

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT  
UFR de Mathématiques

## THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7  
Spécialité : Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement le vendredi 10 décembre 2004 par  
JULIEN MARCHÉ

---

Sur l'intégrale de Kontsevich des nœuds dans les  
variétés de dimension 3

---

**Directeur :**

PIERRE VOGEL

**Rapporteurs :**

STAVROS GAROUFALIDIS

CHRISTINE LESCOP

**Jury :**

CHRISTIAN BLANCHET

THOMAS FIEDLER

BERNHARD KELLER

MAXIM KONTSEVICH



## REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord exprimer ma reconnaissance envers Pierre Vogel pour avoir dirigé ma thèse avec beaucoup de compétence, de disponibilité et de gentillesse. Il a su me guider efficacement tout en me laissant une grande liberté dans mes recherches, et je ne le remercierai jamais assez de m'avoir transmis un peu de sa grande culture mathématique.

Je suis aussi très redevable envers Gregor Masbaum et Christian Blanchet pour leur présence chaleureuse, leur intérêt constant pour mon travail et les bons conseils qu'ils m'ont prodigués au cours de nombreuses discussions entre Paris, Nantes et Vannes.

Je suis très heureux que Stavros Garoufalidis et Christine Lescop aient accepté la pénible tâche de rapporter ma thèse. Je remercie Stavros Garoufalidis pour les nombreuses discussions électroniques qui ont motivé beaucoup de mes travaux de recherche et Christine Lescop pour toutes ses remarques au cours d'un séjour à Grenoble à la fois utile et agréable.

Je remercie sincèrement Thomas Fiedler, Bernhard Keller et Maxim Kontsevich pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Ces remerciements ne seraient pas complets si j'oubliais Tomotada Ohtsuki et Kazuo Habiro. En m'invitant au RIMS à Kyoto en juillet 2004, ils m'ont donné la possibilité d'échanger de nombreuses idées et de découvrir un très beau pays. Je tiens également à remercier les organisateurs des nombreux séminaires de topologie Paris-Nantes-Vannes ainsi que ceux du GDR-Tresses et Géométrie de basse dimension à Autrans en juin 2004. Ces rencontres mathématiques furent à chaque fois un enrichissement et un grand plaisir.

Enfin, il me semble impossible d'oublier Bernhard Keller, Harold Rosenberg et Claude Viterbo que je remercie pour le rôle prépondérant qu'ils ont joué dans mon éducation mathématique, ainsi que Marc Rosso et Étienne Ghys pour leur présence bienveillante le long de mes années de thèse.

Je voudrais aussi remercier Michèle Wasse et Catherine Salzard pour avoir pris en charge les aspects matériels et administratifs de cette thèse avec efficacité et bonne humeur.

Il va sans dire que cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour sans les conditions extrêmement propices rendues possibles par les thésards de Chevaleret : que Catriona, Ingo et Majid, par exemple, se le tiennent pour dit ! Je veux ensuite saluer ici mes amis Agathe, Alexis, Benoit, Nicolas, Laurent, Philippe, Sandrine, Sebastien, Thomas et Yan pour les nombreux moments de détente que nous avons partagés, Itaï, Sylvain et Isa, Rafe et Julia pour leur amitié tout aussi indéfectible, Ricardo, Myrko, Nurt et Popayan pour la musique et ce qui va avec, et enfin et surtout Marianne pour tout et le reste.

Pour finir, je remercie profondément mes parents et mes sœurs Céline et Hélène qui depuis Toulouse m'ont constamment manifesté leur soutien à tous les moments de cette thèse.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b> .....	3
<b>Introduction</b> .....	9
<b>Partie I. Invariants de type fini des graphes plongés dans une variété de dimension 3</b> .....	15
<b>1. Généralités sur la filtration de Vassiliev</b> .....	17
1.1. Définitions.....	17
1.2. La filtration de Vassiliev.....	18
1.3. Espaces de diagrammes.....	19
1.4. Application symbole.....	20
1.5. Lien avec la filtration usuelle.....	22
<b>2. Intégrale de Kontsevich et graphes trivalents</b> .....	23
2.1. L'intégrale de Kontsevich standard.....	23
2.2. Extension aux graphes trivalents.....	26
2.3. Intégrale des graphes trivalents dans des graphes trivalents épaissis.....	28
<b>3. Un invariant universel en degré 1</b> .....	33
3.1. La sphère $S^3$ et les surfaces épaissies.....	34
3.2. Variétés de groupe fondamental fini.....	35
3.3. Variétés de groupe fondamental infini.....	39
3.4. Compatibilité avec les revêtements d'indice fini.....	43
3.5. Retour à la filtration de Vassiliev standard.....	45
3.6. L'exemple des espaces lenticulaires.....	47
<b>Partie II. Le cas des nœuds dans une sphère d'homologie</b> .....	51
<b>4. Intégrale rationnelle et filtration en boucles</b> .....	53
4.1. Isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt.....	53

4.2. Enroulement et Déroulement.....	54
4.3. L'intégrale rationnelle.....	56
4.4. Filtration en boucles.....	60
4.5. Revêtements cycliques et relèvement des diagrammes.....	62
4.6. Appendice.....	63
<b>5. Le cas des nœuds toriques.....</b>	<b>67</b>
5.1. Introduction.....	67
5.2. Expressions diagrammatiques de l'intégrale.....	69
5.3. Rationalité.....	74
5.4. Revêtements ramifiés.....	77
<b>6. L'intégrale rationnelle en degré 2.....</b>	<b>79</b>
6.1. Généralités sur la partie à deux boucles de l'intégrale de Kontsevich.....	79
6.2. Une formule de chirurgie.....	81
6.3. Intégralité.....	84
6.4. Partie à deux boucles des cablages toriques.....	91
6.5. Partie à deux boucles des cablages généraux.....	92
6.6. Partie à deux boucles des nœuds tordus.....	94
6.7. Signature d'un nœud et terme à deux boucles.....	97
<b>Bibliographie.....</b>	<b>99</b>

## Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude des invariants de type fini des nœuds dans les variétés de dimension 3. Dans une première partie, nous étudions le cas général des plongements de graphes en bande dans les variétés de dimension 3. Nous rappelons la construction de l'intégrale de Kontsevich et montrons qu'on peut l'étendre en un invariant de plongements de graphes en bande trivalents dans des graphes en bande trivalents épaissis. Nous montrons que cet invariant est compatible par composition des plongements. Puis, dans le cas des plongements de graphes en bande dans les variétés quelconques, nous proposons un cadre dans lequel cette intégrale se généralise au niveau du degré 1. Dans une seconde partie, nous étudions plus spécifiquement l'intégrale de Kontsevich des nœuds dans les sphères d'homologie rationnelles. L'invariant de Kontsevich s'exprime comme une série de diagrammes monotrivalents modulo certaines relations. Il est très difficile de déterminer cette série explicitement. Les travaux de L. Rozansky, A. Kriker et S. Garoufalidis ont permis de mettre en évidence la structure rationnelle de l'intégrale de Kontsevich et c'est leur point de vue que nous avons adopté dans cette partie. Après avoir rappelé les techniques introduites par leurs travaux, nous prouvons de façon purement combinatoire une formule explicite de l'intégrale des nœuds toriques à l'aide d'arbres dont on a remplacé les sommets par des cercles. Puis nous donnons une formule pour la variation du premier terme de l'intégrale rationnelle ou terme à deux boucles par une chirurgie borroméenne. Nous calculons le terme à deux boucles pour quelques cablages et pour les nœuds twistés.

## Abstract

This thesis is devoted to the study of finite type invariants of knots in 3-manifolds. In the first part, we study the general case of embeddings of banded graphs in 3-manifolds. We recall the construction of the Kontsevich integral and show that we can extend it to an invariant of embeddings of banded trivalent graphs into thickened banded trivalent graphs. We show that this invariant is compatible with the composition law. Then, in the case of embeddings of banded graphs in general 3-manifolds, we propose some construction which generalize the integral in degree 1. In a second part, we study only the Kontsevich integral of a knot in a rational homology sphere. The invariant is a series of monotrivalent diagrams modulo some relations. It is very difficult to determine this series explicitly. The work of L. Rozansky, A. Kriker and S. Garoufalidis revealed the rational structure of the integral, and we used their point of view in this part. After recalling their techniques, we prove in a purely combinatorial way an explicit formula for the Kontsevich integral of torus knots using trees whose vertices are replaced by circles. Then we give a formula for the variation of the first part of the rational integral (or 2-loop part) during a borromean surgery. We also compute the 2-loop part for some cablings and for twisted knots.





## INTRODUCTION

L'objectif de cette thèse est d'étudier certains aspects de la théorie des invariants de type fini des nœuds dans les variétés de dimension 3. L'approche de cette théorie reposera essentiellement sur l'étude de l'intégrale de Kontsevich, l'invariant de type fini universel.

Un nœud dans une variété différentiable  $M$  de dimension 3 est un plongement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $S^1$  dans  $M$ . On identifie deux plongements  $f$  et  $g$  quand ils sont isotopes, c'est à dire s'il existe une application différentiable  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$  telle que pour tout  $t \in S^1$ ,  $H(t, 0) = f(t)$ ,  $H(t, 1) = g(t)$  et pour tout  $s \in [0, 1]$  l'application  $H(\cdot, s) : S^1 \rightarrow M$  soit un plongement différentiable.

Le cas usuel est celui pour lequel  $M = \mathbb{R}^3$  ou  $S^3$  : la situation est dès lors très complexe car il y a une infinité dénombrable de nœuds distincts que l'on ne sait pas classifier. En effet, ce sont des objets difficilement manipulables et la seule méthode réellement efficace pour les étudier est de construire et comprendre des invariants algébriques associés aux nœuds.

C'est justement le cadre de cette thèse dont le thème central est celui des invariants de type fini organisés dans le cas où  $M = S^3$  en un seul invariant : l'intégrale de Kontsevich. Cette théorie a de profonds rapports avec celle des algèbres de Lie et des groupes quantiques. Cependant, par choix, nous garderons toujours un point de vue topologique et combinatoire, couramment appelé "diagrammatique" et tous les thèmes de la thèse seront abordés avec ce point de vue.

Avant de résumer les résultats présentés dans cette thèse, il est intéressant de rappeler l'évolution de la théorie des invariants de nœuds.

Le premier invariant de nœud est certainement le groupe fondamental du complémentaire du nœud, considéré par H. Poincaré. Il est très difficile de comparer deux groupes de nœuds, ce qui rend cet invariant peu efficace. Le premier invariant de nœud polynômial est le polynôme d'Alexander qui fut découvert en 1923 par J.W. Alexander. Il est construit à partir du revêtement infini cyclique du complémentaire du nœud et a un sens topologique clair et fondamental. Cependant, il est loin d'être suffisant pour classifier les nœuds, par exemple, il ne distingue pas un nœud de son image dans un miroir.

Nœud trivial	$\bigcirc$	$\Delta = 1$
Nœud de trèfle droit	$\textcircled{R}$	$\Delta = t^{-1} - 1 + t$
Nœud de trèfle gauche	$\textcircled{L}$	$\Delta = t^{-1} - 1 + t$

Il a fallu attendre 1984 pour qu'un nouvel invariant algébrique soit construit. Il s'agit du célèbre polynôme de Jones. Sa construction a marqué le début d'un intense développement de la théorie des invariants dits "quantiques". Il s'agit des polynômes de Jones colorés, de Kauffman, d'HOMPFly etc.

L'adjectif quantique provient d'un lien profond qui relie ces invariants à la théorie quantique des champs topologique. Ce lien a été découvert par E. Witten en 1989 et a engendré de nombreux développements autour de la théorie des groupes quantiques. En particulier, des modèles rigoureux de théorie quantique des champs topologiques ont été construits. Ce sont des invariants intéressants et qui ont de nombreuses propriétés. Pourtant leur signification topologique demeure très mystérieuse.

Ce sont des idées bien différentes qui ont amené V. Vassiliev à définir la notion d'invariant de type fini vers 1989. Il a en effet étudié la cohomologie de l'espace des nœuds à partir d'une étude de l'espace des nœuds singuliers appelé discriminant. Ses idées ont été reprises pour définir les invariants de type fini dans de nombreux contextes topologiques, en les reliant à des objets combinatoires appelés diagrammes de cordes. Il a alors été prouvé que presque tous les invariants de nœuds connus étaient dans un sens des invariants de type fini, ce qui en justifie une étude systématique.

Les invariants de type fini sont définis de la manière suivante : soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nœuds dans  $S^3$ . Un invariant de nœud (rationnel) est par définition une application  $v : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Q}$ . Pour tout entier  $n$  positif, appelons nœud  $n$ -singulier une application  $f : S^1 \rightarrow S^3$  qui a  $n$  points doubles transverses  $\times$ .

On peut étendre tout invariant de nœuds rationnel  $v$  aux nœuds singuliers par la formule  $v(\times) = v(\times) - v(\times)$  appliquée à chaque croisement. On dira qu'un invariant est d'ordre au plus  $n$  s'il s'annule sur l'ensemble des nœuds  $n$ -singuliers. Il est facile de voir que les invariants d'ordre au plus  $n$  forment une filtration croissante. L'objet principal de la théorie des invariants de type fini est l'étude du gradué de cette filtration dont la  $n$ -ième composante est formée des invariants d'ordre  $n$ .

Le premier théorème majeur de la théorie des invariants de type fini est dû à M. Kontsevich en 1993 (voir [Kon96]). Il permet d'identifier pour tout  $n$  l'espace des invariants d'ordre  $n$  avec l'espace des diagrammes de  $n$  cordes qui est un objet de nature purement combinatoire. L'identification se fait au travers de l'intégrale de Kontsevich qui est un invariant "universel" au sens où il contient tous les invariants de type fini. Cependant, il est très difficile à calculer car par exemple, il prend ses valeurs dans des espaces de diagrammes dont la structure est jusqu'à ce jour peu connue. Ainsi, l'intégrale de Kontsevich du nœud trivial n'a été calculée qu'en 2000 (voir [BNGRT00]) et c'est le seul nœud dont on connaisse complètement l'intégrale à ce jour.

D'importants travaux ont néanmoins été réalisés dans les quatre dernières années concernant la structure de l'intégrale de Kontsevich. Il s'agit de résultats de rationalité conjecturés par L. Rozansky dans [Roz03] puis démontrés par S. Garoufalidis et A. Krieger dans [GK04b]. Ces résultats permettent de coder l'intégrale à l'aide de fractions rationnelles faisant intervenir le polynôme d'Alexander. Ils marquent certainement le début d'une compréhension plus topologique de l'intégrale de Kontsevich. Par exemple, le premier terme de l'intégrale rationnelle d'un nœud que l'on appelle partie à deux boucles est un invariant qui a de nombreuses propriétés intéressantes, proches de la topologie. Il demeure pourtant difficile à calculer.

Cette thèse s'appuie fortement sur les résultats de rationalité mais uniquement dans sa deuxième partie. Décrivons brièvement le contenu de chaque chapitre.

## Partie 1

La première partie s'intéresse au problème général des invariants de type fini des plongements de graphes dans une variété  $M$  de dimension 3. En effet, seul le cas où  $M$  est  $S^3$  est bien connu grâce à l'intégrale de Kontsevich. Le cas où  $M$  est un corps en anse est aussi résolu, quoique moins bien connu et le cas général est un problème largement ouvert.

### Chapitre 1

Dans ce chapitre, on définit la notion d'invariant de type fini pour les plongements de graphes en bande dans une variété  $M$  de dimension 3. Un graphe en bande est une surface orientée  $\Gamma$  sans composante fermée, ce qui peut être vu comme un graphe épaissi. On définit un objet  $\mathcal{H}(\Gamma, M)$  qui en un sens est “engendré” par les plongements de  $\Gamma$  dans  $M$  et a la structure d'un faisceau localement constant au-dessus de l'espace  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$  des applications continues de  $\Gamma$  dans  $M$ .

Le cadre que l'on propose n'est pas standard si  $M \neq S^3$  ou  $\mathbb{R}^3$ , ce qui justifie un rappel assez complet des notions usuelles utilisées dans la théorie des invariants de type fini. Notre point de vue n'est pleinement justifié qu'au chapitre 3 où on s'intéresse au cas où  $M$  n'est plus un corps en anse.

On définit alors comme dans la théorie des invariants de type fini usuelle une filtration décroissante sur le faisceau  $\mathcal{H}(\Gamma, M)$ , puis la notion de diagramme de cordes qui s'identifie conjecturalement avec le gradué de la filtration. Ce chapitre est donc une variation autour de constructions très classiques développées par exemple dans [Vog93] ou [BN95].

## Chapitre 2

On rappelle rapidement la construction de l'intégrale de Kontsevich des entrelacs en bande dans  $S^3$ , c'est-à-dire des graphes en bande dont chaque composante connexe est un anneau. Cet invariant a été défini de manière analytique par Kontsevich à l'aide d'intégrales itérées, mais il est difficile de prouver rigoureusement les propriétés fondamentales de l'intégrale à partir de cette définition. C'est pour cela qu'après son article une approche catégorique a été proposée dans [BN97] et [LM96]. Précisément, cette approche présente l'intégrale de Kontsevich comme un foncteur d'une catégorie d'enchevêtrements parenthésés vers une catégorie de diagrammes. C'est cette approche que nous privilégions dans ce chapitre et dans cette thèse.

Après avoir rappelé la construction et les propriétés de ce foncteur, on essaie de l'étendre aux graphes en bande dans un corps en anse, ce qui constitue le but de ce chapitre.

Une telle construction fait certainement partie du “folklore” mathématique, mais il ne nous semble pas inutile de l'écrire complètement, surtout que l'on profite de ce chapitre pour montrer une formule de composition qui a un intérêt intrinsèque et éclaire certains calculs effectués dans la deuxième partie de la thèse.

L'extension de l'intégrale de Kontsevich nécessite étonnamment l'introduction d'une structure trivalente sur le graphe en bande. L'intégrale d'un graphe trivalent dans  $S^3$  a été initialement construite par T. Le, J. Murakami et T. Ohtsuki (voir [MO97]). Pour des choix différents de normalisations, elle a une expression particulièrement simple qui le rend très pratique à manipuler (voir par exemple [Lie]).

On peut alors étendre ce foncteur en un invariant de plongements de graphe en bande trivalent dans un corps en anse. On fixe la normalisation de cet invariant si on présente le corps en anse comme un graphe en bande trivalent épaissi.

Soit  $\Gamma$ ,  $\Delta$  et  $\Pi$  trois graphes en bandes trivalents. On remarque que si  $f : \Gamma \rightarrow \Delta \times [0, 1]$  et  $g : \Delta \rightarrow \Pi \times [0, 1]$  sont deux plongements, la composition  $g \circ f$  est bien définie à isotopie près. Si  $Z$  désigne le foncteur précédent, on définit une opération diagrammatique de composition  $\circ$  qui vérifie  $Z(g \circ f) = Z(g) \circ Z(f)$ .

## Chapitre 3

Il est très naturel d'essayer d'étendre la construction précédente dans le cas où un graphe en bande est plongé dans une variété quelconque, dans le but d'identifier le gradué de la filtration de Vassiliev avec l'espace des diagrammes de cordes. Seulement, aucun résultat significatif n'a été obtenu à ce jour dans cette direction. La seule construction bien connue est celle d'un invariant de degré 1 des plongements d'un graphe dans une surface épaissie. Nous montrons qu'on peut

construire un tel invariant pour toute variété dont le groupe fondamental est fini mais que cela n'est plus vrai dès le degré 2.

Pour d'autres variétés, il est clair que dès le degré 1, le gradué de la filtration de Vassiliev usuelle et les diagrammes à 1 corde ne sont pas identifiables. C'est ce qui nous a poussé à nous placer dans le cadre énoncé dans le chapitre 1. Il est facile de voir que pour toute variété irréductible  $M$ , le gradué de la nouvelle filtration s'identifie aux diagrammes à une corde. Nous le prouvons ici en introduisant un invariant purement topologique qui s'interprète comme un enlacement généralisé.

Ce résultat appelle une généralisation en degré supérieur qui reste un objectif passionnant mais non atteint dans cette thèse.

## Partie 2

Nous retournons dans la deuxième partie à l'étude des nœuds dans  $S^3$ . Plus précisément, nous cherchons à calculer ou à interpréter l'intégrale de Kontsevich des nœuds dans  $S^3$  avec comme outil principal les résultats de rationalité démontrés par A. Kriker et S. Garoufalidis.

### Chapitre 1

Ce chapitre résume les techniques qui servent à manipuler les diagrammes intervenant dans l'intégrale de Kontsevich d'un nœud. En particulier, il ne contient aucun résultat nouveau.

Soit  $f : S^1 \rightarrow S^3$  un nœud. Alors par construction, l'intégrale de Kontsevich est une série formelle  $Z(f)$  à valeur dans une algèbre de diagrammes de cordes  $\mathcal{A}(S^1)$ . Par exemple, la figure 1 contient tous les diagrammes de degré inférieur ou égal à 4 qui apparaissent dans  $Z(\textcircled{\ast})$ .

$$Z(\textcircled{\ast}) = \textcircled{\circ} - \textcircled{\text{trèfle}} + \textcircled{\text{4 cordes}} - \frac{31}{24} \textcircled{\text{5 cordes}} + \frac{5}{24} \textcircled{\text{6 cordes}} + \frac{1}{2} \textcircled{\text{7 cordes}} + \dots$$

FIGURE 1. Intégrale de Kontsevich du nœud de trèfle

Si pour un nœud donné et un degré donné on peut calculer l'intégrale de Kontsevich, on a très peu d'information a priori sur les diagrammes qui vont intervenir dans le développement, l'ordre des dénominateurs ou la forme générale de la série. Pour cela, il est judicieux de faire une transformation sur l'espace des diagrammes en remplaçant l'algèbre des diagrammes de cordes  $\mathcal{A}(S^1)$  par celle des diagrammes monovalents  $\mathcal{B}$ . Cette transformation est l'analogue diagrammatique de l'application de Poincaré-Birkhoff-Witt inverse. Elle a le désavantage de ne pas être un isomorphisme d'algèbre. Pour pallier ce défaut, on la compose avec un automorphisme de  $\mathcal{B}$  ce qui définit un isomorphisme d'algèbre  $\Upsilon^{-1} : \mathcal{A}(S^1) \rightarrow \mathcal{B}$ , analogue diagrammatique de l'isomorphisme de Duflo.

On notera  $Z^{\boxtimes}(f) = \Upsilon^{-1}Z(f)$ . Par exemple, on a

$$Z^{\boxtimes}(\textcircled{\ast}) = \exp\left(-\frac{23}{48}\textcircled{\circ} + \frac{1199}{5760}\textcircled{\text{trèfle}} + \frac{1}{4}\textcircled{\text{4 cordes}} - \frac{131}{1152}\textcircled{\text{5 cordes}} + \text{diagrammes fermés ou de degré } > 4\right).$$

Cette expression ne paraît pas plus simple a priori. Pourtant, elle se scinde en composantes qui correspondent aux différents premiers nombres de Betti des diagrammes. On appelle degré en boucles le degré correspondant. Les résultats de rationalité conjecturés par L. Rozansky dans [Roz03] impliquent que pour tout nœud  $f$  :

- La partie de degré 1 est une fonction du polynôme d'Alexander de  $f$  noté  $\Delta(f)$ .
- Pour tout degré  $d > 1$ , il existe un nombre fini de diagrammes fermés (c'est-à-dire sans sommets monovalents) de degré  $d$  dont les arêtes sont coloriées par des expressions de la forme  $\frac{P(e^x)}{\Delta(f)(e^x)}$  où  $P$  est un polynôme et telle que la partie de degré  $d$  de  $\log Z^{\boxtimes}(f)$  soit

obtenue en substituant le monôme  $x^n$  par  $n$  pattes attachées à l'arête correspondante (cf l'exemple ci-dessous).

Notons  $r(x^n)$  le diagramme formé par un cercle sur lequel on a attaché  $n$  pattes et  $\theta(x^n y^m z^p)$  le diagramme  $\ominus$  dont les trois arêtes supportent respectivement  $n, m$  et  $p$  pattes.

On a par exemple,

$$(1) \quad Z^{\boxtimes}(\circledast) = \exp \left( \frac{1}{2} r \left( \log \frac{\sinh(x/2)}{x/2\Delta(e^x)} \right) + \frac{1}{2} \theta \left( \frac{e^{2x} - e^{x+2y}}{\Delta(e^x)\Delta(e^y)\Delta(e^z)} \right) + \text{degré en boucles} > 2 \right).$$

Cette expression est une forme très compactée de l'intégrale de Kontsevich, ce qui justifie déjà son étude. Les techniques nécessaires pour déterminer les diagrammes coloriés par des expressions rationnelles de la forme  $\frac{P}{\Delta(f)}$  sont développées dans [GK04b]. Il s'agit de la théorie de l'intégrale rationnelle que l'on rappellera en détail car elle est encore peu connue et ses applications sont nombreuses comme on le verra aux chapitres 2 et 3 de cette partie.

## Chapitre 2

Ce chapitre est l'objet de la publication [Marc04] et de la prépublication [Marcb]. Il a pour objectif de donner une expression rationnelle de l'intégrale des nœuds toriques.

Considérons le plongement standard du tore dans  $\mathbb{R}^3$  donné par exemple par la paramétrisation  $u : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $u(\theta, \varphi) = (\cos(\theta) + \frac{1}{2} \cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) + \frac{1}{2} \sin(\theta) \cos(\varphi), \frac{1}{2} \sin(\varphi))$ . Pour deux entiers relatifs  $p$  et  $q$  premiers entre eux l'application  $K_{p,q} : x \mapsto u(px, qx)$  est un nœud que l'on appelle nœud torique d'indice  $p, q$ .

On montre alors le résultat suivant :

**Théorème.** — *Il existe une localisation  $\mathcal{B}'$  de l'espace de diagrammes  $\mathcal{B}$  consistant à colorier des diagrammes par des "inverses" de pattes et une série de diagrammes  $Y_{p,q}$  explicite constituée de cercles coloriés par les trois couleurs  $p, q$  et  $pq$  et reliés entre eux par un arbre qui satisfait les propriétés ci-dessous.*

*Cette série "code" l'intégrale de Kontsevich déroulée des nœuds toriques au sens où si sur chaque cercle de valence  $k$  et de couleur  $n$ , on attache la série  $\frac{1}{4} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \frac{e^{nx}+1}{e^{nx}-1}$ , on obtient une série dans  $\mathcal{B}'$  qui coïncide en degré  $> 1$  avec  $\log \left( Z^{\boxtimes}(K_{p,q}) \langle \Omega, \Omega \rangle \right)$ . Ici,  $\langle \Omega, \Omega \rangle$  est un facteur de normalisation fermé.*

Modulo le noyau de l'application de localisation, on peut donc calculer l'intégrale de Kontsevich des nœuds toriques. On utilise la formule précédente pour déduire une formule sur l'invariant LMO des sphères de Brieskorn  $\Sigma(p, q, r)$  (voir [LMMO99] pour une construction de l'invariant LMO).

## Chapitre 3

L'intégration rationnelle définit une série de diagrammes coloriés par des fractions rationnelles pour tout nœud  $K$  dans une sphère d'homologie entière  $M$ . Dans ce dernier chapitre, on s'intéresse uniquement à la partie à deux boucles de l'intégrale de Kontsevich rationnelle. Dans la formule 1, ce diagramme apparaît sous la forme  $\frac{1}{12} \theta \left( \frac{P(e^x, e^y, e^z)}{\Delta(e^x)\Delta(e^y)\Delta(e^z)} \right)$ , avec  $P$  un polynôme à coefficients entiers.

On montre alors le résultat d'intégralité suivant :

**Théorème.** — *Pour tout nœud  $K$  dans une sphère d'homologie entière  $M$ , il existe un polynôme  $P$  à coefficients entiers tel que la partie à deux boucles de  $Z^{\boxtimes}(M, K)$  soit égale à  $\frac{1}{12} \theta \left( \frac{P(e^x, e^y, e^z)}{\Delta(e^x)\Delta(e^y)\Delta(e^z)} \right)$ .*

La fin de ce chapitre est consacré au calcul de formules de cablage. Soit  $f : S^1 \rightarrow S^3$  un nœud et  $g : S^1 \rightarrow S^1 \times D^2$  un nœud dans un tore plein. On peut de manière unique à isotopie près définir la composition  $f \circ g$  en parallélisant  $f$  de façon standard. Notre but est de déterminer une formule pour la partie à deux boucles de  $f \circ g$  en fonction de  $g$  et de la partie à 1 et 2 boucles de  $f$ .

On explicite une formule dans le cas où  $g$  est de degré 0 comme application du cercle dans lui-même et quand  $g$  est un nœud torique sur le bord de  $S^1 \times D^2$ . Enfin, on donne une expression complète de la partie à deux boucles des doubles de Whitehead tordus, comme celui qui est dessiné sur la figure 2.

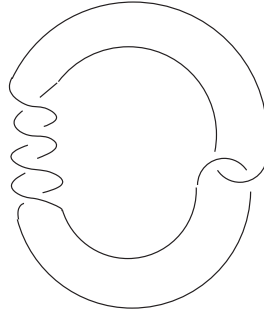


FIGURE 2. Nœud tordu d'indice 2

# **PARTIE I**

## **INVARIANTS DE TYPE FINI DES GRAPHES PLONGÉS DANS UNE VARIÉTÉ DE DIMENSION 3**





# CHAPITRE 1

## GÉNÉRALITÉS SUR LA FILTRATION DE VASSILIEV

### 1.1. Définitions

Dans cette partie,  $M$  désignera systématiquement une variété orientée de dimension 3, éventuellement avec bord.

Tout ce chapitre consiste à étudier l'espace des plongements d'un graphe en bande  $\Gamma$  dans  $M$ . Plus précisément, on définit une filtration sur cet espace à la manière de la filtration de Vassiliev. Pour cela, on rappelle quelques définitions :

**Définition 1.1.1.** — *Un graphe en bande est une surface compacte orientée avec bord, et sans composantes fermées. On l'appelle ainsi car elle se rétracte par déformation sur un graphe.*

Soit  $\Gamma$  un graphe en bande. On peut naturellement parler de plongement de  $\Gamma$  dans  $M$  : on sous-entendra plongement différentiable pour éviter les plongements dits "sauvages". Pour définir la filtration de Vassiliev, on a besoin de la notion plus générale de plongement  $n$ -singulier.

**Définition 1.1.2.** — *Un plongement  $n$ -singulier est la donnée d'une application continue  $j : \Gamma \rightarrow M$  et d'une famille de plongements  $f_1, g_1, \dots, f_n, g_n$  de  $[0, 1]^2 \rightarrow \Gamma$  dont les images sont appelées "lieux de croisement" tels que :*

- pour tout  $i$ ,  $f_i^{-1}(\partial\Gamma) = [0, 1] \times \{0, 1\}$ .
- pour tout  $i$ ,  $g_i^{-1}(\partial\Gamma) = [0, 1] \times \{0, 1\}$ .
- pour tout  $i$ , identifions  $f_i([0, 1]^2)$  et  $g_i([0, 1]^2)$  par l'application  $g_i \circ S \circ f_i^{-1}$  avec  $S(u, v) = (1 - v, u)$  ou  $S(u, v) = (v, 1 - u)$  et notons  $\Gamma / \sim$  l'espace quotient.

Alors  $j$  se factorise par un plongement de  $\Gamma / \sim$  dans  $M$ .

Ceci peut être schématisé par la figure 1.1 suivante :

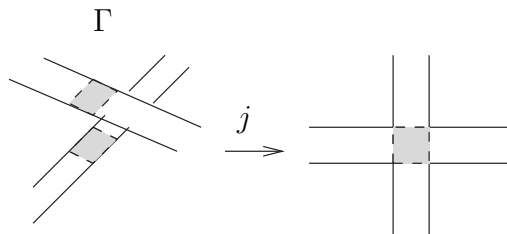


FIGURE 1. Exemple de singularité

**Remarque 1.1.3.** — D’après la définition ci-dessus, les lieux de croisement correspondent à des bandes de la forme  $[0, 1] \times [0, 1]$  (représentées sur la figure 1.1) qui sont orientées grâce à la donnée des  $f_i$  et  $g_i$ . On appelle vecteur d’orientation le champ de vecteur parallèle aux segments  $[0, 1] \times \{x\}$ . Bien sûr, cette orientation n’est que locale.

Après avoir défini les graphes singuliers, on peut définir leur désingularisation : il s’agit pour cela d’associer à tout graphe  $n$ -singulier  $j : \Gamma \rightarrow M$  une combinaison linéaire formelle de plongements non singuliers.

Pour cela, on se donne un graphe  $n$ -singulier  $j$  comme dans la définition 1.1.2. Alors  $j$  est un plongement excepté au voisinage de l’image commune de  $f_i([0, 1]^2)$  et  $g_i([0, 1]^2)$  que l’on note  $W_i$ . Considérons des voisinages tubulaires de  $W_i$ , c’est-à-dire des plongements  $\Phi_i : W_i \times [-1, 1]$  dans  $M$ . On peut alors déformer  $j$  de telle sorte que  $f_i([0, 1]^2)$  soit envoyé sur  $\Phi_i(W_i \times \{1\})$  et  $g_i([0, 1]^2)$  soit envoyé sur  $\Phi_i(W_i \times \{-1\})$  ou l’inverse.

Ainsi pour chaque singularité, on a deux choix de désingularisations. On appelle positive une désingularisation qui est telle que le vecteur d’orientation de la bande envoyée en  $-1$ , le vecteur d’orientation de la bande envoyée en  $+1$  et le vecteur normal de  $W_i$  forment une base directe dans  $M$ . Sinon, la désingularisation sera dite négative.

**Définition 1.1.4.** — Soit  $j : \Gamma \rightarrow M$  un graphe  $n$ -singulier et pour tout choix de signes  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ , on note  $j^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$  le graphe désingularisé en chaque  $W_i$  selon le signe  $\varepsilon_i$ . On appelle désingularisation de  $j$  la combinaison formelle

$$\delta j = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n} j^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}.$$

## 1.2. La filtration de Vassiliev

**1.2.1. Filtration des invariants de type fini.** — Historiquement, la première filtration de Vassiliev est une filtration croissante sur un espace d’invariants de nœuds. Pour définir la filtration dans le cadre qui nous intéresse ici, on commence par généraliser légèrement la notion d’invariant de nœud.

**Définition 1.2.1.** — Soit  $M$  une variété de dimension 3 orientée et  $\Gamma$  un graphe en bande. On note  $\mathcal{C}^n(\Gamma, M)$  l’ensemble des plongements  $n$ -singuliers de  $\Gamma$  dans  $M$  et  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$  l’ensemble des applications continues de  $\Gamma$  dans  $M$  avec sa topologie standard. Ainsi, par exemple l’espace des plongements de  $\Gamma$  dans  $M$  est  $\mathcal{C}^0(\Gamma, M)$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau localement constant en groupe abélien sur  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$ . On note  $\mathcal{V}(\Gamma, M, \mathcal{F})$  l’ensemble des sections localement constantes de ce faisceau au-dessus de  $\mathcal{C}^0(\Gamma, M)$  : cela correspond aux invariants de plongements à coefficients tordus par  $\mathcal{F}$ .

On introduit une filtration sur ce groupe abélien de façon relativement standard. Étant donné un invariant, c’est-à-dire un élément  $v \in \mathcal{V}(\Gamma, M, \mathcal{F})$ , on l’étend aux plongements singuliers par la formule  $v(j) = v(\delta j)$ . Cette formule a un sens puisque on peut identifier les fibres de  $\mathcal{F}$  au-dessus de toutes les désingularisations de  $j$  car le faisceau est localement constant.

**Définition 1.2.2.** — On dit qu’un invariant  $v \in \mathcal{V}(\Gamma, M, \mathcal{F})$  est de degré inférieur ou égal à  $n$  s’il s’annule sur tous les plongements  $n + 1$ -singuliers de  $\Gamma$ . Notons  $\mathcal{V}^n(\Gamma, M, \mathcal{F})$  l’ensemble des invariants de degré inférieur ou égal à  $n$ . Cette famille d’espaces forme une filtration croissante. Notre but est d’étudier le gradué associé.

**1.2.2. Filtration de l'ensemble des plongements.** — Le calcul du gradué de la filtration précédente fait intervenir le faisceau  $\mathcal{F}$ . Comme dans le cas classique des nœuds dans  $S^3$ , il est avantageux de prendre un point de vue dual en considérant une filtration décroissante sur un espace de plongements.

On définit l'ensemble des plongements marqués en tant que faisceau localement constant en ensembles au-dessus de  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$ . On le note  $\mathcal{P}(\Gamma, M)$  et il est défini de la manière suivante : sa fibre au-dessus d'une application continue  $j : \Gamma \rightarrow M$  est constituée de l'ensemble des chemins dans  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$  dont la source est  $j$  et dont le but est un plongement différentiable modulo la relation d'isotopie marquée décrite ci-dessous.

On identifie deux chemins  $\gamma$  et  $\delta$  dès qu'il existe une homotopie  $H : [0, 1]^2 \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma, M)$  telle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $H(0, t) = \gamma(t)$  et  $H(1, t) = \delta(t)$ , pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $H(s, 0) = j$  et telle que l'application  $s \mapsto H(s, 1)$  soit une isotopie. Il est clair que cet espace est un faisceau localement constant d'ensembles. On pose alors  $\mathcal{H}(\Gamma, M) = \mathbb{Q}[\mathcal{P}(\Gamma, M)]$ . C'est un faisceau localement constant en groupes abéliens.

Définissons maintenant une filtration décroissante sur  $\mathcal{H}(\Gamma, M)$ . Soit  $j \in \mathcal{C}(\Gamma, M)$  et  $\gamma$  un chemin continu dans  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$  reliant  $j$  à un plongement  $n$ -singulier  $i$ . À homotopie près,  $i$  est relié de manière canonique à chacune de ses désingularisations. Ainsi,  $\delta(i)$  s'interprète comme un élément de  $\mathcal{H}(\Gamma, M)_j$ . On note  $\mathcal{H}^n(\Gamma, M)_j$  l'espace engendré par toutes les désingularisations de chemins reliant  $j$  à un graphe  $n$ -singulier. Cela définit une filtration décroissante. Dans le cas où  $M = S^3$ , cette filtration est exactement la filtration standard de Vassiliev car l'information donnée par le chemin  $\gamma$  est nulle. Dans les autres cas, ce n'est pas vrai, néanmoins elle est reliée à la filtration standard d'une façon simple qui sera explicitée par la suite.

Un des buts principaux de cette thèse consiste à étudier le gradué de cette filtration. L'outil fondamental pour cette étude est un espace de diagrammes que nous allons rappeler. Il y a une surjection naturelle de cet espace dans le gradué de la filtration. La question qui demeure ouverte est "est-ce un isomorphisme" ? Cette question a reçu une réponse affirmative dans le cas où  $M = S^3$  grâce à l'introduction de l'intégrale de Kontsevich en 1993. Nous reviendrons très en détail sur cet invariant dans le deuxième chapitre.

### 1.3. Espaces de diagrammes

Soit  $\Gamma$  un graphe en bande. On appelle segment de  $\Gamma$  une sous-variété de  $\Gamma$  de dimension 1 isomorphe à  $[0, 1]$  dont le bord est sur  $\partial\Gamma$ . Si  $D$  est un segment, on appelle coorientation de  $D$  une orientation du fibré normal de  $D$  dans  $\Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est orientée, cela revient à orienter  $D$ , cela dit, il est plus naturel dans ce qui suit de parler de coorientation plutôt que d'orientation.

**Définition 1.3.1.** — *L'espace  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  est un faisceau localement constant sur  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$  dont la fibre est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel gradué. Au-dessus d'une application continue  $f : \Gamma \rightarrow M$  et pour un entier  $n \geq 0$ , elle est linéairement engendrée en degré  $n$  par les  $3n$ -uplets  $(D_1^i, D_2^i, h_i)$  où  $D_1^1, D_2^1, \dots, D_1^n, D_2^n$  sont des segments coorientés disjoints de  $\Gamma$ , et  $h_1, \dots, h_n$  sont des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $M$  vérifiant pour tout  $i$ ,  $h_i(0) \in f(D_1^i)$  et  $h_i(1) \in f(D_2^i)$ .*

*Les relations sont les suivantes :*

- *Isotopie pour les segments  $D_1^i$  et  $D_2^i$ , homotopie pour les applications  $h_i$ .*
- *Symétrie : si pour un certain  $i$ , on échange  $D_1^i$  et  $D_2^i$  et on remplace  $h_i$  par  $\tilde{h}_i$  définie par  $\tilde{h}_i(t) = h_i(1 - t)$ , alors le diagramme ne change pas. De même, on peut changer la numérotation des segments et des applications  $h$ .*
- *Si on change la coorientation d'un segment, le diagramme est multiplié par  $-1$ .*

- *Décomposition* : Fixons un diagramme  $D$  et un indice  $i$ . Supposons qu'il y ait un hexagone dans  $\Gamma$  dont trois côtés non adjacents sont sur  $\partial\Gamma$  et l'un des autres est  $D_1^i$ . Supposons aussi que cet hexagone ne rencontre aucun autre segment de  $D$ , et que la coorientation de  $D_1^i$  soit extérieure à l'hexagone. Alors, les deux derniers segments  $D_1^i$  et  $D_1^i$  définissent en remplaçant  $D_1^i$  deux nouveaux diagrammes  $D'$  et  $D''$ . En effet l'application  $h_i$  se prolonge naturellement le long de l'hexagone.

La relation de décomposition a pour expression  $D + D' + D'' = 0$

- *Relation (4T)* : Fixons un diagramme  $D$  et deux indices  $i$  et  $j$ . Supposons que  $D_1^i$  et  $D_1^j$  sont deux segments parallèles coorientés de la même façon et sans autres segments entre les deux. On appelle  $D'$  le diagramme qui échange ces deux segments. On identifie le diagramme  $D - D'$  comme provenant du diagramme  $\Upsilon$  s'appuyant sur  $D_1^i, D_2^j$  et  $D_2^i$  via une relation (STU) :  $\Downarrow = \Downarrow - \Downarrow$ . La relation (4T) consiste à identifier le résultat de ces relations (STU) sur chaque branche de  $\Upsilon$ .

**Remarque 1.3.2.** — Grâce à la dernière relation, on peut donner une définition alternative de  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  : les générateurs de la fibre au-dessus d'une application  $f : \Gamma \rightarrow M$  sont des graphes mono-trivalents  $D$  dont les sommets trivalents ont un ordre cyclique sur leurs demi-arêtes adjacentes, les sommets monovalents sont en bijection avec des segments coorientés disjoints, enfin les graphes sont envoyés continûment dans  $M$  et de façon compatible avec  $f$ . Les relations sont alors l'homotopie pour l'application du graphe dans  $M$ , l'isotopie sur les segments, le groupe de symétrie de  $D$ , les relations de décomposition, (STU) et la relation (IHX) à l'intérieur du graphe, qui s'écrit  $\Upsilon = \Upsilon - \Upsilon$ . Le degré d'un diagramme  $D$  est par définition, la moitié du nombre total de sommets de  $D$ .

Il est facile de vérifier que les deux définitions ci-dessus sont équivalentes.

#### 1.4. Application symbole

Le lien entre l'espace de diagrammes  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  et la filtration de  $\mathcal{H}(\Gamma, M)$  réside essentiellement dans l'existence de l'application suivante dite application symbole et notée  $S$ .

**Proposition 1.4.1.** — Il existe une application de faisceaux localement constants

$S : \mathcal{A}(\Gamma, M) \rightarrow \text{Gr } \mathcal{H}(\Gamma, M)$  qui est surjective et respecte le degré.

*Démonstration.* — Soit  $j : \Gamma \rightarrow M$  une application continue et  $(D_1^i, D_2^i, h_i)_{1 \leq i \leq n}$  un diagramme de  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$ . On considère le polyèdre  $X$  obtenu en recollant sur  $\Gamma$   $n$  anses de la forme  $[0, 1]^2$ . Pour tout  $i$ , la  $i$ -ème anse relie  $D_1^i$  à un segment  $E_2^i$  normal à  $D_2^i$ . La figure 2 indique de quelle manière cette anse respecte les orientations.

Grâce aux applications  $h_i$ , on a une application continue  $f_0 : X \rightarrow M$  qui étend  $f$ . Quitte à déformer un peu cette application, on peut faire en sorte que ce soit un plongement. Précisément, il existe une famille à un paramètre  $f_t$  d'applications continues de  $X$  dans  $M$  telle que  $f_1$  soit un plongement.

A partir de ce plongement, en "racourcissant les anses" on construit de façon unique un graphe  $n$ -singulier, comme le suggère la figure 2. C'est-à-dire qu'il existe une nouvelle déformation  $f_t$  pour  $t \in [1, 2]$  telle que  $f_2$  soit un graphe  $n$ -singulier. De plus,  $f_2$  est relié à  $j$  par le chemin continu  $f_t$ . On note  $S(D) = \delta f_2$  la désingularisation de ce diagramme. Par construction, si  $D$  est de degré  $n$ , alors  $S(D) \in \mathcal{H}_n(\Gamma, M)$ . Il reste à voir que cette application est bien définie, et compatible avec les relations.

On remarque que tous les choix faits pour définir  $S(D)$  proviennent de la première déformation. Deux tels choix sont reliés par une série de croisements des bandes de  $X$ . On peut de plus

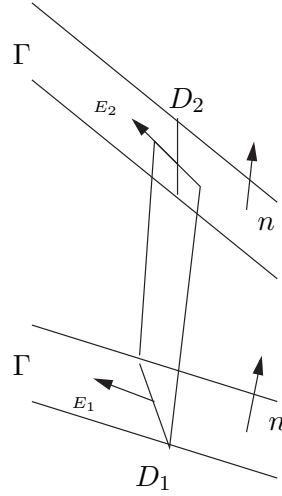


FIGURE 2. Le polyèdre \$X\$

supposer que ces croisements ne font intervenir que les bandes de \$\Gamma\$. Maintenant, la différence de deux désingularisations différant par un croisement est le résultat de la désingularisation d'un graphe \$(n+1)\$-singulier, et donc appartient à \$\mathcal{H}\_{n+1}(\Gamma, M)\$. De cette manière \$S(D)\$ est bien défini comme élément de \$\text{Gr}\_n \mathcal{H}(\Gamma, M)\$.

Il est clair que \$S\$ est invariant par les relations d'isotopie sur les segments de \$D\$ et d'homotopie sur les chemins \$h\_i\$. Maintenant, changer la coorientation de \$D\_2^i\$ revient à rajouter un demi twist à la \$i\$-ème anse de \$X\$. Ceci est représenté par le graphe singulier de la figure 3.

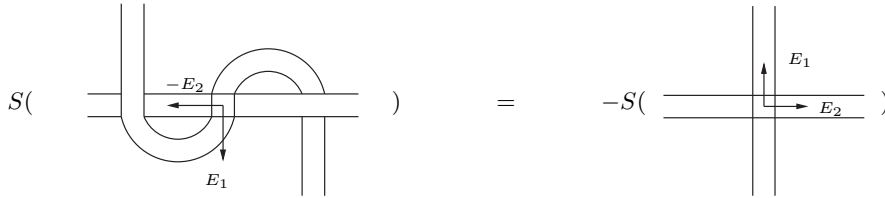


FIGURE 3. Changement de coorientation

La figure 4 montre que \$S\$ se factorise par les relations de symétrie et de décomposition. Nous ne montrons pas que \$S\$ vérifie la relation (4T) dite relation à 4 termes, car c'est très standard, et peut être trouvé par exemple dans [BN95]. La surjectivité est claire puisque n'importe quel graphe \$n\$-singulier est associé à un diagramme.

