Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Johan Taflin

Dynamique des endomorphismes holomorphes de l'espace projectif

---

dirigée par Tien-Cuong Dinh

Soutenue le 30 juin 2011 devant le jury composé de :

M. François Berteloot	Université Toulouse III	Examinateur
M. Henry de Thélin	Université Paris XIII	Examinateur
M. Tien-Cuong Dinh	Université Paris VI	Directeur
M. Elisha Falbel	Université Paris VI	Examinateur
M. John-Erik Fornæss	Université du Michigan	Rapporteur
M. Gennadi Henkin	Université Paris VI	Examinateur
M. Ngaiming Mok	Université de Hong Kong	Président
M. Nessim Sibony	Université Paris XI	Rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu
4, place Jussieu
75 005 Paris

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Tien-Cuong Dinh qui a accepté de me guider pendant ces trois années de thèse. Il m'a introduit à un sujet riche et passionnant, au carrefour de plusieurs disciplines. Tout le long de ce chemin, il m'a consacré un temps inestimable au cours duquel j'ai été marqué par sa grande culture mathématiques, son honnêteté et sa gentillesse. Ces conseils, en général d'apparence très simple, se sont toujours révélés pertinents et profonds. Cette thèse lui doit beaucoup et je suis fier de l'avoir réalisée sous sa direction.

Je remercie également mes rapporteurs, John-Erik Fornæss et Nessim Sibony. C'est un honneur qu'ils aient accepté d'évaluer cette thèse, en grande partie basée sur leurs travaux fondateurs.

Je remercie Elisha Falbel et Gennadi Henkin d'avoir accepté d'être dans mon jury. Ce sont eux, accompagnés de Jean-Marie Trépreau et Pascal Dingoyan, qui m'ont fait découvrir l'analyse et la géométrie complexe, influençant ainsi fortement la suite de mon parcours.

Mes remerciements les plus respectueux vont au professeurs François Berteloot, Henry de Thélin et Ngaiming Mok qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury.

L'ambiance qui règne parmi les doctorants de l'IMJ, venant d'horizons mathématiques et culturels si variés, a joué un grand rôle dans cette thèse. Elle doit beaucoup à nos glorieux anciens qui ont su organiser ce groupe et j'espère que cela survivra à la séparation Jussieu-Chevaleret, particulièrement notre séminaire matinal si nourrissant (mathématiquement bien sûr). Je veux remercier mes premiers co-bureaux, Nabil, Farid et Nico, maintenant partis sous d'autres cieux, Pour leur accueil et pour m'avoir introduit dans ce monde où j'ai rencontré des gens formidables comme Pierre-Guy, Laura, Martin, Delphine, Thomas, François, Charles, Sarah, Dragos et tant d'autres. Mais entre tous, je tiens particulièrement à remercier Juliette, Paloma et Loulou, le trio infernal du 7C20 auprès duquel il est impossible de travailler mais qui m'ont apporté un grand soutien.

Un avantage de cette tradition de remerciement est qu'il me donne l'occasion de remercier ma famille, Giacomo, Rose, Erik, Michèle, Cécile et Benoît, chose que je ne fais pas souvent et pourtant Dieu sait qu'ils le méritent.

Résumé

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des systèmes dynamiques holomorphes sur l'espace projectif complexe. Dans la première partie, nous nous intéressons aux applications rationnelles de $\mathbb{P}^2$ qui laissent invariante une courbe elliptique $\mathcal{C}$. Nous montrons que sous certaines conditions $\mathcal{C}$ est un attracteur au sens de Milnor.

Dans la deuxième partie, nous concidérons un endomorphisme f de $\mathbb{P}^k$. Nous démontrons que si H est une hypersurface générique alors le courant de Green de f représente l'équidistribution asymptotique de la suite $f^{-n}(H)$ et que cette convergence est à vitesse exponentielle.

Mots-clefs

Endomorphisme holomorphe, Automorphisme régulier, Courants de Green, Vitesse d'équidistribution, Inégalité de Lojasiewicz, Attracteur, Mouvement holomorphe.

Dynamics of holomorphic endomorphisms in projective spaces

Abstract

This thesis is devoted to the study of holomorphic dynamical systems on complex projective spaces. In the first part, we consider rational self-maps of $\mathbb{P}^2$ which leave invariant an elliptic curve $\mathcal{C}$. We show that under some natural conditions $\mathcal{C}$ is an attractor in the sense of Milnor.

In the second part, we consider an endomorphism f of $\mathbb{P}^k$. We prove that if H is a generic hypersurface then the Green current of f represents the asymptotic equidistribution of the sequence $f^{-n}(H)$ and that this convergence has an exponential rate.

Keywords

Holomorphic endomorphism, Regular automorphism, Green currents, Equidistribution speed, Lojasiewicz inequality, Attractor, Holomorphic motion.

Table des matières

Introduction **9**

1 Préliminaires **13**
- 1.1 Théorie du pluripotentiel . . . 13
  - 1.1.1 Courants positifs fermés . . . 13
  - 1.1.2 Fonctions plurisousharmoniques . . . 16
- 1.2 Applications rationnelles des espaces projectifs . . . 20
  - 1.2.1 Généralités . . . 21
  - 1.2.2 Courants de Green et mesure d'équilibre . . . 23
  - 1.2.3 Automorphismes polynomiaux . . . 27

2 Invariant elliptic curves as attractors **31**
- 2.1 Attractors . . . 31
- 2.2 Invariant elliptic curves . . . 32
- 2.3 The Desboves family . . . 34
- 2.4 Holomorphic motion . . . 35
- 2.5 Nonuniform hyperbolic dynamics . . . 36
- 2.6 Basin of an attracting curve . . . 37

3 Equidistribution speed towards the Green current **41**
- 3.1 Equidistribution problem . . . 41
- 3.2 Lojasiewicz's inequality and consequences . . . 43
- 3.3 Volume estimate for endomorphisms . . . 47
- 3.4 Psh functions and exponential estimates . . . 51
- 3.5 Exceptional sets . . . 54
- 3.6 Equidistribution speed . . . 55
- 3.7 Polynomial automorphisms . . . 60

Bibliography **63**

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude des systèmes dynamiques complexes en plusieurs variables. Plus particulièrement, je m'intéresse aux propriétés globales de ceux définis par des endomorphismes de l'espace projectif complexe. L'espace projectif a l'avantage d'avoir une large famille d'endomorphismes et leur nature polynomiale permet de créer facilement des exemples qui illustrent la grande richesse des systèmes considérés.

La théorie de l'itération des fractions rationnelles en une variable commença avec la méthode de Newton pour approximer les zéros d'un polynôme. Cela amena Schrörder et d'autres à étudier la dynamique locale de ses systèmes. Il fallut attendre les travaux de Fatou et Julia pour avoir des résultats de nature globale. Ils introduisirent la dichotomie de l'espace qui porte maintenant leur nom : l'ensemble de Fatou est le lieu où la dynamique est stable alors que sur l'ensemble de Julia, elle est chaotique. Leur étude se base sur le concept de famille normale. Celui-ci fut introduit peu de temps avant par Montel, qui avait donner par la même occasion un critère puissant de normalité : la famille des fonctions holomorphes à valeur dans $\mathbb{C}$ privé de deux points est normale. Ce résultat se révélera fondamental par la suite et permit d'obtenir certaines propriétés importantes comme la densité des points périodiques répulsifs dans l'ensemble de Julia ou l'auto-similarité de cet ensemble.

Malgré des résultats importants comme ceux de Siegel ou Cremer, le domaine fut peu actif jusqu'au début des années 80. L'apparition, avec les ordinateurs, de représentations graphiques précises des ensembles que Julia et Fatou avaient commencé à dessiner à la main confirma leur grande complexité. L'étude de la famille de polynômes $z \mapsto z^2 + c$ pour $c \in \mathbb{C}$, qui est en apparence la plus simple possible, montra la richesse de ces systèmes. Cette famille et l'étude de l'ensemble de Mandelbrot qui lui est rattaché, servit de fil conducteur pour la suite. L'introduction de nouveaux outils, principalement basés sur les applications quasi-conformes, permit un développement rapide et très actif de la théorie en une variable. Aujourd'hui, elle a atteint une certaine maturité. Des résultats très fins sont connus, aussi bien sur l'aspect local que global de la dynamique.

Ces outils d'analyse complexe d'une variable s'évaporent lorsque l'on passe en plus grande dimension. L'équivalent du théorème de Montel est beaucoup plus délicat à utiliser et les fonctions holomorphes en plusieurs variables ne sont pas conformes. La théorie en plusieurs variables se base en grande partie sur la théorie du pluripotentiel, c'est à dire l'étude des courants positifs fermés et des fonctions plurisousharmoniques.

Dans le Chapitre 1, nous donnons rapidement les bases de cette théorie et nous expliquons comment elle s'applique à l'étude de la dynamique des endomorphismes de l'espace projectif $\mathbb{P}^k$. Nous rappelons notamment la construction des courants de Green T^p d'un endomorphisme holomorphe f et donc en particulier de sa mesure d'équilibre $\mu := T^k$. Cette mesure se révèle particulièrement intéressante dans l'étude de la dynamique de f car elle fait rentrer notre système dans la théorie ergodique. En effet, c'est une mesure exponentiellement mélangeante par rapport à f, qui est aussi l'unique mesure d'entropie maximale égale à $k \log d$, où d est le degré de f. De plus, tous ses exposants de Lyapunov sont strictement positifs, ce qui signifie en un certain sens que la dynamique de f est répulsive dans toutes les directions sur le support de μ. Et en effet, μ représente l'équidistribution des points périodiques répulsifs de f. Si z est un point générique, alors μ est aussi la limite au sens des distributions des préimages $f^{-n}(z)$ lorsque n tend vers l'infini.

Peu de choses sont connues sur la dynamique en dehors du support de μ. La conpréhension des différents types d'attracteurs possibles est une étape importante. Dès la dimension deux, les systèmes dynamiques holomorphes fournissent une grande variété d'attracteurs. Par exemple, il peut y avoir une infinité d'orbites attractives et il existe des attracteurs qui ne sont pas algébriques. Mais tous ces exemples sont des attracteurs au sens fort, i.e. il existe un voisinage U de l'attracteur A tel que $f(U) \Subset U$ et $\cap_{n \geq 0} f^n(U) = A$. Dans le Chapitre 2, nous démontrons l'existence d'attracteurs dans un sens plus faible, celui de Milnor, c'est à dire un ensemble qui possède un bassin d'attraction de mesure positive. Nous considérons une applications rationnelle f de $\mathbb{P}^2$, non inversible et qui laisse invariante une courbe elliptique $\mathcal{C}$. Ces applications ont été étudiées par Bonifant, Dabija et Milnor [BDM07] aussi bien d'un point de vue théorique qu'empirique. Toute application holomorphe sur une courbe elliptique est linéaire, ce qui implique dans notre cas que f est dilatante dans la direction tangente à $\mathcal{C}$. Nous montrons que si f est contractante dans la direction transverse à $\mathcal{C}$ alors cette courbe est un attracteur au sens de Milnor. La preuve se base sur deux choses. La première étape est de montrer que certaines familles de disques holomorphes ont une mesure strictement positive. Plus exactement, nous avons le lemme suivant.

Lemme 0.0.1. *Soit E un ensemble du disque unité Δ de mesure de Lebesgue strictement positive. Si $\{D_x\}_{x \in E}$ est une famille mesurable de disques holomorphes disjoints donnés par $\rho_x : \Delta \to \Delta^2$, transverses à $\{0\} \times \Delta$ et tels que $\rho_x(0) = (0, x)$ alors l'ensemble $\cup_{x \in E} D_x$ est de mesure strictement positive dans Δ^2.*

Dans la preuve, nous voyons cette famille comme le graphe d'un mouvement holomorphe et utilisons le λ-Lemma et l'absolue continuité des applications quasiconformes. D'un autre côté, le comportement dilatant et contractant de f dans certaines directions se traduit en termes d'exposants de Lyapunov. L'hypothèse sur f dans la direction transverse à $\mathcal{C}$ implique que notre système est non-uniformement hyperbolique par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathcal{C}$. Cela nous permet, grâce à la théorie d'Oseledec-Pesin, de construire à l'intérieur du bassin d'attraction de $\mathcal{C}$ une famille de disques holomorphes vérifiant les hypothèses du Lemme 0.0.1, ce qui donne le résultat. Bonifant, Dabija et Milnor donnent de nombreux exemples où l'hypothèse est vérifiée et ils montrent que $\mathcal{C}$ ne peut pas être un attracteur au sens fort. Cela donne les premiers exemples de ce type d'attracteurs dans $\mathbb{P}^2$.

Dans le Chapitre 3, nous étudions une propriété d'équidistribution du courant de Green T. Si f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ de degré algébrique $d \geq 2$, ce courant est obtenu comme limite convenablement pondérée des tirés en arrière par f^n de la métrique de Fubini-Study ω de $\mathbb{P}^k$, $T = \lim_{n\to\infty} d^{-n} f^{n*}(\omega)$. Il est totalement invariant, i.e. $f^*T = dT$, et son support est l'ensemble de Julia de f. Il est facile de voir que l'on obtient la même limite si on remplace ω par une $(1,1)$-forme positive fermée lisse de masse 1. Dans un certain sens, le courant de Green est un attracteur dans l'espace des courants. Il est intéressant de savoir si cette convergence a encore lieu si on remplace ω par un courant singulier, en particulier par un courant géométrique comme celui d'intégration $[H]$ sur une hypersurface H. Dans ce cas, la convergence

$$\frac{1}{d^n} f^{n*}[H] \to T, \tag{1}$$

peut être vue comme l'équidistribution des préimages $f^{-n}(H)$ vers l'ensemble de Julia de f. Cette convergence n'a pas toujours lieu, par exemple si H est une hypersurface totalement invariante, $f^{-1}(H) = H$. Néanmoins, Dinh et Sibony [DS08] ont montré la convergence (1) pour une hypersurface H générique au sens de Zariski. Ils ont conjecturé que ceci est vrai en toute codimension et que la convergence a lieu à vitesse exponentielle. Notre contribution dans cette partie est de donner cette vitesse de convergence pour les hypersurfaces, ce qui complète la conjecture en codimension 1.

La théorie du pluripotentiel ramène le problème à l'étude de la contraction du volume d'une boule B par les itérées f^n de f. L'obstruction principale à ce type d'estimations, qui explique le besoin de généricité, est l'ensemble des points où les itérées f^n ont une grande multiplicité. Nous utilisons une construction, due à Dinh, qui permet d'isoler ces points dans un ensemble analytique invariant E de $\mathbb{P}^k$. Grâce à cela, nous établissons des estimations précises sur la contraction du volume en dehors d'un voisinage de E. Elles reposent principalement sur une généralisation d'inégalités de type Lojasiewicz, introduites dans ce cadre par Fornæss et Sibony, où nous obtenons un contrôle explicite des exposants.

Pour pouvoir appliquer ces estimations à notre boule B, l'étape suivante est de vérifier que cette boule n'est pas trop proche de E. Sous nos hypothèses, cela va venir de plusieurs estimations exponentielles. Un résultat classique dû à Hörmander donne localement une borne uniforme à $\|e^{-u}\|_{L^1}$ pour toute fonction négative u, plurisousharmonique sur la boule unité $\mathbb{B}$ telle que $u(0) \geq -1$. Dans notre problème, nous nous intéressons à la différence de deux courants. Il est donc naturel de généraliser ce type de résultats aux cas où u est la différence de deux fonctions plurisousharmoniques v et g. Cela n'est pas possible en général à cause de l'irrégularité de ces fonctions. Mais dans notre cas, la fonction g est un potentiel du courant de Green T et est donc Hölder continue. Cela va nous permettre, quitte à réduire le domaine d'intégration, d'obtenir des estimations exponentielles uniformes pour des familles non compactes. Pour certaines raisons, cela va nous pousser à faire une récurrence sur une famille de sous-ensembles analytiques de $\mathbb{P}^k$ définis de manière analogue à E et qui peuvent être singuliers. Nous devons donc développer nous outils sur des ensembles analytiques singuliers ce qui est la source d'importantes difficultés. De nouveau, ce sont des inégalités de type Lojasiewicz qui permettent de surmonter ces difficultés. En particulier, nous obtenons des estimations intégrales par rapport à une désingularisation et d'autres sur la régularité Hölder des fonctions faiblement holomorphes.

Chapitre 1

Préliminaires

Une étape importante dans l'étude des systèmes dynamiques complexes à plusieurs variables fut l'introduction des courants positifs fermés. A l'ensemble de Julia, dont la géométrie est compliquée en général, est associé son courant de Green qui est plus souple et auquel nous pouvons appliquer la théorie du pluripotentiel. Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord les bases de cette théorie. Puis, dans une deuxième partie, nous expliquons comment elle s'applique à l'étude de la dynamique des endomorphismes de l'espace projectif complexe.

1.1 Théorie du pluripotentiel

La théorie du pluripotentiel concerne les courants positifs et les fonctions plurisousharmoniques. Elle a de nombreuses applications en géométrie complexe et en dynamique. Nous renvoyons à [Dem09] pour un exposé détaillé. Le contenu de cette section est classique mais nous le rappelons car il est central pour notre approche dans le Chapitre 3.

1.1.1 Courants positifs fermés

Soit M une variété complexe de dimension k. Une forme différentielle de bidegré (p, q) sur M est une section ϕ de $\bigwedge^{p,q} T^*M$. En coordonnées locales, elle peut s'écrire

$$\phi(x) = \sum_{|I|=p,|J|=q} \phi_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

où les $\phi_{I,J}$ sont des fonctions complexes $\mathscr{C}^\infty$, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}$ si $I = (i_1, \ldots, i_p)$ et $d\overline{z}_J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{j_q}$ si $J = (j_1, \ldots, j_q)$. On note $\mathscr{D}^{p,q}(M)$ l'ensemble des formes différentielles de bidegré (p, q) à support compact. En fixant un atlas localement fini $(U_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ et une partition de l'unité associée $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$, on définit une famille de normes sur $\mathscr{D}^{p,q}(M)$ pour $l \in \mathbb{N}$ par

$$\|\phi\|_{\mathscr{C}^l} := \sum_{\alpha \in A} \|(\tau_\alpha)_*(\psi_\alpha \phi)\|_{\mathscr{C}^l(U_\alpha)}.$$

L'ensemble $\mathscr{D}'_{p,q}(M)$ des courants de bidimension (p, q) est défini comme l'ensemble des formes linéaires S sur $\mathscr{D}^{p,q}(M)$ telles que pour tout compact K de M il existe des constantes $l \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ telles que

$$|\langle S, \phi \rangle| \leq c \|\phi\|_{\mathscr{C}^l},$$

si $\mathrm{supp}(\phi) \subset K$. Un courant de bidegré (p, q), ou (p, q)-courant, est un courant de bidimension $(k - p, k - q)$ et on pose $\mathscr{D}'^{p,q}(M) := \mathscr{D}'_{p,q}(M)$. Un (p, q)-courant S peut être vu comme une forme à coefficients distributions :

$$S = \sum_{|I|=p,|J|=q} S_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Exemple 1.1.1. – En utilisant le produit extérieur, une forme de bidegré (p, q) peut être vu comme un (p, q)-courant. Plus précisément, à $\phi \in \mathscr{D}^{p,q}(M)$, on associe le courant défini par

$$\psi \mapsto \int_M \phi \wedge \psi, \quad \forall \psi \in \mathscr{D}^{k-p,k-q}(M).$$

– Si N est une sous variété complexe de M de dimension p, alors on définit le courant d'intégration $[N]$ par

$$\phi \mapsto \int_N \phi, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}^{p,p}(M).$$

Dans le cas où $M = \mathbb{C}^k$ et $N = \{z_1 = \cdots = z_{k-p} = 0\}$ alors on peut écrire

$$[N] = (i^p/2)^p \delta_0(z_1, \ldots, z_{k-p}) \otimes 1(z_I) dz_I \wedge d\overline{z}_I,$$

où $I = (k - p + 1, \ldots, k)$, et δ_0 est la masse de Dirac en zéro sur $\{z_I = 0\}$.

Ces exemples montrent que les courants généralisent aussi bien les formes différentielles que les sous variétés et nous donne un langage unifié pour traiter ces objets.

L'opérateur de dérivée extérieure se décompose sur M en $d = \partial + \overline{\partial}$ où en coordonnées locales

$$\partial\phi := \sum_{I,J} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \phi_{I,J}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J, \quad \overline{\partial}\phi := \sum_{I,J} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \phi_{I,J}}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

On définit l'opérateur d^c par $d^c := (1/2i\pi)(\partial - \overline{\partial})$. C'est un opérateur réel i.e. $\overline{d^c u} = d^c \overline{u}$ et on a que $dd^c = (i/\pi)\partial\overline{\partial}$. Cette normalisation permet de simplifier plusieurs formules par la suite.

Ces opérateurs s'étendent par dualité aux courants. Si S est un (p, q)-courant alors nous définissons le $(p + 1, q)$-courant ∂S et le $(p, q + 1)$-courant $\overline{\partial} S$ par

$$\langle \partial S, \phi \rangle := (-1)^{p+q+1} \langle S, \partial\phi \rangle, \quad \langle \overline{\partial} S, \phi \rangle := (-1)^{p+q+1} \langle S, \overline{\partial}\phi \rangle.$$

En particulier, on a que $\langle dd^c S, \phi \rangle = \langle S, dd^c \phi \rangle$. Le théorème de Stokes nous assure que si ϕ est une forme différentielle, alors ses différentielles en tant que forme ou de courant coïncident. Ce même théorème implique que si N est une sous variété complexe à bord, alors $d[N] = -[\partial N]$, où ∂N désigne le bord de N. Enfin, un courant S est dit *fermé* si $dS = 0$.

En 1957, Lelong a introduit une notion de positivité sur les courants de bidimension (p, p), voir par exemple [Lel68]. Un courant S de bidimension (p, p) est *faiblement positif* si $\langle S, \phi \rangle \geq 0$ pour toutes les formes ϕ de la forme

$$\phi = i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge i\alpha_p \wedge \overline{\alpha}_p, \quad \alpha_j \in \mathscr{D}^{1,0}(M).$$

Puisqu'une forme peut être vue comme un courant, cela nous donne une notion de formes faiblement positives. Un courant S sera dit *positif* si $\langle S, \phi \rangle \geq 0$ pour toute forme ϕ

faiblement positive. Ces deux notions de positivité coïncident en bidegré $(0,0)$, $(1,1)$, $(k-1,k-1)$ et (k,k). Elles généralisent la notion de positivité pour les distributions, qui correspond aux mesures positives. Comme pour les distributions, si un courant S est positif alors il est d'ordre 0, i.e. il se prolonge aux formes différentielles continues ou encore, si on écrit

$$S = \sum S_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J,$$

alors les coefficients $S_{I,J}$ sont des mesures complexes.

Exemple 1.1.2.
- Une $(1,1)$-forme ω est positive si et seulement si en coordonnées locales

$$\omega = i \sum_{i,j=1}^{k} \omega_{i,j} dz_i \wedge d\overline{z}_j,$$

où en tout point, la matrice $(\omega_{i,j})$ est hermitienne semi-définie positive.
- Un (k,k)-courant est positif si et seulement si la mesure associée est positive.
- Le courant d'intégration $[N]$ sur une sous variété complexe N est positif.

Supposons maintenant que ω soit une forme différentielle strictement positive sur M i.e. localement

$$\omega = i \sum_{i,j=1}^{k} \omega_{i,j} dz_i \wedge d\overline{z}_j,$$

avec $(\omega_{i,j})$ définie positive en tout point. La *mesure trace* d'un (p,p)-courant positif S est définie par $\tau_S = S \wedge \omega^{k-p}$. C'est une mesure positive et pour un borélien B on appelle la *masse* de S en B, notée $\|S\|_B$, la masse de sa mesure trace en B. Cette notion de masse est très importante dans les problèmes de prolongement des courants positifs, voir [Sib85].

Un des premiers résultats de prolongement est le théorème suivant, dû à Lelong. Il donne une classe importante de courants positifs fermés qui joue un grand rôle dans le Chapitre 3.

Théorème 1.1.3. *Soit X un ensemble analytique de dimension pure p dans M. Si X_{Reg} désigne la partie régulière de X alors le courant $[X]$ de bidimension (p,p) définie par*

$$\langle [X], \phi \rangle = \int_{X_{Reg}} \phi, \quad \phi \in \mathscr{D}^{p,p}(M),$$

est bien défini, positif et fermé.

Pour montrer que le courant est bien défini, une des étapes est de borner la masse de $[X]$ au voisinage des singularités de X. Cela vient du résultat local suivant, toujours dû à Lelong, qui nous sera utile en lui même dans le Chapitre 3

Lemme 1.1.4. *Soit X un ensemble analytique de dimension pure p dans un voisinage de la boule unité $\mathbb{B}$ de $\mathbb{C}^k$. Il existe une constante $c \geq 1$ telle que si $z \in X$ alors*

$$c^{-1} r^{2p} \leq \|[X]\|_{B(z,r)} \leq c r^{2p},$$

pour tout r tel que $B(z,r) \subset \mathbb{B}$.

