THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ
PARIS VI

Spécialité:
MATHÉMATIQUES

présentée par
Hélène DELQUIÉ

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet de la thèse:

Points multiples de la variété caractéristique d'un opérateur réel diagonalisable et dimension réduite
Symétrie d'un opérateur 4×4 fortement hyperbolique dans $\mathbb{R}^3$

Soutenue le 14 mars 2000

devant le jury composé de:

Mr Bernard GAVEAU	**Président du jury**
Mr Jean VAILLANT	**Directeur de thèse**
Mr Ferruccio COLOMBINI	**Rapporteur**
Mr Tatsuo NISHITANI	**Rapporteur**
Mr Daniel GOURDIN	**Examinateur**

REMERCIEMENTS

Je tiens avant tout à exprimer ma sincère reconnaissance à Monsieur Jean Vaillant qui a dirigé ce travail avec beaucoup de patience. Je tiens à le remercier pour sa disponibilité, sa rigueur et ses conseils qui m'ont été vraiment très précieux. Je lui sais gré de m'avoir permis d'assister à de nombreux colloques qui ont entretenu ma curiosité.

La présence de Monsieur Ferruccio Colombini à ce jury de thèse m'a honorée. Les travaux de Monsieur Tatsuo Nishitani ont été pour moi une source d'apprentissage et d'inspiration; je les remercie tous deux d'avoir accepté de rapporter cette thèse.

Je remercie également Monsieur Daniel Gourdin pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Bernard Gaveau pour avoir bien voulu présider ce jury.

Sommaire

Introduction

Les systèmes carrés d'opérateurs aux dérivées partielles du premier ordre:

$$a(D) = ID_0 + \sum_{1 \leq k \leq n} \mathrm{a}_k D_k,$$

(où I est la matrice unité $m \times m$ et les a_k sont des matrices réelles) ont d'abord été étudiées dans le cas symétrique: toutes les matrices a_k sont symétriques. Dans ce cas Friedland et Loewy [4] démontrent, si on appelle d la dimension dans l'espace des matrices du sous-espace engendré par les matrices $(I,...,\mathrm{a}_k,...)$, r la multiplicité d'une valeur propre $\lambda(\xi')$, de $\mathrm{a}(\xi') = \sum_k \mathrm{a}_k \xi_k$, que si $d \geq (r-1)(2n-r+2)/2$, alors il existe un $\xi' \neq 0$ tel que la plus grande valeur propre correspondante $\lambda(\xi')$ soit de multiplicité r. D'autre part, il est bien connu que les matrices d'opérateurs symétriques sont fortement hyperboliques par rapport à la direction $(1, 0, ..., 0, ...)$: le problème de Cauchy en $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{cases} [a(D) + \mathcal{M}]u = f \\ u|_{x_0 = t} = v(x') \end{cases}$$

est bien posé quelque soit la matrice $\mathcal{M}$; on peut aussi dire, en utilisant le théorème de Kasahara Yamaguti, que $\mathrm{a}(\xi')$ est uniformément diagonalisable dans le réel.
L'objet de notre travail est d'étendre ces résultats dans deux directions.
Nous démontrons dans la première partie une formule qui correspond au résultat de Friedland et Loewy dans le cas où les opérateurs $I\xi_0 + \mathrm{a}(\xi')$ sont diagonalisables dans le réel. La démonstration utilise une évaluation plus stricte de la dimension réduite et implique des calculs plus fins que dans le cas symétrique.
Dans la deuxième partie, nous montrons dans le cas des matrices 4×4 opérant dans $I\!R^3$, que lorsqu'il existe un point triple différent de l'origine sur la variété caractéristique, tout opérateur $a(D)$ fortement hyperbolique par rapport à $(1, 0, 0)$ est semblable à un opérateur symétrique: il existe une matrice T à coefficients constants telle que

$$T^{-1}a(D)T = I + T^{-1}a(D')T$$

soit symétrique.
Ce résultat généralise un résultat de Oshime dans le cas des matrices 3×3 opérant dans $I\!R^3$, lorsqu'il existe un point double sur la variété caractéristique et lorsque l'opérateur est uniformément diagonalisable dans le réel. Nous avons un peu simplifié sa méthode par l'utilisation des séries de Puiseux dans ce cas plus compliqué. On peut remarquer que ce travail s'inscrit dans une suite de

travaux de J. Vaillant [12], Oshime [9], Nishitani [6] qui ont pour but de préciser que si la dimension réduite est assez grande, l'hyperbolicité forte implique la symétrie, et de façon plus générale, font partie des travaux qui ont pour but de caractériser l'hyperbolicité forte dans le cas de coefficients variables Bove, Benvenuti [1], Bernardi, Nishitani [7], Colombini [2] et Vaillant.

Chapitre 1

Définitions et résultats utiles

On désigne par E et F des espaces réels de dimensions respectives $n+1$ et m; on note ξ un élément de E. Soit a une application linéaire de E dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(F,F)$ des applications linéaires de F dans lui-même: $a(\xi) \in \mathcal{L}(F,F)$, $a \in \mathcal{L}[E, \mathcal{L}(F,F)]$.

Définition 1.0.1 *On appelle dimension réduite d de a le rang de l'application a.*

Remarque 1.0.2 *i) Choisissant une base de F, d est aussi la dimension du sous-espace vectoriel de l'espace des matrices $m \times m$ formé par les matrices $(a^i_j(\xi))$ où ξ décrit E.*
ii) d est la dimension du sous-espace vectoriel de l'espace des formes linéaires sur E engendré par les formes:

$$\xi \mapsto a^i_j(\xi), \ 1 \leq i, j \leq m.$$

On suppose désormais qu'il existe $N \in E$ tel que $\det a(N) \neq 0$, on remplace alors $a(\xi)$ par $a^{-1}(N)a(\xi)$, cela revient ainsi à supposer qu'il existe N tel que:

$$a(N) = I.$$

Soit une base de premier vecteur N; on notera ξ' un élément de composantes $(0, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. Un élément ξ de E s'écrira aussi:

$$\xi = \xi_0 N + \xi'$$

et:

$$a(\xi) = \xi_0 I + \mathrm{a}(\xi') = \xi_0 I + \sum_{1 \leq k \leq n} \mathrm{a}_k \xi_k, \ (\xi_0, \xi') \in I\!R^{n+1}.$$

Remarque 1.0.3 *d est la dimension du sous-espace vectoriel des matrices $m \times m$ engendré par I, a_1, ..., a_k, ..., a_n;* a *est de dimension réduite $d - 1 = d'$.*

Remarque 1.0.4 *Si on choisit une base de F, on peut choisir une base de E de premier vecteur N telle que:*

$$a^i_j(\xi) = \xi_0 I^i_j + \sum_{1\le k\le d'} \mathrm{a}^i_{jk}\xi_k,\ 1 \le i,j \le m.$$

Lemme 1.0.5 *On peut choisir une base de E dont le premier vecteur est N et dont les autres vecteurs sont dans le noyau de a^1_1, on a alors:*

$$a(\xi) = \xi_0 I + \mathrm{a}(\xi')$$

où a *est la restriction de a à l'espace engendré par les vecteurs de cette base ne comprenant pas N.*

preuve.
On notera abusivement, pour alléger la typographie:

$$a(\xi) = (a^i_j(\xi))_{1\le i,j\le m}.$$

$a(N) = I$, donc $a^1_1(N) = 1$ et la forme a^1_1 du dual de E n'est pas nulle; son noyau est un hyperplan de E qui ne contient pas N; on peut donc choisir des bases dont N est le premier vecteur et dont n autres sont une base de cet hyperplan. On a alors:

$$a(\xi) = a(\xi_0 N + \xi') = \xi_0 a(N) + a(0,\xi') = \xi_0 I + \mathrm{a}(\xi') = \xi_0 I + \sum_{1\le k\le n} \mathrm{a}_k\xi_k.$$

Remarque 1.0.6 *Il en résulte que l'on pourra choisir des bases de E de premier vecteur N telles que:*

$$(a^i_j(\eta)) = \eta_0 I + (\sum_{1\le k\le d-1} \mathrm{a}^i_{jk}\eta_k).$$

Cela revient à dire que l'on choisit pour base dans l'espace des formes linéaires les formes: $\eta \mapsto \eta_0$ et $\eta \mapsto \eta_k$, $1 \le k \le d-1$ qui sont une base de l'espace des formes engendrées par les $\xi \mapsto a^i_j(\xi)$, et $n+1-d$ formes linéaires indépendantes des formes précédentes.
on pourra aussi choisir $\mathrm{a}^1_{1k} = 0$.

Définition 1.0.7 *a est diagonalisable par rapport à N si et seulement si:*
i) les zéros en τ de $\det a(\tau N + \xi) = \det(\tau I + a(\xi))$ sont tous réels, quelque soit ξ.
ii) si μ est la multiplicité d'un zéro, la dimension du sous-espace propre correspondant est μ.

Si on choisit N pour premier vecteur de base dans E, cela équivaut à dire que:
i) les zéros en τ de $\det(\tau I + \mathrm{a}(\xi'))$ sont tous réels, c'est-à-dire que les valeurs

propres de $\mathrm{a}(\xi')$ sont réelles.
ii) la dimension du sous-espace propre correspondant à une valeur propre est égale à sa multiplicité.

Désormais on choisira toujours N comme premier vecteur de base dans E.

Remarque 1.0.8 *Si a est diagonalisable, il existe une matrice inversible $M(\xi')$ telle que $M^{-1}(\xi')\mathrm{a}(\xi')M(\xi')$ soit diagonale.*

Définition 1.0.9 *a est uniformément diagonalisable si a est diagonalisable et il existe un diagonalisateur $M(\xi')$ tel que:*

$$||M(\xi')||,\ ||M(\xi')^{-1}|| \leq k \ \textit{(constante)}$$

où ξ' décrit $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.0.10 *Si a est diagonalisable par rapport à N et si:*

$$a^i_j(\xi) = \xi_0 I^i_j + \mathrm{a}^i_j(\xi')$$

alors pour $i < j$, a^i_j appartient au sous-espace vectoriel de dimension $d-1$ engendré par les formes a^i_j, $i \geq j$.

Preuve.
Si ce n'était pas vrai, il existerait un couple (p, q), $p < q$ pour lequel a^p_q n'appartiendrait pas au sous-espace engendré par les formes a^i_j, $i \geq j$. On pourrait donc trouver un ζ' dans le noyau de a^1_1 tel que:

$$\mathrm{a}^i_j(\zeta') = 0,\ i \geq j,\ \text{et}\ \mathrm{a}^p_q(\zeta') \neq 0.$$

Pour ce ζ', $\xi_0 = 0$ serait valeur propre de multiplicité m de $\mathrm{a}(\zeta')$ et, d'après l'hypothèse de diagonalisabilité, $\mathrm{a}(\zeta')$ serait la matrice nulle d'où $\mathrm{a}^p_q(\zeta') = 0$, ce qui nous donne une contradiction.

Définition 1.0.11 *a est présymétrique par rapport à N si et seulement si il existe une base de E de premier vecteur N et une base de F telles que dans ces bases, les matrices $(a^i_j(\xi))$ soient toutes symétriques (pour tout ξ). Autrement dit, si $(a^i_j(\xi))$ est la matrice de $a(\xi)$ dans une base quelconque de F, il existe une matrice inversible réelle T telle que:*

$$T^{-1}(a^i_j(\xi))T = S(\xi),$$

où $S(\xi)$ est symétrique; on a aussi:

$$T^{-1}(\mathrm{a}^i_j(\xi'))T \ \textit{est symétrique}\ \forall \xi'.$$

Rappelons que:

Définition 1.0.12 *Un opérateur* $a(D) = ID_0 + \mathrm{a}(D')$ *est dit fortement hyperbolique si, pour tout opérateur de degré inférieur* R*, le système d'équations:*

$$a + R = 0$$

est hyperbolique.

Théorème 1.0.13 *(Yamaguti-Kasahara [5]) L'opérateur* $a(D)$ *est fortement hyperbolique par rapport à* N *si et seulement si* a *est uniformément diagonalisable par rapport à* N*.*

Nous avons alors le résultat suivant:

Proposition 1.0.14 *Si* a *est présymétrique par rapport à* N *alors* $a(D)$ *est fortement hyperbolique par rapport à* N*.*

Preuve. Si a est présymétrique, pour tout ξ', $\mathrm{a}(\xi')$ est symétrisable, on sait alors que pour tout ξ', il existe une matrice orthogonale $T(\xi')$ telle que $T^{-1}(\xi')\mathrm{a}(\xi')T(\xi')$ est diagonale; comme $\det(T(\xi')) = \det(T^{-1}(\xi')) = 1$, $T(\xi')$ et $T^{-1}(\xi')$ sont bornées, donc a est bien uniformément diagonalisable.

Proposition 1.0.15 *Soit* a *une application linéaire de* E *dans l'espace vectoriel* $\mathcal{L}(F, F)$ *des applications linéaires de* F *dans lui-même; la propriété de diagonalisabilité et la dimension réduite de* a *restent inchangées si celle-ci est transformée par une similitude.*

Chapitre 2

Dimension réduite et valeurs propres multiples d'une matrice diagonalisable $m \times m$

2.1 Théorème d'existence de points multiples différents de 0

On désigne par E et F des espaces réels de dimensions respectives $n+1$ et m; on note ξ un élément de E. Soit a une application linéaire de E dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(F,F)$ des applications linéaires de F dans lui-même: $a(\xi) \in \mathcal{L}(F,F)$, on notera encore $a(\xi)$ la matrice associée; $a \in \mathcal{L}[E, \mathcal{L}(F,F)]$.
On considère en fait des applications linéaires de la forme:

$$a(\xi) = \xi_0 I + \mathrm{a}(\xi') = \xi_0 I + \sum_{1 \leq k \leq n} \mathrm{a}_k \xi_k, \ (\xi_0, \xi') \in I\!\!R^{n+1}.$$

Lorsque les matrices a_k sont symétriques, S. Friedland et R. Loewy [4] ont déterminé la dimension d_0 telle que pour $d \geq d_0$, dans l'espace vectoriel des matrices $\mathrm{a}(\xi')$, il existe au moins une matrice non nulle dont la plus grande valeur propre est de multiplicité supérieure ou égale à r $(2 \leq r \leq m)$.

Nous nous proposons de montrer, comme dans [3], que l'hypothèse de symétrie peut être remplacée par l'hypothèse plus faible de diagonalisabilité:
i) les zéros en ξ_0 de $\det a(\xi_0, \xi') = 0$ sont tous réels, c'est-à-dire les valeurs propres de $\mathrm{a}(\xi')$ sont réelles;
ii) $\mathrm{a}(\xi')$ est diagonalisable.

Notations:
On rappelle que $a(\xi) = \xi_0 I + \mathrm{a}(\xi')$; on notera aussi $\xi_o \equiv -\lambda$; I désigne la matrice unité $m \times m$; $\mathrm{a}(\xi')$ est une matrice $m \times m$ de formes linéaires. Les

valeurs propres de $\mathrm{a}(\xi')$ seront notées:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\xi')] \geq \lambda_2[\mathrm{a}(\xi')] \geq ... \geq \lambda_m[\mathrm{a}(\xi')].$$

$\lambda_1[\mathrm{a}(\xi')]$ est de multiplicité r si:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\xi')] = ... = \lambda_r[\mathrm{a}(\xi')] \text{ et } \lambda_1[\mathrm{a}(\xi')] > \lambda_{r+1}[\mathrm{a}(\xi')].$$

Le point $(-\lambda, \xi')$ correspondant est un point multiple de multiplicité r de $\det a(\xi)$.

Théorème 2.1.1 *Supposons a diagonalisable par rapport à N.*
Si

$$m \leq 5$$

ou bien

$$m \geq 6 \textit{ et}$$

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - 1 > m(m-p-2), \; 1 \leq p \leq m-2$$

et si la dimension réduite d de a est supérieure ou égale à

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 + 1, \; 1 \leq p \leq m-2,$$

alors $\det a(\xi)$ *admet au moins un point multiple différent de 0 d'ordre $m-p$; plus précisément il existe un $\xi' \neq 0$ tel que la plus grande valeur propre de* $\mathrm{a}(\xi')$ *soit de multiplicité au moins égale à $m-p$.*
De plus la borne inférieure $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2+1$ de d est la meilleure possible.

2.2 Preuve du théorème

2.2.1 Lemme

Lemme 2.2.1 *Si $d(\mathrm{a}) \geq m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - p$, $0 \leq p \leq m-2$ alors il existe $\xi' \neq 0$, tel que la plus grande valeur propre de* $\mathrm{a}(\xi')$ *soit au moins de multiplicité $m-p-1$ et égale à 1.*

Preuve. Nous pouvons le démontrer par récurrence sur $r = m-p$, m restant fixe; ceci nous amène a faire une récurrence sur p.
Le résultat du lemme est vrai au rang $p = m-2$, en effet, on a:

$$d' \geq m(m+1)/2 - m(m-1)/2 - m + 2 = 2$$

et

$$m - p - 1 = m - m + 2 - 1 = 1;$$

alors par l'hypothèse de diagonalisabilité, nous avons bien l'existence d'une valeur propre de multiplicité d'ordre 1.

Supposons-le vrai au rang p; montrons-le au rang $p-1$: nous supposons donc que:

$$d' \geq m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - (p-1)$$

et nous allons montrer qu'il existe $\xi' \neq 0$ tel que $\mathrm{a}(\xi')$ ait une valeur propre au moins de multiplicité $m-p$ et égale à 1.
Puisque

$$m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - (p-1) > m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - p,$$

on a bien

$$d' \geq m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - p$$

et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence:
il existe $\eta' \neq 0$ tel que la plus grande valeur propre de $a(\eta')$ soit au moins de multiplicité $m-p-1$ et égale à 1, donc telle que:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\eta')] = ... = \lambda_{m-p-1}[\mathrm{a}(\eta')] = 1 \geq \lambda_{m-p}[\mathrm{a}(\eta')] \geq ... \geq \lambda_m[\mathrm{a}(\eta')].$$

Soit il n'existe pas de $\eta' \neq 0$ tel que:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\eta')] = ... = \lambda_{m-p-1}[\mathrm{a}(\eta')] = 1 > \lambda_{m-p}[\mathrm{a}(\eta')] \geq ... \geq \lambda_m[\mathrm{a}(\eta')],$$

dans ce cas, le problème est terminé puisqu'alors η' est tel que $\lambda_1[\mathrm{a}(\eta')] = 1$ soit au moins de multiplicité $m-p$.

On considère donc le cas où il en existe un.
Il existe une matrice inversible U telle que:

$$\mathrm{a}(\eta') = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} U^{-1},$$

avec $1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{m-p-1} > \lambda_{m-p} \geq \lambda_{m-p+1} \geq ... \geq \lambda_m$.

On sait [11] qu'on ne change pas la propriété de diagonalisabilité de $\mathrm{a}(\xi')$ ni sa dimension réduite par une similitude, donc on peut remplacer $\mathrm{a}(\xi')$ par $U^{-1}\mathrm{a}(\xi')U$ que l'on note aussi $\mathrm{a}(\xi')$; ainsi on a toujours

$$d' \geq m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - (p-1).$$

Posons $b = a(\eta')$ alors:

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & & & & . \\ . & . & 1 & & . & & . \\ . & & . & \lambda_{m-p} & & . & . \\ . & & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & & . & 0 & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_{m-p} < 1.$$

Soit $X_1, X_2, ..., X_{m-p-1}$ les vecteurs normalisés associés à la valeur propre 1 de multiplicité $m-p-1$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \; X_{m-p-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } bX_1 = X_1, \; bX_2 = X_2, ..., \; bX_{m-p-1} = X_{m-p-1}.$$

Définissons les ensembles suivants:

$$T = \{\Phi^i_j / 1 \leq i < j \leq m-p-1\},$$

$$\mathcal{J}_1 = \{\Phi^i_j / 1 \leq j \leq i \leq m \text{ et } j \leq m-p-1\},$$

$$\mathcal{J}_2 = \{\Phi^i_j / m-p \leq j \leq i \leq m\}.$$

On a alors:

$$\mathrm{a}(\xi') = \begin{pmatrix} \psi_1(\xi') & \Phi^1_2(\xi') & \cdots & \Phi^1_{m-p-1} & & & & \\ \Phi^2_1 & \ddots & T & \vdots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Phi^{m-p-2}_{m-p-1} & & & & \\ \vdots & & \ddots & \psi_{m-p-1}(\xi') & & & * & \\ \vdots & \mathcal{J}_1 & & \Phi^{m-p}_{m-p-1} & \psi_{m-p}(\xi') & & & \\ \vdots & & & \vdots & \Phi^{m-p+1}_{m-p} & \ddots & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \mathcal{J}_2 & \ddots & \\ \Phi^m_1 & \cdots & \cdots & \Phi^m_{m-p-1} & \Phi^m_{m-p} & \cdots & \Phi^m_{m-1} & \psi_m(\xi') \end{pmatrix}.$$

On sait que $\{\Phi^i_j / i \geq j\}$ engendre l'espace des formes de la matrice Φ d'après la proposition 1.0.10, donc il existe une base $\mathcal{A}$ formée d'éléments de $\mathcal{J}_1$ et d'éléments de $\mathcal{J}_2$.
Le nombre total d'éléments de $\mathcal{J}_1$ est:

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 = m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - (p+1),$$

celui de $\mathcal{J}_2$ est:

$$(p+1)(p+2)/2.$$

Il existe un entier $k \geq 0$ tel que le nombre d'éléments de $\mathcal{J}_1$ appartenant à cette base $\mathcal{A}$ soit:

$$m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - (p+1) - k.$$

Soit x le nombre d'éléments de $\mathcal{J}_2$ appartenant à $\mathcal{A}$; puisque $d' = m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - p$ alors:

$$m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - (p+1) - k + x = m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - p$$

donc $-1-k+x=0$ soit encore $x=k+1$, et le nombre d'éléments de $\mathcal{J}_2$ appartenant à $\mathcal{A}$ est $k+1$.

