{H}^q(\mathcal{D}^{\otimes j})$ pour $j < -3\delta, q > 0$ et de $\mathrm{H}^0(\mathcal{D}^{\otimes j})$ pour $j < 0$. D'où $\deg Q \le m - 3\delta$. La condition de symétrie s'exprime sur la symétrie des coefficients de Q :

$$Q_k = Q_{m-3\delta-k} \quad \text{pour } 0 \le k \le m - 3\delta.$$

Mais dans ce cas on a

$$Q_k \;=\; S_k - \sum_{i=k+3\delta}^{m} (-i)^i \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \chi(\mathcal{D}^{\otimes k-i}).$$

La dualité de Serre s'écrit pour $j \leq -3\delta$ sous la forme $\chi(\mathcal{D}^{\otimes j}) = (-1)^D h^0(\mathcal{D}^{\otimes -j-3\delta})$. En l'appliquant dans la somme ci-dessus pour $j = k - i \leq -3\delta$, et en faisant ensuite la transformation $j = m - i$ on trouve

$$\begin{aligned} Q_k &= S_k - (-1)^m \sum_{i=k+3\delta}^{m} (-i)^{m-i} \binom{m}{m-i} (-1)^D h^0(\mathcal{D}^{\otimes -k+i-3\delta}) \\ &= S_k + \sum_{j=0}^{m-k-3\delta} (-i)^j \binom{m}{j} h^0(\mathcal{D}^{\otimes m-k-3\delta-j}) \\ &= S_k + Q_{m-3\delta-k} = Q_{m-3\delta-k}. \end{aligned}$$

En particulier $Q_0 = Q_{m-3\delta} = 1$ donc le degré de Q est égal à $m - 3\delta$ exactement. □

Nous revenons aux cas particuliers qui nous intéressent. On prend $c = (2, 0, c_2 = n)$ pour $n = 3, 4$, $\delta = 2$ et $\mathfrak{u} = (0, 1, 0)$.

Preuve du théorème 4.0.9 :

i) Ici, $D = 4c_2 - 3 = 9$. La proposition précédente donne que $P(t)$ s'écrit sous la forme $\frac{Q(t)}{(1-t)^{10}}$ où Q est de degré 4, vérifie la condition de symétrie et $Q(1)$ est égal à $3 = 9!q_9$ où q_9 est un nombre de Donaldson ([Barth77]). Le calcul de $h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^0) = 1$ et $h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}) = 10$ (cf. chapitre 2) permet de conclure que $Q(t) = 1 + t^2 + t^4$.

ii) Ce cas est analogue au précédent seulement il faut faire intervenir $h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}) = 15$, et aussi $h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes 2}) = 126$ et $h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes 3}) = 770$ calculés dans 4.0.8. Ici $Q(1) = 54 = 13!q_{13}$ ([L-Q]). □

Remarque 4.5.2 Dans le cas $n = 3$, puisqu'on a obtenu $h^0(\mathrm{M}_c, \mathcal{D}^{\otimes d})$ pour $d = 2, 3$ (cf. 4.0.8), on aurait pu déduire la valeur du nombre de Donaldson q_9.

Bibliographie

[A-I-K] A. Altman, A. Iarrobino, S. Kleiman. *Irreducibility of the compactified jacobian.* Nordic Summer School/NAVF, Symposium in Mathematics, Oslo, August 5-25 (1976).

[Barth76] W. Barth. *Some properties of rank-2 bundles on $\mathbb{P}_n$.* Math. Annalen **226** (1976) p. 125-150.

[Barth77] W. Barth. *Moduli of vector bundles on projective plane.* Invent. Math. **42** (1977) p. 63-91.

[B-F-M] P. Baum, W. Fulton, R. MacPherson. *Riemann-Roch and topological $\mathcal{K}$ theory for singular varieties.* Acta Math. **143** (1979), no. 3-4, p. 155-192.

[B-N-R89] A. Beauville, M. S. Narasimhan, S. Ramanan. *Spectral curves and the generalised theta divisor.* J. reine angew. Math. **398** (1989) p.169-179.

