

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Jérôme GÄRTNER

Points de Darmon et variétés de Shimura

dirigée par Jan NEKOVÁŘ

Soutenue le 11 janvier 2011 devant le jury composé de :

M. Nicolas BERGERON	Université Paris 6	Examineur
M. Jan Hendrik BRUINIER	Technische Universität Darmstadt	Rapporteur
M. Bruno KLINGLER	Université Paris 7	Examineur
M. Jan NEKOVÁŘ	Université Paris 6	Directeur
M. Pierre PARENT	Université Bordeaux 1	co-Directeur
M. Emmanuel ULLMO	Université Paris 11	Examineur

Institut de Mathématiques de Jussieu
4, place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

*Cette thèse est dédiée à mon oncle,
à Fanny et à Liora.*

*Voilà donc les débris de l'humaine science !
Et, depuis cinq mille ans qu'on a toujours douté,
Après tant de fatigue et de persévérance,
C'est là le dernier mot qui nous en est resté !
Ah ! pauvres insensés, misérables cervelles,
Qui de tant de façons avez tout expliqué,
Pour aller jusqu'aux cieux il vous fallait des ailes ;
Vous aviez le désir, la foi vous a manqué.*

Alfred de Musset, 1838.

Remerciements

Lorsqu'un thésard en vient à écrire ses remerciements, les choses commencent à se concrétiser. L'enjeu est double : il faut d'une part prendre ses précautions et présenter ses excuses aux nombreuses personnes qui devraient être remerciées ici mais qui seront omises — involontairement bien sûr — mais d'autre part s'assurer suffisamment de prose pour que le publique ne s'ennuie pas durant les 60 minutes de soutenance. Ces deux précautions étant prises, je commence...

Je tiens avant toute chose à remercier mon directeur de thèse Jan Nekovář, qui aura été d'un constant soutien au cours de mon master puis de ma thèse. Jan est un directeur qui sort de l'ordinaire, que ce soit par sa volonté de pousser ses étudiants, par la qualité de ses explications, son investissement et son aide pour quasiment tous les choix que j'ai eu à faire ces dernières années : je n'aurais jamais réussi sans lui ni dans les maths, ni dans le choix de la bière. Il est difficile de faire passer toute ma gratitude en quelques lignes, que tout soit condensé dans un grand MERCI!

Je remercie aussi Pierre Parent qui a suivi depuis Bordeaux l'évolution de cette thèse. Il n'a jamais perdu d'occasion de se tenir au courant, et, même si j'ai plus travaillé avec Jan, je lui dois une partie de la motivation nécessaire à aller de l'avant.

Viennent ensuite les rapporteurs. Je suis très touché qu'Henri Darmon et Jan Hendrik Bruinier aient accepté de relire ce manuscrit. Je remercie vivement Henri dont l'enthousiasme contagieux m'a accompagné depuis le moment où je l'ai rencontré en juin 2008 jusqu'à aujourd'hui. Je lui dois bien entendu plus que cela puisque ses travaux sont au cœur de ma thèse (si le lecteur attentif veut bien se référer au titre du présent manuscrit...). J'ai aussi eu l'occasion de rencontrer Jan Bruinier durant ma thèse, lors de son exposé au séminaire de théorie des nombres. Cela faisait déjà quelque temps que je travaillais autour de son domaine, et il faut dire que son exposé était d'une telle clarté qu'il m'a ouvert bien des horizons concernant le programme de Kudla. Je le remercie de plus de prendre le temps supplémentaire de venir écouter ma soutenance.

Merci aux membres de mon jury. C'est un plaisir d'y compter Nicolas Bergeron, qui a toujours répondu aux questions tournant autour de l'homologie (même si on parle beaucoup de cohomologie de Betti dans ce manuscrit) et du théorème de Matsushima-Shimura. Un double remerciement à Bruno Klingler, de participer à mon jury, et d'avoir pris le temps de me rencontrer il y a quelques années alors qu'il était en plein déménagement. Enfin je remercie très sincèrement Emmanuel Ullmo d'avoir accepté de participer à ce jury.

Si je devais faire la liste de tout ce que je dois à Christophe Cornut, je sais que le lecteur attentif serait encore à lire ses remerciements pendant les délibérations du jury. Cette thèse doit beaucoup à Christophe. Déjà pour sa capacité d'écoute et ses réponses (perspicaces ?) à de nombreuses énigmes posées par Jan. Ensuite pour ces multiples conversations autour de thèmes aussi divers que les cycles CM, l'immobilier, les enfants, les crèches et la CAF. Enfin pour son aide cruciale lorsqu'en juillet dernier j'en suis venu à prouver les proposi-

tions 3.4.3.2 et 3.4.3.5... Sans Christophe, mon passage à l'IMJ aurait été beaucoup moins agréable et productif.

Avant d'en venir aux collègues et/ou amis, je tiens à distinguer deux personnes qui ont de près ou de loin contribué à cette thèse. Tout d'abord Romain Cosset. Lors de nos études communes à Cachan je ne m'attendais pas à ce qu'on ait à collaborer sur un point de recherche. Je suis vraiment reconnaissant du temps qu'il a passé sur Magma à coder de manière intelligente mes fonctions idiotes. Sans lui le projet décrit dans l'appendice de ce manuscrit n'aurait jamais vu le jour. Même si les calculs en question sont très lents, je pense que ce côté effectif était essentiel dans ma thèse, ne serait-ce que par la bouffée d'air que cela m'a apporté alors que j'en étais à la recherche de « la bonne cohomologie ».

Ce qui m'amène à Julien Grivaux. Je sais que c'est devenu un Grand Ponte depuis qu'il est marseillais, mais je pense que sa légende survivra longtemps dans les annales de l'IMJ. Julien est de ces mathématiciens éclectique et d'une intelligence foudroyante, tout en étant toujours de bon conseil. Je l'ai beaucoup embêté lorsque j'ai eu à travailler sur les invariants cohomologiques secondaires. Au final son aide n'est visible dans ce manuscrit qu'au chapitre 4, mais son rôle dans ma thèse, comme dans celle de beaucoup de thésards de l'IMJ, s'est avéré essentiel.

A partir de maintenant je sais qu'il ne faut pas que je m'étende, mais les personnes ci-dessous sont très sincèrement remerciées :

Merci aux anciens 7C04 et 7C10 (et leurs moitiés), sans ordre particulier : Cécile (qui aide à monter les cuisines), Manu (qui ne fait pas que corriger le \LaTeX), Fabien (expert en trônes de Fer), Elodie (qui cherche Jack), Bora (que je laisse trop seul), Benjamin (déménagement 1), Luc (qui ne laisse pas tomber Dunkl pour un crumble tomates), Banafsheh (pour les chaises musicales en TD), Mirjam (qui m'a obtenu un poste de coach administratif) et Ismaël (il faut bien mettre un 7C08 dans le lot) : pour les pauses (trop ?) nombreuses, les soirées à chasser le mammoth et plein d'autres choses !

Merci aux Ponts (idem, et leurs moitiés) Cédric, Fred, Matthieu en particulier pour m'avoir hébergé pendant un an, Seb, Jeff, Christophe, Catherine, Aurore, Marlène, Claire. Pour m'avoir intégré dans une école d'ingénieur... Merci !

Merci aux amis de longue date (qui, pour le coup ne sont vraiment pas des collègues) : Yaël, Mathias, Christophe – qui assiste à certains TD d'arithmétique –, Antoine, Kévin etc... j'imagine que j'en oublie beaucoup ici.

Je tiens à remercier ma belle famille pour leur accueil chaleureux il y a plus de 6 ans. En particulier : merci à mes beaux-parents pour leur soutien, leur nourriture et leur voiture (qui n'a pas fait long feu, je le rappelle). Merci à Marianne, Saul, Daphné, Gabrielle, Elie pour ces week-end au Déluge et autres. Je sais la chance que j'ai d'être tombé sur une belle-famille « potable ». Six ans de vie commune ont déjà eu leur lot de décès malheureusement. J'ai bien entendu une pensée pour Miriam et Robert, mais aussi pour Estelle qui nous aura hébergé pendant deux ans. Je connais peu de grand-mère qui aurait accepté, je lui en suis très reconnaissant. Merci aussi de m'avoir laissé l'usufruit de sa cave pour préparer l'agreg, mes pieds gelés s'en souviennent encore.

Le cercle des remerciements se restreint enfin à la famille. Merci à mes parents d'avoir toujours pourvu à mes besoins. Je profite de ces lignes pour rectifier une erreur : la contribution de ma mère à mon éducation ne s'est pas restreinte au gâteau aux amandes. Le peu de qualités que j'ai en tant que chef de famille aujourd'hui est conséquence des conseils qu'elle m'aura prodigués. Je remercie aussi mon père, qui m'aura plus transmis le côté

gestionnaire du gène Gärtner. Merci à ma sœur, Grégory et à Tess d'être présents au quotidien. Je les redécouvre en grands-parents - tante - oncle - cousine d'exception. Mes grands-parents n'ont pas accompagné ma vie d'adulte, mais je les remercie pour mes souvenirs d'enfant. Je dois aussi beaucoup à ma tante et à mon oncle qui, à force de coups de livre sans coût, m'aura finalement fait pousser une petite bosse, mais de quoi ?

Il y a quelques années, je n'aurais jamais imaginé le bonheur que je vivrais au quotidien aux côtés d'une femme extraordinaire. Judith a certes quelques défauts, mais une montagne de qualités. Je ne croyais pas qu'il existe une femme aussi douce, compréhensive, aimante et patiente. Et surtout je n'imaginai pas quelle mère magique elle ferait. Elle a transmis toutes ses qualités à Lise, pour mon plus grand bonheur. Mes femmes, ma vie.

Résumé

Cette thèse s'intéresse à la recherche de points rationnels sur les courbes elliptiques. Darmon et Logan ont proposé une construction conjecturale de points rationnels sur des courbes elliptiques modulaires définies sur un corps de nombres totalement réel. Cette construction va au delà de la construction classique des points de Heegner. C'est sur la généralisation de ces travaux que porte cette thèse. Après un premier chapitre de rappels concernant essentiellement les variétés de Shimura, on construit, dans le chapitre deux une forme différentielle dont l'ensemble des périodes est, sous une conjecture due à Yoshida, un réseau. On y définit aussi un ensemble de cycles dont la classe d'homologie est de torsion. A l'aide de ces données, on énonce au chapitre suivant une conjecture généralisant celle de Darmon et Logan. On s'intéresse aussi aux propriétés de ces nouveaux points, principalement en lien avec les théorèmes "classiques" de Gross-Zagier et Gross-Kohnen-Zagier. Le chapitre 4 tente de rendre holomorphes les opérations du chapitre 2, et le chapitre 5 de les rendre plus explicites. Cette thèse comporte une annexe concernant les vérifications informatiques de la conjecture de Darmon.

Mots-clefs

Courbes elliptiques, points de Heegner, formule de Gross-Zagier, points de Stark-Heegner, variétés de Shimura, algèbres de quaternions.

Abstract

This thesis deals with rational points on elliptic curves. Darmon and Logan proposed a conjectural construction of rational points on modular elliptic curves defined over a totally real number field. This construction goes farther than Heegner points' classical construction. This thesis generalize Darmon's construction. The first chapter essentially recalls some basic facts concerning the cohomology of quaternionic Shimura varieties. In the second chapter is built a differential form, whose set of periods is a lattice, under a conjecture due to Yoshida. The end of chapter two focus on special cycles, which homological classes are torsion. These new objects allow us to generalize Darmon's conjecture in the beginning of chapter 3. We state for this family of points a conjectural Gross-Zagier formula and try to relate them with some kind of Gross-Kohnen-Zagier theorem. In the last chapters we explicit the former constructions. This thesis ends with a survey of numerical evidences for Darmon's conjecture.

Keywords

Elliptic curves, Heegner points, Gross-Zagier formula, Stark-Heegner points, Shimura varieties, quaternion algebras.

Table des matières

Introduction	13
Notations	19
1 Rappels autour des variétés de Shimura	21
1.1 Généralités	21
1.1.1 Définitions	21
1.1.2 Variétés de Shimura quaternioniques	21
1.1.3 Correspondances de Hecke	24
1.1.4 Formes différentielles	25
1.2 Rappels dépendants de choix d'isomorphismes	26
1.2.1 Définition des variétés de Shimura	26
1.2.2 Formes automorphes	28
1.2.3 Théorème de Matsushima-Shimura	32
2 Périodes et orbites toriques	33
2.1 Périodes	33
2.1.1 Hypothèses concernant la courbe elliptique	33
2.1.2 Conjecture de Yoshida	34
2.1.3 Réseaux et périodes	36
2.1.4 Cas où la multiplicité n'est plus 1	39
2.2 Tores et cycles spéciaux	42
2.2.1 Cycles spéciaux sur X	42
2.2.2 Tore sur $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$	44
2.2.3 Classe d'homologie des tores \mathcal{T}_b	47
2.2.4 Étude de J_b^β	49
3 Points de Darmon généralisés	53
3.1 Analogie de la conjecture de Darmon	53
3.1.1 Énoncé de la conjecture	53
3.1.2 Conséquences	55
3.1.3 Corps de définition	55
3.1.4 Choix de z_1	57
3.2 Détermination de B à l'aide des facteurs ε	57
3.2.1 Facteurs ε et vecteurs test	57
3.2.2 Détermination de B	58
3.3 Formule de Gross-Zagier	63
3.3.1 Construction d'une forme linéaire invariante	64
3.3.2 Formule de Gross-Zagier conjecturale	68

3.4	Variétés de Shimura de type orthogonal	68
3.4.1	Discussion sur les signes	70
3.4.2	Variété de Shimura orthogonale et cycles spéciaux	73
3.4.3	Un exemple d'énoncé du type Gross-Kohnen-Zagier	76
4	Opérateurs de Hecke archimédiens	81
5	Où l'on fixe des isomorphismes	89
5.1	Structure analytique « concrète »	89
5.2	Opérateurs de Hecke archimédiens	91
5.2.1	Opérateurs de Hecke archimédiens et formes automorphes	91
5.2.2	Opérateurs de Hecke archimédiens et formes modulaires de Hilbert	93
5.3	Cycles spéciaux de X	96
5.4	Points de Darmon et variétés de Shimura de type orthogonal	104
A	Calculs effectifs des points de Stark-Heegner	107
A.1	Vérifications de Darmon et Logan	107
A.2	Cas des courbes de conducteur premier	107
A.3	Cas où $G \neq \text{GL}_2$	109
	Bibliographie	111
	Index des notations	117

Introduction

Le but de cette thèse est de généraliser les travaux de Darmon [Dar04] concernant la construction de points *de Stark-Heegner*, c'est-à-dire de points rationnels sur une courbe elliptique définie sur un corps totalement réel. Rappelons tout d'abord quelques travaux antérieurs concernant la construction de points rationnels sur les courbes elliptiques.

Points de Heegner Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q} et N son conducteur. On sait depuis [BCDT01] qu'une telle courbe est modulaire, c'est-à-dire qu'il existe une forme modulaire parabolique de poids 2 de niveau N vérifiant l'égalité des fonctions L :

$$\forall s \in \left\{ z \in \mathbb{C} \operatorname{Re}(s) > \frac{3}{2} \right\} \quad L(E, s) = L(f, s).$$

Il en découle une uniformisation modulaire

$$\Phi_N : \Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H} \longrightarrow E(\mathbb{C})$$

obtenue en composant l'application

$$z \in \mathcal{H} \longmapsto c \int_{i\infty}^z 2i\pi f(z) dz,$$

où c désigne la constante de Manin, avec l'uniformisation de Weierstrass donnée par la fonction \wp .

Soit K un corps quadratique imaginaire et $z_0 \in \mathcal{H} \cap K$. Sous l'hypothèse (dite de Heegner) que le conducteur N de la courbe se décompose dans K , la donnée d'un point de Heegner est essentiellement celle de $2i\pi \int_{i\infty}^{z_0} f(z) dz$ modulo les périodes de f , i.e. l'image par l'application d'Abel-Jacobi de z_0 dans $\mathbb{C}/\Lambda_E \simeq E(\mathbb{C})$. La théorie de la multiplication complexe montre que ces points sont définis sur certains corps de classe de K . En particulier si le point $z_0 \in \Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$ vérifie l'égalité suivante

$$\{\gamma \in M_0(N) \mid \gamma z_0 = z_0\} \cup \{0\} = \mathcal{O}_K,$$

le point P_1 obtenu est défini sur le corps de classe de Hilbert $K[1]$ de K . L'intérêt de ces points est qu'ils fournissent des exemples de points d'ordre infini, et qu'il est possible de les calculer explicitement.

Lien avec la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer Notons $P_K \in E(K)$ la trace de P_1 à K . La formule de Gross-Zagier [GZ86] lie la hauteur de Néron-Tate $h_{\text{NT}}(P_K)$ de P_K à la dérivée de la fonction L de E/K en son centre de symétrie :

$$h_{\text{NT}}(P_K) = \text{cste} \times L'(E/K, 1),$$

où c désigne une constante non nulle dépendant de K et de l'uniformisation modulaire de E . Ce résultat, conjugué au théorème de Kolyvagin qui affirme que si P_K n'est pas de torsion alors le groupe de Mordell-Weil $E(K)$ est de rang un, c.f. [Kol88b, Kol88a, Dar04], fournit un résultat partiel dans le sens de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer :

Théorème. (*Gross-Zagier, Kolyvagin*) *Si E/\mathbb{Q} est une courbe elliptique et si $\text{ord}_{s=1}L(E, s) \leq 1$, alors*

$$\text{rang}(E(\mathbb{Q})) = \text{ord}_{s=1}L(E, s).$$

Dans ce cas la position des points de Heegner dans le groupe de Mordell-Weil ont été précisés dans [GKZ87].

Généralisation aux courbes de Shimura La construction de points de Heegner a été généralisée dans le cas où l'on s'intéresse à une courbe elliptique qui peut être uniformisée à l'aide d'une courbe de Shimura. Ce type de méthode permet d'alléger l'hypothèse de Heegner, c.f [Dar04]. On obtient de manière analogue des points définis sur des corps de classe de corps quadratiques imaginaires. Le lien entre ces points et la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer est encore satisfait, *via* la formule de Gross-Zagier, dont la preuve est due à Zhang [Zha01a]. Un inconvénient de cette généralisation est qu'elle dépend de la théorie de la multiplication complexe, qui ne permet a priori de ne traiter que le cas des extensions de type C.M.

Philosophie des points de Darmon Dans [Dar01] Darmon propose une construction conjecturale de points rationnels sur des courbes elliptiques modulaires. Le principe de cette construction est d'utiliser l'analyse p -adique pour obtenir des points locaux, et de conjecturer que ces points sont globaux. Des évidences numériques sont fournies dans [DG02, DP06] pour appuyer cette construction. L'idée de Darmon, qui revient essentiellement à construire certains cycles et à en prendre l'image par une application d'Abel-Jacobi, s'est peu à peu développée. Le lien avec les fonctions L est établi, au moins conjecturellement c.f. [Dar06] ainsi qu'une évidence théorique [BD09]. Un analogue de la construction de Darmon est proposé par Trifković dans [Tri06] pour les courbes définies sur des corps quadratiques imaginaires. Une construction archimédienne est proposée dans [DL03] pour les courbes définies sur des corps de nombre totalement réels, construction qui est le point de départ de cette thèse.

Toutes ces méthodes, bien que conjecturales, élargissent la possibilité de construire des points rationnels bien au delà de ce que permettait de faire la théorie de la multiplication complexe. Mentionnons de plus que les idées sous-jacentes à la construction de Darmon ont aussi permis la construction de généralisations d'unités elliptiques [CD08, DD06], ainsi que la mise en œuvre d'algorithmes pour construire des courbes elliptiques modulaires, [Dem08] plus précisément pour expliciter le réseau des périodes d'une forme modulaire de Hilbert.

Points de Darmon pour les extensions ATR Rappelons ici les grandes lignes de la construction des points de Darmon, que l'on peut trouver dans [DL03] (et dans [Dar04] pour des corps de base qui ne sont pas quadratiques). Soit F un corps quadratique réel de nombre de classe au sens restreint égal à un. On se fixe une unité ε vérifiant $\varepsilon_1 := \tau_1(\varepsilon) > 0$ et $\varepsilon_2 := \tau_2(\varepsilon) < 0$ où τ_1, τ_2 désignent les places archimédiennes de F . Soit E/F une courbe elliptique modulaire et N son conducteur. On note f la forme modulaire de Hilbert associée à E et $\Gamma = \Gamma_0(N)$. La forme différentielle $\omega_f = -4\pi^2 f(z_1, z_2) dz_1 dz_2$, qui est définie sur

la surface modulaire de Hilbert $\Gamma \backslash \mathcal{H}^2$ est naturellement attachée à f . Soit ω_f^+ la forme différentielle modifiée suivante, où d est un générateur totalement positif de la différentielle de F

$$\omega_f^+ = -\frac{4\pi^2}{\sqrt{\tau_1(d)\tau_2(d)}} (f(z_1, z_2)dz_1dz_2 + f(\varepsilon_1 z_1, \varepsilon_2 \overline{z_2})d(\varepsilon_1 z_1)d(\varepsilon_2 \overline{z_2})).$$

Cette forme différentielle est Γ -invariante et on a

$$\forall \gamma \in \Gamma \quad \int_{\gamma z_1}^{\gamma z_2} \int_{\gamma z_3}^{\gamma z_4} \omega_f^+ = \int_{z_1}^{z_2} \int_{z_3}^{z_4} \omega_f^+.$$

Darmon introduit alors un certain ensemble de périodes Λ_f qu'il conjecture être un réseau de \mathbb{C} commensurable au réseau de Néron Λ_E de E , en reformulant une conjecture due à Oda [Oda82]. Soit e_Γ l'exposant de l'abélianisé Γ_{ab} de Γ (c.f. proposition 1.3 de [DL03]) et $\tilde{\Lambda}_f = e_\Gamma^{-1}\Lambda_f$. Ceci permet de définir pour $\tau, x, y \in \mathcal{H}$ une intégrale semi-définie

$$m_\tau\{x \rightarrow y\} = \int_x^\tau \int_x^y \omega_f^+ \in \mathbb{C}/\tilde{\Lambda}_f^+.$$

Cette intégrale satisfait les propriétés suivantes :

$$\int_{x_1}^\tau \int_{x_1}^{x_2} \omega_f^+ + \int_{x_2}^\tau \int_{x_2}^{x_3} \omega_f^+ = \int_{x_1}^\tau \int_{x_1}^{x_3} \omega_f^+ \quad (1)$$

$$\int_{x_1}^{\tau_2} \int_{x_1}^{x_2} \omega_f^+ - \int_{x_1}^{\tau_1} \int_{x_1}^{x_2} \omega_f^+ = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{x_1}^{x_2} \omega_f^+ \quad (2)$$

Soit K/F une extension quadratique ATR « almost totally real » de F , c'est-à-dire que K est complexe au dessus de τ_1 et réelle au dessus de τ_2 . Soit

$$\Psi : K \hookrightarrow M_2(F)$$

un plongement vérifiant la condition d'optimalité

$$\Psi(\mathcal{O}_K) = \Psi(K) \cap M_2(\mathcal{O}_F),$$

où \mathcal{O}_F et \mathcal{O}_K désignent respectivement l'anneau des entiers de F et de K . Le groupe $\Psi(\mathcal{O}_K^\times) \cap \Gamma$ est de rang un modulo $\Psi(\mathcal{O}_F^\times)$ et a un unique point fixe $\tau \in \tau_1(K) \cap \mathcal{H}$. Soit γ_τ un générateur de ce groupe et $x \in \mathcal{H}$. Darmon pose

$$J_\tau^+ = \int_x^\tau \int_x^{\gamma_\tau x} \omega_f^+,$$

et vérifie que cette intégrale ne dépend pas du choix de x , seulement de l'orbite de τ sous Γ . Soit

$$\Phi : \mathbb{C}/\Lambda_E \longrightarrow E(\mathbb{C})$$

l'uniformisation de Weierstrass, et $\xi \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $\xi\Lambda_f \subset \Lambda_E$ et Darmon définit le point P_τ^+ par

$$P_\tau^+ = \Phi(\xi J_\tau^+).$$

La conjecture s'énonce alors de la manière suivante :

Conjecture. ([DL03], conjecture 2.3, [Dar04] conjecture 8.17)

Soit $K[1]$ le corps de classe de Hilbert de K , alors le point local $P_\tau^+ \in E(\mathbb{C})$ est dans $E(K[1])$.

Remarquons que Darmon précise l'action de $\text{Gal}(K[1]/L)$ sur ce point à l'aide d'une action sur les plongements optimaux de K dans $M_2(F)$, et considère des points plus généraux, définis sur le corps de classe de Hilbert au sens restreint $K[1]^+$ tout en précisant l'action de $\text{Gal}(K[1]^+/K[1])$ sur ces points.

Objectif de cette thèse Dans cette thèse, nous généralisons la construction archimédienne de Darmon, en allégeant la condition de ramification sur l'extension quadratique K ce qui se fait principalement en échangeant le rôle joué par la variété modulaire de Hilbert avec une variété de Shimura quaternionique. Ceci permet d'avoir une formulation adélique de la construction, et d'énoncer une conjecture sans supposer que le corps de base est de nombre de classe au sens restreint égal à un.

Le nouveau cadre obtenu, naturellement automorphe, se prête plus facilement à une éventuelle étude théorique des points de Darmon. Il permet par exemple d'obtenir une formule unique pour décrire l'action de $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$, sans avoir à séparer l'action de la partie archimédienne de celle de la partie finie. On peut aussi construire plus facilement une forme linéaire invariante sur l'espace des formes automorphes. Dans ce cadre, une formule de Gross-Zagier conjecturale prend naturellement sa place.

L'objectif secondaire de cette thèse est de placer la construction de Darmon dans le cadre de la théorie de Kudla [Kud97] des cycles sur les variétés de Shimura de type orthogonal. Les cycles nécessaires à la construction des points de Darmon apparaissent alors comme des cas particulier des cycles utilisés par Kudla, qui ont l'avantage d'être naturellement « en famille » ce qui ouvre de multiples perspectives.

Contenu du manuscrit Décrivons un peu plus les grandes lignes de cette thèse.

Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d , et τ_1, \dots, τ_d ses places archimédiennes. On se fixe $r \in \llbracket 2; d \rrbracket$ et B/F une algèbre de quaternions qui se décompose en τ_1, \dots, τ_r et se ramifie en $\tau_{r+1}, \dots, \tau_d$. Soit \widehat{F} l'anneau des adèles finies de F . On note $\widehat{B}^\times = B^\times \otimes_F \widehat{F}$ et on se fixe un sous-groupe ouvert compact H de \widehat{B}^\times . Soit alors Sh_H la variété de Shimura quaternionique dont les points complexes s'identifient à

$$\text{Sh}_H(\mathbb{C}) = B^\times \backslash (\mathbb{C} \backslash \mathbb{R})^r \times \widehat{B}^\times / H.$$

Soit E/F une courbe elliptique modulaire. Il existe donc une forme modulaire de Hilbert $\tilde{\varphi}$ vérifiant

$$L(E, s) = L(\tilde{\varphi}, s).$$

Nous supposons que $\tilde{\varphi}$ est dans l'image de la correspondance de Jacquet-Langlands pour B , c'est-à-dire qu'il existe une forme automorphe $\varphi \in S_2(B_{\mathbb{A}}^\times)$ vérifiant l'égalité entre représentations automorphes

$$\pi(\tilde{\varphi}) = \text{JL}(\pi(\varphi)).$$

La forme automorphe φ correspond naturellement à une forme différentielle holomorphe de degré r sur $\text{Sh}_H(\mathbb{C})$ que l'on note ω_φ . A l'aide de « conjugaisons complexes partielles », il est possible de modifier ω_φ en ω_φ^+ , dont l'ensemble des périodes est, sous une conjecture due à Yoshida, un réseau comparable au réseau de Néron Λ_E de E : il existe une constante ξ telle que

$$\xi^{-1} \Lambda_\varphi \subset \Lambda_E.$$

Soit K une extension quadratique de F dans laquelle les places τ_2, \dots, τ_r se décomposent et les places $\tau_1, \tau_{r+1}, \dots, \tau_d$ se ramifient. On se fixe un plongement

$$q : K \hookrightarrow B.$$

Il y a alors une action de $(K \otimes \mathbb{R})^\times / (F \otimes \mathbb{R})^\times$ sur $(\mathbb{C} \backslash \mathbb{R})^r$ qui permet de construire une sous-variété \mathcal{T}° de $(\mathbb{C} \backslash \mathbb{R})^r$ et, pour $b \in B_{\mathbb{A}}^\times$ fixé, un tore \mathcal{T}_b° sur $\text{Sh}_H(\mathbb{C})$, de dimension

$r - 1$. À l'aide d'un théorème de Matsushima et Shimura, on peut alors construire une r -chaîne Δ_b° sur $\text{Sh}_H(\mathbb{C})$ vérifiant

$$n\mathcal{T}_b^\circ = \partial\Delta_b^\circ$$

pour un certain entier n .

Soit

$$\Phi : \mathbb{C}/\Lambda_E \longrightarrow E(\mathbb{C})$$

l'uniformisation de Weierstrass et

$$\text{rec}_K : K_{\mathbb{A}}^\times \longrightarrow \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K).$$

On peut maintenant énoncer la conjecture principale

Conjecture. (*Conjecture 3.1.1.1, page 53*)

Le point $P_b^+ = \Phi\left(\xi \int_{\Delta_b^\circ} \omega_\varphi^+\right) \in E(\mathbb{C})$ s'identifie à un point de $E(K^{\text{ab}})$ et

$$\forall a \in K_{\mathbb{A}}^\times \quad \text{rec}_K(a)P_b^+ = P_{q_{\mathbb{A}}(a)b}^+.$$

Remarquons que pour simplifier la présentation de cette conjecture, nous ignorons volontairement l'effet d'un certain caractère β , remplacé par le signe $+$ en exposant ici. Les détails trouvent naturellement leur place dans le corps du texte.

Plan de la thèse Ce manuscrit est découpé en cinq chapitres et une annexe.

Le chapitre 1 regroupe les définitions des objets utilisés : variétés de Shimura quaternioniques, formes automorphes, leur correspondance avec les formes différentielles, le théorème de Matsushima - Shimura. On y définit aussi des opérateurs t_j^* , qui permettent d'obtenir la forme différentielle ω_φ^+ , désignée par ω_φ^β par la suite.

Le chapitre 2 est consacré à la construction des objets nécessaires à la définition des points de Darmon. On utilise dans un premier temps une conjecture de Yoshida pour montrer que l'ensemble des périodes de ω_φ^+ est un réseau. Cette étape correspond à l'utilisation de la conjecture d'Oda chez Darmon. Dans une deuxième partie plus ou moins indépendante, nous donnons une description de l'action de $(K \otimes \mathbb{R})^\times / (F \otimes \mathbb{R})^\times$ sur $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$. On y étudie les orbites sous cette action et l'on montre que leur projections sur les variétés de Shimura sont des tores \mathcal{T}_b° . À l'aide du théorème de Matsushima - Shimura on peut alors construire les chaînes Δ_b° . On étudie ensuite l'effet des différents choix, que l'on est amené à faire, sur les tores \mathcal{T}_b° . Enfin on fournit des informations concernant l'action de différents groupes sur l'ensemble des tores \mathcal{T}_b° .

Le chapitre 3 contient l'énoncé principal de cette thèse, qui généralise la conjecture de Darmon. On y étudie les corps de définition des points de Darmon, ainsi que les liens entre l'algèbre de quaternions et les signes de certaines équations fonctionnelles. On y énonce ensuite une formule de Gross-Zagier conjecturale, après avoir construit une forme linéaire invariante dont les points de Darmon devraient constituer des vecteurs test. Enfin on se place dans le cadre des variétés de Shimura de type orthogonal, pour énoncer des conjectures qui devraient fournir des analogues, dans le cas des points de Darmon, au théorème de Gross-Kohnen-Zagier dans le cas des points de Heegner classiques.

Le chapitre 4 définit les opérateurs de Hecke archimédiens, qui sont un analogue des opérateurs t_j qui permettent d'obtenir la forme différentielle ω_φ^+ et les points de Darmon. On donne une définition de ces opérateurs en terme de structure de Hodge pour l'espace symétrique Hermitien associé à la variété de Shimura quaternionique. On montre aussi que ces opérateurs peuvent être vu comme des applications holomorphes sur une variété qui est union de certaines variétés de Shimura. Cette étude suggère ainsi de se placer sur une variété plus grosse qu'une variété de Shimura, afin d'obtenir des objets naturellement holomorphes.

L'objectif du dernier chapitre est de se fixer des isomorphismes entre l'algèbre de quaternions B et certaines algèbres de matrices pour fournir des illustrations aux 4 premiers chapitres. On revient en premier sur les opérateurs de Hecke archimédiens, puis sur l'action des opérateurs t_j sur les formes automorphes et les formes modulaires de Hilbert. On prouve alors que les opérations que l'on effectue au chapitre 2 sur la forme différentielle ω_φ correspondent bien aux opérations de Darmon. On fournit ensuite des figures qui représentent les cycles spéciaux \mathcal{T}° ainsi que leurs images par la conjugaison complexe. Pour finir on donne une version matricielle des espaces quadratiques considérés à la fin du chapitre 3.

L'annexe A fait un bref survol des évidences numériques connues à ce jour en faveur de la conjecture de Darmon et fournit un premier résultat numérique d'un travail en cours en collaboration avec R. Cosset. Ce travail devrait permettre de calculer systématiquement les points de Darmon dans le cas de corps de base de nombre de classe au sens restreint 1 et d'extensions quadratiques ATR, à l'aide du logiciel `Magma`.

Notations

Les notations suivantes sont valables pour la totalité du manuscrit :

- Notons $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ la clôture algébrique du corps des nombres rationnels \mathbb{Q} .
- F est un corps de nombres totalement réel de degré d .
- $\tau_1, \dots, \tau_d : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ désignent les d places archimédiennes de F .
- Si K/\mathbb{Q} est un corps de nombres, \mathcal{O}_K (respectivement \mathcal{O}_K^\times) est son anneau des entiers (respectivement groupe des unités).
- Si v est une place de K , K_v est le complété de K en v .
- Si K/F est une extension, pour toute place v de F , $K_v = K \otimes_F F_v$.
- Si K/\mathbb{Q} est un corps de nombres, on notera h_K son nombre de classes, h_K^+ son nombre de classes au sens restreint.
- Si K/\mathbb{Q} est un corps de nombres, $K_{\mathbb{A}}$ (respectivement \widehat{K} , $K_{\mathbb{A}}^\times$, \widehat{K}^\times) désigne l'anneau des adèles de K (respectivement les adèles finies de K , les idèles de K , les idèles finies de K).
- B/F désigne une algèbre de quaternions, $\text{Ram}(B)$ l'ensemble des places de F en lesquelles B se ramifie.
- $B_{\mathbb{A}} = B \otimes_F F_{\mathbb{A}}$ (respectivement $\widehat{B} = B \otimes_F \widehat{F}$) les points adéliques de B .
- \mathcal{H} est le demi-plan de Poincaré.

Sauf mention contraire, nous supposons que $B \neq M_2(F)$, que $d \geq 2$ et qu'il existe $r \in \llbracket 2; d \rrbracket$ tel que les places archimédiennes de F en lesquelles B se décompose soient exactement τ_1, \dots, τ_r .

Chapitre 1

Rappels autour des variétés de Shimura

Ce chapitre est consacré aux rappels et définitions nécessaires à la construction des points de Darmon. Toutes les notions sont plus ou moins classiques. Les principales références concernant les courbes de Shimura sont les articles [Car86], [CV07, CV05] et [Nek07]. Le livre [Rei97] introduit aux variétés de Shimura quaternioniques et [Mil05] sert de référence générale sur les variétés de Shimura.

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Soit B/F une algèbre de quaternions ramifiée en les places

$$\{\tau_{r+1}, \dots, \tau_d\} \cup \{v \in S_B\},$$

où S_B désigne un ensemble fini fixé de places finies, tel que $|S_B| \equiv d - r \pmod{2}$.

Exemple 1.1.1.1. On peut supposer que l'on est dans une situation analogue à celle de [Dar04] chapitre 4. Soit N un idéal de \mathcal{O}_F que l'on décompose en $N = N_+ N_-$, avec N_+ et N_- idéaux premiers entre eux et N_- produit de t idéaux premiers distincts $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$, où $t \equiv d - r \pmod{2}$. Il existe alors une unique algèbre de quaternions B/F vérifiant

$$\text{Ram}(B) = \{\tau_{r+1}, \dots, \tau_d\} \cup \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t\}.$$

1.1.2 Variétés de Shimura quaternioniques

Posons $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}} B^\times$ la restriction à la Weil du groupe B^\times . Pour toute \mathbb{Q} -algèbre commutative A , on a ainsi $G(A) = (B \otimes_{\mathbb{Q}} A)^\times$. Notons G_i le groupe algébrique réel $G_i = G \otimes_{F, \tau_i} \mathbb{R}$ et $\text{nr} : G \rightarrow \text{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m$ la norme réduite. On pose $\mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}})$.

Structure de Hodge et donnée de Shimura

Rappelons que $\mathbb{S} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$ est un tore réel, vérifiant $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$ et $\mathbb{S}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$. On a un isomorphisme $\mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$ et $\text{Hom}(\mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}})$ est engendré par deux caractères z et \bar{z} , tels que la composée

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{S}(\mathbb{C}) \xrightarrow{z, \bar{z}} \mathbb{C}^\times$$

est l'identité (respectivement la conjugaison complexe).

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel et $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. A toute représentation

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

on peut associer une structure de Hodge sur $V_{\mathbb{C}}$: le sous-espace $V^{p,q}$ de $V_{\mathbb{C}}$ est défini comme étant le sous-espace sur lequel \mathbb{S} agit par $z^{-p}\bar{z}^{-q}$. Ce choix nous permet d'être cohérent avec le choix que nous ferons ultérieurement de normaliser la loi de réciprocité d'Artin par des Frobenius géométriques.

Nous noterons $F(h)$ la filtration de Hodge sur $V_{\mathbb{C}}$:

$$F(h)^p = \bigoplus_{p' \geq p} V^{p'q'}.$$

Soit $\mathrm{Lie}(G)$ l'espace de la représentation adjointe de G et $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Nous désignerons par G^{ad} le quotient de G par son centre $Z(G)$.

Définition 1.1.2.1. Une donnée de Shimura est un couple (G, X) où G est un groupe réductif sur \mathbb{Q} et X est une $G(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison de morphismes

$$h : \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$$

vérifiant

SD1. Pour tout $h \in X$, le type de Hodge de $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ est $\{(-1, 1), (0, 0), (1, -1)\}$

SD2. G^{ad} n'a pas de \mathbb{Q} -facteur sur lequel la projection de h soit triviale.

SD3. Pour tout $h \in X$, l'automorphisme intérieur $\mathrm{ad}(h(i))$ défini par $h(i)$ fournit une involution de Cartan de $G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$.

Remarque 1.1.2.2. – L'hypothèse SD1 revient à supposer que les seuls caractères de \mathbb{S} qui agissent sur $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ sont z/\bar{z} , 1 et \bar{z}/z .

– L'hypothèse SD3 impose que le groupe

$$\{g \in G_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}), g = \mathrm{ad}(h(i))(\bar{g})\}$$

soit compact, où $g \mapsto \bar{g}$ correspond à la conjugaison complexe sur $G_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$.

Définition des variétés de Shimura

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons au cas où $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} B^{\times}$. Notons $Z = Z(G)$ le centre de G . Si H est un sous-groupe compact ouvert de $G(\widehat{\mathbb{Q}}) = \widehat{B}^{\times}$, on peut lui associer une variété analytique $\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ définie par

$$\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash \left(X \times G(\widehat{\mathbb{Q}})/H \right) = B^{\times} \backslash \left(X \times \widehat{B}^{\times}/H \right),$$

où l'action de B^{\times} à gauche et de H à droite est définie par

$$\forall k \in B^{\times} \forall h \in H \forall f \in \widehat{F}^{\times} \forall (x, b) \in X \times \widehat{B}^{\times} \quad k \cdot (x, b) \cdot hf = (kx, kbh f).$$

De manière analogue, on définit la variété analytique $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ par

$$\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash \left(X \times G(\widehat{\mathbb{Q}})/HZ(\widehat{\mathbb{Q}}) \right) = B^{\times} \backslash \left(X \times \widehat{B}^{\times}/H\widehat{F}^{\times} \right).$$

Nous noterons par la suite $[x, b]_H$ un élément de $\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ et $[x, b]_{H\widehat{F}^\times}$ les éléments de $\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$. La théorie générale des variétés de Shimura (c.f. par exemple [Mil05]) montre que $\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ constitue les points complexes d'une variété algébrique $\text{Sh}_H(G, X)$ qui admet un modèle sur un corps de nombre, appelé *corps réflexe*. Dans notre cas particulier, le corps réflexe $F(G, X)$ est

$$F' = F(G, X) = \mathbb{Q} \left(\sum_{i=1}^r \tau_j(\alpha), \alpha \in F \right) \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C},$$

et on a $F(G/Z, X) = F(G, X)$.

