UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Paris 7

Présentée par **Mariane Riss**

Sujet

Relevés d'isotypies et descentes de Shintani
-
Le groupe symplectique de dimension 4 sur $\mathbf{F}_q$, q impair

Soutenue le **18 décembre 2001** *devant le jury composé de :*

C. Bonnafé (CNRS, Besançon)	directeur de thèse
M. Cabanes (CNRS, Paris 7)	
F. Digne (Université de Picardie, Amiens)	
M. Geck (Institut Desargues, Lyon 1)	rapporteur
P. Gérardin (Paris 7)	
G. Hiß (RWTH Aachen)	rapporteur

Lifting of isotypies and Shintani descents -
The symplectic group of dimension 4 over F_q, q odd

Abstract : This work deals with two topics of finite group theory : the representation theory (isotypy, Clifford theory) and the theory of reductive groups over a finite field (algebraic group, Deligne-Lusztig's character, Shintani descent). Both their use and development enabled me to prove Broué's conjecture on isotypies for the case of principal blocs of extensions of symplectic groups of dimension 4 over the finite field F_q, q odd - extensions given by an automorphism σ induced by an automorphism of F_q. The main idea is to build an isotypy in the group $\mathrm{Sp}(4, q)$ and to lift it to the group $\mathrm{Sp}(4, q)\langle\sigma\rangle$. In order to do that, I give convenient version of a theorem of lifting isotypies. Then a deep study of the group $\mathrm{Sp}(4, q)\langle\sigma\rangle$ reduces the number of cases that to be considered to two. Both these crucial cases need explicit computations, in particular extensions of characters. The Shintani theory points out extensions for each slice $\mathrm{Sp}(4, q)\sigma^d$, I prove that they glue together and form a unique character of $\mathrm{Sp}(4, q)\langle\sigma\rangle$. Among the computations, I introduce a Shintani descent for a non-connected group, which is a new result.

The family of groups taken into account is deverse and complicated enough to raise interesting new problems. In particular, the results and methods of this thesis yield a new study of the relations between Shintani descent and modular characters.

Actually, Broué's conjecture for isotypies reduces to verifying it for every extension of a simple group by a group of automorphism. Settling the case of $\mathrm{Sp}(4, q)\langle\sigma\rangle$ is one step, which brings great expectations that one, with similar methods, might solve the case of the symplectic group of any dimension.

Keywords : finite group, representation theory, reductive group over a finite field, Broué's conjecture, lifting isotypies, Shintani descents, symplectic group, gluing together extensions.

Résumé : Ce travail repose sur deux domaines de la théorie des groupes finis : la théorie des représentations (isotypie, théorie de Clifford) et la théorie des groupes réductifs sur un corps fini (groupe algébrique, caractère de Deligne-Lusztig, descente de Shintani). Leur utilisation et développement m'ont permis de résoudre la conjecture de Broué sur les isotypies pour le cas des blocs principaux des extensions des groupes symplectiques de dimension 4 sur le corps fini, F_q, q impair - extensions données par un automorphisme σ induit par un automorphisme de F_q. L'idée principale est de construire une isotypie dans le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(4, q)$ et de la relever dans l'extension $\mathrm{Sp}(4, q)\langle\sigma\rangle$. Pour cela, je développe une version efficace d'un théorème de relèvement d'isotypies. Puis une étude approfondie du groupe $\mathrm{Sp}(4, q)\langle\sigma\rangle$ permet de réduire les cas à étudier au nombre de deux. Pour ces deux cas cruciaux, il faut faire des calculs explicites, entre autre d'extensions de caractères. La théorie des descentes de Shintani fournit alors des extensions privilégiées pour chaque tranche $\mathrm{Sp}(4, q)\sigma^d$, dont je montre qu'elles se recollent pour ne former qu'un seul caractère de $\mathrm{Sp}(4, q)\langle\sigma\rangle$. Dans les calculs, j'introduis aussi une descente de Shintani pour un groupe non-connexe, ce qui est nouveau.

La famille de groupes considérée est assez riche et complexe pour soulever des problèmes intéressants. Les résultats et méthodes de cette thèse développent en particulier une nouvelle étude des rapports entre descentes de Shintani et caractères modulaires.

A l'heure actuelle, la conjecture de Broué au niveau des isotypies sera entièrement prouvée si elle est démontrée pour toutes extensions d'un groupe simple par un groupe d'automorphisme. Sa preuve pour $\mathrm{Sp}(4, q)\langle\sigma\rangle$ va dans ce sens et laisse espérer que les groupes symplectiques de dimension quelconque peuvent être traités par des méthodes similaires à celles de ce travail.

Mots-clés : groupe fini, théorie des représentations, groupes réductifs sur un corps fini, conjecture de Broué, relevé d'isotypies, descentes de Shintani, groupe symplectique, recollement d'extensions.

Université Paris 7 - Denis Diderot, UFR de Mathématiques - Case 7012,

2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

Remerciements

Je remercie vivement Cédric Bonnafé, sans qui cette thèse ne serait à l'heure actuelle toujours pas déposée. Par ailleurs, il a relu ma thèse avec beaucoup d'attention et, par ses remarques et ses conseils, a grandement contribué à améliorer la rédaction de ce travail ; je lui en suis très reconnaissante.

Je remercie également Paul Fong de m'avoir proposé ce sujet de thèse et des nombreuses discussions qui m'ont beaucoup appris lors de mon séjour à Chicago.

Les rapports de Meinolf Geck et Gerhard Hiß me sont d'un immense soutien non seulement en mathématiques mais aussi sur un plan plus personnel. Pour avoir accepté de lire ces pages et faire partie de mon jury, je les remercie de tout cœur.

Je tiens à remercier sincèrement Paul Gérardin, Harold Rosenberg, François Digne et Michèle Wasse, qui, chacun à leur façon, m'ont soutenue l'année passée.

Table des matières

Introduction

Ce travail repose sur deux domaines de la théorie des groupes finis : la théorie des blocs et la théorie des descentes de Shintani. Leur utilisation et développement m'a permis de résoudre la conjecture de Broué sur les isotypies, pour le cas des blocs principaux des extensions du groupe symplectique de dimension 4 sur un corps fini. Il m'a fallu, au passage, donner un nouvel énoncé d'un théorème de relèvement d'isotypies et résoudre un problème de recollement d'extensions (problème intéressant en tant que tel et lié au descentes de Shintani).

Une des perspectives de recherche actuelles en théorie des groupes finis consiste à comprendre la structure d'un bloc ; en particulier, à comparer deux blocs de deux groupes distincts. La notion de bloc est apparue lors de l'étude de la théorie des représentations modulaires avec R. Brauer [Bra]. Il y a une quinzaine d'années, M. Broué a proposé de nouveaux concepts autour d'un bloc [Br2], qui ont rapidement mené à la définition actuelle d'isotypie [Br3]. Une isotypie est le reflet, au niveau de la théorie des caractères, d'existence d'équivalences splendides entre blocs.

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique nulle et de corps résiduel k de caractéristique $\ell > 0$. Soit G un groupe fini. On suppose K assez gros pour G, *i.e.*, K contient les racines $|G|^{\text{èmes}}$ de l'unité. Un bloc est de la forme $\mathcal{O}Ge$, où e est un idempotent central primitif de $\mathcal{O}G$. Soit A un ℓ-bloc de $\mathcal{O}G$ qui a un groupe de défaut abélien D. Soit B le correspondant de Brauer de A, c'est un ℓ-bloc de l'algèbre du normalisateur de D dans G. En 1990, M. Broué a proposé la conjecture suivante [Br2].

Conjecture dite du défaut abélien : (Broué)

Les catégories dérivées $D^b(mod - A)$ et $D^b(mod - B)$ des complexes bornés de modules de type fini pour A et B sont splendidement équivalentes ([Ri2] définition).

