

THÈSE DE DOCTORAT  
de  
l'UNIVERSITÉ PARIS 6  
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES  
présentée par  
Laurent BERGER  
pour obtenir le grade de  
Docteur de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

REPRÉSENTATIONS  $p$ -ADIQUES ET ÉQUATIONS  
DIFFÉRENTIELLES

soutenue le 17 Mai 2001 devant le jury composé de :

M. Pierre Berthelot

M. Bruno Chiarellotto

Rapporteur

M. Gilles Christol

M. Pierre Colmez

Directeur

M. Jean-Marc Fontaine

Rapporteur

M. Jean-Pierre Wintenberger



**Laurent Berger**

---

**REPRÉSENTATIONS  $p$ -ADIQUES ET  
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**

---

*Laurent Berger*

MS 050 Brandeis University, PO Box 549110, Waltham MA 02454-9110.

*E-mail* : laurent@brandeis.edu

*Url* : <http://www.unet.brandeis.edu/~laurent>

---

***Classification mathématique par sujets (2000).*** — 11Gxx, 11Sxx, 12H25, 13K05, 14F30.

***Mots clefs.*** — Périodes  $p$ -adiques, représentations  $p$ -adiques ordinaires, semi-stables, cristallines, de de Rham, monodromie  $p$ -adique, équations différentielles  $p$ -adiques, isocristaux surconvergents, théorie de Hodge  $p$ -adique.

---

*17 Mai 2001*

# REPRÉSENTATIONS $p$ -ADIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Laurent Berger

**Résumé.** — Dans cet article, on montre comment associer à toute représentation  $p$ -adique  $V$ , via la théorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules de Fontaine, une équation différentielle  $p$ -adique  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , c'est-à-dire un module à connexion sur l'anneau de Robba.

Cette construction permet de faire le lien entre la théorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules et la théorie de Hodge  $p$ -adique. On montre par exemple comment construire  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  directement à partir de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , ce qui permet de reconnaître les représentations semi-stables ou cristallines ; la connexion est alors unipotente ou triviale. Alliée à des techniques de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques, l'étude du module  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  permet en outre de donner une nouvelle démonstration d'un théorème de Sen caractérisant les représentations  $\mathbf{C}_p$ -admissibles.

Enfin, on peut utiliser les résultats précédents pour étendre au cas d'un corps résiduel parfait quelconque des résultats de Hyodo ( $H_g^1 = H_{st}^1$ ), de Perrin-Riou (sur la semi-stabilité des représentations ordinaires), de Colmez (les représentations absolument cristallines sont de hauteur finie), et de Bloch et Kato (si  $r \gg 0$ , alors l'exponentielle de Bloch-Kato  $\exp_{V(r)}$  est un isomorphisme) dont les démonstrations (dans le cas d'un corps résiduel fini) reposaient sur des considérations de dimensions de groupes de cohomologie galoisienne.

**Abstract ( $p$ -adic representations and differential equations).** — In this paper, we associate to every  $p$ -adic representation  $V$  a  $p$ -adic differential equation  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , that is to say a module with a connection over the Robba ring. We do this via the theory of Fontaine's  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules.

This construction enables us to relate the theory of  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules to  $p$ -adic Hodge theory. We explain how to construct  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  and  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  from  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , which allows us to recognize semi-stable or crystalline representations; the connection is then either unipotent or trivial. Along with techniques from the theory of  $p$ -adic differential equations, the study of  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  allows us to give a new proof of Sen's theorem characterizing  $\mathbf{C}_p$ -admissible representations.

Finally we can use the previous results to extend to the case of arbitrary perfect residue fields some results of Hyodo ( $H_g^1 = H_{st}^1$ ), of Perrin-Riou (the semi-stability of ordinary representations), of Colmez (absolutely crystalline representations are of finite height), and of Bloch and Kato (if  $r \gg 0$ , then Bloch-Kato's exponential  $\exp_{V(r)}$  is an isomorphism), whose proofs (for a finite residue field) relied on the study of dimensions of Galois cohomology groups.



## REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier Pierre Colmez, qui a dirigé ce travail, pour avoir partagé avec moi ses idées et ses connaissances, et pour m'avoir consacré beaucoup de son temps et de son énergie. Son cours sur les fonctions  $L$   $p$ -adiques a été mon introduction aux anneaux de périodes, et m'a donné envie d'explorer cette voie. Je suis très heureux qu'il ait accepté de diriger mon mémoire de DEA, puis ma thèse, sur ce sujet.

Durant mes recherches, Gilles Christol a répondu à mes nombreuses questions sur les équations différentielles  $p$ -adiques ; je suis content qu'en plus, il fasse partie de mon jury, et je l'en remercie. Bruno Chiarellotto et Jean-Marc Fontaine se sont acquittés d'une tâche peu séduisante : ils ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail, et de plus de faire partie du jury. Je leur en suis très reconnaissant. Pierre Berthelot a répondu à mes questions sur la cohomologie rigide ; je le remercie, ainsi que Jean-Pierre Wintenberger, d'être membre de mon jury.

Pendant les trois ans qu'il m'a fallu pour mener à bien ce travail, j'ai été soutenu financièrement par plusieurs institutions, que je remercie de leur accueil :

- (1) L'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, où j'étais dans ma dernière année de scolarité ;
- (2) l'University of Massachusetts, Amherst, dont le département de mathématiques, dirigé par Don St. Mary, m'a très gentiment accueilli pendant une année ;
- (3) le département de mathématiques de Brandeis University, dirigé par Gerald Schwarz, où je vais rester faire ma coopération en travaillant avec Fred Diamond.

Je voudrais aussi remercier pour leur soutien et leur aide : Jeff Achter, Christophe Breuil, Clifton Cunningham, Fred Diamond, Adrian Iovita, Peter Norman et Glenn Stevens.

Il en va de même pour ma famille et mes amis, et bien sûr pour Mirela.

Enfin, je tiens particulièrement à remercier Nicolas Tosel, qui m'a appris tant de mathématiques.





# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b> .....	vii
<b>Introduction</b> .....	11
0.1. Généralités et notations .....	11
0.2. Théorie de Hodge $p$ -adique et $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules .....	12
0.3. Structures différentielles sur les $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules .....	13
0.4. Extensions de représentations semi-stables .....	14
0.5. Plan de l'article .....	15
<b>I. Rappels et notations</b> .....	17
I.1. Le corps $\tilde{\mathbf{E}}$ et ses sous-anneaux .....	17
I.2. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ et ses sous-anneaux .....	19
I.3. L'anneau $\tilde{\mathbf{B}}$ et ses sous-anneaux .....	20
<b>II. Les anneaux <math>\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+</math> et <math>\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+</math></b> .....	23
II.1. Les anneaux $\tilde{\mathbf{A}}_I$ .....	23
II.2. Plongement des $\tilde{\mathbf{A}}_I$ dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ .....	27
II.3. Les anneaux $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ .....	29
II.4. Les anneaux $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger, r}$ et leurs plongements dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ .....	31
II.5. Action de $H_K$ sur $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ .....	33

II.6. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ .....	34
<b>III. Application aux représentations <math>p</math>-adiques</b> .....	37
III.1. Régularisation par le Frobenius .....	37
III.2. Représentations semi-stables .....	38
III.3. Représentations cristallines et représentations de hauteur finie .....	41
<b>IV. Propriétés de <math>\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}</math></b> .....	45
IV.1. L'opérateur $\nabla$ .....	45
IV.2. Inversion de $1 - \gamma_K$ .....	47
IV.3. Dualité dans $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ .....	49
<b>V. Structures différentielles sur les <math>(\varphi, \Gamma_K)</math>-modules</b> .....	51
V.1. L'opérateur $\nabla_V$ .....	51
V.2. Application aux représentations semi-stables .....	53
V.3. Les modules $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$ .....	54
V.4. Représentations $\mathbf{C}_p$ -admissibles .....	56
<b>VI. Extensions de représentations semi-stables</b> .....	61
VI.1. Cohomologie galoisienne et $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules .....	62
VI.2. Réduction au cas où $k$ est algébriquement clos .....	63
VI.3. Semi-stabilité des représentations ordinaires .....	65
VI.4. Extensions de représentations semi-stables .....	66
VI.5. L'exponentielle de Bloch-Kato .....	70
<b>Diagramme des anneaux de périodes</b> .....	73
<b>Index des notations</b> .....	75
<b>Bibliographie</b> .....	77

# INTRODUCTION

## 0.1. Généralités et notations

Dans tout cet article  $k$  est un corps parfait de caractéristique  $p$ , et  $F$  est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ . Soit  $K$  une extension finie totalement ramifiée de  $F$ , ce qui fait que le corps résiduel de  $\mathcal{O}_K$  s'identifie à  $k$  et que le corps  $K$  est complet pour la valuation  $v_p$  qui étend celle de  $F$ . Soit  $\mathbf{C}_p$  le complété d'une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$ . On s'intéressera aux représentations  $p$ -adiques  $V$  du groupe de Galois absolu  $G_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$  c'est-à-dire aux  $\mathbf{Q}_p$ -espaces vectoriels de dimension finie  $d$  munis d'une action linéaire et continue de  $G_K$ .

J-M. Fontaine a construit dans [20] une équivalence de catégories  $V \mapsto \mathbf{D}(V)$  entre la catégorie de toutes les représentations de  $G_K$  et la catégorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules étales (le foncteur inverse est noté  $D \mapsto \mathbf{V}(D)$ ). Un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps local  $\mathbf{B}_K$  de dimension 2 muni d'une action semi-linéaire d'un Frobenius  $\varphi$  et d'une action semi-linéaire de  $\Gamma_K$  commutant à celle de  $\varphi$ . Un tel module est étale si  $\varphi$  est de pente 0 (« unit root »). Le corps  $\mathbf{B}_K$  est isomorphe (non canoniquement) à l'anneau des séries  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  en l'indéterminée  $T$  où la suite  $a_k$  est une suite bornée d'éléments de  $F$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{-k} = 0$ . L'action de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$  est assez compliquée en général mais si  $K$  est non-ramifié ( $K = F$ ), alors on peut choisir  $T$  de telle sorte que  $\varphi(T) = (1 + T)^p - 1$  et  $\gamma(T) = (1 + T)^{\chi(\gamma)} - 1$  (dans le corps du texte,  $T$  est égal à un élément  $\pi_K$  construit via la théorie du corps des normes et l'action de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$  provient d'une action naturelle ; si  $K = F$ , on a  $\pi_K = \pi = [\varepsilon] - 1$ ).

L'anneau  $\mathbf{B}_K$  est assez désagréable mais il contient l'anneau  $\mathbf{B}_K^\dagger$  des séries surconvergentes, c'est-à-dire l'anneau des séries  $A(T) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  où la suite  $a_k$  est une suite bornée d'éléments de  $F$  et il existe  $r < 1$  tel que la série  $A(T)$  converge sur une couronne non-vide du type  $\{z \in \mathbf{C}_p, r < |z| < 1\}$ . Le théorème principal de [6] est que tout  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale provient

par extension des scalaires d'un « module surconvergent » ; plus précisément on a le résultat suivant

**Théorème 0.1.** — *Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module étale, alors l'ensemble des sous- $\mathbf{B}_K^\dagger$ -modules libres de type fini stables par  $\varphi$  et  $\Gamma_K$  admet un plus grand élément  $D^\dagger$  et on a  $D = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D^\dagger$ .*

Le fait que l'ensemble des sous- $\mathbf{B}_K^\dagger$ -modules libres de type fini stables par  $\varphi$  et  $\Gamma_K$  admet un plus grand élément est un résultat de Cherbonnier [5], et moyennant ce résultat, le théorème est énoncé dans [6] de manière duale (via le foncteur  $D \mapsto \mathbf{V}(D)$ ) sous la forme « toute représentation de  $G_K$  est surconvergente ». Grâce à ce résultat, on va pouvoir tensoriser au-dessus de  $\mathbf{B}_K^\dagger$  avec l'anneau de Robba  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  (apparaissant dans les théorie des équations différentielles  $p$ -adiques), constitué des séries  $A(T) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  telles que  $a_k \in F$  et qu'il existe  $r < 1$  tel que la série  $A(T)$  converge sur une couronne non-vide du type  $\{z \in \mathbf{C}_p, r < |z| < 1\}$  (sans condition de croissance au voisinage de  $\{z \in \mathbf{C}_p, |z| = 1\}$ ). Ceci va nous permettre, si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , d'une part de retrouver les invariants  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  associés à  $V$  par la théorie de Hodge  $p$ -adique et, d'autre part, en utilisant l'action infinitésimale de  $\Gamma_K$ , d'associer à  $V$  un module à connexion  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  sur l'anneau de Robba  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ . Cet article rassemble un certain nombre de résultats que l'on peut obtenir via l'étude de ce module à connexion : caractérisation des représentations absolument cristallines, semi-stables, de de Rham et  $\mathbf{C}_p$ -admissibles et applications à la conjecture de « monodromie  $p$ -adique ».

## 0.2. Théorie de Hodge $p$ -adique et $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules

Soient  $\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[\log(T)]$  (anneau muni des actions évidentes de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$ ),  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  et  $\mathbf{D}_{\log}^\dagger(V) = \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ . Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , soient  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ ,  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  les modules associés à  $V$  par la théorie de Hodge  $p$ -adique. Le premier résultat est que l'on peut retrouver ces modules

**Théorème 0.2.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors*

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\mathbf{D}_{\log}^\dagger(V)[1/t])^{\Gamma_K} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)[1/t])^{\Gamma_K}.$$

*De plus :*

- (1) *si  $V$  est une représentation semi-stable, alors*

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$$

(2) si  $V$  est une représentation cristalline, alors

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[1/t]$$

Dans l'énoncé ci-dessus le  $t$  qui apparaît est un élément de  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  sur lequel  $\Gamma_K$  agit via  $\gamma(t) = \chi(\gamma)t$  et tel que  $\varphi(t) = pt$  ; si  $K = F$ , on a  $t = \log(1 + T)$ .

Les modules  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  sont naturellement munis d'un Frobenius  $\varphi$ , d'un opérateur de monodromie  $N$  et d'une filtration. Le théorème précédent permet de retrouver les actions de  $\varphi$  et  $N$ , mais la recette permettant de retrouver la filtration est suffisamment peu ragoûtante pour ne pas être explicitée dans cet article.

Un corollaire de ce théorème est le résultat suivant :

**Corollaire 0.3.** — *Si  $V$  est une représentation cristalline de  $G_F$ , alors  $V$  est de hauteur finie.*

Ce résultat avait été conjecturé par Fontaine (voir [20, 40]) et démontré par Colmez de manière très détournée (la démonstration utilisait deux versions [11, 7] de la démonstration de la loi de réciprocité conjecturée par Perrin-Riou [29]) dans le cas d'un corps résiduel fini. La démonstration donnée dans cet article utilise à la place le théorème ci-dessus et un résultat d'analyse  $p$ -adique démontré par Kedlaya [25]. Signalons que Benois [2] a par ailleurs démontré la loi de réciprocité de Perrin-Riou pour les représentations cristallines de hauteur finie ce qui, combiné avec le résultat ci-dessus, fournit une démonstration de cette loi de réciprocité dans le cas général, n'utilisant que la théorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules, réalisant ainsi un programme de Fontaine.

### 0.3. Structures différentielles sur les $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules

Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma_K$  assez proche de 1. La série qui définit  $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  converge vers un opérateur différentiel  $\nabla$  ; si  $K = F$  on a  $\nabla = \log(1 + T)(1 + T)\frac{d}{dT}$ . Si  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}$  est l'anneau des séries convergeant sur la couronne  $\{p^{-1/e_K r_n} \leq |z| < 1\}$  (où  $e_K = [K_\infty : F_\infty]$  et  $r_n = (p - 1)p^{n-1}$ ), alors  $\nabla$  stabilise  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}$  pour  $n$  assez grand et on dispose de plus de morphismes injectifs  $\iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n} \rightarrow K_n[[t]]$  qui vérifient  $\iota_n \circ \nabla = t \frac{d}{dt} \circ \iota_n$ .

Ce qui précède correspond au cas de la représentation triviale et, plus généralement, si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  et si  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_K$  assez proche de 1, la série qui définit  $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  converge vers un opérateur différentiel  $\nabla_V$  de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  au-dessus de  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  muni de  $\nabla$ . Plus précisément, si  $n$  est assez grand,  $\nabla_V$  stabilise le sous-module  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V)$

ce qui permet d'associer à toute représentation  $p$ -adique de  $G_K$  un module différentiel sur une couronne.

En localisant en  $\zeta - 1$  (où  $\zeta$  est une racine primitive d'ordre  $p^n$  de l'unité), ce qui revient à considérer l'application  $\iota_n : \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V) \rightarrow (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ , on retombe sur le module différentiel considéré par Fontaine dans [21, chap. 3], ce qui permet en particulier de retrouver le module  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  à partir du noyau de cette connexion. En utilisant l'application  $\theta : \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$ , on retombe sur le module de Sen ; la connexion devenant un opérateur  $K_n$ -linéaire dont les valeurs propres sont les « poids de Hodge-Tate généralisés ». En particulier,  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible (ce qui équivaut à  $V$  de Hodge-Tate et tous ses poids de Hodge-Tate sont nuls) si et seulement si cet opérateur est nul. Utilisant ce fait et des techniques d'équations différentielles  $p$ -adiques (plus précisément un théorème de Tsuzuki [8, 39]) on obtient une démonstration du résultat suivant, dû à Sen [33], qui caractérise les représentations  $\mathbf{C}_p$ -admissibles :

**Théorème 0.4.** — *Si  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible ;
- (2) le sous-groupe d'inertie de  $G_K$  agit sur  $V$  à travers un quotient fini.

Finalement, il sort essentiellement du théorème 0.2 que

**Théorème 0.5.** — *Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique, alors il existe  $n$  tel que la restriction de  $V$  à  $G_{K(\mu_{p^n})}$  est semi-stable (respectivement cristalline) si et seulement si  $\nabla_V$  est une connexion unipotente (respectivement triviale) sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t]$ .*

#### 0.4. Extensions de représentations semi-stables

Si l'on combine les différentes techniques évoquées ci-dessus et le calcul de la cohomologie galoisienne des représentations  $p$ -adiques [22, 7] on peut démontrer les deux résultats suivants :

**Théorème 0.6.** — (1) *Toute représentation ordinaire de  $G_K$  est semi-stable ;*  
 (2) *une extension de deux représentations semi-stables qui est de de Rham est elle-même semi-stable («  $H_g^1 = H_{st}^1$  »).*

Ces deux résultats étaient connus dans le cas d'un corps résiduel fini, où on peut les déduire de calculs de dimension de groupes de cohomologie galoisienne (ce qui n'est plus possible si le corps résiduel n'est pas fini).

Le premier avait été démontré dans ce cas là par Perrin-Riou [28, 29, 30] comme corollaire des calculs de Bloch et Kato [4] et le deuxième par Hyodo [23, 27]. Le même genre de méthodes permet de montrer que si  $V$  est une représentation semi-stable de  $G_K$ , alors quand  $r \gg 0$ , l'exponentielle de Bloch-Kato  $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\text{dR}}(V(r)) \rightarrow H^1(K, V(r))$  est un isomorphisme, résultat démontré par Bloch et Kato dans le cas d'un corps résiduel fini via des arguments de dimension.

Mentionnons que l'on conjecture que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable (conjecture de « monodromie  $p$ -adique » [19]) ce qui a été démontré par Fontaine (non publié) en dimension 2. Le (2) du théorème 0.6 permet de ramener cette conjecture au cas irréductible. On peut espérer que les techniques développées dans ce texte permettront de ramener cette conjecture aux conjectures du même nom de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques [16, 25, 38, 1].

## 0.5. Plan de l'article

Cet article comporte six chapitres (§) subdivisés en n°. Le premier § est consacré à des rappels sur les représentations  $p$ -adiques et les anneaux de Fontaine. Dans le deuxième on donne la construction des anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^\dagger$ , qui sont fondamentaux pour ce qui suit. On donne dans le troisième § une application de ces constructions : comment retrouver  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  à partir du  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module  $\mathbf{D}(V)$ . Le quatrième § est consacré à l'étude de la connexion  $\nabla$  sur l'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ , ce qui permet de définir dans le cinquième § l'équation différentielle associée à une représentation  $p$ -adique ; on donne des applications à la théorie de Fontaine et à la théorie de Sen. Enfin dans le sixième § on montre que les constructions précédentes permettent de démontrer que certaines représentations sont semi-stables.

Le théorème 0.2 est la réunion du théorème III.6 et de la proposition III.7. Le corollaire 0.3 est l'objet du théorème III.9, le théorème 0.4 correspond à la proposition V.11 et le théorème 0.5 à la proposition V.6. Le premier point de 0.6 est démontré dans le n° VI.3 et le deuxième point dans le n° VI.4. Cet article comporte deux appendices pour le rendre plus lisible : un diagramme des anneaux de périodes, et un index des notations.





# CHAPITRE I

## RAPPELS ET NOTATIONS

Ce § est entièrement constitué de rappels sur la théorie des représentations  $p$ -adiques. On se reportera à [6, 7, 11, 18, 19, 20] ou aussi [14] pour la démonstration des faits qui sont rappelés ici. Pour ce qui est de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques et des isocristaux surconvergents, le lecteur pourra se reporter à [9, 10, 16, 25, 38, 39].

La principale stratégie pour étudier les représentations  $p$ -adiques d'un groupe  $G$  est de construire des  $\mathbf{Q}_p$ -algèbres topologiques  $B$  munies d'une action du groupe  $G$  et de structures supplémentaires de telle manière que si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $D_B(V) = (B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G$  est un  $B^G$ -module qui hérite de ces structures, et que le foncteur qui à  $V$  associe  $D_B(V)$  fournisse des invariants intéressants de  $V$ . On dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G$  est  $B$ -admissible si on a  $B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \simeq B^d$  en tant que  $G$ -modules.

### I.1. Le corps $\tilde{\mathbf{E}}$ et ses sous-anneaux

Soit  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ ,  $F$  le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt sur  $k$  et  $K$  une extension finie totalement ramifiée de  $F$ . Soit  $\bar{F}$  une clôture algébrique de  $F$  et  $\mathbf{C}_p = \widehat{\bar{F}}$  sa complétion  $p$ -adique. On pose  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ , c'est aussi le groupe des automorphismes continus  $K$ -linéaires de  $\mathbf{C}_p$ . Le corps  $\mathbf{C}_p$  est un corps complet algébriquement clos de corps résiduel  $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p} = \bar{k}$ . On pose aussi  $K_n = K(\mu_{p^n})$  et  $K_\infty$  est défini comme étant la réunion des  $K_n$ . Soit  $H_K$  le noyau du caractère cyclotomique  $\chi : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$  et  $\Gamma_K = G_K/H_K$  le groupe de Galois de  $K_\infty/K$  qui s'identifie via le caractère cyclotomique à un sous-groupe ouvert de  $\mathbf{Z}_p^*$ .

Soient

$$\tilde{\mathbf{E}} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbf{C}_p = \{(x^{(0)}, x^{(1)}, \dots) \mid (x^{(i+1)})^p = x^{(i)}\}$$

et  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  l'ensemble des  $x \in \tilde{\mathbf{E}}$  tels que  $x^{(0)} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ . Si  $x = (x^{(i)})$  et  $y = (y^{(i)})$  sont deux éléments de  $\tilde{\mathbf{E}}$ , alors on définit leur somme  $x + y$  et leur produit  $xy$  par :

$$(x + y)^{(i)} = \lim_{j \rightarrow \infty} (x^{(i+j)} + y^{(i+j)})p^j \text{ et } (xy)^{(i)} = x^{(i)}y^{(i)}$$

ce qui fait de  $\tilde{\mathbf{E}}$  un corps de caractéristique  $p$  dont on peut montrer qu'il est algébriquement clos. Si  $x = (x^{(n)})_{n \geq 0} \in \tilde{\mathbf{E}}$  soit  $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$ . C'est une valuation sur  $\tilde{\mathbf{E}}$  pour laquelle celui-ci est complet ; l'anneau des entiers de  $\tilde{\mathbf{E}}$  est  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  et l'idéal maximal est  $\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}} = \{x \in \tilde{\mathbf{E}}, v_{\mathbf{E}}(x) > 0\}$ . Soit  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  l'anneau  $W(\tilde{\mathbf{E}}^+)$  des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  et  $\tilde{\mathbf{B}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+[1/p] = \{\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k], x_k \in \tilde{\mathbf{E}}^+\}$  où  $[x] \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  est le relèvement de Teichmüller de  $x \in \tilde{\mathbf{E}}^+$ . Cet anneau est muni d'une application  $\theta : \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$  définie de la manière suivante :

$$\theta \left( \sum_{k \geq 0} p^k [x_k] \right) = \sum_{k \geq 0} p^k x_k^{(0)}$$

Soient  $\varepsilon = (\varepsilon^{(i)}) \in \tilde{\mathbf{E}}^+$  avec  $\varepsilon^{(0)} = 1$  et  $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ ,  $\pi = [\varepsilon] - 1$ ,  $\pi_n = [\varepsilon^{p^{-n}}] - 1$ ,  $\omega = \pi/\pi_1$  et  $q = \varphi(\omega) = \varphi(\pi)/\pi$ . Alors  $\ker(\theta)$  est l'idéal principal engendré par  $\omega$ . De même soit  $\tilde{p} = (p^{(n)}) \in \tilde{\mathbf{E}}^+$  avec  $p^{(0)} = p$ , alors  $\ker(\theta)$  est aussi engendré par  $[\tilde{p}] - p$ .

Remarquons que  $\varepsilon$  est un élément de  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  tel que  $v_{\mathbf{E}}(\varepsilon - 1) = p/(p-1)$ . On pose  $\mathbf{E}_F = k((\varepsilon - 1))$  et on définit  $\mathbf{E}$  comme étant la clôture séparable de  $\mathbf{E}_F$  dans  $\tilde{\mathbf{E}}$  ainsi que  $\mathbf{E}^+ = \mathbf{E} \cap \tilde{\mathbf{E}}^+$  et  $\mathfrak{m}_{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cap \mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}}$  l'anneau des entiers et l'idéal maximal de  $\mathbf{E}$ . On renvoie à [7, p. 243] pour une application de la théorie du corps de normes [42] à la construction d'une application  $\iota_K : \varprojlim \mathcal{O}_{K_n} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}}^+$  de la limite projective des  $\mathcal{O}_{K_n}$  relativement aux applications normes dans  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  dont la principale propriété est la suivante :

**Proposition I.1.** — *L'application  $\iota_K$  induit une bijection de  $\varprojlim \mathcal{O}_{K_n}$  sur l'anneau des entiers  $\mathbf{E}_K^+$  de  $\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{H_K}$ .*

On remarquera que la proposition ci-dessus est énoncée dans [7, I.1.1] avec la restriction supplémentaire que  $K/\mathbf{Q}_p$  est finie mais ceci n'est pas nécessaire (en revanche il est important que  $K/F$  soit finie).