Posons $\Phi_j^i(\xi') = 0$ pour tout $\Phi_j^i \in \mathcal{J}_1$; on obtient la matrice:

$$\mathrm{a}(\xi') = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_2^1(\xi') & \cdots & \Phi_{m-p-1}^1 & & & & \\ 0 & \ddots & T & \vdots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Phi_{m-p-1}^{m-p-2} & & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & * & \\ \vdots & \mathcal{J}_1 & & 0 & \psi_{m-p}(\xi') & & & \\ \vdots & & & \vdots & \Phi_{m-p}^{m-p+1} & \ddots & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \mathcal{J}_2 & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Phi_{m-p}^m & \cdots & \Phi_{m-1}^m & \psi_m(\xi') \end{pmatrix}.$$

$\xi_0 = 0$ est valeur propre de multiplicité $m-p-1$, d'où les mineurs d'ordre $p+2$ sont nuls.
Si le mineur constitué à partir des $p+1$ dernières lignes et colonnes correspondantes, notons-le $L\begin{pmatrix} m-p & \cdots & m \\ m-p & \cdots & m \end{pmatrix}$ (où la première ligne indique les indices de lignes et la deuxième les indices de colonnes) est nul, alors $\xi_0 = 0$ est racine de
$L\begin{pmatrix} m-p & \cdots & m \\ m-p & \cdots & m \end{pmatrix}$ et donc valeur propre d'ordre $m-p$ de $\mathrm{a}(\xi')$, dans ce cas la démonstration est achevée.

Supposons donc que $L\begin{pmatrix} m-p & \cdots & m \\ m-p & \cdots & m \end{pmatrix}$ n'est pas nul, alors, puisque les mineurs d'ordre $p+2$ sont nuls, pour tous (μ, q) tels que $1 \leq \mu < q \leq m-p-1$, on a:

$$L\begin{pmatrix} \mu & m-p & \cdots & m \\ q & m-p & \cdots & m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \Phi_q^\mu(\xi') & & & & \\ 0 & \psi_{m-p}(\xi') & & * & \\ \vdots & \Phi_{m-p}^{m-p+1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \Phi_{m-p}^m & \cdots & \Phi_{m-1}^m & \psi_m(\xi') \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Phi_q^\mu(\xi') L \begin{pmatrix} m-p & \cdots & m \\ m-p & \cdots & m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Phi_q^\mu(\xi') = 0.$$

Par conséquent, les éléments Φ_q^μ du triangle T ne dépendent pas des éléments de $\mathcal{J}_2$, donc ils dépendent uniquement des éléments de $\mathcal{J}_1$.

Considérons le système en ξ':

$$\begin{cases} \mathrm{a}(\xi')X_1 = 0 \\ \vdots \\ \mathrm{a}(\xi')X_{m-p-1} = 0 \end{cases} \quad \text{soit encore:} \begin{cases} \mathrm{a}_1^1(\xi') = 0 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_1^m(\xi') = 0 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_{m-p-1}^1(\xi') = 0 \\ \vdots \\ \mathrm{a}_{m-p-1}^m(\xi') = 0 \end{cases}.$$

C'est un système constitué des éléments des m lignes et $m-p-1$ premières colonnes de $a(\xi')$ s'annulant:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & * & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, le nombre d'équations linéairement indépendantes de ce système est au plus:

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 = m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - (p+1).$$

Le nombre d'inconnues est d' soit supérieur ou égale à $m(m+1)/2 - p(p+1)/2 - p$, il est donc strictement supérieur au rang du système; il existe alors une solution non nulle χ' telle que $\mathrm{a}(\chi') \neq 0$.

$\chi' \neq \eta'$ puisque η' n'est pas solution du système. $\mathrm{a}(\chi') \neq 0$, donc sa plus grande valeur propre $\lambda_1[\mathrm{a}(\chi')] \neq 0$, on peut la supposer strictement positive;

en effet si $\lambda_1 < 0$, toutes les autres valeurs propres sont négatives, il suffit alors de multiplier $\mathrm{a}(\chi')$ par -1 et de réordonner les valeurs propres de la nouvelle matrice que l'on notera aussi $\mathrm{a}(\chi')$.

Posons $c = \mathrm{a}(\chi')$. b et c sont linéairement indépendantes, en effet si $ub{+}vc = 0$ alors pour l'un quelconque des X_i, $1 \leq i \leq m{-}p{-}1$, $ubX_i{+}vcX_i = 0$, comme $cX_i = 0$, $vcX_i = 0$ aussi, donc $ubX_i = 0$ ce qui entraîne $uX_i = 0$ soit $u = 0$, donc $vc = 0$ et finalement $v = 0$.

Posons:

$$c(\alpha) = \mathrm{a}(\eta' + \alpha\chi') = \mathrm{a}(\eta') + \alpha\mathrm{a}(\chi') = b + \alpha c.$$

$c(\alpha)$ a une valeur propre d'ordre $m - p - 1$ égale à 1, en effet:
pour $1 \leq i \leq m - p - 1$:

$$c(\alpha)X_i = bX_i + \alpha cX_i = bX_i = X_i.$$

Notons-la:

$$\lambda_1[c(\alpha)] = ... = \lambda_{m-p-1}[c(\alpha)] = 1.$$

Si α est assez petit, les valeurs propres de $c(\alpha)$ sont très proches de celles de b, en particulier $\lambda_{m-p}[c(\alpha)]$ tend vers $\lambda_{m-p}(b)$, en effet:
$det(-\lambda I + b + \alpha c)$, est continue en la variable réelle α par composition de fonctions continues; alors $\forall\varepsilon > 0$ et pour $|\alpha|$ plus petit qu'un certain η on a:

$$|det(-\lambda I + b + \alpha c) - det(-\lambda I + b)| < \varepsilon.$$

De plus il existe $r > 0$ aussi petit qu'on veut tel que:

$$|\lambda - \lambda_{m-p}(b)| = r \text{ et } det(-\lambda I + b) \neq 0,$$

alors on peut prendre $\varepsilon < |det(-\lambda I + b)|$ et on a bien:

$$|det(-\lambda I + b + \alpha c) - det(-\lambda I + b)| < |det(-\lambda I + b)|.$$

On peut donc appliquer le théorème de Rouché aux fonctions

$$det(-\lambda I + b + \alpha c) \text{ et } det(-\lambda I + b)$$

de la variable λ, holomorphes dans $\mathbb{C}$ et restreintes à $I\!\!R$, qui ont alors le même nombre de zéros dans l'intervalle:

$$]\lambda_{m-p}(b) - r, \lambda_{m-p}(b) + r[,$$

$$\text{et } \lambda_{m-p}[c(\alpha)] \in]\lambda_{m-p}(b) - r, \lambda_{m-p}(b) + r[.$$

(On a montré par là-même que la fonction $\alpha \mapsto \lambda_{m-p}[c(\alpha)]$ est continue en 0; on montrerait de même qu'elle est continue sur tout $I\!\!R$).
On peut choisir

$$r \leq \lambda_1(b) - \lambda_{m-p}(b) = 1 - \lambda_{m-p}(b),$$

alors

$$\lambda_{m-p}[c(\alpha)] < \lambda_{m-p}(b) + r \leq \lambda_{m-p}(b) + 1 - \lambda_{m-p}(b) = 1.$$

Si on fait tendre α vers $+\infty$ on peut montrer qu'il existe un α^* tel que:

$$\lambda_1[c(\alpha^*)] = \lambda_{m-p}[c(\alpha^*)] = 1,$$

en effet, pour tout $\alpha > 0$:

$$det[-\lambda I + c(\alpha)] = 0$$

$$\Leftrightarrow det(-\lambda I + b + \alpha c) = 0$$

$$\Leftrightarrow det(-\lambda/\alpha I + b/\alpha + c) = 0,$$

d'où

$$\lambda[c(\alpha)]/\alpha = \lambda(b/\alpha + c).$$

Ecrivons le développement limité d'ordre 0 au voisinage de 0 de la fonction $\beta \mapsto \lambda(\beta b + c)$ qui, par un raisonnement analogue à ce qui précède, est continue sur $I\!R$:

$$\lambda(\beta b + c) = \lambda(c) + O(\beta),$$

si l'on pose $\beta = 1/\alpha$ alors:

$$\lambda(b/\alpha + c) = \lambda(c) + O(1/\alpha)$$

et il vient:

$$\lambda[c(\alpha)] = \alpha\lambda(c) + \alpha O(1/\alpha) = \alpha\lambda(c) + O(1)$$

que l'on peut noter aussi $\lambda_{m-p}[c(\alpha)]$. Donc quand $\lambda(c) = \lambda_1(c)$, on a:

$$\lambda[c(\alpha)] = \alpha\lambda_1(c) + O(1);$$

rappelons que $\lambda_1(c) > 0$ et $\lambda_{m-p}[c(\alpha)] < 1$ pour certains α; en faisant tendre α vers $+\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe bien α^* tel que:

$$\lambda_{m-p}[c(\alpha^*)] = \lambda_1[c(\alpha^*)] = 1,$$

c'est-à-dire tel que a$(\eta' + \alpha^*\chi')$ ait une valeur propre de multiplicité $m - p$ au moins.

Ainsi, le résultat vrai au rang $p + 1$ entraîne le résultat vrai au rang p, et le lemme est démontré pour tout $1 \leq p \leq m - 2$.

2.2.2 Lemme

Lemme 2.2.2 *On suppose que la dimension réduite d de a est supérieure ou égale à:*

$$m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2+1,\ 1\leq p\leq m-2.$$

On suppose de plus que:

$$\textit{pour tout } \xi'\neq 0 \textit{ tel que } \lambda_1[\mathrm{a}(\xi')]=...=\lambda_{m-p-1}[\mathrm{a}(\xi')]=\lambda,$$

alors

$$\lambda>\lambda_{m-p}[\mathrm{a}(\xi')]. \tag{1}$$

Soit Y_1, Y_2,..., Y_{m-p-1} $m-p-1$ vecteurs linéairement indépendants. On considère le système en (λ,ξ') suivant:

$$\mathrm{a}(\xi')Y_i=\lambda Y_i,\ 1\leq i\leq m-p-1. \tag{2}$$

Alors il existe $\underline{\xi}'\neq 0$ et $\underline{\lambda}$ tels que:

$$\mathrm{a}(\underline{\xi}')Y_i=\underline{\lambda}Y_i,\ 1\leq i\leq m-p-1$$

et que:

$$\underline{\lambda}=\lambda_1[\mathrm{a}(\underline{\xi}')]=...=\lambda_{m-p-1}[\mathrm{a}(\underline{\xi}')].$$

De plus, tout $(\lambda,\mathrm{a}(\xi'))$ vérifiant (2) est de la forme:

$$\mathrm{a}(\xi')=\alpha\mathrm{a}(\underline{\xi}'),\ \lambda=\alpha\underline{\lambda},\ \alpha\neq 0.$$

Remarque 2.2.3 *i) Dans l'hypothèse (1), il existe au moins un $\xi'\neq 0$ tel que:*

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\xi')]=...=\lambda_{m-p-1}[\mathrm{a}(\xi')]$$

d'après le lemme 2.2.1, donc cette hypothèse a toujours un sens.
ii) Toute matrice $\mathrm{a}(\xi)$ ne vérifiant pas l'hypothèse (1) admet une valeur propre de multiplicité $m-p-1$.
iii) L'hypothèse (1) entraîne que $\mathrm{a}(\xi')\neq 0$, sinon λ est valeur propre de multiplicité $m-p$.

Preuve du lemme.
La dimension réduite d de a est supérieure ou égale à

$$m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2+1$$

donc aussi à

$$m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2-p,$$

et du lemme 2.2.1, on déduit qu'il existe η' pour lequel $\mathrm{a}(\eta')$ a une valeur propre de multiplicité $m-p-1$ égale à 1. Par un changement de base de F, on peut supposer, sans changer de notations, que la matrice $\mathrm{a}(\eta')$ considérée est:

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & & . & 0 \\ 0 & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & . \\ . & & . & 1 & . & & . \\ . & & & . & \lambda_{m-p} & & . \\ . & & & & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \lambda_m \end{pmatrix},$$

par l'hypothèse (1) $\lambda_{m-p} < 1$.
On note X_i, $1 \leq i \leq m-p-1$ les $m-p-1$ vecteurs propres linéairement indépendants correspondant à la valeur propre 1 de $\mathrm{a}(\eta')$:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; X_{m-p-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas particulier où Y_i, $1 \leq i \leq m-p-1$ sont respectivement les vecteurs X_i, $1 \leq i \leq m-p-1$, nous avons bien l'existence d'une solution $(\underline{\lambda}, \underline{\xi'})$: $\underline{\xi'} = \eta' \neq 0$ et $\underline{\lambda}$ est la valeur propre de multiplicité $m-p-1$ égale à 1, vérifiant le système (2). Notons alors:

$$Y_i = X_i, \; 1 \leq i \leq m-p-1.$$

Nous allons montrer que toute autre solution (λ, ξ'), dans ce cas particulier, est de la forme:

$$\lambda = \alpha \underline{\lambda} \text{ et } \xi' = \alpha \underline{\xi'}.$$

Pour cela il faut montrer que, pour tout ξ' tel que $\mathrm{a}(\xi') = c$ soit linéairement indépendant de b, il n'existe pas de μ pour lequel

$$cX_i = \mu X_i, \; 1 \leq i \leq m-p-1.$$

Montrons-le par l'absurde:
supposons qu'il existe χ' pour lequel $\mathrm{a}(\chi') = c$ soit linéairement indépendant de b et tel que $cX_i = \mu X_i$, $1 \leq i \leq m-p-1$.

1er cas: $\mu = 0$**.**
Posons:

$$c(\alpha) = b + \alpha c = \mathrm{a}(\eta' + \alpha \chi'),$$

alors:

$$c(\alpha)X_i = bX_i + \alpha cX_i = bX_i = X_i,\ 1 \leq i \leq m-p-1.$$

On en déduit que 1 est valeur propre de multiplicité $m-p-1$ de $c(\alpha)$. Si α tend vers 0, $\det[-\lambda I + c(\alpha)]$ tend vers $\det(-\lambda I + b)$, et par continuité des valeurs propres $\alpha \mapsto \lambda_i[c(\alpha)]$, pour α suffisamment petit:

$$\lambda_1[c(\alpha)] = ... = \lambda_{m-p-1}[c(\alpha)] > \lambda_{m-p}[c(\alpha)] \geq ... \geq \lambda_m[c(\alpha)].$$

c n'est pas nul, donc c a une valeur propre différente de 0; on peut supposer $\lambda_1(c) > 0$ quitte à remplacer c par $-c$.

Considérons les racines de:

$$\det[-\lambda I + c(\alpha)] = \det(-\lambda I + b + \alpha c) = 0.$$

Au voisinage de $+\infty$, nous avons vu qu'il existe un zéro $\lambda[c(\alpha)]$ tel que:

$$\lambda[c(\alpha)] = \alpha\lambda_1(c) + 0(1).$$

Pouvant supposer $\lambda_1(c)$ infiniment petit, il existe α^* tel que:

$$\lambda_1[c(\alpha^*)] = ... = \lambda_{m-p-1}[c(\alpha^*)] = \lambda_{m-p}[c(\alpha^*)] = 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse (1).

2ème cas: $\mu \neq 0$.
On pose:

$$c' = c - \mu b = \mathrm{a}(\chi' - \mu\eta'),$$

on a alors:

$$c'X_i = 0,\ 1 \leq i \leq m-p-1$$

et on est ramené au cas précédent.

Dans ce cas particulier, le lemme est démontré.

Soit maintenant Y_i, $1 \leq i \leq m-p-1$, $m-p-1$ vecteurs linéairement indépendants quelconques. Il existe une famille $X_i(t)$, $1 \leq i \leq m-p-1$, de $m-p-1$ vecteurs linéairement indépendants, dépendant continûment de t, $0 \leq t \leq 1$, telle que:

$$X_i(0) = X_i \text{ et } X_i(1) = Y_i,\ 1 \leq i \leq m-p-1.$$

En effet on peut construire une base de premiers vecteurs Y_i et une autre base de premiers vecteurs X_i de même orientation. Il existe un chemin continu dans l'espace connexe des matrices inversibles de déterminants > 0: $t \mapsto U(t)$ tel que:

$$U(0) = I \text{ et } U(1)X_i = Y_i, \ 1 \leq i \leq m-p-1.$$

On pose:

$$X_i(t) = U(t)X_i.$$

Pour chaque t, $0 \leq t \leq 1$, on considère le système en (λ, ξ'):

$$a(\xi')X_i(t) = \lambda X_i(t), \ 1 \leq i \leq m-p-1. \tag{3}$$

C'est un système de $m(m-p-1)$ équations à au moins $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2+1$ inconnues puisque $d \geq m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2+1$. Il a moins d'inconnues que d'équations pour $p < m-3$, en effet:

$$m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2+1-m(m-p-1) =$$

$$= m^2/2+m/2-p^2/2-3p/2-1+1-m^2+mp+m$$
$$= -m^2/2+m(p+3)/2-p(p+3)/2 = P(m).$$

Le discriminant du polynôme $P(m)$ en m est:

$$\triangle[P(m)] = (p+3/2)^2-p(p+3) = p^2+3p+9/4-p^2-3p = 9/4,$$

les zéros de $P(m)$ sont:

$$m_1 = p+3 \text{ et } m_2 = p;$$

donc $P(m) < 0$ pour $m > p+3$ soit pour $p < m-3$.
On va montrer qu'en fait le rang de ce système est strictement inférieur au nombre d'inconnues pour $p \leq m-2$, et qu'il admet au moins une solution $(\mathrm{a}(\xi'(t)) \neq 0, \lambda(t))$. On pose:

$$\tilde{\mathrm{a}}_t(\xi') = U^{-1}(t)\mathrm{a}(\xi')U(t).$$

Le système devient:

$$\tilde{\mathrm{a}}_t(\xi')X_i = \lambda X_i, \ 1 \leq i \leq m-p-1.$$

$\tilde{\mathrm{a}}_t$ est de dimension réduite supérieure ou égale à $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2$ et est diagonalisable [11]; pour simplifier on notera:

$$\lambda = -\xi_0$$

et aussi:

$$\tilde{\mathrm{a}}_t = \Phi; \ \tilde{\mathrm{a}}^i_{tj} = \Phi^i_j, \ 1 \leq i,j \leq m.$$

Comme dans le lemme 2.2.1, définissons les ensembles suivants:

$$T = \{\Phi^i_j / 1 \leq i < j \leq m-p-1\},$$

$$\mathcal{J}_1 = \{\Phi^i_j / 1 \leq j \leq i \leq m \text{ et } j \leq m-p-1\},$$

$$\mathcal{J}_2 = \{\Phi^i_j / m-p \leq j \leq i \leq m\}.$$

On a alors:

$\xi_0 I + \Phi(\xi') =$

$$\begin{pmatrix}
\xi_0+\psi_1(\xi') & \Phi^1_2(\xi') & \cdots & \Phi^1_{m-p-1} & & & & \\
\Phi^2_1 & \xi_0+\psi_2(\xi') & T & \vdots & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \Phi^{m-p-2}_{m-p-1} & & & & \\
\vdots & & \ddots & \xi_0+\psi_{m-p-1}(\xi') & & & * & \\
\vdots & \mathcal{J}_1 & & \Phi^{m-p}_{m-p-1} & \xi_0+\psi_{m-p}(\xi') & & & \\
\vdots & & & \vdots & \Phi^{m-p+1}_{m-p} & \ddots & & \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \mathcal{J}_2 & \ddots & \\
\Phi^m_1 & \cdots & \cdots & \Phi^m_{m-p-1} & \Phi^m_{m-p} & \cdots & \Phi^m_{m-1} & \xi_0+\psi_m(\xi')
\end{pmatrix}.$$

Sans changer les hypothèses du lemme, on peut remplacer $\xi_0 I + \Phi(\xi')$ par $\xi_0 I + \Phi(\xi') - \psi_1(\xi')I$, et sans changer de notations, on a:

$\xi_0 I + \Phi(\xi') =$

$$\begin{pmatrix}
\xi_0 & \Phi^1_2(\xi') & \cdots & \Phi^1_{m-p-1} & & & & \\
\Phi^2_1 & \xi_0+\psi_2(\xi') & T & \vdots & & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & \Phi^{m-p-2}_{m-p-1} & & & & \\
\vdots & & \ddots & \xi_0+\psi_{m-p-1}(\xi') & & & * & \\
\vdots & \mathcal{J}_1 & & \Phi^{m-p}_{m-p-1} & \Phi_0+\psi_{m-p}(\xi') & & & \\
\vdots & & & \vdots & \Phi^{m-p+1}_{m-p} & \ddots & & \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \mathcal{J}_2 & \ddots & \\
\Phi^m_1 & \cdots & \cdots & \Phi^m_{m-p-1} & \Phi^m_{m-p} & \cdots & \Phi^m_{m-1} & \xi_0+\psi_m(\xi')
\end{pmatrix}.$$

On pose:

$$\Phi^i_j = 0,\ 1 \leq j \leq i \leq m \text{ et } j \leq m-p-1,\ (i,j) \neq (1,1),$$

c'est-à-dire que tous les Φ^i_j appartenant à $\mathcal{J}_1$ sont nuls; alors $\xi_0 = 0$ est racine multiple d'ordre $m-p-1$ donc les mineurs d'ordre $p+2$ sont nuls; de plus, pour de tels ξ, le déterminant de la sous-matrice constituée à partir des $p+1$ dernières lignes et $p+1$ colonnes correspondantes ne peut être nul, sinon $\xi_0 = 0$ serait racine d'ordre $m-p$, ce qui est exclu par l'hypothèse (1); donc, si nous considérons les mineurs d'ordre $p+2$ constitués à partir des lignes $i = \mu, m-$

$p, m-p+1, ..., m$ et des colonnes $j = q, m-p, m-p+1, ..., m$, pour tous (μ, q) tels que $1 \leq \mu < q \leq m-p-1$, nous avons:

$$\det \begin{pmatrix} \Phi_q^\mu(\xi') & & & & \\ 0 & \psi_{m-p}(\xi') & & * & \\ \vdots & \Phi_{m-p}^{m-p+1} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \Phi_{m-p}^m & \cdots & \Phi_{m-1}^m & \psi_m(\xi') \end{pmatrix} =$$

$$\Phi_q^\mu(\xi') \det \begin{pmatrix} \psi_{m-p}(\xi') & & & \\ \Phi_{m-p}^{m-p+1} & \ddots & * & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \Phi_{m-p}^m & \cdots & \Phi_{m-1}^m & \psi_m(\xi') \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \Phi_q^\mu(\xi') = 0,$$

ce qui prouve que les Φ_q^μ appartenant à T ne dépendent pas des éléments de $\mathcal{J}_2$, ils ne dépendent donc que des éléments de $\mathcal{J}_1$.
Le système (3) s'écrit alors:

$$\Phi_j^i(\xi') = 0,\ 1 \leq j \leq i \leq m-p-1,\ (i,j) \neq (1,1),\ \text{et } \xi_0 = 0,$$

soit au total:

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 \text{ équations.}$$

Puisque le nombre d'inconnues est supérieur ou égal à:

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 + 1,$$

le système admet donc une solution non nulle.

Le rang du système (3) en (λ, ξ') est donc, pour tout t, $0 \leq t \leq 1$ inférieur ou égal à $m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2$. Si $t = 0$, nous avons vu, dans l'étude du cas particulier, qu'il existe exactement une solution non triviale définie à une constante près; donc le rang est exactement égal à $m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2$. Par semi-continuité du rang, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $0 \leq t \leq \varepsilon$, le rang soit exactement:

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2;$$

il y a alors exactement à une constante multiplicative près un couple:

$$(\lambda(t), \mathrm{a}(t)) \neq 0,$$

où $\mathrm{a}(t) \equiv \mathrm{a}(\xi'(t))$, qui vérifie (2).
On peut choisir $\mathrm{a}(t)$ continue en t tant que le rang du système reste égal à

$m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2$. On peut supposer $\|\mathrm{a}(t)\|=1$ pour une des normes matricielles usuelles. Puisque:

$$\lambda(0)=\lambda_1[\mathrm{a}(0)]=...=\lambda_{m-p-1}[\mathrm{a}(0)]>\lambda_{m-p}[\mathrm{a}(0)],$$

la continuité de $\mathrm{a}(t)$ et l'hypothèse (1) impliquent que:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(t)]=\lambda(t),\ \text{pour } 0\leq t\leq\varepsilon.$$

Montrons par l'absurde que pour tout $t\in[0;1]$, il ne peut exister deux solutions linéairement indépendantes.
Soit t_0, $0<t_0\leq 1$ le t le plus petit pour lequel il y a au moins deux solutions linéairement indépendantes; $\mathrm{a}(t)$ est continue pour $0\leq t\leq t_0$. La continuité en t des coefficients du système (3) et l'hypothèse $\|\mathrm{a}(t)\|=1$ impliquent l'existence de $b^*=\mathrm{a}[\xi'(t_0)]\neq 0$ et λ^* tels que:

$$b^*X_i(t_0)=\lambda^*X_i(t_0),\ 1\leq i\leq m-p-1;$$

de plus:

$$\lambda^*=\lambda_1(b^*)=...=\lambda_{m-p-1}(b^*)>\lambda_{m-p}(b^*).$$

Soit $c=\mathrm{a}[\eta'(t_0)]$ linéairement indépendante de b^* telle que:

$$cX_i(t_0)=\mu X_i(t_0),\ 1\leq i\leq m-p-1.$$

Si $\mu=0$, en considérant $c(\alpha)=b^*+\alpha c$, on aboutit, comme au début du lemme 2.2.2 à une contradition à l'hypothèse (1).
Si $\mu\neq 0$:

$$c(\alpha)X_i(t_0)=(\lambda_1(b^*)+\alpha\mu)X_i(t_0),\ 1\leq i\leq m-p-1.$$

On peut choisir $|\alpha^*|\neq 0$ assez petit pour que:

$$\lambda_1[c(\alpha^*)]\neq 0,\ \lambda_1[c(\alpha^*)]>\lambda_{m-p}[c(\alpha^*)].$$

On pose: $c(\alpha^*)=b_1$ et on a:

$$b_1X_i(t_0)=\lambda_1(b_1)X_i(t_0),\ 1\leq i\leq m-p-1.$$

On pose: $c_1=c-\mu b_1/\lambda_1(b_1)$; alors on a:

$$c_1X_i(t_0)=0,\ 1\leq i\leq m-p-1.$$

Comme b_1 et c_1 sont linéairement indépendants, par le raisonnement du début du lemme 2.2.2, on aboutit à une contradiction à l'hypothèse (1). Donc pour tout t, le rang du système (3) est $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2$, et le lemme 2.2.2 est démontré.

2.2.3 Lemme

Lemme 2.2.4 *On suppose que:*

$$d \geq m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 + 1, \ 1 \leq p \leq m-2. \tag{4}$$

Si $m \geq 6$, on suppose aussi que:

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - 1 > m(m-p-2). \tag{5}$$

De plus, on suppose que, pour tout $\xi' \neq 0$, on a:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\xi')] > \lambda_{m-p}[\mathrm{a}(\xi')]. \tag{6}$$

Alors il existe $\xi' \neq 0$ tel que $c = \mathrm{a}(\xi')$ vérifie:

$$\lambda_1(c) > \lambda_2(c) = ... = \lambda_{m-p}(c) > \lambda_m(c).$$

Remarque 2.2.5 *Posant $q = m - p$, soit $p = m - q$, l'hypothèse (5) se traduit aussi par:*

$$m > (q^2 - 3q + 4)/2.$$

En effet:

$$(5) \Leftrightarrow m(m+1)/2 - (m-q+1)(m-q+2)/2 - 1 > m(m-m+q-2)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - m^2 + mq - 2m + qm - q^2 + 2q - m + q - 2 - 2 > 2mq - 4m$$

$$\Leftrightarrow 2m - q^2 + 3q - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow m > (q^2 - 3q + 4)/2.$$

Cette hypothèse est toujours vérifiée lorsque $m = 3$, 4 ou 5:
si $m = 3$:

$$3 > (q^2 - 3q + 4)/2 \Leftrightarrow 2 > q^2 - 3q \Leftrightarrow q^2 - 3q - 2 < 0$$

et

$$\Delta = 17 \Rightarrow q < (3 + \sqrt{17})/2 \approx 3,6,$$

donc

$$3 > (q^2 - 3q + 4)/2 \Leftrightarrow q \leq 3;$$

or $q \leq 2$ d'après l'hypothèse (4), donc l'hypothèse (5) n'apporte rien de plus à l'hypothèse (4), cette dernière est donc optimale (c'est-à-dire qu'elle entraîne l'hypothèse (5)).

si $m = 4$:

$$4 > (q^2 - 3q + 4)/2 \Leftrightarrow 4 > q^2 - 3q \Leftrightarrow q^2 - 3q - 4 < 0$$

et

$$\Delta = 25 \Rightarrow q < 4,$$

donc

$$4 > (q^2 - 3q + 4)/2 \Leftrightarrow q \leq 3;$$

or on a déjà $q \leq 3$ d'après l'hypothèse (4), donc celle-ci est encore une fois optimale.

si $m = 5$:

$$5 > (q^2 - 3q + 4)/2 \Leftrightarrow q^2 - 3q - 6 < 0$$

et

$$\Delta = 33 \Rightarrow q < (3 + \sqrt{33})/2 \approx 4,4,$$

donc

$$5 > (q^2 - 3q + 4)/2 \Leftrightarrow q \leq 4;$$

or $q \leq 4$ d'après l'hypothèse (4) et, comme précédemment, l'hypothèse (4) est optimale.

Mais cette hypothèse (5) s'avère nécessaire dès que $m > 5$, en effet:

$$m > (q^2 - 3q + 4)/2 \Rightarrow q^2 - 3q + 4 - 2m < 0$$

et

$$\Delta = 9 - 4(4 - 2m) = 8m - 7 > 0$$

car $m \geq 1$. q doit donc être tel que:

$$(3 - \sqrt{8m - 7})/2 < q < (3 + \sqrt{8m - 7})/2.$$

$$m > 1 \Rightarrow (3 - \sqrt{8m - 7})/2 < 1,$$

donc la condition $(3 - \sqrt{8m - 7})/2 \leq 2$ est toujours réalisée (ainsi, la condition $p \leq m - 2$ est aussi réalisée).
Si maintenant nous prenons par exemple $p = 1$, soit $q = m - 1$, nous pouvons déterminer la condition à satisfaire sur m pour que l'hypothèse (4) soit optimale:

$$m - 1 < (3 + \sqrt{8m - 7})/2 \Leftrightarrow 2m - 5 < \sqrt{8m - 7}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 20m + 25 + 7 - 8m < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 8 < 0,$$

$$\delta = 17 \Rightarrow m < (7 + \sqrt{17})/2 \approx 5,6,$$

donc

$$m > ((m - 1)^2 - 3(m - 1) + 4)/2 \Rightarrow m \leq 5.$$

Preuve du lemme.
Comme au début du lemme 2.2.1, il existe une matrice $b = \mathrm{a}(\eta')$ telle que:

$$\lambda_1(b) = ... = \lambda_{m-p-1}(b) = 1 > \lambda_{m-p}(b) \geq \lambda_{m-p+1}(b) \geq ... \geq \lambda_m(b).$$

Les matrices $(\mathrm{a}^i_j(\xi'))$ forment un epace vectoriel de dimension supérieure ou égale à $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2$ lorsque ξ' décrit E; prenons b comme élément d'une base de cet espace; dans une telle base, on a:

$$\mathrm{a}(\xi') = \psi b + \Phi(\xi''),$$

où la dimension réduite de Φ est supérieure ou égale à:

$$m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2-1.$$

Montrons d'abord qu'il existe une matrice $c = \Phi(\xi'') \neq 0$ telle que:

$$cX_i = 0,\ 2 \leq i \leq m-p-1, \tag{7}$$

avec les notations du début de ce paragraphe, cette condition (7) exprime que l'on a un système linéaire de $m(m-p-2)$ équations à au moins $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2-1$ inconnues scalaires puisque la dimension réduite de Φ est supérieure ou égale à $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2-1$. Plus précisément, comme $(\Phi^i_j(\xi''))$ est diagonalisable, on peut encore utiliser la proposition 1.0.10: les Φ^i_j, $i<j$ appartiennent au sous-espace engendré par les Φ^i_j, $i \geq j$. On a, par exemple:

$$\Phi(\xi'') = \begin{pmatrix} \psi_1(\xi'') & \Phi^1_2(\xi'') & \cdots & \Phi^1_{m-2}(\xi'') & \Phi^1_{m-1}(\xi'') & \Phi^1_m(\xi'') \\ \Phi^2_1 & \psi_2(\xi'') & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \psi_{m-2}(\xi'') & & \\ \vdots & & & \ddots & \psi_{m-1}(\xi'') & \\ \Phi^m_1 & \Phi^m_2 & \cdots & \Phi^m_{m-2} & \Phi^m_{m-1} & \psi_m(\xi'') \end{pmatrix},$$

avec: $\xi'' = (..,\xi^i_j,..)$, $i>j$; et (7) est un système linéaire de $m(m-p-2)$ équations constituées des éléments de $\Phi(\xi'')$ appartenant aux colonnes $j = 2,...,m-p-1$, et s'annulant. On peut montrer que le rang de ce système est, au mieux, inférieur ou égal à $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2-1$; pour cela, nous compartimentons la matrice $\Phi(\xi'')$ de la façon suivante:

$$\Phi(\xi'') = \begin{pmatrix} \psi_1(\xi'') & \Phi^1_2(\xi'') & \cdots & \Phi^1_{m-p-1} & & & & \\ \Phi^2_1 & \ddots & T & \vdots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Phi^{m-p-2}_{m-p-1} & & & & \\ \vdots & & \ddots & \psi_{m-p-1}(\xi'') & & & * & \\ \vdots & \mathcal{J}_1 & & \Phi^{m-p}_{m-p-1} & \psi_{m-p}(\xi'') & & & \\ \vdots & & & \vdots & \Phi^{m-p+1}_{m-p} & \ddots & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \mathcal{J}_2 & \ddots & \\ \Phi^m_1 & \cdots & \cdots & \Phi^m_{m-p-1} & \Phi^m_{m-p} & \cdots & \Phi^m_{m-1} & \psi_m(\xi'') \end{pmatrix},$$

avec:

$$T = \{\Phi_j^i / 1 \leq i < j \leq m - p - 1\},$$

$$\mathcal{J}_1 = \{\Phi_j^i / 1 \leq j \leq i \leq m \text{ et } j \leq m - p - 1\},$$

$$\mathcal{J}_2 = \{\Phi_j^i / m - p \leq j \leq i \leq m\}.$$

Posons:

$$\Phi_j^i(\xi'') = 0 \text{ pour tout } \Phi_j^i \in \mathcal{J}_1;$$

on obtient la matrice:

$$\Phi(\xi'') = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_2^1(\xi'') & \cdots & \Phi_{m-p-1}^1 & & & & \\ 0 & \ddots & T & \vdots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \Phi_{m-p-1}^{m-p-2} & & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & * & \\ \vdots & \mathcal{J}_1 & & 0 & \psi_{m-p}(\xi'') & & & \\ \vdots & & & \vdots & \Phi_{m-p}^{m-p+1} & \ddots & & \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \mathcal{J}_2 & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Phi_{m-p}^m & \cdots & \Phi_{m-1}^m & \psi_m(\xi'') \end{pmatrix}.$$

$\xi_0 = 0$ est valeur propre de multiplicité $m-p-1$ de $\Phi(\xi'')$ (mais aussi de $a(\xi')$ en prenant $\psi = 0$), et ne peut être de multiplicité $m-p$ d'après l'hypothèse (6). Alors on montre, comme dans le lemme 2.2.1, que $\Phi_q^\mu(\xi'') = 0$ pour tout Φ_q^μ appartenant à T, c'est-à-dire que les éléments de T ne dépendent que des éléments du trapèze $\mathcal{J}_1$. Ils peuvent en particulier dépendre aussi des éléments de la première colonne de $\Phi(\xi'')$. Donc, puisque le nombre d'éléments de $\mathcal{J}_1$ appartenant à une base est inférieur ou égal à $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2-1$, le rang du système (7) est aussi inférieur ou égal à $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2-1$, d'où la nécessité de l'hypothèse (5); rappelons-la:

$$m(m-p-2) < m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - 1.$$

Alors le rang du système (7) est inférieur ou égal à:

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - 2,$$

le nombre d'inconnues de ce système est supérieur ou égal à:

$$m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - 1.$$

Ce système admet donc une solution non nulle, d'où l'existence de la matrice $c \neq 0$.

Le système (7) implique que 0 est valeur propre de c de multiplicité $m-p-2$ au moins. En remplaçant éventuellement c par $-c$, on peut supposer $\lambda_1(c) > 0$; alors pour un certain i tel que $1 < i \leq m$, on a:

$$\lambda_1(c) \geq ... > \lambda_i(c) = 0 = ...\lambda_{i+m-p-3} \geq ... \geq \lambda_m(c).$$

Si $\lambda_2(c) = ... = \lambda_{m-p}(c) = 0$, comme $\lambda_1(c) > \lambda_{m-p}(c)$ par hypothèse, on a:

$$\lambda_1(c) > \lambda_2(c) = ... = \lambda_{m-p}(c) > \lambda_m(c).$$

Le lemme est donc démontré dans ce cas.

Sinon, en remplaçant éventuellement c par $-c$, on a pour un certain $i > 2$

$$\lambda_1(c) \geq \lambda_2(c) \geq ... > \lambda_i(c) = 0 = ...\lambda_{i+m-p-3} \geq ... \geq \lambda_m(c).$$

Posons: $c(\alpha) = b + \alpha c$, on a:

$$c(\alpha)X_i = X_i = \lambda_1(b)X_i, \; 2 \leq i \leq m-p-1.$$

$\lambda_1(b) = 1$ est donc valeur propre de $c(\alpha)$ d'ordre $m-p-2$ pour tout α.
Si α est assez voisin de 0, par continuité des valeurs propres de $c(\alpha)$ en α, les valeurs propres de $c(\alpha)$ sont assez proches de celles de b; plus précisément $\lambda_{m-p}[c(\alpha)]$, $\lambda_{m-p+1}[c(\alpha)]$,..., $\lambda_m[c(\alpha)]$ sont respectivement voisines de $\lambda_{m-p}(b)$, $\lambda_{m-p+1}(b)$,..., $\lambda_m(b)$ (même démonstration que dans le lemme 2.2.1), qui sont elles-mêmes strictement inférieures à 1, et on a:

$$\lambda_m[c(\alpha)] \leq ... \leq \lambda_{m-p}[c(\alpha)] < 1.$$

Si α tend vers l'infini, $\lambda_1[c(\alpha)]$ et $\lambda_2[c(\alpha)]$ tendent vers l'infini, toujours par continuité des valeurs propres $\lambda[c(\alpha)]$ (rappelons que lorsque α est suffisamment grand, $\lambda[c(\alpha)] = \alpha\lambda(c) + 0(1)$); donc pour α assez grand:

$$\lambda_1[c(\alpha)] \geq \lambda_2[c(\alpha)] > \lambda_1(b) = 1,$$

et il existe au moins un $\alpha > 0$ tel que $\lambda_{m-p}[c(\alpha)] = 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires.
Soit $\gamma > 0$ le plus petit des $\alpha > 0$ tels que $\lambda_{m-p}[c(\alpha)] = 1$; il est impossible que l'on ait:

$$\lambda_2[c(\gamma)] > \lambda_{m-p}[c(\gamma)];$$

en effet, sinon il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda_2[c(\gamma - \varepsilon)] > 1$ (par continuité de $\alpha \mapsto \lambda[c(\alpha)]$).
On raisonne par l'absurde: supposons que $\lambda_2[c(\gamma)] > 1$; posons

$$A = \{\alpha / \lambda_2[c(\alpha)] > 1\}.$$

A est un ouvert, comme image réciproque de l'ouvert $]1;+\infty[$ par l'application continue $\alpha \mapsto \lambda_2[c(\alpha)]$; A est non vide car il contient γ. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $[\gamma-\varepsilon, \gamma[\subset A$, c'est-à-dire tel que:

$$\lambda_2[c(\alpha)] > 1 \text{ pour tout } \alpha \in [\gamma-\varepsilon, \gamma[.$$

Comme γ est la plus petite valeur α telle que $\lambda_{m-p}[c(\alpha)] = 1$, et que $\lambda_{m-p}[c(\alpha)] < 1$ pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, alors sur l'intervalle $[\gamma-\varepsilon, \gamma[$ non vide, on a:

$$\lambda_{m-p}[c(\alpha)] < 1 \text{ et } \lambda_2[c(\alpha)] > 1;$$

1 est donc valeur propre de multiplicité au plus égale à $m-p-3$ pour ces valeurs de α, ce qui contredit le fait que 1 est valeur propre de $c(\alpha)$ de multiplicité au moins égale à $m-p-2$ pour tout $\alpha \in I\!R$.