Ce résultat vient de deux choses. Premièrement, le théorème de Wirtinger nous dit que la masse du courant est proportionnelle au volume $2p$ dimensionnel de l'ensemble analytique associé. Deuxièmement, le fait que X soit un revêtement ramifié au dessus d'un plan P de dimension p relie le volume d'une boule de X à celui d'une boule de P multiplié par la multiplicité de X. Lelong a généralisé ce lien entre masse et multiplicité d'un ensemble analytique à tous les courants positifs fermés. Soit S un (p,p)-courant positif fermé de la boule unité $\mathbb{B}$. Pour $a \in \mathbb{B}$, on définit

$$\nu(S,a,r) := \frac{\|S \wedge (dd^c\|z\|^2)^{k-p}\|_{B(a,r)}}{\pi^{k-p}r^{2(k-p)}}.$$

Le *nombre de Lelong* de S en a est alors défini par

$$\nu(S,a) := \lim_{r\to 0} \nu(S,a,r).$$

La limite existe toujours et est invariante par changement de coordonnées holomorphes. Cela permet de définir les nombres de Lelong pour les courants sur une variété. Un théorème dû à Thie [Thi69] dit que le nombre de Lelong en a d'un courant d'intégration sur un ensemble analytique X est précisément la multiplicité de X en a. Le nombre de Lelong donne une indication sur l'importance de la singularité d'un courant en un point. Le théorème suivant de semi-continuité de Siu [Siu74] permet de contrôler le lieu de ces singularités.

Théorème 1.1.5. *Si S est un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur M, alors pour tout $c > 0$ l'ensemble $E_c(S) := \{a \in M \,|\, \nu(S,a) \geq c\}$ est un ensemble analytique de dimension inférieure ou égale à p.*

Corollaire 1.1.6. *Si S est un courant positif fermé de bidimension (p,p), il existe des familles au plus dénombrable d'ensembles analytiques $\{X_i\}$ de dimension p et de réels positifs $\{\lambda_i\}$ telles que $S' := S - \sum \lambda_i[X_i]$ est un courant positif fermé dont l'ensemble $\{a \in M \,|\, \nu(S',a) > 0\}$ est une union au plus dénombrable d'ensembles analytiques de dimension inférieure ou égale à $p-1$.*

Les courants sont souvent utilisés pour étudier les ensembles analytiques et le théorème de Siu permet aussi en quelque sorte de retrouver des ensembles analytiques à partir de courants.

1.1.2 Fonctions plurisousharmoniques

Les fonctions plurisousharmoniques, ou psh en abrégé, ont été introduites indépendamment par Lelong et Oka en 1942. Elles ont joué un grand rôle depuis dans de nombreux domaines de l'analyse complexe.

Définition 1.1.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^k$. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite *plurisousharmonique* si elle est semi-continue supérieurement, non identiquement égale à $-\infty$ sur une composante connexe de Ω et vérifie

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + we^{i\theta})d\theta,$$

pour tout $a \in \Omega$ et $w \in \mathbb{C}^k$ tels que $\|w\| < \operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$.

Si $k = 1$, nous dirons que u est sousharmonique. Une fonction u telle que u et $-u$ sont psh est dite *pluriharmonique*. Une fonction pluriharmonique est analytique réelle et est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. L'avantage de la classe des fonctions psh est d'être assez souple et invariante par plusieurs opérations. Si u est une fonction psh sur Ω et que $f : \Omega' \to \Omega$ est une application holomorphe alors $u \circ f$ est psh sur Ω' ou égale à $-\infty$ sur une des composante de Ω'.

Par ailleurs, la propriété d'être psh est locale, ce qui permet d'étendre la notion sur une variété complexe M de dimension k. L'ensemble $PSH(M)$ des fonctions psh sur M est un cône convexe, i.e. est stable par combinaison linéaire à coefficients positifs. Plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 1.1.8. *Soit* $\chi : (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *une fonction convexe non identiquement* $-\infty$ *et qui est croissante en chaque variable. Alors pour toute fonction* $u_1, \ldots, u_n$ *dans* $PSH(M)$, *la fonction* $\chi(u_1, \ldots, u_n)$ *appartient aussi à* $PSH(M)$.

Exemple 1.1.9.
- Si $a \in \mathbb{C}$ alors la fonction $\log |z - a|$ est sousharmonique sur $\mathbb{C}$.
- Soit (a_n) une suite de points dense dans le disque unité Δ de $\mathbb{C}$ avec $a_n \neq 0$. Si λ_n est une suite de réels positifs telle que $\sum \lambda_n \log |a_n/2| > -\infty$ alors la fonction $u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \log |z - a_n|$ est sousharmonique sur Δ. L'ensemble $\{u = -\infty\}$ est un ensemble G_δ dense de Δ. En particulier, il est non-dénombrable et il contient d'autres points que les a_n.
- Si les f_i sont des fonctions holomorphes sur M et les α_i des réels positifs alors la fonction $\log(|f_1|^{\alpha_1} + \cdots + |f_l|^{\alpha_l})$ est psh sur M.

Sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}^k$, on peut utiliser la convolution pour montrer le résultat de régularisation suivant.

Proposition 1.1.10. *Soient* u *une fonction psh sur* Ω *et* $\Omega' \Subset \Omega$ *un ouvert. Il existe une suite* (u_n) *de fonctions psh* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* Ω' *qui décroit ponctuellement vers* u.

On peut montrer que $PSH(M)$ est un sous-ensemble fermé de $L^1_{loc}(M)$ dont les ensembles bornés sont relativement compacts. Plus précisément, on a la propriété de compacité suivante.

Proposition 1.1.11. *Si* (u_n) *est une suite dans* $PSH(M)$ *localement majorée, alors soit la suite converge localement uniformément vers* $-\infty$, *soit il existe une sous-suite* (u_{n_i}) *qui converge dans* L^p_{loc} *vers une fonction psh pour tout* $1 \leq p < +\infty$.

On choisit sur $PSH(M)$ la topologie induite par $L^1_{loc}(M)$. Quand la convergence a lieu, nous avons le résultat plus précis suivant dû à Hartogs.

Proposition 1.1.12. *Soit* (u_n) *une suite de fonctions psh qui converge dans* $L^1_{loc}(M)$ *vers une fonction psh* u. *Alors, on a*

$$u(x) \geq \limsup u_n(x),$$

avec égalité pour x *en dehors d'un ensemble pluripolaire. De plus si* v *est une fonction continue sur un compact* K *de* M *telle que* $u < v$ *sur* K *alors* $u_n < v$ *sur* K *pour* n *assez grand.*

Ces propriétés de compacité sont très importantes en dynamique complexe à plusieurs variables. Elles jouent un rôle similaire au théorème de Montel dans la théorie d'une variable, voir [Sib99].

Un ensemble est dit pluripolaire si localement il existe une fonction psh u telle qu'il soit contenu dans $\{u = -\infty\}$. Les ensembles pluripolaires sont dans un certain sens les ensembles négligeables dans cette théorie, comme le sont les ensembles analytiques pour les fonctions holomorphes. Ils sont de dimension de Hausdorff au plus $2k - 2$, ce qui implique en particulier que leur mesure de Lebesgue est nulle. Néanmoins, une union dénombrable d'ensembles pluripolaires est pluripolaire ce qui entraine entre autre qu'il existe des ensembles pluripolaires denses dans M. Comme pour les fonctions holomorphes, nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.1.13. *Soit E un ensemble pluripolaire de M et u une fonction psh sur $M \setminus E$, localement majorée au voisinage de E. Alors u s'étend en une fonction psh sur M définie sur E par*

$$u(x) := \limsup_{\substack{z \to x \\ z \notin E}} u(z).$$

Les fonctions psh sont un outil très puissant pour manipuler les courants de bidegré $(1,1)$ car elles en sont les potentiels. Si u est une fonction psh de classe $\mathscr{C}^2$ alors localement $dd^c u$ s'écrit

$$dd^c u = \frac{i}{\pi} \sum_{1 \leq i,j \leq k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} dz_i \wedge d\overline{z}_j$$

et définit un courant positif fermé. Plus généralement, si on regarde une fonction $L^1_{loc}(M)$ comme un $(0,0)$-courant, on a le résultat suivant.

Proposition 1.1.14. *Une fonction $u : M \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est psh si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

- *u est fortement semi-continue supérieurement i.e. pour tout ensemble A de mesure de Lebesgue pleine dans M, alors*

$$u(x) = \limsup_{\substack{z \to x \\ z \in A}} u(z),$$

  pour tout x dans M.
- *u est localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et le $(1,1)$-courant $dd^c u$ est positif fermé.*

Réciproquement, tout courant S de bidegré $(1,1)$ positif fermé peut s'écrire localement comme le dd^c d'une certaine fonction psh. On appelle cette fonction le potentiel local de S. Le grand avantage de ces potentiels est d'être définit ponctuellement, bien que pouvant valoir $-\infty$. De plus, la différence de deux potentiels locaux est une fonction pluriharmonique, ce qui laisse peu de liberté. Cette correspondance locale entre courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ et fonction psh, modulo les fonctions pluriharmoniques, est fondamentale et explique en grande partie pourquoi les $(1,1)$-courants sont plus faciles à manipuler que les courants de plus grand bidegré. Une illustration de cette correspondance est l'équation de Lelong-Poincaré.

Théorème 1.1.15. *Soit f une fonction holomorphe sur M non identiquement nulle. Alors la fonction $\log|f|$ est psh et vérifie l'équation*

$$dd^c \log|f| = \sum m_j [Z_j],$$

où les Z_j sont les composantes irréductibles de l'hypersurface $\{f = 0\}$ et les m_j leur multiplicités.

Le théorème suivant donne une estimation exponentielle uniforme pour une certaine famille compacte de fonctions psh [Hör90].

Théorème 1.1.16. *Soit $\mathbb{B}$ la boule unité de $\mathbb{C}^k$. Il existe une constante $c > 0$ telle que si u est une fonction psh sur $\mathbb{B}$ vérifiant $u(0) \geq -1$ et $u(z) \leq 0$ pour tout $z \in \mathbb{B}$ alors on a*

$$\int_{\mathbb{B}_{1/2}} \exp(-u)\lambda \leq c,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{B}$.

On en déduit un résultat similaire pour chaque famille compacte.

Corollaire 1.1.17. *Soit $\mathcal{U}$ une famille compacte dans $PSH(M)$. Pour tout compact K de M, il existe des constantes $a > 0$ et $c > 0$ telles que*

$$\int_K \exp(-au)\omega^k \leq c,$$

pour tout $u \in \mathcal{U}$.

Ce type de résultat donne, pour u dans une famille fixée, des estimations précises et uniformes sur certaines propriétés de u. En particulier, on en déduit des estimations sur les ensembles de sous-niveaux $\{u < -t\}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Bien que la fonction u peut être non bornée, ces sous-niveaux ont un volume qui décroit exponentiellement vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Dans le Chapitre 3, nous en donnerons plusieurs généralisations pour des familles non compactes.

Dinh et Sibony [DS03] ont étendu la notion à d'autres mesures que les mesures lisses. Une mesure ν sur M est dite localement modérée si pour tout compact K de M et toute famille compacte $\mathcal{U}$ de fonctions psh dans un voisinage de K, il existe des constantes $a > 0$ et $c > 0$ telles que

$$\int_K \exp(-au)\nu \leq c,$$

si $u \in \mathcal{U}$. Il est montré dans [DNS10] que la mesure d'équilibre μ d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k$ est localement modérée.

Il peut être utile d'avoir, pour une famille donnée, une estimation sur la constante $a > 0$ du Corollaire 1.1.17. Elle est fortement reliée aux nombres de Lelong. Le nombre de Lelong $\nu(u, x)$ d'une fonction psh u en x est défini comme étant celui de $dd^c u$ en x. Il nous donne une information sur l'importance de la singularité de u en x. Si le nombre de Lelong de u est strictement positif en x alors $u(x) = -\infty$ et plus précisément $\nu(u, x)$ est le plus grand nombre $\nu \geq 0$ tel que

$$u(z) \leq \nu \log|z - x| + O(1),$$

ou encore

$$\nu(u, x) = \lim_{r \to 0} \frac{\max_{|x-z|=r} u(z)}{\log r},$$

voir [Dem09] pour plus de détails. On en déduit que si $\exp(-u)$ est intégrable dans un voisinage de x alors $\nu(u, x) < 2n$. En utilisant les estimations exponentielles, cela nous donne des bornes sur les nombres de Lelong. Par exemple, si une fonction u est psh sur $\mathbb{B}$ avec $u \leq 0$ sur $\mathbb{B}$ et $u(0) \geq -1$ alors $\nu(u, x) < 2n$ pour tout $x \in \mathbb{B}_{1/2}$. D'un autre côté, dans [Sko72], Skoda a montré que si $\nu(u, x) < 2$ alors $\exp(-u)$ est localement intégrable en x. Cela permet d'exprimer la constante a du Corollaire 1.1.17 en fonction des nombres de Lelong de la famille $\mathcal{U}$, voir aussi [Zer01].

Puisqu'une fonction psh est semi-continue supérieurement, elle a un maximum sur tout compact. D'après le principe du maximum suivant, ce maximum est forcement atteint sur le bord du compact.

Proposition 1.1.18. *Si une fonction psh u sur M admet un maximum local en z alors u est constante sur un voisinage de z.*

Une des conséquences du principe du maximum est que toutes les fonctions psh sur une variété compacte sont constantes. Or, dans la suite, nous nous placerons toujours sur l'espace projectif $\mathbb{P}^k$ qui est compact. Il existe deux manières de contourner le problème. La première est de relever grâce à la projection canonique nos courants à $\mathbb{C}^{k+1}$ où nous pouvons trouver des potentiels avec de bonnes propriétés. L'autre est de considérer une classe plus large de fonctions appelées quasi-plurisousharmoniques ou quasi-psh. Cette approche est valable pour d'autres cas mais nous l'expliquons dans le cadre que nous utiliserons plus tard, c'est à dire $\mathbb{P}^k$.

Une fonction $u : \mathbb{P}^k \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite *quasi-psh* si localement elle est la différence d'une fonction psh et d'une fonction lisse. Si ω désigne la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^k$ normalisée par $\int_{\mathbb{P}^k} \omega^k = 1$, alors pour toute fonction quasi-psh u il existe une constante $c \geq 0$ telle que $dd^c u + c\omega$ est positif sur $\mathbb{P}^k$. Cela permet d'exprimer $dd^c u$ comme la différence d'un courant positif $dd^c u + c\omega$ avec une forme lisse positive $c\omega$. Dans le Chapitre 3, nous utiliserons la notion de fonctions psh modulo T i.e. les fonctions u telles que $dd^c u + T \geq 0$ où T est à potentiel continu. Cette notion est légèrement plus générale que celle de fonctions quasi-psh mais les résultats sont les mêmes.

Plusieurs résultats que nous avons énoncés pour les fonctions psh se généralisent sans difficulté aux fonctions quasi-psh. Nous utiliserons souvent les deux propriétés de compacité suivantes.

Proposition 1.1.19. *L'ensemble des fonctions u quasi-psh sur $\mathbb{P}^k$ qui vérifient $dd^c u + \omega \geq 0$ et $\max_{\mathbb{P}^k} u = 0$ est compact dans $L^p(\mathbb{P}^k)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Proposition 1.1.20. *Soit $\mathcal{U}$ une famille compacte de fonctions quasi-psh. Il existe des constantes $a > 0$ et $c > 0$ telles que*

$$\int_{\mathbb{P}^k} \exp(-au)\omega^k \leq c,$$

pour toute fonction $u \in \mathcal{U}$.

Sur $\mathbb{P}^k$, le groupe d'automorphisme est assez grand pour régulariser par convolution en gardant la positivité.

Proposition 1.1.21. *Soit u une fonction quasi-psh sur $\mathbb{P}^k$ telle que $dd^c u \geq -\omega$. Il existe une suite décroissante (u_n) de fonctions quasi-psh lisses qui converge vers u et telle que $dd^c u_n \geq -\omega$. En particulier, si S est un $(1,1)$-courant positif fermé alors il existe une suite (S_n) de courants positifs fermé de bidegré $(1,1)$ qui converge vers S.*

1.2 Applications rationnelles des espaces projectifs

Dans les Chapitres 2 et 3 nous étudions des systèmes dynamiques sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$. Il y a plusieurs avantages à travailler sur cette variété. L'ensemble des applications méromorphes de $\mathbb{P}^k$ dans $\mathbb{P}^k$ est grand et coïncide avec l'ensemble des applications rationnelles. Ces applications s'écrivent sous forme de polynômes, ce qui permet de crée plus facilement des exemples. De plus, les propriétés géométriques de $\mathbb{P}^k$ simplifies plusieurs problèmes. Par exemple, on peut facilement régulariser les courants positifs fermés car c'est une variété homogène. Le fait que ses groupes de cohomologie soient simples aide dans l'étude de certaines opérations sur les courants. Mais malgré tout, les systèmes dynamiques obtenus sont d'une grande richesse et leur étude est loin d'être aussi aboutie qu'en dimension 1. Nous renvoyons à [DS10a], [Sib99] et à leurs références pour des exposés plus détaillés.

Plusieurs des propriétés énoncées peuvent s'obtenir pour certaines classes d'applications méromorphes de variétés kählériennes, voir entre autre [dT08], [DF01], [DS04], [DS10c] et [Gue05b].

1.2.1 Généralités

Soit f un endomorphisme méromorphe de $\mathbb{P}^k$. Une telle application est rationnelle i.e. elle se relève en une application polynomiale $F : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{k+1}$ avec $f \circ \pi = \pi \circ F$, où $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^k$ est la projection canonique. On peut choisir $F(z) = (F_0(z), \dots, F_k(z))$ telle que les F_i soient des polynômes homogènes de même degré $d \geq 1$ sans facteur commun. L'entier d s'appelle le *degré algébrique de f*. L'*ensemble critique* $\mathscr{C}(f)$ de f est l'ensemble des points où f n'est pas localement injective. Nous dirons que f est dominante si son image contient un ouvert de $\mathbb{P}^k$, ou de manière équivalente si $\mathscr{C}(f) \neq \mathbb{P}^k$. Dans la suite nous supposerons toujours que f est dominante et que son degré algébrique est supérieur ou égale à 2. L'application f est bien définie en dehors d'un ensemble analytique $I(f)$ appelé l'*ensemble d'indétermination de f*. Il correspond à la projection par π de l'ensemble $F^{-1}(0)$. Puisque les composantes de F n'ont pas de facteur commun, $I(f)$ est de codimension au moins 2 dans $\mathbb{P}^k$. Si $I(f) = \varnothing$ alors f est un endomorphisme holomorphe. On note $\mathscr{M}_d$ l'ensemble des applications rationnelles dominantes de degré d de $\mathbb{P}^k$, et $\mathscr{H}_d$ le sous-ensemble des endomorphismes holomorphes. Ces ensembles peuvent être vu comme des ouverts de Zariski denses de $\mathbb{P}^N$ avec $N = (k+1)\frac{(d+k)!}{d!k!} - 1$. La taille de ces ensembles contraste avec le cas des variétés projectives génériques où ils sont finis.

Si $n \geq 1$, on note $f^n = f \circ \dots \circ f$ la énième itérée de f. Décrire le système dynamique définit par f revient à étudier, quand elles sont bien définies, le comportement asymptotique des orbites $(f^n(z))_{n \geq 1}$ pour z dans $\mathbb{P}^k$ et leur stabilité quand z varie.

Exemple 1.2.1. Soit $f[z_0 : \dots : z_k] = [z_0^d : \dots : z_k^d]$. Cette application est holomorphe et $f^n[z_0 : \dots : z_k] = [z_0^{d^n} : \dots : z_k^{d^n}]$. Les points $p_i := [0 : \dots : 0 : 1 : 0 : \dots : 0]$, $0 \leq i \leq k$ sont superattractifs et totalement invariants i.e. $f^{-1}(p_i) = p_i$. Leur basin d'attraction $\mathscr{F}_i$ est donné par

$$\mathscr{F}_i := \{z \in \mathbb{P}^k \,|\, |z_j| < |z_i| \quad \forall j \neq i\}.$$

Chaque $\mathscr{F}_i$ est un polydisque dont la frontière est l'union pour $j \neq i$ des

$$\mathscr{J}_{i,j} := \{z \in \mathbb{P}^k \,|\, |z_j| = |z_i|,\, |z_l| \leq |z_i| \quad 0 \leq l \leq k\}.$$

La dynamique sur $\mathscr{J}_{i,j}$ est chaotique. Au voisinage de chaque point, certaines orbites convergent vers p_i et d'autres vers p_j. L'ensemble critique de f est l'union de $k+1$ hyperplans définis par

$$H_i := \{z \in \mathbb{P}^k \,|\, z_i = 0\}.$$

Ils sont totalement invariants et la restriction de f à chacun des H_i est l'équivalent de f sur $\mathbb{P}^{k-1}$.

Cet exemple simple illustre plusieurs phénomènes qui restent vrais pour une application $f \in \mathscr{H}_d$ générale. Il existe un ouvert maximal, dit ensemble de Fatou, où le comportement des orbites est stable, ici l'union des $\mathscr{F}_i$. Sur son complémentaire, l'ensemble de Julia, la dynamique est chaotique et les orbites peuvent diverger à vitesse exponentielle, voir Section

1.2.2 pour des définitions précises. Nous allons voir plus tard que les ensembles analytiques totalement invariants représentent l'obstruction dans les problèmes d'équidistribution, cf. Chapitre 3.

Les orbites les plus simples sont les orbites finies. Elles contiennent des points périodiques qui jouent un rôle important aussi bien dans l'étude locale que globale de notre système. Si $f \in \mathscr{H}_d$, nous pouvons utiliser le théorème de Bézout pour les compter explicitement [FS94a].

Théorème 1.2.2. *Soit $f \in \mathscr{H}_d$. Le nombre de points périodiques d'ordre n de f, comptés avec multiplicité, est égal à $\frac{d^{n(k+1)}-1}{d^n-1}$.*

D'un autre côté, il y a des éléments dans $\mathscr{M}_d$ avec une infinité de points fixes et d'autres sans aucun point périodique. Par exemple, l'extension à $\mathbb{P}^2$ de $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^d, z_2)$ admet $\{z_1 = 0\}$ comme droite de points fixes.

Exemple 1.2.3. Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ définie par $f(z_1, z_2) = (z_1 + 1, P(z_1, z_2))$, où P est un polynôme homogène de degré $d \geq 2$ tel que $P(0, 1) = 0$. Cette application n'a clairement pas de point fixe dans $\mathbb{C}^2$. Son extension à $\mathbb{P}^2$ est définie par

$$f[z_0 : z_1 : z_2] = [z_0^d : z_0^{d-1} z_1 + z_0^d : P(z_1, z_2)].$$

La droite à l'infini $\{z_0 = 0\}$ est envoyée sur $[0 : 0 : 1]$ qui est un point d'indétermination car $P(0, 1) = 0$. L'application f n'a donc pas de point périodique dans $\mathbb{P}^2 = \mathbb{C}^2 \cup \{z_0 = 0\}$.

Néanmoins, sur $\mathbb{P}^2$, si f est birationnelle et algébriquement stable (voir ci-dessous) alors elle a un nombre infini de points périodiques. Plus précisément, Favre [Fav98] a montré que si pour tout $n \geq 1$ il y a un nombre fini p_n de points périodiques d'ordre n alors $p_n \sim d^n$.

Soit Γ la fermeture dans $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^k$ du graphe de f restreinte à $\mathbb{P}^k \setminus I(f)$. On note π_1 et π_2 les deux projections canoniques de $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^k$ sur $\mathbb{P}^k$. Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{P}^k$ alors on définit

$$f(A) := \pi_2(\pi_1^{-1}(A) \cap \Gamma) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A) := \pi_1(\pi_2^{-1}(A) \cap \Gamma).$$

Un point z est dans $I(f)$ si et seulement si $\dim f(z) \geq 1$. De manière analogue, on définit le *second ensemble d'indétermination* $I'(f)$ par l'ensemble des points $z \in \mathbb{P}^k$ tels que $\dim f^{-1}(z) \geq 1$. L'existence de ces ensembles d'indéterminations pose d'importants problèmes. Certaines orbites ne sont pas définies et l'étude de celles qui se rapprochent trop rapidement de $I(f)$ pose problème. La définition d'opérations sur les courants comme le poussé en avant ou le tiré en arrière devient aussi plus délicate, cf. [DS09]. Quand $f \in \mathscr{M}_d$ alors les itérées f^n sont aussi dominantes. Si f est holomorphe alors le degré algébrique de f^n est d^n. Mais, pour f rationnelle, ce n'est pas le cas en général.

Exemple 1.2.4. L'involution définie par

$$f[z_0 : \cdots : z_k] = [\frac{1}{z_0} : \cdots : \frac{1}{z_k}] = [\prod_{i \neq 1} z_i : \cdots : \prod_{i \neq k} z_i],$$

est de degré $k - 1$ mais le degré de $f^2 = id$ est 1.

Cette perte de degré vient du fait que les composantes de F^2 peuvent avoir des facteurs communs. On peut aussi l'interpréter de manière géométrique [FS94b].

Proposition 1.2.5. *Soient $f \in \mathscr{M}_d$ et $g \in \mathscr{M}_{d'}$. Alors le degré de $f \circ g$ est égal à dd' si et seulement si il n'existe pas d'hypersurface V telle que $g(V \setminus I(g)) \subset I(f)$.*

De manière équivalente encore, f^* agit sur $H^{1,1}(\mathbb{P}^k, \mathbb{C})$ par multiplication pas d. Le degré de f^n est égal à d^n si et seulement si $(f^*)^n = (f^n)^*$ sur $H^{1,1}(\mathbb{P}^k, \mathbb{C})$. Plus généralement, f^* agit sur $H^{p,p}(\mathbb{P}^k, \mathbb{C})$ par multiplication par un certain $\lambda_p(f)$. Cela amène à la définition suivante, [FS94b].