□

**Remarque 1.4.2.** — Le faisceau \$\mathcal{A}(\Gamma, M)\$ est un faisceau en coalgèbres. En effet, si \$f : \Gamma \to M\$ est une application continue et \$D = (D\_1^i, D\_2^i, h\_i)\_{1 \leq i \leq n}\$ un diagramme alors, on définit \$\Delta(D) = \sum\_{I \amalg J = \{1, \dots, n\}} (D\_1^i, D\_2^i, h\_i)\_{i \in I} \otimes (D\_1^j, D\_2^j, h\_j)\_{j \in J}\$. Cet opération passe aux relations et définit une structure de coalgèbre sur chaque fibre. De même, \$\mathcal{H}(\Gamma, M)\$ a une structure de faisceau en coalgèbres évidente en déclarant pour tout \$\gamma\$ dans \$\mathcal{P}(\Gamma, M)\$ on a \$\Delta\gamma = \gamma \otimes \gamma\$. Cette structure donne par passage au gradué une structure de coalgèbre sur \$\text{Gr} \mathcal{H}(\Gamma, M)\$. On peut vérifier que \$S\$ respecte ces deux structures.

$$S\left( \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Edges } E_1, E_2 \end{array} \right) = S\left( \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Edges } E_1, E_2 \end{array} \right)$$

$$S\left( \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Edges } E_1, E_2 \end{array} \right) + S\left( \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Edges } E_1', E_1 \end{array} \right) + S\left( \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Edges } E_1, E_2'' \end{array} \right) = 0$$

FIGURE 4. Symétrie et décomposition

### 1.5. Lien avec la filtration usuelle

Donnons nous comme précédemment une variété de dimension 3 orientée et un graphe en bande  $\Gamma$ . Alors la filtration de Vassiliev usuelle est une filtration de l'espace  $\overline{\mathcal{H}}(\Gamma, M)$  qui est par définition linéairement engendré par les classes d'isotopie de plongements de  $\Gamma$  dans  $M$ .

Comme ci-dessus,  $\overline{\mathcal{H}}_n(\Gamma, M)$  est engendré par les désingularisations de graphes  $n$ -singuliers, cette fois ci, sans chemin à une application de  $\Gamma$  dans  $M$  fixée. On a alors une application  $\pi$  d'oubli de  $\mathcal{H}(\Gamma, M) \rightarrow \overline{\mathcal{H}}(\Gamma, M)$  qui respecte la filtration. De même, on définit l'espace  $\overline{\mathcal{A}}(\Gamma, M)$  en ne fixant pas l'application  $f : \Gamma \rightarrow M$  sous-jacente à tout diagramme. L'application  $\pi$  et l'application symbole sont encore bien définies et on a le diagramme commutatif suivant de faisceau en coalgèbres :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\Gamma, M) & \xrightarrow{S} & \text{Gr } \mathcal{H}(\Gamma, M) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \overline{\mathcal{A}}(\Gamma, M) & \xrightarrow{S} & \text{Gr } \overline{\mathcal{H}}(\Gamma, M) \end{array}$$

La plupart du temps, la situation classique se déduira de notre formalisme en appliquant  $\pi$ . Ainsi, on ne perdra rien à travailler dans ce contexte. Par contre, dans le troisième chapitre, on verra que déterminer le gradué de cette filtration dans le cas général est plus simple que dans le cas classique.

## CHAPITRE 2

# INTÉGRALE DE KONTSEVICH ET GRAPHES TRIVALENTS

### 2.1. L'intégrale de Kontsevich standard

Dans cette partie, nous donnons la construction de l'intégrale de Kontsevich sans donner de preuves. En effet, cette construction est longue et technique et aucune exposition parfaitement claire et exhaustive ne semble exister à ce jour. Cependant, il existe de nombreux articles sur ce sujet, voir par exemple [Les99],[CD00],[LM96],[LM97]. Nous admettrons donc l'ensemble de ces résultats sous la forme énoncée dans le théorème 2.1.6.

Tout d'abord, on se propose d'étendre l'espace des diagrammes à la situation "relative" suivante : soit  $\Gamma$  un graphe en bande et  $B\Gamma$  une famille de segments de  $\partial\Gamma$  disjoints. On appellera ces segments les extrémités de  $\Gamma$ .

**Définition 2.1.1.** — *On appelle  $\mathcal{A}(\Gamma, X)$  le faisceau localement constant au-dessus de  $\mathcal{C}(\Gamma, X)$  dont la fibre au-dessus d'une application  $f$  est linéairement engendrée par les objets de la forme  $(D, D_1, \dots, D_n, h)$  où  $D$  est un graphe mono-trivalent dont les sommets monovalents sont en correspondance avec  $D_1, \dots, D_n$ , segments disjoints de  $\Gamma \setminus B\Gamma$ . Le graphe  $D$  est envoyé continûment par  $h$  dans  $X$  de façon compatible avec  $f$  et ses sommets trivalents sont orientés. Les relations sont les relations d'isotopie et homotopie, antisymétrie des segments et des sommets trivalents, décomposition, symétrie du graphe, (STU) et (IHX).*

La construction de l'application  $S$  et  $\Delta$  se généralise à ce cadre, ainsi que tous les résultats du chapitre précédent.

**Remarque 2.1.2.** — *Dans la suite, on considérera systématiquement la complétion de  $\mathcal{A}(\Gamma, X)$  relativement au degré. Pour éviter d'utiliser des notations trop lourdes, on identifiera  $\mathcal{A}(\Gamma, X)$  avec l'espace des diagrammes complétés.*

Il existe trois types d'applications fonctorielles sur ces espaces de diagrammes qui seront très utiles et que nous explicitons dans la proposition suivante.

**Proposition 2.1.3.** — *– Soit  $\Delta$  et  $\Gamma$  deux graphes en bande et  $X$  un espace topologique. Alors toute application continue relative  $g : \Delta \rightarrow \Gamma$ , c'est-à-dire vérifiant  $g(B\Delta) \subset B\Gamma$  induit fonctoriellement une application  $g^* : \mathcal{A}(\Gamma, X) \rightarrow \mathcal{A}(\Delta, X)$ . C'est un morphisme de faisceaux au-dessus de l'application de composition à droite par  $g$ .*

- Soit  $\Gamma$  un graphe en bande,  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Alors toute application continue  $g : X \rightarrow Y$  induit une application fonctorielle  $g_* : \mathcal{A}(\Gamma, X) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, Y)$ . C'est un morphisme de faisceaux au-dessus de la composition à gauche par  $g$ .*
- Il y a une troisième opération fonctorielle qui est parfois utile : soit  $\Gamma$  un graphe en bande et  $\Delta$  un sous-graphe en bande de  $\Gamma$  tel que  $B\Delta = \partial\Delta \cap (\overset{\circ}{\Gamma} \cup B\Gamma)$ . Soit  $X$  un espace topologique.*

La restriction est une application  $r : \mathcal{C}(\Gamma, X) \rightarrow \mathcal{C}(\Delta, X)$ . On définit un morphisme de faisceau fonctoriel  $r_c : r^* \mathcal{A}(\Delta, X) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, X)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(D, D_1, \dots, D_n, h)$  un diagramme de  $\mathcal{A}(\Gamma, X)$  au-dessus d'une application  $f : \Gamma \rightarrow X$ . Alors, quitte à déformer un peu  $g$ , on peut supposer que  $g(\Delta)$  est transverse aux  $D_i$ . Pour chaque application  $\alpha$  qui associe à un segment  $D_i$  un segment antécédent par  $g$  sur  $\Delta$  on définit un nouveau diagramme  $D_\alpha$  avec le même graphe sous-jacent, les segments décrits par  $\alpha$ , le graphe  $D$  et l'application  $h \circ g$ . On pose alors  $g^*(D, D_1, \dots, D_n, h) = \sum_\alpha D_\alpha$ .

La deuxième opération est définie par la formule  $g_*(D, D_1, \dots, D_n, h) = (D, D_1, \dots, D_n, g \circ h)$  et la troisième est l'identité.

Il est standard de vérifier que ces applications sont bien définies, voir par exemple [Vog00]. On remarque de plus qu'elles conservent le degré. C'est de plus un cas particulier de la proposition 2.3.1 qui sera prouvée en détails.  $\square$

Le résultat fondamental de la théorie des invariants de type fini est dû à Kontsevich. La suite de cette partie consiste à énoncer ses résultats.

Avant d'énoncer le théorème, il est utile d'introduire un peu de terminologie :

**Définition 2.1.4.** — *— Pour tout entier  $n$  on définit  $[n] = \{1, \dots, n\}$ .*

- *On note  $Q$  le monoïde non-associatif libre à un générateur  $Q$ . Il existe un unique morphisme de monoïdes  $\text{deg} : Q \rightarrow \mathbb{N}$  qui envoie le générateur sur 1 et une unique anti-involution qui fixe le générateur. On la note  $u \mapsto u^*$ . Chaque objet se décrit à l'aide d'un parenthésage. Par exemple,  $\emptyset, (), ()(), ((()))$  sont des objets de degrés respectifs 0, 1, 2 et 3.*
- *Le graphe en bande  $S^1 \times [0, 1]$  sans bord est appelé anneau et le graphe en bande  $[0, 1] \times [0, 1]$  d'extrémités  $[0, 1] \times \{0, 1\}$  est appelé simplement bande. Un graphe en bande constitué uniquement d'anneaux est appelé entrelacs et un graphe en bande constitué uniquement d'anneaux et de bandes est appelé enchevêtrement.*

**Définition 2.1.5 (Catégorie des enchevêtrements parenthésés)**

Soit  $\mathcal{T}$  la catégorie monoïdale suivante. Les objets sont les éléments de  $Q$ . Pour  $v$  et  $w$  dans  $Q$ , on définit  $\text{hom}(v, w)$  comme l'ensemble des couples  $(\Gamma, i)$  où

- $\Gamma$  est un enchevêtrement dont les extrémités sont en bijection avec  $[\text{deg } v] \amalg [\text{deg } w]$ .
- $i$  est un plongement de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{C} \times [0, 1]$  qui envoie les extrémités de  $\Gamma$  sur  $\cup_{1 \leq i \leq \text{deg } v} [i, i + \frac{1}{2}] \times \{0\} \cup \cup_{1 \leq i \leq \text{deg } w} [i, i + \frac{1}{2}] \times \{1\}$ . L'orientation induite sur le bord de la bande est positive pour la tranche du dessous (0) et négative pour celle du dessus (1).

De cette manière, on a un produit  $\text{hom}(u, v) \otimes \text{hom}(v, w) \rightarrow \text{hom}(u, w)$  obtenu en plaçant les entrelacs l'un sous l'autre et divisant par deux la troisième coordonnée. On appellera cette opération "produit d'empilement" ou empilement. De même, on a un produit  $\text{hom}(v, w) \otimes \text{hom}(v', w') \rightarrow \text{hom}(v \otimes v', w \otimes w')$  obtenu en juxtaposant les deux entrelacs que l'on appellera "produit de juxtaposition" ou juxtaposition.

On peut décrire sur  $\mathcal{T}$  une importante opération de duplication. Choisissons un enchevêtrement  $(\Gamma, i) \in \text{hom}(v, w)$ , puis une composante de celui-ci. Si cette composante est un anneau, on définit la  $n$ -ième duplication de cette composante en la remplaçant par  $n$  anneaux parallèles. Sinon, on se donne un mot  $u$  de degré  $n$  et une orientation de la bande. On définit la duplication en remplaçant encore la composante par  $n$  copies parallèles et en plaçant  $u$  ou  $u^*$  sur les extrémités suivant la compatibilité avec l'orientation de la bande. Bien que cette notation soit peu précise, on pourra noter  $d_n(\Gamma, i)$  le résultat de cette duplication.

On définit de même une catégorie de diagrammes  $\mathcal{A}$  dont les objets sont les entiers naturels et les morphismes  $\text{hom}(p, q)$  sont les couples  $(\Gamma, D)$  où  $\Gamma$  est un enchevêtrement comme pour  $\mathcal{T}$



et  $D$  est un élément de la fibre de  $\mathcal{A}(\Gamma, \mathbb{C} \times [0, 1])$ . En effet, comme l'espace des applications de  $\Gamma \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$  est contractile, on peut identifier toutes les fibres entre elles, c'est-à-dire oublier toutes les données concernant l'application continue de  $\Gamma$  et du diagramme  $D$  dans  $\mathbb{C} \times [0, 1]$ . Il ne reste que la donnée combinatoire du diagramme et la forme de  $\Gamma$ . On notera cette fibre simplement  $\mathcal{A}(\Gamma)$ .

Soit  $\Gamma$  un graphe en bande et  $d_n\Gamma$  le graphe dont on a dupliqué  $n$  fois une composante particulière. Alors, l'application triviale  $p_n : d_n\Gamma \rightarrow \Gamma$  induit par functorialité une application  $d_n^* : \mathcal{A}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{A}(d_n\Gamma)$ , décrite dans la proposition 2.1.3.

**Théorème 2.1.6 (Kontsevich).** — 1. *Il existe un foncteur monoïdal  $Z : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$  tel que pour tout enchevêtrement  $(\Gamma, i) \in \text{hom}(v, w)$ ,  $Z(\Gamma, i)$  soit de la forme  $(\Gamma, D)$  avec  $D$  de type groupe, c'est-à-dire que  $\Delta D = D \otimes D$ . Par abus, on notera  $D = Z(\Gamma, i)$ .*

2. *Ce foncteur commute aux duplications, c'est-à-dire  $Z(d_n(\Gamma, i)) = d_n^*Z(\Gamma, i)$  et à toutes les isométries de  $\mathbb{C} \times [0, 1]$ .*

3. *Ce foncteur induit au niveau de la filtration de Vassiliev un inverse de l'application  $S$  et donc prouve par là-même que  $S$  est un isomorphisme. Plus précisément, si  $(\Gamma, i)$  est un graphe en bande  $n$ -singulier de diagramme  $D_n$  (c'est-à-dire que  $S(D_n) = \delta i$ ) alors  $Z(\Gamma, \delta i) = D_n +$  termes de degré  $> n$ .*

*Démonstration.* — Ce résultat est non trivial et à beaucoup d'égards est encore mystérieux. Nous ne donnons qu'une idée de la construction du foncteur  $Z$ .

Comme on cherche à déterminer  $Z$  comme foncteur monoïdal compatible aux duplications et aux isométries, il suffit de le décrire sur un système générateur qui se trouve être très limité : il s'agit du tressage  $\times$ , de l'associateur  $\wr$  et de l'enchevêtrement élémentaire  $\cap$ .

Commençons par décrire l'intégrale  $Z(\times)$ . L'espace  $\mathcal{A}(\times)$  est naturellement isomorphe à  $\mathcal{A}(\parallel)$  qui est une algèbre pour le produit d'empilement. Dans cette algèbre, il y a un unique diagramme de degré 1 qui est formé d'une seule arête reliant les deux brins, avec deux segments de même coorientation : on le note  $\omega$ . Alors on pose  $Z(\times) = \exp(\frac{1}{2}\omega)$ . L'origine de cette définition provient du fait que l'intégrale de Kontsevich est définie pour les tresses par la monodromie de la connexion de Knizhnik-Zamolodchikov. Puis, par symétrie, on doit avoir  $Z(\cup) = Z(\cap)$  via l'identification naturelle de  $\mathcal{A}(\cap)$  avec  $\mathcal{A}(\cup)$ . Grâce à l'identité  $\cap \wr = \wr$  de  $\mathcal{T}$ , on déduit  $Z(\cup)$  et  $Z(\cap)$  en fonction de  $Z(\wr)$ . C'est cette dernière quantité qui pose difficulté, car il y a plusieurs solutions. Historiquement, la première a été l'associateur de Knizhnik-Zamolodchikov obtenu comme limite de monodromies de la connexion du même nom. Cet associateur a plusieurs défauts : il a des coefficients transcendants et surtout, il n'est pas compatible avec la duplication. D'après les travaux de [Dri91], [LM96] et [BN97] on peut construire un associateur  $\Phi = Z(\wr)$  qui a les propriétés suivantes :

1. Il est de type groupe c'est-à-dire  $\Delta\Phi = \Phi \otimes \Phi$ . Comme  $\Phi \in \mathcal{A}(\parallel\parallel)$  est naturellement une algèbre, on peut écrire  $\Phi = \exp(\varphi)$  où  $\varphi \in \mathcal{A}(\parallel\parallel)$  est une série de diagrammes connexes.
2. Il vérifie les équations de l'hexagone et du pentagone (cf [LM96]).
3. Il est pair, c'est-à-dire que  $\varphi$  ne fait intervenir que des diagrammes de degré pair.
4. Il est rationnel, c'est-à-dire que les coefficients de  $\varphi$  sont rationnels.
5. Il est horizontal, c'est-à-dire que  $\varphi$  est une série formelle en les éléments  $\omega_{12}$  et  $\omega_{23}$ , c'est-à-dire les cordes qui relient respectivement la corde 1 et 2, puis la corde 2 et 3. Comme il est de plus connexe, il doit s'exprimer comme une série de commutateurs en  $\omega_{12}$  et  $\omega_{23}$ .

Nous supposons donné un tel associateur car sa construction est très difficile. Nous admettons donc l'existence du foncteur  $Z$  vérifiant les propriétés du théorème 2.1.6. Nous référons par exemple à l'article [LM96] pour une démonstration.  $\square$

**Remarque 2.1.7.** — — *Le foncteur  $Z$  n'est pas unique, mais son évaluation sur un entrelacs ne dépend plus du choix de l'associateur et donc devient unique.*  
 — *Quelque soit l'associateur  $\Phi$  vérifiant les 4 propriétés ci-dessus, il s'écrit nécessairement  $\Phi = 1 + \frac{1}{24}[\omega_{12}, \omega_{23}] +$  termes d'ordre  $> 3$ . On notera  $\xi$  le diagramme  $[\omega_{12}, \omega_{23}]$ . Il est obtenu à partir du diagramme  $\Upsilon$  dont les sommets sont attachés respectivement aux trois segments de  $\mathcal{A}(\lll)$  dans l'ordre cyclique naturel.*

## 2.2. Extension aux graphes trivalents

La construction ci-dessus répond affirmativement à la question fondamentale “ $S$  est-il un isomorphisme?” dans le cas d'un enchevêtrement dans  $\mathbb{C} \times [0, 1]$ . Dans cette partie, le cadre est celui plus général des graphes en bande. Il est donc naturel d'essayer de généraliser cette construction dans un premier temps aux graphes en bande dans  $\mathbb{C} \times [0, 1]$ .

Notons  $\mathcal{T}^g$  la catégorie  $\mathcal{T}$  où on a considéré comme morphismes tous les graphes en bande. En tant que catégorie monoïdale,  $\mathcal{T}^g$  est engendrée par  $\mathcal{T}$  et le graphe en bande symbolisé par la lettre  $\Upsilon$ . Ce graphe en bande est obtenu en épaississant la figure  $\Upsilon$  dans le plan. Les sommets monovalents du graphe produisent lors de l'épaississement trois segments  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  que l'on déclare être les extrémités de  $\Upsilon$ . Le plongement naturel de  $\Upsilon$  dans  $\mathbb{C} \times [0, 1]$  en fait un élément de  $\text{hom}(\Upsilon, \Upsilon)$ . On étend de même  $\mathcal{A}$  en prenant comme morphismes les diagrammes qui s'appuient sur des graphes en bande.

**Proposition 2.2.1.** — *On ne peut pas étendre  $Z$  en un foncteur de  $\mathcal{T}^g$  dans  $\mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* — Supposons que cela soit le cas et notons  $Y = Z(\Upsilon) \in \mathcal{A}(\Upsilon)$ . L'inclusion  $i$  des deux branches supérieures du graphe  $\Upsilon$  dans lui-même fournit une application  $i_c : \mathcal{A}(\lll) \rightarrow \mathcal{A}(\Upsilon)$ . Réciproquement, le dédoublement de la branche inférieure fournit une application continue  $p : \lll \rightarrow \Upsilon$  qui induit une application  $p^* : \mathcal{A}(\Upsilon) \rightarrow \mathcal{A}(\lll)$ . Ces deux applications sont clairement inverses l'une de l'autre puisque tout diagramme de  $\mathcal{A}(\Upsilon)$  se présente comme un diagramme ne s'appuyant que sur les deux branches supérieures grâce aux relations de décomposition.

Soit  $X = p^*Y$  et écrivons ses coefficients en degré 2 sous l'hypothèse que cet élément soit de type groupe. Soit  $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{22}$  les diagrammes formés par une arête joignant les segments d'indice correspondant et  $\circ_{11}, \circ_{12}, \circ_{22}$ , les diagrammes formés par le graphe  $\circ$  s'appuyant sur les segments d'indice correspondant. Alors, en toute généralité et en utilisant la symétrie,  $X = \exp(a\omega_{11} + b\omega_{12} + a\omega_{22} + c\circ_{11} + d\circ_{12} + c\circ_{22})$  modulo les termes d'ordre  $> 2$ .

On montre alors que la relation  $\lll = \Upsilon$  ne peut pas être vérifiée. Pour cela, on remarque

qu'il y a une application naturelle de  $\lll$  dans chaque membre de l'équation et on transcrit chaque terme de l'égalité dans l'algèbre  $\mathcal{A}(\lll)$ . On aura alors  $\exp(a\omega_{11} + b\omega_{12} + b\omega_{13} + a\omega_{22} + 2a\omega_{23} + a\omega_{33} + c\circ_{11} + d\circ_{12} + d\circ_{13} + c\circ_{22} + 2c\circ_{23} + c\circ_{33}) \exp(a\omega_{22} + b\omega_{23} + a\omega_{33} + c\circ_{22} + d\circ_{23} + c\circ_{33}) = \exp(a\omega_{11} + 2a\omega_{12} + a\omega_{22} + b\omega_{13} + b\omega_{23} + a\omega_{33} + c\circ_{11} + 2c\omega_{12} + c\omega_{22} + d\circ_{13} + d\omega_{23} + c\circ_{33}) \exp(a\omega_{11} + b\omega_{12} + a\omega_{22} + c\circ_{11} + d\circ_{12} + c\circ_{22}) \exp(\frac{1}{24}\xi)$  En identifiant les termes de degré 1 on obtient tout de suite  $a = b = 0$ , puis, identifiant le degré 2 dont une base est donnée par  $\circ_{11}, \circ_{22}, \circ_{33}, \circ_{12}, \circ_{13}, \circ_{23}$  et  $\xi$ , on obtient  $\xi = 0$  ce qui est contradictoire.  $\square$

**Remarque 2.2.2.** — *L'isomorphisme  $i_* : \mathcal{A}(\lll) \rightarrow \mathcal{A}(\Upsilon)$  induit sur  $\mathcal{A}(\Upsilon)$  une structure d'algèbre. Le groupe  $S_3$  agit sur  $\Upsilon$  et donc sur  $\mathcal{A}(\Upsilon)$ . On vérifie facilement que cette action*

respecte la structure d'algèbre. En d'autres termes, la structure d'algèbre sur  $\mathcal{A}(\Upsilon)$  est "intrinsèque". On pourra l'interpréter comme provenant du produit de composition (voir proposition 2.3.1).

Ainsi, il n'y a pas moyen d'étendre le foncteur  $Z$  directement. Cependant, le problème se résout si on ajoute au graphe en bande une structure trivalente. Ce fait a été démontré pour la première fois dans [MO97] avec une normalisation provenant de l'associateur de Knizhnik-Zamolodchikov. Ce foncteur  $Z$  a été ensuite reconstruit avec la normalisation que nous utiliserons (voir par exemple [Lie]).

**Définition 2.2.3.** — Soit  $\Gamma$  un graphe en bande d'extrémités  $D_1, \dots, D_n$ . Une structure trivalente est un graphe trivalent  $T$  plongé dans  $\Gamma$  dont les sommets monovalents  $x_1, \dots, x_n$  sont respectivement sur les segments  $D_1, \dots, D_n$  et tel que  $\Gamma$  se rétracte sur  $T$ . Deux structures trivalentes sont équivalentes si les graphes trivalents associés sont isotopes.

**Théorème 2.2.4 (Murakami-Ohtsuki).** — Soit  $\mathcal{T}^t$  la catégorie monoïdale des graphes trivalents parenthésés. Alors,  $Z$  s'étend en un foncteur monoïdal  $\mathcal{T}^t \rightarrow \mathcal{A}$  qui commute aux isométries, a pour valeur des éléments de type groupe et fournit un inverse de l'application symbole  $S$ .

*Démonstration.* — Tout consiste à construire ce foncteur et pour cela, il suffit de déterminer  $Y = Z(\Upsilon)$ . Soit  $\nu^{1/2} = Z(\cap) \in \mathcal{A}(\cap)$ . Par symétrie, cet élément est invariant si on inverse l'orientation du segment. Puis comme tout élément de type groupe, il est inversible dans  $\mathcal{A}(\cap)$  et admet une unique racine carrée de type groupe. Plaçons sur les deux branches supérieures de  $\Upsilon$  les diagrammes  $\nu^{1/4}$  et sur la branche inférieure le diagramme  $\nu^{-1/4}$ . Cela nous fournit un diagramme  $Y \in \mathcal{A}(\Upsilon)$  qui est invariant par symétrie d'axe vertical. Par symétrie, on en déduit  $Z(\lambda)$ . On veut montrer que ce diagramme permet d'étendre  $Z$ . Pour cela, on peut se convaincre qu'il suffit de prouver l'identité suivante :

$$(2) \quad Z \left( \begin{array}{c} | \cap \\ | \cap \\ \Upsilon | \end{array} \right) = Z(\lambda).$$

On démontre ce résultat en utilisant tout d'abord le fait que  $Z$  commute aux duplications en ce qui concerne les enchevêtrements. Plus précisément, on utilise l'identité  $Z(d_2\cap) = d_2^*Z(\cap) = d_2^*\nu^{1/2}$  qui fait intervenir de manière cruciale la parité de l'associateur. Maintenant, on remarque que  $d_2\cap \in \text{hom}(((\cap))(\cap), \emptyset)$ . On veut appliquer un associateur à la source pour obtenir un élément  $\gamma$  de  $\text{hom}((((\cap))(\cap)), \emptyset)$ . Il suffit d'empiler  $d_2\nu^{1/2}$  sur  $d_2\Phi$  où la duplication a lieu sur la première bande. On interprète cette composition comme suit.

Considérons l'application  $f : d_2\cap \rightarrow \blacktriangle$  qui envoie les deux premières branches sur la branche gauche de  $\blacktriangle$ . Soit  $i : ||| \rightarrow \blacktriangle$  l'inclusion évidente. Alors, il est clair que  $Z(\gamma) = f^*i_c(\nu_{\Phi}^{1/2})$ .

Or  $i_c : \mathcal{A}(|)|) \rightarrow \mathcal{A}(\blacktriangle)$  est un morphisme d'algèbres et un calcul simple montre que  $i_c(\xi) = 0$ . Comme  $\Phi$  est supposé être horizontal, on en déduit que  $i_c(\Phi) = 1$  et donc  $Z(\gamma)$  est simplement obtenu en dupliquant  $\nu^{1/2}$  sur les deux premières branches. Cela se traduit par l'égalité de la figure 1.

Dans cette figure, on a représenté par un cercle les branches sur lesquelles on doit dupliquer la série de diagrammes  $\nu^{\pm 1/2}$ . Cette formule est très importante en soi et permet de prouver directement l'identité (2).  $\square$

$$Z\left(\begin{array}{c} \text{Diagram with two crossings and a loop} \\ ((\times\times) \quad \times) \quad \times \end{array}\right) = \nu^{1/2} \begin{array}{c} \text{Diagram with a loop and a crossing} \\ \text{Diagram with a loop and a crossing} \end{array}$$

$$Z\left(\begin{array}{c} \text{Diagram with a crossing and a loop} \\ (\times\times) \quad \times \end{array}\right) = \nu^{-1/2} \begin{array}{c} \text{Diagram with a loop and a crossing} \\ \text{Diagram with a loop and a crossing} \end{array}$$

FIGURE 1. Formule fondamentale

Le nouveau foncteur est très performant, mais nous pouvons encore généraliser dans deux directions, la première généralisation consiste à ne pas restreindre l'espace dans lequel les graphes en bande sont plongés à  $\mathbb{C} \times [0, 1]$  mais à des graphes en bande épaissis. Cette idée est relativement connue et est développée partiellement dans [Lie98] par exemple, mais nous proposons une normalisation originale du foncteur et démontrons des propriétés originales de celui-ci. La deuxième direction est de généraliser la compatibilité avec la duplication. On va définir un produit de composition pour les plongements et pour les diagrammes et montrer que le foncteur  $Z$  fait commuter ces deux opérations.

### 2.3. Intégrale des graphes trivalents dans des graphes trivalents épaissis

Nous commençons par définir une opération diagrammatique appelée composition qui étend les deux premières applications définies dans la proposition 2.1.3.

#### 2.3.1. Composition des diagrammes. —

**Proposition 2.3.1.** — *Soit  $X$  un espace topologique et  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux graphes en bande qui ont éventuellement des extrémités. Soit  $\mathcal{C}(\Gamma, \Delta \times [0, 1])_{\text{rel}}$  les applications  $f$  vérifiant  $f(B\Gamma) \subset B\Delta \times [0, 1]$  et  $\mathcal{A}(\Gamma, \Delta \times [0, 1])_{\text{rel}}$  le faisceau en diagrammes induit par restriction.*

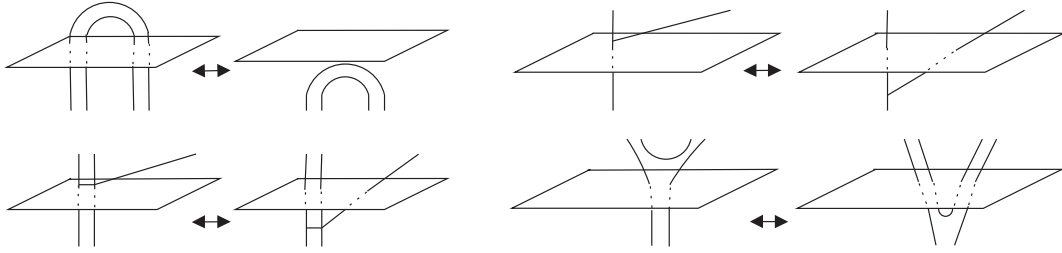
*Il existe une application fonctorielle  $\circ : \mathcal{A}(\Gamma, \Delta \times [0, 1])_{\text{rel}} \otimes \mathcal{A}(\Delta, X) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, X)$  au-dessus de la composition des applications continues sous-jacentes, qui respecte le degré et la comultiplication.*

*Démonstration.* — Soit  $f : \Gamma \rightarrow \Delta \times [0, 1]$ ,  $g : \Delta \rightarrow X$  deux applications continues. Soit  $(D, D_1, \dots, D_n, h) \in \mathcal{A}(\Gamma, \Delta \times [0, 1])$  et  $(E, E_1, \dots, E_m, u) \in \mathcal{A}(\Delta, X)$ . Quitte à déformer les applications  $f$  et  $h$ , on peut supposer qu'elles sont transverses aux  $E_i \times [0, 1]$  et que les segments  $f(D_i)$  sont disjoints des  $E_i \times [0, 1]$ . Chaque carré  $E_i \times [0, 1]$  rencontre donc soit des nouveaux segments de  $\Gamma$  soit des points de  $D$ .

Considérons une fonction  $\alpha$  qui à chaque  $E_i$  associe une composante de l'intersection, c'est-à-dire soit un point de  $D$  soit un segment de  $\Gamma$ . On construit un diagramme dans  $\mathcal{A}(\Gamma, X)$  en ajoutant aux segments  $D_i$  les segments désignés par  $\alpha$  et en recollant les sommets monovalents de  $E$  sur le graphe  $D$  aux points désignés par  $\alpha$ . On choisit un ordre cyclique conforme à la coorientation de  $E_i$ . Toutes ces données nous permettent de constituer un diagramme  $D_\alpha \in \mathcal{A}(\Gamma, X)$ . On pose alors  $E \circ D = \sum_\alpha D_\alpha$ .

Pour prouver que cette opération est bien définie, considérons quatre types de mouvements qui relient toutes les applications  $f \amalg h : \Gamma \amalg D \rightarrow \Delta \times [0, 1]$  transverses aux  $E_i \times [0, 1]$ . Ils sont représentés dans la figure 2.

L'indépendance de  $E \circ D$  par rapport à ces quatre mouvements est une conséquence respective des relations d'antisymétrie en haut à gauche, (IHX) en haut à droite, (STU) en bas à gauche et la relation de décomposition en bas à droite. Il est ensuite clair qu'une relation (IHX) à l'intérieur de  $E$  ou  $D$  donnera une relation (IHX) dans  $E \circ D$ . Puis, une relation (STU) ou de

FIGURE 2. Positions du diagramme  $D$  par rapport aux carrés  $E_i \times [0, 1]$ 

décomposition sur  $D$  donne la même relation sur  $E \circ D$ , il reste à traiter le cas où ces relations ont lieu sur  $E$ . Le cas de la relation de décomposition est simple. On se rend compte que si trois segments  $E_1, E_2, E_3$  sont reliés par une telle relation et que l'on recolle un sommet du diagramme  $E$  à tout ce qui intersecte  $E_1 \times [0, 1] \cup E_2 \times [0, 1] \cup E_3 \times [0, 1]$ , alors on a 0 car cela revient à intersecter  $\Gamma \amalg D$  avec une sphère, ce qui est nul en vertu des relations habituelles de  $\mathcal{A}(\Gamma, X)$ . Il ne reste plus que le cas d'une relation (STU) sur  $E$ .

Considérons donc une telle relation qui a lieu sur un segment  $E_1$  dont une copie parallèle est  $E_2$ . Le graphe  $\succ$  se relève d'une part à toutes les intersections de  $\Gamma \amalg D$  avec  $E_1 \times [0, 1]$ . Les graphes  $\sqcup$  et  $\sqcap$  se relèvent sur toutes les paires d'intersection de  $\Gamma \amalg D$  avec  $E_1 \times [0, 1]$  et  $E_2 \times [0, 1]$ . Si les relevés sont différents, alors les graphes  $\sqcup$  et  $\sqcap$  deviennent identiques et se compensent. Sinon, la relation (STU) au niveau du graphe  $E \circ D$  permet d'identifier les trois relèvements.  $\square$

**Remarque 2.3.2.** — Dans les hypothèses précédentes,  $E \circ 1 = f^*E$  et  $1 \circ D = g_*D$ .

- L'identité du graphe en bande  $|$  fournit une opération de composition  $\mathcal{A}(|) \times \mathcal{A}(|) \rightarrow \mathcal{A}(|)$ . Ce produit est le même que le produit d'empilement.
- L'identité du graphe en bande  $\Upsilon$  munit  $\mathcal{A}(\Upsilon)$  d'une structure d'algèbre qui est celle décrite dans la remarque 2.2.2.

**2.3.2. Description catégorique des plongements de graphes en bande.** — Dans ce paragraphe, nous introduisons un formalisme convenable pour décrire la structure qui existe sur l'espace des plongements de graphes dans les graphes épaissis.

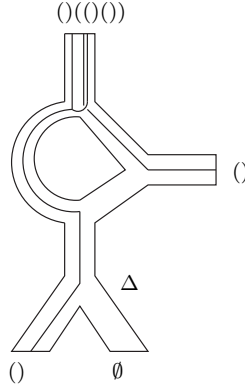
**Définition 2.3.3.** — Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie dont les objets sont les uplets d'éléments de  $Q$  et les morphismes entre deux uplets  $(v_1, \dots, v_n)$  et  $(w_1, \dots, w_m)$  sont les quadruplets  $(\Gamma, \Delta, i, (u_1, \dots, u_p))$  où :

- Les graphes en bande  $\Gamma$  et  $\Delta$  ont des structures trivalentes.
- Les extrémités de  $\Delta$  sont en bijection avec  $[n] \amalg [m] \amalg [p]$ .
- Les extrémités de  $\Gamma$  sont en bijection avec  $\amalg_{i \leq n} [\deg v_i] \amalg \amalg_{i \leq m} [\deg w_i] \amalg \amalg_{i \leq p} [\deg u_i]$ .
- L'application  $i$  est une plongement relatif de  $\Gamma$  dans  $\Delta \times [0, 1]$  qui respecte toutes les bijections précédentes. Chaque extrémité de  $\Delta$  est orientée et coloriée par un mot  $v$ . Dans l'ordre indiqué par ce segment, on aura donc  $\deg v$  extrémités de  $\Gamma$  qui vont toucher ce segment avec une orientation compatible.

Les quadruplets  $(\Gamma, \Delta, i, (u_1, \dots, u_p))$  sont considérés à isotopie près.

La figure 3 donne un exemple d'élément de  $\text{hom}(((), \emptyset), ((()(())))$ .

L'empilement de deux morphismes  $(\Gamma, \Delta, i, u)$  et  $(\Gamma', \Delta', i', u')$  s'écrit  $(\Gamma \cup \Gamma', \Delta \cup \Delta', i \cup i', u, u')$  où le recollement se fait entre les extrémités du but de  $\Gamma$  et celles de la source de  $\Gamma'$  et entre les extrémités du but de  $\Delta$  et celles de la source de  $\Delta'$ . La structure monoïdale s'obtient simplement par juxtaposition. Il est clair que l'on obtient bien ainsi une catégorie.

FIGURE 3. Exemple de morphisme dans la catégorie  $\mathcal{C}$ 

Décrivons maintenant la catégorie de diagrammes qui sera le but du foncteur  $Z$  généralisé et que l'on note encore  $\mathcal{A}$  puisqu'elle étend naturellement les catégories de diagrammes précédentes. Ses objets sont des uplets d'entiers et ses morphismes entre deux uplets  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_m)$  sont des quadruplets  $(\Gamma, \Delta, D, (c_1, \dots, c_p))$  où :

- Les graphes en bande  $\Gamma$  et  $\Delta$  n'ont pas de structure trivalente.
- Les extrémités de  $\Delta$  sont en bijection avec  $[n] \amalg [m] \amalg [p]$ .
- Les extrémités de  $\Gamma$  sont en bijection avec  $\amalg_{i \leq n} [a_i] \amalg \amalg_{i \leq m} [b_i] \amalg \amalg_{i \leq p} [c_i]$ .
- Le diagramme  $D \in \mathcal{A}(\Gamma, \Delta)$  a une application continue sous-jacente relative  $f$  qui respecte les bijections précédentes.

Le but de cette partie est d'établir le résultat suivant :

**Théorème 2.3.4.** — *Il existe un foncteur monoïdal  $Z : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  qui étend le foncteur  $Z : \mathcal{T}^t \rightarrow \mathcal{A}$ .*

*Démonstration.* — Pour construire un tel foncteur, on se donne un morphisme entre deux uplets  $(v_1, \dots, v_n)$  et  $(w_1, \dots, w_m)$  présenté par le quadruplet  $T = (\Gamma, \Delta, i, (u_1, \dots, u_p))$ . Il est clair que l'on va définir  $Z(T) = (\Gamma, \Delta, D, (\deg u_1, \dots, \deg u_p))$ . De plus, l'application continue sous-jacente à  $D$  sera  $i$ . Il ne reste donc plus qu'à définir le diagramme  $D$ .

On procède de la façon suivante : découpons chaque arête interne de  $\Delta$  en son milieu à l'aide d'un segment. A isotopie près, on peut supposer que  $i : \Gamma \rightarrow \Delta \times [0, 1]$  est transverse à chacun de ces segments épaissis. Fixons un parenthésage sur chaque intersection, on remarque que si on veut que  $Z$  soit fonctoriel, il suffit de le définir pour  $\Delta = \mathbb{A}$ .

Topologiquement, le graphe en bande  $\mathbb{A}$  épaissi est isomorphe à  $\mathbb{C} \times [0, 1]$ . Au plongement  $i : \Gamma \rightarrow \mathbb{A} \times [0, 1]$  correspond donc un plongement  $i' : \Gamma \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1]$ . Pour évaluer  $Z(i')$ , il faut faire un choix de parenthésage sur les trois branches de  $\mathbb{A}$ . Mais comme on l'a vu précédemment,  $\Phi$  est nul dans  $\mathcal{A}(\mathbb{A})$  car il est horizontal. Cela prouve que  $Z(i') \in \mathcal{A}(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma, \mathbb{C} \times [0, 1]) = \mathcal{A}(\Gamma, \mathbb{A} \times [0, 1])$  est en fait bien défini. On pose alors  $Z(i) = Z(\mathbb{A})^{-1} \circ Z(i')$ .

On se ramène au cas initial en utilisant la structure catégorique de  $\mathcal{A}$ . La functorialité du foncteur  $Z$  sur  $\mathcal{T}^t$  implique que  $Z$  est bien défini. La normalisation qui peut paraître étrange permet d'assurer que  $Z(\Gamma, \Gamma, \text{Id}, u) = 1$ .  $\square$

**2.3.3. Invariance par composition.** — On remarque que dans la première construction de l'intégrale de Kontsevich, il y avait une propriété fondamentale qui a disparu lors de la généralisation : il s'agit de la duplication. La raison est bien sûr que dupliquer une composante d'un graphe trivalent n'a pas de sens a priori. Nous proposons ici une généralisation de

la notion de duplication que l'on appelle composition et nous montrons que le foncteur  $Z$  est compatible avec cette opération.

**Définition 2.3.5.** — — Soit  $T = (\Gamma, \Delta, i, u)$  un morphisme dans  $\mathcal{C}$  et  $T' = (\Delta, \Pi, j, v)$  un autre morphisme. Le plongement  $j : \Delta \rightarrow \Pi \times [0, 1]$  s'étend en un plongement de  $\Delta \times [0, 1]$  dans  $\Pi \times [0, 1]$  unique à isotopie près. On peut donc composer les applications  $i$  et  $j$ . On définit alors le morphisme  $T' \circ T = (\Gamma, \Pi, j \circ i, w)$ . La source est obtenue à partir de la source de  $T'$  en insérant à l'intérieur de chaque parenthèse le mot correspondant à la source de  $T$ . On fait de même pour le but et pour le uplet  $w$ .

– De même, au niveau de la catégorie des diagrammes  $\mathcal{A}$ , étant donnés deux morphismes  $(\Gamma, \Delta, D, u)$  et  $(\Delta, \Pi, E, v)$ , on définit leur composition par le quadruplet  $(\Gamma, \Pi, E \circ D, w)$  où  $w$  est défini comme précédemment et  $\circ$  est l'opération diagrammatique de composition.

**Proposition 2.3.6.** — Le foncteur  $Z$  commute avec l'opération de composition.

*Démonstration.* — Comme pour la proposition précédente, on peut supposer que  $\Pi = \blacktriangleleft$ . Le cas général s'en suit par functorialité. Par isotopie, on peut supposer que le plongement de  $\Delta$  dans  $\blacktriangleleft \times [0, 1]$  a la forme présentée à gauche de la figure 4. Dans ce schéma, le rectangle grisé

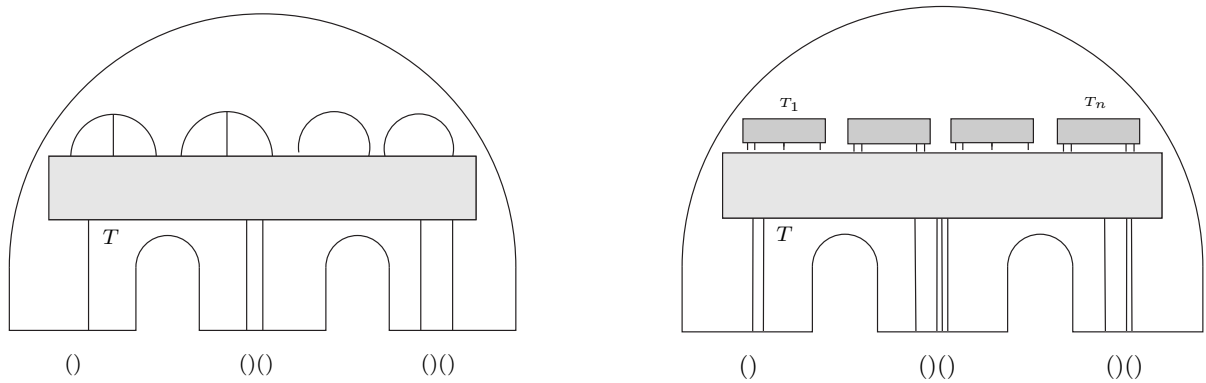


FIGURE 4. Plongement de  $\Delta$  et de  $\Gamma$  dans  $\blacktriangleleft \times [0, 1]$

représente un enchevêtrement  $T$  et la partie supérieure est une fermeture par des graphes  $\blacktriangleleft$  et  $\cap$ . On peut supposer que tous les sommets trivalents sont présentés en ligne par les graphes  $\blacktriangleleft$  comme sur la figure et que chaque composante connexe de  $T$  contient une composante de fermeture.

De même, on peut supposer que le plongement de  $\Gamma$  dans  $\Delta$  est formé de bandes parallèles sauf dans les rectangles  $T_1, \dots, T_n$ . Ceci est représenté dans la partie droite de la figure 4. Pour évaluer  $Z(T' \circ T)$  on utilise la functorialité de  $Z$  sur le schéma de la figure 4. Chaque petit rectangle est remplacé par son intégrale calculée dans  $\mathcal{T}^t$ , dans le grand rectangle, on duplique l'intégrale de l'enchevêtrement initial. Dans le calcul de  $Z(T') \circ Z(T)$ , les diagrammes provenant des composantes de fermeture de  $\Delta$  se compensent grâce au choix de normalisation. Par invariance de  $Z$  par duplication au niveau des enchevêtrements, on peut identifier  $Z(T' \circ T)$  et  $Z(T') \circ Z(T)$ .

□

**Remarque 2.3.7.** — On pourrait définir sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  une structure de 2-catégorie. Les résultats ci-dessus impliquent que  $Z$  est un foncteur de 2-catégories.

**2.3.4. Invariance par revêtement d'indice fini.** — Soit  $T$  un morphisme de  $\mathcal{C}$  représenté par le quadruplet  $(\Gamma, \Delta, i, u) : v \rightarrow w$  où  $u, v$  et  $w$  sont des uplets de  $Q$ . Si on se donne un revêtement d'indice fini de  $\Delta$ ,  $p : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ , on peut relever la structure trivalente de  $\Delta$  de façon unique. On en déduit un nouveau morphisme  $\tilde{T} = (\tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta}, \tilde{i}, \tilde{u}) : \tilde{v} \rightarrow \tilde{w}$ . On construit une application  $\text{Lift} : \mathcal{A}(\Gamma, \Delta) \rightarrow \mathcal{A}(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta})$  vérifiant  $Z(\tilde{T}) = \text{Lift } Z(T)$ .

Cette application est définie de la façon suivante : soit  $(D, D_1, \dots, D_n, h)$  un diagramme dans  $\mathcal{A}(\Gamma, \Delta)$ . C'est un graphe mono-trivalent  $D$  dont les sommets monovalents sont attachés à des segments  $D_1, \dots, D_n$  de  $\Gamma$  muni d'une application continue  $h : D \rightarrow \Delta \times [0, 1]$ . Pour tout relèvement  $\tilde{h} : D \rightarrow \tilde{\Delta}$  de  $h$ , on associe un diagramme  $(D, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n, \tilde{h})$  dans  $\mathcal{A}(\tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta})$ . On pose alors  $\text{Lift}(D, D_1, \dots, D_n, h) = \sum_{\tilde{h}} (D, \tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_n, \tilde{h})$ .

Au vu du résultat précédent, il semble donc que l'on peut répondre simplement à la question : “quel est le gradué associé à la filtration de Vassiliev sur l'espace des plongements (relatifs) d'un graphe en bande dans un graphe en bande épaissi”. On remarque que la notion de structure trivalente est absente du problème initial mais est fondamentale dans sa solution. Le foncteur  $Z$  identifie complètement ce gradué avec un espace de diagrammes et sa compatibilité avec le recollement et la composition est un résultat très satisfaisant. Cependant, la question précédente a aussi un sens si on considère les plongements d'un graphe en bande dans une variété de dimension 3 quelconque. Dans ce cas, très peu de choses sont connues et cette question a beaucoup motivé les travaux contenus dans cette thèse. La partie suivante s'intéresse précisément au degré 1 de ce gradué. En particulier, on montre qu'on ne peut espérer de généralisation simple des résultats précédents.



## CHAPITRE 3

### UN INVARIANT UNIVERSEL EN DEGRÉ 1

Dans ce chapitre, on continue l'étude des plongements de graphes dans les variétés de dimension 3. On restreint l'étude de la filtration de Vassiliev au degré 1 et on se place dans le cas des variétés compactes, orientées et irréductibles.

On montre qu'il y a une différence fondamentale entre les variétés de groupe fondamental fini qui se comportent comme  $S^3$  et les variétés de groupe fondamental infini qui sont plus pathologiques. Dans les deux cas, on définit un invariant topologique qui identifie le gradué de la filtration de Vassiliev avec l'espace de diagrammes standard.