Finalement, γ est bien telle que:

$$\lambda_2[c(\gamma)] = \lambda_{m-p}[c(\gamma)], \text{ soit:}$$

$$\lambda_1[c(\gamma)] > \lambda_2[c(\gamma)] = 1 = ... = \lambda_{m-p}[c(\gamma)] > \lambda_m[c(\gamma)].$$

Le lemme 2.2.4 est donc démontré dans tous les cas.

Preuve du théorème 2.1.1.

a(ξ') est de dimension réduite supérieure ou égale à $m(m+1)/2-(p+1)(p+2)/2$. Supposons qu'il n'existe pas de ξ' pour lequel a(ξ') ait une valeur propre de multiplicité $m-p$, soit que:

$$\forall \xi' \neq 0,\ \lambda_1[\mathrm{a}(\xi')] > \lambda_{m-p}[\mathrm{a}(\xi')].$$

Soit c la matrice obtenue au lemme 2.2.4, alors $\lambda_2(c) = ... = \lambda_{m-p}(c)$ est valeur propre de multiplicité $m-p-1$; compte tenu de l'hypothèse de diagonalisabilité, il existe $m-p-1$ vecteurs propres linéairement indépendants Y_i, $1 \leq i \leq m-p-1$, correspondant à la valeur propre de multiplicité $m-p-1$:

$$cY_i = \lambda_2(c)Y_i,\ 1 \leq i \leq m-p-1.$$

D'autre part, d'après le lemme 2.2.2, il existe une matrice $c_1 = \mathrm{a}(\underline{\xi}') \neq 0$ et un scalaire $\underline{\lambda}$ tels que:

$$c_1 Y_i = \underline{\lambda} Y_i,\ 1 \leq i \leq m-p-1,$$

avec:

$$\underline{\lambda} = \lambda_1(c_1) = ... = \lambda_{m-p-1}(c_1) > \lambda_{m-p}(c_1) \geq ... > \lambda_m(c_1);$$

d'après ce même lemme, on sait que toute autre solution $(c_1', \underline{\lambda}')$ de ce système est de la forme:

$$c_1' = \mu c_1, \ \underline{\lambda}' = \mu \underline{\lambda}, \ \mu \neq 0.$$

On a donc:

$$c = \mu c_1, \ \mu \neq 0.$$

c a alors une valeur propre de multiplicité $m - p$, ce qui est en contradiction avec ce que l'on a supposé au début, et le résultat principal du théorème est démontré.

Montrons finalement que la borne inférieure de d, $m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 + 1$, est la meilleure possible.
Considérons la matrice symétrique $m \times m$, $\mathrm{a}(\xi') = (\mathrm{a}^i_j(\xi'))$ telle que pour tout ξ':

$$(*) \qquad \mathrm{a}^i_j(\xi') = 0, \quad 1 \leq i, j \leq p+1,$$

$$(**) \qquad \sum_{i=p+2}^{m} \mathrm{a}^i_i(\xi') = 0.$$

Il est clair que la dimension réduite d' de cette matrice est $m(m+1)/2 - (p+1)(p+2)/2 - 1$ (la condition $(**)$ étant celle qui abaisse de un rang la borne inférieure de la dimension d' du théorème 2.0.16).
Nous affirmons qu'il n'existe pas de ξ' tel que:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\xi')] = \lambda_{m-p}[\mathrm{a}(\xi')].$$

Démontrons-le par l'absurde. Supposons qu'il existe un tel η'. Comme $tr\,[\mathrm{a}(\eta')] = 0$, d'après la condition $(**)$, et $\mathrm{a} \neq 0$ on doit alors avoir:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\eta')] > 0.$$

On considère la matrice

$$b = \lambda_1[\mathrm{a}(\eta')]I - \mathrm{a}(\eta').$$

L'hypothèse $\lambda_1[\mathrm{a}(\eta')] = \lambda_{m-p}[\mathrm{a}(\eta')]$ implique que le rang de b ne peut excéder p; en effet il existe une matrice orthogonale T telle que:

$$T^t b T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \lambda_{m-p+1}[\mathrm{a}(\eta')] & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & & 0 & \lambda_m[\mathrm{a}(\eta')] \end{pmatrix}$$

D'après la condition $(**)$, nous déduisons que le mineur principal de la matrice b:

$$L\begin{pmatrix} 1 & \cdots & p+1 \\ 1 & \cdots & p+1 \end{pmatrix} = \lambda_1[\mathrm{a}(\eta')]^{p+1} \neq 0.$$

Donc le rang de b est au moins égal à $p+1$. De cette contradiction découle la non existence de η' tel que:

$$\lambda_1[\mathrm{a}(\eta')] = \lambda_{m-p}[\mathrm{a}(\eta')].$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.1.1.

Chapitre 3

Symétrie des opérateurs fortement hyperboliques 4×4 ayant un point triple caractéristique dans $I\!R^3$

__Annexe__**:**
Théorème de Puiseux
Soit $m \in \mathbb{N}$, $Q(t,s) = t^m q_m(s) + ... + q_0(s), t, s \in \mathbb{C}$, *où les* $q_j(s)$ *sont des séries convergentes au voisinage de 0 et* $q_m(s) \not\equiv 0$. *Alors il existe un voisinage épointé de 0 (privé de* 0*; on peut le prendre de la forme* $0 < |s| < \delta$*), et des fonctions analytiques* $(u_j(s))$ *(multiformes) dans ce voisinage, telles que:*

$$Q(t,s) = q_m(s) \prod_{j=1}^{j=m} (t - u_j(s)),$$

avec, pour chaque j:
ou bien :

$$u_j(s) \equiv 0$$

ou bien:

$$u_j(s) = as^b(1 + o(s)) \text{ si } s \text{ tend vers } 0, \ a \in \mathbb{C}, \ b \in \mathbb{Q},$$

$b = k/p$, *p est un entier* > 0, k/p *est irréductible ;* $s^b = (s^{1/p})^k$ *et on a choisi une détermination de* $s^{1/p}$*, que l'on suit lorsque s tend vers 0.*

Remarque: *Le théorème s'étend bien sûr aux séries de Laurent et aux fonctions méromorphes.*

Au préalable, il est intéressant d'introduire des résultats connus pour des opérateurs fortement hyperboliques 2×2 et 3×3.

3.1 Résultats de Strang et Oshime

3.1.1 Symétrie des opérateurs 2×2 dans $\mathbb{R}^3$

Ici E est un espace vectoriel réel de dimension 3; F est un espace vectoriel réel de dimension 2. a est une application linéaire de E dans l'espace des applications linéaires de F dans F.
N est un vecteur non caractéristique, c'est-à-dire tel que: $\det a(N) \neq 0$; on remplacera a par $a^{\#} = a^{-1}(N)a$, de sorte que $a^{\#}(N) = I$, application linéaire identité de F dans F; on notera plus simplement $a^{\#} = a$.
On choisit une base de E de premier vecteur N; $\xi \in E$ a les coordonnées:

$$(\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \xi_2).$$

$$a(\xi) = \xi_0 I + \mathrm{a}_1\xi_1 + \mathrm{a}_2\xi_2 = \xi_0 I + \mathrm{a}(\xi'),$$

où a_1 et a_2 sont des applications linéaires de F dans F.

Théorème 3.1.1 *a est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible T telle que $T^{-1}a(\xi)T$ soit symétrique quel que soit ξ (on dit alors qu'elle est présymétrique).*

Preuve.
La présymétrie entraîne évidemment la diagonalisabilité.

Supposons maintenant a diagonalisable.
Si pour tout ξ', $\mathrm{a}(\xi')$ a une valeur propre double, alors on a:

$$a(\xi) = \phi(\xi)I$$

et c'est fini.

Supposons donc qu'il existe un $\xi' \neq 0$ tel que $\mathrm{a}(\xi')$ ait deux valeurs propres simples; comme $\mathrm{a}(\xi')$ est diagonalisable, on a alors pour une base convenable de E:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= I\xi_0 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & \rho \end{pmatrix}\xi_2 \\ &= \begin{pmatrix} \xi_0 + \xi_1 & \beta_1\xi_2 \\ \beta_2\xi_2 & \xi_0 + \rho\xi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned} \det a(\xi) &= (\xi_0 + \xi_1)(\xi_0 + \rho\xi_2) - \beta_1\beta_2\xi_2^2 \\ &= \xi_0^2 + \xi_0(\xi_1 + \rho\xi_2) + \rho\xi_1\xi_2 - \beta_1\beta_2\xi_2^2, \end{aligned}$$

son discriminant est:

$$\Delta = (\xi_1 - \rho\xi_2)^2 + 4\beta_1\beta_2\xi_2^2;$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow \beta_1\beta_2 \geq 0.$$

Si $\beta_1\beta_2 > 0$, on pose:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\beta_1/\beta_2} \end{pmatrix}$$

et on a:

$$T^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1 & \beta_1\xi_2 \\ \beta_2\xi_2 & \rho\xi_2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} \xi_1 & \sqrt{\beta_1\beta_2}\xi_2 \\ \sqrt{\beta_1\beta_2}\xi_2 & \rho\xi_2 \end{pmatrix}$$

alors a est bien présymétrique.

Si $\beta_1 = 0$, par l'hypothèse de diagonalisabilité, on déduit que $\beta_2 = 0$; a est donc présymétrique.

Si $\beta_2 = 0$, de la même façon que précédemment, on déduit que $\beta_1 = 0$; a est donc aussi présymétrique.

3.1.2 Symétrie des opérateurs 3×3 ayant un point multiple dans $\mathbb{R}^3$

Ici E est un espace vectoriel réel de dimension 3; F est un espace vectoriel réel de dimension 3. a est une application linéaire de E dans l'espace des applications linéaires de F dans F.
N est un vecteur non caractéristique, c'est-à-dire tel que: $\det a(N) \neq 0$; on remplacera a par $a^{\#} = a^{-1}(N)a$, de sorte que $a^{\#}(N) = I$, application linéaire identité de F dans F; on notera plus simplement $a^{\#} = a$.
On choisit une base de E de premier vecteur N; $\xi \in E$ a les coordonnées:

$$(\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, \xi_2).$$

$$a(\xi) = \xi_0 I + \mathrm{a}_1\xi_1 + \mathrm{a}_2\xi_2 = \xi_0 I + \mathrm{a}(\xi'),$$

où a_1 et a_2 sont des applications linéaires de F dans F.

Si on choisit une base de F, on a aussi:

$$a^i_j(\xi) = \xi_0 I^i_j + \sum_{1\leq k\leq 2} \mathrm{a}^i_{jk}\xi_k = \xi_0 I^i_j + \mathrm{a}^i_j(\xi').$$

Si pour tout ξ', $\mathrm{a}(\xi')$ a une valeur propre triple, alors:

$$a(\xi) = \phi(\xi)I$$

et $a(\xi)$ est évidemment présymétrique.

On suppose donc qu'il existe $\underline{\xi}' \neq 0$ tel que $\mathrm{a}(\underline{\xi}')$ ait une valeur propre double non triple; comme $\mathrm{a}(\underline{\xi}')$ est diagonalisable, alors pour une base convenable de F, $Matr_F\, \mathrm{a}(\underline{\xi}')$ est diagonale et on la choisit comme élément de base de l'espace des matrices $(\mathrm{a}^i_j(\xi'))$; alors par un changement de base de E conservant N comme premier vecteur de base, on a:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2, \text{ avec } b^1_1 = 0.$$

Nous transformons maintenant b par une similitude de matrice:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & U & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

où U est une matrice inversible 2×2. Ce type de similitude laisse la matrice coefficient de ξ_1 invariante et transforme la deuxième sous-matrice diagonale 2×2 de b en une des formes canoniques réelles suivantes:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Par un changement de base de E conservant N, on peut écrire b sous l'une des formes réduites réelles suivantes:

$$I \qquad \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$II \qquad \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & 1 & 0 \\ b_4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$III \qquad \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 & 1 \\ b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$IV \qquad \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 & 1 \\ b_4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.1.2 *Les opérateurs de la forme:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2$$

où b a une forme réduite du cas I, sont diagonalisables si et seulement si:

$$(b_1 b_3 + b_2 b_4 > 0 \text{ ou } b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0).$$

Preuve.

Il suffit de trouver à quelle condition $\mathrm{a}(\xi_1, 1)$ est diagonalisable pour tout $\xi_1 \in I\!R$.

Pour $\xi_2 = 1$,l'équation caractéristique de $\mathrm{a}(\xi')$ est:

$$\det(-\lambda I + \mathrm{a}(\xi')) = 0,$$

soit:

$$-\lambda(\lambda^2 - \xi\lambda - b_1 b_2 - b_3 b_4) = 0.$$

Le $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ est trivial, nous pouvons le laisser de côté.

Nous considérons alors trois cas (supposant toujours $\xi_2 = 1$):
$b_1 b_2 + b_3 b_4 > 0$, $b_1 b_2 + b_3 b_4 = 0$, $b_1 b_2 + b_3 b_4 < 0$.

Si $b_1 b_2 + b_3 b_4 > 0$, l'équation caractéristique a trois racines réelles distinctes (nulle, positive, négative) pour tout $\xi_1 \in I\!R$, et a est donc diagonalisable.

Si $b_1 b_2 + b_3 b_4 < 0$, l'équation caractéristique a deux racines non réelles pour $\xi_1 = 0$; donc a n'est pas diagonalisable.

Si $b_1 b_2 + b_3 b_4 = 0$, pour $\xi_1 = 0$, l'équation caractéristique a 0 pour racine triple mais $\mathrm{a}(0, 1)$ n'est pas semblable à la matrice nulle; donc a n'est pas diagonalisable.

Proposition 3.1.3 *Supposons l'opérateur:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2$$

(où $b \neq 0$ a une forme réduite du cas I) diagonalisable.
Alors a est présymétrique, c'est-à-dire qu'il existe une matrice réelle inversible T telle que:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^{-1} b T = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où α est une constante réelle.

Preuve.

D'après la proposition précédente, nous avons:

$$b_1b_3 + b_2b_4 > 0.$$

Posant:

$$\alpha = \sqrt{b_1b_3 + b_2b_4} \text{ et}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3/\alpha & -b_2/\alpha \\ 0 & b_4/\alpha & b_1/\alpha \end{pmatrix},$$

on a évidemment:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

puis:

$$T^{-1}bT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1/\alpha & b_2/\alpha \\ 0 & -b_4/\alpha & b_3/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3/\alpha & -b_2/\alpha \\ 0 & b_4/\alpha & b_1/\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3/\alpha & -b_2/\alpha \\ 0 & b_4/\alpha & b_1/\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.1.4 *Les opérateurs de la forme:*

$$(a_j^i(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2$$

où b a une forme réduite du cas II, sont diagonalisables si et seulement si:

$$sgn\, b_1 = sgn\, b_3 \text{ et } sgn\, b_2 = sgn\, b_4.$$

($sgn\, b_1 = sgn\, b_3$ signifie: $b_1b_3 > 0$ ou $b_1 = b_3 = 0$).

Preuve.

Il suffit de trouver à quelle condition $\mathrm{a}(\xi_1, 1)$ est diagonalisable pour tout $\xi_1 \in I\!\!R$.

Pour ξ_2, l'équation caractéristique de $\mathrm{a}(\xi_1, 1)$ est:

$$\det(-\lambda I + \mathrm{a}(\xi_1, 1)) = 0$$

soit:

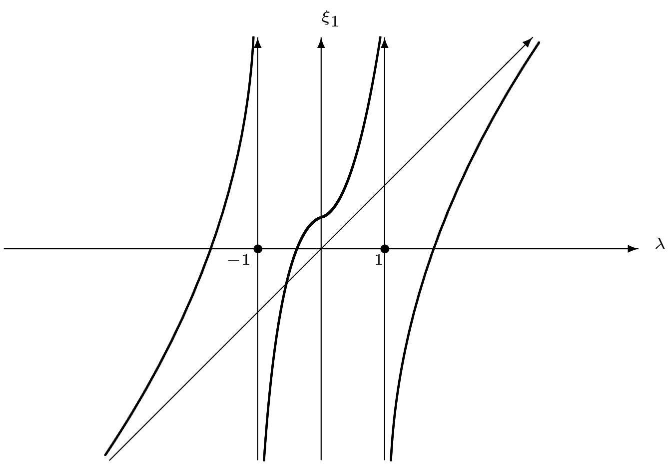
$$(\xi_1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) + b_1 b_3(\lambda + 1) + b_2 b_4(\lambda - 1) = 0.$$

D'abord nous considérons le cas où $b_1 b_3 \neq 0$ et $b_2 b_4 \neq 0$.
Dans ce cas, 1, -1 ne sont jamais racines de l'équation caractéristique et on a:

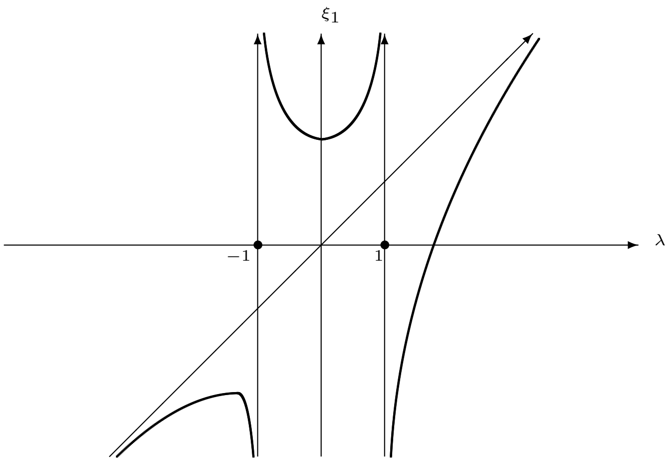
$$\xi_1 = \lambda - b_1 b_3/(\lambda - 1) - b_2 b_4/(\lambda + 1).$$

Traçons le graphe de $\xi_1(\lambda)$. Remarquons que l'équation caractéristique a au plus trois racines réelles (comptant leurs multiplicités) pour chaque ξ_1 fixé.
Si $b_1 b_3 > 0$ et $b_2 b_4 > 0$, alors la figure (a) nous montre que pour tout $\xi_1 \in I\!R$, a$(\xi_1, 1)$ a trois valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable.
Si $b_1 b_3 < 0$ ou $b_2 b_4 < 0$, alors la figure (d) nous montre que, pour certaines valeurs de $\xi_1 \in I\!R$, a$(\xi_1, 1)$ a une seule valeur propre réelle et deux valeurs propres non réelles.
Ainsi, la proposition est prouvée lorsque l'on a en même temps $b_1 b_3 \neq 0$ et $b_2 b_4 \neq 0$.

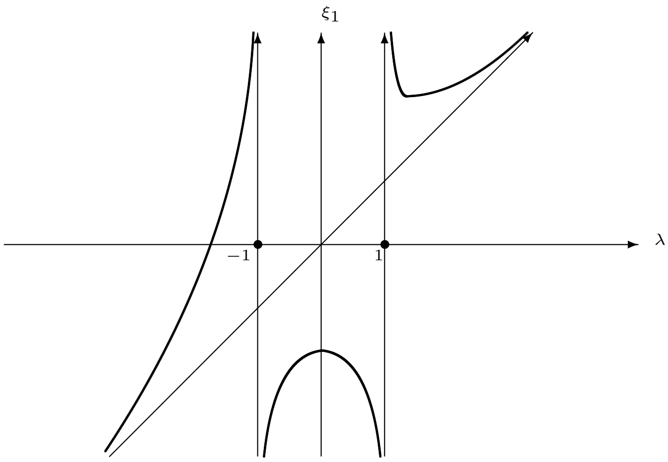
Chacun des deux cas restants est beaucoup plus simple car l'équation caractéristique a toujours 1 ou -1 pour racine lorsque $b_1 b_3 = 0$ ou $b_2 b_4 = 0$ respectivement. Cette racine est de multiplicité 2 quand $\xi_1 = -b_2 b_4/(2+1)$ (respectivement $\xi_1 = b_1 b_3/(2-1)$) et l'espace propre associé est de dimension 2 si $b_1 = b_3 = 0$ (respectivement $b_2 = b_4 = 0$) et de dimension 1 si $b_1 \neq 0$ ou $b_3 \neq 0$ (respectivement $b_2 \neq 0$ ou $b_4 \neq 0$).
Si $b_1 b_3$ ou $b_2 b_4$ est nul et l'autre négatif, alors l'équation caractéristique a une seule racine réelle et deux racines non réelles pour certaines valeurs de $\xi_1 \in I\!R$; et ceci complète la preuve de la proposition.