Définition 1.2.6. Soit $1 \leq p \leq k$. Une application $f \in \mathscr{M}_d$ est dite algébriquement p-stable si $(f^*)^n = (f^n)^*$ sur $H^{p,p}(\mathbb{P}^k, \mathbb{C})$ pour tout $n \geq 0$. Quand $p = 1$, nous dirons que f est algébriquement stable.

Quand ce n'est pas le cas, l'étude de ces différents degrés est délicate, voir par exemple [DF01], [BFJ08]. On peut considérer leur comportement asymptotique. Pour tout $f \in \mathscr{M}_d$, on définit

$$\lambda_p(f) := \int_{\mathbb{P}^k} f^*(\omega^p) \wedge \omega^{k-p}.$$

Le *degré dynamique d'ordre* p de f est la limite

$$d_p(f) := \lim_{n \to \infty} (\lambda_p(f^n))^{1/n}.$$

Cette limite est bien définie car $\lambda_p(f^{n+m}) \leq \lambda_p(f^n)\lambda_p(f^m)$, voir [RS97]. Dans [DS04], Dinh et Sibony ont montré l'existence de la limite dans le cas kählérien et que ces degrés sont des invariants biméromorphes. Le dernier degré $d_k(f)$ est le degré topologique de f i.e. le nombre de points dans une fibre générique de f. Un élément $f \in \mathscr{M}_d$ est holomorphe si et seulement si $d_k(f) = d^k$. Et par définition, f est algébriquement p-stable si et seulement si $d_p = \lambda_p$. On déduit d'une inégalité due à Khovanskii, Teissier et Gromov [Gro90] qu'il existe deux entiers, s et s' tels que $0 \leq s \leq s' \leq k$ et

$$1 = d_0(f) < \cdots < d_s(f) = \cdots = d_{s'}(f) > \cdots > d_k(f). \tag{1.1}$$

Un moyen puissant pour avoir des informations sur la dynamique de f est de construire des objets ergodiques associés à f, comme des mesures ou des courants. De nombreux résultats ont été établis dans ce sens. En général, ces objets sont obtenus comme limite de certaines suites dont la convergence dépend des relations entre les différents degrés dynamiques.

1.2.2 Courants de Green et mesure d'équilibre

Supposons dans un premier temps que $f \in \mathscr{H}_d$ avec $d \geq 2$. Dans ce cas, $d_p(f) = d^p$ d'où $s = s' = k$ et nous avons beaucoup d'informations sur la dynamique. Il existe une dichotomie claire de $\mathbb{P}^k$ en deux ensembles.

Définition 1.2.7. L'*ensemble de Fatou* $\mathscr{F}$ de f est le plus grand ouvert de $\mathbb{P}^k$ où la famille des f^n est normale. L'*ensemble de Julia* $\mathscr{J}$ de f est le complémentaire de son ensemble de Fatou.

Nous pourrions prendre les mêmes définitions pour $f \in \mathscr{M}_d$, mais la variété des comportements pousse à changer la définition en fonction des cas. Dans l'ensemble de Fatou, le comportement des orbites est stable par petite perturbation. Sur l'ensemble de Julia la dynamique est chaotique et les orbites peuvent diverger à vitesse exponentielle. Ces deux ensembles sont totalement invariant, $f^{-1}(\mathscr{F}) = f(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$. Il est facile de voir que l'ensemble de Julia n'est jamais vide. Par contre, cela peut être le cas de l'ensemble de Fatou.

Exemple 1.2.8. Pour $k = 1$, l'application $f[z_0 : z_1] = [4z_0z_1(z_1^2 - z_0^2) : (z_1^2 + z_2^2)^2]$ a pour ensemble de Julia $\mathbb{P}^1$ tout entier. Lattès [Lat18] a obtenu cette application comme semi-conjuguée d'une dilatation du tore $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ par la fonction $\mathscr{P}$ de Weierstrass. Un procédé de Ueda permet d'obtenir des applications similaires pour tout k. Il existe une projection canonique $\pi : (\mathbb{P}^1)^k \to \mathbb{P}^k$ définie sur $\mathbb{C}^k \subset (\mathbb{P}^1)^k$ par les $k+1$ polynômes symétriques élémentaires de degré $\leq k$. L'application $(\mathbb{P}^1)^k \ni (w_1, \ldots, w_k) \mapsto (f(w_1), \ldots, f(w_k))$ se factorise par π en une application $g \in \mathscr{H}_4$ qui a $\mathbb{P}^k$ comme ensemble de Julia.

Une *composante de Fatou* est une composante connexe de l'ensemble de Fatou. Un problème important est de classifier les dynamiques possibles sur ces composantes. En dimension 1, un théorème de Sullivan [Sul85] dit qu'il n'existe pas de composante errante i.e. si $\Omega \subset \mathbb{P}^1$ est une composante de Fatou alors il existe deux entiers $0 \leq p < q$ tels que $f^p(\Omega) = f^q(\Omega)$. Cela ramène l'étude des composantes de Fatou au cas des composantes invariantes. Ces dernières ont été complétement classifiées et il n'en existe que cinq types, voir par exemple [CG93], [BM01].

En plus grande dimension, la situation est très loin d'être aussi bien connue. L'équivalent du théorème de Sullivan reste une question ouverte. Et la classification des composantes invariantes est très incomplète. Une des raisons est que la dynamique au voisinage d'un point fixe est beaucoup plus variée qu'en dimension 1, voir [Aba10] pour un exposé sur le sujet. De plus, contrairement à la dimension 1 où il existe au plus $2d - 2$ cycles non-répulsifs, il peut y avoir une infinité de cycles attractifs [Gav98].

Exemple 1.2.9. En utilisant le procédé de Ueda, nous pouvons construire différents types de composantes de Fatou. Si on note Ω_i les composantes de Fatou de $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, alors l'application g obtenue comme dans l'Exemple 1.2.8 a une composante de Fatou isomorphe à $\Omega_{i_1} \times \cdots \times \Omega_{i_k}$ si les i_j sont deux à deux disjoints.

La situation est différente pour l'ensemble de Julia. L'introduction de la théorie du pluripotentiel a permit, entre autre, de généraliser en toute dimension de nombreux résultats sur l'ensemble de Julia. La construction de base est la suivante.

Théorème 1.2.10. *Soit $f \in \mathscr{H}_d$. La suite $d^{-n}(f^n)^*(\omega)$ converge vers un courant T positif fermé de masse 1 et de bidegré $(1,1)$. Ce courant est le courant de Green de f. Il est totalement invariant i.e. $f^*T = dT$ et possède des potentiels locaux Hölder continus.*

Le théorème suivant, dû à Fornæss et Sibony [FS94b], fait le lien entre l'ensemble de Julia et le courant de Green de f.

Théorème 1.2.11. *Soit $f \in \mathscr{H}_d$. Le support du courant de Green T est exactement l'ensemble de Julia de f.*

Exemple 1.2.12. Si f est comme dans l'Exemple 1.2.1 alors

$$T = \omega + dd^c(\max_{0 \leq i \leq k} \log |z_i| - \log \|z\|),$$

où $\|z\|$ est la norme de z vu dans $\mathbb{C}^{k+1}$.

Il est facile de voir que si S est un $(1,1)$-courant positif fermé de masse 1 avec des potentiels locaux bornés alors

$$\frac{1}{d^n}(f^n)^*(S) \to T.$$

De plus la convergence est à vitesse exponentielle. Dans le Chapitre 3 nous traiterons cette question pour des courants singuliers, notamment ceux définis par l'intégration sur une hypersurface.

Puisque T est à potentiels locaux bornés, on peut définir l'auto intersection $T^p := T \wedge \ldots \wedge T$, cf. [BT82]. On appelle T^p le (p,p)-*courant de Green* de f. Le support $\mathscr{J}_p$ de T^p nous donne une filtration de l'ensemble de Julia

$$\mathscr{J} = \mathscr{J}_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset \mathscr{J}_k.$$

La mesure $\mu := T^k$ s'appelle la *mesure d'équilibre* de f. Le fait que T soit un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ qui a des potentiels locaux Hölder continus nous donne déjà des informations sur les $\mathscr{J}_p$.

Théorème 1.2.13. *L'ensemble $\mathscr{J}_p$ est de dimension de Hausdorff strictement supérieure à $2(k-p)$. Pour $p \leq k/2$, $\mathscr{J}_p$ est connexe. En particulier, si $k \geq 2$ alors l'ensemble de Julia est connexe.*

Le support de μ est en quelque sorte la partie la plus chaotique de notre système et cette mesure nous fournit plusieurs informations sur la dynamique. Plus précisément, c'est l'unique mesure d'entropie maximale égale à $\log d_k$, elle est mélangeante et tous ses exposants de Lyapunov sont strictement positifs, voir [FS94b] [HP94] et [BD01]. Nous renvoyons à [KH95] et [Wal82] pour la théorie ergodique et la notion d'entropie. Briend et Duval ont déduit de ces propriétés que μ représente l'équidistribution des points périodiques répulsifs de f.

Théorème 1.2.14. *Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$. Soit $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des points périodiques répulsifs de période n. Alors*

$$\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d^{kn}} \sum_{x\in\mathscr{P}_n} \delta_x.$$

D'après le résultat suivant dû à Briend-Duval [BD01] et Dinh-Sibony [DS03], les préimages d'un point générique ont un comportement similaire.

Théorème 1.2.15. *Soit $f \in \mathscr{H}_d$. Il existe un ensemble analytique exceptionnel $\mathcal{E}$ totalement invariant tel que $a \notin \mathcal{E}$ si et seulement si*

$$\mu = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d^{kn}} \sum_{x\in f^{-n}(a)} \delta_x.$$

Cet ensemble exceptionnel est le plus grand ensemble analytique propre de $\mathbb{P}^k$ qui soit totalement invariant. Il concentre en quelque sorte le lieu où f est de très grande multiplicité et il est vide pour une application générique. Récemment, Dinh et Sibony ont obtenu une vitesse exponentielle pour la convergence du Théorème 1.2.15, ce qui est nouveau même en dimension 1 [DS10b].

Pour les polynômes sur $\mathbb{C}$, en dehors de ce dernier résultat et de la densité des points périodiques répulsifs dans l'ensemble de Julia qui est connue depuis Fatou [Fat19] et Julia [Jul18], tous ces résultats sont dus à Brolin [Bro65]. Il a aussi montré que l'ensemble exceptionnel contient au plus un point et que s'il est non vide alors l'application f est conjuguée à $z \mapsto z^d$, cf. [Lyu83] [FLM83] pour les fractions rationnelles.

Pour $k = 2$, l'ensemble exceptionnel est la réunion d'au plus trois droites en position générale [FS94a] [CL00]. Cela n'arrive que pour les applications conjuguées à celle de l'Exemple 1.2.1 où $\mathcal{E}$ est l'union des hypersurfaces H_i. Certains conjecturent que l'ensemble exceptionnel est toujours la réunion de sous-espaces linéaires.

Dinh a introduit dans [Din09] une notion plus fine d'ensemble exceptionnel. Ce sont des ensembles analytiques invariants qui contiennent le lieu où les itérées de f ont une grande multiplicité. Cette méthode a l'avantage de fournir, quitte à agrandir l'ensemble analytique, un contrôle aussi précis que l'on veut sur la multiplicité. Elle permet aussi de redonner une construction de l'ensemble exceptionnel totalement invariant. Elle joue un grand rôle dans le Chapitre 3 où nous démontrons un résultat similaire au Théorème 1.2.15 pour les hypersurfaces. Nous renvoyons au début de ce Chapitre 3 pour un survole des problèmes qu'équidistribution en toute codimension.

Une des conséquences du Théorème 1.2.15 est que si U est un ouvert qui intersecte $\mathscr{J}_k$ alors $\cup_{n\geq 0} f^n(U)$ est un ouvert de Zariski dense. On en déduit que si $\mathscr{J}_k$ est d'intérieur non vide, alors $\mathscr{J}_k = \mathbb{P}^k$. Mais contrairement à la dimension 1, si $k \geq 2$ ce n'est plus vrai pour l'ensemble de Julia $\mathscr{J}$. Fornæss et Sibony donnent dans [FS01] des exemples d'applications telles que l'ensemble de Fatou soit non vide et que l'ensemble de Julia soit aussi d'intérieur non vide. Dans le même papier, ils donnent des exemples où $\mathscr{J} = \mathscr{J}_k \neq \mathbb{P}^k$.

Il reste beaucoup de questions sur la dynamique en dehors de $\mathscr{J}_k$. La proposition suivante donne une caractérisation des différents $\mathscr{J}_p$ en fonction de la croissance du volume.

Proposition 1.2.16. *Soit $f \in \mathscr{H}_d$. Si $x \in \mathbb{P}^k$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le point x est dans l'ensemble $\mathscr{J}_p$.*
2. *Pour tout voisinage U de x nous avons*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{d^{pn}} \int_U (f^n)^*(\omega^p) \wedge \omega^{k-p} \neq 0.$$

3. *Pour tout voisinage U de x nous avons*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{d^{(p-1)n}} \int_U (f^n)^*(\omega^p) \wedge \omega^{k-p} = +\infty.$$

En utilisant des résultats similaires et une méthode due à Gromov [Gro03] pour majorer l'entropie, de Thélin [dT06] et Dinh [Din07] ont obtenu le résultat suivant.

Théorème 1.2.17. *Soit $f \in \mathscr{H}_d$. Si K est un compact qui n'intersecte pas $\mathscr{J}_p$ alors l'entropie de f sur K est inférieure à $(p-1)\log d$.*

En étudiant certains attracteurs, Dinh a construit des mesures en dehors de $\mathscr{J}_p$ dont l'entropie est maximale égale à $(p-1)\log d$.

Les applications rationnelles qui se rapprochent le plus des applications holomorphes sont celles de grand degré topologique, c'est à dire $s = s' = k$ dans (1.1). Cette large classe d'applications a été traitée dans [RS97] et [Gue05b] où ils obtiennent l'existence d'une mesure d'équilibre μ aux propriétés similaires à celle du cas holomorphe.

Pour une application quelconque $f \in \mathscr{M}_d$, l'entropie de f est inférieure $\log d_s(f)$ [DS05], en gardant les notations de (1.1). Quand $s = s'$, on peut espérer avoir égalité sous certaines conditions. Nous allons voir dans la prochain section que c'est le cas des automorphismes polynomiaux réguliers de $\mathbb{C}^k$, voir aussi [dTV08] pour d'autres cas. Quand cette égalité est vérifiée, un résultat de de Thélin donne que f est dilatante dans s directions et contractante dans $k - s$, voir [dT08].

1.2.3 Automorphismes polynomiaux

Lorsque $d_k(f) = 1$, l'application f a un inverse rationnel. L'existence de cet inverse est très utile dans l'étude de la dynamique de f, particulièrement si $k = 2$, cf. [DF01]. Dans cette section, nous nous intéressons au cas particulier des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$.

Une application inversible $f : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ est un automorphisme polynomial si $f = (f_1, \ldots, f_k)$ où chaque f_i est un polynôme. Son inverse f^{-1} est alors aussi un automorphisme polynomial. On note $d_+ := \max_{1\leq i\leq k} \deg(f_i)$ le degré algébrique de f et d_- celui de f^{-1}. En considérant leur extension à $\mathbb{P}^k$, on obtient $f \in \mathscr{M}_{d_+}$ et $f^{-1} \in \mathscr{M}_{d_-}$. On note I_+ l'ensemble d'indétermination de f et I_- celui de f^{-1}. Ce sont des sous-ensembles analytiques propres de l'hyperplan à l'infini $L_\infty := \{z_0 = 0\}$. Nous dirons que f est un *automorphisme polynomial régulier* si $I_+ \cap I_- = \varnothing$. Cette propriété se vérifie facilement et elle implique des propriétés remarquables sur f. Pour toute cette section, nous renvoyons à [Sib99].

Les premières applications rationnelles en plusieurs variables dont la dynamique a été traitée en profondeur sont les applications de Hénon, voir entre autres [BS91a, BS91b, BS92] [BLS93b] et [FS92].

Soient p un polynôme en une variable de degré $d \geq 2$ et $a \neq 0$. L'application $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ définie par

$$f(z_1, z_2) = (p(z_1) - az_2, z_1),$$

est un automorphisme polynomial de degré d appelé *application de Hénon*. Son Jacobien est constant et égal à a. Son ensemble d'indétermination I_+ est égal à $[0 : 0 : 1]$ et $I_- = [0 : 1 : 0]$. Ce sont donc des automorphismes réguliers et on remarque que $f(L_\infty \setminus I_+) = I_-$ et $f^{-1}(L_\infty \setminus I_-) = I_+$. De plus I_- est un point attractif pour f et inversement. Plus généralement, nous appellerons *application de type Hénon*, toute composée d'applications comme ci-dessus. Remarquons qu'elles restent régulières.

En s'appuyant sur le théorème de Jung, Friedland et Milnor [FM89] ont montré qu'un automorphisme polynomial était soit conjugué à une application de type Hénon, soit à un *automorphisme élémentaire*, c'est à dire de la forme

$$e(z_1, z_2) = (az_1 + p(z_2), bz_2 + c),$$

avec a, b, c des constantes et p un polynôme de degré $d \geq 2$. Les automorphismes réguliers sont précisément les applications de type Hénon, en dimension 2. La dynamique d'un automorphisme élémentaire est simple. Ce sont les seuls automorphismes polynomiaux, à conjugaison près, dont l'entropie est nulle, ou encore dont le premier degré dynamique d_1 est égal à 1.

Il n'existe pas une telle dichotomie en dimension supérieure ou égale à 3. Néanmoins, les automorphismes réguliers ont certaines similarités avec les applications de Hénon de type [Sib99].

Proposition 1.2.18. *Soit f un automorphisme polynomial régulier de $\mathbb{C}^k$. Nous avons que $f(L_\infty \setminus I_+) = f(I_-) = I_-$ et $f^{-1}(L_\infty \setminus I_-) = f^{-1}(I_+) = I_+$. De plus, I_- (resp. I_+) est un ensemble attirant pour f (resp. f^{-1}) dans le sens qu'il existe un voisinage arbitrairement petit V_- de I_- (resp. V_+ de I_+) tel que $f(V_-) \Subset V_-$ (resp. $f^{-1}(V_+) \Subset V_+$).*

En particulier, si f est régulier alors f^n et f^{-n} le sont aussi. Les voisinages $V_\pm$ permettent d'isoler la dynamique des ensembles d'indéterminations. Puisque $I_+, I_- \subset L_\infty \simeq \mathbb{P}^{k-1}$ et $I_+ \cap I_- = \varnothing$, le théorème de Bézout implique que $\dim I_+ + \dim I_- \leq k - 2$. En réalité, il y a automatiquement égalité.

Proposition 1.2.19. *Il existe un entier $1 \leq s \leq k-1$ tel que $\dim I_+ = k-s-1$ et $\dim I_- = s-1$. De plus, nous avons que $d_+^s = d_-^{k-s}$ et que $(f^n)^*$ agit sur $H^{p,p}(\mathbb{P}^k, \mathbb{C})$ par la multiplication par d_+^{np} si $0 \leq p \leq s$ et par $d_-^{(k-p)n}$ si $s \leq p \leq k$. En particulier, f est algébriquement p-stable pour tout p.*

On en déduit que le degré dynamique $d_p(f)$ est égal à d_+^p si $0 \leq p \leq s$ et à d_-^{k-p} si $s \leq p \leq k$. Le degré $d_s(f) = d_+^s = d_-^{k-s}$ domine strictement les autres degrés. La construction de l'ensemble de Julia pour ce type d'applications s'inspire de la dynamique des polynômes sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.20. L'*ensemble de Julia plein* de f, noté $\mathscr{K}_+$, est l'ensemble des points de $\mathbb{C}^k$ dont l'orbite par f reste bornée. Son bord $\mathscr{J}_+$ est l'*ensemble de Julia* de f. Les ensembles correspondant pour f^{-1} sont notés $\mathscr{K}_-$ et $\mathscr{J}_-$. Enfin, on définit $\mathscr{K} := \mathscr{K}_+ \cap \mathscr{K}_-$ et $\mathscr{J} := \mathscr{J}_+ \cap \mathscr{J}_-$.

Dans [BLS93a], Bedford-Lyubich-Smillie ont montré que pour une application de Hénon, la plus part des points périodiques étaient selles et que le nombre de points selles d'ordre n était de l'ordre de d_+^n. En dimension plus grande, nous n'avons que le résultat beaucoup plus faible suivant.

Théorème 1.2.21. *Soit f un automorphisme régulier. Alors f admet une infinité d'orbites périodiques distinctes. L'ensemble p_n des points périodiques d'ordre n de f est discret, contenu dans $\mathscr{K}$ et $|p_{kn}| = d_+^{kln}$ si on compte avec multiplicité.*

Puisqu'un automorphisme polynomial est une application injective de $\mathbb{C}^k$ dans $\mathbb{C}^k$, nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.2.22. *Le domaine d'attraction Ω d'un point fixe attractif de f dans $\mathbb{C}^k$ est un domaine de Fatou-Bieberbach, c'est a dire $\Omega \simeq \mathbb{C}^k$ mais $\overline{\Omega} \neq \mathbb{C}^k$. De plus, $\overline{\Omega}$ est contenu dans $\mathscr{K}_+$.*

On déduit de l'existence du voisinage V_- que le basin d'attraction U_- de I_- pour f est égal à $\mathbb{P}^k \setminus \overline{\mathscr{K}}_+$. En particulier, $\mathscr{K}_+$ est fermé dans $\mathbb{C}^k$ et $\mathscr{K}$ est le plus grand compact de $\mathbb{C}^k$ qui est invariant par f et f^{-1}. On peut aussi montrer que $\overline{\mathscr{K}}_+ = \mathscr{K}_+ \cup I_+$. Tous ces résultats sont faux pour un automorphisme polynomial général. Il existe des automorphismes non réguliers dont l'équivalent de $\mathscr{K}_+$ est dense dans $\mathbb{C}^k$.

Le fait que les applications f et f^{-1} sont algébriquement stable permet de définir les courants de Green de f et f^{-1}.

Théorème 1.2.23. *Soit f un automorphisme polynomial régulier. Les suites de courants $((f^{\pm n})^*\omega)_{n\geq 0}$ convergent vers des $(1,1)$-courants $T_\pm$ positifs fermés de masse 1 appelés courants de Green de $f^{\pm 1}$. De plus, ces courants vérifient $(f^{\pm 1})^* T_\pm = d_\pm T_\pm$ et ils ne chargent pas les ensembles analytiques propres de $\mathbb{P}^k$.*

En général, nous n'avons pas $\mathrm{supp}(T_+) = \mathscr{J}_+$. Sur $\mathbb{C}^k$, on peut écrire $T_+ = dd^c G_+$ et $T_- = dd^c G_-$ où

$$G_+(z) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d_+^n} \log^+ |f^n(z)|,$$

et

$$G_-(z) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{d_-^n} \log^+ |f^{-n}(z)|.$$

Ce sont les *fonctions de Green* de f et f^{-1}. Elles sont positives, Hölder continues sur $\mathbb{C}^k$ et totalement invariantes, $G_\pm \circ f^{\pm 1} = d_\pm G_\pm$. On en déduit que

$$\mathscr{K}_+ = \{G_+ = 0\} \quad \text{et} \quad \mathscr{K}_- = \{G_- = 0\}.$$

Les fonctions $g_\pm(z) := G_\pm(z) - 1/2 \log(1 + \|z\|)^2$ se prolongent à $\mathbb{P}^k$ en des fonctions quasi-psh qui sont Hölder continues sur $\mathbb{P}^k \setminus I_\pm$ et qui vérifient $T_\pm = \omega + dd^c g_\pm$. Puisque g_+ est localement borné en dehors de I_+ et que $\dim I_+ = k - s - 1$, le courant T_+^p est bien défini pour $p \leq s + 1$.

Proposition 1.2.24. *Les courants T_+^p ne chargent pas les ensembles analytiques propres de $\mathbb{P}^k$ pour $1 \leq p \leq s$. Le courant T_+^{s+1} est un courant d'intégration sur I_+ et T_+^s est à support dans $\mathscr{J}_+$.*

De manière analogue, on définit T_-^p pour $1 \leq p \leq k-s+1$, qui vérifient une proposition similaire.

En utilisant la théorie des super-potentiels, Dinh et Sibony ont montré le théorème suivant [DS09]. Il montre une certaine rigidité de $\mathscr{K}_+$.

Théorème 1.2.25. *Soit f un automorphisme polynomial régulier. Le courant T_+^s est l'unique courant de bidegré (s, s) positif fermé de masse 1 à support dans $\overline{\mathscr{K}}_+$. En particulier, si S est un (s, s)-courant positif fermé de masse 1 tel que* $\operatorname{supp}(S) \cap I_- = \varnothing$, *alors la suite $d_+^{-sn}(f^n)^*(S)$ converge vers T_+^p.*

Grâce à la proposition 1.2.24 et à la continuité de $g_\pm$, il est possible d'intersecter T_+^s et T_-^{k-s}. On obtient la mesure

$$\mu := T_+^s \wedge T_-^{k-s}.$$

Puisque T_+^s est à support dans $\mathscr{J}_+$ et T_-^{k-s} à support dans $\mathscr{J}_-$, cette mesure est à support dans $\mathscr{J} \Subset \mathbb{C}^k$.

