Université Paris 7 - Denis Diderot

Thèse de doctorat

présentée par

Loïc Grenié

pour obtenir le grade de docteur de

l'Université Paris 7 - Denis Diderot.

Sujet :

Valeurs spéciales de fonctions L de $\mathrm{GL}_r \times \mathrm{GL}_r$.

Soutenue le 28 Janvier 2000

devant le jury composé de :

Pascal Boyer,	examinateur,
Michael Harris,	directeur de thèse,
Marc Hindry,	examinateur,
Colette Moeglin,	examinateur,
Jacques Tilouine,	rapporteur.

Table des matières

Chapitre 0

Présentation du calcul

Dans [Hid], Haruzo Hida calcule les valeurs spéciales des fonctions L de une et deux formes automorphes. Nous reprenons dans ce mémoire des techniques similaires à celles qu'il a employées pour les adapter à $\mathrm{GL}_r \times \mathrm{GL}_r$. Nous présentons ici l'essentiel des idées utilisées dans ce calcul.

Soit F une extension quadratique imaginaire de $\mathbf{Q}$. Soient π et π' deux représentations cuspidales et τ et τ' deux représentations de dimension finie telles que pour toute place infinie v :

$$\mathrm{H}^{\frac{r(r-1)}{2}}(\mathfrak{g}_v, K_v; \pi_v \otimes \tau_v) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^{\frac{r(r-1)}{2}}(\mathfrak{g}_v, K_v; \pi'_v \otimes \tau'_v) \neq 0$$

S'ils existent, on sait quelle est la liste des a_v et des d_v tels que $\tau_v \otimes \tau'_v \otimes \mathrm{Sym}^{a_v}$ contient la représentation $\det^{d_v}$ pour la place à l'infini v. On prend une série d'Eisenstein E dont le caractère central est l'inverse du produit de ceux de π et π'. On sait d'après Jacquet et Shalika ([JS2] et [JS3]) que l'intégrale

$$\int_{Z(\mathbf{A})G(F)\backslash G(\mathbf{A})} f(g)f'(g)E(g,\Phi,\eta;s)dg$$

est égale à un produit de fractions rationnelles de q^{-s} (où $q = \mathrm{N}v$ et v parcourt un ensemble fini de places finies), fois la fonction $L_f(s, \pi \times \pi')$ fois une intégrale sur $G(F_v)$ où v est la place archimédienne de F. Par ailleurs, pour certaines valeurs de s obtenues plus haut la représentation sur les séries d'Eisenstein est cohomologique. On prend une forme différentielle ω_E qui représente une de ces classes de cohomologie. On note ω et ω' deux formes différentielles définies par des fonctions de π et π' (respectivement). Quand on l'intègre sur la variété, la restriction du cup-produit $\omega \wedge \omega' \wedge \omega_E$ à la représentation de dimension 1 des fibres est égale à une somme d'intégrales de la forme de celle ci-dessus. On peut donc utiliser la théorie de la rationalité des classes de cohomologie. En particulier, G. Harder a prouvé dans [Har2] que certains résidus de séries d'Eisenstein forment des classes de cohomologie rationnelles et les groupes de cohomologie pour les représentations paraboliques sont de dimension 1 pour le degré qui nous intéresse. On peut associer canoniquement un nombre complexe $C(\pi)$ (respectivement $C(\pi'))$ à la représentation π (respectivement π') et un autre, $C_s(\eta)$, à la série d'Eisenstein pour les valeurs entières de s, ces trois nombres étants définis modulo une extension finie de F notée $F(\pi,\pi')$. En exprimant E comme une combinaison linéaire de résidus à la Harder, on obtient donc

$$I_\infty L(a,\pi\times\pi') = cC_a(\eta)C(\pi)C(\pi')$$

où $c\in F(\pi,\pi')$ et I_∞ est une intégrale sur la place infinie qu'il reste à calculer. Le point essentiel de la démonstration est de démontrer que les K_∞-types qui supportent la cohomologie de chaque représentation sont des sous-espaces rationnels sur $F(\pi,\pi')$ des représentations auxquelles ils appartiennent. La définition des coefficients $C(\pi)$ et $C_s(\eta)$ en découle ensuite naturellement. L'intégrale I_∞ est plus délicate à calculer et il ne nous a même pas été possible de démontrer sa non annulation. On voit que si cette intégrale s'annulle, on n'obtient aucun résultat sur la fonction L, tout au plus la constante c ci-dessus est-elle nulle.

Chapitre I

Rappels

Toutes les notations introduites dans ce chapitre seront utilisées librement dans la suite de ce mémoire. On fixe un entier $r \geqslant 2$.

I.1 Notations

I.1.1 Corps

Soit F une extension quadratique imaginaire de $\mathbf{Q}$ d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$. L'ensemble des places de F est noté Σ_F, S_∞ l'ensemble constitué de la place infinie de F et Σ_f le complémentaire de S_∞ dans Σ_F. Si $v \in \Sigma_F$, on note F_v, le corps complété de F à la place v et si $v \in \Sigma_f$, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau d'entiers de F_v. On note $\mathbf{A}_F$ l'anneau des adèles de F muni de sa topologie habituelle. Le sous-anneau des adèles finies est noté $\mathbf{A}_{F,f}$ et celui des adèles infinies F_∞. On note enfin h le nombre de classes de F.

I.1.2 Groupe

Soit G un groupe réductif sur $\mathcal{O}_F$. Dans toute la suite $G_r = \mathrm{GL}_r/\mathcal{O}_F$. On fixe pour chaque place $v \in \Sigma_F$ un sous-groupe compact maximal de $G_r(F_v)$ de la manière suivante :

- Si v est une place finie, $K_v = G_r(\mathcal{O}_v)$;
- Si v est la place complexe, $K_v = \mathrm{U}_r$.

On note $K = \prod_{v\in\Sigma_F} K_v$, $K_f = \prod_{v\in\Sigma_f} K_v$ et $K_\infty = K_v$ pour la place $v \in S_\infty$. Pour chaque place $v \in \Sigma_f$, on fixe sur $G(F_v)$ la mesure de Haar telle que le sous-groupe K_v ait pour mesure 1, pour chaque place $v \in S_\infty$ on fixe une mesure de Haar et on prend pour mesure sur $G(\mathbf{A}_F)$ la mesure produit. Le centre de G_r est noté Z et identifié si nécessaire à $G_m = G_1 = \mathrm{GL}_1$. On appelle *représentation automorphe* de G tout sous-quotient de l'espace des formes automorphes sur $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$ que l'on note $\mathcal{A}(G)$. On note $\mathcal{A}_{cusp}(G)$ la sous-représentation de $\mathcal{A}(G)$ constituée des formes paraboliques.

On fixe comme sous-groupe de Borel B_r de G_r les matrices triangulaires supérieures. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note B pour B_r. Le sous-groupe de Lévi de B est l'ensemble T des matrices diagonales et on définit A_0 comme la composante déployée du centre de B (on à donc $A_0(\mathbf{R}) = A_0(\mathbf{C})$ égal à l'ensemble des matrices diagonales ayant des coefficients réels positifs égaux). On prend N le radical unipotent de B. Tous les sous-groupes paraboliques considérés seront relatifs à ce sous-groupe de Borel. Pour toute place v, on fixe $B_v = B(F_v)$ et $N_v = N(F_v)$. Dans toute la suite, ψ sera un caractère unitaire additif non trivial de $\mathbf{A}_F$ trivial sur F et on définit $\theta(n) = \theta_r(n) = \psi(\sum_{i=1}^{r-1} n_{i,i+1})$ pour toute matrice $n = (n_{ij})$ de N; de même au niveau local, ψ_v, la restriction à F_v de ψ, est un caractère additif non trivial de F_v, et on fixe $\theta_v(n) = \psi_v(\sum_{i=1}^{r-1} n_{i,i+1})$ pour $n = (n_{ij}) \in N_v$.

Si G est muni d'une norme réduite ν, on note G^1 le noyau de ν. Par ailleurs, G^0 dénote la composante connexe de l'unité dans G. Dans le cas où $G = G_r$, $G^1 = \mathrm{SL}_r$, $G^0(\mathbf{C}) = G(\mathbf{C})$ et $G^0(\mathbf{R}) = \{M \in G(\mathbf{R}) / \det M > 0\}$.

Soient G un groupe, P un sous-groupe de G et (π, V) une représentation de P. On définit la *représentation induite* de P à G de (π, V) et on note $\mathrm{ind}_P^G \pi$ l'action de G par translation à droite sur l'ensemble des fonctions :

$$\{f : G \to V / \forall p \in P, \forall g \in G, f(pg) = \pi(p) f(g)\}$$

I.2 Géométrie

Pour la fin de ce chapitre, on fixe $G = G_r$. On sait par le théorème d'approximation forte que pour tout idéal non nul N de $\mathcal{O}_F$:

$$G(\mathbf{A}_F) = \coprod_{i=1}^{h} G(F) t_i U_0(N) G^0(F_\infty)$$

où $U_0(N)$ est l'ensemble des matrices de $G(\mathbf{A}_{F,f})$ congrues modulo N à des matrices triangulaires supérieures et les t_i sont des éléments de $G(\mathbf{A}_F)$ dont les composantes infinies sont égales à 1. On voit donc que $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)/K$ est la réunion de h composantes connexes de la forme $\Gamma_i(N)\backslash t_i \mathcal{Z}$, où $\Gamma_i(N) \subset G(F)$ est le sous-groupe arithmétique $G(F) \cap t_i U_0(N) t_i^{-1} G^0(F_\infty)$ et $\mathcal{Z}$ l'espace symétrique $G^1(F_\infty)/K_\infty^1$. On fait agir $G^0(F_\infty)$ sur $\mathcal{Z}$ si en précisant que son centre agit trivialement. On a donc une bijection entre les fonctions sur $Z^0(\mathbf{A}_F) G^0(F)\backslash G^0(\mathbf{A}_F)/K_\infty$ et les h-uplets de fonctions (f_i) avec f_i fonction sur $Z^0(F_\infty)\Gamma_i(N)\backslash \mathcal{Z}$ vérifiant les mêmes conditions de continuité ou d'intégrabilité. L'identification est ainsi faite : si f est une fonction sur $G^0(\mathbf{A}_F)$ invariante à gauche par $Z^0(\mathbf{A}_F) G^0(F)$ et à droite par K_∞, on définit les h fonctions f_i par $f_i(z) = f(t_i g)$ si $z = g K_\infty^1$.

Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $G(F)$ et $\mathcal{M}$ un Γ-module topologique (c'est à dire que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel sous-jacent est topologique et que l'action de Γ est continue). On note $\tilde{\mathcal{M}}$ le fibré sur $\Gamma\backslash\mathcal{Z}$ défini sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\Gamma\backslash\mathcal{Z}$ par :

$$\tilde{\mathcal{M}}(\mathcal{U}) = \{f \in C_c(p^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{M}) / \forall \gamma \in \Gamma, \forall u \in \mathcal{U}, f(\gamma u) = \gamma f(u)\}$$

où l'on note p la projection canonique de $\mathcal{Z}$ sur $\Gamma\backslash\mathcal{Z}$ et C_c est l'ensemble des fonctions continues localement constantes. La fibre au dessus d'un point x est :

$$\tilde{\mathcal{M}}_x = \{f \in C_c(p^{-1}(x), \mathcal{M}) / \forall \gamma \in \Gamma, \forall y \in p^{-1}(x), f(\gamma y) = \gamma f(y)\}.$$

En notant Γ_x le fixateur de x dans Γ, l'espace $\tilde{\mathcal{M}}_x$ est isomorphe à $\mathcal{M}^{\Gamma_x}$ mais non canoniquement (cet isomorphisme dépend du choix d'un point dans $p^{-1}(x)$). Pour avoir un fibré vectoriel, il faudra supposer que $\mathcal{M}^{\Gamma_x}$ est de dimension constante quand le point x varie dans $\mathcal{Z}$.

I.3 Groupe de Lie

Si v est la place infinie de F, on note $\mathfrak{g}_v$ l'algèbre de Lie de $G(F_v)$ et plus généralement avec une lettre gothique, sans précision, l'algèbre de Lie de tout groupe de Lie. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on note $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ pour $\mathfrak{h}$. L'algèbre de Lie de T est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{r,v} = \mathfrak{g}_r(F_v)$. On a alors $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}_{r,v}, \mathfrak{t}) = \{e_i - e_j / 1 \leqslant i, j \leqslant r, i \neq j\}$. On prend pour racines positives celles correspondant à B_v, c'est à dire $\Delta^+(\mathfrak{g}_{r,v}, \mathfrak{t}) = \{e_i - e_j \in \Delta(\mathfrak{g}_{r,v}, \mathfrak{t}) / i < j\}$; on note $\Delta^- = \Delta^-(\mathfrak{g}_{r,v}, \mathfrak{t})$ son complémentaire dans Δ. L'ensemble des racines simples correspondantes est $\Phi = \{e_i - e_{i+1} / 1 \leqslant i \leqslant r - 1\}$. On note $W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le groupe engendré par les symétries orthogonales de $\operatorname{Vect} \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ dont le noyau est une droite dirigée par un élément de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note ρ la demi-somme des éléments de Δ^+. Soient P un sous-groupe de G_v et (π, V) une représentation de P. On appelle *représentation induite unitaire* la représentation de G_v définie par $\xi = \operatorname{Ind}_P^G \pi = \operatorname{ind}_P^G(\pi \otimes \delta_P^{\frac{1}{2}})$ où δ_P est le module du groupe P. Si la représentation (π, V) est unitarisable, alors la représentation ξ l'est aussi. On rappelle que $\delta_B^{\frac{1}{2}} = \rho$. Si P est un sous-groupe parabolique de $G(F_v)$ contenant $H = Z_{G(F_v)}(\mathfrak{h})$, on note M son sous-groupe de Levi contenant H et $\Delta_M = \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ identifié à un sous-groupe de Δ et on fixe

$$W^P = \{\sigma \in W / \sigma\Delta^- \cap \Delta^+ \subset \Delta_M\}.$$

I.3.1 Compact

Soit $\mathfrak{g}_v$ l'algèbre de Lie de $G(F_v)$ et $\mathfrak{k}_v$ celle de K_v. On dit que la représentation π de $G(F_v)$ est *admissible* si elle se décompose en somme directe de représentation irréductibles de K_v, chaque classe d'isomorphisme de représentations irréductibles de K_v ayant une multiplicité finie. Soit $\mathfrak{g}$ la restriction des scalaires à $\mathbf{R}$ d'une algèbre de Lie sur F_v et K un groupe compact réel tels que $\mathfrak{k} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. On appelle $(\mathfrak{g}, K)$-*module* tout couple (π, V) où (π, V) est à la fois une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une représentation lisse du groupe K, vérifiant en plus les conditions de compatibilité suivantes :

1) La représentation se décompose en somme directe de représentations de dimension finie de K ;

2) L'action de $\mathfrak{k}$ par différentiation de celle de K et celle par restriction de celle de $\mathfrak{g}$ sont les mêmes ;

3) L'action de K et de $\mathfrak{g}$ sont compatibles au sens suivant :

$$\forall v \in V, \forall k \in K, \forall g \in \mathfrak{g}, \pi(k)\pi(g)\pi(k^{-1}).v = \pi(\mathrm{Ad}k(g)).v$$

On remarque en particulier qu'une représentation différentiable admissible de $G(F_v)$ est un $(\mathfrak{g}_v, K_v)$-module.

Si v est une place finie de F, et (π, V) une représentation de $G(F_v)$, on dit que π est une *représentation sphérique* s'il existe un vecteur v° de V, appelé *vecteur sphérique*, fixé par K_v. On rappelle que si la représentation π est irréductible et admissible, le sous-espace des vecteurs sphériques est de dimension au plus 1.

I.3.2 Identifications

Dans le cas de $\mathfrak{g}_v$, on identifie $\mathfrak{g}_v/\mathfrak{k}_v$ avec le sous-espace vectoriel $\mathfrak{p}_v$ des matrices égales à leur transconjuguée. De plus, si $\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant le centre de $\mathfrak{g}$, on identifie le quotient de $\mathfrak{l}$ par ce centre à son sous-ensemble des matrices de trace nulle. Toutes ces identifications sont faites via les décompositions en somme directe et sont compatibles avec les actions de $\mathfrak{k}$.