[B-L94] A. Beauville, Y. Laszlo. *Conformal blocks and generalized theta functions.* Comm. Math. Physics **164** (1994) p. 385-419.

[Beau93] A. Beauville. *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula.* Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), p. 75-96, Israel Math. Conf. Proc., **9**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, (1996).

[Bott] R. Bott. *Homogeneous vector bundles.* Ann. of Math.(2) **66** (1957) 203-248.

[Bourbaki] N. Bourbaki. *Éléments de mathématiques, fascicule VII, livre II, Algèbre, chapitre 3, Algèbre multilinéaire.* Hermann (1958).

[Bout] J. F. Boutot. *Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs.* Invent. Math. **88** (1987) p.65-68.

[Cheah] J. Cheah. *The cohomology of smooth nested Hilbert schemes of points.* PhD thesis, University of Chicago,(1984).

[C-K-M] H. Clemens, J. Kollàr and S. Mori. *Higher Dimensional Complex Geometry.* Astérisque **166** (1988).

[D] G. Danila. *Mémoire de magistère.* Soutenu en novembre 1996 pour le magistère de l'ENS.

[Dema] J-P. Demailly. *Vanishing theorems for tensor power of an ample vector bundle.* Invent. Math. **91** (1988) no 1, p. 203-220.

[Dona90] S. K. Donaldson. *Polynomial invariants for smooth four-manifolds.* Topology **29** (1990), p. 257-315.

[Dréz1] J.-M. Drézet. *Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2$.* J. reine angew. Math **380** (1987) p. 14-58.

[Dréz2] J.-M. Drézet. *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.* Ann. de l'Inst. Fourier **38** (1988) p. 105-168.

[D-N] J.-M. Drézet et M. S. Narasimhan. *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques.* Invent. Math. **97** (1989) p. 53-94.

[EGA-1] A. Grothendieck et J. Dieudonné. *Éléments de Géométrie Algébrique I.* Grundlehren **166** (1971).

[EGA-2] A. Grothendieck et J. Dieudonné. *Éléments de Géométrie Algébrique II.* Publ. de l'Inst. des Hautes Études Scientifiques **8** (1961), §4.

[EGA-3] A. Grothendieck et J. Dieudonné. *Éléments de Géométrie Algébrique III.* Publ. de l'Inst. des Hautes Études Scientifiques **17** (1963), §7.

[E-L] G. Ellingsrud and M. Lehn. *Irreducibility of the Punctual Quotient Scheme of a Surface.* alg-geom/9/04016, 15 Apr 1997.

[E-S1] G. Ellingsrud and S. A. Strømme. *On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane.* Invent. Math. **87** (1987) p. 343-352.

[E-S2] G. Ellingsrud and S. Strømme. *An intersection number for punctual Hilbert schemes of a surface.* Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 6, p. 2547-52.

[E-V] H. Esnault , E. Viehweg. *Lectures on vanishing theorems.* DMV Seminar, 20. Birkhäuser Verlag, Basel, (1992).

[Falt94] G. Faltings. *A proof of the Verlinde formula.* J. Alg. Geometry **3** (1994) p. 347-374.

[F-H] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory.* Springer-Verlag, (1996).

[Fult] W. Fulton. *Intersection theory.* Springer-Verlag (1984).

[Gies] D. Gieseker. *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface.* Ann. of maths **106** (1977) p. 45-60.

[Grot1] A. Grothendieck. *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki **221** (1960).

[Grot2] A.Grothendieck. *Local cohomology.* Lecture Notes Series **41** (1967).

[Hart] R.Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag (1977).

[Hart2] R.Hartshorne. *Stable Reflexive Sheaves.* Math. Ann. **254** (1980), p. 121-176.

[He] Min He. *Espaces de modules de systèmes cohérents.* Int. J. of Maths., Vol 9, **5** (1998) p. 545-598.

[H-L] D. Huybrechts, M. Lehn. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves.* Aspects of Mathematics, Vol E 31, (1997).