Bedford, Lyubich et Smillie ont montré dans [BS92] [BLS93b] le résultat suivant pour les applications de Hénon. Il reste valable en toute dimension [Gue05a] [dT10].

Théorème 1.2.26. *Soit f un automorphisme polynomial régulier de $\mathbb{C}^k$. La mesure μ est mélangeante et c'est l'unique mesure d'entropie maximale égale à $s \log d_+$.*

Un théorème de de Thélin [dT08] montre que μ est hyperbolique.

Théorème 1.2.27. *La mesure μ possède s exposants de Lyapunov positifs plus grands ou égaux à $1/2 \log d_+$ et $k - s$ exposants de Lyapunov négatifs inférieurs ou égaux à $-1/2 \log d_-$. En particulier μ est hyperbolique.*

Chapitre 2

Invariant elliptic curves as attractors

A natural question in dynamics is what kinds of attractor can have our system. It is easy to construct rational self-maps of $\mathbb{P}^2$ with a rational curve as attractor. In this chapter, we consider rational self-maps of $\mathbb{P}^2$ which leave invariant an elliptic curve $\mathcal{C}$ i.e. an algebraic curve of genus one. The restriction of such a map to $\mathcal{C}$ is necessarily expansive with a positive Lyapunov exponent. In [BDM07] it is shown that $\mathcal{C}$ can not be a trapped attractor. Our result, obtained in [Taf10], is that if the invariant elliptic curve $\mathcal{C}$ has a strictly negative Lyapunov exponent, then $\mathcal{C}$ is an measure attractor, i.e. it possesses a dense orbit and its basin has strictly positive measure. This result was expected by Bonifant, Dabija and Milnor.

2.1 Attractors

Let f be a rational self-map of $\mathbb{P}^2$. We refer to [Mil85], [Rue89] for general discussions on attractors and to [FW99], [FS01], [BDM07] for examples in $\mathbb{P}^2$. A compact set A with $f(A) = A$ will be called a *trapped attracting set* if it has a *trapping neighborhood* N such that $f(N) \subset N$ and $A = \cap_{n\geq 1} f^n(N)$. Furthermore, if A has a dense orbit then we say that A is a *trapped attractor*. The existence of trapped attracting sets is stable under small perturbations. Indeed, if f has a trapped attracting set $A = \cap_{n\geq 1} f^n(N)$ then any small perturbation f_ϵ has a trapped attracting set defined by $A_\epsilon = \cap_{n\geq 1} f_\epsilon^n(N)$. If the restriction of f to $\mathbb{C}^2$ is a polynomial self-map then the hyperplane at infinity is a trapped attracting set. By disturbing these maps, we obtain a large class of examples. For example, consider the family of self-maps of $\mathbb{P}^2$ defined by

$$f_\lambda[z : w : t] = [z^2 - 2w^2 : z^2 : t^2 + \lambda z^2],$$

with $\lambda \in \mathbb{C}$. For $\lambda = 0$, the restriction of f_0 to the line at infinity $L = \{t = 0\}$ is chaotic and L is a trapped attractor. Although trapped attractors are not stable under small perturbations in general, Jonsson and Weickert show in [JW00] the following result for small $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposition 2.1.1. *The map f_λ has a nonalgebraic trapped attractor for all $\lambda \in \mathbb{C}$ with $0 < |\lambda| < 1/20$.*

A trapped attracting set is often fractal and its underlying dynamics is hard to study. In [Din07], under some geometric hypothesis, Dinh associates to a trapped attracting set

A an attracting current which is invariant, woven and has support in A. It gives several informations on the geometry of A and its dynamics. In particular, it allows him to define the equilibrium measure associated to A which is mixing and is a measure of maximal entropy on A.

The notion of trapped attractor is too restrictive and exclude many interesting examples. In [Mil85], Milnor gives a measure-theoretic definition of attractors. The basin of attraction $B(A)$ of an invariant compact $A = f(A)$ is defined by

$$B(A) = \{x \in \mathbb{P}^2 \,|\, d(f^n(x), A) \to 0 \text{ as } n \to \infty\}.$$

Here $d(.,.)$ denotes the distance in $\mathbb{P}^2$ with respect to a fixed Riemannian metric. The compact A is a *measure attractor* if its basin $B(A)$ has strictly positive Lebesgue measure and A possesses a dense orbit. The basin of attraction is always a Borel set, but is not open in general.

We will see in the next section that an invariant elliptic curve can be a measure attractor while it is never a trapped attractor.

2.2 Invariant elliptic curves

Let f be a rational self-map of $\mathbb{P}^2$ of algebraic degree $d \geq 2$ and $\mathcal{C}$ be a curve in $\mathbb{P}^2$. We denote the restriction of f to $\mathcal{C}$ by $g : \mathcal{C} \to f(\mathcal{C})$. If $\mathcal{C}$ does not intersect the indeterminacy set $I(f)$ then the degree $\deg(g)$ of g satisfies

$$\deg(\mathcal{C})d = \deg(g)\deg(f(\mathcal{C})). \tag{2.1}$$

We say that $\mathcal{C}$ is *invariant by* f if $\mathcal{C} \cap I(f) = \varnothing$ and $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. In this case, (2.1) implies that the degree of g is equal to the degree of f. In [BD02], Bonifant and Dabija give a criterion for a self-map $g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ to extends to a rational or holomorphic self-map of $\mathbb{P}^2$. More precisely, if $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n)$ denotes the restriction of $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ to $\mathcal{C}$ then we have the following criterion [BD02].

Proposition 2.2.1. *Let $d \geq 2$. A self-map $g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ has a rational extension $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ with $\deg(f) = d$ if and only if $g^*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(1)) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(d)$. Moreover, the extension is unique if $d < \deg(\mathcal{C})$. Otherwise, the holomorphic extensions form a Zariski open subset of $\mathbb{C}^{3N}$, with $N = \binom{d-\deg(\mathcal{C})+2}{2}$.*

That ensures that if $\mathcal{C}$ is smooth and has genus less than 2 then we have a large number of rational self-maps of $\mathbb{P}^2$ which leave invariant $\mathcal{C}$. On the other hand, singular curves can have no self-map. In the sequel, we restrict ourselves to the case where $\mathcal{C}$ is an invariant elliptic curves. This case is of particular interest since Riemann–Hurwitz formula and (2.1) imply that a curve of genus greater or equal to 2 could not be invariant by f which has degree $d \geq 2$.

From now on, assume that $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ is an invariant elliptic curves. In [BDM07], Bonifant, Dabija and Milnor study such maps and give several examples. They associate to f, a canonical ergodic measure $\mu_{\mathcal{C}}$, supported on $\mathcal{C}$, which possesses a strictly positive Lyapunov exponent $\chi_1 = (\log d)/2$ in the tangent direction of $\mathcal{C}$. The transverse exponent corresponds to the second Lyapunov exponent χ_2 of $\mu_{\mathcal{C}}$, see Section 2.5 for the definition.

Our purpose in the sequel is to establish the following theorem which was expected by Bonifant, Dabija and Milnor.

Theorem 2.2.2. *Let f, $\mathcal{C}$ and $\mu_{\mathcal{C}}$ be as above. Assume that the transverse exponent χ_2 of $\mu_{\mathcal{C}}$ is strictly negative. Then $\mathcal{C}$ is a measure attractor.*

A sketch of proof is given in [AKYY92] using the absolute continuity of the stable foliation. Our strategy is to study the stable manifolds associated to $\mu_{\mathcal{C}}$, and then apply the following local result.

Lemma 2.2.3. *Let E be a subset of the unit disk Δ with strictly positive Lebesgue measure. Suppose $\{D_x\}_{x\in E}$ is a measurable family of disjoint holomorphic disks given by $\rho_x : \Delta \to \Delta^2$, transverse to $\{0\} \times \Delta$ and such that $\rho_x(0) = (0, x)$. Then the union $\cup_{x\in E} D_x$ has strictly positive Lebesgue measure in Δ^2.*

We prove this lemma in Section 2.4 using holomorphic motions and quasi-conformal mappings. Under the assumptions of Theorem 2.2.2, $\mu_{\mathcal{C}}$ is a saddle measure, see [dT06], [Din07] for the construction of such measures in a similar context.

Recall that a rational self-map f of $\mathbb{P}^2$ of algebraic degree d is given in homogeneous coordinates $[z] = [z_0 : z_1 : z_2]$, by $f[z] = [F_0(z) : F_1(z) : F_2(z)]$ where F_0, F_1, F_2 are three homogeneous polynomials in z of degree d with no common factor. In the sequel, we always assume that $d \geq 2$. The common zeros in $\mathbb{P}^2$ of F_0, F_1, and F_2 form the indeterminacy set $I(f)$ which is finite.

As $\mathcal{C}$ is elliptic, there exists a lattice Γ of $\mathbb{C}$ and a normalization

$$\pi : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{P}^2,$$

with $\pi(\mathbb{C}/\Gamma) = \mathcal{C}$. Moreover, if S denotes the singular locus of $\mathcal{C}$, the map

$$\pi : (\mathbb{C}/\Gamma) \setminus \pi^{-1}(S) \to \mathcal{C} \setminus S$$

is a biholomorphism.

Since $\mathcal{C}$ is invariant, the restriction g lifts to a holomorphic self-map $\widetilde{g}$ of $\mathbb{C}/\Gamma$. Even if $\mathcal{C}$ is singular, g inherits several properties of $\widetilde{g}$. Like all holomorphic self-maps of $\mathbb{C}/\Gamma$, $\widetilde{g}$ is necessarily of the form $t \mapsto at + b$ and leaves invariant the normalized Lebesgue measure $\widetilde{\mu}_{\mathcal{C}}$ on $\mathbb{C}/\Gamma$. So, the topological degree of $\widetilde{g}$, i.e. the number of points in a fiber, is equal to $|a|^2$. By equation (2.1), this degree is equal to d. Therefore, $|a|^2 = d \geq 2$. Then, by a classical theorem on ergodicity on compact abelian groups, $\widetilde{\mu}_{\mathcal{C}}$ is $\widetilde{g}$-ergodic, i.e. is extremal in the cone of invariant positive measures. Its push-forward $\mu_{\mathcal{C}}$ is an f-ergodic measure supported on $\mathcal{C}$. Moreover, generic orbits of g are dense in $\mathcal{C}$. On the other hand, g inherits the repulsive behavior of $\widetilde{g}$ and $\mu_{\mathcal{C}}$ possesses a strictly positive Lyapunov exponent equal to $\chi_1 = \log|a| = (\log d)/2$ in the tangent direction of $\mathcal{C}$. By Oseledec's theorem, see Section 2.5 below, we have

$$\chi_1 + \chi_2 = \frac{1}{2}\langle \mu_{\mathcal{C}}, \log(\mathrm{Jac}(f))\rangle$$

where $\mathrm{Jac}(f)$ denotes the Jacobian of f with respect to the Lebesgue measure of $\mathbb{P}^2$. So, the hypothesis in Theorem 2.2.2 is equivalent to

$$\langle \mu_{\mathcal{C}}, \log(\mathrm{Jac}(f))\rangle < \log d.$$

The dynamics inside the basin of $\mathcal{C}$ is not well understood. In [BDM07], the authors proved that an elliptic curve can never be a trapped attractor. Indeed, using quasi-conformal mappings they proved the following result.

Theorem 2.2.4. *Let $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ be an elliptic curve and let N be a neighborhood of $\mathcal{C}$. Then there cannot exist any holomorphic map $f : N \to N$ such that $\cap_{n\geq 1} f^n(N) = \mathcal{C}$.*

It shows that the concept of trapped attractor is too restrictive in our context since there is example where $\mathcal{C}$ seems to have a basin of full measure. As the dynamics on $\mathcal{C}$ is chaotic, it is contained in the Julia set J as its preimages. The following result was obtained in [BD02].

Theorem 2.2.5. *The Julia set equals the closure of the backward orbit of any point on* $\mathcal{C}$.

In particular, the Julia set is contained in the closure of $B(\mathcal{C})$. In [BDM07], it is conjectured that there is equality. Under this conjecture, they have proved for a whole family of examples that the basin $B(\mathcal{C})$ has empty interior or equivalently that $B(\mathcal{C})$ is not open. They expected that it is true in general.

2.3 The Desboves family

In this section, we give some examples from [BDM07] which satisfy the hypothesis of Theorem 2.2.2 and give the first measure attractors in $\mathbb{P}^2$ which are not trapped.

For any smooth elliptic curve $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2$, we can use the classic tangent process to construct a self-map $g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. If p is a point in $\mathcal{C}$ then we define $g(p)$ as the unique point in $\mathcal{C}$ such that

$$L_p \cap \mathcal{C} = \{p\} \cup \{g(p)\},$$

where L_p is the unique line which is tangent to $\mathcal{C}$ at p. With a good choice of normalization $\pi : \mathbb{C}/\Gamma \to \mathcal{C}$, three points in $\mathcal{C}$ are collinear if and only if their preimages by π t_1, t_2, t_3 satisfied $t_1 + t_2 + t_3 = 0$. Since L_p is tangent to $\mathcal{C}$, we obtain that the lift of g to $\mathbb{C}/\Gamma$ is defined by

$$\widetilde{g}(t) = -2t.$$

Therefore, g has degree 4.

When $\mathcal{C}$ is defined by the equation

$$\phi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3,$$

then the Desboves map

$$f_0[x : y : z] = [x(y^3 - z^3) : y(z^3 - x^3) : z(x^3 - y^3)],$$

is a rational extension of g. Moreover, if $\psi(x, y, z) = 3xyz$, then the map f_0 leaves invariant generic curves defined by

$$\mathcal{C}_c = \{\phi/\psi = c\},$$

with c in $\mathbb{P}^1$. For c generic, $\mathcal{C}_c$ is a smooth elliptic curve and the restriction of f_0 to $\mathcal{C}_c$ is the tangent process with respect to $\mathcal{C}_c$. In fact, the rational function $\phi/\psi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ is a first integral for f_0. Having a first integral is a very restrictive condition and the dynamics of maps with first integral is not interesting for us.

However, by perturbing f_0 we obtain maps with interesting dynamics. For $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, we define the Desboves map parametrized by (a, b, c) by

$$f_{a,b,c}[x : y : z] = [x(y^3 - z^3 + a\phi) : y(z^3 - x^3 + b\phi) : z(x^3 - y^3 + c\phi)].$$

These maps are still of degree 4. As, by definition, $\phi = 0$ on $\mathcal{C}$, each $f_{a,b,c}$ leaves invariant $\mathcal{C}$. Furthermore, each coordinate line $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, and $\{z = 0\}$ is invariant. It is easy to check that $f_{a,b,c}$ is holomorphic if and only if (a, b, c) is outside the union of seven hyperplanes defined by

$$abc(a + b + c)(a + 1 - b)(b + 1 - c)(c + 1 - a) = 0.$$

In the same way, we can construct maps which leave invariant arbitrary many elliptic curves $\mathcal{C}_c$.

Each of these Desboves maps have nine fixed points on $\mathcal{C}$ which are the intersection points of $\mathcal{C}$ with the locus $xyz = 0$. The restriction of these maps to a coordinate line may have attracting points. For examples, if $|3(c - b) - 2| < 1$ then the three fixed points in $\mathcal{C} \cap \{x = 0\}$ are saddle i.e. reppeling along $\mathbb{C}$ and attracting along $\{x = 0\}$. Bonifant, Dabija and Milnor try to optimaze the attracting behavior along the coordinate lines. They choose the subfamily of Desboves maps parametrized by $(b - 2/3, b, b + 2/3)$. Such a map has two fixed points which are superattracting in the direction $\{x = 0\}$ or $\{z = 0\}$. In this situation, they have computed that for $|b|$ small enough, the transverse Lyapunov exponent of $\mathcal{C}$ is negative and therefore, by Theorem 2.2.2, $\mathcal{C}$ is a measure attractor for the associated map. Moreover, numerical computation suggests that for $|b|$ small enough, almost all orbits converge to the curve $\mathcal{C}$, which would mean that $\mathcal{C}$ is a global attractor i.e. a mesure attractor with basin of full measure. We refer to [BDM07] for more details.

2.4 Holomorphic motion

Quasi-conformal mappings were introduced in complex dynamics in one variable by Sullivan [Sul85] to solve the no wandering domain problem for rational maps. Since then, they are at the origin of standard tools as measurable Riemann mapping theorem or holomorphic motions. There are several equivalent definitions of quasi-conformal mappings. Here, we give an analytic one.

Definition 2.4.1. *Let ϕ be a homeomorphism between two domains of $\mathbb{C}$. We say that ϕ is a quasi-conformal mapping if ϕ has locally integrable distributional derivatives which satisfy*

$$|\phi_{\overline{z}}| \leq k|\phi_z|$$

for some $0 \leq k < 1$. A homeomorphism of $\mathbb{P}^1$ is a quasi-conformal mapping if it is locally quasi-conformal.

Geometrically, the condition means that ϕ sends infinitesimally small circles to infinitesimally small ellipses of bounded eccentricity. We refer to [Ahl06] for a complete account on quasi-conformal mappings. We will only use the following property which is crucial in our proof.

Proposition 2.4.2. *A quasi-conformal mapping sends sets of Lebesgue measure 0 to sets of Lebesgue measure 0.*

We briefly introduce the notion of holomorphic motion. For a more complete account cf. [GJW10]. For $r > 0$, we denote by Δ_r the disk centered at the origin in $\mathbb{C}$ with radius r. If E is a subset of $\mathbb{P}^1$, a holomorphic motion of E parametrized by Δ is a map

$$h : \Delta \times E \to \mathbb{P}^1$$

such that :

i) $h(0, z) = z$ for all $z \in E$,

ii) $\forall\, c \in \Delta$, $z \mapsto h(c, z)$ is injective,

iii) $\forall\, z \in E$, $c \mapsto h(c, z)$ is holomorphic on Δ.

Holomorphic motions were introduced by Mañé, Sad and Sullivan [MSS83] to study the problem of structural stability of rational maps on $\mathbb{P}^1$. They proved the λ-lemma which says that any holomorphic motion h of E parametrized by Δ can be extended to a holomorphic motion $\widetilde{h}$ of $\overline{E}$. Furthermore, even if no continuity in z is assumed, $\widetilde{h}$ is continuous on $\Delta \times \overline{E}$ and for all c in Δ, the map $z \mapsto \widetilde{h}(c, z)$ is quasi-conformal. The result was completed by Sullivan–Thurston and Slodkowski (see [ST86] and [Slo91]) to obtain the following result.

Theorem 2.4.3. *Let h be a holomorphic motion of a set $E \subset \mathbb{P}^1$ parametrized by Δ. Then there is a continuous holomorphic motion $\widetilde{h} : \Delta \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ which extends h. Moreover, for any fixed $c \in \Delta$, $\widetilde{h}(c, .) : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ is a quasi-conformal homeomorphism.*

We shall need the following lemma in the proof of Lemma 2.2.3.

Lemma 2.4.4. *Let h be a holomorphic motion of a Borel set $E \subset \mathbb{P}^1$ of strictly positive measure. Then $\cup_{c\in\Delta}\{c\} \times h(c, E)$ has strictly positive measure in $\Delta \times \mathbb{P}^1$.*

Proof. By Theorem 2.4.3, h can be extended to a holomorphic motion $\widetilde{h} : \Delta \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ such that, for any fixed $c \in \Delta$, $\widetilde{h}(c, .) : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ is a quasi-conformal homeomorphism. So, by Proposition 2.4.2 $\mathrm{Leb}(h(c, E)) > 0$ and Fubini's theorem implies that $\cup_{c\in\Delta}\{c\} \times h(c, E)$ has strictly positive measure. □

Proof of Lemma 2.2.3. From the family of disks, we will construct a holomorphic motion. Denote by π_1 and π_2 the canonical projections of Δ^2. Let $x \in E$. Since D_x is transverse to $\{0\} \times \Delta$, there exists $r(x) > 0$ such that $\rho_x^1 = \pi_1 \circ \rho_x$ is a biholomorphism between a neighborhood of 0 and $\Delta_{r(x)}$. The measurability of $\{D_x\}_{x\in E}$ implies that $x \mapsto r(x)$ is also measurable. As $\mathrm{Leb}(E) > 0$, there exists $a > 0$ and a subset E_a of E such that $\mathrm{Leb}(E_a) > 0$ and $r(x) > a$ for each point $x \in E_a$. Define

$$\begin{aligned} h : \Delta_a \times E_a &\to \Delta \\ (c, z) &\mapsto \rho_z^2 \circ (\rho_z^1)^{-1}(c), \end{aligned}$$

where $\rho_x^2 = \pi_2 \circ \rho_x$. By construction, h is well defined and $c \mapsto h(c, z)$ is holomorphic on Δ_a. Since the disks are pair-wise disjoint, the map $z \mapsto h(c, z)$ is injective for each $c \in \Delta_a$. Therefore, h is a holomorphic motion of E_a parametrized by Δ_a and by Lemma 2.4.4, the subset $\cup_{c\in\Delta_a}\{c\} \times h(c, E_a) \subset \cup_{x\in E} D_x$ has strictly positive Lebesgue measure in Δ^2. This completes the proof. □

2.5 Nonuniform hyperbolic dynamics

Suppose that g is a holomorphic self-map of a complex manifold M of dimension m. The following Oseledec's multiplicative ergodic theorem (cf. [KH95] and [Wal82]) gives information on the growth rate of $\|D_x g^n(v)\|$, $v \in T_x M$ as $n \to +\infty$. Here, $D_x g^n$ denotes the differential of g^n at x. Oseledec's theorem holds also when g is only defined in a neighborhood of $\mathrm{supp}(\nu)$.

Theorem 2.5.1. *Let g be as above and let ν be an ergodic probability with compact support in M. Assume that $\log^+ Jac(g)$ is in $L^1(\nu)$. Then there exist integers k, $m_1, \ldots, m_k$, real* *numbers* $\lambda_1 > \cdots > \lambda_k$ *(*λ_k *may be* $-\infty$*) and a subset* $\Lambda \subset M$ *such that* $g(\Lambda) = \Lambda$*,* $\nu(\Lambda) = 1$ *and for each* $x \in \Lambda$*,* T_xM *admits a measurable splitting*

$$T_xM = \bigoplus_{i=1}^{k} E_x^i$$

such that $\dim_{\mathbb{C}}(E_x^i) = m_i$*,* $D_xg(E_x^i) \subset E_{g(x)}^i$ *and*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|D_xg^n(v)\| = \lambda_i$$

locally uniformly on $v \in E_x^i \setminus \{0\}$*. Moreover, for* $S \subset N := \{1, ..., k\}$ *and* $E_x^S = \oplus_{i\in S} E_x^i$*, the angle between* $E_{g^n(x)}^S$ *and* $E_{g^n(x)}^{N\setminus S}$ *satisfies*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \sin |\angle(E_{g^n(x)}^S, E_{g^n(x)}^{N\setminus S})| = 0.$$

The constants λ_i are the *Lyapunov exponents* of g with respect to ν. It is not difficult to deduce that

$$2\sum_{i=1}^{k} m_i\lambda_i = \int \log \mathrm{Jac}(g) d\nu.$$

If all Lyapunov exponents are non-zero, Oseledec's theorem says that our system is nonuniformly hyperbolic and we say that ν is *hyperbolic*. In this case, let $\lambda > 0$ such that $\lambda < |\lambda_i|$ for all $1 \leq i \leq k$ and let

$$E_x^s = \bigoplus_{\lambda_i<0} E_x^i, \;\; E_x^u = \bigoplus_{\lambda_i>0} E_x^i.$$

Then, for each point x in Λ and $\delta > 0$ we define the *stable manifolds* at x by

$$W_\delta^s(x) = \{y \in M \,|\, d(g^n(x), g^n(y)) < \delta e^{-\lambda n} \quad \forall n \geq 0\}.$$

From Pesin's theory, we have the following fundamental result, see [BP07], [PS89], [RS80] and [Pol93] for more details.

Theorem 2.5.2. *There exists a strictly positive measurable function* δ *on* Λ *such that if* $x \in \Lambda$ *then*

i) $W_{\delta(x)}^s(x)$ *is an immersed manifold in* M*,*

ii) $T_xW_{\delta(x)}^s(x) = E_x^s$*,*

iii) $W_{\delta(x)}^s(x)$ *depends measurably of* x*.*

In our setting with an invariant elliptic curve which has a negative Lyapunov exponent, we do not have a uniform hyperbolic system. Indeed, since $\mathcal{C}$ cannot be a trapped attractor, the function δ cannot be a constant.

2.6 Basin of an attracting curve

Since the support of $\mu_{\mathcal{C}}$ does not contain indeterminacy points, we have $\log^+ \mathrm{Jac}(f) \in L^1(\mu_{\mathcal{C}})$. We assume that $\mu_{\mathcal{C}}$ has a strictly negative transverse exponent χ_2. Then, there exists a hyperbolic set $\Lambda \subset \mathcal{C}$ such that $\mu_{\mathcal{C}}(\Lambda) = 1$ and $E_x^u = T_x\mathcal{C}$ for all $x \in \Lambda$.

The first step to apply Lemma 2.2.3 is to find, for some $p \in \Lambda$, an open neighborhood where the stable manifolds are pair-wise disjoint. To this end, we prove that the restriction g inherits the repulsive behavior of $\widetilde{g}$. Recall that $d(\,.\,,.)$ is the distance on $\mathbb{P}^2$ and denote by $\widetilde{d}(\,.\,,.)$ the standard distance on $\mathbb{C}/\Gamma$.