I.3.3 Cohomologie

On conserve les notations ci-dessus. Si $\mathcal{M}$ est une représentation (différentiable) irréductible de $G(F_\infty)$ de dimension finie, on note

$$\mathrm{H}^\bullet\left(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; C^\infty\left(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}_F), \mathcal{M}\right)\right)$$

la cohomologie du complexe

$$\mathrm{Hom}_{K_\infty}\left(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}_\infty/\mathfrak{k}_\infty), C^\infty\left(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}_F), \mathcal{M}\right)\right),$$

muni de sa dérivation habituelle. On a alors isomorphismes des diverses cohomologies :

$$\mathrm{H}^\bullet\left(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; C^\infty\left(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}_F), \mathcal{M}\right)\right) = \mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \mathcal{A}(G)\otimes\mathcal{M}).$$

La dernière égalité est due à Franke. De plus grâce à A. Borel, on sait que l'application

$$\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \mathcal{A}_{cusp}(G)\otimes\mathcal{M}) \to \mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \mathcal{A}(G)\otimes\mathcal{M})$$

induite par l'inclusion est une inclusion. Comme $\mathcal{A}_{cusp}(G)$ est la somme directe des représentations automorphes cuspidales irréductibles, on a la décomposition :

$$\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \mathcal{A}_{cusp}(G)\otimes\mathcal{M}) = \bigoplus_{\pi\subset\mathcal{A}_{cusp}(G)} \mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty\otimes\mathcal{M})\otimes\pi_f$$

où $\pi=\pi_\infty\otimes\pi_f$ est la décomposition de la représentation π suivant $\mathfrak{g}_\infty\times G(\mathbf{A}_{F,f})$. Dans ce cas, $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi_\infty\otimes\mathcal{M})$ est la cohomologie du complexe

$$\left(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}_\infty/\mathfrak{k}_\infty)^*\otimes\pi_\infty\otimes\mathcal{M}\right)^{K_\infty}.$$

Chapitre II

Dimension finie.

II.1 Notations, conventions, rappels.

On sait que les représentations holomorphes de dimension finie du groupe $G_r(\mathbf{C})$ sont paramétrées par leur plus haut poids suivant Δ^+, dont les coordonnées suivant Φ sont r entiers classés dans l'ordre décroisssant. La représentation contragrédiente de la représentation de plus haut poids donné par (λ_i) est la représentation de plus haut poids donné par $(-\lambda_{r+1-i})$. La représentation Sym^a est de plus haut poids donné par $(a, 0, 0, ..., 0)$. Pour $a \leqslant 0$, on notera Sym^a, la représentation de plus haut poids donné par $(0, 0, ..., 0, a)$, c'est à dire la contragrédiente de Sym^{-a}, et on ne distinguera pas les deux cas par la suite. Si $d \in \mathbf{Z}$, la représentation de dimension 1 définie par $\det^d$ est de plus haut poids donné par $(d, ..., d)$. Faire le produit tensoriel par cette représentation c'est ajouter d à chaque coefficient. On rappelle l'analogue pour les représentations de $G_r(\mathbf{C})$ de la règle de Pieri :

Proposition II.1 ([FH, Proposition 15.25, p225]) *Le produit tensoriel de la représentation de plus haut poids donné par (λ_i) par la représentation Sym^a, $a \geqslant 0$ et donc $a \in \mathbf{Z}$, se décompose en somme directe de représentations irréductibles dont les plus haut poids sont donnés par (μ_i) où $\lambda_i \leqslant \mu_i$ et $\mu_i \leqslant \lambda_{i-1}$ avec $\sum \mu_i = a + \sum \lambda_i$, chacune intervenant avec multiplicité un.*

II.2 Calcul des représentations de dimension 1 intervenant dans le produit tensoriel

À une puissance du déterminant près, les représentations de dimension finie qui servent de coefficients dans les groupes de cohomologie des représentations induites du sous-groupe parabolique maximal de $G_r(\mathbf{C})$ qui nous intéresse dans le calcul (en fait celui de type $(r-1, 1)$) sont de la forme Sym^a, $a \in \mathbf{N}$, ou sa contragrédiente. Par conséquent, on cherche à savoir quelles représentations de dimension 1 se cachent dans le produit tensoriel de deux représentations holomorphes de dimension finie V_1 et V_2 et de la représentation Sym^a du groupe $G_r(\mathbf{C})$.

II.2.1 Cas général

On se donne une représentation V_1 de dimension finie, de plus haut poids (λ_i) et une représentation de dimension finie V_2 de plus haut poids (μ_i). Il suffit de calculer pour quels a le produit tensoriel de la contragrédiente de V_1 par la représentation Sym^a contient la représentation V_2 à la puissance $-d$ du déterminant près. La proposition II.1 nous dit qu'au $i^{\text{ième}}$ coefficient il faut rajouter $-d + \mu_i + \lambda_{r+1-i}$ et les conditions que doivent vérifier d sont :

$$-d + \mu_i + \lambda_{r+1-i} \geqslant 0 \ (1 \leqslant i \leqslant r) \text{ et } -d + \mu_{i+1} \leqslant -\lambda_{r+1-i} \ (1 \leqslant i \leqslant r-1).$$

Donc :

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant r-1} (\lambda_{i+1} + \mu_{r+1-i}) \leqslant d \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r} (\lambda_i + \mu_{r+1-i}).$$

On a alors $a = rd - \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \mu_{r+1-i}) = rd - \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \mu_i)$ et la puissance du déterminant qui intervient dans $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathrm{Sym}^a$ est $\frac{1}{r}(\sum \lambda_i + \sum \mu_i + a)$, c'est à dire d.

Proposition II.2 *Soient V_1 et V_2 deux représentations holomorphes de dimension finie de $G_r(\mathbf{C})$ de plus hauts poids respectifs $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ et (μ_i). Alors $\det^d$ intervient dans le produit $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathrm{Sym}^a$ ($a \in \mathbf{Z}$) si et seulement si $\max_{1 \leqslant i \leqslant r-1}(\lambda_{i+1} + \mu_{r+1-i}) \leqslant d \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant r}(\lambda_i + \mu_{r+1-i})$ et $a = rd - \sum_{i=1}^r (\lambda_i + \mu_i)$. On voit donc que ce n'est pas toujours possible.*

Corollaire : *La représentation* $\det^d$ *ci-dessus intervient avec multiplicité un.*

PREUVE : Supposons que $\det^d$ intervient effectivement dans le produit tensoriel de $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathrm{Sym}^a$. On remarque que la représentation V_2 ne peut intervenir qu'avec multiplicité un dans le produit $\det^d \otimes \check{V}_1 \otimes \mathrm{Sym}^a$ et donc la représentation $\det^d \mathrm{Sym}^a$ a multiplicité un dans le produit $V_1 \otimes V_2$. □

II.2.2 Cas particulier $r = 2$.

Si $r = 2$, la condition sur d devient :

$$\lambda_2 + \mu_2 \leqslant d \leqslant \min(\lambda_1 + \mu_2, \lambda_2 + \mu_1).$$

Elle est donc toujours vérifiée pour au moins un entier d, il y a donc toujours au moins un entier a tel que $V_1 \otimes V_2 \otimes \mathrm{Sym}^{-a}$ contienne une représentation de dimension 1, ce qui n'est pas étonnant puisque toutes les représentations son du type $\mathrm{Sym}^a \otimes \det^d$.

II.3 Invariants par $G_{r-1} \times G_1$.

On injecte $G_{r-1} \times G_1$ dans G_r par l'application standard qui à (g, x) associe $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. On sait alors, voir par exemple l'exercice 6.12, p 80 de [FH] :

Proposition II.3 *Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est le plus haut poids d'une représentation de $G_r(\mathbf{C})$, sa restriction à $G_{r-1}(\mathbf{C})$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles de plus haut poids $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r-1})$ vérifiant pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant r-1$, $\lambda_i \geqslant \mu_i \geqslant \lambda_{i+1}$; chacune de ces représentations intervient avec une multiplicité égale à un.*

On cherche tout d'abord les représentations holomorphes de dimension finie de $G_r(\mathbf{C})$ qui ont un vecteur fixé par $G_{r-1}(\mathbf{C}) \times G_1(\mathbf{C})$. Le plus haut poids $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ doit vérifier les deux relations :

$$\begin{gathered} \textstyle\sum_{i=1}^r \lambda_i = 0 \text{ (égalité du caractère central)} \\ \lambda_1 \geqslant 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant 0 \geqslant \dots \geqslant \lambda_{r-1} \geqslant 0 \geqslant \lambda_r \end{gathered}$$

on en déduit donc immédiatement que $\lambda_1 = -\lambda_r = k \in \mathbf{N}$ et que tous les autres λ_i sont nuls.

Les représentations holomorphes de $G_r(\mathbf{C})$ de dimension 1 sont les puissances du déterminant. On en déduit donc de la même façon que ci-dessus,

Proposition II.4 *Les représentations holomorphes de dimension finie de $G_r(\mathbf{C})$ qui ont un sous-espace de dimension 1 stable sous l'action de $G_{r-1}(\mathbf{C}) \times G_1(\mathbf{C})$ ont un plus haut poids $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ de la forme :*

$$\begin{cases} \lambda_1 = d + k & (d, k) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N} \\ \lambda_i = d & 2 \leqslant i \leqslant r-1 \\ \lambda_r = d - u & u \in \mathbf{N} \end{cases}$$

et alors $G_{r-1}(\mathbf{C})$ agit sur chaque droite stable par la puissance d de son déterminant et $G_1(\mathbf{C})$ par la puissance $d + k - u$.

Chapitre III

Analyse

On rappelle qu'on a fixé ψ un caractère additif non trivial de $\mathbf{A}_F$ trivial sur F et décomposé $\psi = \prod_{v\in\Sigma_F} \psi_v$.

III.1 Modèles de Whittaker

Cette section est extraite des articles [JS2] et [JS3].

III.1.1 Cas local non archimédien

On fixe une place finie v de F.

Définition III.1 *Soit π une représentation irréductible admissible de $G_r(F_v)$ sur un espace vectoriel V. On dit que π est une* représentation générique *s il existe une forme linéaire $\lambda \neq 0$ sur V telle que :*

$$\forall n \in N_v, \forall w \in V, \quad \lambda(\pi(n)w) = \theta_v(n)\lambda(w).$$

Cette forme est alors unique à multiplication par un scalaire près (voir par exemple [JS1]). Pour un tel λ, on définit alors l'espace $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$ comme l'ensemble des fonctions W de la forme :

$$W(g) = \lambda(\pi(g)w)$$

pour w dans V et g dans $G_r(F_v)$. Le groupe $G_r(F_v)$ agit alors sur l'espace vectoriel $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$ et la représentation correspondante est isomorphe à π. On dit alors que π a pour *modèle de Whittaker* $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$. On remarque en plus que toute fonction W de $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$ vérifie en plus $\forall n \in N_v, \forall g \in G_r(F_v), W(ng) = \theta_v(n)W(g)$.

Si π est non-ramifiée, c'est à dire qu'elle contient la représentation triviale de K_v et que le plus grand idéal sur lequel ψ_v est trivial est $\mathcal{O}_v$, alors il existe un (unique) élément W_0 de $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$ caractérisé par le fait que $W_0(K_v) = \{1\}$. On appelle cet élément le vecteur essentiel de $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$.

III.1.2 Cas local archimédien

Dans cette section, v est l'élément de S_∞.

Définition III.2 *Soit π une représentation irréductible admissible de $G_r(F_v)$ sur un espace de Hilbert V. On note V^∞ l'ensemble des vecteurs C^∞ de V. On dit que π est une* représentation générique *s'il existe une forme linéaire continue $\lambda \neq 0$ sur V^∞ telle que :*

$$\forall n \in N_v, \forall w \in V^\infty, \quad \lambda(\pi(n)w) = \theta_v(n)\lambda(w).$$

Là encore, une telle forme est unique à un scalaire près. On note alors $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$ l'ensemble des fonctions W sur $G_r(F_v)$ de la forme $\lambda(\pi(g)w)$ où λ vérifie la condition ci-dessus et $w \in V^\infty$; on dit qu'un vecteur est K_v-fini s'il engendre un espace vectoriel de dimension finie sous l'action de K_v ; on note V_0 l'ensemble des vecteurs K_v-finis de V et $\mathcal{W}_0(\pi, \psi_v)$ le sous-ensemble des fonctions $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi_v)$ pour lesquelles $w \in V_0$. Les représentations V_0 et $\mathcal{W}_0(\pi, \psi_v)$ sont isomorphes. On dit alors que π a pour *modèle de Whittaker* $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$.

III.1.3 Cas global

Définition III.3 *Si π est une représentation automorphe, on dira qu'elle est générique si ses éléments se décomposent en série de Fourier.*

Une représentation générique admet un modèle de Whittaker, comme dans le cas local. Et il faut remarquer que si une représentation est globalement générique, ses composantes locales le sont toutes.

On a le théorème suivant, extrait de [Sha] :

Théorème III.1 (J. A. Shalika) *Toute représentation parabolique de $G_r(\mathbf{A}_F)$ est générique.*

III.2 Définition des fonctions L

Soient π et π' deux représentations paraboliques de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{A}_F)$ décomposées en produit tensoriel restreint : $\pi = \bigotimes' \pi_v$ et $\pi' = \bigotimes' \pi'_v$. On fixe le vecteur ϵ de F^r (identifié aux vecteurs lignes) : $\epsilon = (0, ..., 0, 1)$.

III.2.1 Cas local non archimédien

v est une place non archimédienne de F. Les représentations π_v et π'_v admettent un modèle de Whittaker. On pose pour $W \in \mathcal{W}(\pi_v, \psi_v)$, $W' \in \mathcal{W}(\pi'_v, \overline{\psi_v})$ et Φ une fonction de Schwartz sur ${F_v}^r$ (identifé aux vecteurs lignes) :

$$\Psi(s, W, W'; \Phi) = \int_{N(F_v)\backslash G_r(F_v)} W(g)W'(g)\Phi(\epsilon g)|\det g|_v^s \,\mathrm{d}g.$$

On a alors en combinant [JPSS2, Théorème 2.7, p390] avec [JS2, Proposition 1.5, p507] :

Théorème III.2 (Jacquet, Piatetski-Shapiro, Shalika)

(1) Pour tout choix des fonctions W, W' et Φ ci-dessus, l'intégrale $\Psi(s, W, W'; \Phi)$ converge pour $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1$, normalement pour $\mathrm{Re}\, s$ dans un sous-ensemble compact de $[1; +\infty[$.

(2) Quand les fonctions W, W' et Φ parcourent leurs ensembles respectifs, les intégrales $\Psi(s, W, W'; \Phi)$ engendrent un idéal fractionnaire de la forme $P^{-1}(q^{-s})\mathbf{C}[q^{-s}, q^s]$ dans $\mathbf{C}(q^{-s})$ où P est un polynôme de $\mathbf{C}[X]$ tel que $P(0) = 1$. On pose alors $L(s, \pi_v \times \pi'_v) = P^{-1}(q^{-s})$.

III.2.2 Cas local archimédien

Ici, on considère la place archimédienne v de F. Les représentations π_v et π'_v sont génériques. On procède de manière similaire à ci-dessus. Pour $W \in \mathcal{W}_0(\pi_v, \psi_v)$, $W' \in \mathcal{W}_0(\pi'_v, \overline{\psi_v})$ et Φ une fonction de Schwartz-Bruhat sur ${F_v}^r$, on pose :

$$\Psi(s, W, W'; \Phi) = \int_{N(F_v)\backslash G_r(F_v)} W(g)W'(g)\Phi(\epsilon g)|\det g|_v^s \,\mathrm{d}g.$$

H. Jacquet et J. A. Shalika ont alors prouvé, [JS2, Proposition 3.17, p542],

Proposition III.1 (H. Jacquet, J. A. Shalika) *L'intégrale Ψ converge pour $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1$, normalement pour $\mathrm{Re}\, s$ dans un sous-ensemble compact de $[1; +\infty[$.*

Il existe alors un produit de fonctions Γ, noté $L(s, \pi_v \times \pi'_v)$ tel que la fonction $\frac{\Psi(s,W,W';\Phi)}{L(s,\pi_v \times \pi'_v)}$ puisse être prolongée en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$, ceci étant une conséquence du théorème 2, p199 de [JS4].

III.2.3 Fonction L globale

Comme conséquence directe du théorème 5.3, p555 de [JS2], on obtient le théorème suivant :

Théorème III.3 (H. Jacquet, J. A. Shalika) *Le produit* $\prod_{v\in\Sigma_F} L(s,\pi_v\times\pi'_v)$ *converge absolument pour* $\operatorname{Re} s > 1$.

On peut de plus le prolonger analytiquement à une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ notée $L(s,\pi\times\pi')$.

III.3 Expression intégrale d'une fonction L

Soient π et π' deux représentations de $G_r(\mathbf{A}_F)$ irréductibles, admissibles et paraboliques. On décompose π et π' en produit tensoriel restreint : $\pi = \bigotimes'_{v\in\Sigma_F}\pi_v$ où π_v est une représentation de $G_r(F_v)$ si v est finie et un $(\mathfrak{g}_v, K_v)$-module sinon, et de même $\pi' = \bigotimes'_{v\in\Sigma_F}\pi'_v$. Au niveau global, on introduit des intégrales Ψ similaires à celle définies dans le cas local. Soient $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$, $W'\in\mathcal{W}(\pi',\overline{\psi})$ et Φ une fonction de Schwartz sur ${\mathbf{A}_F}^r$, on définit alors

$$\Psi(s,W,W';\Phi) = \int_{N(\mathbf{A}_F)\backslash G_r(\mathbf{A}_F)} W(g)W'(g)\Phi(\epsilon g)|\det g|^s\,\mathrm{d}g$$

On sait que si $W=\prod W_v$, $W'=\prod W'_v$ et $\Phi=\prod\Phi_v$, alors

$$\Psi(s,W,W';\Phi) = \prod_{v\in\Sigma_F}\Psi(s,W_v,W'_v;\Phi_v).$$

De plus, si v est une place finie où ni π_v, π'_v et ψ_v sont non ramifiées, si W_v et W'_v sont les vecteurs essentiels de $\mathcal{W}(\pi_v,\psi_v)$ et $\mathcal{W}(\pi'_v,\overline{\psi_v})$, alors $L(s,\pi_v\times\pi'_v) = \Psi(s,W_v,W'_v;\Phi_v)$ où Φ_v est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_v$; cela est donc vrai pour presque toutes les places finie de F.