Il est très naturel de chercher à étendre ces résultats en degré plus grand. Cependant, on montre que dès le degré 2, les variétés de groupe fondamental fini deviennent aussi pathologiques. Les techniques de ce chapitre ne se généralisent pas en degré plus grand, mais permettent de comprendre quel type de résultats on peut espérer obtenir.

Étant donné un graphe en bande  $\Gamma$  et une variété irréductible  $M$ , on a décrit au chapitre 1 un faisceau localement constant en  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels filtrés  $\mathcal{H}(\Gamma, M)$  au-dessus de  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$ .

On a ensuite rappelé la construction d'un morphisme de faisceaux  $S : \mathcal{A}_1(\Gamma, M) \rightarrow \text{Gr}_1 \mathcal{H}(\Gamma, M)$ . Si on construit un faisceau  $\mathcal{T}(\Gamma, M)$  affine sur  $\mathcal{A}_1(\Gamma, M)$  et une section  $Z$  de ce faisceau au-dessus de  $\mathcal{C}^0(\Gamma, M)$  vérifiant pour tout  $D \in \mathcal{A}_1(\Gamma, M)$ ,  $Z(S(D)) = D$ , on en déduit que  $S$  est un isomorphisme. On dira que  $Z$  est une section "universelle".

Dans ce chapitre, on construira un tel faisceau et une telle section, mais pour un quotient de  $\text{Gr}_1(\Gamma, M)$  par la désingularisation des graphes de la figure 1. Ce quotient est relié à la  $\Upsilon$ -filtration définie dans [GGP01] et se trouve être plus naturel à étudier. On notera  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  l'espace de diagrammes quotient correspondant. Cette notation ne semble pas judicieuse mais elle permet de simplifier considérablement les notations. Ce sera le seul espace de diagrammes que l'on considèrera dans la suite de ce chapitre.

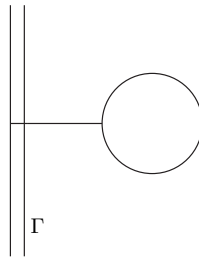


FIGURE 1. Graphes de degré 1 ayant un sommet trivalent

On résume ces résultats dans le théorème suivant :

**Théorème.** — *Pour toute variété de dimension 3 compacte, orientable et vérifiant  $\pi_2(M) = 0$ , il existe un faisceau  $\mathcal{T}(\Gamma, M)$  affine sur  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  et une section universelle  $Z : \mathcal{C}^0(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{T}(\Gamma, M)$  qui est compatible avec la composition (voir section 3.1.3) et avec les revêtements d'indice fini (voir section 3.4). Pour les variétés dont le groupe fondamental est fini, on peut supposer que  $\mathcal{T}(\Gamma, M)$  est égal au faisceau  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  comme dans le cas de  $S^3$ .*

Ce chapitre est divisé en 6 sous-parties :

- En premier lieu, on rappelle le cas de  $M = S^3$  et celui des surfaces épaissies.
- Puis on définit la forme de Seifert symétrique et on en déduit une construction de  $Z$  dans le cas des variétés de groupe fondamental fini.
- Dans la troisième partie, on explique comment construire l'invariant pour des variétés avec groupe fondamental infini.
- On explique comment ces invariants se comportent vis-à-vis des revêtements d'indice fini.
- On relie ces résultats à la filtration de Vassiliev standard.
- On traite finalement l'exemple des espaces lenticulaires en degré 1 et 2.

### 3.1. La sphère $S^3$ et les surfaces épaissies

**3.1.1. Invariant de graphes dans  $S^3$ .** — Dans ce cas, comme  $\mathcal{C}(\Gamma, S^3)$  est simplement connexe, on se ramène au cas décrit dans le chapitre 2. On connaît donc toute la filtration de Vassiliev grâce à l'existence de l'intégrale de Kontsevich des graphes trivalents. L'objet de ce chapitre est d'étudier seulement la partie de degré 1. Il se trouve que cet invariant ne dépend pas de la structure trivalente. On le redéfinit de la façon suivante, qui est bien connue :

**Proposition 3.1.1.** — *Soit  $\Gamma$  un graphe en bande plongé dans  $S^3$ . On peut choisir un plan orienté et une projection régulière telle que la bande soit partout parallèle au plan. On définit  $Z(\Gamma)$  comme la demi-somme sur toutes les intersections des diagrammes à une corde définis de la manière suivante : au voisinage d'un point double, deux bandes de  $\Gamma$  se croisent. Choisissons  $v_1$  un vecteur directeur de la bande inférieure et  $v_2$  un vecteur directeur de la bande supérieure de telle sorte que  $(v_1, v_2, n)$  soit directe, où  $n$  est le vecteur normal au plan de projection. Le couple  $(v_1, v_2)$  définit un élément de  $\mathcal{A}(\Gamma, S^3)$  de façon non ambiguë.*

*On prouve facilement que le diagramme obtenu est indépendant de la projection. L'application  $Z$  ainsi construite est un invariant universel de degré 1.*

Donnons maintenant une interprétation de cet invariant qui va s'avérer cruciale dans le reste du chapitre. Soit  $\Gamma$  un graphe en bande dans  $S^3$ . Notons  $f$  sa forme de Seifert définie sur  $H_1(\Gamma, \mathbb{Q}) \times H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$  par la formule  $f(x, y) = \text{Lk}(x, y^+)$  où  $y^+$  désigne le cycle  $y$  poussé hors de  $\Gamma$  dans la direction normale à  $\Gamma$ .

On appelle forme de Seifert symétrique de  $\Gamma$  la forme  $b(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))$ . Cet objet correspond à  $Z(\Gamma)$  via l'isomorphisme entre  $\mathcal{A}(\Gamma, S^3)$  et l'espace  $\mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \mathbb{Q}))$  des formes bilinéaires symétriques sur  $H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$  rappelé ci-dessous.

**Proposition 3.1.2.** — *On définit l'application  $\Phi : \mathcal{A}(\Gamma, S^3) \rightarrow \mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \mathbb{Q}))$  de la façon suivante : étant donné un segment  $D$  dans  $\Gamma$ , son dual de Poincaré est une classe dans  $H^1(\Gamma, \mathbb{Q})$  que l'on note  $\varphi(D)$ . On définit alors  $\Phi(D_1, D_2, h) = \varphi(D_1) \otimes \varphi(D_2) + \varphi(D_2) \otimes \varphi(D_1) \in S^2 H^1(\Gamma, \mathbb{Q}) = \mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \mathbb{Q}))$ . Il est clair par cette construction que  $\Phi(Z(\Gamma))$  est la forme de Seifert symétrique de  $\Gamma$ . Il n'est pas difficile de prouver que  $\Phi$  est un isomorphisme, et nous le montrerons dans le contexte plus général des variétés de groupe fondamental fini.*

**3.1.2. Generalisation aux surfaces épaissies.** — On peut peut facilement généraliser la construction précédente au cas suivant (voir [Tch98]). Soit  $\Sigma$  une surface orientée et  $M = \Sigma \times [0, 1]$ .

Soit  $\Gamma$  un graphe en bande et  $j$  un plongement  $j : \Gamma \rightarrow M$ . On peut supposer que sa projection sur  $\Sigma$  est générique. Pour chaque point d'intersection, on peut considérer un diagramme dans  $\mathcal{A}^1(\Gamma, M)$  qui relie les deux bandes qui se croisent avec des orientations compatibles, comme ci-dessus. On définit  $Z(j)$  comme la demi-somme sur tous les croisements des diagrammes précédents. Il est facile de vérifier que cette application est bien définie, qu'elle s'annule sur  $\mathcal{H}_2(\Gamma, M)$  et que c'est un inverse de  $S$ .

**3.1.3. Compatibilité avec la composition.** — Soit  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux graphes en bande et  $M$  une variété de dimension 3. La composition des plongements fournit une application :

$$\mathcal{H}(\Delta, \Gamma \times I) \times \mathcal{H}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{H}(\Delta, M).$$

Cette application est compatible avec la filtration de Vassiliev et donne ainsi une application de degré 0 :  $\text{Gr } \mathcal{H}(\Delta, \Gamma \times [0, 1]) \times \text{Gr } \mathcal{H}(\Gamma, M) \rightarrow \text{Gr } \mathcal{H}(\Delta, M)$ . En particulier, on a une application

$$\text{Gr}_0 \mathcal{H}(\Delta, \Gamma \times I) \times \text{Gr}_1 \mathcal{H}(\Gamma, M) \oplus \text{Gr}_1 \mathcal{H}(\Delta, \Gamma \times I) \times \text{Gr}_0 \mathcal{H}(\Gamma, M) \rightarrow \text{Gr}_1 \mathcal{H}(\Delta, M).$$

*Définition 3.1.3.* — On rappelle que toute application  $k : M \rightarrow N$  induit naturellement une application  $k_* : \mathcal{A}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, N)$  et que toute application  $j : \Delta \rightarrow \Gamma$  induit une application  $j^* : \mathcal{A}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{A}(\Delta, M)$ .

Un invariant universel compatible avec la composition est la donnée pour tout  $\Gamma$  d'une section  $Z : \mathcal{C}^0(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, M)$  qui est un invariant universel et telle que

pour tous graphes en bande  $\Gamma, \Delta$ , et tous plongements  $j : \Delta \rightarrow \Gamma, k : \Gamma \rightarrow M$  on a :

$$Z(k \circ j) = k_* Z(j) + j^* Z(k).$$

ou le diagramme  $Z(j)$  est défini par la formule usuelle sur les surfaces épaissies.

Si  $Z$  prend ses valeurs sur un espace affine  $\mathcal{T}(\Gamma, M)$  au-dessus de  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$ , on peut donner la même définition dès que l'on a défini  $j^*$ , i.e. si  $\mathcal{T}(\cdot, M)$  est un foncteur contravariant par rapport aux applications continues entre graphes en bande.

Il est facile de vérifier que l'invariant défini pour les surfaces épaissies est compatible avec la composition. Il semble que ce soit la seule famille de 3-variétés pour lesquelles un tel invariant soit construit. Dans la suite de ce chapitre, on se propose de construire un invariant de degré 1 universel et compatible avec la composition.

## 3.2. Variétés de groupe fondamental fini

Nous montrons dans cette partie que l'on peut construire un invariant universel compatible avec la composition dans les variétés de groupe fondamental fini. Cela provient d'une généralisation de la proposition 3.1.2. Pour rendre cette généralisation possible, on utilise l'homologie et la cohomologie à coefficients tordus.

**3.2.1. Cohomologie tordue et diagrammes.** — Rappelons les notations de l'homologie et la cohomologie tordue. On considère la  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $\Lambda = \mathbb{Q}[\pi_1(M, x)]$  où  $M$  est une variété de point base  $x$ .

Étant donné un espace topologique  $X$  muni d'une application  $f : X \rightarrow M$ , on considèrera son homologie tordue  $H_*(X, \Lambda)$  avec l'action naturelle de  $\Lambda$  à droite et sa cohomologie tordue  $H^*(X, \Lambda)$  avec l'action de  $\Lambda$  à gauche.

Pour  $g \in \pi_1(M, x)$ , on pose  $\bar{g} = g^{-1}$  que l'on étend en un anti-automorphisme de  $\Lambda$ . Pour tout  $\Lambda$ -module à gauche  $E$ , on note  $\bar{E}$  le module à droite défini par l'action  $e \cdot \lambda = \bar{\lambda} \cdot e$ . De même on note  $\bar{E}$  le module à gauche associé à tout module à droite par la même formule.

On peut représenter un simplexe tordu dans  $X$  par un simplexe  $\sigma$  dans  $X$  avec un chemin qui relie  $x$  et  $f(\sigma)$  dans  $M$ . L'action à droite de  $\Lambda$  peut être vue comme la composition à droite sur ce chemin.

Cette interprétation nous permet d'identifier l'espace de diagramme noté  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  à un certain groupe de cohomologie.

Pour cela, on rappelle que l'espace  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  est par définition le quotient de  $\mathcal{A}^1(\Gamma, M)$  par les diagrammes de la forme  $\rightarrow \circ$ . Or un diagramme de  $\mathcal{A}^1(\Gamma, M)$  est donné par deux segments disjoints  $D_1$  et  $D_2$  de  $\Gamma$  et un chemin qui les relie dans  $M$ . Si on applique une relation (IH $X$ ) à un diagramme de la forme  $\rightarrow \circ$ , on remarque que pour passer de  $\mathcal{A}^1(\Gamma, M)$  à  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  il suffit d'identifier les diagrammes  $(D_1, D_2, h)$  et  $(D_2, D_1, h)$  où  $D_1$  et  $D_2$  sont des segments parallèles.

C'est-à-dire qu'un élément de  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  est toujours représenté par deux segments  $D_1$  et  $D_2$  de  $\Gamma$  et un chemin qui relie leurs images dans  $M$ , mais ces segments ne sont plus obligatoirement disjoints.

Notons  $S^2H^1(\Gamma, \Lambda)$  le sous-espace de  $\overline{H^1(\Gamma, \Lambda)} \otimes_{\Lambda} H^1(\Gamma, \Lambda)$  invariant par symétrisation. On a la propriété suivante :

**Proposition 3.2.1.** — *Les espaces  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  et  $S^2H^1(\Gamma, \Lambda)$  sont canoniquement isomorphes.*

*Démonstration.* — Supposons que  $\Gamma$  est présenté par un 1-squelette muni d'une application continue dans  $M$ .

On construit une application  $\varphi : \overline{H^1(\Gamma, \Lambda)} \otimes_{\Lambda} H^1(\Gamma, \Lambda) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, \Lambda)$ . Étant données deux arêtes orientées  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\Gamma$  reliées dans  $M$  au point base, on peut considérer le diagramme dont les segments sont duaux à  $\alpha$  et  $\beta$  (avec des orientations compatibles) et dont le chemin est obtenu en parcourant  $\alpha$  en sens inverse, puis  $\beta$ . Ceci définit un élément  $\varphi(\alpha \otimes \beta)$  de  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$ . On peut vérifier que ceci est compatible avec l'action de  $\Lambda$  :  $\varphi(\alpha \cdot g^{-1} \otimes g \cdot \beta) = \varphi(g \cdot \alpha \otimes g \cdot \beta) = \varphi(\alpha \otimes \beta)$  car quand on compose les chemins, l'élément  $g$  disparaît.

À tout sommet de  $\Gamma$  on associe un cobord obtenu en faisant la somme de toutes les arêtes sortant de ce sommet. L'image par  $\varphi$  de cette somme est une relation (IH $X$ ). Si on inverse l'application  $h$ , les diagrammes sont les mêmes, on en déduit que l'application  $\varphi$  se factorise par la symétrisation.

On peut construire l'inverse de  $\varphi$  de la même manière. Cela prouve que  $\varphi$  est un isomorphisme.  $\square$

**3.2.2. La forme de Seifert symétrique.** — On généralise de façon naturelle la construction de la proposition 3.1.2.

**Définition 3.2.2.** — *Soit  $\Gamma$  un graphe en bande et  $j$  un plongement de  $\Gamma$  dans une variété  $M$  de dimension 3.*

Il existe une forme symétrique  $b_j$  sur  $H_1(\Gamma, \Lambda)$  définie par la formule suivante. Pour deux cycles  $c_1, c_2$  dans  $H_1(\Gamma, \Lambda)$ , on pose :

$$b_j(c_1, c_2) = \frac{1}{2} \text{Lk}_M(c_1, c_2^+) + \frac{1}{2} \text{Lk}_M(c_1^+, c_2).$$

Ici,  $c^+$  désigne le cycle  $c$  poussé hors de  $\Gamma$  le long du vecteur normal de  $\Gamma$ . On rappelle que  $\text{Lk}_M(c_1, c_2) = \sum_{g \in \pi_1(M)} \text{Lk}_{\widetilde{M}}(\widetilde{c}_1, g\widetilde{c}_2)g$  où  $\widetilde{c}_1$  est le relèvement de  $c_1$  dans le revêtement universel de  $M$ ,  $\widetilde{M}$ . La forme d'enlacement est bien définie dans  $\widetilde{M}$  car  $H_1(\widetilde{M}, \mathbb{Z}) = 0$ .

Pour tous  $\lambda, \mu \in \pi_1(M)$ , on calcule :

$$\text{Lk}(c_1\lambda, c_2\mu) = \sum_{g \in \pi_1(M)} \text{Lk}_{\widetilde{M}}(\lambda^{-1}\widetilde{c}_1, g\mu^{-1}\widetilde{c}_2)g = \lambda^{-1} \text{Lk}(c_1, c_2)\mu.$$

On aurait pu définir  $\text{Lk}_M$  de la façon suivante : comme  $c_1$  est homotope à 0, il borde un disque  $D_1$ . On peut supposer que  $c_2$  est transverse à  $D_1$ , l'élément  $\text{Lk}_M(c_1, c_2)$  est égal à la somme sur tous les points d'intersection de  $c_2$  et  $D_1$  des chemins partant du point base vers  $D_1$ , puis revenant de  $c_2$  au point base via le point d'intersection.

On en conclut que  $b_j$  est une forme  $\Lambda - \Lambda$ -bilinéaire symétrique sur  $\overline{H_1(\Gamma, \Lambda)} \times H_1(\Gamma, \Lambda)$ . En d'autres termes,  $b_j \in \text{hom}_{\Lambda - \Lambda}(\overline{H_1(\Gamma, \Lambda)} \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(\Gamma, \Lambda), \Lambda)$  où on utilise la structure de bi- $\Lambda$ -module de  $\Lambda$ . On note  $\mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \Lambda))$  l'espace des formes bilinéaires symétriques précédent. Il peut être vu comme un faisceau localement constant au-dessus de  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$ , et  $b$  comme une section de ce faisceau au-dessus de  $\mathcal{C}^0(\Gamma, M)$ .

**3.2.3. Construction de l'invariant.** — Notre but est de construire une section de  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  au-dessus de  $\mathcal{C}^0(\Gamma, M)$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  à partir du plongement  $j$  de  $\Gamma$  dans  $M$ . Pour cela, nous allons essayer d'extraire un élément de  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  à partir de  $b_j$ .

On a une application canonique  $\Phi : \overline{H^1(\Gamma, M)} \otimes_{\Lambda} H^1(\Gamma, M) \rightarrow \text{hom}_{\Lambda - \Lambda}(\overline{H_1(\Gamma, \Lambda)} \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(\Gamma, \Lambda), \Lambda)$  induite par l'application d'évaluation  $H^1(\Gamma, M) \rightarrow \text{hom}_{\Lambda}(H_1(\Gamma, M), \Lambda)$  et transforme des éléments symétriques en formes symétriques. C'est une généralisation naturelle de l'application de 3.1.2.

Décrivons cette application de façon géométrique. Soit  $j : \Gamma \rightarrow M$  une application continue, et  $c_1, c_2$  deux chemins dans  $H_1(\Gamma, \Lambda)$ . Étant donné un diagramme  $D = (D_1, D_2, h)$ , on lui associe un élément dans  $\Lambda$  en faisant la somme sur toutes les intersections algébriques  $c_1 \cap D_1$  et  $c_2 \cap D_2$  des chemins obtenus en allant du point base vers  $c_1$ , suivant  $h$ , et revenant par  $c_2$ . On vérifie bien que cette application est  $\Lambda - \Lambda$  linéaire.

Si l'application  $\Phi$  est un isomorphisme, on peut poser  $Z(j) = \Phi^{-1}(b_j) \in \mathcal{A}(\Gamma, M)$  ce qui répondra à la question initiale. Il nous faut donc étudier  $\Phi$ , ce qui est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 3.2.3.** — *Soit  $M$  une variété compacte orientée de groupe fondamental fini et  $\Gamma$  un graphe en bande. L'application  $\Phi : \mathcal{A}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \Lambda))$  est un isomorphisme de faisceaux localement constants sur  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$ . La section  $Z(j) = \Phi^{-1}(b_j)$  définit un invariant universel compatible avec la composition.*

*Démonstration.* — Comme  $\pi_1(M)$  est fini par hypothèse, tous les  $\Lambda$ -modules sont projectifs. D'après la formule des coefficients universels, l'application d'évaluation  $H^1(\Gamma, M) \rightarrow \text{hom}_{\Lambda}(H_1(\Gamma, M), \Lambda)$  est un isomorphisme.

On a la suite d'isomorphismes naturels suivante :

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\Lambda-\Lambda}(\overline{H_1(\Gamma, \Lambda)}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(\Gamma, \Lambda), \Lambda &= \text{hom}_{\Lambda}(\overline{H_1(\Gamma, \Lambda)}, \text{hom}_{\Lambda}(H_1(\Gamma, \Lambda), \Lambda)) \\ &= \text{hom}_{\Lambda}(\overline{H_1(\Gamma, \Lambda)}, H^1(\Gamma, \Lambda)) \end{aligned}$$

Puis, utilisant le fait que  $H^1(\Gamma, \Lambda)$  est de présentation finie et que  $H_1(\Gamma, \Lambda)$  est projectif on obtient :

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\Lambda-\Lambda}(\overline{H_1(\Gamma, \Lambda)}) \otimes_{\mathbb{Q}} H_1(\Gamma, \Lambda), \Lambda &= \text{hom}_{\Lambda}(\overline{H_1(\Gamma, \Lambda)}, \Lambda) \otimes_{\Lambda} H^1(\Gamma, \Lambda) \\ &= \overline{H^1(\Gamma, M)} \otimes_{\Lambda} H^1(\Gamma, \Lambda) \end{aligned}$$

L'universalité de  $Z$  provient du lemme suivant :

**Lemme 3.2.4.** — *Soit  $M$  une variété orientée quelconque,  $\Gamma$  un graphe en bande et  $D$  un diagramme dans  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$ . Soit  $j^+$  et  $j^-$  deux plongements de  $\Gamma$  tels que  $j^+ - j^- = S(D)$ , alors  $b_{j^+} - b_{j^-} = \Phi(D)$ .*

*Démonstration.* — On choisit  $c_1$  et  $c_2$  deux cycles de  $H_1(\Gamma, \Lambda)$  présentés par des lacets dans  $\Gamma$  homotopes à 0 dans  $M$ . On peut trouver un disque  $\Sigma^+$  dont le bord est  $j^+(c_1)$ . L'élément  $b_{j^+}(c_1, c_2)$  peut être calculé comme l'intersection sur  $\Lambda$  de  $\Sigma^+$  avec  $c_2^+$  et  $c_2^-$ . On peut choisir un voisinage du point de croisement de  $j^+$  et  $j^-$  qui ne contient aucun des points d'intersection ci-dessus, comme dans la figure 2.

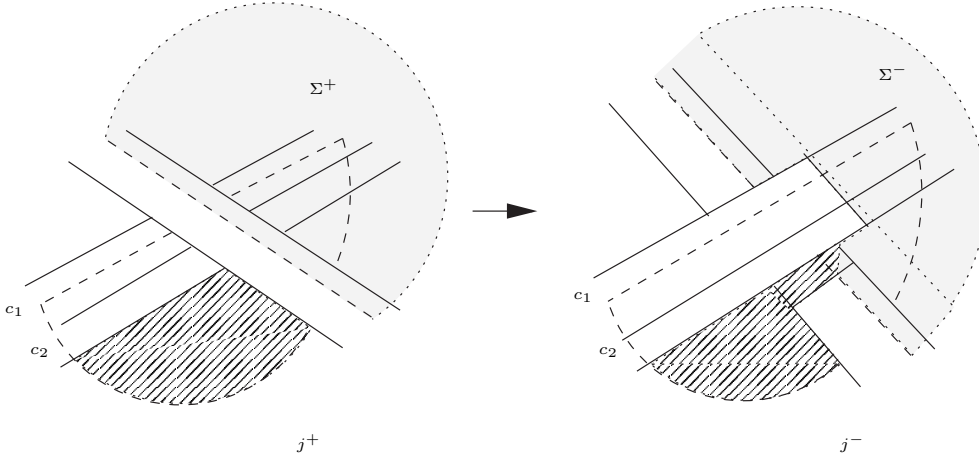


FIGURE 2. Forme de Seifert symétrique et changement de croisement

Appelons  $D_a$  et  $D_b$  les segments caractéristiques de la singularité. Dans un voisinage de l'intersection, la surface ressemble à une réunion de demi-disques, une copie pour chaque intersection de  $c_1$  avec  $D_a$  et  $D_b$ .

À partir de la surface  $\Sigma^+$ , on peut construire une surface  $\Sigma^-$  qui borde  $j^-(c_1)$  comme cela est suggéré par la figure 2. Cette surface intersecte  $\Gamma$  en des segments parallèles à  $D_a$  et  $D_b$ . L'intersection de  $\Sigma^-$  avec  $c_2^+$  et  $c_2^-$  est la même. Ainsi, la différence  $b_{j^+}(c_1, c_2) - b_{j^-}(c_1, c_2)$  est égale à la demi-somme de toutes les paires d'intersection de  $D_a$  et  $D_b$  avec  $c_2$ , à laquelle on ajoute symétriquement les paires d'intersections de  $D_a$  et  $D_b$  avec  $c_1$ . On reconnaît bien l'action de  $D$  sur  $c_1$  et  $c_2$ .  $\square$

Il reste à prouver que  $Z$  est compatible avec la composition. Il est équivalent de montrer que les formes de Seifert symétriques sont compatibles avec la composition.

**Lemme 3.2.5.** — Soit  $M$  une variété orientée de dimension 3,  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux graphes en bande,  $k : \Gamma \rightarrow M$  un plongement et  $j : \Delta \rightarrow \Gamma \times [0, 1]$  un autre plongement. On a alors,

$$b_{k \circ j} = k_* \Phi(Z(j)) + j^* b_k.$$

*Démonstration.* — Soit  $c_1$  et  $c_2$  deux cycles dans  $H_1(\Delta, \Lambda)$ . On peut supposer que  $j$  est très proche d'une projection régulière. Soit  $\Sigma$  un disque dans  $M$  qui borde  $c_1$ . On a alors  $b_{k \circ j}(c_1, c_2) = \frac{1}{2} \Sigma \cdot c_2^{\Delta+} + \frac{1}{2} \Sigma \cdot c_2^{\Delta-}$ . On voit que la différence entre cette expression et la même où on a remplacé  $c_2^{\Delta+}$  par  $c_2^{\Gamma+}$  et  $c_2^{\Delta-}$  par  $c_2^{\Gamma-}$  est une somme sur toutes les intersections de  $\Delta$  dans  $\Gamma$  dans laquelle on reconnaît l'action de  $Z(j)$ . Ceci prouve la formule du lemme.  $\square$

Ainsi les propriétés de la forme symétrique de Seifert impliquent les mêmes propriétés pour  $Z$ , ce que nous voulions démontrer.  $\square$

### 3.3. Variétés de groupe fondamental infini

La construction précédente est très naturelle, mais elle ne se généralise pas à toutes les variétés pour les deux raisons expliquées ci-dessous.

- Considerons un cercle  $c$  plongé dans une variété  $M$ . L'espace  $H_1(c, \Lambda)$  est le noyau de la multiplication par  $g - 1$  sur  $\Lambda$  où  $g$  représente la classe d'homotopie de  $c$ . Si  $g$  est d'ordre infini,  $H_1(c, \Lambda) = 0$ . Pourtant, l'espace  $\mathcal{A}(c, M)$  n'est pas nécessairement fini car il est isomorphe à la partie symétrique du double quotient  $(g^{-1} - 1) \backslash \Lambda / (g - 1)$ . Cela prouve que l'application  $\Phi$  n'est pas nécessairement injective.
- Si on étudie plus précisément l'application  $\Phi$ , on remarque qu'elle n'est pas surjective non plus (voir proposition 3.3.2). On est alors forcé de chercher un invariant dans un espace différent.

**3.3.1. Extension de l'espace des diagrammes.** — Fixons une variété  $M$  compacte orientée de groupe fondamental infini et telle que  $\pi_2(M) = 0$ . Pour tout graphe en bande  $\Gamma$ , on définit un faisceau  $\mathcal{B}(\Gamma, M)$  qui a de meilleures propriétés que  $\mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \Lambda))$ . L'invariant  $Z$  sera à valeurs dans cet espace.

**Remarque 3.3.1.** — Considérons un espace  $X$  et une application  $f : X \rightarrow M \times M$ . Le complexe de chaînes de  $X$  tordu par  $f$  a une structure de  $\mathbb{Q}[\pi_1(M \times M)]$ -module à droite, ce qui est encore équivalent à une  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda$ -structure. On peut définir une telle structure sur  $\Lambda$  par la formule  $x.(\lambda \otimes \mu) = \bar{\lambda}x\mu$ . En ce sens, on peut considérer des espaces comme  $H^*(X, \Lambda)$ .

**Proposition 3.3.2.** — Soit  $M$  une variété compacte orientée de groupe fondamental infini vérifiant  $\pi_2(M) = 0$ . Soit  $\Gamma$  un graphe en bande et  $j : \Gamma \rightarrow M$  un plongement. On note  $Z = M \times \Gamma \cup \Gamma \times M \subset M \times M$ , et on considère l'espace  $H^3(Z, \Lambda)$ .

1. Les deux inclusions  $\alpha : M \times \Gamma \rightarrow Z$  et  $\beta : \Gamma \times M \rightarrow Z$  induisent la suite exacte de Mayer-Vietoris suivante :

(3)

$$0 \longrightarrow \overline{H^1(\Gamma, \Lambda)} \otimes_{\Lambda} H^1(\Gamma, \Lambda) \longrightarrow H^3(Z, \Lambda) \xrightarrow{\alpha^* + \beta^*} H^3(M \times \Gamma, \Lambda) \oplus H^3(\Gamma \times M, \Lambda) \longrightarrow 0.$$

Les deux morphismes de cette suite commutent avec l'opérateur  $\tau$  induit par la symétrisation  $M \times M \rightarrow M \times M$  qui échange les facteurs.

Ainsi, si on définit  $\mathcal{B}(\Gamma, M)$  comme la partie  $\tau$ -symétrique de  $H^3(\Gamma \times M \cup M \times \Gamma, \Lambda)$ , on a la suite exacte suivante :

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{A}(\Gamma, M) \longrightarrow \mathcal{B}(\Gamma, M) \xrightarrow{\varepsilon} H^0(\Gamma, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0.$$

2. On peut définir l'espace  $\mathcal{B}(\Gamma, M)$  pour toute application continue  $\Gamma \rightarrow M$ . De cette façon,  $\mathcal{B}(\Gamma, M)$  est un faisceau localement constant au-dessus de  $\mathcal{C}(\Gamma, M)$ .
3. C'est un foncteur contravariant par rapport aux applications continues entre graphes.
4. Il y a une application d'évaluation naturelle  $\Psi : \mathcal{B}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \Lambda))$  qui étend  $\Phi$ . Si  $\Gamma$  est un graphe connexe dont le groupe fondamental se surjecte sur celui de  $M$ , alors  $\Psi$  est une injection.

*Démonstration.* — **Preuve de la partie 1 :**

Le point principal est d'établir la suite exacte (3). Elle apparaît comme une partie d'une suite de Mayer-Vietoris associée à la décomposition évidente  $Z = \Gamma \times M \cup M \times \Gamma$ . Dans la suite, on omet d'écrire les coefficients dans  $\Lambda$ .

(5)

$$H^2(\Gamma \times M) \oplus H^2(M \times \Gamma) \rightarrow H^2(\Gamma \times \Gamma) \rightarrow H^3(Z) \rightarrow H^3(M \times \Gamma) \oplus H^3(\Gamma \times M) \rightarrow H^3(\Gamma \times \Gamma)$$

Comme  $M$  est un espace de type  $K(\pi_1(M), 1)$ , on a  $H_*(M, \Lambda) = 0$  pour  $* > 0$  et  $H_0(M, \Lambda) = \mathbb{Q}$ . Par dualité de Poincaré, on a aussi  $H^*(M, \Lambda) = H_{3-*}(M, \Lambda)$ . La cohomologie de l'espace  $\Gamma \times M$  se calcule simplement. En effet, c'est un espace fibré, et le terme  $E^2$  de sa suite spectrale de Serre est  $H^*(\Gamma, H^*(M, \Lambda))$ . Cette suite n'a qu'une colonne et donc converge vers  $H^*(\Gamma \times M) = H^{*-3}(\Gamma, \mathbb{Q})$ . En particulier, le premier espace de (5) est nul et l'avant dernier est isomorphe à  $H^0(\Gamma, \mathbb{Q}) \oplus H^0(\Gamma, \mathbb{Q})$ .

Étudions l'espace  $H^*(\Gamma \times \Gamma, \Lambda)$ . Comme  $\Gamma$  est un graphe, on a un complexe de chaînes de  $\Lambda$ -modules à droite  $C_0(\Gamma, \Lambda) \leftarrow C_1(\Gamma, \Lambda)$  qui permet de calculer  $H_*(\Gamma, \Lambda)$ . On peut alors calculer la cohomologie  $H^*(\Gamma \times \Gamma, \Lambda)$  à partir du complexe  $\text{hom}_{\Lambda \otimes \Lambda}((C(\Gamma, \Lambda) \otimes C(\Gamma, \Lambda))_*, \Lambda)$ . Cette présentation permet de conclure que la cohomologie de  $\Gamma \times \Gamma$  en degré  $*$  est nulle pour  $* > 2$  et que l'application  $\overline{H^1(\Gamma, \Lambda)} \otimes_{\Lambda} H^1(\Gamma, \Lambda) \rightarrow H^2(\Gamma \times \Gamma, \Lambda)$  est un isomorphisme.

Il est standard de vérifier que l'application  $H^2(\Gamma \times \Gamma) \rightarrow H^3(Z)$  commute avec  $\tau$  et il est clair que  $i^* + j^*$  est  $\tau$ -equivariant. On en déduit la suite exacte (4) en prenant les parties  $\tau$ -symétriques. On identifiera explicitement la partie symétrique de  $H^3(M \times \Gamma) \oplus H^3(\Gamma \times M)$  avec  $H^0(\Gamma, \mathbb{Q})$  dans la prochaine section.

### Preuve des parties 2 et 3 :

La première propriété est claire car pour toute application continue  $j : \Gamma \rightarrow M$  on peut présenter  $\Gamma \times M \cup M \times \Gamma$  comme le recollement de  $\Gamma \times M \coprod \Gamma \times \Gamma \times [0, 1] \coprod M \times \Gamma$  le long de  $\Gamma \times \Gamma \times \{0\}$  et  $\Gamma \times \Gamma \times \{1\}$  suivant les applications  $\text{Id} \times j$  et  $j \times \text{Id}$ . Cette construction est un foncteur homotopique.

Étant donné un plongement  $j : \Delta \rightarrow \Gamma$ , on en déduit un plongement de  $\Delta \times M \cup M \times \Delta$  dans  $\Gamma \times M \cup M \times \Gamma$ . En appliquant le foncteur contravariant  $H^3(., \Lambda)$  on obtient une application induite  $j^* : \mathcal{B}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{B}(\Delta, M)$ . Comme précédemment, ceci est bien fonctoriel.

### Preuve de la partie 4 :

Pour prouver le dernier résultat, on construit un morphisme  $\Psi : \mathcal{B}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \Lambda))$ .

Considérons l'application d'évaluation  $H^3(Z, \Lambda) \rightarrow \text{hom}_{\Lambda \otimes \Lambda}(H_3(Z, \Lambda \otimes \Lambda), \Lambda)$ . Le sous-ensemble  $Z$  de  $M \times M$  vérifie  $H_*(M \times M, \Lambda \otimes \Lambda) = 0$  pour  $* > 0$ . Cela signifie que l'application bord  $H_{n+1}((M \times M, Z), \Lambda \otimes \Lambda) \rightarrow H_n(Z, \Lambda \otimes \Lambda)$  est un isomorphisme pour  $n \geq 1$ . Utilisant le



fait que  $(M \times M, Z) = (M, \Gamma) \times (M, \Gamma)$ , on peut appliquer la formule de Künneth. À partir de la suite exacte de  $(M, \Gamma)$ , on déduit que  $H_*(M, \Gamma) = 0$  pour  $* > 2$ .

On en déduit l'isomorphisme  $H_3(Z, \Lambda \otimes \Lambda) = H_2(M, \Gamma) \otimes H_2(M, \Gamma)$ . Comme  $H_*(M, \Lambda)$  est nul pour  $* > 0$ , l'opérateur bord  $H_2((M, \Gamma), \Lambda) \rightarrow H_1(\Gamma, \Lambda)$  est un isomorphisme et on a  $H_3(Z, \Lambda \otimes \Lambda) \simeq H_1(\Gamma, \Lambda) \otimes H_1(\Gamma, \Lambda)$ .

Prouvons la dernière propriété. Soit  $\Gamma$  un graphe connexe et  $f : \Gamma \rightarrow M$  une application surjective au niveau du groupe fondamental. On a  $H_0(\Gamma) = \mathbb{Q}$ , puis d'après la suite exacte de  $(M, \Gamma)$ , on a  $H_0(M, \Gamma) = H_1(M, \Gamma) = 0$ . Il vient finalement  $H_n(Z, \Lambda \otimes \Lambda) = 0$  sauf pour  $n = 3$  et  $n = 0$ . On vérifie aisément que  $H_0(Z, \Lambda \otimes \Lambda) = \mathbb{Q}$ .

Il y a donc une suite spectrale à deux lignes  $\text{Ext}_{\Lambda-\Lambda}^*(H_*(Z, \Lambda \otimes \Lambda), \Lambda)$  qui converge vers  $H^*(Z, \Lambda)$ . La première ligne est  $\text{Ext}_{\Lambda-\Lambda}^*(\mathbb{Q}, \Lambda) = H^*(M \times M, \Lambda)$ . D'après la suite spectrale de Serre,  $H^*(M \times M, \Lambda) = H^{*-3}(M, \mathbb{Q})$ . La différentielle  $d_4$  induit une suite exacte longue dont les premiers termes sont :

$$0 \longrightarrow H^3(M \times M, \Lambda) \longrightarrow H^3(Z, \Lambda) \longrightarrow \text{hom}_{\Lambda \otimes \Lambda}(H_1(\Gamma, \Lambda) \otimes H_1(\Gamma, \Lambda), \Lambda) \longrightarrow H^1(M, \mathbb{Q})$$

Cette suite est à son tour invariante par symétrisation, ce qui nous permet de déduire la même suite au niveau des parties symétriques. Seulement, comme  $\tau$  change l'orientation, on vérifie qu'il agit sur  $H^3(M \times M, \Lambda)$  par multiplication par  $-1$ . On en déduit que  $\mathcal{B}(\Gamma, M)$  s'injecte dans  $\mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \Lambda))$ . On peut même prouver que c'est un isomorphisme mais on n'en aura pas besoin par la suite.  $\square$

**3.3.2. Construction de l'invariant.** — Dans cette partie, on construit une section de  $\mathcal{B}(\Gamma, M)$  au-dessus de  $\mathcal{C}^0(\Gamma, M)$ , c'est-à-dire qu'on associe un élément  $\delta_j \in \mathcal{B}(\Gamma, M)$  à tout plongement  $j : \Gamma \rightarrow M$ .

**Proposition 3.3.3.** — *Soit  $M$  une variété compacte orientée avec  $\pi_1(M)$  infini et  $\pi_2(M) = 0$ . Soit  $\Gamma$  un graphe en bande.*

1. On peut associer à tout plongement  $j : \Gamma \rightarrow M$  un cocycle  $\delta_j \in \mathcal{B}(\Gamma, M)$  qui vérifie  $\Psi(\delta_j) = b_j$  et  $\varepsilon(\delta_j) = 1$ , où  $1$  est l'unité de  $H^0(\Gamma, \mathbb{Q})$ .
2. Pour tout diagramme  $D$  et tous plongements  $j^\pm : \Gamma \rightarrow M$  tels que  $j^+ - j^- = S(D)$ , on a  $\delta_{j^+} - \delta_{j^-} = D$ .

*Démonstration.* — **Preuve de la partie 1 :**

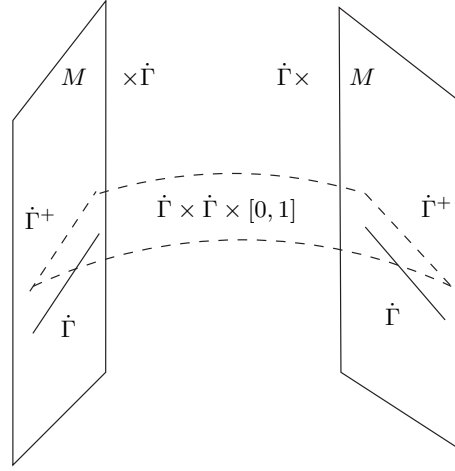
Choisissons un point base  $x$  pour  $M$ , et soit  $(x, x)$  un point base pour  $M \times M$ . Soit  $\dot{\Gamma}$  un 1-squelette de  $\Gamma$ . On définit un autre graphe  $\dot{\Gamma}^+$  en poussant légèrement  $\dot{\Gamma}$  dans la direction normale à  $\Gamma$ .

On rappelle que  $\mathcal{B}(\Gamma, M) = H^3(Z, \Lambda)^\tau$  où  $Z = M \times \Gamma \cup \Gamma \times M$ . L'espace  $Z$  est homotopiquement équivalent au recollement de  $M \times \dot{\Gamma} \amalg \dot{\Gamma} \times \dot{\Gamma} \times [0, 1] \amalg \dot{\Gamma} \times M$  où on a remplacé l'inclusion de  $\dot{\Gamma}$  par l'inclusion de  $\dot{\Gamma}^+$ . On peut représenter cet espace comme sur la figure 3.

Le principe de transversalité implique le fait suivant : considérons le sous-complexe de  $\mathcal{C}_*(Z, \Lambda \otimes \Lambda)$  dont les simplexes sont transverses à la diagonale de  $\dot{\Gamma}$  dans  $M \times \dot{\Gamma}$  et dans  $\dot{\Gamma} \times M$ . L'inclusion de ce sous complexe dans le complexe total est une équivalence d'homotopie.

On définit le cocycle  $\delta$  sur ce sous-complexe. Il associe à tout simplexe  $\sigma$  la demi-somme de ses intersections avec les deux diagonales de  $\dot{\Gamma}$ .

Précisons ce que l'on entend par intersection. On rappelle qu'un 3-simplexe tordu dans  $Z$  peut être vu comme un 3-simplexe standard avec un chemin continu le joignant au point base  $(x, x)$ .

FIGURE 3. L'espace  $Z$ 

Supposons qu'il est transverse à la diagonale de  $\dot{\Gamma}$  que l'on note  $\Delta$ . Il y a donc un nombre fini de points d'intersection  $y_1, \dots, y_n$ . Choisissons un point d'intersection  $y_i$  et une orientation de  $\dot{\Gamma}$  autour de  $y_i$  (par transversalité,  $y_i$  n'est pas un sommet de  $\dot{\Gamma}$ ). De ce fait,  $M \times \dot{\Gamma}$  et  $\Delta$  sont naturellement orientés, ce qui nous permet de définir le signe de l'intersection  $\varepsilon_i$ . Si on change l'orientation de  $\dot{\Gamma}$ , le signe reste le même. Il est donc bien défini.

Ensuite, le chemin attaché au simplexe relie le point base  $(x, x)$  à  $y_i$  qui est un point de la diagonale  $\Delta$ . Si on suit le chemin du point base vers  $y_i$  en le projetant sur le premier facteur, puis qu'on revient au point base en le projetant sur le second facteur, on obtient un élément  $\gamma_i$  dans  $\pi_1(M, x)$ . On pose alors  $\sigma \cap \Delta = \sum \varepsilon_i \gamma_i \in \Lambda$ .

Une vérification standard montre que  $\delta$  définit bien un cocycle.

Montrons que  $\Psi(\delta) = b$ . Pour cela, on choisit deux lacets dans  $H_1(\Gamma, \Lambda)$ ,  $c_1$  et  $c_2$ . Ils bordent chacun un disque dans  $M$ , notons les  $D_1$  et  $D_2$ . L'élément de  $H_3(Z, \Lambda \otimes \Lambda)$  représenté par  $c_1 \otimes c_2$  est simplement  $\partial(D_1 \times D_2) = c_1 \times D_2 \cup D_1 \times c_2$ .

Clairement, la première partie est dans  $\dot{\Gamma} \times M$  et donne  $\text{Lk}(c_1, c_2^+)/2$ . La seconde donne  $\text{Lk}(c_1^+, c_2)/2$ .

Calculons maintenant  $\varepsilon(b)$ . L'isomorphisme  $H^3(M \times \Gamma) \simeq H^0(\Gamma, \mathbb{Q})$  peut être concrétisé de la façon suivante : choisissons une composante connexe de  $\Gamma$ . On définit alors un cocycle dans  $H^3(M \times \Gamma)$  en intersectant un 3-simplexe dans  $M \times \dot{\Gamma}$  avec la diagonale de la composante de  $\dot{\Gamma}$  choisie. Ainsi, on voit que  $\alpha^* \delta$  s'identifie avec la moitié de la classe unité, ce qui prouve que  $\varepsilon(\delta) = 1$ .

### Preuve de la partie 2 :

On prouve d'abord ces résultats pour un graphe  $\Gamma$  "surjectif", c'est-à-dire un graphe connexe qui induit une application surjective au niveau des groupes fondamentaux. Prenons  $j^+$  et  $j^-$  deux plongements tels que  $j^+ - j^- = S(D)$ . D'après le lemme 3.2.4,  $b_{j^+} - b_{j^-} = \Phi(D)$ . Puis,  $\varepsilon(\delta_{j^+} - \delta_{j^-}) = 0$ , donc d'après le théorème 3.3.2, il existe un diagramme  $D' \in \mathcal{A}(\Gamma, M)$  qui représente  $\delta_{j^+} - \delta_{j^-}$ . De plus,  $\Phi(D') = \Psi(\delta_{j^+} - \delta_{j^-}) = b_{j^+} - b_{j^-} = \Phi(D)$ . D'après le théorème 3.3.2,  $\Phi$  et  $\Psi$  sont injectifs, donc  $D = D'$  et  $\delta_{j^+} - \delta_{j^-} = D$ .

Prenons un graphe  $\Delta$  quelconque plongé dans  $M$ . En lui rajoutant des anses, on construit un graphe  $\Gamma$  surjectif tel que  $\Delta \subset \Gamma$ . On a le diagramme commutatif suivant du à la functorialité de la suite exacte du théorème 3.3.2.

$$\begin{array}{ccc}
D' \in \mathcal{A}(\Gamma, M) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\Gamma, M) \ni \delta_{j'+} - \delta_{j'-} \\
\downarrow & & \downarrow \\
D \in \mathcal{A}(\Delta, M) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\Delta, M) \ni \delta_{j+} - \delta_{j-}
\end{array}$$

On peut conclure si on montre que  $\delta$  est naturel vis à vis de l'inclusion  $\mathcal{B}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{B}(\Delta, M)$ . Ce fait se déduit de la construction de  $\delta$ , puisqu'on peut définir l'application  $\Delta \rightarrow \Gamma$  au niveau des squelettes  $\dot{\Delta} \subset \dot{\Gamma}$ . Il est clair que la construction est équivariante vis à vis de ce type d'extension.  $\square$

On résume les derniers résultats dans le théorème suivant :

**Théorème 3.3.4.** — *Soit  $M$  une variété compacte et orientée de groupe fondamental infini vérifiant  $\pi_2(M) = 0$ . Soit  $\Gamma$  un graphe en bande. Posons  $\mathcal{T}(\Gamma, M) = \varepsilon^{-1}(1) \subset \mathcal{B}(\Gamma, M)$ . Pour tout plongement  $j : \Gamma \rightarrow M$ , on définit  $Z(j) = \delta_j \in \mathcal{T}(\Gamma, M)$ . C'est une section universelle de  $\mathcal{T}(\Gamma, M)$  au-dessus de  $\mathcal{C}^0(\Gamma, M)$  compatible avec la composition.*

*Démonstration.* — Il reste à prouver que  $Z$  est compatible avec la composition. Soit  $j : \Gamma \rightarrow M$  et  $k : \Delta \rightarrow \Gamma \times [0, 1]$  deux plongements.