Cette conjecture a de nombreuses implications. Par exemple, les ℓ-blocs ont des centres isomorphes, il y a conservation du nombre de caractères irréductibles ordinaires et modulaires, les ℓ-blocs ont les même invariants de similitude de la matrice de Cartan et les même invariants locaux élémentaires [Br2], etc.

Les cas particuliers dans lesquels cette conjecture est démontrée sont multiples. Par exemple, elle a été prouvée lorsque le groupe de défaut D est cyclique ([Ri1], [Li], [Ro2] et [Ro3]), pour tous les groupes ℓ-résolubles ([Da2] et [HaLi]) et pour le ℓ-bloc principal du groupe des points fixes d'un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{F}_q$ avec ℓ qui divise $q-1$ et ne divise pas le cardinal du groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ [Pu].

Cette conjecture implique une conjecture ultérieure qui est plus faible mais garde de nombreuses conséquences.

Conjecture de Broué sur les isotypies :

Il existe une isotypie entre A et B (toujours sous condition que D soit abélien).

Les groupes de défaut "mesurent" la non simplicité d'un bloc (vu sur k). Par exemple, si le bloc est simple, son groupe de défaut est trivial. Le groupe de défaut du ℓ-bloc principal de G est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G. En quelques sorte, le ℓ-bloc principal de G est le bloc le plus éloigné des algèbres simples, par conséquent, le bloc dont la structure est à priori la moins connue. C'est une des raisons pour lesquelles il est particulièrement étudié.

La restriction de la conjecture de Broué sur les isotypies au cas des blocs principaux est celle qui nous occupera dans cette thèse. Elle prend la forme suivante :

Conjecture de Broué sur les isotypies entre blocs principaux :

Soient G un groupe fini et ℓ un entier premier. Soit S un ℓ-sous-groupe de Sylow de G. Si S est abélien, il existe une isotypie entre le ℓ-bloc principal de $\mathrm{N}_G(S)$ et celui de G ([Br1] conjecture 6.1).

Cette conjecture est directement impliquée par la conjecture du défaut abélien. Néanmoins, elle est intéressante en elle-même. En effet, elle est démontrée dans de plus nombreux cas, elle garde des conséquences importantes, notamment la conservation du nombre des caractères irréductibles ordinaires et modulaires. Enfin sa résolution donne des indications pour résoudre la conjecture de défaut abélien (par exemple, les travaux de P. Fong et M. Harris faits dans [FoHa2] sont à l'origine d'un résultat important dû à A. Marcus sur les équivalences entre blocs. [Ma]).

Cette dernière conjecture est vraie, par exemple, dans les groupes finis de type de Lie [BrMaMi] [BrMi] (et pas seulement si ℓ divise $q-1$) et pour tous les groupes finis lorsque $\ell = 2$ [FoHa2]. Un problème actuel est de la démontrer pour des extensions des groupes finis de type de Lie. Cela vient d'un résultat suivant de P. Fong et M. Harris ([FoHa2] proposition 5.C et théorème 5.E), qui montre qu'il suffit de montrer que toute extension d'un groupe simple par un groupe d'automorphismes vérifie la conjecture de Broué sur les isotypies pour montrer que tout groupe fini vérifie cette même conjecture.

Les extensions par un automorphisme de Frobenius sont les plus compliquées et c'est pour cela qu'on s'y attache. Dans ce sens, P. Fong a fait les premiers pas : une notion antérieure et plus faible à celle d'isotypie est celle d'isométrie parfaite, la conjecture de Broué a une version à ce niveau (remplacer isotypie par isométrie parfaite). P. Fong a montré que la conjecture au niveau des isométries parfaites est vraie pour les ℓ-blocs principaux des extensions de $\mathrm{SL}(2, q)$, où q est une puissance d'un nombre premier impair et ℓ divise q [Fo].

Sur ses conseils, je me suis intéressée aux extensions des groupes $\mathrm{Sp}(4, q)$ - les groupes symplectiques de dimension 4 définis sur un corps fini $\mathbf{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre impair - extensions données par un endomorphisme de Frobenius. Je montre que la conjecture de Broué au niveau des isotypies est vérifiée pour les ℓ-blocs principaux de ces extensions de $\mathrm{Sp}(4, q)$.

Pour ce genre de problème, lié à des extensions de groupes, on dispose d'un théorème de relèvement d'isotypies dû à P. Fong et M. Harris. Une isotypie était, à l'origine, vue comme une famille d'isométries parfaites vérifiant certaines propriétés. P. Fong et M. Harris ont démontré un théorème de relèvement d'isométries parfaites [FoHa2]. Ils en ont tiré un théorème de relèvement d'isotypies en prenant comme hypothèses, pour chaque isométrie parfaite de l'isotypie, celles du théorème de relèvement d'isométries parfaites. Cela multiplie de manière considérable les hypothèses à vérifier et rend leur théorème de relèvement d'isotypies de ce fait peu utilisable.

La notion d'isotypie est en fait indépendante de celle d'isométrie parfaite. C'est en tenant compte de cette remarque que je propose une autre version du théorème de relèvement d'isotypies, qui a l'avantage de reposer sur des hypothèses plus faibles. J'utilise alors cette nouvelle version du théorème pour $\mathrm{Sp}(4, q)$.

Pour cela, je montre que pour $\ell \neq 2$ et pour tout entier n premier à ℓ, toute isotypie entre le ℓ-bloc principal de $\mathrm{Sp}(4, q)$ et celui du normalisateur d'un de ses ℓ-sous groupes de Sylow, se relève dans les ℓ-blocs principaux des extensions considérées de degré n et qu'on a ainsi la conjecture pour le groupe étendu.

Pour vérifier les hypothèses de ce théorème, il est apparu judicieux de se tourner vers la théorie des descentes de Shintani.

La théorie des descentes de Shintani est une descente des corps de base pour les caractères d'un groupe fini de type de Lie.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbf{F}_{q_0}$ (on notera F_0 l'endomorphisme de Frobenius qui définit cette structure rationnelle). On le suppose déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$. Soit n un entier, on pose $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0^n$. Il y a une bijection, notée $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$, de l'ensemble des F_0-classes de conjugaison de $\mathrm{G} = \mathbf{G}^{\mathrm{F}}$ dans l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathbf{G}^{\mathrm{F}_0}$. La descente de Shintani $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$ est une isométrie de l'espace des fonction de F_0-classe de G sur l'espace des fonctions centrales de G^{σ}. Elle est ainsi définie : $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(f) = f \circ \mathrm{N}_{\mathrm{F}_0/\mathrm{F}}$.

On note σ la restriction de F_0 à G. Soit $\widetilde{\chi}$ une caractère de $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$, il définit la fonction de F_0-classe sur G : $\chi \ : \ g \longmapsto \widetilde{\chi}(g\sigma)$. On pose $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\widetilde{\chi}) = \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\chi)$, on a alors $\widetilde{\chi}(g\sigma) = \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\widetilde{\chi})\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(g)$.

Soit χ un caractère de G qui est σ-stable. Dans certains cas, la théorie des descentes de Shintani met en valeur une extension particulière de χ à $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$, que l'on notera $\mathrm{E}_1(\chi)$, telle que $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}_1(\chi))$ est donnée par une formule générique (par exemple dans $\mathrm{GL}(n,q)$ c'est un caractère et dans $\mathrm{Sp}(4,q_0)$ c'est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{Q}$ de caractères irréductibles). Dans ce cadre, on a pour tout diviseur d de n, une extension générique $\mathrm{E}_d(\chi)$ de χ à $\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle$, qu'on appelle extension donnée par la descente de Shintani à la tranche $\mathrm{G}\sigma^d$. Nous connaissons ainsi théoriquement la valeur d'une extension d'un caractère de G à $\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle$ sur la tranche $\mathrm{G}\sigma^d$. Un problème actuel est que l'extension $\mathrm{E}_d(\chi)$, donnée par la descente de Shintani à la tranche $\mathrm{G}\sigma^d$, dépend de d. On ne connaît à priori pas $\mathrm{E}_d(\chi)(g\sigma^i)$ pour $i \neq d$. La question suivante se pose alors naturellement.