Si η est un caractère non trivial de ${\mathbf{A}_F}^\times$ trivial sur $F^\times$, on pose

$$f(g,s;\eta,\Phi) = |\det g|^s\int_{{\mathbf{A}_F}^\times}\Phi(a\epsilon g)|a|^{rs}\eta(a)\,\mathrm{d}^\times a,$$

et si on prend pour P le parabolique standard de type $(r-1,1)$ (c'est à dire le stabilisateur de l'espace vectoriel engendré par le vecteur ϵ),

$$\forall p\in P(\mathbf{A}_F), \forall g\in G_r(\mathbf{A}_F), f(pg,s;\eta,\Phi) = |\det p|^s\,|p_{r,r}|^{-rs}\,\eta\,(p_{r,r})^{-1}\,f(g,s;\eta,\Phi).$$

On définit le caractère H_s de $P(\mathbf{A}_F)$ ($s \in \mathbf{C}$) par $H_s(p) = |\det p|^s \, |p_{r,r}|^{-rs} \, \eta\,(p_{r,r})^{-1}$. On a alors $f \in \mathrm{ind}_{P(\mathbf{A}_F)}^{G(\mathbf{A}_F)} H_s$. On définit ensuite la série d'Eisenstein par :

$$E(g, s; \eta, \Phi) = \sum_{\gamma} f(\gamma g, s; \eta, \Phi)$$

la somme portant sur un système représentant $G_r(F)$ modulo (à gauche) $P(F)$. On remarque que si z est un élément du centre de $G_r(\mathbf{A}_F)$, identifié à $\mathbf{A}_F{}^{\times}$, $E(zg, s; \eta, \Phi) = \eta^{-1}(z)E(g, s; \eta, \Phi)$. On définit naturellement l'application linéaire E de $\mathrm{ind}_{P(\mathbf{A}_F)}^{G(\mathbf{A}_F)} H_s$ dans $\mathcal{A}(G)$ par :

$$E(f)(g) = \sum_{\gamma} f(\gamma g)$$

lorsque cette série converge et par son prolongement analytique lorsqu'il est défini en s. Si φ et φ' sont des fonctions dans l'espace de π et π' respectivement, on définit :

$$I(s, \varphi, \varphi'; \Phi) = \int_{Z(\mathbf{A}_F)G_r(F)\backslash G_r(\mathbf{A}_F)} \varphi(g)\varphi'(g)E(g, s; \eta, \Phi)\, \mathrm{d}g$$

en prenant pour η le produit $\omega\omega'$ où ω est le caractère central de π et ω' celui de π'. A toute fonction W de $\mathcal{W}(\pi, \psi)$, on peut associer une fonction φ dans l'espace de π par $\varphi(g) = \sum W(\xi g)$ où ξ parcourt un système de représentants du groupe $P(F)$ modulo (à gauche) son sous-groupe unipotent. Si les fonctions se correspondent ainsi, on a alors $I(s, \varphi, \varphi'; \Phi) = \Psi(s, W, W'; \Phi)$ d'après [JS2, p550].

Soient $W = \prod_{v \in \Sigma_F} W_v \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ et $W' = \prod W'_v \in \mathcal{W}(\pi', \overline{\psi})$. On choisit alors S un ensemble fini de places contenant S_∞ tel qu'en dehors de S, les représentations π_v et π'_v sont non-ramifiées, ψ_v est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_v$ et W_v et W'_v sont les vecteurs essentiels de $\mathcal{W}(\pi_v, \psi_v)$ et $\mathcal{W}(\pi'_v, \overline{\psi_v})$. On choisit une collection $(\Phi_v)_{v \in \Sigma_F}$ de fonctions de Schwartz avec $\Phi_v : F_v \to \mathbf{C}$ telles que pour toute place v hors de S, Φ_v est la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_v$ et on pose $\Phi = \prod_{v \in \Sigma_F} \Phi_v$. On a alors

$$\prod_{v \in S} \Psi(s, W_v, W'_v; \Phi_v) L(s, \pi \times \pi') = \prod_{v \in S} L(s, \pi_v \times \pi'_v) I(s, \varphi, \varphi'; \Phi)$$

quand on choisit φ et φ' comme ci-dessus.

On sait de plus que les fonctions L locales sont toutes non-nulles. On pose donc

$$D_S(s, W, W'; \Phi) = \prod_{v \in S} \frac{\Psi(s, W_v, W'_v; \Phi_v)}{L(s, \pi_v \times \pi'_v)}$$

et avec ces notations,

$$I(s, \varphi, \varphi'; \Phi) = D_S(s, W, W'; \Phi) L(s, \pi \times \pi').$$

Remarque : *Il y a un facteur de normalisation dont il faut tenir compte. Soit η un caractère (unitaire) de ${\mathbf{A}_F}^\times$. On choisit un ensemble fini S de places de F contenant toutes les places infinies tel que η soit non ramifié en dehors de S. On choisit des fonctions Φ_v, $v \in \Sigma_F$, des fonctions de F_v dans $\mathbf{C}$ telles qu'en dehors de S, Φ_v soit la fonction caractéristique de $\mathcal{O}_v$. On note $I_S = \prod_{v \in S} \int_{F_v{}^\times} \Phi(x)|x|^{rs}\eta_v(x)\, \mathrm{d}^\times x$ et $L^S(s,\eta) = \prod_{v \notin S} L_v(s,\eta_v)$. On a alors*

$$f(I_r, s; \eta, \Phi) = L^S(rs, \eta) I_S.$$

La série d'Eisenstein qu'il faudra choisir pour obtenir la fonction L de $\pi \times \pi'$ aura donc un coefficient constant égal à $L(rs,\eta)$.

III.3.1 Comparaison de séries d'Eisenstein

Le cas Harder

Voici comment G. Harder considère les résidus de séries d'Eisenstein dans son article [Har2]. On note γ_1, ..., γ_{r-1} les poids fondamentaux pour B. Si

$$\Lambda = \sum \gamma_i \otimes z_i,$$

on pose pour $b \in B(\mathbf{A}_F)$,

$$|\delta|^\Lambda(b) = \prod |\gamma_i(b)|^{z_i}.$$

Soit η un caractère de Hecke. On considère les représentations induites

$$I^*_{\eta|\delta|^\Lambda} = \mathrm{ind}_{B(\mathbf{A}_F)}^{G(\mathbf{A}_F)} \eta|\delta|^\Lambda$$

qu'on identifie toutes les unes aux autres : tout élément g de $G(\mathbf{A}_F)$ peut s'écrire sous la forme bk avec $b \in B(\mathbf{A}_F)$ et $k \in K_\infty K_f^{(0)}$. Pour $\Psi \in I^*_\eta$ (i.e. $\Lambda = 0$) on pose

$$\Psi_\Lambda(g) = \Psi(g)|\delta|^\Lambda(b).$$

On a alors l'identification annoncée, et cette identification est compatible avec l'action de $K_\infty K_f^{(0)}$. On peut donc considérer Λ comme une variable et on sait que la série

$$\mathrm{Eis}\,(g, \Lambda; \eta, \Psi) = \sum_{\gamma \in B(F)\backslash G(F)} \Psi_\Lambda(\gamma g)$$

converge si tous les $\mathrm{Re}(z_i)$ sont assez grand. De plus on a un prolongement méromorphe en Λ à tout $\mathbf{C}^{r-1}$. En suivant une courbe ayant un seul point où $\mathrm{Eis}(g, \Lambda; \eta, \Psi)$ a un pôle, on peut considérer le résidu, en un sens à préciser parce que le pôle n'est pas nécessairement simple en ce point.

Le cas Jacquet-Shalika

H. Jacquet et J. A. Shalika considèrent des séries d'Eisenstein Du sous-groupe P au lieu du sous-groupe de Borel B dans leur article [JS2] (et [JS3]). Leur manière de procéder est expliquée au III.3.

Comparaison des deux méthodes

Si $z \in G_m$, $f(zg, s; \eta, \Phi) = \eta^{-1}(z) f(g, s; \eta; \Phi)$ alors que si $\Psi \in I^*_\eta$, $\Psi(zg) = \eta(z)\Psi(g)$. De même, si b est une élément de $B(\mathbf{A}_F)$ dont la diagonale est $(a_1, ..., a_r)$,

$$\begin{aligned} f(bg, s; \eta, \Phi) &= |\det(bg)|^s \textstyle\int_{\mathbf{A}_F^\times} \Phi(a\epsilon bg)|a|^{rs}\eta(a)\, \mathrm{d}^\times a \\ &= |\det b|^s |\det g|^s \textstyle\int_{\mathbf{A}_F^\times} \Phi(aa_r\epsilon g)|a|^{rs}\eta(a)\, \mathrm{d}^\times a \\ &= |a_1 ... a_r|^s |\det g|^s |a_r|^{-rs}\eta(a_r)^{-1} \textstyle\int_{\mathbf{A}_F^\times} \Phi(a\epsilon g)|a|^{rs}\eta(a)\, \mathrm{d}^\times a \\ &= \textstyle\prod_{i=1}^{r-1} |\gamma_i(b)|^{is}\eta(a_r)^{-1} f(g, s; \eta, \Phi) \end{aligned}$$

donc, si on pose $\Lambda = \sum \gamma_i \otimes is$, $f(bg, s; \eta, \Phi) = |\delta|^\Lambda(b)\eta(b)^{-1} f(g, s; \eta, \Phi)$. Donc $f(., s; \eta, \Phi) \in I^*_{\eta^{-1}|\delta|^\Lambda}$. On voit de même que $f(., s; \eta, \Phi) \in \mathrm{ind}_{P(\mathbf{A}_F)}^{G(\mathbf{A}_F)} H_s$ où H_s est le caractère de P défini par : $H_s(p) = |\det p|^s |p_{rr}|^{-rs}\eta(p_{rr})^{-1}$. On ne peut bien sûr pas remplacer un élément d'une induite par un de l'autre, mais on peut résussir à exprimer les séries d'Eisenstein de Jacquet et Shalika comme résidu de séries d'Eisenstein à la manière de Harder comme on le verra au lemme VI.2

Chapitre IV

Cohomologie

Dans ce chapitre, $G_r = \mathrm{GL}_r(\mathbf{C})$ et $K = U_r$.

IV.1 K-type minimal d'une induite unitaire

On cherche les K-types qui interviennent dans la cohomologie des induites unitaires de G_r en degré minimal. Il n'y en a qu'un seul et il s'agit du K-type minimal. On sait que les représentations de G_r irréductibles unitaires cohomologiques s'obtiennent comme induites unitaires d'un caractère du sous-groupe de Borel. Ces caractères sont les caractères de la forme $\chi_1 \otimes ... \otimes \chi_r$ où $\chi_i(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{p_i + \frac{r-1}{2}}$ avec $p_i \in \mathbf{Z}$. Pour obtenir une bijection, on peut supposer que les p_i sont dans l'ordre décroissant. On pose $\chi = \bigotimes_{i=1}^{r} \chi_i$ et ρ la fonction module de B.

Proposition IV.1 *Soit (π, V) est une représentation unitaire tempérée irréductible cohomologique associée au caractère infinitésimal paramétré par $\lambda + \rho$, avec $\lambda = (p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$. Alors le K-type minimal de cette représentation a pour plus haut poids $(2p_i + r - 1)$.*

PREUVE : On décompose $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{p}$ est le supplémentaire orthogonal pour la forme de Killing. On note $\tilde{\mathfrak{g}}$ et $\tilde{\mathfrak{p}}$ les quotients respectifs de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ par leur centre. Les groupes de cohomologie sont ceux du complexe donné par la formule :

$$C^i(\tilde{\mathfrak{g}}, K; V) = (\Lambda^i \tilde{\mathfrak{p}}^* \otimes V)^K,$$

c'est à dire les vecteurs fixés par $U(r)$ d'un certain produit tensoriel. Or, la représentation (π, V) étant unitaire, le Laplacien est nul, donc la cohomologie est égale au complexe (voir [BW, Proposition 3.1, p52]). On se fixe une représentation de dimension finie τ donnée par le produit tensoriel de la représentation de plus haut poids $(p_1, p_2 + 1, ..., p_r + r - 1)$ et la représentation antiholomorphe de plus haut poids $(-p_r + 1 - r, .., -p_2 - 1, -p_1)$. On sait que cette représentation est la seule telle que $H^\bullet(\tilde{\mathfrak{g}}, K; \check{\tau} \otimes \pi) \neq 0$ et réciproquement π

est la seule représentation unitaire irréductible tempérée telle que la cohomologie ci-dessus soit non nulle ($\check{\tau}$ est la contragrédiente de τ). D'après [Clo, p 110], on sait que :

$$H^i(\tilde{\mathfrak{g}}, K; \check{\tau} \otimes \pi) = \Lambda^{i-\frac{r(r-1)}{2}} \mathbf{C}^{r-1}$$

si l'on convient qu'une puissance extérieure négative d'un espace vectoriel est nulle.

Comme représentation de K, $\tilde{\mathfrak{p}}$ est de plus haut poids $(1, 0, ..., 0, -1)$. Si on note V la représentation standard de K sur $\mathbf{C}^r$, on remarque que $V \otimes V^\vee = \mathbf{C} \oplus \tilde{\mathfrak{p}}$. On peut alors donner deux expressions de la puissance extérieure de $V \otimes V^\vee$: la plus simple est :

$$\Lambda^i(V \otimes V^\vee) = \Lambda^{i-1}\tilde{\mathfrak{p}} \oplus \Lambda^i\tilde{\mathfrak{p}}.$$

L'autre est donnée par la formule ([FH, p 80]) :

$$\Lambda^i(V \otimes V^\vee) = \bigoplus_\lambda \mathbf{S}_\lambda(V) \otimes \mathbf{S}_{\lambda'}(V^\vee)$$

où λ parcourt l'ensemble des partitions de i a au plus r lignes et r colonnes, λ' est la partition conjuguée de λ et $\mathbf{S}_\lambda$ est le foncteur de Schur associé à la partition λ. Ici, $\mathbf{S}_\lambda(V)$ est la représentation de plus haut poids λ et $\mathbf{S}_{\lambda'}(V^\vee)$ est la représentation contragrédiente de la représentation de plus haut poids λ'.

On s'intéresse au cas où $i = \frac{r(r-1)}{2}$. On prend la partition donnée par $\lambda = (r-1, r-2, ..., 1, 0)$. La représentation $\mathbf{S}_\lambda(V) \otimes \mathbf{S}_{\lambda'}(V^\vee)$ contient alors la représentation τ' de plus haut poids $\lambda_{\tau'} = (r-1, r-3, ..., -r+3, -r+1)$. Sur K la (restriction de la) représentation antiholomorphe de plus haut poids $(-p_r + 1 - r, ..., -p_1)$ est isomorphe à la représentation de plus haut poids $(p_1, p_2 + 1, ..., p_r + r - 1)$. Le produit tensoriel $\tau \otimes \tau'$ contient donc le K-type donné par $(2p_1 + r - 1, 2p_2 + 2 + r - 3, ..., 2p_r + 2n - 2 - n + 1) = (2p_1 + r - 1, ..., 2p_r + r - 1)$ (il est obtenu par ajout des composantes). On remarque que le K-type de plus haut poids $(2p_1 + r - 1, ..., 2p_r + r - 1)$ intervient dans l'induite, cela provient par exemple du théorème de Frobenius et du fait que ρ est égale à 1 sur $K \cap B$. On voit donc que $(\Lambda^{i-1}\tilde{\mathfrak{p}} \oplus \Lambda^i\tilde{\mathfrak{p}}) \otimes \pi \otimes \tilde{\tau}$ contient un sous-espace où l'action de K est triviale. Comme le groupe de cohomologie est nul en degré $i - 1$, le sous-espace en question fait partie du groupe de cohomologie de degré i, pas de celui de degré $i - 1$.

Le K-type considéré est donc celui qui supporte la cohomologie de l'induite et par conséquent, c'est le K-type minimal de π. □

On voit de plus :

Corollaire : *La représentation τ' intervient dans $\Lambda^{\frac{r(r-1)}{2}}\tilde{\mathfrak{p}}$ avec multiplicité 1 et n'intervient pas dans les puissances extérieures précédentes.*

IV.2 Calcul des séries d'Eisenstein cohomologiques

Les séries d'Eisenstein de Jacquet et Shalika ne font pas toutes des classes de cohomologie. Il y a une condition sur la valeur de s. Cette condition peut être explicitée grâce à la formule donnant la cohomologie d'une représentation induite. Pour faire ce calcul on emploie le théorème 3.3 du chapitre III de [BW]. On cherche plus précisément à quelles conditions les séries d'Eisenstein de Jacquet et Shalika définies au III font des classes de cohomologie.