De plus on peut montrer de la même manière que  $\mathbf{E}_K$  est une extension finie séparable de  $\mathbf{E}_F$  de degré  $e_K = [K_\infty : F_\infty]$  et de groupe de Galois  $H_F/H_K$  et que le groupe de Galois  $\text{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K)$  s'identifie à  $H_K$ . Enfin  $\mathbf{E}_K^+$  est un anneau de valuation discrète de la forme  $k[[\bar{\pi}_K]]$  où  $\bar{\pi}_K = \iota_K(\varpi_K)$  est l'image d'une suite  $\varpi_K$  d'uniformisantes compatibles pour les normes des  $\mathcal{O}_{K_n}$ .

## I.2. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ et ses sous-anneaux

L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  est défini comme étant le complété pour la topologie  $\ker(\theta)$ -adique de  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  (on remarquera que  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  est complet pour cette topologie) :

$$\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = \varprojlim_{n \geq 0} \tilde{\mathbf{B}}^+ / (\ker(\theta)^n)$$

c'est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal  $\ker(\theta)$  ; la série qui définit  $\log([\varepsilon])$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  vers un élément  $t$ , qui est un générateur de l'idéal maximal, ce qui fait que  $\mathbf{B}_{\text{dR}} = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[1/t]$  est un corps, muni d'une action de  $G_F$  et d'une filtration définie par  $\text{Fil}^i(\mathbf{B}_{\text{dR}}) = t^i \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  pour  $i \in \mathbf{Z}$ .

On dit qu'une représentation  $V$  de  $G_K$  est de de Rham si elle est  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ -admissible ce qui équivaut à ce que le  $K$ -espace vectoriel  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ .

L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$  est défini comme étant

$$\mathbf{B}_{\text{max}}^+ = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n \frac{\omega^n}{p^n} \text{ où } a_n \in \tilde{\mathbf{B}}^+ \text{ est une suite qui tend vers } 0 \right\}$$

et  $\mathbf{B}_{\text{max}} = \mathbf{B}_{\text{max}}^+[1/t]$ . On peut d'ailleurs remplacer  $\omega$  par n'importe quel générateur de  $\ker(\theta)$ , par exemple  $[\tilde{p}] - p$ . Cet anneau se plonge canoniquement dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  (les séries définissant ses éléments convergent dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ ) et en particulier il est muni de l'action de Galois et de la filtration induites par celles de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ , ainsi que d'un Frobenius  $\varphi$ , qui étend l'application  $\varphi : \tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^+$  déduite de  $x \mapsto x^p$  dans  $\tilde{\mathbf{E}}^+$ . On remarquera que  $\varphi$  ne se prolonge pas par continuité à  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ . On pose  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}_{\text{max}}^+)$  (on remarquera que l'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  est l'anneau  $\mathbf{B}_{\text{cont}}^+$  de [11]). La notation s'explique par le fait que l'on a un isomorphisme [3]  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = H_{\text{rig}}^0(\mathcal{O}_{\overline{K}}, W(k))$ .

On dit qu'une représentation  $V$  de  $G_K$  est cristalline si elle est  $\mathbf{B}_{\text{max}}$ -admissible ou, ce qui revient au même,  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[1/t]$ -admissible ; ceci équivaut à ce que le  $F$ -espace vectoriel

$$\mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{max}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

est de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . Alors  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  est muni d'un Frobenius et d'une filtration induits par ceux de  $\mathbf{B}_{\text{max}}$ , et  $(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = K \otimes_F \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  ce qui fait qu'une représentation cristalline est aussi de de Rham.

La série qui définit  $\log(\overline{\pi}^{(0)}) + \log([\overline{\pi}]/\overline{\pi}^{(0)})$  (après avoir choisi  $\log(p)$  et où  $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$ ) converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  vers un élément  $\log[\overline{\pi}]$  qui est transcendant sur  $\text{Frac } \mathbf{B}_{\text{max}}^+$  et on pose  $\mathbf{B}_{\text{st}} = \mathbf{B}_{\text{max}}[\log[\overline{\pi}]]$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+ = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+[\log[\overline{\pi}]]$ . On dit qu'une représentation  $V$  est semi-stable si elle est  $\mathbf{B}_{\text{st}}$ -admissible ou, ce qui revient au même,  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+[1/t]$ -admissible ; ceci équivaut à ce que le

$F$ -espace vectoriel

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^+[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

est de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . Alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  est muni d'un Frobenius, d'une filtration et d'un opérateur de monodromie  $N = -d/d \log[\bar{\pi}]$  qui vérifie  $N\varphi = p\varphi N$  (voir [37] pour une justification du signe «  $-$  »), et  $(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = K \otimes_F \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ . De plus  $V$  est cristalline si et seulement si elle est semi-stable et  $N = 0$  sur  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ . On utilisera aussi le  $F$ -espace vectoriel  $\mathbf{D}_{\text{st}}^+(V) = (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ .

### I.3. L'anneau $\tilde{\mathbf{B}}$ et ses sous-anneaux

Soit  $\tilde{\mathbf{A}}$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\tilde{\mathbf{E}}$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{A}}[1/p]$ . Soit  $\mathbf{A}_F$  le complété de  $\mathcal{O}_F[\pi, \pi^{-1}]$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  pour la topologie de celui-ci, c'est aussi le complété  $p$ -adique de  $\mathcal{O}_F[[\pi]][[\pi^{-1}]]$ . C'est un anneau de valuation discrète complet dont le corps résiduel est  $\mathbf{E}_F$ . Soit  $\mathbf{B}$  le complété de l'extension maximale non ramifiée de  $\mathbf{B}_F = \mathbf{A}_F[1/p]$  dans  $\tilde{\mathbf{B}}$ . On définit alors  $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{A}}$  et  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A} \cap \tilde{\mathbf{A}}^+$ . Ces anneaux sont munis d'une action de Galois et d'un Frobenius déduits de ceux de  $\tilde{\mathbf{E}}$ . On pose  $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{H_K}$  et  $\mathbf{B}_K = \mathbf{A}_K[1/p]$ . Quand  $K = F$  les deux définitions coïncident.

Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  soit  $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ . On sait [20] que  $\mathbf{D}(V)$  est un  $\mathbf{B}_K$ -espace vectoriel de dimension  $d = \dim(V)$  muni d'un Frobenius et d'une action résiduelle de  $\Gamma_K$  qui commutent (c'est un  $(\varphi, \Gamma_K)$  module) et que l'on peut récupérer  $V$  grâce à la formule  $V = (\mathbf{D}(V) \otimes_{\mathbf{B}_K} \mathbf{B})^{\varphi=1}$ .

Le corps  $\mathbf{B}$  est une extension totalement inséparable (« radicielle ») de degré  $p$  de  $\varphi(\mathbf{B})$ . Le Frobenius  $\varphi : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$  est injectif, mais n'est donc pas surjectif, et il est utile d'en définir un inverse à gauche par la formule :  $\psi(x) = \varphi^{-1}(p^{-1} \text{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x))$ .

Tout élément de  $\tilde{\mathbf{B}}$  peut s'écrire de manière unique sous la forme  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  où les  $x_k$  sont des éléments de  $\tilde{\mathbf{E}}$ . On définit  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,0} = \tilde{\mathbf{B}}^+$  et, si  $r > 0$ , on pose

$$\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} = \{x \in \tilde{\mathbf{B}}, \lim_{k \rightarrow +\infty} v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{pr}{p-1}k = +\infty\}$$

Si  $r \in \mathbf{R}$  on définit  $n(r)$  comme étant le plus petit entier  $n$  tel que  $r \geq r_n = p^{n-1}(p-1)$ . La série  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  si et seulement si la série  $\sum_{k \gg -\infty} p^k x_k^{(0)}$  converge dans  $\mathbf{C}_p$ . On en déduit notamment pour  $n$  entier tel que  $p^{n-1}(p-1) \geq r$  une application injective  $\iota_n = \varphi^{-n} : \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  qui envoie  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  sur la somme de la série  $\sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k^{p^{-n}}]$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . Soient  $\mathbf{B}^{\dagger,r} = \mathbf{B} \cap \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \cup_{r \geq 0} \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  et  $\mathbf{B}^{\dagger} = \cup_{r \geq 0} \mathbf{B}^{\dagger,r}$ .

Enfin  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$  est l'ensemble des  $x \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  tels qu'en plus,  $v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{pr}{p-1}k \geq 0$ ,  $\mathbf{A}^{\dagger,r} = \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r} \cap \mathbf{A}$ , et  $\mathbf{A}^{\dagger} = \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger} \cap \mathbf{A}$  où  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger} = \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger} \cap \tilde{\mathbf{A}}$ .

**Remarque I.2.** — La notation adoptée ici diffère un peu de celle de [6, 7]. Ce que nous appelons  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  (respectivement  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r_n}$ ) y est noté  $\tilde{\mathbf{B}}_{r-}^{\dagger}$  (respectivement  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ ).

On dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  est surconvergente si  $\mathbf{D}(V)$  possède une base sur  $\mathbf{B}_K$  constituée d'éléments de  $\mathbf{D}^{\dagger}(V) = (\mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ . Rappelons le résultat principal [6, 7] à ce sujet :

**Théorème I.3.** — *Toute représentation  $V$  de  $G_K$  est surconvergente, c'est-à-dire qu'il existe  $r(V)$  tel que  $\mathbf{D}(V) = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,r(V)}} \mathbf{D}^{\dagger,r(V)}(V)$ . De plus il existe  $s(V)$  tel que  $\mathbf{D}(V)^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^{\dagger,s(V)}(V)$ .*

Si on applique le deuxième point à la représentation triviale, on en déduit par exemple qu'il existe  $s(\mathbf{Q}_p)$  tel que  $\mathbf{B}_K^{\psi=1} \subset \mathbf{B}_K^{\dagger,s(\mathbf{Q}_p)}$ . On a d'autre part une description assez précise des anneaux  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$ , comme le montre la proposition suivante :

**Proposition I.4.** — *Il existe  $n(K) \in \mathbf{N}$  et  $\pi_K \in \mathbf{A}_K^{\dagger,r_{n(K)}}$  dont l'image modulo  $p$  est une uniformisante  $\bar{\pi}_K$  de  $\mathbf{E}_K$ . Si  $r \geq r_{n(K)}$ , alors tout élément  $x \in \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  peut s'écrire  $x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \pi_K^k$  où  $a_k \in F$  et où la série  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  est holomorphe et bornée sur la couronne ouverte  $\{p^{-1/e_K r} < |T| < 1\}$  et converge sur le bord intérieur.*

Afin de montrer le théorème I.3 un ingrédient important est la construction d'applications de « décomplétion »  $R_m$  que nous allons décrire plus en détail. On a des inclusions  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r} \subset \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$  et pour  $m \geq 1$   $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{\dagger,r}) \subset \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$ , qui vérifient [6, III.2] :

**Proposition I.5.** — *Ces inclusions admettent des sections continues  $R_0 : \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  et pour  $m \geq 1$   $R_m : \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \rightarrow \varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{\dagger,r})$ . Soit  $R_m^* = R_m - R_{m-1}$ . Alors il existe  $n_0(K)$  tel que si  $n \geq n_0(K)$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $x \in \pi^a \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r_n}$ , alors :*

$$R_0(x) \in \pi^a \mathbf{A}_K^{\dagger,r_n} \text{ et } R_m^*(x) \in \pi^a \varphi^{-m}((\mathbf{A}_K^{\dagger,r_{n+m}})^{\psi=0})$$

On a de plus les propriétés suivantes :

- (1)  $R_0 \circ \varphi^m = \varphi^m \circ R_m$  ;
- (2)  $R_m$  et les  $R_k^*$  pour  $k \geq m + 1$  sont  $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K^{\dagger})$ -linéaires ;
- (3) si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger}$ , alors  $x = \lim_{m \rightarrow +\infty} R_m(x)$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_K$ .



## CHAPITRE II

### LES ANNEAUX $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ ET $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^\dagger$

Soit  $\alpha < 1$  et  $\mathcal{B}_F^\alpha(X)$  l'ensemble des séries  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$  avec  $a_k \in F$  une suite bornée telle que tout  $\rho \in [\alpha; 1[$  on ait  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |a_k| \rho^k = 0$ . Les rappels du § précédent montrent que, si  $r \in \mathbf{R}$  et  $\alpha(K, r) = p^{-1/e_K r}$ , l'application  $f \mapsto f(\pi_K)$  de  $\mathcal{B}_F^{\alpha(K, r)}$  dans  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r}$  est un isomorphisme.

Soit  $\mathcal{H}_F^\alpha(X)$  l'ensemble des séries  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$  avec  $a_k \in F$  et telles que tout  $\rho \in [\alpha; 1[$ ,  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |a_k| \rho^k = 0$ . Alors  $\cup_{\alpha < 1} \mathcal{H}_F^\alpha$  est l'anneau de Robba à coefficients dans  $F$  dont il a été question dans l'introduction. Afin de faire le lien entre représentations  $p$ -adiques et équations différentielles, on va définir un anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} \supset \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  tel que  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r})^{H_K}$  contienne  $\mathcal{H}_F^{\alpha(K, r)}(\pi_K)$ . Si  $f(X) \in \mathcal{H}_F^\alpha(X)$  et  $I$  est un intervalle compact  $\subset [\alpha; 1[$ , on pose  $V_I(f) = \inf v_p(f(z))$ ,  $|z| \in I$ . Alors  $\mathcal{B}_F^\alpha(X)$  est muni de la topologie de Fréchet définie par l'ensemble des  $V_I$  et son complété pour cette topologie s'identifie à  $\mathcal{H}_F^\alpha(X)$ . Il est donc naturel de chercher  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  sous la forme d'un sous-anneau du complété de  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  pour une topologie ressemblant à celle qui est définie par les  $V_I$  : c'est l'objet de ce §.

#### II.1. Les anneaux $\tilde{\mathbf{A}}_I$

Dans toute ce §,  $r$  et  $s$  sont deux éléments de  $\mathbf{N}[1/p] \cup \{+\infty\}$  tels que  $r \leq s$ . Rappelons que pour  $n \geq 0$  on a posé  $r_n = (p-1)p^{n-1}$ . Dans toute la suite, on notera  $[x]^r$  pour  $[x^n]$ , même si  $r$  n'est pas entier. On convient que  $p/[\overline{\pi}]^{+\infty} = 1/[\overline{\pi}]$  et que  $[\overline{\pi}]^{+\infty}/p = 0$ . Soient

$$\tilde{\mathbf{A}}_{[r; s]} = \tilde{\mathbf{A}}^+ \left\{ \frac{p}{[\overline{\pi}]^r}, \frac{[\overline{\pi}]^s}{p} \right\} := \tilde{\mathbf{A}}^+ \{X, Y\} / ([\overline{\pi}]^r X - p, pY - [\overline{\pi}]^s, XY - [\overline{\pi}]^{s-r})$$

$\tilde{\mathbf{B}}_{[r; s]} = \tilde{\mathbf{A}}_{[r; s]}[1/p]$  où, si  $A$  est un anneau complet pour la topologie  $p$ -adique,  $A\{X, Y\}$  dénote la complétion  $p$ -adique de  $A[X, Y]$  c'est-à-dire que  $A\{X, Y\} = \{\sum_{i, j \geq 0} a_{ij} X^i Y^j\}$  où  $a_{ij}$  est une suite qui tend vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies.

**Lemme II.1.** — Soit  $A = \tilde{\mathbf{A}}^+ \{X, Y\}$  et  $I = ([\overline{\pi}]^r X - p, pY - [\overline{\pi}]^s, XY - [\overline{\pi}]^{s-r})$ . Alors

- (1)  $I \cap p^n A = p^n I$  ;  
 (2)  $I$  est fermé dans  $A$  pour la topologie  $p$ -adique.

*Démonstration.* — Le (2) suit du (1) puisque  $I$  est complet pour la topologie  $p$ -adique et que le (1) montre qu'une suite d'éléments de  $I$  qui tend vers 0 dans  $A$  tend vers 0 dans  $I$ . Montrons donc le (1). Soit  $f(X, Y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} X^i Y^j \in p^n A$  ce qui revient à dire que  $p^n | a_{ij}$ . Quitte à modifier  $f$  par des éléments de  $p^n(XY - [\overline{\pi}]^{s-r}) \subset p^n I$  on peut supposer que  $f(X, Y) = \sum_i a_i X^i + \sum_j b_j Y^j$  où  $p^n$  divise  $a_i$  et  $b_j$ . Si  $f(X, Y) \in I$  c'est que l'on peut écrire  $f(X, Y) = a(X, Y)([\overline{\pi}]^r X - p) + b(X, Y)(pY - [\overline{\pi}]^s) + c(X, Y)(XY - [\overline{\pi}]^{s-r})$  et les relations  $Y([\overline{\pi}]^r X - p) = [\overline{\pi}]^r(XY - [\overline{\pi}]^{s-r}) - (pY - [\overline{\pi}]^s)$  et  $X(pY - [\overline{\pi}]^s) = p(XY - [\overline{\pi}]^{s-r}) - ([\overline{\pi}]^r X - p)[\overline{\pi}]^{s-r}$  montrent que quitte à modifier  $c(X, Y)$  on peut supposer que  $a(X, Y) = a(X, 0)$  et  $b(X, Y) = b(0, Y)$ . On voit alors que  $c(X, Y) = 0$  et donc finalement que  $f(X, Y) = a(X)([\overline{\pi}]^r X - p) + b(Y)(pY - [\overline{\pi}]^s)$ . Montrons que  $a(X) \in p^n A$  (la preuve pour  $b(Y)$  est la même). Posons  $a(X) = \sum_i c_i X^i$ . On a alors  $a_0 = -pc_0$  et  $a_i = [\overline{\pi}]^r c_{i-1} - pc_i$  ce qui fait si  $i \geq 0$  et  $0 \leq j \leq n-1$ , alors  $p^n$  divise  $c_{i+j}[\overline{\pi}]^r - pc_{i+j+1}$  et donc aussi  $\sum_{j=0}^{n-1} [\overline{\pi}]^{r(n-1-j)} p^j (c_{i+j}[\overline{\pi}]^r - pc_{i+j+1}) = [\overline{\pi}]^{rn} c_i - p^n c_{i+n}$  et donc  $p^n$  divise  $c_i$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$ .  $\square$

**Corollaire II.2.** — *L'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  est séparé pour la topologie  $p$ -adique (il est clairement complet). De plus on a une application naturelle surjective  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  dans le complété  $p$ -adique de  $\tilde{\mathbf{A}}^+[p/[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s/p]$  dont le noyau est l'image de l'adhérence de  $I$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  et donc nul, ce qui fait que  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  s'identifie aussi au complété  $p$ -adique de  $\tilde{\mathbf{A}}^+[p/[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s/p]$ .*

**Lemme II.3.** — *Tout élément de  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  peut s'écrire de la manière suivante :*

$$\sum_{k \geq 0} \left( \frac{p}{[\overline{\pi}]^r} \right)^k a_k + \sum_{k > 0} \left( \frac{[\overline{\pi}]^s}{p} \right)^k b_k$$

avec  $(a_k), (b_k)$  deux suites de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  qui convergent vers 0 (cette écriture est bien sûr non-unique).

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la définition. On se contentera de remarquer que

$$\left( \frac{p}{[\overline{\pi}]^r} \right)^k \cdot \left( \frac{[\overline{\pi}]^s}{p} \right)^\ell = \begin{cases} [\overline{\pi}]^{k(s-r)} \left( \frac{[\overline{\pi}]^s}{p} \right)^{\ell-k} & \text{si } k \leq \ell \\ [\overline{\pi}]^{\ell(s-r)} \left( \frac{p}{[\overline{\pi}]^r} \right)^{k-\ell} & \text{si } k \geq \ell \end{cases}$$

$\square$

**Lemme II.4.** — *Si  $\rho$  et  $\sigma$  sont deux éléments de  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  qui vérifient  $v_{\mathbf{E}}(\rho) = pr/(p-1)$  et  $v_{\mathbf{E}}(\sigma) = ps/(p-1)$ , alors  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]} = \tilde{\mathbf{A}}^+\{p/[\rho], [\sigma]/p\}$ .*

*Démonstration.* — C'est évident.  $\square$



Remarquons que si on a  $r_1 \leq r_2 \leq s_2 \leq s_1$ , alors il y a une inclusion (les deux anneaux en présence sont intègres et ont même corps des fractions) :

$$\tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\overline{\pi}]^{r_1}}, \frac{[\overline{\pi}]^{s_1}}{p}] \hookrightarrow \tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\overline{\pi}]^{r_2}}, \frac{[\overline{\pi}]^{s_2}}{p}]$$

**Lemme II.5.** — Cette inclusion se prolonge en un morphisme  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r_1; s_1]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r_2; s_2]}$  qui est toujours injectif.

*Démonstration.* — Le morphisme du haut se factorise en  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r_1; s_1]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r_1; s_2]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r_2; s_2]}$  et on peut donc supposer  $r_1 = r_2$  ou  $s_1 = s_2$ . Supposons par exemple  $r_1 = r_2 = r$  (l'autre cas se traite de la même manière). Alors il suffit de montrer que le morphisme composé  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r; s_1]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r; s_2]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r; r]}$  est injectif (tout ceci pour simplifier la notation). On va donc montrer que si  $s \geq r$ , alors  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r; s]} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{[r; r]}$  est injectif. Soient  $\alpha = [\overline{\alpha}]$  et  $\beta = [\overline{\beta}]$  avec  $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \tilde{\mathbf{E}}$  tels que  $v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha}) = r$  et  $v_{\mathbf{E}}(\overline{\beta}) = s - r$  de telle sorte que  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r; s]} = \tilde{\mathbf{A}}\{X, Y\}/(\alpha X - p, pY - \alpha\beta, XY - \beta)$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r; r]} = \tilde{\mathbf{A}}\{X, Y\}/(\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1)$ . Le fait que l'application naturelle  $f(X, Y) \mapsto f(X, \beta Y)$  du premier anneau dans le second est injective est équivalent au fait que si  $f(X, \beta Y) \in (\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1)$ , alors  $f(X, \beta Y)$  appartient à l'idéal de  $\tilde{\mathbf{A}}\{X, \beta Y\}$  engendré par  $(\alpha X - p, pY\beta - \alpha\beta, XY\beta - \beta)$ , ce que nous allons maintenant démontrer.

Commençons par remarquer que quitte à modifier  $f(X, Y)$  par des éléments de l'idéal  $(\alpha X - p, pY - \alpha, XY - 1)$  on peut supposer (en remplaçant  $XY$  par 1) que  $f(X, \beta Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i X^i + \sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j \beta^j Y^j$ . Supposons que l'on ait  $f(X, \beta Y) = a(X, Y)(\alpha X - p) + b(X, Y)(pY - \alpha) + c(X, Y)(XY - 1)$ . Les relations  $Y(\alpha X - p) = \alpha(XY - 1) - (pY - \alpha)$  et  $X(pY - \alpha) = p(XY - 1) - (\alpha X - p)$  montrent que l'on peut supposer, quitte à modifier  $c(X, Y)$ , que  $a(X, Y) = a(X, 0) := a(X)$  et  $b(X, Y) = b(0, Y) := b(Y)$ . Comme  $f(X, \beta Y)$  ne contient pas de terme en  $XY$  c'est alors que  $c(X, Y) = 0$ . On a donc montré que  $f(X, \beta Y) = a(X)(\alpha X - p) + b(Y)(pY - \alpha)$ . Posons  $b(Y) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j Y^j$ . Pour terminer la démonstration il faut montrer que  $b_j$  est un multiple de  $\beta^{j+1}$ . Un calcul facile montre que si  $j \geq 1$ , alors  $\delta_j \beta^j = (pb_{j-1} - \alpha b_j)$  ce qui fait que  $\beta^j$  divise  $pb_{j-1} - \alpha b_j$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  et donc que  $\beta^{j+1}$  divise  $\sum_{k=0}^n p^{n-k} \alpha^k (pb_{j+k} - \alpha b_{j+k+1}) = p^{n+1} b_j - \alpha^{n+1} b_{j+n+1}$ . Reste à choisir  $n$  assez grand pour que  $\beta^{j+1}$  divise  $\alpha^{n+1}$  ce qui montre alors que  $\beta^{j+1}$  divise  $b_j$ .  $\square$

On utilise ces injections pour définir, si  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$  :  $\tilde{\mathbf{B}}_I = \bigcap_{[r; s] \subset I} \tilde{\mathbf{B}}_{[r; s]}$ .

Soient  $I \subset J$  deux intervalles fermés, ce qui fait que  $\tilde{\mathbf{B}}_J \subset \tilde{\mathbf{B}}_I$ , on définit une valuation  $p$ -adique  $V_I$  sur  $\tilde{\mathbf{B}}_J$  en décidant que  $V_I(x) = 0$  si et seulement si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_I - p\tilde{\mathbf{A}}_I$  et que l'image de  $V_I$  est  $\mathbf{Z}$ . Par définition  $\tilde{\mathbf{B}}_I$  muni de  $V_I$  est un espace de Banach  $p$ -adique. De plus le complété de  $\tilde{\mathbf{B}}_J$  pour  $V_I$  s'identifie à  $\tilde{\mathbf{B}}_I$ .

**Remarque II.6.** — Comme  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  est un anneau on a notamment  $V_I(xy) \geq V_I(x) + V_I(y)$ .

Le but de cette partie est de dégager quelques propriétés de ces anneaux. Commençons par remarquer que le groupe de Galois  $G_F$  agit sur  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  et que cette action s'étend à l'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}^+[p/[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s/p]$  et le stabilise, ce qui fait que l'action de  $G_F$  s'étend par continuité à une action par isométries sur son complété  $p$ -adique et par suite à tous les  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_I$ .

De même le Frobenius  $\varphi$  s'étend en un morphisme

$$\varphi : \tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\overline{\pi}]^r}, \frac{[\overline{\pi}]^s}{p}] \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^+[\frac{p}{[\overline{\pi}]^{pr}}, \frac{[\overline{\pi}]^{ps}}{p}]$$

et se prolonge donc en une application de  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{pI}$  pour tout  $I$ .

**Lemme II.7.** — Si  $I \subset [r; +\infty]$ , alors  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r} \subset \tilde{\mathbf{B}}_I$  et si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  s'écrit  $x = \sum_{k \gg 0} p^k [x_k]$ , alors la valuation

$$W_I(x) = \inf_{\alpha \in I} \inf_{k \in \mathbf{Z}} k + \frac{p-1}{p\alpha} v_{\mathbf{E}}(x_k)$$

vérifie  $V_I(x) = \lfloor W_I(x) \rfloor$  où  $\lfloor a \rfloor$  est le plus grand entier  $\leq a$ .