Question : *L'égalité*

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}^{\mathrm{G}\langle\sigma^{d'}\rangle}\mathrm{E}_{d'}(\chi) = \mathrm{E}_d(\chi)$$

est-elle vraie pour tout diviseur d de n et tout diviseur d' de d ?

C'est un problème de recollement qui a été résolu dans $\mathrm{GL}(n,q)$ par C. Bonnafé [Bon] et pour certains caractères de la forme $\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}(\theta)$ par F. Digne [Di2]. Je résous ce problème pour les caractères unipotents de la série principale de $\mathrm{Sp}(4,q)$, en démontrant des résultats plus généraux sur les caractères fantômes des groupes finis de type de Lie. En effet, soit $\mathrm{R}_{\phi,d}$ un caractère fantôme de $\mathbf{G}^{\mathrm{F}_0^d}$ associé au caractère irréductible ϕ du groupe de Weyl de $\mathbf{G}$, je définis une extension $\widetilde{\mathrm{R}}_{\phi}$ de $\mathrm{R}_{\phi,1}$ à $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$

qui vérifie

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\widetilde{\mathrm{R}}_\phi = \mathrm{Sh}^{-1}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\mathrm{R}_{\phi,d}).$$

La décomposition des caractères fantômes en combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbf{Q}$) de caractères unipotents permet d'obtenir le résultat souhaité sur le recollement des extensions données par Shintani à chaque tranche, des caractères unipotents de la série principale de $\mathrm{Sp}(4, q)$.

Il est apparu un phénomène encore étrange. On peut construire une "descente de Shintani" au niveau du normalisateur du ℓ-sous-groupe de Sylow (qui n'est pas connexe). Cette descente vérifie les propriétés classiques des descentes de Shintani (sur les ordres des centralisateurs, sur les descentes dans le tore ...). La construction se fait à la main et repose directement sur les valeurs numériques des caractères, de plus elle fait intervenir des coefficients non rationnels.P. Fong avait déjà fait une telle construction dans $\mathrm{SL}_2(q)$ [Fo], mais il considérait le cas où ℓ divise q, cas pour lequel le normalisateur du ℓ-sous-groupe de Sylow est connexe.

Mon travail s'appuie donc sur différents domaines de la théorie des groupes finis. Les isotypies sont liées à la théorie des caractères ordinaires et modulaires. Le théorème de relèvement d'isotypies emprunte à la théorie des extensions de caractères comme la théorie de Clifford ([Is] chapitre 6). Enfin les problèmes de recollement dans la théorie des descentes de Shintani se résolvent principalement à l'aide de propriétés des groupes obtenus par produit en couronne et de la théorie de Deligne-Lusztig dans les groupes non connexes - ces outils sont spécifiques aux groupes finis de type de Lie.

Pour finir, nous précisons un peu plus le travail effectué chapitre par chapitre.

CHAPITRE 1

Ce chapitre est consacré à la notion de blocs et d'isotypies, on y trouve **un théorème de relèvement** d'isotypies (**Théorème** 1.29).

Dans un premier temps, nous rappelons les définitions habituelles d'idempotents, de blocs, blocs couvrants et d'isotypies. Puis est exposé le théorème de relèvement d'isotypie. Enfin, on rappelle que ce problème de relèvement est déjà résolu pour deux cas particuliers : quand les ℓ-blocs principaux du groupe considéré et de son extension sont isomorphes (BI) [FoHa2] ou quand le ℓ-sous-groupe de Sylow est cyclique (SC) [Ma].

Le problème de relèvement :

Soient G un groupe fini et k un corps algébriquement clos de caractéristique ℓ qui divise le cardinal de G. Cela définit l'algèbre $\mathcal{O}G$ et ses ℓ-blocs ainsi que, à conjugaison près, un ℓ-sous groupe de Sylow S et son normalisateur, $\mathrm{N}_G(S)$, dans G. On suppose que S est abélien. On suppose de plus qu'il existe une isotypie I entre le ℓ-bloc principal de $\mathrm{N}_G(S)$ et celui de G. Enfin, on se donne un groupe $\widetilde{G}$ tel que G soit distingué dans $\widetilde{G}$. La question est de savoir sous quelles conditions sur G, ℓ, I et $\widetilde{G}$, l'isotypie I, de système local $\{I_P\}_{P \subseteq S}$, peut se relever en une isotypie $\widetilde{I}$ entre le ℓ-bloc principal de $\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(S)$ et celui de $\widetilde{G}$. On appelle configuration la donnée du quadruplet $(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G})$.

Pour étendre l'isotypie, l'idée est de considérer, pour chaque sous-groupe P de S, les bi-caractères formés par chaque couple de caractères mis en correspondance par l'isotypie I. On considère les groupes diagonaux de $\mathrm{N}_{\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(P)}(S) \times \mathrm{C}_{\widetilde{G}}(P)$ qui stabilisent ces bi-caractères puis on étend ces bi-caractères à ces groupes. Cela permet aussi de former, pour chaque sous-groupe de S des bi-caractères généralisés, notés $E(I_P)$.

Les conditions demandées par ma version du théorème de relèvement sont de deux sortes. Les premières conditions sont des propriétés d'équivariance de l'isotypie et des extensions de caractères. Les deux dernières portent sur les bi-caractères généralisés $E(I_P)$. Chaque $E(I_P)$ doit séparer les éléments ℓ-réguliers et ℓ-singuliers des groupes $\mathrm{N}_{\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(P)}(S)$ et $\mathrm{C}_{\widetilde{G}}(P)$. C'est, en fait, le reflet des isométries parfaites cachées sous la notion d'isotypie. Enfin les bi-caractères généralisés $E(I_P)$ doivent se "recoller".

Ces conditions sont dites de compatibilité et une configuration qui les vérifie est dite compatible.

CHAPITRE 2

Le cadre de ce chapitre est les groupes finis de type de Lie. On s'occupe des **descentes de Shintani** et du **recollement des extensions** données par les descentes de Shintani à chaque tranche. La motivation principale de ce chapitre est de résoudre, dans le chapitre suivant, le problème de recollement dans le cas des caractères unipotents de la série principale de $\mathrm{Sp}(4, q)$. Nous y exposons des résultats généraux qui permettront de le faire.

Soit p un nombre premier. On désigne par $\overline{\mathbf{F}}_p$ une clôture algébrique du corps à p éléments. Soient q_0 une puissance de p et n un entier. On pose $q = q_0^n$. Pour un tel q, $\mathbf{F}_q$ désigne le sous-corps à q éléments de $\overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur $\mathbf{F}_{q_0}$ (on notera F_0 l'endomorphisme de Frobenius qui définit cette structure rationnelle). On le suppose déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$. On note G_d le groupe des points fixes de $\mathbf{G}$ sous F_0^d. La restriction de F_0 à $\mathrm{G} = \mathrm{G}_n$ est notée σ.

Le problème de recollement :

Il existe un ensemble, qu'on note ici $\mathcal{S}(\mathrm{W})$, contenant $\mathrm{Irr}(\mathrm{W})$, tel qu'il existe une bijection entre $\mathcal{S}(\mathrm{W})$ et $\mathrm{Uch}(\mathrm{G}_d)$ qui est indépendante de d. On la note

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S}(\mathrm{W}) & \longrightarrow & \mathrm{Uch}(\mathrm{G}_d) \\ \phi & \longmapsto & \mathrm{U}_{\phi,d} \end{array}$$

L'indice d rappelle juste que le caractère est dans G_d. Pour chaque élément ψ de $\mathcal{S}(\mathrm{W})$, il existe une racine de l'unité notée ω_ψ, telle que pour tout caractère irréductible ϕ de W, il existe une extension bien choisie de $\mathrm{U}_\phi = \mathrm{U}_{\phi,n}$ à $\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle$, notée $\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\phi)$ - extension de U_ϕ donnée par la descente de Shintani à la tranche $\mathrm{G}\sigma^d$ - pour laquelle nous avons la formule suivante [DiMi1] :

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\phi)) = \sum_{\psi\in\mathcal{S}(\mathrm{W})} \langle \mathrm{R}_{\phi,d}, \mathrm{U}_{\psi,d}\rangle\ \omega_\psi^{n/d}\mathrm{U}_{\psi,d},$$

où $\mathrm{R}_{\phi,d}$ est le caractère fantôme de G_d associé au caractère irréductible ϕ de W.