IV.2.1 Énoncé du théorème

On prend v la place infinie de F et G la restriction des scalaires à $\mathbf{R}$ d'un groupe de Lie sur F_v pour la fin de cette section. Soit P un sous-groupe parabolique de $G(\mathbf{R})$ contenant B et A la composante déployée de son centre; on note que $A \supset A_0$. On note $P = MN$ la décomposition de Levi standard de P. On note ${}^0M$ l'intersection de tous les noyaux des modules des caractères de M, ${}^0\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{b}$ un tore maximal de ${}^0\mathfrak{m}$. Soit (σ, H_σ) un ${}^0M$-module de Fréchet différentiable et admissible avec un caractère infinitésimal χ_σ. On note λ_σ la forme linéaire de l'algèbre de Lie de ${}^0M$ tel que la représentation de dimension finie ayant χ_σ comme caractère infinitésimal soit de plus haut poids $\lambda_\sigma - \rho_{{}^0M}$. Soit enfin ν un caractère de $A_\mathbf{C}$. On note I l'induite de P à G de la représentation $\sigma \otimes (\rho_P + \nu)$ (où ρ_P est la racine carrée du déterminant de la représentation de $A_\mathbf{C}$ sur $\mathrm{Lie}(N)_\mathbf{C}$ par adjonction). On a alors :

Théorème IV.1 (Borel–Wallach) *Soit λ un poids dominant de G et V_λ une représentation de dimension finie de G de plus haut poids λ.*

(a) *Si $H^\bullet(\mathfrak{g}, K; I \otimes V_\lambda) \neq 0$, il existe $w \in W^P$ tel que*

  (1) $w(\rho + \lambda)\,|_A + \nu = 0$,

  (2) $\chi_\sigma = \chi_{-w(\rho+\lambda)|_{\mathfrak{b}_C}}$;

  un tel w est unique.

(b) *Si w vérifie les conditions (1) et (2) ci-dessus, alors $w(\lambda+\rho)-\rho$ est un poids dominant pour ${}^0\mathfrak{m}$ et on note ${}^0V_{w(\lambda+\rho)-\rho}$ la représentation irréductible de ${}^0\mathfrak{m}$ qu'il paramètre, et, pour tout $q \in \mathbf{Z}$, on a*

$$H^{q+l(w)}(\mathfrak{g}, K; I \otimes V_\lambda) = \left(H^\bullet({}^0\mathfrak{m}, K_P; H_\sigma \otimes V_{w(\rho+\lambda)-\rho}) \otimes \Lambda^\bullet \mathfrak{a}_\mathbf{C}^*\right)^q$$

en notant $l(w)$ la longueur de l'élément w.

Les conditions du (a) sont équivalentes à la condition

$$-(\rho+\lambda) \in W(\lambda_\sigma+\nu).$$

De plus, si σ est de dimension finie de plus haut poids φ_σ, on a $\lambda_\sigma = \varphi_\sigma + \rho_{0_M}$.

IV.2.2 L'algèbre $\mathfrak{gl}_r(\mathbf{C})_\mathbf{C}$

L'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{gl}_r(\mathbf{C})$ est formée des matrices $r \times n$ à coefficients dans la $\mathbf{C}$-algèbre commutative (ron intègre) $\mathbf{C_C} = \mathbf{C} \oplus J\mathbf{C}$ où $J^2 = -1$. Une base sur $\mathbf{C}$ de $\mathbf{C_C}$ est donnée par les deux éléments $h = \frac{1+iJ}{2}$ et $a = \frac{1-iJ}{2}$. Les coordonnées de $x+Jy$ ($(x,y) \in \mathbf{R}^2$) dans cette base sont $x+iy$ et $x-iy$. Une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_\mathbf{C}$ est formée des matrices diagonales. Soit $H = \mathrm{diag}(x_1+Jy_1, ..., x_r+Jy_r) \in \mathfrak{h}_\mathbf{C}$. On a alors $\mathrm{ad}H(hE_{kl}) = ((x_k-x_l)+i(y_k-y_l))hE_{kl}$ pour tout couple (k,l) d'entiers et $\mathrm{ad}H(aE_{kl}) = ((x_k-x_l)-i(y_k-y_l))aE_{kl}$. Les racines de $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ sont donc les $(x_k-x_l)\pm i(y_k-y_l)$ où les x_k, y_l sont les fonctions coordonnées. On appellera donc la première coordonnée «holomorphe» et l'autre «anti-holomorphe». On prend les racines positives compatibles avec B c'est à dire les $(x_k-x_l)\pm i(y_k-y_l)$ telles que $k<l$. Les racines simples sont les $(x_k-x_{k+1})\pm i(y_k-y_{k+1})$. La demi-somme des racines positives est $\rho = \sum_k (r+1-2k)x_k$. Le groupe de Weil est $\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_r$, le premier $\mathfrak{S}_r$ agissant sur les coordonnées des $(x_k-x_l)+i(y_k-y_l)$, le deuxième agissant sur les coordonnées des $(x_k-x_l)-i(y_k-y_l)$.

IV.2.3 Explicitation des paramètres

Les paramètres P, M, et N sont ceux donnés au I.1.2. L'ensemble W^P est formé des couples de permutations qui sont croissantes sur l'ensemble des entiers compris entre 1 et $r-1$. A est l'ensemble des matrices diagonales à coefficients strictement positifs telles que les $r-1$ premiers éléments diagonaux sont égaux.

$${}^0M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} X & 0 \\ 0 & x \end{array} \right) \in M \Big/ |\det X| = |x| = 1 \right\}.$$

On prend pour $\mathfrak{b}$ les matrices diagonales ayant des nombres imaginaires purs sur la diagonale. Si $m \in {}^0M$ a la forme $\left(\begin{array}{cc} X & 0 \\ 0 & x \end{array} \right)$, $\sigma(m) = |\det X|_\mathbf{C}^s |x|_\mathbf{C}^{-rs} \eta^{-1}(x)$, et $\eta(z) = \left(\frac{z}{\bar z}\right)^{k_\eta} |z|_\mathbf{C}^{\nu_\eta}$ (avec $2k_\eta \in \mathbf{Z}$ et $\nu_\eta \in i\mathbf{R}$). Comme $|x|=1$, on trouve que $\sigma(m) = \left(\frac{x}{\bar x}\right)^{-k_\eta}$. Comme noté ci-dessus, σ étant de dimension finie,

$$\lambda_\sigma = \left(\left(\frac{2-r}{2}, \frac{4-r}{2}, \ldots, \frac{r-2}{2}, -k_\eta \right), \left(\frac{2-r}{2}, \ldots, \frac{r-2}{2}, k_\eta \right) \right)$$

dans la base des $x_j \pm iy_j$. On prend $a = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_1, a_2) \in A$, on a alors $a^{\nu+\rho_P} = {a_2}^{-2\nu_\eta} \prod_{i=1}^{r-1} {a_1}^{2s} {a_2}^{2(1-r)s} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2(r-1)s} {a_2}^{-2\nu_\eta}$. Comme $\rho_P(a) = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{r-1}$, on voit que ν est paramétré par le couple

$$((r-1)(2s-1), (1-r)(2s-1) - 2\nu_\eta)$$

.

IV.2.4 Recherche des bonnes valeurs

Les paramètres de ρ sont égaux à $\left(\left(\frac{r-1}{2}, \frac{r-3}{2}, \dots, \frac{1-r}{2}\right), \left(\frac{r-1}{2}, \frac{r-3}{2}, \dots, \frac{1-r}{2}\right)\right)$ et ceux de ρ_P sont $\left(\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1-r}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1-r}{2}\right)\right)$. On prend pour λ la représentation de dimension finie ayant pour paramètres $((\lambda_1, \dots, \lambda_r), (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_r))$. Le j^{e} paramètre «holomorphe» de $-(\rho + \lambda)$ est $j - \frac{r+1}{2} - \lambda_j$. Le j^{e} paramètre «anti-holomorphe» est $j - \frac{r+1}{2} - \bar{\lambda}_j$. Le j^{e} paramètre «holomorphe» de λ_σ est $j - \frac{r}{2}$ $(1 \leqslant j \leqslant r-1)$, et le r^{e} est $-k_\eta$. Les paramètres «anti-holomorphes» sont les mêmes, en changeant $-k_\eta$ en k_η.

La deuxième condition dit que les coordonnées de λ_σ sont envoyées sur celle de $-(\rho+\lambda)$ par une permutation si on ajoute un facteur de la forme $((k, \dots, k, k'), (k, \dots, k, k'))$. Les paramètres de $-(\rho+\lambda)$ sont strictement croissants, ceux de λ_σ sont strictement décroissants sur les $r-1$ premiers termes. Il y a donc deux possibilités, le r^{e} paramètre de λ_σ est envoyé soit sur le premier de $-(\rho + \lambda)$, soit sur le dernier. Dans le premier cas, on trouve:

$$\begin{cases} \frac{1-r}{2} - \lambda_1 & = -k_\eta \qquad + k' \\ j - \frac{1+r}{2} - \lambda_j & = j - \frac{r}{2} - 1 + k \qquad 2 \leqslant j \leqslant r \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1-r}{2} + k_\eta - k' \\ \lambda_j = \frac{1}{2} \qquad\quad - k \qquad 2 \leqslant j \leqslant r \end{cases}$$

L'élément de $\mathfrak{S}_r$ dont il s'agit est alors le cycle $(12...r)$ dont la longueur est $r-1$.

Dans l'autre cas, on trouve:

$$\begin{cases} j - \frac{r+1}{2} - \lambda_j & = j - \frac{r}{2} + k \qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1 \\ \frac{r-1}{2} - \lambda_r & = -k_\eta \quad + k' \end{cases}$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} \lambda_j = -\frac{1}{2} \qquad\quad - k \qquad 1 \leqslant j \leqslant r-1 \\ \lambda_r = \frac{r-1}{2} + k_\eta - k' \end{cases}$$

L'élément de $\mathfrak{S}_r$ dont il s'agit est alors l'identité. La situation est exactement identique pour les $\bar{\lambda}_j$ en changeant k_η en $-k_\eta$.

Il faut maintenant vérifier la première condition. Il y a donc 4 cas. On les numérote de 0 à 3.

(0) Les λ_j et les $\not\lambda_j$ sont tous les deux dans le premier cas. La restriction de $w(\lambda+\rho)$ à A a pour paramètres:

$$((r-1)(1-2k)+(r-1)(r+1)-n(r+1)+2,-2k')=(2(1-r)k,-2k').$$

Par conséquent, $k=\frac{2s-1}{2}$ et $k'=\frac{1-r}{2}(2s-1)-\nu_\eta$, ce qui conduit à:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1-r+k_\eta+(r-1)s & \\ \not\lambda_1 = 1-r-k_\eta+(r-1)s & \\ \lambda_j=\not\lambda_j = 1-s & 2\leqslant j\leqslant r \end{cases}$$

Les conditions standards sur les représentations de dimension finie de $\mathfrak{gl}_r(\mathbf{C})$ imposent s entier, k_η entier (ce qui est le cas vu les systèmes de coefficients avec lesquels π et π' font de la cohomologie), $\nu_\eta=0$ et $s\geqslant\left(1+\frac{|k_\eta|}{r}\right)$. On a dans ce cas $l(w)=2(r-1)$.

(1) Les λ_j sont dans le deuxième cas et les $\not\lambda_j$ dans le premier. En procédant comme ci-dessus, on arrive a:

$$\begin{cases} \lambda_j = -s & 1\leqslant j\leqslant r-1 \\ \lambda_r = k_\eta+(r-1)s & \\ \not\lambda_1 = 1-r-k_\eta+(r-1)s & \\ \not\lambda_j = 1-s & 2\leqslant j\leqslant r \end{cases}$$

Les conditions sont identiques sauf que l'intervalle dans lequel doit être s est maintenant: $\left[1+\frac{k_\eta}{r},-\frac{k_\eta}{r}\right]$. Dans ce cas, $l(w)=r-1$.

(2) Les λ_j sont dans le premier cas et les $\not\lambda_j$ dans le deuxième. C'est la même situation que ci-dessus, en échangeant les λ_j et les $\not\lambda_j$ et en changeant k_η en $-k_\eta$. Celui des deux cas qui se produit dépend du signe de k_η.

(3) Les λ_j et les $\not\lambda_j$ sont dans le deuxième cas.

$$\begin{cases} \lambda_j=\not\lambda_j = -s & 1\leqslant j\leqslant r-1 \\ \lambda_r = k_\eta+(r-1)s & \\ \not\lambda_r = -k_\eta+(r-1)s & \end{cases}$$

On doit alors avoir s inférieur ou égal à $-\frac{|k_\eta|}{r}$. Ici, bien sûr la longueur de w est nulle.

Pour expliciter complètement la cohomologie, on précise que dans chaque cas, $H_\sigma\otimes V_{w(\lambda+\rho)-\rho}$ est la représentation triviale et donc $\mathrm{H}^\bullet({}^0\mathfrak{m},K_P;H_\sigma\otimes V_{w(\rho+\lambda)-\rho})$ est égal à $\mathbf{C}$ en degré 0 et (0) partout ailleurs. De plus, $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^2$, donc la cohomologie est égale à $\mathbf{C}$ en degré $l(w)$, $\mathbf{C}^2$ en degré $l(w)+1$, $\mathbf{C}$ en degré $l(w)+2$ et (0) partout ailleurs.

En résumé

Proposition IV.2 *Soient η un caractère de $\mathbf{C}$ de la forme $\eta(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{k_\eta}$ où k_η est entier et H_s le caractère de $P(\mathbf{C})$ défini par $H_s(p) = |\det p|^s |p_{rr}|^{-rs} \eta(p_{rr})^{-1}$. Soit V une représentation de dimension finie de $GL_r(\mathbf{C})$. La cohomologie $H^\bullet(\mathfrak{g}, K_\infty; \mathrm{ind}_{P(\mathbf{C})}^{G(\mathbf{C})} H_s \otimes V)$ est non nulle si et seulement si V est le produit tensoriel d'une représentation holomorphe de plus haut poids (λ_j) et de la représentation antiholomorphe de plus haut poids (χ_j), s est entier et qu'on est dans l'un des cas suivants :*

(0) $s \geqslant 1 + \frac{|k_\eta|}{r}$,
$\lambda_1 = 1 - r + k_\eta + (r-1)s$,
$\chi_1 = 1 - r - k_\eta + (r-1)s$ *et*
$\lambda_j = \chi_j = 1 - s$ *($2 \leqslant j \leqslant r$). On fixe alors* $l(s) = 2(r-1)$.

(1) $1 + \frac{k_\eta}{r} \leqslant s \leqslant -\frac{k_\eta}{r}$,
$\lambda_j = -s$ *($1 \leqslant j \leqslant r-1$),*
$\lambda_r = k_\eta + (r-1)s$,
$\chi_1 = 1 - r - k_\eta + (r-1)s$ *et*
$\chi_j = 1 - s$ *($2 \leqslant j \leqslant r$). On fixe alors* $l(s) = r-1$.

(2) $1 - \frac{k_\eta}{r} \leqslant s \leqslant \frac{k_\eta}{r}$,
$\lambda_1 = 1 - r + k_\eta + (r-1)s$,
$\lambda_j = 1 - s$ *($2 \leqslant j \leqslant r$),*
$\chi_j = -s$ *($1 \leqslant j \leqslant r-1$) et*
$\chi_r = -k_\eta + (r-1)s$. *On fixe alors* $l(s) = r-1$.

(3) $s \leqslant -\frac{|k_\eta|}{r}$,
$\lambda_j = \chi_j = -s$ *($1 \leqslant j \leqslant r-1$),*
$\lambda_r = k_\eta + (r-1)s$ *et*
$\chi_r = -k_\eta + (r-1)s$. *On fixe alors* $l(s) = 0$.

La cohomologie est alors égale à $\mathbf{C}$ en degré $l(s)$, $\mathbf{C}^2$ en degré $l(s)+1$, $\mathbf{C}$ en degré $l(s)+2$ et 0 partout ailleurs.

On remarque que les seules valeurs que s ne peut pas prendre sont $-E\left(\frac{|k_\eta|}{r}\right)$ et $1+E\left(\frac{|k_\eta|}{r}\right)$ et ce si r ne divise pas k_η.

IV.3 K-type portant la cohomologie d'une induite de H_s

On connait la liste des K-types intervenant dans une induite de P à G.