*Démonstration.* — Le premier point suit de la définition et de plus si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$  vérifie  $W_I(x) \geq 0$ , alors la somme qui le définit converge dans  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  ce qui fait que  $V_I(x) \geq 0$ . Reste à montrer que si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_I$ , alors  $W_I(x) \geq 0$ . Comme  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  est le complété  $p$ -adique de  $\tilde{\mathbf{A}}^+[p/[\overline{\pi}]^r, [\overline{\pi}]^s/p]$  il suffit de montrer que  $W_I(x) \geq 0$  si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ , si  $x = p/[\overline{\pi}]^r$  et si  $x = [\overline{\pi}]^s/p$  ce qui est clair. Comme  $W_I(p) = 1$  on en déduit que  $\lfloor W_I(\cdot) \rfloor$  est une valuation  $p$ -adique dont l'image est  $\mathbf{Z}$  et telle que  $W_I(x) \geq 0$  si et seulement si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_I$  ce qui fait que  $V_I(x) = \lfloor W_I(x) \rfloor$ .  $\square$

**Exemple II.8.** — Beaucoup de ces anneaux sont déjà connus :

- (1)  $\tilde{\mathbf{A}}_{[0; r_0]} = \mathbf{A}_{\max}^+$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_{[0; r_0]} = \mathbf{B}_{\max}^+$  ;
- (2)  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \tilde{\mathbf{B}}_{[0; +\infty[}$  ;
- (3)  $\tilde{\mathbf{A}}^+ = \tilde{\mathbf{A}}_{[0; +\infty]}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}^+ = \tilde{\mathbf{B}}_{[0; +\infty]}$  ;
- (4)  $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}_{[+\infty; +\infty]}$  et  $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}_{[+\infty; +\infty]}$  ;
- (5)  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{A}}_{[r; +\infty]}$  et  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{B}}_{[r; +\infty]}$ .

*Démonstration.* — Le (2) est une conséquence du (1) et du fait que  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \varphi^n(\mathbf{B}_{\max}^+)$ . Les (3) et (4) sont évidents, et le (5) est contenu dans [6, remarque II.1.3]. Reste à montrer le (1) qui suit du fait que par définition  $\mathbf{A}_{\max}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^+[\{\overline{p}\}/p - 1]$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_{[0; r_0]} = \tilde{\mathbf{A}}^+[\{\overline{p}\}/p]$  (et  $A\{X\} = A\{X - 1\}$  puisque  $A[X] = A[X - 1]$ ).  $\square$

**Lemme II.9.** — On a  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r; s]/(p)} = \tilde{\mathbf{E}}^+[X, \overline{\pi}^{s-r} X^{-1}]/(\overline{\pi}^s, \overline{\pi}^r X)$ . Notamment si  $r = s$ , alors  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r; r]/(p)} = \tilde{\mathbf{E}}^+[(\overline{\pi}^r)[X, X^{-1}]$ .

*Démonstration.* — Soit  $A = \tilde{\mathbf{A}}^+\{X, Y\}$  et  $I = (XY - [\pi]^{s-r}, p - X[\pi]^r, [\pi]^s - pY)$  de telle sorte que  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  s'identifie à  $A/I$  et donc que  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}/(p) = (A/I)/(p)$ . On a une suite exacte  $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$  et la multiplication par  $p$  induit un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & p \downarrow & & p \downarrow & & p \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & I/p & \longrightarrow & A/p & \longrightarrow & (A/I)/p & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et comme  $A/I$  est sans  $p$ -torsion, le lemme du serpent montre que  $(A/I)/p$  s'identifie au quotient du  $A/p$  par l'image de  $I$  dans ce dernier. Dans notre situation on a  $A/p = \tilde{\mathbf{E}}^+[X, Y]$  et l'image de  $I$  s'identifie à  $(XY - \pi^{s-r}, -X\pi^r, \pi^s)$  d'où le lemme.  $\square$

## II.2. Plongement des $\tilde{\mathbf{A}}_I$ dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$

On va maintenant définir des morphismes de  $\tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . On va montrer que si  $r_n \in I$ , alors l'application  $\varphi^{-n}$  réalise une injection de  $\tilde{\mathbf{B}}_I$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ . Pour cela, soit  $J_n = [r_n; r_n]$  avec  $n \geq 0$ . Si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k \geq 0} a_k \left( \frac{p}{[\tilde{p}]} \right)^k + \sum_{j \geq 0} b_j \left( \frac{[\tilde{p}]}{p} \right)^j \\ &= \sum_{k \geq 0} a_k \left[ \left( \frac{p}{[\tilde{p}]} - 1 \right) + 1 \right]^k + \sum_{j \geq 0} b_j \left[ \left( \frac{[\tilde{p}]}{p} - 1 \right) + 1 \right]^j \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \left( \frac{p}{[\tilde{p}]} - 1 \right)^\ell \sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} a_k + \sum_{m \geq 0} \left( \frac{[\tilde{p}]}{p} - 1 \right)^m \sum_{j \geq m} \binom{j}{m} b_j \end{aligned}$$

et comme les  $a_j$  et  $b_k$  tendent vers 0, les séries  $\sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} a_k$  et  $\sum_{j \geq m} \binom{j}{m} b_j$  convergent dans  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  et la série du haut est donc convergente pour la topologie  $\ker(\theta)$ -adique et converge dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  vers un élément  $\iota_0(x) \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ .

**Proposition II.10.** — Si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_{J_n}$  on pose  $\iota_n(x) = \iota_0(\varphi^{-n}(x))$ . L'application  $x \mapsto \iota_n(x)$  est un morphisme injectif de  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_n}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  et si  $J_n \subset I$ , alors le noyau du morphisme composé  $\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{A}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p$  est  $\ker(\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{A}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p) = ([\tilde{p}^{p^n}]/p - 1)\tilde{\mathbf{A}}_I$ .

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord que  $\ker(\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{A}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p) \subset ([\tilde{p}^{p^n}]/p - 1)\tilde{\mathbf{A}}_I$  (l'autre inclusion est immédiate); il suffit de le faire pour  $n = 0$  car  $\varphi^{-n}$  est une bijection de

$\tilde{\mathbf{A}}_I$  sur  $\tilde{\mathbf{A}}_{p^{-n}I}$  et donc de  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_n}$  sur  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . Soit donc  $I = [r; s]$  avec  $r \leq 1 \leq s$  et  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_I$  tel que  $\theta \circ \iota_0(x) = 0$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k \geq 0} a_k \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} \right)^k + \sum_{j \geq 0} b_j \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} \right)^j \\ &= \sum_{\ell \geq 0} \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} - [\tilde{p}^{1-r}] \right)^{\ell} \sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} [\tilde{p}^{1-r}]^{k-\ell} a_k \\ &\quad + \sum_{m \geq 0} \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} - [\tilde{p}^{s-1}] \right)^m \sum_{j \geq m} \binom{j}{m} [\tilde{p}^{s-1}]^{j-m} b_j \\ &= \sum_{\ell \geq 1} \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} - [\tilde{p}^{1-r}] \right)^{\ell} \sum_{k \geq \ell} \binom{k}{\ell} [\tilde{p}^{1-r}]^{k-\ell} a_k \\ &\quad + \sum_{m \geq 1} \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} - [\tilde{p}^{s-1}] \right)^m \sum_{j \geq m} \binom{j}{m} [\tilde{p}^{s-1}]^{j-m} b_j + \sum_{k \geq 0} (a_k [\tilde{p}^{1-r}]^k + b_k [\tilde{p}^{s-1}]^k). \end{aligned}$$

les deux premiers termes étant des séries convergeant dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  (ne pas oublier que  $a_k \rightarrow 0$  et  $b_j \rightarrow 0$ ) et dont la somme est dans le noyau de  $\theta \circ \iota_0$ , et le troisième terme étant un élément de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  (même argument pour la convergence) qui est annulé par  $\theta$  et qui s'écrit donc  $([\tilde{p}] - p)y$  avec  $y \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ . Montrons que  $x - \sum_{k \geq 0} (a_k [\tilde{p}^{1-r}]^k + b_k [\tilde{p}^{s-1}]^k) = ([\tilde{p}]/p - 1)z$  avec  $z \in \tilde{\mathbf{A}}_I$ . On a

$$\begin{aligned} x - \sum_{\ell \geq 0} (a_{\ell} [\tilde{p}^{1-r}]^{\ell} + b_{\ell} [\tilde{p}^{s-1}]^{\ell}) &= \\ &= \sum_{\ell \geq 1} a_{\ell} \left( \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} \right)^{\ell} - [\tilde{p}^{1-r}]^{\ell} \right) + \sum_{\ell \geq 1} b_{\ell} \left( \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} \right)^{\ell} - [\tilde{p}^{s-1}]^{\ell} \right) = \\ &= \left( \frac{[\tilde{p}] - p}{p} \right) \left( - \sum_{k \geq 1} \left( \frac{p}{[\tilde{p}]^r} \right)^k \sum_{\ell \geq k} a_{\ell} [\tilde{p}^{1-r}]^{\ell-k} + [\tilde{p}^{s-1}] \sum_{j \geq 0} \left( \frac{[\tilde{p}]^s}{p} \right)^j \sum_{\ell \geq j+1} b_{\ell} [\tilde{p}^{s-1}]^{\ell-j-1} \right) \end{aligned}$$

comme le montre un petit calcul, ce qui montre l'assertion quant au noyau de  $\theta \circ \iota_0$  sur  $\tilde{\mathbf{A}}_I$ .

Enfin montrons que  $\iota_n$  est injectif. On se ramène immédiatement au cas où  $n = 0$ . Si  $\iota_0(x) = 0$  avec  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ , alors  $\theta \circ \iota_0(x) = 0$  et donc  $x$  est divisible par  $[\tilde{p}]/p - 1$ . Comme  $\iota_0$  est un morphisme d'anneau et que  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  est intègre, c'est que  $x = ([\tilde{p}]/p - 1)x_1$  avec  $\iota_0(x_1) = 0$  et  $x_1 \in \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . En itérant ce procédé on en déduit que  $x \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} ([\tilde{p}]/p - 1)^n \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . Reste donc à montrer que  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} ([\tilde{p}]/p - 1)^n \tilde{\mathbf{A}}_{J_0} = 0$ . L'image de cette intersection dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}/(p)$  s'identifie à  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} (X - 1)^n \tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})[X, X^{-1}]$  qui est nulle. On en déduit qu'un élément de  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} ([\tilde{p}]/p - 1)^n \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  est infiniment divisible par  $p$  et donc nul.  $\square$

**Corollaire II.11.** — Si  $r_n \in I$ , alors  $\iota_n$  réalise une injection de  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  et  $\tilde{\mathbf{B}}_I$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ .

**Remarque II.12.** — Le noyau de  $\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p$  est  $\ker(\theta \circ \iota_n) = \varphi^{n-1}(q)\tilde{\mathbf{B}}_I$ . En effet,  $([\tilde{p}^{p^n}] - p) = \varphi^n([\tilde{p}] - p)$ ,  $\varphi^{n-1}(q) = \varphi^n(\omega)$  et on sait que  $[\tilde{p}] - p$  et  $\omega$  engendrent le même idéal de  $\tilde{\mathbf{A}}^+$ .

**Lemme II.13.** — Les inclusions naturelles de  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  et  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  induisent une suite exacte  $0 \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \mathbf{A}_{\text{max}}^+ \oplus \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{J_0} \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* — La flèche est  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+ \oplus \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  est surjective car il suffit de décomposer une écriture d'un élément de  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  en deux. Ensuite  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  est contenu dans l'intersection de  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  et de  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$  et il reste donc à montrer que l'inclusion

$$\tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \cap \mathbf{A}_{\text{max}}^+$$

est aussi une surjection. On va d'abord montrer que c'est vrai modulo  $p\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$  (on remarquera que modulo  $p$  la flèche n'est plus injective). Rappelons que les anneaux  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  et  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$  s'identifient à  $\tilde{\mathbf{A}}^+\{X\}/(pX - [\tilde{p}])$  et à  $\tilde{\mathbf{A}}^+\{Y\}/([\tilde{p}]Y - p)$  et que  $\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}/(p) = \tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})[X, X^{-1}]$ . L'image de  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$  dans cet anneau s'identifie à  $\tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})[X]$  et celle de  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  à  $\tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})[1/X]$  ce qui fait que l'image de leur intersection (qui est un sous-ensemble de l'intersection de leurs images) est un sous-anneau de  $\tilde{\mathbf{E}}^+ / (\tilde{p})$  et donc que la flèche  $\tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \cap \mathbf{A}_{\text{max}}^+$  est surjective modulo  $p\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . Si l'on prend  $x$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \cap \mathbf{A}_{\text{max}}^+$  il existe donc  $y \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  tel que  $x - y \in p\tilde{\mathbf{A}}_{J_0}$ . Cela veut dire que  $x - y \in p\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  d'une part et  $\in p\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} + [\tilde{p}]\tilde{\mathbf{A}}^+$  d'autre part (il suffit d'appliquer le lemme II.9 à tous ces anneaux). Comme  $p$  divise  $[\tilde{p}]$  dans  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$  il existe  $z \in [\tilde{p}]\tilde{\mathbf{A}}^+$  tel que  $x - y - z \in p(\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0} \cap \mathbf{A}_{\text{max}}^+)$ . On conclut en itérant ce procédé (comme  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  est complet pour la topologie  $p$ -adique).  $\square$

### II.3. Les anneaux $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$

Dans ce n° on introduit les anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ .

**Définition II.14.** — Les anneaux  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  sont définis par

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{B}}_{[r; +\infty[}^{\dagger} \text{ et } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger} = \bigcup_{r \geq 0} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$$

On munit  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  de la topologie de Fréchet définie par l'ensemble des  $V_I$  où  $I$  parcourt l'ensemble des intervalles fermés de  $[r; +\infty[$ . On définit aussi  $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  comme étant l'anneau des entiers de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  pour la valuation  $V_{[r; r]}$ .

**Proposition II.15.** — On a  $\ker(\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n} \rightarrow \mathbf{C}_p) = \varphi^{n-1}(q)\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}$ .

*Démonstration.* — Étant donnée la remarque II.12 il suffit de montrer que  $\ker(\theta \circ \iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_I \rightarrow \mathbf{C}_p) = ([\tilde{p}^{p^n}]/p - 1)\tilde{\mathbf{B}}_I$  pour tout  $I \subset [r_n; +\infty[$  ce qui suit de II.10.  $\square$

**Lemme II.16.** — *On a une suite exacte*

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \oplus \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r} \rightarrow 0$$

*Démonstration.* — On va d'abord montrer que si  $r_n \geq r$ , alors on a

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]} \oplus \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]} \rightarrow 0$$

il est clair que tout élément de  $\tilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]}$  s'écrit comme somme d'éléments des deux autres et il faut vérifier que deux écritures différentes diffèrent par un élément de  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  ce qui revient à montrer que  $\tilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]} \cap \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} = \tilde{\mathbf{B}}^+$ , ou encore en appliquant  $\varphi^{-n}$  que  $\tilde{\mathbf{B}}_{[rp^{-n};+\infty]} \cap \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_0]} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  ce qui suit du lemme II.13.

Montrons maintenant le lemme. Si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$ , alors pour tout  $n$  on peut écrire (puisque  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r} \subset \tilde{\mathbf{B}}_{[r;r_n]}$ ) :  $x = a_n + b_n$  avec  $a_n \in \tilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]}$  et  $b_n \in \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]}$ . Remarquons que  $x = a_{n+1} + b_{n+1}$  est une autre écriture de ce type (puisque  $a_{n+1} \in \tilde{\mathbf{B}}_{[r;+\infty]}$  et  $b_{n+1} \in \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]}$ ) et donc que  $b_{n+1} - b_n \in \tilde{\mathbf{B}}^+$  ce qui fait que quitte à modifier  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  par des éléments de  $\tilde{\mathbf{B}}^+$  on peut supposer que  $a_n = a_{n+1}$  et  $b_n = b_{n+1}$  ce qui fait que  $x = a + b$  avec  $a \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  et  $b \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_n]} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ .  $\square$

**Proposition II.17.** — *L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  est complet pour sa topologie de Fréchet et contient  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  comme sous-anneau dense.*

*Démonstration.* — Le fait que  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  est complet suit du fait que chacun des  $\tilde{\mathbf{B}}_{[r;s]}$  est complet pour  $V_{[r;s]}$ . Ensuite montrons que  $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  est dense. Soit  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  et  $r < s < t$  trois réels. Alors comme  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{[r;t]}$ , on peut l'écrire comme

$$x_n + \sum_{k>n} b_k \left( \frac{[\overline{\pi}]^t}{p} \right)^k$$

avec  $x_n \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  si  $n \gg 0$ . On a alors

$$x - x_n \in \left( \frac{[\overline{\pi}]^t}{p} \right)^n \tilde{\mathbf{A}}_{[r;t]} \subset \left( \frac{[\overline{\pi}]^t}{p} \right)^n \tilde{\mathbf{A}}_{[r;s]}$$

et un petit calcul montre qu'alors  $V_{[r;s]}(x - x_n) \geq n(t/s - 1)$ . Un argument d'extraction diagonale permet de trouver une suite qui converge vers  $x$  pour la topologie de Fréchet.  $\square$

**Corollaire II.18 (Principe du maximum).** — *Pour  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  et  $I = [s; t] \ni r$ , on a  $V_I(x) = \inf\{V_{[s;s]}(x); V_{[t;t]}(x)\}$ .*

*Démonstration.* — Un petit argument montre que c'est vrai avec  $W_I$  à la place de  $V_I$  pour  $x \in \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}$  ; on conclut par densité et continuité.  $\square$

**Lemme II.19.** — *Si  $a$  est un élément de  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  qui vérifie  $\lambda = v_{\mathbf{E}}(a) > 0$ , alors la topologie définie par  $V_I$  sur  $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  est plus fine que la topologie  $[a]$ -adique c'est-à-dire que si  $V_I(y_i) \rightarrow +\infty$ , alors  $y_i \rightarrow 0$  pour la topologie  $[a]$ -adique. De plus les topologies  $[a]$ -adiques et  $V_{[r;r]}$ -adiques sont équivalentes.*

*Démonstration.* — Soit  $(y_i)$  une suite telle que  $V_I(y_i) \geq n$  pour  $i \geq i_0$  et soit  $m \leq \frac{nrp}{\lambda(p-1)}$ . Alors un petit calcul montre que  $V_I(y_i[a]^{-m}) \geq 0$  pour  $i \geq i_0$  et donc  $V_{[r;r]}(y_i[a]^{-m}) \geq 0$  pour  $i \geq i_0$  ce qui revient à dire que  $y_i \in [a]^m \tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  pour  $i \geq i_0$  et donc que  $y_i$  tend vers 0 pour la topologie  $[a]$ -adique.

De même si  $y \in [a]^m \tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$ , alors  $V_{[r;r]}(y) \geq \frac{(p-1)m\lambda}{pr}$  et donc les deux topologies sont équivalentes. On prendra garde au fait que cela n'est plus vrai si  $I$  n'est plus réduit à  $[r; r]$ .  $\square$

**Corollaire II.20.** — *L'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$  est complet pour la valuation  $V_{[r;r]}$ .*

*Démonstration.* — Dans [6, II.1.2] on montre que  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger,r}$  est séparé complet pour la topologie  $[a]$ -adique si  $v_{\mathbf{E}}(a) > 0$ .  $\square$

#### II.4. Les anneaux $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger,r}$ et leurs plongements dans $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$

Ce n° est consacré à la construction d'un anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$  qui est à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$  ce que  $\mathbf{B}_{\text{st}}$  est à  $\mathbf{B}_{\text{max}}$ . On commence par construire une application logarithme.

**Proposition II.21.** — *Il existe une et une seule application  $x \mapsto \log[x]$  de  $\tilde{\mathbf{E}}$  dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[X]$  qui vérifie  $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$ ,  $\log[x] = 0$  si  $x \in \bar{k}$ ,  $\log[\bar{\pi}] = X$  et*

$$\log[x] = \sum_{n>0} (-1)^{n-1} \frac{([x] - 1)^n}{n} \text{ si } v_p(x^{(0)} - 1) \geq 1$$

*Démonstration.* — Soit  $U_1$  l'ensemble des  $x \in \tilde{\mathbf{E}}$  tels que  $v_p(x^{(0)} - 1) \geq 1$ . Pour  $x \in U_1$  la série  $\log[x] = \sum_{n>0} (-1)^{n-1} ([x] - 1)^n / n$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$  et  $\log[xy] = \log[x] + \log[y]$  par un argument de séries formelles. On en déduit notamment que  $\log[x] = \varphi(\log[x]/p)$  ce qui fait que l'image de  $U_1$  par  $\log$  est en fait incluse dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ . Si  $x \in \tilde{\mathbf{E}}$  est tel que  $v_p(x^{(0)} - 1) > 0$ , alors il existe  $n$  tel que  $x^{p^n} \in U_1$  et le  $\log$  s'étend donc à l'ensemble des  $x$  tels que  $v_p(x^{(0)} - 1) > 0$ . Ensuite soit  $x \in (\tilde{\mathbf{E}}^+)^*$ . On peut écrire  $x = x_0(1 + y)$  avec  $x_0 \in \bar{k}$  et  $y \in \mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}^+}$  de manière unique ce qui montre que  $\log$  s'étend à  $(\tilde{\mathbf{E}}^+)^*$ . Enfin  $\tilde{\mathbf{E}}^+$  est un anneau de valuation et le choix de  $\log[\bar{\pi}]$  achève de déterminer le  $\log$ .  $\square$

**Proposition II.22.** — Il existe une et une seule application  $\log : \tilde{\mathbf{A}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[X]$  telle que  $\log([x]) = \log[x]$ ,  $\log(p) = 0$  et  $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ .

*Démonstration.* — Si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}^+$  est exactement divisible par  $p^a$ , alors il existe  $r$  tel que l'on peut écrire  $x = p^a \overline{[x/p^a]}(1 - pz)$  avec  $z \in \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r}$  et la série

$$\log(1 - pz) = - \sum_{n \geq 1} \frac{(pz)^n}{n}$$

converge dans  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r}$  qui est complet pour la topologie  $p$ -adique ce qui permet d'étendre  $\log$  par multiplicativité à  $\tilde{\mathbf{A}}^+$  (et aussi à  $\tilde{\mathbf{B}}^+$ ).  $\square$

On pose  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[X]$  muni de l'action de  $G_F$  et du Frobenius donnés par  $\varphi(X) = pX$  et  $g(X) = X + \log([g(\overline{\pi})/\overline{\pi}])$  ce qui fait que l'on peut prolonger l'application  $\iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  pour  $n$  assez grand par  $\iota_n(X) = p^{-n} \log[\overline{\pi}]$ . La proposition suivante montre que  $\iota_n$  est injectif et commute aux actions de  $G_F$  et de Frobenius (là où ce-dernier est défini), et dès lors on écrira  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger, r} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}[\log[\overline{\pi}]]$ . Soit aussi  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger} = \cup_{r \geq 0} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger, r}$ .

**Proposition II.23.** — L'application  $\iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}[X] \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  qui étend  $\iota_n$  par  $\iota_n(X) = p^{-n} \log[\overline{\pi}]$  est injective, commute à l'action de Galois et sa restriction à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger}$  est  $\varphi^{-n}$ .

*Démonstration.* — Les deux derniers points sont triviaux. Pour montrer le premier, il suffit de montrer que l'élément  $\log[\overline{\pi}]$  est transcendant sur le corps des fractions de  $\iota_n(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$  et cela revient au même de montrer que  $u = \log([\tilde{p}])$  est transcendant sur  $\iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ . Montrons tout d'abord que  $u \notin \iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ . Soit  $\beta = 1 - [\tilde{p}]/p$  et  $S$  l'anneau des éléments de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  qui appartient à  $F \otimes_{\mathcal{O}_F} \tilde{\mathbf{A}}^+[[\beta]]$ . Rappelons que Fontaine a montré que  $u \notin \text{Frac } S$  (cf [18, 4.3.2]). La démonstration de la proposition II.10 montre que si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_0}$ , alors  $\iota_0(x) \in S$  et donc si  $u \in \iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ , alors on a  $x, y \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_0}$  tels que  $\iota_0(y) = \iota_0(x)u$  (puisque  $\varphi^{-n}(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}) = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_0}$ ) et le résultat de Fontaine montre que cela n'est pas possible et donc que  $u \notin \iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$ .

Montrons maintenant que  $u$  est transcendant sur  $\iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$  pour tout  $n$ . Un petit calcul montre qu'il existe  $\eta : G_F \rightarrow \mathbf{Q}_p$  tel que  $g(u) = u + \eta(g)t$ . Soit  $u^d + x_{d-1}u^{d-1} + \dots + x_0 = 0$  le polynôme minimal de  $u$ . Alors en appliquant  $g$  et en comparant les coefficients il vient  $g(x_{d-1}) = x_{d-1} + d\eta(g)t$  ce qui fait que  $x_{d-1} - du$  s'identifie à un élément de  $\mathbf{B}_{\text{dR}}$  stable par  $G_F$  et donc que  $u = d^{-1}(x_{d-1} - c) \in \iota_n(\text{Frac } \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n})$  et on vient de voir que cela est impossible.  $\square$

Par la proposition II.22 il existe un élément  $\log(\pi) \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger}$  (remarquons que l'on a  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[\log(\pi)]$  puisque la série qui définit  $\log([\overline{\pi}]/\pi)$  converge dans  $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r_0}$ ). On munit  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger}$  de



l'opérateur de monodromie  $N$  défini par

$$N \left( \sum_{k=0}^d a_k \log(\pi)^k \right) = - \sum_{k=0}^d k a_k \log(\pi)^{k-1}$$

c'est-à-dire que  $N = -d/d \log(\pi)$ . Un calcul facile montre que  $N$  commute à l'action de  $G_F$ .

**Remarque II.24.** — L'élément  $\log(\pi)$  est plus agréable que  $\log[\overline{\pi}]$ , par exemple  $\iota_n(\log(\pi)) \in F_n[[t]]$  si  $n \geq 1$ . Notamment  $\text{Res}_X(\log(\pi)) = \log(\pi)$  où  $\text{Res}_X$  est l'application construite dans [11, V.4] et  $X$  est un ouvert compact de  $\mathbf{Q}_p$  tel que  $X + p^{-1}\mathbf{Z}_p = X$ .

## II.5. Action de $H_K$ sur $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$

Dans ce n° on décrit les invariants de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$  sous l'action de  $H_K$ . Soit  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^+ = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+)^{H_K}$ .

**Lemme II.25.** — Soit  $I$  un intervalle qui contient  $[0; r]$  et  $J = I \cap [r; +\infty]$ . On a une suite exacte  $0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_K^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \oplus \tilde{\mathbf{B}}_I^{H_K} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_J^{H_K} \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* — On a vu que l'on a une suite exacte  $0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r} \oplus \tilde{\mathbf{B}}_I \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_J \rightarrow 0$  et en prenant les invariants par  $H_K$  on trouve

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_K^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \oplus \tilde{\mathbf{B}}_I^{H_K} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_J^{H_K} \xrightarrow{\delta} H^1(H_K, \tilde{\mathbf{B}}^+)$$

et pour montrer le lemme il suffit de montrer que  $\delta = 0$ . Soit  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_J^{H_K}$ , alors il existe  $n$  tel que  $\delta(x) \in H^1(H_K, p^{-n}\tilde{\mathbf{A}}^+)$  et donc  $\delta(p^n x[\overline{\pi}]) \in H^1(H_K, W(\mathfrak{m}_{\tilde{\mathbf{E}}^+}))$ . Or ce dernier espace de cohomologie est nul ([11, IV.2.4] appliqué à la représentation triviale) et on en déduit que  $\delta(x) = p^{-n}[\overline{\pi}]^{-1} \delta(p^n x[\overline{\pi}]) = 0$ .  $\square$

**Corollaire II.26.** — Dans le cas où  $I = [0; +\infty[$ , on obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_K^+ \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \oplus (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+)^{H_K} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow 0$$

**Lemme II.27.** — Si  $x \in (\mathbf{B}_{\text{max}}^+)^{H_K}$ , alors il existe une suite bornée  $a_i$  d'éléments de  $\tilde{\mathbf{B}}_K^+$ , telle que  $x = \sum_{i \geq 0} a_i (\omega/p)^i$  (la série convergeant dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{[0;s]}^+$  avec  $s$  assez petit).