La question est toujours de savoir si l'égalité suivante est vraie pour tout diviseur d' de d.

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma^{d'}\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\mathrm{E}_{d'}(\chi) = \mathrm{E}_d(\chi).$$

L'idée est de s'occuper dans un premier temps du même problème au niveau des caractères fantômes. Un caractère fantôme n'est pas un vrai caractère, il est de la forme

$$\mathrm{R}_{\phi,d} = \frac{1}{|\mathrm{W}|}\sum_{w\in\mathrm{W}} \phi(w)\mathrm{R}^{\mathrm{G}_d}_{\mathrm{T}_{w,d}}(1).$$

On définit une "extension" de $\mathrm{R}_{\phi,n}$, que l'on note $\widetilde{\mathrm{R}}_\phi$. C'est une certaine fonction centrale qui "étend" $\mathrm{R}_{\phi,n}$. Cette extension vérifie pour tout d

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\widetilde{\mathrm{R}}_\phi) = \mathrm{R}_{\phi,d}.$$

En particulier, ce résultat donne le recollement des extensions données par la descente de Shintani à chaque tranche du caractère trivial et de celui de Steinberg pour tout groupe fini de type de Lie.

Pour faire ce recollement, suivant la démarche de F. Digne [Di2], nous nous plaçons dans le cadre des groupes non connexes obtenus par produit en couronne. La descente de Shintani de F à F_0 peut être alors interprétée comme une descente de Shintani entre deux structures rationnelles sur un même corps. Un outil principal est la théorie de l'induction de Deligne-Lusztig dans les groupes non connexes [DiMi3]. Un isomorphisme entre G et un tel groupe, puis un second isomorphisme entre l'extension de G et un autre tel groupe permettent de traduire les données de G, de travailler dans les groupes non connexes et enfin de transposer les résultats obtenus dans l'extension de G.

Des définitions et des résultats classiques de la théorie des descentes de Shintani et de l'induction de Deligne-Lusztig dans les groupes non connexes sont rappelés. Certains résultats sur la théorie de Shintani ne seront utilisés que plus tard mais sont quand même rappelés ici.

CHAPITRE 3

Ce chapitre s'occupe du **groupe symplectique fini de dimension 4 sur $\mathbf{F}_q$, q impair**. Les différentes configurations pour les isotypies sont explicitées. On y démontre deux théorèmes qui montrent le relèvement de toutes les isotypies dans $\mathrm{Sp}(4,q)$ à condition que les deux configurations, notées S1 et Sm, vérifient certaines hypothèses. Ces deux dernières configurations seront le sujet des deux derniers chapitres. Ce travail permet finalement de montrer que la conjecture de Broué est vérifiée dans les extensions de $\mathrm{Sp}(4,q)$. Enfin on résout, à l'aide de la théorie développée dans le chapitre précédent, le problème de recollement des extensions des caractères unipotents de la série principale de $\mathrm{Sp}(4,q)$. Ce dernier résultat sera la clef de la résolution de la compatibilité de la configuration de type Sm.

Le cadre de travail :

On note $\mathbf{G}$ le groupe algébrique symplectique de dimension 4 défini sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ et F_0 l'endomorphisme de Frobenius de $\mathbf{G}$: $F_0 : (a_{ij}) \mapsto (a_{ij}^{q_0})$. On pose $F = F_0^n$ et $G = \mathrm{Sp}(4,q)$ le groupe des points fixes de $\mathbf{G}$ par F. On note σ la restriction de F_0 à G. C'est un automorphisme de G. On forme alors $G\langle\sigma\rangle$, qui est une extension de degré n de G. Soient ℓ un entier premier et S un ℓ-sous-groupe de Sylow abélien de $G\langle\sigma\rangle$. On montre

Théorème 3.7

Il existe une isotypie entre le ℓ-bloc principal de $N_{G\langle\sigma\rangle}(S)$ et celui de $G\langle\sigma\rangle$.

En fait, ce théorème se démontre en prouvant qu'il existe une isotypie I entre le ℓ-bloc principal de $N_G(S)$ et celui de G se relève en une isotypie $\widetilde{I}$ entre le ℓ-bloc principal de $N_{G\langle\sigma\rangle}(S)$ et celui de $G\langle\sigma\rangle$. Prouver cela est suffisant car si $G\langle\sigma\rangle$ admet un ℓ-sous-groupe de Sylow abélien, alors ce ℓ-sous-groupe est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G.

Le groupe G étant donné par q_0^n et le groupe $G\langle\sigma\rangle$ étant donné par n, les différentes données à considérer dépendent de q_0, n, ℓ et I. On appelle encore, dans ce groupe, configuration le quadruplet $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ et le triplet $(q_0,\ n,\ \ell)$ d'une configuration est appelé préconfiguration.

On dira qu'une configuration est fortement compatible si elle est compatible et si de plus les extensions choisies (pour la compatibilité) vérifient une certaine condition d'équivariance.

Certaines préconfigurations ont des types particuliers : celui dit de blocs isomorphes (BI) et celui dit de Sylow cyclique (SC). Puis apparaît le type où ℓ ne divise pas $|G^\sigma|$ et enfin les deux types appelés S1 et Sm (pour lesquels ℓ divise $|G^\sigma|$).

La compatibilité des configurations de types BI et SC a déjà été résolue de manière générale ([FoHa2] et [Ma]). On voit qu'une configuration de type BI est même fortement compatible.

Les théorèmes de compatibilité :

Le théorème 3.7 découle du théorème suivant.

Théorème 3.8

Pour toute préconfiguration $(q_0,\ n,\ \ell)$*, il existe une isotypie* I *entre le* ℓ*-bloc principal de* $N_G(S)$ *et celui de* G*, telle que la configuration* $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ *soit compatible.*

Ce théorème est une conséquence des théorèmes 3.12, 3.13 et 3.14. Le théorème 3.12 sera montré aux chapitres 5 et 6.

Théorème 3.12

Soit $(q_0,\ n,\ \ell)$ *une préconfiguration de type S1 ou Sm. Alors, il existe une isotypie* I *telle que* $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ *soit une configuration fortement compatible. .*

Ce théorème est démontré dans le chapitre 5 pour la configuration de type S1 et dans le chapitre 6 pour la configuration de type Sm.

Théorème 3.13

Supposons que ℓ divise $|\mathrm{G}_1|$, que ℓ divise $q+1$ ou $q-1$ et que le théorème 3.12 soit vérifié. Alors pour toute préconfiguration $(q_0,\ n,\ \ell)$, il existe une isotypie I *telle que $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ soit une configuration fortement compatible.*

On montre qu'on peut se ramener à une configuration de type BI.

Théorème 3.14

Supposons que le théorème 3.12 soit démontré. Alors pour toute préconfiguration $(q_0,\ n,\ \ell)$, il existe une isotypie I *telle que $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ soit une configuration compatible.*

Ce théorème résulte principalement de remarques de divisibilité et du fait qu'on sait que certaines isotypies existent et se relèvent. On montre qu'on peut se ramener à des groupes où il n'existe pas de ℓ-éléments tels qu'ils interviennent dans le théorème de relèvement, les hypothèses du théorème sont alors trivialement vérifiées.