Proposition IV.3 *Soit η un caractère de $\mathbf{C}^\times$ de la forme $\eta(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{k_\eta}$, $k_\eta \in \mathbf{Z}$ et pour $s \in \mathbf{C}$, soit H_s le caractère de $P = P(\mathbf{C})$ défini par $H_s(p) = |\det p|_{\mathbf{C}}^s |p_{rr}|_{\mathbf{C}}^{-rs} \eta(p_{rr})^{-1}$. Les K-types qui interviennent dans $J_{H_s} = \operatorname{ind}_P^G H_s$ sont toutes les représentations irréductibles de K dont le plus haut poids est $(\lambda - 2k_\eta, 0, \dots, 0, -\lambda)$ où $\lambda \geqslant \max(0, 2k_\eta)$; chacun de ces K-types intervient avec une multiplicité un. Un vecteur de plus haut poids pour le K-type $(\lambda - 2k_\eta, 0, \dots, 0, -\lambda)$ est la fonction de $G_r(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}$ définie par*

$$f_\lambda(g) = \frac{|\det g|_{\mathbf{C}}^s {g_{r1}}^{\lambda - 2k_\eta} \overline{g_{rr}}^\lambda}{(\sum_i |g_{ri}|_{\mathbf{C}})^{rs - k_\eta + \lambda}}.$$

Preuve : Tout d'abord, vue comme représentation de K, la représentation $\operatorname{Ind}_P^G H_s$ est naturellement isomorphe à $\operatorname{Ind}_{P\cap K}^K (H_s |_{P\cap K})$. On utilise alors la loi de réciprocité de Frobenius, qui dit que

$$\operatorname{Hom}_K \left(\operatorname{Ind}_{P\cap K}^K (H_s |_{P\cap K}), V\right) \simeq \operatorname{Hom}_{P\cap K}(H_s |_{P\cap K}, V |_{P\cap K})$$

pour toute représentation V de K. Le groupe $P \cap K$ est isomorphe à $U_{r-1} \times U_1$ et, utilisant cet isomorphisme, la restriction de H_s à $P \cap K$ est isomorphe à la représentation de plus haut poids $((0), -2k_\eta)$, en notant (0) le poids nul de U_{r-1}. Si V est la représentation de plus haut poids $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, sa restriction à $P \cap K$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles de plus haut poids $((\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant r-1}, \mu_r)$ avec :

- $\forall i, 1 \leqslant i \leqslant r-1, \quad \lambda_i \geqslant \mu_i \geqslant \lambda_{i+1}$;
- $\sum_{i=1}^r \lambda_i = \sum_{i=1}^r \mu_i$ (égalité du caractère central).

Ceci est une conséquence de la proposition II.3. Dans notre cas, tous les μ_i sont nuls sauf au plus μ_r qui vaut $-2k_\eta$, ce qui donne immédiatement le premier résultat de la proposition.

On suppose k_η positif, le raisonnement est le même dans l'autre cas. Sous l'action de K, le vecteur f_λ engendre un espace vectoriel contenu dans l'espace W des fonctions

$$g \mapsto \frac{|\det g|_{\mathbf{C}}^s P((g_{ri})) \overline{Q}((g_{ri}))}{(\sum |g_{ri}|_{\mathbf{C}})^{rs + k_\eta + \lambda}}$$

où (P, Q) parcourt $\operatorname{Sym}^\lambda \times \operatorname{Sym}^{\lambda + 2k_\eta}$. L'espace W est de dimension finie et le plus haut poids des vecteurs qu'il contient est celui de f_λ ce qui prouve la deuxième partie de la proposition. □

La liste des K-types est donc très simple. Celui qui est minimal pour la relation d'ordre sur les poids est donc : $(\max(0,-2k_\eta),0,\ldots,0,\min(0,-2k_\eta))$.

Proposition IV.4 *Le K-type minimal de l'induite de $P(\mathbf{C})$ à $G_r(\mathbf{C})$ du caractère H_s est celui de plus haut poids donné par :*

$$(\max(0,-2k_\eta),0,\ldots,0,\min(0,-2k_\eta)).$$

Proposition IV.5 *Le K-type minimal de J_{H_s} est celui qui porte la cohomologie en degré $r-1$.*

PREUVE : nous allons utiliser le foncteur de translation de Zuckerman-Jantzen. Pour de plus amples renseigements sur ce foncteur, se reporter à [Zuc] ou à [Vog]. On a : $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g},K;J_{H_s}\otimes\tau'')\neq 0$. Pour simplifier l'exposé, on suppose $k_\eta\geqslant 0$, si $k_\eta<0$, il suffit de prendre la conjugaison complexe de ce qui est dit. Le plus haut poids de τ'' est :

$$\Big((1-r+(r-1)s+k_\eta,1-s,\ldots,1-s),(-s,\ldots,-s,(r-1)s-k_\eta)\Big).$$

On note v_s un vecteur de poids

$$\Big((1-s,\ldots,1-s,1-r+(r-1)s+k_\eta),(-s,\ldots,-s,(r-1)s-k_\eta)\Big)$$

dans τ''. Comme ce poids est extrémal, il n'y a qu'une droite de vecteurs ayant ce poids. La droite $\mathbf{C}v_s$ est invariante sous l'action de $P(\mathbf{C})$; pour le voir, on réalise Sym^k, $k\in\mathbf{N}$, comme l'ensemble des polynômes de $\mathbf{C}[X_1,\ldots,X_r]$ homogènes de degré k, X_r^k est alors une base de l'espace de poids $(0,\ldots,0,k)$ et donc cet espace est visiblement invariant sous l'action de $P(\mathbf{C})$. On note H' le caractère de $P(\mathbf{C})$ défini par $H'(p)=p_{rr}^{-r}\det p$ et $J'=\mathrm{ind}_P^G H'$. La droite $\mathbf{C}v_s$ est l'espace d'un caractère de $P(\mathbf{C})$. On a alors $\mathrm{ind}_P^G(H_s\otimes\mathbf{C}v_s)\subset\mathrm{ind}_P^G(H_s\otimes\tau'')$. Or d'après [Vog, Lemme 4.5.2(a), p206], $\mathrm{ind}_P^G(H_s\otimes\tau'')\simeq(\mathrm{ind}_P^G H_s)\otimes\tau''$, l'isomorphisme étant réalisé par l'application suivante :

$$\begin{aligned} T'_s : J_{H_s}\otimes\tau'' &\longrightarrow \mathrm{ind}_P^G(H_s\otimes\tau'')\\ f\otimes v &\longmapsto (g\mapsto f(g).(gv)) \end{aligned}$$

Or en tant que caractère de $P(\mathbf{C})$, $H_s\otimes\mathbf{C}v_s$ et H' sont équivalents. Le foncteur de translation qui nous intéresse est l'application T_s de J' dans $J_{H_s}\otimes\tau''$ qu'on en déduit par composition de la réciproque de T'_s avec les deux opérateurs d'entrelacement :

$$J'=\mathrm{ind}_P^G H'\simeq\mathrm{ind}_P^G(H_s\otimes\mathbf{C}v_s)\hookrightarrow\mathrm{ind}_P^G(H_s\otimes\tau'')\simeq J_{H_s}\otimes\tau''.$$

Il est immédiat de vérifier que T_s est un opérateur d'entrelacement injectif. En appliquant le théorème IV.1, on voit que J' est une représentation cohomologique, que sa cohomologie est à coefficients triviaux et qu'elle est non nulle en degrés $r-1$, r et $r+1$ (où elle est de dimension respectivement 1, 2 et 1). Comparons la cohomologie de J_{H_s} et celle de J'. Les complexes sont respectivement

$$\mathrm{C}^\bullet(J_{H_s}) = \left(\Lambda^\bullet\left(\mathfrak{g}_\infty/\mathfrak{k}_\infty\right)^* \otimes J_{H_s} \otimes \tau''\right)^{K_\infty}$$

et

$$\mathrm{C}^\bullet(J') = \left(\Lambda^\bullet\left(\mathfrak{g}_\infty/\mathfrak{k}_\infty\right)^* \otimes J'\right)^{K_\infty}.$$

L'opérateur T_s induit une injection $T_s^\bullet$ de $\mathrm{C}^\bullet(J')$ dans $\mathrm{C}^\bullet(J_{H_s})$. Or J' est unitaire puisque si on pose $H'_\circ = |\delta_P|^{-\frac{1}{2}}H'$, alors J' est l'induite unitaire du caractère $H'_\circ$ et $H'_\circ$ est le caractère paramétré par $\left(\left(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},\frac{1-r}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\dots,-\frac{1}{2},\frac{r-1}{2}\right)\right)$, il est donc unitaire. Les groupes de cohomologie sont donc isomorphes aux groupes du complexe dont elle dérive et par conséquent, $\mathrm{C}^{(r-2)}(J')$ est nul et $\mathrm{C}^{(r-1)}(J')$ est de dimension 1. En procédant comme à la proposition IV.3, on voit que la liste des plus haut poids des K-types de J' est $(1+\lambda,1,\dots,1-r-\lambda)$, $\lambda\in\mathbf{N}$, chaque K-type ayant multiplicité 1. Le K-type minimal de J' est donc $(1,\dots,1,1-r)$. C'est celui qui porte la cohomologie de J', en effet, le K-type contragrédient est dans $\Lambda^{r-1}\left(\mathfrak{g}_\infty/\mathfrak{k}_\infty\right)^*$, il est réalisé comme le dual du K-type de vecteur de plus haut poids $E_{1,r}\wedge\dots\wedge E_{r-1,r}$.

La portion de $J_{H_s}\otimes\tau''$ qui a le même caractère inifinitésimal que J' est égale à l'image de T_s. Voir pour cela [Vog, Proposition 7.4.1, p488]. Or l'opérateur de dérivation du complexe $\mathrm{C}^\bullet(J_{H_s})$ commute avec l'action du centre de l'algèbre enveloppante universelle puisqu'il est défini à partir de l'action de l'algèbre de Lie. Donc si un K-type est dans l'image de la dérivation, c'est qu'il provenait d'un K-type faisant partie du même caractère infinitésimal en degré inférieur. Or $\mathrm{C}^{r-1}(J') = 0$, donc l'image par la dérivation est nulle. Par suite, l'image de $\mathrm{C}^{r-1}(J')$ par T_s^{r-1} se retrouve entièrement dans $\mathrm{H}^{r-1}(\mathfrak{g},K;J_{H_s}\otimes\tau'')$

Le K-type de J_{H_s} qui porte la cohomologie en degré $r-1$ est donc celui qui est l'image du K-type minimal de J' par T_s. Or au niveau des K-types, l'application T_s est simplement la translation par le caractère de $\mathbf{C}v_s$, donc le K-type de J_{H_s} concerné est son K-type minimal. $\square$

Chapitre V

Expression de la fonction L en termes de classes de cohomologie

V.1 Cohomologie automorphe

V.1.1 Notations

On considère un sous-groupe arithmétiques Γ de $G(F)$. A tout Γ-module $\mathcal{M}$, on associe le fibré $\tilde{\mathcal{M}}$ sur $\Gamma\backslash\mathcal{Z}$ comme au paragraphe I.2. Pour (π, V) une représentation automorphe de $G(\mathbf{A}_F)$, on note $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}, K; V^\infty \otimes E)$ la cohomologie du complexe $C^\bullet(\mathfrak{g}, K; V^\infty \otimes E) = (\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^* \otimes V^\infty \otimes E)^K$ en notant V^∞ l'ensemble des vecteurs C^∞ de V. La cohomologie $\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{cusp}}(\Gamma\backslash\mathcal{Z}; \tilde{E})$ est alors isomorphe à la somme directe des $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}, K; V^\infty \otimes E)$ où (π, V) parcourt l'ensemble des représentations automorphes paraboliques de G dont le type à l'infini est prescrit par V.

V.1.2 Partie cuspidale

Si (π, V) est une représentation parabolique (irréductible), elle est unitaire et donc ([BW, Prop. II.3.1, p52]), si $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}, K; V^\infty \otimes E) \neq 0$, toutes les formes différentielles sont harmoniques et fermées. On sait que si V_∞ est associée par la classification de Langlands au caractère $\lambda + \rho$ alors pour E contragrédiente de la représentation de plus haut poids $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$, les groupes de cohomologie sont non (tous) nuls. De plus, V est dans la partie discrète du spectre de L^2, les éléments de V^∞ peuvent donc être vus comme des fonctions de $G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F)$. Par conséquent, tout élément ω de $\mathrm{H}^q(\mathfrak{g}, K; V^\infty \otimes E)$ peut s'écrire $\omega(X) = \pi(X)(\sum f_i(1) v_i \omega_i)$ cette somme étant invariante par K (X étant pris au choix dans $\mathfrak{g}$ ou dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$), où f_i est une fonction automorphe dans V^∞, $v_i \in E$ et ω_i est un élément de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^*$. On note $p_c = \frac{r(r-1)}{2}$ et $p_E = (r-1)$. On note Γ un sous-groupe discret de $G_r(F_v)$ où v est la place infinie et pour simplifier les notations, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{r,v}$, $K = K_v$ et

$\mathcal{Z} = G(F_v)/K$.

V.2 Produit

V.2.1 Produit scalaire

Soient V_1 et V_2 deux $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles de dimension finie. Si ω_1 et ω_2 sont des représentants de classes de cohomologies de $\mathrm{H}^{p_i}(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{Z}, V_i))$ $(1 \leqslant i \leqslant 2)$, le cup-produit $\omega_1 \wedge \omega_2$ est un représentant d'une classe du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^{p_1+p_2}(\mathfrak{g}, K; C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{Z}, (V_1 \otimes V_2)))$. Si de plus $p_1 + p_2 = \dim \mathcal{Z}$, alors on peut intégrer la forme correspondante sur $\Gamma\backslash\mathcal{Z}$ et on obtient un vecteur de $V_1 \otimes V_2$ si l'intégrale converge. Ce sera le cas si l'une des deux formes est à support compact ou si l'une est à décroissance rapide alors que l'autre est à croissance modérée.

On prend deux représentations cuspidales cohomologiques π et π'. On sait qu'il existe deux $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles de dimension finie V et V' tels qu'on ait $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes V) \neq 0$ et $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}, K; \pi' \otimes V') \neq 0$. Soit η le caractère central de $V \otimes V'$. Comme π et π' sont unitaires, V et V' le sont aussi et donc η est unitaire. On peut supposer que $\eta(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$ pour k_η entier. On définit alors le caractère H_s à partir de η comme précédemment. On prend alors pour ρ la représentation $E(J_{H_s})$ pour s dans la bande calculable de $\pi \times \pi'$, $s \geqslant 1$. D'après la proposition IV.2, on a $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}, k; \rho \times W) \neq 0$ seulement si $W = \mathrm{Sym}^a \otimes \overline{\mathrm{Sym}}^{a'} \otimes \det^d \otimes \overline{\det}^{-d'}$ avec $a = rs + k_\eta$, $a' = k_\eta - rs$, $d = 1 - s$ et $d' = s$ (ou l'adaptation si $k_\eta < 0$). On sait alors que $V \otimes V' \otimes W$ contient la représentation triviale (voir propostion II.2). On a alors, par la technique ci-dessus, un produit trilinéaire :

$$\langle .\,, .\,, . \rangle : \mathrm{H}^{p_c}(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes V) \times \mathrm{H}^{p_c}(\mathfrak{g}, K; \pi' \otimes V') \times \mathrm{H}^{p_E}(\mathfrak{g}, K; \rho \otimes W) \to V \otimes V' \otimes W$$

On peut alors projeter sur le sous-espace de dimension un qui réalise la représentation triviale. On obtient ainsi un produit trilinéaire $\langle .\,, .\,, . \rangle$ à valeurs complexes.

Ce produit scalaire sera sous-jacent dans la preuve du théorème VII.1.

V.2.2 Produit tensoriel des K-types minimaux

Soient π et π' deux représentations unitaires irréductibles tempérées cohomologiques induites comme au IV.1. On note (p_i) les entiers correspondant à π et (p'_i) ceux qui correspondent à π'. Le caractère central de $\pi \otimes \pi'$ est $\eta(z) = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{k_\eta}$ avec $k_\eta = \sum_{i=1}^{r}(p_i + p'_i) + r(r-1)$. On note H_s le caractère de $P(\mathbf{C})$ défini à partir de η comme ci-dessus. On prend pour τ le produit tensoriel de la représentation holomorphe de plus haut poids $(p_i + i - 1)$ par la conjuguée de sa contragrédiente ; on fait la même chose pour définir la représentation τ' en changeant (p_i) en (p'_i). Si $k_\eta > 0$, on note τ'' la représentation $\det^{1-s} \otimes \overline{\det}^s \,\mathrm{Sym}^a \otimes \overline{\mathrm{Sym}}^{a'}$, avec $a = k_\eta + r(s-1)k_\eta$ et $a' = -k_\eta + rs$. Pour que $\tau \otimes \tau' \otimes \tau''$ contienne la représentation triviale, il faut et il suffit que $\tau \otimes \tau'$ contienne la contragrédiente de τ'' et donc, d'après la proposition II.2, si et seulement si $\max(p_i + p'_{r+1-i}) + r \leqslant s \leqslant \min(p_{i+1} + p'_{r+1-i}) + r - 1$ et $-\min(p_i + p'_{r+1-i}) - r + 1 \leqslant s \leqslant -\max(p_i + p'_{r-i}) - r$. Si $k_\eta < 0$ le raisonnement est exactement le même et on trouve :

$$\begin{cases} \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}(p_i + p'_{r+1-i}) + r - 1 \leqslant s \leqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant r-1}(p_i + p'_{r-i}) + r - 2 \\ -\min\limits_{1\leqslant i\leqslant r}(p_i + p'_{r+1-i}) - r + 2 \leqslant s \leqslant -\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r-1}(p_{i+1} + p'_{r+1-i}) - r + 1 \end{cases}$$

Quelques remarques doivent être faites : tout d'abord, quand $k_\eta > 0$, $\frac{k_\eta}{r} = \frac{1}{r}\sum p_i + p'_i + r - 1 \geqslant \min(p_{i+1} + p'_{r+1-i}) + r - 1$; et il n'y a pas de remarque équivalente pour $-\min_{1\leqslant i\leqslant r}(p_i + p'_{r+1-i}) - r + 2$ par rapport à $1 - \frac{k_\eta}{r}$ (par exemple la méthode fonctionne pour $r = 2$ quand $p_1 = p'_1 = 2$ et $p_2 = p'_2 = -2$, on a alors $k_\eta = 2$ et $-\min_{1\leqslant i\leqslant r}(p_i + p'_{r+1-i}) - r + 1 = -1$). Ensuite, si on fait la moyenne des minorants de s on trouve, quel que soit le signe de k_η que s doit être supérieur ou égal à $1/2$, c'est à dire à 1 ; cela signifie que la majoration qu'on n'a pas obtenue pour $1 - \frac{|k_\eta|}{r}$ n'est pas très importante. Pour qu'il y ait des valeurs possibles de s cela impose des conditions sur $\pi \times \pi'$; pour $r = 2$, les conditions sont explicitables et donnent : $p_1 \geqslant p_2 + 1$, $p'_1 \geqslant p'_2 + 1$, $p_1 + p_2 + 2p'_2 + 4 \geqslant 0$ et $2p_2 + p'_1 + p'_2 + 4 \geqslant 0$.