Remarque 1.1.2.3. Comme nous supposons que $B \neq M_2(F)$, les variétés de Shimura que nous considérons sont compactes.

Les variétés de Shimura forment un système projectif $\{\text{Sh}_H(G, X)\}_H$ indexé par les sous-groupes compacts ouverts de \widehat{B}^\times . Les applications de transition sont les

$$\text{pr} : \text{Sh}_H(G, X) \longrightarrow \text{Sh}_{H'}(G, X)$$

définies pour $H \subset H'$ sur les points complexes par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Sh}_{H'}(G, X)(\mathbb{C}) \\ [x, b]_H & \longmapsto & [x, b]_{H'} \end{array}$$

Le groupe \widehat{B}^\times agit sur le système projectif $\{\text{Sh}_G(G, X)\}_H$ par multiplication à droite. L'action est définie sur les points complexes de la façon suivante :

$$[\cdot g] : \begin{cases} \text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Sh}_{g^{-1}Hg}(G, X)(\mathbb{C}) \\ [x, b]_H & \longmapsto & [x, bg]_H \end{cases}$$

Remarque 1.1.2.4. Dans la suite de ce manuscrit, toutes les formes automorphes ont un caractère central trivial, le choix de faire le quotient par le centre dans la définition des variétés de Shimura n'est donc pas essentiel. Nous utiliserons la variété $\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$, qui est plus agréable d'un point de vue pratique.

Action de la conjugaison complexe

Notons $h_j : \mathbb{S} \longrightarrow G_{j, \mathbb{R}}$ le morphisme construit à partir de h et X_j la classe de $G_{j, \mathbb{R}}$ -conjugaison de h_j . On a une factorisation de X en $X_1 \times \cdots \times X_r$, qui découle de la factorisation naturelle $G_{\mathbb{R}} \simeq G_{1, \mathbb{R}} \times \cdots \times G_{d, \mathbb{R}}$ et fournit une factorisation du morphisme h en $(h_j)_{j \in \llbracket 1; d \rrbracket}$ avec $h_j : \mathbb{S} \rightarrow G_{j, \mathbb{R}}$.

Fixons $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ et soit $x_j \in X_j$. Par définition x_j est une application $h_x : \mathbb{S} \longrightarrow G_{j, \mathbb{R}}$. L'image $\text{Im}(h_x)$ s'identifie à un \mathbb{R} -tore maximal anisotrope de $G_{j, \mathbb{R}}$. Notons

$$\ell_j : \begin{cases} X_j & \longrightarrow & \{\mathbb{R}\text{-tores maximaux anisotropes de } G_{j, \mathbb{R}}\} \\ x_j & \longmapsto & \text{Im}(h_x) \end{cases}$$

Proposition 1.1.2.5. Avec les notations ci-dessus, pour tout $x_j \in X_j$, l'ensemble $\ell_j^{-1}(\ell_j(x_j))$ est constitué d'exactly deux éléments de X_j .

D'après la proposition 1.1.2.5, il existe une unique involution

$$t_j : X_j \longrightarrow X_j$$

qui est antiholomorphe, $G_{j,\mathbb{R}}$ -équivariante et telle que

$$\forall x_j \in X_j \quad \ell_j^{-1}(\ell_j(x_j)) = \{x_j, t_j(x_j)\}.$$

On introduit maintenant une notation utile par la suite.

Notation 1.1.2.6. Pour $\sigma = (\sigma_j)_{2 \leq j \leq r} \in \prod_{j=2}^r \{\pm 1\}$ posons $e_j \in \{0, 1\}$ tel que $\sigma_j = (-1)^{e_j}$. Nous noterons par la suite

$$t_\sigma : \begin{cases} X & \longrightarrow X \\ x & \longmapsto \prod_{j=2}^r t_j^{e_j} x \end{cases}$$

Définition 1.1.2.7. Les applications t_j (resp. t_σ) sur l'espace symétrique X induisent des applications naturelles

$$t_j : \begin{cases} \mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) & \longrightarrow \mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) \\ [x, b]_H & \longmapsto [t_j(x), b]_H \end{cases}$$

Ces applications sont explicitées page 27.

Remarque 1.1.2.8. Dans le chapitre 4, nous expliquerons comment faire en sorte d'obtenir une application holomorphe dont l'action est la même que celle de t_j . On retrouve la conjugaison complexe à la proposition 4.0.3.11.

1.1.3 Correspondances de Hecke

On se réfère ici à [CV07], section 3.4.

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes compacts ouverts de \widehat{B}^\times . Pour tout $g \in \widehat{B}^\times$, nous disposons de deux applications de projection

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 : \mathrm{Sh}_{H_1 \cap g H_2 g^{-1}}(G, X) &\longrightarrow \mathrm{Sh}_{H_1}(G, X) \\ \mathrm{pr}_2 : \mathrm{Sh}_{g^{-1} H_1 g \cap H_2}(G, X) &\longrightarrow \mathrm{Sh}_{H_2}(G, X) \end{aligned}$$

définies sur les points complexes par

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_1 : [x, b]_{H_1 \cap g H_2 g^{-1}} &\longmapsto [x, b]_{H_1} \\ \mathrm{pr}_2 : [x, b]_{g^{-1} H_1 g \cap H_2} &\longmapsto [x, b]_{H_2} \end{aligned}$$

Définition 1.1.3.1. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}_{H_1 \cap g H_2 g^{-1}}(G, X) & \xrightarrow{[\cdot g]} & \mathrm{Sh}_{g^{-1} H_1 g \cap H_2}(G, X) \\ \mathrm{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_2 \\ \mathrm{Sh}_{H_1}(G, X) & \overset{[\cdot g]}{\dashrightarrow} & \mathrm{Sh}_{H_2}(G, X) \end{array}$$

définit une application multivaluée, appelée correspondance de Hecke

$$[H_1gH_2] : \text{Sh}_{H_1}(G, X) \dashrightarrow \text{Sh}_{H_2}(G, X).$$

Pour expliciter l'expression de cette correspondance sur les points complexes des variétés de Shimura, fixons $g_i \in \widehat{B}^\times$ tels que $H_1gH_2 = \coprod_i g_iH_2$. On obtient alors :

$$[H_1gH_2] : [x, b]_{H_1} \mapsto \sum_i [x, bg_i]_{H_2}.$$

Remarque 1.1.3.2. Le degré de cette correspondance est $[H_1F^\times : (H_1 \cap gH_2g^{-1})F^\times]$. Si $\mathcal{O}_F^\times \subset H_1 \cap H_2$, le degré se simplifie en $[H_1 : H_1 \cap gH_2g^{-1}]$.

1.1.4 Formes différentielles

Définitions

Supposons dans un premier temps que $\text{Sh}_H(G, X)$ soit lisse. Dans ce cas, si Ω_H désigne le faisceau des différentielles de degré r sur $\text{Sh}_H(G, X)$ et Ω_H^{an} le faisceau des différentielles holomorphes de degré r sur $\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$, le principe GAGA permet d'écrire

$$\Gamma(\text{Sh}_H(G, X), \Omega_H) \otimes_{F(G, X)} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \Gamma(\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\text{an}}),$$

où $\Gamma(\text{Sh}_H(G, X), \Omega_H)$ désigne les sections globales de Ω_H .

En général les variétés $\text{Sh}_H(G, X)$ ne sont pas lisses. Dans ce cas, nous nous fixerons un entier $n \geq 3$ tel que

$$\forall \mathfrak{p} \in \text{Ram}(B) \quad \mathfrak{p} \nmid n\mathcal{O}_F,$$

et des isomorphismes ι_v

$$\forall v \mid n\mathcal{O}_F \quad \iota_v : B_v \xrightarrow{\sim} M_2(F_v).$$

Le groupe

$$H' = \left\{ (h_v)_v \in H, \text{ tels que } \forall v \mid n\mathcal{O}_F \quad \iota_v(h_v) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n\mathcal{O}_{F_v}} \right\}$$

est d'indice fini dans H et $\text{Sh}_{H'}(G, X)$ est lisse. L'application

$$\text{Sh}_{H'}(G, X) \longrightarrow \text{Sh}_H(G, X)$$

est un revêtement fini et on définit dans ce cas

$$\Omega_H := (\Omega_{H'})^H = \left(\frac{1}{[H : H']} \sum_{\sigma \in H/H'} \sigma \right) \Omega_{H'}.$$

On définit de même Ω_H^{an} .

Par un abus de langage, nous appellerons les sections globales de Ω_H^{an}

$$\Gamma(\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\text{an}}) = \left(\sum_{\sigma \in H/H'} \sigma \right) \Gamma(\text{Sh}_{H'}(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_{H'}^{\text{an}})$$

des formes différentielles holomorphes de degré r sur $\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$.

Remarque 1.1.4.1. Le système injectif $\{\Gamma(\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\text{an}})\}_H$ est muni d'une action à gauche de \widehat{B}^\times donnée par le tiré en arrière de l'action $[\cdot]g$ sur $\{\text{Sh}_H(G, X)\}_H$:

$$[\cdot]g^* : \Gamma(\text{Sh}_{g^{-1}Hg}(G, X), \Omega_{g^{-1}Hg}) \longrightarrow \Gamma(\text{Sh}_H(G, X), \Omega_H).$$

Action de la conjugaison complexe

Notons, pour $\varepsilon \in \{\pm 1\}^r$ et $\Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon)$ l'espace des formes différentielles de degré r sur $\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ qui sont holomorphes (resp. antiholomorphes) en la j -ième variable z_j si $\varepsilon_j = 1$ (resp. si $\varepsilon_j = -1$).

Les applications $t_j : \mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ définies en 1.1.2.7 se tirent en arrière en des applications

$$t_j^* : \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^{\varepsilon'})$$

où $\varepsilon'_k = \varepsilon_k$ si $k \neq j$ et $\varepsilon'_j = -\varepsilon_j$. Nous appellerons opérateurs de Hecke archimédiens ces applications.

Rappelons la notation déjà introduite après la définition 1.1.2.7 :

Notation 1.1.4.2. Soit β un caractère $\beta : \prod_{j=2}^r \{\pm 1\} \longrightarrow \{\pm 1\}$.

Pour $\sigma = (\sigma_j)_{2 \leq j \leq r} \in \prod_{j=2}^r \{\pm 1\}$ posons $e_j \in \{0, 1\}$ tel que $\sigma_j = (-1)^{e_j}$. Notons $t_\sigma^* = \prod_{j=2}^r t_j^{*e_j}$.

Si $\omega \in \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon)$, on posera

$$\omega^\beta = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{r-1}} \beta(\sigma) t_\sigma^*(\omega) \in \bigoplus_{\varepsilon : \{\pm 1\}^r \rightarrow \{\pm 1\}} \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon).$$

1.2 Rappels dépendants de choix d'isomorphismes

Pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$, on note $B_{\tau_i} = B \otimes_{F, \tau_i} \mathbb{R}$ et on fixe

$$\kappa_i : B_{\tau_i} = B \otimes_{F, \tau_i} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{si } i \in \llbracket 1; r \rrbracket$$

$$\kappa_i : B_{\tau_i} = B \otimes_{F, \tau_i} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H} \quad \text{si } i \in \llbracket r+1; d \rrbracket$$

Les isomorphismes κ_j induisent les isomorphismes suivants de \mathbb{R} -groupes algébriques :

$$G_i \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_2 \quad \text{si } i \in \llbracket 1; r \rrbracket$$

$$G_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^\times \quad \text{si } i \in \llbracket r+1; d \rrbracket$$

1.2.1 Définition des variétés de Shimura

Soit X la $G(\mathbb{R})$ -classe de conjugaison du morphisme h_{can} de $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}})$ vers $G_{\mathbb{R}} = G_1 \times \cdots \times G_r \simeq (\mathrm{GL}_2)^r \times (\mathbb{H}^\times)^{d-r}$, défini sur les \mathbb{R} -algèbres A de la façon suivante : si $x, y \in A$, alors $x + iy \in \mathbb{S}(A) = (A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^\times$ et

$$h_{\mathrm{can}}(x + iy) = \left[\underbrace{\left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right)}_{r \text{ fois}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{d-r \text{ fois}} \right] \in \mathrm{GL}_2(A)^r \times ((\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} A)^\times)^{d-r}.$$

On obtient ainsi des applications

$$h_{j, \mathrm{can}} : \begin{cases} \mathbb{S}(A) & \longrightarrow & G_j \\ x + iy & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \end{cases}$$

Notons $\tilde{G}(\mathbb{R}) = \text{Stab}_{G(\mathbb{R})}(h_{\text{can}})$ le stabilisateur de h_{can} sous l'action de $G(\mathbb{R})$ par conjugaison. $\tilde{G}(\mathbb{R})$ s'identifie au groupe $(\mathbb{R} \times \text{SO}_2(\mathbb{R}))^r \times G_{r+1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times G_d(\mathbb{R})$ via les isomorphismes κ_i , et fournit une bijection

$$\begin{aligned} G(\mathbb{R})/\tilde{G}(\mathbb{R}) &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto gh_{\text{can}}g^{-1} \end{aligned}$$

Par ailleurs, les r premiers facteurs de $G(\mathbb{R})$ agissent sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par homographie, ce qui fournit une bijection

$$\begin{aligned} G(\mathbb{R})/\tilde{G}(\mathbb{R}) &\longrightarrow (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r \\ g &\longmapsto g \cdot \underbrace{(i, \dots, i)}_{r \text{ fois}} \end{aligned}$$

Ces deux bijections permettent d'identifier X à $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$ et de le munir d'une structure complexe, point qui sera expliqué plus en détail au chapitre 4.

Le couple (G, X) est appelé donnée de Shimura. Si H est un sous-groupe compact ouvert de $G(\hat{\mathbb{Q}}) = \hat{B}^\times$, on peut lui associer une variété analytique $\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ définie par

$$\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) = B^\times \setminus \left((\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r \times \hat{B}^\times / H\hat{F}^\times \right),$$

où l'action de B^\times à gauche et de H à droite est définie par

$$\forall k \in B^\times \forall h \in H \forall f \in \hat{F}^\times \forall (x, b) \in X \times \hat{B}^\times \quad k \cdot (x, b) \cdot hf = (kx, kbh f).$$

Rappelons que nous notons $[x, b]_H$ un élément de $\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$.

Exemple 1.2.1.1. Dans le cas où B est choisie comme à l'exemple 1.1.1.1, on pourra supposer que H est de la forme $H = \prod_{v \nmid \infty} H_v$, où

$$H_v = \begin{cases} U_0(\mathfrak{q}_i^{\alpha_i}) & \text{si } v \mid N_+ = \prod_i \mathfrak{q}_i^{\alpha_i} \\ \mathcal{O}_{B_v}^\times & \text{si } v = \mathfrak{p}_i \mid N_- \\ \text{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v}) & \text{sinon} \end{cases},$$

où $U_0(\mathfrak{q}_i^{\alpha_i})$ désigne l'ensemble des matrices de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ qui sont triangulaires supérieures modulo $\mathfrak{q}_i^{\alpha_i}$. De manière plus condensée, $H = (R \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}})^\times$ où $R \subset B$ est un ordre d'Eichler de niveau N_+ .

Action de la conjugaison complexe

Si on identifie X_j avec $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par $gh_{j, \text{can}}g^{-1} \mapsto g(i)$, l'application ℓ_j utilisée pour la définition 1.1.2.7 vérifie

$$\ell_j(x + iy) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\ell_j^{-1}(\ell_j(x + iy)) = \{x + iy, x - iy\}.$$

1.2.2 Formes automorphes

Définitions

Soit H un sous-groupe compact ouvert de \widehat{B}^\times . Soit $S_{2,\dots,2,0,\dots,0}^H(B_\mathbb{A}^\times)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions

$$\varphi : B_\mathbb{A}^\times \simeq G(\mathbb{R}) \times \widehat{B}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $g \in B^\times$ et tout $b \in B_\mathbb{A}^\times$,

$$\varphi(gb) = \varphi(b),$$

2. Pour tout $g \in (\mathbb{R}^\times)^r \times G_{r+1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times G_d(\mathbb{R}) \subset G(\mathbb{R})$ et tout $b \in B_\mathbb{A}^\times$,

$$\varphi(bg) = \varphi(b),$$

3. Pour tout $h \in H$ et tout $b \in B_\mathbb{A}^\times$,

$$\varphi(bh) = \varphi(b),$$

4. Pour tout $g \in B_\mathbb{A}^\times$ et tout $(\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$,

$$\varphi \left(g \left[\left(\begin{array}{cc} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right] \right) = e^{-2i\theta_1} \times \cdots \times e^{-2i\theta_r} \varphi(g)$$

5. Pour tout $g \in B_\mathbb{A}^\times$, l'application

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_r + iy_r) \mapsto \frac{1}{y_1 \cdots y_r} \varphi \left(g \left[\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right] \right)$$

est holomorphe sur le produit \mathcal{H}^r de r copies du demi-plan de Poincaré.

Par la suite, nous noterons pour simplifier $S_2^H(B_\mathbb{A}^\times)$ ou S_2^H l'espace $S_{2,\dots,2,0,\dots,0}^H(B_\mathbb{A}^\times)$.

Remarque 1.2.2.1. 1. Nous n'avons pas besoin d'imposer ici de condition de parabolicité puisque nous supposons $B \neq M_2(F)$.

2. Le groupe \widehat{B}^\times agit à gauche sur $S_2 = \bigcup_H S_2^H$ par,

$$\forall g \in \widehat{B}^\times \quad \forall \varphi \in S_2 \quad \forall x \in B_\mathbb{A}^\times \quad g \cdot \varphi(x) = \varphi(xg).$$

et S_2^H est bien l'espace des H -invariants de S_2 .

Pour la suite nous aurons besoin de la définition un peu plus générale suivante :

Définition 1.2.2.2. Soit $\varepsilon : \{\tau_1, \dots, \tau_r\} \longrightarrow \{\pm 1\}$ et $\varepsilon_i = \varepsilon(\tau_i)$. Nous noterons $(S_2^\varepsilon)^H$ l'espace des fonctions

$$\varphi : B_\mathbb{A}^\times \simeq G(\mathbb{R}) \times \widehat{B}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions 1-3 ci-dessus et

4'. Pour tout $g \in B_{\mathbb{A}}^{\times}$ et $(\theta_1 \dots \theta_r) \in \mathbb{R}^r$

$$\begin{aligned} \varphi \left(g \left(\left(\begin{array}{cc} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} \cos \theta_r & -\sin \theta_r \\ \sin \theta_r & \cos \theta_r \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right) \right) \\ = e^{-2i\varepsilon_1\theta_1} \times \dots \times e^{-2i\varepsilon_r\theta_r} \varphi(g) \end{aligned}$$

5'. Pour tout $g \in B_{\mathbb{A}}^{\times}$ l'application

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_r + iy_r) \mapsto \frac{1}{y_1 \dots y_r} \varphi \left(g \left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right) \right)$$

est holomorphe (resp. antiholomorphe) en la variable $z_j = x_j + iy_j \in \mathcal{H}$ si $\varepsilon_j = 1$ (resp. $\varepsilon_j = -1$).

Remarque 1.2.2.3. Nous noterons $S_2^{\widehat{F}^{\times}}$ (resp. $(S_2^{\varepsilon})^{\widehat{F}^{\times}}$) les invariants par \widehat{F}^{\times} de S_2 (resp. de S_2^{ε}), c'est-à-dire la partie de S_2 (resp. de S_2^{ε}) où le caractère central est trivial.

Lien avec les formes différentielles

Nous adaptons dans cette section la section 3.6 de [CV07] dans le cadre des variétés de Shimura quaternioniques, pour décrire ce que sont les formes différentielles sur ces variétés et l'action des correspondances de Hecke.

La proposition suivante donne un lien entre formes différentielles et formes automorphes.

Proposition 1.2.2.4. *Il existe une bijection \widehat{B}^{\times} -équivariante*

$$\lim_{\xrightarrow{H}} \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\sim} S_2(B_{\mathbb{A}}^{\times})$$

qui induit une bijection entre $\Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\mathrm{an}})$ et S_2^H .

Démonstration. Notons $G(\mathbb{R})^+$ la composante neutre de $G(\mathbb{R})$ et posons

$$G(\mathbb{Q})^+ = G(\mathbb{R})^+ \cap G(\mathbb{Q}).$$

Soit $\mathcal{C} \subset \widehat{B}^{\times}$ un système fixé de représentants des doubles classes $G(\mathbb{Q})^+ \backslash \widehat{B}^{\times} / H$. La décomposition

$$B_{\mathbb{A}}^{\times} = \coprod_{\alpha \in \mathcal{C}} G(\mathbb{Q})(\alpha H \times G(\mathbb{R})^+) = \coprod_{\alpha \in \mathcal{C}} B^{\times}(\alpha H \times G(\mathbb{R})^+)$$

fournit pour tout $g \in B_{\mathbb{A}}^{\times}$ une factorisation de la forme $g = g_{\mathbb{Q}}(\alpha h \times g_{\mathbb{R}}^+)$, où $g_{\mathbb{Q}} \in B^{\times}$, $\alpha \in \mathcal{C}$, $h \in H$ et $g_{\mathbb{R}}^+ \in G(\mathbb{R})^+$. On notera de plus, si $\alpha \in \mathcal{C}$,

$$\Gamma_{\alpha}^+ = \alpha H \alpha^{-1} \cap G(\mathbb{Q})^+ \subset G(\mathbb{R})^+ \quad \text{et} \quad \overline{\Gamma}_{\alpha}^+ = \mathrm{Im}(\Gamma_{\alpha}^+ \longrightarrow \mathrm{PGL}_2^+(\mathbb{R})^r).$$

L'application suivante

$$u_{\mathcal{C}} : \begin{cases} \coprod_{\alpha \in \mathcal{C}} \overline{\Gamma}_{\alpha}^+ \backslash \mathcal{H}^r & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) \\ \overline{\Gamma}_{\alpha}^+ x & \longmapsto & [x, \alpha]_H \end{cases} \quad (1.1)$$

est une bijection (c.f. [Mil05], proposition 4.18). Remarquons que les $\overline{\Gamma}_{\alpha}^+ \backslash \mathcal{H}^r$ sont connexes et qu'on obtient ainsi une décomposition de $\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ en composantes connexes.

Soit, pour $\alpha \in \mathcal{C}$ fixé, $\omega \in \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\mathrm{an}})$ et ω_α sa restriction à la composante connexe $\overline{\Gamma}_\alpha^+ \backslash \mathcal{H}^r$ de $\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$. Le tiré en arrière de ω_α sur \mathcal{H}^r est une forme différentielle $\overline{\Gamma}_\alpha^+$ invariante, associée à une certaine fonction ϕ_α , i.e.

$$\omega_\alpha^* = \phi_\alpha(z_1, \dots, z_r) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_r,$$

où ϕ_α est une fonction holomorphe sur \mathcal{H}^r vérifiant pour tout $z = (z_1, \dots, z_r) \in \mathcal{H}^r$

$$\begin{aligned} \forall \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in \overline{\Gamma}_\alpha^+, \quad \phi_\alpha|_\gamma(z) &= \prod_{i=1}^r \det(\gamma_i) (c_i z_i + d_i)^{-2} \phi_\alpha \left(\frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}, \dots, \frac{a_r z_r + b_r}{c_r z_r + d_r} \right) \\ &= \phi_\alpha(z) \end{aligned}$$

Soit $g \in B_{\mathbb{A}}^\times$ et $g_{\mathbb{R},1}^+, \dots, g_{\mathbb{R},r}^+$ les r premières composantes de $g_{\mathbb{R}}^+$. Si $g'_\mathbb{Q}(\alpha' h' \times g_{\mathbb{R}}^{'+})$ est une autre factorisation possible de g , on a alors nécessairement $\alpha = \alpha'$ et $g_{\mathbb{Q}}^{\prime-1} g_{\mathbb{Q}} \in G(\mathbb{Q})^+ \cap \alpha H \alpha^{-1} = \Gamma_\alpha$. Ainsi

$$\phi_{\alpha'}|(g_{\mathbb{R},1}^+, \dots, g_{\mathbb{R},r}^+) = \phi_\alpha|g_{\mathbb{Q}}^{\prime-1} g_{\mathbb{Q}}(g_{\mathbb{R},1}^+, \dots, g_{\mathbb{R},r}^+) = \phi_\alpha|(g_{\mathbb{R},1}^+, \dots, g_{\mathbb{R},r}^+),$$

ce qui montre que l'application

$$\varphi_\omega : \begin{cases} B_{\mathbb{A}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & (\phi_\alpha|(g_{\mathbb{R},1}^+ \dots g_{\mathbb{R},r}^+)) (i, \dots, i) \end{cases}$$

est bien définie. De plus $\varphi_\omega \in S_2^H$.

Réciproquement, si $\varphi \in S_2^H$, on peut définir une forme différentielle ω_φ holomorphe de degré r sur $\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ en imposant que la restriction de ω_φ à $\overline{\Gamma}_\alpha^+ \backslash \mathcal{H}^r$ ait pour tiré en arrière

$$\frac{1}{y_1 \dots y_r} \varphi \left(\left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \alpha \right) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_r$$

sur \mathcal{H}^r .

Montrons maintenant que la bijection $S_2^H \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\mathrm{an}})$ que l'on vient d'expliciter est indépendante du choix des représentants \mathcal{C} .

Par définition, la bijection $u_{\mathcal{C}}$ est inchangée si l'on remplace $\alpha \in \mathcal{C}$ par αh avec $h \in H$. Par contre, si on remplace α par $\gamma \alpha$ où $\gamma \in G(\mathbb{Q})^+$, on obtient, si on tire en arrière une forme ω_ϕ associée à $\varphi \in S_2^H$ de $\Gamma(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\mathrm{an}})$ sur $\overline{\Gamma}_\alpha^+ \backslash \mathcal{H}^r$ (respectivement $\overline{\Gamma}_{\gamma \alpha}^+ \backslash \mathcal{H}^r$) une forme du type

$$\phi_\alpha(z) dz \quad (\text{resp. } \phi_{\gamma \alpha}(z) dz).$$

Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Gamma}_\alpha^+ \backslash \mathcal{H}^r & \xrightarrow{\overline{\Gamma}_\alpha^+ x \mapsto [x, \alpha]_H} & \mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) \\ \downarrow [\gamma \cdot] \overline{\Gamma}_\alpha^+ x \mapsto \overline{\Gamma}_{\gamma \alpha}^+ \gamma(x) & & \parallel \\ \overline{\Gamma}_{\gamma \alpha}^+ \backslash \mathcal{H}^r & \xrightarrow{\overline{\Gamma}_{\gamma \alpha}^+ \gamma(x) \mapsto [\gamma(x), \gamma \alpha]_H} & \mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}) \end{array}$$

montre que l'application $[\gamma \cdot]^*$ est une bijection entre les formes sur $\overline{\Gamma}_{\gamma\alpha}^+ \backslash \mathcal{H}^r$ et les formes sur $\overline{\Gamma}_{\alpha}^+ \backslash \mathcal{H}^r$. De plus, les formes $\phi_{\alpha}(z)dz$ et $\phi_{\gamma\alpha}(z)dz$ vérifient

$$[\gamma \cdot]^*(\phi_{\gamma\alpha}(z)dz) = \phi_{\alpha}(z)dz.$$

En effet d'une part $[\gamma \cdot]^*(\phi_{\gamma\alpha}(z)dz) = \phi_{\gamma\alpha}(\gamma z)d\gamma z = \phi_{\gamma\alpha}(z)dz$ car $\phi_{\gamma\alpha}$ est une forme modulaire de Hilbert, et d'autre part on a, puisque $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ et que φ est invariante à gauche sous $G(\mathbb{Q})$,

$$\begin{aligned} \phi_{\gamma\alpha}(z) &= \frac{1}{y_1 \dots y_r} \varphi \left(\left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \gamma\alpha \right) \\ &= \frac{1}{y_1 \dots y_r} \varphi \left(\left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \alpha \right). \end{aligned}$$

□

Concernant l'espace S_2^{ε} de la définition 1.2.2.2, la proposition 1.2.2.4 a pour analogue la proposition suivante :

Proposition 1.2.2.5. *Il existe une bijection entre $(S_2^{\varepsilon})^H$ et l'espace des formes différentielles de degré r sur $\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$ qui sont holomorphe (resp. antiholomorphe) en la j -ième variable z_j si $\varepsilon_j = 1$ (resp. si $\varepsilon_j = -1$) :*

$$(S_2^{\varepsilon})^H \simeq \Gamma(\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\text{an}})^{\varepsilon}).$$

Démonstration. La preuve de cette proposition est identique à celle de la proposition 1.2.2.4, dont nous conservons les notations. Posons

$$dz_j^{\varepsilon_j} = \begin{cases} dz_j & \text{si } \varepsilon_j = 1 \\ d\bar{z}_j & \text{si } \varepsilon_j = -1 \end{cases}$$

Si $\varphi \in (S_2^{\varepsilon})^H$, la forme ω_{φ} de $\Gamma(\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\text{an}})^{\varepsilon})$ associée peut être définie telle que son tiré en arrière via $u_{\mathbb{C}}$ vaille

$$\phi_{\alpha}(z)dz^{\varepsilon} = \frac{1}{y_1 \dots y_r} \varphi \left(\left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \alpha \right) dz^{\varepsilon},$$

où $dz^{\varepsilon} = dz_1^{\varepsilon_1} \wedge \dots \wedge dz_r^{\varepsilon_r}$. □

Corollaire 1.2.2.6. *Des propositions 1.2.2.4 et 1.2.2.5 on déduit qu'il existe des bijections*

$$\Gamma(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\text{an}}) \longrightarrow S_2^{H\widehat{F}^{\times}}$$

et

$$\Gamma(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\text{an}})^{\varepsilon}) \longrightarrow (S_2^{\varepsilon})^{H\widehat{F}^{\times}}$$

1.2.3 Théorème de Matsushima-Shimura

Nous rappelons dans cette section un théorème qui fournit une décomposition de la cohomologie des variétés de Shimura quaternioniques, c.f. [MS63]. On se réfère à [Fre90] pour des énoncé plus précis et les preuves.

Définition 1.2.3.1. Soit H_{univ}^m est le sous-espace de $H^m(\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ engendré par les formes invariantes sous un certain produit de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$:

$$H_{\text{univ}}^m = \text{Vect} \bigwedge_{\substack{i \in a \subset \llbracket 1; r-1 \rrbracket \\ |a|=m/2}} \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{y_i^2}.$$

Le théorème s'énonce alors de la façon suivante

Théorème 1.2.3.2. On a la décomposition suivante, pour $m \in \llbracket 0; 2r \rrbracket$:

$$H^m(\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \begin{cases} H_{\text{univ}}^m & \text{si } m \neq r \\ H_{\text{univ}}^m \oplus \bigoplus_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^r} (S_2^\varepsilon)^H & \text{si } m = r \end{cases}$$

et

$$H^m(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \simeq \begin{cases} H_{\text{univ}}^m & \text{si } m \neq r \\ H_{\text{univ}}^m \oplus \bigoplus_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^r} (S_2^\varepsilon)^{H\widehat{F}^\times} & \text{si } m = r \end{cases}$$

Remarque 1.2.3.3. On a de plus $\dim(H_{\text{univ}}^m) = \binom{m}{2r}$ si m est pair, 0 sinon. Notons que la partie « parabolique » n'intervient qu'en degré r .

Remarque 1.2.3.4. Dans le cas où $B = M_2(F)$, il faut ajouter à la décomposition de Matsushima-Shimura un sous-espace associé aux séries d'Eisenstein. Le théorème est dans ce cas dû à Harder (c.f. [Fre90]).

Chapitre 2

Périodes et orbites toriques

Dans ce chapitre, nous étudions un certain ensemble de périodes à l'aide d'une conjecture due à Yoshida. Nous associons ensuite à certaines extensions quadratiques de F des cycles « spéciaux » sur la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$.

2.1 Périodes

Soit E/F une courbe elliptique. Dans cette section nous utilisons une conjecture due à Yoshida [Yos94] pour montrer que les périodes d'une certaine forme différentielle sur $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ constituent un réseau de \mathbb{C} , « proche » du réseau de Néron de $E \otimes_{F, \tau_1} \mathbb{C}$. La conjecture de Yoshida joue le rôle de la conjecture de Oda dans les travaux de Darmon, c.f. [Dar04] et [Oda82].

Dans la suite du manuscrit, E désigne une courbe elliptique sur F .

2.1.1 Hypothèses concernant la courbe elliptique

Dans toute la suite du manuscrit, nous ferons les hypothèses suivantes concernant la modularité de la courbe elliptique E :

Hypothèse 2.1.1.1. *Il existe une forme modulaire de Hilbert $\tilde{\varphi} \in S_2(\mathrm{GL}_2(F_{\mathbb{A}}))$ parabolique de poids deux, propre pour les opérateurs de Hecke et vérifiant*

$$L(E, s) = L(\tilde{\varphi}, s).$$

La représentation automorphe $\pi(\tilde{\varphi})$ de GL_2 engendrée par $\tilde{\varphi}$ est dans l'image de la correspondance de Jacquet-Langlands

$$\exists \varphi \in S_2(B_{\mathbb{A}}^{\times}) \quad \pi(\tilde{\varphi}) = \mathrm{JL}(\pi(\varphi)).$$

Plus précisément, nous supposons que $\varphi \in S_2^H(B_{\mathbb{A}}^{\times})$ pour un certain sous-groupe ouvert compact H de \hat{B}^{\times} . Le caractère central de $\tilde{\varphi}$ est trivial, de même que celui de φ . On a donc $\varphi \in S_2^{H\hat{F}^{\times}}$.

Pour plus de simplicité, nous ferons pour l'instant l'hypothèse de « multiplicité un » suivante

Hypothèse 2.1.1.2. Soit $\pi = \pi(\varphi) = \bigotimes'_v \pi_v$ la décomposition en produit tensoriel restreint de la représentation automorphe de $B_{\mathbb{A}}^{\times}/F_{\mathbb{A}}^{\times}$ associée à φ . Notons $\pi_f = \bigotimes'_{v \nmid \infty} \pi_v$ sa partie finie. Nous nous placerons dans le cas de l'hypothèse suivante :

$$\dim \pi_f^H = 1.$$

Remarque 2.1.1.3. Dans le cas où $H = \prod_v H_v$ est décomposé, l'hypothèse de multiplicité un s'écrit

$$\forall v \nmid \infty \quad \dim \pi_v^{H_v} = 1.$$

L'hypothèse de multiplicité un est par exemple vérifiée dans le cas où H est choisi comme à l'exemple 1.2.1.1.

2.1.2 Conjecture de Yoshida

Rappelons que l'on note $F' = \mathbb{Q} \left(\sum_{j=1}^r \tau_j(\alpha), \alpha \in F \right)$ le corps réflexe de $\text{Sh}_H(G, X)$. Dans toute la suite de ce chapitre, nous utilisons le langage des motifs, en tant qu'outil. Nous nous référons à [Jan90] pour le langage motivique, ainsi qu'à [Man68].

Soit $M = h^1(E)$ le motif sur F à coefficients dans \mathbb{Q} associé à la courbe elliptique E . Yoshida dans [Yos94] sections 2 et 5, conjecture l'existence d'un motif M' sur F' à coefficients dans \mathbb{Q} de la forme $M' = \bigotimes_{\{\tau_1, \dots, \tau_r\}} \text{Res}_{F/F'} M$. Ainsi le rang $\text{rg}(M')$ de M' devrait être égal à $\text{rg}(M)^r$.

La conjecture « motivique » de Yoshida est la suivante :

Conjecture 2.1.2.1. Notons $H^*(\text{Sh}_H(G, X))^{(E)}$ la partie de la cohomologie de $\text{Sh}_H(G, X)$ propres pour les opérateurs de Hecke, dont les valeurs propres sont égales aux valeurs propres de E . Sous l'hypothèse de multiplicité un, le motif M' est isomorphe au motif associé à $H^r(\text{Sh}_H(G, X))^{(E)}$.

La réalisation ℓ -adique de cette conjecture est la conjecture cohomologique de Langlands. Cette conjecture est montrée à semi-simplification près par Brylinski et Labesse dans le cas où $B = M_2(F)$, [BL84], Langlands (aux places de bonne réduction dans le cas où $B \neq M_2(F)$, [Lan79b]) et Reimann [Rei97] dans un cas plus général.

Rappelons que nous notons $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans le corps \mathbb{C} . On a donc une suite d'inclusions $F' \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$. Yoshida explicite les décompositions suivantes, c.f. [Yos94], section 5.1.

Réalisation de Betti

L'application

$$\mathcal{I} : M'_B \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{j=1}^r M_{B, \tau_j} \tag{2.1}$$

est un isomorphisme de \mathbb{Q} -espaces vectoriels.

Remarque 2.1.2.2. Dans l'article de Yoshida [Yos94], l'isomorphisme (2.1) est écrit pour tout $\tau' \in \text{Hom}(F', \overline{\mathbb{Q}})$ et $\tilde{\tau}' \in \text{Hom}(\overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}})$ vérifiant $\tilde{\tau}'|_{F'} = \tau'$. Nos hypothèses fournissent des inclusions naturelles $F' \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$, donc des morphismes privilégiés $\tau' : F' \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\tilde{\tau}' : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Réalisation de de Rham

L'application

$$\mathcal{J} : M'_{\text{dR}} \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_{j=1}^r \left(M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \overline{\mathbb{Q}} \right) \right)^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')} \quad (2.2)$$

est un isomorphisme de F' -espaces vectoriels. Le produit tensoriel $\bigotimes_{j=1}^r \left(M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \overline{\mathbb{Q}} \right)$ est pris sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et l'action de $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$ s'écrit, pour $x_1, \dots, x_r \in M_{\text{dR}}$ et $a_1, \dots, a_r \in \overline{\mathbb{Q}}$

$$\bigotimes_{s \in \{\tau_1, \dots, \tau_r\}} (x_s \otimes_{F, s} a_s) \mapsto \bigotimes_{s \in \{\tau_1, \dots, \tau_r\}} (x_s \otimes_{F, \sigma s} \sigma(a_s)).$$

Isomorphismes de comparaison

Pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, l'application

$$I_{\tau_j} : M_{\text{B}, \tau_j} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{C}$$

est un isomorphisme de \mathbb{C} -espaces vectoriels. On dispose aussi d'un isomorphisme

$$I' : M'_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M'_{\text{dR}} \otimes_{F'} \mathbb{C}.$$

Soit $I = \bigotimes_{j=1}^r I_{\tau_j}$. Les applications

$$I \circ (\mathcal{J} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{id}_{\mathbb{C}})$$

et

$$(\mathcal{J} \otimes_{F'} \text{id}_{\mathbb{C}}) \circ I'$$

sont des isomorphismes entre les espaces suivants

$$M'_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{j=1}^r \left(M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{C} \right).$$

Ces deux isomorphismes sont égaux :

$$I \circ (\mathcal{J} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{id}_{\mathbb{C}}) = (\mathcal{J} \otimes_{F'} \text{id}_{\mathbb{C}}) \circ I' : M'_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{j=1}^r \left(M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{C} \right) \quad (\star)$$

La conjecture des périodes de Yoshida consiste en l'existence des isomorphismes \mathcal{J} , \mathcal{J} , I et I' vérifiant l'égalité (\star) . Elle correspond à la réalisation de Hodge-de Rham de la conjecture motivique 2.1.2.1.

Conjugaison complexe

Notons c_{τ_j} la conjugaison complexe sur M_{B, τ_j} . Nous ferons l'hypothèse suivante, qui permet de comparer l'action de c_{τ_j} et celle des opérateurs t_j^* sur $M'_{\text{dR}} \otimes_{F'} \mathbb{C}$. Cette hypothèse est naturelle vis à vis de la définition de t_j .