Seules les extensions par un automorphisme de corps nous intéressent, car il n'y a pas d'automorphisme de diagramme dans le groupe de Weyl de **G**, qui est de type C_2, en caractéristique différente de 2.

<u>Le théorème de recollement :</u>

Théorème 3.18

Pour chaque caractère θ de IrrW *et pour tout entier d, $1 \leq d < n$, on a*

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_\theta) = \mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\theta).$$

CHAPITRE 4

Dans ce chapitre, on explicite les isotypies de $\mathrm{Sp}(4,q)$ pour $\ell|q-1$, $\ell|q+1$ et $\ell|q^2+1$.

La construction d'une isotypie entre les ℓ-blocs principaux de $\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$ et G a nécessité entre autres :

• La connaissance de la structure des normalisateurs de certains tores de G. De manière plus générale, j'ai explicité la structure des normalisateurs de certains tores dans un groupe symplectique de dimension quelconque. Ce travail est exposé en annexe.

• Le calcul de la table des caractères de $\mathrm{N_G(S)}$, ainsi que celles de certains sous-groupes. Les tables de caractères de $\mathrm{Sp}(4, q)$ et de certains de ses sous-groupes sont connues.

• Il faut, bien sûr, finalement, vérifier les hypothèses que demandent une isotypie (équivariance, compatibilité à la fusion et le cas trivial du sous-groupe de Sylow). On donne alors quelques méthodes pour le faire.

• Les isotypies sont liées à la théorie des caractères modulaires et des matrices de décomposition générali-sée. Dans mon cas interviennent les caractères modulaires irréductibles des ℓ-blocs principaux de $\mathrm{U}(2, q)$, $\mathrm{GL}(2, q)$ et $\mathrm{SL}(2, q)$ ainsi que ceux des normalisateurs des ℓ-sous-groupes de Sylow respectifs. On en déduit les matrices de décompositions généralisée. Je les ai explicitées en annexe de ce chapitre.

CHAPITRES 5 ET 6

Ces chapitres montrent que **les configurations de type S1 et Sm** vérifient le théorème de relèvement d'isotypies.

Pour ces deux cas, on travaille directement sur les isotypies entre les ℓ-blocs principaux de $\mathrm{N_G(S)}$ et G. On montre que les hypothèses du théorème de relèvement sont vérifiées. L'idée de la démonstration repose sur le fait que ℓ divise le cardinal de G^σ.

La première hypothèse de compatibilité se vérifie directement sur les isotypies construites. Pour la seconde la connaissance des extensions des caractères irréductibles des ℓ-blocs principaux de G et $\mathrm{N_G(S)}$ est essentielle.

C'est ici qu'intervient la théorie des descentes de Shintani dans le groupe G. Il a fallu surmonter des difficultés dans l'utilisation de cette théorie :

• $\mathrm{Sh_{F/F_0}}(\chi)$ et $\mathrm{N_{F/F_0}}(g\sigma)$ sont rarement connus. Ce problème est contourné grâce à la connaissance des descentes de Shintani des caractères unipotents ([DiMi1] théorème III 2.3 et [Ca]) et de certains caractères de la forme $\mathrm{R_T^G}(\theta)$ [Di2].

• Pour la configuration de type Sm, le degré de l'extension est plus grande que 2, il a donc fallut utiliser les recollement des extensions données par Shintani à chaque tranches. Pour les caractères unipotents de la série principale, ce recollement a été démontré dans le chapitre 3. Pour certains caractères de Deligne-Lusztig, cela a été fait par F. Digne [Di2].

• Cette théorie n'est pas applicable à $\mathrm{N_G(S)}$ car ce groupe n'est pas connexe. J'ai voulu pourtant construire une "descente de Shintani" dans $\mathrm{N_G(S)}$ équivalente à la descente de Shintani dans G. Or, la descente de Shintani fait intervenir le groupe des points fixes de G sous $\mathrm{F_0}$. Il a donc fallu considérer le groupe des points fixes de $\mathrm{N_G(S)}$ sous $\mathrm{F_0}$. A cette étape, on s'aperçoit qu'il faut faire un choix judicieux du ℓ-sous-groupe de Sylow, on montre qu'on peut le choisir de sorte à ce qu'il soit σ-stable. et que le groupe des points fixes de $\mathrm{N_G(S)}$ sous σ est alors le normalisateur d'un ℓ-sous-groupe de Sylow de G^σ.

Ainsi, on peut écrire la valeur des extensions des caractères de $\mathrm{N_G(S)}$ à $\mathrm{N_{\widetilde{G}}(S)}$ en fonction de valeurs de combinaison linéaires de caractères de $\mathrm{N_G(S)}^\sigma$.

Cette façon de donner les valeurs des extensions permet de vérifier facilement les dernières hypothèses du théorème portant sur les ℓ-éléments et les ℓ'-éléments. En effet, on peut alors écrire les valeurs de l'isotypie I à l'aide d'une isotypie I_c entre le ℓ-bloc principal de $\mathrm{N_G(S)}^\sigma$ et celui de G^σ, et d'un bi-caractère. Pour vérifier les dernières hypothèses du théorème, il reste alors à considérer ce bi-caractère qui s'avère être assez simple.

Chapitre 1

Blocs, isotypie et relèvement

Ce chapitre commence par un rappel des définitions de bloc, de bloc couvrant, d'application de décomposition généralisée et d'isotypie. Dans le paragraphe 1.3.2, une version améliorée du théorème de relèvement d'isotypies de P. Fong et M. Harris [FoHa2] est énoncée et démontrée.

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal $\mathcal{L}$, de corps des fractions K de caractéristique nulle et de corps résiduel k de caractéristique $\ell > 0$. Soit G un groupe fini. On suppose K assez gros pour G, *i.e.*, K contient les racines $|G|^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Un caractère irréductible de G est le caractère d'un KG-module irréductible V. Le caractère irréductible est dit linéaire si V est de dimension 1, c'est alors un morphisme de groupe $G \to \mathcal{O}^*$. Un caractère projectif indécomposable de G est le caractère d'un KG-module $W \otimes_{\mathcal{O}} K$, où W est un $\mathcal{O}G$-module projectif indécomposable.

On identifie les fonctions centrales de G vers K avec les formes linéaires de KG vers K.

1.1 Blocs

1.1.1 Idempotents

Pour cette section, le lecteur pourra se reporter au chapitre 1, paragraphes 3 et 4 de [Th].

Définition 1.1

Un élément e de $\mathcal{O}G$ est appelé idempotent si $e^2 = e$. Il est dit central s'il appartient au centre de $\mathcal{O}G$. Enfin un idempotent central e est dit primitif si, pour e_1 et e_2 des idempotents centraux de $\mathcal{O}G$, $e = e_1 + e_2$ implique $e = e_1$ ou $e = e_2$.

Dans $\mathcal{O}G$, l'élément 1 se décompose de manière unique en une somme d'idempotents centraux primitifs : $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

Soit e un idempotent central primitif de $\mathcal{O}G$. L'algèbre $\mathcal{O}Ge$ a pour élément unité e. L'application

$$\begin{array}{rccc} \pi_e : & \mathcal{O}G & \rightarrow & \mathcal{O}Ge \\ & x & \mapsto & xe \end{array}$$

est un morphisme surjectif d'algèbres. Les algèbres $\mathcal{O}Ge$ sont indécomposables (non produit d'algèbres non triviales).

La famille des morphismes π_{e_i}, où $1 \leq i \leq n$, définit l'isomorphisme d'algèbres suivant :

$$\mathcal{O}G \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{O}Ge_i.$$

L'action d'un idempotent central e de $\mathcal{O}G$ sur un caractère χ de G est la suivante : pour tout élément g de G,

$$e\chi(g) = \chi(ge).$$

Si V est un KG-module de caractère χ_V, alors, via l'application π_e, eV est un KG-module de caractère χ_{eV}. On a $\chi_{eV} = e\chi_V$.