On donne la définition suivante

Définition V.1 *On conserve les notations ci-dessus. Si $k_\eta \geqslant 0$, on note $m_{\pi,\pi'}$ le maximum de $\max(p_i + p'_{r+1-i}) + r$ et de $-\min(p_i + p'_{r+1-i}) - r + 1$ et on note $M_{\pi,\pi'}$ le minimum de $\min(p_{i+1} + p'_{r+1-i}) + r - 1$ et de $-\max(p_i + p'_{r-i}) - r$. Si $k_\eta \leqslant 0$, on fait les adaptations nécessaires. On apelle alors* bande calculable *de $\pi \times \pi'$ l'intervalle $[m_{\pi,\pi'}; M_{\pi,\pi'}]$.*

Soit s un entier dans la bande calculable de $\pi \times \pi'$. D'après les remarques ci-dessus, il est compris entre 1 et $\frac{|k_\eta|}{r}$. La série d'Eisenstein $E(J_{H_s})$ est donc une représentation dont les groupes de cohomologies à coefficients dans τ'' sont non nuls (voir Proposition IV.2).

Proposition V.1 *Le produit tensoriel des K-types minimaux de π, π' et $E(J_{H_s})$ contient la représentation triviale de K avec multiplicité 1.*

PREUVE : c'est une conséquence directe de la proposition II.2. □

L'intégrale Ψ est une forme trilinéaire de $\pi \times \pi' \times E(J_{H_s})$. On l'étend donc à $\pi \otimes \pi' \otimes E(J_{H_s})$, en gardant le même symbole.

Proposition V.2 *L'intégrale Ψ réalise l'entrelacement avec la représentation triviale dans la proposition V.1.*

PREUVE : Comme la mesure choisie est invariante par translation par un élément de $G(\mathbf{A}_F)$ et donc de K, l'intégrale Ψ réalise un morphisme de représentations de K entre

$\pi \otimes \pi' \otimes E(J_{H_s})$ et la représentation triviale. Il suffit donc de prouver que cet entrelacement est non nul sur les K-types minimaux. N'ayant pas réussi à le prouver, nous somes conduits à le supposer. $\square$

Conjecture *L'intégrale Ψ est non triviale sur le produit tensoriel des K-types minimaux de π, π' et $E(J_{H_s})$.*

V.2.3 Commutativité

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^{p_c} \tilde{\mathfrak{p}}^* \otimes \bigwedge^{p_c} \tilde{\mathfrak{p}}^* \otimes \bigwedge^{p_E} \tilde{\mathfrak{p}}^* \bigotimes \pi \otimes \pi' \otimes E(J_{H_s}) \bigotimes \tau \otimes \tau' \otimes \tau'' \arrow[r, "m\otimes\Psi\otimes\mathrm{Id}"] & \mathbf{C} \bigotimes \mathbf{C} \bigotimes \tau \otimes \tau' \otimes \tau'' \arrow[d, "\times\otimes\mathrm{Id}"] \\
C^{p_c}(\widetilde{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}, \widetilde{K_{\mathbf{C}}}; \pi \otimes \tau) \otimes C^{p_c}(\widetilde{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}, \widetilde{K_{\mathbf{C}}}; \pi' \otimes \tau') \otimes C^{p_E}(\widetilde{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}, \widetilde{K_{\mathbf{C}}}; E(J_{H_s}) \otimes \tau'') \arrow[u] \arrow[r, "\vee"'] & \tau \otimes \tau' \otimes \tau''
\end{tikzcd} \tag{V.1}$$

avec les conventions suivantes :

- Quand une lettre est surmontée par une tilde, il est fait un quotient par le centre du groupe.
- $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ ou sa réalisation comme l'ensemble des matrices symétriques à coefficients diagonaux «réels».
- On choisit comme base de vecteurs de poids de $\mathfrak{p}$ les matrices $e_{jk} = (1+J)E_{jk} + (1-J)E_{kj}$ et $e'_{jk} = (1-J)E_{jk} + (1+J)E_{kj}$. Pour $\tilde{\mathfrak{p}}$, on garde la même base, en remplaçant les e_{jj} par les $f_j = e_{jj} - e_{j+1,j+1}$; on note cette base (ω_l). On rappelle que J est la structure complexe de $\mathbf{C}$ avant complexification. On définit la contraction m' qui envoie alors $(\omega_{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{l_{\frac{r(r-1)}{2}}}) \otimes (\omega_{l'_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{l'_{\frac{r(r-1)}{2}}}) \otimes (\omega_{l''_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{l''_{r-1}})$ sur le vecteur obtenu en remplaçant les trois $\otimes$ par des $\wedge$. Comme $\bigwedge^{r^2-1} \mathfrak{p}$ est de dimension 1 de base $\bigwedge_{1 \leqslant l \leqslant r^2-1} \omega_l$, on définit $m(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = \frac{m'(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)}{\wedge \omega_l}$ avec une notation évidente.
- La flèche vers le haut est simplement l'inclusion.
- La flèche en bas est l'intégrale du cup-produit.

L'application m est non triviale. Vérifions qu'elle est non nulle sur les K-types qui nous intéressent. Le K-type de $\bigwedge^{p_c} \tilde{\mathfrak{p}}^*$ qui intervient pour calculer le groupe de cohomologie de degré p_c de la représentation π (ou de π') est de plus haut poids $(r-1, r-3, \ldots, 1-r)$.

Le vecteur $v_h = \bigwedge_{1\leqslant j<k\leqslant r} e_{jk}$ est un vecteur de plus haut poids pour ce K-type. Le vecteur $v_b = \bigwedge_{1\leqslant k<j\leqslant r} e_{jk}$ est de plus bas poids. Pour la représentation $E(J_{H_s})$, le K-type de $\bigwedge^{p_E} \tilde{\mathfrak{p}}^*$ qui intervient est de plus haut poids $(r-1,-1,...,-1)$. Le vecteur $\bigwedge_{2\leqslant l\leqslant r} e_{1l}$ est un vecteur de plus haut poids dans ce K-type. On va prouver un petit lemme technique :

Lemme V.1 *On considère dans $\bigwedge^{p_c} \tilde{\mathfrak{p}}$ la base engendrée par les produits extérieurs des f_l, e_{jk} et e'_{jk}. Toutes les coordonnées considérées seront relatives à cette base. Il existe dans la représentation engendrée par $\bigwedge_{2\leqslant l\leqslant r} e_{1l}$ un vecteur v_m dont la composante suivant $\bigwedge_{1\leqslant l\leqslant r-1} f_l$ est non nulle.*

Preuve : c'est très simple. On définit la suite de vecteurs $\mathbf{v}_k$ ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0 = \bigwedge_{2\leqslant l\leqslant r} e_{1l} \\ \mathbf{v}_{k+1} = (E_{1,r-k} - E_{r-k,1}) \cdot \mathbf{v}_k \text{ pour } k \geqslant 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de prouver par récurrence sur k que $\mathbf{v}_k$ a une composante non nulle suivant $\bigwedge_{2\leqslant l\leqslant r-k} e_{1l} \wedge \bigwedge_{r-k\leqslant l<r} (e_{ll}-e_{rr})$ et que toutes ses autres composantes ont un degré strictement inférieur à k en les vecteurs f_l. Le vecteur $\bigwedge_{1\leqslant l<r} (e_{ll}-e_{rr})$ est égal à $(-1)^r \bigwedge_{1\leqslant l\leqslant r-1} f_l$ ce qui achève la démonstration. □

Il est clair maintenant que $m(v_h \otimes v_b \otimes v_m) \neq 0$, et donc m est non triviale sur les K-types qui interviennent dans les groupes de cohomologie.

Le diagramme considéré est donc commutatif, à la multiplication de m par un scalaire près. Ce scalaire est un élément de $\mathbf{Q}^\times$, comme on peut le voir en prouvant que la composante de $\mathbf{v}_k$ suivant $\bigwedge_{2\leqslant l\leqslant r-k} e_{1l} \wedge \bigwedge_{r-k\leqslant l<r} (e_{ll}-e_{rr})$ en est un multiple rationnel (en fait entier).

Chapitre VI

Rationalité des classes de cohomologie

VI.1 La compactification de Borel-Serre

Voici pour mémoire le rappel de la compactification de Borel-Serre. Pour chaque parabolique P on note $X^P(\infty) = P^1(F_\infty)/(P^1(F_\infty) \cap K_\infty)$. On rajoute alors à $\mathcal{Z}$ une copie de chaque $X^P(\infty)$ où P parcourt un système de représentants de l'ensemble des sous-groupes paraboliques définis sur F pour la relation de conjugaison. On a muni bien sûr l'ensemble d'une topologie adéquate. La variété complétée se note $\tilde{\mathcal{Z}}$.

Voici deux exemples pour illustrer la construction. Abandonnant temporairement le cas où le corps de base F est totalement imaginaire, considérons une place réelle v ; on suppose que $r = 2$. On a alors $\mathcal{Z} = \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\mathrm{SO}_2$ est isomorphe au demi-plan de Poincaré. Dans ce cas $P^1(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (de déterminant 1) ayant ± 1 sur la diagonale. Il s'identifie à la ligne $\mathrm{Im}\, z = 1$ dans le demi-plan de Poincaré. Dans le cas où $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, le quotient $\Gamma\backslash\mathcal{Z}$ est isomorphe à une sphère privée d'un point ou a un disque ouvert. La compactification classique consiste à rajouter $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q})$ à $\mathcal{Z}$ ce qui, après quotient par Γ, donne la sphère entière. Dans ce cas là, $X^B(\infty)$ est un cercle et la variété $\Gamma\backslash\tilde{\mathcal{Z}}$ est isomorphe à un disque fermé.
Si v est une place imaginaire et que $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[i])$, la variété $\mathcal{Z}$ est isomorphe au demi-espace $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3/z > 0\}$, où le point (z, y, z) correspond à la matrice $\begin{pmatrix} z^{1/2} & z^{-1/2}(x+iy) \\ 0 & z^{-1/2} \end{pmatrix}$.
Un domaine fondamental de l'action de Γ sur ce demi-espace est l'ensemble des points (z, y, z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 > 1$, $x > 0$, $y > 0$ et $x + y < 1$. La compactification classique rajoute $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}[i])$ où $a + ib \in \mathbf{Q}[i]$ est identifié à $(a, b, 0)$; après quotient par Γ, il vient la sphère de dimension 3. Pour la compactification de Borel-Serre, $B^1(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} x & z \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ telles que $|x| = 1$. On a alors $X^B(\infty)$ isomorphe à $\mathbf{C}$, où $z \in \mathbf{C}$

correspond à la classe de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Après quotient par Γ, il vient une variété isomorphe à un tore (plein) fermé dont la frontière est le tore $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[i]) \cap X^B(\infty)\backslash X^B(\infty)$ qui est isomorphe au tore $\mathbf{C}/\mathbf{Z}[i]$.
Dans le cas général, les adhérences des différents X^P s'intersectent suivant des variétés correspondants à des $X^{P'}$. Plus précisément, $\overline{X^P} \subset \overline{X^{P'}}$ si $P \subset P'$. La variété complétée $\Gamma\backslash\tilde{\mathcal{Z}}$ est une variété « à coins ».

L'intérêt de la compactification de Borel-Serre est qu'on a alors :

$$\mathrm{H}^\bullet(\Gamma\backslash\tilde{\mathcal{Z}}, \tilde{\mathcal{M}}) = \mathrm{H}^\bullet(\Gamma\backslash\mathcal{Z}, \tilde{\mathcal{M}})$$

pour tout $(\mathfrak{g}, K)$-module de dimension finie $\mathcal{M}$ et que les facettes que sont les $X^P(F_\infty)$ sont de dimension assez grande pour donner des informations sur les classes de cohomologie.

VI.2 Séries d'Eisenstein

VI.2.1 Rappel sur les coefficients constants

Cette section est simplement un rappel de résultats et notations contenus dans [Har2, p102 et suivantes].

Soit φ un caractère du sous-groupe de Borel $B(\mathbf{A}_F)$ de $G(\mathbf{A}_F)$. On note I_φ l'induite unitaire de φ de B à G :

$$I_\varphi = \mathrm{Ind}_{B(\mathbf{A}_F)}^{G(\mathbf{A}_F)} \varphi.$$

Si α est une racine positive on définit N_α comme le sous-groupe à un paramètre de B correspondant à α. Explicitement, si $\alpha = e_j - e_k$, $N_\alpha(A) = 1 + AE_{jk}$, où A est un anneau défini sur $\mathcal{O}_F$. Si $w \in W$, on note alors

$$N^{(w)} = \prod_{\substack{\alpha>0 \\ w\alpha<0}} N_\alpha.$$

Définition VI.1 *Soit $w \in W$, on note $T(w, \varphi)$ l'opérateur d'entrelacement non-normalisé de I_φ dans $I_{w^{-1}\varphi}$; il est défini par :*

$$\forall f \in I_\varphi, \forall g \in G(\mathbf{A}_{F,f}),\ T(w, \varphi)(f)(g) = \int_{N^{(w)}(\mathbf{A}_F)} f(wng)\, \mathrm{d}n.$$

Il est multiplicatif au sens suivant : si w et w' sont deux éléments de W, $T(ww', \varphi) = T(w', w^{-1}\varphi) \circ T(w, \varphi)$. Cet opérateur n'est pas holomorphe en φ, il peut avoir des pôles. On peut décomposer l'opérateur $T(w, \varphi)$ en le produit d'une fonction scalaire $c(w, \varphi)$ et d'un opérateur holomorphe $T^{\mathrm{loc}}(w,\varphi)$. Pour cela, si $\alpha = e_j - e_k$ est une racine, on note χ_α le morphisme de groupes

$$\begin{aligned}\chi_\alpha : \mathbf{A}_F{}^\times &\to B(\mathbf{A}_F)\\ t &\mapsto \chi_\alpha(t) = 1 + E_{jj}(t-1) + E_{kk}(t^{-1}-1)\end{aligned}$$

Si $w \in W$, on pose :

$$c(w,\varphi) = |d_F|^{-\frac{k}{2}} \prod_{\substack{\alpha>0\\ w^{-1}\alpha<0}} \frac{L(\varphi\circ\chi_\alpha)}{L(\varphi\circ\chi_\alpha\cdot|\,|)}$$

où k est le nombre de racines positives que w^{-1} rend négatives. Ceci détermine donc $T^{\mathrm{loc}}(w,\varphi)$ et cet opérateur est holomorphe en φ. Comme conséquence de ce qui est noté au bas de la page 120 de [Har2], on peut noter que T^{loc} est non nul et est même surjectif sur $\mathrm{Ind}_P^G\,\varphi$.

Avec ces définitions, l'expression du terme constant de la série d'Eisenstein associée au caractère φ est simple puisqu'il s'agit de

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbf{A}_F)} \mathrm{Eis}(ng,f)\,\mathrm{d}n = \sum_{w\in W} T(w,\varphi)(f)(g)$$

quand $g \in G(\mathbf{A}_F)$ et $f \in I_\varphi$ avec $\mathrm{Eis}(g,f) = \sum_{\gamma\in B\backslash G(F)} f(\gamma g)$.

VI.2.2 Rationalité des classes de cohomologie

Si φ est un caractère de P, on note J_φ l'induite (non-unitaire) de P à G_r du caractère φ, c'est à dire l'induite unitaire du caractère $\delta_P^{-\frac{1}{2}}\varphi$.