*Démonstration.* — On se ramène immédiatement à montrer que si  $x \in (\mathbf{A}_{\text{max}}^+)^{H_K}$ , alors il existe une suite  $a_i$  d'éléments de  $\tilde{\mathbf{A}}_K^+$ , telle que  $x = \sum_{i \geq 0} a_i (\omega/p)^i$ . On va d'abord montrer que  $\theta : \tilde{\mathbf{A}}_K^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$  est surjective. Si  $K = F$ , c'est bien connu (on se ramène à montrer que c'est vrai modulo  $p$ , et cela résulte alors du fait que les  $\{\varepsilon^i, i \in \mathbf{Z}[1/p] \cap [0; 1[)\}$  forment une base de  $\tilde{\mathbf{E}}_F^+ / (\varepsilon - 1)\tilde{\mathbf{E}}_F^+$  (voir [6, III.2.1)); ensuite soient  $\iota_K(\varpi_K)$  l'élément construit dans la proposition I.1,  $\varpi_n = \iota_K(\varpi_K)^{(n)}$ , et  $\mathfrak{a} = \{x \in \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}, v_p(x) \geq 1/p\}$ . Rappelons [7, p. 243] que si  $n \gg 0$  et  $x \in \mathcal{O}_{K_{n+1}}$ , alors  $N_{K_{n+1}/K_n}(x) - x^p \in \mathfrak{a}$ . Comme  $v_{\mathbf{E}}(\iota_K(\varpi_K)) = \frac{p}{(p-1)e_K}$  on a, pour

$n \gg 0$ ,  $v_p(\varpi_n) = \frac{1}{p^{n-1}(p-1)e_K}$  et donc, si  $n \gg 0$ , alors  $\varpi_n$  est égal modulo  $\mathfrak{a}$  à une uniformisante de  $\mathcal{O}_{K_n}$ . Ceci implique que l'application  $\mathcal{O}_{F_n}[\varpi_n] \rightarrow \mathcal{O}_{K_n}/\mathfrak{a}$  est surjective, et donc que  $\mathcal{O}_{\widehat{F}_\infty}[\varpi_n]_{n \geq 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$  est surjective (puisque'elle l'est modulo  $\mathfrak{a}$  et que les deux  $\mathcal{O}_{\widehat{F}_\infty}$ -modules en présence sont complets pour la topologie  $\mathfrak{a}$ -adique). Comme  $\varpi_n = \theta \circ \varphi^{-n}(\iota_K(\varpi_K))$ , ceci montre que  $\theta : \tilde{\mathbf{A}}_K^+ \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$  est surjective. Soit maintenant  $x \in (\mathbf{A}_{\text{max}}^+)^{H_K}$ . On définit deux suites  $x_i$  et  $a_i$  de  $(\mathbf{A}_{\text{max}}^+)^{H_K}$  et  $\tilde{\mathbf{A}}_K^+$  de la manière suivante :  $x_0 = x$ , et si  $i \geq 0$ , alors comme  $\theta(x_i) \in \mathcal{O}_{\widehat{K}_\infty}$ , il existe  $a_i \in \tilde{\mathbf{A}}_K^+$  tel que  $\theta(x_i) = \theta(a_i)$ . Ceci montre que  $x_i - a_i$  est dans le noyau de  $\theta$  et est donc divisible par  $\omega/p$  dans  $\mathbf{A}_{\text{max}}^+$ . On pose  $x_{i+1} = (p/\omega)(x_i - a_i)$ . Il est clair qu'alors,  $x = \sum_{i \geq 0} a_i (\omega/p)^i$ .  $\square$

On peut d'ailleurs montrer que  $a_i \rightarrow 0$ , en effet si  $x \in \mathbf{A}_{\text{max}}^+$  alors il existe une suite  $\alpha_i = o(i)$ , telle que  $x \in p^{-\alpha_i} \tilde{\mathbf{A}}^+ + (\omega/p)^i \mathbf{A}_{\text{max}}^+$ . Un petit calcul montre que cela force  $a_i \rightarrow 0$ .

**Proposition II.28.** — *L'anneau  $\tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$  est dense dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  pour la topologie de Fréchet de ce dernier.*

*Démonstration.* — Cela revient à montrer que si l'on se fixe un intervalle  $I = [0; r_n]$  avec  $n \gg 0$ , alors pour tout  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  il existe une suite  $x_j \in \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$  telle que  $V_I(x - x_j) \rightarrow +\infty$ . Étant donnée la décomposition du corollaire II.26 il suffit de le faire pour  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_{n+m}]_K}^{HK}$  avec  $m \gg 0$ . On se fixe  $m$  tel que  $V_I(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1) > 0$  (c'est possible car pour tout  $I$  compact,  $\varphi^{n+m-1}(q/p) \rightarrow 1$  pour  $V_I$ ). Le lemme II.27 auquel on applique  $\varphi^{n+m}$  montre que tout élément  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{[0;r_{n+m}]_K}^{HK}$  s'écrit  $x = \sum_{i \geq 0} x_i (\varphi^{n+m-1}(q/p))^i$  où  $x_i$  est une suite bornée de  $\tilde{\mathbf{B}}_K^+$  et donc que  $x = \sum_{i \geq 0} y_i (\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$  où  $y_i$  est une suite bornée de  $\tilde{\mathbf{B}}_K^+$ . Comme  $V_I(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1) > 0$ , la suite  $(\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$  tend vers 0 pour  $V_I$  et donc, pour montrer la proposition, il suffit de prendre  $x_j = \sum_{i=0}^j x_i (\varphi^{n+m-1}(q/p) - 1)^i$ .  $\square$

## II.6. L'anneau $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$

Soit  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  le complété de  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  pour la topologie de Fréchet. On va donner une description nettement plus agréable des  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ . On a déjà vu qu'il existe  $n(K) \in \mathbf{N}$  et  $\pi_K \in \mathbf{A}_K^{\dagger,r_{n(K)}}$  dont l'image modulo  $p$  est une uniformisante de  $\mathbf{E}_K$  et que si  $r \geq r_{n(K)}$ , alors tout élément  $x \in \mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  peut s'écrire  $x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \pi_K^k$  où  $a_k \in F$  et où la série  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$  est holomorphe et bornée sur la couronne ouverte  $\{p^{-1/e_K r} < |T| < 1\}$  et converge sur le bord intérieur.

L'anneau  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  est alors muni de la topologie induite par celle de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger,r}$  qui devient la topologie de la convergence sur les couronnes définies par un intervalle compact ce qui fait que  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  est le complété de  $\mathbf{B}_K^{\dagger,r}$  pour cette topologie et donc que

**Proposition II.29.** — Soit  $\mathcal{H}_F^\alpha(X)$  l'ensemble des séries  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k X^k$  avec  $a_k \in F$  et telles que tout  $\rho \in [\alpha; 1[$ ,  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |a_k| \rho^k = 0$  et soit  $\alpha(K, r) = p^{-1/e_K r}$ . Alors l'application  $\mathcal{H}_F^{\alpha(K,r)} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  qui à  $f$  associe  $f(\pi_K)$  est un isomorphisme.

On définit aussi  $\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger = \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[\log(\pi)]$ , cet anneau est stable par les actions de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$  étant donné que  $\varphi(\log(\pi)) = \log(\varphi(\pi)) = p \log(\pi) + \log(\varphi(\pi)/\pi^p)$  et  $\gamma(\log(\pi)) = \log(\pi) + \log(\gamma(\pi)/\pi)$  et que les séries qui définissent  $\log(\varphi(\pi)/\pi^p)$  et  $\log(\gamma(\pi)/\pi)$  convergent dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ .

Rappelons que dans [6, III.2] (voir aussi la première section, proposition I.4) il est défini une section  $R_0$  de l'inclusion  $\mathbf{B}_K^\dagger \subset \tilde{\mathbf{B}}_K^\dagger$  qui a la propriété que si  $r \geq r_{n(K)}$ , alors  $R_0$  est une application  $\mathbf{A}_K^{\dagger,r}$ -linéaire de  $\tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r}$  dans  $\mathbf{A}_K^{\dagger,r}$ , ainsi que des applications  $R_m$  et  $R_m^*$  qui ont des propriétés similaires.

**Lemme II.30.** — Pour tous  $a \in \mathbf{Z}[1/p]$  et  $r > r_{n(K)}$ ,  $r \in \mathbf{N}[1/p]$  on a  $R_m([\bar{\pi}]^a \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r}) \subset [\bar{\pi}]^a \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r}$ .

*Démonstration.* — Quand  $a \in \mathbf{Z}$  et  $r = r_n$  c'est le contenu de I.5 car c'est vrai avec  $\pi$  à la place de  $[\bar{\pi}]$  et  $\pi/[\bar{\pi}]$  est une unité de  $\tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r}$  pour  $r \geq 1$  [6, II.1.5]. Comme  $R_0 \circ \varphi^m = \varphi^m \circ R_m$  et que  $\varphi(\bar{\pi}) = \bar{\pi}^p$  on passe de  $a \in \mathbf{Z}$  à  $a \in \mathbf{Z}[1/p]$ . Enfin  $\tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r}$  est l'intersection des  $[\bar{\pi}]^{-kr} \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r_{n(K)}} + p^{k+1} \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,+\infty}$  et chacun des termes est stable par  $R_m$ .  $\square$

**Lemme II.31.** — Si  $r \geq r_{n(K)}$ , alors pour  $I \ni r$ ,  $R_m : \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$  vérifie l'inégalité  $V_I(R_m(x)) \geq V_I(x)$ .

*Démonstration.* — Nous allons donc montrer que si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$  vérifie  $V_{[r;s]}(x) \geq 0$ , alors on a  $V_{[r;s]}(R_m(x)) \geq 0$ . Par le lemme II.18 on se ramène au cas où  $r = s$  et donc  $I = [r; r]$ . Le lemme II.7 montre que l'intersection de  $\tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r}$  avec  $\tilde{\mathbf{A}}_I$  est la réunion des  $[\bar{\pi}]^{rk} p^{-k} \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger,r}$  ce qui implique par le lemme II.30 que  $R_m(\tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \cap \tilde{\mathbf{A}}_I) \subset \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger,r} \cap \tilde{\mathbf{A}}_I$ . On a donc  $V_I(R_m(x)) \geq 0$  si  $V_I(x) \geq 0$  ce qui montre le lemme.  $\square$

Le lemme précédent montre en particulier que  $R_0$  s'étend en une section continue de l'inclusion de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ . On prolonge les  $R_m$  en une section de l'inclusion de  $\mathbf{B}_{\log,K}^\dagger[1/t]$  dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log,K}^\dagger[1/t]$  en posant  $R_m(t^{-i}) = t^{-i}$  d'une part et  $R_m(\log(\pi)) = \log(\pi)$  d'autre part (voir la remarque II.24).

**Remarque II.32.** — Quand  $K_\infty = F_\infty$  la restriction de  $R_0$  à  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger)^{H_F} \subset \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},F}^\dagger$  n'est autre que l'application  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$  de [11, V.7.1]. De même  $R_m = \text{Res}_{p^{-m}\mathbf{Z}_p}$ .

*Démonstration.* — Pour le cas de  $R_0$ , il suffit de voir que les deux applications sont continues,  $\mathcal{O}_F[[\pi]]$ -linéaires et que si  $i \in \mathbf{Z}[1/p]$ , alors  $R_0([\varepsilon^i]) = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}([\varepsilon^i])$ . Ensuite la formule  $R_m = \varphi^{-m} \circ R_0 \circ \varphi^m$  permet de conclure.  $\square$

**Lemme II.33.** — Soit  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger, r}$ . Alors pour tous  $a, b \in \mathbf{N}$  il existe  $m$  tel que  $R_m(x) - x \in \pi^a \mathbf{A}_K^+ + p^b \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger, r}$ .

*Démonstration.* — On a vu dans la proposition I.5 que si  $x \in \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger}$ , alors  $x = \lim_m R_m(x)$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_K$ . La topologie de  $\tilde{\mathbf{A}}_K$  est définie par le fait que  $\{\pi^a \mathbf{A}_K^+ + p^b \tilde{\mathbf{A}}_K\}$  forment une base de voisinages de zéro. On en déduit que si  $m$  est assez grand, alors  $R_m(x) - x = \pi^a r^+ + p^b r^-$  avec  $r^+ \in \tilde{\mathbf{A}}_K^+$  et  $r^- \in \tilde{\mathbf{A}}_K$  ce qui fait que  $R_m(x) - x - p^a r^+ \in p^b \tilde{\mathbf{A}}_K \cap \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger, r} = p^b \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger, r}$  d'où le lemme.  $\square$

**Proposition II.34.** — Si  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ , alors  $\lim_{m \rightarrow +\infty} R_m(x) = x$ .

*Démonstration.* — Soit  $N \in \mathbf{N}$  et  $I \subset [r; +\infty[$ . Il existe  $y \in \tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger, r}$  tel que  $V_I(x - y) \geq N$ . Il existe  $c$  tel que  $y \in p^{-c} \tilde{\mathbf{A}}_K^{\dagger, r}$  et par le lemme précédent il existe alors  $m$  tel que  $V_I(R_m(y) - y) \geq N$ . Enfin  $V_I(R_m(x - y)) \geq V_I(x - y)$  par II.31 ce qui fait que  $V_I(R_m(x) - x) \geq \inf\{V_I(x - y); V_I(y - R_m(y)); V_I(R_m(y) - R_m(x))\} = N$ .  $\square$

## CHAPITRE III

### APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS $p$ -ADIQUES

Ce § est consacré à l'application des constructions de la section précédente à la caractérisation des représentations  $p$ -adiques semi-stables (et cristallines) en termes du  $(\varphi, \Gamma_K)$ -module qui leur est associé.

#### III.1. Régularisation par le Frobenius

Le Frobenius  $\varphi$  est une bijection de  $\tilde{\mathbf{B}}_I$  sur  $\tilde{\mathbf{B}}_{pI}$  et induit donc une bijection de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$  sur  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, pr}$  ainsi que de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger, r}$  sur  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger, pr}$  puisque  $\varphi(\log[\overline{\pi}]) = p \cdot \log[\overline{\pi}]$ .

**Lemme III.1.** — *Soit  $h$  un entier positif. Alors*

$$\bigcap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs} \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r} = \tilde{\mathbf{A}}^+ \text{ et } \bigcap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{rig}}^{\dagger, p^{-s}r} \subset \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$$

*Démonstration.* — Montrons le premier point : comme  $x \in \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r}$  il s'écrit de manière unique sous la forme  $\sum_{k \geq 0} p^k [x_k]$  et de même  $p^{hs} x = \sum p^{k+hs} [x_k]$ . Comme  $p^{hs} x \in \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r}$  c'est que

$$v_{\mathbf{E}}(x_k) + \frac{rp^{1-s}}{p-1}(k+hs) \geq 0$$

ce qui implique que

$$v_{\mathbf{E}}(x_k) \geq -\frac{(k+hs)r}{p^{s-1}(p-1)}$$

et donc (en laissant tendre  $s$  vers  $+\infty$ ) que  $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geq 0$  ce qui fait que  $x \in \tilde{\mathbf{A}}^+$ .

Passons au deuxième point. Pour tout  $s$  on peut écrire  $x = a_s + b_s$  avec  $a_s \in p^{-hs} \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r}$  et  $b_s \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ . Par le lemme II.13 on a  $a_s - a_{s+1} \in \tilde{\mathbf{B}}^+$  et d'autre part  $a_s - a_{s+1} \in p^{-h(s+1)} \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r}$  ce qui fait que  $a_s - a_{s+1} \in p^{-h(s+1)} \tilde{\mathbf{A}}^+$  et que quitte à modifier  $a_{s+1}$  on peut supposer que  $a_s = a_{s+1} = a$ . On a alors  $a \in \bigcap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs} \tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, p^{-s}r} = \tilde{\mathbf{A}}^+$  et donc  $x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ .  $\square$

**Proposition III.2 (Régularisation par le Frobenius).** — Soit  $r$  et  $u$  deux entiers positifs et  $A \in M_{u \times r}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger})$ . On suppose qu'il existe  $P \in \mathrm{GL}_u(F)$  telle que  $A = P\varphi^{-1}(A)$ . Alors  $A \in M_{u \times r}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)$ .

*Démonstration.* — Soit  $A = (a_{ij})$  et  $a_{ij} = \sum_{n=0}^d a_{ij,n} \log[\bar{\pi}]^n$ . Soit  $h_0 \in \mathbf{Z}$  tel que  $p^{h_0}P \in M_u(\mathcal{O}_F)$  et  $h = h_0 + d$ . L'hypothèse reliant  $A$  et  $P$  peut s'écrire :

$$p_{i1}\varphi^{-1}(a_{1j}) + \cdots + p_{iu}\varphi^{-1}(a_{uj}) = a_{ij} \quad \forall i \leq u, j \leq r$$

et comme  $\varphi^{-1}(\log[\bar{\pi}]^n) = p^{-n} \log[\bar{\pi}]^n$ , on en déduit que si  $a_{ij,n} \in p^{-c} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r}$ , alors comme  $p^{h_0}p_{ik} \in \mathcal{O}_F$  et  $\varphi^{-1}(a_{ik,n}) \in p^{-c} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r/p}$ , on a  $a_{ij,n} \in p^{-h-c} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r/p}$ . On itère ce procédé et il en sort que  $a_{ij,n} \in \bigcap_{s=0}^{+\infty} p^{-hs-c} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger,r/p^{-s}}$ . On est en mesure d'appliquer le lemme III.1 à  $p^c a_{ij,n}$  et la proposition suit.  $\square$

### III.2. Représentations semi-stables

Soient  $\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger,r} = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger,r}[\log(\pi)]$  et

$$\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(V) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V) \text{ et } \mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V) = \mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$$

Le théorème I.3 montre que  $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)$  sont des  $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}^{\dagger}$ - et  $\mathbf{B}_{\log,K}^{\dagger}$ -modules libres de rang  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . Si  $M$  est un  $G_F$ -module soit  $M(i)$  le tordu de  $M$  par  $\chi^i$  (twist de Tate).

**Proposition III.3.** — On a

$$\{x \in \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}, g(x) = \chi^i(g)x, \forall g \in G_K\} = \begin{cases} Ft^i & \text{si } i \geq 0; \\ 0 & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

*Démonstration.* — Soit  $V_i^n = (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger,r_n}(i))^{G_K}$ . C'est un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie (puisque  $\iota_n$  réalise une injection de  $V_i^n$  dans  $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{G_K} = K$ ) stable par Frobenius et la proposition III.2 implique que  $V_i^n = (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^+(i))^{G_K}$  ce qui fait que [18]  $V_i^n = F$ . Comme  $V_i = \bigcup_{n=0}^{+\infty} V_i^n$  cela démontre le résultat.  $\square$

Soit  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ , rappelons que  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V) = (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ . Si  $V$  a ses poids de Hodge-Tate négatifs, alors  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$  et en général  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = t^{-d} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V(-d))(d)$  pour  $d$  assez grand.

**Proposition III.4.** — Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie, et le morphisme induit par l'inclusion de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^+$  dans  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}^+(V) \rightarrow (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$$

est un isomorphisme de  $(\varphi, N)$ -modules.

*Démonstration.* — Si  $n \in \mathbf{N}$ , alors  $D_n = (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger, r_n} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension finie  $\leq [K : F]d$ , car  $\iota_n$  réalise une injection de  $D_n$  dans  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ , qui est un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $\leq d$ . Ceci montre qu'entre  $[K : F]d + 1$  éléments de  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ , il y a toujours une relation de dépendance  $F$ -linéaire, et donc que  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $\leq [K : F]d$ .

Passons maintenant au deuxième point. Soient  $v_1, \dots, v_r$  et  $d_1, \dots, d_u$  des  $\mathbf{Q}_p$ - et  $F$ - bases de  $V$  et  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ . Il existe une matrice  $A \in \mathbf{M}_{r \times u}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger})$  telle que  $(d_i) = A(v_i)$  (les  $(d_i)$  et  $(v_i)$  sont des vecteurs colonnes). Soit  $P$  la matrice de  $\varphi$  dans la base  $(d_i)$  (qui est inversible car  $\varphi : \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$  est une bijection). On a alors  $\varphi(A) = PA$  et donc  $A = \varphi^{-1}(P)\varphi^{-1}(A)$ ; la proposition III.2 montre que  $A \in \mathbf{M}_{r \times u}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger})$  et donc que  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\text{st}}^{\dagger}(V)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Une représentation  $V$  à poids négatifs est donc semi-stable si et seulement si elle est  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$ -admissible et elle est cristalline si et seulement si elle est  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}$ -admissible, c'est-à-dire si elle est  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}$ -admissible et que ses périodes sont tuées par  $N$ .

De plus, si les poids de Hodge-Tate de  $V$  ne sont pas négatifs, alors en tordant  $V$  on en déduit que  $V$  est semi-stable si et seulement si elle est  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t]$ -admissible et elle est cristalline si et seulement si elle est  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t]$ -admissible.

**Proposition III.5.** — *Si  $V$  est semi-stable on a un isomorphisme de comparaison :*

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\text{st}}(V) = \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

*Démonstration.* — Ceci résulte du fait que dans ce cas on a déjà :

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\text{st}}(V) = \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$$

il suffit alors de tensoriser les deux membres par  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t]$  au-dessus de  $\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t]$ .  $\square$

**Théorème III.6.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors*

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K} \text{ et } \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$$

*Notamment  $V$  est semi-stable (respectivement cristalline) si et seulement si  $(\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$  (respectivement  $(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ ) est un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ .*

*Démonstration.* — Le deuxième point est une conséquence immédiate du premier. Ensuite comme  $\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t] \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$  (et que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t] \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger}[1/t] \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ ) les

résultats précédents montrent que  $(\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$  (respectivement  $(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ ) est inclus dans  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  (respectivement dans  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ ).

Montrons donc que  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \subset (\mathbf{D}_{\log}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$  et  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \subset (\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)[1/t])^{\Gamma_K}$ . Il suffit de s'occuper du cas semi-stable car le cas cristallin en suit en faisant  $N = 0$ . Soit  $r = \dim_F(\mathbf{D}_{\text{st}}(V))$ . On peut supposer (quitte à tordre) les poids de Hodge-Tate de  $V$  négatifs puisque l'on a inversé  $t$  partout. On sait qu'alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  et de plus  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \tilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^{\dagger} \otimes_{\tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$  puisque  $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$  a « la bonne dimension ». On en déduit que si l'on choisit une base  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^{\dagger}(V)$  et  $\{d_i\}$  une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ , alors la matrice  $M \in \mathbf{M}_{r \times d}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^{\dagger})$  définie par  $(d_i) = M(e_i)$  est de rang  $r$  et vérifie  $\gamma_K(M)G - M = 0$  où  $G \in \text{GL}_d(\tilde{\mathbf{B}}_K^{\dagger})$  est la matrice de  $\gamma_K$  dans la base  $\{e_i\}$ .

Les opérateurs  $R_m$  introduits précédemment sont  $\mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger}$ -linéaires et commutent à  $\Gamma_K$  (puisque c'est vrai sur  $\mathbf{B}_K^{\dagger}[\log(\pi)]$  et qu'on étend  $R_m$  par continuité) ce qui fait que  $\gamma_K(R_m(M))G - R_m(M) = 0$ . De plus,  $R_m(M) \rightarrow M$  et si  $M \in \mathbf{M}_{r \times d}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^{\dagger, r_n})$ , alors  $R_m(M) \in \mathbf{M}_{r \times d}(\tilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^{\dagger, r_n})$ . Soit  $N = \varphi^m(R_m(M))$ . On a alors  $\gamma_K(N)\varphi^m(G) = N$  et comme les actions de  $\varphi$  et  $\Gamma_K$  commutent sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$  on a  $\varphi(G) = \gamma_K(P)GP^{-1}$  ( $P$  est la matrice de  $\varphi$  et est inversible car  $\varphi$  est surconvergent et  $\mathbf{B}_K^{\dagger}$  est un corps) ce qui fait que si  $Q = \varphi^{m-1}(P) \cdots \varphi(P)P$ , alors  $\varphi^m(G) = \gamma_K(Q)GQ^{-1}$  et donc  $\gamma_K(NQ)G = (NQ)$ . La matrice  $NQ$  détermine  $r$  éléments de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$  qui sont fixés par  $\gamma_K$ . Il reste à montrer que ces éléments sont libres sur  $F$  quand  $m$  est assez grand. Mais comme  $R_m(M) \rightarrow M$ , la matrice  $NQ$  va être de rang  $r$  pour  $m$  assez grand (puisque  $M$  est de rang  $r$ ) et donc déterminer un sous-module libre de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger}(V)$ . A fortiori le  $F$ -espace vectoriel engendré par les éléments déterminés par  $NQ$  va être de dimension  $r$  et donc égal à  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ .  $\square$

**Proposition III.7.** — *On a les isomorphismes de comparaison suivants :*

(1) *si  $V$  est une représentation semi-stable, alors*

$$\mathbf{D}^{\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger}[1/t] = \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger}[1/t]$$

(2) *si  $V$  est une représentation cristalline, alors*

$$\mathbf{D}^{\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}[1/t] = \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}[1/t]$$

*Si de plus  $V$  a ses poids de Hodge-Tate négatifs, alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \subset \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ .*

*Démonstration.* — Encore une fois on ne s'occupe que du cas semi-stable, le cas cristallin s'obtenant en faisant  $N = 0$ . On peut supposer que  $V$  a ses poids de Hodge-Tate négatifs car cela revient à multiplier par une puissance de  $t$  le terme de gauche. On sait qu'alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \subset$



$\widetilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  et que

$$\widetilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^\dagger[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^\dagger[1/t] \otimes_F \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$$

ce qui montre que si l'on choisit des bases  $\{d_i\}$  de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  et  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ , alors  $(e_i) = B(d_i)$  avec  $B \in \mathbf{M}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^\dagger[1/t])$ ; la proposition III.6 implique d'autre part que  $(d_i) = A(e_i)$  avec  $A \in \mathbf{M}_d(\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t])$ . Comme  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  on a  $A \in \mathbf{M}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log, K}^\dagger)$  et donc finalement  $A \in \mathbf{M}_d(\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger)$  et de plus  $AB = \text{Id}$ . On peut alors appliquer l'opérateur  $R_0$  qui est  $\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$ -linéaire pour trouver  $AR_0(B) = \text{Id}$  ce qui fait que  $B = R_0(B)$  et que  $B$  a donc ses coefficients dans  $\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$ .