[Lehn] M. Lehn. *Chern Classes of Tautological Sheaves on Hilbert Schemes of points on Surfaces.* math. AG. 9803091, 28 Mar 1998.

[LeP1] J. Le Potier. *L'espace de modules de Simpson.* Exposé du 27 février 1992, Séminaire de géométrie algébrique, Jussieu.

[LeP2] J. Le Potier. *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques,* Complex projective Geometry, London Mathematical Society, Lecture Notes Series **179** (1992) p. 213-240.

[LeP3] J. Le Potier. *Faisceaux semi-stables de dimension* 1 *sur le plan projectif.* Revue roumaine de Mathématiques pures et appliquées, dédicacé à la mémoire de Constantin Banica ; **38** (1993) p. 635-678.

[LeP4] J. Le Potier. *Faisceaux semi-stables et systèmes cohérents.* Proceedings de la Conference de Durham (juillet 1993), Cambridge University Press (1995), p. 179-239.

[LeP5] J. Le Potier. *Module des fibrés semi-stables et fonctions thêta.* Proceedings du Symposium Taniguchi sur les fibrés vectoriels (Kyoto, décembre 1994) ; Lecture notes in pure and applied mathematics **179** (Moduli of vector bundles, ed. Masaki Maruyama) (1996) p. 83-101.

[LeP6] J. Le Potier. *Lectures on vector bundles.* Cambridge studies in advanced mathematics **54**, Cambridge Univ. Press (1997).

[Li] Jun Li. *Algebraic Geometric interpretation of Donaldson's polynomial invariants.* J. Diff. Geo. **37** (1993) p. 417-466.

[L-Q] W.-P. Li, Z. Qin. *Lower-degree Donaldson polynomial invariants of rational surfaces.* J. Alg. Geom. **2** (1993), p. 413-442.

[LiE] M. A. A. van Leeuwen, A. M. Cohen and B. Lisser. *LiE, A Package for Lie Group Computations.* Manual, included in the LiE software distribution, Computer Algebra Nederland, Amsterdam 1992.

[L-M-N-S95] A. Losev, G. Moore, N. Nekrasov, S. Shatashvili. *Four-dimensional avatars of two-dimensional RCFT.* Strings '95 (Los Angeles, CA, 1995), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1996), p. 336-362.

[Maru] M. Maruyama. *Moduli of stable sheaves. II.* J. Math. Kyoto University **18** (1978) p. 557-614.

[Mats] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory.* Cambridge Univ. Press, (1986).

[Milne] J. S. Milne. *Abelian Varieties.* in Arithmetic Geometry, ed. G. Cornell et J. H. Silverman, Springer-Verlag (1986).

[M-F] D. Mumford and J. Fogarty. *Geometric Invariant Theory, 2nd edition.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34, Springer-Verlag (1982), §5.

[Murt] M. P. Murthy. *A note on factorial rings.* Arch. Math. **15** , (1964), p. 418-420.

[O'Gra] K. G. O'Grady. *Moduli of vector bundles on surfaces.* Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, p. 101-126, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Simp] C. T. Simpson. *Moduli of Representations of the Fundamental Group of a Smooth Variety.* Publ. Math. de l'IHES **79** et **80** (1994).

[Sorg94] C. Sorger. *La formule de Verlinde.* Séminaire Bourbaki **794**, 47ème année, 1994-1995.

[SGA-6] A. Grothendieck, P. Berthelot et L. Illusie. *Séminaire de Géométrie Algébrique 6.* Lecture Notes Series **225** (1971).

[Thad] M. Thaddeus. *Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula.* Invent. Math. **117** (1994).

[Tikh] A. Tikhomirov. *On Hilbert schemes and flag varieties of points on algebraic surfaces.* Preprint.

[T-U-Y89] A. Tsuchiya, K. Ueno, Y. Yamada. *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries.* Adv. Studies in Pure Math. **19** (1989) p. 459-566.

[Verl88] E. Verlinde. *Fusion rules and modular transformations in* 2*d-conformal field theory.* Nucl. Phys. B **300** (1988) p. 360-376.