Proposition VI.1 *Soient η un caractère de Hecke de $\mathbf{A}_F{}^\times$ et H_s le caractère de $P(\mathbf{A}_F)$ défini par $H_s(p) = |\det p|^s|p_{rr}|^{-rs}\eta(p_{rr})^{-1}$. Soient s un nombre entier strictement supérieur à 1 et V une représentation de $G(F_\infty)$ de dimension finie. $H^\bullet(\mathfrak{g},K;E(J_{H_s})\otimes V)$ est un sous-espace rationnel de $H^\bullet(\mathfrak{g},K;\mathcal{A}(G)\otimes V)$.*

Preuve : Pour prouver que les classes de cohomologie qu'engendrent les séries d'Eisenstein de Jacquet et Shalika sont dans un sous-espace rationnel, on va employer la même méthode que dans [Har1] et [Har2] et en particulier [Har1, 4.3, p85]. Le principe est le suivant : soit r_B la restriction des formes différentielles sur le facette de la compactification de Borel-Serre assosciée à la classe d'équivalence des sous-groupes de Borel et, noté de la même façon, le morphisme induit sur les classes de cohomologie de de Rham. Soit V une représentation de $\mathrm{GL}_r(\mathbf{A}_F)$ telle que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_r(\mathbf{A}_{F,f})}(V_f,\mathrm{Ker}\,r_B) = 0$. Soit un opérateur d'entrelacement T de V dans l'ensemble des formes automorphes. On fixe un $(\mathfrak{g},K)$-module de dimension finie W. L'opérateur T induit alors un opérateur $T^\bullet$ de $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g},K;V\otimes W)$ dans $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g},K;\mathcal{A}(G)\otimes W)$.

Si l'opérateur T est tel que $r_B \circ T^\bullet \neq 0$, alors l'image de $T^\bullet$ dans la cohomologie automorphe est un sous-espace rationnel. Cette propriété de GL_r est une conséquence du théorème de multiplicité 1.

Pour toute fonction de Schwartz sur ${\mathbf{A}_F}^r$, Φ, on sait que $f(g, s; \eta, \Phi) \in J_{H_s}$ (voir au III.3). E définit donc un opérateur d'entrelacement entre J_{H_s} et les formes automorphes et G. Harder a déjà prouvé que $\mathrm{Hom}_{G_r(\mathbf{A}_F)}(J_{H_s,f}, \mathrm{Ker}\, r_B) = 0$ ([Har2, 2.2.4, p125], remarquer qu'il manque un w^{-1}). Il ne reste plus qu'à prouver que le coefficient constant de $E(f)(g)$ suivant B est non constamment nul. Or ce coefficient constant est égal à

$$\sum_{w^{-1} \in W^P} T(w, |\rho|^{-1} H_s)(f)(g).$$

Pour vérifier la non nullité, on vérifie s'il est nul à l'infini et aux places finie. A l'infini, on va appliquer l'opérateur au vecteur de plus haut poids v du K-type minimal de J_{H_s} (voir la Proposition IV.3) et prendre sa valeur en I_r. Si $w \neq 1$ et w^{-1} n'est pas l'élément le plus long de W^P, alors l'intégrale est nulle. Dans le cas de $w = 1$, l'intégrale n'est que l'évaluation et donc $T(1, |\rho|^{-1} H_s)(v)(I_r) = 1$. Reste à calculer

$$\int_{\mathbf{C}^{r-1}} \frac{\overline{n_{r-1}}^{2k_\eta}\, \mathrm{d}n_1 \mathrm{d}n_2 \ldots \mathrm{d}n_{r-1}}{(1 + \sum_{i=1}^{r-1} |n_i|_{\mathbf{C}})^{rs+k_\eta}}$$

ou

$$\int_{\mathbf{C}^{r-1}} \frac{\mathrm{d}n_1 \mathrm{d}n_2 \ldots \mathrm{d}n_{r-1}}{(1 + \sum_{i=1}^{r-1} |n_i|_{\mathbf{C}})^{rs-k_\eta}}$$

suivant le signe de k_η. On voit que cette intégrale est positive (ou nulle si $k_\eta > 0$). Pour la partie finie, pour une fonction Φ localement constante à support compact sur ${\mathbf{A}_{F,f}}^r$ on définit

$$f(g, s; \eta, \Phi) = |\det g|_f^s \int_{{\mathbf{A}_{F,f}}^\times} \Phi(a\epsilon g) |a|_f^s \eta(a)\, \mathrm{d}^\times a$$

pour $g \in G_r(\mathbf{A}_{F,f})$. On prend $g = I_r$. On doit donc calculer l'intégrale :

$$\int_{N^\circ(\mathbf{A}_{F,f})} f(n, s; \eta, \Phi)\, \mathrm{d}n$$

où N° est l'ensemble des matrices unipotentes <u>inférieures</u> de type $(r-1, 1)$. Ceci est égal à

$$\int_{{\mathbf{A}_{F,f}}^{(r-1)}} \int_{{\mathbf{A}_{F,f}}^\times} \Phi(an_1, ..., an_{r-1}, a) |a|_f^s \eta(a)\, \mathrm{d}a \mathrm{d}n_1 ... \mathrm{d}n_{r-1}.$$

Comme la fonction $\varphi(a) = \int_{{\mathbf{A}_{F,f}}^{r-1}} \Phi(an_1, ..., an_{r-1}, a)\, \mathrm{d}n_1 ... \mathrm{d}n_{r-1}$ est une fonction localement constante à support compact, après inversion des intégrales, il vient la fonction ζ du caractère η et de φ. Elle est donc non constamment nulle. Donc la composée $r_B \circ E$ est non nulle et par conséquent le sous-espace engendré par les classes de cohomologie considérées est rationnel. $\square$

VI.2.3 Résidu de séries d'Eisenstein

On cherche à exprimer les séries d'Eisenstein de Jacquet et Shalika comme résidu de séries d'Eisenstein du sous-groupe de Borel. Cela est possible, et le résultat s'énonce ainsi :

Proposition VI.2 *Soient η un caractère de Hecke de $\mathbf{A}_F{}^\times$ et H_s le caractère de $P(\mathbf{A}_F)$ défini par $H_s(p) = |\det p|^s |p_{rr}|^{-rs}\eta(p_{rr})^{-1}$. Soit s un nombre entier supérieur ou égal à 1, on a alors $H^\bullet(\mathfrak{g}, K; E(J_{H_s}) \otimes V) \subset H^\bullet(\mathfrak{g}, K; \mathrm{Eis}_{max}(I_s) \otimes V)$ pour toute représentation de dimension finie V, I_s étant l'induite de B à G d'un caractère.*

PREUVE : commençons par chercher à exprimer la représentation triviale de G_r comme résidu de série d'Eisenstein comme ceux de G. Harder. Soit $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbf{C}^r$. Le point essentiel de la démonstration de cette proposition est le lemme suivant :

Lemme VI.1 *Soit $f_{\underline{s}} \in \mathrm{Ind}_B^G \delta_B^{-\frac{1}{2}} |\det|^{\underline{s}}$ telle que $f_{\underline{s}}|_K = 1$. On note $\mathrm{Eis}(g, f_{\underline{s}})$ la série d'Eisenstein associée à $f_{\underline{s}}$. Alors le résidu du coefficient constant de $\mathrm{Eis}(g, f_{\underline{s}})$ quand $\underline{s}$ tend vers 0 est une fonction constante que l'on peut choisir pour être non nulle.*

Pour lever toute ambiguïté sur le terme de résidu voici la définition que l'on adopte.

Définition VI.2 *Soit f une fonction de $\mathbf{C}^r$ dans $\mathbf{C}$. On dit que f a un résidu en 0 s'il existe $P \in \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_r]$ tel que $P(\underline{0}) = 0$ et $\lim_{\underline{s}\to 0} P(\underline{s}) f(\underline{s})$ existe et soit non nulle.*

PREUVE : Pour $f_{\underline{s}} \in \mathrm{Ind}_B^G \delta_B^{-\frac{1}{2}} |\det|^{\underline{s}}$, on peut calculer le terme constant le long de B de $\mathrm{Eis}(g, f_{\underline{s}})$. Il est égal à :

$$\sum_{w \in W} T(w, |\rho|^{-1} |\det|^{\underline{s}})(f_{\underline{s}}).$$

Cette somme se récrit comme

$$\sum_{w\in W} |d_F|^{-\frac{k}{2}} \frac{\prod_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant r \\ w(i)>w(j)}} L(s_i - s_j + j - i, \mathbf{1}_F)}{\prod_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant r \\ w(i)>w(j)}} L(s_i - s_j + j - i + 1, \mathbf{1}_F)} T^{\mathrm{loc}}(w, |\rho|^{-1} |\det|^{\underline{s}})(f_{\underline{s}})$$

en notant $\mathbf{1}_F$ le caractère trivial de $F^\times$. Quand $\underline{s}$ tend vers 0, on voit que les fonctions L n'ont pas de 0 et n'ont de pôle qu'au numérateur. Si on multiplie ceci par $P(\underline{s}) = \prod_{1\leqslant i\leqslant r-1}(s_i - s_{i+1})$, on voit que tous les w non maximaux ont une contribution nulle quand $\underline{s}$ tend vers 0 parce que l'ordre des pôles des fonctions L est au plus simple. Par contre le w de longueur maximale a une contribution non nulle si $f_{\underline{s}}|_K = 1$. Ce résidu est la fonction constante égale à : $\frac{|d_F|^{-\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{i=2}^r L(i, \mathbf{1}_F)}$. □

Pour obtenir les séries d'Eisenstein de Jacquet et Shalika, on procède de manière similaire. Soit s un nombre complexe et η un caractère de $\mathbf{C}^\times$. On induit alors du caractère

H_s au lieu du caractère trivial : on choisit d'abord $f \in \mathrm{Ind}_P^G \delta_P^{-\frac{1}{2}} H_s$ puis, si $w_{\max}$ est l'élément de plus grande longueur de W, on prend dans $\mathrm{Ind}_B^G \delta_B^{-\frac{1}{2}} w_{\max} H_s$ un élément $f_{\underline{s}}$ tel que $f|_K = T(w_{\max}, w_{\max}(|\rho|^{-1}H_s))(f_{\underline{s}})|_K$. Un tel élément existe, parce que l'opérateur T est surjectif sur J_{H_s}. On utilise un lemme similaire à celui ci-dessus.

Lemme VI.2 *Le résidu de la série d'Eisenstein associée à $f_{\underline{s}}$ quand $\underline{s}$ tend vers 0 est proportionnel à la série d'Eisenstein associée à f.*

PREUVE : On commence par procéder pour les s tels que $\mathrm{Re}\, s > 1$. Le coefficient constant de $\mathrm{Eis}(g, f_{\underline{s}})$ est alors égal à ce qui est écrit ci-dessus, mais l'ordre maximal du pôle change : les fonctions L qui apparaissent pour $j = r$ n'ont pas de pôle, sauf si $\eta = 1$ et $s = 1$, cas que l'on exclut parce qu'alors la série d'Eisenstein et la fonction $L(s, \pi \times \pi')$ ont elles-mêmes un pôle. On prend cette fois $P(\underline{s}) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant r-2}(s_i - s_{i+1})$ et les seuls termes qui ne donnent pas 0 dans la limite sont ceux qui correspondent à $w^{-1} \in w_{\max} W^P$. Il reste donc après passage à la limite :

$$\frac{|d_F|^{-\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{i=2}^{r-1} L(i, \mathbf{1}_F)} \sum_{w^{-1} \in W^P} |d_F|^{-\frac{k}{2}} \frac{L(rs-k, \eta)}{L(r(1+s), \eta)} T^{\mathrm{loc}}(w, |\rho|^{-1} H_s)(f)$$

et dans la somme on reconnaît l'expression du terme constant de la série d'Eisenstein de Jacquet et Shalika. On trouve donc que les deux termes constants sont proportionnels.

Comme on a une égalité entre deux fonctions mémormorphes vraie sur un ouvert de $\mathbf{C}$, on en déduit que cette égalité est vraie sur $\mathbf{C}$ tout entier. □

On en déduit que le résidu de série $\mathrm{Eis}_{\max}$ et la série E sont proportionnels. Le coefficient de proportionnalité est $\frac{|d_F|^{-\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{i=2}^{r-1} L(i, \mathbf{1}_F)}$. Les deux fonctions étant proportionnelles, les classes de cohomologies le sont aussi et on obtient donc le résultat de la proposition. □

Remarque : *Comme le note Günter Harder à la page 122 de [Har2], l'opérateur T^{loc} induit un morphisme de la cohomologie qui est rationnel en degré $r-1$. Pour obtenir une classe de cohomologie rationnelle à partir d'une classe de cohomologie rationnelle en degré $r-1$, il faut donc multiplier par*

$$\frac{\frac{|d_F|^{-\frac{r(r-1)}{2}}}{\prod_{i=2}^{r-1} L(i, \mathbf{1}_F)}}{c(w_{max}, w_{max}(|\rho| H_s))} = \frac{L(r - rs; \eta^{-1})}{L(1 - rs; \eta^{-1})} \cdot \frac{1}{L(2; \mathbf{1}_F)^{r-1}}$$

On rappelle que le 1 qui est au numérateur de la dernière fraction est la puissance $r-1^{\mathrm{e}}$ du résidu en 1 de la fonction L du caractère $\mathbf{1}_F$ et donc la formule est homogène.

VI.3 Cohomologie cuspidale

VI.3.1 Rappels sur le vecteur essentiel

On rappelle ici quelques résultats tirés de [JPSS1]. Soit donc $v \in \Sigma_f$ et π une représentation générique de G_v. On suppose que le plus grand idéal sur lequel ψ_v est trivial est $\mathcal{O}_v$. Le théorème (4.1), page 208 de [JPSS1] montre qu'il existe alors dans le modèle de Whittaker de π un vecteur W° non nul, appelé (définition (4.4), page 211) *vecteur essentiel* de π caractérisé par :

– $\forall g \in G_v, \forall k \in G_{r-1}(\mathcal{O}_v), W^\circ\left(g\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = W^\circ(g)$;

– la covariance d'une certaine intégrale.

Si la représentation et le caractère sont non ramifiés, le vecteur essentiel est le seul vecteur fixé par K_v tel que $W(I_r) = 1$.

Soit ψ_1 un caractère de $F_v^\times$ et soit $a_1 \in F_v$ tel que $\forall x \in F_v, \psi_1(x) = \psi_v(a_1 x)$. On peut alors réaliser un isomorphisme entre $\mathcal{W}(\pi, \psi_v)$ et $\mathcal{W}(\pi, \psi_1)$ qui a un vecteur W du premier fait correspondre le vecteur

$$g \longmapsto W(\mathrm{diag}(a_1^{r-1}, a_1^{r-2}, \ldots, a_1, 1)g).$$

Cet isomorphisme préserve le vecteur essentiel dans les cas où il est déjà défini. On l'utilise donc pour définir le vecteur essentiel dans les cas qui ne sont pas couvert par la définition précédente.

VI.3.2 Rationalité de la cohomologie cuspidale

Soit π une représentation automorphe cuspidale. On décompose comme d'habitude $\pi = \otimes'\pi_v = \pi_\infty \otimes \pi_f$. Soit V une représentation de dimension finie de $G_r(F_\infty)$ (donc un $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-module) telle que $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{g}, K_\infty; \pi_\infty \otimes V) \neq 0$. D'après la démonstration du Théorème 3.19, p129 de [Clo], l'espace $\mathrm{H}^q(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi \otimes V)$ est défini sur une extension finie de F que l'on notera $F(\pi)$. de $G_r(\mathbf{A}_{F,f})$ à π_f. On sait qu'il existe un idéal $n(\pi) \subset \mathcal{O}_F$ tel que le sous-groupe compact ouvert $K_f(\pi)$ de la forme :

$$K_f(\pi) = \left\{ A \in G_r\left(\prod_{v \in \Sigma_f} \mathcal{O}_v\right) \Big/ A \equiv \begin{pmatrix} k_1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n(\pi)}, k_1 \in G_{r-1}\left(\prod \mathcal{O}_v\right) \right\}$$

vérifie $\dim {\pi_f}^{K_f(\pi)} = 1$ (voir [JPSS1, théorème (5.1), page 211]). On a de plus que $W_f^\circ = \bigotimes_{v \in \Sigma_f} W_v^\circ$ est dans $\mathcal{W}(\pi_f, \psi_f)$ comme il est noté dans le théorème. On note $K(\pi) =$

$Z_G(F_\infty)K_\infty K_f(\pi)$. L'espace

$$\mathrm{H}^{\frac{r(r-1)}{2}}(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes V)^{K_f(\pi)} = \left(\Lambda^{\frac{r(r-1)}{2}}(\mathfrak{p}_\infty/\mathfrak{k}_\infty)^* \otimes \pi \otimes V\right)^{K(\pi)}$$

est donc de dimension 1.