Le fait que  $A \in \mathbf{M}_d(\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger)$  implique que  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \subset \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  et le fait que  $B \in \text{GL}_d(\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t])$  implique que  $\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$ .  $\square$

**Proposition III.8.** — *Soit  $V$  une représentation semi-stable et soit  $M$  la matrice de passage d'une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  à une base de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ . Alors il existe  $r \in \mathbf{Z}$  et  $\lambda \in \mathbf{B}_K^\dagger$  tels que  $\det(M) = \lambda t^r$ .*

*Démonstration.* — Le déterminant de la matrice de passage est égal au coefficient de la matrice de passage pour le déterminant de  $V$  et il suffit donc de montrer l'assertion en dimension 1. Une représentation semi-stable de dimension 1 est cristalline et est donc de la forme  $\omega \chi^r$  où  $\omega$  est un caractère non-ramifié et  $\chi$  est le caractère cyclotomique. La période de  $\omega$  est alors un élément  $\beta \in W(\bar{k})$ , ce qui fait que  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = F \cdot \beta t^{-r}$  et  $\mathbf{D}^\dagger(V) = \mathbf{B}_K^\dagger \cdot \beta$  d'où le résultat.  $\square$

### III.3. Représentations cristallines et représentations de hauteur finie

Dans ce n<sup>o</sup>, on se place dans le cas  $K = F$  et  $V$  est une représentation cristalline de  $G_F$ . On dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_F$  est de hauteur finie si  $\mathbf{D}(V)$  possède une base sur  $\mathbf{B}_F$  formée d'éléments de  $\mathbf{D}^+(V) = (\mathbf{B}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_F}$ . Un résultat de Fontaine [20] (voir aussi [12, III.2]) montre que  $V$  est de hauteur finie si et seulement si  $\mathbf{D}(V)$  possède un sous- $\mathbf{B}_F^+$ -module libre de type fini stable par  $\varphi$  de rang égal à  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . L'objet de ce n<sup>o</sup> est de démontrer le résultat suivant :

**Théorème III.9.** — *Si  $V$  est une représentation cristalline de  $G_F$ , alors  $V$  est de hauteur finie.*

*Démonstration.* — Fixons une base  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  ainsi qu'une base  $\{d_i\}$  de  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ , et soit  $U$  la matrice de passage de l'une à l'autre c'est-à-dire que  $(e_i) = U(d_i)$ . La matrice  $U$  est à coefficients dans  $\mathbf{B}_{\text{rig}, F}^\dagger[1/t]$ . De plus si l'on remplace  $V$  par  $V(1)$ , alors on peut remplacer  $d_i$  par  $t^{-1}d_i(1)$  et donc  $U$  par  $tU$  ce qui fait que quitte à tordre suffisamment  $V$  on peut supposer

que  $U$  est à coefficients dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger}$ , ce que l'on fait maintenant. Soit  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^+$  l'anneau des séries formelles  $\sum_{k \geq 0} a_k \pi^k$  où  $a_k \in F$  et  $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$  est de rayon de convergence 1. Nous aurons besoin d'un résultat de Kedlaya [25, 4.3] (la formulation originale de Kedlaya est  $U = V W$  mais on s'y ramène en transposant) :

**Proposition III.10.** — *Si  $U$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},F}^{\dagger}$ , alors il existe  $V$  dans  $\text{Id} + \pi \mathbf{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},F}^+)$  et  $W$  dans  $\mathbf{M}_d(\mathbf{B}_F^+)$  telles que  $U = W V$ .*

Remarquons qu'on a nécessairement  $\det(W) \neq 0$  et comme  $\mathbf{B}_F^{\dagger}$  est un corps cela implique que  $W$  est inversible. Soit  $P$  la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\{e_i\}$  (qui a ses coefficients surconvergents),  $D$  la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\{d_i\}$  (qui est donc à coefficients dans  $F$ ) et  $G$  la matrice de  $\gamma_F$  (un générateur de  $\Gamma_F$ ) dans la base  $\{e_i\}$  (elle est aussi surconvergente). Un petit calcul montre que, si  $\{f_i\}$  est la base de  $\text{ddag}(V)$  déduite de  $\{e_i\}$  par  $(f_i) = W^{-1}(e_i)$ , alors :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) &= \varphi(V) D V^{-1} = \varphi(W^{-1}) P W \\ \text{Mat}_{\{f_i\}}(\gamma_F) &= \gamma_F(V) V^{-1} = \gamma_F(W^{-1}) G W \end{aligned}$$

Les coefficients de la matrice  $\varphi(V) D V^{-1}$  sont dans  $\text{Frac } \mathbf{B}_{\text{rig},F}^+$ . D'autre part les coefficients de  $\varphi(W^{-1}) P W$  sont dans  $\mathbf{B}_F^{\dagger}$ . On en déduit que dans la base  $\{f_i\}$ , la matrice de  $\varphi$  a ses coefficients dans  $\text{Frac } \mathbf{B}_{\text{rig},F}^+$  d'une part et dans  $\mathbf{B}_F^{\dagger}$  d'autre part. C'est donc [12, II.12] que  $\text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) \in \mathbf{M}_d(\text{Frac } \mathbf{B}_F^+)$ . De plus si  $v = \det(V)$ , alors  $\det(\text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi)) = \varphi(v) \det(D) v^{-1}$  et comme  $V \in \text{Id} + \pi \mathbf{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig},F}^+)$  on a  $v \in 1 + \pi \mathbf{B}_{\text{rig},F}^+$ . Les coefficients de  $\text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi)$  n'ont donc pas de pôles en zéro ce qui fait qu'il existe  $\lambda \in \mathbf{B}_F^+$  non-divisible par  $\pi$  tel que  $\lambda \text{Mat}_{\{f_i\}}(\varphi) \in \mathbf{M}_d(\mathbf{B}_F^+)$ . Pour les mêmes raisons,  $\text{Mat}_{\{f_i\}}(\gamma_F) \in \mathbf{M}_d(\text{Frac } \mathbf{B}_F^+)$ .

Soit  $D$  le  $\mathbf{B}_F^+$ -module engendré par les  $f_i$ . On vient de voir que  $\lambda \varphi(D) \subset D$  où  $\lambda \in \mathbf{B}_F^+$  n'est pas divisible par  $\pi$  et que le  $\text{Frac}(\mathbf{B}_F^+)$ -module engendré par  $D$  est stable par  $\Gamma_F$ .

**Lemme III.11.** — *Si  $D$  est un  $\mathbf{B}_F^+$ -module libre de type fini tel que le  $\text{Frac}(\mathbf{B}_F^+)$ -module engendré par  $D$  est stable par  $\Gamma_F$  et  $\lambda \in \mathbf{B}_F^+ - \pi \mathbf{B}_F^+$  est tel que  $\lambda \varphi(D) \subset D$ , alors il existe  $D' \subset D$  un sous-module libre de type fini stable par  $\varphi$  et  $\Gamma_F$  qui est de rang maximal.*

Pour montrer que la représentation  $V$  est de hauteur finie il suffit donc, grâce au résultat de Fontaine, de montrer le lemme ce que nous faisons maintenant. Le lemme est démontré dans [12] (c'est la réunion des énoncés III.8 à III.15) mais l'une des étapes utilise de manière cruciale que  $k$  est fini et il nous faut la contourner <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup>Il s'agit du lemme III.9. On remarquera d'ailleurs que ce lemme aurait plutôt dû être énoncé de la manière suivante : « Soit  $M$  un  $\mathbf{B}_K^+$ -module libre de rang fini muni d'une action de  $\Gamma$  tel que le  $\text{Frac } \mathbf{B}_K^+$ -module  $M \otimes_{\mathbf{B}_K^+} \text{Frac } \mathbf{B}_K^+$  soit muni d'une action de  $\varphi$  commutant à celle de  $\Gamma$  et telle qu'il existe  $a \in \mathbf{N}$  tel que l'on ait  $\varphi(M) \subset \pi^{-a} M$ . Alors  $\varphi(M) \subset M$ . » C'est cet énoncé qui est démontré et utilisé dans la suite de [12].

On va d'abord montrer que l'on peut supposer que  $\Gamma_F(D) \subset D$ . Soit  $G = \langle \gamma_F \rangle$ ; on renvoie à la conséquence du corollaire III.15 de [12] pour la construction, sous l'hypothèse que le  $\text{Frac}(\mathbf{B}_F^+)$ -module engendré par  $D$  est stable par  $\Gamma_F$ , de  $\alpha, \beta \in \mathbf{B}_F^+$  tels que pour tout  $\gamma \in G$  on ait  $\gamma(\alpha D) \subset \beta D$ . Comme  $\gamma(\pi)/\pi$  est inversible dans  $\mathbf{B}_F^+$ , on peut supposer que  $\pi$  ne divise pas  $\alpha$ ; en effet, l'inclusion  $\alpha D \subset \beta D$  implique que si  $\pi$  divise  $\alpha$ , alors  $\pi$  divise  $\beta$ . Soit alors  $G \cdot \alpha D$  le sous- $\mathbf{B}_F^+$ -module de  $\beta D$  engendré par les  $\gamma(\alpha d)$  où  $\gamma \in G, d \in D$ . Comme  $\mathbf{B}_F^+$  est noetherien (car principal), comme  $\beta D$  est de type fini, et comme  $G \cdot \alpha D$  est réunion croissante de sous-modules de type fini de  $\beta D$ , c'est que  $G \cdot \alpha D$  est en fait réunion d'un nombre fini de  $\gamma(\alpha D)$ . Il existe donc  $n \in \mathbf{N}$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in G$  tels que  $G \cdot \alpha D = \sum \gamma_i(\alpha D)$ . De plus  $G \cdot \alpha D$  est stable par  $G$  et donc par continuité il est stable par  $\Gamma_F$ . Ensuite comme  $\lambda\varphi(D) \subset D$  on a  $\lambda\alpha \cdot \varphi(\alpha D) \subset \alpha D$ . Soit  $\mu = \prod_{i=1}^n \gamma_i(\lambda\alpha)$ , on voit que  $\mu\varphi(\gamma_i(\alpha D)) \subset \gamma_i(\alpha D)$  pour tout  $i$  et donc que  $\mu\varphi(G \cdot \alpha D) \subset G \cdot \alpha D$  et que  $\pi$  ne divise pas  $\mu$ . Ceci montre que l'on peut se ramener au cas où  $D$  est stable par  $\Gamma_F$ .

On suppose donc maintenant que  $D$  est un  $\mathbf{B}_F^+$ -module libre de type fini stable par  $\Gamma_F$  et que  $\lambda \in \mathbf{B}_F^+ - \pi\mathbf{B}_F^+$  est tel que  $\lambda\varphi(D) \subset D$ . L'idéal  $I$  des  $\delta \in \mathbf{B}_F^+$  tels que  $\delta\varphi(D) \subset D$  est stable par  $\Gamma_F$  et par [12, III.8] il est de la forme  $(\pi^a \prod_{i=0}^n \varphi^i(q)^{\beta_i})$ . De plus comme  $\lambda \in I$  et que  $\pi$  ne divise pas  $\lambda$  c'est que  $a = 0$ . Soit alors  $\alpha = \pi^{\beta_0 + \dots + \beta_n} q^{\beta_1 + \dots + \beta_n} \dots \varphi^{n-1}(q)^{\beta_n}$ . Un petit calcul montre que  $\varphi(\alpha D) \subset \alpha D$  et que  $\alpha D$  est stable par  $\Gamma_F$ . On peut donc prendre  $D' = \alpha D$  et ceci achève la démonstration du lemme et donc du théorème III.9.  $\square$



## CHAPITRE IV

### PROPRIÉTÉS DE $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$

L'anneau  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger}$  est isomorphe (canoniquement si  $K = F$ ) à l'anneau de Robba utilisé dans la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques. Ce § est consacré à la démonstration de quelques unes de ses propriétés relatives à l'action de  $\Gamma_K$  : on définit aussi des opérateurs différentiels qui seront utiles pour la suite.

#### IV.1. L'opérateur $\nabla$

Dans ce n<sup>o</sup>,  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_K$  et  $n(\gamma) = v_p(1 - \chi(\gamma))$ . On suppose que  $n(\gamma) \geq 1$  et que  $r \geq r_{n(K)}$ .

**Lemme IV.1.** — *Si  $I = [r; s]$  est un intervalle fermé de  $[r; +\infty[$ , alors il existe  $n(I) \in \mathbf{N}$ , tel que pour  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ , on ait  $V_I((1 - \gamma)x) \geq V_I(x) + 1$  dès que  $n(\gamma) \geq n(I)$ .*

*Démonstration.* — Par densité et linéarité on se ramène au cas où  $x = \pi_K^k$  avec  $k \in \mathbf{Z}$ . Alors si  $k \geq 0$

$$\gamma(\pi_K^k) - \pi_K^k = \pi_K^k \left( \frac{\gamma(\pi_K^k)}{\pi_K^k} - 1 \right) = \pi_K^k \left( \frac{\gamma(\pi_K)}{\pi_K} - 1 \right) \left( \frac{\gamma(\pi_K^{k-1})}{\pi_K^{k-1}} + \dots + 1 \right)$$

et sinon

$$\gamma(\pi_K^{-k}) - \pi_K^{-k} = \pi_K^{-k} \left( \frac{\pi_K^k}{\gamma(\pi_K^k)} - 1 \right) = \pi_K^{-k} \left( \frac{\pi_K}{\gamma(\pi_K)} - 1 \right) \left( \frac{\pi_K^{k-1}}{\gamma(\pi_K^{k-1})} + \dots + 1 \right)$$

Comme on a  $V_I(xy) \geq V_I(x) + V_I(y)$  (voir la remarque II.6), le lemme résulte du fait que  $V_I(\gamma(\pi_K)/\pi_K - 1) \geq 1$  si  $n(\gamma)$  est assez grand ; en effet,  $\gamma(\pi_K)/\pi_K - 1$  tend vers 0 quand  $\gamma$  tend vers 1. □

Si  $I = [r; s]$ , soit  $\mathbf{B}_K^I$  l'anneau des séries formelles en  $\pi_K$  qui convergent sur la couronne de rayons intérieurs et extérieurs  $\alpha(K, r)$  et  $\alpha(K, s)$ . Le lemme précédent montre que si  $\gamma$  est assez

proche de 1, la série d'opérateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{n \geq 1} \frac{(1-\gamma)^n}{n}$$

converge vers un opérateur continu  $\nabla_I : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{B}_K^I$ , et un petit argument de séries formelles montre que  $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$ . Notamment  $\nabla_{I_1}(x) = \nabla_{I_2}(x)$  si  $I_k = [r; s_k]$ . On en déduit que la valeur commune des  $\nabla_I(x)$  appartient à  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ , et que l'opérateur  $x \mapsto \nabla(x)$ , où  $\nabla(x)$  est la valeur commune des  $\nabla_I(x)$ , est continu pour la topologie de Fréchet.

De même, si  $\gamma$  est assez proche de 1, alors la série d'opérateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))(1-\gamma)} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{n \geq 1} \frac{(1-\gamma)^{n-1}}{n}$$

converge vers un opérateur continu  $\nabla/(1-\gamma) : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \rightarrow \mathbf{B}_K^I$ , et un petit argument de séries formelles montre que

$$\frac{\nabla}{1-\gamma_K} = \frac{1-\gamma}{1-\gamma_K} \cdot \frac{\nabla}{1-\gamma}$$

ne dépend pas du choix de  $\gamma$  et définit aussi un opérateur de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  dans lui-même, continu pour la topologie de Fréchet. Il est clair que

$$(1-\gamma_K) \frac{\nabla}{1-\gamma_K} = \nabla.$$

**Lemme IV.2.** — La restriction de  $\nabla$  à  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  vérifie  $\nabla = t \cdot \partial$  où  $\partial(x) = (1+\pi)dx/d\pi$ .

**Remarque IV.3.** — Attention au fait que ces notations ne sont pas compatibles avec [7]. Ce qui est noté  $\partial$  chez nous est noté  $\nabla$  dans [7].

*Démonstration.* — Dans [7] il est démontré que l'image de  $\mathbf{B}_K^{\dagger,rn}$  par  $t_n = \varphi^{-n}$  dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  est contenue dans  $K_n[[t]]$  si  $n \geq n(K)$ . L'image par  $\varphi^{-n}$  de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,rn}$  a la même propriété par continuité. Comme  $\varphi^{-n}$  est injectif et que  $\nabla, t\partial$  commutent à  $\varphi$  il suffit de montrer que  $\nabla - t\partial$  est nul sur  $K_n[[t]]$  ce qui est évident.  $\square$

Montrons que  $\partial$  est « presque » surjective :

**Proposition IV.4.** — La connexion  $\partial$  réalise une surjection

- (1) de  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger} + F \cdot \log(\pi_K)$  dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$  ;
- (2) de  $\mathbf{B}_{\text{log},K}^{\dagger}$  dans lui-même.

*Démonstration.* — Tout d'abord si  $e_K$  est l'indice de ramification de  $K_\infty/F_\infty$ ,  $\log(\pi/\pi_K^{e_K})$  est une série surconvergente ce qui fait que  $\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[\log(\pi_K)]$ . Rappelons que  $\mathbf{B}_K^\dagger$  est un corps, et on peut donc se fixer  $r \geq r_{n(K)}$  tel que  $\partial(\pi_K)$  et  $1/\partial(\pi_K)$  appartiennent à  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r}$ .

Soit  $F(\pi_K) \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ . Posons  $F(\pi_K)/\partial(\pi_K) = \sum a_n \pi_K^n$ , alors

$$F(\pi_K) = \sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} (n+1) \pi_K^n \partial \pi_K + a_{-1} \frac{\partial \pi_K}{\pi_K} = \partial \left( \sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} \pi_K^{n+1} + a_{-1} \log(\pi_K) \right)$$

ce qui montre que  $F(\pi_K) = \partial G(\pi_K)$  avec  $G(\pi_K) \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, s} + F \cdot \log(\pi_K)$  pour  $s > r$ .

Ensuite la formule

$$\partial(G_j(\pi_K) \log^j(\pi_K)) = (\partial G_j)(\pi_K) \partial \pi_K \log^j(\pi_K) + G_j(\pi_K) j \log^{j-1}(\pi_K) \partial \pi_K / \pi_K$$

montre que si on sait faire (1), alors une récurrence permet de faire (2) ce qui montre la proposition.  $\square$

**Remarque IV.5.** — Si  $\partial(y) = x$  et  $x \in \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger, r}$ , alors on ne peut pas dire que  $y \in \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger, r}$  mais en revanche  $y \in \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger, s}$  pour tout  $s > r$ .

## IV.2. Inversion de $1 - \gamma_K$

En utilisant les résultats du n° précédent on détermine l'image de  $1 - \gamma_K : \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[1/t] \rightarrow \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[1/t]$ .

**Proposition IV.6.** — Soit  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[1/t]$ . Alors il existe  $a \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et  $b \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[1/t]$  tels que  $x = a + (1 - \gamma_K)b$ .

*Démonstration.* — Soit  $j \in \mathbf{N}$  tel que  $x = t^{-j} x_j$  avec  $x_j \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ . Un petit calcul qui repose sur le fait que  $\nabla \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger \subset t \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  montre qu'il existe  $x_{j-1} \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  tel que  $x = -j^{-1} \nabla(x_j t^{-j}) + x_{j-1} t^{-(j-1)}$  ce qui montre (par récurrence) que l'on peut écrire  $x = \nabla z + y$  avec  $z \in t^{-j} \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et  $y \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ . La proposition suit alors du fait que  $\nabla z = (1 - \gamma_K) \frac{\nabla}{1 - \gamma_K}(z)$ .  $\square$

**Lemme IV.7.** — Soit  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$  tel que pour tout  $n \gg 0$  on ait  $x \in \varphi^{n-1}(q) \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}$ . Alors  $x \in t \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ .

*Démonstration.* — Soit  $s = r_{n_0}$  tel que  $x \in \varphi^{n-1}(q) \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}$  pour tout  $n \geq n_0$ . Rappelons que  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, s}$  s'identifie (non canoniquement) à un anneau de séries formelles en  $\pi_K$ . Soit  $Q_n(\pi_K) = \varphi^{n-1}(q)$ . On a  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, s} \cap \varphi^{n-1}(q) \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n} = \varphi^{n-1}(q) \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, s}$  car une série est divisible  $Q_n(\pi_K)$  si et seulement si les zéros de la première ont un ordre  $\geq$  à ceux de la seconde, ce que l'on

peut vérifier localement. De même, comme les  $\varphi^{n-1}(q)$  sont premiers entre eux, l'hypothèse du lemme est équivalente au fait que, pour tout  $n \gg 0$ , on ait  $x \in \varphi^n(\pi)/\varphi^{n-1}(\pi)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s} = \varphi^n(\pi)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  comme  $\varphi^{n-1}(\pi)$  est inversible dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ . On peut donc écrire  $x = \varphi^n(\pi)p^{-n}x_n$  et on va montrer que la suite  $\{x_n\}$  converge dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$ . Les  $x_n \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  vérifient la relation :

$$\frac{\varphi^n(\pi)}{p^n}x_n - \frac{\varphi^{n+1}(\pi)}{p^{n+1}}x_{n+1} = 0 \text{ et donc } (x_n - x_{n+1}) + x_{n+1} \left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right) = 0$$

On en déduit que si  $I$  est un intervalle contenu dans  $[s; +\infty[$ , alors

$$(1) \quad V_I(x_n - x_{n+1}) = V_I\left(x_{n+1} \left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right)\right) \geq V_I(x_{n+1}) + V_I\left(1 - \frac{\varphi^n(q)}{p}\right)$$

On se fixe  $I$  un intervalle compact et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_I(1 - \varphi^n(q)/p) = +\infty$  sur toute couronne du type  $\{|z| \in I\}$ , on peut supposer que  $V_I(1 - \varphi^n(q)/p) > 0$  pour  $n$  assez grand. Alors l'inégalité (1) montre que  $V_I(x_n - x_{n+1}) > V_I(x_{n+1})$  et donc que  $V_I(x_n) = V_I(x_{n+1})$ . Les  $x_n$  ont donc tous la même valuation pour  $n$  assez grand. Enfin l'inégalité 1 et le fait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_I(1 - \varphi^n(q)/p) = +\infty$  impliquent que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_I(x_n - x_{n+1}) = +\infty$  et donc que la suite  $x_n$  converge.

Ceci étant vrai pour tout  $I$ , la suite  $x_n$  converge pour la topologie de Fréchet vers une limite  $y \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,s}$  et un calcul immédiat montre que  $x = ty$ .  $\square$

**Remarque IV.8.** — On peut aussi dire que  $xt^{-1}$  est une fonction méromorphe sans pôles, et cela la force à être holomorphe, c'est-à-dire que  $xt^{-1} \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ . Cela suit de résultats généraux de Lazard [26] sur les fonctions analytiques.

**Proposition IV.9.** — Soit  $r > 0$  et  $n \geq n(r)$ . Alors

$$\begin{aligned} \ker(\theta \circ \iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} &\rightarrow \mathbf{C}_p) = \varphi^{n-1}(q)\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \\ \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} &\rightarrow \mathbf{C}_p) = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r} \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Le premier point est une conséquence immédiate de II.15. Pour le deuxième si  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  est tel que  $\theta \circ \iota_n(x) = 0$ , alors  $x = \varphi^{n-1}(q)y$  avec  $y \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  et alors  $x = \varphi^{n-1}(q)R_0(y)$  ce qui fait que  $y = R_0(y)$  et donc que  $y \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$ .  $\square$

**Lemme IV.10.** — Soit  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  et  $\gamma \in \Gamma_K$  avec  $n = n(\gamma) \geq n(r)$ . Si  $\text{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(x)) = 0$ , alors

$$y = \frac{1 - \gamma}{1 - \gamma_K}x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$$

*Démonstration.* — Ceci résulte de la proposition précédente et du fait que  $\frac{1-\gamma}{1-\gamma_K} = \text{Tr}_{K_n/K}$ .  $\square$



**Proposition IV.11.** — Soit  $x \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  et  $n_0 \geq n(r)$ . On suppose que pour tout  $n \geq n_0$  on a  $\text{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(x)) = 0$ . Alors  $x \in (1 - \gamma_K)\mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$ .

*Démonstration.* — Le lemme précédent montre que  $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r_n}$  pour tout  $n \geq n_0$  et donc que  $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}x \in t\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ . Posons  $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}x = ty$ . Par la proposition IV.4 il existe  $z \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  tel que  $y = \partial z$  et alors  $x = (1 - \gamma_K)z$  : en effet  $\nabla(x - (1 - \gamma_K)z) = 0$  et cela montre que  $x - (1 - \gamma_K)z \in F$ . Comme  $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}$  agit par un multiple de l'identité sur  $F$  et que  $\frac{\nabla}{1-\gamma_K}x$  et  $\nabla(z)$  sont dans  $t\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  on a bien  $x - (1 - \gamma_K)z = 0$ .  $\square$

### IV.3. Dualité dans $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$

On montre que l'accouplement de dualité classique sur les anneaux de Robba est compatible aux extensions  $\mathbf{B}_{\text{rig},K_2}^\dagger/\mathbf{B}_{\text{rig},K_1}^\dagger$ .

**Proposition IV.12.** — Soit  $x = X(\pi_K) = \sum x_j \pi_K^j \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ . Par la proposition IV.4 on peut écrire  $x = \partial(y + a \log(\pi_K))$ . On pose  $\text{res}_0(x) = ae_K$ .

Alors  $\text{res}_0(x)$  ne dépend pas des choix faits (de  $K$ , de  $\pi_K$ ) et l'application  $x, y \mapsto \langle x, y \rangle = \text{res}_0(xy)$  est bilinéaire et induit une dualité parfaite entre  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  et lui-même (c'est-à-dire que toute  $f \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  détermine une forme linéaire  $g \mapsto \langle g, f \rangle$  dont la restriction à chaque  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  est continue, et réciproquement si on se donne une telle forme linéaire, alors elle provient d'une  $f \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ ).