D'après le 3.2.5, on sait que  $b_{k \circ j} = k_* \Phi(Z(j)) + j^* b_k$ . Si  $\Delta$  est surjectif, on peut conclure car on sait que  $Z(k \circ j)$  est caractérisé par sa forme de Seifert symétrique.

Considérons les autres cas :

on peut ajouter des 1-anes à  $\Gamma$  pour le rendre surjectif. Notons  $\Gamma'$  le graphe obtenu. On peut ensuite rajouter des 1-anes à  $\Delta$  dans  $\Gamma' \times [0, 1]$  pour le rendre aussi surjectif. Appelons ce graphe  $\Delta'$ . Notons  $j'$  et  $k'$  les extensions de  $j$  et  $k$ . Par l'argument ci-dessus, on sait que  $\delta_{j' \circ k'} = k'_* Z(j') + j'^* \delta_{k'}$ . Puis, comme dans la dernière proposition, l'inclusion  $i : \Delta \rightarrow \Delta'$  induit une application  $i^* : \mathcal{B}(\Delta', M) \rightarrow \mathcal{B}(\Delta, M)$  qui envoie  $\delta_{j' \circ k'}$  sur  $\delta_{j \circ k}$ . On a le même résultat pour  $l : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ . Ainsi, on a  $i^*(k'_* Z(j')) = k_* Z(j)$  et  $i^* j'^* \delta_{k'} = (j' \circ i)^* \delta_{k'} = (l \circ j)^* \delta_{k'} = j^* l^* \delta_{k'} = j^* \delta_k$ .

Ceci prouve la compatibilité par composition dans le cas général.  $\square$

### 3.4. Compatibilité avec les revêtements d'indice fini

Soit  $N \rightarrow M$  un revêtement d'indice fini entre deux variétés orientées connexes. Pour tout graphe en bande  $\Gamma$ , on peut associer à tout plongement dans  $M$  son image réciproque  $\tilde{\Gamma}$  dans  $N$ . Cela définit une application

$$\text{Lift} : \mathcal{C}^0(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{C}^0(\tilde{\Gamma}, N).$$

Dans cette partie, on définit une application  $\text{Lift} : \mathcal{A}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{A}(\tilde{\Gamma}, N)$  pour toute 3-variété, et une application  $\text{Lift} : \mathcal{B}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{\Gamma}, N)$ . Nous montrerons que l'invariant  $Z$  commute avec ces applications dès qu'il est défini.

**Définition 3.4.1.** — *Soit  $M$  une 3-variété compacte orientée,  $N \rightarrow M$  un revêtement connexe d'indice  $p$  et  $\Gamma$  un graphe en bande dans  $M$ . On définit l'application  $\text{Lift}$  sur l'espace  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$  par la formule :*

$\text{Lift}(D_1, D_2, h) = \sum_{i,j} (D_1^i, D_2^j, \tilde{h})$ . On effectue la somme sur tous les antécédents  $D_1^i$  de  $D_1$  et  $D_2^j$  de  $D_2$  tels qu'on peut relever le chemin  $h$  en un chemin  $\tilde{h}$ . Il y a exactement  $p$  tels relevés.

Il est connu que cette application est bien définie (voir [Lie98]). Soit  $M = \Sigma \times [0, 1]$  une surface épaissie et prenons un revêtement de  $M$  sous la forme d'un revêtement de  $\Sigma$  épaissi. Il est clair que l'application Lift commute avec  $Z$ . Passons au cas général.

Donnons nous un plongement  $j : \Gamma \rightarrow M$ . Notons  $\Lambda_M = \mathbb{Q}[\pi_1(M)]$  et  $\Lambda_N = \mathbb{Q}[\pi_1(N)]$ . On sait que  $\pi_1(N)$  s'injecte dans  $\pi_1(M)$ . Appelons  $X$  le revêtement universel commun de  $M$  et  $N$ . Il apparaît que  $\Gamma$  et  $\tilde{\Gamma}$  ont le même antécédent  $\Gamma'$  dans  $X$ , et  $H_1(\Gamma, \Lambda_M) = H_1(\tilde{\Gamma}, \Lambda_N) = H_1(\Gamma', \mathbb{Q})$ .

Notons  $\rho$  l'application linéaire de  $\Lambda_M$  vers  $\Lambda_N$  qui fixe les éléments de  $\pi_1(N)$  et envoie les éléments de  $\pi_1(M) \setminus \pi_1(N)$  vers 0. Cette application est  $\Lambda_N - \Lambda_M$  linéaire. On définit l'application Lift de  $\mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \Lambda_M))$  vers  $\mathcal{Q}(H_1(\tilde{\Gamma}, \Lambda_N))$  par la formule  $\text{Lift } \varphi = \rho \circ \varphi$ .

**Proposition 3.4.2.** — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\tilde{\Gamma}, N) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{Q}(H_1(\tilde{\Gamma}, \Lambda_N)) \\ \text{Lift} \uparrow & & \uparrow \text{Lift} \\ \mathcal{A}(\Gamma, M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{Q}(H_1(\Gamma, \Lambda_M)) \end{array}$$

De plus, on a  $b_{\text{Lift } j} = \text{Lift } b_j$ .

*Démonstration.* — Considérons deux cycles  $c_1$  et  $c_2$  dans  $H_1(\Gamma', \mathbb{Q})$  et un diagramme  $D$  dans  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$ . On peut supposer que les segments de  $D$  intersectent  $c_1$  et  $c_2$  une seule fois. Si on relève  $D$  à partir de  $c_1$  dans  $X$ , il est relié de l'autre côté à un lacet de la forme  $gc_2$ . Si  $g$  n'est pas dans  $\pi_1(N)$ , alors  $\Phi(\text{Lift}(D))(c_1, c_2) = 0$ , sinon on obtient  $g$ . Ceci se traduit par l'égalité  $\Phi(\text{Lift}(D)) = \rho \circ \Phi(D)$ .

La dernière égalité de la proposition est équivalente à l'égalité  $\sum_{h \in \pi_1(N)} \text{Lk}(c_1, hc_2^+)h = \rho(\sum_{g \in \pi_1(M)} \text{Lk}(c_1, gc_2^+)g)$  qui est claire.  $\square$

Cette proposition suffit pour prouver que l'application Lift commute avec  $Z$  dans le cas où le groupe fondamental de  $M$  est fini. Dans les autres cas, il faut étendre la définition de l'application Lift à  $\mathcal{B}(\Gamma, M)$ , ce que l'on fait de la façon suivante :

**Proposition 3.4.3.** — *Soit  $j : \Gamma \rightarrow M$  un plongement et  $p$  un revêtement d'indice fini de  $N$  sur  $M$ . Le revêtement induit une application de  $\tilde{\Gamma} \times N \cup N \times \tilde{\Gamma}$  vers  $\Gamma \times M \cup M \times \Gamma$ . Cette application induit une application dans les groupes de 3-ième cohomologie. Si on applique  $\rho$  au coefficients, on obtient une application bien définie  $\text{Lift} : \mathcal{B}(\Gamma, M) \rightarrow \mathcal{B}(\tilde{\Gamma}, N)$ . Elle rend le diagramme suivant commutatif.*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(\tilde{\Gamma}, N) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\tilde{\Gamma}, N) & \longrightarrow & H^0(\tilde{\Gamma}, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \text{Lift} \uparrow & & \text{Lift} \uparrow & & p^* \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(\Gamma, M) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\Gamma, M) & \longrightarrow & H^0(\Gamma, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

De plus, on a  $\delta_{\text{Lift } j} = \text{Lift}(\delta_j)$ .

*Démonstration.* — La construction de l'application Lift que l'on vient de proposer est fonctorielle. Elle induit donc une application entre les suites exactes de Mayer-Vietoris de la proposition 3.3.2. Il nous faut donc juste identifier les applications induites sur les espaces de gauche et de droite.

Le morphisme vertical gauche est une application de  $H^2(\Gamma \times \Gamma, \Lambda_M)$  vers  $H^2(\tilde{\Gamma} \times \tilde{\Gamma}, \Lambda_N)$  qui associe à toute application bi- $\Lambda_M$ -linéaire sur  $C_2(\Gamma' \times \Gamma', \mathbb{Q})$  sa composition avec  $\rho$  (qui sera bien bi- $\Lambda_N$ -linéaire). En paraphrasant la preuve de la proposition 3.4.2 on conclut que cette application est la même que l'application Lift sur  $\mathcal{A}(\Gamma, M)$ .

Le morphisme vertical droit est obtenu en tensorisant  $p^*$  avec l'application Lift :  $H^3(M, \Lambda_M) \rightarrow H^3(N, \Lambda_N)$ . Décrivons explicitement ce dernier morphisme : choisissons un point  $x$  dans  $N$  et appelons  $y$  son image dans  $M$ . Le cocycle suivant est un générateur de  $H^3(N, \Lambda_N)$  : soit  $\sigma$  un 3-simplexe dans  $N$  muni d'un chemin au point base  $x$ . On peut supposer que ce simplexe est transverse à  $x$ . On fait alors la somme sur toutes les intersections algébriques du simplexe avec  $x$  des chemins reliant le point base à lui même via le point d'intersection. Il s'agit en fait du cocycle Poincaré-dual de  $x$  ; c'est donc un générateur de  $H^3(M, \Lambda_M)$ .

Il est maintenant facile de comprendre l'application induite par la projection. Considérons un simplexe dans  $N$  muni d'un chemin vers  $x$ . Il se projette en un simplexe de  $M$ . Appliquons le 3-cocycle de  $H^3(M, \Lambda_M)$  dual de  $y$ , puis l'application  $\rho$ . Tous les points d'intersection que l'on a rajouté dans le quotient seront annulés par  $\rho$ . On a donc obtenu de nouveau le dual de  $x$ . Ainsi, le morphisme vertical de droite est l'identité.

Il reste à prouver que  $\delta_{\text{Lift } j} = \text{Lift}(\delta_j)$ .

Soit  $\sigma$  un 3-simplexe tordu dans  $\tilde{\Gamma} \times N \cup N \times \tilde{\Gamma}$ . Par construction,  $\delta_{\text{Lift } j}(\sigma)$  est l'intersection de  $\sigma$  avec la diagonale de  $\tilde{\Gamma}$ . Considérons le simplexe  $p(\sigma)$  et son intersection avec la diagonale de  $\tilde{\Gamma}$ . C'est par définition  $\delta_j(p_*\sigma)$  ; on retrouve les intersections de  $\sigma$  avec la diagonale de  $\tilde{\Gamma}$  en annulant toutes les intersections non relevables, c'est-à-dire en appliquant  $\rho$ .

On a prouvé les identités suivantes :  $\delta_{\text{Lift } j} = \rho p^* \delta_j = \text{Lift } \delta_j$ . □

Les deux dernières proposition peuvent être résumées de la manière suivante : l'invariant  $Z$  est compatible avec les revêtements finis.

### 3.5. Retour à la filtration de Vassiliev standard

On rappelle que la filtration de Vassiliev standard est obtenue de la façon suivante : soit  $M$  une variété orientée et  $\Gamma$  un graphe en bande. On considère alors l'espace  $\overline{\mathcal{H}}(\Gamma, M)$  de tous les plongements de  $\Gamma$  dans  $M$  que l'on filtre par les désingularisations de tous les graphes singuliers. La différence avec  $\mathcal{H}(\Gamma, M)$  provient du fait que l'on n'a pas de chemin continu reliant le plongement à une application continue  $j : \Gamma \rightarrow M$ .

Bien que l'espace  $\overline{\mathcal{H}}(\Gamma, M)$  soit différent de  $\mathcal{H}(\Gamma, M)$ , il y a une application d'oubli surjective  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \overline{\mathcal{H}}$  qui est compatible avec la filtration et l'application symbole. On se propose d'identifier le plus précisément possible l'application induite sur le premier espace gradué.

Étant donné un faisceau localement constant  $\mathcal{F}$  sur une base  $X$ , on peut lui associer un faisceau constant sur chaque composante connexe de  $X$  par la formule  $\overline{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x^{G_x}$  où  $G_x$  désigne la représentation de monodromie de  $\pi_1(X, x)$  sur  $\mathcal{F}_x$  et la notation exponentielle désigne les coinvariants. Il y a une application d'oubli  $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{F}}$ . Dans tous les cas où  $Z$  est défini, on pose  $\overline{Z} = \pi \circ Z$ .

**Proposition 3.5.1.** — *Soit  $M$  une variété compacte orientée et irréductible et  $\Gamma$  un graphe en bande.*

*Si  $\pi_1(M)$  est fini, l'application  $\overline{Z} : C^0(\Gamma, M) \rightarrow \overline{\mathcal{A}}(\Gamma, M)$  est un invariant universel pour  $\overline{\mathcal{H}}(\Gamma, M)$ .*

Si  $\pi_1(M)$  est infini, pour tous les couples  $(H, \Gamma_0)$  formés d'une application  $\Gamma \times S^1 \rightarrow M$  et d'une composante connexe  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$ , on construit un diagramme  $D_{H, \Gamma_0} \in \overline{\mathcal{A}}(\Gamma, M)$  en intersectant  $H(\Gamma \times S^1)$  et  $H(\Gamma_0 \times S^1)$  dans  $M \times S^1$ . Ces diagrammes engendrent un sous-espace  $\mathcal{D}$  de  $\overline{\mathcal{A}}(\Gamma, M)$  qui rend la suite ci-dessous exacte :

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}(\Gamma, M)/\mathcal{D} \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}(\Gamma, M) \longrightarrow H^0(\Gamma, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

Ainsi, l'invariant  $\overline{Z}$  identifie  $\text{Gr}_1 \overline{\mathcal{H}}(\Gamma, M)$  avec  $\overline{\mathcal{A}}(\Gamma, M)/\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* — Il n'y a rien à prouver dans le cas où le groupe fondamental de  $M$  est fini.

Donnons nous une variété irréductible  $M$  de groupe fondamental infini, un graphe en bande  $\Gamma$  et une application continue  $j : \Gamma \rightarrow M$ . On pose  $G_j = \pi_1(\mathcal{C}(\Gamma, M), j)$ . Ce groupe agit sur  $\mathcal{A}(\Gamma, M)_j$ , sur  $\mathcal{B}(\Gamma, M)_j$  et agit trivialement sur  $H^0(\Gamma, \mathbb{Q})$ . À partir de la suite exacte du théorème 3.3.2, on déduit la suite exacte  $\overline{\mathcal{A}}(\Gamma, M) \longrightarrow \overline{\mathcal{B}}(\Gamma, M) \longrightarrow H^0(\Gamma, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$ . Il ne reste plus qu'à déterminer le noyau de la première application.

Pour cela, choisissons un élément de  $G_j$  présenté par une application  $H : \Gamma \times S^1 \rightarrow M$ . On note  $\varphi$  l'automorphisme de  $\mathcal{B}(\Gamma, M)$  induit par  $H$ . Pour tout espace  $E$  sur lequel  $\varphi$  agit, on note  $E^\varphi$  l'espace des coinvariants et  $E_\varphi$  l'espace des invariants par  $\varphi$ .

Pour obtenir le résultat, on va reprendre la preuve du théorème 3.3.2 en rajoutant un facteur  $S^1$ . On définit l'espace suivant :

$$Y = M \times \Gamma \times S^1 \amalg \Gamma \times \Gamma \times [0, 1] \times S^1 \amalg \Gamma \times M \times S^1 / \sim$$

où on identifie  $(x, y, 0, t)$  avec l'élément  $(H(x, t), y, t)$  dans le premier facteur et  $(x, y, 1, t)$  avec l'élément  $(x, H(y, t), t)$  dans le dernier facteur. Cet espace est naturellement fibré sur le cercle, et sa fibre en  $t$  est l'espace  $Z_t$  associé à l'application  $H(\cdot, t)$ . Il y a une symétrie qui échange les facteurs  $M$ , et une application naturelle  $Y \rightarrow M \times M$  qui permet de considérer la cohomologie tordue.

Comme dans le théorème 3.3.2, on peut écrire une suite de Mayer-Vietoris :

$$(6) \quad \cdots \longrightarrow H^3(M \times \Gamma \times S^1) \oplus H^3(\Gamma \times M \times S^1) \longrightarrow H^3(\Gamma \times \Gamma \times S^1) \longrightarrow H^4(Y) \longrightarrow \cdots$$

On utilisera le fait suivant qui est encore une conséquence de la suite de Mayer-Vietoris : pour tout espace  $X$  fibré sur le cercle de fibre  $F$  et de monodromie  $f$ , on a la suite exacte courte ci-dessous.

$$0 \longrightarrow H^n(F)^f \longrightarrow H^{n+1}(X) \longrightarrow H^{n+1}(F)_f \longrightarrow 0.$$

Cette suite est fonctorielle par rapport à la suite (6), on obtient alors le diagramme suivant dans lequel les lignes sont exactes et les colonnes sont des morceaux de suites exactes courtes.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^2(\Gamma \times \Gamma)^\varphi & \xrightarrow{\alpha} & H^3(Y)^\varphi \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow \sim & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H^3(M \times \Gamma \times S^1) \oplus H^3(\Gamma \times M \times S^1) & \longrightarrow & H^3(\Gamma \times \Gamma \times S^1) & \longrightarrow & H^4(Y) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & H^0(\Gamma, \mathbb{Q}) \oplus H^0(\Gamma, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^4(Z)_\varphi \longrightarrow \cdots \end{array}$$

À partir de ce diagramme, on remarque que  $\ker \alpha$  est engendré par l'image de  $H^0(\Gamma, \mathbb{Q})$ . Si on fixe une composante connexe  $\Gamma_0$ , son image sera le cocycle de  $H^3(M \times \Gamma \times S^1)$  défini par l'intersection avec le sous espace  $\Delta(\Gamma_0) = \{(H(x, t), x, t), x \in \Gamma_0, t \in S^1\}$ . L'élément correspondant dans  $H^3(\Gamma \times \Gamma \times S^1)$  est obtenu en intersectant  $\Delta(\Gamma_0)$  avec  $\{(H(x, t), x, t), x \in \Gamma, t \in S^1\}$ . Un raisonnement classique de transversalité montre que le diagramme  $D_{H, \Gamma_0}$  n'est autre que  $H(\Gamma_0 \times S^1) \cap H(\Gamma \times S^1)$ . Ce diagramme est donc clairement nul si  $\Gamma_0$  est homotope à 0.

Si maintenant, on considère tous les choix de  $H$  et  $\Gamma_0$ , on obtient un système de générateurs du noyau du morphisme  $\bar{\mathcal{A}}(\Gamma, M) \rightarrow \bar{\mathcal{B}}(\Gamma, M)$ . □

Cette proposition, bien qu'explicite n'est pleinement efficace que si on connaît le noyau  $\mathcal{D}$ . La détermination de ce sous-espace est en fait une question difficile car cela dépend énormément de la variété  $M$ . Donnons quelques exemples.

- Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée de genre au moins 1 et  $M = \Sigma \times S^1$ . On remarque que  $D$  n'est pas nul pour la raison suivante : soit  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux anneaux, et deux applications  $\alpha : \Gamma \rightarrow \Sigma$  et  $\beta : \Gamma' \rightarrow \Sigma$ . Supposons que  $\alpha$  et  $\beta$  s'intersectent géométriquement en 1 point sur  $\Sigma$ . On peut déformer l'application  $(\alpha \amalg \beta) \times \{1\}$  en “faisant tourner” la composante  $\beta$  grâce au facteur  $S^1$ . Le diagramme  $D_\Gamma$  obtenu est un diagramme qui relie les composantes  $\alpha$  et  $\beta$ . En particulier, il est non nul.
- Si on a des informations sur la variété  $M$  on peut décrire complètement le noyau  $\mathcal{D}$ . Supposons par exemple que  $M$  est hyperbolique et soit  $H : (\Gamma_1 \amalg \dots \amalg \Gamma_n) \times S^1 \rightarrow M$ . Pour chaque composante connexe  $\Gamma_i$ , deux cas sont possibles : soit  $H|_{\Gamma_i \times S^1}$  est homotope à  $H(\cdot, 1)|_{\Gamma_i \times S^1}$  auquel cas  $D_{\Gamma_i, H} = 0$ , soit l'image de  $H$  dans le groupe fondamental de  $M$  est cyclique, ce qui prouve que chaque composante  $H(\Gamma_i \times S^1)$  est en fait “de dimension 1” et implique que  $\mathcal{D} = 0$ .
- Prenons une variété  $M$  irréductible quelconque et  $\Gamma$  un anneau. Pour toute application continue  $H : \Gamma \times S^1 \rightarrow M$ , l'auto-intersection de  $H(\Gamma \times S^1)$  s'annule si  $H$  n'est pas injective au niveau du groupe fondamental. Pour des raisons très profondes de topologie de dimension 3, l'application  $H$  est presque toujours homotope à un plongement. Dans ce cas, il est clair que  $H(\Gamma \times S^1)$  ne s'auto-intersecte pas, et donc  $D_{H, \Gamma} = 0$ . Dans les autres cas,  $M$  est une variété de Seifert, et on peut au cas par cas montrer que  $D_{H, \Gamma} = 0$  (voir [Kal98]).

Donnons une application de ce dernier exemple. Pour tout nœud en bande  $K$  dans une variété de dimension 3, notons  $t^n K$  le nœud  $K$  auquel on a rajouté  $n$  twists. Le fait que  $\mathcal{D} = 0$  montre que dans toute variété irréductible,  $K$  et  $t^n K$  sont isotopes si et seulement si  $n = 0$ .

### 3.6. L'exemple des espaces lenticulaires

L'objet de cette partie est de calculer l'invariant que l'on a construit pour les espaces lenticulaires. On donne une formule explicite pour cet invariant. On montre ensuite que les seuls espaces lenticulaires  $L_{p,q}$  qui supportent un invariant universel de degré 2 à valeurs dans  $\mathcal{A}^{\leq 2}(\cdot, L_{p,q})$  sont la sphère et l'espace projectif réel  $L(2, 1) = \mathbb{R}P^3$ .

Soit  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux. On identifie l'espace  $L_{p,q}$  au recollement de deux tores pleins  $T_1 = T_2 = D^2 \times S^1$  par un élément de  $GL(2, \mathbb{Z})$ ,  $A = \begin{pmatrix} q & u \\ p & v \end{pmatrix}$  vérifiant  $\det(A) = -1$ . Soit  $\Gamma$  un anneau et  $i : \Gamma \rightarrow L_{p,q}$  le plongement correspondant à l'âme de  $T_2$ .

**3.6.1. Le cas du degré 1.** — Notons  $D_{p,q} = Z(i) \in \mathcal{A}(\Gamma, L_{p,q})$ . Notre but est de déterminer ce diagramme. En effet, grâce à la formule de composition, cela permet de calculer l'invariant associé à n'importe quel plongement.

Via l'identification faite par  $A$ , le méridien de  $T_1$  est isotope à un nœud torique de paramètres  $q, p$  sur le bord de  $T_2$ . Cela implique que si on compose le plongement  $i : \Gamma \rightarrow L_{p,q}$  par le nœud torique  $T_{q,p} : \Delta \rightarrow \Gamma \times [0, 1]$ , on obtient le nœud trivial dans  $L_{p,q}$ .

D'après la formule de composition, on a  $T_{p,q}^* D_{p,q} + i_* Z(T_{p,q}) = 0$ . Soit  $D$  le diagramme de  $\mathcal{A}(\Gamma, \Gamma)$  constitué d'une arête reliant deux segments parallèles de  $\Gamma$ . Un calcul classique montre que  $Z(T_{p,q}) = T_{p,q}^* (\frac{q}{2p} D)$ . Comme  $\mathcal{A}(\Gamma, L_{p,q})$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension 1, on en déduit  $D_{p,q}$ .

**Proposition 3.6.1.** — *Avec les notations ci-dessus, on a  $D_{p,q} = i_* (\frac{-q}{2p} D)$ . Cette formule donne un moyen explicite pour calculer  $Z$  pour tout plongement. De plus, cela montre que  $Z$  est l'unique invariant vérifiant la formule de composition.*

**3.6.2. Le cas du degré 2.** — La méthode ci-dessus ne fait pas intervenir de manière cruciale le fait que les diagrammes que l'on cherche sont de degré 1. Écrivons les équations que devrait satisfaire  $D_{p,q} = Z(i) \in \mathcal{A}^{\leq 2}(\Gamma, L_{p,q})$ .

La formule de composition implique que  $D_{p,q} \circ Z(T_{p,q}) = Z(U)$  où  $U$  désigne le nœud trivial. On peut écrire le diagramme  $D_{p,q}$  sous la forme  $i_* \exp(\frac{-q}{2p} D) + X_{p,q}$  où  $X_{p,q}$  est primitif de degré 2 car  $D_{p,q}$  est de type groupe et vaut  $i_* (\frac{-q}{2p} D)$  en degré 1. Notons  $\circlearrowleft$  le diagramme à une boucle qui s'appuie sur le nœud trivial  $U$ . Il est connu que la série  $Z(U)$  se réduit en degré 2 à  $1 + \frac{1}{48} \circlearrowleft$ .

L'équation satisfaite par  $X_{p,q}$  est donc  $T_{p,q}^* X_{p,q} = \frac{1}{48} \circlearrowleft$ . On remarque que cette équation ne dépend pas de  $q$ . On l'écrira sous la forme  $T_p^* X_p = \frac{1}{48} \circlearrowleft$ .

**Proposition 3.6.2.** — *Il existe un invariant de degré 2 dans l'espace lenticulaire  $L_{p,q}$  à valeur dans  $\mathcal{A}(\cdot, L_{p,q})$  si et seulement si l'équation caractéristique*

$$(7) \quad T_p^* X_p = \frac{1}{48} \circlearrowleft.$$

*a une solution pour  $X_p \in \mathcal{A}(\Gamma, L_{p,q})$ . Ce n'est le cas que si  $p = 1$  ou  $p = 2$ .*

*Démonstration.* — On peut directement supposer  $p > 1$ . Soit  $\Lambda = \mathbb{Q}[\xi]/(\xi^p - 1)$  l'anneau de groupe de  $L_{p,q}$ . On pose  $e = \sum_{k=0}^{p-1} \xi^k$ . Cet élément vérifie  $e^2 = pe$ .

Les raisonnements ci-dessous utilisent les résultats du chapitre 4 concernant l'application de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Si on coupe  $\Gamma$  sur un segment que l'on relie au point base de  $L_{p,q}$ , on peut exprimer tout élément de  $\mathcal{A}(\Gamma, L_{p,q})$  par un diagramme de  $\mathcal{A}(x, L_{p,q})$ . L'ambiguïté provient du choix du point base et de la relation de glissement de coupure. Notons  $Y_p$  un relevé de  $X_p$  dans  $\mathcal{A}(x, L_{p,q})$ . Il y a deux types de diagrammes primitifs de degré 2 dans  $\mathcal{A}(x, L_{p,q})$ . Ils ont pour support  $\circlearrowleft$  ou  $\Upsilon$ . L'application  $T_p^*$  revient à “cabler” le diagramme  $p$  fois au niveau de  $\mathcal{A}(\Gamma, L_{p,q})$ . Cela revient au niveau de  $\mathcal{A}(x, L_{p,q})$  à “multiplier” chaque patte par  $e$ . À cause de la relation d'antisymétrie et du caractère idempotent de  $e$ , tous les diagrammes de type  $\Upsilon$  vont s'annuler lors de ce procédé.

Modulo les relations entre diagrammes de  $\mathcal{A}(x, L_{p,q})$ , on peut supposer que  $Y_p$  s'écrit de la façon suivante, où les  $\alpha_k$  sont des paramètres rationnels vérifiant  $\alpha_k = \alpha_{p-k}$  :

$$Y_p = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k \text{---} \bigcirc \text{---}^{\xi^k}.$$



L'équation  $T_p^* X_p = \frac{1}{48} \circlearrowleft$  est représentée sur la figure 4.

FIGURE 4. Équation caractéristique des espaces lenticulaires

Pour déterminer les coefficients  $\alpha_k$ , on peut par exemple utiliser le système de poids associé à  $\mathfrak{so}(3)$  et représenter  $\xi$  à l'aide d'une rotation d'angle  $\frac{2\pi}{p}$ . On obtient  $\alpha_0 = \frac{3p-2}{48p^2}$  et  $\alpha_k = \frac{-1}{24p^3}$  pour  $k > 0$ .

On vérifie alors que la solution obtenue ne convient que pour  $p = 2$ . Dans ce cas là, on peut prouver que  $X_2$  définit effectivement un invariant universel stable par composition de degré 2.

□



## **PARTIE II**

### **LE CAS DES NŒUDS DANS UNE SPHÈRE D'HOMOLOGIE**



## CHAPITRE 4

# INTÉGRALE RATIONNELLE ET FILTRATION EN BOUCLES

Cette partie est motivée entièrement par l'étude de l'intégrale de Kontsevich des nœuds dans  $S^3$ . On rappelle qu'étant donné un anneau  $\Gamma$  et un plongement  $K : \Gamma \rightarrow S^3$ , l'intégrale de Kontsevich est un élément  $Z(K) \in \mathcal{A}(\Gamma)$ . Cet objet est un invariant de nœuds très fin : on conjecture même qu'il distingue les nœuds. Cependant, il est très difficile à calculer, en particulier, on ne sait exprimer complètement  $Z(K)$  que si  $K$  correspond au plongement trivial.

La raison est que la construction de  $Z(K)$  est complexe et que  $\mathcal{A}(\Gamma)$  est une algèbre de Hopf dont la structure est encore très peu connue.

Le but de cette partie est de rappeler les résultats qui permettent de comprendre quels sont les diagrammes qui apparaissent dans l'intégrale de Kontsevich d'un nœud. Les notions fondamentales seront celles d'enroulement, déroulement et rationalité. Nous donnons dans ce chapitre un aperçu aussi complet que possible de ces notions.

### 4.1. Isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt

Soit  $\Gamma$  un graphe en bande dont certaines composantes connexes  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  sont des bandes. Soit  $X$  un espace topologique et  $f : \Gamma \rightarrow X$  une application continue.

La fibre de  $\mathcal{A}(\Gamma, X)$  au-dessus de  $f$  est naturellement filtrée par le nombre de segments d'un diagramme  $D$  qui s'appuient sur  $\Gamma_i$ . L'isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt permet d'identifier le gradué de cette filtration.

**Définition 4.1.1.** — Soit  $x$  un point base dans  $X$  et  $S$  un ensemble de paramètres. On définit  $\mathcal{A}(\Delta, S, X)$  comme le faisceau localement constant au-dessus de  $\mathcal{C}(\Delta, X)$  dont la fibre au-dessus d'une application  $f$  est engendrée par les objets de la forme  $(D, D_1, \dots, D_k, h)$  où

- $D$  est un diagramme mono-trivalent dont les sommets trivalents sont orientés.
- Une partie des sommets monovalents de  $D$  est en bijection avec  $[k]$  et l'autre partie est "coloriée par  $S$ ", c'est-à-dire qu'il y a une application de l'ensemble des sommets restants vers  $S$ .
- L'application continue  $h : D \rightarrow X$  envoie pour tout  $i$  le sommet monovalent  $i$  sur  $f(D_i)$  et tous les autres en  $x$ .

Les relations sont les relations habituelles d'antisymétrie, (STU) et (IHX). On quotiente aussi par le groupe de symétrie de  $D$  qui respecte les coloriages par  $S$ .

Plaçons nous dans le cadre initial où le graphe en bande  $\Gamma$  avait des composantes  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_n$  isomorphes à des bandes. On associe à chaque composante  $\Gamma_i$  un paramètre  $s_i$  et un chemin  $\gamma_i$  qui relie le point base  $x$  à un segment de  $\Gamma_i$  parallèle aux extrémités et coorienté. On note ce

segment  $E_i$  : à isotopie près il n'y a que deux possibilités qui correspondent aux deux orientations de la bande.

Notons  $\Delta$  la partie restante de  $\Gamma$ . On définit maintenant une application

$$\chi : \mathcal{A}(\Delta, \{s_1, \dots, s_n\}, X) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, X).$$

Considérons un diagramme  $(D, D_1, \dots, D_k, h)$  et pour tout  $i$ , numérotions par  $x_1^i, \dots, x_{k_i}^i$  les sommets coloriés par  $s_i$ .

Pour chaque  $n$ -uplet de permutations  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in S_{k_1} \times \dots \times S_{k_n}$ , on définit un diagramme  $D_\tau$  en prolongeant pour chaque  $i$  les sommets  $x^i$  le long de  $\gamma_i$  que l'on attache à  $k_i$  copies parallèles de  $E_i$  dans l'ordre donné par  $\tau_i$  (on rappelle que la donnée de  $E_i$  équivaut à la donnée d'une orientation de  $\Gamma_i$ ).

Enfin, on pose  $\chi(D, D_1, \dots, D_k, h) = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \sum_{\tau} D_\tau$ .

**Proposition 4.1.2.** — *L'application  $\chi$  est un isomorphisme appelé isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt.*

*Démonstration.* — La démonstration de cette proposition est assez difficile, mais c'est une conséquence directe du même résultat dans les algèbres de Lie libres. Elle s'obtient aussi en transposant directement la preuve de [BN95].  $\square$

Dans le cas où  $X = S^3$ , toute l'information topologique devient triviale et on a un isomorphisme  $\chi : \mathcal{A}(s) \rightarrow \mathcal{A}(\circ) \simeq \mathcal{A}(\bigcirc)$ . Le premier espace est un espace de diagrammes monovalents quotienté par les relations (IHX) et les symétries du diagramme. Cet espace est de nature complètement combinatoire et il est un peu plus simple que  $\mathcal{A}(\bigcirc)$ . On le note  $\mathcal{B}$  et par la suite, étant donné un plongement  $K : \bigcirc \rightarrow S^3$ , on étudiera  $\sigma Z(K)$  où  $\sigma$  désigne l'inverse de  $\chi$ .

## 4.2. Enroulement et Déroulement

L'espace  $\mathcal{B}$  défini ci-dessus est muni d'une structure d'algèbre très simple obtenue par juxtaposition des diagrammes. Or l'isomorphisme  $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}(\bigcirc)$  n'est pas un isomorphisme d'algèbres. On peut néanmoins le composer par un automorphisme de  $\mathcal{B}$  pour qu'il devienne un morphisme d'algèbre. C'est ce qu'on va appeler le déroulement. Pour cela, on définit quelques opérations de recollement.

**Définition 4.2.1.** — *Soit  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux graphes en bande,  $S, S'$  des ensembles de paramètres,  $s$  un autre paramètre et  $X$  un espace topologique.*

- *Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A}(\Gamma, S, s, X) \times \mathcal{A}(\Gamma', S', s, X) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma \amalg \Gamma', S, S', X)$  l'opérateur qui à deux diagrammes  $D_1$  et  $D_2$  associe 0 s'ils n'ont pas le même nombre de sommets monovalents coloriés par  $s$  et sinon associe la somme de tous les diagrammes obtenus par recollement des deux diagrammes sur leurs sommets coloriés par  $s$ . Plus précisément,  $\langle D_1, D_2 \rangle = \sum_f D_1 \cup_f D_2$  où  $f$  parcourt les bijections entre les  $s$ -sommets de  $D_1$  et ceux de  $D_2$ .*
- *On définit de même  $\partial \cdot : \mathcal{A}(\Gamma, S, s, X) \times \mathcal{A}(\Gamma', S', s, X) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma \amalg \Gamma', S, S', s, X)$  l'opérateur qui à deux diagrammes  $D_1$  et  $D_2$  associe la somme de tous les diagrammes obtenus par recollement de tous les  $s$ -sommets de  $D_1$  sur une partie des  $s$ -sommets de  $D_2$ . En formule,  $\partial_{D_1} D_2 = \sum_f D_1 \cup_f D_2$  où  $f$  parcourt les injections entre les  $s$ -sommets de  $D_1$  et les  $s$ -sommets de  $D_2$ .*

**Lemme 4.2.2.** — *On construit une série de diagrammes arborescents dite série de Hausdorff :  $C_{x,y}^z \in \mathcal{A}(x, y, z)$ .*

Considérons la série formelle non-commutative  $H(X, Y) = \log(\exp(X) \exp(Y)) \in \mathbb{Q}\langle\langle X, Y \rangle\rangle$ . C'est un élément de l'algèbre de Lie libre en  $X$  et  $Y$  : elle s'écrit donc comme combinaison de commutateurs. Il y a une façon canonique de représenter un commutateur en  $X$  et  $Y$  comme un arbre avec une racine marquée  $Z$  et des sommets marqués  $X$  et  $Y$  (voir figure 1). Les relations d'antisymétrie et de Jacobi correspondent aux relations d'antisymétrie et (IHX).

Par exemple, les premiers termes de la série  $H(x, y)$  sont  $x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] + \frac{1}{12}[y, [y, x]] - \frac{1}{24}[x, [y, [x, y]]] + \dots$ . Ainsi, la série  $C_{x,y}^z$  commence comme sur la figure 1.

$$C_{x,y}^z = \exp\left( \begin{array}{c} x \\ | \\ z \end{array} + \begin{array}{c} y \\ | \\ z \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} x \quad y \\ \diagdown \quad / \\ z \end{array} + \frac{1}{12} \begin{array}{c} x \quad x \quad y \\ \diagdown \quad / \quad / \\ z \end{array} + \frac{1}{12} \begin{array}{c} y \quad y \quad x \\ \diagdown \quad / \quad / \\ z \end{array} - \frac{1}{24} \begin{array}{c} x \quad y \quad x \quad y \\ \diagdown \quad / \quad / \quad / \\ z \end{array} + \dots \right)$$

FIGURE 1. Série diagrammatique de Hausdorff

Le diagramme ci-dessous est commutatif où  $i : |1\Pi|_2 \rightarrow |$  est l'inclusion qui respecte l'ordre des bandes.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\Delta, s_1, s_2, S, X) & \xrightarrow{\chi_{s_1, s_2}} & \mathcal{A}(\Delta, |1\Pi|_2, S, X) \\ \downarrow \langle C_{s_1, s_2}^s, \cdot \rangle & & \downarrow i_c \\ \mathcal{A}(\Delta, s, S, X) & \xrightarrow{\chi_s} & \mathcal{A}(\Delta, |, S, X) \end{array}$$

Cette identité s'appelle la formule de Baker-Campbell-Hausdorff par analogie avec la formule des algèbres de Lie.

Les premiers résultats significatifs concernant le calcul explicite de l'intégrale de Kontsevich sont connus sous le nom de "Wheels and wheeling" et sont énoncés ci-dessous. Ce nom provient du fait que ces résultats font intervenir de manière cruciale les diagrammes de roues. Ces diagrammes sont présentés sur la figure 2.

**Définition 4.2.3.** —  $\forall n, r(x^n) = \begin{array}{c} n \\ \text{|||||} \\ \text{---} \end{array} \in \mathcal{B}.$

FIGURE 2. Définition des roues

**Théorème 4.2.4 (Wheels and Wheeling).** — Soit  $U : \circlearrowleft \rightarrow S^3$  le nœud trivial.

1.  $\sigma Z(U) = \exp(r(f(x)))$  où  $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{\sinh(x/2)}{x/2}$ . On notera aussi  $\Omega$  cette série de roues, ainsi  $\Omega = \exp(\frac{1}{48} \circlearrowleft - \frac{1}{5760} \square + \dots)$ .
2. Notons  $\Upsilon = \chi \circ \partial_\Omega : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Alors  $\Upsilon$  est un isomorphisme d'algèbre. L'application  $\Upsilon$  est appelée application d'enroulement (et son inverse application de déroulement).

Soit  $\overset{\circ}{K}$  un nœud ouvert, c'est-à-dire un élément de  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(\circlearrowleft, \circlearrowleft)$  formé d'une bande et soit  $K$  sa fermeture. Alors on peut définir  $Z^\square(K) = \Upsilon^{-1}Z(K)$ . Le théorème 4.2.4 implique que

- $Z^\square(K) = Z^\square(\overset{\circ}{K})\Omega$
- $Z^\square(\overset{\circ}{K} \# \overset{\circ}{K}') = Z^\square(\overset{\circ}{K})Z^\square(\overset{\circ}{K}')$ .

Ici, le symbole  $\#$  désigne le produit d'empilement qui correspond à la somme connexe des nœuds.

### 4.3. L'intégrale rationnelle

Dans la suite de ce chapitre, nous allons introduire l'intégrale rationnelle.

La construction que nous allons présenter est due à Stavros Garoufalidis et Andrew Kricker (voir [GK04b]). Elle a de nombreux intérêts que l'on énumère ci-dessous :

1. En premier lieu, elle contient la construction de l'intégrale dite d'Århus qui est un invariant diagrammatique des nœuds dans les sphères d'homologie rationnelles défini initialement dans [LMMO99] puis différemment dans [BNGRT00].
2. Elle met en évidence une structure particulière de l'intégrale d'un nœud : cette dernière est codée par des diagrammes trivalents coloriés par des fractions rationnelles.
3. Elle permet d'identifier le gradué d'une nouvelle filtration sur l'espace des nœuds appelée filtration en boucles.
4. Elle contient explicitement les invariants de type fini des revêtements cycliques ramifiés sur le nœud.

**4.3.1. Présentation chirurgicale des paires  $(M, K)$ .** — Soit  $\text{Tp}$  un anneau épaissi. Soit  $U$  le plongement trivial de  $\text{Tp}$  dans  $S^3$ . Notons  $\mathcal{L}$  l'ensemble des entrelacs en bande  $L = \{L_1, \dots, L_n\}$  dans  $\text{Tp}$  dont toutes les composantes sont homologues à 0 et telle que la matrice d'enlacement de  $\{U(L_1), \dots, U(L_n)\}$  soit inversible sur  $\mathbb{Q}$ .

Par chirurgie, on associe à tout élément de  $\mathcal{L}$  une paire  $(M, K)$  formée d'un nœud homologue à 0 dans une sphère d'homologie. En effet, le tore plein  $\text{Tp}$  chirurgisé sur  $L$  est une variété de dimension 3 dont le bord s'identifie à celui du tore plein standard  $U$  dans  $S^3$ . Si on rebouche le tore plein  $\text{Tp}$  chirurgisé sur  $L$  avec  $S^3 \setminus U$ , on obtient une sphère d'homologie rationnelle. Tout méridien de  $U$  fournit un nœud homologue à 0 dans cette variété. On note  $(M, K)$  le couple ainsi formé.

On appelle mouvements de Kirby le mouvement qui consiste à rajouter à un entrelacs en bande une composante triviale d'autoenlacement  $\pm 1$  et celui qui consiste à remplacer une composante  $L_i$  par elle-même glissée sur une autre composante  $L_j$ . On notera  $\mathcal{L}/k$  les classes d'équivalence sur  $\mathcal{L}$  engendrées par les mouvements de Kirby. Il est standard que la chirurgie se factorise par  $k$ . Il est moins clair que l'ensemble des paires  $(M, K)$  est en bijection avec  $\mathcal{L}/k$ . Ce résultat est établi dans [GK03].

**Proposition 4.3.1 (Garoufalidis-Kricker).** — *Deux paires  $(M, K)$  et  $(M', K')$  obtenues par chirurgie sur deux entrelacs  $L$  et  $L'$  de  $\mathcal{L}$  sont isomorphes si et seulement si  $L$  et  $L'$  sont reliés par des mouvements de Kirby.*

Pour construire l'intégrale rationnelle, il suffit donc de construire un invariant d'entrelacs dans  $\mathcal{L}$  invariant par les mouvements de Kirby.

**4.3.2. Matrice d'enlacement équivariante.** — On commence par définir de cette manière un invariant simple qui se trouve être semblable à la notion de  $S$ -équivalence.

Fixons un entrelacs  $L_1, \dots, L_n$  dans  $\mathcal{L}$ ,  $x$  un point base dans  $\text{Tp}$  et pour tout  $i$ , un chemin  $\gamma_i$  qui relie  $x$  à un segment coorienté de  $L_i$  comme dans la section 4.1. Dans ces conditions, les composantes  $L_i$  s'interprètent comme des cycles dans  $\text{Tp}$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . La forme d'enlacement équivariante nous permet de définir la matrice  $W = (\text{Lk}_{\text{Tp}}(L_i, L_j))_{i,j}$ .

Précisément, cette forme d'enlacement est définie de la manière suivante : soit  $\widetilde{\text{Tp}}$  le revêtement universel de  $\text{Tp}$  de base  $x$  et  $\widetilde{L}_i$  les relevés de  $L_i$  obtenus à partir des chemins  $\gamma_i$ . On pose alors



$\text{Lk}_{\text{Tp}}(L_i, L_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{Lk}_{\widetilde{\text{Tp}}}(\widetilde{L}_i, t^k \widetilde{L}_j) t^k$ . Si on note  $x \mapsto \bar{x}$  l'involution de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  qui envoie  $t$  sur  $t^{-1}$ , on aura  $\text{Lk}_{\text{Tp}}(L_j, L_i) = \overline{\text{Lk}_{\text{Tp}}(L_i, L_j)}$ . Ainsi  $W$  est une matrice hermitienne.

La matrice d'enlacement équivariante  $W$  n'est pas bien définie comme invariant de  $(M, K)$  car on peut composer les arcs par des éléments de  $\pi_1(\text{Tp})$ , changer la coorientation des segments et effectuer des mouvements de Kirby. Cela se traduit sur  $W$  par les mouvements suivants :

$$W \leftrightarrow P^*WP \text{ et } W \leftrightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$$

où  $P$  est soit une matrice diagonale avec des coefficients de la forme  $\pm t^c$ ,  $c \in \mathbb{Z}$  soit une matrice de transvection. Enfin  $P^*$  désigne la transconjuguée de  $P$ .

Soit  $\varepsilon : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}$  l'application définie par  $\varepsilon(t) = 1$ . Alors  $\varepsilon(W)$  est la matrice d'enlacement de  $\{U(L_1), \dots, U(L_n)\}$ . Elle est donc inversible sur  $\mathbb{Q}$ . De plus,  $W$  est une matrice de présentation de  $H_1(M \setminus K, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ . Ainsi,

- Le polynôme d'Alexander normalisé  $\Delta(M, K)$  de la paire  $(M, K)$  se déduit de  $W$  par la formule :  $\Delta(M, K) = \det(W) \det(W(1))^{-1}$ .
- La fonction signature  $\sigma(M, K) : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$  de la paire  $(M, K)$  vérifie :  $\sigma(t) = \sigma(W(t)) - \sigma(W(1))$  où  $\sigma(B) = \sigma^+(B) - \sigma^-(B)$  désigne la signature d'une matrice hermitienne  $B$ .

**Remarque 4.3.2.** — La matrice  $W$  est liée à la forme de Blanchfield sur  $M \setminus K$  par la formule suivante. Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux courbes dans  $M \setminus K$  disjointes et homologues à 0. Elles sont présentées

par deux courbes  $\alpha'$  et  $\beta'$  dans  $\text{Tp} \setminus L_i$  homologues à 0 dans  $\text{Tp}$ . Soit  $\begin{pmatrix} W & X_{\alpha'} & X_{\beta'} \\ X_{\alpha'}^* & \cdot & u \\ X_{\beta'}^* & \bar{u} & \cdot \end{pmatrix}$  la matrice d'enlacement équivariante de  $\{L_i, \alpha, \beta\}$ . Alors  $\text{Lk}_{(M, K)}(\alpha, \beta) = u - X_{\alpha'}^* W^{-1} X_{\beta'}$ .

**Remarque 4.3.3.** — En fait, dans le cas d'un nœud dans  $S^3$ , la matrice  $W$  caractérise la  $S$ -équivalence, comme ceci est prouvé dans [GK03]. Donnons une idée de la preuve.

Soit  $K$  un nœud dans  $S^3$ , et  $\Sigma$  une matrice de Seifert. Pour tout  $x, y \in H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ , on définit  $f(x, y) = \text{Lk}(x, y^+)$  où  $x$  et  $y$  sont deux cycles dans  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  et  $y^+$  désigne le cycle  $y$  poussé dans la direction normale à  $\Sigma$ . C'est une forme bilinéaire bien définie sur  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ . De plus, on sait que deux surfaces de Seifert sont isotopes si on leur rajoute assez d'anses, c'est à dire si on fait deux trous que l'on rebouche avec un cylindre.

On appelle classe de  $S$ -équivalence de  $K$  la classe de la matrice  $A$  de  $f$  modulo les transformations de la forme  $A \mapsto P^{-1}AP$  avec  $P$  une matrice inversible sur  $\mathbb{Z}$  et  $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , cf [Kau87].