1.1.2 Blocs

Dorénavant e désignera un idempotent central primitif de $\mathcal{O}G$.

Si ℓ divise $|G|$, l'algèbre kG n'est pas semi-simple ([Is] théorème 1.9 de Maschke).

Définition 1.2

Un ℓ-bloc de G est une algèbre de la forme $\mathcal{O}Ge$.

Convention 1.3

On dit qu'un KG-module irréductible V appartient à un ℓ-bloc $\mathcal{O}Ge$ de G s'il vérifie $eV = V$. Dans ce cas, on dira aussi que $\mathcal{O}Ge$ contient V. De même, on dit qu'un caractère irréductible χ de G appartient à $\mathcal{O}Ge$, ou que $\mathcal{O}Ge$ contient χ, s'il vérifie $e\chi = \chi$.

Notation 1.4

i) On note $\mathrm{Irr}(e)$ *l'ensemble des caractères irréductibles de* G *appartenant au* ℓ*-bloc* $\mathcal{O}Ge$.

ii) Pour tout caractère irréductible χ *de* G, $B_G(\chi)$ *désignera le* ℓ*-bloc de* G *contenant* χ.

Définition 1.5

Le ℓ*-bloc principal de* G *est le* ℓ*-bloc de* G *qui contient la représentation triviale et donc le caractère trivial. L'idempotent primitif central associé est aussi dit principal.*

Définition 1.6 ([AlBr] définition et proposition 2.4)

Soit D *un* ℓ*-sous-groupe de* G. *Le morphisme de Brauer,* Br_D, *est l'application* $\mathcal{O}$*-linéaire ainsi définie : pour un élément* a *de* $\mathcal{O}$ *et* g *de* G,

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Br}_D & : & (\mathcal{O}G)^D & \rightarrow & kC_G(D) \\ & & ag & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \overline{a}g & \text{si } g \in C_G(D), \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right. \end{array}$$

où $\overline{a}$ *est l'image de* a *dans* k *par la projection canonique de* $\mathcal{O}$ *sur* k.

Comme e est central, $\mathrm{Br}_D(e)$ est bien défini. Nous pouvons alors donner la définition d'un groupe de défaut d'un ℓ-bloc.

Définition 1.7

Un groupe de défaut d'un ℓ*-bloc* $\mathcal{O}Ge$ *est un* ℓ*-sous-groupe* D *de* G *tel que* $\mathrm{Br}_D(e) \neq 0$ *et tel que* D *soit maximal pour cette propriété.*

Un groupe de défaut est unique à conjugaison près ([AlBr] paragraphe 2.3). Le ℓ-bloc principal de G a pour groupes de défaut les ℓ-sous-groupes de Sylow de G ([AlBr] théorème 3.13).

1.1.3 Extensions

Soit $\widetilde{G}$ un groupe fini dont G est un sous-groupe distingué. Soient e et $\widetilde{e}$ des idempotents centraux primitifs de, respectivement, $\mathcal{O}G$ et $\mathcal{O}\widetilde{G}$. Posons $B = \mathcal{O}Ge$ et $\widetilde{B} = \mathcal{O}\widetilde{G}\widetilde{e}$. Soient, enfin, $\widetilde{B_0}$ le ℓ-bloc principal de $\widetilde{G}$ et B_0 celui de G.

Définition 1.8 ([NaTs] chapitre 5, paragraphe 5)

On dit que $\widetilde{B}$ *couvre* B *si* $\widetilde{e}e \neq 0$.

Remarquons que e est un idempotent de $\mathcal{O}\widetilde{G}$ qui n'est pas forcément central. Par contre si $\mathcal{T}$ est système de représentants de $\widetilde{G}$ modulo le stabilisateur de e dans $\widetilde{G}$, alors $\sum_{t\in\mathcal{T}} {}^t e$ est un idempotent central de $\mathcal{O}\widetilde{G}$. Cette somme ne dépend pas du système de représentants choisi. Dans $\mathcal{O}\widetilde{G}$, on a la décomposition en idempotents centraux primitifs suivante : $\sum_{t\in\mathcal{T}} {}^t e = \sum_{i=1}^{u} \widetilde{e}_i$. Les ℓ-blocs qui couvrent B sont les $\widetilde{B_i} = \mathcal{O}\widetilde{G}\widetilde{e}_i$, pour $1 \leq i \leq u$.

Lemme 1.9 ([NaTs] chapitre 5, lemme 5.7 et lemme 5.8)

1) Si χ est un caractère irréductible de $\widetilde{B}$ et si $\chi_{|G}$ admet une composante dans B, alors $\widetilde{B}$ couvre B.

2)Supposons que $\widetilde{B}$ couvre B.
i) Soit W un KG-module irréductible de B. Alors il existe V un $K\widetilde{G}$-module irréductible de $\widetilde{B}$ tel que W soit une composante de $V_{|G}$.
ii) Soit ψ un caractère irréductible de B. Alors il existe χ un caractère irréductible de $\widetilde{B}$ tel que ψ soit une composante de $\chi_{|G}$.

Corollaire 1.10

Considérons les ℓ-blocs principaux $\widetilde{B_0}$ et B_0.
1) $\widetilde{B_0}$ couvre B_0.
2) Si $\widetilde{G}/G$ est cyclique, alors un caractère irréductible $\widetilde{G}$-stable de B_0 admet une extension dans $\widetilde{B_0}$.

DÉMONSTRATION :

1) est une application directe du premier point du lemme 1.9 car le caractère trivial de $\widetilde{G}$ appartient à $\widetilde{B_0}$ et sa restriction à G appartient à B_0.

2) Soit ψ un caractère irréductible $\widetilde{G}$-stable de B_0. D'après le lemme 1.9, partie 2) ii), il existe un caractère irréductible χ de $\widetilde{B_0}$ tel que ψ soit une composante de $\chi_{|G}$. Ainsi χ est une composante de $\mathrm{Ind}_G^{\widetilde{G}}\psi$. Par ailleurs, la théorie de Clifford ([Is] chapitre 6) montre que ψ admet une extension ϕ dans $\widetilde{G}$. Il suit que χ est de la forme $\lambda\phi$, où λ est un caractère linéaire de $\widetilde{G}$ trivial sur G ([Is] corollaire 6.17). Ainsi χ est une extension de ψ et appartient à $\widetilde{B_0}$. $\dashv$

1.2 Isotypie

Commençons par définir quelques notions nécessaires à la définition d'une isotypie.

Définition 1.11

Dans un groupe un élément est
- un ℓ-élément, si son ordre est une puissance de ℓ ;
- un ℓ'-élément ou un élément ℓ-régulier, si son ordre est premier à ℓ ;
- un élément ℓ-singulier, si son ordre est non premier à ℓ.

Convention 1.12

Une fonction centrale f de G à valeurs dans K est dite appartenir à KGe si $f(ge) = f(g)$ pour tout élément g de G.

Notation 1.13

i) L'ensemble des fonctions centrales sur G à valeurs dans K sera noté $\mathrm{CF}(G, K)$.

ii) L'ensemble des fonctions centrales à valeurs dans K appartenant à KGe sera noté $\mathrm{CF}(e, K)$.

iii) L'ensemble des fonctions centrales à valeurs dans K appartenant à KGe nulles en dehors des ℓ'-éléments sera noté $\mathrm{CF}_{\ell'}(e, K)$.

Notation 1.14

Si χ est un caractère de G, χ^* désignera le caractère de la représentation duale d'une représentation de caractère χ. C'est un caractère de G qui vérifie : pour tout g dans G,

$$\chi^*(g) = \chi(g^{-1}).$$

On étend cette notation à toutes les fonctions centrales.

L'ensemble $\mathrm{CF}(G, K)$ est muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)g^*(x).$$

Les caractères irréductibles appartenant à $\mathrm{Irr}(e)$ forment une base orthonormale de $\mathrm{CF}(e, K)$.