*Démonstration.* — Si  $\pi_K$  et  $\pi_L$  sont deux uniformisantes associées aux corps  $K$  et  $L$ , alors  $\log(\pi_K^{e_K}) - \log(\pi_L^{e_L}) \in \mathbf{B}_{\text{rig},KL}^\dagger$  ce qui montre que  $\text{res}_0(x)$  ne dépend pas des choix faits. Ensuite les formules explicites de IV.4 montrent que

$$\text{res}_0(H(\pi_K)) = e_K a_{-1} \left( \frac{H(\pi_K)}{\partial(\pi_K)} \right)$$

et donc que si  $\text{res}_0(x\pi_K^j) = 0$  pour tout  $j \in \mathbf{Z}$ , alors  $x = 0$ . Reste à voir que si  $\lambda$  est une forme linéaire continue sur chaque  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  à valeurs dans  $F$ , alors il existe  $y$  dans  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  tel que  $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$  pour tout  $x$ . Soit

$$y_j = \lambda \left( \pi_K^{-j-1} \frac{\partial \pi_K}{e_K} \right)$$

et  $y = \sum y_j \pi_K^j$ . Un petit calcul qui utilise encore la formule de IV.4 rappelée ci-dessus montre que si  $y \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ , alors on a bien  $\lambda(x) = \langle x, y \rangle$ . Il suffit donc de montrer que  $y \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ . Soit  $\alpha \geq r$  et  $I = [\alpha; \alpha]$ . La forme linéaire  $\lambda$  est continue pour la topologie de Fréchet sur chaque

$\mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger,r}$  c'est-à-dire qu'elle est continue pour chacune des semi-normes et il existe donc  $C(I)$  telle que  $v_p(\lambda x) \geq V_I(x) - C(I)$  ce qui fait que

$$v_p(y_j) \geq V_I \left( \pi_K^{-j-1} \frac{\partial \pi_K}{e_K} \right) - C(I) \geq \frac{-j}{e_K \alpha} - C'(I)$$

ce qui montre que  $y \in \mathbf{B}_{\text{rig},K}^{\dagger}$ . □

On pourra d'ailleurs rapprocher la proposition précédente de [16, 5.1] ou encore de [10].

# CHAPITRE V

## STRUCTURES DIFFÉRENTIELLES SUR LES ( $\varphi, \Gamma_K$ )-MODULES

Dans le § précédent on a fait l'étude de  $(\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger, \nabla)$ . Ce § est consacré à la construction de l'équation différentielle associée à une représentation  $V$ , qui est un module à connexion au-dessus de  $(\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger, \nabla)$ . On donne ensuite des applications aux représentations semi-stables et à la théorie de Sen.

### V.1. L'opérateur $\nabla_V$

Dans tout ce n<sup>o</sup>,  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ . Rappelons que l'on a posé  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) = \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  et notamment que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$ . Le lemme de régularisation par le Frobenius montre qu'on a  $(\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger)^{\varphi=1} \subset (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger)^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$  et donc que l'on récupère  $V$  par la formule  $V = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger} \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V))^{\varphi=1}$ . On choisit une base  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  et on prolonge les opérateurs  $R_m$  à  $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{D}^\dagger(V)$  par  $R_m(\sum \lambda_i \otimes e_i) = \sum R_m(\lambda_i) \otimes e_i$ . Comme  $R_m$  est  $\mathbf{B}_K^\dagger$ -linéaire, le prolongement ne dépend pas du choix de la base  $\{e_i\}$ . Nous aurons besoin du résultat suivant qui est un corollaire immédiat de la proposition II.15 :

*Lemme V.1.* — Soit  $r > 0$  et  $n \geq n(r)$ . Alors

$$\begin{aligned} \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) &= \varphi^{n-1}(q) \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V) \\ \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}^{\dagger, r}(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) &= \varphi^{n-1}(q) \mathbf{D}^{\dagger, r}(V) \end{aligned}$$

*Démonstration.* — La proposition II.15 montre que si  $\theta \circ \iota_n(x) = 0$ , alors  $x = \varphi^{n-1}(q)y$  avec  $y \in \tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}, K}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger} \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ . On a alors  $x = \varphi^{n-1}(q)R_0(y)$  et donc  $y = R_0(y) \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ . Enfin pour le deuxième point il suffit d'utiliser le fait qu'un élément de  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}$  divisible par  $\varphi^{n-1}(q)$  dans  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}$  l'est dans  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}$ .  $\square$

On va munir  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  d'une connexion  $\nabla_V$  (au-dessus de  $(\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger, \nabla)$ ) c'est-à-dire d'un opérateur  $\nabla_V$  tel que  $\nabla_V(\lambda \cdot x) = \nabla(\lambda) \cdot x + \lambda \cdot \nabla_V(x)$ .

On se fixe une base  $\{e_i\}$  de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  et si  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$  s'écrit  $x = \sum x_i \otimes e_i$  avec  $x_i \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ , alors on pose (si  $I$  est tel que  $r \in I$ ) :  $V_I(x) = \inf_i V_I(x_i)$ . La définition dépend de la base mais pas la topologie définie par les  $V_I$  qui est équivalente à la topologie induite sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  par  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ , ce qui montre d'ailleurs que  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$  est complet puisqu'il est fermé dans  $\widetilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ . Dans cette partie  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma_K$  et  $n(\gamma) = v_p(1 - \chi(\gamma))$ . On suppose que  $n(\gamma) \geq 1$  et que  $r \geq r_{n(K)}$ .

**Lemme V.2.** — Si  $I = [r; s]$  est un intervalle fermé de  $[r; +\infty[$ , alors il existe  $n(I, V) \in \mathbf{N}$ , tel que pour  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$ , on ait  $V_I((1 - \gamma)x) \geq V_I(x) + 1$  dès que  $n(\gamma) \geq n(I, V)$ .

*Démonstration.* — Si  $y \in \mathbf{D}^{\dagger, r}(V)$ , alors  $V_I((1 - \gamma)y) \geq V_I(y) + 1$ , quand  $n(\gamma)$  est assez grand, puisque l'action de  $G_K$  est continue. On se fixe  $n(\gamma)$  tel que  $V_I((1 - \gamma)e_i) \geq V_I(e_i) + 1$  pour tout  $i$  et le lemme résulte alors du lemme IV.1 (le cas de la représentation triviale) puisque

$$(1 - \gamma)(x_i \otimes e_i) = (1 - \gamma)x_i \otimes \gamma(e_i) + x_i \otimes (1 - \gamma)e_i$$

□

Si  $I = [r; s]$ , soit  $\mathbf{B}_K^I$  l'anneau des séries formelles en  $\pi_K$  qui convergent sur la couronne de rayons intérieurs et extérieurs  $\alpha(K, r)$  et  $\alpha(K, s)$ . Le lemme précédent montre que si  $\gamma$  est assez proche de 1, la série d'opérateurs

$$\frac{\log(\gamma)}{\log(\chi(\gamma))} = -\frac{1}{\log(\chi(\gamma))} \sum_{n \geq 1} \frac{(1 - \gamma)^n}{n}$$

converge vers un opérateur continu  $\nabla_{I, V} : \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}} \mathbf{B}_K^I$ , et un petit argument de séries formelles montre que  $\log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$ . Notamment  $\nabla_{I_1, V}(x) = \nabla_{I_2, V}(x)$  si  $I_k = [r; s_k]$ . On en déduit que la valeur commune des  $\nabla_{I, V}(x)$  appartient à  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$ , et que l'opérateur  $x \mapsto \nabla_V(x)$ , où  $\nabla_V(x)$  est la valeur commune des  $\nabla_{I, V}(x)$ , est continu pour la topologie de Fréchet.

**Exemple V.3.** — Un calcul facile montre par exemple que  $\nabla_{\mathbf{Q}_p(r)} = t\partial + r$  sur  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(\mathbf{Q}_p(r))$ .

**Lemme V.4.** — Soit  $x \in \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r}(V)$  tel que pour tout  $n \gg 0$  on ait  $x \in \varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V)$ . Alors  $x \in t\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .

*Démonstration.* — Après le choix d'une base de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  cela suit immédiatement de IV.7. □

## V.2. Application aux représentations semi-stables

Un cristal sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  est un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module libre muni d'un Frobenius et d'une connexion qui commutent, la connexion étant au-dessus de  $\nabla$ . Commençons par définir ce qu'est un cristal unipotent. On remarquera que cela ne dépend pas de l'éventuelle structure de Frobenius. Soit donc  $M$  un  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module libre de rang fini  $d$  muni d'une connexion  $\nabla_M$  au-dessus de  $\nabla$ .

**Proposition V.5.** — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1)  $\nabla_M$  est triviale sur  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$ , c'est-à-dire qu'il existe  $e_0, \dots, e_{d-1} \in M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  tels que  $\nabla_M e_i = 0$  et  $\bigoplus e_i \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t] = M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$ ;

(2) il existe  $d$  éléments  $f_0, \dots, f_{d-1}$  de  $M$  qui forment une base de  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$  et tels que  $\nabla_M(f_i) \in t \cdot \langle f_{i-1}, \dots, f_0 \rangle$  où  $\langle \cdot \rangle$  dénote le  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$ -module engendré.

*Démonstration.* — Commençons par montrer que (1) implique (2). L'opérateur de monodromie  $N = 1 \otimes N$  laisse stable le  $F$ -espace vectoriel engendré par les  $e_i$ , car le (1) implique que les  $e_i$  engendrent le noyau de  $\nabla_M$  agissant sur  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$ , et un calcul direct montre que  $N$  commute à  $\nabla_M$  (car  $N$  commute à l'action de  $G_F$ ) et donc stabilise son noyau : on peut alors supposer que  $N(e_i) \in \langle e_{i-1}, \dots, e_0 \rangle$  car  $N$  est nilpotent. On peut écrire de manière unique  $e_i = \sum_{j=0}^{d-1} \log^j(\pi) d_{ji}$ . Montrons que  $f_i = d_{0,i}$  est une famille qui satisfait la condition de (2). Le fait que  $\nabla_M(e_i) = 0$  et  $N(e_i) \in \langle e_{i-1}, \dots, e_0 \rangle$  implique respectivement que

$$\nabla_M(d_{0,i}) = d_{1,i} \frac{t(1+\pi)}{\pi} \text{ et } d_{1,i} \in \langle d_{0,i-1}, \dots, d_{0,0} \rangle$$

ce qui fait que  $\nabla_M(d_{0,i}) \in t \langle d_{0,i-1}, \dots, d_{0,0} \rangle$ . Montrons enfin que les  $f_i$  engendrent  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$ . Soit  $m \in M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$ , par hypothèse on peut écrire  $m = \sum \mu_i e_i$  et donc  $m = \sum \lambda_i f_i + n \cdot \log(\pi)$  où  $\lambda_i$  est le terme constant de  $\mu_i$  et comme  $m \in M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$  on a nécessairement  $n = 0$ .

Montrons maintenant l'implication réciproque. On va montrer par récurrence que l'on peut prendre  $e_i = \sum_{j=0}^i f_j a_{ji}$  avec  $a_{ji} \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  et  $a_{ii} = 1$ . En rang 1 il n'y a rien à montrer. En rang  $d$ ,  $\nabla_M$  induit une connexion sur  $(\bigoplus f_i \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger) / f_0 \mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger$  qui satisfait les mêmes conditions et il existe donc  $e'_1, \dots, e'_{d-1}$  tels que  $\nabla_M(e'_i) = \alpha_i f_0$ . Un calcul immédiat montre que  $\alpha_i \in t \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  et donc qu'il existe  $\beta_i \in \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger$  tel que  $\nabla(\beta_i) = \alpha_i$ . On pose alors  $e_0 = f_0$  et  $e_i = e'_i - \beta_i f_0$ , ce qui achève la récurrence. La matrice de passage des  $f_i$  aux  $e_i$  est triangulaire avec des 1 sur la diagonale et on en déduit que les  $e_i$  engendrent bien  $M \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger[1/t]$ .  $\square$

Un cristal qui satisfait les conditions de la proposition précédente est dit unipotent.

**Proposition V.6.** — Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique et  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  le cristal qu'on lui a associé. Alors il existe  $n$  tel que la restriction de  $V$  à  $G_{K_n}$  est semi-stable (respectivement cristalline) à poids négatifs si et seulement si  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  est unipotent (respectivement trivial).

*Démonstration.* — On a vu que  $V$  est une représentation semi-stable de  $G_{K_n}$  si et seulement si

$$\mathbf{D}_{\text{log}}^\dagger(V) = \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$$

a une base d'éléments stables par  $\gamma_{K_n}$ . Si  $V$  est semi-stable, alors  $\nabla_V$  est donc triviale, c'est-à-dire que si  $e_0, \dots, e_{d-1}$  est une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ , alors ils satisfont le (1) de la proposition précédente en raison du théorème de comparaison :

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t] = \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig},K}^\dagger} \mathbf{B}_{\text{log},K}^\dagger[1/t]$$

Réciproquement si  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  est unipotent, alors les  $e_0, \dots, e_{d-1}$  engendrent un  $F$ -espace vectoriel sur lequel  $\log(\gamma)$  agit trivialement ce qui fait que  $\Gamma_K$  agit à travers un quotient fini et donc que les  $e_i$  sont stables par  $\gamma_K^{p^n}$  pour  $n$  assez grand et forment alors une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V_n)$  si  $V_n$  est la restriction de  $V$  à  $G_{K_n}$ .

On dit aussi dans ce cas que la connexion est unipotente. De plus  $V$  est cristalline si et seulement si on peut choisir les  $f_i$  tels que  $\nabla_M(f_i) = 0$  et la connexion est alors triviale.  $\square$

### V.3. Les modules $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$

Rappelons que Sen a montré [33] que si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors l'ensemble des sous- $K_\infty$ -espaces vectoriels de dimension finie de  $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  stables par  $\Gamma_K$  admet un plus grand élément  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et que  $\mathbf{C}_p \otimes_{K_\infty} \mathbf{D}_{\text{Sen}}(V) = \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ . De plus si  $\gamma \in \Gamma_K$  est suffisamment proche de 1, alors la série qui définit  $\log(\gamma)$  converge en tant que série d'opérateurs  $\mathbf{Q}_p$ -linéaires de  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et l'opérateur  $\Theta_V = \log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  est un opérateur  $K_\infty$ -linéaire qui ne dépend pas de  $\gamma$ . Soit  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}^n(V) = \mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)^{G_{K_n}}$ ; alors si  $n$  est assez grand  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}^n(V)$  est un  $K_n$ -espace vectoriel stable par  $\Theta_V$  tel que  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}^n(V) \otimes_{K_n} K_\infty = \mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ .

D'autre part Fontaine a montré dans [21] que l'ensemble des sous- $K_\infty[[t]]$ -modules libres de type fini de  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  stables par  $\Gamma_K$  contient un plus grand élément; nous le noterons  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$  dans cet article et on a  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{K_\infty[[t]]} \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V) = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ . De plus si  $\gamma \in \Gamma_K$  est suffisamment proche de 1, alors la série qui définit  $\log(\gamma)$  converge en tant que série d'opérateurs  $\mathbf{Q}_p$ -linéaires de  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$  et l'opérateur  $\nabla_V = \log(\gamma)/\log(\chi(\gamma))$  est un opérateur qui ne dépend pas de  $\gamma$  et qui vérifie  $\nabla_V(ax) = a\nabla_V(x) + \nabla(a)x$  ce qui montre que  $\nabla_V$  est une connexion sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ ; on l'étend à  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V) = K_\infty((t)) \otimes_{K_\infty[[t]]} \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ .

On peut retrouver  $(\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V), \Theta_V)$  à partir de  $(\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V), \nabla_V)$  via l'application  $\theta : \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow \mathbf{C}_p$  comme nous le verrons ci-dessous. Rappelons [7] que l'application  $\iota_n = \varphi^{-n}$  envoie  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}$  dans  $K_n[[t]] \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$  et envoie donc  $\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)$  dans un sous  $K_n[[t]]$ -module de  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ .

**Proposition V.7.** — *L'application de  $K_\infty((t)) \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}} \mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)$  dans  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$  déduite de  $\iota_n$  est un isomorphisme de  $K_\infty((t))$ -modules avec connexion, si  $n$  est assez grand.*

*Démonstration.* — On prend  $n \geq n_0$  tel que  $\iota_n(\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}) \subset K_n[[t]]$ . Il est clair qu'alors

$$K_\infty[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n})} \iota_n(\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V))$$

est un sous  $K_\infty[[t]]$ -module libre de type fini de  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  stable par  $\Gamma_K$ .

Montrons que c'est  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$  pour  $n \gg 0$ . On a une application  $\theta : \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  est un  $K_\infty$ -espace vectoriel de dimension  $d = \dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ . On en déduit une application

$$\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$$

dont le noyau est  $\varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)$  par le lemme V.1 ce qui fait que  $\theta \circ \iota_n$  réalise une injection d'un  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n}/\varphi^{n-1}(q)$  module de rang  $d$  dans  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  et son image est un  $K_n$ -espace vectoriel  $V_n$  de dimension  $d$  stable par  $\Gamma_K$ . Un petit calcul montre que des éléments de  $K_\infty \otimes_{K_n} V_n$  liés sur  $K_\infty$  le sont déjà sur  $K_n$  et donc que  $K_\infty \otimes_{K_n} V_n$  est de dimension maximale et donc est égal à  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ . Cela implique que le déterminant de l'injection

$$K_\infty[[t]] \otimes_{\iota_n(\mathbf{B}_K^{\dagger, r_n})} \iota_n(\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)) \hookrightarrow \mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$$

n'est pas divisible par  $t$  et donc (comme  $K_\infty[[t]]$  est un anneau local d'idéal maximal  $(t)$ ) par le lemme de Nakayama que l'injection ci-dessus est en fait un isomorphisme.  $\square$

**Corollaire V.8.** — *Par extension des scalaires on en déduit que l'application*

$$K_\infty((t)) \otimes_{\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r_n}} \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$$

*déduite de  $\iota_n$  est aussi un isomorphisme de  $K_\infty((t))$ -modules avec connexion, si  $n$  est assez grand.*

Grâce à ces calculs on peut retrouver  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  à partir de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ , la proposition suivante se trouve dans [21, prop. 3.25].

**Proposition V.9.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ , alors  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est le noyau de la connexion  $\nabla_V$  opérant sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}(V)$ . En particulier,  $V$  est de de Rham si et seulement si  $\nabla_V$  est la connexion triviale.*

*Démonstration.* — L'action de  $\nabla_V$  sur  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est triviale et de plus si  $r \gg 0$ , alors  $t^r K_\infty[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est un sous- $K_\infty[[t]]$ -module de  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  libre de type fini et stable par  $\Gamma_K$  ce qui montre que  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est bien inclus dans le noyau de  $\nabla_V$  agissant sur  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ .

La théorie générale des modules à connexion montre que le noyau de  $\nabla_V$  sur  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est un  $K_\infty$ -espace vectoriel de dimension finie  $\leq \dim_{K_\infty((t))}(\mathbf{D}_{\text{dR}}(V))$ ; il est aussi stable par  $\Gamma_K$  et provient donc par extension des scalaires d'un  $K_n$ -espace vectoriel stable par  $\Gamma_K$  pour  $n \gg 0$ . L'action de  $\Gamma_K$  sur ce  $K_n$ -espace vectoriel est discrète car  $\nabla_V = 0$  (cf [35, chap. V]) et donc quitte à augmenter  $n$  l'action de  $\Gamma_{K_n}$  est triviale et cet espace est donc inclus dans  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V_n) = K_n \otimes \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  où  $V_n$  est la restriction à  $G_{K_n}$  de  $V$ , ce qui fait que le noyau de la connexion agissant sur  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est inclus dans  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ . On a donc bien que  $K_\infty \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  est le noyau de  $\nabla_V$  sur  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ .  $\square$

#### V.4. Représentations $\mathbf{C}_p$ -admissibles

La théorie de Sen permet de caractériser facilement les représentations  $\mathbf{C}_p$ -admissibles :

**Proposition V.10.** — *Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique, alors  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible si et seulement si  $\Theta_V = 0$ .*

*Démonstration.* — Si  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible, alors on a  $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} = \widehat{K}_\infty \otimes_K (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  et  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V) = K_\infty \otimes_K (\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$  est muni de la connexion triviale.

Réciproquement, si  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  est muni de la connexion triviale, alors l'action de  $\Gamma_K$  est discrète sur  $(\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$  et  $V$  est donc  $\mathbf{C}_p$ -admissible.  $\square$

La proposition suivante est due à Sen [33] et est un cas particulier de résultats assez généraux sur la caractérisation de l'algèbre de Lie de l'image de  $I_K$  pour une représentation  $p$ -adique en terme de l'opérateur  $\Theta_V$  :

**Proposition V.11.** — *Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique  $\mathbf{C}_p$ -admissible. Alors la restriction de  $V$  à  $I_K$  est potentiellement triviale.*

Le but de ce n<sup>o</sup> est de donner une démonstration de cette proposition qui repose sur la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques. Comme on ne s'intéresse qu'à la restriction de  $V$  à  $I_K$ , on suppose dans tout ce n<sup>o</sup> que  $k$  est algébriquement clos. Si  $L$  est une extension finie de  $K$ ,



soient

$$\delta_{\pi_L} = \frac{\pi_L}{\partial\pi_L} \partial \text{ et } \mu = p\varphi \left( \frac{\partial\pi_L}{\pi_L} \right) \frac{\pi_L}{\partial\pi_L},$$

ce qui fait que  $\delta_{\pi_L}(f(\pi_L)) = g(\pi_L)$  où  $g(X) = X \cdot dg/dX$ . Nous aurons besoin du résultat suivant de Tsuzuki [39, 5.1.1] :

**Théorème V.12.** — Soient  $L$  une extension finie de  $K$ ,  $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_L)$  tel que  $|A - \mathrm{Id}| < |\varepsilon^{(1)} - 1|$  et  $C' \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_L^\dagger)$  tel que  $\delta_{\pi_L} A + AC' = \mu\varphi(C')A$ , alors il existe  $Y \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_L^\dagger)$  tel que  $\delta_{\pi_L} Y + YC' = 0$  et  $Y = \varphi(Y)A$ .

**Corollaire V.13.** — Soit  $L$  une extension finie de  $K$ ,  $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_L)$  tel que  $|A - \mathrm{Id}| < |\varepsilon^{(1)} - 1|$  et  $C \in \mathrm{M}_d(\mathbf{B}_L^\dagger)$  tel que  $\partial A + AC = p\varphi(C)A$ , alors il existe  $Y \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_L^\dagger)$  tel que  $\partial Y + YC = 0$  et  $Y = \varphi(Y)A$ .

Le corollaire suit immédiatement du théorème en posant  $C' = \frac{\pi_L}{\partial\pi_L} C$ . Ce théorème va nous permettre de montrer que si  $V$  est une représentation telle que  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  est munie d'une connexion surconvergente  $\partial_V$ , alors  $V$  et  $\partial_V$  sont triviales.

**Lemme V.14.** — Soit  $\partial : \mathbf{B}_K^\dagger \rightarrow \mathbf{B}_K^\dagger$  défini par  $\partial(x) = (1 + \pi) \frac{dx}{d\pi}$ . Si  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  et  $\partial_V : \mathbf{D}^\dagger(V) \rightarrow \mathbf{D}^\dagger(V)$  est un opérateur différentiel au-dessus de  $(\mathbf{B}_K^\dagger, \partial)$  tel que  $\partial_V \circ \varphi = p\varphi \circ \partial_V$ . Alors le sous-groupe d'inertie de  $H_K$  agit à travers un quotient fini sur  $V$ .

*Démonstration.* — Considérons  $V$  en tant que représentation de  $G_L$ ; le module  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  est un  $\mathbf{B}_L^\dagger$  module libre de rang fini muni d'un Frobenius étale et de la connexion  $\partial_V$ ; de plus quitte à remplacer  $L$  par une extension finie on peut trouver une base de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  dans laquelle la matrice de Frobenius est aussi proche de  $\mathrm{Id}$  que l'on veut (en effet soit  $r > 0$ ; la représentation  $V$  a un réseau  $T$  stable par  $G_K$  dont on fixe une base et comme le morphisme qui définit la représentation est continu on peut supposer quitte à augmenter  $L$  que son image dans  $\mathrm{GL}(T)$  est comprise dans  $1 + p^r \mathrm{M}_d(\mathbf{Z}_p)$  auquel cas  $T/p^r T$  est la représentation triviale de  $H_L$  ce qui fait que le  $(\varphi, \Gamma_L)$ -module qui lui est associé est trivial et donc que le Frobenius sur  $\mathbf{D}^\dagger(T)$  est trivial modulo  $p^r$ ).

Le corollaire au théorème de Tsuzuki (V.13) appliqué à  $A = \mathrm{Mat}(\varphi)$  et  $C = \mathrm{Mat}(\partial_V)$  nous donne alors une matrice  $Y$  qui définit une base  $y_1, \dots, y_d$  de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  telle que  $\varphi(y_i) = y_i$  ce qui fait que la restriction de  $V$  à  $H_L$  est triviale et donc que la restriction de  $V$  (comme représentation de  $G_K$ ) à l'inertie de  $H_K$  est potentiellement triviale.  $\square$

**Lemme V.15.** — Si la connexion  $\nabla_V$  de  $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$  vérifie  $\nabla_V(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)) \subset t\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}^\dagger(V)$ , alors l'opérateur  $\partial_V = t^{-1}\nabla_V$  vérifie  $\partial_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset \mathbf{D}^\dagger(V)$ .

*Démonstration.* — Soit  $e_1, \dots, e_d$  une base de  $\mathbf{D}^\dagger(V)$  sur  $\mathbf{B}_K^\dagger$ , telle que la matrice de  $\varphi$  vérifie  $Q = \text{Mat}(\varphi) \in \text{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$ . C'est aussi une base de  $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$  sur  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ . Soit  $D = \text{Mat}(\partial_V) \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger)$ . On remarquera que  $\partial Q \in \text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$  puisque  $\partial$  préserve  $\mathbf{B}_K^\dagger$ . Le fait que  $\nabla_V$  et  $\varphi$  commutent montre que  $p\varphi(D)Q = \partial Q + QD$ . Soit  $H = D + Q^{-1}\partial Q$ . L'équation précédente s'écrit alors

$$H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = -pQ^{-1}\varphi(Q^{-1}\partial(Q))Q$$

et  $-pQ^{-1}\varphi(Q^{-1}\partial(Q))Q \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger)$ . Le résultat que l'on cherche à établir est que  $H$  et donc  $D$  a ses coefficients dans  $\mathbf{B}_K^\dagger$ . Il suffit donc de montrer le fait suivant : si  $H \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger)$  vérifie  $H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = R \in \text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ , alors en fait  $H \in \text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ , ce que nous faisons maintenant. Soient  $|\cdot|_I$  les normes correspondant aux valuations  $V_I$  ; on les étend à  $\text{M}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$  en décidant que  $|M|_I = \sup |m_{ij}|_I$ . Un élément  $x$  de  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$  est dans  $\mathbf{B}_K^{\dagger, r}$  si et seulement si la suite des  $|x|_I$  (avec  $I \subset [r; +\infty[)$  est bornée, et il en est donc de même pour les matrices à coefficients dans ces anneaux. Comme  $Q \in \text{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$ , on a  $|QM|_I = |MQ|_I = |M|_I$  et donc aussi  $|Q^{-1}M|_I = |MQ^{-1}|_I = |M|_I$ . Fixons  $r$  tel que  $Q, Q^{-1}$ , et  $D$  aient leurs coefficients dans  $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r/p}$ . Dans notre cas  $H - pQ^{-1}\varphi(H)Q = R$  et il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $I$ , on ait :  $|R|_I \leq C$ . On a alors  $H = R + pQ^{-1}\varphi(H)Q$  et donc  $H \in \text{M}_d(\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r/p})$  d'une part, et  $|H|_I \leq C + p^{-1}|H|_{p^{-1}I}$  d'autre part, ce qui fait que si  $\delta = |H|_{[p^{-1}r, pr]}$ , alors  $|H|_{[r; s]} \leq C + p^{-1}(\delta + |H|_{[r; p^{-1}s]})$  et donc si  $r \leq p^{-h}s \leq pr$ , alors

$$|H|_{[r; s]} \leq (C + p^{-1}\delta)(1 + p^{-1} + \dots + p^{-h})|H|_{[r; p^{-h}s]} \leq \frac{C + \delta}{1 - 1/p} + \delta$$

ce qui fait que  $H$  est à coefficients surconvergents.  $\square$

**Lemme V.16.** — *La connexion  $\Theta_V$  sur  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  est triviale si et seulement si  $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .*

*Démonstration.* — Si  $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , alors comme  $(\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V), \Theta_V)$  est l'image par  $\theta \circ \iota_n$  de  $(\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V), \nabla_V)$ , c'est que  $\Theta_V = 0$ .