Lemma 2.6.1. *There is a constant $\beta > 0$ such that for each $p \in \mathcal{C} \setminus S$ we can find $\alpha > 0$ with the property that, if $x, y \in \mathcal{C}$ are distinct points in the ball $B(p, \alpha)$ of radius α centered at p, then $d(f^n(x), f^n(y)) > \beta$ for some $n \geq 0$.*

Proof. As the normalization π is one-to-one except on finitely many points, we can find a finite open covering $\{U_k\}_{k\in K}$ of $\mathbb{C}/\Gamma$ such that π is injective on each $\overline{U_k}$. Let $z_1, z_2 \in \mathbb{C}/\Gamma$. We denote by $\epsilon > 0$ a Lebesgue number of this covering, i.e. if $\widetilde{d}(z_1, z_2) < \epsilon$ then, there exists $k \in K$ such that z_1 and z_2 are in U_k.

Recall that one can choose $r > 0$ such that if $\widetilde{d}(z_1, z_2) < r$ then $\widetilde{d}(\widetilde{g}(z_1), \widetilde{g}(z_2)) = |a|\widetilde{d}(z_1, z_2)$. We can assume that $\epsilon < r$. Let $\widetilde{\alpha} > 0$ such that $2|a|\widetilde{\alpha} \leq \epsilon$. If $0 < \widetilde{d}(z_1, z_2) < \widetilde{\alpha}$ then there exists $n \geq 0$ such that

$$\widetilde{\alpha} < \widetilde{d}(\widetilde{g}^n(z_1), \widetilde{g}^n(z_2)) \leq |a|\widetilde{\alpha}.$$

Therefore, we can find $k \in K$ such that $\widetilde{g}^n(z_1)$ and $\widetilde{g}^n(z_2)$ are in U_k. So

$$d(f^n(\pi(z_1)), f^n(\pi(z_2))) > \beta,$$

where

$$\beta = \min_{k\in K} \inf_{\substack{x_1, x_2 \in U_k \\ \widetilde{d}(x_1, x_2) > \widetilde{\alpha}}} d(\pi(x_1), \pi(x_2)) > 0.$$

Finally, for each $p \in \mathcal{C} \setminus S$ we can choose $\alpha > 0$ such that if $x, y \in B(p, \alpha) \cap \mathcal{C}$, there are preimages $\widetilde{x}$ and $\widetilde{y}$ of x and y by π which satisfy $\widetilde{d}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) < \widetilde{\alpha}$. Then, $d(f^n(x), f^n(y)) > \beta$ for some $n \geq 0$. □

Lemma 2.6.2. *Let $p \in \Lambda$. There exist $\delta_0 > 0$ and an open neighborhood U of p such that if $\delta < \delta_0$, $x, y \in U \cap \Lambda$, $x \neq y$ then $W^s_\delta(x) \cap W^s_\delta(y) = \varnothing$.*

Proof. By Lemma 2.6.1, we can choose for U the ball of radius α centered at p and $\delta_0 \leq \beta/2$. If there exist $x, y \in U \cap \Lambda$, $x \neq y$, with $W^s_\delta(x) \cap W^s_\delta(y) \neq \varnothing$, then for $z \in W^s_\delta(x) \cap W^s_\delta(y)$,

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), f^n(z)) + d(f^n(z), f^n(y)) \leq 2\delta e^{-\lambda n} \leq 2\delta,$$

for every n, which contradicts Lemma 2.6.1. □

Proof of Theorem 2.2.2. Let $p \in \Lambda$ be a regular point of $\mathcal{C}$. Choosing suitable local coordinates at p, we can assume that $p \in \Delta^2$ and $\mathcal{C} \cap \Delta^2 = \{0\} \times \Delta$. Let $x \in \Lambda \cap \Delta^2$. By the stable manifold theorem, there exists $\delta(x) > 0$ such that $W^s_{\delta(x)}(x) \cap \Delta^2$ is an immersed manifold in Δ^2. So, there exists a measurable family of embedded holomorphic disks $\rho_x : \Delta \to U$ with $\rho_x(0) = x$ and $\rho_x(\Delta) \subset W^s_{\delta(x)}(x) \cap U$.

First, by Lemma 2.6.2, possibly after replacing Δ^2 by a smaller polydisk, we can choose $\delta(x) < \delta_0$ for all $x \in \Lambda \cap \Delta^2$. The stable manifolds $W^s_{\delta(x)}(x)$ are then pair-wise disjoint.

Since $W^s_{\delta(x)}(x)$ is tangent to E^s_x in x, the family of disks is transverse to $\{0\} \times \Delta$. Then, by Lemma 2.2.3 the union of stable manifolds, which is included in the basin of $\mathcal{C}$, has strictly positive measure. □

Remark 2.6.3. *Our method can be apply to a more general setting. Let $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ be a rational map of degree $d \geq 2$ and let $H \subset \mathbb{P}^k$ be an invariant hypersurface. Assume that $f_{|H}$ has a dense orbit and that H supports a f-ergodic measure μ which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure on H. We obtain in the same way that if μ has $k-1$ strictly positive Lyapunov exponents in the direction of H and one strictly negative exponent then the basin of H has strictly positive measure. For example, if $H \simeq \mathbb{P}^{k-1}$ and the equilibrium mesure μ of $f_{|H}$ has a negative exponent in $\mathbb{P}^k$, this happen if $f_{|H}$ is a Lattès map cf. [BD05]. But in dimension $k \geq 3$, there may be many more types of invariant hypersurfaces.*

Chapter 3

Equidistribution speed towards the Green current

Let f be a non-invertible holomorphic endomorphism of $\mathbb{P}^k$. For a hypersurface H of $\mathbb{P}^k$, generic in the Zariski sense, we give an explicit speed of convergence of $f^{-n}(H)$ towards the dynamical Green $(1,1)$-current of f. The content of this chapter comes essentially from [Taf11a], see also [Taf11b].

3.1 Equidistribution problem

Let f be a holomorphic endomorphism of algebraic degree $d \geq 2$ on the complex projective space $\mathbb{P}^k$. The iterates $f^n = f \circ \cdots \circ f$ define a dynamical system on $\mathbb{P}^k$. It is well know that, if ω denotes the normalized Fubini-Study form on $\mathbb{P}^k$ then the sequence $d^{-n}(f^n)^*(\omega)$ converges to a positive closed current T of bidegree $(1,1)$ called the Green current of f (see e.g. [DS10a]). It is a totally invariant current, whose support is the Julia set of f and that exhibits interesting dynamical properties. In particular, for a generic hypersurface H of degree s, the sequence $d^{-n}(f^n)^*[H]$ converges to sT [DS08]. Here, $[H]$ denotes the current of integration on H and the convergence is in the sense of currents. In fact, if we denote by T^p the self-intersection $T \wedge \cdots \wedge T$, Dinh and Sibony proposed the following conjecture on equidistribution.

Conjecture 3.1.1. *Let f be a holomorphic endomorphism of $\mathbb{P}^k$ of algebraic degree $d \geq 2$ and T its Green current. If H is an analytic set of pure codimension p and of degree s which is generic in the Zariski sense, then the sequence $d^{-pn}(f^n)^*[H]$ converges to sT^p exponentially fast.*

The aim of the chapter is to prove the conjecture for $p = 1$. It is a direct consequence of the following more precise result on currents. Indeed, we only have to apply the theorem to $S := s^{-1}[H]$ for hypersurfaces H which does not contain any element of $\mathscr{A}_\lambda$.

Theorem 3.1.2. *Let f, T be as above and let $1 < \lambda < d$. There exists a finite family $\mathscr{A}_\lambda$ of periodic irreducible analytic sets such that if S is a positive closed $(1,1)$-current of mass 1, whose dynamical potential u verifies $\|u\|_{L^1(X)} \leq C$ for all X in $\mathscr{A}_\lambda$, then the sequence $S_n := d^{-n}(f^n)^*(S)$ converges exponentially fast to T. More precisely, for every $0 < \beta \leq 2$ and $\phi \in \mathscr{C}^\beta(\mathbb{P}^k)$ we get*

$$|\langle S_n - T, \phi \rangle| \leq A \|\phi\|_{\mathscr{C}^\beta} \left(\frac{\lambda}{d}\right)^{n\beta/2}, \tag{3.1}$$

where $A > 0$ depends on the constants C and β but is independent of S, ϕ and n.

Here, the space $L^1(X)$ is with respect to the volume form $\omega^{\dim(X)}$ on X and $\mathscr{C}^\beta(\mathbb{P}^k)$ denotes the space of $(k-1,k-1)$-forms whose coefficients are of class $\mathscr{C}^\beta$, equipped with the norm induced by a fixed atlas. *The dynamical potential* of S is the unique quasi-plurisubharmonic function u such that $S = dd^c u + T$ and $\max_{\mathbb{P}^k} u = 0$. Note that $\mathscr{A}_\lambda$ will be explicitly constructed. Theorem 3.1.2 still holds if we replace $\mathscr{A}_\lambda$ by an analytic subset, e.g. a finite set, which intersects all components of $\mathscr{A}_\lambda$.

In the last section, we prove a similar result for a regular automorphism $f\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ outside its indeterminacy set.

Equidistribution problem without speed was considered in dimension 1 by Brolin [Bro65] for polynomials and by Lyubich [Lyu83] and Freire Lopes and Mañé [FLM83] for rational maps. They proved that for every point a in $\mathbb{P}^1$, with maybe two exceptions, the preimages of a by f^n converge towards the equilibrium measure, which is the counterpart of the Green current in dimension 1. In this context, a result in the direction of Theorem 3.1.2 was obtained in [DO07] (see also references therein).

In higher dimension, for $p = k$, simple convergence in Conjecture 3.1.1 was established by Fornæss and Sibony [FS94b], Briend and Duval [BD01], Dinh and Sibony [DS03]. Recently in [DS10b], Dinh and Sibony give exponential speed of convergence, which completes Conjecture 3.1.1 for $p = k$. The equidistribution of hypersurfaces was proved by Fornæss and Sibony for generic maps [FS95] and by Favre and Jonsson in dimension 2 [FJ03]. The convergence for general endomorphisms and Zariski generic hypersurfaces was obtained by Dinh and Sibony in [DS08]. These papers state convergence but without speed. In other codimensions, the problem is much more delicate. However, the conjecture was solved for generic maps in [DS09], using the theory of super-potentials.

We partially follow the strategy developed in [FS95], [FJ03] and [DS08], which is based on pluripotential theory together with volume estimates, i.e. a lower bound to the contraction of volume by f. These estimates are available outside some exceptional sets which are treated using hypothesis on the map f or on the current S.

The exceptional set $\mathscr{A}_\lambda$ will be defined in Section 3.5. It is in general a union of periodic analytic sets possibly singular. In our proof of Theorem 3.1.2, it is necessary to obtain the convergence of the trace of S_n to these analytic sets. So, we have to prove an analog of Theorem 3.1.2 where $\mathbb{P}^k$ is replaced with an invariant analytic set. The geometry of the analytic set near singularities is the source of important technical difficulties. We will collect in Section 3.2 and Section 3.3 several versions of Lojasiewicz's inequality which will allow us to work with singular analytic sets and also to obtain good estimates on the size of a ball under the action of f^n. Such estimates are crucial in order to obtain the convergence outside exceptional sets.

Theorem 3.1.2 can be reformulated as an L^1 estimate of the dynamical potential u_n of S_n (see Theorem 3.6.1). The problem is equivalent to a size control of the sublevel set $K_n = \{u_n \leq -(\lambda/d)^n\}$. Since T is totally invariant, we get that $u_n = d^{-n} u \circ f^n$ and $f^n(K_n) = \{u \leq -\lambda^n\}$. The above estimate on the size of ball can be applied provided that K_n be not concentrated near the exceptional sets. The last property will be obtained using several generalizations of exponential Hörmander's estimate for plurisubharmonic functions that will be stated in Section 3.4. A key point in our approach is that, by reducing the domain of integration, we obtain uniform exponential estimates for non-compact families of quasi-plurisubharmonic functions.

We close this section by setting some notations and conventions. The symbols $\lesssim$ and $\gtrsim$ mean inequalities up to constants which only depend on f or on the ambient space.

To desingularize an analytic subset of $\mathbb{P}^k$, we always use a finite sequence of blow-ups of $\mathbb{P}^k$. Unless otherwise specified, the distances that we consider are naturally induced by embedding or smooth metrics for compact manifolds. For $K > 0$ and $0 < \alpha \leq 1$, we say that a function $u : X \to \mathbb{C}$ is (K, α)-Hölder continuous if for all x and y in X, we have $|u(x) - u(y)| \leq K\mathrm{dist}(x, y)^\alpha$. We denote by $\mathbb{B}$ the unit ball of $\mathbb{C}^k$ and for $r > 0$, by $\mathbb{B}_r$ the ball centered at the origin with radius r. In $\mathbb{P}^k$, we denote by $B(x, r)$ the ball of center x and of radius r. And, for $X \subset \mathbb{P}^k$ an analytic subset, we denote by $B_X(x, r)$ the connected component of $B(x, r) \cap X$ which contains x. We call it the ball of center x and of radius r in X. It may have more than one irreducible component. Finally, for a subset $Z \subset X$, we denote by $Z_{X,t}$ or simply Z_t, the tubular t-neighborhood of Z in X, i.e. the union of $B_X(z, t)$ for all z in Z. A function on X is called (strongly) holomorphic if it has locally a holomorphic extension to a neighborhood of the ambient space.

3.2 Lojasiewicz's inequality and consequences

One of the main technical difficulties of our approach is related to singularities of analytic sets that we will handle using blow-ups along smooth varieties. In this section, we study the behavior of metric properties under blow-ups. It will allow us to establish volume and exponential estimates onto singular analytic sets.

We will frequently use the following Lojasiewicz inequalities. We refer to [BM88] for further details.

Theorem 3.2.1. *Let U be an open subset of $\mathbb{C}^k$ and let h, g be subanalytic functions in U. If $h^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$, then for any compact subset K of U, there exists a constant $N \geq 1$ such that, for all z in K, we have*

$$|h(z)| \gtrsim |g(z)|^N.$$

In this chapter, we only use the notion of subanalytic function in the following case. Let U be an open subset of $\mathbb{C}^k$ and $A \subset U$ be an analytic set. Every compact of U has a neighborhood $V \subset U$ such that the function $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ and analytic functions on U are subanalytic on V. Moreover, the composition or the sum of two such functions is still subanalytic on V. In particular, we have the following property.

Corollary 3.2.2. *Let U be an open subset of $\mathbb{C}^k$ and let A, B be analytic subsets of U. Then for any compact subset K of U, there exists a constant $N \geq 1$ such that, for all z in K, we have*

$$\mathrm{dist}(z, A) + \mathrm{dist}(z, B) \gtrsim \mathrm{dist}(z, A \cap B)^N.$$

We briefly recall the construction of blow-up that we will use later. If U is an open subset of $\mathbb{C}^k$ which contains 0, the blow-up $\widehat{U}$ of U at 0 is the submanifold of $U \times \mathbb{P}^{k-1}$ defined by the equations $z_i w_j = z_j w_i$ for $1 \leq i, j \leq k$ where $(z_1, \ldots, z_k)$ are the coordinates of $\mathbb{C}^k$ and $[w_1 : \cdots : w_k]$ are the homogeneous coordinates of $\mathbb{P}^{k-1}$. The sets $w_i \neq 0$ define local charts on $\widehat{U}$ where the canonical projection $\pi : \widehat{U} \to U$, if we set for simplicity $i = 1$ and $w_1 = 1$, is given by

$$\pi(z_1, w_2, \ldots, w_k) = (z_1, z_1 w_2, \ldots, z_1 w_k).$$

If $V \subset \mathbb{C}^p$ is an open subset, *the blow-up* of $U \times V$ along $\{0\} \times V$ is defined by $\widehat{U} \times V$. This is the local model of a blow-up.

Finally, if X is a complex manifold, the blow-up $\widehat{X}$ of X along a submanifold Y is obtained by sticking copies of the above model and by using suitable atlas of X. The natural projection $\pi : \widehat{X} \to X$ defines a biholomorphism between $\widehat{X} \setminus \widehat{Y}$ and $X \setminus Y$ where the set $\widehat{Y} := \pi^{-1}(Y)$ is called the exceptional hypersurface. If A is an analytic subset of X not contained in Y, the strict transform of A is defined as the closure of $\pi^{-1}(A \setminus Y)$.

We have the following elementary lemma.

Lemma 3.2.3. *Let $\pi : \widehat{U} \times V \to U \times V$ be as above and $\widehat{Y}$ denote the exceptional hypersurface in $\widehat{U} \times V$. Assume that $U \times V$ is bounded in $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^p$. Then for all $\widehat{z}, \widehat{z}' \in \widehat{U} \times V$, we have*

$$\operatorname{dist}(z, z') \gtrsim \operatorname{dist}(\widehat{z}, \widehat{z}')(\operatorname{dist}(\widehat{z}, \widehat{Y}) + \operatorname{dist}(\widehat{z}', \widehat{Y})),$$

where $z = \pi(\widehat{z})$ and $z' = \pi(\widehat{z}')$.

Proof. Since π leaves invariant the second coordinate, considering the maximum norm on $U \times V$, the general setting is reduced to the case of blow-up of a point. Hence we can take $V = \{0\}$. The lemma is obvious if z or z' is equal to 0. Since π is a biholomorphism outside $\widehat{Y}$, we can assume that $0 < \|z\|, \|z'\| < 1$. Moreover, up to an isometry of $\mathbb{C}^k$, we can assume that $\max |z_i| = |z_1|$ and $\max |z'_i| = |z'_1|$. Indeed, we can send z and z' into the plane generated by the first two coordinates and then use the rotation group of this plane. Therefore, in the chart $w_1 = 1$, we have $\widehat{z} = (z_1, w_2, \ldots, w_k)$, $\widehat{z}' = (z'_1, w'_2, \ldots, w'_k)$ with $|w_i|, |w'_i| \leq 1$.

By triangle inequality, we have

$$|z_1 w_i - z'_1 w'_i| \geq |z_1 w_i - z_1 w'_i| - |z_1 w'_i - z'_1 w'_i| \geq |z_1||w_i - w'_i| - |z_1 - z'_1|.$$

Hence, by symmetry in z_1 and z'_1 we get

$$2|z_1 w_i - z'_1 w'_i| \geq (|z_1| + |z'_1|)|w_i - w'_i| - 2|z_1 - z'_1|.$$

Therefore, there is a constant $a > 0$ independent of z and z' such that

$$|z_1 - z'_1| + \sum_{i=2}^{k} |z_1 w_i - z'_1 w'_i| \geq a(|z_1| + |z'_1|)(|z_1 - z'_1| + \sum_{i=2}^{k} |w_i - w'_i|).$$

The left-hand side corresponds to $\operatorname{dist}(z, z')$. We also have that $\operatorname{dist}(\widehat{z}, \widehat{z}') \simeq |z_1 - z'_1| + \sum_{i=2}^{k} |w_i - w'_i|$ and $\operatorname{dist}(\widehat{z}, \widehat{Y}) + \operatorname{dist}(\widehat{z}', \widehat{Y}) \simeq |z_1| + |z'_1|$. The result follows. □

A similar result holds for analytic sets. More precisely, consider an irreducible analytic subset X of $\mathbb{P}^k$ of dimension l and a smooth variety Y contained in X. Let $\overline{\pi} : \widehat{\mathbb{P}^k} \to \mathbb{P}^k$ be the blow-up along Y and π the restriction of $\overline{\pi}$ to the strict transform $\widehat{X}$ of X. Denote by $\overline{Y}$ and $\widehat{Y}$ the exceptional hypersurfaces in $\widehat{\mathbb{P}^k}$ and in $\widehat{X}$ respectively.

Lemma 3.2.4. *There exists $N \geq 1$ such that for all $\widehat{z}$ and $\widehat{z}'$ in $\widehat{X}$*

$$\operatorname{dist}(z, z') \gtrsim \operatorname{dist}(\widehat{z}, \widehat{z}')(\operatorname{dist}(\widehat{z}, \widehat{Y}) + \operatorname{dist}(\widehat{z}', \widehat{Y}))^N,$$

Proof. The previous lemma gives the inequality with $N = 1$ if we substitute $\widehat{Y}$ by $\overline{Y}$. By Corollary 3.2.2 applied to $A = \widehat{X}$ and $B = \overline{Y}$, there exists $N \geq 1$ such that $\operatorname{dist}(\widehat{x}, \overline{Y}) \gtrsim \operatorname{dist}(\widehat{x}, \widehat{Y})^N$ for all $\widehat{x}$ in $\widehat{X}$. The result follows. □

Here is the first estimate on contraction for blow-ups.

Lemma 3.2.5. *There exists a constant $N \geq 1$ such that for all $0 < t \leq 1/2$, if $\mathrm{dist}(\widehat{x}, \widehat{Y}) > t$ and $r < t/2$, then $\pi(B_{\widehat{X}}(\widehat{x}, r))$ contains $B_X(\pi(\widehat{x}), t^N r)$. Moreover, if N is large enough then the image by π of a ball of radius $0 < r \leq 1/2$ contains a ball of radius r^N in X.*

Proof. Let $\widehat{y}$ be a point in $\widehat{X}$ such that $\mathrm{dist}(\widehat{x}, \widehat{y}) = r$ and set $x = \pi(\widehat{x})$, $y = \pi(\widehat{y})$. The assumption on r gives that $\mathrm{dist}(\widehat{y}, \widehat{Y}) > t/2$. Therefore, we deduce from Lemma 3.2.4 that

$$\mathrm{dist}(x, y) \gtrsim r t^N.$$

The first assertion follows since $t \leq 1/2$ and π is a biholomorphism outside $\widehat{Y}$.

For a general ball B of radius r in $\widehat{X}$, we can reduce the ball in order to avoid $\widehat{Y}$ and then apply the first statement. More precisely, as $\dim(\widehat{Y}) \leq l - 1$ there is a constant $c > 0$ such that for all $\rho > 0$, $\widehat{Y}$ is cover by $c\rho^{-2(l-1)}$ balls of radius ρ. On the other hand, by a theorem of Lelong [Lel68, Dem09], the volume of a ball of radius ρ in $\widehat{X}$ varies between $c'^{-1}\rho^{2l}$ and $c'\rho^{2l}$ for some $c' > 0$. Hence, the volume of $\widehat{Y}_\rho$ is of order ρ^2. Take $\rho = c'' r^l$ with $c'' > 0$ small enough. By counting the volume, we see that B is not contained in $\widehat{Y}_\rho$. Therefore, $B \setminus \widehat{Y}$ contains a ball of radius $\rho/3$. We obtain the result using the first assertion. □

In the same spirit, we have the following lemma.

Lemma 3.2.6. *Let $\widehat{Z}$ be a compact manifold, Z be an irreducible analytic subset of $\mathbb{P}^k$ and $\pi : \widehat{Z} \to Z$ be a surjective holomorphic map. Let A be an irreducible analytic subset of Z and define $\widehat{A} := \pi^{-1}(A)$. There exists $N \geq 1$ such that A_{t^N} is included in $\pi(\widehat{A}_t)$ for all $t > 0$ small enough. Moreover, if $\widehat{A}$ is the union on two analytic sets $\widehat{A}_1$, $\widehat{A}_2$ such that $A_2 := \pi(\widehat{A}_2)$ is strictly contained in A then $\pi(\widehat{A}_{1,t})$ contains $A_{t^N} \setminus A_{2,t^{1/2}}$.*

Proof. Since $\mathrm{dist}(\widehat{z}, \widehat{A}) = 0$ if and only if $\mathrm{dist}(\pi(\widehat{z}), A) = 0$, we can apply Theorem 3.2.1 to these functions which implies the existence of $N \geq 1$ such that

$$\mathrm{dist}(\widehat{z}, \widehat{A})^N \lesssim \mathrm{dist}(\pi(\widehat{z}), A).$$

Therefore, since π is surjective, $\pi(\widehat{A}_t)$ contains A_{t^N} for $t > 0$ small enough.

Now, let $\widehat{A} = \widehat{A}_1 \cup \widehat{A}_2$ be as above. Since π is holomorphic, there exists $c > 0$ such that $\pi(\widehat{A}_{2,t}) \subset A_{2,ct}$. Therefore, $\pi(\widehat{A}_{1,t})$ contains $A_{t^N} \setminus A_{2,t^{1/2}}$ for $t > 0$ sufficiently small. □

In the sequel, we will constantly use desingularization of analytic sets. The following lemma allows us to conserve integral estimates.

Lemma 3.2.7. *Let Z and $\widehat{Z}$ be irreducible analytic subsets of Kähler manifolds. Let $\pi : \widehat{Z} \to Z$ be a surjective proper holomorphic map. Then, for every compact $\widehat{L}$ of $\widehat{Z}$ there exists $q \geq 1$ such that if v is in $L^q_{loc}(Z)$ then $\widehat{v} := v \circ \pi$ is in $L^1(\widehat{L})$. Moreover, there exists $c > 0$, depending on $\widehat{L}$, such that*

$$\|\widehat{v}\|_{L^1(\widehat{L})} \leq c\|v\|_{L^q(\pi(\widehat{L}))}.$$

Proof. Using a desingularization, we can assume that $\widehat{Z}$ is a smooth Kähler manifold with a Kähler form $\widehat{\omega}$. Denote by ω, n, m a Kähler form on Z and the dimensions of Z and $\widehat{Z}$ respectively. Generic fibers of π are compact of dimension $m - n$ and form a continuous family. It follows that the integral of $\widehat{\omega}^{m-n}$ on that fibers is a constant.