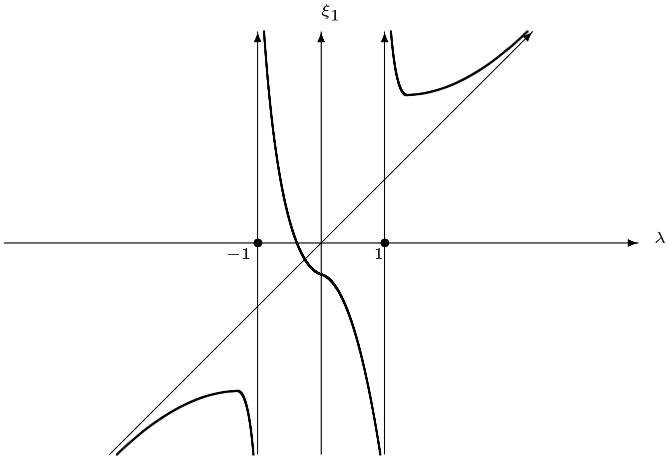
(a) $b_1 b_3 > 0, b_2 b_4 > 0$



$(b)\ b_1b_3>0, b_2b_4<0$



$(c)\ b_1b_3<0, b_2b_4>0$



$(d)\ b_1b_3<0, b_2b_4<0$

Proposition 3.1.5 *Supposons l'opérateur:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2$$

(où $b \neq 0$ a une forme réduite du cas II) diagonalisable.
Alors a est présymétrique, c'est-à-dire qu'il existe une matrice réelle inversible T telle que:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ T^{-1}bT = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où α et β sont des constantes réelles.

Preuve.

D'après la proposition 3.1.4, nous avons:

$$sgn\, b_1 = sgn\, b_3 \text{ et } sgn\, b_2 = sgn\, b_4.$$

Posant:

$$\alpha = \sqrt{b_1 b_3}, \ \beta = \sqrt{b_2 b_4},$$

$$u \begin{cases} = \alpha / b_1 & \text{si } b_1 b_3 > 0, \\ = 1 & \text{si } b_1 = b_3 = 0, \end{cases}$$

$$v \begin{cases} = \beta / b_2 & \text{si } b_2 b_4 > 0, \\ = 1 & \text{si } b_2 = b_4 = 0, \end{cases}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix},$$

nous avons le résultat souhaité.

Proposition 3.1.6 *Les opérateurs de la forme:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2$$

où b a une forme réduite du cas III ($b \neq 0$), sont diagonalisables si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée:

$$1) \ b_1 b_3 > 0 \ \textit{et} \ b_4 = 0.$$

$$2) \ b_2 b_4 > 0 \ \textit{et} \ b_1 = 0.$$

Preuve.

Il suffit de trouver à quelle condition $\mathrm{a}(\xi_1, 1)$ est diagonalisable pour tout $\xi_1 \in I\!R$.

Pour $\xi_2 = 1$, l'équation caractéristique de $\mathrm{a}(\xi')$ est:

$$\det(-\lambda I + \mathrm{a}_1\xi_1 + \mathrm{a}_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2(\xi_1 - \lambda) + (b_1b_3 + b_2b_4)\lambda + b_1b_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - \xi_1\lambda^2 - (b_1b_3 + b_2b_4)\lambda - b_1b_4 = 0.$$

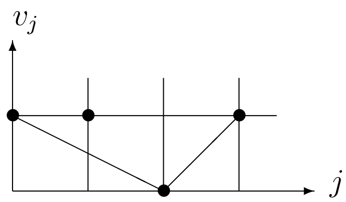
Divisons l'équation par ξ_1 et posons

$$\varepsilon = 1/\xi_1;$$

on a:

$$\varepsilon\lambda^3 - \lambda^2 - (b_1b_3 + b_2b_4)\varepsilon\lambda - b_1b_4\varepsilon = 0.$$

Supposons $b_1b_4 \neq 0$.
Construisons le diagramme de Newton:



Lorsque ε se trouve dans un voisinage de 0, c'est-à-dire lorsque ξ_1 est suffisamment grand, considérant la première droite d'appuie, nous avons deux racines de la forme:

$$\lambda = u/\sqrt{\xi_1}(1 + o(1/\xi_1))$$

où u est racine de:

$$b_1b_4 - u^2 = 0.$$

Si $b_1b_4 > 0$, alors $u = \pm\sqrt{b_1b_4}$ et lorsque ξ_1 tend vers $-\infty$, on a des racines de la forme:

$$\lambda = \pm i\sqrt{b_1b_4/|\xi_1|}(1 + o(1/\xi_1));$$

il existe donc des racines non réelles et a$(\xi_1, 1)$ n'est pas diagonalisable, donc a non plus.

Si $b_1 b_4 < 0$, alors $u = \pm i\sqrt{|b_1 b_4|}$ et lorsque ξ_1 tend vers $+\infty$, on a:

$$\lambda = \pm i\sqrt{|b_1 b_4|/\xi_1}(1 + o(1/\xi_1));$$

il existe donc des racines non réelles et a n'est pas diagonalisable.

On doit donc avoir nécessairement $b_1 b_4 = 0$ pour que a soit diagonalisable.

Supposons alors $b_1 = 0$.
$\lambda = 0$ est alors racine et les autres vérifient:

$$\lambda^2 - \xi_1 \lambda - b_2 b_4 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = \xi_1^2 + 4b_2 b_4$.
Si $\xi_1 = 0$, $\Delta = 0 \Leftrightarrow b_2 b_4 = 0$; or si $b_2 b_4 = 0$ et $x_1 = 0$, $\lambda = 0$ est racine triple, et comme $b \neq 0$, pour que a$(0, 1)$ soit diagonalisable, il faut que $b_2 b_4 > 0$.
Or quel que soit $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $\Delta > 0$ si et seulement si $b_2 b_4 > 0$; donc si $b_2 b_4 > 0$, quel que soit $\xi_1 \in \mathbb{R}$, l'équation caractéristique a trois racines réelles distinctes donc a$(\xi_1, 1)$ est diagonalisable pour tout $\xi_1 \in \mathbb{R}$ et on conclut que a est bien diagonalisable.

Supposons maintenant $b_4 = 0$.
$\lambda = 0$ est alors racine et les autres vérifient:

$$\lambda^2 - \xi_1 \lambda - b_1 b_3 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = \xi_1^2 + 4b_1 b_3$.
Un raisonnement analogue au précédent nous permet de conclure qu'une condition nécessaire et suffisante pour que a soit diagonalisable est: $b_1 b_3 = 0$, et cela termine la preuve de la proposition.

Proposition 3.1.7 *1) Supposons $b_1 b_3 > 0$ et considérons l'opérateur:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2.$$

Alors, il existe une matrice réelle inversible T telle que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$:

$$T^{-1}(a^i_j(\xi))T = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2.$$

2) Supposons $b_2b_4 > 0$ et considérons l'opérateur:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 \\ b_3 & 0 & 1 \\ b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2.$$

Alors il existe une matrice réelle inversible T telle que, pour tout $\xi \in I\!R^3$:

$$T^{-1}(a^i_j(\xi))T = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xi_2.$$

De plus ces deux opérateurs ne sont pas uniformément diagonalisables.

Preuve.

Commençons par montrer le 1). Posons:

$$\alpha = \sqrt{b_1 b_3},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1/b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & -b_2/b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

nous obtenons:

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le cas 2) se ramène à une transposition du cas 1) car:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 \\ b_3 & 0 & 1 \\ b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_2 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 \\ b_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour finir la preuve, nous avons seulement à montrer que la diagonalisabilité de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2, \ (\xi_1, \xi_2 \in I\!R)$$

n'est pas uniforme. Pour cela, il suffit de calculer ses trois vecteurs propres et de construire une diagonalisateur, puis de montrer que celui-ci et son inverse ne sont pas bornés (pour une norme usuelle). Voir Kasahara-Yamaguti [5] pour les détails.

Proposition 3.1.8 *Les opérateurs de la forme:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2$$

où b a une forme réduite du cas IV, ne sont pas diagonalisables.

Preuve.

Il suffit de prouver que pour ξ_1 suffisamment grand, $\mathrm{a}(\xi_1, 1)$ a des valeurs propres non réelles. L'équation caractéristique de $\mathrm{a}(\xi_1, 1)$ est:

$$\begin{gathered} \det(-\lambda I + \mathrm{a}_1\xi_1 + \mathrm{a}_2) \\ \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)(\xi_1 - \lambda) + (b_1b_3 + b_2b_4)\lambda + b_1b_4 - b_2b_3 = 0 \\ \Leftrightarrow -\lambda^3 + \xi_1\lambda^2 - \lambda + \xi_1 + (b_1b_3 + b_2b_4)\lambda + b_1b_4 - b_2b_3 = 0 \\ \lambda^3 - \xi_1\lambda^2 + (1 - b_1b_3 - b_2b_4)\lambda - b_1b_4 + b_2b_3 - \xi_1 = 0. \end{gathered}$$

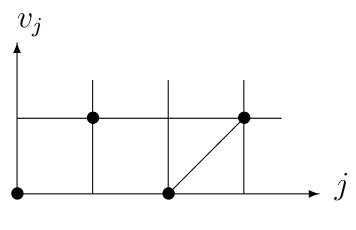
Divisons l'équation par ξ_1 et posons:

$$\varepsilon = 1/\xi_1,$$

alors on a:

$$\varepsilon\lambda^3 - \lambda^2 + (1 - b_1b_3 - b_2b_4)\varepsilon\lambda - (b_1b_4 + b_2b_3)\varepsilon - 1 = 0.$$

Construisons le diagramme de Newton:



Considérant la première droite d'appuie, lorsque ξ_1 est suffisamment grand, nous avons des racines de la forme:

$$\lambda = u(1 + o(1/\xi_1))$$

où u est racine de:

$$1+u^2=0,$$

d'où:

$$\lambda=\pm i(1+o(1/\xi_1));$$

donc pour ξ_1 suffisamment grand, il existe deux racines non réelles (quels que soient les coefficients de b), ceci achève la démonstration.

Combinant les résultats trouvés dans ce paragraphe, nous avons le théorème suivant:

Théorème 3.1.9 *Soit a un opérateur engendré par $(I,\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$, une famille non dégénérée de matrices 3×3; nous avons les affirmations suivantes:*
1) On suppose que a a un point multiple caractéristique et qu'il est uniformément diagonalisable. Alors a est présymétrique.
2) On suppose que a n'est pas uniformément diagonalisable (par conséquent, a doit avoir des valeurs propres multiples). Alors il existe une matrice réelle inversible T telle que, pour tout $\xi\in\mathbb{R}^3$:

$$T^{-1}(a^i_j(\xi))T=\xi_0 I+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xi_1+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xi_2.$$

ou telle que:

$$T^{-1}(a^i_j(\xi))T=\xi_0 I+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xi_1+\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\xi_2.$$

3.2 Cas m = 4

E est un espace vectoriel réel de dimension 3; F est un espace vectoriel réel de dimension 4. a est une application linéaire de E dans l'espace des applications linéaires de F dans F. N est un vecteur non caractéristique, c'est-à-dire tel que: $\det a(N)\neq 0$; on remplacera a par $a^{\#}=a^{-1}(N)a$, de sorte que $a^{\#}(N)=I$, application linéaire identité de F dans F; on notera plus simplement $a^{\#}=a$. On choisit une base de E de premier vecteur N; $\xi\in E$ a les coordonnées:

$$(\xi_0,\xi')=(\xi_0,\xi_1,\xi_2).$$

$$a(\xi)=\xi_0 I+\mathrm{a}_1\xi_1+\mathrm{a}_2\xi_2=\xi_0 I+\mathrm{a}(\xi'),$$

où a_1 et a_2 sont des applications linéaires de F dans F.

Si on choisit une base de F, on a aussi:

$$a_j^i(\xi) = \xi_0 I_j^i + \sum_{1\leq k\leq 2} \mathrm{a}_{jk}^i \xi_k = \xi_0 I_j^i + \mathrm{a}_j^i(\xi').$$

On fait les hypothèses suivantes.

Hypothèse I: *a est uniformément diagonalisable (dans le réel) par rapport à N, c'est-à-dire que:*

i) pour tout ξ, les zéros en τ de $\det(\tau I + a(\xi)) = 0$ sont réels, cela équivaut à dire que:
les zéros en λ de $\det(-\lambda I + \mathrm{a}(\xi')) = 0$ sont réels, c'est-à-dire les valeurs propres de $\mathrm{a}(\xi')$ sont réelles, $\forall \xi'$.

ii) si μ est la multiplicité d'un zéro τ, la dimension du noyau de $\tau I + a(\xi)$ est égale à μ; cela équivaut à dire que la dimension du sous-espace propre de $\mathrm{a}(\xi')$ relatif au zéro λ est égale à sa multiplicité.
Un diagonalisateur de $\mathrm{a}(\xi')$ est noté $\Delta(\xi')$: $\Delta^{-1}(\xi')\mathrm{a}(\xi')\Delta(\xi')$ est diagonale.

iii) la diagonalisation est uniforme: il existe un diagonalisateur Δ et un $\varepsilon > 0$ tels que:

$$\forall \xi',\ \|\Delta(\xi')\| = 1 \textit{ et } |\det \Delta(\xi')| \geq \varepsilon.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la base E pourvu que le premier vecteur reste N.

Hypothèse II:*La variété caractéristique $\det a(\xi) = 0$ a au moins un point triple différent de 0; autrement dit, il existe $\xi' \neq 0$ tel que $\mathrm{a}(\xi')$ ait une valeur propre triple.*

Définition 3.2.1 *a est présymétrique par rapport à N si et seulement si il existe une base de E de premier vecteur N et une base de F telles que dans ces bases, les matrices $(a_j^i(\xi))$ soient toutes symétriques (pour tout ξ). Autrement dit, si $(a_j^i(\xi))$ est la matrice de $a(\xi)$ dans une base quelconque de F, il existe une matrice inversible réelle T telle que:*

$$T^{-1}(a_j^i(\xi))T = S(\xi),$$

où $S(\xi)$ est symétrique; on a aussi:

$$T^{-1}(\mathrm{a}_j^i(\xi'))T \textit{ est symétrique } \forall \xi'.$$

Il est bien connu que si a est présymétrique par rapport à N, elle est uniformément diagonalisable par rapport à N. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant

Théorème 3.2.2 *Si a satisfait les hypothèses I et II, c'est-à-dire a est uniformément diagonalisable et sa variété caractéristique a un point triple différent de* 0*, alors a est présymétrique par rapport à N.*

Si on remplace ξ par D, il résulte du théorème de Kasahara Yamaguti [5] que l'uniforme diagonalisabilité équivaut à la forte hyperbolicité de $a(D)$; les résultats obtenus se transportent à l'opérateur $a(D)$.

Le résultat précédent annoncé dans [12] est utilisé pour démontrer que si un opérateur matriciel linéaire réel 4×4, $a(D)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension réduite supérieure ou égale à $4(4+1)/2 - 2 = 8$ et est fortement hyperbolique par rapport à N, alors il est présymétrique par rapport à N.

Remarquons d'abord que, si tous les points différents de 0 de $\det a(\xi)$ sont quadruples, $a(\xi)$ est de la forme $\phi(\xi)I$ où ϕ est une forme linéaire et $a(\xi)$ est symétrique.

Supposons donc qu'il existe au moins un point triple différent de 0, non quadruple, c'est-à-dire qu'il existe $\underline{\xi}' \neq 0$ tel que $\det(\xi_0 I + \mathrm{a}(\underline{\xi}')) = 0$ ait une racine triple non quadruple $-\underline{\lambda}$; comme $\mathrm{a}(\underline{\xi}')$ est diagonalisable, on a alors pour une base convenable de F:

$$\mathrm{a}(\underline{\xi}') = \begin{pmatrix} \underline{\xi}' & & & \\ & \underline{\xi} & & 0 \\ 0 & & \underline{\xi} & \\ & & & \underline{\xi} \end{pmatrix} \text{ où } \underline{\xi}' \neq \underline{\xi}.$$

Par un changement de base de E et en prenant cette matrice comme élément de base de l'espace des matrices $(\mathrm{a}^i_j(\xi'))$, on obtient:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} \underline{\xi}' & & & \\ & \underline{\xi} & & 0 \\ 0 & & \underline{\xi} & \\ & & & \underline{\xi} \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2.$$

Par un changement de base de E qui conserve N comme premier vecteur de base, on a aussi, sans changer de notations:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2, \text{ avec } b^1_1 = 0.$$

Notons:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & & & \\ * & & C & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

Par un changement de base de F, on peut écrire C et par suite b sous les formes réduites réelles suivantes:

cas I:

$$(\mathbf{I.1}) \qquad \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & \alpha & 1 & 0 \\ * & 0 & \alpha & 1 \\ * & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{I.2}) \qquad \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & \alpha_1 & \beta & 0 \\ * & -\beta & \alpha_1 & 0 \\ * & 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ où } \beta \neq 0$$

cas II:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & \alpha_1 & 1 & 0 \\ * & 0 & \alpha_1 & 0 \\ * & 0 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

cas III:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & \alpha_1 & 0 & 0 \\ * & 0 & \alpha_2 & 0 \\ * & 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

3.2.1 Lemme

Lemme 3.2.3 *Les opérateurs de la forme:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2$$

où b a une forme réduite du cas I, ne sont pas diagonalisables.

Preuve.

Cas I.1: Par un changement de base de E conservant N ($\xi_0 + \alpha\xi_2 \mapsto \xi'_0, \xi_1 - \alpha\xi_2 \mapsto \xi'_1$), on peut écrire:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 1 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2.$$

En posant $\xi_0 = -\lambda$, l'équation caractéristique de a(ξ_1, ξ_2) s'écrit:

$$\lambda^4 - \xi_1\lambda^3 - \beta\xi_2^2\lambda^2 - \gamma\xi_2^3\lambda - \delta\xi_2^4 = 0,$$

avec:

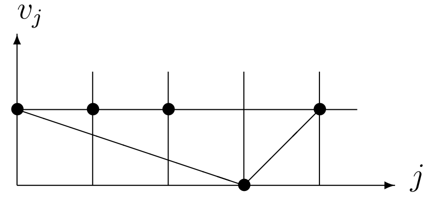
$\beta = b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6$
$\gamma = b_1b_5 + b_2b_6$
$\delta = b_1b_6.$

Posons: $\xi_2 = 1$, $\varepsilon = 1/\xi_1$, $\xi_1 \neq 0$, on a:

$$\varepsilon\lambda^4 - \lambda^3 - \beta\varepsilon\lambda^2 - \gamma\varepsilon\lambda - \varepsilon\delta = 0. \tag{1}$$

i) Supposons $\delta \neq 0$.

En vue d'utiliser l'évaluation des zéros λ lorsque ε tend vers 0 (soit encore lorsque ξ_1 tend vers $+\infty$), obtenue à l'aide du premier terme de la série de Puiseux de $\lambda(\varepsilon)$, on construit le polygone convexe de Newton; pour cela, on considère le diagramme des couples (j, v_j), où j est la puissance de λ et v_j la puissance de ε, j et v_j correspondent à un même monôme. On convient que lorsque pour un couple (j, v_j) donné le monôme correspondant est nul alors $v_j = +\infty$:



L'axe horizontal indique donc les puissances de λ dans (1) rangées par ordre croissant, l'axe vertical indique l'exposant de ε dans les coefficients des puissances de λ dans (1).

On en déduit l'évaluation des trois zéros correspondant à la première face du diagramme:

$$\lambda = (-\delta/\xi_1)^{1/3}(1 + o(1/\xi_1)), \text{ où } \delta \in I\!\!R.$$

Il est aisé d'en déduire que pour ξ_1 grand, il y a au moins un zéro λ non réel. $a(\xi)$ n'est donc pas diagonalisable au sens de la définition.

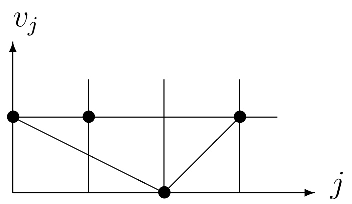
ii) Supposons $\delta = b_1 b_6 = 0$ et $\gamma \neq 0$. On a la racine nulle $\lambda = 0$ et il reste ($\xi_2 = 0$):

$$\lambda^3 - \xi_1\lambda^2 - \beta\lambda - \gamma = 0,$$

soit:

$$\varepsilon\lambda^3 - \lambda^2 - \beta\varepsilon\lambda - \gamma\varepsilon = 0.$$

Le diagramme de Newton est:



Les racines sont :

$$\xi_1(1 + o(1/\xi_1)) \text{ et } \pm i(|\ \gamma/\xi_1\ |)^{1/2}(1 + o(1/\xi_1))$$

si $\gamma > 0$ et ξ_1 tend vers $-\infty$, ou si $\gamma < 0$ et ξ_1 tend vers $+\infty$; on obtient donc au moins un zéro λ non réel pour ξ_1 tendant vers l'infini avec le signe convenable.

iii) Supposons $\delta = b_1 b_6 = 0$ et $\gamma = b_1 b_5 + b_2 b_6 = 0$.
On a la racine nulle double $\xi_0 = 0$ et les autres racines satisfont à:

$$\lambda^2 - \xi_1\lambda - \beta = 0.$$

Pour que toutes les racines soient réelles pour tout ξ_1, il faut et il suffit que: $\beta \geq 0$. On considère donc les sous-cas suivants:

$iii)_1$ Supposons $\beta = b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 > 0$, on a trois cas possibles:
1') $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3b_6 > 0$
1") $b_1 = 0$, $b_6 = 0$, $b_2b_5 > 0$
1"') $b_6 = 0$, $b_5 = 0$, $b_1b_4 > 0$.