Hypothèse 2.1.2.3. *Pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, l'action de t_j^* sur $M'_{\text{dR}} \otimes_{F'} \mathbb{C}$ correspond via l'isomorphisme*

$$(\mathcal{J} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{id}_{\mathbb{C}}) \circ (I')^{-1} : M'_{\text{dR}} \otimes_{F'} \mathbb{C} \longrightarrow M'_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \longrightarrow \left(\bigotimes_{k=1}^r M_{\text{B}, \tau_k} \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

à l'action de la conjugaison complexe c_{τ_j} sur le facteur M_{B, τ_j} .

Remarque 2.1.2.4. En général t_j^* ne conserve pas l'espace $H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_H(G, X)/F')$. Donnons un contre-exemple. Supposons que $d = r = 1$, que $F = F(G, X) = \mathbb{Q}$ et que $\text{Sh}_H(G, X) = E'$ soit une courbe elliptique. La courbe E' admet une équation de Weierstrass courte

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

où $g_2, g_3 \in \mathbb{Q}$. La conjugaison complexe agit sur l'homologie $H_1(E', \mathbb{Z})$, notons Υ^\pm des générateurs des espaces propres pour les valeurs propres ± 1 :

$$H_1(E', \mathbb{Z})^\pm = \mathbb{Z}\Upsilon^\pm.$$

Dans ce cas $dz = \frac{dx}{y}$ et $\wp(z)dz = \frac{x dx}{y}$, on a

$$H_{\text{dR}}^1(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\frac{dx}{y} \oplus \mathbb{Q}\frac{x dx}{y} \quad \text{et} \quad F^1 H_{\text{dR}}^1(E'/\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\frac{dx}{y}.$$

Soit

$$\omega_\pm = \int_{\Upsilon_\pm} \frac{dx}{y} \quad \text{et} \quad \eta_\pm = \int_{\Upsilon_\pm} \frac{x dx}{y}.$$

A une isogénie de degré au plus 2 près, on a

$$E'(\mathbb{C}) = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_+ \oplus \mathbb{Z}\omega_-).$$

On a de plus $t_1^*(dz) = d\bar{z}$ par définition. Ainsi

$$\int_{\Upsilon_+} t_1^*\left(\frac{dx}{y}\right) = -\omega_+ \quad \text{et} \quad \int_{\Upsilon_-} t_1^*\left(\frac{dx}{y}\right) = \omega_-.$$

Décomposons $t_1^*\left(\frac{dx}{y}\right) = a\frac{dx}{y} + b\frac{x dx}{y}$. On a alors le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \omega_+ & \eta_+ \\ \omega_- & \eta_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_+ \\ \omega_- \end{pmatrix},$$

la résolution de ce système, compte-tenu de la relation de Legendre $\omega_+\eta_- - \eta_+\omega_- = 2\pi i$ donne

$$t_1^*\left(\frac{dx}{y}\right) = i\frac{\omega_+\eta_- + \eta_+\omega_-}{2\pi} \frac{dx}{y}.$$

Comme $i\frac{\omega_+\eta_- + \eta_+\omega_-}{2\pi}$ n'est en général pas un rationnel, $H_{\text{dR}}^1(E'/\mathbb{Q})$ n'est pas conservé par t_1^* .

2.1.3 Réseaux et périodes

D'après l'hypothèse de multiplicité un, $\dim_{F'} F^r M'_{\text{dR}} = 1$. Fixons une forme ω_\wp non nulle de $F^r M'_{\text{dR}}$. Par définition de M' , on a

$$\forall v \notin S, T_v \omega_\wp = a_v(E)\omega_\wp,$$

où S est un ensemble fini de places de F contenant les places archimédiennes et les places de mauvaise réduction.

Remarque 2.1.3.1. Précisons l'origine de cette notation ω_φ . On dispose d'une inclusion naturelle $F^r M'_{\text{dR}} \subset (F^r M'_{\text{dR}}) \otimes_{F'} \mathbb{C}$ et ce dernier espace $(F^r M'_{\text{dR}}) \otimes_{F'} \mathbb{C}$ est, d'après la proposition 1.2.2.4, en bijection avec l'espace $(S_2^H)^{(E)}$ suivant

$$(S_2^H)^{(E)} = \left\{ \Psi \in S_2^H, \text{ t.q. } \forall v \notin S, T_v \Psi = a_v(E) \Psi \right\},$$

et ω_φ est associée à une certaine forme automorphe φ de $(S_2^H)^{(E)}$:

$$0 \neq \omega_\varphi \in F^r M'_{\text{dR}} \subset (F^r M'_{\text{dR}}) \otimes_{F'} \mathbb{C}.$$

Notons $\Omega_{E/F}$ le faisceau des différentielles de E/F . On se fixe

$$0 \neq \eta \in H^0(E, \Omega_{E/F}) = F^1 M_{\text{dR}}.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, on pose

$$\eta_j = \eta \otimes_{F, \tau_j} 1 \in H^0 \left(E \otimes_{F, \tau_j} \overline{\mathbb{Q}}, \Omega_{(E \otimes_{F, \tau_j} \overline{\mathbb{Q}})/\overline{\mathbb{Q}}} \right) = (F^1 M_{\text{dR}}) \otimes_{F, \tau_j} \overline{\mathbb{Q}}.$$

Proposition 2.1.3.2. *On a*

$$\bigotimes_{j=1}^r \eta_j \in \left(\bigotimes_{j=1}^r (F^1 M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \overline{\mathbb{Q}}) \right)^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')} = \mathcal{J}(F^r M'_{\text{dR}}).$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')$. On a

$$\sigma \cdot \bigotimes_{i=1}^r \eta_i = \sigma \cdot \bigotimes_{i=1}^r \eta \otimes_{F, \tau_i} 1 = \bigotimes_{i=1}^r \eta \otimes_{F, \sigma \cdot \tau_i} 1 = \bigotimes_{i=1}^r \eta_i,$$

d'après la description de l'action de Galois. \square

Corollaire 2.1.3.3. *Sous l'hypothèse de multiplicité un 2.1.1.2, $\dim_{F'} F^r M'_{\text{dR}} = 1$ et il existe $\alpha \in F'^{\times}$ tel que*

$$\mathcal{J}(\alpha \omega_\varphi) = \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_r.$$

Pour $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, notons $E_j = E \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{C}$. La conjugaison complexe agit sur $H_1(E_j, \mathbb{Z})$, on désignera $H_1(E_j, \mathbb{Z})^\pm$ les espaces propres associés à ± 1 pour cette action. Notons $\Omega_j^+ \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\Omega_j^- \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ les périodes réelles et complexe de E_j , déterminées par exemple en imposant que $\text{Re}(\Omega_j^+) > 0$ et $\text{Im}(\Omega_j^-) > 0$. On a

$$\left\{ \int_{\Upsilon} \eta_j, \Upsilon \in H_1(E_j, \mathbb{Z})^\pm \right\} = \mathbb{Z} \Omega_j^\pm$$

et

$$\Lambda_1 := \left\{ \int_{\Upsilon_1} \eta_1, \Upsilon_1 \in H_1(E_1, \mathbb{Z}) \right\} = \mathbb{Z} \Omega_1^+ + \mathbb{Z} \Omega_1^-.$$

Soit

$$\beta : \{1\} \times \prod_{j=2}^r \{\pm 1\} \longrightarrow \{\pm 1\}$$

un caractère fixé. Ce caractère se décompose en $\beta = \prod_{j=2}^r \beta_j$ où $\beta_j : \{\pm 1\} \rightarrow \{\pm 1\}$. On rappelle la notation 1.1.4.2 :

$$\omega_\varphi^\beta = \left(\sum_{\sigma \in \{1\} \times \prod_{j=2}^r \{\pm 1\}} \beta(\sigma) t_\sigma^* \right) \omega_\varphi = \prod_{j=2}^r (1 + \beta_j(-1) t_j^*) \omega_\varphi.$$

De manière analogue, nous noterons

$$\Omega^\beta = \prod_{j=2}^r \Omega_j^{\beta_j(-1)}.$$

Remarque 2.1.3.4. On peut voir $\left(\bigotimes_{j=1}^r M_{B, \tau_j} \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ comme un espaces d'homomorphismes de la façon suivante :

$$\left(\bigotimes_{j=1}^r M_{B, \tau_j} \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigotimes_{j=1}^r \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_1(E_j, \mathbb{Z}), \mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}} \left(\bigotimes_{j=1}^r H_1(E_j, \mathbb{Z}), \mathbb{C} \right),$$

où le premier produit tensoriel est pris en tant que \mathbb{Q} -espaces vectoriels, le deuxième en tant que \mathbb{C} -espaces vectoriels et le dernier en tant que \mathbb{Z} -modules.

D'après la conjecture de Yoshida, l'image de ω_φ^β par l'application

$$(\mathcal{J} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{id}_{\mathbb{C}}) \circ I'^{-1} = I^{-1} \circ (\mathcal{J} \otimes_{F'} \text{id}_{\mathbb{C}}) : M'_{\text{dR}} \otimes_{F'} \mathbb{C} \rightarrow \left(\bigotimes_{j=1}^r M_{B, \tau_j} \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

est, en vertu de la remarque 2.1.3.4, la forme linéaire

$$\begin{cases} \bigotimes_{j=1}^r H_1(E_j, \mathbb{Z}) & \rightarrow \mathbb{C} \\ \Upsilon_1 \otimes \cdots \otimes \Upsilon_r & \mapsto \int_{\Upsilon_1 \otimes \cdots \otimes \Upsilon_r} \bigotimes_{j=1}^r (1 + \beta_j(-1) t_j^*) \eta_j \end{cases} \quad (2.3)$$

L'hypothèse 2.1.2.3 permet d'expliciter cette application linéaire. En effet, si $\Upsilon_1 \otimes \cdots \otimes \Upsilon_r \in \bigotimes_{j=1}^r H_1(E_j, \mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Upsilon_1 \otimes \cdots \otimes \Upsilon_r} \bigotimes_{j=1}^r (1 + \beta_j(-1) t_j^*) \eta_j &= \left(\int_{\Upsilon_1} \eta_1 \right) \prod_{j=2}^r \int_{\Upsilon_j} (1 + \beta_j(-1) t_j^*) \eta_j \\ &= \left(\int_{\Upsilon_1} \eta_1 \right) \prod_{j=2}^r \int_{\Upsilon_j + \beta_j(-1) c_j \Upsilon_j} \eta_j. \end{aligned}$$

Ainsi la forme linéaire définie par l'équation 2.3 est à valeurs dans $\Lambda_1 \Omega^\beta$.

Après application de l'isomorphisme dual \mathcal{J}^* de \mathcal{J} , les réseaux

$$\bigotimes_{j=1}^r \mathbb{Z} H_1(E_j, \mathbb{Z}) \subset \bigotimes_{j=1}^r \mathbb{Q} M_{B, \tau_j}^*$$

et

$$\text{Im} (H_r(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow (M'_B)^*)$$

sont commensurables : il existe $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que

$$\xi \text{Im} (H_r(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow (M'_B)^*) \subset \mathcal{J}^* \left(\bigotimes_{j=1}^r \mathbb{Z} H_1(E_j, \mathbb{Z}) \right).$$

On a ainsi prouvé la proposition suivante

Proposition 2.1.3.5. *Sous les hypothèses 2.1.1.1, 2.1.1.2, 2.1.2.3, et la conjecture 2.1.2.1, on a l'existence de $\alpha \in F'^{\times}$ et de $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que*

$$\forall \gamma \in H_r(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad \forall \beta : \prod_{j=2}^r \{\pm 1\} \rightarrow \{\pm 1\}, \quad \xi \int_{\gamma} \alpha \omega_{\varphi}^{\beta} \in \Lambda_1 \Omega^{\beta}.$$

2.1.4 Cas où la multiplicité n'est plus 1

Dans ce paragraphe nous expliquons comment faire dans le cas où l'hypothèse de multiplicité un 2.1.1.2 n'est pas vérifiée. Dans ce cas, si $m_H(\pi) = \dim \pi_f^H$, la conjecture attendue est la suivante :

Conjecture 2.1.4.1. *Le motif $H^r(\mathrm{Sh}_H(G, X))^{(E)}$ correspondant à la partie (E) -propre pour les opérateurs de Hecke est isomorphe au motif $\left(\bigotimes_{\{\tau_1, \dots, \tau_r\}} \mathrm{Res}_{F/F'} M \right)^{m_H(\pi)}$.*

Le motif $H^r(\mathrm{Sh}_H(G, X))^{(E)}$ n'est donc pas en général de rang 2^r . Le but est donc de construire les réalisations de Betti et de de Rham d'un sous motif $M' \subset H^r(\mathrm{Sh}_H(G, X))^{(E)}$ de rang 2^r et un isomorphisme $M' \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\{\tau_1, \dots, \tau_r\}} \mathrm{Res}_{F/F'} M$. Le but final étant de chercher une forme différentielle ω sur $\mathrm{Sh}_H(G, X)$, associée à E , telle que ω^{β} ait pour ensemble des périodes un réseau proche du réseau de Néron de E .

On cherche donc un élément $0 \neq \omega_{\varphi} \in F^r H_{\mathrm{dR}}^r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)/F')^{(E)}$ vérifiant

Réalisation de de Rham

L'espace vectoriel sur F'

$$M'_{\mathrm{dR}} := \left(\bigoplus_{\sigma \in \{\pm 1\}^r} \mathbb{C} t_{\sigma}^*(\omega_{\varphi} \otimes 1) \right) \cap H_{\mathrm{dR}}^r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)/F')^{(E)}$$

est de dimension

$$\dim_{F'}(M'_{\mathrm{dR}}) = 2^r. \quad (2.4)$$

Ce qui permettra dans ce cas d'avoir de manière analogue au cas de multiplicité un

$$F^r M'_{\mathrm{dR}} := M'_{\mathrm{dR}} \cap F^r H_{\mathrm{dR}}^r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)/F')^{(E)} = F^r \omega_{\varphi}.$$

Réalisation de Betti

Notons I' l'isomorphisme de comparaison

$$I' : H_{\mathbb{B}}^r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{(E)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H_{\mathrm{dR}}^r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)/F')^{(E)} \otimes_{F'} \mathbb{C}.$$

Si on a su construire M'_{dR} , le \mathbb{Q} -espace vectoriel suivant

$$M'_{\mathbb{B}} := I'^{-1}(M'_{\mathrm{dR}} \otimes_{F'} \mathbb{C}) \cap H_{\mathbb{B}}^r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{(E)}$$

est de dimension

$$\dim_{\mathbb{Q}}(M'_{\mathbb{B}}) = 2^r. \quad (2.5)$$

Remarque 2.1.4.2. Un énoncé analogue concernant la réalisation étale serait vrai, à l'aide de l'isomorphisme de comparaison, et fournirait un \mathbb{Q}_{ℓ} -espace vectoriel M'_{ℓ} .

Définition 2.1.4.3. L'élément $\omega_{\varphi} \in F^r H_{\mathrm{dR}}^r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)/F')^{(E)}$ est dit rationnel lorsqu'il satisfait les équations 2.4 et 2.5.

Isomorphismes de comparaison

De même que dans le cas où l'hypothèse de multiplicité un est vérifiée, il existe un isomorphisme de \mathbb{Q} -espaces vectoriels

$$\mathcal{J} : M'_B \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{j=1}^r M_{B, \tau_j},$$

un isomorphisme de F' -espaces vectoriels

$$\mathcal{J} : M'_{\text{dR}} \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_{j=1}^r (M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \overline{\mathbb{Q}}) \right)^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F')},$$

des isomorphismes de comparaison de de Rham

$$I_{\tau_j} : M_{B, \tau_j} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{C}$$

qui permettent de définir $I = \bigotimes_{j=1}^r I_{\tau_j}$ vérifiant

$$I \circ (\mathcal{J} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{id}_{\mathbb{C}}) = (\mathcal{J} \otimes_{F'} \text{id}_{\mathbb{C}}) \circ I' : M'_B \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{j=1}^r (M_{\text{dR}} \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{C}). \quad (\star)$$

On peut alors appliquer un raisonnement analogue à celui précédant la proposition 2.1.3.5 pour montrer que

Proposition 2.1.4.4. *Soit $\omega_{\varphi} \in F^r H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_H(G/Z, X)/F')^{(E)}$ une forme rationnelle. Sous les hypothèses 2.1.1.1, 2.1.2.3, et a condition que la conjecture 2.1.4.1 soit vérifiée, il existe $\alpha \in F'^{\times}$ et $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que*

$$\forall \gamma \in H_r(\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \quad \forall \beta : \prod_{j=2}^r \{\pm 1\} \rightarrow \{\pm 1\}, \quad \xi \int_{\gamma} \alpha \omega_{\varphi}^{\beta} \in \Lambda_1 \Omega^{\beta}.$$

Exemple 2.1.4.5. Si $m_H(\pi) = 1$, tous les éléments de $F^r H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_H(G/Z, X)/F')^{(E)}$ non nuls sont rationnels. Dans ce cas on a

$$M'_{\text{dR}} = H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_H(G/Z, X)/F')^{(E)}$$

et

$$M'_B = H_B^r(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Q})^{(E)}.$$

Exemple 2.1.4.6. Soient $H_1, H_2 \subset \widehat{B}^{\times}$ des sous-groupes ouverts compacts tels qu'il existe $g \in \widehat{B}^{\times}$ vérifiant $g^{-1}H_1g \subset H_2$. La proposition 2.1.4.8 ci-dessous explique comment construire un élément $\omega_{\varphi_1} \in F^r H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_{H_1}(G/Z, X)/F')^{(E)}$ rationnel à partir de $\omega_{\varphi_2} \in F^r H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_{H_2}(G/Z, X)/F')^{(E)}$ rationnel.

Le diagramme suivant définit une application

$$\text{pr}_g : \text{Sh}_{H_1}(G/Z, X) \longrightarrow \text{Sh}_{H_2}(G/Z, X) :$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Sh}_{H_1}(G/Z, X) & \xrightarrow{[g]} & \text{Sh}_{g^{-1}H_1g}(G/Z, X) \\ & \searrow \text{pr}_g & \downarrow \text{pr} \\ & & \text{Sh}_{H_2}(G/Z, X) \end{array}$$

où

$$\text{pr} : \text{Sh}_{g^{-1}H_1g}(G/Z, X) \longrightarrow \text{Sh}_{H_2}(G/Z, X)$$

est donnée sur les point complexes par

$$[x, b]_{g^{-1}H_1g} \longmapsto [x, b]_{H_2}$$

et

$$[\cdot]_g : \text{Sh}_{H_1}(G/Z, X) \longrightarrow \text{Sh}_{g^{-1}H_1g}(G/Z, X)$$

par

$$[x, b]_{H_1} \longmapsto [x, bg]_{g^{-1}H_1g}.$$

Remarque 2.1.4.7. Si H_1 et H_2 sont fixés il n'existe qu'un nombre fini d'applications du type pr_g .

Soit $\theta_g \in \mathbb{Q}$ et $\omega_{\varphi_2} \in F^r H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_{H_2}(G/Z, X)/F')^{(E)}$ un élément rationnel. Posons

$$\omega_{\varphi_1} := \sum_{\substack{g \in \widehat{B}^\times \\ \text{t.q. } g^{-1}H_1g \subset H_2}} \theta_g \text{pr}_g^*(\omega_{\varphi_2}),$$

$$(M'_1)_{\text{dR}} = \left(\sum_g \theta_g \text{pr}_g^* \right) (M'_2)_{\text{dR}}$$

et

$$(M'_1)_{\text{B}} = \left(\sum_g \theta_g \text{pr}_g^* \right) (M'_2)_{\text{B}}.$$

On a alors la proposition

Proposition 2.1.4.8. Si $\omega_{\varphi_1} \neq 0$, alors l'application $\sum_{g \in \widehat{B}^\times \text{ t.q. } g^{-1}H_1g \subset H_2} \theta_g \text{pr}_g^*$ est injective sur $\bigoplus_{\sigma \in \{\pm 1\}^r} \mathbb{C}t_\sigma^*(\omega_{\varphi_2} \otimes 1)$, et $\omega_{\varphi_1} \in F^r H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_{H_1}(G/Z, X)/F')^{(E)}$ est rationnel.

Démonstration. Calculons le noyau de la restriction à $\bigoplus_{\sigma \in \{\pm 1\}^r} \mathbb{C}t_\sigma^*(\omega_{\varphi_2} \otimes 1)$ de $\sum \theta_g \text{pr}_g^*$.

Soit pour tout $\sigma \in \{\pm 1\}^r$ $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}$ et $\omega = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^r} \lambda_\sigma t_\sigma^* \omega_{\varphi_2}$ tel que $\sum_g \theta_g \text{pr}_g^*(\omega) = 0$. On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_g \theta_g \text{pr}_g^* \omega &= \sum_g \theta_g \text{pr}_g^* \sum_\sigma \lambda_\sigma t_\sigma^* \omega_{\varphi_2} \\ &= \sum_\sigma \lambda_\sigma t_\sigma^* \sum_g \theta_g \text{pr}_g^* \omega_{\varphi_2} \\ \sum_g \theta_g \text{pr}_g^* \omega &= \sum_\sigma \lambda_\sigma t_\sigma^* \omega_{\varphi_1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_\sigma \lambda_\sigma t_\sigma^* \omega_{\varphi_1} = 0 \in \bigoplus_{\sigma \in \{\pm 1\}^r} \mathbb{C}t_\sigma^* \omega_{\varphi_1},$$

et

$$\forall \sigma \in \{\pm 1\}^r \quad \lambda_\sigma t_\sigma^* \omega_{\varphi_1} = 0.$$

Les applications t_σ^* sont involutives donc bijectives, et ω_{φ_1} est supposé non nul. On obtient donc que pour tout σ , $\lambda_\sigma = 0$ et la première partie de la proposition. L'application $\sum_{g \in \widehat{B}^\times \text{ t.q. } g^{-1}H_1g \subset H_2} \theta_g \text{pr}_g^*$ commute aux opérateurs de Hecke T_v , $v \notin S$ et est un isomorphisme entre $\bigoplus \mathbb{C}t_\sigma^* \omega_{\varphi_2}$ et $\bigoplus \mathbb{C}t_\sigma^* \omega_{\varphi_1}$ donc les dimensions sont respectées et $\omega_{\varphi_1} \in \left(\bigoplus_{\sigma \in \{\pm 1\}^r} \mathbb{C}t_\sigma^*(\omega_{\varphi_1} \otimes 1) \right) \cap F^r H_{\text{dR}}^r(\text{Sh}_{H_1}(G/Z, X)/F')^{(E)}$ est rationnel. \square

Remarque 2.1.4.9. En particulier l'égalité (\star) pour M'_1 se déduit de celle pour M'_2 par $\sum_{g \in \widehat{B}^\times} \text{t.q. } g^{-1} H_1 g \subset H_2 \theta_g \text{Pr}^* g$.

2.2 Tores et cycles spéciaux

Soit K/F une extension quadratique satisfaisant les conditions de ramifications suivantes :

1. Les places τ_2, \dots, τ_r de F se décomposent dans K .
2. Les places $\tau_1, \tau_{r+1}, \dots, \tau_d$ se ramifient dans K .

Sous ces hypothèses il existe un plongement de F -algèbres

$$q : K \hookrightarrow B.$$

Un tel plongement est unique à conjugaison près, d'après le théorème de Skolem-Noether ([Vig80], page 6). Pour $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, nous noterons q_j l'application $K \hookrightarrow B_{\tau_j}$ suivante

$$q_j : K \hookrightarrow B \hookrightarrow B \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{R}.$$

De manière analogue,

$$\widehat{q} : \widehat{K} \hookrightarrow \widehat{B} \quad \text{et} \quad q_{\mathbb{A}} : K_{\mathbb{A}} \hookrightarrow B_{\mathbb{A}}$$

désignent les extensions de ce plongement aux adèles.

Le but de cette section est d'étudier des cycles associés à K dont le comportement est analogue à celui des points CM sur les courbes de Shimura quaternioniques.

2.2.1 Cycles spéciaux sur X

Notons

$$T = \text{Res}_{K/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) / \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m).$$

On a, pour toute \mathbb{Q} -algèbre A :

$$T(A) = (K \otimes_{\mathbb{Q}} A)^\times / (F \otimes_{\mathbb{Q}} A)^\times,$$

d'après le théorème « Hilbert 90 ». On fixe, dans toute la suite du manuscrit, un plongement

$$q : T \hookrightarrow G/Z(G).$$

Le groupe $T(\mathbb{R})$ s'identifie à

$$\prod_{j=1}^d K_{\tau_j}^\times / F_{\tau_j}^\times,$$

ce qui fournit des applications

$$q_j : K_{\tau_j}^\times / F_{\tau_j}^\times \longrightarrow G_{j, \mathbb{R}}.$$

Notons $\pi_0(T(\mathbb{R}))$ l'ensemble des composantes connexes de $T(\mathbb{R})$ et $T(\mathbb{R})^\circ$ sa composante neutre, dont on fixe une multi-orientation (dans le produit $\prod_{j=1}^d K_{\tau_j}^\times / F_{\tau_j}^\times$). D'après les conditions de ramification de K/F , on a

$$\pi_0(T(\mathbb{R})) = T(\mathbb{R}) / T(\mathbb{R})^\circ \simeq \prod_{j=2}^r \{\pm 1\}.$$

Le groupe $q(T(\mathbb{R})^\circ)$ agit sur $X = X_1 \times \dots \times X_d$ par conjugaison et l'action de $q_j(K_{\tau_j}^\times / F_{\tau_j}^\times)$ sur X_j est libre. On a la proposition suivante :

Proposition 2.2.1.1. *Toute $q(T(\mathbb{R})^\circ)$ -orbite \mathcal{T}° de X est un produit d'orbites de X_j sous $q_j(T(\mathbb{R})^\circ)$ et admet une multi-orientation induite par celle de $T(\mathbb{R})^\circ$.*

Démonstration. La première partie de la proposition découle du fait que X est naturellement un produit d'orbites de

$$h_j = \text{pr}_j : \mathbb{S} \longrightarrow G_{j,\mathbb{R}},$$

où $\text{pr}_j : G_{\mathbb{R}} \longrightarrow G_{j,\mathbb{R}}$ est la projection naturelle.

Montrons que la multi-orientation de \mathcal{T}° est bien définie. Soit $x \in \mathcal{T}^\circ$. On a

$$\mathcal{T}^\circ = q(T(\mathbb{R})^\circ) \cdot x.$$

Chaque facteur \mathcal{T}_j° est une orbite :

$$\mathcal{T}_j^\circ = q_j((K_{\tau_j}^\times/F_{\tau_j}^\times)^\circ) \cdot \text{pr}_j(x).$$

Mais $q_j((K_{\tau_j}^\times/F_{\tau_j}^\times)^\circ) \simeq \mathbb{R}_+^\times$ et l'action de \mathbb{R}_+^\times sur lui-même par multiplication conserve l'orientation. L'orientation de \mathcal{T}_j° est donc indépendante de x . La multi-orientation de \mathcal{T}° ne dépend pas du choix de x . \square

Nous noterons par la suite, pour $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$

$$\text{pr}_j : X = X_1 \times \cdots \times X_d \longrightarrow X_j$$

la projection sur le j -ième facteur de X .

Définition 2.2.1.2. Une $q(T(\mathbb{R})^\circ)$ -orbite \mathcal{T}° de X est dite spéciale si sa projection $\text{pr}_1(\mathcal{T}^\circ)$ sur X_1 est un point, nécessairement fixe sous l'action de $q_1(T(\mathbb{R})^\circ)$.

Remarque 2.2.1.3. Comme $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}^\times$ est connexe, $q_1(T(\mathbb{R})^\circ) = q_1(T(\mathbb{R}))$.

Dans la suite de ce manuscrit, nous nous fixons \mathcal{T}° une $q(T(\mathbb{R})^\circ)$ -orbite spéciale de X , que nous utiliserons pour construire des parties de $\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$. Si on se fixe des isomorphismes $B_{\tau_j} \simeq M_2(\mathbb{R})$ pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, X s'identifie à $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$. On peut alors décrire géométriquement les orbites. Les illustrations qui en découlent se situent page 99 de ce manuscrit. Précisons la structure d'une orbite spéciale :

Proposition 2.2.1.4. *\mathcal{T}° est une variété analytique réelle connexe multi-orientée de dimension $r - 1$.*

Démonstration. En effet, \mathcal{T}° s'écrit par définition $q(T(\mathbb{R})^\circ) \cdot x$ pour un certain $x \in X$. D'après la proposition 2.2.1.1 cet espace est naturellement un produit

$$\mathcal{T}^\circ = \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_r.$$

Par hypothèse \mathcal{T}_1 est un point. Les facteurs \mathcal{T}_j , pour $j \in \llbracket 2; r \rrbracket$ s'identifient à

$$\mathcal{T}_j = q_j((K_{\tau_j}^\times/F_{\tau_j}^\times)^\circ) \cdot \text{pr}_j(x)$$

et

$$q_j((K_{\tau_j}^\times/F_{\tau_j}^\times)^\circ) \simeq K_{\tau_j,+}^\times/F_{\tau_j}^\times,$$

où $K_{\tau_j,+}^\times$ désigne les éléments $x \in K \otimes_{F,\tau_j} \mathbb{R} \in K_{\tau_j}^\times$ de norme positive. Le groupe $q_j((K_{\tau_j}^\times/F_{\tau_j}^\times)^\circ)$ s'identifie donc à \mathbb{R}_+^\times , et \mathcal{T}_j est une variété analytique de dimension réelle un et connexe, ce qui permet de conclure. \square

Corollaire 2.2.1.5. \mathcal{T}° s'identifie à un produit

$$\mathcal{T}^\circ = \{z_1\} \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_r$$

où z_1 est un point de X_1 et γ_j une sous-variété connexe et orientée de dimension réelle un de X_j , pour $j \in \llbracket 2; r \rrbracket$.

Notation 2.2.1.6. Nous noterons par la suite $\{z_1, t_1(z_1)\}$ l'ensemble des points fixes de X_1 sous $q_1(T(\mathbb{R})^\circ) = q_1(T(\mathbb{R}))$.

2.2.2 Tore sur $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$

Nous allons maintenant étudier une partie \mathcal{T}_b° de $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}) = \widehat{B}^\times \backslash X \times \widehat{B}^\times / H\widehat{F}^\times$.

Définition 2.2.2.1. Soit $b \in \widehat{B}^\times$. On définit \mathcal{T}_b° de la manière suivante :

$$\mathcal{T}_b^\circ = [\mathcal{T}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times} = \left\{ [x, b]_{H\widehat{F}^\times}, x \in \mathcal{T}^\circ \right\}.$$

Proposition 2.2.2.2. La partie \mathcal{T}_b° est un tore réel orienté de $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$, de dimension réelle $r - 1$.

Démonstration. Nous allons identifier \mathcal{T}_b° comme espace principal homogène sous l'action d'un groupe isomorphe au quotient $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{r-1}$.

Remarquons tout d'abord que si $x, x' \in \mathcal{T}^\circ$ et $b \in \widehat{B}^\times$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} [x, b]_{H\widehat{F}^\times} = [x', b]_{H\widehat{F}^\times} &\iff \exists k \in B^\times \text{ et } h \in H\widehat{F}^\times & (kx', kbh) = (x, b) \\ &\iff \exists k \in B^\times \cap bH\widehat{F}^\times b^{-1} & kx' = x \end{aligned}$$

Comme la projection de \mathcal{T}° sur X_1 est un point, on a nécessairement $k \in B \cap q_1(K_{\tau_1}) = q_1(K)$ et

$$k \in q(K^\times) \cap bH\widehat{F}^\times b^{-1}.$$

Ainsi le stabilisateur \mathcal{W} de \mathcal{T}_b° sous l'action de $q(K^\times)$ est

$$\mathcal{W} = q(K^\times) \cap (bH\widehat{F}^\times b^{-1}).$$

Ce stabilisateur \mathcal{W} est commensurable à $\mathcal{O}_{K,+}^\times / \mathcal{O}_F^\times$ qui est de rang $r - 1$ sur \mathbb{Z} d'après le théorème des unités de Dirichlet :

$$\mathcal{O}_{K,+}^\times / \mathcal{O}_F^\times \simeq \text{torsion} \times \mathbb{Z}^{r-1},$$

et la partie de torsion est finie. L'action de $T(\mathbb{R})^\circ$ sur \mathcal{T}° est induite par celle de $\prod_{j=2}^r (K_{\tau_j}^\times / F_{\tau_j}^\times)^\circ$ et le logarithme fournit un isomorphisme

$$\prod_{j=2}^r (K_{\tau_j}^\times / F_{\tau_j}^\times)^\circ \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{r-1}.$$

L'image $\widetilde{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}_{K,+}^\times / \mathcal{O}_F^\times$ dans \mathbb{R}^{r-1} est isomorphe à \mathbb{Z}^s avec $s \leq r - 1$. Notons $\widetilde{\mathcal{O}}_K^\times$ l'image de \mathcal{O}_K^\times dans $(K \otimes \mathbb{R})^\times, N_{K/\mathbb{Q}}=1$. Comme

$$\prod_{j \notin \llbracket 2; r \rrbracket} K_{\tau_j}^\times / F_{\tau_j}^\times \quad \text{et} \quad \frac{(K \otimes \mathbb{R})^\times, N_{K/\mathbb{Q}}=1}{\widetilde{\mathcal{O}}_K^\times}$$

sont compacts,

$$\mathbb{R}^{r-1}/\tilde{\mathcal{O}}$$

est compact donc l'image de $\mathcal{O}_{K,+}^\times/\mathcal{O}_F^\times$ dans \mathbb{R}^{r-1} est un réseau.

L'espace \mathcal{T}_b° est donc un espace principal homogène sous

$$q(K^\times)/\mathcal{W} \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{r-1}.$$

C'est un tore réel de $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ de dimension $r - 1$ d'orientation induite par celle de \mathcal{T}° . □

Action de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$

Dans ce qui suit nous noterons K^{ab} l'extension maximale abélienne de K et

$$\mathrm{rec}_K : K_{\mathbb{A}}^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$$

l'application de réciprocité d'Artin, normalisée en imposant que les uniformisantes s'envoient sur les applications de Frobenius géométriques. Cette application est triviale sur K^\times :

$$\mathrm{rec}_K : K_{\mathbb{A}}^\times/K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K).$$

Rappelons que nous nous sommes fixé une $q(T(\mathbb{R})^\circ)$ -orbite spéciale de X . Pour tout $u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))$ et $b \in \widehat{B}^\times$, notons

$$\mathcal{T}_b^u = \left\{ [q(u) \cdot x, b]_{H\widehat{F}^\times}, x \in \mathcal{T}^\circ \right\}.$$

D'après 2.2.2.2, \mathcal{T}_b^u est un tore réel orienté de dimension $r - 1$.

Définition 2.2.2.3. Le groupe $K_{\mathbb{A}}^\times$ agit sur $\{\mathcal{T}_b^u, b \in \widehat{B}^\times, u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))\}$ par

$$\forall a = (a_\infty, a_f) \in K_{\mathbb{A}}^\times = K_\infty^\times \times \widehat{K}^\times \quad \forall b \in \widehat{B}^\times \quad a \cdot \mathcal{T}_b^u = \mathcal{T}_{\widehat{q}(a_f)b}^{q(a_\infty)u}.$$

Démonstration. En effet, si $a, a' \in K_\infty^\times \times \widehat{K}^\times$, on a $q(aa') = q(a)q(a')$ donc

$$aa' \cdot \mathcal{T}_b^u = a \cdot a' \cdot \mathcal{T}_b^u.$$

□

Remarquons que le choix de travailler avec $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ est important car il justifie que l'action de $F_{\mathbb{A}}^\times$ est triviale dans la proposition suivante :

Proposition 2.2.2.4. *L'action de $K^\times F_{\mathbb{A}}^\times$ sur $\{\mathcal{T}_b^u, b \in \widehat{B}^\times, u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))\}$ est triviale. On a donc une action de $K_{\mathbb{A}}^\times/K^\times F_{\mathbb{A}}^\times$ sur $\{\mathcal{T}_b^u, b \in \widehat{B}^\times, u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))\}$.*

Démonstration. Considérons dans un premier temps l'action de K^\times . Soit $k \in K^\times$. Comme $q(k) \in B^\times$, on a, par définition de $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$:

$$k \cdot \mathcal{T}_b^u = [q(k)q(u)\mathcal{T}^\circ, \widehat{q}(k)b]_{H\widehat{F}^\times} = [q(u)\mathcal{T}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times} = \mathcal{T}_b^u.$$

Soit maintenant $a = (a_\infty, a_f) \in F_{\mathbb{A}}^\times$. Comme $\widehat{q}(a_f)$ commute aux éléments de \widehat{B}^\times et $q(a_\infty)q(u)\mathcal{T}^\circ = q(u)\mathcal{T}^\circ$, on a

$$a \cdot \mathcal{T}_b^u = [q(a_\infty)q(u)\mathcal{T}^\circ, \widehat{q}(a_f)b]_{H\widehat{F}^\times} = [q(u)\mathcal{T}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times} = \mathcal{T}_b^u.$$

□

Remarque 2.2.2.5. Pour tout tore du type $\mathcal{T}_b^u = [q(u)\mathcal{T}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times}$ il existe un sous-groupe ouvert de $K_{\mathbb{A}}^\times$, donc de $K_{\mathbb{A}}^\times/K^\times$, agissant trivialement sur \mathcal{T}_b^u . Ainsi l'action de $K_{\mathbb{A}}^\times$ se factorise à travers rec_K , et, plus précisément, à travers

$$K_{\mathbb{A}}^\times/K^\times F_{\mathbb{A}}^\times \longrightarrow \text{Gal}((K^{\text{ab}})^{\text{rec}_K(F_{\mathbb{A}}^\times)}/K).$$

La proposition suivante précise la dépendance des tores construits suivant le choix du plongement $q : T \hookrightarrow G/Z(G)$.

Proposition 2.2.2.6. *L'ensemble de tores*

$$\{\mathcal{T}_b^u, b \in \widehat{B}^\times, u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))\}$$

est indépendant du choix de $q : K \hookrightarrow B$.

Démonstration. Soit $\tilde{q} : K \hookrightarrow B$ un autre plongement. D'après le théorème de Skolem-Noether, il existe $\alpha \in B^\times$ tel que

$$\forall k \in K \quad \tilde{q}(k) = \alpha q(k) \alpha^{-1}.$$

Soit $x_0 \in X$. Supposons que $\mathcal{T}^\circ = q(T(\mathbb{R})^\circ) \cdot x_0$, donc que $q(u)\mathcal{T}^\circ = q(uT(\mathbb{R})^\circ) \cdot x_0$. Alors $\widetilde{\mathcal{T}}^\circ$, orbite spéciale construite à partir de \tilde{q} et $\alpha(x_0)$ est $\tilde{q}(T(\mathbb{R})^\circ) \cdot \alpha(x_0) = \alpha \cdot \mathcal{T}^\circ$. Pour $u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))$ on a ainsi

$$\alpha \cdot q(u) \cdot \mathcal{T}^\circ = \tilde{q}(uT(\mathbb{R})^\circ) \cdot \alpha \cdot x_0.$$

Soit $b \in \widehat{B}^\times$. Notons $\widetilde{\mathcal{T}}_b^u$ le tore construit à partir de \tilde{q} . Comme $\alpha \in B^\times$, on a

$$\widetilde{\mathcal{T}}_b^u = [\tilde{q}(u)\widetilde{\mathcal{T}}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times} = [\alpha \cdot q(u) \cdot \mathcal{T}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times} = [q(u) \cdot \mathcal{T}^\circ, \alpha^{-1} \cdot b]_{H\widehat{F}^\times} = \mathcal{T}_{\alpha^{-1}b}^u$$

Comme $b \mapsto \alpha^{-1}b$ est une bijection, les ensembles

$$\{\mathcal{T}_b^u, b \in \widehat{B}^\times, u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))\}$$

et

$$\{\widetilde{\mathcal{T}}_b^u, b \in \widehat{B}^\times, u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))\}$$

sont égaux. □

Remarque 2.2.2.7. La preuve ci-dessus montre que déjà les ensembles $\{\mathcal{T}_b^u, b \in \widehat{B}^\times\}$ pour $u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))$ fixé sont indépendants du choix de q .

Remarque 2.2.2.8. Les tores \mathcal{T}_b^u se comportent de manière analogue aux points CM sur les courbes de Shimura quaternioniques d'un point de vue de l'action de $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$. Dans le cas des points CM, il est possible de montrer qu'ils sont définis sur certains ring class field de K , comme conséquence du théorème de la multiplication complexe. On pourra se reporter par exemple à [ST61] ou [Lan83].