On peut alors passer de toute présentation de  $K$  par matrice de Seifert à une présentation chirurgicale par la méthode de [GK03]. Réciproquement, pour toute paire présentée par chirurgie dans un tore plein, on obtient une surface de Seifert en rajoutant à un disque méridien de  $\text{Tp}$  des tubes correspondant aux composantes de chirurgie qui intersectent ce disque. On vérifie alors que les matrices de Seifert et d'enlacement équivariant se déduisent l'une de l'autre par ce procédé.

**4.3.3. Espace de diagrammes rationnels.** — Pour construire l'intégrale rationnelle, nous aurons besoin d'un nouvel espace de diagrammes. Nous définissons une grande famille d'espaces de diagrammes suivant [Vog00].

**Définition 4.3.4.** — Soit  $(H, \cdot, \Delta, \varepsilon, S)$  une algèbre de Hopf co-commutative (ou une algèbre de Hopf à complétion près),  $\mathcal{M}$  une algèbre avec anti-involution  $x \mapsto \bar{x}$  et  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{M}$  un morphisme d'algèbres tel que  $f(Sx) = f(\bar{x})$ .

On définit  $\mathcal{D}(\mathcal{M}, s_1, \dots, s_n)$  par générateurs et relations. Pour simplifier les notations, on écrit  $\mathcal{M}$  à la place du triplet  $(H, \mathcal{M}, f)$ .

Les générateurs sont formés par les paires  $(D, (m_i, x_i)_{i \in I})$  où  $D$  est un graphe monotrivalent dont les sommets trivalents sont orientés et les sommets monovalents coloriés par  $\{s_1, \dots, s_n\}$ . Les  $x_i$  sont des points disjoints de  $D$  qui ne sont pas des sommets, avec une orientation locale des arêtes auxquelles ils appartiennent. Enfin, les  $m_i$  sont des éléments de  $\mathcal{M}$ .

Les relations sont les suivantes :

- Symétrie : deux diagrammes isomorphes et avec les mêmes coloriages sont identifiés.
- Involution, multilinéarité, multiplication et glissement : voir figure 3.
- Antisymétrie et (IHX) où l'arête centrale de la relation (IHX) ne possède aucun point marqué.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \bar{m} \\ \times \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{c} \times \\ m \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} \lambda m + m' \\ \times \\ \hline \end{array} = \lambda \begin{array}{c} m \\ \times \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} m' \\ \times \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} m \quad m' \\ \times \quad \times \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} m \cdot m' \\ \times \\ \hline \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} f(h) \\ \times \\ \hline \end{array} = \sum \begin{array}{c} f(h') \\ \times \\ \hline \end{array} \quad h \in H \text{ et } \Delta h = \sum h' \otimes h''
 \end{array}
 \end{array}$$

FIGURE 3. Relations dans les diagrammes coloriés par  $(H, \mathcal{M})$

Dans les schémas de la figure 3, on ne représente qu'une partie d'un diagramme, le reste ne bougeant pas. De plus, quand on écrit un élément de  $\mathcal{M}$  d'un côté d'une arête, on sous entend que l'on a orienté localement l'arête de telle sorte qu'elle tourne positivement autour de l'élément.

L'exemple le plus simple est celui où  $H = \mathcal{M} = \mathbb{Q}[[h]]$  avec  $\Delta h = h \otimes 1 + 1 \otimes h$  et  $S(h) = -h$ . On vérifie alors que  $\mathcal{D}(\mathbb{Q}[[h]]) = \mathcal{B}$ . Pour établir cet isomorphisme, il suffit de remplacer chaque monôme  $h$  attaché à une arête par une petite arête avec un sommet monovalent appelé patte par la suite.

Il y a un autre exemple important et simple à interpréter. Définissons  $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  avec  $\Delta t = t \otimes t$  et  $S(t) = t^{-1}$  et posons  $H = \mathcal{M} = \Lambda$ . Alors on a un isomorphisme  $\mathcal{A}(s_1, \dots, s_n, \text{Tp}) \simeq \mathcal{D}(\Lambda, s_1, \dots, s_n)$ . Pour définir cet isomorphisme, il faut choisir un générateur  $\rho$  de  $H^1(\text{Tp}, \mathbb{Z})$ . À un diagramme  $(D, h) \in \mathcal{A}(s_1, \dots, s_n, \text{Tp})$  on associe le diagramme  $(D, h^* \rho) \in \mathcal{D}(\Lambda, s_1, \dots, s_n)$ . On a ici identifié  $H^1(D, \text{sommets de } D; \mathbb{Z})$  avec les coloriages de  $D$  par  $\Lambda$ .

**Remarque 4.3.5.** — Étant donné deux ensembles de paramètres  $S$  et  $S'$  et un paramètre  $s$ , on a une opération  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s : \mathcal{D}(\mathcal{M}, S, s) \otimes \mathcal{D}(\mathcal{M}, S', s) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}, S, S')$  définie en recollant les sommets coloriés par  $s$  de la même façon que dans 4.2.1. De même, on peut définir une opération de dérivation.

Pour la construction de l'intégrale rationnelle, on utilise  $\mathcal{H} = \Lambda$  et on pose  $\mathcal{M} = \Lambda_{loc} = \{\frac{f}{g}, f, g \in \Lambda, \varepsilon(g) = 1\}$ . La substitution  $t = \exp(h)$  fournit un morphisme de  $(\Lambda, \Lambda_{loc}) \rightarrow (\mathbb{Q}[[h]], \mathbb{Q}[[h]])$ . Cette application induit donc une application Hair :  $\mathcal{D}(\Lambda_{loc}) \rightarrow \mathcal{B}$  que l'on appelle application "cheveu".

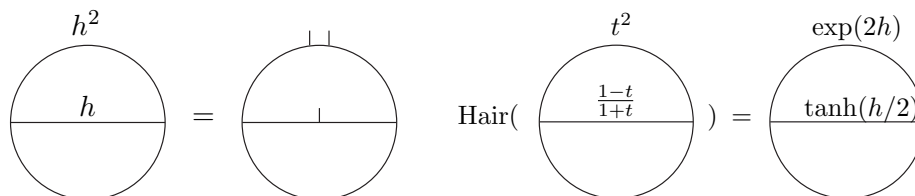


FIGURE 4. L'isomorphisme  $\mathcal{B} \simeq \mathcal{D}(\mathbb{Q}[[h]])$  et l'application Hair

**4.3.4. Construction de l'intégrale.** — Nous pouvons maintenant construire l'intégrale rationnelle d'une paire  $(M, K)$ . Pour cela, on présente cette paire par un entrelacs  $L_1, \dots, L_n$  de  $\mathcal{L}$ .

On découpe l'anneau  $\mathbb{T}p$  en tranches  $C_1, \dots, C_k$  de telle sorte que pour tout  $i$  et  $j$ ,  $L_i \cap C_j$  soit une réunion de bandes. On fixe de plus un parenthésage sur le bord de chaque tranche de telle sorte que  $L$  apparaisse comme une composition cyclique d'éléments de la catégorie  $\mathcal{T}$ . Parmi tous les points d'intersection d'une composante  $L_i$  avec le bord d'un carré, on en choisit une que l'on appelle coupure.

**Définition 4.3.6.** — Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble des entrelacs "en tranche" définis comme ci-dessus, c'est-à-dire que c'est l'ensemble des familles  $(T_1, \dots, T_k)$  d'enchevêtrements de bandes cycliquement compatibles, avec le choix d'une coupure par composante. Le recollement des tranches fournit une application  $\pi$  de  $\mathcal{M}$  dans l'ensemble des entrelacs dans  $\mathbb{T}p$ . On demande que  $\pi(T_1, \dots, T_k)$  soit dans  $\mathcal{L}$ .

L'application  $\pi$  est un isomorphisme si on quotiente  $\mathcal{M}$  par les relations suivantes présentées dans la figure 5.

- Ajout ou suppression de tranche : on peut recoller deux tranches s'il n'y a pas de coupure entre les deux.
- Glissement de coupure : une coupure peut glisser le long d'une composante.

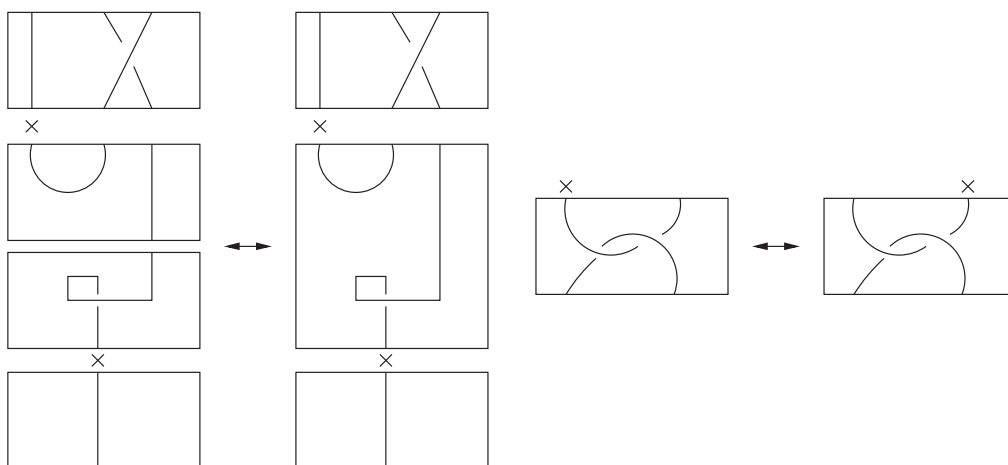


FIGURE 5. Relations entre présentations en tranche

Partons d'un élément  $T = (T_1, \dots, T_k)$  de  $\mathcal{M}$ . On peut recoller  $Z(T_1), \dots, Z(T_k)$  sur tous les points d'intersection qui ne sont pas des coupures. On obtient alors un diagramme qui s'appuie sur  $n$  bandes. Fixons un point base dans  $\mathbb{T}p$ , un chemin qui relie ce point aux coupures et un segment coorienté sur chaque composante. On obtient ainsi un élément de  $\mathcal{A}(|^n, \mathbb{T}p)$  qui est invariant par ajout ou suppression de tranches. On compose à droite ce diagramme par  $\nu^{\otimes n} \in \mathcal{A}(|^n, |^n)$  et à gauche par un diagramme  $\alpha \in \mathcal{A}(|)$  de type groupe que l'on applique sur l'une des tranches. Enfin, on applique  $\sigma$ .

On obtient ainsi un diagramme  $\sigma Z_\alpha^{\text{rat}}(\widehat{T}, \mathbb{T}p) \in \mathcal{A}(s_1, \dots, s_n, \mathbb{T}p)$  où  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  est un ensemble en bijection avec  $\{L_1, \dots, L_n\}$ .

Il y a deux choix naturels de  $\alpha$  : le choix  $\alpha = 1$  correspond à l'intégrale de Kontsevich déroulée et le choix  $\alpha = \nu$  à l'intégrale standard. Le facteur  $\nu^{\otimes n}$  est essentiel pour que l'intégrale soit invariante par glissement d'anse. La notation  $\widehat{T}$  indique que l'on a composé chacune des composantes de  $T$  par  $\nu$ .

Le diagramme  $\sigma Z_\alpha^{\text{rat}}(\widehat{T}, \mathbb{T}p)$  s'écrit sous la forme  $\exp(\frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{i,j} + r)$ , où  $r$  est une série de diagrammes primitifs contenant tous au moins un sommet trivalent. En effet,  $Z_\alpha^{\text{rat}}(\widehat{T}, \mathbb{T}p)$  est de type groupe dans l'algèbre de Hopf  $\mathcal{A}(s_1, \dots, s_n, \mathbb{T}p)$  et  $W$  est la matrice d'enlacement équivariante de l'entrelacs  $L_1, \dots, L_n$ .

On définit alors  $\int^{\text{rat}} Z_\alpha^{\text{rat}}(\widehat{T}, \mathbb{T}p) dS = \langle \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} W_{i,j}^{-1}), \exp(r) \rangle_S$ . Cette définition est licite car comme  $\varepsilon(W)$  est inversible sur  $\mathbb{Q}$ ,  $W$  est inversible sur  $\Lambda_{loc}$ .

**Proposition 4.3.7.** — *Cette quantité est bien définie et invariante par glissement de coupure. Elle ne dépend donc que de l'entrelacs  $L$  dans  $\mathbb{T}p$  sous-jacent à l'entrelacs en tranche. On le note  $\int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{L}, \mathbb{T}p) dL$ .*

*Démonstration.* — Ce résultat ainsi que ceux qui suivent sont conséquence des lemmes techniques de la section 4.6.  $\square$

Soit  $U^n : \bigcirc \rightarrow \mathbb{T}p$  le nœud trivial d'autoenlacement  $n$ . Soit  $(\sigma^+, \sigma^-)$  la signature de  $\varepsilon(W)$ . Pour une paire  $(M, K)$  présentée par un entrelacs  $L \in \mathcal{L}$  on pose

$$(8) \quad Z_\alpha^{\text{rat}}(M, K) = \frac{\int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{L}, \mathbb{T}p) dL}{\left( \int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{U}^1, \mathbb{T}p) dU^1 \right)^{\sigma^+} \left( \int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{U}^{-1}, \mathbb{T}p) dU^{-1} \right)^{\sigma^-}}.$$

**Théorème 4.3.8 (Garoufalidis-Kricker).** — *La série  $Z_\alpha^{\text{rat}}(M, K)$  est un invariant de la paire  $(M, K)$ . On pose alors*

$$\begin{aligned} \sigma Z(M, K) &= \exp\left(r(f(x) - \frac{1}{2} \log \Delta(M, K)(e^x))\right) \text{Hair } Z_\nu^{\text{rat}}(M, K) \text{ et} \\ Z^\boxtimes(M, K) &= \frac{1}{\langle \Omega, \Omega \rangle} \exp\left(r(f(x) - \frac{1}{2} \log \Delta(M, K)(e^x))\right) \text{Hair } Z_1^{\text{rat}}(M, K). \end{aligned}$$

On a  $Z(S^3, K) = Z(K)$  et  $Z^\boxtimes(S^3, K) = Z^\boxtimes(K)$ .

#### 4.4. Filtration en boucles

Étant donné un nœud en bande  $K$  dans  $S^3$ , la série de diagramme  $Z(K) \in \mathcal{B}$  fait apparaître des diagrammes mono-trivalents. Il est clair que les relations (IHX) ne changent pas l'homologie

des diagrammes. Appelons nombre de boucles de  $D$  son premier nombre de Betti. Cela définit un nouveau degré sur  $\mathcal{B}$  que l'on appelle degré en boucles.

De la même manière que l'intégrale de Kontsevich avec son degré standard permettait d'identifier le gradué de la filtration de Vassiliev, nous allons voir que le degré en boucles sur  $\mathcal{B}$  est très lié à une autre filtration sur l'espace des nœuds. L'intégrale rationnelle permet d'identifier en partie ce gradué et donne ainsi un éclairage sur la structure de l'intégrale de Kontsevich.

**Définition 4.4.1.** — — Soit  $\mathcal{F}$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les paires  $(M, K)$  où  $M$  est une sphère d'homologie rationnelle et  $K$  est un nœud en bande dans  $M$  homologue à 0, c'est-à-dire un plongement  $K : \mathbb{O} \rightarrow M$ . On identifie deux paires  $(M, K)$  et  $(M', K')$  s'il existe un homéomorphisme  $\varphi : M \rightarrow M'$  tel que  $\varphi \circ K = K'$ .

- Soit  $\Gamma$  le graphe en bande présenté sur la figure 6. On appelle bon clasper dans  $(M, K)$  la donnée d'un plongement d'une copie de graphes  $\Gamma$  dans  $M \setminus K$  qui induise l'application nulle en homologie entière.
- Étant donné un bon clasper  $G$  dans  $(M, K)$ , on définit une nouvelle paire  $(M, K)^G$  dite chirurgie de  $(M, K)$  sur  $G$ , en composant le plongement  $\Gamma$  dans  $(M, K)$  par l'application  $i : \mathbb{O}^6 \rightarrow \Gamma$  de la figure 6, puis en effectuant une chirurgie sur les nœuds en bande ainsi obtenus.

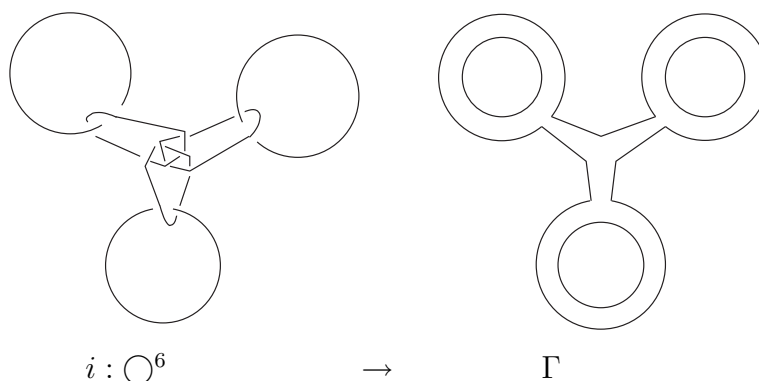


FIGURE 6. Clasper et chirurgie sur un clasper

Nous utiliserons le résultat suivant, dû à Matveev :

**Proposition 4.4.2.** — Soit  $M$  et  $M'$  deux variétés de dimension 3 orientées. Si on a un plongement  $\Gamma \rightarrow M$  quelconque, on construit  $M^\Gamma$  à partir de  $M$  par chirurgie sur l'entrelacs obtenu par composition avec l'application  $i$  de la figure 6. On dira que  $M^\Gamma$  provient de  $M$  par chirurgie sur le clasper  $\Gamma$ . Alors  $M$  et  $M'$  sont reliés par des chirurgies sur des claspers si et seulement si il existe un isomorphisme  $f : H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(M', \mathbb{Z})$  qui commute avec les formes d'enlacement.

Cette proposition implique la suivante :

**Proposition 4.4.3.** — Soit  $(M, K)$  et  $(M', K')$  deux paires formées d'un nœud homologue à 0 dans une sphère d'homologie rationnelle. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Les paires  $(M, K)$  et  $(M', K')$  sont reliées par des chirurgies sur de bons claspers.
- Il existe un isomorphisme  $f : H_1(M \setminus K, \mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \rightarrow H_1(M' \setminus K', \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$  qui est  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -équivariant et commute avec la forme d'enlacement équivariante appelée forme de Blanchfield.
- Les paires  $(M, K)$  et  $(M', K')$  sont  $S$ -équivalentes.

**Définition 4.4.4.** — *Étant donné une paire  $(M, K)$  et un bon clasper à  $n$  composantes  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ , on peut effectuer la chirurgie indépendamment sur chaque composante. Ainsi, on notera  $[(M, K), \Gamma] = \sum_{I \subset [n]} (-1)^{|I|} (M, K)^{\Gamma_I}$ . Dans cette expression,  $\Gamma^I$  dénote la réunion des claspers d'indice appartenant à  $I$  et  $|I|$  est le cardinal de  $I$ .*

*On pose  $\mathcal{F}_n = \text{Vect}\{[(M, K), \Gamma], \Gamma \text{ ayant } n \text{ composantes}\}$ . Alors les sous-espaces  $\mathcal{F}_n$  définissent une filtration décroissante appelée filtration en boucles.*

Soit  $(M, K)$  un nœud dans une sphère d'homologie entière et  $G = \Gamma_1 \amalg \dots \amalg \Gamma_n$  un bon clasper. Fixons un point base et un arc qui relie le centre de chaque clasper au point base. Chaque clasper possède trois "feuilles" auxquelles on peut associer des classes d'homologie dans  $H_1(M \setminus K, \mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ .

**Définition 4.4.5.** — *On définit la contraction de  $G$  que l'on note  $\langle (M, K), G \rangle \in \mathcal{D}(\Lambda, \Lambda_{loc})$  par la formule suivante. Pour chaque appariement des  $3n$  feuilles de  $G$ , on considère le graphe obtenu en recollant une copie de graphes  $\Upsilon$  par composante  $\Gamma_i$  selon la donnée de l'appariement et en coloriant l'arête joignant deux feuilles  $\alpha$  et  $\beta$  par  $-\frac{1}{2} \text{Lk}_{(M, K)}(\alpha, \beta)$ . Ici,  $\text{Lk}_{(M, K)}$  désigne la forme de Blanchfield. On définit  $\langle (M, K), G \rangle$  par la somme de ces quantités.*

*On remarque que la contraction de  $G$  est nulle si  $n$  est impair. Sinon, elle est de degré  $\frac{n}{2}$ .*

**Proposition 4.4.6.** — *Soit  $(M, K)$  une paire et  $G$  un bon clasper à  $n$  composantes avec  $n$  pair. Le premier terme non nul de  $Z_\alpha^{\text{rat}}([(M, K), G])$  est  $\langle (M, K), G \rangle$  (de degré  $\frac{n}{2}$ ).*

*Démonstration.* — On omet la preuve qui se trouve dans [GK04b]. Dans le chapitre 6, nous prouvons un résultat adapté au cas où  $n = 1$ . Au vu de ce résultat, on peut affirmer que  $Z_\alpha^{\text{rat}}$  est un invariant universel relativement à la filtration en boucles.  $\square$

#### 4.5. Revêtements cycliques et relèvement des diagrammes

Étant donnée une paire  $(M, K)$  formée d'un nœud homologue à 0 dans une sphère d'homologie rationnelle, on peut lui associer une nouvelle paire que l'on notera  $\Sigma^r(M, K)$ . La variété sous-jacente à  $\Sigma^r(M, K)$  est le revêtement cyclique d'ordre  $r$  de  $M$  ramifié sur  $K$ . Le nœud dans cette variété est le lieu de ramification. Cette nouvelle paire est encore formée d'un nœud homologue à 0 dans une sphère d'homologie rationnelle si et seulement si  $\Delta(M, K)$  n'a pas de racines d'ordre  $r$ . On dira que  $(M, K)$  est  $r$ -régulière.

Il y a une question naturelle qui se pose au vu de cette définition : quel lien y a-t-il entre les invariants de type fini de  $(M, K)$  et ceux de  $\Sigma^r(M, K)$ ? L'article [GK04a] a permis de répondre à cette question en ce qui concerne l'intégrale rationnelle en proposant une application diagrammatique notée  $\text{Lift}_r$ , qui relie ces invariants comme le précise le théorème ci-dessous.

**Théorème 4.5.1 (GK).** — *Pour toute paire  $r$ -régulière  $(M, K)$ , on a*

$$Z_1^{\text{rat}} \Sigma^r(M, K) = \exp\left(\frac{\sigma_p(M, K)}{16} \ominus\right) \text{Lift}_r Z_1^{\text{rat}}(M, K).$$

Dans cette formule,  $\sigma_p(M, K) = \sum_{z^p=1} \sigma(M, K)(z)$ .

On définit tout d'abord l'application  $\text{Lift}_r$  sur  $\mathcal{D}(\Lambda)$ , c'est-à-dire pour les nœuds de polynôme d'Alexander égal à 1. Soit  $D$  un diagramme trivalent. On rappelle que l'ensemble des coloriages de  $D$  par  $\Lambda$  est librement engendré en tant qu'espace vectoriel par les éléments de  $H^1(D, \mathbb{Z})$

ou par les classes d'homotopie d'applications continues de  $D$  dans  $S^1$ . Soit  $\chi \in H^1(D, \mathbb{Z})$ . On définit  $\text{Lift}_r(D, \chi) = r^{b_0(D)}(D, \frac{\chi}{r})$  si  $\chi$  est divisible par  $r$  dans  $H^1(D, \mathbb{Z})$ , et 0 sinon.

Soit  $\pi_r : S^1 \rightarrow S^1$  le revêtement d'ordre  $r$  et  $f : D \rightarrow S^1$  une application représentant un coloriage de  $D$ . Alors  $\text{Lift}_r(D, f) = \sum_{\tilde{f}} \tilde{f}(D, \tilde{f})$  où  $\tilde{f}$  parcourt les relèvements de  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} & & S^1 \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi_r \\ D & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

A priori, l'application  $\text{Lift}_r$  n'est définie que sur les paires  $r$ -régulières. Nous montrons que cette opération peut être étendue à un espace de diagrammes rationnels un peu plus grand.

Soit  $\Lambda'$  le corps des fractions de  $\Lambda$ . On définit l'endomorphisme  $\text{Lift}_r$  de  $\mathcal{D}(\Lambda')$  de la manière suivante.

Considérons un diagramme  $D$  décoré par des fractions rationnelles de la forme  $\frac{P(t)}{Q(t)}$ . Quitte à étendre les scalaires à  $\mathbb{C}$  et à remplacer  $\frac{1}{t-a}$  par  $\frac{\sum_{n=0}^r t^n a^n}{t^r - a^r}$ , on peut supposer que les fractions rationnelles attachées au diagramme sont de la forme  $\frac{P(t)}{Q(t^r)}$ . Considérons que le diagramme et les dénominateurs sont fixés. On peut appliquer l'application  $\text{Lift}_r$  définie ci-dessus aux numérateurs et on remplace les dénominateurs  $Q(t^r)$  par  $Q(t)$ .

Il suffit maintenant de vérifier que toutes les relations définissant  $\mathcal{D}(\Lambda')$  sont conservées par cette construction ce qui est démontré dans [GK04a].

## 4.6. Appendice

Nous indiquons ici quelques résultats techniques qui sont importants pour montrer que l'intégrale rationnelle est bien définie.

Soit  $S$  et  $S'$  deux ensembles d'indices et  $X \in \mathcal{D}(\Lambda_{loc}, S, S')$  un diagramme de type groupe. Précisément, si on écrit  $X = \exp(\frac{1}{2}W + r)$  où  $W$  contient toutes les arêtes reliant deux éléments de  $S$  on dira que  $X$  est  $S$ -intégrable si  $\varepsilon(W)$  est inversible sur  $\mathbb{Q}$ . On note  $\text{Integ}_S(S', \Lambda_{loc})$  l'ensemble des tels diagrammes.

Pour  $X \in \text{Integ}_S(S', \Lambda_{loc})$ , on définit  $\int^{\text{rat}} X dS := \langle \exp(-\frac{1}{2}W^{-1}), \exp(r) \rangle_S \in \mathcal{D}(\Lambda_{loc}, S')$ .

Cette opération vérifie la proposition suivante :

**Proposition 4.6.1.** — 1. *Fubini* :

Si  $S, S'$  et  $S''$  sont trois ensembles d'indices et que  $X \in \text{Integ}_S(S', S'', \Lambda_{loc}) \cap \text{Integ}_{S,S'}(S'', \Lambda_{loc})$  alors  $\int^{\text{rat}} X dS \in \text{Integ}_{S'}(S'', \Lambda_{loc})$  et

$$\int^{\text{rat}} \left( \int^{\text{rat}} X dS \right) dS' = \int^{\text{rat}} X dS dS'.$$

2. *Intégration par parties* :

Soit  $S$  et  $S'$  deux ensembles d'indices,  $X \in \mathcal{D}(\Lambda_{loc}, S, \partial S, S', \partial S')$  sans arêtes reliant deux éléments de  $S \cup \partial S$ . Soit  $Y \in \text{Integ}_S(S', \Lambda_{loc})$ . Alors  $\partial_X^{S,S'} Y \in \text{Integ}_S(S', \Lambda_{loc})$  et

$$\int^{\text{rat}} \partial_X^{S,S'} Y dS = \int^{\text{rat}} \partial_{\text{div}_S(X)}^{S'} Y dS.$$

Dans cette formule,  $\partial_X^{S,S'} Y$  désigne la somme sur tous les recollements des pattes de  $X$  marquées  $\partial S$  et  $\partial S'$  sur une partie des pattes de  $Y$  marquées  $S$  et  $S'$ . De même,  $\text{div}_S X$  désigne le recollement de la totalité des pattes  $\partial S$  de  $X$  sur une partie des pattes  $S$  de  $X$ .

3. *Identité des roues :*

Soit  $M$  un diagramme  $S$ -matriciel à coefficients dans  $\mathbb{Q}[t][[h]]$  où  $t$  et  $h$  ne commutent pas ( $h$  représente une patte) et tel que  $M_{h \rightarrow 0}$  soit inversible sur  $\Lambda_{loc}$ .

Alors

$$\int^{\text{rat}} \exp\left(\frac{1}{2}M\right) dS = \exp\left(-\frac{1}{2}\chi_h(M)\right)$$

où  $\chi(M) = \text{Tr} \log'(M) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr}((M(M_{h \rightarrow 0})^{-1} - \text{Id})^n)$ . La trace d'une matrice diagrammatique  $M_{i,j}$  est obtenue en collant bout à bout les arêtes  $M_{i,i}$ .

4. *Invariance de l'intégrale :*

Soit  $\varphi : \mathcal{D}(\Lambda, \Lambda_{loc}, S) \rightarrow \mathcal{D}(\Lambda, \Lambda_{loc}, S, h)$  qui commute aux recollements des pattes marquées  $S$ . Soit  $X \in \text{Integ}_S(S', \Lambda_{loc})$  de partie  $S$ -matricielle  $W$ . On a :

$$\int^{\text{rat}} \varphi(X) dS = \int^{\text{rat}} \exp\left(\frac{1}{2}\varphi(W)\right) dS \varphi\left(\int^{\text{rat}} X dS\right).$$

*Démonstration.* — La preuve de ces propriétés est technique, mais purement combinatoire. Elle se trouve dans [GK04b].  $\square$

Nous nous proposons de déduire de la proposition 4.6.1 la preuve de l'invariance de l'intégrale rationnelle, c'est-à-dire des propositions 4.3.7 et 4.3.8.

Commençons par montrer que l'intégrale rationnelle ne dépend pas du choix des arcs et des segments qui permettent de définir l'application de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Soit  $T \in \mathcal{M}$  un entrelacs en tranche et  $Z_\alpha^{\text{rat}}(\widehat{T}, \text{Tp}) \in \mathcal{D}(\Lambda, S)$  son intégrale. Si on change l'orientation d'un segment sur l'intervalle associé à  $s_i$ , on change le signe du diagramme autant de fois que la patte  $s_i$  apparaît. On note  $\varphi_i : X \mapsto X_{s_i \mapsto -s_i}$  cette opération. Il est clair qu'elle commute aux recollements des pattes de  $S$  puisque chaque recollement de pattes  $s_i$  fait intervenir deux signes qui se compensent. On peut donc appliquer la partie 4 de la proposition 4.6.1. On a d'une part  $\varphi(\int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{T}, \text{Tp}) dS) = \int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{T}, \text{Tp}) dS$  et  $\int^{\text{rat}} \exp(\frac{1}{2}\varphi_i(W)) dS = 1$  par définition. Cela prouve que l'intégrale rationnelle est invariante.

Si on change l'arc sur un segment associé à  $s_i$ , on ajoute à cette patte un coloriage  $t^j$ . Soit  $\psi_i$  cet opération. Elle commute aussi aux recollements et donc on peut conclure comme précédemment.

La définition suivante permet de traiter le glissement de coupure.

**Définition 4.6.2.** — Soit  $X_1, X_2 \in \mathcal{D}(\Lambda, s_1, \dots, s_n)$  deux éléments de type groupe. On dit qu'ils sont équivalents s'il existe un diagramme  $X \in \mathcal{D}(\Lambda, s_1, \dots, s_n, \partial h)$  de type groupe et un entier  $i$  tels que  $X_1 = X_{\partial h \rightarrow 0}$  et  $X_2 = C_h X_{x_i \rightarrow \exp(h)x_i}$ . L'opérateur  $C_h$  est un opérateur de contraction. Il agit sur un diagramme par recollement de la totalité des pattes marquées  $h$  sur la totalité des pattes marquées  $\partial h$ .

**Lemme 4.6.3.** — — Si  $X_1$  et  $X_2$  sont intégrables et équivalents, alors  $\int^{\text{rat}} X_1 dS = \int^{\text{rat}} X_2 dS$ .  
— Si deux entrelacs en tranche  $L_1$  et  $L_2$  sont reliés par un glissement de coupure alors  $\sigma Z(\widehat{L}_1, \text{Tp})$  et  $\sigma Z(\widehat{L}_2, \text{Tp})$  sont équivalents.

*Démonstration.* — On remarque que si  $X_1$  et  $X_2$  sont équivalents et intégrables, alors  $X$  est aussi  $S$ -intégrable et de même partie  $S$ -matricielle  $W$ . Notons  $\varphi_i$  l'application qui remplace les pattes  $s_i$  par  $\exp(h)s_i$ . Cette opération commute au recollement, donc d'après la partie 4 de la proposition 4.6.1, on a  $\int^{\text{rat}} \varphi_i(X) dS = \int^{\text{rat}} \exp(\frac{1}{2}\varphi_i(W)) dS \int^{\text{rat}} X dS$ .



En appliquant l'identité des roues à  $\int^{\text{rat}} \exp(\frac{1}{2}\varphi_i W) dS$ , cette quantité vaut  $\exp(-\frac{1}{2}\chi_h(\varphi_i W))$ . Or  $\varphi_i W = D_i^{-1} W D_i$  où  $D_i$  est une matrice identité où on a placé  $\exp(h)$  en  $i, i$ . Par invariance cyclique de la trace,  $\chi(\varphi_i W) = \chi(W) = 0$ .

Ainsi,  $\int^{\text{rat}} \varphi_i(X) dS = \int^{\text{rat}} X dS$ . Si on applique l'opérateur  $C_h$  à cette identité, on prouve la première partie de la proposition.

Soit  $T_1$  et  $T_2$  deux entrelacs en tranche reliés par un glissement de coupure. On veut prouver que  $\sigma Z(\widehat{T}_1, \text{Tp})$  et  $\sigma Z(\widehat{T}_2, \text{Tp})$  sont équivalents. Pour cela, on commence par considérer l'entrelacs  $T$  dont la  $i$ -ème composante a deux coupures. Suivant laquelle des coupures on recolle dans  $Z(\widehat{T}, \text{Tp})$ , on obtient  $Z(\widehat{T}_1, \text{Tp})$  et  $Z(\widehat{T}_2, \text{Tp})$ . Notons  $S$  l'ensemble des composantes qui n'ont qu'une coupure et soit  $s_1, s_2$  des paramètres associés aux deux parties de la composante qui a deux coupures. On choisit des arcs compatibles pour chaque composante et on définit ainsi  $\sigma Z(\widehat{T}, \text{Tp}) \in \mathcal{D}(\Lambda, s_1, s_2, S)$ .

D'après la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (voir 4.2.2),  $\sigma Z(\widehat{T}_1, \text{Tp}) = \langle C_{s_1, s_2}^s, \sigma Z(\widehat{T}, \text{Tp}) \rangle$  et  $\sigma Z(\widehat{T}_2, \text{Tp}) = \langle C_{s_2, s_1}^s, \sigma Z(\widehat{T}, \text{Tp}) \rangle$ .

On remarque que  $C_{y,x}^{e^{xz}} = C_{x,y}^z$  ce qui provient de la formule  $Ad(e^X)e^Y e^X = e^X e^Y$ .

Considérons le diagramme  $X = \langle C_{s_1, s_2}^s, \sigma Z(\widehat{T}, \text{Tp})_{s_2 \mapsto s_2 + \partial h} \rangle_{s_1, s_2}$ .

On a  $X_{h \rightarrow 0} = \langle C_{s_1, s_2}^s, \sigma Z(\widehat{T}, \text{Tp}) \rangle_{s_1, s_2} = \sigma Z(\widehat{T}_1, \text{Tp})$ . Mais,

$$\begin{aligned} C_h X_{s \rightarrow e^h s} &= C_h \langle C_{s_1, s_2}^{e^h s}, \sigma Z(\widehat{T}, \text{Tp})_{s_2 \mapsto s_2 + \partial h} \rangle_{s_1, s_2} = \langle C_{s_1, s_2}^{e^{s_2} s}, \sigma Z(\widehat{T}, a) \rangle_{s_1, s_2} \\ &= \langle C_{s_2, s_1}^s, \sigma Z(\widehat{T}, a) \rangle_{s_1, s_2} = \sigma Z(\widehat{T}_2, \text{Tp}). \end{aligned}$$

Ceci prouve que  $\sigma Z(\widehat{T}_1, \text{Tp})$  et  $\sigma Z(\widehat{T}_2, \text{Tp})$  sont équivalents. Ainsi, ils auront la même intégrale rationnelle. Cette dernière est donc invariante par glissement de coupure.  $\square$

Ces deux lemmes permettent de prouver la proposition 4.3.7. Pour montrer la proposition 4.3.8, il suffit de prouver que l'intégrale est invariante par glissement des composantes. En effet, l'intégrale est clairement invariante par ajout d'une composante triviale d'auto-enlacement  $\pm 1$  grâce au choix de normalisation.

**Lemme 4.6.4.** — *L'intégrale rationnelle est invariante par le deuxième mouvement de Kirby.*

*Démonstration.* — Soit  $T_1$  et  $T_2$  deux entrelacs en tranche reliés par un mouvement de Kirby comme sur la figure 7. On voit que les deux intégrales sont liées par la formule  $Z_\alpha^{\text{rat}}(T_2, \text{Tp}) = i_* p^* Z_\alpha^{\text{rat}}(T_1, \text{Tp})$  où  $p$  est l'application qui dédouble une composante (disons  $s_1$ ) et  $i$  est la juxtaposition de l'une des copies de  $s_1$  avec une autre composante (disons  $s_2$ ). Posons  $X^1 = \sigma Z_\alpha^{\text{rat}}(T_1, \text{Tp})$  et  $X^2 = \sigma Z_\alpha^{\text{rat}}(T_2, \text{Tp})$ . La formule précédente se traduit par  $X^2 = \langle C_{s'_1, s_2}^s, X_{s_1 \mapsto s_1 + s'_1}^1 \rangle_{s'_1, s_2}$ .

Il faut alors prouver que l'intégrale rationnelle est invariante lors de cette transformation.

Supposons dans un premier temps que  $X^1$  et  $X^2$  sont intégrables par rapport à  $s_1$ . On peut donc appliquer le théorème de Fubini et écrire

$$\begin{aligned} \int^{\text{rat}} X^2 dS &= \int^{\text{rat}} dS \setminus \{s_1\} \int^{\text{rat}} X^2 ds_1 = \int^{\text{rat}} dS \setminus \{s_1\} \int^{\text{rat}} \langle C_{s'_1, s_2}^s, X_{s_1 \mapsto s_1 + s'_1}^1 \rangle_{s'_1, s_2} ds_1 \\ &= \int^{\text{rat}} dS \setminus \{s_1\} \langle C_{s'_1, s_2}^s, \int^{\text{rat}} X_{s_1 \mapsto s_1 + s'_1}^1 ds_1 \rangle_{s'_1, s_2} \end{aligned}$$

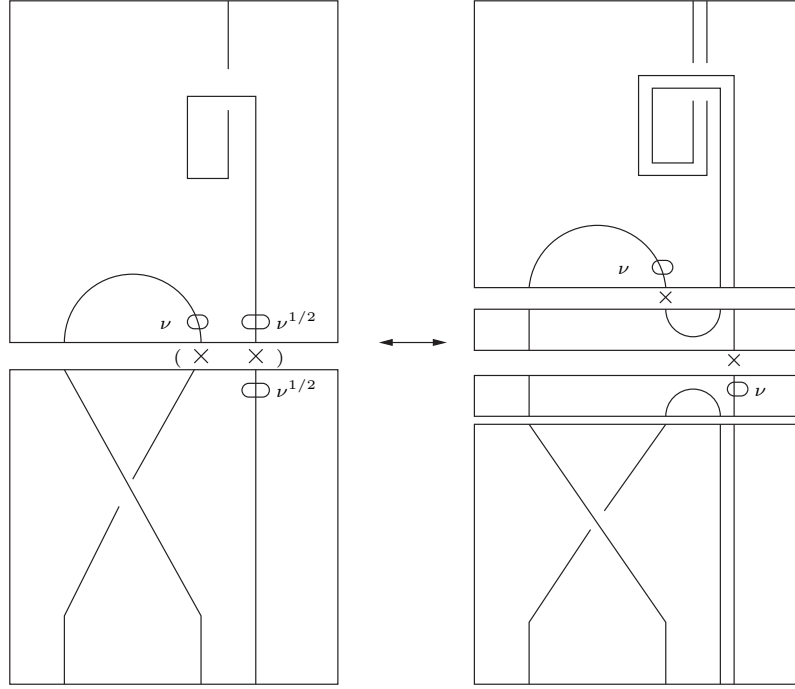


FIGURE 7. Mouvement de Kirby entre entrelacs en tranche

Or  $X_{s_1 \mapsto s_1 + s'_1}^1 = \partial_{\exp(s'_1 \frown \partial s_1)}^{s_1} X^1$ . Par intégration par parties, comme  $\operatorname{div}_{s_1} \exp(s'_1 \frown \partial s_1) = 1$ ,  $\int^{\operatorname{rat}} X_{s_1 \mapsto s_1 + s'_1}^1 ds_1 = \int^{\operatorname{rat}} X^1 ds_1$ . Ainsi, les pattes  $s'_1$  disparaissent et cela implique que  $\int^{\operatorname{rat}} X^2 dS = \int^{\operatorname{rat}} X^1 dS$ .

Supposons que  $X^1$  et  $X^2$  ne sont pas  $s_1$ -intégrables. Alors, en les multipliant par  $\exp(\frac{\varepsilon}{2} s_1 \frown s_1)$ , ils le deviennent, sauf pour un nombre fini de valeurs de  $\varepsilon$ . Les deux quantités  $\int^{\operatorname{rat}} X^1(\varepsilon) dS$  et  $\int^{\operatorname{rat}} X^2(\varepsilon) dS$  sont des diagrammes dans  $\mathcal{D}(\Lambda_{loc} \otimes \mathbb{Q}(\varepsilon))$  qui sont égales sauf pour un nombre fini de valeurs de  $\varepsilon$  d'après l'argument précédent. Elles sont donc égales en tant que diagrammes dans  $\mathcal{D}(\Lambda_{loc} \otimes \mathbb{Q}(\varepsilon))$ . En prenant  $\varepsilon = 0$ , on en déduit l'égalité cherchée. Cela prouve finalement l'invariance de l'intégrale rationnelle par mouvements de Kirby.  $\square$

## CHAPITRE 5

### LE CAS DES NŒUDS TORIQUES

#### 5.1. Introduction

En 1998, dans [BNGRT00], une conjecture a été formulée au sujet de l'expression précise de l'intégrale de Kontsevich du nœud trivial. Cette conjecture a ensuite été prouvée dans [BNLT03]. Jusqu'à présent, on ne connaît aucune formule complète pour l'intégrale de Kontsevich d'un nœud non trivial. Rappelons que l'on note  $\mathcal{B}$  l'espace des diagrammes monovalents où l'intégrale de Kontsevich déroulée prend ses valeurs.

On définit un espace  $\mathcal{B}_s$  de diagrammes "localisés" telle que l'application naturelle  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_s$  n'est pas injective en grand degré en boucles. On donne dans ce chapitre une formule pour l'intégrale déroulée des nœuds toriques qui prend ses valeurs dans  $\mathcal{B}_s$  et qui a une expression "rationnelle" dans un sens que l'on précisera ultérieurement.

Le point de départ de la preuve est une formule bien connue, que l'on trouve déjà dans [Les99] et qui a été utilisée par D. Bar-Natan dans un article non publié. A partir de cette expression, on construit une suite de séries de diagrammes qui converge vers l'intégrale des nœuds toriques et dont chaque terme est obtenu à l'aide de "graphes de recollement".

On utilise alors la rationalité de l'intégrale pour donner une expression rationnelle assez compacte de l'intégrale des nœuds toriques à l'aide des "graphes de recollement" que l'on va définir en cours de route. En particulier, on montre que seuls les graphes simplement connexes apparaissent dans cette expression, ce qui est suggéré par la figure 1.

$$Z^{\square}(K_{p,q}) = \exp \left( \begin{array}{c} \text{---} \bigcirc \text{---} \cdots + \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \cdots + \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \cdots + \begin{array}{c} \bigcirc \quad \bigcirc \\ | \quad | \\ \bigcirc \text{---} \bigcirc \\ | \\ \bigcirc \end{array} + \cdots \end{array} \right)$$

FIGURE 1. Diagrammes apparaissant dans l'intégrale déroulée des nœuds toriques

Le but de ce chapitre est donc de prouver le théorème suivant :

**Théorème.** — Soit  $D$  l'endomorphisme de  $\mathbb{Q}(t)$  défini par  $Dg(t) = tg'(t)$  et soit  $h(t) = \frac{1}{4} \frac{t+1}{t-1}$  (L'endomorphisme  $D$  agit comme  $\frac{d}{dx}$  sur  $g(\exp(x))$ ).

Il existe une série de diagrammes  $Y_{p,q}^{rat}$  obtenue en insérant des cercles aux sommets d'arbres, telle que les cercles correspondant aux sommets de valence  $k$  soient coloriés par  $D^{k-1}h(t^p)$ ,  $D^{k-1}h(t^q)$  ou  $D^{k-1}h(t^{pq})$ .

Si on applique à  $Y_{p,q}^{rat}$  l'application Hair (c'est-à-dire si on substitue  $t$  par l'exponentielle d'une patte attachée au cercle), on obtient une série dans  $\mathcal{B}_s$  qui est égale au logarithme de l'intégrale de Kontsevich déroulée du nœud torique de paramètres  $p, q$  plus la série  $\log\langle\Omega, \Omega\rangle$ .

On déduit de ce calcul que l'opérateur  $\text{Lift}_r$  qui correspond au revêtement cyclique de  $S^3$  le long du nœud agit sur  $Y_{p,q}^{rat}$  en multipliant un diagramme  $D$  par  $r^{-\chi(D)}$  où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler de  $D$ . Ceci nous donne une formule pour l'invariant LMO des sphères de Brieskorn.

Lev Rozansky a obtenu lui aussi des formules pour le développement d'Euler des nœuds toriques, mais dans le système de poids associé à  $\mathfrak{sl}_2$ , voir [Roz97]. On ne sait pas comment retrouver ces formules à partir du théorème ci-dessus car on ne connaît pas d'analogue de  $\mathcal{B}_s$  dans le système de poids  $\mathfrak{sl}_2$ . Le calcul de la partie à deux boucles de l'intégrale des nœuds toriques a été fait indépendamment par T. Ohtsuki dans [Oht]. Plus généralement, il a proposé une formule pour la partie à deux boucles des cablages toriques des nœuds.

Pour conclure cette introduction, il convient de définir l'espace des diagrammes singuliers  $\mathcal{B}_s$ . Cette construction est un cas particulier d'une construction plus générale où on colorie un diagramme  $D$  par un espace de couleurs associé à  $H^1(D, \mathbb{Z})$ . Cette définition ressemble à celle de la section 4.3.3, et il y a des relations entre ces deux constructions, cependant l'ancienne construction est insuffisante pour les besoins de ce chapitre.

**Définition 5.1.1.** — Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie dont les objets sont les groupes abéliens libres et de type fini, et les morphismes sont les isomorphismes linéaires. On appelle  $\mathcal{C}$ -module un foncteur de  $\mathcal{C}$  vers la catégorie des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels. Dans ce qui suit, on associe à tout  $\mathcal{C}$ -module  $F$  un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathcal{D}(F)$  que l'on appelle espace de diagrammes coloriés par  $F$ . Cette construction est un foncteur de la catégorie des  $\mathcal{C}$ -modules vers la catégorie des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels.

Soit  $F$  un  $\mathcal{C}$ -module et  $\Gamma$  un graphe trivalent fini avec des orientations locales aux sommets (on permet à  $\Gamma$  d'avoir des composantes connexes isomorphes à des cercles).

On définit  $\mathcal{D}(F)$  comme le quotient de  $\bigoplus_{\Gamma} F(H^1(\Gamma, \mathbb{Z}))$  par les relations suivantes :

- Si  $\Gamma$  est isomorphe à  $\Gamma'$  via une application  $\varphi$ , on identifie  $x \in F(\Gamma')$  et  $F(\varphi^*)(x) \in F(\Gamma)$  pour tout  $x$  dans  $F(\Gamma')$ .
- Si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  diffèrent juste par l'orientation d'un sommet, on identifie  $x$  dans  $F(H^1(\Gamma, \mathbb{Z}))$  avec  $-x$  dans  $F(H^1(\Gamma', \mathbb{Z}))$ .
- Si  $\Gamma$  est un graphe avec un sommet quadrivalent, on note  $\Gamma_I, \Gamma_H, \Gamma_X$  les trois résolutions standard de ce diagramme. On dispose d'identifications canoniques entre  $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}), H^1(\Gamma_I, \mathbb{Z}), H^1(\Gamma_H, \mathbb{Z})$  et  $H^1(\Gamma_X, \mathbb{Z})$ .