Considérons le cas 1'). Comme $\lambda = 0$ est racine double, il résulte de l'hypothèse de diagonalisabilité que les mineurs d'ordre 3 de la matrice $(a^i_j(\xi))$ (prenant $\xi_2 = 1$):

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 1 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

doivent tous être nuls quelque soit ξ_1; on doit donc avoir:

$$\xi_1 - b_3b_5 = 0, \ \forall \xi_1 :$$

ce cas est impossible.

Considérons le cas 1"). De même, les mineurs d'ordre 3 de la matrice ($\xi_2 = 1$):

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

doivent tous être nuls quelque soit ξ_1; on doit donc avoir:

$$\xi_1 - b_2b_4 - b_3b_5 = 0, \ \forall \xi_1 :$$

ce cas est impossible.

Considérons enfin le cas 1"'). De même, les mineurs d'ordre 3 de la matrice ($\xi_2 = 1$):

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

doivent tous être nuls quelque soit ξ_1; on doit donc avoir:

$$\xi_1 - b_2b_4 = 0, \ \forall \xi_1 :$$

ce cas aussi est impossible.

Remarque: Dans les différents cas précédents, on peut aussi obtenir des formes réduites de $a(\xi)$, par exemple dans le cas 1"'), comme $b_1b_4 > 0$, on a:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2.$$

La méthode de réduction sera expliquée dans des cas suivants.

iii$)_2$ Si $\beta = b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 = 0$, en posant $\xi_2 = 1$ et $\xi_1 = 0$, $\lambda = 0$ est racine de l'équation caractéristique de multiplicité 4, il résulte de l'hypothèse de diagonalisabilité que tous les coefficients de b doivent être nuls, ce qui est impossible.

Cas I.2: Par un changement de base de E conservant N, on peut écrire

$$(\xi_0 + \alpha_1\xi_2 \mapsto \xi'_0, \xi_1 - \alpha_1\xi_2 \mapsto \xi'_1, \beta\xi_2 \mapsto \xi'_2)$$

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & -1 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xi_2.$$

$$\det(\mathrm{a}(\xi') - \lambda I) = \begin{vmatrix} \xi_1 - \lambda & \xi_2 b_1 & \xi_2 b_2 & \xi_2 b_3 \\ \xi_2 b_4 & -\lambda & \xi_2 & 0 \\ \xi_2 b_5 & -\xi_2 & -\lambda & 0 \\ \xi_2 b_6 & 0 & 0 & \alpha\xi_2 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$(\alpha\xi_2 - \lambda)(-\lambda^3 + \lambda^2\xi_1 + \lambda\xi_2^2 b_1b_4 + \xi_1\xi_2^2 - \lambda\xi_2^2 - \xi_2^3 b_2b_4 + \xi_2^3 b_1b_5 + \lambda\xi_2^2 b_2b_5) - \xi_2^2\lambda^2 b_3b_6 - \xi_2^4 b_3b_6 = 0.$

Prenons $\xi_2 = 1$, développons et ordonnons le calcul du déterminant, l'équation caractéristique s'écrit:

$$\begin{aligned} &\lambda^4 - (\xi_1 + \alpha)\lambda^3 + \lambda^2(1 - b_1b_4 - b_2b_5 - b_3b_6 + \alpha\xi_1) \\ &\quad -\lambda[b_1b_5 - b_2b_4 + \alpha(1 - b_2b_5 - b_1b_4) + \xi_1] \\ &\quad +\alpha(b_1b_5 - b_2b_4) - b_3b_6 + \alpha\xi_1 = 0. \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon = 1/\xi_1$ et divisons par ξ_1, on obtient:

$$\varepsilon\lambda^4 - (1 + \alpha\varepsilon)\lambda^3 + (\alpha + \beta\varepsilon)\lambda^2 - (1 + \gamma\varepsilon)\lambda + \alpha + \delta\varepsilon = 0,$$

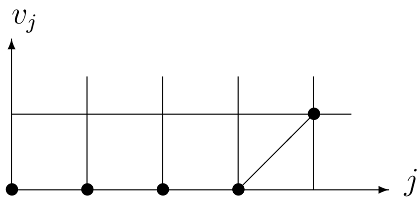
avec:

$$\beta = 1 - b_1b_4 - b_2b_5 - b_3b_6$$

$$\gamma = b_1b_5 - b_2b_4 + \alpha(1 - b_2b_5 - b_1b_4)$$
$$\delta = \alpha(b_1b_5 - b_2b_4) - b_3b_6.$$

Le diagramme de Newton est:

Si $\alpha \neq 0$:



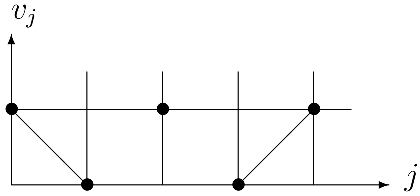
Considérant la droite d'appui de pente nulle, lorsque ε se situe dans un voisinage de 0, $\lambda = u(1 + o(\varepsilon))$ est racine de l'équation précédente; u est racine de $\alpha - u + \alpha u^2 - u^3 = 0$ et i en est une racine évidente. Donc lorsque ξ_1 tend vers $\pm\infty$, on obtient deux zéros de la forme:

$$\lambda = \pm i(1 + o(1/\xi_1)).$$

Il y a donc au moins un zéro non réel.

Si $\alpha = 0$, on doit distinguer: $b_3b_6 \neq 0$ ou $b_3b_6 = 0$.

Si $b_3b_6 \neq 0$:



Considérant la droite d'appui horizontale, au voisinage de 0 en ε, nous obtenons la racine $\lambda = u(1 + o(\varepsilon))$ où u est racine de $-u - u^3 = 0$ qui a pour solutions non nulles $\pm i$, c'est à dire des racines complexes non réelles. On déduit comme précédemment qu'il y a deux zéros de la forme:

$$\lambda = \pm i(1 + o(1/\xi_1))$$

et on a donc au moins un zéro non réel.

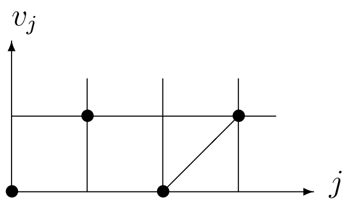
Si $b_3b_6 = 0$, $\lambda = 0$ est valeur propre; les autres valeurs propres vérifient:

$$\lambda^3 - \xi_1\lambda^2 + \lambda(1 - b_1b_4 - b_2b_5) - [(b_1b_5 - b_2b_4) + \xi_1] = 0.$$

On a encore:

$$\varepsilon\lambda^3 - \lambda^2 + \varepsilon\lambda(1 - b_1b_4 - b_2b_5) - [1 + (b_1b_5 - b_2b_4)\varepsilon] = 0,$$

et le diagramme de Newton est:



De même que précédemment, nous obtenons la racine $\lambda = u(1 + o(\varepsilon))$, où u est racine de $u^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $\pm i$. l'équation caractéristique a donc deux zéros tels que:

$$\lambda = \pm i(1 + o(1/\xi_1)) \text{ si } \xi \to \pm\infty$$

et on a donc des zéros non réels.

Le lemme 3.2.3 montre que les formes réduites du cas I ne peuvent satisfaire l'hypothèse de diagonalisabilité du théorème.

3.2.2 Lemme

Lemme 3.2.4 *Les opérateurs de la forme:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + b\xi_2$$

où b a une forme réduite du cas II ne sont pas uniformément diagonalisables.

Preuve.

a) On suppose que $\alpha_2 \neq \alpha_1$.
Par un changement de base de E conservant N, on est ramené à:

$$(\xi_0 + \alpha_1\xi_2 \mapsto \xi_0', \xi_1 - \alpha_1\xi_2 \mapsto \xi_1')$$

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\xi_2$$

avec $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$.

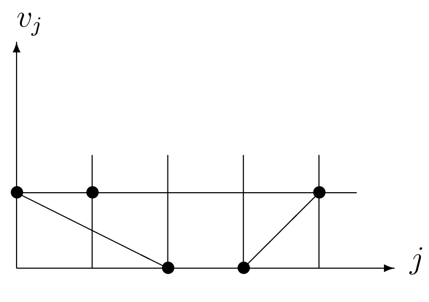
L'équation caractéristique s'écrit ($\xi_0 = -\lambda$):

$$\det(\mathrm{a}(\xi') - \lambda I) = 0,$$

$$\lambda^4 - (\xi_1 + \alpha\xi_2)\lambda^3 + [\alpha\xi_1\xi_2 - (b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6)\xi_2^2]\lambda^2 -$$
$$[-\alpha(b_1b_4 + b_2b_5) + b_1b_5]\xi_2^3\lambda + \alpha b_1b_5\xi_2^4 = 0.$$

Posant $\xi_2 = 1$, $\varepsilon = 1/\xi_1$ et divisant l'équation par ξ_1, on a:

$\varepsilon\lambda^4 - (1+\alpha\varepsilon)\lambda^3 + [\alpha - (b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6)\varepsilon]\lambda^2 + [\alpha(b_1b_4 + b_2b_5) - b_1b_5]\varepsilon\lambda + \alpha b_1b_5\varepsilon = 0.$



Considérons la première droite d'appui (le premier segment du diagramme): quand ε se situe dans un voisinage de 0, nous obtenons une racine de la forme:

$$\lambda = u\sqrt{\varepsilon}(1 + o(\varepsilon))$$

où u est racine de

$$b_1b_5 + u^2 = 0.$$

Finalement, on obtient les racines:

$$\lambda = \pm i\sqrt{|b_1 b_5/\xi_1|}(1 + o(1/\xi_1)) \text{ lorsque } b_1 b_5 > 0 \text{ et } \xi_1 \text{ tend vers } -\infty$$
$$\text{ou lorsque } b_1 b_5 < 0 \text{ et } \xi_1 \text{ tend vers } +\infty.$$

Il y a donc au moins un zéro non réel, et a(ξ') n'est pas diagonalisable dans ce cas.

On suppose désormais $b_1 b_5 = 0$. L'équation caractéristique a la racine $\lambda = 0$; les autres racines satisfont à:

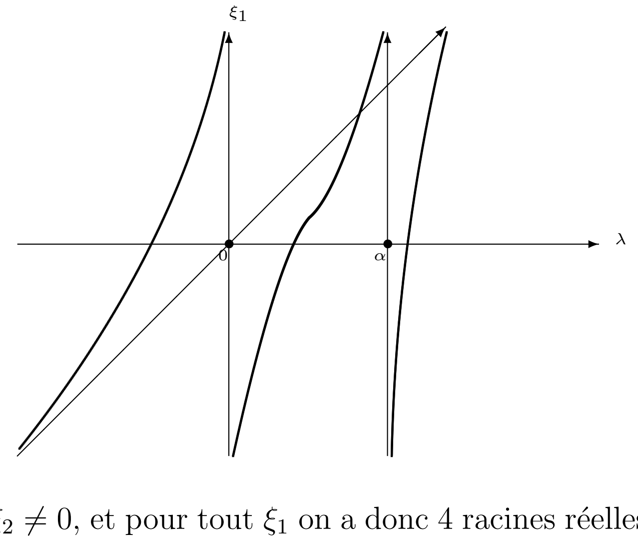
$$(-\lambda + \alpha\xi_2)[\lambda(\xi_1 - \lambda) + (b_1 b_4 + b_2 b_5)\xi_2^2] - b_3 b_6 \xi_2^2 \lambda = 0. \tag{2}$$

i) Supposons: $b_1 b_4 + b_2 b_5 \neq 0$.

i_1) Supposons $b_1 \neq 0$, d'où $b_5 = 0$ et $b_4 \neq 0$.
On distingue ensuite:
i_1') On suppose $b_3 b_6 \neq 0$.
On pose $\xi_2 = 1$; $\lambda = \alpha$ n'est pas racine de l'équation (2) que l'on peut encore écrire (après l'avoir divisée par $\lambda(\lambda - \alpha)$):

$$\xi_1 = \lambda - b_1 b_4/\lambda - b_3 b_6/(\lambda - \alpha).$$

Distinguons encore:
1) $b_1 b_4 > 0$ et $b_3 b_6 > 0$.
Le graphe de $\xi_1(\lambda)$ est de la forme:



Pour tout $\xi_2 \neq 0$, et pour tout ξ_1 on a donc 4 racines réelles caractéristiques distinctes.
Pour ξ_2 et $\xi_1 \neq 0$, on a la racine triple $\lambda = 0$ et la racine $\lambda = \xi_1$.
Dans les 2 cas, a(ξ') est donc diagonalisable.

Nous allons montrer que a(ξ') n'est pas uniformément diagonalisable.
On pose: $\rho = \sqrt{b_1 b_4} > 0$ et

$$T = \begin{pmatrix} 1/b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & -b_2/b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho/b_3b_4 \end{pmatrix};$$

la matrice $T^{-1}bT$ s'écrit:

$T^{-1}bT =$

$$\begin{pmatrix} b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & b_2\rho/b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3b_4/\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & -b_2/b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho/b_3b_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & b_1b_4 & b_2b_4 & b_3b_4 \\ b_4\rho & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_4b_3b_6/\rho & 0 & 0 & b_4b_3\alpha/\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & -b_2/b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho/(b_3b_4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

où $\sigma = b_3b_6/\rho > 0$.

Après ce changement de base dans F, on a donc:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & \rho \\ \rho & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xi_2,$$

avec $\rho > 0$, $\sigma > 0$, $\alpha \neq 0$.

On peut encore remplacer $\rho\xi_2$ par ξ_2; sans changer de notation, on posera donc $\rho = 1$.
Lorsque $\xi_2 \neq 0$, nous allons déterminer les 4 vecteurs propres correspondant aux valeurs propres distinctes: $\lambda = 0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Soit W_1 un vecteur propre de coordonnées (x, y, z, t), associé à la valeur propre $\xi_0 = 0$,

$\mathrm{a}(\xi')W_1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 0 & \xi_2 \\ \xi_2 & 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma\xi_2 & 0 & 0 & \alpha\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et on obtient le système suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_2 t = 0 \\ \xi_2 x + \xi_2 z = 0 \\ \sigma\xi_2 x + \alpha\xi_2 t = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 x + \xi_2(y+t) = 0 \\ x + z = 0 \\ \sigma x + \alpha t = 0 \end{array} \right.$$

$x = \alpha$ et $t = -\sigma$ vérifient bien la troisième équation, alors de la deuxième équation on tire $z = -\alpha$ et de la première, $y = \sigma - \alpha\xi_1/\xi_2$.

Finalement $\xi_2 W_1 = \begin{pmatrix} \alpha\xi_2 \\ \sigma\xi_2 - \alpha\xi_1 \\ -\alpha\xi_2 \\ -\sigma\xi_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\xi_0 = 0$.

Soit W_i un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. soit (x, y, z, t) ses coordonnées,

$(\mathrm{a}(\xi') - \lambda_i I)W_i = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 - \lambda_i & \xi_2 & 0 & \xi_2 \\ \xi_2 & -\lambda_i & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_i & 0 \\ \sigma\xi_2 & 0 & 0 & \alpha\xi_2 - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\xi_1 - \lambda_i)x + \xi_2 y + \xi_2 t = 0 \\ \xi_2 x - \lambda_i y + \xi_2 z = 0 \\ -\lambda_i z = 0 \\ \sigma\xi_2 x + (\alpha\xi_2 - \lambda_i)t = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ (\xi_1 - \lambda_i)x + \xi_2(y+t) = 0 \\ \xi_2 x - \lambda_i y = 0 \\ \sigma\xi_2 x + (\alpha\xi_2 - \xi_0)t = 0 \end{array} \right.$$

$x = \lambda_i$ et $y = \xi_2$ vérifient la troisième équation, en remplaçant dans la quatrième équation on a $t = \sigma\lambda_i\xi_2/(\lambda_i - \alpha\xi_2)$.

Alors, $W_i = \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \xi_2 \\ 0 \\ \sigma\lambda_i\xi_2/(\lambda_i - \alpha\xi_2) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, $1 \leq i \leq 3$.

Résumons.

Pour $\lambda = 0$, un vecteur propre a pour composantes:

$$W_1 = (\alpha\xi_2, \sigma\xi_2 - \alpha\xi_1, -\alpha\xi_2, -\sigma\xi_2).$$

Pour les valeurs propres $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$, on a les 3 vecteurs propres W_i (après avoir multiplié chaque composante par $\lambda_i - \alpha\xi_2$):

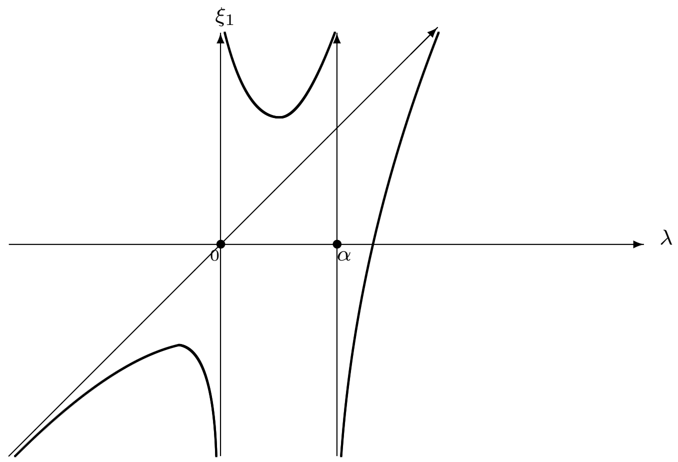
$$W_i = (\lambda_i(\lambda_i - \alpha\xi_2), (\lambda_i - \alpha\xi_2)\xi_2, 0, \lambda_i\sigma\xi_2).$$

On normalise chaque vecteur propre en le divisant par sa longueur. On calcule $|\det(W_1, W_2, W_3, W_4)|$. On vérifie aisément que si $\xi_1 \neq 0$ et si ξ_2 tend vers 0, $|\det(W)|$ tend vers 0; donc en posant $U(\xi') = (W_1, W_2, W_3, W_4)$, pour une norme usuelle, $||U(\xi')^{-1}||$ n'est pas bornée, il n'existe donc pas de constante k telle que pour tout ξ':

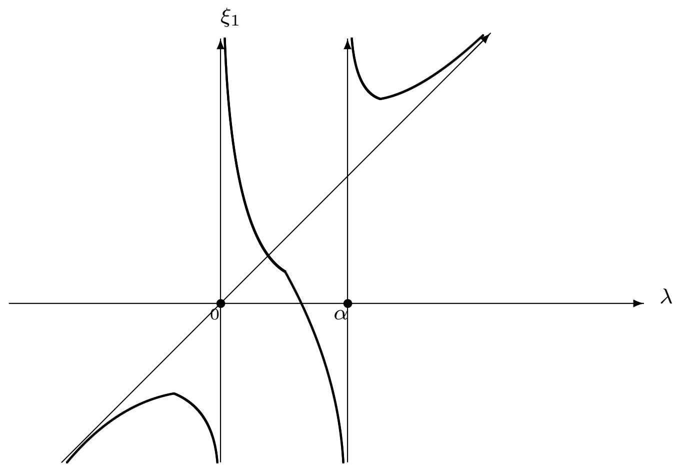
$$||U(\xi')||, ||U(\xi')^{-1}|| \leq k$$

et a(ξ') n'est pas uniformément diagonalisable.

2) On considère tous les cas où l'on n'a pas $b_1b_4 > 0$ et $b_3b_6 > 0$.
Dans tous ces cas, il existe des valeurs propres non réelles, pour $\xi_2 = 1$. Par exemple, si $b_3b_6 > 0$, $b_1b_4 < 0$ et $\alpha > 0$, le graphe de $\xi_1(\lambda)$ est:



Si $\alpha > 0$, $b_1b_4 < 0$, $b_3b_6 < 0$, le graphe de $\xi_1(\lambda)$ est:



$i_1'')$ On suppose $b_3b_6 = 0$.