2.2.3 Classe d'homologie des tores \mathcal{T}_b

Le but de ce paragraphe est de construire une chaîne différentiable de degré r sur $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$, qui sera un des ingrédients essentiels de la construction des points de Darmon. La proposition suivante explicite le comportement de la classe d'homologie des tores \mathcal{T}_b° .

Proposition 2.2.3.1. *La classe d'homologie $[\mathcal{T}_b^\circ] \in H_{r-1}(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ de \mathcal{T}_b° est de torsion.*

Démonstration. Rappelons que \mathcal{T}° se décompose en

$$\mathcal{T}^\circ = \{z_1\} \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_r.$$

Notons par l'application

$$\mathrm{pr} : X \times \{b\} \longrightarrow \mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}).$$

\mathcal{T}_b° est inclus dans l'image de pr et

$$\mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{T}_b^\circ) = (\{z_1\} \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_r) \times \{b\}.$$

Soit $\omega \in H^{r-1}(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. D'après le théorème de Matsushima-Shimura, ω se décompose en

$$\omega = \omega_{\mathrm{univ}} + \omega_{\mathrm{parab}}.$$

Comme $r-1 \neq r$ le théorème affirme plus précisément que $\omega = \omega_{\mathrm{univ}}$.

- Dans le cas où $r-1$ est impair, on sait alors que $H^{r-1}(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C}) = \{0\}$ donc que tous les éléments de $H_{r-1}(\mathrm{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ sont de torsion.
- Si $r-1 = 2s$ est pair, ω correspond au tiré en arrière de $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ à X d'une forme du type $\bigwedge_{j=2}^r \omega^{(j)}$ où, à une constante près,

$$\omega^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{ou} \\ \frac{dx_j \wedge dy_j}{y_j^2} & \text{de degré 2} \end{cases}$$

Reprenons les notations de la preuve de la proposition 2.2.2.2. \mathcal{T}_b° est un espace homogène sous un certain \mathcal{W} . Notons $\widetilde{\mathcal{W}}$ un domaine fondamental de \mathcal{W} dans le produit $\gamma_2 \times \cdots \times \gamma_r$. On a alors

$$\int_{\mathcal{T}_b^\circ} \omega = \int_{\widetilde{\mathcal{W}}} \omega^{(2)} \wedge \cdots \wedge \omega^{(r)} = 0$$

car chaque γ_j est de dimension 1, alors que les $\omega^{(j)}$ sont de degré 2.

Ainsi

$$\forall \omega \in H^{r-1}(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \quad \int_{\mathcal{T}_b^\circ} \omega = 0.$$

Ce qui prouve que $[\mathcal{T}_b^\circ] = 0 \in H_r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C})$, puis que la classe $[\mathcal{T}_b^\circ]$ de \mathcal{T}_b° dans $H_r(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est de torsion. □

Remarque 2.2.3.2. Le cas où $r-1$ est pair est le cas traité par Darmon dans [Dar04]. Remarquons que dans le cas où $B = \mathrm{M}_2(F)$, il faut aussi traiter la partie Eisenstein de la cohomologie.

Définition 2.2.3.3. Soit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ l'exposant de $H_{r-1}(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$. Il existe une chaîne Δ_b° de degré r , différentiable par morceaux telle que

$$n[\mathcal{T}_b^\circ] = \partial\Delta_b^\circ.$$

Une telle chaîne sera appelée chaîne spéciale.

Remarque 2.2.3.4. La r -chaîne Δ_b° est l'analogie de la r -cochaîne κ_r de [Dar04] page 90. De même \mathcal{T}_b° correspond à θ_r c.f. [Dar04] page 92.

D'après la proposition 2.1.3.5 l'élément

$$\left(\frac{1}{\Omega^\beta} \xi \alpha \int_{\Delta_b^\circ} \omega_\varphi^\beta \right)$$

est défini modulo Λ_1 . Il nous faut encore montrer que cette valeur est indépendante du choix fait pour \mathcal{T}° , où $T(\mathbb{R})^\circ$ est fixé, et pour Δ_b° . C'est l'objet de la proposition suivante

Proposition 2.2.3.5. Soient \mathcal{T}° et \mathcal{T}'° deux cycles spéciaux de X tels que $\mathrm{pr}_1(\mathcal{T}^\circ) = \mathrm{pr}_1(\mathcal{T}'^\circ) = \{z_1\}$ et tels que $\mathrm{pr}_j(\mathcal{T}^\circ)$ et $\mathrm{pr}_j(\mathcal{T}'^\circ)$ soient dans la même composante connexe de X_j pour tout $j \in \llbracket 2; r \rrbracket$. Notons n l'exposant de $H_{r-1}(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}}$ et soit Δ_b° et $\Delta_b'^\circ$ tels que

$$n[\mathcal{T}_b^\circ] = \partial\Delta_b^\circ \quad \text{et} \quad n[\mathcal{T}_b'^\circ] = \partial\Delta_b'^\circ.$$

On a

$$\int_{\Delta_b^\circ} \omega_\varphi^\beta = \int_{\Delta_b'^\circ} \omega_\varphi^\beta \pmod{\xi^{-1}\alpha^{-1}\Omega^\beta\Lambda_1}.$$

Démonstration. Par définition on sait que \mathcal{T}° et \mathcal{T}'° se projettent en $\{z_1\}$ sur le premier facteur X_1 de X , ce qui permet d'affirmer que $\Delta_b'^\circ - \Delta_b^\circ$ se décompose de la façon suivante

$$\Delta_b'^\circ - \Delta_b^\circ = \mathrm{pr}(\{z_1\} \times \mathcal{C}) + \mathcal{D},$$

où \mathcal{D} est un cycle : $\partial\mathcal{D} = 0$ et pr est l'application

$$\mathrm{pr} : \begin{cases} X & \longrightarrow \mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}) \\ x & \longmapsto [x, b]_{H\widehat{F}^\times} \end{cases}$$

Montrons que $\int_{\Delta_b'^\circ - \Delta_b^\circ} \omega_\varphi^\beta \in \xi^{-1}\alpha^{-1}\Omega^\beta\Lambda_1$.

Notons

$$\omega_\varphi^\beta = \sum_\varepsilon \omega_\varepsilon \in \bigoplus_{\varepsilon: \{\tau_1, \dots, \tau_r\} \rightarrow \{\pm 1\}^r} \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon)$$

la décomposition de ω_φ^β . Chaque facteur $\omega_\varepsilon \in \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon)$ vérifie

$$\mathrm{pr}^*(\omega_\varepsilon) = dz_1 \wedge \omega'_\varepsilon$$

par définition de ω_φ^β , qui ne fait pas intervenir t_1^* . On a

$$\int_{\mathrm{pr}(\{z_1\} \times \mathcal{C})} \omega_\varepsilon = \int_{\{z_1\} \times \mathcal{C}} dz_1 \wedge \omega'_\varepsilon = 0.$$

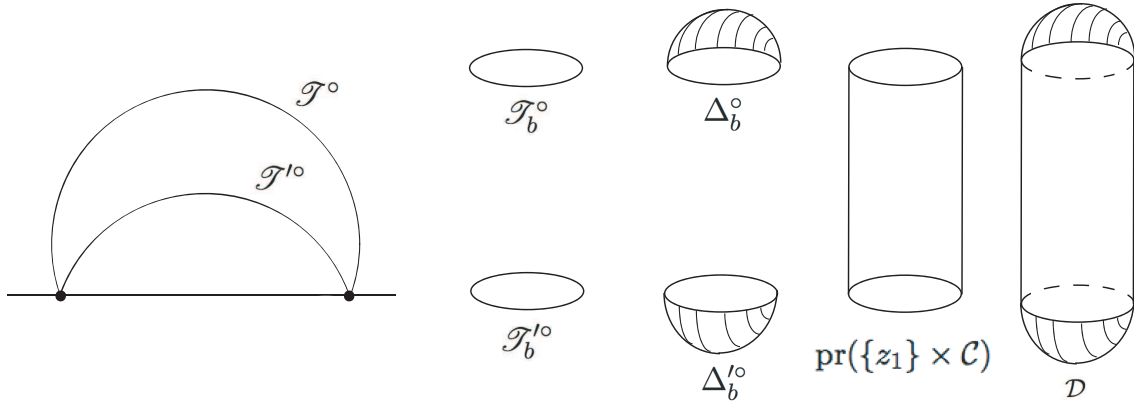
Ce qui montre que

$$\int_{\{z_1\} \times \mathcal{C}} \omega_\varphi^\beta = 0.$$

Par ailleurs, d'après la proposition 2.1.3.5, on a

$$\int_{\mathcal{D}} \omega_\varphi^\beta \in \xi^{-1}\alpha^{-1}\Omega^\beta\Lambda_1,$$

ce qui permet de conclure. \square

FIGURE 2.1 – Illustration de la preuve de la proposition 2.2.3.5 lorsque $r = 2$.

Corollaire 2.2.3.6. *La valeur de*

$$\left(\frac{1}{\Omega^\beta} \xi \alpha \int_{\Delta_b^o} \omega_\varphi^\beta \right) \pmod{\Lambda_1} \in \mathbb{C}/\Lambda_1$$

est indépendante du choix de la $T(\mathbb{R})^\circ$ -orbite spéciale \mathcal{T}° dont la projection sur X_1 est $\{z_1\}$ et de Δ_b^o vérifiant $n[\mathcal{T}_b^o] = \partial\Delta_b^o$.

On peut enfin définir l'élément essentiel à la construction des points de Darmon :

Définition 2.2.3.7. On note J_b^β l'élément suivant

$$J_b^\beta = \frac{1}{\Omega^\beta} \xi \alpha \int_{\Delta_b^o} \omega_\varphi^\beta \in \mathbb{C}/\Lambda_1$$

2.2.4 Étude de J_b^β

Pour tout $u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))$, choisissons Δ_b^u vérifiant

$$n \left[[q(u) \cdot \mathcal{T}^\circ, b]_{HF^\times} \right] = \partial\Delta_b^u.$$

par exemple, on peut prendre $\Delta_b^u = q(u)\Delta_b^o$.

La proposition suivante fournit une formule un peu plus pratique de J_b^β

Proposition 2.2.4.1. *On a*

$$J_b^\beta = \frac{1}{\Omega^\beta} \xi \alpha \sum_{u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u) \int_{\Delta_b^u} \omega_\varphi.$$

Démonstration. Montrons que $\int_{\Delta_b^o} \omega_\varphi^\beta = \sum_{u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u) \int_{\Delta_b^u} \omega_\varphi$. Pour cela, rappelons que $\omega_\varphi^\beta = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{r-1}} \beta(\sigma) t_\sigma^*(\omega_\varphi)$. Identifions $\pi_0(T(\mathbb{R}))$ et $\prod_{j=2}^r \{\pm 1\}$ en imposant que l'image de $T(\mathbb{R})^\circ$ soit $(1, \dots, 1)$. On obtient ainsi

$$\omega_\varphi^\beta = \sum_{u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u) t_u^*(\omega_\varphi)$$

et

$$\int_{\Delta_b^\circ} \omega_\varphi^\beta = \sum_{u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u) \int_{t_u \Delta_b^\circ} \omega_\varphi.$$

Mais $t_u \Delta_b^\circ$ est dans la même composante connexe que Δ_b^u , ce qui montre, d'après 2.2.3.5, que

$$\int_{t_u \Delta_b^\circ} \omega_\varphi = \int_{\Delta_b^u} \omega_\varphi$$

et permet de conclure. □

Remarque 2.2.4.2. Notons

$$\mathcal{T}_b^\beta = \sum_{u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u) \mathcal{T}_b^u$$

où l'on désigne par $-\mathcal{T}_b^u$ le tore \mathcal{T}_b^u dont on a changé l'orientation. Alors on a, pour tout $a = (a_\infty, a_f) \in K_{\mathbb{A}}^\times = K_\infty^\times \times \widehat{K}^\times$

$$a \cdot \mathcal{T}_b^\beta = \sum_{u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u) \mathcal{T}_{\widehat{q(a_f)b}}^{q(a_\infty)u} = \beta(a_\infty) \mathcal{T}_{\widehat{q(a_f)b}}^\beta.$$

Si on choisit $\Delta_b^\beta \in C^r(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ de sorte que

$$n[\mathcal{T}_b^\beta] = \Delta_b^\beta,$$

alors la proposition 2.2.4.1 montre que

$$J_b^\beta = \int_{\Delta_b^\beta} \omega_\varphi.$$

Analysons maintenant l'influence des différents choix que nous avons été amené à faire.

Orientation

Les tores \mathcal{T}_b° sont orientés suite au choix d'une multi-orientation de $T(\mathbb{R})^\circ$. Changer l'orientation en un facteur X_j , $j \in \llbracket 2; r \rrbracket$ change le signe de J_b^β . Ainsi un changement de multi-orientation de $T(\mathbb{R})^\circ$ induit un éventuel changement de signe de J_b^β indépendamment du choix de b et de β .

Choix de \mathcal{T}°

Soit $z_1 \in X_1$, stable par $q(K_{\tau_1}^\times)$. On a la proposition suivante :

Proposition 2.2.4.3. *Soit \mathcal{T}° et \mathcal{T}'° deux $q(T(\mathbb{R})^\circ)$ -orbites spéciales tels que $\text{pr}_1(\mathcal{T}^\circ) = \text{pr}_1(\mathcal{T}'^\circ) = \{z_1\}$. Alors il existe un unique $u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))$ tel que pour tout $j \in \llbracket 2; r \rrbracket$,*

$$\text{pr}_j(\mathcal{T}'^\circ) \text{ et } \text{pr}_j(q(u) \cdot \mathcal{T}^\circ)$$

sont dans la même composante connexe de X_j .

Ainsi, si on note $J_b'^\beta$ le nombre complexe construit à partir de \mathcal{T}'° , on a

$$J_b'^\beta = \beta(u) J_b^\beta.$$

Démonstration. Soit $x, x' \in X$ tels que \mathcal{T}° (resp. \mathcal{T}'°) soit l'orbite de x sous $q(T(\mathbb{R})^\circ)$ (resp. de x'). Il existe $u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $\text{pr}_j(q(u) \cdot x)$ et $\text{pr}_j(x')$ soient dans la même composante connexe de X_j . Ceci montre la première partie de la proposition.

Si on reprend maintenant les notations de la démonstration de la proposition 2.2.4.1, comme $\mathcal{T}'^\circ = q(u) \cdot \mathcal{T}^\circ$, la chaîne $\Delta_b'^\circ$ construite à partir de $[\mathcal{T}'^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times}$ n'est rien d'autre que Δ_b^u . Ainsi

$$\sum_{u' \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u') \int_{\Delta_b^{u'}} \omega_\varphi = \sum_{u' \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u') \int_{\Delta_b^{uu'}} \omega_\varphi = \beta(u) \sum_{u'' \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} \beta(u'') \int_{\Delta_b^{u''}} \omega_\varphi.$$

ce qui permet de conclure. \square

Choix de q

La proposition 2.2.3.5 montre que la valeur de $J_b^\beta \in \mathbb{C}/\Lambda_1$ dépend uniquement de la composante connexe dans X du cycle spécial \mathcal{T}° . La proposition suivante décrit l'influence du choix de q . Nous savons déjà grâce à la proposition 2.2.2.6 que l'ensemble des tores spéciaux est indépendant de q . La démonstration de cette proposition fournit de manière analogue la

Proposition 2.2.4.4. *Soient $q, q' : K \hookrightarrow B$ deux plongements et $x \in X$, \mathcal{T}° (resp. \mathcal{T}'°) la $q(T(\mathbb{R})^\circ)$ (resp. $q'(T(\mathbb{R})^\circ)$) orbite de x . Alors il existe $a \in B^\times$ tel que*

$$q' = aqa^{-1}$$

d'après le théorème de Skolem-Noether. Pour $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $\text{pr}_j(\mathcal{T}^\circ)$ et $\text{pr}_j(\mathcal{T}'^\circ)$ sont dans la même composante connexe de X_j si et seulement si $\tau_j(\text{nr}(a)) > 0$.

La proposition 2.2.4.3 donne alors le

Corollaire 2.2.4.5. *Avec les notations de la proposition ci-dessus, posons*

$$\alpha = (\text{sgn} \circ \tau_j(\text{nr}(a)))_{j \in \llbracket 1; r \rrbracket} \in \{\pm 1\}^{r-1},$$

on a

$$J_b'^\beta = \beta(\alpha) J_b^\beta.$$

Action de t_1

Notons $N_{B^\times}(K^\times)$ le normalisateur de K^\times dans B^\times . Soit $a \in N_{B^\times}(K^\times) \setminus K^\times$. Quitte à remplacer a par aa' avec $a' \in K^\times$ on peut supposer que

$$\forall j \in \llbracket 2; r \rrbracket \quad \tau_j(\text{nr}(a)) > 0.$$

On a d'une part

$$\text{pr}_1(q(a) \cdot \mathcal{T}^\circ) = t_1(z_1)$$

et

$$\forall j \in \llbracket 2; r \rrbracket \quad \text{pr}_j(q(a) \cdot \mathcal{T}^\circ) = \text{pr}_j(\mathcal{T}^\circ)$$

mais les orientations de $\text{pr}_j(q(a) \cdot \mathcal{T}^\circ)$ et de $\text{pr}_j(\mathcal{T}^\circ)$ **sont opposées**.

Ainsi

$$[t_1 \mathcal{T}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times} = [q(a) \mathcal{T}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times} = [\mathcal{T}^\circ, \widehat{q}(a)^{-1} b]_{H\widehat{F}^\times}$$

avec une orientation multipliée par $(-1)^{r-1}$ c'est-à-dire inchangée si r est impair, opposée sinon. D'où la

Proposition 2.2.4.6. *Les tores \mathcal{T}_b° et $t_1\mathcal{T}_{q(a)b}^\circ$ ne diffèrent éventuellement que par leur orientation.*

Chapitre 3

Points de Darmon généralisés

Dans ce chapitre, nous énonçons la conjecture principale et en analysons les conséquences.

3.1 Analogie de la conjecture de Darmon

3.1.1 Enoncé de la conjecture

Soit

$$\Phi_1 : \mathbb{C}/\Lambda_1 \xrightarrow{\sim} E_1(\mathbb{C})$$

l'uniformisation de Weierstrass, qui est l'inverse de l'application d'Abel-Jacobi, définie par η_1 . Pour tout $a_\infty \in K_\infty^\times$, on se fixe une r -chaîne $q(a_\infty) \cdot \Delta_b^\beta$ vérifiant

$$n[q(a_\infty) \cdot \mathcal{T}_b^\beta] = q(a_\infty) \cdot \Delta_b^\beta,$$

et notons

$$\beta(a_\infty) = \prod_{j=2}^r \beta \left(\operatorname{sgn} \left(\prod_{w|\tau_j} a_{\infty,w} \right) \right).$$

La conjecture suivante généralise la conjecture de Darmon [Dar04]

Conjecture 3.1.1.1. *Le point*

$$P_b^\beta = \Phi_1 \left(\frac{1}{\Omega^\beta} \xi \alpha \int_{\Delta_b^\beta} \omega_\varphi \right) = \Phi_1(J_b^\beta) \in E_1(\mathbb{C})$$

est rationnel : $P_b^\beta \in E(K^{\text{ab}})$ et

$$\forall a = (a_\infty, a_f) \in K_{\mathbb{A}}^\times \quad \operatorname{rec}_K(a) P_b^\beta = \Phi_1 \left(\frac{\xi \alpha}{\Omega^\beta} \int_{q(a_\infty) \cdot \Delta_{q(a_f)b}^\beta} \omega_\varphi \right) = \beta(a_\infty) P_{q(a_f)b}^\beta.$$

Définition 3.1.1.2. Les points P_b^β sont appelés points de Darmon.

Remarque 3.1.1.3. La conjecture 3.1.1.1 affirme qu'un élément de $E_1(\mathbb{C})$ est dans $E(K^{\text{ab}})$. Ces deux objets sont comparables grâce au raisonnement suivant. Le choix de $z_1 \in X_1^{q_1(K_{\tau_1}^\times)}$ détermine entièrement le morphisme

$$h_1 : \mathbb{S} \longrightarrow G_{1,\mathbb{R}},$$

donc un morphisme

$$\mathbb{C}^\times = \mathbb{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow G_{1,\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = B_{\tau_1}^\times = (B \otimes_{F,\tau_1} \mathbb{R})^\times$$

tel que $h_1(\mathbb{C}^\times) = q_1(K_{\tau_1}^\times)$. Tout ceci détermine un plongement

$$\tau_{1,K} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{h_1} & (B \otimes_{F,\tau_1} \mathbb{R})^\times \\ & \searrow \tau_{1,K} & \uparrow q_1 \\ & & (K \otimes_{F,\tau_1} \mathbb{R})^\times \end{array}$$

soit commutatif. On peut alors se fixer

$$\tilde{\tau}_1 : K^{\text{ab}} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

qui étend $\tau_{1,K}$, c'est-à-dire tel que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\tau_1} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & & \searrow \tau_{1,K} & \uparrow \tilde{\tau}_1 \\ K & \xrightarrow{\quad} & K^{\text{ab}} & & \end{array}$$

Maintenant il nous faut encore montrer que l'action galoisienne décrite dans la conjecture 3.1.1.1 ne dépend pas du plongement $\tilde{\tau}_1$ choisi. Mais l'isomorphisme

$$\begin{cases} \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) & \xrightarrow{\sim} & \text{Gal}(\tilde{\tau}_1(K^{\text{ab}})/\tau_{1,K}(K)) \\ \sigma & \longmapsto & \tilde{\tau}_1 \circ \sigma \circ \tilde{\tau}_1^{-1} \end{cases}$$

ne dépend pas du choix de $\tilde{\tau}_1$. En effet, si $\tilde{\tau}'_1$ est un autre plongement de K^{ab} dans \mathbb{C} qui étend $\tau_{1,K}$, on a $\tilde{\tau}'_1 = \tilde{\tau}_1 \circ \sigma'$ pour un certain $\sigma' \in \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ et

$$\forall \sigma \in \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \quad \tilde{\tau}'_1 \circ \sigma \circ \tilde{\tau}'_1^{-1} = \tilde{\tau}_1 \circ \sigma' \sigma \sigma'^{-1} \circ \tilde{\tau}_1^{-1} = \tilde{\tau}_1 \circ \sigma \circ \tilde{\tau}_1^{-1}$$

car $\text{Gal}(K^{\text{ab}}/K)$ est abélien, ce qui permet de conclure.

3.1.2 Conséquences

On donne ici deux corollaires qui précisent l'action d'éléments particuliers de $K_{\mathbb{A}}^{\times}$ sur P_b^{β} .

Corollaire 3.1.2.1. *Sous la conjecture 3.1.1.1, on a :*

$$\forall a_{\infty} \in K_{\infty}^{\times} \quad \text{rec}_K(a_{\infty})P_b^{\beta} = \beta(a_{\infty})P_b^{\beta}.$$

Remarque 3.1.2.2. Le corollaire 3.1.2.1 ci-dessus est l'analogie de la conjecture 2.3 de Darmon et Logan c.f. [DL03]. Pour compléter l'analogie de cette conjecture, on étudie plus précisément le corps de définition de P_b^{β} à la sous-section suivante.

Corollaire 3.1.2.3. *Sous la conjecture 3.1.1.1, on a :*

$$\forall a \in F_{\mathbb{A}}^{\times} \quad \text{rec}_K(a)P_b^{\beta} = P_b^{\beta}.$$

Démonstration. D'après la conjecture 3.1.1.1 on a pour tout $a \in F_{\mathbb{A}}^{\times}$ $\text{rec}_K(a_f)P_b^{\beta} = P_{\widehat{q}(a_f)b}^{\beta}$. Mais la proposition 2.2.2.4 montre que

$$J_{\widehat{q}(a_f)b}^{\beta} = J_b^{\beta},$$

ce qui permet de conclure à l'aide de la proposition 2.2.2.4, car

$$q(a_{\infty})\Delta_b^{\beta} = \Delta_b^{\beta}.$$

□

3.1.3 Corps de définition

Nous allons plus ou moins expliciter le corps de définition de P_b^{β} . On prendra garde au fait que les corps K_b et K_b^+ définis ci-dessous dépendent du choix de $q : K \hookrightarrow B$.

Notons $B_+^{\times} = \{b \in B^{\times}, \forall j \in \{2, \dots, r\}, \tau_j(\text{nr}(b)) > 0\}$, que l'on plonge diagonalement dans $(B \otimes \mathbb{R})^{\times}$ et

$$K_b^+ = (K^{\text{ab}})^{\text{rec}_K(q_{\mathbb{A}}^{-1}(bH\widehat{F}^{\times}b^{-1}B_+^{\times}))}$$

la sous-extension de K^{ab} fixée par $\text{rec}_K(q_{\mathbb{A}}^{-1}(bH\widehat{F}^{\times}b^{-1}B_+^{\times}))$. On a l'inclusion suivante

$$K_b := (K^{\text{ab}})^{\text{rec}_K(q_{\mathbb{A}}^{-1}(bH\widehat{F}^{\times}b^{-1}B^{\times}))} \subset K_b^+$$

où K_b est le corps fixé par $\text{rec}_K(q_{\mathbb{A}}^{-1}(bH\widehat{F}^{\times}b^{-1}B^{\times}))$.

Proposition 3.1.3.1. *Le point P_b^{β} est défini sur K_b^+ .*

Démonstration. Soit $a \in q_{\mathbb{A}}^{-1}(bH\widehat{F}^{\times}b^{-1}B_+^{\times})$, que l'on décompose en

$$(1_{\infty}, bha_f b^{-1})(a_{\infty}, 1_f)$$

avec $h \in H$, $a_f \in \widehat{F}^{\times}$ et $a_{\infty} \in q_{\mathbb{A}}^{-1}(B_+^{\times})$. D'après le corollaire 3.1.2.3 et la corollaire 3.1.2.1, on a

$$\begin{aligned} \text{rec}(a)P_b^{\beta} &= \text{rec}(q_{\mathbb{A}}^{-1}((1_{\infty}, bha_f b^{-1})))P_b^{\beta} \\ &= P_{bha_f b^{-1}b}^{\beta} \\ &= P_{bha_f}^{\beta} \\ &= P_b^{\beta} \end{aligned}$$

la dernière ligne étant due à l'invariance à droite des points de $\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ par $H\widehat{F}^{\times}$. Donc P_b^{β} est défini sur $K_b^+ = (K^{\text{ab}})^{\text{rec}_K(q_{\mathbb{A}}^{-1}(bH\widehat{F}^{\times}b^{-1}B_+^{\times}))}$. □

Remarquons que l'application de réciprocité rec_K induit une surjection

$$\mathcal{R} : \pi_0(T(\mathbb{R})) = \frac{(K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times}}{(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times} (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^{\times}} \simeq \prod_{j=2}^r \{\pm 1\} \rightarrow \text{Gal}(K_b^+ / K_b),$$

où $(K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^{\times}$ désigne les éléments dont la norme à F est positive en toute place réelle de F .

On a alors la proposition

Proposition 3.1.3.2. *Le points P_b^{β} est défini sur le corps $K_b^{\beta} = (K_b^+)^{\mathcal{R}(\text{Ker } \beta)}$ fixé par $\mathcal{R}(\text{Ker } \beta)$.*

Démonstration. Les éléments de $\mathcal{R}(\text{Ker } \beta)$ sont de la forme $(a_{\infty}, 1_f)$ avec $\beta((\text{signe} \circ \tau_j \circ \text{Norme})_{2 \leq j \leq r}(a_{\infty})) = (1, \dots, 1)$. La proposition est alors une conséquence du corollaire 3.1.2.1 qui montre que $\text{rec}(a_{\infty}, 1_f)P_b^{\beta} = P_b^{\beta}$ pour de tels éléments. \square

Remarque 3.1.3.3. Comme $\text{Ker } \beta$ est d'indice 1 ou 2 dans $\prod_{j=2}^r \{\pm 1\}$, le corps K_b^{β} est de degré 1 ou 2 sur K_b .

Cas où H est du type U_0 Supposons que B est du type de l'exemple 1.1.1.1. Soit $R \subset B$ un ordre d'Eichler de niveau N_+ . Posons $H = (R \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}})^{\times}$. Il existe alors un ordre de K sur \mathcal{O}_F de conducteur \mathfrak{f}_b

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{f}_b} = \mathcal{O}_F + \mathfrak{f}_b \mathcal{O}_K,$$

tel que

$$\text{rec}_K : K_{\mathbb{A}}^{\times} / K^{\times} F_{\mathbb{A}}^{\times} (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times} \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{f}_b}^{\times} \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(K_b / K)$$

$$\text{rec}_K : K_{\mathbb{A}}^{\times} / K^{\times} F_{\mathbb{A}}^{\times} (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^{\times} \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{f}_b}^{\times} \xrightarrow{\sim} \text{Gal}(K_b^+ / K)$$

Ainsi K_b est le ring class field d'ordre $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}_b}$ et K_b^+ son ring class field restreint, qui est aussi le ring class field de conducteur $\mathfrak{f}_b \mathfrak{f}_{\infty}$, avec $\mathfrak{f}_{\infty} = \prod_{j=2}^r \tau_j$.

Dans le cas où l'application

$$K_{\mathbb{A}}^{\times} / K^{\times} F_{\mathbb{A}}^{\times} (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^{\times} \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{f}_b}^{\times} \rightarrow K_{\mathbb{A}}^{\times} / K^{\times} F_{\mathbb{A}}^{\times} (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times} \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{f}_b}^{\times}$$

est injective, on a

$$[K_b^+ : K_b] = 2^{r-1}$$

et une présentation de $\text{Gal}(K_b^+ / K_b)$ par générateur et relations est

$$\text{Gal}(K_b^+ / K_b) = \langle \sigma_2, \dots, \sigma_r \mid \sigma_j^2 = 1 \rangle.$$

Ceci montre que $\text{Gal}(K_b^+ / K_b) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r-1}$ et que chaque σ_j correspond à la conjugaison complexe c_{τ_j} à la place τ_j . Dans cette situation, les caractères non triviaux β sont en bijection avec les extensions quadratiques K_b^{β} de K_b contenues dans K_b^+ .

3.1.4 Choix de z_1

Nous avons été amené, pour formuler la conjecture 3.1.1.1 à fixer un plongement

$$\tilde{\tau}_1 : K^{\text{ab}} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

au dessus de τ_1 . Notons c_1 la conjugaison complexe associée à ce plongement.

Soit \tilde{P}_b^β le point de Darmon construit à partir d'un cycle spécial $\tilde{\mathcal{T}}^\circ$ dont la projection sur X_1 est $t_1(z_1)$.

L'étude menée avant la proposition 2.2.4.6 incite à énoncer la conjecture suivante :

Conjecture 3.1.4.1. *On a*

$$\forall b \in \widehat{B}^\times \quad c_1(P_b^\beta) = \tilde{P}_b^\beta.$$

3.2 Détermination de B à l'aide des facteurs ε

Dans cette section, nous expliquons de quelle manière le choix de l'algèbre de quaternion B influe sur les propriétés des points P_b^β . On montre que si les points construits ne sont pas de torsion, alors B est entièrement déterminée par la donnée de K et de la classe d'isogénie de E . Ceci peut être mis en parallèle avec la condition de Heegner qui, dans le cas classique (c.f. [Dar04] hypothèse 3.9 pour GL_2 et lemme 4.17 dans le cas des courbes de Shimura) conditionne l'existence de points de Heegner. Dans le cas des points de Darmon, l'analogie est supposé lors de l'hypothèse 8.15.

3.2.1 Facteurs ε et vecteurs test

Notons π la représentation automorphe de $B_{\mathbb{A}}^\times$ associée à φ et

$$\eta_K = \eta_{K/F} : F_{\mathbb{A}}^\times / F^\times \text{N}_{K/F}(K_{\mathbb{A}}^\times) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

le caractère quadratique associé à l'extension K/F . Dans ce qui suit, pour toute place v de F nous noterons $\text{inv}_v(B_v)$ l'élément suivant

$$\text{inv}_v(B_v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \notin \text{Ram}(B) \\ -1 & \text{si } v \in \text{Ram}(B) \end{cases}.$$

Soit $b \in \widehat{B}^\times$ et

$$\chi : \text{Gal}(K_b^+/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

un caractère, que l'on identifiera au caractère suivant

$$K_{\mathbb{A}}^\times \xrightarrow{\text{rec}_K} \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \longrightarrow \text{Gal}(K_b^+/K) \xrightarrow{\chi} \mathbb{C}^\times.$$

Soit $L(\pi \times \chi, s)$ la fonction L de Rankin-Selberg associée à π et χ , c.f. [Jac72] page 132 et [JL70] section 12, ou [Bum97] page 369. En général cette fonction se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , vérifiant l'équation fonctionnelle

$$L(\pi \times \chi, s) = \varepsilon(\pi \times \chi, s) L(\tilde{\pi} \times \chi^{-1}, 1 - s),$$

où $\tilde{\pi}$ est la contragrédiente de π . Comme π est à caractère central trivial, la fonction $L(\pi \times \chi, s)$ est entière et vaut $L(\tilde{\pi} \times \chi^{-1}, s)$. L'équation fonctionnelle devient ainsi

$$L(\pi \times \chi, s) = \varepsilon(\pi \times \chi, s) L(\pi \times \chi, 1 - s),$$

et la parité de l'ordre d'annulation en $s = 1/2$ de la fonction $L(\pi \times \chi, s)$ est régie par la valeur de

$$\varepsilon(\pi \times \chi, \frac{1}{2}) = \pm 1.$$

Si l'on décompose les représentations en produit tensoriel restreint :

$$\pi = \bigotimes'_v \pi_v \quad \text{et} \quad \chi_v : K_v^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

on obtient, c.f. [Jac72], des équations fonctionnelles locales et des facteurs ε locaux $\varepsilon_v(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2})$, parfois liés au caractère $\eta_{K,v}$ de F_v^\times et à la valeur de $\text{inv}_v(B_v)$ de la façon suivante :

$$\eta_{K,v}(-1)\varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = \text{inv}_v(B_v) \quad (3.1)$$

Le théorème suivant précise dans quelles conditions l'équation (3.1) est vérifiée :

Théorème 3.2.1.1. *1. Si l'équation (3.1) est vérifiée, alors il existe une forme linéaire non nulle*

$$\ell_v : \pi_v \times \chi_v \longrightarrow \mathbb{C}$$

unique à un multiple scalaire près et vérifiant

$$\forall a \in K_v^\times \quad \forall u \in \pi_v \quad \ell_v(q_v(a)u) = \chi_v(a)^{-1} \ell_v(u),$$

c'est-à-dire que $\ell_v : \pi_v \longrightarrow \mathbb{C}(\chi_v^{-1})$ est $q_v(K_v^\times)$ -invariant.

2. Dans le cas où (3.1) n'est pas vérifiée, une telle forme ℓ_v n'existe pas.

Démonstration. c.f. [Tun83] et [Sai93]. □

Exemple 3.2.1.2. Si v se décompose dans K , on a d'après [Nek06], 12.6.2.4

$$\eta_{K,v}(-1)\varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = 1$$

et $\text{inv}_v(B_v) = 1$, donc (3.1) est vérifiée.

Définition 3.2.1.3. Dans le cas du point 1 du théorème 3.2.1.1, on appelle vecteur test de ℓ_v un élément $u \in \pi_v$ vérifiant $\ell_v(u) \neq 0$.

3.2.2 Détermination de B

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Proposition 3.2.2.1. *Soit $b \in \widehat{B}^\times$ et supposons que la conjecture 3.1.1.1 soit vraie. Si le point*

$$e_{\overline{\chi}}(P_b^\beta) = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_b^+/K)} \chi(\sigma) \otimes P_b^\beta \in E(K_b^+) \otimes \mathbb{Z}[\chi]$$

n'est pas de torsion, alors :

1.

$$\forall v \nmid \infty \quad \eta_{K,v}(-1)\varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = \text{inv}_v(B_v).$$

En particulier, B est uniquement déterminée par K et la classe d'isogénie de E/F .

2. *Le facteur ε global vaut $\varepsilon(\pi \times \chi, \frac{1}{2}) = -1$.*

Remarque 3.2.2.2. Cette proposition est analogue, dans le cas de l'étude des points CM sur les courbes de Shimura quaternioniques à la proposition 2.6.2 de [AN10].

Remarque 3.2.2.3. Si β est différent de la partie archimédienne χ_∞ de χ , alors $e_{\overline{\chi}}(P_b^\beta) = 0$. En effet, si $a_\infty \in K_\infty^\times$ est tel que $\text{rec}_K(a_\infty) \in \text{Gal}(K_b^+/K)$, on a

$$\begin{aligned} e_{\overline{\chi}}(P_b^\beta) &= \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_b^+/K)} \chi(\sigma) \otimes P_b^\beta \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_b^+/K)} \chi(\sigma a_\infty) \otimes P_b^\beta \\ &= \chi_\infty(a_\infty) \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_b^+/K)} \chi(\sigma) \otimes P_b^\beta \\ &= \chi_\infty(a_\infty) e_{\overline{\chi}}(P_b^\beta) \end{aligned}$$

mais d'autre part

$$\text{rec}_K(a_\infty) e_{\overline{\chi}}(P_b^\beta) = \beta(a_\infty) e_{\overline{\chi}}(P_b^\beta)$$

ce qui permet de conclure. Dans la preuve qui suit, on supposera donc que

$$\beta = \chi_\infty.$$

Démonstration. Nous suivons le plan de démonstration de [AN10].

Principe de la preuve La plupart des cas se traitent à l'aide de la proposition 12.6.2.4 de [Nek06]. Pour les cas restant, le principe consiste en l'application du théorème 3.2.1.1. Nous allons construire une forme linéaire $q_v(K_v^\times)$ invariante $\ell_v : \pi_v \rightarrow \mathbb{C}(\chi_v^{-1})$, pour v variant dans un certain ensemble de places S' . Comme nous serons capables par construction d'exhiber un vecteur test pour cette forme, nous serons dans le cadre d'application du théorème 3.2.1.1 qui permettra de conclure. Les constructions qui suivent utilisent le même genre de manipulation que les preuves du corollaires 3.1.2.3 et de la corollaire 3.1.2.1. Malheureusement, nous manipulons ici des quantités qui ne commutent pas. On introduit donc dans le prochain paragraphe une application $j_v : K_v^\times \hookrightarrow B_v^\times$ telle que les éléments $q_v(K_v^\times)$ -invariants à gauche soient exactement les éléments $j_v(K_v^\times)$ -invariants à droite.

De q_v à j_v Soit S' un ensemble fini de places non-archimédiennes de F contenant les places en lesquelles B , π ou l'extension K_b^+/F se ramifient, et telle que l'application

$$r = (r_v : K_v^\times \longrightarrow \text{Gal}(K_b^+/K))_{v \in S'}$$

définie comme étant la composée

$$r : \prod_{v \in S'} K_v^\times \longrightarrow K_{\mathbb{A}}^\times \xrightarrow{\text{rec}_K} \text{Gal}(K^{\text{ab}}/K) \longrightarrow \text{Gal}(K_b^+/K)$$

est surjective.

Posons, pour $v \in S'$

$$j_v : \begin{cases} K_v & \hookrightarrow B_v \\ k & \mapsto b_v^{-1} q_v(k) b_v \end{cases}$$

et

$$j = (j_v)_{v \in S'} : \prod_{v \in S'} K_v \hookrightarrow \prod_{v \in S'} B_v.$$

Comme S' ne contient aucune place archimédienne de F , on a

$$\forall a \in \prod_{v \in S'} K_v^\times \quad [\mathcal{I}^\circ, \widehat{q}(a)b]_{H\widehat{F}^\times} = [\mathcal{I}^\circ, bj(a)]_{H\widehat{F}^\times}$$

et

$$\forall a \in \prod_{v \in S'} K_v^\times \quad \forall b \in \widehat{B}^\times \quad \text{rec}_K(a)P_b^\beta = P_{\widehat{q}(a)b}^\beta = P_{bj(a)}^\beta.$$

Notons

$$(K_v^\times)^\circ \subset K_v^\times$$

le relèvement de

$$(K_v^\times / \mathcal{O}_{K,v}^\times)^{\text{Gal}(K/F)} \subset K_v^\times / \mathcal{O}_{K,v}^\times.$$

On a

$$K_v^\times / \mathcal{O}_{K,v}^\times F_v^\times \xrightarrow{\sim} \begin{cases} 0 & \text{si } v \text{ est inerte dans } K/F \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } v \text{ se ramifie dans } K/F \\ \mathbb{Z} & \text{si } v \text{ se décompose dans } K/F \end{cases}$$

le quotient $(K_v^\times)^\circ / F_v^\times$ est compact et

$$D_v := K_v^\times / (K_v^\times)^\circ \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } v \text{ se décompose dans } K/F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(K_v^\times)^\circ / \mathcal{O}_{K,v}^\times F_v^\times \xrightarrow{\sim} \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } v \text{ se ramifie dans } K/F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $v \in S'$, le groupe

$$C_v = \mathcal{O}_{K,v}^\times \cap \text{Ker}(r_v)$$

est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{O}_{K,v}^\times$ et le quotient

$$V_v^\circ = (K_v^\times)^\circ / F_v^\times C_v$$

est fini.