Pour tout  $x \in F(H^1(\Gamma, \mathbb{Z}))$ , on ajoute la relation  $x_I = x_H - x_X$ .

L'exemple principal est le suivant : définissons  $F(H) = \mathbb{Q}[[H]] = \prod_{n \geq 0} S^n(H \otimes \mathbb{Q})$ . L'espace  $\mathcal{D}(F)$  est obtenu en coloriant des graphes à l'aide de classes de cohomologie de degré 1 qui peuvent être matérialisées par des pattes attachées aux arêtes. Il est facile de voir que  $\mathcal{D}(F) \simeq \mathcal{B}$ . Cet isomorphisme permet de coder simplement les éléments de  $\mathcal{B}$ .

Si on prend  $F_s(H) = (H \setminus \{0\})^{-1} \mathbb{Q}[[H]]$ , on obtient par définition  $\mathcal{B}_s = \mathcal{D}(F_s)$ . Le morphisme de  $\mathcal{C}$ -modules  $F \rightarrow F_s$  induit une application  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_s$ .

S'il existait une rétraction de  $\mathcal{C}$ -modules  $F_s \rightarrow F$ , on en déduirait que  $\mathcal{B}$  s'injecte dans  $\mathcal{B}_s$ . Utilisant un diviseur de 0 dans l'algèbre  $\Lambda$  de P. Vogel, on trouve un élément de degré 17 non nul dans  $\mathcal{B}$  qui s'annule dans  $\mathcal{B}_s$ . Ainsi, on perd de l'information à exprimer les diagrammes dans  $\mathcal{B}_s$  cependant on conjecture que l'application  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_s$  est injective en petit degré.

## 5.2. Expressions diagrammatiques de l'intégrale

**5.2.1. Première expression diagrammatique.** — Soit  $p$  et  $q$  deux entiers premiers entre eux tels que  $p > 0$ . On note  $K_{p,q}$  le nœud torique en bande de paramètres  $p$  et  $q$  et d'auto-enlacement 0. On considèrera aussi le nœud  $L_{p,q}$  obtenu à partir du nœud torique en prenant une bande parallèle au tore sur lequel il s'appuie. On vérifie facilement que  $L_{p,q}$  a pour auto-enlacement  $pq$ . Ce nœud intervient car son intégrale de Kontsevich est plus facile à calculer.

La méthode de calcul de cette partie est fortement inspirée de [Les99]. On utilise les techniques et les notations de [Thu00].

Considérons les points formés par les racines  $p$ -ièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$ . Notons  $\gamma$  la tresse obtenue en faisant subir à cette figure une rotation d'angle  $t\frac{2\pi q}{p}$  pour  $t \in [0, 1]$ . Un calcul direct montre que la forme de Knizhnik-Zamolodchikov est constante le long de ce déplacement, ce qui permet d'explicitier l'intégrale de cette tresse.

On rappelle pour cela qu'à toute variété  $\Gamma$  de dimension 1, on peut associer un espace de diagrammes  $\mathcal{A}(\Gamma)$  et que cette construction est contravariante vis à vis des applications continues relatives au bord. Soit  $\varphi_p^*$  l'application induite par la projection sur le premier facteur  $\varphi_p : [0, 1] \times \{1, \dots, p\} \rightarrow [0, 1]$  et  $\triangleleft$  l'unique diagramme de degré 1 dans  $\mathcal{A}([0, 1])$ .

Comme  $\varphi_p^*$  est un morphisme d'algèbre et que la connection K-Z vaut  $\varphi_p^*(\frac{q}{2p}\triangleleft)$  pour tout  $t$ , on en déduit que  $Z(\gamma) = \varphi_p^*(\exp_{\#}(\frac{q}{2p}\triangleleft))$ .

Le nœud  $L_{p,q}$  est obtenu en refermant la tresse  $\gamma$ . Les propriétés de compatibilité de l'intégrale de Kontsevich vis à vis de la duplication et de l'empilement implique que  $Z(L_{p,q})$  peut être calculé comme indiqué ci-dessous.

Soit  $\psi_p$  l'application de  $S^1$  dans lui-même définie par  $\psi_p(z) = z^p$ . Posons aussi  $\nu = Z(U)$ . L'intégrale de  $L_{p,q}$  vérifie la formule

$$(9) \quad Z(L_{p,q}) = \psi_p^*(\nu \# \exp_{\#}(\frac{q}{2p}\triangleleft)).$$

D'après le lemme 4.10 de [Thu00], l'application  $\psi_p^*$  vue dans  $\mathcal{B}$  a la forme suivante : si  $D \in \mathcal{B}$  a  $k$  pattes (c'est-à-dire  $k$  sommets monovalents) alors  $\sigma\psi_p^*\chi D = p^k D$ . On écrira plus simplement  $D_p$  le résultat de cette opération qui ressemble à un changement de variables.

Puis, pour calculer  $Z(K_{p,q})$  à partir de  $Z(L_{p,q})$ , on doit juste changer l'auto-enlacement, c'est-à-dire  $Z(K_{p,q}) = \exp_{\#}(-\frac{pq}{2}\triangleleft) \# Z(L_{p,q})$ . On transforme ce produit en produit ordinaire en appliquant l'application de déroulement  $\Upsilon^{-1}$ . On obtient finalement une formule pour  $Z^{\boxtimes}(K_{p,q})$ .

Résumons les étapes de calcul :

1. Calcul de  $\sigma(\nu \# \exp_{\#}(\frac{q}{2p}\triangleleft))$
2. Changement de variables  $x \mapsto px$
3. Déroulement

On rappelle que  $\Upsilon = \chi \circ \partial_{\Omega}$  est un isomorphisme d'algèbres et que  $\Upsilon^{-1}\nu = \frac{\Omega}{\langle \Omega, \Omega \rangle}$  et  $\Upsilon^{-1}\triangleleft = \curvearrowright - \ominus / 24$ . Ici  $\langle A, B \rangle$  désigne la somme sur tous les recollements des pattes de  $A$  sur les pattes de  $B$ .

Pour réaliser la première étape, on calcule

$$(10) \quad \sigma(\nu \# \exp_{\#}(\frac{q}{2p} \curvearrowright)) = \frac{\partial_{\Omega}(\Omega \exp(\frac{q}{2p} \curvearrowright))}{\langle \Omega, \Omega \rangle \exp(\frac{q}{48p} \ominus)}.$$

On rappelle ci-dessous ce que l'on entend par diagramme colorié, ainsi que les opérations usuelles. Puis on décrit une nouvelle opération.

**Définition 5.2.1.** — *— Soit  $P$  un ensemble de paramètres. On note  $\mathcal{B}(P)$  l'espace des couples  $(D, f)$  où  $D$  est un graphe mono-trivalent et  $f$  est une application de l'ensemble des pattes de  $D$  vers  $P$ . On dira que les pattes de  $D$  sont paramétrées ou coloriées par les éléments de  $P$ . Si  $D \in \mathcal{B}$  et  $x \in P$ , on écrit  $D_x$  le diagramme  $D$  dont les pattes sont coloriées par  $x$ .*

- *Si  $D \in \mathcal{B}(x)$ , on définit le diagramme  $D_{x+y} \in \mathcal{B}(x, y)$  en remplaçant les pattes de  $D$  par les mêmes pattes coloriées par  $x$  ou  $y$  de toutes les façons possibles.*
- *Si  $D, E \in \mathcal{B}(P)$  et  $x \in P$  on définit  $\langle D, E \rangle_x$  comme la somme sur tous les recollements de toutes les  $x$ -pattes de  $D$  sur toutes les  $x$ -pattes de  $E$ .*

*On définit aussi  $\partial_D E$  comme la somme sur tous les recollements de toutes les  $x$ -pattes de  $D$  sur quelques  $x$ -pattes de  $E$ . Cet opérateur satisfait  $\partial_{D_x} E_x = \langle D_y, E_{x+y} \rangle_y$  et pour  $F \in \mathcal{B}(P)$ ,  $\langle D_x, E_x F_x \rangle_x = \langle \partial_{E_x} D_x, F_x \rangle_x$ .*

- *Soit  $A_x$  et  $B_x$  deux séries de diagrammes dans  $\mathcal{B}(P)$  où  $P$  contient au moins trois couleurs :  $\{x, y, z\}$ . On définit  $A \cdot B = \langle A_{y+x}, B_{x+z} \rangle_x$ . Les  $y$ -pattes de  $A \cdot B$  seront appelées pattes gauches et les  $z$ -pattes de  $A \cdot B$  seront appelées pattes droites pour les raisons évidentes. Pour des nombres rationnels  $r$  et  $r'$ , le diagramme  ${}_r A \cdot {}_{r'} B$  est obtenu en multipliant toutes les pattes gauches par  $r$  et toutes les pattes droites par  $r'$ .*

*De plus, si  $a_x$  et  $b_x$  sont deux séries de diagrammes connexes, alors  $\exp(a), \exp(b)$  et  $\exp(a) \cdot \exp(b)$  sont de type groupe, on définit donc  ${}_y a \times {}_z b = \log({}_y \exp(a) \cdot \exp(b)_z)$ .*

Utilisant les notations de la définition 5.2.1, on calcule

$$\partial_{\Omega}(\Omega \exp(\frac{q}{2p} \curvearrowright)) = \langle \Omega_x, \Omega_{x+y} \exp(\frac{q}{2p} {}_{x+y} \curvearrowright_{x+y}) \rangle_x.$$

On utilise le fait que  ${}_{x+y} \curvearrowright_{x+y} = x \curvearrowright_x + 2x \curvearrowright_y + y \curvearrowright_y$  et les propriétés rappelées dans la définition précédente pour écrire :

$$\partial_{\Omega}(\Omega \exp(\frac{q}{2p} \curvearrowright)) = \langle \partial_{\exp(\frac{q}{2p} x \curvearrowright_x)} \Omega_x, \Omega_{x+y} \exp(\frac{q}{p} x \curvearrowright_y) \rangle_x \exp(\frac{q}{2p} y \curvearrowright_y).$$

Rappelons la formule fondamentale suivante que l'on trouve par exemple dans [Thu00] :  $\partial_{D_x} \Omega_x = \langle D_x, \Omega_x \rangle_x \Omega_x$  si  $D \in \mathcal{B}(x)$ . L'expression précédente se réduit à

$$\partial_{\Omega}(\Omega \exp(\frac{q}{2p} \curvearrowright)) = \langle \exp(\frac{q}{2p} \curvearrowright), \Omega \rangle \left( \frac{q}{p} \Omega \cdot \Omega \right) \exp(\frac{q}{2p} \curvearrowright).$$

Grâce à l'identité  $\langle \exp(\frac{q}{2p} \curvearrowright), \Omega \rangle = \exp(\langle \frac{q}{2p} \curvearrowright, \Omega \rangle) = \exp(\frac{q}{48p} \ominus)$ , on peut simplifier ce facteur dans l'expression (10) ci-dessus.

Multipliant par  $p$  à la puissance le nombre de pattes, on obtient la formule suivante pour  $Z(L_{p,q})$  :

$$Z(L_{p,q}) = \frac{q \Omega \cdot \Omega_p \exp(\frac{qp}{2} \curvearrowright)}{\langle \Omega, \Omega \rangle}.$$

On a une formule pour  $Z^{\boxtimes}(K_{p,q})$  en déroulant  $Z(L_{p,q})$  et en multipliant par  $\Upsilon^{-1} \exp_{\#}(-\frac{pq}{2} \curvearrowright) = \exp(-\frac{pq}{2} \curvearrowright + \frac{pq}{48} \ominus)$ .

$$(11) \quad Z^{\boxtimes}(K_{p,q}) = \partial_{\Omega}^{-1}(q\Omega \cdot \Omega_p \exp(\frac{qp}{2}\curvearrowright)) \frac{\exp(-\frac{pq}{2}\curvearrowleft + \frac{pq}{48}\Theta)}{\langle \Omega, \Omega \rangle}.$$

**5.2.2. Une suite convergeant vers l'intégrale des nœuds toriques.** — Dans cette partie, on part de la formule (11) pour en déduire de nouvelles par un procédé de récurrence.

Définissons  $\mathcal{B}^c = \mathcal{B}(\{\text{active, inerte}\})$ . Il y a une application d'"oubli"  $\mathcal{B}^c \rightarrow \mathcal{B}$ . Définissons  $\omega^{-1} = \frac{1}{p}\omega \times \omega_{\frac{1}{q}}$  et  $\omega^0 = \omega$ . Ce sont des éléments de  $\mathcal{B}^c$  si on déclare que toutes les pattes sont actives.

On définit trois opérateurs analogues à ceux de la définition 5.2.1 mais pour des diagrammes dans  $\mathcal{B}^c$  de la manière suivante :

- Définition 5.2.2.** —
- Soit  $A \in \mathcal{B}^c$  et  $r \in \mathbb{Q}$ , on appelle  $A_r$  le diagramme  $A$  dont les pattes actives sont multipliées par  $r$ , considéré comme élément de  $\mathcal{B}$ .
  - Si  $A \in \mathcal{B}^c$  et  $B \in \mathcal{B}$ , le diagramme  $\partial_A B \in \mathcal{B}$  est la somme sur tous les recollements des pattes actives de  $A$  sur certaines pattes de  $B$ . C'est un élément de  $\mathcal{B}$ .
  - Pour  $A \in \mathcal{B}$  et  $B \in \mathcal{B}^c$  deux diagrammes, on définit  $A \cdot B \in \mathcal{B}^c$  comme étant la somme sur tous les recollements de quelques pattes actives de  $B$  sur quelques pattes de  $A$ . Les pattes actives de  $A \cdot B$  étant par définition les pattes actives restantes de  $B$ . On définit aussi  $a \times b = \log(\exp(a) \times \exp(b))$ . Voir figure 2 pour les deux définitions.

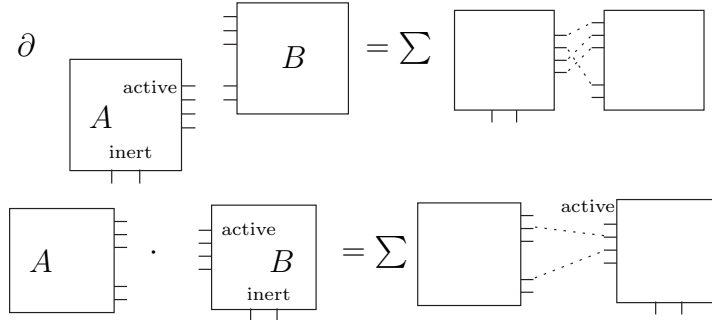


FIGURE 2. Les opérateurs  $\partial$  et  $\cdot$ .

**Lemme 5.2.3.** — Ces deux opérateurs satisfont  $\partial_A(BC) = \partial_{C \cdot A} B$ .

*Démonstration.* — Dans le diagramme  $\partial_A BC$ , les pattes actives de  $A$  sont recollées soit à  $B$ , soit à  $C$ . On peut considérer que l'on a recollé une partie des pattes actives de  $A$  à  $C$ , puis le reste sur  $B$ . C'est ce qui est représenté par la formule  $\partial_{C \cdot A} B$ .  $\square$

Supposons que les pattes de  $\omega^{-1}$  et  $\omega^0$  sont actives. Pour tout  $n \geq 0$ , on pose  $\omega^{n+1} = (\omega_{pq}^{n-1} - \omega_{pq}^n) \times \omega^n - \omega_{pq}^{n-1} + \omega_{pq}^n$ . Dans cette formule, le terme  $\omega_{pq}^{n-1} - \omega_{pq}^n$  a toutes ses pattes inertes.

Les résultats principaux de cette section sont résumés dans la proposition suivante :

**Proposition 5.2.4.** — Pour tout  $n \geq 0$ , on a

1. La série  $\exp(\frac{pq}{2}\curvearrowright)$  agit par dérivation sur les pattes actives de  $\exp(\omega^n)$  par multiplication par  $\exp(\frac{pq}{48}\Theta)$ . En formules, on écrit :

$$\partial_{\exp(\frac{pq}{2}\curvearrowright)}^{\text{active}} \exp(\omega^n) = \exp(\frac{pq}{48}\Theta) \exp(\omega^n).$$

Ici, on a écrit  $\partial^{active}$  pour signifier que seules les pattes actives sont recollées dans ce procédé, contrairement à la définition 5.2.2.

2. La formule suivante est vérifiée :

$$Z^{\boxtimes}(K_{p,q}) = \left( \partial_{\exp(\omega^n)}^{-1} \exp\left(\frac{pq}{2} \frown + \omega_{pq}^{n-1}\right) \right) \frac{\exp\left(-\frac{pq}{2} \frown + \omega_{pq}^{-1} - \omega_{pq}^{n-1} + \frac{pq}{48} \ominus\right)}{\langle \Omega, \Omega \rangle}$$

3. La formule ci-contre est aussi vérifiée :

$$Z^{\boxtimes}(K_{p,q}) = \partial_{\exp(\omega^n)}^{-1} \left[ \partial_{\exp(\omega^n)} \exp\left(\frac{pq}{2} \frown\right) \exp(\omega_{pq}^{n-1} - \omega_{pq}^n) \right] \frac{\exp\left(-\frac{pq}{2} \frown + \omega_{pq}^{-1} - \omega_{pq}^{n-1}\right)}{\langle \Omega, \Omega \rangle}.$$

De plus, la suite  $\omega_{pq}^{-1} - \omega_{pq}^n$  converge vers  $\log\left(Z^{\boxtimes}(K_{p,q})\langle \Omega, \Omega \rangle\right)$  relativement au degré en boucles.

*Démonstration.* — La première formule est vraie pour  $n = 0$  car c'est une conséquence de la formule fondamentale  $\partial_D \Omega = \langle D, \Omega \rangle \Omega$ . On la prouve pour tout  $n$  par une simple récurrence puisque l'opération  $\partial_{\exp(\frac{pq}{2} \frown)}^{active}$  et l'opération de recollement définissant  $\exp(\omega^{n+1})$  à partir de  $\exp(\omega_n)$  commutent.

La seconde formule est équivalente quand  $n = 0$  à la formule (11). Supposons qu'elle est vraie pour un certain  $n \geq 0$ . Pour la prouver au rang  $n + 1$ , il faut prouver que :

$\partial_{\exp(\omega^{n+1})}^{-1}(\exp(\frac{pq}{2} \frown + \omega_{pq}^n)) \exp(-\omega_{pq}^n) = \partial_{\exp(\omega^n)}^{-1}(\exp(\frac{pq}{2} \frown + \omega_{pq}^{n-1})) \exp(-\omega_{pq}^{n-1})$ , ce qui est équivalent à

$$\exp\left(\frac{pq}{2} \frown + \omega_{pq}^n\right) = \partial_{\exp(\omega^{n+1})} \left[ \partial_{\exp(\omega^n)}^{-1}(\exp(\frac{pq}{2} \frown + \omega_{pq}^{n-1})) \exp(\omega_{pq}^n - \omega_{pq}^{n-1}) \right]$$

mais ceci n'est qu'une application du lemme 5.2.3.

La troisième formule est une conséquence de l'identité

$$\partial_{\exp(\omega^n)} \exp\left(\frac{pq}{2} \frown\right) = \exp\left(\frac{pq}{2} \frown + \frac{pq}{48} \ominus + \omega_{pq}^n\right)$$

qui est elle même une conséquence de la première proposition.

Prouvons la dernière partie de la proposition : on vérifie par récurrence que  $\omega^{n-1} - \omega^n$  a un degré en boucles  $> n$  pour tout  $n \geq 0$ , et que chaque composante connexe de  $\omega^n$  a des pattes actives. Il est aussi vrai que l'opérateur  $\partial_{\exp(\omega^n)}^{-1}$  a pour forme  $\partial_{\exp(D)}$  pour une série de diagrammes  $D$  ayant au moins une patte active. Ainsi, dans la troisième formule, si l'opérateur  $\partial_{\exp(\omega^n)}^{-1}$  agit sur  $\exp(\omega_{pq}^{n-1} - \omega_{pq}^n)$ , il crée un diagramme de degré en boucles  $> n + 1$  ce qui signifie que  $\omega_{pq}^{-1} - \omega_{pq}^{n-1} = \log(Z^{\boxtimes}(K_{p,q})\langle \Omega, \Omega \rangle)$  modulo des termes de degré en boucles  $> n + 1$ . Ceci prouve la dernière assertion.  $\square$

**5.2.3. Une expression avec des graphes de recollement.** — On remarque que tous les diagrammes apparaissant dans  $\omega^n$  sont construits en "recollant des roues". Nous allons rendre cette remarque précise en introduisant les graphes de recollement. Nous donnerons une présentation de  $\log(Z^{\boxtimes}(K_{p,q})\langle \Omega, \Omega \rangle)$  à l'aide de ces graphes. Ils nous seront utiles pour trouver une expression rationnelle de l'intégrale déroulée. Comme conséquence non triviale, nous allons montrer que seuls les graphes simplement connexes contribueront à cette expression.

*Définition 5.2.5.* — Soit  $P$  un ensemble de paramètres. On note  $\mathcal{S}(P)$  le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel engendré par les graphes finis non orientés  $(V, E, f)$  où  $f$  est une application  $V \rightarrow P$ ,  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes. On se donne aussi une application  $h : P \rightarrow \mathbb{Q}[[x]]$ . Les éléments de cet espace seront appelés graphes de recollement coloriés par  $P$ . Le nombre d'arêtes définit un degré sur  $\mathcal{S}(P)$ . On complète  $\mathcal{S}(P)$  relativement à ce degré. Cet espace à une



structure évidente d'algèbre de Hopf commutative et co-commutative dont les éléments primitifs sont les graphes connexes.

On définit une application de substitution  $s : \mathcal{S}(P) \rightarrow \mathcal{B}$  de la manière suivante : si  $(X, h)$  est un diagramme dans  $\mathcal{S}(P)$ , on définit  $s(X, h)$  en recollant pour tout  $a \in P$  et pour tout sommet  $v$  décoré par  $a$  les arêtes adjacentes à  $v$  sur la série de roues engendrée par  $h(a)$  de toutes les façons possibles. On pourra colorier par  $a$  les pattes générées par  $h(a)$  restantes. Il est clair que  $s$  est un morphisme d'algèbres de Hopf.

Donnons quelques exemples : si  $P = \{a\}$   $X = \bullet_a$  et  $h(a) = f(x)$ , alors  $s(X, h) = \omega$ . De la même manière,  $s(\exp(\bullet_a), h) = \Omega$  et

$$s(a \bullet \bullet_b \bullet_c, h) = 16 \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \equiv$$

où  $h(a) = x^2$ ,  $h(b) = x^2$  et  $h(c) = x^4$ .

Définissons deux opérations sur  $\mathcal{S}(P)$  :

**Définition 5.2.6.** — Étant donnés deux graphes de recollement connexes  $X$  and  $Y$ ,  $A$  un ensemble de paramètres de  $X$  et  $B$  un ensemble de paramètres de  $Y$ , on définit  $X_A \times_B Y = \log(\exp(X) \cdot \exp(Y))$  où  $\exp(X) \cdot \exp(Y)$  est obtenu en ajoutant de toutes les manières possibles un nombre fini d'arêtes reliant des  $A$ -sommets de  $\exp(X)$  à des  $B$ -sommets de  $\exp(Y)$ . is obtained by adding in all ways a finite number of edges from  $A$ -colored vertices of  $\exp(X)$  to  $B$ -colored vertices of  $\exp(Y)$ .

Prenons un exemple : soit  $a$  et  $b$  deux paramètres formels, alors

$$\exp(\bullet_a) \cdot \exp(\bullet_b) = \exp(\bullet_a + \bullet_b + a \bullet \bullet_b + a \bullet \bullet_b + \frac{1}{2} a \bullet \bullet_b \bullet_a + \frac{1}{2} b \bullet \bullet_a \bullet_b + a \bullet \bullet_b + \dots).$$

On a  $s(X_A \times_B Y) = s(X)_A \times_B s(Y)$ .

**Définition 5.2.7.** — Soit  $(X, h)$  un diagramme dans  $\mathcal{S}(a)$ ,  $h(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ , et  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Notons  $a^r$  l'opérateur qui divise  $X$  par  $r^N$  où  $N$  est la somme des valences des  $a$ -sommets de  $X$ .

On a  $s(X, h)_{ra} = s(a^r X, h(rx))$ .

Le résultat principal de cette section est le suivant :

**Proposition 5.2.8.** — Il existe une série explicite de graphes de recollement  $X_{p,q}$  dont la substitution est  $\log(Z^{\boxtimes} (K_{p,q})(\Omega, \Omega))$ .

*Démonstration.* — Nous allons montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 0$ ,  $\omega^n = s(X^n)$  pour un certain  $X^n \in \mathcal{S}(P)$  où  $P = \{*\} \cup \{a, b, c\}$ . Le premier paramètre est actif et correspond à  $f(x)$ , les trois derniers paramètres sont inertes et correspondent à  $f(px)$ ,  $f(qx)$  et  $f(pqx)$ .

Premièrement, le diagramme  $\omega_{pq}^{-1}$  n'a que des pattes inertes, et est obtenu par substitution du graphe de recollement  $X_{pq}^{-1} = a^p b^q \bullet_a \times \bullet_b \in \mathcal{S}(a, b)$  où  $a$  et  $b$  sont respectivement associés à  $f(px)$  et  $f(qx)$ .

On commence la récurrence à  $n = 0$  en posant  $X^0 = \bullet_*$ . On a bien  $s(X^0) = \omega^0$ .

Prenons  $n \geq 0$  et supposons que l'on a construit  $X_k$  pour tout  $k \leq n$ . On pose alors  $X_{pq}^k = *^{pq} X^k |_{* \rightarrow c}$  pour tout  $0 \leq k \leq n$  de telle sorte qu'on a  $\omega_{pq}^k = s(X_{pq}^k)$  pour tout  $-1 \leq k \leq n$  où  $c$  est associé à  $f(pqx)$ .

On définit alors  $X^{n+1} = (X_{pq}^{n-1} - X_{pq}^n)_{a,b,c} \times_* X^n - (X_{pq}^{n-1} - X_{pq}^n)$ . Cette définition satisfait  $\omega^{n+1} = s(X^{n+1}) \in \mathcal{B}^c$ . Elle permet de construire récursivement les  $X^n$  de telle manière que l'on peut définir  $X_{p,q} = \lim_n (X_{pq}^{n-1} - X_{pq}^n)$ .

□

Pour illustrer la proposition ci-dessus, donnons la liste de tous les termes avec moins de deux arêtes. On utilise une notation supplémentaire pour donner une forme plus compacte. On permet aux arêtes d'être orientées et aux sommets d'être coloriés par des sommes d'entiers  $p, q$  et  $pq$ . Pour obtenir le résultat, on remplace un sommet  $\boxed{m+n}$  par  $f(mx)$  ou  $f(nx)$  pour avoir une somme de diagrammes coloriés par les entiers  $\{p, q, pq\}$ . On divise alors chaque diagramme de sommets  $x_1, \dots, x_n$  par le produit des couleurs de chaque  $x_i$  à la puissance le nombre d'arêtes incidentes au sommet correspondant qui ne sont pas dirigées vers lui.

Par exemple le diagramme  $\boxed{pq} \rightarrow \boxed{p} \leftarrow \boxed{q}$  est une expression graphique de  $\frac{1}{pq^2} c \bullet \rightarrow a \bullet \rightarrow b$ .

$$\begin{aligned} \omega_{pq}^{-1} &= \boxed{p} + \boxed{q} + \boxed{p} \leftarrow \boxed{q} + \boxed{p} = \boxed{q} + \frac{1}{2} \boxed{p} \leftarrow \boxed{q} \leftarrow \boxed{p} + \frac{1}{2} \boxed{q} \leftarrow \boxed{p} \leftarrow \boxed{q} + \text{termes avec } > 2 \text{ arêtes} \\ \omega^0 &= \boxed{1} \\ \omega^1 &= \boxed{1} + \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{1} + \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{1} + \frac{1}{2} \boxed{1} \rightarrow \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{1} + \frac{1}{2} \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{p+q-pq} \\ &\quad + \boxed{1} \rightarrow \boxed{p} \leftarrow \boxed{q} + \boxed{1} \rightarrow \boxed{q} \leftarrow \boxed{p} + \dots \\ \omega^2 &= \omega^1 - \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{pq} \leftarrow \boxed{1} - \boxed{1} \rightarrow \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{pq} + \dots \\ X_{p,q} &= \lim_n (\omega_{pq}^{-1} - \omega_{pq}^n) = \boxed{p} + \boxed{q} - \boxed{pq} + \boxed{p} \leftarrow \boxed{q} - \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{pq} + \boxed{p} = \boxed{q} - \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{pq} \\ &\quad + \frac{1}{2} \boxed{p} \leftarrow \boxed{q} \leftarrow \boxed{p} + \frac{1}{2} \boxed{q} \leftarrow \boxed{p} \leftarrow \boxed{q} - \frac{1}{2} \boxed{pq} \rightarrow \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{pq} - \frac{1}{2} \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{pq} \rightarrow \boxed{p+q-pq} \\ &\quad - \boxed{pq} \rightarrow \boxed{p} \leftarrow \boxed{q} - \boxed{pq} \rightarrow \boxed{q} \leftarrow \boxed{p} + \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{pq} \leftarrow \boxed{pq} + \boxed{pq} \rightarrow \boxed{p+q-pq} \leftarrow \boxed{pq} + \dots \end{aligned}$$

### 5.3. Rationalité

L'expression que nous avons trouvée jusqu'à présent n'est pas rationnelle. En essayant de trouver une telle forme, nous montrerons que toutes les expressions provenant des graphes non simplement connexes s'annulent. Par exemple, le graphe  $\boxed{p} = \boxed{q}$  ci-dessus n'apparaîtra pas dans l'expression finale de l'intégrale de Kontsevich déroulée des nœuds toriques.

**5.3.1. Diagrammes rationnels singuliers.** — Nous rappelons ici la définition des diagrammes singuliers, en donnant les analogues des diagrammes rationnels construits comme dans la définition 5.1.

Posons  $F^{rat}(H) = S^{-1}\mathbb{Q}[\exp(H)]$  où  $\mathbb{Q}[\exp(H)]$  est la sous-algèbre de  $\mathbb{Q}[[H]]$  engendrée par les  $\exp(h)$  pour  $h \in H$  et  $S = \{P_1(e^{h_1}) \cdots P_k(e^{h_k}), P_1(1) \cdots P_k(1) \neq 0\}$ .

Puis  $F_s^{rat}(H) = S^{-1}\mathbb{Q}[\exp(H)]$  où  $S$  est formé cette fois de toutes les expressions non nulles de la forme  $P_1(e^{h_1}) \cdots P_k(e^{h_k})$ .

On pose  $\mathcal{B}^{rat} = \mathcal{D}(F^{rat})$  et  $\mathcal{B}_s^{rat} = \mathcal{D}(F_s^{rat})$ . Il y a des applications naturelles entre ces espaces qui sont résumées dans le diagramme suivant. Les applications Hair sont induites par le développement de Taylor.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^{rat} & \longrightarrow & \mathcal{B}_s^{rat} \\ \downarrow \text{Hair} & & \downarrow \text{Hair} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}_s \end{array}$$

**Remarque 5.3.1.** — Toutes les applications sauf  $\mathcal{B}^{rat} \rightarrow \mathcal{B}_s^{rat}$  ne sont pas injectives à cause du diviseur de 0 mis en évidence par P. Vogel. Pour cette dernière application, on ne sait rien montrer. Il serait intéressant que cette application soit injective.

Toutes ces constructions expliquent l'intérêt de la définition 5.1. Dans l'article [Marc04], on utilisait la construction du chapitre 4 avec l'algèbre  $\mathbb{Q}[[h]][[h^{-1}]]$ . Cette construction n'était pas judicieuse car l'application des diagrammes non singuliers vers les diagrammes singuliers n'est pas injective même en petit degré comme le montre l'identité suivante :

$$-\bigcirc-\bigcirc- = -\bigcirc \begin{array}{c} \frac{1}{h}h \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \bigcirc- = 0.$$

C'est pour éviter un tel problème que nous avons introduit la nouvelle construction des diagrammes singuliers. Dans cette nouvelle construction, on ne peut plus inverser des pattes cohomologues à 0.

**5.3.2. Une formule pour l'application de substitution.** — Soit  $X$  un graphe de recollement de sommets  $x_1, \dots, x_N$  associés aux séries  $f_1, \dots, f_n$ . Le but de cette partie est de donner une formule explicite pour  $s(X) \in \mathcal{B}_s$ .

Pour calculer  $s(X)$ , on doit pour chaque sommet  $x$  recoller les arêtes incidentes à ce sommet aux roues engendrées par  $f(x)$ . Ainsi, on peut choisir un ordre cyclique autour de chaque sommet, calculer tous les recollements qui respectent cet ordre, puis faire la somme sur tous les ordres.

Fixons donc un ordre  $e_1^x, \dots, e_{k_x}^x$  sur les arêtes incidentes au sommet  $x$ . Soit  $\Gamma$  le graphe trivalent obtenu en remplaçant  $x$  par un cercle attaché aux arêtes dans l'ordre prescrit. Soit  $H = H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ . Fixons l'ordre  $n_x$  de la roue de  $f(x)$  que l'on recolle en  $x$ . On écrit  $x_1, \dots, x_{k_x}$  les éléments de  $H$  représentés par les arêtes orientées reliant  $e_1$  à  $e_2, \dots, e_{k_x}$  à  $e_1$  (voir figure 3).

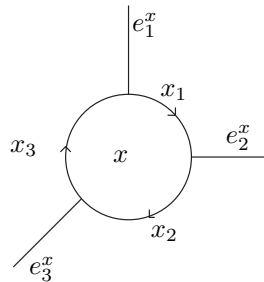


FIGURE 3. Diagramme obtenu par substitution au sommet  $x$

En premier, on recolle l'arête  $e_1$  à n'importe quelle patte, ce qui nous donne un facteur  $n_x$ .

Tous les recollements sont énumérés dans la formule suivante :

$$(12) \quad \sum_{\text{ordres}, x} n_x \sum_{i_1 + \dots + i_{k_x} = n_x - k_x} x_1^{i_1} \dots x_{k_x}^{i_{k_x}}.$$

On propose maintenant un algorithme pour “réduire cette expression”.

Supposons qu’il existe deux indices  $l$  et  $m$  tels que  $x_l \neq x_m \in H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ , on écrit  $i_{lm} = i_l + i_m$ . La somme  $\sum_{i_1 + \dots + i_{k_x} = n_x - k_x} x_1^{i_1} \cdots x_{k_x}^{i_{k_x}}$  peut être remplacée par la somme

$$\sum_{i_1 + \dots + \widehat{i_l} + \dots + \widehat{i_m} + \dots + i_{k_x} + i_{lm} = n_x - k_x} x_1^{i_1} \cdots \widehat{x_l^{i_l}} \cdots \widehat{x_m^{i_m}} \cdots x_{k_x}^{i_{k_x}} \frac{x_l^{i_{lm}} - x_m^{i_{lm}}}{x_l - x_m} \in (H \setminus \{0\})^{-1} \mathbb{Q}[[H]]$$

Ceci est une différence de deux sommes de la même forme mais dont chaque terme est maintenant un produit de  $k_x - 1$  monômes avec un dénominateur de degré 1. On observe que la somme des exposants des monômes de chaque terme est inchangé et égal à  $n_x - k_x$ . On peut continuer ainsi la réduction pour chaque somme obtenue ainsi un certain nombre de fois (pas le même pour toutes). L’algorithme s’arrête si toutes les classes de cohomologie présentes dans le terme d’une somme sont égales.

Supposons qu’une expression a été obtenue à partir de (12) au bout de  $p_x$  réductions. Alors cette expression est une somme de termes identiquement égaux à une classe de cohomologie  $y$  à la puissance  $n_x - k_x$  et divisé par un produit de  $p_x$  éléments de  $H \setminus \{0\}$ . Il y a autant de termes que de  $(k_x - p_x)$ -uplets de somme  $n_x - k_x$ , soit  $\binom{n_x - p_x - 1}{k_x - p_x - 1}$ . On conclut qu’un terme réduit est de la forme

$$\frac{\binom{n_x - p_x - 1}{k_x - p_x - 1} y^{n_x - k_x}}{D_x}$$

où  $D_x$  est un produit de  $p_x$  éléments de  $H \setminus \{0\}$ .

On conclut le calcul précédent de la manière suivante.

**Proposition 5.3.2.** — Soit  $X$  un graphe de recollement associé aux séries  $f_1, \dots, f_N$ , sa substitution est une combinaison finie de diagrammes obtenus en recollant les arêtes sur des cercles et en coloriant le graphe résultant par des expressions de la forme  $(\frac{f_i(y)}{y^p})^{(k-p)}/D$  où  $y$  est une classe de cohomologie non nulle,  $p$  et  $k$  sont deux entiers et  $D$  est un produit de  $p$  termes linéaires.

**5.3.3. Application à l’intégrale des nœuds toriques.** — On rappelle que dans [GK04a], l’invariant  $Z^{\text{rat}\boxtimes}$  est défini par Hair  $Z^{\text{rat}\boxtimes}(K) = \langle \Omega, \Omega \rangle Z^{\boxtimes}(K)$  pour tout nœud  $K$ .

Notre but serait de calculer  $Z^{\text{rat}\boxtimes}(K_{p,q})$  mais nous n’avons d’information que sur son image par l’application Hair. Ainsi nous aurons une ambiguïté due au noyau de l’application Hair. On a montré que  $\langle \Omega, \Omega \rangle Z^{\boxtimes}(K) = s(X_{p,q})$ . On peut donc appliquer les résultats de la section précédente à  $X_{p,q}$ . On rappelle que  $X_{p,q}$  est un graphe de recollement dont les séries formelles attachées aux sommets sont soit  $f(px)$ , soit  $f(qx)$ , soit  $f(pqx)$ , où  $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{\sinh(x/2)}{x/2}$ . On calcule  $f'(x) = \frac{1}{4} \coth x/2 - \frac{1}{2x}$ .

Grâce à la proposition 5.3.2, on conclut que  $s(X_{p,q})$  est obtenue en décorant un graphe par des expressions de la forme  $g(\exp(h))/D$  où  $g \in \mathbb{Q}(t)$ ,  $h \in H$  et  $D$  est un polynôme homogène en  $H$ .

Il est donc naturel de définir l’espace suivant :

Soit  $H$  un groupe abélien libre et de rang fini. On note  $G(H)$  l’image de  $S^{-1} \mathbb{Q}[\exp(H)] \otimes (H \setminus \{0\})^{-1} \mathbb{Q}[[H]]$  dans  $(H \setminus \{0\})^{-1} \mathbb{Q}[[H]]$ . C’est encore un  $\mathcal{C}$ -module, ce qui nous permet de définir l’espace de diagrammes  $\mathcal{B}' = \mathcal{D}(G)$ .

**Lemme 5.3.3.** — L'application  $S^{-1}\mathbb{Q}[\exp(H)] \otimes (H \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Q}[H] \rightarrow G(H)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{C}$ -modules. On définit le degré de  $\frac{P}{Q} \in (H \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Q}[H]$  par  $\deg(\frac{P}{Q}) = \deg(P) - \deg(Q)$ . Ce degré s'étend à  $G(H)$  puis à  $\mathcal{B}'$ .

Bien sûr d'après le théorème de rationalité (voir [GK04b]), on sait que  $Z^{\boxtimes}(K_{p,q})$  est dans l'image de  $\mathcal{B}^{rat}$  par l'application Hair. Ainsi,  $\text{Hair } Z^{rat\boxtimes}(K_{p,q})$  est dans la partie de degré 0 de  $\mathcal{B}'$ .

Cependant dans le processus de substitution d'un graphe, on ajoute des dénominateurs à moins que chaque arête du graphe soit homologue à 0. De la même manière, tous les termes contenant des fractions dans les dérivées de  $f(px)$ ,  $f(qx)$  et  $f(pqx)$  auront un degré négatif.

**Définition 5.3.4.** — On définit le graphe de recollement  $Y_{p,q}$  comme la partie arborescente de  $X_{p,q}$  décorée par les séries  $\frac{1}{2} \log \sinh(px/2)$ ,  $\frac{1}{2} \log \sinh(qx/2)$  et  $\frac{1}{2} \log \sinh(pqx/2)$  au lieu de  $f(px)$ ,  $f(qx)$  et  $f(pqx)$ .

Ce graphe contient exactement tous les termes de degré 0 dans  $\mathcal{B}'$  après substitution, ce qui nous permet de conclure que  $s(Y_{p,q}) = s(X_{p,q}) = \text{Hair } z^{rat\boxtimes}(K_{p,q})$ .

**Théorème 5.3.5.** — A partir de  $Y_{p,q}$ , on définit un diagramme  $Y_{p,q}^{rat}$  dans  $\mathcal{B}_s^{rat}$  de la manière suivante : pour chaque sommet de  $Y_{p,q}$  de valence  $k$  décoré par une expression de la forme  $g(\exp(x))$ , on remplace le sommet par un cercle, on recolle les arêtes dans un ordre arbitraire et décore le cercle par la  $k$ -ième dérivée de  $g(\exp(x))$  qui dans notre cas est bien une expression rationnelle en  $\exp(x)$ .

On a alors  $\text{Hair } z^{rat\boxtimes}(K_{p,q}) = \text{Hair } Y_{p,q}^{rat}$ .

**Question 5.3.6.** — A-t-on  $z^{rat\boxtimes}(K_{p,q}) = Y_{p,q}^{rat}$  ?

## 5.4. Revêtements ramifiés

L'un des principaux intérêts de l'expression rationnelle de l'intégrale de Kontsevich réside dans sa relation avec les revêtements ramifiés. Plus précisément, si  $K_{p,q}$  est un nœud torique de paramètres  $p$  et  $q$ , et  $r$  est un entier, notons  $\Sigma^r(K_{p,q})$  la paire formée par le revêtement cyclique d'ordre  $r$  sur  $S^3$  ramifié sur  $K_{p,q}$  et le lieu de ramification.

Si  $r$  est premier avec  $p$  et  $q$ , le lieu de ramification est un nœud, et la 3-variété sous-jacente est une sphère d'homologie entière, la sphère de Brieskorn  $\Sigma(p, q, r)$ .

On rappelle la formule qui relie l'application  $\text{Lift}_r$  aux revêtements ramifiés.

$$Z^{\boxtimes rat}(\Sigma^r(K)) = \exp\left(\frac{\sigma_r(K)}{16}\right) \ominus \text{Lift}_r Z^{\boxtimes rat}(K).$$

**5.4.1. Action de l'opérateur  $\text{Lift}_r$ .** — On étudie l'action de cette application sur la série  $Y_{p,q}^{rat}$  associée aux nœuds toriques.

**Proposition 5.4.1.** — Soit  $\Pi_r$  l'opérateur sur  $\mathcal{B}_s^{rat}$  qui multiplie tout diagramme  $D$  par  $r^{-\chi(D)}$  ou  $\chi$  est la caractéristique d'Euler. On a

$$\text{Lift}_r Y_{p,q}^{rat} = \Pi_r Y_{p,q}^{rat}$$

*Démonstration.* — On utilise ici l'application  $\text{Lift}_r$  telle qu'on l'a décrite dans le chapitre 4. Vue la forme très particulière du diagramme  $Y_{p,q}^{\text{rat}}$ , il suffit de déterminer l'action de  $\text{Lift}_r$  sur chaque cercle.

Soit  $n \in \{p, q, pq\}$  et  $h(t) = \frac{t^n+1}{t^n-1} \in \mathbb{Q}(t)$ . L'opérateur  $\text{Lift}_r$  et l'opérateur de dérivation  $Dg(t) = tg'(t)$  agissent sur  $\mathbb{Q}(t)$ .

Or ces deux opérateurs ont une expression plus simple si on plonge  $\mathbb{Q}(t)$  dans  $\mathbb{Q}[[t]][t^{-1}]$ .

Il est donc naturel de développer  $h(t) = -1 - 2 \sum_{k \geq 1} t^{nk}$ . Cette expression montre que  $\text{Lift}_r h(t) = -1 - 2 \sum_{k \geq 1, r|nk} t^{nk/r} = h(t)$  car  $n$  et  $r$  sont premiers entre eux. On a de plus pour tout  $i > 0$ ,  $D^i h(t) = -2 \sum_{k \geq 1} (nk)^i t^{nk}$ . On vérifie donc que  $\text{Lift}_r D^i h(t) = -2 \sum_{k \geq 1, r|nk} (nk)^i t^{nk/r} = r^i D^i h(t)$ .

Ceci prouve finalement que  $\text{Lift}_r$  agit sur un diagramme de  $Y_{p,q}^{\text{rat}}$  par multiplication par  $r$  à la puissance  $1 + \sum_i (v_i - 1)$  où  $v_i$  est la valence du  $i$ -ème sommet. Cette expression est égale au nombre de sommets du diagramme moins 1, soit le nombre de boucles -1. Ceci termine la preuve de la proposition.  $\square$

Bien sûr, on n'a pas prouvé que  $\text{Lift}_r z^{\text{rat}\boxtimes}(K_{p,q}) = \Pi_r z^{\text{rat}\boxtimes}(K_{p,q})$  ce qui serait vraiment intéressant car cela nous donnerait des formules explicites pour tous les revêtements cycliques des nœuds toriques.

**5.4.2. Application aux invariants des sphères de Brieskorn.** — L'invariant LMO de  $\Sigma(p, q, r)$  n'est que la partie fermée de  $\sigma Z(\Sigma^r(K_{p,q}))$  i.e.  $\langle Z^{\boxtimes}(\Sigma^r(K_{p,q})), \Omega \rangle$ . Utilisant l'application  $\text{Lift}$  on a la formule suivante :

$$\text{LMO}(\Sigma(p, q, r)) = \exp\left(\frac{\sigma_r(K)}{16} \ominus\right) \frac{\langle \text{Lift}_r Z^{\boxtimes \text{rat}}(K_{p,q}), \Omega \rangle}{\langle \Omega, \Omega \rangle}.$$

À partir de la formule calculant la partie à une boucle des nœuds toriques, on trouve que  $\text{Hair } Z^{\boxtimes \text{rat}}(K_{p,q}) = \exp\left(\frac{p^2+q^2-p^2q^2}{48} \ominus + \alpha \ominus_2 + \text{deg} > 2\right)$ .

On doit avoir,  $\langle Z^{\boxtimes \text{rat}}(K_{p,q}), \Omega \rangle = \langle \Omega, \Omega \rangle$  car  $\text{LMO}(\Sigma(p, q, 1)) = \text{LMO}(S^3) = 1$ .

On calcule  $\langle \frac{p^2+q^2-p^2q^2}{48} \ominus, \frac{1}{48} \ominus \rangle = \exp\left(\frac{p^2+q^2-p^2q^2}{1152} \ominus_2\right)$ . Puis  $\langle \Omega, \Omega \rangle = \exp\left(\frac{1}{1152} \ominus_2 + \text{deg} > 2\right)$  On en déduit que  $\alpha$  est égal à  $\frac{p^2q^2-p^2-q^2+1}{1152}$ .

A partir de cette formule, on prouve que le terme de degré 2 de  $\text{LMO}(\Sigma(p, q, r))$  est  $\frac{(p^2-1)(q^2-1)(r^2-1)}{1152} \ominus_2$ .

Utilisant le calcul explicite du terme à deux boucles du nœud torique, on en déduit que le coefficient de  $-\bigcirc-\bigcirc-$  dans  $Z^{\boxtimes}(K_{p,q})$  est  $\frac{pq(p^2-1)(q^2-1)}{576}$ . Ceci nous permet de déduire que le degré 3 vaut  $\text{LMO}(\Sigma(p, q, r))_3 = \frac{-pqr(p^2-1)(q^2-1)(r^2-1)}{13824} \ominus_3$ .