Consider $\widehat{\lambda} = \pi^*(\omega^n) \wedge \widehat{\omega}^{m-n}$ on $\widehat{Z}$. The last observation implies that $\pi_*(\widehat{\lambda}) = \omega^n$ up to a constant. Therefore, if v is in $L^q_{loc}(Z)$ then $\widehat{v}$ is in $L^q_{loc}(\widehat{Z}, \widehat{\lambda})$. Moreover, we can write

$\widehat{\lambda} = h\widehat{\omega}^m$ where h is a positive function. If there exists $\tau > 0$ such that $h^{-\tau}$ is integrable on $\widehat{L}$ with respect to $\widehat{\omega}^m$, we obtain for $p = 1 + \tau$ and q its conjugate that

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{L}} |\widehat{v}|\widehat{\omega}^m = \int_{\widehat{L}} |\widehat{v}|h^{-1}\widehat{\lambda} &\leq \left(\int_{\widehat{L}} |\widehat{v}|^q\widehat{\lambda}\right)^{1/q} \left(\int_{\widehat{L}} h^{-p}\widehat{\lambda}\right)^{1/p} \\ &\lesssim \left(\int_{\pi(\widehat{L})} |v|^q\omega^n\right)^{1/q} \left(\int_{\widehat{L}} h^{-\tau}\widehat{\omega}^m\right)^{1/p} \\ &\lesssim \|v\|_{L^q(\pi(\widehat{L}))}.\end{aligned}$$

It remains to show the existence of τ. The set $\{h = 0\}$ is contained in the complex analytic set A where the rank of π is not maximal. More precisely, if π has maximal rank at z, then we can linearize π in a neighborhood of z. Therefore, $\widehat{\lambda}$ and $\widehat{\omega}^m$ are comparable in that neighborhood.

Since $\widehat{L}$ is compact, the problem is local. Let z_0 be in $\widehat{L}$. We can find a small chart U at z_0 and a holomorphic function ϕ on U such that $A \cap U$ is contained in $\{\phi = 0\}$. We can also replace $\widehat{\omega}$ and ω by standard Euclidean forms on U and on a neighborhood of $\pi(U)$. So, we can assume that h is analytic. By Lojasiewicz inequality, for every compact K of U, there exists $N \geq 1$ such that $h(z) \gtrsim |\phi(z)|^N$ for all z in K. On the other hand, exponential estimate (cf. [Hör90] and Section 3.4) applied to the plurisubharmonic function $\log|\phi|$ says that $\phi^{-\alpha}$ is in $L^1(K, \widehat{\omega}^m)$ for some $\alpha > 0$. Therefore, $h^{-\alpha/N}$ belongs to $L^1(K, \widehat{\omega}^m)$. We obtain the desired property near z_0 by taking $\tau \leq \alpha/N$. □

Finally, the following results establish a relation between the regularity of functions on an analytic set and that of their lifts to a desingularization.

Proposition 3.2.8. *Let Z, $\widehat{Z}$, π be as in Lemma 3.2.7 and v be a function on Z. Assume that the lift of v to $\widehat{Z}$ is (K, α)-Hölder continuous. Then, for every compact L of Z, there exist constants $0 < \alpha' \leq 1$ and $a > 0$, independent of v, such that v is (aK, α')-Hölder continuous on L.*

Proof. Let Δ be the diagonal of $Z \times Z$. We still denote by π the map induced on the product $\widehat{Z} \times \widehat{Z}$ and we set $\widehat{\Delta} = \pi^{-1}(\Delta)$. As in Lemma 3.2.6, by Lojasiewicz inequality, we have

$$\operatorname{dist}(\widehat{a}, \widehat{\Delta})^M \lesssim \operatorname{dist}(\pi(\widehat{a}), \Delta),$$

if $\pi(\widehat{a}) \in L \times L$. Therefore, if we set $\widehat{a} = (\widehat{x}, \widehat{x}')$ and $\pi(\widehat{a}) = (x, x')$, then we can rewrite this inequality as

$$(\operatorname{dist}(\widehat{x}, \widehat{z}) + \operatorname{dist}(\widehat{x}', \widehat{z}'))^M \lesssim \operatorname{dist}(x, x'), \tag{3.2}$$

for some $\widehat{z}, \widehat{z}' \in \widehat{Z}$ such that $\pi(\widehat{z}) = \pi(\widehat{z}')$.

Now, let v be as in the proposition and $\widehat{v} = v \circ \pi$ denote its lift. Taking the same notation as above we have

$$|v(x) - v(x')| = |\widehat{v}(\widehat{x}) - \widehat{v}(\widehat{x}')| \leq |\widehat{v}(\widehat{x}) - \widehat{v}(\widehat{z})| + |\widehat{v}(\widehat{z}') - \widehat{v}(\widehat{x}')|,$$

since $\pi(\widehat{z}) = \pi(\widehat{z}')$ which implies that $\widehat{v}(\widehat{z}) = \widehat{v}(\widehat{z}')$. Therefore, the assumption on $\widehat{v}$ implies that

$$|v(x) - v(x')| \leq K(\operatorname{dist}(\widehat{x}, \widehat{z})^\alpha + \operatorname{dist}(\widehat{z}', \widehat{x}')^\alpha),$$

and finally (3.2) gives

$$|v(x) - v(x')| \leq aK\operatorname{dist}(x, x')^{\alpha/M},$$

where $a > 0$ depends only on α, L and π. □

Corollary 3.2.9. *For every compact L of Z, there exists $0 < \alpha \leq 1$ such that every continuous weakly holomorphic function on Z is α-Hölder continuous on L. Moreover, every uniformly bounded family of such functions is uniformly α-Hölder continuous on L.*

Proof. Recall that a continuous function on Z is weakly holomorphic if it is holomorphic on the regular part of Z. The result is known if Z is smooth with $\alpha = 1$. Therefore, in general, it is enough to apply Proposition 3.2.8 to a desingularization of Z. □

In Proposition 3.3.4, we will need a similar result in a local setting but with a uniform control of the constants. It is the aim of the two following results.

Proposition 3.2.10. *Let Z, $\widehat{Z}$, π and L be as in Proposition 3.2.8. Let v be a function defined on a ball $B_Z(y,r) \subset L$ with $0 < r \leq 1/2$. Assume that $\widehat{v} = v \circ \pi$ is (K,α)-Hölder continuous. Then, there exist constants $0 < \alpha' \leq 1$, $a > 0$ and $N \geq 1$ independent of v, y and r such that v is (aK,α')-Hölder continuous on $B_Z(y,r^N)$.*

Proof. The proof is the same as that of Proposition 3.2.8 except that we have to check that if x and x' are in $B_Z(y,r^N)$ with $N \geq 1$ large enough, then $\widehat{v}$ is well defined at the points $\widehat{z}$ and $\widehat{z}'$ defined in (3.2).

Since π is holomorphic, we have $\mathrm{dist}(x,\pi(\widehat{z})) \lesssim \mathrm{dist}(\widehat{x},\widehat{z})$. Therefore, by (3.2) we have

$$\mathrm{dist}(x,\pi(\widehat{z})) \lesssim \mathrm{dist}(\widehat{x},\widehat{z}) + \mathrm{dist}(\widehat{x}',\widehat{z}') \lesssim \mathrm{dist}(x,x')^{1/M}.$$

Hence, if N is large enough, then $\widehat{z}$ and $\widehat{z}'$ belong to $\pi^{-1}(B_Z(y,r))$. Then, the result follows as in Proposition 3.2.8. □

Corollary 3.2.11. *For every compact L of Z, there are constants $0 < \alpha \leq 1$, $K > 0$ and $N \geq 1$ such that if v is a continuous weakly holomorphic function on $B_Z(y,r) \subset L$ with $|v| \leq 1$ then v is $(K/r,\alpha)$-Hölder continuous on $B_Z(y,r^N)$.*

Proof. Let $\pi : \widehat{Z} \to Z$ be a desingularization. Let $\widehat{z}$ be in $\pi^{-1}(B_Z(y,r/2))$. Since π is holomorphic, there is $a > 0$ such that $B_{\widehat{Z}}(\widehat{z},r/a)$ is contained in $\pi^{-1}(B_Z(y,r))$. Therefore, by Cauchy's inequality, $\widehat{v}$ is a/r-Lipschitz on $\pi^{-1}(B_Z(y,r/2))$. Hence, the result follows from Proposition 3.2.10. □

3.3 Volume estimate for endomorphisms

The multiplicities of an endomorphism f are strongly related to volume estimates which were used successfully to solve equidistribution problems. In what follows, we generalize Lojasiewicz type inequalities obtained in [FS95], [DS08] and [DS10b] to analytic sets, possibly singular. The aim is to control the size of a ball under iterations of f in an invariant analytic set. Singularities, in particular the points where the analytic sets are not locally irreducible, lead to technical difficulties.

In this section, X always denotes an irreducible analytic set of a smooth manifold. In order to avoid some problems related to the local connectedness of analytic sets, instead of the distance induced by an embedding of X, we consider the distance ρ defined by paths in X. Namely, if $x,y \in X$ then $\rho(x,y)$ is the length of the shortest path in X between x and y. These two distances on X are related by the following result (see e.g. [BM88]).

Theorem 3.3.1. *Let K be a compact subset of X. There exists a constant $r > 0$ such that for all $x,y \in K$ we have*

$$\mathrm{dist}(x,y) \leq \rho(x,y) \lesssim \mathrm{dist}(x,y)^r.$$

The first step to state volume estimate is the following result.

Proposition 3.3.2. *Let $\Gamma \subset \mathbb{B} \times \mathbb{B}$ and $X \subset \mathbb{B}$ be two analytic subsets with X locally irreducible and such that the first projection $\pi : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ defines a ramified covering of degree m from Γ to X. There exist constants $a > 0$ and $b \geq 1$ such that if $x, y \in X \cap \mathbb{B}_{1/2}$ then we can write*

$$\pi^{-1}(x) \cap \Gamma = \{x^1, \dots, x^m\} \text{ and } \pi^{-1}(y) \cap \Gamma = \{y^1, \dots, y^m\},$$

with $\mathrm{dist}(x, y) \geq a\mathrm{dist}(x^i, y^i)^{bm}$. Moreover, a increases with m but is independent of Γ and b depends only on X.

Proof. By Theorem 3.3.1, to establish the proposition, we can replace $\mathrm{dist}(x, y)$ by $\rho(x, y)$ on X. For $w \in X_{Reg}$, we can define the j-th Weierstrass polynomial, $k + 1 \leq j \leq 2k$, on $t \in \mathbb{C}$

$$P_j(t, w) = \prod_{z \in \pi^{-1}(w) \cap \Gamma} (t - z_j) = \sum_{l=0}^{m} a_{j,l}(w) t^l,$$

where $z = ((z_1, \dots, z_k), (z_{k+1}, \dots, z_{2k})) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B}$. The coefficients $a_{j,l}$ are holomorphic on X_{Reg} and uniformly bounded by $m!$ since $\Gamma \subset \mathbb{B} \times \mathbb{B}$. As X is locally irreducible, they can be extended continuously to X (see e.g. [Dem09]). It gives a continuous extension of the polynomials P_j to X with $P_j(z_j, \pi(z)) = 0$ if z is in Γ. Moreover, by Corollary 3.2.9 there exists $\alpha > 0$ such that the coefficients $a_{j,l}$ are uniformly α-Hölder continuous on $X \cap \mathbb{B}_{3/4}$ with respect to ρ.

We claim that there is a constant $a > 0$ such that if $x, y \in X \cap \mathbb{B}_{1/2}$ and $x' \in \mathbb{B}$ with $\widetilde{x} := (x, x') \in \Gamma$ then there is $\widetilde{y} \in \pi^{-1}(y) \cap \Gamma$ with

$$\rho(x, y) \geq a\mathrm{dist}(\widetilde{x}, \widetilde{y})^{bm},$$

where $b = 1/\alpha$. From this, the result follows exactly as in the end of the proof of [DS08, Lemma 4.3].

It remains to prove the claim. Fix $c > 0$ large enough and let $r = \rho(x, y)$. We can assume that r is non-zero and sufficiently small, otherwise the result is obvious. Since the covering has degree m, we can find an integer $2 \leq l \leq 4km$ such that for all $k+1 \leq j \leq 2k$, no root of the polynomial $P_j(t, x)$ satisfies

$$c(l-1) r^{1/bm} \leq |\widetilde{x}_j - t| \leq c(l+1) r^{1/bm}.$$

It gives *a security ring* over x which does not intersect Γ. Using the regularity of P_j, it can be extended to a neighborhood of x. More precisely, for $\theta \in \mathbb{R}$ we define $\xi_j = \widetilde{x}_j + cle^{i\theta} r^{1/bm}$ and

$$G_{j,c,\theta}(w) = c^{-m+1} P_j(\xi_j, w).$$

The choice of l implies that

$$|G_{j,c,\theta}(x)| = c^{-m+1} |P_j(\xi_j, x)| \geq c^{-m+1} \prod_{z \in \pi^{-1}(x)} |\xi_j - z_j| \geq c r^{\alpha}.$$

Moreover, we deduce from the properties on the coefficients $a_{j,l}$ that the functions $G_{j,c,\theta}$ are uniformly α-Hölder continuous on $X \cap \mathbb{B}_{3/4}$ with respect to (j, c, θ). Hence, if c is large enough, they do not vanish on $B := \{z \in X \mid \rho(x, z) < 2r\}$ which contains y.

It implies that $P_j(t, w) \neq 0$ if w is in B and $|t - \widetilde{x}_j| = lcr^{1/bm}$. Therefore, if we denote by Σ the boundary of the polydisc of center x' and of radius $lcr^{1/bm}$, we have $\Gamma \cap (B \times \Sigma) = \varnothing$. Hence, since B is connected and contains y, by continuity there is a point $\widetilde{y}$ in $\pi^{-1}(y) \cap \Gamma$ with $|\widetilde{x}_j - \widetilde{y}_j| \leq lcr^{1/bm}$. This completes the proof of the claim. □

Remark 3.3.3. *Our proof shows that if we assume that $m \leq m_0$ for a fixed m_0, then a depends only on the Hölder constants (K, α) associated with $a_{j,l}$. Furthermore, if α is fixed then a is proportional to K. Note that without assumption on the constants a and b, Proposition 3.3.2 can be deduced from Theorem 3.2.1.*

The control of multiplicities of the covering gives the following more precise result.

Proposition 3.3.4. *Let X, Γ and π be as above. Let $Z \subset X$ be a proper analytic subset. Assume that the multiplicity at each point of $\pi^{-1}(x)$ is at most equal to s if $x \in X \setminus Z$. Then, there exist constants $a > 0$, $b \geq 1$ and $N \geq 1$ such that for all $0 < t \leq 1/2$ and $x, y \in X \cap \mathbb{B}_{1/2}$ with $\operatorname{dist}(x, Z) > t$ and $\operatorname{dist}(y, Z) > t$, we can write*

$$\pi^{-1}(x) \cap \Gamma = \{x^1, \ldots, x^m\} \text{ and } \pi^{-1}(y) \cap \Gamma = \{y^1, \ldots, y^m\},$$

with $\operatorname{dist}(x, y) \geq a t^N \operatorname{dist}(x^i, y^i)^{bs}$.

Proof. Let $t > 0$ and $x \in X \cap \mathbb{B}_{1/2}$ with $\operatorname{dist}(x, Z) > t$. We want to find a neighborhood $B \subset X$ of x such that each component of $\Gamma \cap \pi^{-1}(B)$ defines a ramified covering of degree at most equal to s over B.

We construct an analytic set Y associated to the multiplicities of Γ. Namely, first define $Y' \subset \Gamma^{s+1}$ by $\{z \in \Gamma^{s+1} \mid \pi \circ \tau_i(z) = \pi \circ \tau_j(z),\ 1 \leq i, j \leq s+1\}$, where τ_i, $1 \leq i \leq s+1$, are the canonical projections of Γ^{s+1} onto Γ. For $i \neq j$ we set $A_{i,j} = \{z \in Y' \mid \tau_i(z) = \tau_j(z)\}$. Then, Y is defined by $\overline{Y' \setminus \cup_{i \neq j} A_{i,j}}$. The map $\pi_1 = \pi \circ \tau_1 : Y \to X$ defines a ramified covering. If x is generic in X then a point $z \in Y$ over $x \in X$ represents a family of $(s+1)$ distinct points in $\pi^{-1}(x) \cap \Gamma$.

If π' denotes the second projection of $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ onto $\mathbb{B}$, consider the map $h : Y \to \mathbb{C}^{(s+1)^2}$ define by

$$h(z) = (\pi' \circ \tau_i(z) - \pi' \circ \tau_j(z))_{1 \leq i,j \leq s+1}.$$

By construction, $h(z) = 0$ means precisely that there is a point in Γ with multiplicity greater than s over $\pi_1(z)$. It implies that $\pi_1(h^{-1}(0)) \subset Z$. Hence, Theorem 3.2.1 implies there is a constant $M > 0$ such that if $\pi(z) \in X \cap \mathbb{B}_{1/2}$ then

$$\|h(z)\| \gtrsim \operatorname{dist}(z, h^{-1}(0))^M \gtrsim \operatorname{dist}(\pi_1(z), Z)^M. \tag{3.3}$$

Let $a, b > 0$ be the constants as in Proposition 3.3.2. As in the proof of that proposition, we use the distance function ρ on X. Fix $\gamma > 0$ small enough and set $B = \{z \in X \mid \rho(x, z) < \gamma t^{Mbm}\}$. For $\widetilde{x} = (x, x')$ in Γ, we can choose $2 \leq l \leq 8m$ such that $\pi^{-1}(x) \cap \Gamma$ do not intersect the ring

$$r(l-2) \leq \|\widetilde{x} - w\| \leq r(l+2),$$

where $r = (a^{-1}\gamma)^{1/bm} t^M$. Hence, if H denotes the ball of center x' and of radius rl, we have $\operatorname{dist}(\pi^{-1}(x) \cap \Gamma, B \times \partial H) > r$. Therefore, by Proposition 3.3.2 $\Gamma \cap B \times \partial H = \varnothing$. It assures that π is proper on $\Gamma \cap B \times H$ and then defines a ramified covering.

Moreover, this covering has degree at most equal to s. Otherwise, according to the radius of H, we have

$$\min_{z \in \pi_1^{-1}(x)} \|h(z)\| \leq (s+1)^2 2rl,$$

which is in contradiction with (3.3) if γ is small enough, since $\operatorname{dist}(x, Z) > t$ and $r = (a^{-1}\gamma)^{1/bm} t^M$.

Now, we want to apply Proposition 3.3.2 to this covering. But, in order to control the constants, we have to reduce B. Indeed, according to Remark 3.3.3, the constants of that proposition depend only on the Hölder continuity of the coefficients $a_{j,l}$ (and on the degree of the covering). These coefficients are bounded continuous weakly holomorphic functions defined on B then by Corollary 3.2.11 with $L = \overline{X \cap \mathbb{B}_{3/4}}$, they are $(Kt^{-M'}, \alpha)$-Hölder continuous on $B(x, t^{M'})$ for some $M' \geq 1$ large enough, $0 < \alpha \leq 1$ and $K > 0$ independent of x and t. Therefore, after a coordinates dilation by $t^{-M'}$ at x, we can apply Proposition 3.3.2 with the same exponent b and the second constant proportional to some power of t. Finally, let $y \in X$. We can assume that $\rho(x,y) \leq t^{M'}/2$, otherwise the proposition is obvious. Hence, the previous observation implies that

$$\pi^{-1}(x) \cap \Gamma \cap B \times H = \{x^1, \dots, x^s\} \text{ and } \pi^{-1}(y) \cap \Gamma \cap B \times H = \{y^1, \dots, y^s\},$$

with $\rho(x,y) \geq a' t^N \operatorname{dist}(x^i, y^i)^{bs}$ where $a' > 0, b \geq 1$ and $N \geq 1$ are independent of x and t. More precisely, we can write $N = M' + N'$, where the contribution in $t^{M'}$ comes from the dilation and that in $t^{N'}$ comes from the estimate on Hölder continuity. The construction can be applied to each component of $\Gamma \cap \pi^{-1}(B)$. This gives the result. □

We now consider the dynamical context. Assume that $X \subset \mathbb{P}^k$ is an irreducible analytic set of dimensions l which is invariant by f. Denote by g the restriction of f to X. For x in X, we define *the local multiplicity* of g at x as the maximal number of points in $g^{-1}(z)$ which are near x for $z \in X$ close enough to $g(x)$. The local multiplicity is smaller than *the topological degree* i.e. the number of points in $g^{-1}(x)$ for x generic in X. In our case, the topological degree of g is equal to d^l, see [DS08].

There exists a finite covering $(U_i)_{i \in I}$ of X by open subsets of $\mathbb{P}^k$ such that $X \cap U_i$ can be decomposed into locally irreducible components. Hence, we can apply Proposition 3.3.4 to the graph of g over each component of $X \cap U_i$. It gives the following corollary.

Corollary 3.3.5. *Let $\eta > 1$ and $Z \subset X$ be a proper analytic subset. Assume that the local multiplicity of g is less than η outside $g^{-1}(Z)$. Then there are constants $a > 0$, $b \geq 1$ and $N \geq 1$ such that if $0 < t < 1$ and x, y are two points outside Z_t where X is locally irreducible, then we can write*

$$g^{-1}(x) = \{x^1, \dots, x^{d^l}\} \textit{ and } g^{-1}(y) = \{y^1, \dots, y^{d^l}\}$$

with $\operatorname{dist}(x,y) \geq a t^N \operatorname{dist}(x^j, y^j)^{b\eta}$.

From this, we obtain the following size estimate for image of balls which is crucial in the proof of our main result.

Corollary 3.3.6. *Let $\delta > 1$ and $E \subset X$ be a proper analytic subset. Denote by $\widetilde{E}$ the preimage of E by g. Assume that the local multiplicity is less than δ outside $\widetilde{E}$. There exist constants $0 < A \leq 1$, $b \geq 1$ and $N \geq 1$ such that if $0 < t \leq 1/2$, $r < t/2$ and $x \in X \setminus \widetilde{E}_t$, then $g(B_X(x,r))$ contains a ball of radius $At^N r^{b\delta}$. Moreover, b depends only on X.*

Proof. Fix $t > 0$ and $r < t/2$. As in the proof of Lemma 3.2.5 with $\widehat{Y} = X_{Sing} \cup g^{-1}(X_{Sing})$, possibly after replacing r by cr^l for some $c > 0$, we can assume that $B_X(x,r)$ and $g(B_X(x,r))$ are contained in X_{Reg}. The local multiplicity of f on X is bounded on d^l. So, there exists $2 \leq i \leq 4d^l$, such that the ring $\{\frac{r(i-1)}{4d^l+1} \leq \operatorname{dist}(x,x') \leq \frac{r(i+1)}{4d^l+1}\}$ contains no preimage of $g(x)$. Thus, if $x' \in \partial B_X(x, r\frac{i}{4d^l+1})$, then

$$\operatorname{dist}(x', g^{-1}(g(x))) \geq \frac{r}{4d^l+1}.$$

Moreover, we can apply Corollary 3.3.5 with $\eta = d^l$ and $Z = \varnothing$. Hence, there exist $a, b > 0$ such that $g(\overline{B_X(x, r\frac{i}{4d^l+1})}) \subset X \setminus E_{a(t/2)^{bd^l}}$. Therefore, we can apply once again Corollary 3.3.5 with $\eta = \delta$, $Z = E$ and $a(t/2)^{bd^l}$ instead of t. We get, for some constants $a' > 0$ and $N_0 \geq 1$

$$\mathrm{dist}(g(x'), g(x)) \geq a' \left(a \left(\frac{t}{2} \right)^{bd^l} \right)^{N_0} \left(\frac{r}{4d^l + 1} \right)^{b\delta},$$

and, since g is an open mapping near x

$$B_X(g(x), At^N r^{b\delta}) \subset g(B_X(x, r))$$

with $A = \frac{a^{N_0} a'}{2^{N_0 bd^l} (4d^l+1)^{b\delta}}$ and $N = N_0 bd^l$. □

Remark 3.3.7. *When X is smooth, the ball in $g(B_X(x, r))$ can be chosen centered at $g(x)$.*

3.4 Psh functions and exponential estimates

We refer to [Dem09] for basics on currents and plurisubharmonic (psh for short) functions. Let T be a positive closed $(1,1)$-current of mass 1 on $\mathbb{P}^k$ with continuous local potentials. Let us recall briefly the associated notions of psh and weakly psh (wpsh for short) modulo T functions introduced in [DS08].

Let Y be an analytic space. A function $v : Y \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ is *wpsh* if it is psh on Y_{Reg} and for y in Y, we have $v(y) = \limsup v(z)$ with $z \in Y_{Reg}$ and $z \to y$. These functions coincide with psh functions if Y is smooth. On compact spaces, the notion is very restrictive. However, if X is an analytic subset of $\mathbb{P}^k$, we have the more flexible notion of *wpsh modulo T function* on X. Locally, it is the difference of a wpsh function on X and a potential of T. If X is smooth, we say that the function is psh modulo T.

Note that the restriction of a psh modulo T function to an analytic subset is either wpsh modulo T or equal to $-\infty$ on an irreducible component. If u is wpsh modulo T on X then $dd^c(u[X]) + T \wedge [X]$ is a positive closed current supported on X. On the other hand, if S is a positive closed $(1,1)$-current on $\mathbb{P}^k$ with mass 1, there is a psh modulo T function u on $\mathbb{P}^k$, unique up to a constant, such that $S = dd^c u + T$.