Nous allons maintenant définir une partie V de la façon suivante :

– Si v ne se décompose pas dans K/F ,

$$V_v^\circ = K_v^\times / F_v^\times C_v,$$

et on pose $V_v := V_v^\circ$.

– Si v se décompose dans K/F , on se fixe une section de la surjection

$$K_v^\times \twoheadrightarrow K_v^\times / (K_v^\times)^\circ \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

On a alors

$$K_v^\times = (K_v^\times)^\circ \times D_v$$

et l'existence de $n_v \geq 1$ tel que

$$\text{Ker}(r_v |_{D_v}) = n_v D_v.$$

Soit $D'_v \subset D_v$ un système de représentants de $D_v / n_v D_v$, on pose alors

$$V_v = V_v^\circ D'_v \subset K_v^\times / F_v^\times C_v.$$

Ceci définit un ensemble

$$V = \prod_{v \in S'} V_v \subset \prod_{v \in S'} K_v^\times / F_v^\times C_v$$

stable par multiplication par le groupe abélien $V^\circ = \prod_{v \in S'} V_v^\circ$ et tel que l'application

$$V \hookrightarrow \prod_{v \in S'} K_v^\times / F_v^\times C_v \xrightarrow{r} \text{Gal}(K_b^+ / K)$$

ait toutes ses fibre de cardinal

$$\frac{|V|}{|\text{Gal}(K_b^+ / K)|}$$

et soit surjective. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{|V|}{|\text{Gal}(K_b^+ / K)|} e_{\bar{\chi}}(P_b^\beta) &= \frac{|V|}{|\text{Gal}(K_b^+ / K)|} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_b^+ / K)} \chi(\sigma) \otimes \sigma \cdot P_b^\beta \\ &= \sum_{a \in V} \chi(a) \otimes P_{bj(a)}^\beta \end{aligned}$$

Changement de niveau Fixons un sous-groupe ouvert compact

$$H_1 \subset \bigcap_{a \in V} j(a) H j(a)^{-1}.$$

Les applications

$$\text{Sh}_{H_1}(G/Z, X) \xrightarrow{[j(a)]} \text{Sh}_{j(a)^{-1} H_1 j(a)}(G/Z, X) \xrightarrow{\text{pr}} \text{Sh}_H(G/Z, X),$$

définies sur les points complexes justifient les calculs suivants, puisque V est un ensemble fini :

$$\begin{aligned} \sum_{a \in V} \chi(a) \int_{\Delta_{bj(a)}^\circ} \omega_\varphi^\beta &= \sum_{a \in V} \chi(a) \int_{\Delta_b^\circ} [j(a)]^* \omega_\varphi^\beta \\ &= \int_{\Delta_b^\circ} \sum_{a \in V} \chi(a) [j(a)]^* \omega_\varphi^\beta \\ &:= \int_{\Delta_b^\circ} \omega_1^\beta, \end{aligned}$$

où

$$\omega_1^\beta := \sum_{a \in V} \chi(a) [j(a)]^* \omega_\varphi^\beta.$$

Construction d'un vecteur invariant Si

$$\frac{|V|}{|\text{Gal}(K_b^+ / K)|} e_{\bar{\chi}}(P_b^\beta) = \sum_{a \in V} \chi(a) \otimes P_{bj(a)}^\beta \in \mathbb{Z}[\chi] \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_b^+) \subset \mathbb{Z}[\chi] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} / \Lambda_1$$

n'est pas de torsion, il existe $\sigma : \mathbb{Z}[\chi] \hookrightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{\xi \alpha}{\Omega^\beta} \int_{\Delta_b^\circ} \sum_{a \in V} \sigma \chi(a) [j(a)]^* \omega_\varphi^\beta \notin \mathbb{Q}[\sigma \chi] \cdot \Lambda_1,$$

où ${}^\sigma\chi = \sigma \circ \chi$. En particulier, le vecteur

$${}^\sigma\omega_1 = \sum_{a \in V} {}^\sigma\chi(a)[\cdot j(a)]^* \omega_\varphi \in \pi^{H_1} \cap \Gamma(\mathrm{Sh}_{H_1}(G/Z, X), \Omega_{H_1})$$

est non nul et invariant sous $j(\prod_{v \in S'} (K_v^\times)^\circ)$ pour $v \in S'$ car V est stable par multiplication par V° . De plus

$$\forall a \in \prod_{v \in S'} (K_v^\times)^\circ \quad j(a)\omega_1 = {}^\sigma\chi^{-1}(a)\omega_1.$$

Notons

$${}^\sigma\ell_{S'} : \bigotimes_{v \in S'} {}^\sigma\pi_v \longrightarrow \mathbb{C}({}^\sigma\chi^{-1})$$

la projection $j(\prod_{v \in S'} (K_v^\times)^\circ)$ -invariante sur $\mathbb{C}\omega_1$.

Si $v \in S'$ ne se décompose pas dans K Dans ce cas $(K_v^\times)^\circ = K_v^\times$ et ${}^\sigma\ell_{S'}$ induit une forme linéaire ${}^\sigma\ell_v j_v(K_v^\times)$ -invariante, donc $q_v(K_v^\times)$ -invariante et ${}^\sigma\ell_v(\omega_{1,v}) \neq 0$, où

$$\omega_{1,v} = \sum_{a_v \in V_v} {}^\sigma\chi \circ r_v(a_v)[\cdot j_v(a_v)]^* \omega_\varphi.$$

Comme $\varepsilon_v({}^\sigma\pi_v \times {}^\sigma\chi_v, \frac{1}{2})$ est indépendant de $\sigma : \mathbb{Z}[\chi] \hookrightarrow \mathbb{C}$, on a d'après le théorème 3.2.1.1

$$\eta_{K,v}(-1)\varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = \mathrm{inv}_v(B_v).$$

Si $v \in S'$ se décompose dans K On est dans le cas de l'exemple 3.2.1.2 et

$$\eta_{K,v}(-1)\varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = 1 = \mathrm{inv}_v(B_v).$$

Si $v \notin S'$ Alors B se décompose en v et π_v est une série principale. Dans ce cas le calcul de [Nek06] proposition 12.6.2.4 montre que

$$\eta_{K,v}(-1)\varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = 1 = \mathrm{inv}_v(B_v).$$

On a bien dans tous les cas

$$\eta_{K,v}(-1)\varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = \mathrm{inv}_v(B_v).$$

Preuve de 2. Si $v = \tau_j$ est une place archimédienne de F , alors $\varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = 1$. On a de plus

$$\eta_{K,v}(-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \llbracket 2; r \rrbracket \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et, par construction

$$\mathrm{inv}_v(B_v) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \llbracket 1; r \rrbracket \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi

$$\eta_{K,v}(-1)\mathrm{inv}_v(B_v) = \begin{cases} -1 \times 1 & \text{si } j = 1 \\ 1 \times 1 & \text{si } j \in \llbracket 2; r \rrbracket \\ -1 \times -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall j \in \{1, \dots, d\} \quad \varepsilon_v(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) = \eta_{K,v}(-1)_{\text{inv}_v(B_v)} \times \begin{cases} -1 & \text{si } j = 1 \\ 1 & \text{si } j > 1 \end{cases}$$

D'où

$$\varepsilon(\pi \times \chi, \frac{1}{2}) = - \prod_v \eta_{K,v}(-1)_{\text{inv}_v(B_v)} = -1.$$

□

3.3 Formule de Gross-Zagier

La formule de Gross-Zagier liant les points de Heegner aux dérivées de fonctions L , c.f. [GZ86], est un élément essentiel en faveur de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Dans [YZZ] Yuan, Zhang et Zhang démontrent une formule analogue en toute généralité pour GL_2 , généralisant le travail Zhang [Zha01a, Zha04] dans le cadre d'une extension K/F de type CM.

Rappelons brièvement le cadre étudié par Yuan, Zhang et Zhang. Soit π une représentation parabolique de $\text{GL}_2(F_{\mathbb{A}})$, K/F une extension quadratique et

$$\chi : K_{\mathbb{A}}^{\times} / K^{\times} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$$

un caractère fini, vérifiant, si on note ω_{π} le caractère central de π ,

$$\chi|_{F_{\mathbb{A}}^{\times}} \omega_{\pi} = 1.$$

Notons

$$\Sigma = \left\{ v, \varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) \neq \chi_v \eta_{K,v}(-1) \right\}.$$

Dans ce cas, $\varepsilon(\pi \times \chi) = (-1)^{|\Sigma|}$. On distingue alors les résultats obtenus dans le cas « pair », *i.e.* $\varepsilon(\pi \times \chi) = 1$, du à Gross [Gro04], Waldspurger [Wal85b] et Zhang [Zha01a, Zha04, Zha01b], du cas impair, étudié dans [YZZ].

Le cas « pair » Soit B l'unique algèbre de quaternions sur F vérifiant

$$\text{Ram}(B) = \Sigma.$$

On se fixe un plongement de K dans B et on note π' la représentation de B^{\times} qui est en relation avec π par la correspondance de Jacquet-Langlands. Dans ce cas

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{K_{\mathbb{A}}^{\times}}(\pi \otimes \chi, \mathbb{C}) = 1$$

et l'application de $\text{Hom}_{K_{\mathbb{A}}^{\times}}(\pi \otimes \chi, \mathbb{C})$ suivante

$$\ell_{\chi} : \begin{cases} \pi' & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \int_{K_{\mathbb{A}}^{\times} / K^{\times} F_{\mathbb{A}}^{\times}} f(x) \chi(x) dx \end{cases}$$

satisfait la propriété

$$\ell_{\chi} \neq 0 \iff L(\pi \times \chi, \frac{1}{2}) \neq 0.$$

Le cas « impair » Supposons maintenant K est une extension CM de F , que pour toute place archimédienne v de F , π_v est une série discrète de poids 2. Dans ce cas, et que B est comme précédemment l'algèbre de quaternion vérifiant $\text{Ram}(B) = \Sigma$. Dans [YZZ], Yuan Zhang et Zhang montrent que $L'(\pi \times \chi, \frac{1}{2})$ s'annule si et seulement si un certain diviseur CM n'est pas de torsion dans la Jacobienne d'une courbe de Shimura. Dans cette section, nous allons donner une version conjecturale de ce résultat.

3.3.1 Construction d'une forme linéaire invariante

Soit $b \in \widehat{B}^\times$ et $H \subset \widehat{B}^\times$ un sous-groupe ouvert compact tel que

$$H_{\tau_1} \mathbb{R}^\times = q_1(K_{\tau_1}^\times).$$

Dans cette section nous aurons besoin de mentionner la dépendance de \mathcal{T}_b° en H on notera donc, pour $u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))$

$$\mathcal{T}_{H,b}^u = \left\{ [q(u)x, b]_{H\widehat{F}^\times}, x \in \mathcal{T}^\circ \right\}.$$

Soit $\Delta_{H,b}^u \in C^r(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ une r -chaîne différentiable par morceaux à coefficients rationnels de $\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ telle que

$$\partial \Delta_{H,b}^u = n[\mathcal{T}_{H,b}^u].$$

Rappelons que les chaînes $\Delta_{H,b}^u$ satisfont la propriété suivante :

$$\forall u' \in \pi_0(T(\mathbb{R})) \quad t_{u'} \Delta_{H,b}^u = \Delta_b^{uu'}.$$

Soit π_∞ la représentation archimédienne associée à π . On se fixe $\varphi_\infty \in \pi_\infty$ un vecteur de poids minimal $(\underbrace{2, \dots, 2}_r, 0, \dots, 0)$ de π_∞ et une forme rationnelle (c.f. définition 2.1.4.3)

ω_φ de la forme

$$\omega_\varphi = \varphi_\infty \otimes \varphi_f \in \pi_\infty \otimes \pi_f \subset S_2(B_{\mathbb{A}}^\times).$$

Définition 3.3.1.1. On notera ${}_{\mathbb{Q}}\pi_f$ le sous $\mathbb{Q}[\widehat{B}^\times]$ -module de π_f engendré par φ_f .

Proposition 3.3.1.2. *L'espace ${}_{\mathbb{Q}}\pi_f$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel et l'application*

$${}_{\mathbb{Q}}\pi_f \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \longrightarrow \pi_f$$

est surjective.

Démonstration. L'espace $\text{Im}({}_{\mathbb{Q}}\pi_f \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \rightarrow \pi_f)$ est un sous-espace non nul de π_f invariant sous l'action de $B_{\mathbb{A}}^\times$. Comme π_f est irréductible, on a nécessairement

$$\text{Im}({}_{\mathbb{Q}}\pi_f \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \rightarrow \pi_f) = \pi_f$$

et l'application ${}_{\mathbb{Q}}\pi_f \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \rightarrow \pi_f$ est surjective. \square

Remarque 3.3.1.3. Ce type d'espace a été étudié par Waldspurger dans [Wal85a], qui caractérise leurs éléments en termes d'intégrale le long de tout tore maximal de PGL_2 . Ces résultats ne s'appliquent pas ici.

Comme au chapitre précédent, on se fixe $\eta \in H^0(E, \Omega_{E/F})$ une forme différentielle non nulle. Comme ω_φ est rationnelle, il existe $\alpha \in F'^\times$ tel que

$$\mathcal{J}(\alpha\omega_\varphi) = \eta.$$

Pour simplifier un peu les notations, à savoir éviter le facteur ξ , nous allons nous intéresser à $E_1(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Q}\Lambda_1$ plutôt qu'à $E_1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}/\Lambda_1$.

Soit χ un caractère continu d'ordre fini de $K_{\mathbb{A}}^\times/K^\times F_{\mathbb{A}}^\times$:

$$\chi : K_{\mathbb{A}}^\times/K^\times F_{\mathbb{A}}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}[\chi]^\times.$$

Fixons un sous-groupe compact ouvert H_0 de \widehat{B}^\times . Soit $H' \subset H_0$ un sous-groupe ouvert compact de \widehat{B}^\times vérifiant

$$\chi\left(q_{\mathbb{A}}^{-1}(H'F_{\mathbb{A}}^\times)\right) = 1.$$

Notons $\text{pr} : \text{Sh}_{H'}(G/Z, X) \longrightarrow \text{Sh}_{H_0}(G/Z, X)$ la projection naturelle définie sur les points complexes par

$$\text{pr} : \begin{cases} \text{Sh}_{H'}(G/Z, X)(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Sh}_{H_0}(G/Z, X)(\mathbb{C}) \\ [x, b]_{H'\widehat{F}^\times} & \longmapsto & [x, b]_{H_0\widehat{F}^\times} \end{cases}$$

La formule

$$\ell_\chi(\omega') = \frac{1}{[H_0 : H'] \deg(\mathcal{T}_{H',b}^u \xrightarrow{\text{pr}} \mathcal{T}_{H_0,b}^u)} \sum_{a \in K_{\mathbb{A}}^\times/q_{\mathbb{A}}^{-1}(H'F_{\mathbb{A}}^\times)(K \otimes \mathbb{R})_+^\times} \chi(a) \int_{\Delta_{H',q(a)}^{q(a_\infty)u}} \omega' \quad (3.2)$$

définit une forme linéaire

$$\ell_\chi : S_2^{H'} \cap \mathbb{Q}[G(\mathbb{A}_f)]\omega_\varphi \longrightarrow \mathbb{Q}(\chi) \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{C}/\mathbb{Q}\alpha^{-1}\Omega^{\chi_\infty}\Lambda_1).$$

Notation 3.3.1.4. Pour éviter d'alourdir les formules dans ce qui suit, nous noterons

$$\delta_{H',H_0}^u = \deg(\mathcal{T}_{H',b}^u \xrightarrow{\text{pr}} \mathcal{T}_{H_0,b}^u)$$

et

$$W_{H'} = K_{\mathbb{A}}^\times/q_{\mathbb{A}}^{-1}(H'F_{\mathbb{A}}^\times)(K \otimes \mathbb{R})_+^\times.$$

Avec ces notations, (3.2) devient

$$\ell_\chi(\omega') = \frac{1}{[H_0 : H'] \delta_{H',H_0}^u} \sum_{a \in W_{H'}} \chi(a) \int_{\Delta_{H',q(a)}^{q(a_\infty)u}} \omega'$$

Remarque 3.3.1.5. Moralement, on a $\ell_\chi(\omega) = \int_{\Delta} \chi \otimes \omega$ où $\partial\Delta$ est l'image de $q_{\mathbb{A}}(K_{\mathbb{A}}^\times)$ dans $\text{Sh}(G/Z, X) = \varprojlim_H \text{Sh}_H(G/Z, X)$.

Proposition 3.3.1.6. 1. Soient $H'' \subset H' \subset H_0$ un sous-groupe ouvert compact. Rappelons que $\chi(q_{\mathbb{A}}^{-1}(H'F_{\mathbb{A}}^\times)) = 1$ et notons

$$\text{pr}^* : S_2^{H'}(B_{\mathbb{A}}^\times) \longrightarrow S_2^{H''}(B_{\mathbb{A}}^\times).$$

Si $\omega' \in S_2^{H'}(B_{\mathbb{A}}^\times) \cap \mathbb{Q}[\widehat{B}^\times]\omega_\varphi$, alors la relation de compatibilité suivante

$$\ell_\chi(\omega') = \ell_\chi(\text{pr}^*(\omega'))$$

est vérifiée et ℓ_χ définit une forme linéaire sur $\mathbb{Q}[\widehat{B}^\times]\omega_\varphi$.

2. On a

$$\forall a \in \widehat{K}^\times \quad \forall \omega \in \mathbb{Q}[\widehat{B}^\times] \omega_\varphi \quad \ell_\chi([\widehat{q}(a)]^* \omega) = \chi_f(a)^{-1} \ell_\chi(\omega).$$

3. Si χ se factorise par $\text{Gal}(K_b^+/K)$ et si $P_b^\beta = \Phi_1 \left(\int_{\Delta_{H_0,b}^u} \omega_\varphi^\beta \right)$, alors

$$e_{\overline{\chi}}(P_b^{\chi_\infty}) = \sum_{\text{Gal}(K_b^+/K)} \chi(\sigma) \sigma \cdot P_b^{\chi_\infty} \in \mathbb{Q}(\chi) \otimes_{\mathbb{Q}} E(K_b^+) \subset \mathbb{Q}(\chi) \otimes_{\mathbb{Q}} (\mathbb{C}/\mathbb{Q}\Lambda_1)$$

est, à un facteur rationnel près, égal à $\Phi_1(\ell_\chi(t_u \circ [\cdot b]^* \omega_\varphi))$.

Démonstration. La preuve de cette proposition est principalement calculatoire.

Preuve de 1. Soit $a \in \widehat{K}^\times$. On a $\text{pr}(\Delta_{H'',\widehat{q}(a)}^u) = \Delta_{H',\widehat{q}(a)}^u$ et

$$\int_{\Delta_{H'',b}^u} \text{pr}^* \omega' = \text{deg}(\mathcal{T}_{H'',b}^u \longrightarrow \mathcal{T}_{H',b}^u) \int_{\Delta_{H',b}^u} \omega' = \delta_{H'',H'}^u \int_{\Delta_{H',b}^u} \omega'.$$

Soient $a, a' \in K_{\mathbb{A}}^\times / q_{\mathbb{A}}^{-1}(H' F_{\mathbb{A}}^\times)(K \otimes \mathbb{R})_+^\times = W_{H'}$ tels que

$$a \equiv a' \pmod{q_{\mathbb{A}}^{-1}(H'' F_{\mathbb{A}}^\times)}.$$

alors

$$\text{pr}(\Delta_{H'',\widehat{q}(a)}^{q(a_\infty)u}) = \text{pr}(\Delta_{H'',\widehat{q}(a')}^{q(a'_\infty)u}) = \Delta_{H',\widehat{q}(a)}^{q(a_\infty)u}.$$

Comme $\chi(q_{\mathbb{A}}^{-1}(H' F_{\mathbb{A}}^\times)) = 1$, on a

$$\begin{aligned} \ell_\chi(\text{pr}^* \omega') &= \frac{1}{[H_0 : H''] \delta_{H'',H_0}^u} \sum_{a \in W_{H''}} \chi(a) \int_{\Delta_{H'',\widehat{q}(a)}^{q(a_\infty)u}} \text{pr}^* \omega' \\ &= \frac{\delta_{H'',H'}^u}{\delta_{H'',H_0}^u} \sum_{a \in W_{H''}} \chi(a) \int_{\Delta_{H',\widehat{q}(a)}^{q(a_\infty)u}} \omega' \\ &= \frac{\delta_{H'',H'}^u}{[H_0 : H''] \delta_{H'',H_0}^u} \sum_{a \in W_{H'}} \chi(a) [H' : H''] \int_{\Delta_{H',\widehat{q}(a)}^{q(a_\infty)u}} \omega' \\ &= \frac{[H' : H'']}{[H_0 : H''] \delta_{H'',H_0}^u} \sum_{a \in W_{H'}} \chi(a) \int_{\Delta_{H',\widehat{q}(a)}^{q(a_\infty)u}} \omega' \\ &= \ell_\chi(\omega'). \end{aligned}$$

Preuve de 2. Supposons que le sous groupe ouvert H'' de H' soit suffisamment petit pour que

$$t_{q(a_\infty)}^* [\widehat{q}(a)]^* \text{pr}^* \omega \in S_2^{H''}.$$

Le point 2 de la proposition est une conséquence du changement de variables $a'' = aa'$ dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\ell_\chi(t_{q(a_\infty)}^*[\cdot\widehat{q}(a)]^*\omega) &= \ell_\chi(t_{q(a_\infty)}^*[\cdot\widehat{q}(a)]^*\text{pr}^*\omega) \\
&= \frac{1}{[H_0 : H'']\delta_{H'',H_0}^u} \sum_{a' \in W_{H''}} \chi(a') \int_{\Delta_{H'',\widehat{q}(a')}}^{q(a'_\infty)u} t_{q(a_\infty)}^*[\cdot\widehat{q}(a)]^*\text{pr}^*\omega \\
&= \frac{1}{[H_0 : H'']\delta_{H'',H_0}^u} \sum_{a' \in W_{H''}} \chi(a') \int_{\Delta_{H'',\widehat{q}(a')}}^{q(a_\infty a'_\infty)u} \text{pr}^*\omega \\
&= \frac{1}{[H_0 : H'']\delta_{H'',H_0}^u} \sum_{a'' \in W_{H''}} \chi(a'' a^{-1}) \int_{\Delta_{H'',\widehat{q}(a'')}}^{q(a''_\infty)u} \text{pr}^*\omega \\
&= \chi(a)^{-1} \frac{1}{[H_0 : H'']\delta_{H'',H_0}^u} \sum_{a'' \in W_{H''}} \chi(a'') \int_{\Delta_{H'',\widehat{q}(a'')}}^{q(a''_\infty)u} \text{pr}^*\omega \\
&= \chi(a)^{-1} \ell_\chi(\text{pr}^*\omega) \\
&= \chi(a)^{-1} \ell_\chi(\omega)
\end{aligned}$$

Preuve de 3. Comme

$$\omega_\varphi \in S_2(B_{\mathbb{A}}^\times) = \bigcup_H S_2^H(B_{\mathbb{A}}^\times),$$

il existe H' suffisamment petit tel que

$$\omega_\varphi \in S_2^{H'} \quad \text{et} \quad t_u^*[\cdot b]^*\omega_\varphi \in S_2^{H'}.$$

On peut supposer $K_{\mathbb{A}}^\times/q_{\mathbb{A}}^{-1}(H'F_{\mathbb{A}}^\times)(K \otimes \mathbb{R})_+^\times \simeq \text{Gal}(K_b^+/K)$. Notons

$$\nu = \frac{1}{[H_0 : H'] \deg(\mathcal{T}_{H'} \longrightarrow \mathcal{T}_{H_0})}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\ell_\chi(t_u^* \circ [\cdot b]^* \omega_\varphi) &= \nu \sum_{a \in \frac{K_{\mathbb{A}}^\times}{q_{\mathbb{A}}^{-1}(H'F_{\mathbb{A}}^\times)(K \otimes \mathbb{R})_+^\times}} \chi_f(a_f) \chi_\infty(a_\infty) \int_{\Delta_{H',\widehat{q}(a)}}^{q(a_\infty)} t_u^*[\cdot b]^* \omega_\varphi \\
&= \nu \sum_{a_f} \chi(a_f) \sum_{a_\infty} \chi_\infty(a_\infty) \text{rec}_K(a_f) \cdot \int_{\Delta_{H',b}^u} t_{\text{rec}_K(a_\infty)} \omega_\varphi \\
&= \nu \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_b^+/K)} \chi(\sigma) \int_{\Delta_{H',b}^u} \sum_{a_\infty} \chi_\infty(a_\infty) t_{\text{rec}_K(a_\infty)} \omega_\varphi \\
&= \nu \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K_b^+/K)} \chi(\sigma) \int_{\Delta_{H',b}^u} \sum_{a_\infty} \omega_\varphi^{\chi_\infty},
\end{aligned}$$

donc

$$e_{\overline{\chi}}(P_b^{\chi_\infty}) = \Phi_1(\ell_\chi(t_u \circ [\cdot]_* \omega_\varphi)).$$

□

3.3.2 Formule de Gross-Zagier conjecturale

Considérons la hauteur de Néron-Tate

$$h_{\text{NT}} : E(K^{\text{ab}}) \times E(K^{\text{ab}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que l'on étend en une forme hermitienne

$$h_{\text{NT}} : E(K^{\text{ab}}) \otimes \mathbb{C} \times E(K^{\text{ab}}) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Une formule de Gross-Zagier pour les points de Darmon devrait être, sous l'hypothèse

$$\forall v \neq \tau_1 \quad \varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) \eta_{K,v}(-1) = \text{inv}_v(B),$$

l'existence d'une constante $k(b, \omega_\varphi)$ telle que

$$\forall \sigma : \mathbb{Q}(\chi) \hookrightarrow \mathbb{C} \quad h_{\text{NT}}(e_{\sigma\overline{\chi}}(P_b^{\chi_\infty})) = k(b, \omega_\varphi) L'(\pi \times \sigma\chi, \frac{1}{2}).$$

Cette formule devrait expliquer les équivalences suivantes :

Conjecture 3.3.2.1. *Soit K_χ le corps de définition de χ . Si*

$$\forall v \neq \tau_1 \quad \varepsilon(\pi_v \times \chi_v, \frac{1}{2}) \eta_{K,v}(-1) = \text{inv}_v(B),$$

alors il existe un choix de b et de ω_φ de sorte que $k \neq 0$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \ell_\chi \neq 0 &\iff \exists b \in B_{\mathbb{A}}^\times \text{ tel que } K_\chi \subset K_b^+ \text{ et } e_{\overline{\chi}}(P_b^{\chi_\infty}) \in \mathbb{Z}[\chi] \otimes E(K_b^+) \text{ n'est pas de torsion} \\ &\iff \exists \sigma : \mathbb{Q}(\chi) \hookrightarrow \mathbb{C} \quad L'(\pi \times \sigma\chi, \frac{1}{2}) \neq 0 \\ &\iff \forall \sigma : \mathbb{Q}(\chi) \hookrightarrow \mathbb{C} \quad L'(\pi \times \sigma\chi, \frac{1}{2}) \neq 0. \end{aligned}$$

Expliquons l'origine de la dernière équivalence ci-dessus : l'espace $E(K_b^+) \otimes \mathbb{Q}$ est une représentation \mathbb{Q} -rationnelle du groupe abélien $\text{Gal}(K_b^+/K)$. Il se décompose en une somme de caractères qui sont conjugués deux à deux. L'annulation de l'un entraîne l'annulation des autres.

3.4 Variétés de Shimura de type orthogonal

La formule de Gross-Zagier donne explicitement la « longueur » des points de Heegner :

$$\exists k \neq 0 \quad \text{tel que} \quad h_{\text{NT}}(P_K) = kL'(E/K, 1).$$

Dans leur article [GKZ87] Gross, Kohlen et Zagier cherchent à préciser la position exacte des points de Heegner dans le groupe de Mordell-Weil. L'origine de ce résultat vient de la mise en relation de la formule de Gross-Zagier et d'un théorème de Waldspurger

concernant les valeurs spéciales de fonctions L . Précisons cette relation. Considérons une courbe elliptique E sur \mathbb{Q} de rang 1. Si $-d$ désigne le discriminant d'un corps quadratique imaginaire, notons $L(E, d, s)$ la fonction L tordue, qui est aussi la fonction L de la tordue quadratique de E . Notons P_d le point de Heegner de niveau d et P_0 un générateur de la partie libre de $E(\mathbb{Q})$. Il existe un entier $b(d)$ vérifiant $P_d = b(d)P_0$. La hauteur de P_d s'exprime alors

$$h_{\text{NT}}(P_d) = b(d)^2 h_{\text{NT}}(P_0).$$

Mais la formule de Gross-Zagier montre que h_{NT} est proportionnelle à

$$L'(E/\mathbb{Q}(\sqrt{-d}), 1) = L'(E/\mathbb{Q}, 1)L(E_{-d}/\mathbb{Q}, 1),$$

où E_{-d} désigne la tordue quadratique de E par $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Soit maintenant f la forme modulaire parabolique de poids 2 associée à E , que l'on sait modulaire. Cette forme f est associée, *via* la correspondance de Shimura-Kohnen à une forme modulaire de poids $3/2$, g , dont on note $c(d)$ les coefficients de Fourier. Un théorème de Waldspurger et Kohnen [Wal81] montre que $L(E, d, 1)$ est proportionnel à $c(d)^2$.

Le théorème de Gross-Kohnen-Zagier consiste alors en l'affirmation suivante :

$$\forall d \quad b(d) = c(d).$$

La preuve originale de ce théorème, c.f. [GKZ87], reprend le principe de la preuve de la formule de Gross-Zagier. Cette preuve est plutôt calculatoire, et on y trouve le calcul général de $\langle P_d, P_{d'} \rangle_{\text{NT}}$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{NT}}$ désigne la forme bilinéaire associée à h_{NT} .

Dans [Zag85], Zagier fournit une preuve qui fonctionne au cas par cas, mais beaucoup plus géométrique. Cette preuve consiste à reconnaître les points de Heegner comme points d'intersection de certains cycles sur une variété modulaire de Hilbert. Ces cycles, appelés cycles de Hirzebruch-Zagier sont étudiés dans [HZ76].

La preuve géométrique que l'on trouve dans [Zag85] est le point de départ des considérations de cette dernière section. Cette preuve a en effet été généralisée par Yuan, Zhang et Zhang dans [YZZ09]. Notons \mathcal{M} l'ensemble des cycles CM définis dans [YZZ09]. Ce sont des cycles de la jacobienne d'une courbe de Shimura quaternionique. Le théorème obtenu par Yuan, Zhang et Zhang est le suivant

Théorème 3.4.0.2. (*Yuan, Zhang, Zhang*)

Pour tout $G(\widehat{\mathbb{Q}})$ -module π_f de caractère central trivial,

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{G(\widehat{\mathbb{Q}})}(\mathcal{M}, \pi_f) \leq 1.$$

Si $\text{Hom}_{G(\widehat{\mathbb{Q}})}(\mathcal{M}, \pi_f)$ n'est pas trivial, alors $\sigma_f \otimes \sigma_{(2, \dots, 2)}$ est une représentation automorphe parabolique de $\text{GL}_2(F_{\mathbb{A}})$, où σ_f est la représentation de $\text{GL}_2(\widehat{F})$ associée à π_f par la correspondance de Jacquet-Langlands, et $\sigma_{(2, \dots, 2)}$ la série discrète holomorphe de $\text{GL}_2(F_{\infty})$ de poids parallèle $(2, \dots, 2)$.

La preuve se décompose en plusieurs étapes. La première est l'utilisation d'un résultat de modularité dû à Kudla et Millson [Kud97, Kud04, KM90]. Kudla et Millson montrent qu'une certaine série génératrice de classe d'homologies de cycles spéciaux construits sur des variétés de Shimura orthogonales est une forme modulaire. A l'aide de ce résultat, Yuan, Zhang et Zhang montrent la modularité d'une série génératrice de classe de Chow de ces mêmes cycles spéciaux, ce qui leur permet de conclure à l'aide d'un procédé récursif dû à W. Zhang, c.f. [Zha].

Dans cette section nous donnons un énoncé conjectural de ce type de résultat concernant les points de Darmon. Pour cela, après avoir étudié des questions de signes concernant ces points, nous reformulons la construction des points de Darmon dans le langage des variétés de Shimura orthogonales. Ces variétés sont associées à des espaces quadratiques sur F de signature à l'infini du type

$$(n, 2) \times (n + 1, 1)^{r-1} \times (n + 2, 0)^{d-r}$$

là où ceux considérés par Kudla, Millson, Bruinier [Bru], Funke sont de signature $(n, 2) \times (n + 2, 0)^{d-1}$. Un tel énoncé est motivé par le travail récent de Darmon et Tornaríá [DT08] qui obtiennent un résultat en ce sens pour la construction p -adique des points de Stark-Heegner.

3.4.1 Discussion sur les signes

Jusqu'à la fin de ce chapitre on se fixe une courbe elliptique modulaire E/F on note N son conducteur et B est de la forme de l'exemple 1.1.1.1. C'est-à-dire que $N = N_+ N_-$ est une décomposition admissible,

$$\text{Ram}(B) = \{\tau_{r+1}, \dots, \tau_d\} \cup \{v \mid N_-\}$$

et K une extension quadratique de F de discriminant relatif $d_{K/F}$ vérifiant l'analogie de la condition de Heegner suivante :

Hypothèse 3.4.1.1. *Toute place $v \mid N_+$ se décompose dans K , toute place $v \mid N_-$ est inerte dans K .*

En particulier $d_{K/F}$ et N sont premiers entre eux. Soit R un ordre d'Eichler de B de niveau N_+ . On suppose que K est maximale plongé dans B pour cet ordre, *i.e.* si K est identifié à son image dans B par q

$$K \cap R = \mathcal{O}_K.$$

Le niveau de la variété de Shimura considérée est supposé être $H = \widehat{R}^\times$. On a ainsi

$$H\widehat{F}^\times = \widehat{R}^\times \widehat{F}^\times.$$

Rappelons que l'on dispose d'un plongement

$$\tau_{1,K} : K \hookrightarrow \mathbb{C}$$

défini par h_{z_1} . Notons c la conjugaison complexe pour $\tau_{1,K}$. Supposons que la conjecture 3.1.1.1 soit vérifiée, posons $\beta = 1$ et

$$P = \text{Tr}_{K_1^+/K} P_1 \in E(K).$$

Le but de cette section est de montrer la

Proposition 3.4.1.2. *Soit ε le signe global de E/F , *i.e.* $\Lambda(E/F, s) = \varepsilon \Lambda(E/F, 2 - s)$ où Λ est la fonction L complétée de E/F . Alors*

$$c(P) = -\varepsilon P.$$

Démonstration. Notons $K = F(i)$ et $B = K(j)$, avec $i^2 = \mathfrak{a}$, $j^2 = \mathfrak{b}$ et $ij = -ji$. Rappelons que

$$\mathcal{T}_1^\circ = [\mathcal{T}^\circ, 1]_{H\widehat{F}^\times},$$

avec $\mathcal{T}^\circ = \{z_1\} \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_r$. Ainsi

$$c(\mathcal{T}_1^\circ) = [\{t_1 z_1\} \times \gamma_2 \times \cdots \times \gamma_r, 1]_{H\widehat{F}^\times} = (-1)^{r-1} [j^{-1}(\mathcal{T}^\circ), 1]_{H\widehat{F}^\times}$$

et

$$c(\mathcal{T}_1^\circ) = (-1)^{r-1} [\mathcal{T}^\circ, j]_{H\widehat{F}^\times},$$

car $j \in B^\times$. Ce qui montre que $c(P_1) = (-1)^{r-1} P_j$. Nous allons exprimer P_j en fonction de P_1 . Pour cela, nous noterons (par abus) pour toute place v de F , j_v l'élément $(1, \dots, 1, \underbrace{j_v}_v, 1, \dots) \in B_{\mathbb{A}}^\times$. Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 3.4.1.3. *Soit $b \in \widehat{B}^\times$ et v une place de F . On suppose que $b_v = 1$. On a*

$$P_{bj_v} = \begin{cases} -\varepsilon_v P_b & \text{si } v \mid N_- \\ \varepsilon_v \text{rec}_K(k_v^{-1}) P_b & \text{si } v \mid N_+ \\ P_b & \text{si } v \nmid N \end{cases}$$

Démonstration. Rappelons que si $v \nmid d_{K/F}$, on a les équivalences suivantes pour v inerte dans K/F

$$\begin{aligned} \text{inv}_v(B) = 1 &\iff B_v \simeq M_2(F_v) \\ &\iff \mathfrak{b} \in N_{K_v/F_v}(K_v^\times) = \mathcal{O}_{F_v}^\times F_v^{\times 2} \\ &\iff 2 \mid \text{ord}_v(\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

Comme $\bar{j} = -j$, on a $\text{nr}(j) = -j^2 = -\mathfrak{b}$ et

$$\text{inv}_v(B) = 1 \iff 2 \mid \text{ord}_v(\text{nr}(j_v)).$$

Cas où $v \mid N_-$ Dans ce cas $H_v = \mathcal{O}_{B_v}^\times$ est l'unique ordre maximal de B_v donc $H_v \triangleleft B_v^\times$ et $B_v^\times/H_v^\times \simeq \mathbb{Z}$ via le choix d'une uniformisante. Comme H_v est distingué dans B_v^\times , l'application

$$[j_v] : \text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Sh}_{j_v^{-1}H_{j_v}}(G/Z, X)(\mathbb{C})$$

est bien définie sur $\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$. On a donc

$$[\mathcal{T}^\circ, bj_v]_{H\widehat{F}^\times} = [j_v][\mathcal{T}^\circ, b]_{H\widehat{F}^\times}$$

et

$$\int_{\Delta_{bj_v}^\circ} \omega_\varphi = \int_{\Delta_b^\circ} [j_v]^* \omega_\varphi = \int_{\Delta_b^\circ} \pi_v(j_v) \omega_\varphi.$$

La composante locale de la représentation automorphe π associée à E se factorise de la manière suivante :

$$\pi_v : B_v^\times \xrightarrow{\text{nr}} F_v^\times \xrightarrow{\text{ord}_v} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \{\pm 1\}.$$

Notons α le caractère non ramifié

$$\alpha : F_v^\times \xrightarrow{\text{ord}_v} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \{\pm 1\}$$

tel que

$$\pi_v = \alpha \circ \text{nr}.$$

Comme $v \mid N_-$, on sait que E est a réduction multiplicative en v . Le type de réduction est caractérisé par α : ce caractère est trivial si et seulement si E est a réduction multiplicative déployée en v , c'est-à-dire si et seulement si $\varepsilon_v = -1$.

Finalement

$$[j_v]^* \omega_\varphi = \alpha(\text{nr}(j_v)) \omega_\varphi = \begin{cases} \omega_\varphi & \text{si } \alpha = 1 \\ (-1)^{\text{ord}_v(\text{nr}(j))} \omega_\varphi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mais $v \mid N_-$ donc $v \in \text{Ram}(B)$ est inerte dans K/F et $\text{inv}_v(B) = -1$ donc $2 \nmid \text{ord}_v(\text{nr}(j))$. Ainsi

$$[j_v]^* \omega_\varphi = \alpha(\text{nr}(j_v)) \omega_\varphi = \begin{cases} \omega_\varphi = -\varepsilon_v \omega_\varphi & \text{si } \alpha = 1 \\ -\omega_\varphi = -\varepsilon_v \omega_\varphi & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$P_{bj_v} = -\varepsilon_v P_b.$$

Cas où $v \mid N_+$ On se fixe dans ce cas une uniformisante ϖ_v de F_v , ainsi qu'un isomorphisme $B_v \simeq \text{M}_2(F_v)$, pour lequel K_v s'identifie à l'ensemble des matrices diagonales et R_v s'identifie à $U_0(\varpi_v^{\text{ord}_v(N_+)})$.