$\lambda = 0$ et $\lambda = \alpha\xi_2$ sont valeurs propres; les deux autres valeurs propres vérifient l'équation:

$$\lambda(\lambda - \xi_1) - b_1 b_4 \xi_2^2 = 0.$$

1) Si $b_1 b_4 < 0$, en posant $\xi_1 = 0$, on obtient deux valeurs propres non réelles:

$$\lambda = \pm i|\xi_2|\sqrt{-b_1 b_4}.$$

2) Si $b_1 b_4 > 0$, toutes les valeurs propres sont réelles pour tous ξ_1 et ξ_2; prenons $\xi_2 = 1$ et choisissons ξ_1 de sorte que α soit valeur propre double de:

$$\alpha(\alpha - \xi_1) - b_1 b_4 = 0.$$

Tous les mineurs d'ordre 3 de la matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

doivent être nuls; on a donc $b_3 = b_6 = 0$.
La matrice caractéristique s'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} -\lambda + \xi_1 & b_1\xi_2 & b_2\xi_2 & 0 \\ b_4\xi_2 & -\lambda & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda + \alpha\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Comme précédemment, en posant $\rho = \sqrt{b_1 b_4}$, on effectue un changement de base dans F en utilisant la matrice T du i_1') 1), on se ramène (après avoir remplacé $\rho\xi_2$ par ξ_2) à:

$$\begin{pmatrix} -\lambda + \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ \xi_2 & -\lambda & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda + \alpha'\xi_2 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha' \neq 0,$$

et on vérifie que la diagonalisabilité n'est pas uniforme, lorsque $\xi_1 = 1$, et ξ_2 tend vers 0.

i_2) $b_1 = 0$ et $b_5 \neq 0$, ce qui implique $b_2 \neq 0$.
Alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ce cas se ramène au précédent en remarquant que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice b de ce cas est donc semblable à celle du cas i_1); et on obtient les mêmes résultats.

ii) Supposons $b_1b_5 = 0$ et $b_1b_4 + b_2b_5 = 0$.
$\lambda = 0$ est racine double; les autres valeurs propres vérifient:

$$(-\lambda + \alpha\xi_2)(\xi_1 - \lambda) - b_3b_6\xi_2^2 = 0.$$

Posons: $\xi_2 = 1$, $\alpha\xi_1 - b_3b_6 = 0$. $\lambda = 0$ est alors racine triple et tous les mineurs d'ordre 2 de la matrice correspondante sont nuls, ce qui est impossible car $\alpha \neq 0$.

b) On suppose: $\alpha_1 = \alpha_2$.
Comme précédemment, on se ramène à:

$$(a_j^i(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2.$$

$$\det(\mathrm{a}(\xi') - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \xi_1 - \lambda & b_1\xi_2 & b_2\xi_2 & b_3\xi_2 \\ b_4\xi_2 & -\lambda & 1 & 0 \\ b_5\xi_2 & 0 & -\lambda & 0 \\ b_6\xi_2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^4 - \lambda^3\xi_1 - \lambda^2 b_1b_4\xi_2^2 - b_1b_5\lambda\xi_2^3 - b_2b_5\lambda^2\xi_2^2 + b_3b_6\lambda^2\xi_2^2$$

$$= \lambda^4 - \lambda^3\xi_1 - \lambda^2(b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6)\xi_2^2 - b_1b_5\lambda\xi_2^3 = 0.$$

Une racine caractéristique λ est nulle. Les autres vérifient:

$$\lambda^3 - \xi_1\lambda^2 - (b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6)\lambda\xi_2^2 - b_1b_5\xi_2^3.$$

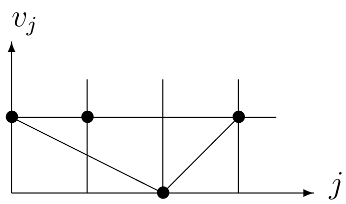
On pose $\xi_2 = 1$, $\varepsilon = 1/\xi_1$ et on divise l'équation caractéristique par ξ_1; on obtient:

$$\varepsilon\lambda^3 - \lambda^2 - \alpha\varepsilon\lambda - \beta\varepsilon,$$

avec:

$$\alpha = b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6$$
$$\beta = b_1b_5.$$

Construisons le diagramme de Newton:



Les racines sont: $\xi_1(1 + o(1/\xi_1))$, $\pm i(|\beta/\xi_1|)^{1/2}(1 + o(1/\xi_1))$ si $\beta > 0$ et ξ_1 tend vers $-\infty$, ou si $\beta < 0$ et ξ_1 tend vers $+\infty$. Il est donc nécessaire que $\beta = 0$ pour que toutes les valeurs propres soient réelles quel que soit ξ'; il faut donc:

$$b_1b_5 = 0.$$

$\lambda = 0$ est alors racine double et il reste:

$$\lambda^2 - \xi_1\lambda - (b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6)\xi_2^2.$$

Son discriminant est: $\Delta = \xi_1^2 + 4(b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6)$. Si $\xi_1 = 0$, $\Delta = 4(b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6) \geq 0$ si et seulement si $b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 \geq 0$. On doit donc avoir aussi:

$$b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 \geq 0.$$

i) Supposons d'abord: $b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 > 0$.

i_1) $b_1 \neq 0$, $b_5 = 0$, $b_1b_4 + b_3b_6 > 0$.
Comme $\lambda = 0$ est racine double, tous les mineurs d'ordre 3 de la matrice:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & b_1\xi_2 & b_2\xi_2 & b_3\xi_2 \\ b_4\xi_2 & 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_6\xi_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

doivent être identiquement nuls, donc supposant $\xi_2 = 1$:

$$L\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \xi_1 & b_1 & b_2 \\ b_4 & 0 & 1 \\ b_6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -b_1 b_6 = 0,$$

ce qui implique:

$$b_1 b_6 = 0 \text{ d'où } b_6 = 0;$$

on a donc: $b_1 b_4 > 0$, $b_5 = b_6 = 0$ et $a(\xi)$ s'écrit:

$$(a^i_j(\xi)) = \begin{pmatrix} \xi_0 + \xi_1 & b_1\xi_2 & b_2\xi_2 & b_3\xi_2 \\ b_4\xi_2 & \xi_0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_0 \end{pmatrix}.$$

En posant: $\rho = \sqrt{b_1 b_4} > 0$, on procède comme dans le cas a)i'_1) et on a 2 sous-cas:

i'_1) si $b_3 \neq 0$:

posant $T = \begin{pmatrix} 1/b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & -b_2/b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho/b_3 b_4 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on a:

$$(a^i_j(\xi)) = \begin{pmatrix} \xi_0 + \xi_1 & \xi_2 & 0 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathrm{a}(\xi') - \lambda I) = det\begin{pmatrix} \xi_1 - \lambda & \xi_2 & 0 & \xi_2 \\ \xi_2 & -\lambda & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 - \xi_1\lambda - \xi_2^2) = 0.$$

On a donc la valeur propre double $\lambda = 0$ et les autres valeurs propres vérifient:

$$\lambda^2 - \xi_1\lambda - \xi_2^2 = 0.$$

Le discriminant du deuxième facteur de l'équation caractéristique, $\Delta = \xi_1^2 + 4\xi_2^2$ est toujours positif. Les racines sont de la forme:

$$\lambda_\pm = (\xi_1 \pm \sqrt{\xi_1^2 + 4\xi_2^2})/2.$$

On suppose $\xi_2 \neq 0$ et on détermine les sous-espaces propres.

Soit $V(\xi)$ de coordonnées (x, y, z, t) un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$, alors:

$$\mathrm{a}(\xi')V(\xi) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_2 t = 0 \\ \xi_2 x + \xi_2 z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = -\xi_1 x/\xi_2 - t \end{array} \right.$$

Donc un vecteur propre quelconque s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\xi_2 x \\ \xi_1 x + \xi_2 t \\ \xi_2 x \\ -\xi_2 t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ où } (x,t) \in I\!R^2$$

Pour $\lambda = 0$, le sous-espace propre est donc engendré par les vecteurs linéairement indépendants:

$$V_1(\xi) = 1/\sqrt{\xi_1^2 + 2\xi_2^2} \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ ||V_1|| = 1$$

et

$$V_2(\xi) = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ ||V_2|| = 1.$$

Si $V_1'(\xi)$, $V_2'(\xi)$ ($||V_1'|| = ||V_2'|| = 1$), forment une base quelconque de ce sous-espace, on a évidemment: $V_1(\xi) = k(\xi)V_1'(\xi) + l(\xi)V_2'(\xi)$.

Soit maintenant $V(\xi)(x, y, z, t)$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_\pm = (\xi_1 \pm \sqrt{\xi_1^2 + 4\xi_2^2})/2$, alors:

$$\mathrm{a}(\xi')V(\xi) = \lambda_\pm V(\xi) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 x + \xi_2 y + \xi_2 t = \lambda_\pm x \\ \xi_2 x + \xi_2 z = \lambda_\pm y \\ 0 = z \\ 0 = t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda_\pm/\xi_2 y \\ ((\xi_1\lambda_\pm)/\xi_2 + \xi_2)y = \lambda_\pm^2/\xi_2 y \end{array} \right.$$

où on a bien $\xi_1\lambda_\pm/\lambda_2+\xi_2=(\xi_1^2+\xi_1\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2}+2\xi_2^2)/2\xi_2$ et
$\lambda_\pm^2/\xi_2=(2\xi_1^2+4\xi_2^2+2\xi_1\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2})4\xi_2=(\xi_1^2+\xi_1\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2}+2\xi_2^2)/2\xi_2$,
soit $\xi_1\lambda_\pm/\lambda_2+\xi_2=\lambda_\pm^2/\xi_2$.

Donc deux vecteurs propres quelconques respectivement associés aux valeurs propres λ_+ et λ_- s'écrivent:

$$y\xi_2\begin{pmatrix}(\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2})/2\\ \xi_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\text{ et }y\xi_2\begin{pmatrix}(\xi_1-\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2})/2\\ \xi_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Donc pour $\lambda=(\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+4\xi_1^2})/2$, (en multipliant par la quantité conjuguée de la première coordonnée de $V(\xi)$, modulo un coefficient multiplicateur) on a:

$$V_3(\xi)=1/\sqrt{4\xi_2^2+(\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2}-\xi_1)^2}\begin{pmatrix}2\xi_2\\ \sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2}-\xi_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ ||V_3||=1.$$

Pour $\lambda=(\xi_1-\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2})/2$:

$$V_4(\xi)=1/\sqrt{4\xi_2^2+(\xi_1+\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2})^2}\begin{pmatrix}-2\xi_2\\ \xi_1+\sqrt{\xi_1^2+4\xi_2^2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ ||V_4||=1.$$

Posons $\xi_1=1$, on évalue $V_1(\xi)-V_4(\xi)$ lorsque ξ_2 tend vers 0:

$$V_1(\xi)-V_4(\xi)=\xi_2W(\xi),\ \text{ où } ||W(\xi)||=0(1);$$

d'autre part:

$$V_3(\xi)\text{ tend vers: }\ \pm\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Tout diagonalisateur, où les vecteurs colonnes sont de longueur 1 a un déterminant de la forme:

$$|\det(V_1'(\xi),V_2'(\xi),V_3(\xi),V_4(\xi))|=|\det(V_1'(\xi),V_2'(\xi),V_3(\xi),\xi_2W(\xi))|$$

$$=|\xi_2||\det(V_1'(\xi),V_2'(\xi),V_3(\xi),W(\xi))|,\ \text{ avec } ||V_1'||=||V_2'||=1,$$

$$||V_3|| \text{ tend vers 1 et } ||W|| = 0(1).$$

Par conséquent, quelque soit le diagonalisateur où les vecteurs colonnes sont de longueur 1, son déterminant tend vers 0 si $|\xi_2|$ tend vers 0, et n'est donc pas minoré. L'opérateur $\mathrm{a}^i_j(\xi)$ considéré n'est donc pas uniformément diagonalisable (bien qu'il soit diagonalisable).

$i_1'')$ Si $b_3 = 0$, posant

$$T = \begin{pmatrix} 1/b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho & -b_2/b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho/b_4 \end{pmatrix},$$

on obtient :

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & 0 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on se ramène à:

$$(a^i_j(\xi)) = \begin{pmatrix} \xi_0 + \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\ \xi_2 & \xi_0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Comme au $i_1')$ cette matrice n'est pas uniformément diagonalisable.

$i_2)$ On suppose: $b_1 = 0$, $b_2b_5 + b_3b_6 > 0$.

Posant

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a:

$$T_1^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est autre que la transposée de la matrice b du cas i_1). La matrice b de ce cas est donc semblable à celle du cas i_1) et les résultats sont les mêmes.

ii) On suppose: $b_1 b_5 = 0$, $b_1 b_4 + b_2 b_5 + b_3 b_6 = 0$.

Si $\xi_2 = 1$ et $\xi_1 = 0$, $\lambda = 0$ est racine quadruple, la diagonalisabilité impliquerait $b = 0$, ce qui n'est pas par hypothèse.

3.2.3 Lemme

Lemme 3.2.5 *On considère les opérateurs de la forme:*

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \xi_2$$

où b a la forme réduite du cas III.

Si b_1 et b_4 sont des réels, on note:

$$sgn\, b_1 = sgn\, b_4, \text{ si on a: } b_1 b_4 > 0 \text{ ou } b_1 = b_4 = 0.$$

1. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont différents deux à deux et si:

$$sgn\, b_1 = sgn\, b_4, sgn\, b_2 = sgn\, b_5, sgn\, b_3 = sgn\, b_6,$$

alors a est présymétrique par rapport à N.

2. Si $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$ (deux α sont égaux), si:

$$(b_1 b_4 + b_2 b_5 > 0 \text{ ou } b_1 = b_4 = b_2 = b_5 = 0)$$

et si:

$$sgn\, b_3 = sgn\, b_6,$$

alors a est présymétrique par rapport à N.

3. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ et si:

$$(b_1 b_4 + b_2 b_5 + b_3 b_6 > 0 \text{ ou } b_1 = b_4 = b_2 = b_5 = b_3 = b_6 = 0),$$

alors a est présymétrique par rapport à N.

Dans les cas 1. 2. 3., a est donc uniformément diagonalisable.

4. Dans tous les autres cas, a n'est pas uniformément diagonalisable.

Preuve.

a) Cas 1: Par un changement de base de E conservant N, on se ramène à:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & -1 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xi_2,$$

avec $\alpha \neq \pm 1$.

Posons $\xi_2 = 1$; la matrice caractéristique est:

$$\mathrm{a}(\xi') - \lambda I = \begin{pmatrix} \xi_1 - \lambda & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

et l'équation caractéristique s'écrit alors:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \xi_1) - (\lambda - \alpha)(\lambda + 1) b_1 b_4$$

$$-(\lambda - \alpha)(\lambda - 1) b_2 b_5 - (\lambda - 1)(\lambda + 1) b_3 b_6 = 0.$$

i) Supposons: $b_1 b_4 \neq 0$, $b_2 b_5 \neq 0$.

Alors $1, -1, \alpha$ ne sont pas valeurs propres, et on a:

$$\xi_1 = \lambda - b_1 b_4/(\lambda - 1) - b_2 b_5/(\lambda + 1) - b_3 b_6/(\lambda - \alpha).$$

i_1) Si $b_1 b_4 > 0$, $b_2 b_5 > 0$, $b_3 b_6 > 0$, le graphe de $\xi_1(\lambda)$ (figure (a)) montre aisément que pour tout ξ_1, on a 4 valeurs propres réelles distinctes.

On pose:

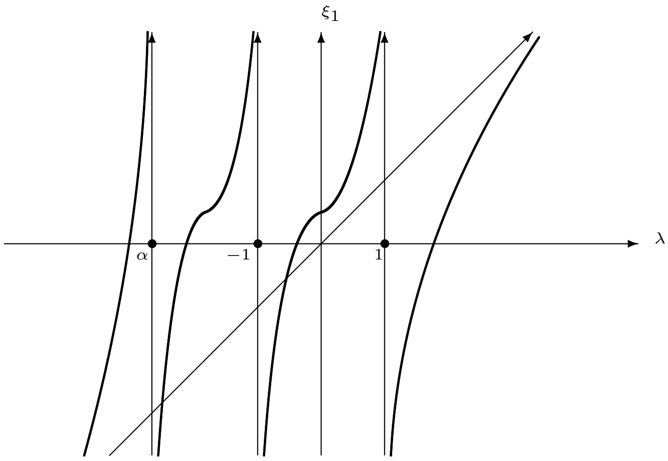
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b_4/b_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_5/b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{b_6/b_3} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que:

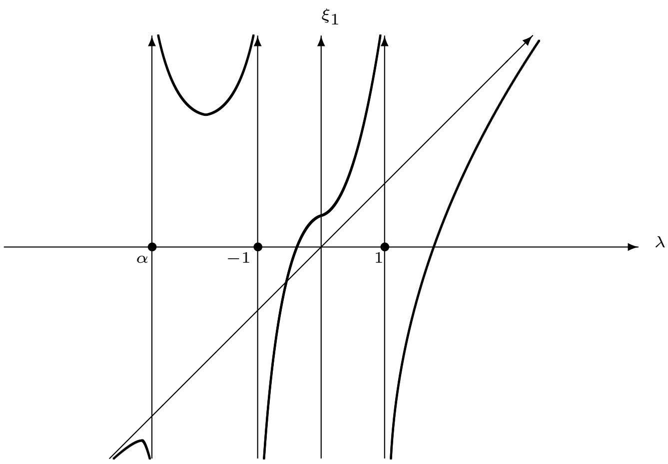
$$T^{-1} \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & -1 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b_1 b_4} & \sqrt{b_2 b_5} & \sqrt{b_3 b_6} \\ \sqrt{b_1 b_4} & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{b_2 b_5} & 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{b_3 b_6} & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$a(\xi)$ est donc bien présymétrique.

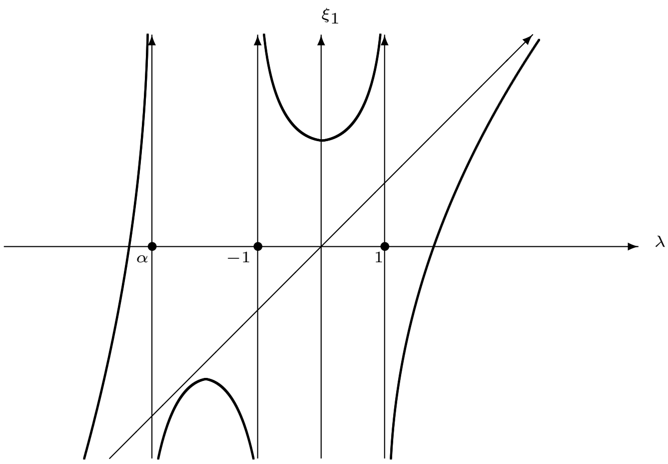
i_2) Dans tous les autres cas, il existe des valeurs propres non réelles. Par exemple, si $b_1b_4 > 0$, $b_2b_5 > 0$, $b_3b_6 < 0$, $\alpha < -1$, pour $\xi_2 = 1$, le graphe de $\xi_1(\lambda)$ (figure (b)) montre que pour certaines valeurs de ξ_1, il existe deux valeurs propres non réelles.