Réciproquement si  $\Theta_V = 0$ , alors pour tout  $n \gg 0$  on a

$$\nabla_V(\mathbf{D}^{\dagger, r_n}(V)) \subset \ker(\theta \circ \iota_n : \mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V) \rightarrow \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V) = \varphi^{n-1}(q)\mathbf{D}_{\text{rig}}^{\dagger, r_n}(V)$$

par le lemme V.1, et le lemme V.4 permet de conclure.  $\square$

*Démonstration de la proposition V.11.* — Comme on s'intéresse à la restriction de  $V$  à l'inertie, on peut supposer que le corps résiduel  $k$  de  $K$  est algébriquement clos, ce que l'on fait maintenant. On a vu qu'une représentation  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible si et seulement si le module  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$  qui lui est associé par la théorie de Sen est muni de la connexion triviale et on a montré

que cette connexion est l'image par  $\theta$  de celle qui existe sur  $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ . Le lemme V.16 montre que dans ce cas  $\nabla_V(\mathbf{D}^\dagger(V)) \subset t \cdot \mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ .

Le lemme V.15 montre alors que  $t^{-1}\nabla_V$  est une connexion surconvergente sur  $\mathbf{D}^\dagger(V)$ . Le lemme V.14 montre ensuite que la restriction de  $V$  à (l'inertie de)  $H_K$  est potentiellement triviale. Enfin comme  $V$  est  $\mathbf{C}_p$ -admissible,  $\mathbf{D}_{\text{Sen}}^n(V)$  s'identifie (quitte à restreindre, et comme on a supposé  $k$  algébriquement clos) à  $K_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  muni de la connexion triviale ce qui fait que l'action de  $\Gamma_K$  est discrète. En recollant les morceaux on voit que la restriction de  $V$  à  $I_K$  est potentiellement triviale.  $\square$



## CHAPITRE VI

### EXTENSIONS DE REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES

Dans ce §, on utilise les résultats qui relient les  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules et la théorie de Hodge  $p$ -adique pour démontrer que certaines représentations sont semi-stables. On démontre deux tels résultats. Soient

$$\begin{aligned} H_e^1(K, V) &= \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \\ H_f^1(K, V) &= \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \\ H_{st}^1(K, V) &= \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \\ H_g^1(K, V) &= \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{dR} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)) \end{aligned}$$

Le premier résultat est un résultat de Perrin-Riou (dans le cas où  $k$  est un corps fini ; cf [28, 29, 30]) qui suit des calculs de Bloch et Kato sur la dimension des espaces  $H_f^1(K, \mathbf{Q}_p(r))$  pour  $r \geq 1$  :

**Théorème VI.1.** — *Si  $V$  est une représentation ordinaire, alors  $V$  est semi-stable.*

Le deuxième est un corollaire du fait dû à Hyodo (toujours dans le cas où  $k$  est un corps fini ; cf [18, 17]) que si  $V$  est semi-stable, alors  $H_g^1(K, V) = H_{st}^1(K, V)$  :

**Théorème VI.2.** — *Soient  $X$  et  $Y$  deux représentations  $p$ -adiques semi-stables et  $V$  une extension de  $X$  par  $Y$ . Si  $V$  est de de Rham, alors  $V$  est elle-même semi-stable.*

C'est une conséquence de la conjecture de « monodromie  $p$ -adique » (et permet d'ailleurs de réduire la démonstration de cette dernière au cas irréductible). D'autre part, il n'est pas dur de montrer qu'une représentation ordinaire est de de Rham, et le théorème VI.1 est donc une conséquence du théorème VI.2.

Le reste de ce § est consacré à la démonstration de ces théorèmes, le premier étant démontré en VI.3 et le second en VI.4. La bijectivité de l'exponentielle de Bloch-Kato  $\exp_{V(r)}$  fait enfin l'objet de VI.5.

### VI.1. Cohomologie galoisienne et $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules

La première étape est de disposer de constructions explicites des extensions de  $V$ . Ces extensions sont décrites par le groupe de cohomologie galoisienne  $H^1(K, V)$ . Celui-ci admet une description explicite en termes de  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules : c'est un résultat de Herr, voir [7, 22], dont nous rappelons les résultats qui nous seront utiles.

Soit  $\Delta_K$  le sous groupe de torsion de  $\Gamma_K$  ; comme  $\Gamma_K$  s'injecte dans  $\mathbf{Z}_p^*$  on a que  $\Delta_K$  est un groupe fini dont le cardinal divise  $p - 1$  et on pose

$$p_\Delta = \frac{1}{|\Delta_K|} \sum_{\delta \in \Delta_K} \delta$$

ce qui fait que si  $M$  est un  $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$ -module, alors  $p_\Delta$  est un projecteur de  $M$  dans  $M^{\Delta_K}$ . Soit  $\gamma$  un générateur de  $\Gamma_K/\Delta_K$  (par exemple l'image de  $\gamma_K$ ).

Soit  $\mathbf{D}'(V) = \mathbf{D}(V)^{\Delta_K}$ . Si  $\alpha$  est une application  $\mathbf{D}'(V) \rightarrow \mathbf{D}'(V)$  qui commute à  $\Gamma_K$ , soit  $C_{\alpha, \gamma}(K, V)$  le complexe suivant :

$$0 \rightarrow \mathbf{D}'(V) \xrightarrow{f} \mathbf{D}'(V) \oplus \mathbf{D}'(V) \xrightarrow{g} \mathbf{D}'(V) \rightarrow 0$$

où  $f(x) = ((\alpha - 1)x, (\gamma - 1)x)$  et  $g(x, y) = (\gamma - 1)x - (\alpha - 1)y$ .

La proposition suivante rassemble les résultats de [7] dont nous aurons besoin :

**Proposition VI.3.** — *La cohomologie du complexe  $C_{\varphi, \gamma}(K, V)$  s'identifie à la cohomologie galoisienne de  $V$ . De plus :*

(1) *soient  $(x, y) \in Z^1(C_{\varphi, \gamma}(K, V))$  et  $b \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  une solution de l'équation  $(\varphi - 1)b = x$ , alors*

$$\sigma \mapsto c(\sigma) = \frac{\bar{\sigma} - 1}{\gamma - 1} y - (\sigma - 1)b$$

*est un cocycle sur  $G_K$  à valeurs dans  $V$  ;*

(2) *l'application de  $Z^1(C_{\varphi, \gamma}(K, V))$  dans  $H^1(K, V)$  que l'on en déduit induit un isomorphisme  $H^1(C_{\varphi, \gamma}(K, V)) \rightarrow H^1(K, V)$  ;*

(3) *l'application  $(x, y) \mapsto (-\varphi(x) + (1 - \gamma)^{-1}(\varphi\psi(y) - y), y)$  de  $H^1(C_{\psi, \gamma}(K, V))$  dans  $H^1(C_{\varphi, \gamma}(K, V))$  est un isomorphisme ;*

(4) *l'application qui à  $(x, y) \in Z^1(C_{\psi, \gamma}(K, V))$  associe l'image de  $x$  dans  $\mathbf{D}'(V)/(\psi - 1)$  induit la suite exacte*

$$0 \rightarrow \frac{\mathbf{D}'(V)^{\psi=1}}{1 - \gamma} \rightarrow H^1(K, V) \rightarrow \left( \frac{\mathbf{D}'(V)}{\psi - 1} \right)^\Gamma \rightarrow 0$$

On en déduit notamment une application  $h^1 : \mathbf{D}'(V)^{\psi=1} \rightarrow H^1(K, V)$  qui peut être décrite de la manière suivante. Soit  $y \in \mathbf{D}'(V)^{\psi=1}$ , et  $b \in \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  tel que  $(1 - \gamma)(1 - \varphi)b = (1 - \varphi)y$ . Alors si  $\bar{\sigma}$  est l'image de  $\sigma \in G_K$  dans  $(G_K/H_K)/\Delta_K$  on a

$$h^1(y) = \left[ \sigma \mapsto \frac{\bar{\sigma} - 1}{\gamma - 1} y + (1 - \sigma)b \right]$$

**Proposition VI.4.** — Soient  $E$  une extension de  $V$  et  $y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$  tel que  $h^1(y)$  est un cocycle qui correspond à la classe de  $E$  dans  $H^1(K, V)$ . S'il existe  $r \in \mathbf{R}$  et

$$z \in \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger, r}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$$

tel que  $y = (1 - \gamma_K)z$ , alors  $E$  est semi-stable. De plus  $E$  est cristalline si on peut prendre  $z \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}[1/t] \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{D}^{\dagger}(V)$ .

*Démonstration.* — Rappelons que

$$h^1(y) = \left[ \sigma \mapsto \frac{\bar{\sigma} - 1}{\gamma_K - 1} y + (1 - \sigma)b \right]$$

de plus on sait que  $\mathbf{D}(V)^{\psi=1} \subset \mathbf{D}^{\dagger}(V)$  [7] et  $1 - \varphi : \mathbf{B}^{\dagger} \rightarrow \mathbf{B}^{\dagger}$  est surjectif ce qui fait que  $b \in \mathbf{B}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ . On en déduit que si  $z = (1 - \gamma_K)y$  comme dans l'énoncé de la proposition alors  $h^1(y)(g) = (g - 1)(z - b)$  et donc le cocycle est trivial dans  $\mathbf{D}^{\dagger}(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger}} \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger}[1/t]$  ce qui fait que  $E$  est  $\mathbf{B}_{\log}^{\dagger}[1/t]$ -admissible et donc semi-stable. L'argument est similaire dans le cas cristallin (ou alors il suffit de voir que dans ce cas  $E$  est semi-stable et de plus  $N = 0$ ).  $\square$

## VI.2. Réduction au cas où $k$ est algébriquement clos

Soit  $I_K$  le sous-groupe d'inertie de  $G_K$ . Les résultats principaux de ce  $n^{\circ}$  sont qu'on ne perd pas d'information en faisant la restriction de  $V$  à  $I_K$  d'une part et que l'on a intérêt à le faire d'autre part.

**Lemme VI.5.** — Soit  $W$  une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ ; alors  $W$  est cristalline (respectivement semi-stable) si et seulement si sa restriction à  $I_K$  est cristalline (respectivement semi-stable).

*Démonstration.* — Si  $W$  est une représentation cristalline (respectivement semi-stable) de  $G_K$ , sa restriction à  $I_K$  l'est aussi.

Montrons l'autre implication. Soit  $P = W(\bar{k})[1/p]$  et  $D(W) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_F W)^{I_K}$ , c'est un  $P$ -espace vectoriel de dimension  $d$ . Il suffit de vérifier que  $D(W)^{G_K/I_K}$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $d$  puisque cela implique que  $(\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_F W)^{G_K}$  est de dimension maximale (et de même avec  $\mathbf{B}_{\text{max}}$ ).

**Lemme VI.6.** — *Le groupe de cohomologie  $H^1(G_K/I_K, \mathrm{GL}_d(P))$  est nul.*

Montrons d'abord que le lemme implique le résultat :  $D(W)$  détermine de la manière suivante un élément du  $H^1$  : si l'on choisit une base  $e_1, \dots, e_d$ , alors  $[s \mapsto \mathrm{Mat}(s)]$  est dans  $H^1(G_K/I_K, \mathrm{GL}_d(P))$ . Comme ce dernier groupe est trivial, il existe  $A \in \mathrm{GL}_d(P)$  tel que  $\mathrm{Mat}(s) = s(A)A^{-1}$ . Soit  $a_i = A^{-1}e_i$ . Alors  $a_1, \dots, a_d$  forme une base de  $D(W)$  qui est stable par  $G_K/I_K$ , ce qui montre le résultat voulu.

Reste à montrer le lemme ce que nous faisons maintenant : soit  $c \in H^1(G_K/I_K, \mathrm{GL}_d(P))$  un cocycle. Comme  $c$  est continu il existe  $H$  un sous-groupe ouvert de  $G = G_K/I_K$  tel que  $c(h) \in 1 + p\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P)$  pour tout  $h \in H$ . Il suffit de montrer que  $c|_H$  est trivial, en effet dans la suite d'inflation restriction

$$1 \rightarrow H^1(G/H, \mathrm{GL}_d(P)^H) \xrightarrow{\mathrm{inf}} H^1(G, \mathrm{GL}_d(P)) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(H, \mathrm{GL}_d(P))$$

le premier groupe est trivial par « Hilbert 90 », et donc si la restriction de  $c$  à  $H$  est triviale, c'est que  $c$  l'est déjà sur  $G$ . Ensuite on a pour chaque  $i \geq 1$ , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow 1 + p^{i+1}\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P) \rightarrow 1 + p^i\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P) \rightarrow \mathrm{M}_d(\bar{k}) \rightarrow 0$$

d'où

$$H^1(H, 1 + p^{i+1}\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P)) \rightarrow H^1(H, 1 + p^i\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P)) \rightarrow H^1(H, \mathrm{M}_d(\bar{k}))$$

et le dernier terme est nul par « Hilbert 90 ». On en déduit pour chaque  $i$  l'existence de  $A_i \in 1 + p^i\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P)$  et de  $c_{i+1} \in H^1(H, 1 + p^{i+1}\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_P))$  tel que  $c_i(s) = A_i c_{i+1}(s) s(A_i^{-1})$ . Soit  $A = \prod A_i$  : il est clair que  $c(s) = As(A^{-1})$ .  $\square$

Ceci montre qu'on ne perd rien à se restreindre à  $I_K$ . Montrons maintenant que l'on y gagne :

**Lemme VI.7.** — *Si  $k$  est algébriquement clos, l'application  $h^1$  est surjective.*

*Démonstration.* — Étant donnée la suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{\mathbf{D}'(V)^{\psi=1}}{1-\gamma} \rightarrow H^1(K, V) \rightarrow \left( \frac{\mathbf{D}'(V)}{\psi-1} \right)^\Gamma \rightarrow 0$$

il suffit de montrer que  $\mathbf{D}'(V)/(\psi-1) = 0$  ou encore que  $\mathbf{D}(V)/(\psi-1) = 0$  car si  $a \in \mathbf{D}'(V) = (\psi-1)b$  avec  $b \in \mathbf{D}(V)$ , alors  $a = (\psi-1)p_\Delta(b)$  et  $p_\Delta(b) \in \mathbf{D}'(V)$ . Quitte à tensoriser par  $\mathbf{Q}_p$  il suffit de montrer que si  $T$  est un  $\mathbf{Z}_p$ -réseau de  $V$  stable par  $G_K$ , alors  $\mathbf{D}(T) = (\psi-1)\mathbf{D}(T)$  et le lemme de Nakayama implique qu'il suffit de montrer que  $\mathbf{D}(T/pT) = (\psi-1)\mathbf{D}(T/pT)$ . On se fixe donc  $U$  une  $\mathbf{F}_p$ -représentation. Soit  $M = (\mathfrak{m}_E \otimes_{\mathbf{F}_p} U)^{H_K}$ , c'est un réseau de  $\mathbf{D}(U)$  stable par  $\varphi$ . Si  $x \in M$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} \varphi^n(x)$  converge vers un élément  $y$  qui vérifie  $(\psi-1)y = x$  ce qui fait que  $M \subset (\psi-1)M \subset (\psi-1)\mathbf{D}(U)$ .



De plus (cf [7, démonstration de I.7.3]) il existe  $b > 0$  tel que  $\pi^{-b}M$  est stable par  $\psi$  et tel que  $\mathbf{D}(U)/(\psi - 1)$  est un quotient de  $\pi^{-b}M$ . Soit  $E = \pi^{-b}M/(\psi - 1)\pi^{-b}M$ , c'est un  $\bar{k}$ -espace vectoriel de dimension finie (c'est un quotient de  $\pi^{-b}M/M$  puisque  $M \subset (\psi - 1)M \subset (\psi - 1)\pi^{-b}M$ ) stable par  $\psi$  dont  $\mathbf{D}(U)/(\psi - 1)$  est un quotient. Pour finir la preuve il suffit donc de montrer que si  $E$  est un  $\bar{k}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un opérateur  $\psi$  qui est  $\varphi^{-1} = \sigma^{-1}$ -semi-linéaire, alors  $\psi - 1 : E \rightarrow E$  est surjective, ce que nous faisons maintenant.

Soit  $e_1, \dots, e_d$  une base de  $E$ , et  $x \in E$ . Il existe  $f \leq d$ , que l'on peut supposer minimal, tel que  $x, \psi(x), \dots, \psi^f(x)$  sont liés. Comme  $\sigma$  est bijectif ( $k$  est parfait), on peut écrire  $\sum_{i=0}^f \psi^i(\mu_i x) = 0$  où  $\mu_0 \neq 0$  et pour tout  $\alpha \in k$  on aura donc  $\sum_{i=0}^f \alpha \psi^i(\mu_i x) = 0$  ce qui fait que

$$\sum_{i=0}^f \psi^i(\sigma^i(\alpha)\mu_i x) - \sum_{i=0}^f (\sigma^i(\alpha)\mu_i)x = - \sum_{i=0}^f (\sigma^i(\alpha)\mu_i)x$$

et donc, en utilisant le fait que  $\psi^i - 1 = (\psi - 1)(\psi^{i-1} + \dots + 1)$

$$(\psi - 1) \sum_{i=1}^f \sum_{j=0}^{i-1} \psi^j(\mu_i \sigma^i(\alpha)x) = \left( - \sum_{i=0}^f \sigma^i(\alpha)\mu_i \right) x$$

ce qui fait que pour montrer qu'il existe  $z$  tel que  $(\psi - 1)z = x$  il suffit de montrer qu'il existe  $\alpha$  tel que  $\left( - \sum_{i=0}^f \sigma^i(\alpha)\mu_i \right) = 1$  ce qui revient à  $1 + \alpha\mu_0 + \alpha^p\mu_1 + \dots + \alpha^{p^f}\mu_f = 0$  et l'existence de  $\alpha$  est équivalente à l'existence d'une racine du polynôme ci-dessus, existence qui résulte de l'hypothèse que  $k$  est algébriquement clos.  $\square$

### VI.3. Semi-stabilité des représentations ordinaires

Commençons par appliquer les résultats précédents aux extensions de  $\mathbf{Q}_p$  par  $\mathbf{Q}_p(j)$  avec  $j \geq 1$  car ce cas est particulièrement simple.

**Théorème VI.8.** — *Si  $j \geq 1$ , alors toutes les extensions de  $\mathbf{Q}_p$  par  $\mathbf{Q}_p(j)$  sont semi-stables. De plus si  $j \geq 2$ , elles sont cristallines.*

*Démonstration.* — Soit  $E$  une extension de  $\mathbf{Q}_p$  par  $\mathbf{Q}_p(j)$ . L'extension  $E$  est semi-stable si et seulement si sa restriction à  $I_K$  l'est, et on suppose donc que  $k = \bar{k}$ . Soit  $e_j$  une base de  $\mathbf{Q}_p(j)$ . Il existe alors  $y = f(\pi_K) \otimes e_j \in \mathbf{B}_K^{\psi=1}(j)$  tel que  $h^1(y)$  est un cocycle correspondant à la classe de  $E$ . On sait que  $\mathbf{B}_K^{\psi=1} \subset \mathbf{B}_K^{\dagger, r}$  pour un certain  $r$  [7, III.3.2] et le corollaire IV.11 montre qu'il existe  $g(\pi_K) \in \mathbf{B}_{\log, K}^{\dagger, s}$  tel que  $t^j f(\pi_K) = (1 - \gamma_K)g(\pi_K)$  ce qui fait que  $y = (1 - \gamma_K)(g(\pi_K)t^{-j} \otimes e_j)$  et la proposition VI.4 montre qu'alors  $E$  est semi-stable ce qui établit le premier point.

Montrons maintenant que si  $V$  est une représentation cristalline qui a une extension semi-stable non cristalline, alors  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=1/p} \neq 0$  ce qui dans notre cas force  $j = 1$ .

Soit donc  $V$  cristalline et  $E$  une extension semi-stable de  $\mathbf{Q}_p$  par  $V$ . On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{D}_{\text{cris}}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}(E) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{cris}}(\mathbf{Q}_p) \rightarrow 0$$

soit  $\alpha \in \mathbf{D}_{\text{st}}(E)$  tel que son image dans  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(\mathbf{Q}_p)$  est 1, une base fixée de  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(\mathbf{Q}_p)$ . Alors  $\beta = N(\alpha) \in \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  ne dépend pas du choix d'un tel  $\alpha$  et  $\beta \neq 0$  si et seulement si  $\alpha \notin \mathbf{D}_{\text{cris}}(E)$ . Ensuite  $\varphi(\alpha) - \alpha \in \mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  car  $\varphi = 1$  sur  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(\mathbf{Q}_p)$  et donc  $N(\alpha) = N\varphi(\alpha) = p\varphi N(\alpha)$  ce qui fait que  $\beta$  est un élément non-nul de  $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$  tel que  $\varphi(\beta) = p^{-1}\beta$ .  $\square$

Dans [28] il est démontré que la semi-stabilité des représentations  $p$ -adiques ordinaires est une conséquence de la proposition suivante :

**Proposition VI.9.** — *Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux représentations  $p$ -adiques non-ramifiées. Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  extension de  $V_1(j)$  par  $V_2(i)$ . Si  $i \geq j + 2$ , la représentation  $p$ -adique  $V$  est cristalline. Si  $i = j + 1$ , la représentation  $p$ -adique  $V$  est semi-stable.*

*Démonstration de la proposition.* — Par le lemme VI.5, il suffit de montrer que  $V$  est cristalline (ou semi-stable) en tant que représentation de  $I_K$ . Comme on a supposé  $V_1$  et  $V_2$  non ramifiées, leurs restrictions à  $I_K$  sont triviales et elles sont donc isomorphes à  $\mathbf{Q}_p^{d_1}$  et  $\mathbf{Q}_p^{d_2}$ .

Ensuite il y a une bijection entre  $\text{Ext}^1(W_1, W_2)$  et  $H^1(K, W_1^* \otimes_{\mathbf{Q}_p} W_2)$ , et  $V_1(j)^* \otimes_{\mathbf{Q}_p} V_2(i) = \mathbf{Q}_p^{(i-j)d_1+d_2}$  dans ce cas. On peut donc appliquer le théorème VI.8 puisque on a supposé  $i - j \geq 2$ , ou  $= 1$  respectivement ce qui permet de conclure comme  $H^1(K, V \oplus W) = H^1(K, V) \oplus H^1(K, W)$ .  $\square$

#### VI.4. Extensions de représentations semi-stables

Soient  $V$  et  $W$  deux représentations semi-stables. Il est classique que l'on a des isomorphismes

$$\text{Ext}^1(\text{Hom}(V, W), \mathbf{Q}_p) = H^1(K, \text{Hom}(V, W)) = \text{Ext}^1(V, W)$$

ce qui fait que pour montrer le théorème VI.2 on peut se restreindre au cas  $W = \mathbf{Q}_p$  ce que nous faisons maintenant.

Soit donc  $V$  semi-stable et  $E$  une extension de  $\mathbf{Q}_p$  par  $V$ . Par le lemme VI.5 on peut supposer que  $k = \bar{k}$  et il existe alors  $y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$  tel que  $c = h^1(y)$  est un cocycle égal à la classe de  $E$  dans  $H^1(K, V)$ .

On a donc  $y \in \mathbf{D}^\dagger(V)$  et  $b \in \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  tels que

$$c(g) = \frac{\bar{g} - 1}{\gamma_K - 1} y - (g - 1)b$$

Rappelons que dans [7] est définie une application  $T_0 : \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K} \rightarrow K((t))$  qui est une section continue,  $K((t))$ -linéaire et commutant à  $\Gamma_K$  de l'inclusion canonique et une application  $\partial_V : K((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  qui à  $\sum a_i t^i \otimes d_i$  associe  $a_0 \otimes d_0$ . Si  $m$  est assez grand on en déduit une application de  $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$  dans  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$

$$\mathbf{D}(V)^{\psi=1} \subset (\mathbf{B}^{\dagger,r} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K} \xrightarrow{\varphi^{-m}} \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K} \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) \xrightarrow{\partial_V \circ T_0} \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$$

qui est indépendante de  $m \gg 0$  [7, IV.2.1] et que nous noterons  $\text{res}$ .

**Proposition VI.10.** — *La représentation  $E$  est de de Rham si et seulement si  $\text{res}(y) = 0$ .*

Commençons par montrer un lemme qui est essentiellement le cas de la représentation triviale :

**Lemme VI.11.** — *L'application  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K} \rightarrow K$  qui à  $x \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K}$  associe le coefficient constant de  $T_0(x)$  induit la suite exacte :*

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K} \xrightarrow{1-\gamma_K} \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K} \rightarrow K \rightarrow 0$$

*Démonstration.* — On sait que  $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{G_K} = K$  ce qui montre que le noyau de  $1 - \gamma_K$  est bien  $K$ .

Soit  $\widehat{K}_\infty$  le complété  $p$ -adique de  $K_\infty$ . Rappelons [36] que si  $j \neq 0$ , alors  $1 - \chi^{-j}(\gamma_K)\gamma_K$  est inversible sur  $\widehat{K}_\infty$ . Dans le cas  $j = 0$ , on peut écrire  $\widehat{K}_\infty = K \oplus X$  où  $X$  est un sous- $K$ -espace vectoriel sur lequel  $1 - \gamma_K$  est inversible.

Nous allons tout d'abord montrer que si  $j \geq 1$ , alors

$$1 - \gamma_K : t^{-j}(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t^{-j+1}(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} \rightarrow t^{-j}(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t^{-j+1}(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$$

est surjectif ce qui revient à montrer que

$$1 - \chi^{-j}(\gamma_K)\gamma_K : (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} \rightarrow (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$$

est surjective. Cela suit du fait que l'application  $\theta$  réalise une bijection  $\Gamma_K$ -équivariante entre  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$  et  $\widehat{K}_\infty$  et que  $1 - \chi^{-j}(\gamma_K)\gamma_K$  est inversible sur  $\widehat{K}_\infty$ .