Comme $\text{inv}_v(B_v) = 1$, l'élément j_v est une norme locale : il existe $k_v \in K_v$ tel que $j_v = \text{N}_{K_v/F_v}(k_v)$. Quitte à substituer $k_v^{-1} j_v$ à j_v , on peut supposer $j_v^2 = 1$. De plus, j_v est dans le normalisateur de K_v^\times dans B_v^\times . On peut donc identifier j_v à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Posons

$$W_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_v^{\text{ord}_v(N_+)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\text{ord}_v(N_+)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cet élément de B_v normalise R_v . Notons k_v l'élément de K_v^\times qui s'identifie à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v^{\text{ord}_v(N_+)} \end{pmatrix}.$$

On a $k_v j_v = W_v$ et, comme W_v normalise H_v :

$$[\mathcal{I}^\circ, bj_v]_{H\widehat{F}^\times} = [\mathcal{I}^\circ, bk_v^{-1} W_v]_{H\widehat{F}^\times} = [\cdot W_v][\mathcal{I}^\circ, bk_v^{-1}]_{H\widehat{F}^\times}.$$

Pour analyser l'effet de $[\cdot W_v]$ on décompose $\omega_\varphi = \bigotimes_{v \mid N_+} \omega_v \otimes \omega'$ où ω_v est un vecteur nouveau en v , c'est-à-dire que $[\cdot W_v]^* \omega_v = \varepsilon_v \omega_v$ et

$$\int_{\Delta_{bj_v}^\circ} \omega_\varphi = \varepsilon_v \int_{\Delta_{bk_v^{-1}}^\circ} \omega_\varphi.$$

Puisque $b_v = 1$,

$$P_{bj_v} = \varepsilon_v \text{rec}_K(k_v^{-1}) P_b.$$

Cas où $v \nmid N$ Un calcul analogue au cas où $v \mid N_+$ montre que

$$P_{bj_v} = \text{rec}_K(k_v^{-1}) P_b.$$

□

Conclusion Finalement on obtient que

$$c(P_1) = (-1)^{r-1} \prod_{v|N_-} (-\varepsilon_v) \prod_{v|N_+} \varepsilon_v \operatorname{rec}_K(k_v^{-1})P_1,$$

et plus précisément

$$\forall a \in K_{\mathbb{A}}^{\times} \quad c(\operatorname{rec}_K(a)P_1) = (-1)^{r-1} \prod_{v|N_-} (-\varepsilon_v) \prod_{v|N_+} \varepsilon_v \operatorname{rec}_K(k_v^{-1})\operatorname{rec}_K(a)P_1.$$

On en déduit, puisque $P \in E(K)$ donc que $\operatorname{rec}_K(k^{-1})P = P$ que

$$c(P) = (-1)^{r-1} \prod_{v|N_-} (-\varepsilon_v) \prod_{v|N_+} \varepsilon_v P = (-1)^{r-1} (-1)^{|\{v|N_-\}|} \prod_{v|\infty} \varepsilon_v P. \quad (3.3)$$

Il nous reste à montrer que $(-1)^{r-1} \prod_{v|N_-} (-\varepsilon_v) \prod_{v|N_+} \varepsilon_v = -\varepsilon$. Pour tout $v | \infty$, on a $\varepsilon_v = -1$, on a $\prod_{v|\infty} = (-1)^d$ et le signe qui intervient dans l'équation 3.3 est

$$(-1)^d \prod_{\substack{v \\ =\varepsilon}} \varepsilon_v (-1)^{r-1} (-1)^{|\{v|N_-\}|}.$$

Mais $\{v | N_-\} = \operatorname{Ram}(B) \cap S_f$ et $\operatorname{Ram}(B)$ est de cardinal pair, donc

$$(-1)^{|\{v|N_-\}|} = (-1)^{|\operatorname{Ram}(B) \cap S_{\infty}|} = (-1)^{d-r}.$$

On obtient bien

$$c(P) = (-1)^d \varepsilon (-1)^{r-1} (-1)^{|\{v|N_-\}|} P = -\varepsilon P.$$

□

Remarque 3.4.1.4. Le calcul explicité ci-dessus est un cas particulier d'un résultat de Prasad, [Pra96] théorème 4, qui montre que, dans le cas où $\operatorname{Hom}_{K_v^{\times}}(\pi_v, \mathbf{1}) \neq \{0\}$ l'action de l'élément non-trivial de $N_{B_v^{\times}}(K_v^{\times}) \backslash K_v^{\times}$ sur $\operatorname{Hom}_{K_v^{\times}}(\pi_v, \mathbf{1})$ est donné par le signe $\operatorname{inv}_v(B)\varepsilon_v = \operatorname{inv}_v(B)\varepsilon(\pi_v, \frac{1}{2})$.

3.4.2 Variété de Shimura orthogonale et cycles spéciaux

Jusqu'à la fin de ce chapitre, supposons par commodité que $h_F^+ = 1$.

Définitions

Nous rappelons ici les définitions de quelques objets étudiés par Kudla, dans le cas où $r = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et (V, Q) un espace quadratique de dimension $n + 2$ sur F , de signature à l'infini

$$(n, 2) \times (n + 1, 1)^{r-1} \times (n + 2, 0)^{d-r}.$$

Notons $G = \operatorname{Res}_{F/\mathbb{Q}} \operatorname{GSpin}(V)$ et D l'espace symétrique associé à V . D est le produit des espaces symétriques associés à $V_j = V \otimes_{\tau_j, F} \mathbb{R}$ dont on a fixé une orientation. Ainsi

$$D = D_1 \times \dots \times D_d,$$

où D_j est l'ensemble des sous-espaces positifs orientés de dimension maximale de V_j . Pour tout $x \in V$ notons x_j sont image dans V_j . Soit $x \in V$ tel que $Q(x)$ soit totalement positif. Notons $V_x = x^\perp$, $G_x = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}} \text{GSpin}(V_x)$ et, pour tout $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$

$$D_{x_j} = \{z \in D_j \mid z \perp x_j\}.$$

L'objet étudié par Kudla est le suivant :

Définition 3.4.2.1. Soit H un compact ouvert de $G(\widehat{\mathbb{Q}})$ et $g \in G(\widehat{\mathbb{Q}})$. On définit alors le cycle $Z(x, g; H)$ par

$$Z(x, g; H) : \begin{cases} G_x(\mathbb{Q}) \backslash D_x \times G_x(\widehat{\mathbb{Q}}) / H_x^g & \longrightarrow G(\mathbb{Q}) \backslash D \times G(\widehat{\mathbb{Q}}) / H \\ G_x(\mathbb{Q})(y, u) H_x^g & \longmapsto G(\mathbb{Q})(y, ug) H \widehat{F}^\times \end{cases},$$

où H_x^g désigne $G_x(\widehat{\mathbb{Q}}) \cap gHg^{-1}$.

Exemple Le cas qui nous intéresse dans cette thèse est le cas où $n = 1$, et où l'on dispose d'un isomorphisme exceptionnel avec l'algèbre de quaternions B . C'est le cas que nous décrivons dans la sous-section suivante.

Lien avec les tores \mathcal{S}_b°

Soit B/F l'algèbre de quaternions que nous avons considéré dans ce manuscrit. Soit $D_0 \in F$ vérifiant

$$\begin{cases} \tau_j(D_0) > 0 & \text{si } j \in \{1, r+1, \dots, d\} \\ \tau_j(D_0) < 0 & \text{si } j \in \llbracket 2; r \rrbracket \end{cases}$$

L'espace quadratique sur F

$$(V, Q) = (B^{\text{Tr}=0}, D_0 \cdot \text{nr})$$

est isomorphe à $(B^{\text{Tr}=0}, \text{nr})$ et $(V \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{R}, \tau_j \circ D_0 \cdot \text{nr})$ a pour signature

$$\begin{cases} (1, 2) & \text{si } j = 1 \\ (2, 1) & \text{si } j \in \llbracket 2; r \rrbracket \\ (3, 0) & \text{si } j \in \llbracket r+1; d \rrbracket \end{cases}$$

Soit $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}} \text{GSpin}(V)$. L'action de B^\times sur V par conjugaison induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} B^\times & \xrightarrow{\sim} & \text{GSpin}(V) \\ b & \longmapsto & (v \mapsto bvb^{-1}) \end{array}$$

donc $G \simeq \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(B^\times)$. L'espace symétrique D associé à G est un produit

$$D = D_1 \times \dots \times D_r$$

où D_j s'identifie à l'espace symétrique de $V \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{R}$.

Soit $x \in V$ vérifiant

$$\forall j \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \tau_j(Q(x)) > 0,$$

et x_j son image dans $V \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{R}$.

Proposition 3.4.2.2. *L'ensemble*

$$D_x = D_{x_1} \times \dots \times D_{x_r}$$

est un cycle spécial de D associé à l'extension quadratique $K = F + Fx$ de F .

Démonstration. En effet, comme $x \in V$, on a $\text{Tr}(x) = 0$ et $x^2 = -\text{nr}(x) = -\frac{Q(x)}{D_0} \in F^\times$. Soit $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$. On a $\tau_j(Q(x)) > 0$ donc $\tau_j(x^2)$ est du signe opposé de $\tau_j(D_0)$. Ainsi τ_1 se ramifie dans K tandis que τ_2, \dots, τ_r se décomposent. \square

Dans ce cas le groupe G_x est isomorphe à K^\times et $Z(x, 1; H)$ est l'image de $K^\times \backslash D_x \times \widehat{K}^\times / H$ dans $\text{Sh}_H(G, X)(\mathbb{C})$. L'espace D_x est naturellement multi-orienté par le choix des orientations fait pour les V_j . En effet les $D_j, j \in \llbracket 2; r \rrbracket$ sont des ensembles de plans positifs orientés. Les éléments de D_{x_j} sont donc des droites dont l'orientation est naturellement induite par celle de $\mathbb{R}x_j$.

Enfin remarquons que dans ce cas

$$Z(x, 1; H) = \mathcal{S}_1^1 + t_1(\mathcal{S}_1^1).$$

où $\mathcal{S}_1^1 = [\cup_{u \in \pi_0(T(\mathbb{R}))} q(u) \cdot \mathcal{S}^\circ, 1]_{H\widehat{F}^\times}$.

On revient sur l'étude de ce cas à la toute dernière section de ce chapitre.

Série génératrice de Kudla

Nous revenons à présent au cas général où V est de dimension n sur F . Soit $t \in F$ vérifiant

$$\forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \tau_j(t) > 0.$$

On note

$$\Omega_t = \{x \in V(F), \quad Q(x) = t\}.$$

Remarquons que $G(\widehat{\mathbb{Q}})$ agit par conjugaison sur Ω_t .

Définition 3.4.2.3. Soit φ une fonction de Schwartz sur $V(\widehat{F})$. On suppose $\Omega_t \neq \emptyset$ et on choisit $x \in \Omega_t$. On définit alors

$$Z(t, \varphi; H) = \sum_{g \in G_x(\widehat{\mathbb{Q}}) \backslash G(\widehat{\mathbb{Q}}) / H\widehat{F}^\times} \varphi(g^{-1} \cdot x) Z(x, g; H)$$

Nous avons vu lors de la proposition 2.2.3.1 que les classes d'homologies cycles spéciaux $[Z(x, g; H)] \in H_{r-1}(\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ étaient nulles dans le cas où $n = 1$. Ceci nous empêche d'énoncer une conjecture dans l'esprit des travaux de Kudla/Millson. Il devrait cependant exister une classe raffinée de cycles, analogue aux classes de Cheeger-Simons par exemple, qui fournirait la conjecture suivante :

Conjecture 3.4.2.4. *Il existe une classe de cycle raffinée $\{Z(t, \varphi; H)\}$ de $Z(t, \varphi; H)$ telle que la série*

$$\sum_{\substack{t \in \mathcal{O}_F \\ t \gg 0}} \{Z(t, \varphi; H)\} q^t$$

soit une forme modulaire de Hilbert de poids 3/2.

Une telle classe raffinée, pour être intéressante doit vérifier les trois propriétés suivantes :

- $\exists t \in \mathcal{O}_F, t \gg 0 \quad \{Z(t, \varphi; H)\} \neq 0$.
- Une compatibilité vis à vis des plongements entre espaces quadratiques du type $V_x \hookrightarrow V$.
- L'application d'Abel-Jacobi ne s'annule pas sur ces classes.

Ces propriétés sont les propriétés essentielles satisfaites par les classes de Chow dans l'article de Yuan, Zhang et Zhang. Comme ils considèrent des diviseurs sur une variété projective lisse complexe, le groupe de Chow correspond à la cohomologie de Deligne. On peut donc chercher notre classe raffinée parmi les analogues de la cohomologie de Deligne. Si une telle classe de cycle existait, on pourrait appliquer la démarche de [YZZ09] pour démontrer la conjecture ci-dessus, c'est-à-dire :

- Prouver, pour $n > 2$ fixé l'analogue du résultat de Kudla/Millson [KM90] pour les espaces quadratiques de signature à l'infini $(n, 2) \times (n + 1, 1)^{r-1} \times (n + 2, 0)^{d-r}$ avec $r \neq 1$.
- Procéder par récurrence descendante sur n en adaptant le résultat dû à W. Zhang.
- En déduire la conjecture dans le cas particulier où $n = 0$.

Dans ce procédé itératif, on voit apparaître l'analogue de la situation de Zagier dans [Zag85]. En effet considérons (W, Q) un espace quadratique de dimension 4 sur F et de signature à l'infini

$$(2, 2) \times (3, 1)^{r-1} \times (4, 0)^{d-r}.$$

L'espace symétrique \mathcal{D} associé à W est de dimension réelle $4 + 3 \times (r - 1) = 3r + 1$, et ses composantes connexes peuvent s'identifier à

$$\mathcal{H}^2 \times \mathcal{H}^{(3)} \times \dots \times \mathcal{H}^{(3)}$$

où $\mathcal{H}^{(3)}$ désigne l'espace hyperbolique de dimension 3. On peut construire une variété analytique réelle \mathcal{W} de dimension $3r + 1$ en considérant le quotient

$$G(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{D} \times G(\widehat{\mathbb{Q}}) / H\widehat{F}^\times.$$

Cette variété \mathcal{W} joue le rôle de la surface modulaire de Hilbert de Zagier. En effet, soit x_1 et x_2 deux vecteurs de W tels que $Q(x_1)$ et $Q(x_2)$ soient totalement positifs. Alors si $V_1 = x_1^\perp$ et $V_2 = x_2^\perp$ sont en position générale, ce sont des espaces de dimension 3, de signature à l'infini

$$(1, 2) \times (2, 1)^{r-1} \times (3, 0)^{d-r}$$

qui fournissent deux variétés de Shimura quaternioniques \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 de dimension réelle $2r$ et se plongeant dans \mathcal{W} comme des sous-variétés de codimension $r + 1$. Ces variétés s'intersectent, en position générale, suivant des variétés de codimension $2r + 2$ donc de dimension $r - 1$, qui est la dimension de nos cycles spéciaux. \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 sont alors les analogues des cycles de Hirzebruch-Zagier.

3.4.3 Un exemple d'énoncé du type Gross-Kohnen-Zagier

A propos de l'arbre de Bruhat-Tits Dans ce qui suit nous nous référons à [CJ]¹, ainsi qu'à [Vig80] page 37 et suivantes.

Soit v une place de F . L'arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(F_v)$ a pour sommets les ordre maximaux de $M_2(F_v)$. De tels ordres maximaux sont des anneaux d'endomorphismes de réseaux de F_v^2 (c.f. [Vig80], lemme 2.1). Deux sommets $\mathcal{O}_1 = \mathrm{End}(L_1)$ et $\mathcal{O}_2 = \mathrm{End}(L_2)$ sont liés par une arête (orientée de \mathcal{O}_1 vers \mathcal{O}_2) s'ils vérifient $L_2 \subset L_1$ et $L_1/L_2 \simeq \mathcal{O}_{F_v}/\varpi_v \mathcal{O}_{F_v}$. Les chemins de taille n correspondent alors aux ordres d'Eichler de niveau v^n , si on considère l'intersection de ses extrémités.

1. Tous mes remerciements à Christophe Cornut pour m'avoir communiqué les résultats de ce preprint.

Soit K/F une extension quadratique. Cette donnée permet de privilégier une organisation de l'arbre de Bruhat-Tits décrit ci-dessus. Soit $\Psi : K_v \hookrightarrow M_2(F_v)$ un plongement de K_v . Un tel plongement est dit de niveau N relativement à \mathcal{O}_{K_v} s'il vérifie

$$\Psi(\mathcal{O}_{K_v}) = \Psi(K_v) \cap M_0(N).$$

On ordonne alors l'arbre de Bruhat-Tits en « étages ». Chaque étage de l'arbre correspond à un niveau de plongement relativement à \mathcal{O}_{K_v} ; tous les ordres de même niveau sont dans une même K_v^\times -orbite. Les ordres maximaux de $\mathrm{PGL}_2(F_v)$ qui se plongent maximale-ment relativement à \mathcal{O}_{K_v} sont situés au plus bas dans l'arbre.

Nous donnons une illustration de l'arbre suivant le type de ramification de v dans K aux figures 3.1, 3.2 et 3.3.

Un exemple. Rappelons que R est un ordre d'Eichler de B de niveau N_+ , que $H = (R \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}})^\times$. On suppose que $K = F + Fx$ satisfait la condition de Heegner suivante :

Hypothèse 3.4.3.1. *Pour tout $\mathfrak{p} \mid N_+$ premier, \mathfrak{p} se décompose dans K et pour tout $\mathfrak{p} \mid N_-$ premier, \mathfrak{p} est inerte dans K .*

Posons

$$\varphi = \mathbf{1}_{\widehat{R}^{\mathrm{Tr}=0}}.$$

On obtient ainsi une proposition analogue à la proposition A.I.1 de [Kud04], dans le cas où $N = 1$, $B = M_2(F)$, $R = M_2(\mathcal{O}_F)$ et $K = F + Fx$ est tel que $K \cap R = \mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_F + \mathcal{O}_F x$:

Proposition 3.4.3.2. *Si $N = 1$, $B = M_2(F)$, $H = \widehat{R}^\times$ avec $R = M_2(\mathcal{O}_F)$ et si K est une extension ATR (c'est-à-dire si $r = d$) telle que $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_F + \mathcal{O}_F x$, alors la série $Z(t, \varphi; H)$ s'identifie à*

$$Z(x, 1; H) = \mathcal{T}_1^1 + c_1(\mathcal{T}_1^1) = \mathcal{T}_1^1 - \varepsilon \mathcal{T}_1^1.$$

Remarque 3.4.3.3. Dans le cadre restreint de validité de la proposition ci-dessus, $\varepsilon = (-1)^d$ et le cycle obtenu est nul si d est pair.

Démonstration. Par définition,

$$Z(t, \varphi; H) = \sum_{g \in \widehat{K}^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{R}^\times} \mathbf{1}_{\widehat{R}^{\mathrm{Tr}=0}}(g^{-1} \cdot x) Z(x, g; H).$$

On est donc amené à déterminer les $g \in \widehat{K}^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{R}^\times$ vérifiant $g^{-1} x g \in \widehat{R}^{\mathrm{Tr}=0}$ c'est-à-dire $x \in g \widehat{R}^{\mathrm{Tr}=0} g^{-1}$. Mais

$$\widehat{K}^\times \backslash \widehat{B}^\times / \widehat{F}^\times \widehat{R}^\times = \prod'_v K_v^\times \backslash B_v^\times / R_v^\times = \prod'_v K_v^\times \backslash B_v^\times / F_v^\times R_v^\times$$

car $F^\times \subset K^\times$. On peut donc travailler localement en toute place sur $K_v^\times \backslash B_v^\times / F_v^\times R_v^\times$ qui s'identifie aux K_v^\times -orbites d'ordres maximaux de $\mathrm{PGL}_2(F_v)$. On obtient la condition locale

$$\forall v \quad x_v \in g_v R_v g_v^{-1}.$$

Dans un premier temps considérons les $g_v \in B_v^\times / R_v^\times F_v^\times$ tels que $x_v \in g_v R_v g_v^{-1}$. Ce sont les ordres maximaux qui contiennent x_v , mais comme par hypothèse $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_F + \mathcal{O}_F x$, on a l'équivalence

$$x_v \in g_v R_v g_v^{-1} \iff g_v R_v g_v^{-1} \cap K_v = \mathcal{O}_{K_v}.$$

c'est-à-dire que l'ordre maximal $g_v R_v g_v^{-1}$ est maximalelement plongé dans K_v : il est de conducteur 0 et s'identifie à un des nœuds de conducteur 0 dans l'arbre de Bruhat-Tits. Mais tous les nœuds de même conducteur sont dans une même orbite sous K_v^\times , ainsi on a nécessairement

$$\forall v \quad g_v = 1 \in K_v^\times \backslash B_v^\times / F_v^\times R_v^\times.$$

Ceci montre que

$$Z(t, \varphi; H) = Z(x, 1; H)$$

Comme l'espace D_{x_1} est constitué de deux points, $Z(x, 1; H)$ s'identifie naturellement à $\mathcal{T}_1^1 + c_1(\mathcal{T}_1^1) = \mathcal{T}_1^1 - \varepsilon \mathcal{T}_1^1$ d'après la proposition 3.4.1.2. □

Remarque 3.4.3.4. Soit ϖ_v une uniformisante de F_v . Si on suppose que $\mathcal{O}_{K_v} = \mathcal{O}_{F_v} + \mathcal{O}_{F_v} \varpi_v^{-n_v} x_v$, le même argument montre qu'il y a $n_v + 1$ possibilités de K_v^\times -orbites d'ordres maximaux pour g_v . On peut ainsi calculer le nombre de termes dans la somme $Z(t, \varphi; H)$. Ainsi si $\mathcal{O}_F + \mathcal{O}_F x$ est de conducteur un idéal c , le nombre d'élément dans la somme $Z(t, \varphi; H)$ est égal au produit $\prod_v (k_v + 1)$ où k_v est la valuation en ϖ_v de c .

Dans le cas où $N = N_+ N_- \neq 1$ est premier à $d_{K/F}$ et satisfait les hypothèses de l'exemple 1.1.1.1 et l'hypothèse 3.4.3.1, on obtient la proposition suivante, valable même si $B \neq M_2(F)$ pour R ordre d'Eichler de niveau N_+ et K tel que $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_F + \mathcal{O}_F x$:

Proposition 3.4.3.5. *Soit N le conducteur de E . Si N est premier à $d_{K/F}$, alors*

$$Z(t, \varphi; H) = \prod_{v|N} (1 + \text{inv}_v(B) \varepsilon_v) Z(x, 1; H)$$

Démonstration. La preuve est analogue à celle de la proposition 3.4.3.2. Calculons dans un premier temps le nombre de termes intervenant dans $Z(t, \varphi; H)$. On doit donc déterminer pour tout v le nombre de K_v^\times -orbites de segments orientés de taille N_+ dans l'arbre de Bruhat-Tits, qui correspondent au nombre de g_v tels que

$$x_v \in g_v R_v g_v^{-1}.$$

- Si $v \nmid N$, le calcul fournit à la proposition 3.4.3.2 montre qu'il n'y a dans ce cas qu'une seule orbite.
- Si $v \mid N_-$, par hypothèse B_v est ramifié et v est inerte dans K . Dans ce cas on sait que $K_v^\times \backslash B_v^\times / R_v^\times F_v^\times = \{1, \pi_v\}$ où $\pi_v \in B_v^\times$ est un élément de norme réduite ϖ_v . Cet élément correspond à l'involution d'Atkin-Lehner.
- Si $v \mid N_+$, v est décomposée dans K et l'arbre correspond à la figure 3.1. Notons v^δ le niveau de l'ordre R_v . Tout ordre d'Eichler de niveau v^δ est l'intersection des extrémités d'un chemin orienté de l'arbre de taille δ . De même qu'à la proposition 3.4.3.2, ces ordres sont par hypothèse maximalelement plongés dans K_v , et la totalité de l'arrête correspondant à $g_v R_v g_v^{-1}$ est incluse dans le « sol » de l'arbre. Comme K_v^\times agit par translation sur cet étage, il y a exactement deux K_v^\times -orbites dans l'arbre correspondant à g_v . Ces deux classes sont données par leur orientation : on obtient eux éléments g_v^+ et g_v^- échangés par l'involution d'Atkin-Lehner correspondant à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \varpi_v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La place v contribue donc pour deux termes dans la somme $Z(t, \varphi; H)$.

Au final, si n désigne le nombre d'idéaux premiers intervenant dans la décomposition de N , la somme $Z(t, \varphi; H)$ comporte 2^n éléments. notons W l'ensemble de ces éléments. Par définition, $Z(x, g; H) = [\cdot g]Z(x, 1; H)$. Rappelons que le calcul mené lors de la proposition 3.4.1.2 précise le signe dans l'action des opérateurs d'Atkin-Lehner. On obtient donc comme annoncé

$$Z(t, \varphi; H) = \sum_{g \in W} [\cdot g]Z(x, 1; H) = \prod_{v|N} (1 + \text{inv}_v(B)\varepsilon_v)Z(x, 1; H).$$

□

Une conjecture concernant les points de Darmon Supposons pour finir ce chapitre que $E(F)$ est de rang 1. Nous noterons P_0 un générateur de sa partie libre. Pour tout $t \in \mathcal{O}_F$ totalement positif, tel que (t) est sans facteur carré et est premier à $d_{K/F}$, notons $K[t]$ l'extension quadratique

$$K[t] = F(\sqrt{-D_0 t}),$$

qui satisfait les hypothèses de ramification pour la construction des points de Darmon. Notons $P_{t,1}$ le point de Darmon obtenu pour ce corps $K[t]$ et de niveau $b = 1$. Enfin, soit

$$P_t = \text{Tr}_{K[t]_1^+/F} P_{t,1}.$$

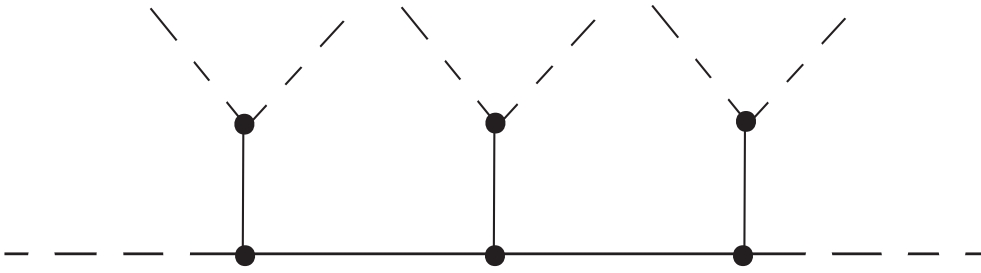
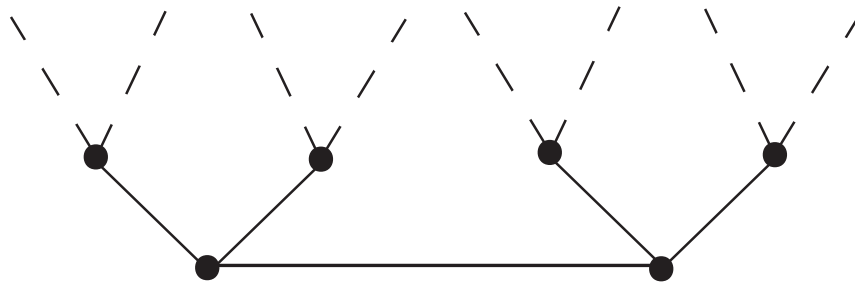
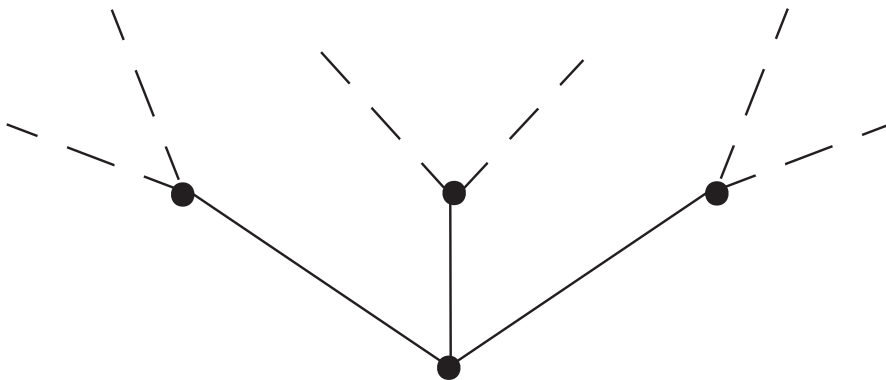
Le point P_t est alors dans $E(F)$ et il existe un entier $[P_t] \in \mathbb{Z}$ tel que

$$P_t = [P_t]P_0.$$

L'énoncé attendu, dans l'esprit de la conjecture 5.3 de [DT08] est alors le suivant :

Conjecture 3.4.3.6. *Il existe une forme modulaire de Hilbert g de poids $3/2$ tel que les $[P_t]$ soient proportionnels à certains coefficients de Fourier de g .*

Remarque 3.4.3.7. En poussant l'analogie avec le théorème de Gross-Kohnen-Zagier, on s'attend à ce que les coefficients $[P_t]$ soient essentiellement les racines carrées de valeurs spéciales de fonctions $L(E_{-D_0}, \chi, s)$ où E_{-D_0} est la tordue de E par $-D_0$ et χ parcourt certains caractères quadratiques de F de signature $(1, 1, \dots, 1)$.

FIGURE 3.1 – Arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(F_v)$ pour v décomposée.FIGURE 3.2 – Arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(F_v)$ pour v ramifié.FIGURE 3.3 – Arbre de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_2(F_v)$ pour v inerte.

Chapitre 4

Opérateurs de Hecke archimédiens

Nous avons introduit une opération sur les formes différentielles d'une variété de Shimura lors de la notation 1.1.4.2. Cet opération, à valeur dans une somme directe externe d'espaces vectoriels est construite à partir des application t_j . Dans ce court chapitre, nous construisons une variété analytique $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ qui permet de réaliser la projection $\omega \mapsto \omega^\beta$ de la notation 1.1.4.2 comme étant à valeur dans un espace de forme différentielles holomorphes sur $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$.

Les références pour cette section sont [Mil90, Mil05] et [Del71].

Rappels sur les espaces symétriques presque complexes

Nous aurons besoin par la suite de la notion de structure presque-complexe sur une variété, que nous rappelons ici :

Définition 4.0.3.1. Soit M une variété analytique réelle. Une structure presque-complexe sur X est la donnée d'une application

$$\forall p \in M \quad J_p : \text{Tgt}_p M \longrightarrow \text{Tgt}_p M$$

vérifiant

$$\forall p \in M \quad J_p^2 = -1.$$

Structure analytique presque-complexe sur X

Expliquons maintenant comment munir X d'une structure analytique complexe. Soit X^+ une composante connexe de X . Il y en a un nombre fini, et si nous les munissons toutes de la même manière d'une structure analytique complexe, nous aurons défini une telle structure pour X tout entier. Suivons pour cela [Mil90]. Rappelons que $G(\mathbb{R})^+$ désigne la composante neutre de $G(\mathbb{R})$.

Soit $h \in X^+$ et K_h le sous-groupe de $G(\mathbb{R})^+$ fixant h pour l'action de conjugaison. L'action de $G(\mathbb{R})^+$ sur X^+ induit une bijection

$$G(\mathbb{R})^+/K_h \xrightarrow{\sim} X^+,$$

qui fournit à X^+ une structure de variété analytique réelle. Comme K_h est fixé par $\text{ad}(h(i))$, l'hypothèse SD3 montre que K_h est compacte modulo son centre.

Exemple 4.0.3.2. Au chapitre précédent nous avons utilisé le fait que $K_{h_{\text{can}}}$ était isomorphe, via les κ_i , au groupe $(\mathbb{R} \times \text{SO}_2(\mathbb{R}))^r \times (\mathbb{H}^\times)^{d-r}$.

Soit $\mathfrak{k}_h = \text{Lie}(K_h)$. L'espace $\text{Lie}(G)$ se décompose en

$$\text{Lie}(G) = \mathfrak{k}_h + \mathfrak{l}_h,$$

où \mathfrak{k}_h (resp. \mathfrak{l}_h) est l'espace propre pour l'action de $\text{ad}(h(i))$ sur $\text{Lie}(G)$ associé à 1 (resp. -1).

Le choix de la structure analytique réelle sur X^+ permet d'identifier \mathfrak{l}_h à l'espace tangent $\text{Tgt}_h(X^+)$ de X^+ en h . On peut alors munir X^+ de deux structures analytiques presque-complexes différentes.

1. La première, que l'on notera X_{can}^+ , en imposant que l'action de i sur $\text{Tgt}_h(X^+)$ corresponde à l'action de $h(e^{i\frac{\pi}{4}})$ sur \mathfrak{l}_h .
2. La seconde, que l'on notera X_{antican}^+ , en imposant que l'action de i sur $\text{Tgt}_h(X^+)$ corresponde à l'action de $h(e^{-i\frac{\pi}{4}})$ sur \mathfrak{l}_h .

Quelque soit le choix parmi ces deux structures complexes, X^+ devient un espace symétrique hermitien. Le premier choix semble être le plus présent dans la littérature.

Pour munir X d'une structure analytique complexe, il suffit maintenant de munir toutes ses composantes connexes X^+ du même type de structure X_{can}^+ ou X_{antican}^+ . On obtient ainsi deux structures analytiques sur X , notées X_{can} et X_{antican} .

Exemple 4.0.3.3. Supposons que $F = \mathbb{Q}$ et $B = \text{M}_2$. Dans ce cas $G = \text{GL}_2$ et il existe deux classes de $G(\mathbb{R})$ -conjugaison de morphismes $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ vérifiant SD1 – 3. La classe X de

$$h_{\text{can}} : x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix},$$

et la classe Y de h_{can}^{-1} . Nous munirons systématiquement X de sa structure analytique complexe X_{can} et Y de sa seconde structure analytique complexe. Nous pouvons alors désigner sans conflit X_{antican} la classe Y munie de sa structure complexe, c'est-à-dire $X_{\text{antican}} := Y_{\text{antican}}$.

Union de variétés de Shimura

Dans cette sous-section, nous munissons une certaine union de variétés de Shimura d'une structure analytique complexe $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$. Cette structure permet de voir les opérateurs de Hecke archimédien comme des applications holomorphes sur cette variété $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$.

Rappelons que

$$G(\mathbb{R}) = (B \otimes_F \mathbb{R})^\times \simeq G_1(\mathbb{R}) \times \cdots \times G_d(\mathbb{R}),$$

où $G_1(\mathbb{R}), \dots, G_r(\mathbb{R})$ sont isomorphes à $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ et $G_{r+1}, \dots, G_d(\mathbb{R})$ sont isomorphes à \mathbb{H}^\times . Nous ne nous fixons pas d'isomorphismes dans cette section.

Remarque 4.0.3.4. Les groupes $G_1(\mathbb{R}), \dots, G_r(\mathbb{R})$ ont chacun deux composantes connexes tandis que les $G_{r+1}, \dots, G_d(\mathbb{R})$ sont connexes.

Tout morphisme

$$h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$$

se décompose en $h = (h_1, \dots, h_d)$, où

$$h_j : \mathbb{S} \longrightarrow G_{j,\mathbb{R}}$$

est obtenu en composant h avec la projection $G_{\mathbb{R}} \rightarrow G_{j,\mathbb{R}}$. Le groupe $G_{j,\mathbb{R}}$ est un groupe algébrique sur \mathbb{R} , isomorphe à GL_2 ou à \mathbb{H}^\times suivant que $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ou $j \in \llbracket r+1; d \rrbracket$. Les morphismes h_1, \dots, h_r fournissent des structures de Hodge sur \mathbb{R}^2 . Nous serons amenés à faire l'hypothèse SD'1 suivante, qui permet de considérer uniquement les morphismes analogues à ceux de la section 1.1.2, c'est-à-dire que les morphismes h_1, \dots, h_r sont ceux du type de l'exemple 4.0.3.3.

$$\begin{aligned} \forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad G_{j,\mathbb{R}} \text{ est de type } \{(1,0), (0,1)\} \text{ ou } \{(-1,0), (0,-1)\} \\ \forall j \in \llbracket r+1; d \rrbracket \quad h_j \text{ est trivial.} \end{aligned} \quad (\text{SD1}')$$

Remarque 4.0.3.5. Soit $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Dire que $G_{j,\mathbb{R}}$ est de type $\{(-1,0), (0,-1)\}$ revient à dire que l'on a muni \mathbb{R}^2 d'une orientation, si on se fixe un isomorphisme entre $G_{j,\mathbb{R}}$ et GL_2 .

Soit \mathcal{X} l'ensemble des morphismes $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ vérifiant SD1' et SD2-3 :

$$\mathcal{X} = \{h : \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}, \text{ SD1}', \text{ SD2}, \text{ SD3}\}.$$

Pour tout sous-groupe compact ouvert H de \widehat{B}^\times on note $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ la variété analytique réelle suivante

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash \mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f) / H = B^\times \backslash \mathcal{X} \times \widehat{B}^\times / H,$$

où l'action de B^\times à gauche et de H à droite est définie par

$$\forall k \in B^\times \quad \forall h \in H \quad \forall (x, b) \in \mathcal{X} \times \widehat{B}^\times \quad k \cdot (x, b) \cdot h = (kx, kbh).$$

Le paragraphe ci-dessous explique comment munir $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ d'une structure presque-complexe.

Remarque 4.0.3.6. Grâce à l'hypothèse SD'1, les morphismes $h \in \mathcal{X}$ sont tels que pour $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ $h_j = h_{\text{can}}$ ou $h_j = h_{\text{can}}^{-1}$.

Compatibilité des structures complexes

Fixons un morphisme $h_{\text{can}} : \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$. Soit $h : \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$ un morphisme de \mathcal{X} . On peut écrire $h = (h_1, \dots, h_d)$ avec $h_j : \mathbb{S} \longrightarrow G_j(\mathbb{R})$. Si $j \in \llbracket r+1; d \rrbracket$ alors h_j est trivial par hypothèse. Si $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ il y a deux possibilités : soit h_j est dans la classe de conjugaison X_j^+ de $h_{\text{can},j}$, soit dans celle de $h_{\text{can},j}^{-1}$, notée X_j^- . On définit alors le morphisme suivant :

$$\varepsilon : \begin{cases} \{\tau_1, \dots, \tau_r\} & \longrightarrow \{\pm 1\}^r \\ \tau_j & \longmapsto \begin{cases} +1 & \text{si } h_j \in X_j^+ \\ -1 & \text{si } h_j \in X_j^- \end{cases} \end{cases}.$$

Nous noterons alors X_ε la classe de conjugaison de h . La classe X_ε est munie d'une structure analytique complexe de la façon suivante. On décompose X_ε en un produit $\prod_{j=1}^r X_j^{\varepsilon(\tau_j)}$ et on munit $X_j^{\varepsilon(\tau_j)}$ de la structure X_{can} si $\varepsilon(\tau_j) = 1$, de la structure X_{antican} sinon.

Le lien entre les différents X_ε tient dans la proposition suivante :

Proposition 4.0.3.7. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} X_\varepsilon & \longrightarrow & X_{-\varepsilon} \\ h & \longmapsto & h^{-1} \end{array}$$

est anti-holomorphe.