Ces calculs coïncident avec les formules pour l'invariant LMO des variétés de Seifert que l'on trouve dans [BN95] et [Mari]. Cependant, on ne connaît pas de moyen d'extraire le développement complet de  $\text{LMO}(\Sigma(p, q, r))$ .

## CHAPITRE 6

### L'INTÉGRALE RATIONNELLE EN DEGRÉ 2

#### 6.1. Généralités sur la partie à deux boucles de l'intégrale de Kontsevich

Dans cette dernière partie, on s'intéresse à la partie à deux boucles de l'intégrale rationnelle d'un nœud  $K$  homologue à 0 dans une sphère d'homologie rationnelle  $M$ . Cet invariant ne dépend pas du choix du facteur  $\alpha$  de normalisation, en particulier  $z_2^{\text{rat}\boxtimes}(M, K) = z_2^{\text{rat}}(M, K)$ . Ce n'est plus le cas dès le degré en boucles 3.

Soit  $\Delta = \Delta(M, K)$  le polynôme d'Alexander de la paire  $(M, K)$  normalisé de telle sorte que  $\Delta(t^{-1}) = \Delta(t)$  et  $\Delta(1) = 1$ . Par construction,  $z_2^{\text{rat}}(M, K)$  est une combinaison linéaire des graphes  $\circ\circ$  et  $\ominus$  où chaque arête est coloriée par un élément de la forme  $\frac{P}{\Delta}$  où  $P \in \Lambda$ .

On peut construire un espace de diagrammes qui contient exactement ces éléments en déclarant que l'on décore un diagramme par un module (et non plus une algèbre) sur une algèbre de Hopf, et en s'assurant que chaque arête porte exactement une décoration.

Plus précisément, on définit l'espace des diagrammes coloriés par un module avec involution et unité sur une algèbre de Hopf de la façon suivante :

*Définition 6.1.1.* — Soit  $k$  un anneau et  $(E, H)$  une paire formée d'une  $k$ -algèbre de Hopf co-commutative et d'un  $H$ -module  $E$  avec involution, muni d'un élément  $1_E$  appelé unité. On définit alors l'espace  $\mathcal{D}(E)$  des diagrammes coloriés par  $(E, H)$ . Ce dernier est engendré par les diagrammes trivalents dont chaque arête est coloriée par un élément de  $E$ . Les relations sont les relations usuelles, excepté qu'une relation  $(IHX)$  ne peut avoir lieu que sur une arête coloriée par  $1_E$ .

Si on prend  $k = \mathbb{Q}$ ,  $H = \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$  et  $E = \{\frac{P}{\Delta}, P \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]\}$ , on obtient un espace de diagrammes plus "petit" que  $\mathcal{D}(\Lambda_{loc})$  auquel  $z(M, K)$  appartient. Notons  $\mathcal{A}^\Delta$  cet espace de diagrammes que l'on appellera espace de diagrammes de dénominateurs  $\Delta$ .

*Proposition 6.1.2.* — L'espace  $\mathcal{A}_2^\Delta$  des diagrammes de dénominateur  $\Delta$  à deux boucles est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à  $\mathbb{Q}[H^1(\ominus)]_{\text{Aut}(\ominus)}$ . De plus, l'application  $\text{Hair} : \mathcal{A}_2^\Delta \rightarrow \mathcal{B}$  est injective.

*Démonstration.* — Pour un diagramme  $D$  trivalent orienté fixé, on note  $\mathcal{A}^\Delta(D)$  l'espace vectoriel de ses coloriages de dénominateur  $\Delta$ , c'est-à-dire un produit tensoriel de copies de  $E$  pour chaque arête quotienté par les relations de glissement. Le groupe d'automorphisme de  $D$  agit sur  $\mathcal{A}^\Delta(D)$  (en changeant le signe à chaque fois que l'orientation d'un sommet est changée). On note  $\mathcal{A}^\Delta(D)^{\text{Aut}(D)}$  les coinvariants sous cette action. Il est clair que  $\mathcal{A}_2^\Delta = \mathcal{A}^\Delta(\ominus)^{\text{Aut}(\ominus)} \oplus \mathcal{A}^\Delta(\circ\circ)^{\text{Aut}(\circ\circ)}/(IHX)$  car les seuls diagrammes de degré 2 sont  $\circ\circ$  et  $\ominus$ .

Soit  $i$  l'application suivante induite par l'inclusion :

$$\mathcal{A}^\Delta(\Theta)^{Aut(\Theta)} \longrightarrow \mathcal{A}^\Delta(\Theta)^{Aut(\Theta)} \oplus \mathcal{A}^\Delta(\circ\circ)^{Aut(\circ\circ)} / (IHX) .$$

On veut montrer que c'est un isomorphisme. Pour cela, on définit une rétraction  $\varphi$  par l'identité sur la composante  $\mathcal{A}^\Delta(\Theta)^{Aut(\Theta)}$  et sur  $\mathcal{A}^\Delta(\circ\circ)^{Aut(\circ\circ)}$  de la façon suivante.

Soit  $D$  le diagramme  $\frac{P}{\Delta} \overset{\bar{R}}{\circ} \circ \frac{Q}{\Delta} \in \mathcal{A}^\Delta(\circ\circ)$ . On peut écrire  $\frac{R}{\Delta} = R(1) + \frac{R-R(1)\Delta}{\Delta} = R(1) + \frac{(t-1)R'}{\Delta}$  pour un certain  $R' \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ .

Une application de la relation de glissement montre qu'un diagramme  $\circ\circ$  contenant  $t-1$  sur son arête centrale est nécessairement nul dans  $\mathcal{A}^\Delta(\circ\circ)$ .

On peut donc supposer que l'arête centrale de  $D$  n'est pas coloriée. Il y a une relation (IHX) qui identifie ce diagramme avec un élément de  $\mathcal{A}^\Delta(\Theta)$ , ce qui donne dans  $\mathcal{A}_2^\Delta$  la relation :

$$(13) \quad \frac{P}{\Delta} \circ \circ \frac{Q}{\Delta} = \theta\left(\frac{P}{\Delta}, \frac{\bar{Q}-Q}{\Delta}\right).$$

Dans cette équation,  $\theta\left(\frac{P}{\Delta}, \frac{Q}{\Delta}, \frac{R}{\Delta}\right)$  désigne un graphe  $\Theta$  dont les trois arêtes sont coloriées par  $\frac{P}{\Delta}$ ,  $\frac{Q}{\Delta}$  et  $\frac{R}{\Delta}$ . Si on omet un argument, l'arête manquante n'est pas coloriée.

Si on suppose qu'une arête de  $\Theta$  n'est pas coloriée et qu'on lui applique une relation (IHX), on retrouve exactement la relation (13). On peut donc considérer que la seule relation de type (IHX) est la relation (13) qui identifie tout diagramme de  $\mathcal{A}^\Delta(\circ\circ)$  à un diagramme de  $\mathcal{A}^\Delta(\Theta)$ .

On pose alors  $\varphi\left(\frac{P}{\Delta} \circ \circ \frac{Q}{\Delta}\right) = \theta\left(\frac{P}{\Delta}, \frac{\bar{Q}-Q}{\Delta}\right)$ . Cette application respecte les relations (IHX) par définition. On vérifie aisément qu'elle induit une application au niveau des coinvariants. L'existence de cette rétraction prouve que  $i$  est un isomorphisme. On peut donc remplacer  $\mathcal{A}_2^\Delta$  par  $\mathcal{A}^\Delta(\Theta)^{Aut(\Theta)}$ .

On identifie maintenant  $\mathcal{A}^\Delta(\Theta)^{Aut(\Theta)}$  et  $\mathbb{Q}[H^1(\Theta)]_{Aut(\Theta)}$  de la façon suivante.

Supposons que  $x = \sum_i \frac{P_i}{\Delta} \otimes \frac{Q_i}{\Delta} \otimes \frac{R_i}{\Delta} \in \mathcal{A}^\Delta(\Theta)$ . On note  $\bar{x} = \sum_i \sum_{\tau \in \mathbb{Z}/2 \times S_3} \tau.(P_i \otimes Q_i \otimes R_i) \in \mathbb{Q}[H^1(\Theta, \mathbb{Z})]_{Aut(\Theta)}$ . Cette application est clairement un isomorphisme.

Prouvons maintenant l'injectivité de l'application Hair sur  $\mathcal{A}_2^\Delta$ . L'application Hair correspond à la substitution  $t \mapsto \exp(h)$ . Il suffit de voir que Hair est injective sur  $\mathcal{A}^\Delta(\Theta)^{Aut(\Theta)}$ . Par symétrisation et multiplication par  $\Delta^{\otimes 3}$ , il suffit de voir que l'application Hair :  $\mathbb{Q}[H^1(\Theta, \mathbb{Z})] \rightarrow \mathbb{Q}[[H^1(\Theta, \mathbb{Z})]]$  est injective. Or  $H^1(\Theta, \mathbb{Z})$  est un module libre à deux générateurs  $a$  et  $b$  et comme  $\exp(a)$  et  $\exp(b)$  sont algébriquement indépendants dans  $\mathbb{Q}[[a, b]]$ , l'application ci-dessus est nécessairement injective. □

Tout monôme de  $\mathbb{Q}[H^1(\Theta)]$  est équivalent modulo l'action du groupe  $Aut(\Theta)$  à un monôme de la forme  $\theta(t^m, t^n)$  où  $m$  et  $n$  vérifient  $0 \leq 2n \leq m$ . De plus, deux tels monômes ne sont pas équivalents entre eux. On peut donc écrire de manière unique le polynôme  $\overline{z_2^{\text{rat}}}(M, K)$  comme une combinaison de ces monômes symétrisés, ce qui permet de donner des formules plus concises. Cette construction est très proche de la construction proposée initialement par L. Rozansky dans [Roz03]. Elle diffère pourtant légèrement : dans l'article de L. Rozansky, le coefficient de  $s^m t^n$  est égal au coefficient du monôme correspondant dans  $\overline{z_2^{\text{rat}}}(M, K)$ .

On note  $s^m t^n = \overline{\theta(t^m, t^n)}$  et on appelle  $m$  son degré. L. Rozansky a proposé les deux conjectures suivantes dans le cas où  $M = S^3$ .



1. Soit  $g(K)$  le genre de  $K$  (c'est-à-dire le genre minimal d'une surface de Seifert de  $K$ ). Alors l'inégalité  $\deg z_2^{\text{rat}}(M, K) \leq 2g(K)$  est vérifiée.
2. L'expression  $z_2^{\text{rat}}(S^3, K)$  est une combinaison des polynômes  $s^m t^n$  à coefficients demi-entiers si  $n = 0$  ou  $m = 2n$ , et entiers si  $0 < 2n < m$ .

Pour reformuler cette conjecture, on introduit la définition suivante :

**Définition 6.1.3.** — Soit  $k = \mathbb{Z}$ ,  $H = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  et  $E = \{\frac{P}{\Delta}, P \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]\}$ . On définit l'espace  $\mathcal{I}^\Delta$  comme l'image de  $\mathcal{D}(E)$  dans  $\mathcal{A}^\Delta$ . On appellera diagrammes entiers les éléments de  $\mathcal{I}^\Delta$ .

La conjecture de L. Rozansky est très proche de la conjecture suivante : pour tout nœud  $K$  dans une sphère d'homologie entière  $M$ , on a  $z_2^{\text{rat}}(M, K) \in \frac{1}{2}\mathcal{I}_2^\Delta$ . Dans la section 6.3, on prouve la propriété plus faible  $z_2^{\text{rat}}(M, K) \in \frac{1}{12}\mathcal{I}_2^\Delta$  et on propose une méthode pour prouver ou contredire la conjecture de Rozansky.

### 6.2. Une formule de chirurgie

Soit  $(M, K)$  une paire formée d'un nœud homologue à 0 dans une sphère d'homologie rationnelle et  $\Gamma$  un graphe en bande trivalent dans le complémentaire de  $K$ . On définit la série de diagrammes  $Z_\alpha^{\text{rat}}((M, K), \Gamma)$  de la façon suivante : soit  $L$  un entrelacs en tranche présentant  $(M, K)$  dans le tore plein  $\text{Tp}$  et  $\Gamma'$  l'image de  $\Gamma$  dans  $\text{Tp} \setminus L$ . On définit

$$Z_\alpha^{\text{rat}}((M, K), \Gamma) = \frac{\int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{L} \cup \Gamma', \text{Tp}) dL}{(\int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{U}^1, \text{Tp}) dU^1)^{\sigma^+(L)} (\int^{\text{rat}} Z_\alpha(\widehat{U}^{-1}, \text{Tp}) dU^{-1})^{\sigma^-(L)}}.$$

Le théorème de Fubini implique que si  $\Gamma$  est un entrelacs dans  $M \setminus K$  homologue à 0 dont la matrice d'enlacement est inversible sur  $\mathbb{Q}$ , alors la série  $Z_\alpha^{\text{rat}}((M, K), \Gamma)$  est égale à l'intégrale  $\int^{\text{rat}} Z_\alpha^{\text{rat}}((M, K), \widehat{\Gamma}) d\Gamma / N$  où  $N$  est la normalisation habituelle dépendant de la matrice d'enlacement de  $\Gamma$ .

Dans ce qui suit, nous allons utiliser ce fait pour proposer une formule qui décrit l'action d'une chirurgie sur un clasper simple au niveau du terme à deux boucles.

Soit  $\Gamma$  le graphe en bande trivalent de la figure 6 du chapitre 4. Donnons nous un plongement homologue à 0 de ce graphe dans  $M \setminus K$ . Alors la quantité  $Z_\alpha^{\text{rat}}((M, K), \Gamma)$  est bien définie dans  $\mathcal{A}(\Gamma, \Lambda_{loc})$ . Considérons l'application  $\varphi : \mathcal{A}(\Gamma, \Lambda_{loc}) \rightarrow \mathcal{A}(\Gamma, \Lambda_{loc})$  induite par l'inclusion des feuilles. Elle est clairement surjective.

On définit alors  $\mu(\Gamma)$  de la manière suivante : on choisit un élément  $X$  de type groupe dans  $\mathcal{A}(\Gamma, \Lambda_{loc})$  vérifiant  $\varphi(X) = Z_\alpha^{\text{rat}}((M, K), \Gamma)$ , puis on applique  $\sigma$  aux trois composantes de  $X$ . Considérons les diagrammes de  $X$  de degré 2 qui n'ont qu'un sommet trivalent et une seule patte qui s'appuie sur chaque feuille. En écrasant chaque feuille on obtient un élément de degré 2 que l'on note  $\mu(\Gamma)$  (voir figure 1).

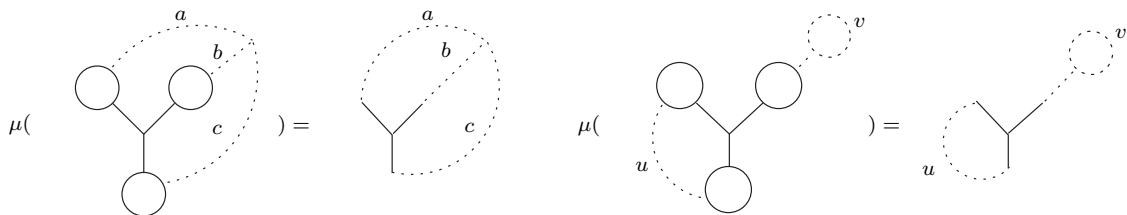


FIGURE 1. L'application  $\mu$

**Lemme 6.2.1.** — L'application  $\mu : \mathcal{A}(\Gamma, \Lambda_{loc}) \rightarrow \mathcal{A}_2(\Lambda_{loc})$  est bien définie.

*Démonstration.* — Il est clair que tous les diagrammes de  $\mathcal{A}(\Gamma, \Lambda_{loc})$  contribuant à  $\mu(\Gamma)$  sont représentés sur la figure 1.

L'ambiguïté provient du choix de l'antécédent par  $\varphi$ . Deux tels choix sont reliés par le glissement d'un sommet monovalent pointillé à travers les feuilles de  $\Gamma$ . Après avoir écrasé chaque feuille, on interprète ce mouvement comme un glissement au niveau du graphe à deux boucles. Cela prouve que  $\mu$  est bien définie comme application de  $\mathcal{A}(\Gamma, \Lambda_{loc})$  dans  $\mathcal{A}_2(\Lambda_{loc})$ . □

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

**Proposition 6.2.2.** — Soit  $(M, K)$  une paire formée d'un nœud homologue à 0 dans une sphère d'homologie rationnelle et  $\Gamma$  un clasper simple et homologue à 0 dans  $M \setminus K$ . Soit  $\Gamma'$  un clasper parallèle à  $\Gamma$  (poussé dans la direction normale à  $\Gamma$ ).

On a :

$$z_2^{\text{rat}}((M, K)^\Gamma) - z_2^{\text{rat}}(M, K) = \frac{1}{2} \langle (M, K), \Gamma \cup \Gamma' \rangle + \mu(\Gamma).$$

*Démonstration.* — Soit  $L$  un entrelacs dans le tore plein  $\text{Tp}$  qui représente la paire  $(M, K)$ .

Soit  $\mathcal{G} = \{F_1, F_2, F_3, A_1, A_2, A_3\}$  l'entrelacs à 6 composantes présenté par  $\Gamma$  dans  $\text{Tp} \setminus L$  (voir figure 2). Les composantes  $F_i$  sont les feuilles et les composantes  $A_i$  les anses correspondantes. On appelle  $B_i = F_i \cup A_i$  les bras du clasper  $\Gamma$ . Notre but est de déterminer  $z_2^{\text{rat}}([(M, K), G])$ .

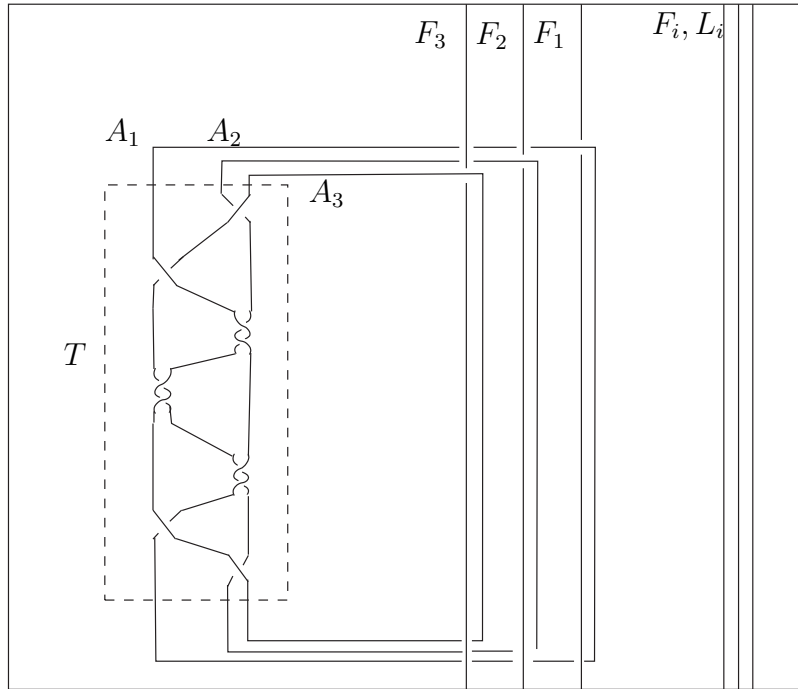


FIGURE 2. Entrelacs de chirurgie

Si on fait une chirurgie sur une partie stricte de  $B_1, B_2, B_3$ , on ne modifie pas le couple  $(M, K)$ . Ceci est une propriété fondamentale de la chirurgie borroméenne. On peut écrire  $[(M, K), B_1 \cup B_2 \cup B_3] = \sum_{I \subset \{1,2,3\}} (-1)^{|I|} (M, K)^{B_I} = (M, K)^G - (M, K)$ .

On en déduit que  $Z^{\text{rat}}((M, K)^G) - Z^{\text{rat}}(M, K) = \sum_{I \subset \{1,2,3\}} (-1)^I \int^{\text{rat}} \sigma Z(\widehat{B}_I \cup \widehat{L}, \text{Tp}) dL dB_I$ .

Ceci se traduit par le fait que dans  $\int^{\text{rat}} \sigma Z(\widehat{B}_1 \cup \widehat{B}_2 \cup \widehat{B}_3 \cup \widehat{L}, \text{Tp}) dL$ , tous les diagrammes qui ne sont pas reliés aux trois composantes  $B_1, B_2$  et  $B_3$  disparaissent après intégration. Les diagrammes produisant un terme à deux boucles sont énumérés dans la figure suivante :

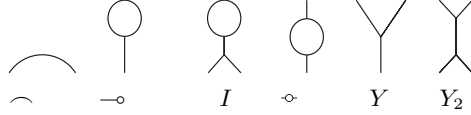


FIGURE 3. Diagrammes produisant des termes à deux boucles

On peut donc négliger les diagrammes qui ont 2 sommets monovalents et 2 sommets trivalents. Il ne reste plus que les diagrammes en  $-\circ$  et  $Y$  et  $Y_2$ .

On effectue un calcul explicite de ces contributions à partir de la présentation en enchevêtrement de la figure 2. Ce calcul n'est pas immédiat car il utilise une expression explicite de l'intégrale  $Z(T)$ .

Précisons ce dernier calcul. Soit  $a \in \mathcal{A}(\|\|)$  le diagramme représenté par une arête qui relie les deux premiers intervalles avec des orientations parallèles et  $b$  le diagramme représenté par l'arête qui relie les deux derniers intervalles avec des orientations parallèles. On effectue un calcul de  $Z(T)$  modulo les diagrammes connexes de degré au moins 4. Par parité de l'associateur  $\Phi$ , on a  $\Phi \equiv \exp([a, b]/24)$ .

On utilise alors le logiciel Maple pour calculer  $Z(T)$  dans l'algèbre des séries formelles non commutatives en  $a$  et  $b$ .

$$\begin{aligned} Z(T) &= \exp(-b/2) \exp([a, b]/24) \exp(a/2) \exp(-[a, b]/24) \exp(b) \exp([a, b]/24) \exp(-a) \\ &\quad \exp(-[a, b]/24) \exp(-b) \exp([a, b]/24) \exp(a/2) \exp(-[a, b]/24) \exp(b/2) \\ &= \exp([a, b]) \end{aligned}$$

C'est la simplicité de cette expression qui a motivé ce choix de  $T$ . On aurait pu le présenter plus simplement, mais alors, il y aurait eu des arbres avec deux sommets trivalents, ce qu'on veut éviter. On en déduit l'expression suivante après intégration sur  $L$  et élimination des composantes ne comportant pas les 3 couleurs.

$$(14) \quad \int^{\text{rat}} \sigma Z(\mathcal{G} \cup L) dL = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} F_i \overset{w_{ij}}{\frown} F_j + \sum_i A_i \frown F_i + -\circ(F_i) + \Upsilon(F_i) + \Upsilon_{A_1, A_2, A_3} + Y_2 + \dots\right).$$

Dans cette expression,  $Y_2$  représente les diagrammes qui ont la forme de  $Y_2$ . D'après le calcul de  $Z(T)$ , on sait qu'il n'y a pas de tels diagrammes entièrement coloriés par  $A_i$ .

La matrice d'enlacement de  $\mathcal{G}$  est  $M = \begin{pmatrix} W & \text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}$  où  $W$  est la matrice d'enlacement équivariante des feuilles de  $G$ . On a  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ \text{Id} & -W \end{pmatrix}$ . Ainsi dans l'intégration rationnelle, on recolle les sommets  $A_i$  entre eux avec l'opposé de la matrice d'enlacement  $W$  et on recolle les  $A_i$  aux  $F_i$ .

Les diagrammes  $Y_2$  sont recollés sur eux-même pendant le processus d'intégration. Ainsi, si l'un d'eux contient un  $F_i$ , il doit contenir le  $A_i$  associé. Enfin, ce diagramme doit être colorié par les trois couleurs, donc la contribution possible vient du diagramme colorié par  $F_i, A_i, A_j, A_k$ . Cette contribution vient de la multiplication sur la branche  $F_i$  des diagrammes  $Z(T)$  et  $\exp_{\#}(A_i \frown F_i)$ .

Cela crée donc un diagramme où les pattes  $A_i$  et  $F_i$  sont contigües. Quand on intègre on relie ces deux pattes, le diagramme s'annule. On peut donc négliger tous les diagrammes en  $Y_2$ .

Si on fait l'intégration dans la formule 14, on obtient exactement le résultat énoncé dans la proposition.  $\square$

### 6.3. Intégralité

Dans cette partie, nous allons montrer que  $\mu(\Gamma)$  est demi-entier avant de montrer que pour toute paire  $(M, K)$  on a  $z_2^{\text{rat}}(M, K) \in \frac{1}{12}\mathcal{I}_2^\Delta$ . Dans les deux cas, on utilise une présentation par chirurgie simplifiée qui est décrite dans le lemme ci-dessous :

- Lemme 6.3.1.** — 1. Soit  $\Sigma$  un anneau tel que  $\text{Tp} = \Sigma \times [0, 1]$ . Toute paire  $(M, K)$  formée d'un entrelacs homologue à 0 dans une sphère d'homologie rationnelle se présente par chirurgie sur un entrelacs dans  $\text{Tp}$  qui se projette sur  $\Sigma$  de la façon suivante : chaque composante est triviale avec un certain auto-enlacement et deux composantes se croisent en au plus deux points.
2. Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des entrelacs en tranche obtenus en empilant et juxtaposant les enchevêtrements élémentaires de la figure 4 et leurs symétrisés. Notons que le signe de l'enlacement des composantes de  $\mathcal{C}$  est arbitraire. Toute paire  $(M, K)$  formée d'un nœud homo-

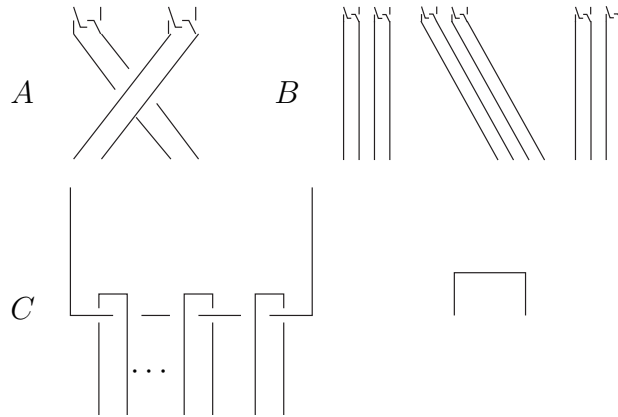


FIGURE 4. Éléments engendrant la classe  $\mathcal{C}$

logue à 0 dans une sphère d'homologie rationnelle est  $S$ -équivalente à une paire présentée par chirurgie sur un entrelacs appartenant à la classe  $\mathcal{C}$ , où on a rajouté des twists à certaines composantes.

*Démonstration.* — Partons d'une présentation par chirurgie de  $(M, K)$  par un entrelacs quelconque  $C_i$ . On peut changer n'importe quel croisement entre  $C_i$  et  $C_j$  en rajoutant une composante de chirurgie. Cette composante borde un disque  $D$  qui coupe l'entrelacs en seulement deux points  $A$  et  $B$  reliés par un segment  $[A, B]$ . Le disque entier se rétracte sur un voisinage du segment. On appelle spéciale une telle composante. Par ajout de composantes spéciales, on peut rendre les composantes  $C_i$  triviales au sens où elles se projettent sur  $\Sigma$  sur des disques disjoints. On peut resserrer les composantes spéciales autour de leur segment. À isotopie près, on peut donc supposer qu'elles se projettent génériquement sur  $\Sigma$ .

L'étape suivante consiste à éliminer tous les auto-croisements des composantes spéciales. Pour cela, on utilise le fait que l'on peut scinder une composante spéciale en un entrelacs de Hopf de

deux composantes spéciales grâce aux mouvements de Kirby. Ainsi on peut remplacer chaque composante spéciale par une chaîne de telle sorte que les auto-intersections fassent intervenir des maillons différents de la chaîne. De même, on peut aussi supposer que deux composantes se croisent en au plus deux points. Le mouvement utilisé est représenté sur la figure 5.

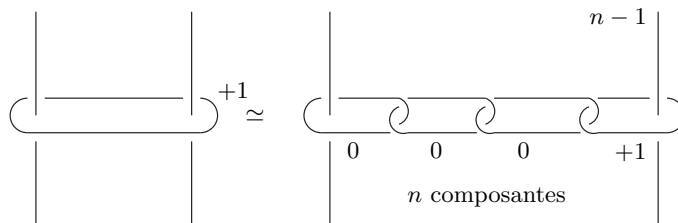


FIGURE 5. Chaîne d'anneaux de chirurgie

Ceci termine la preuve de la première partie du lemme.

Pour montrer la deuxième partie, on remarque que la classe de  $S$ -équivalence de la variété obtenue par chirurgie sur un entrelacs  $L$  est caractérisée par la matrice d'enlacement équivariante de  $L$ . Ceci permet de faire traverser un disque  $D$  avec n'importe quelle composante  $C_i$ . On peut ainsi supposer qu'au voisinage des  $C_i$  l'enchevêtrement est standard comme l'enchevêtrement  $C$  de la figure 4. L'entrelacs formé par les composantes  $C_i$  trivialisées et les composantes spéciales vérifie bien les hypothèses du lemme.  $\square$

Ce lemme nous permet de prouver un premier résultat d'intégralité concernant l'application  $\mu$ .

**Lemme 6.3.2.** — *Si  $K$  est un nœud dans une sphère d'homologie entière  $M$ , pour tout plongement de  $\Gamma$  dans  $M \setminus K$  homologue à 0,  $\mu(\Gamma)$  appartient à l'espace  $\frac{1}{2}\mathcal{I}_2^\Delta$  où  $\Delta = \Delta(M, K)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\Gamma$  un clasper simple dans  $M \setminus K$  où  $M$  est une sphère d'homologie entière. On peut représenter  $(M, K)$  par chirurgie sur un entrelacs  $\mathcal{L}$  dans  $\text{Tp}$ . Soit  $F_1, F_2, F_3$  l'image des feuilles de  $\Gamma$  dans  $\text{Tp} \setminus \mathcal{L}$ . D'après le lemme, on peut “défaire”  $\mathcal{L} \cup \{F_1, F_2, F_3\}$  à l'aide de composantes spéciales de telle sorte que chaque composante soit triviale (donc borde un disque  $D_i$ ) et que deux composantes se croisent en au plus deux points.

On décompose l'entrelacs  $\mathcal{L} \cup \{F_1, F_2, F_3\}$  en enchevêtrements élémentaires et on choisit un point marqué sur chaque composante. Il suffit de voir que les coefficients des diagrammes  $\Upsilon$  et  $\circ$  qui apparaissent dans  $\sigma Z(\mathcal{L} \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3, \text{Tp})$  sont demi-entiers. Ces diagrammes sont de degré au plus 2. On quotiente donc l'espace des diagrammes par les diagrammes de degré 3 et les diagrammes comprenant des composantes connexes avec au moins deux sommets trivalents.

On distingue deux types de diagrammes dans  $Z(\mathcal{L} \cup F_1 \cup F_2 \cup F_3, \text{Tp})$  : ceux qui proviennent des croisements et ceux qui proviennent des associateurs. Notons  $A$  les contributions provenant des associateurs. On va montrer que  $A = 0$ .

Considérons l'intégrale de Kontsevich réduite qui consiste à supprimer les contributions dues aux croisements et à ne garder que les diagrammes de degré  $\leq 2$ . On vérifie que cette intégrale est un invariant d'isotopie, invariante par glissement de coupure car elle ne contient que des diagrammes de la forme  $\Upsilon$  qui commutent entre eux modulo les diagrammes de degré 3. De plus, comme elle est indépendante du signe des croisements, c'est un invariant d'homotopie. Ceci prouve qu'elle est réduite au facteur  $\frac{1}{48} \circ$  par composante qui est considéré comme nul car il contient deux sommets trivalents. Cet argument nous permet de prouver que  $A$  est nul et de ramener le calcul aux contributions des croisements.

Fixons une composante  $C$  et parcourons la à partir de son point marqué. Elle rencontre une suite ordonnée de composantes  $C_1, \dots, C_k$ . Chaque composante apparaît deux fois ou jamais. Deux cas sont possibles : soit une composante apparaît deux fois avec des signes opposés, soit elle apparaît deux fois de suite avec le même signe.

La formule de Campbell-Hausdorff nous dit que chaque paire  $\{C_i, C_j\}$  avec  $i < j$  crée un diagramme  $\Upsilon$  avec un coefficient  $\frac{1}{8}$ . De plus tous les diagrammes connexes qui n'ont qu'un seul sommet trivalent sont obtenus ainsi. On remarque aussi que comme  $C$  ne se coupe pas elle-même, on n'a pas de diagrammes de la forme  $\dashv$ . L'auto-croisement de  $C$  crée pas de diagrammes  $\Upsilon$  ou  $\dashv$ . Il peut donc être négligé.

Les contributions aux graphes  $\Upsilon$  se regroupent par groupes de 4 suivant les composantes qu'elles relient. Une énumération des possibilités montre que le coefficient correspondant est toujours demi-entier (voir figure 6).

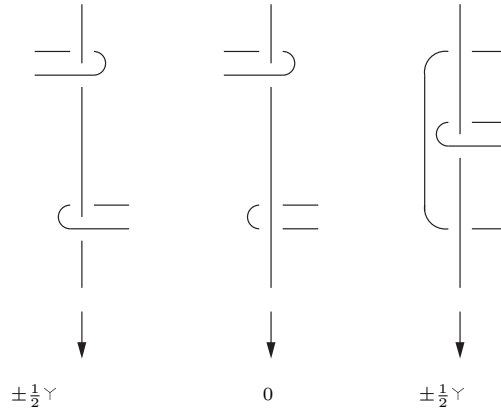


FIGURE 6. Exemples de contributions

□

**Remarque 6.3.3.** — 1. Le lemme 6.3.2 et la proposition 6.2.2 impliquent que si les paires  $(M, K)$  et  $(M', K')$  sont  $S$ -équivalentes, alors  $z_2^{\text{rat}}(M, K) - z_2^{\text{rat}}(M', K') \in \frac{1}{2}\mathcal{I}_2^\Delta$ .  
 2. Si  $(M, K)$  est une paire formée d'un nœud dans une sphère d'homologie, alors la quantité  $\lambda(M)$  définie par  $z_2^{\text{rat}}(M, K)|_{t=1} = \frac{\lambda(M)}{2} \ominus$  est un invariant de  $M$  entier si  $M$  est une sphère d'homologie entière. Il s'agit en fait de l'invariant de Casson de  $M$ .

En effet, toutes les paires  $(M, U)$  où  $M$  est une sphère d'homologie entière et  $U$  un nœud trivial sont reliées par des chirurgies sur des claspers simples. De plus,  $z_2^{\text{rat}}(M, U)$  est de la forme  $\frac{\lambda(M)}{2} \ominus$  où  $\lambda(M) \in \mathbb{Q}$ . Or  $\lambda(S^3) = 0$ , donc d'après la proposition 6.2.2 et le lemme 6.3.2,  $\lambda(M) \in \mathbb{Z}$  pour toute sphère d'homologie entière  $M$ .

Nous terminons ce chapitre par un théorème d'intégralité du terme à deux boucles.

**Théorème 6.3.4.** — Pour toute paire  $(M, K)$  formée d'un nœud dans une sphère d'homologie entière, le terme à deux boucles  $z_2^{\text{rat}}(M, K)$  appartient à  $\frac{1}{12}\mathcal{I}_2^\Delta$ .

*Démonstration.* — On part d'une présentation par chirurgie d'une paire  $S$ -équivalente à  $(M, K)$  par un entrelacs  $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$  donné dans la deuxième partie du lemme. On remarque que chaque composante borde un disque naturellement décomposé en un hémisphère supérieur et un hémisphère inférieur. On choisit un point base et on relie chaque composante au point base

par un arc. On choisit par convention une coupure sur le côté gauche de la ligne équatoriale de chaque disque.

Notre but est de prouver un résultat d'intégralité sur la partie à deux boucles. Pour cela, on ne va évaluer que les diagrammes qui apparaissent sur la figure 3. En particulier tout diagramme connexe contenant au moins 3 sommets trivalents sera déclaré nul.

### Traitement de l'auto-intersection

Notons  $L'_i$  les composantes  $L_i$  sans twists. On peut déterminer  $\sigma Z(\widehat{L}_i, \text{Tp})$  à partir de  $\sigma Z(L'_i, \text{Tp})$  grâce à l'application d'enroulement par une technique déjà utilisée dans [Kri02]. Soit  $W$  la partie de degré 1 de  $\sigma(\widehat{L}_i, \text{Tp})$ . Elle est entière puisque  $L'_i$  n'a pas d'auto-intersection et que chaque paire de disques s'intersecte en un nombre pair de points. Soit  $w_i$  l'auto-enlacement de la  $i$ -ème composante.

On rappelle que pour passer le  $L$  à  $\widehat{L}$ , il faut rajouter le facteur de normalisation  $\exp(\frac{1}{48}i^\circ)$  sur chaque composante. Pour passer de  $L'$  à  $L$ , on doit multiplier la  $i$ -ème composante de  $Z(\widehat{L}'_i, \text{Tp})$  par  $\exp_{\#}(\frac{w_i}{2}i^\circ)$  pour tout  $i$ .

Comme cet élément ne contient que des pattes coloriées par  $i$  on a, (voir [Kri02] ou [Thu00])

$$\sigma Z(\widehat{L}_i, \text{Tp}) = \prod_i \partial_{\Omega_i} \left( \prod_i \partial_{\Omega_i}^{-1} \sigma Z(L'_i, \text{Tp}) \exp\left(\sum_i \frac{w_i}{2} i^\circ + \frac{1}{48} \sum_i i^\circ - \frac{1}{24} \sum_i w_i \ominus\right)\right).$$

Cette dernière quantité est égale à

$$\sigma Z(L'_i, \text{Tp}) \exp\left(\sum_i \left(\frac{w_i}{2} i^\circ + \frac{1}{24} \sum_{j \neq i} w_i i^\circ_j + \frac{w_i^2 + 1}{48} i^\circ_i\right)\right).$$

Ceci nous permet de ramener le calcul de  $\sigma Z(\widehat{L}_i, \text{Tp})$  à celui de  $\sigma Z(L'_i, \text{Tp})$ .

Pour cela, on utilise de manière fondamentale le fait que c'est un élément de la classe  $\mathcal{C}$ . Cela permet :

- d'éliminer les contributions provenant des diagrammes  $A$  et  $B$  de la figure 4
  - de traiter séparément le cas des diagrammes reliés à une, deux ou plus de deux composantes.
- Notons  $\mathcal{H}$  le groupe abélien engendré par les diagrammes  $\frac{1}{12} \circ \circ \circ$ ,  $\frac{1}{12} \circ \circ \vee$ ,  $\frac{1}{12} \vee \vee$ ,  $\frac{1}{12} \circ$ ,  $\frac{1}{12} I$  et  $\frac{1}{12} Y_2$  coloriés par des monômes et paramétrés par l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ .

Il suffit de calculer  $\sigma Z(L'_i, \text{Tp}) \pmod{\mathcal{H}}$  car on sait que les diagrammes de  $\mathcal{H}$  vont produire un dénominateur  $\frac{1}{12}$  qui correspond aux diagrammes que l'on veut obtenir.

### Élimination des croisements doubles et des associateurs :

Il est standard que la seule contribution de l'enchevêtrement  $A$  de la figure 4 est  $\frac{1}{2} Y_2$  où  $Y_2$  est un diagramme reliant les 4 composantes représentées sur la figure. Ce diagramme est bien dans  $\mathcal{H}$ .

Le même raisonnement tient pour l'associateur, sauf que la contribution qui intervient provient de graphes  $\vee$  dont chaque sommet est collé sur une arête. Il y a trop de sommets trivalents dans ce graphe pour qu'il intervienne dans le calcul du terme à deux boucles.

### Étude du maillon élémentaire :

Chaque composante isolée est triviale et donc le seul diagramme colorié par une composante  $L_i$  est  $\frac{1}{48} i^\circ$ .

Chaque paire de composantes enlacées forme ce que l'on appelle un maillon élémentaire. Pour évaluer les contributions à deux composantes, on calcule explicitement l'intégrale de Kontsevich de l'enchevêtrement présenté sur la figure 7.

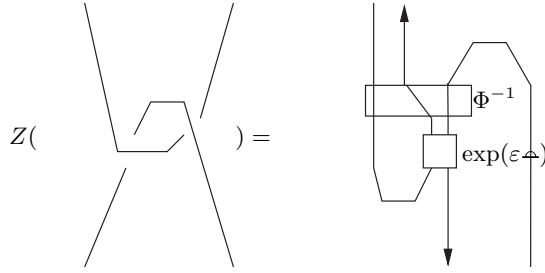


FIGURE 7. Maillon élémentaire

Soit  $\varepsilon$  le signe de l'enlacement des deux composantes orientées comme sur le schéma. On note  $a$  et  $b$  les deux composantes. Un calcul direct montre que la partie de  $Z(L_a \cup L_b, \text{Tp})$  reliant les deux composantes est précisément

$$\exp(\varepsilon_a \curvearrowright_b + \frac{\varepsilon^2}{8} a \circlearrowright_b + \frac{\varepsilon + 2\varepsilon^3}{24} H_b^a).$$

Le symbole  $H_b^a$  désigne le graphe  $Y_2$  dont les deux sommets de gauche sont coloriés par  $a$  et les deux sommets de droite par  $b$ .

### Contributions reliées à plus de deux composantes

Sachant que les enchevêtrements  $A$  et  $B$  n'interviennent pas, il suffit de comprendre comment combiner l'intégrale des maillons élémentaires pour obtenir l'intégrale de  $\mathcal{L}$ . Pour cela, on peut négliger les associateurs nécessaires au recollement de plusieurs maillons. Il ne nous reste plus qu'à multiplier tous ces éléments, ce qu'on va faire en utilisant une formule de Baker-Campbell-Hausdorff généralisée.

Soit  $H(a_1, \dots, a_p)$  l'opérateur de  $\mathcal{B}(a_1, \dots, a_p, S) \rightarrow \mathcal{B}(a, S)$  qui est obtenu par recollement sur  $a_1, \dots, a_p$  du graphe présenté par

$$H(a_1, \dots, a_p) = \exp\left(\sum_i a_i + \frac{1}{2} \sum_{i < j} [a_i, a_j] + \frac{1}{6} \sum_{i < j < k} [a_i, [a_j, a_k]] + \frac{1}{6} \sum_{i < j < k} [[a_i, a_j], a_k] + \frac{1}{12} \sum_{i < j} [a_i, [a_i, a_j]] + \frac{1}{12} \sum_{i < j} [a_j, [a_j, a_i]]\right).$$

Cet opérateur décrit comment recoller les contributions de chaque maillon sur une même composante. On remarque que les contributions de chaque maillon sont des arêtes à coefficients entiers, ou des diagrammes qui ont déjà deux sommets trivalents, qui ne sont donc pas susceptibles d'être recollés. Les diagrammes de  $H$  qui ont deux sommets trivalents ont un dénominateur qui divise 12. Après recollement, elles produiront donc des éléments de  $\mathcal{H}$ .

Les contributions obtenues par recollement de deux graphes  $\Upsilon$  distincts auront pour dénominateur  $\frac{1}{4}$  (sauf pour les termes  $\frac{\varepsilon^2}{8} a \circlearrowright_b$  qui sont déjà comptés dans les contributions à deux composantes. Par contre, chaque graphe  $\frac{1}{2}\Upsilon$  recollé avec lui-même produit un dénominateur  $\frac{1}{8}$  qu'il faut considérer séparément.

Notons  $w_{ij}$  l'enlacement équivariant de la  $i$ -ème composante et de la  $j$ -ème composante. Par construction, c'est soit 0, soit un élément inversible de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . On note  $|\varepsilon t^k| = |\varepsilon| t^k$ . On résume les raisonnements précédents par la formule :



$$\sigma Z(L'_i, \text{Tp}) = \exp \left( \sum_{\{i,j\}} w_{ij} i \frown_j + \sum_i \frac{1}{48} i \circlearrowleft_i + \sum_{\{i,j\}} \frac{|w_{ij}|}{8} i \circlearrowleft_j + \sum_{\{i,j\}} \frac{w_{ij}}{24} H_j^i + \sum_{\{i,j,k\}} \frac{1}{2} w_{ij} \frown_i^{w_{ik}} \right) \pmod{\mathcal{H}}$$

### Conclusion

Pour tenir compte de l'auto-enlacement des composantes et des facteurs de normalisation, il faut multiplier  $\sigma Z(L'_i, \text{Tp}) \pmod{\mathcal{H}}$  par la quantité :

$$\exp \left( \sum_i \left( \frac{w_i}{2} i \frown_i + \frac{w_i}{24} \sum_{j \neq i} \frac{w_{i,j}}{i \circlearrowleft_j} + \frac{w_i^2 + 1}{48} i \circlearrowleft_i \right) + \frac{\sigma}{16} \Theta \right)$$

Dans cette formule,  $\sigma$  est la signature de la matrice d'enlacement non-équivariante.

Pour prouver l'intégralité de la partie à deux boucles, nous allons intégrer les quantités précédentes et quotienter par les diagrammes de la forme  $\frac{1}{12} \theta(\frac{P}{\Delta}, \frac{Q}{\Delta}, \frac{R}{\Delta})$  avec  $P, Q, R \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ .

On sait aussi que la partie à deux boucles pour  $t = 1$  est demi-entière (voir remarque 6.3.3). Ainsi, on peut quotienter par les diagrammes de la forme  $\alpha \Theta$  pour  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . On note  $\mathcal{H}'$  le sous-groupe de  $\mathcal{A}_2^\Delta$  engendré par ces diagrammes et  $\frac{1}{12} \mathcal{I}_2^\Delta$ .

En effet, si on prouve que  $z_2^{\text{rat}}(M, K) = x + \alpha \Theta$  pour  $x$  dans  $\frac{1}{12} \mathcal{I}^\Delta$ , il suffit de prouver que  $\alpha$  est multiple de  $\frac{1}{12}$ . Si on remplace  $t$  par 1 dans la formule précédente, comme  $z_2^{\text{rat}}(M, K)_{t=1}$  est demi-entier et  $x|_{t=1}$  est un multiple de  $\frac{1}{12}$ ,  $\alpha$  est un multiple de  $\frac{1}{12}$ , ce que l'on veut démontrer.

On traite séparément chaque contribution :

- Cas de la partie  $\sum_i \frac{w_i^2 + 2}{48} i \circlearrowleft_i + \frac{w_i}{24} \sum_{j \neq i} \frac{w_{i,j}}{i \circlearrowleft_j} + \frac{\sigma}{16} \Theta$ .

Modulo  $\mathcal{H}'$ , on peut simplifier le terme  $\frac{\sigma}{16} \Theta$ . Soit  $D$  la matrice diagonale dont les coefficients sont les  $w_i$ . Alors cette partie crée les diagrammes  $\theta(-\frac{1}{48} \text{Tr}(D^2 + 2 \text{Id})W^{-1} - \frac{1}{24} \text{Tr} D(W - D)W^{-1}) = \theta(-\frac{1}{24} \text{Tr}(W + W^{-1}) + \frac{1}{48} \text{Tr} D^2 W^{-1})$ .

Or  $\text{Tr}(W + W^{-1}) = \frac{Q}{\Delta}$  où  $Q$  est un polynôme symétrique. Les monômes non constants s'apparient et s'annulent modulo  $\mathcal{H}'$ . Il ne reste que des multiples entiers du diagramme  $\frac{1}{24} \theta(\frac{1}{\Delta})$  qui sont aussi dans  $\mathcal{H}'$ . La contribution  $\frac{1}{48} \theta(\text{Tr} D^2 W^{-1})$  par contre, n'est pas dans  $\mathcal{H}'$ .

- Cas de la partie  $\sum_{\{i,j\}} \frac{|w_{ij}|}{8} i \circlearrowleft_j + \sum_{\{i,j\}} \frac{w_{ij}}{24} H_j^i$ .