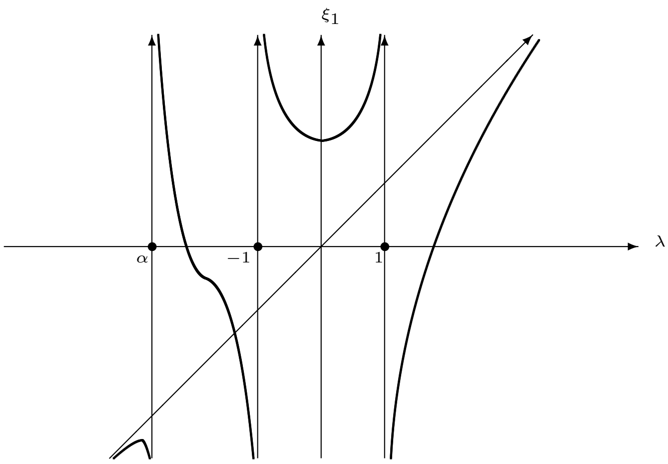
$(a) b_1b_4>0, b_2b_5>0, b_3b_6>0$



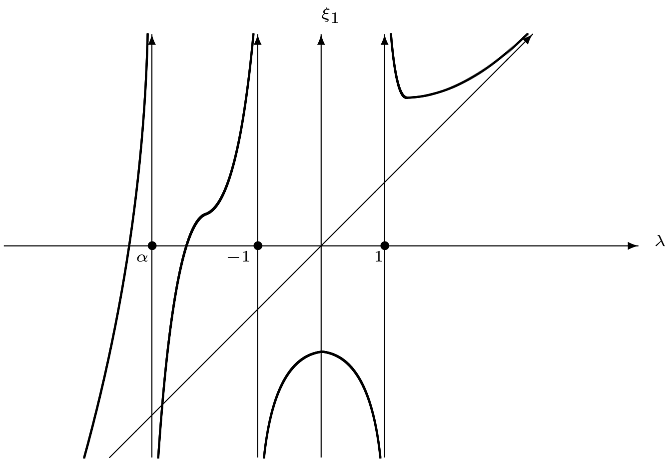
$(b) b_1b_4>0, b_2b_5>0, b_3b_6<0$



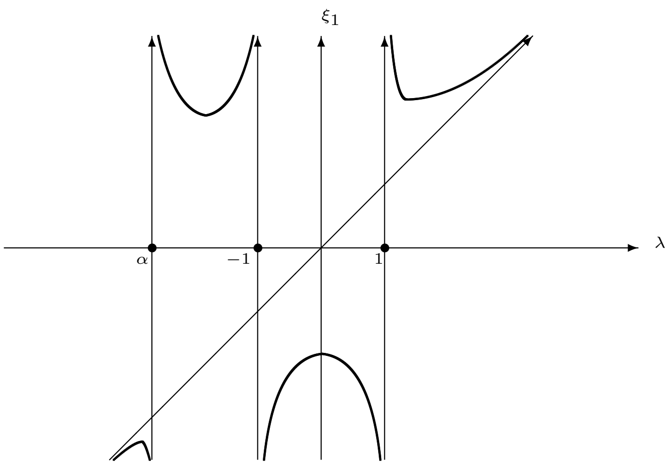
$(c) b_1b_4>0, b_2b_5<0, b_3b_6>0$



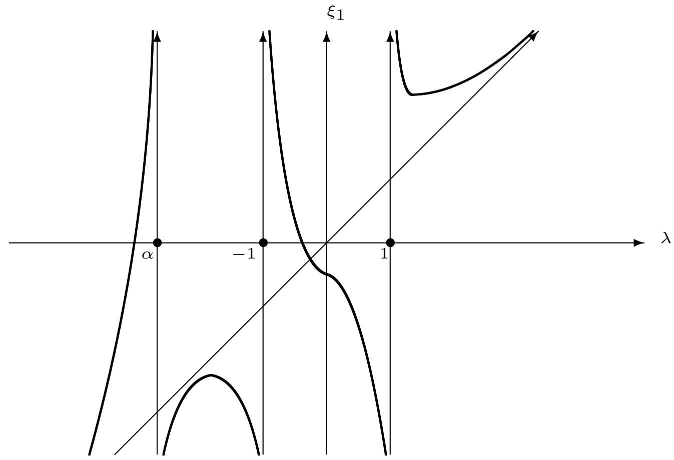
$(d) b_1b_4>0, b_2b_5<0, b_3b_6<0$



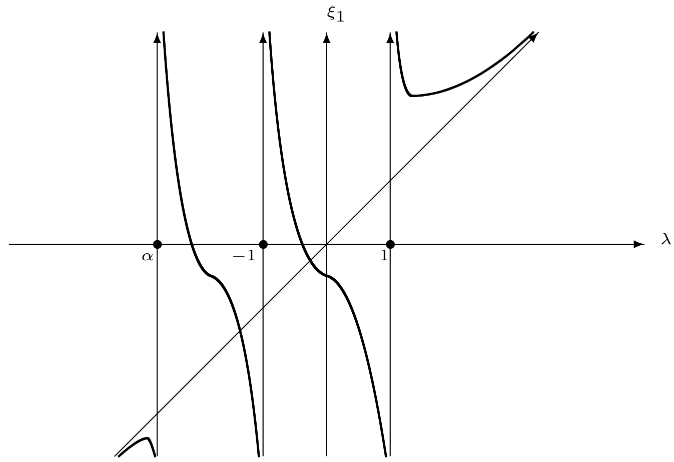
$(e) b_1b_4<0, b_2b_5>0, b_3b_6>0$



$(f) b_1b_4<0, b_2b_5>0, b_3b_6<0$



$(g) b_1b_4<0, b_2b_5<0, b_3b_6>0$



$(h) b_1b_4<0, b_2b_5<0, b_3b_6<0$

ii_1) Si $b_1b_4 \neq 0$, $b_2b_5 \neq 0$, $b_3b_6 = 0$.

Posant toujours $\xi_2 = 1$, l'équation caractéristique s'écrit alors:

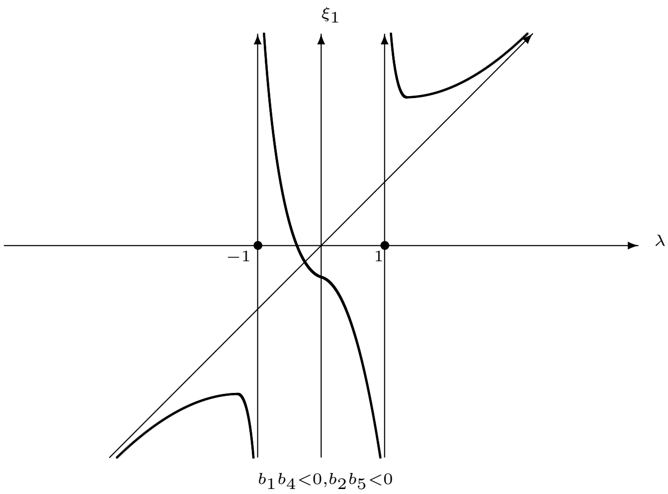
$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-\alpha)(\lambda-\xi_1) - (\lambda-\alpha)(\lambda+1)b_1b_4$$

$$-(\lambda-\alpha)(\lambda-1)b_2b_5 = 0.$$

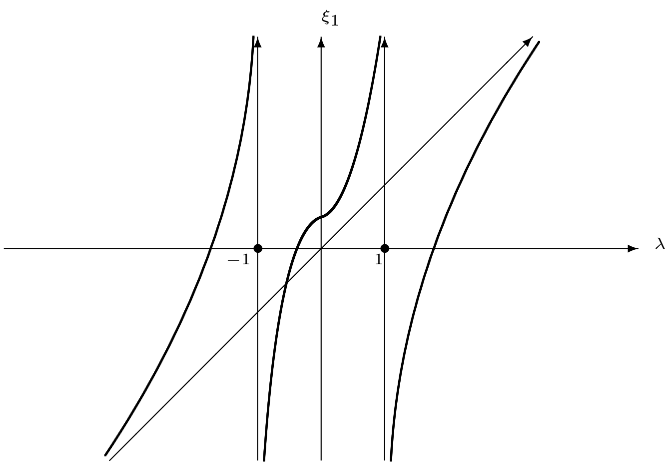
$\lambda = \alpha$ est alors valeur propre; les autres valeurs propres satisfont l'équation:

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-\xi_1) - b_1b_4(\lambda+1) - b_2b_5(\lambda-1) = 0.$$

Le graphe de $\xi_1(\lambda)$ (ci-dessous) montre que si $b_1b_4 < 0$ ou $b_2b_5 < 0$, il existe des valeurs propres non réelles.



On suppose donc: $b_1b_4 > 0$, $b_2b_5 > 0$; toutes les valeurs propres sont réelles comme le montre le graphe ci-dessous:



De plus α est valeur propre double si $\underline{\xi}_1$ est tel que:

$$(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha - \underline{\xi}_1) - b_1b_4(\alpha + 1) - b_2b_5(\alpha - 1) = 0.$$

Pour que $\mathrm{a}(\underline{\xi}')$ soit diagonalisable, il faut que les mineurs d'ordre 3 de la matrice $\mathrm{a}(\underline{\xi}')$ correspondante soient nuls:

$$\mathrm{a}(\underline{\xi}_1, 1) = \begin{pmatrix} -\alpha + \underline{\xi}_1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 1 - \alpha & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & -1 - \alpha & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\alpha + \underline{\xi}_1 & b_1 & b_2 \\ b_4 & 1 - \alpha & 0 \\ b_6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b_6(\alpha - 1)b_2 = 0,$$

donc $b_6 = 0$ puisque $\alpha \neq 1$ et $b_2 \neq 0$.

De même:

$$L\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\alpha + \underline{\xi}_1 & b_1 & b_3 \\ b_4 & 1-\alpha & 0 \\ b_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b_3(\alpha - 1)b_5 = 0,$$

on a donc aussi $b_3 = 0$ ($\alpha \neq 1$ et $b_5 \neq 0$).

Si $b_3 = b_6 = 0$, $b_1 b_4 > 0$, $b_2 b_5 > 0$, on pose:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b_4/b_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{b_5/b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie comme précédemment que:

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & 0 \\ b_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b_1 b_4} & \sqrt{b_2 b_5} & 0 \\ \sqrt{b_1 b_4} & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{b_2 b_5} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ainsi a est présymétrique par rapport à N.

ii$_2$) On obtient de même:

Si $b_2 b_5 \neq 0$, $b_3 b_6 \neq 0$, $b_1 b_4 = 0$, la diagonalisabilité implique

$$b_2 b_5 > 0,\ b_3 b_6 > 0,\ b_1 = b_4 = 0.$$

Si $b_3 b_6 \neq 0$, $b_1 b_4 \neq 0$, $b_2 = b_5 = 0$, la diagonalisabilité implique

$$b_3 b_6 > 0,\ b_1 b_4 > 0,\ b_2 = b_5 = 0.$$

Dans ces deux cas, on voit aisément que a est présymétrique par rapport à N.

iii)

iii$_1$) Si $b_1 b_4 \neq 0$, $b_2 b_5 = b_3 b_6 = 0$:

$\lambda = \alpha$ et $\lambda = -1$ sont valeurs propres; les autres valeurs propres satisfont à:

$$(\lambda - 1)(\lambda - \xi_1) - b_1 b_4 = 0,$$

soit encore:

$$\lambda^2 - (1 + \xi_1)\lambda + \xi_1 - b_1 b_4 = 0.$$

Son discriminant est:

$$\Delta = (1 + \xi_1)^2 - 4\xi_1 + 4b_1 b_4 = (\xi_1 - 1)^2 + 4b_1 b_4.$$

Donc $\Delta \geq 0$ pour tout ξ_1 si et seulement si $b_1 b_4 \geq 0$. La réalité des valeurs propres implique alors $b_1 b_4 > 0$ (puisqu'on suppose $b_1 b_4 \neq 0$). Dans ce cas toutes les valeurs propres sont réelles, de plus pour $\underline{\xi}_1$ tel que:

$$2(1 + \underline{\xi}_1) - b_1 b_4 = 0$$

$\lambda = -1$ est valeur propre double; on en déduit, comme précédemment, que la diagonalisabilité implique: $b_2 = b_5 = 0$.

En choisissant ξ_1 tel que α soit valeur propre double, on obtient de même: $b_3 = b_6 = 0$.
Si $b_1 b_4 > 0$, $b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = 0$, on vérifie aisément que a est présymétrique par rapport à N.

iii$_2$) La diagonalisabilité implique de même:

si $b_2 b_5 \neq 0$ et $b_1 b_4 = b_3 b_6 = 0$, on a: $b_2 b_5 > 0$, $b_1 = b_4 = b_3 = b_6 = 0$,

si $b_3 b_6 \neq 0$, $b_1 b_4 = 0$ et $b_2 b_5 = 0$, on a: $b_3 b_6 > 0$, $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0$;

dans ces cas, a est présymétrique par rapport à N.

iv) Si $b_1 b_4 = b_2 b_5 = b_3 b_6 = 0$, la diagonalisabilité implique:

$$b_1 = b_4 = b_2 = b_5 = b_3 = b_6 = 0.$$

b) Cas 2: On se ramène à:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xi_2.$$

Pour $\xi_2 = 1$, l'équation caractéristique s'écrit:

$$\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - \xi_1) - (b_1 b_4 + b_2 b_5)\lambda(\lambda - 1) - b_3 b_6 \lambda^2 = 0;$$

$\lambda = 0$ est valeur propre; les autres valeurs propres vérifient:

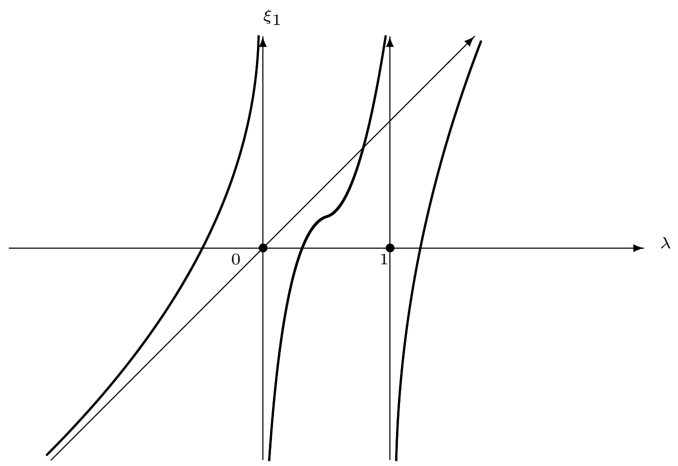
$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-\xi_1)-(b_1b_4+b_2b_5)(\lambda-1)-b_3b_6\lambda=0.$$

i) On suppose $b_1b_4+b_2b_5 \neq 0$.

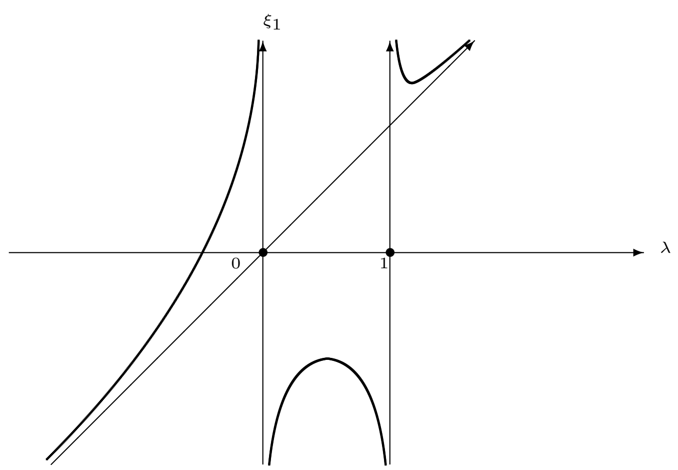
i_1) On suppose $b_3b_6 \neq 0$, $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre double et $\lambda = 1$ n'est pas valeur propre, alors:

$$\xi_1 = \lambda - (b_1b_4+b_2b_5)/\lambda - b_3b_6/(\lambda-1).$$

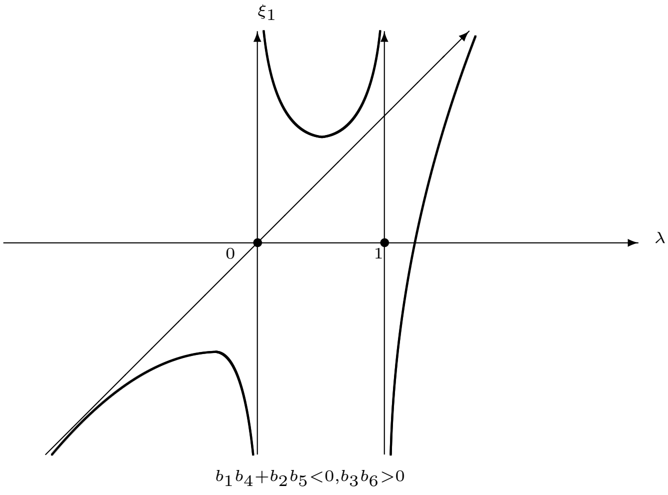
On construit $\xi_1(\lambda)$:

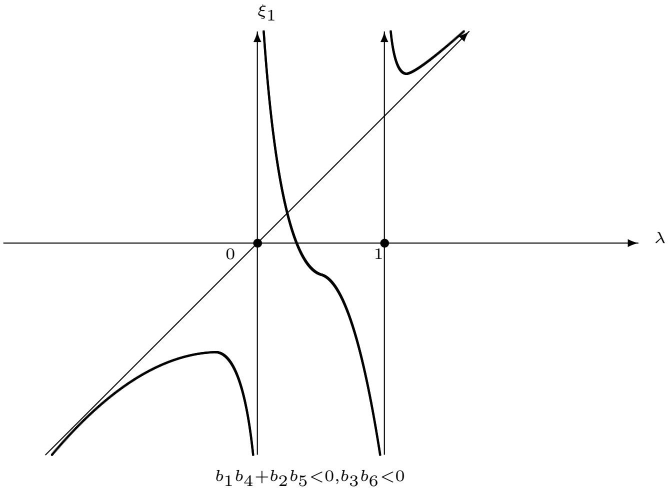


$b_1b_4+b_2b_5>0, b_3b_6>0$



$b_1b_4+b_2b_5>0, b_3b_6<0$





Pour que $(\mathrm{a}^i_j(\xi'))$ soit à valeurs propres réelles, il faut et il suffit que:

$$b_1b_4 + b_2b_5 > 0 \text{ et } b_3b_6 > 0.$$

Supposons ces conditions remplies. On pose:

$$\rho = \sqrt{b_1b_4 + b_2b_5},\ T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4/\rho & -b_2/\rho & 0 \\ 0 & b_5/\rho & b_1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{b_6/b_3} \end{pmatrix}.$$

On obtient:

$$T^{-1}bT = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 & \sqrt{b_3b_6} \\ \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{b_3b_6} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

a est présymétrique par rapport à N.

i_2) On suppose $b_3b_6 = 0$.

On a les valeurs propres: $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$; les autres valeurs propres vérifient:

$$\lambda(\lambda - \xi_1) - (b_1b_4 + b_2b_5) = 0.$$

Pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que:

$$b_1b_4 + b_2b_5 > 0.$$

$\lambda = 1$ est valeur propre double pour un choix convenable de ξ_1. Pour que a(ξ') soit diagonalisable, il faut que: $b_3 = b_6 = 0$.

Si $b_1b_4 + b_2b_5 > 0$ et $b_3 = b_6 = 0$, on vérifie, comme précédemment, que a est présymétrique par rapport à N.

ii) On suppose $b_1b_4 + b_2b_5 = 0$.

$\lambda = 0$ est valeur propre double. Les autres valeurs propres vérifient:

$$(\lambda - 1)(\lambda - \xi_1) - b_3b_6 = 0.$$

Pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que:

$$b_3b_6 \geq 0.$$

Supposons cette condition réalisée. Pour ξ_1 convenable, $\lambda = 0$ est valeur propre triple; on déduit que la diagonalisabilité de a(ξ') implique:

$$b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0.$$

Si $b_3b_6 > 0$, on voit aisément que $a(\xi)$ est présymétrique.

Si $b_3b_6 = 0$, on choisit $\xi_1 = 0$; $\lambda = 1$ est alors valeur propre double; la diagonalisabilité implique:

$$b_3 = b_6 = 0.$$

c) Cas 3: On se ramène à:

$$(a^i_j(\xi)) = \xi_0 I + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_2.$$

Pour $\xi_2 = 1$, l'équation caractéristique s'écrit:

$$\lambda^2[\lambda^2 - \xi_1\lambda - (b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6)] = 0.$$

Pour que toutes les valeurs propres soient réelles, il faut et il suffit que:

$$b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 \geq 0.$$

i) On suppose $b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 > 0$.

On pose: $\rho = \sqrt{b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6}$.

Si $b_2 \neq 0$, on pose:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_4/\rho & b_3 & 0 \\ 0 & b_5/\rho & 0 & 1 \\ 0 & b_6/\rho & -b_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient le même résultat.

ii) On suppose $b_1b_4 + b_2b_5 + b_3b_6 = 0$.

On pose $\xi_1 = 0$. La diagonalisabilité implique:

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0.$$

Le théorème résulte des trois lemmes.

Bibliographie

[1] Bove A., Benvenuti, *On a class of hyperbolic systems with multiple characteristics* [preprint]

[2] Colombini F., Nishitani, *Two by two strongly hyperbolic systems and Gevrey classes* [preprint Dipartimento di matematica - Pisa]

[3] Delquié H. Vaillant J., *Dimension réduite et valeurs propres multiples d'une matrice diagonalisable* 4×4 [à paraître au BSM]

[4] Friedland S. and Loewy R., *Subspaces of symmetric matrices containing matrices with a multiple first eigenvalue*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 62, No. 2 (1976)

[5] Kasahara K., Yamaguti M., *Strongly hyperbolic systems of linear partial differential equations with constant coefficients*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto 33 (Ser (A), 1960), p. 1-33

[6] Nishitani T., *Symmetrization of Hyperbolic Systems with Real Constant Coefficients*, Annali Scuola Normale Superiore - Pisa. Série 4, Vol. 21, No. 1 (1994)

[7] Nishitani T., *Symmetrization of hyperbolic systems with non degenerate characteristics* J.Fonct.Anal. 132 (1995) p251-272

[8] Nishitani T., Vaillant J., *Smoothly symmetrizable systems and the reduced dimensions* [à paraître au Tsukuba Journal]

[9] Oshime Y., *Canonical forms of* 3×3 *strongly hyperbolic systems with real constant coefficients*, J. Math. Kyoto Univ. 31-4 (1991) 937-982

[10] Strang G., *On strong hyperbolicity*, J. Math. Kyoto Univ. 6 (1967), p.397-417

[11] Vaillant J., *Symétrisabilité des matrices localisées d'une matrice fortement hyperbolique en un point multiple*, Annali Scuola Normale Superiore - Pisa. Classe di Scienze. Série 4, Vol.5, No. 2 (1978)

[12] Vaillant J., *Systèmes fortement hyperboliques et systèmes symétriques*, C.R.A.S. Acad. Sci. Paris, t. 328 - Série I (1999), p. 407-412

[13] Vaillant J., *Systèmes fortement hyperboliques, dimension réduite et symétrie* [à paraître]

[14] Vaillant J., *Symétrie des opérateurs fortement hyperboliques* 4×4 *ayant un point triple caractéristique dans* $\mathbb{R}^3$ [Colloque Cattabriga, Annali di mat. di Ferrare, Ser. VII, Sc. Mat. Suppl. Vol. XLV (2000), à paraître]