Démonstration. Comme le groupe G est naturellement un produit, il suffit de vérifier la condition d'antiholomorphie au neutre de chaque facteur. Notons $\text{Lie}(G_i(\mathbb{R})) = \mathfrak{l}_i + \mathfrak{k}_i$ la décomposition de $\text{Lie}(G_i)$ en espaces propres pour $\text{ad}(h(i))$, \mathfrak{l}_i étant l'espace fixe. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_i(\mathbb{R}) & \xrightarrow{g \longmapsto g^{-1}} & G_i(\mathbb{R}) \\ \text{Ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})) \downarrow & & \downarrow \text{Ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})^{-1}) \\ G_i(\mathbb{R})/K_{h_i} & \xrightarrow{g \longmapsto g^{-1}} & G_i(\mathbb{R})/K_{h_i^{-1}} \end{array}$$

se différentie en le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l}_i + \mathfrak{k}_i & \xrightarrow{g \longmapsto -g} & \mathfrak{l}_i + \mathfrak{k}_i \\ \text{ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})) \downarrow & & \downarrow \text{ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})^{-1}) \\ \text{Tgt}_e G_i(\mathbb{R})/K_{h_i} & \xrightarrow{g \longmapsto -g} & \text{Tgt}_e G_i(\mathbb{R})/K_{h_i^{-1}} \end{array}$$

Ce dernier diagramme anti-commute. En effet, comme $\text{Ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})^{-1}) = (\text{Ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})))^{-1}$, on a $\text{ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})^{-1}) = -\text{ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}}))$ donc si $v \in \mathfrak{l}_i + \mathfrak{k}_i$ on a

$$\text{ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})^{-1})(-v) = v = -\left[-\text{ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}}))(v)\right]$$

et le diagramme anticommute. □

Action de $G(\mathbb{R})$

L'hypothèse SD'1 ci-dessus fournit la proposition suivante

Proposition 4.0.3.8. *Il y a exactement 2^r orbites sous l'action de $G(\mathbb{R})$ par conjugaison sur \mathcal{X} .*

Démonstration. L'hypothèse SD'1 impose exactement deux choix de type de Hodge pour les facteurs de \mathcal{X} . Comme l'action par conjugaison conserve le type de Hodge, on obtient exactement deux classes de $G_j(\mathbb{R})$ -conjugaison possibles de morphismes $h_j : \mathbb{S} \rightarrow G_{j,\mathbb{R}}$ si $j \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$ et une seule si $j \in \llbracket r+1 ; d \rrbracket$. Ce qui fournit bien 2^r classes de conjugaisons différentes. □

Nous noterons $(X_\varepsilon)_{\varepsilon:\{\tau_1,\dots,\tau_r\}\rightarrow\{\pm 1\}}$ l'ensemble des 2^r classes de $G(\mathbb{R})$ -conjugaison de \mathcal{X} . Pour tout $\varepsilon : \{\tau_1, \dots, \tau_r\} \rightarrow \{\pm 1\}$, le couple (G, X_ε) est une donnée de Shimura. On a alors la

Proposition 4.0.3.9. $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ est l'union disjointe de 2^r variétés de Shimura ayant même structure analytique réelle :

$$\mathcal{S}_H(\mathbb{C}) = \coprod_{\varepsilon:\{\tau_1,\dots,\tau_r\}\rightarrow\{\pm 1\}} \text{Sh}_H(G/Z, X_\varepsilon)(\mathbb{C}).$$

Démonstration. La preuve de cette décomposition découle immédiatement des définitions de $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ et $\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$. \square

Formes différentielles

De manière analogue au cas des variétés de Shimura, la variété $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ n'est lisse que si H est suffisamment petit. On est alors amené à faire le même abus de langage qu'à la section 1.1.4 pour parler de formes différentielles de degré r sur $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$. On a alors la proposition suivante, qui est une conséquence de la proposition 4.0.3.9, et de l'aspect local du faisceau des différentielles.

Proposition 4.0.3.10. *Le faisceau des formes différentielles holomorphes de degré r sur $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$ se décompose de la façon suivante :*

$$\Omega^r(\mathcal{S}_H(\mathbb{C})) = \bigoplus_{\varepsilon:\{\tau_1,\dots,\tau_r\}\rightarrow\{\pm 1\}} \Omega^r(\text{Sh}_H(G/Z, X_\varepsilon)(\mathbb{C})).$$

Action de $\text{Aut}(\mathbb{S})$

Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{S})$ a 4 éléments :

$$\text{Aut}(\mathbb{S}) = \{\text{id}, -\text{id}, c, -c\},$$

où c coïncide sur $\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^\times$ avec la conjugaison complexe.

Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{S})$ agit sur \mathcal{X} de la façon suivante :

$$\forall \alpha \in \text{Aut}(\mathbb{S}) \quad \forall x + iy \in \mathbb{S}(A) \quad \forall h \in \mathcal{X} \quad \alpha \cdot h(x + iy) = h(\alpha(x + iy)).$$

En particulier, on a la proposition suivante :

Proposition 4.0.3.11. *Soit $\varepsilon : \{\tau_1, \dots, \tau_r\} \rightarrow \{\pm 1\}^r$. L'application*

$$\begin{array}{ccc} X_\varepsilon & \longrightarrow & X_\varepsilon \\ h & \longmapsto & h \circ c \end{array}$$

est anti-holomorphe.

Démonstration. De manière analogue à la preuve de la proposition 4.0.3.7, le groupe G est naturellement un produit, et il suffit de vérifier la condition d'antiholomorphie au neutre de chaque facteur. Remarquons tout d'abord que le morphisme $h \circ c$ a même type de Hodge que h , donc l'application annoncée dans la proposition est bien définie. Notons $\text{Lie}(G_i(\mathbb{R})) = \mathfrak{l}_i + \mathfrak{k}_i$ la décomposition de $\text{Lie}(G_i)$ en espaces propres pour $\text{ad}(h(i))$, \mathfrak{l}_i étant

l'espace fixe. Fixons un isomorphisme entre $G_i(\mathbb{R})$ et $GL_2(\mathbb{R})$ et $M \in GL_2(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_i(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{Ad}(M)} & G_i(\mathbb{R}) \\ \text{Ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})) \downarrow & & \downarrow \text{Ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})) \\ G_i(\mathbb{R})/K_{h_i} = X_i & \xrightarrow{h \mapsto h \circ c} & G_i(\mathbb{R})/K_{h_i} = X_i \end{array}$$

commute car $M \cdot h = MhM^{-1} = h \circ c$ et se différentie en le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{l}_i + \mathfrak{k}_i & \xrightarrow{\text{ad}(M)} & \mathfrak{l}_i + \mathfrak{k}_i \\ \text{ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})) \downarrow & & \downarrow \text{ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})) \\ \text{Tgt}_e G_i(\mathbb{R})/K_{h_i} & \xrightarrow{\quad} & \text{Tgt}_e G_i(\mathbb{R})/K_{h_i} \end{array}$$

Ce dernier diagramme anti-commute. En effet, $\text{Ad}(M)\text{Ad}(h_i(e^{i\frac{\pi}{4}})) = \text{Ad}(h \circ c(e^{i\frac{\pi}{4}}))\text{Ad}(M) = -\text{Ad}(h(e^{i\frac{\pi}{4}}))$. □

Remarque 4.0.3.12. Chaque facteur $X_j^{\varepsilon(\tau_j)}$ comporte deux composantes connexes qui sont permutées par l'application $h_j \mapsto h_j \circ c$.

Opérateurs de Hecke archimédiens

Fixons-nous $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ et $\varepsilon : \llbracket 1; r \rrbracket \rightarrow \{\pm 1\}^r$. Soit ε' l'application définie par

$$\varepsilon'(\tau_l) = \begin{cases} \varepsilon(\tau_l) & \text{si } l \neq j \\ -\varepsilon(\tau_l) & \text{si } l = j \end{cases}$$

Soit $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ que l'on décompose en (h_1, \dots, h_r) où $h_l : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}, l}$. Posons $h' = (h'_1, \dots, h'_r)$ où

$$h'_l = \begin{cases} h_l & \text{si } l \neq j \\ h_l^{-1} \circ c & \text{si } l = j \end{cases}$$

D'après les propositions 4.0.3.7 et 4.0.3.11, l'application

$$t_j : \begin{cases} X_{\varepsilon} & \longrightarrow & X_{\varepsilon'} \\ h & \longmapsto & h' \end{cases}$$

est bien définie et holomorphe, car holomorphe sur chaque facteur. Elle induit une application holomorphe

$$t_j : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}.$$

Définition 4.0.3.13. On appelle opérateur de Hecke archimédien le tiré en arrière t_j^* de t_j à $\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$.

Chapitre 5

Où l'on fixe des isomorphismes

Le but de ce chapitre est de réécrire ce les résultats des chapitres précédents lorsque l'on choisit des isomorphismes entre $B \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{R}$ et $M_2(\mathbb{R})$ pour $j \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$.

Nous commençons par reprendre la définition des opérateurs de Hecke archimédiens du chapitre 4, puis nous explicitons leur action sur les formes modulaires de Hilbert. Enfin nous illustrons les cycles spéciaux et les variétés de Shimura orthogonales.

5.1 Structure analytique « concrète »

Dans la suite de cette section, nous nous fixons des isomorphismes

$$\kappa_i : B_{\tau_i} = B \otimes_{F, \tau_i} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{R}) \quad \text{si } i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$$

$$\kappa_i : B_{\tau_i} = B \otimes_{F, \tau_i} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{H} \quad \text{si } i \in \llbracket r + 1 ; d \rrbracket$$

qui permettent d'identifier une classe de $G(\mathbb{R})$ -conjugaison X de morphismes de $\mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ avec $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$. Nous expliquons ci-dessous de quelle manière cette identification peut être rendue compatible avec le choix des structures complexes X_{ε} .

Structures complexes sur $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$

Soit $\varepsilon : \{\tau_1, \dots, \tau_r\} \rightarrow \{\pm 1\}^r$ une application. Nous désignerons par $((\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r, \varepsilon)$ l'espace $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$ muni de la structure complexe suivante :

- Si pour $j \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$, $\varepsilon(\tau_j) = 1$, le j -ième facteur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est muni de la structure complexe habituelle, pour laquelle l'application $z \mapsto z$ est holomorphe.
- Si $\varepsilon(\tau_j) = -1$, on muni le j -ième facteur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de la structure complexe pour laquelle l'application $z \mapsto \bar{z}$ est holomorphe.

Compatibilité des structures complexes

Soit $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ un morphisme. En identifiant le produit $G_{1, \mathbb{R}} \times \dots \times G_{r, \mathbb{R}}$ à GL_2^r , les r premiers facteurs des éléments $g = (g_1, \dots, g_d)$ de $G_{\mathbb{R}}$ agissent par homographie sur $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$. On se fixe un morphisme canonique

$$h_{\text{can}} : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}} \simeq GL_2^r \times (\mathbb{H}^{\times})^{d-r}$$

défini sur les points complexes par

$$x + iy \mapsto \left(\left(\begin{array}{cc} x & y \\ -y & x \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} x & y \\ -y & x \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right).$$

On peut ainsi parler de la classe X_ε de h définie par rapport à ce morphisme h_{can} , que l'on muni de sa structure analytique complexe définie à la section précédente. Ainsi, tous les éléments de X_ε sont conjugués d'un même morphisme h_ε vérifiant, sur chaque facteur de X_ε :

$$h_{\varepsilon,j} = h_{\text{can},j}^{\varepsilon(\tau_j)}.$$

Le choix des structures complexes sur $((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^r, \varepsilon)$ est alors justifié par la proposition suivante.

Proposition 5.1.0.1. *L'application*

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &\longrightarrow ((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^r, \varepsilon) \\ gh_\varepsilon g^{-1} &\longmapsto (g \cdot i, \dots, g \cdot i) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de variétés analytiques complexes.

Démonstration. Ceci découle de la définition de la structure analytique presque-complexe de X_ε . \square

Remarque 5.1.0.2. On voit ainsi que X est de dimension réelle $2r$, et on obtient des cartes dans lesquelles les propositions 4.0.3.7 et 4.0.3.11 ont une démonstration plus claire : dans ces cartes, l'application $h \mapsto h^{-1}$ correspond $z \mapsto z$ de $((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^r, \varepsilon)$ dans $((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^r, -\varepsilon)$ qui est antiholomorphe et $h \mapsto h \circ c$ correspond à $z \mapsto \bar{z}$, de $((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^r, \varepsilon)$ dans lui-même, aussi antiholomorphe.

Opérateurs de Hecke archimédiens sur $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^r$

A l'aide de la proposition 5.1.0.1 nous pouvons maintenant donner une version plus concrète de la proposition 4.0.3.13.

Proposition 5.1.0.3. *L'application $t_j : X_\varepsilon \longrightarrow X_{\varepsilon'}$ de la définition 4.0.3.13 correspond, via l'isomorphisme décrit à la proposition 5.1.0.1 à l'application suivante :*

$$t_j : \begin{aligned} ((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^r, \varepsilon) &\longrightarrow ((\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})^r, \varepsilon') \\ (z_1, \dots, z_r) &\longmapsto (z_1, \dots, \bar{z}_j, \dots, z_r) \end{aligned} .$$

Démonstration. Soit $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Par définition $\varepsilon(\tau_l) = \varepsilon'(\tau_l)$ si $l \neq j$, l'application t_j , restreinte aux facteurs X_l , $l \neq j$ est l'identité. Supposons par exemple que $\varepsilon(\tau_j) = 1$. Dans ce cas, $h_j : \mathbb{S} \rightarrow G_{j,\mathbb{R}}$ est dans la classe de

$$h_{\text{can},j} : x + iy \longmapsto \left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, 1, \dots, 1 \right).$$

Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G_j(\mathbb{R}) \simeq \text{GL}_2(\mathbb{R})$, tel que $h_j = gh_{\text{can},j}g^{-1}$. D'une part, le morphisme h_j correspond alors au point $g \cdot i = \frac{ai+b}{ci+d} = z$ de $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. D'autre part, l'application t_j envoie $h_j = gh_{\text{can},j}g^{-1}$ sur $h_j^{-1} \circ c = gh_{\text{can},j}^{-1} \circ cg^{-1}$. Soit $x + iy \in \mathbb{C}^\times$. On a

$$h_{\text{can},j}^{-1} \circ c(x + iy) = h_{\text{can},j}^{-1}(x - iy) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice s'écrit encore

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} h_{\text{can},j}^{-1}(x + iy) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que le morphisme $gh_{\text{can},j}^{-1} \circ cg^{-1} = g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} h_{\text{can},j}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1}$ s'identifie au nombre $g \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot i \right) = g \cdot (-i) = \frac{-ai+b}{-ci+d} = \bar{z}$.

□

Remarque 5.1.0.4. L'application $z \mapsto -z$ étant holomorphe, on aurait pu faire en sorte que la proposition ci-dessus affirme que $t_j(z) = (z_1, \dots, -\bar{z}_j, \dots, z_r)$, ce qui correspond aux applications utiliser par Darmon dans [Dar04]. Ce choix n'a pas vraiment de signification comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.1.0.5. Prenons le cas où $F = \mathbb{Q}$, $H = U_0(N)$ et $B = M_2(\mathbb{Q})$. Alors $\text{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ est la courbe modulaire $X_0(N)$. La conjugaison complexe correspond *a priori* à $z \mapsto -\bar{z}$. En effet :

$$q = e^{2i\pi z} \mapsto e^{\overline{2i\pi z}} = e^{-2i\pi \bar{z}}.$$

Notons $\Gamma_0^\pm(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}), N \mid c \right\}$. On a

$$\begin{cases} \Gamma_0(B) \backslash \mathcal{H} & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_0^\pm(N) \backslash (\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}) \\ \Gamma_0(N)z & \mapsto & \Gamma_0^\pm(N)z \end{cases}$$

Mais $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0^\pm(N)$ donc $\Gamma_0^\pm(N)z = \Gamma_0^\pm(N)(-z)$, ce qui montre que la conjugaison complexe sur $X_0(N)$ provient aussi de $z \mapsto \bar{z}$.

5.2 Opérateurs de Hecke archimédiens

5.2.1 Opérateurs de Hecke archimédiens et formes automorphes

Définition 5.2.1.1. Soit $g = (g_\infty, g_f) \in G(\mathbb{R}) \times \widehat{B}^\times$ où on identifie $G(\mathbb{R})$ à $\text{GL}_2(\mathbb{R})^r \times (\mathbb{H}^\times)^{d-r}$. Pour $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, notons ε' l'élément de $\{\pm 1\}^r$ défini par $\varepsilon'_i = \varepsilon_i$ si $i \neq j$ et $\varepsilon'_j = -\varepsilon_j$. L'application

$$T_j : (S_2^\varepsilon)^H \longrightarrow (S_2^{\varepsilon'})^H$$

vérifiant

$$T_j \varphi(g) = \varphi \left(g_\infty \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_j \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \dots 1 \right), g_f \right)$$

est appelé *opérateur de Hecke archimédien*.

On définit $T_j : \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^{\varepsilon'})$ par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (S_2^\varepsilon)^H & \xrightarrow{T_j} & (S_2^{\varepsilon'})^H \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\mathrm{an}, \varepsilon}) & \xrightarrow{T_j} & \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\mathrm{an}, \varepsilon'}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par la proposition 1.2.2.5.

La proposition suivante explicite les T_j :

Proposition 5.2.1.2. *Soit, pour $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$, t_j l'application*

$$t_j : \begin{cases} (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r & \longrightarrow (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r \\ (z_1, \dots, z_j, \dots, z_r) & \longmapsto (z_1, \dots, \bar{z}_j, \dots, z_r) \end{cases}$$

Alors

$$\forall \omega \in \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon) \quad T_j(\omega) = t_j^*(\omega).$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \widehat{B}^\times$, $\Gamma_\alpha = \alpha H \alpha^{-1} \cap G(\mathbb{Q})$ et $\bar{\Gamma}_\alpha = \mathrm{Im}(\Gamma_\alpha \rightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^r)$. L'application

$$u_\alpha : \begin{cases} \bar{\Gamma}_\alpha \backslash (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r & \hookrightarrow \mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}) \\ \bar{\Gamma}_\alpha x & \longmapsto [x, \alpha]_{H\widehat{F}^\times} \end{cases}$$

est un plongement ouvert. Soit $\omega \in \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), (\Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon)$. La proposition 1.2.2.5 montre qu'il existe $\varphi \in (S_2^\varepsilon)^H$, tel que le tiré en arrière de la restriction de ω à $\mathrm{Im}(u_\alpha)$ soit

$$\phi_\alpha(z) dz^\varepsilon = \frac{1}{y_1 \dots y_r} \varphi \left(\left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \alpha \right) dz^\varepsilon.$$

Notons par commodité ω_φ la forme ω pour indiquer sa dépendance en φ .

Par définition, on a avec la même notation $T_j \omega_\varphi = \omega_{T_j \varphi}$ et

$$\begin{aligned} u_\alpha^*(T_j \omega_\varphi) &= u_\alpha^*(\omega_{T_j \varphi}) \\ &= \frac{1}{y_1 \dots y_r} (T_j \varphi) \left(\left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \alpha \right) dz^{\varepsilon'} \\ &= \frac{1}{y_1 \dots y_r} \varphi \left(\left(\left(\begin{array}{cc} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} -y_j & x_j \\ 0 & 1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \alpha \right) dz^{\varepsilon'} \\ &= (y_j \mapsto -y_j)^*(\phi_\alpha(z) dz^\varepsilon) \\ &= t_{T_j}^*(u_\alpha^*(\omega_\varphi)), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé. □

La proposition suivante montre que les opérateurs de Hecke archimédiens commutent aux correspondances de Hecke.

Proposition 5.2.1.3. *On a*

$$\forall g \in \widehat{B}^\times \quad \forall j \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \forall \omega \in \Gamma(\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C}), \Omega_H^{\mathrm{an}})^\varepsilon \quad [\cdot g]^* \circ T_j(\omega) = T_j \circ [\cdot g]^*(\omega).$$

Démonstration. Soit $g \in \widehat{B}^\times$, et $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$. D'après la proposition 1.2.2.5 il suffit de montrer que les applications $[\cdot g]^*$ et T_j commutent sur l'espace $(S_2^\varepsilon)^H$.

Soit $a = (a_\infty, a_f) \in B_{\mathbb{A}} = G(\mathbb{R}) \times \widehat{B}^\times$. D'une part

$$[\cdot g]^* \varphi(a) = \varphi(a_\infty, a_f g),$$

d'autre part

$$T_j \varphi(a) = \varphi \left(a_\infty \times \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdots \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)}_j \cdots \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), 1 \dots 1 \right), a_f \right).$$

Ainsi

$$T_j \circ [\cdot g]^* \varphi(a) = [\cdot g]^* \circ T_j \varphi(a) = \varphi \left(a_\infty \times \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdots \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)}_j \cdots \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), 1 \dots 1 \right), a_f g \right).$$

□

Proposition 5.2.1.4. *On a*

$$\forall g \in \widehat{B}^\times \quad [\cdot g]^*(\omega^\beta) = ([\cdot g]^* \omega)^\beta.$$

Démonstration. Ceci est une application directe de la proposition 5.2.1.3. □

5.2.2 Opérateurs de Hecke archimédiens et formes modulaires de Hilbert

Dans cette section, explicitons les opérateurs de Hecke archimédiens dans le cas où $h_F^+ = 1$ et H est de la forme $U_0(N)$.

Rappelons que si X^+ est une composante connexe de X et \mathcal{C} un ensemble de représentants de $G(\mathbb{Q})^+ \backslash \widehat{B}^\times / H$, alors $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ se décompose en $\coprod_{\alpha \in \mathcal{C}} \overline{\Gamma_\alpha}^+ \backslash X^+$ (c.f. équation 1.1 dans la preuve de la proposition 1.2.2.4). Comme $|G(\mathbb{Q})^+ \backslash \widehat{B}^\times / H| = h_F^+ = 1$, sous les hypothèses de cette section, $\mathrm{Sh}_H(G/Z, X)(\mathbb{C})$ est connexe.

Nous supposons dans un premier temps que $B = M_2(F)$ et $r = d$, pour retrouver les opérateurs introduits par Darmon.

Opérateurs de Hecke archimédiens, si $h_F^+ = 1$, $B = M_2(F)$, $r = d$ et $H = U_0(N)$

Rappelons que $T_j : (S_2^\varepsilon)^H \longrightarrow (S_2^{\varepsilon'})^H$ est défini par

$$T_j \varphi(g) = \varphi \left(g_\infty \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_j \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \dots 1 \right), g_f \right),$$

où $g = (g_\infty, g_f) \in G(\mathbb{R}) \times \widehat{B}^\times$.

Soit $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Comme $h_F^+ = 1$, il existe une unité $\varepsilon \in \mathcal{O}_F^\times$ vérifiant $\tau_i(\varepsilon) > 0$ si $i \neq j$ et $\tau_j(\varepsilon) < 0$. Soient $z_1, \dots, z_d \in \mathcal{H}$ que l'on écrit $z_k = x_k + iy_k$. La forme automorphe $\varphi \in S_2^H(\mathrm{GL}_2(F_\mathbb{A}))$ correspond à la forme modulaire de Hilbert

$$\phi : (z_1, \dots, z_d) \mapsto \frac{1}{y_1 \dots y_d} \varphi \left(\left(\begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_d & x_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), 1_f \right),$$

et $\phi' = T_j \phi$ à

$$\phi' : (z_1, \dots, z_d) \mapsto \frac{1}{y_1 \dots y_d} \varphi' \left(\left(\begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_d & x_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), 1_f \right)$$

Si $g \in F_\mathbb{A}$, alors comme le poids est pair en toutes les variables, on a

$$\phi'(g) = \varphi \left(g \times \tau_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \varphi \left(g \times \tau_j \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

De plus, comme $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F) = B^\times$,

$$\phi'(g) = \varphi \left(\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times g \times \tau_j \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, puisque $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_f \in U_0(N)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \varphi' \left(\left(\begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_d & x_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), 1_f \right) \\ &= \varphi \left(\left(\begin{pmatrix} \tau_1(\varepsilon)y_1 & \tau_1(\varepsilon)x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -\tau_j(\varepsilon)y_j & \tau_j(\varepsilon)x_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots, \begin{pmatrix} \tau_d(\varepsilon)y_d & \tau_d(\varepsilon)x_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_f \right) \\ &= \varphi \left(\left(\begin{pmatrix} \tau_1(\varepsilon)y_1 & \tau_1(\varepsilon)x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -\tau_j(\varepsilon)y_j & \tau_j(\varepsilon)x_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots, \begin{pmatrix} \tau_d(\varepsilon)y_d & \tau_d(\varepsilon)x_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), 1_f \right) \\ &= -\tau_1(\varepsilon)\tau_2(\varepsilon) \dots \tau_d(\varepsilon) \phi(\tau_1(\varepsilon)z_1, \dots, \tau_j(\varepsilon)\bar{z}_j, \dots, \tau_d(\varepsilon)z_d). \end{aligned}$$

Mais $\tau_1(\varepsilon)\tau_2(\varepsilon)\dots\tau_d(\varepsilon) = N_{F/\mathbb{Q}}(\varepsilon) = -1$; donc

$$\phi'(z_1, \dots, z_d) = \phi(\tau_1(\varepsilon)z_1, \dots, \tau_j(\varepsilon)\bar{z}_j, \dots, \tau_d(\varepsilon)z_d)$$

et la forme différentielle $\omega_{T_j\varphi}$ est la forme notée $\omega_f^{(1, \dots, -1, \dots, 1)}$ par Darmon dans [Dar04], page 87, à une normalisation près.

Opérateurs de Hecke archimédiens, si $h_F^+ = 1$, $B \neq M_2(F)$ et $H = U_0(N)$.

Dans ce dernier paragraphe, on explicite le même calcul, dans le cas où $B \neq M_2(F)$. Ce calcul présente un intérêt en vu de calculs effectifs.

On se fixe des isomorphismes $\kappa_k : B \otimes_{F, \tau_k} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{R})$ pour $1 \leq k \leq r$. Comme $|\mathcal{C}| = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ il existe des éléments $a_j \in B^\times \cap H$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, \dots, r\} \quad \text{sgn det} \kappa_k(a_j \otimes_{F, \tau_k} 1) = \begin{cases} +1 & \text{si } j \neq k \\ -1 & \text{si } j = k \end{cases}.$$

Remarquons que dans le cas où $B = M_2(F)$ on pouvait prendre $a_j = \begin{pmatrix} \varepsilon_j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $g \in F_{\mathbb{A}}$ comme les formes sont de poids pair, on a :

$$\varphi'(g) = \varphi \left(g \times \tau_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \varphi \left(g \times \tau_j \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

et comme $a_j \in G(\mathbb{Q}) \cap H$,

$$\varphi'(g) = \varphi \left(a_j \times g \times \tau_j \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Il vient

$$\begin{aligned} & \varphi' \left(1_f, \left(\begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1 \right) \right) \\ &= \varphi \left(\left(\kappa_1(a_j \otimes_{F, \tau_1} 1) \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \kappa_j(a_j \otimes_{F, \tau_j} 1) \begin{pmatrix} -y_j & x_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots, \kappa_r(a_j \otimes_{F, \tau_r} 1) \begin{pmatrix} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \kappa_{r+1}(a_j \otimes_{F, \tau_{r+1}} 1), \dots, \kappa_d(a_j \otimes_{F, \tau_d} 1) \right), a_{j,f} \right) \\ &= \varphi \left(\left(\kappa_1(a_j \otimes_{F, \tau_1} 1) \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \kappa_j(a_j \otimes_{F, \tau_j} 1) \begin{pmatrix} -y_j & x_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \dots, \kappa_r(a_j \otimes_{F, \tau_r} 1) \begin{pmatrix} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1_{r+1}, \dots, 1_d \right), 1_f \right) \end{aligned}$$

$$\text{Notons } \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \kappa_k(a_j \otimes_{F, \tau_k} 1),$$

alors

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_k & x_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |cz_k + d|^2 & 0 \\ 0 & |cz_k + d|^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y'_k & x'_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix},$$

où $z_k = x_k + iy_k$, $\cos \theta_k = \frac{c_k x_k + d_k}{|cz_k + d_k|}$, $\sin \theta_k = \frac{c_k y_k}{|cz_k + d_k|}$, et $z'_k = x'_k + iy'_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} z_k$.

On a $x'_k = \frac{a_k c_k (x_k^2 y_k^2) + (d_k a_k + b_k c_k) x_k + b_k d_k}{|cz_k + d_k|^2}$ et $y'_k = \frac{(a_k d_k - b_k c_k) y_k}{|cz_k + d_k|^2}$.

En utilisant les propriétés 1-4 des formes automorphes, on obtient :

$$\begin{aligned} & \varphi' \left(\left(\begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y_r & x_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1 \right), 1_f \right) \\ &= \varphi' \left(\left(\begin{pmatrix} y'_1 & x'_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} y'_r & x'_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1 \right), 1_f \right) \prod_{k=1}^r e^{-2i\theta_k} \\ &= \left(\prod_{k=1}^r \frac{(a_k d_k - b_k c_k)}{|c_k z_k + d_k|^2} \right) \phi(z'_1, \dots, \overline{z'_j}, \dots, z'_r) \prod_{k=1}^r e^{-2i\theta_k}. \end{aligned}$$

Comme $e^{2i\theta_k} = \frac{(c_k x_k + d_k + i c_k y_k)^2}{|c_k z_k + d_k|^2} = \frac{(c_k z_k + d_k)^2}{|c_k z_k + d_k|^2}$, on a :

$$\phi'(z_1, \dots, z_r) = \prod_{k=1}^r \frac{(a_k d_k - b_k c_k)}{(c_k z_k + d_k)^2} \phi(z'_1, \dots, \overline{z'_j}, \dots, z'_r)$$

Remarque 5.2.2.1. On a $a_k d_k - b_k c_k > 0$ si $k \neq j$ et $a_j d_j - b_j c_j < 0$.

5.3 Cycles spéciaux de X

Dans cette section, nous reprenons de manière plus visuelle la section 2.2.1. Le groupe $T(\mathbb{R})$ agit sur X par conjugaison. Cette action se traduit en une action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})^r$ sur $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$ par homographie *via* le r -uplet (q_1, \dots, q_r) .

Soit $z \in K \setminus F$. Si $j \in \llbracket 2; r \rrbracket$, $q_j(z)$ est cette fois une matrice hyperbolique M_j . Cette matrice a exactement deux points fixes z_j, z'_j dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, qui sont indépendants du choix de $z \in K \setminus F$. On supposera par la suite que $z_j > z'_j$, avec éventuellement $z_j = \infty$.

Soit γ_j l'une des deux géodésiques de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ reliant z_j à z'_j , que l'on oriente dans le sens directe : la géodésique contenue dans le demi-plan de Poincaré est orientée de z_j vers z'_j . La partie

$$\mathcal{F} = \{z_1\} \times \gamma_2 \times \dots \times \gamma_r \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$$

est un cycle spécial de $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$. En effet γ_j est l'orbite d'un de ses points sous l'action de $q_j(K^\times)$.

En général les cycles spéciaux de X identifié à $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})^r$ sont des produits d'arcs de cercles passant par z_j et z'_j . Ces arcs de cercles sont définis par le fait qu'ils passent par z_j et z'_j , et par leur courbure. Des illustrations sont fournies aux figures 5.1 et 5.2.

Le cas des $T(\mathbb{R})$ -orbites fournit des cercles de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ privés de deux points, et des droites privées d'un point, comme on le voit aux figures 5.3 et 5.4.

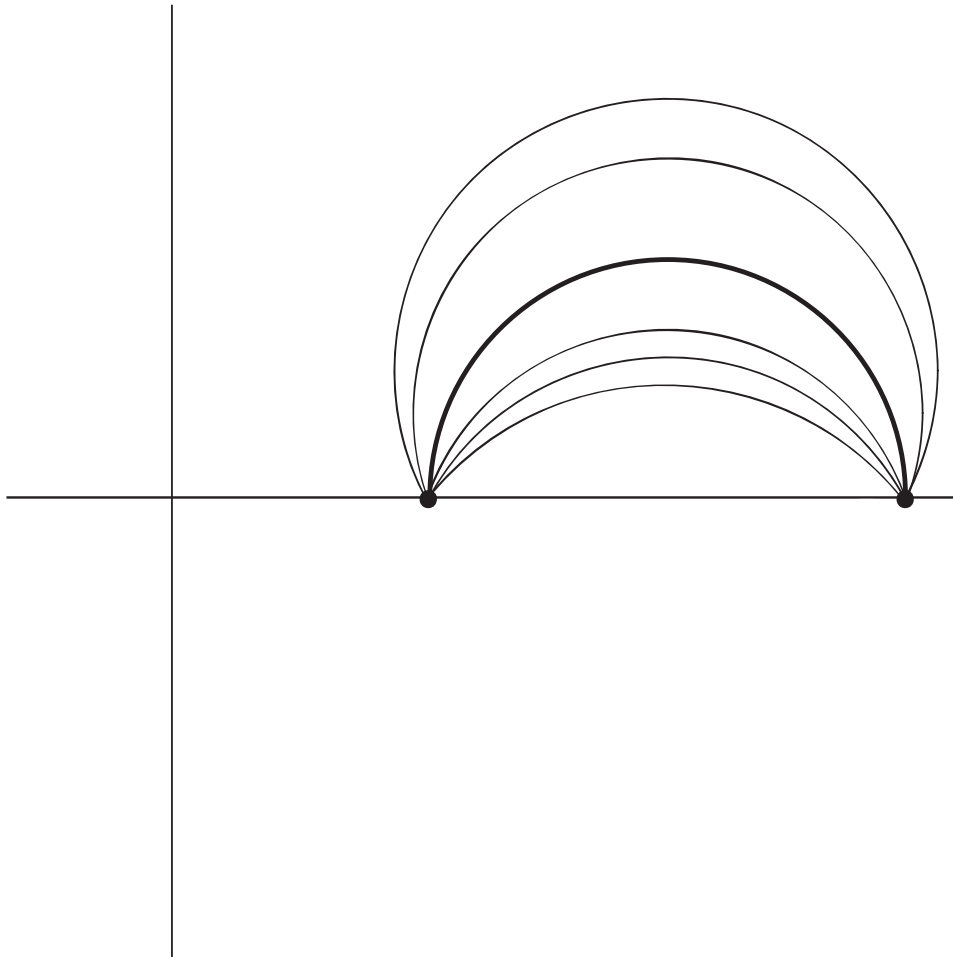


FIGURE 5.1 – Différentes $T(\mathbb{R})^\circ$ -orbites dans le cas d'arcs de cercles. En gras la géodésique.

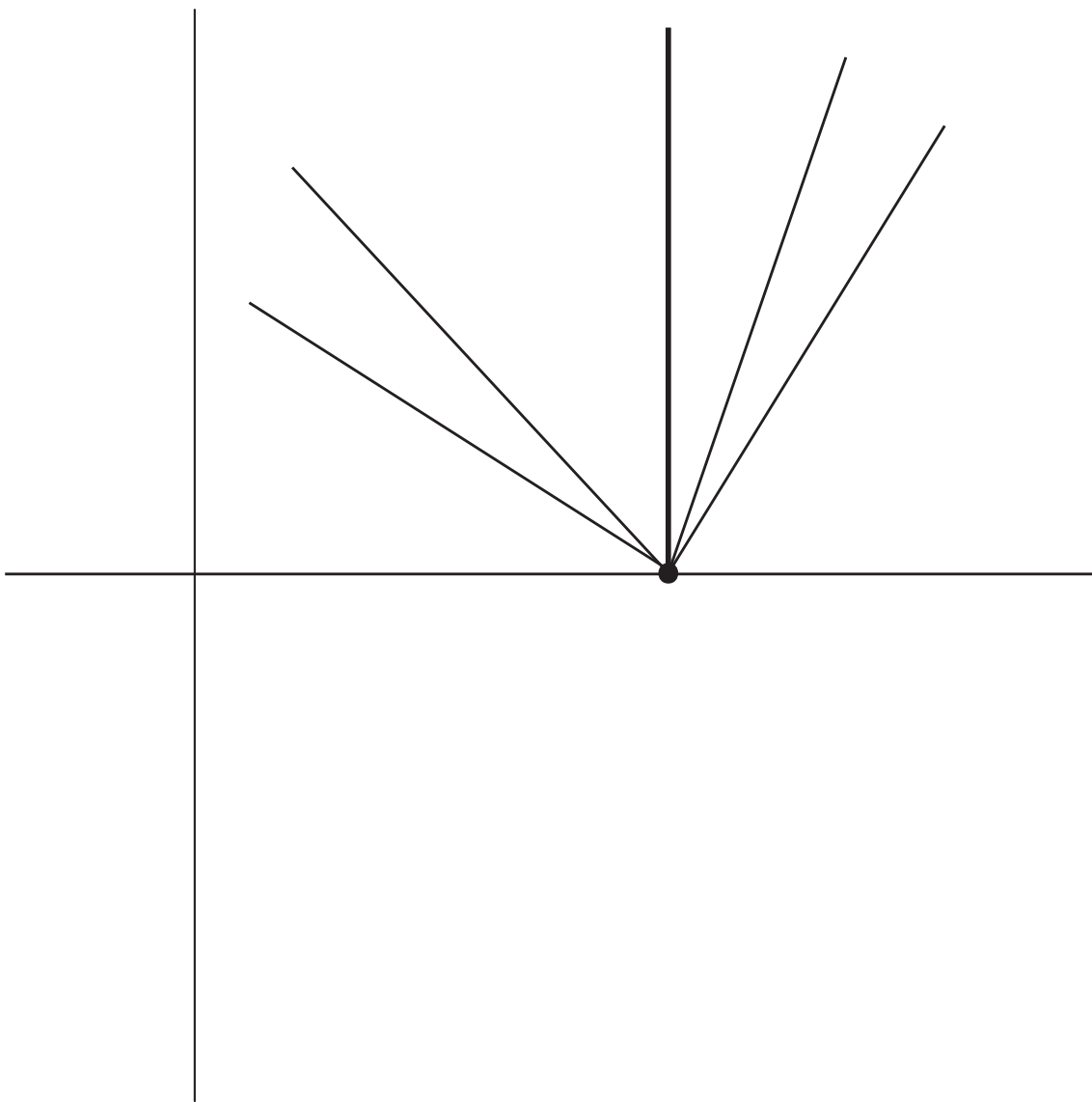
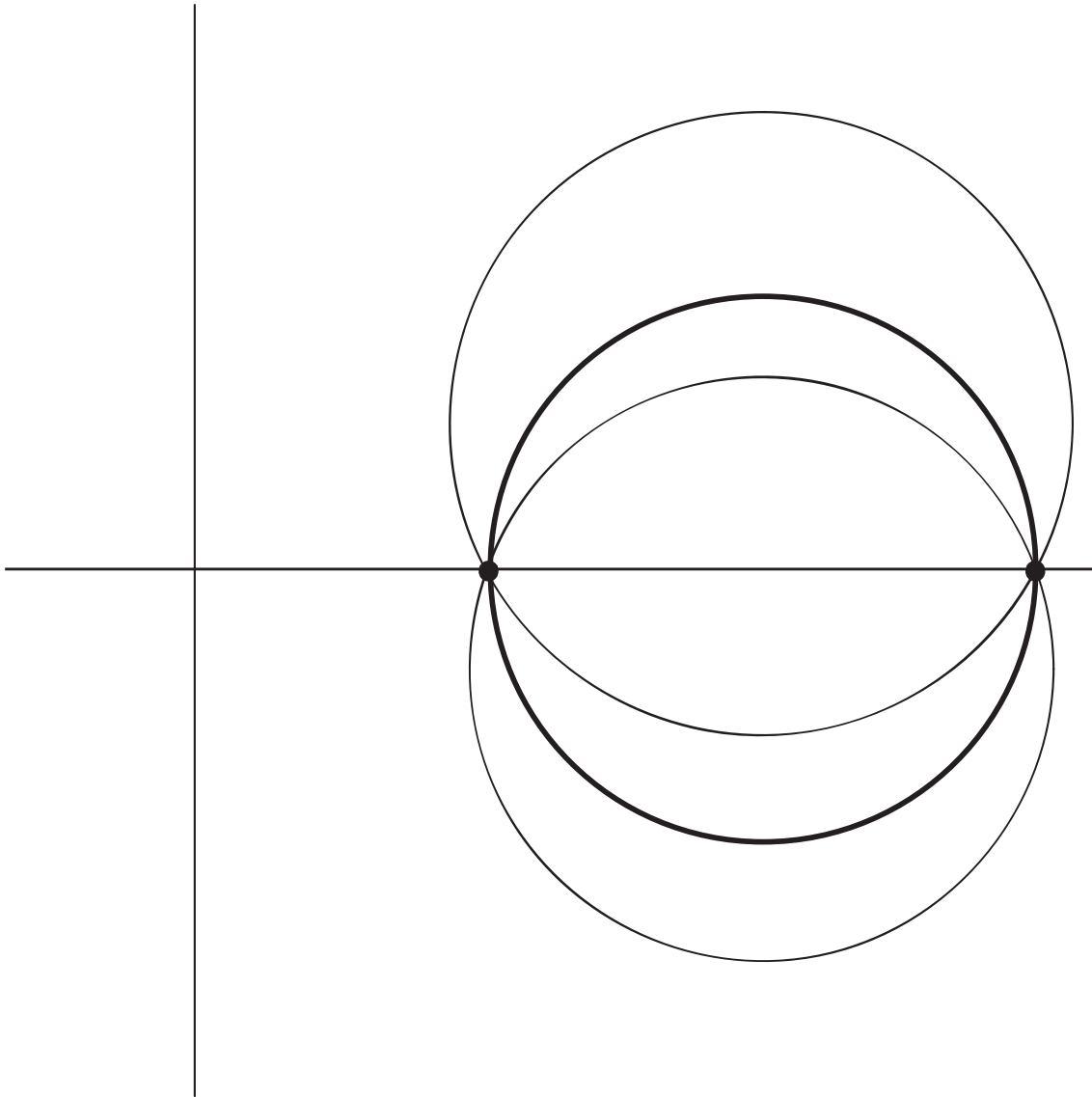


FIGURE 5.2 – Différentes $T(\mathbb{R})^\circ$ -orbites dans le cas de demi-droites. En gras la géodésique.