On en déduit par récurrence que si  $x \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K}$ , alors on peut écrire  $x = x_0 + (1 - \gamma_K)y_0$  avec  $y_0 \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K}$  et  $x_0 \in (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$ . L'hypothèse que le coefficient constant de  $T_0(x)$  est nul revient au fait que si l'on décompose  $\theta(x_0) \in \widehat{K}_\infty$  selon  $\widehat{K}_\infty = K \oplus X$ , alors la composante selon  $K$  est nulle. On va montrer que sous cette hypothèse  $x \in (1 - \gamma_K)\mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K}$ , ce qui démontre le lemme. Soit  $j \geq 0$ , on va montrer par récurrence qu'il existe  $x_j \in t^j(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$  et pour  $j \geq 1$ ,  $y_j \in t^j(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$  tels que  $x = x_j + (1 - \gamma_K)(y_0 + \dots + y_j)$  ce qui implique que  $\sum_{j=0}^{+\infty} y_j$  est

une série qui converge pour la topologie  $t$ -adique (pour laquelle  $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$  est complet) vers un  $y$  tel que  $x = (1 - \gamma_K)y$ . Le cas  $j = 0$  a déjà été fait. Le fait que la composante selon  $K$  de  $\theta(x_0)$  est nulle implique que  $x_0$  est dans l'image de

$$1 - \gamma_K : (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} \rightarrow (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$$

ce qui s'occupe du cas  $j = 1$  et la récurrence est une conséquence du fait que si  $j \geq 1$ , alors

$$1 - \chi^j(\gamma_K)\gamma_K : (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} \rightarrow (\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$$

est surjectif et donc aussi :

$$1 - \gamma_K : t^j(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t^{j+1}(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} \rightarrow t^j(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K} / t^{j+1}(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+)^{H_K}$$

□

*Démonstration de la proposition VI.10.* — Comme on a choisi  $m$  assez grand on a  $\varphi^{-m}(b) \in \mathbf{B}_{\text{dR}}$ . Étant donnée la suite exacte

$$0 \rightarrow K \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K} \xrightarrow{1-\gamma_K} \mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K} \rightarrow K \rightarrow 0$$

on a  $\text{res}(y) = 0$  si et seulement si  $\varphi^{-m}(y)$  appartient à  $(1 - \gamma_K)\mathbf{B}_{\text{dR}}^{H_K} \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  ce qui fait que si  $\text{res}(y) = 0$ , alors  $E$  est de de Rham car

$$c(g) = (g - 1)((1 - \gamma_K)^{-1}\varphi^{-m}(y) - \varphi^{-m}(b))$$

Montrons maintenant la réciproque ; on peut écrire

$$\varphi^{-m}(y) = \varphi^{-m}(y) - \text{res}(y) + \text{res}(y) = (1 - \gamma_K)z + \text{res}(y)$$

et un petit calcul montre qu'alors  $c(g) = (g - 1)z + \log(\chi(\bar{g})) \cdot \text{res}(y)$  et l'implication réciproque résulte du fait que si  $\alpha \in \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  le cocycle  $g \mapsto \log(\chi(\bar{g}))\alpha$  n'est pas trivial dans  $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  (on peut d'ailleurs montrer que l'application  $\alpha \mapsto [g \mapsto \log(\chi(\bar{g}))\alpha]$  est un isomorphisme de  $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$  dans  $H^1(K, \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$  voir [11, III.5.2] pour ce résultat dû à Kato [24]). □

**Lemme VI.12.** — Soit  $y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ ,  $y = \sum y_i \otimes d_i$  où  $\{d_i\}$  est une base de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  et  $y_i \in \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$ , tel que  $\text{res}(y) = 0$ . On suppose qu'il existe  $i$  tel que l'on peut écrire  $y_i$  sous la forme  $y_i = v_i + (1 - \gamma_K)w_i$  avec  $v_i \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ . Alors pour  $n \gg 0$  on a  $\text{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(v_i)) = 0$ .

*Démonstration.* — Soit  $Q$  la matrice de  $\varphi^{-1}$  dans la base  $\{d_i\}$  et  $Q^{(m)} = (q_{ij}^{(m)})$  celle de  $\varphi^{-m}$ . Alors

$$\iota_n(y) = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \iota_n(y_i) q_{ij}^{(n)} \otimes d_j$$

et donc

$$T_0(\iota_n(y)) = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \text{Tr}_{K_n/K}(\iota_n(y_i)) q_{ij}^{(n)} \otimes d_j$$

et comme  $Q^{(n)}$  est inversible le fait que  $\text{res}(y) = 0$  implique que le coefficient constant ( $\partial_0(\cdot)$ ) de  $\iota_n(y_i) \in K_n[[t]]$  (ce que l'on est en droit de considérer si  $n \gg 0$ ) vérifie :  $\partial_0 \circ \text{Tr}_{K_n/K}(\iota_n(y_i)) = 0$  et comme on a de toute façon  $\text{Tr}_{K_n/K}(\iota_n((1 - \gamma_K)w_i)) = 0$  c'est donc que  $\partial_0 \circ \text{Tr}_{K_n/K}(\iota_n(v_i)) = 0$  et on a alors  $\partial_0 \circ \text{Tr}_{K_n/K}(\iota_n(v_i)) = \text{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(v_i)) = 0$ .  $\square$

*Démonstration du théorème VI.2.* — Par III.6 on a un isomorphisme

$$\mathbf{D}^\dagger(V) \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t] \rightarrow \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$$

et si  $E$  est l'extension de  $V$  correspondant à  $y \in \mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ , alors  $E$  est semi-stable si on peut écrire  $y = (1 - \gamma_K)z$  avec  $z \in \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \otimes_F \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$ .

Le  $F$ -espace vectoriel  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  est muni d'un opérateur de monodromie nilpotent  $N$  et on se fixe une base  $\{d_i\}$  de  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  adaptée à  $N$  c'est-à-dire qu'il existe  $0 = r_1, \dots, r_k$  tels que pour tout  $i$

$$N(d_{r_i+1}) = 0, N(d_{r_i+2}) = -d_{r_i+1}, \dots, N(d_{r_i+r_i}) = -d_{r_i+r_i-1}$$

Comme  $y \in \mathbf{D}^\dagger(V)$  on a  $Ny = 0$  ce qui implique que si on écrit  $y = \sum d_i \otimes y_i$  avec  $d_i \in \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$  et  $y_i \in \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$ , alors les  $y_i$  vont satisfaire

$$N(y_{r_i+1}) = 0, N(y_{r_i+2}) = y_{r_i+1}, \dots, N(y_{r_i+r_i}) = y_{r_i+r_i-1}$$

On cherche à montrer que  $y_i = (1 - \gamma_K)z_i$  avec  $z_i \in \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$ . Pour simplifier les notations montrons cela pour  $y_{r_1+1}, \dots, y_{r_2}$  c'est-à-dire pour  $y_1, \dots, y_r$  où  $r = r_2$ .

Tout d'abord  $N(y_1) = 0$  ce qui fait que  $y_1 \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[1/t]$  et par la proposition IV.6 on peut écrire  $y_1 = v_1 + (1 - \gamma_K)w_1$  avec  $v_1 \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$ . Ensuite comme  $\text{res}(y) = 0$ , le lemme VI.4 montre que  $\text{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(v_1)) = 0$  pour tout  $n \gg 0$ , et donc  $v_1 \in (1 - \gamma_K)\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger$  par la proposition IV.11 ce qui fait qu'il existe  $z_1 \in \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$  tel que  $y_1 = (1 - \gamma_K)z_1$ .

Ensuite supposons que  $y_{i-1} = (1 - \gamma_K)z_{i-1}$  avec  $z_i = \sum_j a_{ij} \log^j(\pi)$ . Alors un petit calcul montre que

$$N \left( y_i + (1 - \gamma_K) \sum_j \frac{a_{ij}}{j+1} \log^{j+1}(\pi) \right) = 0$$

et donc que

$$y_i = x_i - (1 - \gamma_K) \sum_j \frac{a_{ij}}{j+1} \log^{j+1}(\pi) = x_i - (1 - \gamma_K)u_i$$

avec  $N(x_i) = 0$  ce qui fait que  $x_i \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger[1/t]$  et par la proposition IV.6 on peut écrire  $x_i = v_i + (1 - \gamma_K)w_i$  avec  $v_i \in \mathbf{B}_{\text{rig}, K}^\dagger$  et donc  $y_i = v_i + (1 - \gamma_K)(w_i - u_i)$ . Ensuite comme précédemment si  $\text{res}(y) = 0$ , alors  $\text{Tr}_{K_n/K}(\theta \circ \iota_n(v_i)) = 0$  pour tout  $n \gg 0$  et donc  $v_i \in (1 - \gamma_K)\mathbf{B}_{\log, K}^\dagger$  par la proposition IV.11 ce qui fait qu'il existe  $z_i \in \mathbf{B}_{\log, K}^\dagger[1/t]$  tel que  $y_i = (1 - \gamma_K)z_i$ .

Il est alors immédiat que  $y = (1 - \gamma_K) \sum d_i \otimes z_i$  et donc que  $E$  est semi-stable.  $\square$

### VI.5. L'exponentielle de Bloch-Kato

Dans ce n<sup>o</sup>  $V$  est une représentation semi-stable. Rappelons que les anneaux  $\mathbf{B}_{\max}$  et  $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$  sont reliés par la suite exacte fondamentale (cf [11, III.5] et [18]) :

$$0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \rightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \rightarrow 0$$

En tensorisant avec  $V$  et en prenant les invariants par  $G_K$  on obtient un début de suite exacte longue :

$$0 \rightarrow V^{G_K} \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \rightarrow ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \rightarrow H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$$

Soit  $H_e^1(K, V) = \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V))$ . On déduit de la suite exacte ci-dessus une application de  $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$  dans  $H_e^1(K, V)$  appelée exponentielle de Bloch-Kato, et notée  $\exp_V$ . D'autre part comme  $V$  est de de Rham on a

$$((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) / \mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

et [4, lemma 3.8.1] l'image de  $\exp_V$  est  $H_e^1(K, V)$  tout entier. Dans le cas où  $k$  est fini des calculs de dimension montrent que si  $r \gg 0$ , alors  $H_e^1(K, V(r)) = H^1(K, V(r))$  et donc que  $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(r)) \rightarrow H^1(K, V(r))$  est un isomorphisme (on remarquera que si  $r \gg 0$ , alors  $\mathrm{Fil}^0 \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \{0\}$ ). Le but de ce n<sup>o</sup> est de montrer, sans condition sur  $k$ , que si  $r \gg 0$ , alors  $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(r)) \rightarrow H^1(K, V(r))$  est un isomorphisme.

**Lemme VI.13.** — *Si  $V$  est une représentation semi-stable telle que  $1 - \varphi : \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$  est surjectif et  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)^{\varphi=1/p} = 0$ , alors  $H_g^1(K, V) = H_e^1(K, V)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $c \in H_g^1(K, V)$  et  $E$  l'extension de  $\mathbf{Q}_p$  par  $V$  qui correspond à  $c$ . Le théorème VI.2 montre qu'il existe  $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  tel que  $c(g) = (g - 1)x$ . Comme  $c(g) \in V$  on a  $(\varphi - 1)c(g) = 0$  et donc  $\varphi(x) - x \in (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ . Il existe donc  $y \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$  tel que  $\varphi(y) - y = \varphi(x) - x$  ce qui revient à  $\varphi(x - y) = x - y$  et quitte à remplacer  $x$  par  $x - y$  on peut donc supposer que  $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ . Comme  $N$  commute à  $G_K$  on a  $N(c(g)) = 0 = (g - 1)(N(x))$  et donc  $N(x) \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ . De plus comme  $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  on doit avoir  $N(x) \in \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)^{\varphi=1/p} = 0$  et donc  $x \in \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$  ce qui montre que  $c(g) \in H_e^1(K, V)$ .  $\square$

**Lemme VI.14.** — *Si  $r$  est assez grand, alors  $V(r)$  satisfait les conditions du lemme précédent.*

*Démonstration.* — Rappelons que le Frobenius  $\varphi$  sur  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$  est bijectif. Soit  $M$  un  $\mathbf{Z}_p$ -réseau de  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$  et  $M_r = M(r)$ . Comme  $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(r)) = t^{-r} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$  on aura, pour  $r$  est assez grand

$\varphi^{-1}(M_r) \subset p^2 M_r$ . Il est alors évident que  $1 - \varphi = -\varphi(1 - \varphi^{-1})$  est surjectif. Enfin si  $r \gg 0$ , alors  $\mathbf{D}_{\text{st}}(V(r))^{\varphi=1/p} = 0$  car les pentes de  $\varphi$  augmentent de 1 à chaque fois que l'on tord.  $\square$

**Lemme VI.15.** — *Si  $r$  est assez grand, alors  $H^1(K, V(r)) = H_g^1(K, V(r))$ .*

*Démonstration.* — Soit  $c \in H^1(K, V(r))$  et  $E$  l'extension associée à  $c$ . On sait que  $E$  est de Rham si et seulement si sa restriction à  $I_K$  l'est et on suppose donc que  $k = \bar{k}$ . Il existe donc  $y \in \mathbf{D}(V(r))^{\psi=1}$  tel que  $c = h^1(y)$  et il suffit donc de montrer que si  $r$  est assez grand l'image de  $\mathbf{D}(V(r))^{\psi=1}$  par  $\text{res} = \text{res}_{V(r)}$  est nulle. Or

$$T_0 \circ \iota_m(\mathbf{D}(V)^{\psi=1}) \subset K((t)) \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$$

et donc si  $r$  est assez grand

$$T_0 \circ \iota_m(\mathbf{D}(V(r))^{\psi=1}) \subset tK[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\text{dR}}(V(r))$$

(puisque l'image de  $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$  engendre un  $K[[t]]$ -module de rang fini, étant contenue dans l'image de  $\mathbf{D}^{\dagger, s(V)}(V)$ ) et l'image de  $\text{res}_{V(r)}$  est donc nulle.  $\square$

**Théorème VI.16.** — *Si  $V$  est une représentation semi-stable de  $G_K$ , alors quand  $r \gg 0$ , l'exponentielle de Bloch-Kato  $\exp_{V(r)} : \mathbf{D}_{\text{dR}}(V(r)) \rightarrow H^1(K, V(r))$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Les lemmes précédents montrent que quitte à prendre  $r \gg 0$ , on a

$$H^1(K, V(r)) = H_g^1(K, V(r)) = H_e^1(K, V(r))$$

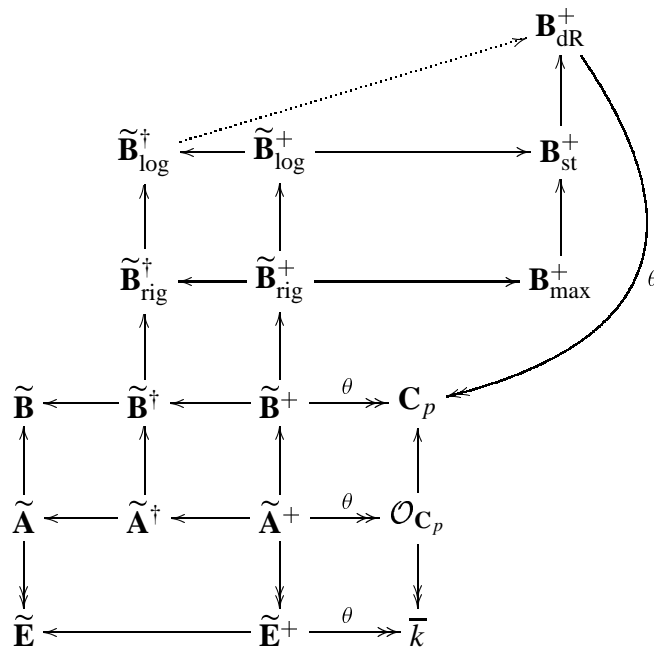
et  $\exp_{V(r)}$  est donc surjective. D'autre part si  $r \gg 0$ , alors  $\text{Fil}^0 \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = \{0\}$ , ce qui montre que  $\exp_{V(r)}$  est injective. C'est donc un isomorphisme.  $\square$





## DIAGRAMME DES ANNEAUX DE PÉRIODES

Le diagramme ci-dessous récapitule les relations entre les différents anneaux de périodes. Les flèches qui se terminent par  $\twoheadrightarrow$  sont surjectives, la flèche en pointillés  $\dashrightarrow$  est une limite inductive de morphismes définis sur des sous-anneaux ( $\iota_n : \tilde{\mathbf{B}}_{\log}^{\dagger, r_n} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ ), et toutes les autres sont injectives.



Les trois anneaux de la colonne de gauche sont reliés à la théorie des  $(\varphi, \Gamma_K)$ -modules. Les trois anneaux de la colonne de droite sont reliés à la théorie de Hodge  $p$ -adique. Pour faire le lien entre ces deux théories, on passe d'un côté à un autre via tous les anneaux intermédiaires. La situation idéale est quand on peut se placer dans la colonne du milieu (par exemple : les représentations de hauteur finie).



# INDEX DES NOTATIONS

$F$ , 17  
 $G_K$ , 17  
 $H^1(K, V)$ , 61  
 $H_K$ , 17  
 $I_K$ , 63  
 $J_n$ , 27  
 $K$ , 17  
 $K_n$ , 17  
 $K_\infty$ , 17  
 $M(i)$ , 38  
 $N$ , 20, 33  
 $R_m$ , 21  
 $R_m^*$ , 21  
 $T_0$ , 67  
 $V_I$ , 23, 25  
 $W_I$ , 26  
 $[\cdot]$ , 18  
 $C_p$ , 17  
 $\Delta_K$ , 62  
 $\Gamma_K$ , 17  
 $\Theta_V$ , 54  
 $\mathbf{A}^{\dagger, r}$ , 21  
 $\mathbf{A}^\dagger$ , 21  
 $\alpha(K, r)$ , 23  
 $\tilde{\mathbf{A}}$ , 20  
 $\tilde{\mathbf{A}}_{[r; s]}$ , 23  
 $\tilde{\mathbf{A}}^{\dagger, r}$ , 21  
 $\tilde{\mathbf{A}}^\dagger$ , 21  
 $\tilde{\mathbf{A}}^+$ , 18  
 $\mathbf{B}_{\text{dR}}$ , 19  
 $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+$ , 19  
 $\mathbf{B}^{\dagger, r}$ , 20  
 $\mathbf{B}^\dagger$ , 20  
 $\mathbf{B}_{\text{max}}$ , 19  
 $\mathbf{B}_{\text{max}}^+$ , 19  
 $\mathbf{B}_{\text{rig}, K}^{\dagger, r}$ , 34  
 $\mathbf{B}_{\text{log}, K}^\dagger$ , 35  
 $\mathbf{B}_{\text{st}}$ , 19  
 $\tilde{\mathbf{B}}$ , 20

$\tilde{\mathbf{B}}_I$ , 25  
 $\tilde{\mathbf{B}}_{[r; s]}$ , 23  
 $\tilde{\mathbf{B}}^{\dagger, r}$ , 20  
 $\tilde{\mathbf{B}}^\dagger$ , 20  
 $\tilde{\mathbf{B}}^+$ , 18  
 $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^+$ , 19  
 $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^{\dagger, r}$ , 29  
 $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}, K}^\dagger$ , 33  
 $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{rig}}^\dagger$ , 29  
 $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^+$ , 19  
 $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^{\dagger, r}$ , 32  
 $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{log}}^\dagger$ , 32  
 $\chi$ , 17  
 $\mathbf{D}_{\text{cris}}(V)$ , 19  
 $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ , 19  
 $\mathbf{D}^\dagger(V)$ , 21  
 $\mathbf{D}_{\text{dif}}^+(V)$ , 54  
 $\delta_{\pi_L}$ , 57  
 $\mathbf{D}(V)$ , 20  
 $\mathbf{D}'(V)$ , 62  
 $\mathbf{D}_{\text{rig}}^\dagger(V)$ , 38  
 $\mathbf{D}_{\text{log}}^\dagger(V)$ , 38  
 $\mathbf{D}_{\text{Sen}}(V)$ , 54  
 $\mathbf{D}_{\text{Sen}}^n(V)$ , 54  
 $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ , 20  
 $\mathbf{D}_{\text{st}}^+(V)$ , 38  
 $\mathbf{E}$ , 18  
 $\mathbf{E}_F$ , 18  
 $\mathbf{E}_K, \mathbf{E}_K^+$ , 18  
 $\mathbf{E}^+$ , 18  
 $\varepsilon$ , 18  
 $\tilde{\mathbf{E}}$ , 18  
 $\tilde{\mathbf{E}}^+$ , 18  
 $\exp_V$ , 70  
 $\hat{K}_\infty$ , 67  
 $\iota_K$ , 18  
 $\iota_n$ , 20, 32

$\log$ , 31	$\overline{\pi}_K$ , 18
$\log(\pi)$ , 32	$\psi$ , 20
$\log[\overline{\pi}]$ , 19	$\theta$ , 18
$\mathbf{A}$ , 20	$\tilde{p}$ , 18
$\mathbf{A}_F$ , 20	$v_{\mathbf{E}}$ , 18
$\mathbf{A}_K, \mathbf{B}_K$ , 20	$d$ , 19
$\mathbf{B}$ , 20	$e_K$ , 18
$\mathbf{B}_F$ , 20	$k$ , 17
$\nabla$ , 46	$n(K)$ , 21
$\nabla_V$ , 52, 54	$n(\gamma)$ , 45
$\omega$ , 18	$n(r)$ , 20
$\text{Res}_X$ , 33	$p_{\Delta}$ , 62
$\text{res}$ , 67	$q$ , 18
$\overline{F}$ , 17	$r(V)$ , 21
$\partial$ , 46	$r_n$ , 20
$\varphi$ , 19	$r_n(K)$ , 21
$\pi, \pi_n$ , 18	$s(V)$ , 21
$\pi_K$ , 21	$t$ , 19

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] André Y. : *Représentations galoisiennes et opérateurs de Bessel  $p$ -adiques*. Prépublication n° 267 de l'Institut Mathématique de Jussieu.
- [2] Benois D. : *On Iwasawa theory of crystalline representations*. Duke Math. J. 104 (2000) 211–267.
- [3] Berthelot P. : *Communication personnelle*.
- [4] Bloch S., Kato K. :  *$L$ -functions and Tamagawa numbers of motives*. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.
- [5] Cherbonnier F. : *Représentations  $p$ -adiques surconvergentes*. Thèse de l'Université d'Orsay, 1996.
- [6] Cherbonnier F., Colmez P. : *Représentations  $p$ -adiques surconvergentes*. Invent. Math. 133 (1998), 581–611.
- [7] Cherbonnier F., Colmez P. : *Théorie d'Iwasawa des représentations  $p$ -adiques d'un corps local*. J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), 241–268.
- [8] Christol G. : *About a Tsuzuki theorem*. À paraître (analyse  $p$ -adique, Dekker).
- [9] Christol G., Mebkhout G. : *Équations différentielles  $p$ -adiques et coefficients  $p$ -adiques sur les courbes*. À paraître dans Astérisque.
- [10] Christol G., Robba P. : *Équations différentielles  $p$ -adiques. Applications aux sommes exponentielles*. Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1994.
- [11] Colmez P. : *Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local*. Ann. of Math. 148 (1998), 485–571.
- [12] Colmez P. : *Représentations cristallines et représentations de hauteur finie*. J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 119–143.
- [13] Colmez P. : *Fonctions  $L$   $p$ -adiques*. Séminaire Bourbaki, 1998/99, Astérisque 266 (2000) Exp. 851.
- [14] Colmez P. : *Espaces de Banach de dimension finie*. Prépublication n° 263 de l'Institut Mathématique de Jussieu.

- [15] Colmez P., Fontaine J-M. : *Constructions des représentations  $p$ -adiques semi-stables*. Invent. Math. 140 (2000) 1–43.
- [16] Crew R. : *Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 31 (1998) 717–763.
- [17] Emerton M., Kisin M. : *Extensions of crystalline representations*. Preprint (1999).
- [18] Fontaine J-M. : *Le corps des périodes  $p$ -adiques*. Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 59–111.
- [19] Fontaine J-M. : *Représentations  $p$ -adiques semi-stables*. Périodes  $p$ -adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 113–184.
- [20] Fontaine J-M. : *Représentations  $p$ -adiques des corps locaux I*. The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.
- [21] Fontaine J-M. : *Arithmétique des représentations galoisiennes  $p$ -adiques*. Prépublication de l’Université d’Orsay, 2000-24.
- [22] Herr L. : *Sur la cohomologie galoisienne des corps  $p$ -adiques*. Bull. Soc. Math. France 126 (1998) 563–600.
- [23] Hyodo O. :  $H_g^1 = H_{st}^1$ . Non publié.
- [24] Kato K. : *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil  $L$ -functions via  $\mathbf{B}_{dR}$* . Arithmetic algebraic geometry, Lecture Notes in Mathematics 1553, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 50–63.
- [25] Kedlaya K. : *Unipotency and semistability of overconvergent  $F$ -crystals*. Preprint, disponible comme math.AG/0102173.
- [26] Lazard, M. : *Les zéros des fonctions analytiques d’une variable sur un corps valué complet*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 14 1962 47–75.
- [27] Nekovář J. : *On  $p$ -adic height pairings*. Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, 127–202, Progr. Math., 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [28] Perrin-Riou B. : *Représentations  $p$ -adiques ordinaires*. Périodes  $p$ -adiques, (Bures-sur-Yvette, 1988), Astérisque 223 (1994) 185–220.
- [29] Perrin-Riou B. : *Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques sur un corps local*. Invent. Math. 115 (1994) 81–161.
- [30] Perrin-Riou B. : *Théorie d’Iwasawa et loi explicite de réciprocité*. Doc. Math. 4 (1999), 219–273 (electronic).
- [31] Perrin-Riou B. : *Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques semi-stables*. Prépublication de l’Université d’Orsay, 2000-8.
- [32] Sen S. : *Ramification in  $p$ -adic Lie extensions*. Invent. Math. 17 (1972) 44–50.
- [33] Sen S. : *Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules*. Ann. of Math. 97 (1973) 160–170.

- [34] Sen S. : *Continuous cohomology and  $p$ -adic Galois representations*. Invent. Math. 62 (1980/81) 89–116.
- [35] Serre, J-P. : *Lie Algebras and Lie Groups*. Second edition. Lecture Notes in Mathematics, 1500. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [36] Tate J. :  *$p$ -divisible groups*. Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) 158–183 Springer, Berlin.
- [37] Tsuji T. :  *$p$ -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*. Invent. Math. 137 (1999), 233–411.
- [38] Tsuzuki N. : *Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent  $F$ -isocrystals*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48 (1998), 379–412.
- [39] Tsuzuki N. : *Finite local monodromy of overconvergent unit-root  $F$ -isocrystals on a curve*. Amer. J. Math. 120 (1998) 1165–1190.
- [40] Wach N. : *Représentations  $p$ -adiques potentiellement cristallines*. Bull. Soc. Math. France 124 (1996), 375–400.
- [41] Wach, N. : *Représentations cristallines de torsion*. Compositio Math. 108 (1997) 185–240.
- [42] Wintenberger J-P. : *Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 16 (1983), 59–89.