On fixe un vecteur non nul dans le K_∞-type minimal de $\mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_\infty)$. On note $K_\infty(F(\pi))$ l'ensemble des éléments de K_∞ qui ont des coefficients dans le corps $F(\pi)$. Le $F(\pi)$-espace vectoriel qu'il engendre sous l'action de $K_\infty(F(\pi))$ contient une base du K_∞-type minimal de $\mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_\infty)$, que l'on appelle base rationnelle. On définit ainsi une structure rationnelle sur $\mathcal{W}(\pi, \psi)^{K_f(\pi)}$ en disant qu'un vecteur est rationnel s'il est le produit tensoriel d'un vecteur rationnel de $\mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_\infty)$ par W_f°. On note l'ensemble des vecteurs rationnels par $\mathcal{W}(\pi, \psi)^{K_f(\pi)}(F(\pi))$. L'isomorphisme entre π et $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est fixé par la décomposition en série de Fourier. On note $\pi^{K_f(\pi)}(F(\pi))$ l'image de $\mathcal{W}(\pi, \psi)^{K_f(\pi)}(F(\pi))$ par cet isomorphisme. Si V est un $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty)$-module de dimension finie, on choisit un vecteur de plus haut poids pour l'action de K_∞, qui engendre sous l'action de $K_\infty(F(\pi))$ un sous $F(\pi)$-espace vectoriel de V, $V_{F(\pi)}$ qui vérifie $V_{F(\pi)} \otimes_{F(\pi)} \mathbf{C} = V$. Ainsi, si π est une représentation automorphe cohomologique et V un système de coefficients, on peut fixer sur $\mathrm{H}^q(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi \otimes V)^{K_f(\pi)}$ une structure rationnelle sur $F(\pi)$. Il existe donc un nombre complexe $C(\pi)$, unique à multiplication près par un élément de $F(\pi)^\times$, tel que si $[\omega]$ est une classe de cohomologie rationnelle en degré $\frac{r(r-1)}{2}$, invariante par $K_f(\pi)$, $C(\pi)[\omega] \in \mathrm{H}^{\frac{r(r-1)}{2}}(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \pi^{K_f(\pi)}(F(\pi)) \otimes V_{F(\pi)})$ puisque (le produit tensoriel par $\mathbf{C}$ de) ce groupe est de dimension 1. Il faut remarquer que la définition de $C(\pi)$ ne dépend pas du vecteur de plus haut poids choisi dans V.

Remarque : *En pratique, dans un modèle de Whittaker de π, si le vecteur de plus haut poids du K_∞-type minimal de π est non nul en I_r, le vecteur qu'on choisit pour définir la structure rationnelle pourra être celui tel que $W(I_r) = 1$, le but étant de choisir une normalisation qui permette de faire le calcul de l'intégrale archimédienne.*

Jusqu'à la fin de ce mémoire, on fixe une structure rationnelle sur π_∞ pour toute représentation automorphe parabolique irréductible de $G_r(\mathbf{A}_F)$, fixant par la-même les $C(\pi)$.

VI.3.3 Structure rationnelle pour les séries d'Eisenstein

La situation est exactement identique pour les séries d'Eisenstein. Le K_∞-type qui nous intéresse est aussi le K_∞-type minimal. Si η est un caractère de $G_1(\mathbf{A}_F)/G_1(F)$, on définit pour $s \in \mathbf{Z}$ le caractère H_s de $P(\mathbf{A}_F)$ par $H_s(p) = |\det p|^s |p_{rr}|^{-rs} \eta^{-1}(p_{rr})$. On suppose que le s choisi est tel que la représentation $E(J_{H_s})$ soit cohomologique et on apelle τ'' la représentation de dimension finie qu'elle admet comme coefficients cohomologiques. On appelle $F(\eta)$ le corps engendré sur F par les valeurs de η sur $\mathbf{A}_{F,f}$. On fixe donc un vecteur non nul dans le K_∞-type minimal de $J_{H_s,\infty}$, il engendre ainsi sous l'action de $K_\infty(F(\eta))$

un sous $F(\eta)$-espace vectoriel de $J_{H_s,\infty}$, noté I_∞. On note $J_{H_s}(F(\eta))$ le sous $F(\eta)$-espace vectoriel de J_{H_s} engendré par les vecteurs dont la composante à l'infini est dans I_∞ et dont la composante aux places finies est égale à la fonction caractéristique de K_f. Ces vecteurs ont par E une image incluse dans un sous-espace rationnel et donc leur image dans l'espace $\mathrm{H}^{r-1}(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; E(J_{H_s}) \otimes \tau'')$ est un sous $F(\eta)$ espace vectoriel R de dimension 1. Il existe donc un nombre complexe $C_s(\eta)$, unique à multiplication près par $F(\eta)^\times$, tel que $R/C_s(\eta)$ soit un ensemble de classes rationnelles (ceci modulo le choix d'une structure rationnelle sur τ'' qui ne modifie pas ce nombre).

Remarque : *On choisit pour tout η et tout s tel que $E(J_{H_s})$ soit une représentation cohomologique, une structure $F(\eta)$-rationnelle du K_∞-type minimal de $J_{H_s,\infty}$, fixant par la même un $C_s(\eta)$.*

Chapitre VII

Théorème

Soient π et π' deux représentations automorphes paraboliques irréductibles cohomologiques de G_r. Soit $\eta = \omega_\pi \omega_{\pi'}$, où ω_π est le caractère central de π. On note $F(\pi, \pi') = F(\pi)F(\pi') = F(\pi)F(\pi')F(\eta)$. On définit pour $s \in \mathbf{C}$ le caractère H_s comme précédemment. On note $K_f(\pi, \pi') = K_f(\pi) \cap K_f(\pi')$. On prend pour Φ_f la fonction caractéristique de $\epsilon K_f(\pi, \pi')$. On a alors une décomposition $\Phi_f = \prod_{v \in \Sigma_f} \Phi_v$. Si J_{H_s} est une représentation cohomologique, on note $D(s, \eta)$ l'ensemble des fonctions Φ, fonctions de Schwartz sur F_∞^r telles que $f(s, .; \eta, \Phi)$ soit un élément du sous-espace rationnel du K_∞-type minimal de J_{H_s} qu'on a choisi.

Théorème VII.1 *Pour s_0 entier dans la bande calculable de $\pi \times \pi'$, $s_0 > 1$, si $\Psi_\infty(s_0, ., .; .)$ n'est pas identiquement nulle sur le produit des trois K_∞-types minimaux de π_∞, π'_∞ et $E\left(J_{H_{s_0}}\right)_\infty$, on a :*

$$L_f(s_0, \pi \times \pi') = \frac{C_{s_0}(\eta) C(\pi) C(\pi')}{\Psi_\infty(s_0, \varphi, \varphi'; \Phi)} c$$

où c est un élément de $F(\pi, \pi')$, φ et φ' sont des éléments pris dans le sous-espace rationnel choisi des K_∞-type minimaux de $\mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_\infty)$ et $\mathcal{W}(\pi'_\infty, \overline{\psi_\infty})$ et Φ un élément de $D(s, \eta)$.

Preuve : Soient π et π' deux représentations paraboliques irréductibles de G_r. Soit $\eta = \omega_\pi \omega_{\pi'}$ et soit s_0 dans la bande calculable de $\pi \times \pi'$ avec $s_0 > 1$. On choisit deux vecteurs φ_t et φ'_t dans $\pi^{K_f(\pi)}$ et $\pi'^{K_f(\pi')}$ et une fonction test Φ_t telle que $E(., s_0; \eta, \Phi_t)$ soit dans le modèle rationnel de $E(J_{H_{s_0}})$ qu'on a choisi. L'isomorphisme entre π et $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ est canonique puisqu'il est fixé par la décomposition en série de Fourier. On note donc W et W' les modèles de Whittaker de φ_t et φ'_t. On les décompose en $W = \varphi \otimes \prod_{v \in \Sigma_f} W^\circ(\pi_v, \psi_v)$ et $W' = \varphi' \otimes \prod W^\circ(\pi'_v, \psi_v)$, de façon à ce que les éléments φ et φ' soient des éléments rationnels de $\mathcal{W}(\pi_\infty, \psi_\infty)$ et $\mathcal{W}(\pi'_\infty, \overline{\psi_\infty})$. Soit S l'ensemble des places finies où l'une des trois représentations π, π' ou ψ est ramifiée. On rappelle qu'un facteur L local n'est jamais nul. On a alors

$$\Psi(s_0, W, W'; \Phi_t) = \Psi_\infty(s_0, \varphi, \varphi'; \Phi) L_f(s_0, \pi \times \pi') \prod_{v \in S} \frac{\Psi(s_0, W_v^\circ, W_v'^\circ; \Phi_v)}{L_v(s_0, \pi \times \pi')}$$

D'autre part, on a vu que le diagramme (V.1) était commutatif. D'après la définition de $C(\pi)$, $C(\pi')$ et $C_{s_0}(\eta)$, l'intégrale

$$\Psi\left(s_0, \frac{\varphi_t}{C(\pi)}, \frac{\varphi'_t}{C(\pi')}, \frac{\Phi_t}{C_{s_0}(\eta)}\right)$$

est un élément de $F(\pi, \pi')$.

On va prouver que pour toute place finie v et pour un bon choix de la fonction Φ_v l'intégrale $\Psi_v = \Psi(s_0, W_v^\circ, W_v'^\circ; \Phi_v)$ est non nulle et qu'il s'agit d'une fraction rationnelle en q^{-s} à coefficients dans $F(\pi, \pi')$, en prenant $q = q_v$ le nombre d'éléments du corps résiduel de F_v. On suppose que le plus grand idéal sur lequel ψ_v est trivial est $\mathcal{O}_v$. On a alors $W^\circ(I_r) = W'^\circ(I_r) = 1$. La représentation π_v (respectivement π'_v) est invariante par un sous-groupe $K_v(\pi)$ (respectivement $K_v(\pi')$) compact ouvert dans $G_r(F_v)$. On prend $K_v(\pi, \pi') = K_v(\pi) \cap K_v(\pi')$. On prend pour Φ_v la fonction caractéristique de $\epsilon K_v(\pi, \pi')$. On décompose G_v en $G_v = PK_v(\pi, \pi')$. On a alors :

$$\Psi_v = \int_{K_v(\pi,\pi')} \int_{N \backslash P / P \cap K_v(\pi,\pi')} W^\circ(pk) W'^\circ(pk) \Phi_v(\epsilon pk) |\det p|^{-s} \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}k.$$

L'intégrale sur $N \backslash P$ est celle sur le groupe $N_{r-1} \backslash G_{r-1}$ injecté par la même injection qu'au paragraphe II.3. On a : $\Phi_v(\epsilon pk) = \Phi_v(\epsilon p_{rr} k)$. Comme la fonction Φ_v est la fonction caractéristique de $\epsilon K_v(\pi, \pi')$, on voit que p_{rr} doit être congru à 1 modulo $n_v(\pi, \pi') = \mathrm{pgcd}(n_v(\pi), n_v(\pi'))$, puis que $k \in (P \cap K) K_v(\pi, \pi')$. Or toutes les fonctions sont invariantes par le sous-groupe $K_{r-1}(F_v) = \mathrm{GL}_{r-1}(\mathcal{O}_v)$, donc on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
\Psi_v &= c \int_{A_v / A_v \cap K_v} W^\circ(a) W'^\circ(a) \Phi(\epsilon a) |\det a|^{-s} \, \mathrm{d}a \\
&= c \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_r \\ n_r \geqslant 0}} W^\circ(d) W'^\circ(d) q^{-(n_1 + \ldots + n_r)s} \\
&= c \sum_{n_1 \geqslant \ldots \geqslant n_r \geqslant 0} W^\circ(d) W'^\circ(d) q^{-(n_1 + \ldots + n_r)s}
\end{aligned}$$

où, en prenant ϖ une uniformisante de F_v, $d = \mathrm{diag}(\varpi^{n_1}, \ldots, \varpi^{n_r})$ et $c > 0$ est la mesure de $(P \cap K) K_v(\pi, \pi')$. La dernière égalité vient du calcul explicite qui est fait de la valeur de W° qui est donné dans [JPSS1, p 212] et [Shi]. Les normalisations des mesures sont faites pour que tous les groupes $\mathrm{GL}_z(\mathcal{O}_v)$, $1 \leqslant z \leqslant r$, aient pour mesure 1. Le coefficient constant dans le développement en série de Laurent de Ψ_v est égal à la mesure de $(P \cap K) K_v(\pi, \pi')$ qui est égale à $\frac{1}{|K_v / (P \cap K) K_v(\pi, \pi')|}$, il est donc non nul.

L'intégrale Ψ_v est une série entière en q^{-s}. Le coefficient de q^{-ls} est donc égal à $\sum_d W(d)W'(d)$ (où d parcourt l'ensemble des matrices diagonales dont le déterminant est de norme q^{-l}). Dans [JPSS1], page 212, on peut voir que la valeur de $W(d)$ est ramenée à celle d'un modèle de Whittaker non ramifié et dans [Shi], il est prouvé que cette valeur est une fonction polynômiale (à coefficients entiers) des valeurs propres des opérateurs de Hecke ; donc cette valeur est dans $F(\pi)$. Par suite, le valeur de Ψ_v est dans $F(\pi, \pi')$. Dans [JPSS2], page 392, il est prouvé que l'intégrale Ψ_v est une fraction rationnelle avec un dénominateur de la forme $\prod(1 - \alpha_i q^{-s})$ où les α_i ne dépendent que du choix des représentations π et π' ; la fonction L locale est de ce type-là. Les coefficients de la fraction rationnelle en q^{-s} que forme la fonction L locale est à coefficients dans $F(\pi, \pi')$. Ceci est une conséquence des calculs faits dans [JPSS2], en particulier la proposition 8.1, le théorème 8.2 et la proposition 9.4 avec les remarques qui suivent.

On sait donc que le rapport de Ψ_v par la fonction L locale est un polynôme en q^s et q^{-s} et d'autre part, comme on vient de le voir, il est à coefficients dans $F(\pi, \pi')$. Comme s_0 est entier, on en conclut que la fraction est a valeurs dans $F(\pi, \pi')$. On remarque bien entendu que si π_v, π'_v et ψ_v sont non ramifiés, cette fraction est égale à 1.

La restriction qu'on a faite sur ψ_v n'en est pas une, puisqu'on peut la lever en procédant comme au VI.3.1. On obtient alors, moyennant la non-annulation de l'intégrale $\Psi_\infty(s_0, \varphi, \varphi'; \Phi)$, le résultat annoncé. $\square$

Notations

Liste des énoncés

Index

Bibliographie

[BW] Armand Borel et Nolan R. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, volume 94. Princeton University Press and Tokyo University Press, 1980.

[Clo] Laurent Clozel. Motifs et formes automorphes : application du principe de fonctorialité. Dans *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, Proceedings of the Ann-Arbor conference, édité par Laurent Clozel et J. S. Milne, volume I, pages 77–159. Academic Press, 1990.

[FH] William Fulton et Joe Harris. *Representation theory. A first course*, *Graduate texts in Mathematics*, volume 129. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[GS] Stephen Gelbart et F. Shahidi. *Analytic Properties of Automorphic L-Functions*, *Perspective in Mathematics*, volume 6. Academic Press, 1988.

[Har1] Günter Harder. Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL_2. *Inventiones Mathematicae*, **89**:37–118, 1987.

[Har2] Günter Harder. Some results on the Eisenstein cohomology of arithmetic subgroups on GL_n. Dans *Cohomology of arithmetic groups and automorphic forms*, édité par Jean-Pierre Labesse et Joachim Schwermer, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1447, pages 85–153. Springer-Verlag, 1990.

[Hid] Haruzo Hida. On the critical values of L-functions of GL(2) and $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$. *Duke Mathematical Journal*, **74**(2):431–529, May 1994.

[JPSS1] Hervé Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro et Joseph A. Shalika. Conducteur des représentations de groupe linéaire. *Mathematische Annalen*, **256**:199–214, 1979.

[JPSS2] Hervé Jacquet, I. I. Piatetski-Shapiro et Joseph A. Shalika. Rankin-Selberg convolutions. *Amercian Journal of Mathematics*, **105**:367–464, 1983.

[JS1] Hervé Jacquet et Joseph A. Shalika. A non-vanishing theorem for zeta functions on GL_n. *Inventiones Math.*, **38**:1–16, 1976.

[JS2] Hervé Jacquet et Joseph A. Shalika. On Euler products and the classification of automorphic representations I. *American Journal of Mathematics*, **103**:499–558, 1981.

[JS3] Hervé Jacquet et Joseph A. Shalika. On Euler products and the classification of automorphic representations II. *American Journal of Mathematics*, **103**:777–815, 1981.

[JS4] Hervé Jacquet et Joseph A. Shalika. Rankin-Selberg convolutions: archimedean theory. Dans *Festscrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday*, édité par Stephen Gelbart, Roger Howe et P. Sarnak, *Israel Mathematical Conference Proceedings*, volume 1, pages 125–207. The Weizmann science press of Israel, 1990.

[Sha] J. A. Shalika. The multiplicity one theorem for GL_n. *Annals of Mathematics*, **100**:171–193, 1974.

[Shi] T. Shintani. On an explicit formula for class-1 "Whittaker functions" on GL_n over p-adic fields. *Proceedinds of Japan Academy*, **52**:180–182, 1976.

[Vog] David A. Vogan. *Representations of Real Reductive Lie Groups*, *Progress in Mathematics*, volume 15. Birkhäuser, 1981.

[Zuc] G. Zuckerman. Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie algebras. *Annals of Mathematics*, **106**:295–308, 1977.