FIGURE 5.3 – Différentes $T(\mathbb{R})$ -orbites dans le cas d'arcs de cercles. En gras la géodésique.

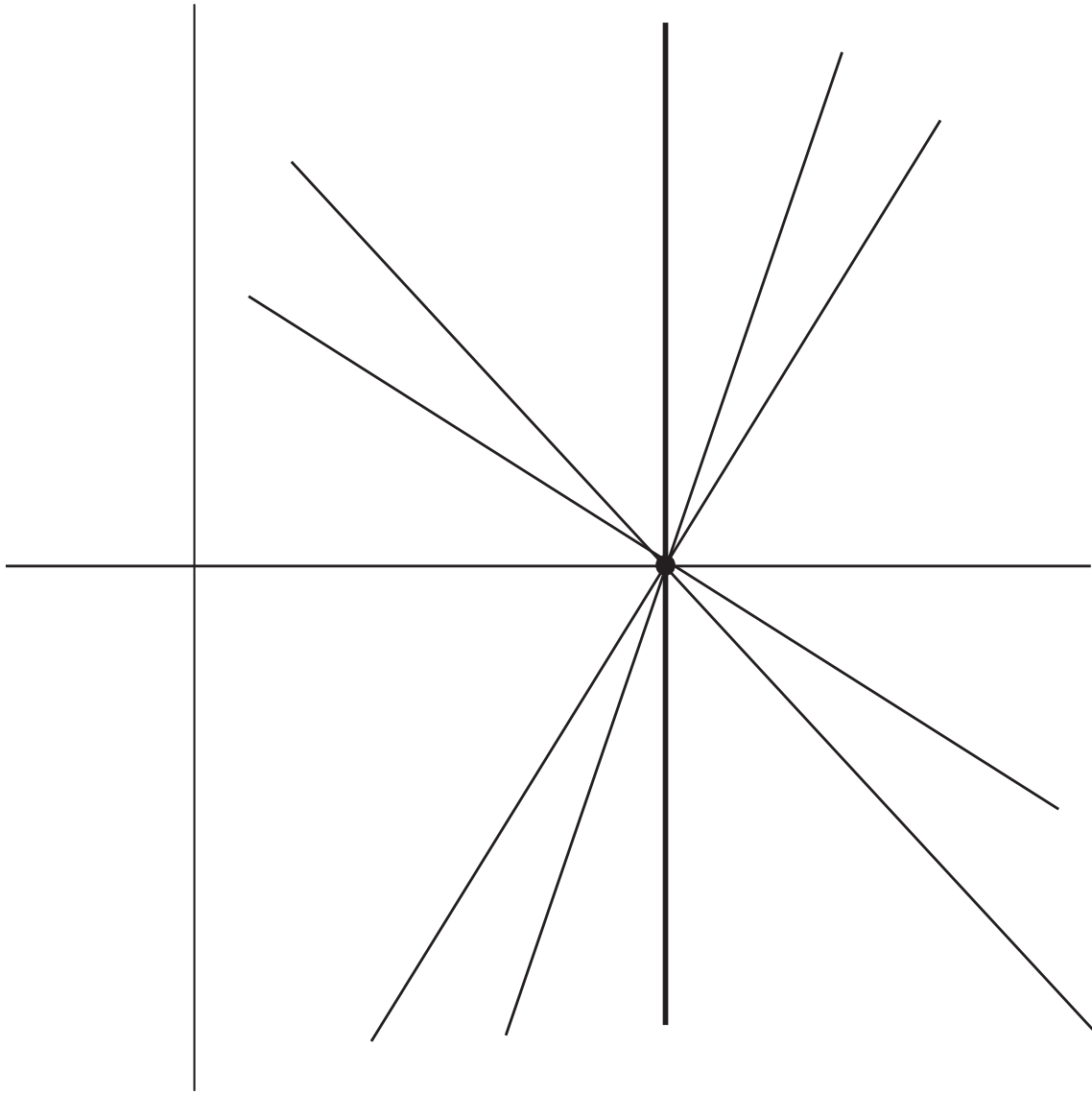


FIGURE 5.4 – Différentes $T(\mathbb{R})$ -orbites dans le cas de demi-droites. En gras la géodésique.

Si on ne s'intéresse qu'à un facteur $X_j \simeq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de X , la conjugaison complexe correspond au changement de composante connexe de la proposition 2.2.4.3. Comme l'affirme la proposition 2.2.3.5 l'intégrale J_b^β qui est l'objet principal pour construire les points de Darmon est indépendante du choix, pour $j \in \llbracket 2; r \rrbracket$, de l'orbite $\text{pr}_j(\mathcal{T}^\circ)$ tant que celle-ci reste dans la même composante connexe de X_j . Dans le cas particulier où on considère des géodésiques (en gras sur le dessin), l'arc de cercle est symétrique, c.f. les figures 5.5 et 5.6.

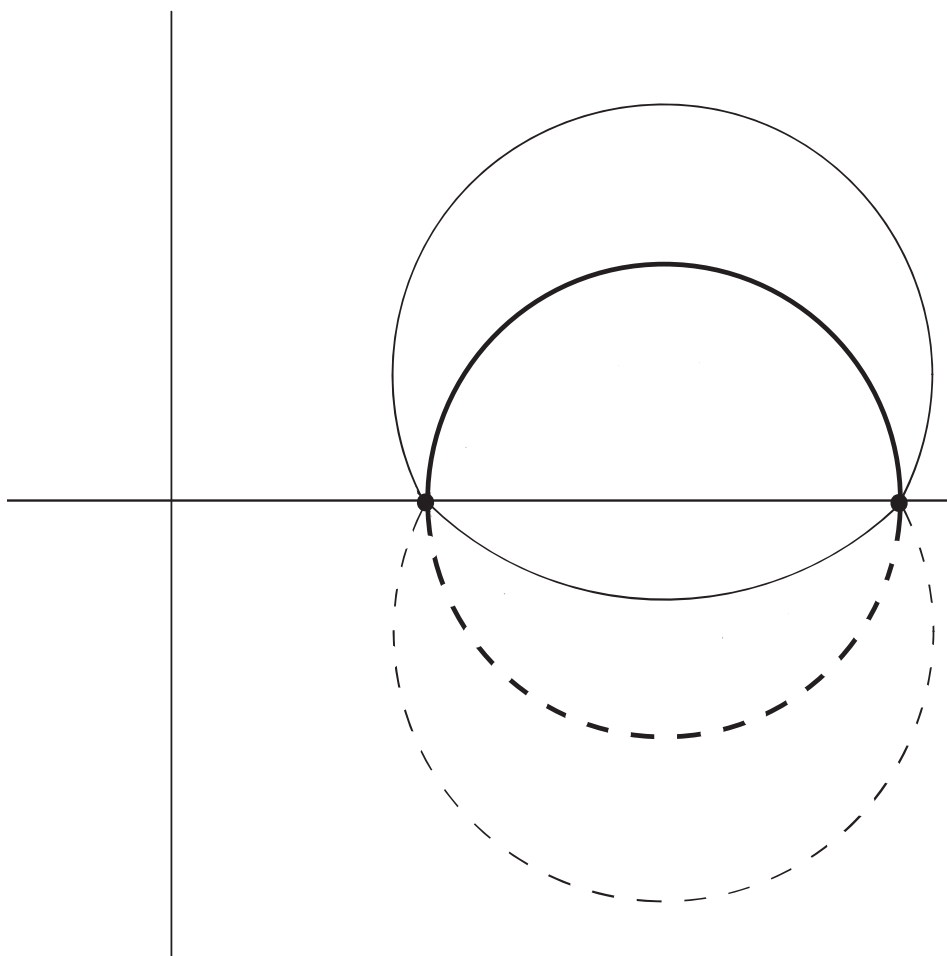


FIGURE 5.5 – Action de la conjugaison complexe sur les orbites.

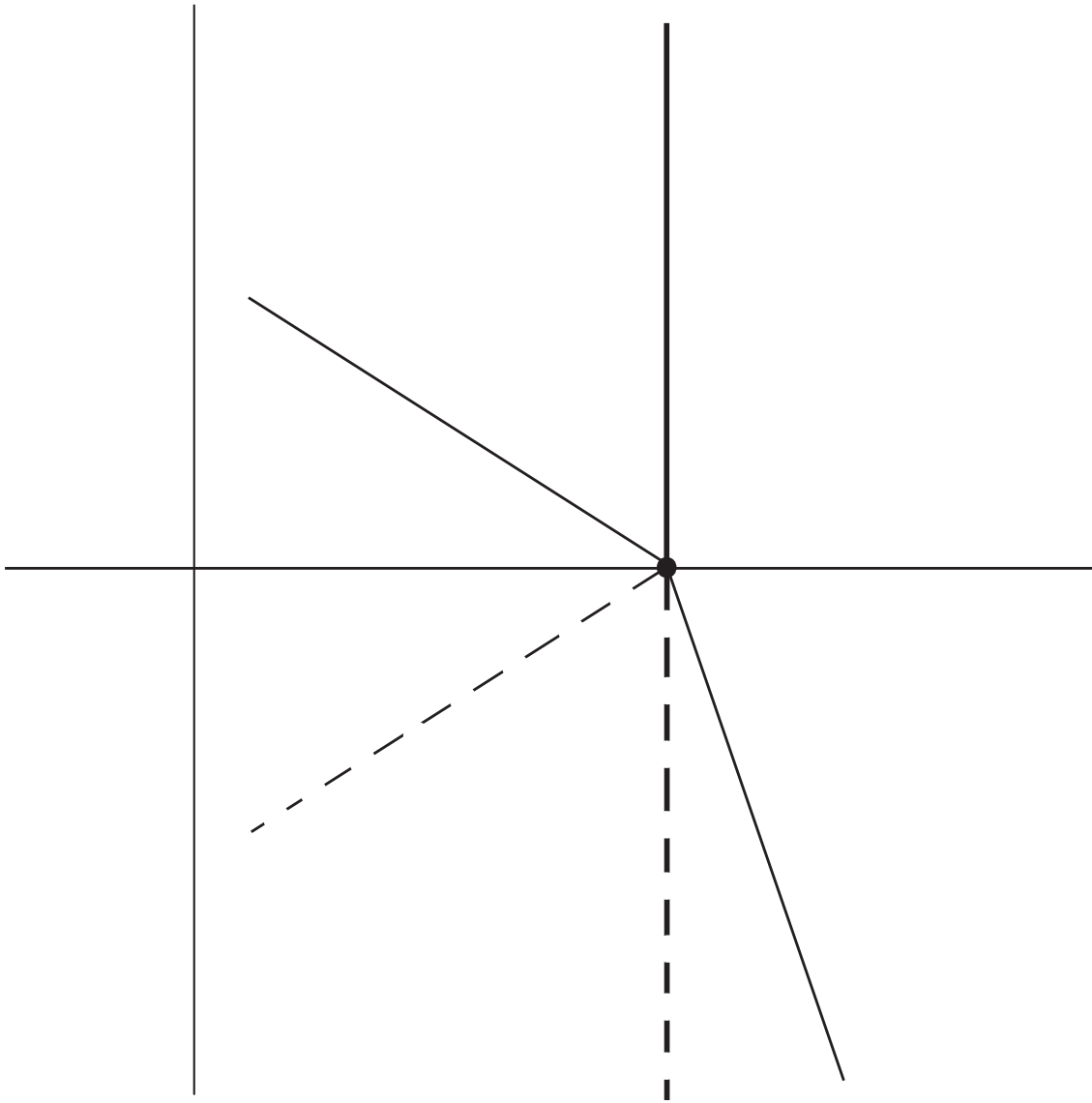


FIGURE 5.6 – Action de la conjugaison complexe sur les orbites — cas des demi-droites.

5.4 Points de Darmon et variétés de Shimura de type orthogonal

Dans cette section expliquons comment voir les résultats de la section 3.4 à l'aide des isomorphismes κ_j et du dictionnaire de [Bru] et [Kud04].

Cas de la signature (1,2)

Soit (V, Q) l'espace quadratique sur \mathbb{Q} défini par

$$(V, Q) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \right\}, \det \right).$$

Posons $G = \mathrm{GSpin}(V)$ et

$$D = \{z \subset V(\mathbb{R}) \mid \dim(z) = 1, Q|_z > 0\}.$$

G agit par conjugaison sur V :

$$\forall g \in G \quad \forall X \in V \quad g \cdot X = gXg^{-1}.$$

Pour identifier le demi plan de Poincaré \mathcal{H} avec D , on se fixe un point $X(z_0) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de D . L'application

$$z = x + iy \in \mathcal{H} \longmapsto X(z) = g_z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $g_z = \begin{pmatrix} y^{1/2} & xy^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}$ vérifie $g_z \cdot i = z$ pour l'action par homographie, permet d'identifier \mathcal{H} et D par

$$z \longmapsto \mathrm{Vect} X(z),$$

car

$$X(z) = \begin{pmatrix} -xy^{-1} & \frac{x^2+y^2}{y} \\ -y^{-1} & xy^{-1} \end{pmatrix}$$

$\det X(z) = 1$ et $g \cdot X(z) = X(g \cdot z)$.

Si $x = \begin{pmatrix} b & 2c \\ -2a & -b \end{pmatrix} \in V(\mathbb{Q})$ vérifie $Q(x) > 0$, c'est-à-dire $b^2 - 4ac < 0$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{4ac - b^2}} \begin{pmatrix} b & 2c \\ -2a & -b \end{pmatrix} = X(z)$$

pour $z \in \mathcal{H}$ tel que $az^2 + bz + c = 0$.

Un vecteur de norme positive dans V correspond donc à un point CM de D . On pose alors

$$D_x = \left\{ \frac{-b + i\sqrt{-b^2 + 4ac}}{2a} \right\}$$

Remarque 5.4.0.2. Si l'on considère des droites orientées, l'espace symétrique associé est $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

$$D_{\mathrm{or}} = \{z \subset V(\mathbb{R}) \mid \dim(z) = 1, z \text{ orienté } Q|_z > 0\} \simeq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Remarque 5.4.0.3. Suivant [Kud97] on peut remarquer que (G, D) est une donnée de Shimura au sens de Deligne. Le morphisme $h : \mathbb{S} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$ correspondant étant

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{S} & \longrightarrow & G_{\mathbb{R}} \\ x + iy & \longmapsto & xI_2 + yX(z_0) \end{array} .$$

Cas de la signature (2,1)

Soit maintenant (V, Q) l'espace quadratique

$$(V, Q) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}) \right\}, -\det \right).$$

La forme bilinéaire symétrique associée est $(X, Y) \mapsto \frac{1}{2}\text{Tr}(XY)$. Notons encore $G = \text{GSpin}(V)$ et D l'espace symétrique

$$D = \{z \subset V(\mathbb{R}) \mid \dim(z) = 1, Q|_z < 0\}.$$

Comme $Q\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) < 0$, l'application

$$z = x + iy \longmapsto \text{Vect } X(z) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -xy^{-1} & \frac{x^2+y^2}{y} \\ -y^{-1} & xy^{-1} \end{pmatrix}$$

permet encore d'identifier D et \mathcal{H} .

Soit $x = \begin{pmatrix} b & 2c \\ -2a & -b \end{pmatrix} \in V$, tel que $Q(x) = -\det(x) = b^2 - 4ac > 0$. Notons

$$D_x = \{z \in D \mid z \perp x\} = \{z \in \mathcal{H} \mid X(z) \perp x\}.$$

On a

$$\begin{aligned} X(z) \perp x &\iff \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} -xy^{-1} & \frac{x^2+y^2}{y} \\ -y^{-1} & xy^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2c \\ -2a & -b \end{pmatrix} \right] = 0 \\ &\iff \text{Tr} \begin{pmatrix} -xy^{-1}b - 2a\frac{x^2+y^2}{y} & \star \\ \star & -2cy^{-1} - bxy^{-1} \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff y^{-1}[a(x^2 + y^2) + bx + c] = 0 \\ &\iff a|z|^2 + b(z + \bar{z}) + c = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Ainsi D_x s'identifie à un arc de cercle dans \mathcal{H} (et $D_{x, \text{or}}$ à l'union de deux arcs de cercles dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Cas général

Dans le cas de l'espace $(V, Q) = (B^{\text{Tr}=0}, D_0 \cdot \text{nr})$ de la section 3.4.2, on peut identifier pour $j \in \llbracket 2; r \rrbracket$ $(V \otimes_{F, \tau_j} \mathbb{R}, \tau_j \circ D_0 \cdot \text{nr})$ à

$$\left(\left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}, \tau_j(D_0) \cdot \det \right).$$

Annexe A

Calculs effectifs des points de Stark-Heegner

Le but de cette annexe est d'expliquer quelles sont à ce jour les vérifications numériques de la conjecture 3.1.1.1. Le calcul des points de Darmon pour des courbes elliptiques de conducteur premier est issu d'une collaboration avec Romain Cosset ¹.

A.1 Vérifications de Darmon et Logan

Darmon et Logan ont vérifié la conjecture 3.1.1.1 dans [DL03] pour trois courbes définies sur $\mathbb{Q}(\sqrt{29})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{37})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{41})$. Ces courbes (étudiées par Shimura dans [Shi71a, Shi72, Shi71b]) ont la particularité d'être de bonne réduction. Ce choix a deux avantages :

- Le premier est que les courbes de bonne réduction sur les corps quadratiques réels ne sont pas uniformisées par des courbes de Shimura. La méthode de Darmon et Logan permet ainsi de calculer des points sur des courbes pour lesquelles il n'était pas envisageable d'adapter une méthode du type point de Heegner/points CM classique.
- Le second est algorithmique. L'algorithme exposé dans [DL03] utilise à plusieurs endroits le fait que le conducteur des courbes elliptiques considérées est trivial. Les modifications à apporter pour adapter le programme `Pari/GP` de Darmon et Logan pour pouvoir considérer des courbes de conducteur premier sont résumées dans la section suivante.

Rappelons que la conjecture vérifiée par ces calculs concerne le cas où F est quadratique réel de nombre de classe au sens restreint $h_f^+ = 1$, $G = \text{GL}_2$ et où les extensions quadratiques K sont du type ATR (ce qui signifie qu'il y a exactement une place archimédienne de F qui se ramifie dans K).

A.2 Cas des courbes de conducteur premier

Motivé par les travaux de Darmon et Tornarí [DT08] nous avons voulu tester un éventuel théorème de Gross-Kohnen-Zagier pour les points de Darmon. Comme ce théorème concerne les courbes elliptiques de rang (algébrique) 1, nous avons été amené à considérer la courbe (E_{Cr}) définie sur $F = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$.

$$y^2 + (1 + \sqrt{13})xy + (2 + \sqrt{13})y = x^3 - \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right)x + \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right) \quad (E_{\text{Cr}})$$

1. www.loria.fr/cossetro/

étudiée par Cremona et Serf dans [CS99].

L'avantage de cette courbe est qu'elle est de conducteur premier (de norme 127 plus précisément) de rang algébrique 1 et définie sur un corps quadratique réel F vérifiant $h_F^+ = 1$. Les points de Darmon pour les corps ATR K satisfaisant la condition de Heegner (c'est-à-dire dans lesquels le conducteur N de (E_{Cr}) se décompose) devraient donc être définis sur F , si K est de nombre de classe 1.

Romain Cosset a réécrit l'algorithme de Darmon et Logan pour l'application `Magma`, en l'adaptant pour qu'il soit un peu plus souple, le but étant à terme de pouvoir calculer les points de Darmon de n'importe quelle courbe elliptique définie sur un corps quadratique réel. Mais déjà l'adaptation au cas des courbes de conducteur premier a posé quelques problèmes qui forment un obstacle aux calculs en général.

Le calcul de l'intégrale

$$J_\tau^+ = \int^\tau \int_\infty^{\gamma_\tau \cdot \infty} \omega_f^+$$

à l'aide de l'algorithme des fraction continues proposé par Darmon et Logan (c.f.[DL03], section 4) ne peut pas s'adapter immédiatement au cas de courbes de conducteurs non triviaux. En effet, l'intégrale J_τ^+ n'est invariante que par $\Gamma_0(N)$ et non par $SL_2(\mathcal{O}_F)$ (comme ce serait le cas si N était trivial) ce qui fait que les matrices fournies par l'algorithme des fraction continues ne permettent pas de décomposer l'intégrale J_τ^+ comme expliqué par exemple après l'équation 78 de [DL03]. D'autre part le calcul de l'intégrale

$$\int^\tau \int_\infty^0 \omega_f^+$$

est lui aussi compromis par le fait que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas dans $\Gamma_0(N)$. L'involution de Fricke W_N n'est pas un remplaçant adéquat.

Le programme écrit par Romain Cosset ne permet à l'heure actuelle de calculer les points de Darmon sur des courbes de conducteur premier que dans le cas de corps ATR K vérifiant la condition que la pointe $\gamma_\tau \cdot \infty$ associée admette un bon développement en fraction continues (qui ne fait intervenir que des matrices de $\Gamma_0(N)$ et permettent de décomposer l'intégrale J_τ^+ en un nombre pair de termes dans le cas où le signe de l'équation fonctionnelle est -1). Le calcul des points de Darmon sur la courbe (E_{Cr}) est donc fortement compromis car nous ne connaissons à l'heure actuelle que trois corps pour lesquels la décomposition en fractions continues est suffisamment bonne. Le premier est de nombre de classe 1 et nécessite de lourds calculs (évalués à plusieurs mois malgré les nombreuses optimisations du calcul dues à R. Cosset), les deux autres sont de nombre de classe respectifs 2 et 4 et fournissent des intégrales calculables en un temps un peu plus raisonnable.

Exemple de calcul qui a abouti : Nous avons pu tester le programme `Magma` sur les exemples traités par Darmon et Logan, mais aussi sur une courbe de conducteur premier définie sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$:

$$y^2 + xy + \omega y = x^3 - (\omega + 1)x^2 - (30\omega + 45)x - (11\omega + 117)$$

où $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cette courbe utilisée par Greenberg (c.f. [Gre06]) est de conducteur de norme 31. Elle est de rang 0 sur F .

Le corps $K = F[X]/(X^2 + \omega - 1) = F(\alpha)$ vérifie toutes les hypothèses : il est ATR, de nombre de classe 1, satisfait à l'hypothèse de Heegner, et la décomposition en fraction continues utilisée fait intervenir des matrices de $\Gamma_0(N)$. Le groupe $E(K)$ est de rang 1 modulo torsion², le point suivant, donné par la fonction `PseudoGeneratorsFreeMordellWeil`, engendre un sous-groupe d'indice fini de la partie libre de $E(K)$:

$$P_g = \left(\frac{1}{4}(-11\sqrt{5} + 7) : \frac{1}{8}(-31\sqrt{5} + 25)\alpha + \frac{1}{8}(9\sqrt{5} - 9) : 1 \right).$$

Le calcul de l'intégrale J_τ^+ via les fonctions de R. Cosset fournit la valeur suivante :

$$J_\tau^+ = -3.21930248203 + i \times 1.38922811525.$$

Le point de Darmon obtenu est alors reconnu comme étant le point

$$\Phi(J_\tau^+) = 18P_g.$$

Remarque A.2.0.4. La courbe elliptique sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ considérée ci-dessus n'est pas isogène à son conjugué galoisien, au contraire des exemples traités dans l'article [DL03]. Les courbes elliptiques définies sur des corps quadratiques réels qui sont isogènes à leur conjugué sous Galois constituent une classe particulière de courbes, étudiée par Darmon, Rotger et Zhao dans leur article [DRZ]. Dans cet article, ils donnent une relation entre les points de Darmon et les points de Heegner, ce qui leur permet d'obtenir de meilleurs résultats numériques.

A.3 Cas où $G \neq \mathrm{GL}_2$

Dans le cas où les points de Darmon sont définis à l'aide d'une algèbre de quaternions non décomposée les calculs nécessiteraient de pouvoir calculer sur les variétés de Shimura quaternioniques. Ces variétés n'ont pas de pointes et il faut donc trouver un moyen de calculer sans utiliser de développement en série de Fourier. Cet aspect n'est pas encore très développé, même dans le cas des points CM de courbes de Shimura (c.f. [Voi06] pour un cas particulier).

Un autre aspect possible serait d'utiliser une uniformisation analytique rigide, comme dans [Gre06] pour les points de Heegner CM. Une telle approche se ramènerait a priori au travail en cours de Greenberg [Gre09].

2. La partie de torsion est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Bibliographie

- [AN10] E. AFLALO et J. NEKOVÁŘ : Non-triviality of CM points in ring class field towers. *Israel Journal of Mathematics*, 175:225–284, 2010.
- [BCDT01] Christophe BREUIL, Brian CONRAD, Fred DIAMOND et Richard TAYLOR : On the modularity of elliptic curves over \mathbf{Q} : wild 3-adic exercises. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(4):843–939 (electronic), 2001.
- [BD09] Massimo BERTOLINI et Henri DARMON : The rationality of Stark-Heegner points over genus fields of real quadratic fields. *Ann. of Math. (2)*, 170(1):343–370, 2009.
- [BL84] J.-L. BRYLINSKI et J.-P. LABESSE : Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 17(3):361–412, 1984.
- [Bru] J. H. BRUINIER : Traces of CM-values of modular functions and related topics. in : Proceedings of the conference on "automorphic forms and automorphic L -functions", RIMS Kokyuroku 1468, Kyoto (2006).
- [Bum97] Daniel BUMP : *Automorphic forms and representations*, volume 55 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [Car86] Henri CARAYOL : Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura. *Compositio Math.*, 59(2):151–230, 1986.
- [CD08] Pierre CHAROLLOIS et Henri DARMON : Arguments des unités de Stark et périodes de séries d'Eisenstein. *Algebra Number Theory*, 2(6):655–688, 2008.
- [CJ] Christophe CORNUT et Dimitar JETCHEV : *In Preprint*.
- [CS99] J. E. CREMONA et P. SERF : Computing the rank of elliptic curves over real quadratic number fields of class number 1. *Math. Comp.*, 68(227):1187–1200, 1999.
- [CV05] C. CORNUT et V. VATSAL : CM points and quaternion algebras. *Doc. Math.*, 10:263–309 (electronic), 2005.
- [CV07] Christophe CORNUT et Vinayak VATSAL : Nontriviality of Rankin-Selberg L -functions and CM points. In *L-functions and Galois representations*, volume 320 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 121–186. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [Dar01] Henri DARMON : Integration on $\mathcal{H}_p \times \mathcal{H}$ and arithmetic applications. *Ann. of Math. (2)*, 154(3):589–639, 2001.
- [Dar04] Henri DARMON : *Rational points on modular elliptic curves*, volume 101 de *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2004.

- [Dar06] Henri DARMON : Heegner points, Stark-Heegner points, and values of L -series. *In International Congress of Mathematicians. Vol. II*, pages 313–345. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [DD06] Henri DARMON et Samit DASGUPTA : Elliptic units for real quadratic fields. *Ann. of Math. (2)*, 163(1):301–346, 2006.
- [Del71] Pierre DELIGNE : Travaux de Shimura. *In Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389*, pages 123–165. Lecture Notes in Math., Vol. 244. Springer, Berlin, 1971.
- [Del79] P. DELIGNE : Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. *In Automorphic forms, representations and L -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 313–346. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus.
- [Dem08] Lassina DEMBÉLÉ : An algorithm for modular elliptic curves over real quadratic fields. *Experiment. Math.*, 17(4):427–438, 2008.
- [DG02] Henri DARMON et Peter GREEN : Elliptic curves and class fields of real quadratic fields : algorithms and evidence. *Experiment. Math.*, 11(1):37–55, 2002.
- [DL03] Henri DARMON et Adam LOGAN : Periods of Hilbert modular forms and rational points on elliptic curves. *Int. Math. Res. Not.*, (40):2153–2180, 2003.
- [DP06] Henri DARMON et Robert POLLACK : Efficient calculation of Stark-Heegner points via overconvergent modular symbols. *Israel J. Math.*, 153:319–354, 2006.
- [DRZ] Henri DARMON, Victor ROTGER et Yu ZHAO : The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for Q -curves and Oda's period relations. *Preprint*.
- [DT08] Henri DARMON et Gonzalo TORNARÍA : Stark-Heegner points and the Shimura correspondence. *Compos. Math.*, 144(5):1155–1175, 2008.
- [Fre90] Eberhard FREITAG : *Hilbert modular forms*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [GKZ87] B. GROSS, W. KOHNEN et D. ZAGIER : Heegner points and derivatives of L -series. II. *Math. Ann.*, 278(1-4):497–562, 1987.
- [Gre06] Matthew GREENBERG : Heegner point computations via numerical p -adic integration. *In Algorithmic number theory*, volume 4076 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 361–376. Springer, Berlin, 2006.
- [Gre09] Matthew GREENBERG : Stark-Heegner points and the cohomology of quaternionic Shimura varieties. *Duke Math. J.*, 147(3):541–575, 2009.
- [Gro04] B. GROSS : Heegner points and representation theory. *In Heegner points and Rankin L -series*, volume 49 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 37–65. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [GZ86] Benedict H. GROSS et Don B. ZAGIER : Heegner points and derivatives of L -series. *Invent. Math.*, 84(2):225–320, 1986.
- [HZ76] F. HIRZEBRUCH et D. ZAGIER : Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus. *Invent. Math.*, 36:57–113, 1976.
- [Jac72] Hervé JACQUET : *Automorphic forms on $GL(2)$. Part II*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 278. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

- [Jan90] Uwe JANNSEN : *Mixed motives and algebraic K-theory*, volume 1400 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990. With appendices by S. Bloch and C. Schoen.
- [JL70] H. JACQUET et R. P. LANGLANDS : *Automorphic forms on $GL(2)$* . Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [KM90] Stephen S. KUDLA et John J. MILLSON : Intersection numbers of cycles on locally symmetric spaces and Fourier coefficients of holomorphic modular forms in several complex variables. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (71):121–172, 1990.
- [Kol88a] V. A. KOLYVAGIN : Finiteness of $E(\mathbf{Q})$ and $SH(E, \mathbf{Q})$ for a subclass of Weil curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 52(3):522–540, 670–671, 1988.
- [Kol88b] V. A. KOLYVAGIN : The Mordell-Weil and Shafarevich-Tate groups for Weil elliptic curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 52(6):1154–1180, 1327, 1988.
- [Kud97] Stephen S. KUDLA : Algebraic cycles on Shimura varieties of orthogonal type. *Duke Math. J.*, 86(1):39–78, 1997.
- [Kud02] Stephen S. KUDLA : Derivatives of Eisenstein series and generating functions for arithmetic cycles. *Astérisque*, (276):341–368, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.
- [Kud04] Stephen S. KUDLA : Special cycles and derivatives of Eisenstein series. In *Heegner points and Rankin L-series*, volume 49 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 243–270. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [Lan76] R. P. LANGLANDS : Some contemporary problems with origins in the Jugendtraum. In *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974)*, pages 401–418. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.
- [Lan79a] R. P. LANGLANDS : Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 205–246. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [Lan79b] R. P. LANGLANDS : On the zeta functions of some simple Shimura varieties. *Canad. J. Math.*, 31(6):1121–1216, 1979.
- [Lan83] Serge LANG : *Complex multiplication*, volume 255 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [Man68] Ju. I. MANIN : Correspondences, motifs and monoidal transformations. *Mat. Sb. (N.S.)*, 77 (119):475–507, 1968.
- [Mil90] J. S. MILNE : Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles. In *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 10 de *Perspect. Math.*, pages 283–414. Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [Mil05] J. S. MILNE : Introduction to Shimura varieties. In *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, volume 4 de *Clay Math. Proc.*, pages 265–378. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

- [MS63] Yozô MATSUSHIMA et Goro SHIMURA : On the cohomology groups attached to certain vector valued differential forms on the product of the upper half planes. *Ann. of Math. (2)*, 78:417–449, 1963.
- [MS81] J. S. MILNE et Kuang-yen SHIH : The action of complex conjugation on a Shimura variety. *Ann. of Math. (2)*, 113(3):569–599, 1981.
- [Nek94] Jan NEKOVÁŘ : Beilinson’s conjectures. *In Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 537–570. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Nek06] Jan NEKOVÁŘ : Selmer complexes. *Astérisque*, (310):viii+559, 2006.
- [Nek07] Jan NEKOVÁŘ : The Euler system method for CM points on Shimura curves. *In L-functions and Galois representations*, volume 320 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 471–547. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [Oda82] Takayuki ODA : *Periods of Hilbert modular surfaces*, volume 19 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Mass., 1982.
- [Pra96] Dipendra PRASAD : Some applications of seesaw duality to branching laws. *Math. Ann.*, 304:1–20, 1996.
- [Rei97] Harry REIMANN : *The semi-simple zeta function of quaternionic Shimura varieties*, volume 1657 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [Sai93] Hiroshi SAITO : On Tunnell’s formula for characters of $GL(2)$. *Compositio Math.*, 85(1):99–108, 1993.
- [Sch85] Winfried SCHARLAU : *Quadratic and Hermitian forms*, volume 270 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Shi71a] Goro SHIMURA : Class fields over real quadratic fields and Hecke operators. *In Seminar on Modern Methods in Number Theory (Inst. Statist. Math., Tokyo, 1971), Paper No. 6*, page 17. Inst. Statist. Math., Tokyo, 1971.
- [Shi71b] Goro SHIMURA : Class fields over real quadratic fields in the theory of modular functions. *In Several complex variables, II (Proc. Internat. Conf., Univ. Maryland, College Park, Md., 1970)*, pages 169–188. Lecture Notes in Math., Vol. 185. Springer, Berlin, 1971.
- [Shi72] Goro SHIMURA : Class fields over real quadratic fields and Hecke operators. *Ann. of Math. (2)*, 95:130–190, 1972.
- [ST61] Goro SHIMURA et Yutaka TANIYAMA : *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, volume 6 de *Publications of the Mathematical Society of Japan*. The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961.
- [Tia03] Y. TIAN : Euler systems of CM points on Shimura curves. *Thesis, Columbia University*, 2003.
- [Tri06] Mak TRIFKOVIĆ : Stark-Heegner points on elliptic curves defined over imaginary quadratic fields. *Duke Math. J.*, 135(3):415–453, 2006.
- [Tun83] Jerrold B. TUNNELL : Local ε -factors and characters of $GL(2)$. *Amer. J. Math.*, 105(6):1277–1307, 1983.
- [vdG88] Gerard van der GEER : *Hilbert modular surfaces*, volume 16 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

- [Vig80] Marie-France VIGNÉRAS : *Arithmétique des algèbres de quaternions*, volume 800 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
- [Voi06] John VOIGHT : Computing CM points on Shimura curves arising from cocompact arithmetic triangle groups. In *Algorithmic number theory*, volume 4076 de *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 406–420. Springer, Berlin, 2006.
- [Wal81] J.-L. WALDSPURGER : Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 60(4):375–484, 1981.
- [Wal85a] J.-L. WALDSPURGER : Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur $GL(2)$. *Compositio Math.*, 54(2):121–171, 1985.
- [Wal85b] J.-L. WALDSPURGER : Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie. *Compositio Math.*, 54(2):173–242, 1985.
- [Wal91] Jean-Loup WALDSPURGER : Correspondances de Shimura et quaternions. *Forum Math.*, 3(3):219–307, 1991.
- [Yos94] Hiroyuki YOSHIDA : On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms. *Duke Math. J.*, 75(1):121–191, 1994.
- [YZZ] Xinyi YUAN, Shou-Wu ZHANG et Wei ZHANG : Heights of CM points I : Gross–zagier formula. *Preprint*.
- [YZZ09] Xinyi YUAN, Shou-Wu ZHANG et Wei ZHANG : The Gross-Kohnen-Zagier theorem over totally real fields. *Compos. Math.*, 145(5):1147–1162, 2009.
- [Zag85] D. ZAGIER : Modular points, modular curves, modular surfaces and modular forms. In *Workshop Bonn 1984 (Bonn, 1984)*, volume 1111 de *Lecture Notes in Math.*, pages 225–248. Springer, Berlin, 1985.
- [Zha] Wei ZHANG : Modularity of Generating Functions of Special Cycles on Shimura Varieties. *soumis*.
- [Zha01a] Shou-Wu ZHANG : Gross-Zagier formula for GL_2 . *Asian J. Math.*, 5(2):183–290, 2001.
- [Zha01b] Shou-Wu ZHANG : Heights of Heegner points on Shimura curves. *Ann. of Math. (2)*, 153(1):27–147, 2001.
- [Zha04] Shou-Wu ZHANG : Gross-Zagier formula for $GL(2)$. II. In *Heegner points and Rankin L -series*, volume 49 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 191–214. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [Zha08] S.-W. ZHANG : *Periods and Heights of Heegner points*, Talk at UCLA workshop, 2008.

Index des notations

<p>$[\cdot g]$, 23</p> <p>α, 39</p> <p>B, 19</p> <p>$B_{\mathbb{A}}$, 19</p> <p>\widehat{B}, 19</p> <p>β, 38</p> <p>ω^β, 26</p> <p>c_{τ_j}, 36</p> <p>d, 19</p> <p>Δ_b^β, 50</p> <p>Δ_b°, 48</p> <p>Δ_b^u, 49</p> <p>E, 33</p> <p>η_j, 37</p> <p>F, 19</p> <p>F' ou $F(G, X)$, 23</p> <p>G, 21</p> <p>γ_j, 44</p> <p>G_i, 26</p> <p>$G_{i, \mathbb{R}}$, 23</p> <p>\mathcal{H}, 19</p> <p>h_{can}, 26</p> <p>h_K, 19</p> <p>h_K^+, 19</p> <p>I, 35</p> <p>\mathcal{I}, 34</p> <p>I', 35</p> <p>J_b^β, 49</p> <p>\mathcal{J}, 35</p> <p>K, 42</p> <p>$K_{\mathbb{A}}$, 19</p> <p>K^{ab}, 45</p>	<p>\widehat{K}, 19</p> <p>K_b, 55</p> <p>K_b^+, 55</p> <p>κ_i, 26</p> <p>K_v, 19</p> <p>Λ_1, 37</p> <p>n, 48</p> <p>$N_{B^\times}(K^\times)$, 51</p> <p>nr, 21</p> <p>\mathcal{O}_K, 19</p> <p>Ω^β, 38</p> <p>ω_φ^β, 38</p> <p>Ω_H, 25</p> <p>Ω_H^{an}, 25</p> <p>Ω_j^\pm, 37</p> <p>ω_φ, 30</p> <p>P_b^β, 53</p> <p>Φ_1, 53</p> <p>π, 33</p> <p>$\pi_0(T((\mathbb{R})))$, 42</p> <p>pr, 23</p> <p>$\overline{\mathbb{Q}}$, 19</p> <p>q, 42</p> <p>$q_{\mathbb{A}}$, 42</p> <p>\widehat{q}, 42</p> <p>r, 19, 21</p> <p>$\text{Ram}(B)$, 19</p> <p>rec_K, 45</p> <p>\mathbb{S}, 26</p> <p>S_2^H, 28</p> <p>$(S_2^\varepsilon)^H$, 28</p> <p>$\text{Sh}_H(G, X)$, 22, 27</p> <p>$\text{Sh}_H(G/Z, X)$, 22</p> <p>$\mathcal{S}_H(\mathbb{C})$, 83</p>
--	--

T , 42
 T_j , 91
 τ_j , 19
 $\tau_{1,K}$, 54
 \mathcal{T}_b° , 44
 $\tilde{\tau}_1$, 54
 t_j , 24
 t_j^* , 26
 $T(\mathbb{R})^\circ$, 42
 \mathcal{T}_b^u , 45
 T_σ , 24, 26
 t_σ , 24
 \mathcal{T}° , 43

u_C , 29

X , 26
 X_{antican} , 82
 X_{can} , 82
 X_i , 23
 ξ , 38

$Z(G)$, 22
 z_1 , 44