These notions bring good compactness properties which permit to obtain uniform estimates. We have the following statements established in [DS08].

Proposition 3.4.1. *Let (u_n) be a sequence of wpsh modulo T functions on X, uniformly bounded from above. Then there is a subsequence (u_{n_i}) satisfying one of the following properties:*

- *There is an irreducible component Y of X such that (u_{n_i}) converges uniformly to $-\infty$ on $Y \setminus X_{Sing}$.*
- *(u_{n_i}) converges in $L^p(X)$ to a wpsh modulo T function u for every $1 \leq p < +\infty$.*

In the last case, $\limsup u_{n_i} \leq u$ on X with equality almost everywhere.

It implies the following lemma.

Lemma 3.4.2. *Let $\mathscr{G}$ be a family of psh modulo T functions on $\mathbb{P}^k$ uniformly bounded from above. Assume that each irreducible component of X contains an analytic subset Y such that the restriction of $\mathscr{G}$ to Y is bounded in $L^1(Y)$. Then, the restriction of $\mathscr{G}$ to X is bounded in $L^1(X)$.*

A classical result of Hörmander [Hör90] gives a uniform bound to $\exp(-u)$ in $L^1(\mathbb{B}_{1/2})$ for u in a class of psh functions in the unit ball of $\mathbb{C}^k$. Similar estimates can be obtained for compact families of quasi-psh functions. From now, we assume that T has (K,α)-Hölder continuous local potentials, with $0<\alpha\leq 1$ and $K>0$. In the rest of this section, we establish exponential estimates for psh modulo T functions in different situations. A key observation in our approach is that Hölder continuity allows us to work with non-compact families. In the sequel, we will apply these estimates to T, the Green current associated to f. They allow us to control the volume of some sublevel sets of potentials of currents near exceptional sets.

As a consequence of classical Hörmander's estimate, we have the following lemma which will be of constant use. Here, ν denotes the standard volume form on $\mathbb{C}^k$ and T is seen as a fixed current on the unit ball $\mathbb{B}$ of $\mathbb{C}^k$. We assume that it admits a potential g which is (K,α)-Hölder continuous on $\mathbb{B}$.

Lemma 3.4.3. *Let v be a psh modulo T function in $\mathbb{B}_t$ with $v\leq 0$ and $v(0)>-\infty$. Let $0<s<-v(0)^{-1}$ and $t>0$ be such that $Kt^\alpha\leq s^{-1}$. There is a constant $c>0$ independent of v, s and t such that*

$$\int_{\mathbb{B}_{t/2}}\exp(-\frac{sv}{2})\nu\leq ct^{2k}. \tag{3.4}$$

Proof. As v is psh modulo T, we have $v=v'-g$ with v' psh. We set $\widetilde{v}(z)=v'(z)-g(0)-Kt^\alpha$. Then $\widetilde{v}$ is psh in $\mathbb{B}_t$, $\widetilde{v}(0)=v(0)-Kt^\alpha\geq -2s^{-1}$ and $\widetilde{v}\leq v\leq 0$ because $g(z)-g(0)\leq Kt^\alpha$ on $\mathbb{B}_t$. By [Hör90, Theorem 4.4.5] there exists $c>0$ such that

$$\int_{\mathbb{B}_{1/2}}\exp(-\frac{s\widetilde{v}(tz)}{2})\nu\leq c,$$

thus, by a change of variables $z\mapsto tz$, we get

$$\int_{\mathbb{B}_{t/2}}\exp(-\frac{sv}{2})\nu\leq\int_{\mathbb{B}_{t/2}}\exp(-\frac{s\widetilde{v}}{2})\nu\leq ct^{2k}.$$

□

For the rest of the section, X always denotes an irreducible analytic subset of $\mathbb{P}^k$ of dimension l and v is a psh modulo T function in $\mathbb{P}^k$ with $v\leq 0$. In Section 3.6 we will extend the previous result to the neighborhood of X, where the condition at 0 is replaced by an integrability condition on X. For this purpose, we have to control the size of sublevel sets of v in X. This is the aim of the following global result.

Lemma 3.4.4. *For X as above, there exists $q_0\geq 1$ with the following property. For $q>q_0$ we set $\epsilon=2lq_0/q\alpha$ and take $M>0$ and $s\geq 1$ such that $s^{1+\epsilon}\|v\|_{L^q(X)}\leq M$. Then, there exist constants $a,c>0$ independent of v, q and s such that*

$$\int_X\exp(-asv)\omega^l\leq c. \tag{3.5}$$

If X is smooth, we can choose $q_0=1$.

Proof. First, assume that X is a compact smooth manifold with a volume form η. Since X has dimension l, for $t>0$ we can cover it by balls $(B_i)_{i\in I}$ with $B_i:=B_X(x_i,t)$ and such that $|I|\leq c't^{-2l}$ for some $c'>0$. Let $t=s^{-1/\alpha}$. As above, in each ball $B_X(x_i,2t)$ we can write $v=v_i'-g_i$, where g_i is a local potential of T. Using local charts at x_i, we can identify $B_X(x_i, 2t)$ with $\mathbb{B}_{2t}$ in $\mathbb{C}^l$. We consider $\widetilde{v}_i(z) = s(v_i'(tz) - g_i(0))$. These functions are psh in $\mathbb{B}_2$. We show that they belong to a compact family, independent of v and s. Using a change of variables $z \mapsto tz$ and Hölder's inequality, we get

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{v}_i\|_{L^1(\mathbb{B}_2)} &\leq \int_{\mathbb{B}_2} s|v(tz)|\nu + \int_{\mathbb{B}_2} s|g_i(tz) - g_i(0)|\nu \\
&\leq st^{-2l}\|v\|_{L^q(X)}|\mathbb{B}_2|^{1/p}t^{2l/p} + 2^\alpha K|\mathbb{B}_2| \\
&= s^{1+\epsilon}\|v\|_{L^q(X)}|\mathbb{B}_2|^{1/p} + 2^\alpha K|\mathbb{B}_2| \\
&\leq M|\mathbb{B}_2|^{1/p} + 2^\alpha K|\mathbb{B}_2| \leq M',
\end{aligned}$$

where p is the conjugate of q, $|\mathbb{B}_2|$ is the volume of $\mathbb{B}_2$ and M' is a positive constant. The family $\mathscr{U} = \{u \in PSH(\mathbb{B}_2) \,|\, \|u\|_{L^1(\mathbb{B}_2)} \leq M'\}$ is compact so there exists a constant $a > 0$ such that $\|\exp(-au)\|_{L^1(\mathbb{B})}$ is uniformly bounded for all $u \in \mathscr{U}$. Therefore, for $i \in I$

$$\int_{\mathbb{B}_t} \exp(-as(v_i'(z) - g_i(0)))\nu \lesssim t^{2l}.$$

Moreover, the Hölder continuity implies that $-sv(z) \leq K - s(v_i'(z) - g_i(x_i))$ in B_i. Hence, since $(B_i)_{i\in I}$ is a covering of X we obtain

$$\begin{aligned}
\int_X \exp(-asv)\eta &\leq \sum_{i\in I}\int_{B_i} \exp(-asv)\eta \\
&\leq \sum_{i\in I}\int_{B_i} \exp(a(K - s(v_i'(z) - g_i(x_i))))\eta \\
&\lesssim \sum_{i\in I} t^{2l} \leq c'.
\end{aligned}$$

This implies the lemma if X is smooth with $q_0 = 1$.

In the general case, we consider a desingularization $\pi : \widehat{X} \to X$ with a volume form η on $\widehat{X}$. The map π is surjective, then by Lemma 3.2.7, there exists $q_0 \geq 1$ such that

$$\|\widehat{v}\|_{L^{q/q_0}(\widehat{X},\eta)} \lesssim \|v\|_{L^q(X,\omega^l)}.$$

Moreover, $\pi^*(T)$ possesses α-Hölder local potentials and $\widehat{v} \leq 0$ is psh modulo $\pi^*(T)$. Therefore, this choice of q_0 allows us to apply the lemma on $\widehat{X}$ and get

$$\int_{\widehat{X}} \exp(-as\widehat{v})\eta \leq c.$$

The result follows since

$$\int_X \exp(-asv)\omega^l = \int_{\widehat{X}} \exp(-as\widehat{v})\pi^*(\omega^l) \leq \|h\|_\infty \int_{\widehat{X}} \exp(-as\widehat{v})\eta,$$

where we write $\pi^*(\omega^l) = h\eta$. □

The following estimate is a consequence of Lemma 3.4.3 and is related to the geometry of sublevel sets of psh modulo T functions. In Section 3.6, it will establish the existence of balls where we can apply our volume estimates.

Lemma 3.4.5. *For $s \geq 2$ set $F_s = \{x \in X \,|\, v(x) \leq -s^{-1}\}$. There are constants $\beta, c > 0$ independent of v and s such that if F_s contains no ball of radius $s^{-\beta}$ then*

$$\int_X \exp(-\frac{sv}{2})\omega^l \leq c.$$

Proof. We first consider the case where X is smooth. Let $t = 4^{-1}(Ks)^{-1/\alpha}$. As in the proof of the previous lemma, we cover X by balls $(B_i)_{i\in I}$ of radius t with $|I| \leq c' t^{-2l}$, $c' > 0$. Assume there is no ball of radius t in F_s. Hence, for each $i \in I$ there exists x_i in B_i such that $v(x_i) > -s^{-1}$. The balls B_i' of center x_i and of radius $2t$ cover X. Thus

$$\int_X \exp(-\frac{sv}{2})\omega^l \leq \sum_{i\in I} \int_{B_i'} \exp(-\frac{sv}{2})\omega^l.$$

But, $s < -v(x_i)^{-1}$ and $K(4t)^\alpha \leq s^{-1}$ therefore we can apply Lemma 3.4.3 on each ball

$$\int_{B_i'} \exp(-\frac{sv}{2})\omega^l \lesssim t^{2l}.$$

Hence, we get

$$\int_X \exp(-\frac{sv}{2})\omega^l \lesssim \sum_{i\in I} t^{2l} \leq c',$$

which gives the result when X is smooth with $\beta > 1/\alpha$ such that $s^{-\beta} < t$.

If X is singular, we consider a desingularization $\pi : \widehat{X} \to X$. By Lemma 3.2.5, there exists $N \geq 1$ such that the image of a ball of radius r under π contains a ball of radius r^N. Hence, if β is large enough, the hypothesis on F_s assures there is no ball of radius t in $\widehat{F}_s = \pi^{-1}(F_s)$. Then, we can apply the lemma to $\widehat{v} = v \circ \pi$ which is psh modulo $\pi^*(T)$. We get

$$\int_X \exp(-\frac{sv}{2})\omega^l = \int_{\widehat{X}} \exp(-\frac{s\widehat{v}}{2})\pi^*(\omega^l) \leq c,$$

for some $c > 0$, since $\pi^*(\omega^l)$ is smooth. □

3.5 Exceptional sets

Let f be an endomorphism of $\mathbb{P}^k$ of algebraic degree $d \geq 2$. The aim of this section is to construct two families $\mathscr{A}_\lambda$ and $\mathscr{B}_\lambda$ of analytic sets where the iterate sequence f^n has important local multiplicities. Let $X \subset \mathbb{P}^k$ be an irreducible invariant analytic set. Define $\kappa_{X,n}(x)$, or simply $\kappa_n(x)$ if no confusion is possible, as the local multiplicity of $f^n_{|X}$ at x. It is *a sub-multiplicative cocycles*, namely it is upper semi-continuous for the Zariski topology on X, $\min_X \kappa_n = 1$ and for any $m, n \geq 0$ and $x \in X$ we have the following sub-multiplicative relation

$$\kappa_{n+m}(x) \leq \kappa_m(f^n(x))\kappa_n(x).$$

The inequality may be strict when X is singular. Define

$$\kappa_{-n}(x) := \max_{y\in(f_{|X})^{-n}(x)} \kappa_n(y).$$

We recall the following theorem of Dinh [Din09], see also [Fav00].

Theorem 3.5.1. *The sequence of functions $\kappa_{-n}^{1/n}$ converges pointwise to a function κ_-. Moreover, for every $\lambda > 1$, the level set $E_\lambda(X) = \{\kappa_- \geq \lambda\}$ is a proper analytic subset of X which is invariant under $f_{|X}$. In particular, κ_- is upper semi-continuous in the Zariski sense.*

For a generic endomorphism of $\mathbb{P}^k$, $E_\lambda(\mathbb{P}^k)$ is empty. In this case, Theorem 3.1.2 is already know in all bidegrees [DS09]. In our proof, we will proceed by induction, proving the exponentially fast convergence on X if it is already established on each irreducible component of $E_\lambda(X)$. But, even if $E_\lambda(X)$ is invariant, its irreducible components are periodic and not invariant in general. Therefore, if X is only periodic, we define $E_\lambda(X)$ in the same way, replacing f by f^p and λ by λ^p, where p is a period of X. By Theorem 3.5.1, this definition is independent of the choice of p.

Fix $1 < \lambda < d$. Define the family $\mathscr{B}_\lambda$ of exceptional sets as follows. First, we set $\mathbb{P}^k \in \mathscr{B}_\lambda$. If X is in $\mathscr{B}_\lambda$, we add to $\mathscr{B}_\lambda$ all irreducible components of $E_\lambda(X)$. This family is finite and since the functions κ_- are upper semi-continuous in the Zariski sense, there exists $1 < \delta < \lambda$ such that $\mathscr{B}_\lambda = \mathscr{B}_\delta$, or equivalently $E_\lambda(X) = E_\delta(X)$ if $X \in \mathscr{B}_\lambda$. This will give us some flexibility in order to obtain estimates using an induction process.

As all elements of $\mathscr{B}_\lambda$ are periodic, they are invariant under some iterate f^{n_0}. Let us remark that it is sufficient to prove Theorem 3.1.2 for an iterate of f. Hence, we can assume that $n_0 = 1$, replacing f and λ by f^{n_0} and λ^{n_0}. Dinh also proved that $\kappa_{n_1} < \delta^{n_1}$ outside $(f_{|X})^{-n_1}(E_\lambda(X))$ for some $n_1 \geq 1$. Once again, we can assume that $n_1 = 1$.

The second family $\mathscr{A}_\lambda$, that takes place in Theorem 3.1.2, is defined as the set of minimal elements for the inclusion in $\mathscr{B}_\lambda$. This family is not empty and each element of $\mathscr{B}_\lambda$ contains at least one element of $\mathscr{A}_\lambda$. Note that no element of $\mathscr{A}_\lambda$ is contained in another one. These analytic sets play a special role in the next section, to start induction and to obtain compactness properties. When $\mathbb{P}^k$ is an element of $\mathscr{A}_\lambda$, it is the only element in $\mathscr{A}_\lambda$ and the exceptional set is empty. Otherwise, define the exceptional set as the union of all the elements of $\mathscr{A}_\lambda$.

3.6 Equidistribution speed

This section is devoted to the proof of Theorem 3.1.2. Fix an endomorphism f of algebraic degree $d \geq 2$ of $\mathbb{P}^k$, and denote by T its Green current. Recall that T is totally invariant i.e. $d^{-1} f^*(T) = T$, and has (K, α)-Hölder continuous local potentials for some $0 < \alpha \leq 1$, $K > 0$.

Fix $C > 0$ and $1 < \lambda < d$, and let $\mathscr{A}_\lambda$, $\mathscr{B}_\lambda$ be as in Section 3.5. Define $\mathscr{F}_\lambda(C)$ as the family of psh modulo T functions v on $\mathbb{P}^k$ such that $\max_{\mathbb{P}^k} v = 0$ and $\|v\|_{L^1(X)} \leq C$ for all $X \in \mathscr{A}_\lambda$. By construction of $\mathscr{A}_\lambda$, Lemma 3.4.2 implies that $\mathscr{F}_\lambda(C)$ is compact for each $C > 0$. Moreover, if X is an element of $\mathscr{B}_\lambda$, the restriction of $\mathscr{F}_\lambda(C)$ to X forms a family of wpsh modulo T functions on X which is relatively compact in $L^p(X)$ for every $1 \leq p < +\infty$.

If S is a positive closed $(1,1)$-current of mass 1, it is cohomologous to T. Hence, there exists a unique psh modulo T function u on $\mathbb{P}^k$ such that $S = dd^c u + T$ and $\max_{\mathbb{P}^k} u = 0$. We call u the dynamical potential of S. As T is totally invariant, the dynamical potential of $S_n = d^{-n}(f^n)^*(S)$ is $u_n = d^{-n} u \circ f^n$.

Since $S_n - T$ is a continuous linear operator on $\mathscr{C}^0(\mathbb{P}^k)$ whose norm is bounded, by interpolation theory between Banach spaces we have

$$\|S_n - T\|_{\mathscr{C}^\beta} \lesssim \|S_n - T\|_{\mathscr{C}^2}^{\beta/2},$$

uniformly in S and n, see [Tri95]. Consequently, in order to prove Theorem 3.1.2 we can assume that $\beta = 2$.

Moreover, it is easy to see that $\|dd^c\phi\|_\infty \lesssim \|\phi\|_{\mathscr{C}^2}$ for ϕ in $\mathscr{C}^2(\mathbb{P}^k)$. Therefore,

$$\begin{aligned} |\langle S_n - T, \phi\rangle| &= |\langle dd^c u_n, \phi\rangle| = |\langle u_n, dd^c\phi\rangle| \\ &\lesssim \|\phi\|_{\mathscr{C}^2}\|u_n\|_{L^1(\mathbb{P}^k)}. \end{aligned}$$

Hence, Theorem 3.1.2 is a direct consequence of the following theorem applied to $p = 1$ and $X = \mathbb{P}^k$.

Theorem 3.6.1. *For each $1 \le p < +\infty$ and $X \in \mathscr{B}_\lambda$ there exists a constant $A_{X,p}$ such that for all $u \in \mathscr{F}_\lambda(C)$ and $n \ge 0$ we have*

$$\|u_n\|_{L^p(X)} \le A_{X,p}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^n,$$

where $u_n = d^{-n} u \circ f^n$.

As in Section 3.5, we can assume that each element of $\mathscr{B}_\lambda$ is invariant by f, and there is $1 < \delta < \lambda$ satisfying the following properties for all X in $\mathscr{B}_\lambda$:

- $E_\lambda(X) = E_\delta(X)$,
- $\kappa_{X,1} < \delta$ outside $\widetilde{E}_\lambda(X) = (f_{|X})^{-1}(E_\lambda(X))$.

Let X be an element $\mathscr{B}_\lambda$ of dimension l and $\lambda_1 > 0$ with $\delta < \lambda_1 < \lambda$. Assume that Theorem 3.6.1 is true on each irreducible component of $E_\lambda = E_\lambda(X)$ for λ_1 and all $p \ge 1$. To prove it on X, we consider the sublevel set $K_n = \{x \in X \,|\, u_n(x) \le -s_n\}$ for a suitable constant s_n. Exponential estimates on $\widetilde{E}_\lambda$ will prove that its image by f^i, $0 \le i \le n$, cannot be concentrated near $\widetilde{E}_\lambda$. Therefore, volume estimates will imply that $f^n(K_n) = \{x \in X \,|\, u(x) \le -d^n s_n\}$ is large if Theorem 3.6.1 is false on X. Hence, a good choice of s_n, allowed by the gap between λ_1 and λ, will give a contradiction.

We first fix some constants. In Corollary 3.3.6 the constant b depends only on X. Then, by replacing f by f^n and δ by δ'^n with $b\delta^n < \delta'^n < \lambda_1^n$, we can assume that $b = 1$. Let $0 < A \le 1$, $N \ge 1$ be the other constants of Corollary 3.3.6. Fix $\lambda_2, \lambda_3 > 0$ such that

- $\delta < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda$, and
- $q > q_0$ large enough such that $\lambda_1/d < (\lambda_2/d)^{1+\epsilon}$ where ϵ and q_0 are defined in Lemma 3.4.4.

Multiplicities of $f_{|X}$ are controlled outside $\widetilde{E}_\lambda$. By induction hypothesis, we have a control of u_n on E_λ. We want to extend it to $\widetilde{E}_\lambda$. Let E be an irreducible component of E_λ. The restriction of f to each component of $(f_{|X})^{-1}(E)$ is surjective onto E. Therefore, we deduce from Lemma 3.2.7 that there exists $q' \ge 1$ such that

$$\|v \circ f\|_{L^q((f_{|X})^{-1}(E))} \lesssim \|v\|_{L^{qq'}(E)},$$

for all psh modulo T function v on $\mathbb{P}^k$. Hence, by induction hypothesis, there is a constant $M > 0$ such that $\|u_n\|_{L^q(\widetilde{E}_\lambda)} \le M(\lambda_1/d)^n$ for $n \ge 1$. The next step is to obtain exponential estimates in a neighborhood of $\widetilde{E}_\lambda$.

Lemma 3.6.2. *There exist constants $c, \eta \geq 1$ and $n_0 \geq 1$ such that if $n \geq n_0$ then for all $u \in \mathscr{F}_\lambda(C)$ we have*

$$\int_{\widetilde{E}_{\lambda,t_n}} \exp(-(d/\lambda_2)^n u_n)\omega^l \leq c,$$

where $t_n = (\lambda_2/d)^{n\eta}$.

Proof. Let E be an irreducible component of $\widetilde{E}_\lambda$ of dimension i. According to the choice of q, we can find $\lambda_2' < \lambda_2$ such that $\lambda_1/d < (\lambda_2'/d)^{1+\epsilon}$. Hence

$$\|u_n\|_{L^q(E)}(d/\lambda_2')^{(1+\epsilon)n} \leq M(\lambda_1/d)^n(d/\lambda_2')^{(1+\epsilon)n} \leq M.$$

and by Lemma 3.4.4 with $s = (d/\lambda_2')^n$ we have

$$\int_E \exp(-a'(d/\lambda_2')^n u_n)\omega^i \leq c',$$

for some constants $a', c' > 0$. Therefore, if we set $\rho_n = (\lambda_2/d)^n$, the volume in E of $F_n = \{x \in E \,|\, u_n(x) \leq -\rho_n\}$ is smaller than $c' \exp(-a'(\lambda_2/\lambda_2')^n)$. In particular, F_n contains no ball of radius $\rho_n^{2/\alpha}$ for n large enough.

If X is smooth then set $t_n = \rho_n^{1/\alpha}$. As in Lemma 3.4.5, for n large enough, we can find a covering of E_{t_n} by balls with center in E and of radius $2t_n$ on which Lemma 3.4.3 holds. Hence, we get

$$\int_{E_{t_n}} \exp(-au_n/\rho_n)\omega^l \leq c,$$

for some $a, c > 0$. The same argument with λ_2 slightly smaller shows that we can choose $a = 1$. We conclude the proof by summing on all irreducible components of $\widetilde{E}_\lambda$.

When X is singular, we consider a desingularization $\pi : \widehat{X} \to X$. In order to establish the estimate near E, we proceed inductively as follows. Assume that there exists a triplet (A, a, θ) with $a > 0$, $\theta \geq 1$ and an analytic set $A \subset E$ such that

$$\int_{E_{t^\theta} \setminus A_{t^{1/\theta}}} \exp(-au_n/\rho_n)\omega^l$$

is uniformly bounded in $n \geq 0$ for $t \leq \rho_n$. Then, using the properties of the elements of $\mathscr{B}_\lambda$ and dynamical arguments, we claim that a similar estimate holds if we substitute (A, a, θ) by some (A', a', θ') with $\dim(A') < \dim(A)$. It will give the result for η large enough after less than l steps since $\dim(E) < l$.

More precisely, let V be an irreducible component of A with maximal dimension. We distinguish two cases, according to whether V is in $\mathscr{B}_\lambda$ or not. In the first case, we know that for all $p \geq 1$, $\|u_n\|_{L^p(V)} \lesssim (\lambda_1/d)^n$. We set $\widehat{V} := \pi^{-1}(V)$. We denote by $\widehat{V}_1$ the union of all components of $\widehat{V}$ which are mapped onto V and by $\widehat{V}_2$ the union of the other components of $\widehat{V}$. Therefore, Lemma 3.2.7 implies that

$$\|\widehat{u}_n\|_{L^p(\widehat{V}_1)} \lesssim (\lambda_1/d)^n,$$

for all $p \geq 1$, where $\widehat{u}_n = u_n \circ \pi$. Hence, the smooth version of the lemma implies that

$$\int_{\widehat{V}_{1,\rho_n^{1/\alpha}}} \exp(-a'\widehat{u}_n/\rho_n)\pi^*(\omega^l)$$

is uniformly bounded for $a' > 0$ small enough. Moreover, by Lemma 3.2.6, there exists a constant $\theta' \geq 1$ such that $\pi(\widehat{V}_{1,t})$ contains $V_{t^{\theta'}} \setminus V_{2,t^{1/2}}$, where $V_2 = \pi(\widehat{V}_2)$. It gives the desired result near V, since $\dim(V_2) < \dim(V)$.