Notation 1.15

Pour tout caractère χ d'un sous-groupe distingué de G, on note G_χ le sous-groupe d'inertie de χ dans G, i.e., l'ensemble

$$G_\chi = \{g \in G \mid {}^g\chi = \chi\}.$$

L'action de g est celle induite par la conjugaison :

$$^{g}\chi(-) = \chi^{g^{-1}}(-) = \chi(^{g^{-1}}-) = \chi(g^{-1} - g).$$

Dorénavant, on suppose que est e l'idempotent central primitif principal de G.

Définition 1.16

Soient x un ℓ-élément de G. On note $\mathrm{C}_G(x)_{\ell'}$ l'ensemble des ℓ'-éléments du centralisateur de x dans G. L'application de décomposition généralisée

$$d_x : \mathrm{CF}(G, K) \to \mathrm{CF}_{\ell'}(\mathrm{C}_G(x), K)$$

est définie par : pour χ dans $\mathrm{CF}(G, K)$,

$$\begin{array}{rccl} d_x(\chi) & : & \mathrm{C}_G(x) & \to & K \\ & & x' & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \chi(xx') & \textit{si } x' \in \mathrm{C}_G(x)_{\ell'}, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{array} \right. \end{array}$$

Proposition 1.17 ([Br3] paragraphe 2)

Notons e_x l'idempotent central primitif principal de $\mathcal{O}\mathrm{C}_G(x)$. Le restriction de l'application de décomposition généralisée d_x à $\mathrm{CF}(e, K)$ est l'application suivante

$$d_x^G : \mathrm{CF}(e, K) \to \mathrm{CF}_{\ell'}(e_x, K)$$

Démonstration : Cette application est bien définie. En effet, le second théorème de Brauer assure que $d_x^G(e.\chi) = \mathrm{Br}_x(e) d_x^G(\chi)$ ([Br1] théorème A2.1). On rappelle que $\mathrm{Br}_x(e)$ est l'idempotent central de $k\mathrm{C}_G(x)$ associé à e par la correspondance de Brauer. Puis le troisième théorème de Brauer assure que $\mathrm{Br}_x(e) = e_x$ ([AlBr] théorème 3.13). Ainsi si χ appartient à $\mathrm{CF}(e, K)$, alors $d_G^x(\chi)$ appartient bien à $\mathrm{CF}_{\ell'}(e_x, K)$. ⊣

Nous pouvons enfin définir une isotypie.

Dorénavant, on suppose que G admet un ℓ-sous-groupe de Sylow abélien S et toujours que e est l'idempotent central primitif principal de G.

On note H le normalisateur de S dans G et f son idempotent central primitif principal.

Pour tout sous-groupe P de S, on note :

$$G_P = \mathrm{C}_G(P), \; H_P = \mathrm{C}_H(P),$$

et leurs idempotents centraux primitifs principaux respectifs e_P et f_P.

Définition 1.18 ([Br3] définition 2.1)

Une isotypie I entre KHf et KGe, de système local $\{I_P\}$, où P parcourt l'ensemble des sous-groupes de S, est la donnée, pour tout sous-groupe P de S, d'isométries bijectives

$$I_P : \mathbf{Z}\mathrm{Irr}(f_P) \to \mathbf{Z}\mathrm{Irr}(e_P),$$

où $I_{<1>} = I$, qui vérifient les conditions suivantes pour tout sous-groupe P de S :

• **Equi**$_P$ *: Pour tout élément h de H,*

$$(I_P)^h = I_{P^h},$$

• **Com**$_P$ *: I_P s'étend, par linéarité, en l'isométrie bijective suivante, qu'on désigne encore par I_P :*

$$I_P : \mathrm{CF}(f_P, K) \to \mathrm{CF}(e_P, K).$$

Pour tout x dans S, le diagramme suivant doit être commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CF}(f_P, K) & \xrightarrow{I_P} & \mathrm{CF}(e_P, K) \\ d^x_{H_P} \downarrow & & \downarrow d^x_{G_P} \\ \mathrm{CF}(f_{P\langle x\rangle}, K) & \xrightarrow{I_{P\langle x\rangle}} & \mathrm{CF}(e_{P\langle x\rangle}, K) \end{array}$$

• **Triv** *: I_S est l'application identité.*

Les conditions **Equi**$_P$ sont dites d'équivariance et les conditions **Com**$_P$ sont dites de compatibilité à la fusion.

Les remarques suivantes permettent de réduire le nombre de conditions à vérifier dans la définition d'une isotypie. Elles nous seront utiles par la suite, quand on construira réellement des isotypies dans le groupe symplectique de dimension 4.

Remarque 1.19

Pour construire une isotypie, on prendra un système de représentants des sous-groupes P de S modulo H et on se donne I_P pour tout P de ce système. On vérifiera que pour tout sous-groupe strict P et pour tout élément n de $\mathrm{N}_H(P)$ on a $(I_P)^n = I_P$. On pourra alors poser pour un élément h de H, $I_{P^h} = (I_P)^h$. Ainsi la condition **Equi**$_P$ *sera vérifiée.*

Donnons nous, suivant cette remarque, une famille d'isométrie bijectives I_P pour $P \subset S$.

Remarque 1.20

Comme I_S est l'application identité, il suit que pour tout élément h de H, $(I_S)^h = I_S$. La condition **Equi**$_S$ *est donc vérifiée. De plus la condition* **Com**$_S$ *est trivialement vérifiée.*

Lemme 1.21

Si la condition **Equi**$_P$ *est vérifiée pour un sous-groupe P de S ainsi que pour tous ses conjugués par H et si la condition* **Com**$_P$ *est vérifiée pour un sous-groupe P de S, alors, pour tout élément h de H,* **Com**$_{P^h}$ *est vérifiée.*

Démonstration : Soient $\chi \in \mathrm{Irr}(f_P)$, $x \in S$, $h \in H$ et $g \in \mathrm{C}_{H_P}(x^h)_{\ell'}$. Alors ${}^h g \in \mathrm{C}_{H_P^{-1}}(x)_{\ell'}$. Puis χ^h est un caractère de $H_P^h = H_P$.

$$\begin{aligned} d_{H_P}^{x^h}\chi^h(g) &= d^{x^h}_{(H_P^{h^{-1}})^h}\chi^h(g) \\ &= \chi^h(gx^h) \\ &= \chi({}^h gx) \\ &= d^x_{H_P^{h^{-1}}}\chi({}^h g) \\ &= (d^x_{H_P^{h^{-1}}}\chi)^h(g). \end{aligned}$$

Soient $y \in S$ et $\psi \in \mathrm{Irr}(f_P)$. On pose $x = {}^h y$ et $\chi = {}^h\psi$, alors $x \in S$ et $\chi \in \mathrm{Irr}(f_P)$. On a

$$\begin{aligned} I_{P^h\langle y\rangle} d^y_{H_P}\psi &= I_{P^h\langle x^h\rangle} d^{x^h}_{H_P}\chi^h \\ &= (I_{P\langle x\rangle})^h (d^x_{H_P^{h^{-1}}}\chi)^h \\ &= (I_{P\langle x\rangle} d^x_{H_P^{h^{-1}}}\chi)^h \\ &= (d^x_{G_P^{h^{-1}}} I_P(\chi))^h \\ &= d^{x^h}_{G_P}(I_P)^h\chi^h \\ &= d^y_{G_P} I_{P^h}\psi. \end{aligned}$$

Ainsi $I_{P^h\langle y\rangle} d^y_{H_P} = d^y_{G_P} I_{P^h}$ pour tout élément h de H_P et y de S. ⊣

Remarque 1.22

D'après le lemme 1.21, il suffira donc de vérifier **Com**$_P$ *pour un système de représentants des sous-groupes P de S modulo H.*

• Le fait que I_P soit une isométrie implique que, pour tout caractère irréductible χ de f_P, $I_P(\chi)$ est, à un signe près, un caractère irréductible de e_P. On note ε_P l'application $\mathrm{Irr}(f_P) \to \{\pm 1\}$ définie par la condition suivante : pour tout caractère ψ de $\mathrm{Irr}(f_P)$,

$$\varepsilon_P(\psi) I_P(\psi) \in \mathrm{Irr}(e_P).$$

On pose

$$\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Remarque 1.23
La condition $\mathbf{Equi}_P$ *implique* $\varepsilon_{P^h} = (\varepsilon_P)^h$.