On effectue une intégration de ces diagrammes modulo  $\mathcal{H}'$ .

$$\begin{aligned} & \int^{\text{rat}} \left[ \frac{|w_{ij}|}{8} i \circlearrowleft_j + \frac{w_{ij}}{24} H_j^i \right] \\ &= \frac{1}{24} \left[ \theta(w_{ij} w_{ji}^{-1}) + \frac{1}{w_{ij} w_{ji}^{-1} \circlearrowleft_{w_{ij} w_{ji}^{-1}}} - \theta(w_{ij} w_{ji}^{-1}, w_{ji} w_{ij}^{-1}) + w_{ij}(1) \theta(w_{ii}^{-1}, w_{jj}^{-1}) \right] \\ &= \frac{1}{24} \left[ \theta(w_{ij} w_{ji}^{-1}) + \theta(w_{ij} w_{ji}^{-1}, w_{ij} w_{ji}^{-1}) + w_{ij}(1) w_{ii}^{-1}(1) w_{jj}^{-1}(1) \Theta \right] \\ &= 0 \pmod{\mathcal{H}'} \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est une conséquence de la formule  $\Delta U = U \otimes U \pmod{2}$  pour tout polynôme  $U \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ .

- Cas de la partie  $\sum_{\{i,j,k\}} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} w_{ij} \frown_i^{w_{ik}} \right)^2$ .

**Lemme 6.3.5.** — Soit  $\Upsilon$  un graphe colorié par trois éléments  $a_i$ ,  $a_j$  et  $a_k$  de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ . Les éléments sont placés dans le sens trigonométrique et vers l'extérieur du graphe. Soit  $W$  une matrice de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  de déterminant égal à  $\pm 1$  pour  $t = 1$  et notons  $\varepsilon P = P(1)$  pour  $P \in \Lambda$ . On a alors l'égalité suivante modulo 2 :  $\int^{\text{rat}} \Upsilon^2 = \varepsilon(w_{ii}^{-1} a_i \bar{a}_i) \theta(a_j w_{jk}^{-1} \bar{a}_k) + \varepsilon(w_{jj}^{-1} a_j \bar{a}_j) \theta(a_k w_{ki}^{-1} \bar{a}_i) + \varepsilon(w_{kk}^{-1} a_k \bar{a}_k) \theta(a_i w_{ij}^{-1} \bar{a}_j) + \alpha \Theta$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* — La preuve de ce lemme consiste à énumérer les 15 façons de recoller les deux copies de  $\Upsilon$ . On en élimine 9 pour des raisons de symétrie, puis on simplifie les 6 dernières grâce aux relations IHX et de glissement modulo 2.  $\square$

On applique directement le lemme pour trouver pour chaque triplet  $\{i, j, k\}$  l'expression suivante :

$$\int^{\text{rat}} (w_{ij} \Upsilon_i^{w_{ik}})^2 = \varepsilon(w_{ii}^{-1}) \theta(w_{ij} w_{jk}^{-1} w_{ki}) + \varepsilon(w_{jj}^{-1} w_{ij} w_{ji}) \theta(w_{ki}^{-1} w_{ik}) + \varepsilon(w_{kk}^{-1} w_{ik} w_{ki}) \theta(w_{ji}^{-1} w_{ij}).$$

Les deux derniers termes sont reliés par la permutation  $(jk)$ .

Chaque terme est de la forme  $\varphi(i, j, k)$  et on effectue la somme

$$\begin{aligned} \sum_{\{i, j, k\}} \varphi(i, j, k) &= \sum_i \frac{1}{2} \sum_{j, k, j \neq i, k \neq i, j \neq i} \varphi(i, j, k) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} \left[ \sum_{j, k} \varphi(i, j, k) - \sum_j \varphi(i, j, i) - \sum_k \varphi(i, i, k) - \sum_l \varphi(i, l, l) + 2\varphi(i, i, i) \right] \end{aligned}$$

Si on a  $\varphi(i, j, k) = \varepsilon(w_{ii}^{-1}) \theta(w_{ij} w_{jk}^{-1} w_{ki})$ , alors on remarque que les identités suivantes sont vérifiées :  $\sum_{j, k} \varphi(i, j, k) = \sum_j \varphi(i, j, i) = \sum_k \varphi(i, i, k) = \varepsilon(w_{ii}^{-1}) w_{ii}$ .

Puis on a  $\sum_l \varphi(i, l, l) = \sum_l \varepsilon(w_{ii}^{-1}) \theta(w_{il} w_{ll}^{-1} w_{li})$  et  $\varphi(i, i, i) = \varepsilon(w_{ii}^{-1}) \theta(w_{ii}^2 w_{ii}^{-1})$ . Tous ces termes sont nuls modulo  $\mathcal{H}'$ .

La contribution de ce terme modulo  $\mathcal{H}'$  est donc  $-\frac{1}{16} \sum_{i, l} \varepsilon(w_{ii}^{-1}) \theta(w_{il} w_{ll}^{-1} w_{li})$ .

Si on a  $\varphi(i, j, k) = \varepsilon(w_{jj}^{-1} w_{ij}) \theta(w_{ki}^{-1} w_{ik})$  alors, les deux contributions restantes s'écrivent :

$$\sum_i \left[ \sum_{j, k} \varphi(i, j, k) - \sum_j \varphi(i, j, i) - \sum_k \varphi(i, i, k) - \sum_l \varphi(i, l, l) + 2\varphi(i, i, i) \right].$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \sum_{j, k} \varphi(i, j, k) &= \sum_j \varepsilon(w_{jj}^{-1} w_{ij}) \text{ et } \sum_k \varphi(i, i, k) = \varepsilon(w_{ii}^{-1} w_{ii}) \\ \sum_j \varphi(i, j, i) &= \sum_j \varepsilon(w_{jj}^{-1} w_{ij}) \theta(w_{ii}^{-1} w_{ii}) \text{ et } \sum_l \varphi(i, l, l) = \sum_l \varepsilon(w_{ll}^{-1} w_{il}) \theta(w_{li}^{-1} w_{il}) \end{aligned}$$

Mais  $w_{il}$  est monômial donc  $w_{il} = \varepsilon(w_{il}) w_{il} \pmod{2}$ .

Ainsi,  $\sum_{i, l} \varphi(i, l, l) = \sum_{i, l} \varepsilon(w_{ll}^{-1}) \theta(w_{li}^{-1} w_{il}) = \sum_l \varepsilon(w_{ll}^{-1}) \in \mathcal{H}'$ .

Il ne reste donc plus que

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{16} \sum_{i, l} \varepsilon(w_{ii}^{-1}) \theta(w_{il} w_{ll}^{-1} w_{li}) + \frac{1}{48} \sum \theta(w_{ii}^2 w_{ii}^{-1}) \\ &= \frac{1}{48} \sum_{i, l} \varepsilon(w_{ii}^{-1}) \theta(w_{il} w_{ll}^{-1} w_{li}) + \frac{1}{48} \sum \theta(w_{ii}^2 w_{ii}^{-1}) \pmod{\mathcal{H}'} \end{aligned}$$

Mais on peut remplacer  $w_{il}w_{li}$  par  $\varepsilon(w_{il}w_{li})$  donc on a

$$\sum_i \varepsilon(w_{li})\varepsilon(w_{ii}^{-1})\varepsilon(w_{il}) = \sum_{i,j} \varepsilon(w_{li})\varepsilon(w_{ij}^{-1})\varepsilon(w_{jl}) = w_{ll} \pmod{2}.$$

Puis on écrit  $w_{ii}^2 = w_{ii} \pmod{2}$  ce qui permet d'annuler les deux termes et de prouver que  $\int^{\text{rat}} \sigma Z(L'_i, \text{Tp}) \in \mathcal{H}'$ . Ceci prouve l'intégralité du terme à deux boucles.  $\square$

#### 6.4. Partie à deux boucles des cablages toriques

Le calcul de l'intégrale de Kontsevich des nœuds toriques effectué dans le chapitre 5 s'étend en degré 2 au cas où on cable un nœud quelconque par un nœud torique. On donne alors une formule pour la partie à deux boucles. Ce résultat a été démontré indépendamment par T. Ohtsuki dans [Oht].

**Définition 6.4.1.** — Pour un entier  $k \in \mathbb{Z}$ , l'application  $t \mapsto t^k$  induit un endomorphisme de  $\Lambda_{\text{loc}}$ , puis de  $\mathcal{D}(\Lambda_{\text{loc}})$ . On note  $D_k$  l'image d'un diagramme  $D$  par cette application. Elle vérifie  $\text{Hair } D_k = (\text{Hair } D)_k$ .

**Proposition 6.4.2.** — Soit  $K$  un nœud dans  $S^3$  et  $K_{p,q}$  le cablage torique de ce nœud de paramètres  $p$  et  $q$  où  $p$  est le degré du cablage (cela ne dépend pas d'une orientation de  $K$ ). On note  $T_{p,q}$  le nœud torique standard. Notons  $\Delta$  le polynôme d'Alexander de  $K$ . Étant données deux fractions rationnelles  $f$  et  $g$ , on note  $f(s)g(t)$  le diagramme  $f(s) \bigcirc - \bigcirc g(t)$ . Alors

$$z_2^{\text{rat}}(K_{p,q}) = z_2^{\text{rat}}(T_{p,q}) + \left( \frac{p t^{pq} + 1}{8 t^{pq} - 1} - \frac{1 t^q + 1}{8 t^q - 1} \right) \frac{\Delta'(s^p) s^p}{\Delta(s^p)} + z_2^{\text{rat}}(K)_p.$$

*Démonstration.* — Soit  $K$  un nœud d'auto-enlacement nul et  $L_{p,q}$  son cablage par la tresse torique d'auto-enlacement  $pq$ . La formule 9 du chapitre 5 s'étend en :

$$Z(L_{p,q}) = \psi_p^*(Z(K) \# \exp(\frac{q}{2p} \frown)).$$

Étant données deux séries  $g(x), h(y)$ , on notera  $g(x)h(y)$  le diagramme obtenu par coloriage du graphe  $g(x) \bigcirc - \bigcirc h(y)$ . On utilise les formules  $\Upsilon^{-1}(\frown) = \frown - \frac{1}{24} \ominus$  et  $\Upsilon^{-1} \Omega = \frac{\Omega}{\langle \Omega, \Omega \rangle}$ . Modulo les diagrammes qui ont au moins trois boucles, on a :

$$\sigma Z(L_{p,q}) = [\partial_\Omega \exp(f(x) + Wh_K(x) + z_2^{\text{rat}}(K)(x) + \frac{q}{2p} \frown - \frac{q}{48p} \ominus)]_p$$

On fait alors agir le terme  $\exp(\frac{q}{2p} \frown)$  par dérivation sur  $\Omega$  et on recolle les roues de  $\Omega$  sur celles de  $f(x)$  et  $Wh_K(x)$ .

$$\begin{aligned} \sigma Z(L_{p,q}) &= \exp \left[ \frac{q}{2p} \frown + \omega + Wh_K(x) + \omega_{\frac{q}{p}} + f'(\frac{q}{p}x) f'(y) - \frac{1}{2} f'(\frac{q}{p}x) \frac{\Delta'(e^y) e^y}{\Delta(e^y)} + z_2^{\text{rat}}(K)(x) \right]_p \\ &= \exp \left[ \frac{pq}{2} \frown + \omega_p + \omega_q + Wh_K(px) + f'(px) f'(qy) - \frac{1}{2} f'(qx) \frac{\Delta'(e^{py}) e^{py}}{\Delta(e^{py})} + z_2^{\text{rat}}(K)(px) \right] \end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à dérouler cette quantité et la corriger par  $\Upsilon^{-1} \exp_{\#}(\frac{-pq}{2} \frown) = \exp(-\frac{pq}{2} \frown + \frac{pq}{48} \ominus)$ . Notons  $K_{p,q}$  le cablage torique de  $K$  une fois l'auto-enlacement corrigé et  $D_{p,q}$  le polynôme d'Alexander de  $T_{p,q}$ . On a alors :

$$Z^{\boxtimes}(K_{p,q}) = \partial_{\Omega}^{-1} \exp\left(\left[\frac{pq}{2}\curvearrowright + \omega_{pq} - \omega_{pq} + \omega_p + \omega_q + Wh_K(px)\right.\right. \\ \left.\left.+ f'(px)f'(qy) - \frac{1}{2}f'(qx)\frac{\Delta'(e^{py})e^{py}}{\Delta(e^{py})} + z_2^{\text{rat}}(K)(px)\right] \exp\left(-\frac{pq}{2}\curvearrowright + \frac{pq}{48}\Theta\right))$$

On reconnaît que  $\partial_{\Omega} \exp(\frac{pq}{2}\curvearrowright) = \exp(\frac{pq}{2}\curvearrowright + \omega_{pq} + \frac{pq}{48}\Theta)$ . Ainsi, pour obtenir l'expression déroulée complète en degré 2, il suffit de rajouter à l'expression ci-dessus le recollement de  $\Omega^{-1}$  à  $\exp(-\omega_{pq} + \omega_p + \omega_q + Wh_K(px))$ .

On obtient finalement

$$z_2^{\text{rat}\boxtimes} K_{p,q} = -f(pqx) + f(px) + f(qx) - \frac{1}{2} \log \Delta(e^{px}) \\ + f'(px)f'(qy) - pf'(pqx)f'(py) - qf'(pqx)f'(qy) + pqf'(pqx)f'(pqy) \\ + \frac{1}{2}f'(pqx)\frac{\Delta'(e^{py})pe^{py}}{\Delta(e^{py})} - \frac{1}{2}f'(qx)\frac{\Delta'(e^{py})e^{py}}{\Delta(e^{py})} \\ + z_2^{\text{rat}}(K)_p \\ = f(x) + Wh_{D_{p,q}(t)\Delta}(t^p) + z_2^{\text{rat}}(T_{p,q}) + \left(\frac{p}{8}\frac{t^{pq}+1}{t^{pq}-1} - \frac{1}{8}\frac{t^q+1}{t^q-1}\right)\frac{\Delta'(s^p)s^p}{\Delta(s^p)} + z_2^{\text{rat}}(K)_p$$

□

Dans cette formule, on remarque que  $z_2^{\text{rat}}(K_{p,q})$  apparaît comme un coloriage de  $\infty$  avec des dénominateurs de la forme  $t^{pq} - 1$ . La théorie de l'intégration rationnelle nous informe que l'on doit pouvoir écrire ces éléments avec  $D_{p,q}$  au dénominateur. Or, on ne peut pas exprimer  $z_2^{\text{rat}}(T_{p,q})$  comme un coloriage de  $\infty$  avec  $D_{p,q}$  comme dénominateur. Il faut l'exprimer comme dans la proposition 6.1.2, c'est-à-dire comme coloriage du graphe  $\Theta$ . Cependant, nous n'avons pas trouvé d'expression en fonction de  $p$  et  $q$  car l'opération de symétrisation fait "miraculeusement" simplifier les dénominateurs. Nous donnons ici une liste restreinte des polynômes à deux boucles, obtenus à l'aide du logiciel MAPLE.

$\overline{z_2^{\text{rat}}}(T_{3,2})$	$s^2 - ts^2$
$\overline{z_2^{\text{rat}}}(T_{4,3})$	$3s^6 - 6s^6t + 3s^6t^3 + 6s^5t - 6t^2s^5 - 3s^4 + 3t^2s^4 + 4s^3 - 4ts^3 - s^2 + ts^2$
$\overline{z_2^{\text{rat}}}(T_{5,2})$	$2s^4 - 4ts^4 + 2s^4t^2 + s^2 - ts^2$
$\overline{z_2^{\text{rat}}}(T_{5,3})$	$4s^8 - 8s^8t + 8s^8t^3 - 4s^8t^4 + 8s^7t - 8s^7t^2 - 4s^6 + 8s^6t^2 - 4s^6t^3 + 6s^5t - 12s^5t^2 \\ + 6s^5t^2 + 6ts^4 - 6s^4t^2 - 2s^3 + 2ts^3 + 2s^2 - 2ts^2$
$\overline{z_2^{\text{rat}}}(T_{5,4})$	$s^6t^3 - 8s^5 + ts^2 + 9s^4 + 9s^8 - 12t^3s^{11} + 6s^{12} - 2s^7 - 2s^3 + 12s^{11}t - 12s^{11}t^4 + \\ 12s^{11}t^5 - 10s^8t^2 - 4ts^4 + 6s^6t - 6s^{12}t^6 - 6s^{10} + 12s^{10}t^3 - 8s^6t^2 + 8s^5t^2 - 12s^{12}t \\ + 12s^{12}t^4 + s^6 - 10t^3s^7 + 10s^7t^2 - 8s^8t - 5s^4t^2 + 2ts^3 + 2s^7t + 9s^8t^4 - 6s^{10}t^5 - s^2$

On remarque sur ces exemples que ces polynômes sont entiers et de degré égal à  $2g(T_{p,q}) = (p-1)(q-1)$ .

## 6.5. Partie à deux boucles des cablages généraux

Jusqu'à présent, il n'existe pas de formule générale pour la partie à deux boucles du cablage d'un nœud. Dans la section précédente, nous avons établi une telle formule dans le cas des cablages toriques. Nous proposons ici une formule explicite dans le cas où le cablage est d'enlacement nul, ce qui est le cas pour les doubles de Whitehead tordus.

**Définition 6.5.1.** — Soit  $\Sigma$  un anneau et  $i : \Sigma \rightarrow \Sigma \times [0, 1]$  un plongement. On note  $k$  son degré et  $U$  le nœud trivial dans  $S^3$ . Pour tout nœud  $K$  d'auto-enlacement nul, on note  $\text{Mixte}(i, K)$  le

diagramme à deux boucles défini par

$$\text{Mixte}(i, K) = z_2^{\text{rat}}(K \circ i) - z_2^{\text{rat}}(U \circ i) - z_2^{\text{rat}}(K)_k.$$

Dans ce qui suit, nous ne nous intéressons plus qu'au diagramme  $\text{Mixte}(i, K)$  que nous calculons dans le cas où le degré de  $i$  est nul.

**Proposition 6.5.2.** — Soit  $i : \bigcirc \rightarrow \bigcirc \times [0, 1]$  un plongement de degré  $k$ ,  $U$  le nœud trivial dans  $S^3$ . On suppose que  $K$  et  $U \circ i$  ont un auto-enlacement nul.

1. La quantité  $\text{Mixte}(i, K)$  ne dépend que de  $i$  et du polynôme d'Alexander de  $K$ . De plus, pour tous nœuds  $K_1$  et  $K_2$ , on a  $\text{Mixte}(i, K_1 \# K_2) = \text{Mixte}(i, K_1) + \text{Mixte}(i, K_2)$ .
2. Si  $k = 0$  on a

$$\text{Mixte}(i, K) = a_2(K)\theta(\text{Lk}_{S^3, U \circ i}(m, m)).$$

où  $a_2(K)$  est le second coefficient du polynôme de Conway de  $K$  et  $\text{Lk}_{S^3, U \circ i}(m, m)$  est l'auto-enlacement au sens de Blanchfield d'un méridien  $m$  de  $U$  considéré dans le complémentaire de  $U \circ i$ . En particulier, il a pour dénominateur  $\Delta(U \circ i)$ .

*Démonstration.* — La première proposition est une conséquence de la formule de composition  $Z(K \circ i) = Z(K) \circ Z(i)$  représentée dans la figure 8 et de la remarque suivante :

Dans l'opération de composition  $Z(K) \circ Z(i)$ , un diagramme de  $Z(K)$  connexe de degré en boucles  $p$  produit des diagrammes de degré en boucles au moins  $p$ . Le diagramme de degré exactement  $p$  produit à partir de  $D$  est  $D_k$ . En effet, si un tel diagramme est raccordé à un diagramme  $E$  de  $Z(i)$ , cela augmente nécessairement son degré en boucles, à moins que  $E$  soit une réunion d'arbres. Dans ce cas, le diagramme composé sera nul dans  $\mathcal{B}$ . Enfin, si  $D$  ne s'attache qu'à la partie solide de  $Z(i)$ , on reconnaît l'action de  $\psi_k$  sur  $\mathcal{B}$ . On en déduit que la

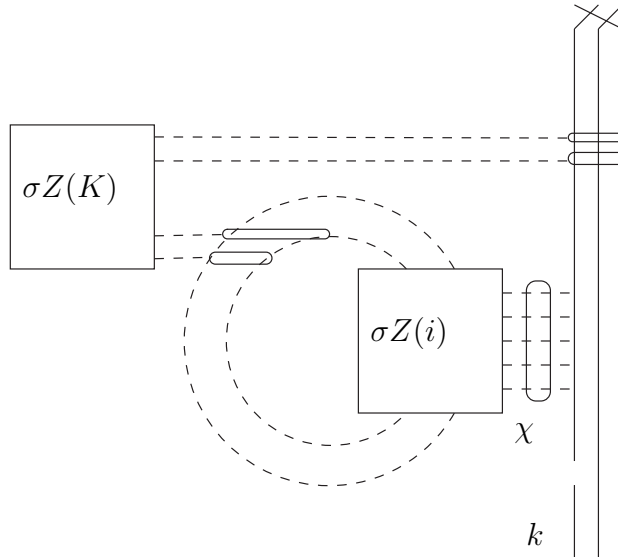


FIGURE 8. Représentation diagrammatique de la composition

partie à deux boucles de  $Z(K) \circ Z(i)$  ne fait pas intervenir les diagrammes de  $Z(K)$  qui ont plus de trois boucles et que les diagrammes à deux boucles  $z_2^{\text{rat}}(K)$  produisent le diagramme  $z_2^{\text{rat}}(K)_k$ . On en déduit que la seule dépendance de  $z_2^{\text{rat}}(K \circ i) - z_2^{\text{rat}}(K)_k$  en  $K$  est une fonction de la partie à une boucle de  $Z(K)$ , c'est-à-dire de  $\Delta(K)$ .

De plus, un diagramme connexe de  $\text{Mixte}(i, K)$  ne peut provenir que d'une roue de  $Z(K)$ . Cela prouve que  $\text{Mixte}(i, K)$  est linéaire par rapport à la partie "roues" de  $K$ , soit linéaire par rapport à la somme connexe.

Prouvons la deuxième partie de la proposition. Notons  $L$  l'image de  $i$  dans  $\text{Tp} = \Sigma \times [0, 1]$ . Comme  $L$  est homotope à 0, on peut changer certains croisements pour le rendre trivial. Cela se traduit par le fait qu'il existe un enchevêtrement homologue à 0 dans un graphe à deux boucles épaissi tel que si on cable la boucle gauche par  $K$ , on place un nœud trivial autour de la deuxième boucle et on applique une chirurgie, alors on trouve  $K \circ L$ . Le méridien  $m$  de l'énoncé est le méridien de la branche gauche. Tout ceci est schématisé sur la figure 9.

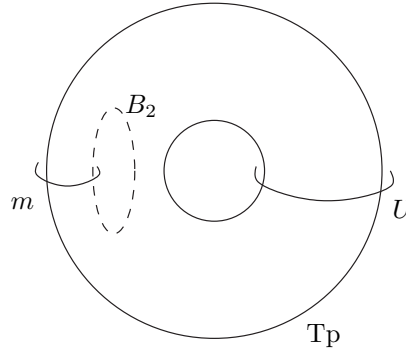


FIGURE 9. Présentation chirurgicale du cablage

Notons  $V = \{V_1, \dots, V_n\}$  les composantes de chirurgie et  $B_2$  le graphe à deux boucles épaissi. Notre but est d'appliquer la construction de l'intégrale rationnelle à cet entrelacs. Le diagramme  $Z(K)$  s'écrit  $\exp_{\#}(\frac{1}{48}\circ - a_2(K)\circ + r)$  où  $r$  a au moins deux boucles et  $a_2(K)$  est défini comme le deuxième coefficient du polynôme de Conway ou par la formule  $a_2(K) = \frac{1}{4}\Delta(K)''(1)$ .

En composant  $Z(K)$  sur la branche gauche de  $B_2$  on obtient  $Z(V, \text{Tp})$ . Il est clair qu'une composante de  $r$  qui a déjà deux boucles produira par intégration une composante qui en a au moins 3, ainsi dans notre calcul, on peut négliger  $r$ . De plus, le terme provenant de  $\frac{1}{48}\circ$  contribue à  $z_2^{\text{rat}}(U \circ i)$  et non à  $\text{Mixte}(i, K)$ . La seule contribution qu'il nous faut comprendre est donc celle de  $-a_2(K)\circ$ .

Or, comme  $\circ$  a déjà le maximum de sommets internes, on ne doit considérer dans la composition que les diagrammes qui relient le graphe  $\circ$  à des composantes solides des  $V_i$ . Il est clair que chaque patte de  $\circ$  sera recollée aux  $V_i$  par le vecteur  $M = \text{Lk}_{\text{Tp}}(m, V_i)$ . Puis, pour calculer la contribution finale, on recolle ceci par  $-\frac{1}{2}W^{-1}$ . On reconnaît là la quantité  $M^*W^{-1}M = \text{Lk}(m, m)$  qui est l'auto-enlacement de  $m$  au sens de Blanchfield. Les signes moins se compensent pour donner le résultat final.

□

Cette formule généralise la formule de [Gara] qui calcule la partie à deux boucles des doubles de Whitehead non tordus. Comme le double de whitehead non tordu du nœud trivial est trivial, la formule de la définition 6.5.1 se réduit à son terme central qui est en fait  $a_2(K)\theta(2 - t - t^{-1})$ .

## 6.6. Partie à deux boucles des nœuds tordus

Pour compléter notre série d'exemples de parties à deux boucles et au vu de la section précédente, nous proposons de calculer la partie à deux boucles des nœuds tordus, ou doubles

de Whitehead tordus du nœud trivial. Soit  $U_n$  le nœud trivial d'auto-enlacement  $n$ . On appelle nœud tordu d'ordre  $n$  que l'on note  $D_n$  le nœud obtenu en cablant  $U_n$  par le nœud de la figure 10 dans le tore plein.

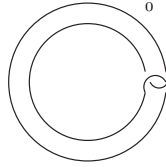


FIGURE 10. Double de Whitehead

Dans cette définition, on a fait un choix concernant le sens du croisement que l'on déclare positif. On introduit alors un paramètre  $\varepsilon$  valant  $\pm 1$  suivant que l'on conserve ou inverse le signe de ce croisement. On aura alors  $\overline{D_n^{\pm 1}} = D_n^{\mp 1}$ .

Dans la perspective de calculer l'intégrale rationnelle de  $D_n^{\pm 1}$ , on décrit une présentation de ce nœud par la chirurgie indiquée sur la figure 11 :

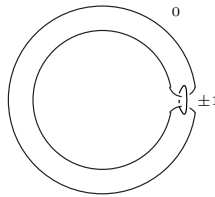


FIGURE 11. Présentation par chirurgie de  $D_n^{\pm 1}$

On remarque qu'il y a une symétrie qui fait que l'on peut échanger les rôles du nœud de chirurgie et du double de Whitehead. Cela prouve que  $D_n^{\pm}$  est obtenu par chirurgie à partir du nœud trivial sur une composante  $L$  qui est représentée dans le tore plein par la figure 12 :

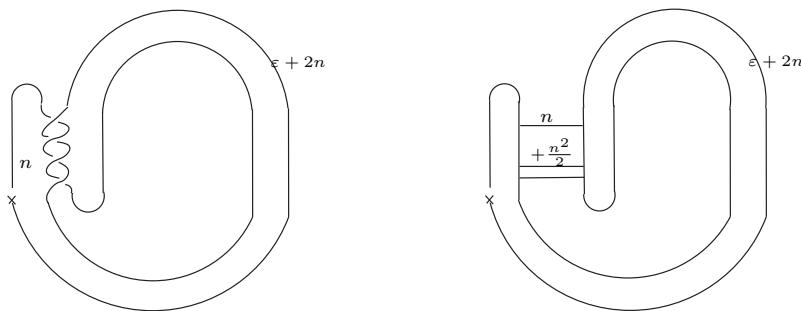


FIGURE 12. Chirurgie dans le tore plein représentant  $D_n^{\pm}$

**6.6.1. Calcul de l'intégrale rationnelle.** — Le calcul de l'intégrale rationnelle de  $L$  se fait à partir d'une présentation en enchevêtrements parenthésés qui est suggérée dans la figure 12.

A partir de  $\sigma Z(L, \text{Tp})$ , on effectue une intégration formelle.

Le raisonnement clé pour calculer l'invariant est le suivant : la dépendance en  $n$  dans  $\sigma Z(\widehat{L}, \text{Tp})$  est sous la forme d'un diagramme  $\exp(n\omega)$  où  $\omega$  est une arête qui relie deux parties de  $L$  et le

produit est effectué dans  $\mathcal{A}(\|)$ . Ceci prouve que les diagrammes de  $\sigma Z(\widehat{L}, \text{Tp})$  de degré  $k$  ont pour coefficients des polynômes en  $n$  de degré au plus  $k$ .

Le coefficient de  $\frown$  n'est autre que l'auto-enlacement équivariant de  $L$  : il vaut donc  $\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}(-nt + (2n + \varepsilon) - nt^{-1})$ .

Pour calculer le terme à deux boucles, on recolle les diagrammes restant de toutes les façons possibles avec l'arête marquée  $-\frac{1}{\Delta}$ . On obtient alors des diagrammes de la forme  $\Theta$  ou  $\infty$  que l'on peut transformer en diagrammes de la forme  $\Theta$ . Si on multiplie chaque arête par  $\Delta$  on obtient une expression polynômiale en  $n$  que l'on note  $P(n)$ . Une énumération des possibilités montre que ce degré est inférieur ou égal à 5. De plus, les termes de degré 5 ne peuvent provenir que des diagrammes  $\dashv$  et  $Y$ .

**Lemme 6.6.1.** — *La contribution des diagrammes  $\dashv$  et  $Y$  est nulle et donc  $P$  est de degré 4 en  $n$ .*

*Démonstration.* — La première étape consiste à calculer les coefficients et les coloriages de  $\dashv$  et  $Y$ . Pour cela, on utilise le raisonnement de la section 6.3.

Le coefficient de  $\dashv$  est la moitié de la partie antisymétrique du degré 1 de  $Z(\widehat{L}, \text{Tp})$ , soit  $-\frac{n}{2} \dashv$ . Dans cette expression, la boucle du diagramme est parcourue par  $t$  dans le sens positif. Pour calculer le coefficient de  $Y$ , on remarque qu'un seul diagramme intervient, obtenu en dupliquant la corde transversale. En utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, on déduit que le terme en  $Y$  qui apparaît est  $\frac{n^2}{2}$  où la patte supérieure droite est coloriée par un  $t$  qui arrive au nœud et la patte supérieure gauche par un  $t$  qui part du nœud.

Il suffit de montrer que modulo les diagrammes différents de  $\dashv$  et  $Y$ , la série  $\sigma Z(\widehat{L}, \text{Tp})$  est équivalente à la même série où on a supprimé ces deux diagrammes (voir la définition 4.6.2). Ainsi, elles auront la même intégrale.

Soit  $s$  le diagramme constitué d'une arête dont un sommet est marqué  $x$  et l'autre  $\partial_h$ , parcouru par un  $t$  dirigé de  $x$  vers  $\partial_h$ . La contraction en  $h$  de ce diagramme est nulle.

Considérons donc  $\sigma Z(\widehat{L}, \text{Tp}) \exp(\frac{n}{2}s)$ . C'est un diagramme de type groupe dont la contraction donne  $\sigma Z(\widehat{L}, \text{Tp})$ . D'après le lemme 4.6.3, on obtiendra la même intégrale si on remplace tous les sommets monovalents  $x$  par  $xe^h$  et on contracte. Dans cette opération, on a annulé les contributions de  $\dashv$  et  $Y$ . Cela prouve que ces deux termes ne contribuent pas dans le calcul du terme à deux boucles. Ce dernier est donc bien de degré 4 en  $n$ .  $\square$

On utilise alors 5 valeurs des termes à deux boucles qui sont données dans la table de Rozansky que l'on rappelle en partie après l'avoir corrigée (comparer avec [Roz03]).

Nom du nœud	$n$	Polynôme à deux boucles
$0_1$	0	0
$3_1$	-1	$-s^2t + s^2$
$4_1$	1	0
$5_2$	-2	$-13s^2t + 9s^2 + 6s - 2$
$6_1$	2	$-3s^2t + s^2 + 6s - 4$
$7_2$	-3	$-58s^2t + 36s^2 + 36s - 14$

On en déduit la formule suivante que l'on peut vérifier pour la sixième valeur de  $n$ .

$$P(n) = -\frac{(n-1)n}{2} \left( \frac{3n^2 - n - 1}{3} s^2 t - \frac{n(n-1)}{2} s^2 - n(n+1)s + \frac{3n^2 + 5n + 2}{6} \right)$$

Cette formule coïncide avec une formule proposée récemment par T. Ohtsuki et prouvée indépendamment par des méthodes différentes [Oht03].



### 6.7. Signature d'un nœud et terme à deux boucles

Un des premiers invariants de nœud à avoir été construit est la signature. Cet invariant est une fonction  $\sigma(M, K) : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$  localement constante qui ne change de valeur qu'aux racines du polynôme d'Alexander de  $(M, K)$ . Elle ne dépend que de la classe de  $S$ -équivalence de  $(M, K)$ .

La signature d'un nœud n'est pas de type fini et on ne connaît pas de façon de la déterminer à partir d'invariants de type fini connus.

Dans l'article non publié [Garb], S. Garoufalidis a proposé une formule conjecturale qui permettrait de déduire la fonction signature d'un nœud dans  $S^3$  à partir de ses polynômes de Jones coloriés et plus précisément de son polynôme d'Alexander  $\Delta$  et du premier terme  $Q$  de l'expansion d'Euler de la série des polynômes de Jones. Il a montré que cette formule était vraie pour tous les nœuds ayant moins de 8 croisements et pour les nœuds toriques. En fait, la fonction  $Q$  provient du terme à deux boucles de  $Z^{\text{rat}}(K, S^3)$  par application du système de poids  $sl_2$ .

Après avoir énoncé cette conjecture sous forme diagrammatique, nous proposons un contre-exemple dans la première partie de cette section.

Soit  $K$  un nœud dans  $S^3$  tel que  $\Delta(M, K)$  ait des racines simples et notons  $j : S^1 \rightarrow \mathbb{Z}$  la fonction de saut de la signature de  $K$ , c'est-à-dire que  $j(x) = 0$  si  $x$  n'est pas une racine de  $\Delta(M, K)$  et sinon  $j(x) = \sigma(M, K)(x^+) - \sigma(M, K)(x^-)$ . Nous allons comparer cette fonction avec les pôles d'une fraction rationnelle définie à partir de  $z_2^{\text{rat}}(M, K)$ .

Soit  $\widehat{z_2^{\text{rat}}}(M, K)$  la fraction rationnelle obtenue à partir de  $z_2^{\text{rat}}(M, K)$  en exprimant ce dernier sur le graphe  $\Theta$ , puis supprimant une arête des 3 façons possibles. Cette opération de réduction  $S^{-1}\mathbb{Q}[H^1(\Theta, \mathbb{Z})]^{\text{Aut}(\Theta)} \rightarrow \mathbb{Q}(t)^{\mathbb{Z}/2}$  est bien définie.

On a par exemple  $\widehat{z_2^{\text{rat}}}(S^3, T_{3,2}) = \frac{t^2 - 2t + 1}{2(t-1+t^{-1})^2}$ . La fonction  $Q$  utilisée par S. Garoufalidis est reliée à la partie à deux boucles réduite par la formule  $Q(M, K) = 2(\widehat{z_2^{\text{rat}}}(M, K) + \overline{\widehat{z_2^{\text{rat}}}(M, K)})$ .

On peut interpréter  $Q$  comme une fonction réelle sur  $S^1$ . On définit  $P(M, K)$  sur  $S^1$  de la façon suivante. En  $x_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , la fonction  $Q(\exp(ix))$  est équivalente à  $c/(x - x_0)^m$  pour un certain  $c \neq 0$  et  $m \in \mathbb{Z}$ . On pose alors  $P(M, K)(x_0) = \max(-m, 0) \text{Signe}(c) \text{Signe}(\text{im exp}(ix_0))$ .

**Question 6.7.1 (S. Garoufalidis).** — *Pour tout nœud  $K$  dans  $S^3$  tel que  $\Delta(K)$  ait des racines simples, a-t-on  $j(S^3, K) = P(S^3, K)$  ?*

**Proposition 6.7.2.** — *Il existe un nœud dans  $S^3$  dont le polynôme d'Alexander a des racines simples, mais tel que  $j(S^3, K) \neq P(S^3, K)$ .*

*Démonstration.* — Partons d'une présentation du nœud de trèfle droit  $T$  par sa surface de Seifert, comme dans la figure 13. Sa matrice de Seifert est  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Notons  $B_1$  et  $B_2$  ses bandes et  $C_1, C_2$  deux nœuds en bande dans le complémentaire de la surface qui entourent les bandes  $B_1$  et  $B_2$ . Utilisant la méthode de [GK03] qui permet de passer de la présentation par matrice de Seifert à une présentation chirurgicale, on calcule la matrice d'enlacement de  $(C_1, C_2)$  au sens de Blanchfield. En particulier, on a  $a = \text{Lk}(C_1, C_1) = \frac{t(t-1)(1-t^{-1})}{t^2-t+1}$ .

Considérons 4 copies parallèles de  $C_1$  et un clasper  $G$  à deux composantes plongé dans le complémentaire du nœud, dont les sommets reposent sur les copies de  $C_1$  (voir figure 13). La formule de la proposition 4.4.6 du chapitre 3 permet de calculer  $z_2^{\text{rat}}([(S^3, T), G]) = \langle (S^3, T), G \rangle$ . Les propriétés fondamentales des claspers (voir [Hab00] ou [GGP01]) permettent d'affirmer que

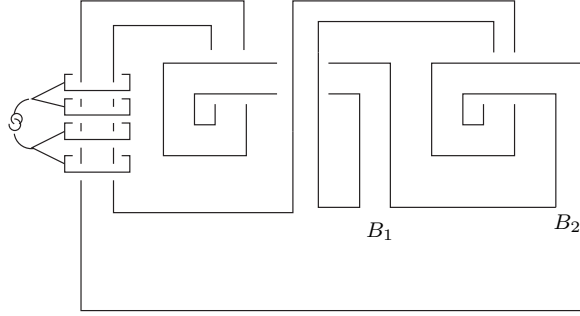


FIGURE 13. Surface de Seifert du nœud de trèfle droit

$[(S^3, T), G] = (S^3, T) - (S^3, T')$  où  $T'$  est un nœud S-équivalent à  $T$ . En particulier,  $j(S^3, T) = j(S^3, T')$ .

Nous calculons  $\widehat{z_2^{\text{rat}}}(S^3, T') - \widehat{z_2^{\text{rat}}}(S^3, T) = \langle (\widehat{S^3, T}), G \rangle$ .

La formule de contraction indique que le terme de droite s'obtient en contractant les sommets d'un graphe  $Y_2$  avec  $a$ . Si on ôte l'arête centrale de  $Y_2$ , on obtient deux arêtes colorées par  $t^i$  et  $t^j$ . Ainsi,  $\langle (\widehat{S^3, T}), G \rangle$  est la somme des diagrammes où on a apparié les sommets de  $Y_2$  puis on a supprimé une arête. Si on garde l'arête centrale dans cette opération, on aura une fraction sans pôles d'ordre 2. Comme on s'intéresse précisément à ces pôles, on les néglige les pôles d'ordre 1. On doit donc supprimer l'arête centrale.

Une énumération des appariements montre que  $\langle (\widehat{S^3, T}), G \rangle = 2a^2(t^{i-j} - t^{i+j}) = -a^2(t^i - t^{-i})(t^j - t^{-j})$  modulo les termes qui n'ont que des pôles de degré  $\leq 1$ . Donc  $Q(S^3, T') - Q(S^3, T) = -24a^2(t^i - t^{-i})(t^j - t^{-j})$  modulo les pôles de degré  $\leq 1$ .

Autour de  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $Q(S^3, T)(\exp(ix))$  est équivalente à  $-\frac{1}{3} \frac{1}{(x - \frac{\pi}{3})^2}$ . On trouve donc l'équivalent :

$$Q(S^3, T')(\exp(ix)) - Q(S^3, T)(\exp(ix)) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{3}}{\sim} 32 \sin\left(\frac{\pi(i-j)}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi(i+j)}{3}\right) \frac{1}{(x - \frac{\pi}{3})^2}.$$

Ainsi le signe des résidus de  $Q(S^3, T)$  et  $Q(S^3, T')$  peuvent varier alors que  $T$  et  $T'$  sont S-équivalents et donc ont la même signature.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [BHMV92] C. BLANCHET, N. HABEGGER, G. MASBAUM & P. VOGEL – « Three manifold invariants derived from the kauffman bracket », *Topology* **31** (1992), no. 4, p. 685–699.
- [BHMV95] ———, « Topological quantum field theories derived from the kauffman bracket », *Topology* **34** (1995), no. 4, p. 883–927.
- [BN95] D. BAR-NATAN – « On the Vassiliev knot invariants », *Topology* **34** (1995), no. 2, p. 423–472.
- [BN97] D. BAR-NATAN – « Non-associative tangles », *Geometric topology (Athens, GA, 1993)* (1997), p. 139–183.
- [BNGRT00] D. BAR-NATAN, S. GAROUFALIDIS, ROZANSKY.L. & D. THURSTON – « Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot », *Israel J. Math.* **119** (2000), p. 217–237.
- [BNGRT02a] D. BAR-NATAN, S. GAROUFALIDIS, L. ROZANSKY & D. P. THURSTON – « The århus integral of rational homology 3-spheres. I. A highly non trivial flat connection on  $S^3$  », *Selecta Math. (N.S.)* **8** (2002), no. 3, p. 315–339.
- [BNGRT02b] ———, « The århus integral of rational homology 3-spheres. II. Invariance and universality », *Selecta Math. (N.S.)* **8** (2002), no. 3, p. 341–371.
- [BNL] D. BAR-NATAN & R. LAWRENCE – « A rational surgery formula for the LMO invariant », arXiv :math.GT/0007045, to appear in Israel J. Math.
- [BNLT03] D. BAR-NATAN, T. LE & D. THURSTON – « Two applications of elementary knot theory to Lie algebras and Vassiliev invariants », *Geom. Topol.* **7** (2003), p. 1–31, arXiv :math.QA/0204311.
- [Bre93] G. BREDON – *Topology and geometry*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.
- [CD00] S. V. CHMUTOV & S. V. DUZHIN – « The Kontsevich integral », *Acta Appl. Math.* **66** (2000), p. 155–190.
- [Dri91] V. DRINFEL'D – « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  », *Leningrad Math. J.* **4** (1991), p. 829–860.
- [FM97] A. T. FOMENKO & S. V. MATVEEV – *Algorithmic and computer methods for three-manifolds*, Kluwer Academic Publishers, 1997.

- [Gara] S. GAROUFALIDIS – « Whitehead doubling persists », arXiv :math.GT/0003189.
- [Garb] S. GAROUFALIDIS – « Does the Jones polynomial determine the signature of a knot ? », arXiv :math.GT/0310203.
- [GGP01] S. GAROUFALIDIS, M. GOUSSAROV & M. POLYAK – « Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds », *Geom. Topol.* **5** (2001), p. 75–108.
- [GK03] S. GAROUFALIDIS & A. KRICKER – « A surgery view of boundary links », *Math. Ann.* **327** (2003), no. 1, p. 103–115.
- [GK04a] ———, « Finite type invariants of cyclic branched covers », *Topology* **43** (2004), p. 1247–1283, arXiv :math.GT/0107220.
- [GK04b] ———, « A rational noncommutative invariant of boundary links », *Geom. Topol.* **8** (2004), p. 115–204, arXiv :math.GT/0105028.
- [GR04] S. GAROUFALIDIS & L. ROZANSKY – « The loop expansion of the kontsevich integral, the null-move and s-equivalence », *Topology* **43** (2004), p. 1183–1210.
- [Hab00] K. HABIRO – « Claspers and finite type invariants of links », *Geom. Topol.* **4** (2000), p. 1–83.
- [Kal98] E. KALFAGIANNI – « Finite type invariants for knots in 3-manifolds », *Topology* **37** (1998), no. 3, p. 673–707.
- [Kau87] L. KAUFFMAN – *On knots*, Annals of Mathematical Studies, vol. 115, Princeton University Press, 1987.
- [Kon96] M. KONTSEVICH – « Vassiliev’s knot invariants », *Adv. in Sov. Math.* **16** (1996), no. 2, p. 137–150.
- [Kri] A. KRICKER – « The lines of the Kontsevich integral and Rozansky’s rationality conjecture », arXiv :math.GT/0005284.
- [Kri02] ———, « A surgery formula for the 2-loop piece of the LMO invariant of a pair. Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001) », *Geom. Topol. Monogr.* **4** (2002), p. 161–181.
- [Les99] C. LESCOP – « Introduction to the Kontsevich integral of framed tangles », Tech. report, Grenoble Summer School, june 1999.
- [Lie] J. LIEBERUM – « The Drinfeld associator of  $\mathfrak{gl}(1|1)$  », arXiv :math.QA/0204346.
- [Lie98] ———, « Invariants de Vassiliev pour les entrelacs dans  $S^3$  and dans les variétés de dimension 3 », Thèse, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1), 1998.
- [LM96] T. LE & J. MURAKAMI – « The Universal Kontsevich-Vassiliev Invariants for Framed Links », *Comp. Math.* **102** (1996), p. 39–66, arXiv :hep-th/9401016.
- [LM97] ———, « The parallel version of the Kontsevich integral », *J. Pure and Applied Algebra* **121** (1997), p. 271–291.
- [LMMO99] T. LE, H. MURAKAMI, J. MURAKAMI & T. OHTSUKI – « A three-manifold invariant via the Kontsevich integral », *Osaka J. Math.* **36** (1999), no. 2, p. 365–395.

- [Marca] J. MARCHÉ – « Surgery on a single clasper and the 2-loop part of the Kontsevich integral », arXiv :math.GT/0410272.
- [Marchb] J. MARCHÉ – « A computation of the Kontsevich integral of torus knots », *Alg. and Geom. Topology*, to appear.
- [Marc04] J. MARCHÉ – « On Kontsevich integral of torus knots », *Topology Appl.* **143** (2004), p. 15–26.
- [Mari] M. MARINO – « Chern-Simons theory, matrix integrals, and perturbative three-manifold invariants », arXiv :hep-th/0207096.
- [MO97] J. MURAKAMI & T. OHTSUKI – « Topological quantum field for the universal quantum invariant », *Commun. Math. Phys.* **188** (1997), p. 201–520.
- [Oht] T. OHTSUKI – « A cabling formula for the 2-loop polynomial of knots », arXiv :math.GT/0310216.
- [Oht03] ———, communication privée, 2003.
- [PM] B. PATUREAU-MIRAND – « Non-injectivity of the Hair map », arXiv :math.GT/0202065.
- [PS97] V. V. PRASOLOV & A. B. SOSSINSKY – *Knots, links, braids and 3-manifolds*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 154, American Mathematical Society, 1997.
- [Rol76] D. ROLFSEN – *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.
- [Roz97] L. ROZANSKY – « Higher order terms in the Melvin-Morton expansion of the colored Jones polynomial », *Comm. Math. Phys.* **183** (1997), p. 291–306.
- [Roz03] ———, « A rationality conjecture about Kontsevich integral of knots and its implications to the structure of the colored Jones polynomial », *Topology Appl.* **127** (2003), p. 47–76.
- [Tch98] V. TCHERNOV – « The most refined Vassiliev invariant of degree one of knots and links in  $\mathbf{R}^1$ -fibrations over a surface », *J. Knot Theory Ramifications* **7** (1998), no. 2, p. 257–266.
- [Thu00] D. THURSTON – « Wheeling : a diagrammatic analogue of the Duflo isomorphism », Thèse, UC Berkeley, 2000, arXiv :math.QA/0006083.
- [Vog93] P. VOGEL – « Invariants de Vassiliev des nœuds (d’après D. Bar-Natan, M. Kontsevich et V. A. Vassiliev) », *Astérisque* **216** (1993), p. 213–232.
- [Vog97] ———, « Algebraic structure on modules of diagrams », Preprint, 1997.
- [Vog00] ———, « Vassiliev theory », Tech. report, MaPhySto, February 2000.
- [Wit89] E. WITTEN – « Quantum field theory and the jones polynomial », *Commun. Math. Phys.* **121** (1989), p. 351–399.