From now, we can assume that no irreducible component of A with maximal dimension belongs to $\mathscr{B}_\lambda$ (in particular $A \neq E$). Let V denote the union of all irreducible components of A with maximal dimension. In particular, these components are not totally invariant for $f_{|E}$, therefore there exist an analytic set $Z \subset E$ containing no component of V and an integer $m \geq 1$ such that $f^m(Z) = V$. We set $Z' = Z \cap A$. The assumption on A and θ implies that if $t \leq \rho_n$ then

$$\int_{Z_{t^\theta} \setminus A_{t^{1/\theta}}} \exp(-au_n/\rho_n)\omega^l$$

is bounded uniformly on n. By Corollary 3.2.2, $Z_{t_\theta} \cap A_{t^{1/\theta}}$ is contained in $Z'_{t^{1/\theta''}}$ for some $\theta'' > \theta$. So,

$$\int_{Z_{t^{\theta''}} \setminus Z'_{t^{1/\theta''}}} \exp(-au_n/\rho_n)\omega^l$$

is bounded uniformly on n. Fix a constant $B > 1$ large enough. We deduce from Corollary 3.3.6 applied to $\mathbb{P}^k$ that for all $t > 0$, $f^m(Z_t)$ contains $V_{B^{-1}t^{d^{mk}}}$. Moreover, since f^m is Lipschitz, $f^m(Z'_t)$ is contained in V'_{Bt}, where $V' = f^m(Z')$. So, we have

$$f^m(Z_{t^{\theta''}} \setminus Z'_{t^{1/\theta''}}) \supset V_{t^{\theta'}} \setminus V'_{t^{1/\theta'}},$$

for $t > 0$ small enough and $\theta' > \theta''$ large enough. It follows that

$$\begin{aligned}\int_{V_{t^{\theta'}} \setminus V'_{t^{1/\theta'}}} \exp(-a'u_n/\rho_n)\omega^l &\leq \int_{Z_{t^{\theta''}} \setminus Z'_{t^{1/\theta''}}} \exp(-a'\frac{u_{n+m}\lambda_2^m}{\rho_{n+m}})(f^m_{|X})^*(\omega^l) \\ &\lesssim \int_{Z_{t^{\theta''}} \setminus Z'_{t^{1/\theta''}}} \exp(-a'\frac{u_{n+m}\lambda_2^m}{\rho_{n+m}})\omega^l, \end{aligned} \tag{3.6}$$

since $(f^m_{|X})^*(\omega^l) \lesssim \omega^l$. Moreover, for a' small enough the right-hand side in (3.6) is bounded uniformly on n and $\dim(V') = \dim(Z') < \dim(V)$ since Z contains no component of V. This together with the estimate outside A prove the claim with $A' = V'$. $\square$

From now, we fix $p \geq 1$ and for u in $\mathscr{F}_\lambda(C)$ denote $\mathscr{N}(u) = \{n \geq 1 \,|\, \|u_n\|_{L^p(X)} \geq (\lambda/d)^n\}$ and denote by $\mathscr{N}$ the union of $\mathscr{N}(u)$ for all u in $\mathscr{F}_\lambda(C)$. Our goal is to prove that $\mathscr{N}$ is finite, which will imply Theorem 3.6.1. For this purpose, we have the following result.

Lemma 3.6.3. *There are constants $n_1 \geq 1$ and $\beta \geq 1$ such that if n is in $\mathscr{N}(u)$ with $n \geq n_1$ then $K_n = \{x \in X \mid u_n(x) \leq -(\lambda_3/d)^n\}$ contains a ball of radius $(\lambda_3/d)^{\beta n}$.*

Proof. Since $x^p \lesssim \exp(x)$ if $x \geq 0$, we deduce from the assumption on $\|u_n\|_{L^p(X)}$ that

$$\begin{aligned}(\lambda/\lambda_3)^n &\lesssim \left(\int_X (-(d/\lambda_3)^n u_n)^p \omega^l\right)^{1/p} \\ &\lesssim \left(\int_X \exp(-(d/\lambda_3)^n u_n/2)\omega^l\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

On the other hand, let β be the constant in Lemma 3.4.5. For n sufficiently large we have $(d/\lambda_3)^n \geq 2$. Hence, Lemma 3.4.5 with $s = (d/\lambda_3)^n$ imply that K_n has to contain a ball of radius $(\lambda_3/d)^{n\beta}$, otherwise the right-hand side of (3.7) would be bounded uniformly on n, which is impossible since $\lambda_3 < \lambda$. $\square$

We can now complete the proof of the main theorem.

End of the proof of Theorem 3.6.1. If $B \subset X$ is a Borel set then $|B|$ denotes its volume with respect to the measure ω^l. As we have already seen, the volume of a ball of radius r in X is larger than $c'r^{2l}$, $0 < c' \leq 1$. Therefore, observe that if x is in $\widetilde{E}_{\lambda,t_n/2}$ then $|\widetilde{E}_{\lambda,t_n} \cap B_X(x,r)| = |B_X(x,r)| \geq c'(r/2)^{2l}$ for $r < t_n/2$.

From now, assume in order to obtain a contradiction that $\mathscr{N}$ is infinite. Consider $u \in \mathscr{F}_\lambda(C)$ and $n \in \mathscr{N}(u)$ large enough. Fix also β large enough. So, we have $(\lambda_3/d)^{\beta n} < t_n/4$ and

$$c \exp(-(\lambda_3/\lambda_2)^n) \leq c'(A^\delta (t_n/2)^{N\delta}(\lambda_3/d)^{\beta n}/2)^{2l}, \tag{3.8}$$

where c is defined in Lemma 3.6.2. Let $r_0 = (\lambda_3/d)^{\beta n}$, and for $1 \leq i \leq n$ let $r_i = A(t_n/2)^N r_{i-1}^\delta$. We will prove by induction that for $0 \leq i \leq n$, $f^i(K_n) = \{x \in X \,|\, u_{n-i}(x) \leq -\lambda_3^n/d^{n-i}\}$ contains a ball B_i of radius r_i.

Since β is large, Lemma 3.6.3 implies that the assertion is true for $i = 0$. Let $0 \leq i \leq n-1$ and assume the property is true for i. We deduce from Lemma 3.6.2 that

$$\int_{\widetilde{E}_{\lambda,t_{n-i}}} \exp(-(d/\lambda_2)^{n-i} u_{n-i})\omega^l \leq c,$$

and in particular

$$|\widetilde{E}_{\lambda,t_n} \cap B_i| \leq |\widetilde{E}_{\lambda,t_{n-i}} \cap f^i(K_n)| < c \exp(-(\lambda_3/\lambda_2)^n \lambda_2^i),$$

since $t_n \leq t_{n-i}$. This and (3.8) imply that

$$|B_i| \geq c' r_i^{2l} > 2^{2l} |\widetilde{E}_{\lambda,t_n} \cap B_i|,$$

since $r_i \geq (A^\delta (t_n/2)^{N\delta} r_0)^{\delta^i}$ and $\delta < \lambda_2$. Consequently, the center of B_i is not in $\widetilde{E}_{\lambda,t_n/2}$ and by Corollary 3.3.6, $f(B_i) \subset f^{i+1}(K_n)$ contains a ball B_{i+1} of radius $r_{i+1} = A(t_n/2)^N r_i^\delta$. Note that we already reduced the problem to the case where the constant b in Corollary 3.3.6 is equal to 1.

Therefore, for all n in $\mathscr{N}(u)$ sufficiently large, the volume of $f^n(K_n) = \{x \in X \,|\, u(x) \leq -\lambda_3^n\}$ is greater than $D^{n\delta^n}$, with $0 < D < 1$ independent of u and n. This contradicts the inequality $\delta < \lambda_3$. Indeed, since $\mathscr{F}_\lambda(C)$ is bounded in $L^q(X)$, by Lemma 3.4.4 there exists $a' > 0$ such that

$$\int_X \exp(-a'u)\omega^l$$

is uniformly bounded for u in $\mathscr{F}_\lambda(C)$.

Hence, $\mathscr{N}$ is finite and in particular bounded by some $n_2 \geq 1$. We conclude using the fact that the restriction of $\cup_{n=0}^{n_2} d^{-n}(f^n)^*(\mathscr{F}_\lambda(C))$ to X is a relatively compact family of wpsh modulo T functions and then bounded in $L^p(X)$. Therefore, we have

$$\|u_n\|_{L^p(X)} \lesssim \left(\frac{\lambda}{d}\right)^n,$$

if $n \leq n_2$ and thus for every $n \geq 0$ by the definition of $\mathscr{N}$. $\square$

3.7 Polynomial automorphisms

We can obtain a partial result for regular polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^k$. We refer to Section 1.2.3 for definitions and notations. Let f be such a map of degree d_+ and let T_+ be its Green current. Recall that T_+ has Hölder continuous local potentials outside I_+, but on each point of I_+, T_+ has positive Lelong number. In particular, psh modulo T_+ functions are not bounded from above near I_+. They belong to a large class of functions, called dsh functions, introduced by Dinh and Sibony [DS06a, DS06b]. If S is a positive closed $(1,1)$-current of mass 1, we define its dynamical potential as the unique psh modulo T_+ function u such that $S = T_+ + dd^c u$ and $\max_{I_-} u = 0$.

Théorème 3.7.1. *Let f and T_+ be as above. For all $1 < \lambda < d_+$, there exists a finite family $\mathscr{A}_\lambda$ of periodic irreducible analytic sets, all included in I_-, with the following properties. Let K be a compact of $\mathbb{P}^k \setminus I_+$ and $0 < \beta \leq 2$, $C > 0$ be two constants. There exists a constant $A > 0$ such that if S is a positive closed $(1,1)$-current of mass 1 whose dynamical potential u verifies $\|u\|_{L^1(X)} \leq C$ for all X in $\mathscr{A}_\lambda$, then*

$$|\langle \frac{1}{d_+^n}(f^n)^*S - T, \phi\rangle| \leq A\|\phi\|_{\mathscr{C}^\beta}\left(\frac{\lambda}{d_+}\right)^{n\beta/2}, \tag{3.9}$$

for all $\phi \in \mathscr{C}^\beta(\mathbb{P}^k)$ with $\operatorname{supp}(\phi) \subset K$.

In particular, it implies that for such S, the sequence $d_+^{-n}(f^n)^*S$ converges to T_+, which was obtained in [DS08]. The proof is quite similar to that of Theorem 3.1.2 but we only consider observables with support outside I_+ to have explicit speed.

Proof. By Proposition 1.2.18, there exists an arbitrary small neighborhood V_+ of I_+ such that $f^{-1}(V_+) \Subset V_+$. We choose V_+ sufficiently small such that $\Omega := \mathbb{P}^k \setminus V_+$ contains the compact K. Therefore, $f(\Omega) \subset \Omega$ and T_+ has uniformly Hölder continuous local potentials on Ω. Furthermore, f leaves invariant I_- and the restriction of f to I_- is holomorphic. For all $1 < \lambda < d_+$, this allows us to construct the families $\mathscr{B}_\lambda$ and $\mathscr{A}_\lambda$ exactly as in Section 3.5, except that we set $E_\lambda(\mathbb{P}^k) := I_-$ for all $1 < \lambda < d_+$.

On the other hand, the choice of normalization for dynamical potentials implies that the dynamical potential of $d_+^{-n}(f^n)^*S$ is $u_n := d_+^{-n} u \circ f^n$ for all $n \geq 1$. Therefore, (3.9) is equivalent to

$$\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \lesssim \left(\frac{\lambda}{d_+}\right)^n.$$

From that, the proof splits into two parts. In the first part, we prove by induction on $X \in \mathscr{B}_\lambda$ that $\|u_n\|_{L^q(I_-)} \lesssim (\lambda_1/d_+)^n$ for some $\lambda_1 < \lambda$, exactly as in the holomorphic case. As $f(L_\infty \setminus I_+) = I_-$, we deduce by a result similar to Lemma 3.2.7 that $\|u_n\|_{L^1(E)} \lesssim (\lambda_1/d_+)^n$, where $E = \Omega \cap L_\infty$. Then, by Lemma 3.6.2, which is much easier to establish here since Ω is smooth, there exist constants $c > 0$ and $\eta > 0$ such that, for all n large enough, we have

$$\int_{E_{t_n}} \exp(-(d_+/\lambda_2)^n u_n)\omega^k \leq c, \tag{3.10}$$

where $t_n = (\lambda_2/d_+)^{n\eta}$ and $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda$.

For the final step, observe that $\Omega \setminus E_t$ is bounded in $\mathbb{C}^k$ for all $t > 0$. Furthermore, on this set we have that $\omega^k \geq t^N \nu$, where ν is the Lebesgue measure on $\mathbb{C}^k$ and N is a constant independent of t. On the other hand, if we consider f as an application of $\mathbb{C}^k$ it has constant Jacobian. Therefore, if B is a ball of radius r in $\Omega \setminus E_t$ then $f(B)$ contains a ball of radius $r' \gtrsim t^N r$.

Now, assume by contradiction that there exist infinitely many n such that $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \geq (\lambda/d_+)^n$. We consider the sublevel set $K_n := \{x \in \Omega \,|\, u_n(x) < -(\lambda_3/d_+)^n\}$ and as above, we find a ball $B_0 \subset K_n$ of radius $r_0 := (\lambda_3/d_+)^{n\beta}$ for some $\beta > 0$. From (3.10) we deduce that

$$|E_{t_n} \cap B_0| \lesssim \exp(-(\lambda_3/\lambda_2)^n),$$

which is smaller than $|B_0|/2$ for n large enough.

Therefore, the above volume estimate on $\Omega \setminus E_{t_n/2}$ implies that there exists a ball B_1 in $f(B_0)$ of radius $r_1 \gtrsim t_n^N r_0$. By repeating $n-1$ more times this step, we obtain a ball B_n of radius $r_n \gtrsim D^n$ for some $0 < D < 1$ which is independent of n. As in the holomorphic case, this is in contradiction with the fact that

$$\int_\Omega e^{-au} \omega^k \leq +\infty,$$

for some $a > 0$. This concludes the proof.

□

Bibliography

[Aba10] M. ABATE : Discrete holomorphic local dynamical systems. *In Holomorphic dynamical systems*, volume 1998 de *Lecture Notes in Math.*, pages 1–55. Springer, Berlin, 2010.

[Ahl06] L. AHLFORS : *Lectures on quasiconformal mappings*, volume 38 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, second édition, 2006. With supplemental chapters by C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard.

[AKYY92] J. C. ALEXANDER, I. KAN, J. YORKE et Z. YOU : Riddled basins. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2(4):795–813, 1992.

[BD01] J.-Y. BRIEND et J. DUVAL : Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathrm{P}^k(\mathbb{C})$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93):145–159, 2001.

[BD02] A. BONIFANT et M. DABIJA : Self-maps of $\mathbb{P}^2$ with invariant elliptic curves. *In Complex manifolds and hyperbolic geometry (Guanajuato, 2001)*, volume 311 de *Contemp. Math.*, pages 1–25. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[BD05] F. BERTELOOT et C. DUPONT : Une caractérisation des endomorphismes de Lattès par leur mesure de Green. *Comment. Math. Helv.*, 80(2):433–454, 2005.

[BDM07] A. BONIFANT, M. DABIJA et J. MILNOR : Elliptic curves as attractors in $\mathbb{P}^2$. I. Dynamics. *Experiment. Math.*, 16(4):385–420, 2007.

[BFJ08] S. BOUCKSOM, C. FAVRE et M. JONSSON : Degree growth of meromorphic surface maps. *Duke Math. J.*, 141(3):519–538, 2008.

[BLS93a] E. BEDFORD, M. LYUBICH et J. SMILLIE : Distribution of periodic points of polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. *Invent. Math.*, 114(2):277–288, 1993.

[BLS93b] E. BEDFORD, M. LYUBICH et J. SMILLIE : Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1):77–125, 1993.

[BM88] E. BIERSTONE et P. D. MILMAN : Semianalytic and subanalytic sets. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (67):5–42, 1988.

[BM01] F. BERTELOOT et V. MAYER : *Rudiments de dynamique holomorphe*, volume 7 de *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2001.

[BP07] L. Barreira et Y. Pesin : *Nonuniform hyperbolicity*, volume 115 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. Dynamics of systems with nonzero Lyapunov exponents.

[Bro65] H. Brolin : Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.*, 6:103–144, 1965.

[BS91a] E. Bedford et J. Smillie : Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. II. Stable manifolds and recurrence. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(4):657–679, 1991.

[BS91b] E. Bedford et J. Smillie : Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. II. Stable manifolds and recurrence. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(4):657–679, 1991.

[BS92] E. Bedford et J. Smillie : Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure. *Math. Ann.*, 294(3):395–420, 1992.

[BT82] E. Bedford et B. A. Taylor : A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.*, 149(1-2):1–40, 1982.

[CG93] L. Carleson et T. W. Gamelin : *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.

[CL00] D. Cerveau et A. Lins Neto : Hypersurfaces exceptionnelles des endomorphismes de $\mathbf{C}\mathrm{P}(n)$. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 31(2):155–161, 2000.

[Dem09] J.-P. Demailly : Complex analytic and differential geometry. www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html, 2009.

[DF01] J. Diller et C. Favre : Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6):1135–1169, 2001.

[Din07] T.-C. Dinh : Attracting current and equilibrium measure for attractors on $\mathbb{P}^k$. *J. Geom. Anal.*, 17(2):227–244, 2007.

[Din09] T.-C. Dinh : Analytic multiplicative cocycles over holomorphic dynamical systems. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 54(3-4):243–251, 2009.

[DNS10] T.-C. Dinh, V.-A. Nguyên et N. Sibony : Exponential estimates for plurisubharmonic functions and stochastic dynamics. *J. Differential Geom.*, 84(3):465–488, 2010.

[DO07] D. Drasin et Y. Okuyama : Equidistribution and Nevanlinna theory. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39(4):603–613, 2007.

[DS03] T.-C. Dinh et N. Sibony : Dynamique des applications d'allure polynomiale. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(4):367–423, 2003.

[DS04] T.-C. Dinh et N. Sibony : Regularization of currents and entropy. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(6):959–971, 2004.

[DS05] T.-C. Dinh et N. Sibony : Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle. *Ann. of Math. (2)*, 161(3):1637–1644, 2005.

[DS06a] T.-C. Dinh et N. Sibony : Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps. *Comm. Pure Appl. Math.*, 59(5):754–768, 2006.

[DS06b] T.-C. Dinh et N. Sibony : Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications. *Comment. Math. Helv.*, 81(1):221–258, 2006.

[DS08] T.-C. Dinh et N. Sibony : Equidistribution towards the Green current for holomorphic maps. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(2):307–336, 2008.

[DS09] T.-C. Dinh et N. Sibony : Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics. *Acta Math.*, 203(1):1–82, 2009.

[DS10a] T.-C. Dinh et N. Sibony : Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. *In Holomorphic dynamical systems*, volume 1998 de *Lecture Notes in Math.*, pages 165–294. Springer, Berlin, 2010.

[DS10b] T.-C. Dinh et N. Sibony : Equidistribution speed for endomorphisms of projective spaces. *Math. Ann.*, 347(3):613–626, 2010.

[DS10c] T.-C. Dinh et N. Sibony : Super-potentials for currents on compact Kähler manifolds and dynamics of automorphisms. *J. Algebraic Geom.*, 19(3):473–529, 2010.

[dT06] H. de Thélin : Sur la construction de mesures selles. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(2):337–372, 2006.

[dT08] H. de Thélin : Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes. *Invent. Math.*, 172(1):89–116, 2008.

[dT10] H. de Thélin : Sur les automorphismes réguliers de $\mathbb{C}^k$. *Publ. Mat.*, 54(1):243–262, 2010.

[dTV08] H. de Thélin et G. Vigny : Entropy of meromorphic maps and dynamics of birational maps. *Prépublication*, 2008.

[Fat19] P. Fatou : Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Soc. math. France*, 47:161–271, 1919.

[Fav98] C. Favre : Points périodiques d'applications birationnelles de $\mathbb{P}^2$. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(4):999–1023, 1998.

[Fav00] C. Favre : Multiplicity of holomorphic functions. *Math. Ann.*, 316(2):355–378, 2000.

[FJ03] C. Favre et M. Jonsson : Brolin's theorem for curves in two complex dimensions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 53(5):1461–1501, 2003.

[FLM83] A. Freire, A. Lopes et R. Mañé : An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 14(1):45–62, 1983.

[FM89] S. Friedland et J. Milnor : Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1):67–99, 1989.

[FS92] J.-E. FORNÆSS et N. SIBONY : Complex Hénon mappings in $\mathbf{C}^2$ and Fatou-Bieberbach domains. *Duke Math. J.*, 65(2):345–380, 1992.

[FS94a] J.-E. FORNÆSS et N. SIBONY : Complex dynamics in higher dimension. I. *Astérisque*, (222):5, 201–231, 1994. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).

[FS94b] J.-E. FORNÆSS et N. SIBONY : Complex dynamics in higher dimensions. *In Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, volume 439 de *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 131–186. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[FS95] J.-E. FORNÆSS et N. SIBONY : Complex dynamics in higher dimension. II. *In Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, volume 137 de *Ann. of Math. Stud.*, pages 135–182. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

[FS01] J.-E. FORNÆSS et N. SIBONY : Dynamics of $\mathbb{P}^2$ (examples). *In Laminations and foliations in dynamics, geometry and topology (Stony Brook, NY, 1998)*, volume 269 de *Contemp. Math.*, pages 47–85. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[FW99] J.-E. FORNÆSS et B. WEICKERT : Attractors in $\mathbb{P}^2$. *In Several complex variables (Berkeley, CA, 1995–1996)*, volume 37 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 297–307. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[Gav98] E. A. GAVOSTO : Attracting basins in $\mathbf{P}^2$. *J. Geom. Anal.*, 8(3):433–440, 1998.

[GJW10] F. P. GARDINER, Y. JIANG et Z. WANG : Holomorphic motions and related topics. *In Geometry of Riemann surfaces*, volume 368 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 156–193. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.

[Gro90] M. GROMOV : Convex sets and Kähler manifolds. *In Advances in differential geometry and topology*, pages 1–38. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1990.

[Gro03] M. GROMOV : On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4):217–235, 2003.

[Gue05a] V. GUEDJ : Courants extrémaux et dynamique complexe. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 38(3):407–426, 2005.

[Gue05b] V. GUEDJ : Ergodic properties of rational mappings with large topological degree. *Ann. of Math. (2)*, 161(3):1589–1607, 2005.

[Hör90] L. HÖRMANDER : *An introduction to complex analysis in several variables*, volume 7 de *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third édition, 1990.

[HP94] J.-H. HUBBARD et P. PAPADOPOL : Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(1):321–365, 1994.

[Jul18] G. JULIA : Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles. *J. Math. Pure Appl.*, 8:47–245, 1918.

[JW00] M. JONSSON et B. WEICKERT : A nonalgebraic attractor in $\mathbb{P}^2$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(10):2999–3002, 2000.

[KH95] A. KATOK et B. HASSELBLATT : *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[Lat18] S. LATTÈS : Sur l'itération des substitutions rationelles et les fonctions de Poincaré. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 166:26–28, 1918.

[Lel68] P. LELONG : *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*. Gordon & Breach, Paris, 1968.

[Lyu83] M. LYUBICH : Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(3):351–385, 1983.

[Mil85] J. MILNOR : On the concept of attractor. *Comm. Math. Phys.*, 99(2):177–195, 1985.

[MSS83] R. MAÑÉ, P. SAD et D. SULLIVAN : On the dynamics of rational maps. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(2):193–217, 1983.

[Pol93] M. POLLICOTT : *Lectures on ergodic theory and Pesin theory on compact manifolds*, volume 180 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[PS89] C. PUGH et M. SHUB : Ergodic attractors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 312(1):1–54, 1989.

[RS80] D. RUELLE et M. SHUB : Stable manifolds for maps. *In Global theory of dynamical systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1979)*, volume 819 de *Lecture Notes in Math.*, pages 389–392. Springer, Berlin, 1980.

[RS97] A. RUSSAKOVSKII et B. SHIFFMAN : Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics. *Indiana Univ. Math. J.*, 46(3):897–932, 1997.

[Rue89] D. RUELLE : *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989.

[Sib85] N. SIBONY : Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe. *Duke Math. J.*, 52(1):157–197, 1985.

[Sib99] N. SIBONY : Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$. *In Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 de *Panor. Synthèses*, pages ix–x, xi–xii, 97–185. Soc. Math. France, Paris, 1999.

[Siu74] Y.-T. SIU : Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Invent. Math.*, 27:53–156, 1974.

[Sko72] H. SKODA : Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans $\mathbf{C}^n$. *Bull. Soc. Math. France*, 100:353–408, 1972.

[Slo91] Z. Slodkowski : Holomorphic motions and polynomial hulls. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(2):347–355, 1991.

[ST86] D. Sullivan et W. Thurston : Extending holomorphic motions. *Acta Math.*, 157(3-4):243–257, 1986.

[Sul85] D. Sullivan : Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann. of Math. (2)*, 122(3): 401–418, 1985.

[Taf10] J. Taflin : Invariant elliptic curves as attractors in the projective plane. *J. Geom. Anal.*, 20(1):219–225, 2010.

[Taf11a] J. Taflin : Equidistribution speed towards the Green current for endomorphisms of $\mathbb{P}^k$. *Adv. Math.*, 227:2059–2081, 2011.

[Taf11b] J. Taflin : Vitesse d'équidistribution vers le courant de Green pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^k$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 349:515–517, 2011.

[Thi69] P.-R. Thie : The area of an analytic set in complex projective space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21:553–554, 1969.

[Tri95] H. Triebel : *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, second édition, 1995.

[Wal82] P. Walters : *An introduction to ergodic theory*, volume 79 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[Zer01] A. Zeriahi : Volume and capacity of sublevel sets of a Lelong class of plurisubharmonic functions. *Indiana Univ. Math. J.*, 50(1):671–703, 2001.