Lemme 1.24 ([Br2] remarque du lemme 1.6)
Soit I une isotypie de système local $\{I_P\}$. Pour tout caractère χ de $\mathrm{Irr}(f_P)$*, on doit avoir*

$$I_P(\chi)(1) \equiv \chi(1) \text{ modulo } \ell.$$

Ce dernier lemme peut faciliter la construction d'isotypies. En particulier lorsqu'on sait qu'une isotypie existe et que l'on souhaite l'expliciter, cette propriété va imposer immédiatement les signes ε_P des isométries bijectives dans les cas qui nous intéresse.

• Le bi-caractère généralisé, μ_P, de $H_P \times G_P$, donné par I_P, est ainsi défini : pour tout élément (h, g) de $H_P \times G_P$,

$$\mu_P(h, g) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(f_P)} \chi(h) I_P(\chi)^*(g).$$

Remarques 1.25 ([FoHa2] annexe)

• *La condition d'équivariance s'écrit : pour tout élément h de H, il faut*

$$\mu_P^{(h,h)} = \mu_{P^h}.$$

• *La condition de compatibilité à la fusion s'écrit alors : pour tout élément z de S et g' de* $\mathrm{C}_{G_P}(z)_{\ell'}$*, il faut*

$$\langle \mu_P(-, zg') | \chi \rangle_{\mathrm{H}_P} = \langle \mu_{P\langle z \rangle}(-, g') | d^z_{\mathrm{H}_P} \chi \rangle_{\mathrm{H}_{P\langle z \rangle}}.$$

• *En particulier, ceci implique que pour tous ℓ-éléments h de H_P et g de G_P et pour tous ℓ'-éléments h' de* $\mathrm{C}_{H_P}(h)$ *et g' de* $\mathrm{C}_{G_P}(g)$*, si h n'est pas conjugué à g alors*

$$\mu_P(hh', gg') = 0.$$

Réciproquement, μ_P permet d'écrire I_P : pour tout caractère χ de $\mathrm{Irr}(f_P)$ et tout élément g de G_P,

$$\begin{aligned} I_P(\chi)(g) &= \tfrac{1}{|H_P|} \textstyle\sum_{h \in H_P} \mu_P(h, g^{-1})\chi(h^{-1}) \\ &= \tfrac{1}{|H_P|} \textstyle\sum_{h \in H_P} \mu_P^*(h, g)\chi(h). \end{aligned}$$

Conjecture de Broué ([Br1] conjecture 6.1)

Soient G un groupe fini et ℓ un entier premier. Soit S un ℓ-sous-groupe de Sylow de G. Si S est abélien, il existe une isotypie entre le ℓ-bloc principal de $\mathrm{N}_G(S)$ et celui de G.

Cette conjecture a été démontrée dans de nombreux cas. Par exemple, pour les groupes symétriques [Ro1] et alternés [FoHa1], pour les groupe simples sporadiques non abéliens [Ro1], pour les groupes réductifs de type de Lie [BrMi] [BrMaMi], en caractéristique 2 pour tout groupe admettant un 2-sous-groupe de Sylow abélien [FoHa2]. Plus récemment, elle a été démontrée pour une extension de $\mathrm{SL}_2(q)$ par un automorphisme de corps, où q est une puissance d'un nombre premier impair et ℓ divise q [Fo].

Le but de cette thèse est de démontrer cette conjecture pour des extensions des groupes symplectiques de dimension 4 sur un corps fini, extensions obtenues à l'aide d'un endomorphisme de Frobenius. Pour ce faire, nous utiliserons le théorème de relèvement d'isotypies énoncé et démontré ci-après.

La conjecture citée ici est un cas particulier d'une conjecture plus générale qui ne se restreint pas au ℓ-bloc principal. La notion d'isotypie existe aussi entre des blocs non principaux et on a la conjecture suivante :

Soient G un groupe fini et ℓ un entier premier qui divise le cardinal de G. Soit B un ℓ-bloc de G, de groupe de défaut D. Soit b le bloc de $\mathrm{N}_G(D)$, correspondant de Brauer de B. Si D est abélien, il existe une isotypie entre b et B.

1.3 Théorème de relèvement d'isotypie

On suppose toujours que G admet un ℓ-sous groupe de Sylow abélien S et on garde les notations H, e et f du paragraphe précédent.

1.3.1 Extension

Soit $\widetilde{G}$ un groupe fini tel que G en soit un sous-groupe distingué et tel que S soit un ℓ-sous-groupe de Sylow abélien de $\widetilde{G}$. Cela implique, en particulier, que ℓ est premier à $|\widetilde{G}/G|$.

On note $\widetilde{H}$ le normalisateur de S dans $\widetilde{G}$. Les idempotents centraux primitifs principaux de $\widetilde{G}$ et $\widetilde{H}$ seront respectivement notés $\widetilde{e}$ et $\widetilde{f}$.

L'inclusion $\widetilde{H} \hookrightarrow \widetilde{G}$ induit un isomorphisme α de $\widetilde{H}/H$ sur $\widetilde{G}/G$. En effet, G est distingué dans $\widetilde{G}$ et S est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G, l'argument de Frattini indique alors que
$$\widetilde{G} = G\mathrm{N}_{\widetilde{G}}(S) = G\widetilde{H}.$$

Pour tout sous-groupe P de S, on note :

$$\widetilde{G}_P = \mathrm{C}_{\widetilde{G}}(P) \text{ et } \widetilde{H}_P = \mathrm{C}_{\widetilde{H}}(P).$$

Leurs idempotents centraux primitifs principaux respectifs sont notés $\widetilde{e}_P$ et $\widetilde{f}_P$.

Remarquons que $\widetilde{G}_P/G_P \subset \widetilde{G}/G$. En effet, le noyau de $\widetilde{G}_P \twoheadrightarrow \widetilde{G}_P/G_P$ est $\widetilde{G}_P \cap G = G_P$. De même $\widetilde{H}_P/H_P \subset \widetilde{H}/H$. Comme G_P est distingué dans $\widetilde{G}_P$ et S est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G_P (car S est abélien et $P \subset S$), l'argument de Frattini montre que la restriction de α à $\widetilde{H}_P/H_P$ est un isomorphisme entre $\widetilde{H}_P/H_P$ et $\widetilde{G}_P/G_P$. La restriction de α à $\widetilde{H}_P/H_P$ sera encore notée α.

Si x appartient à $\widetilde{H}_P$, nous écrirons $\alpha(x)$ pour désigner l'image par α de la classe de x dans $\widetilde{H}_P/H_P$. Ainsi $\alpha(x)$ appartient à $\widetilde{G}_P/G_P$.

Posons, pour tout sous-groupe P de S,

$$\Delta(P) = \{(\widetilde{h}, \widetilde{g}) \mid (\widetilde{h}, \widetilde{g}) \in \widetilde{H}_P \times \widetilde{G}_P,\ \alpha(\widetilde{h}) = \widetilde{g} \text{ modulo } G_P\}.$$

Remarquons que $H_P \times G_P \subset \Delta(P) \subset \widetilde{H}_P \times \widetilde{G}_P$.

Pour tout caractère χ de $\mathrm{Irr}(\mathrm{H}_P)$, on pose

$$\Delta(P)_\chi = \Delta(P) \cap (\widetilde{H}_P \times \widetilde{G}_P)_{\chi \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^*}.$$

Ainsi $\Delta(P)_\chi$ est le sous-groupe d'inertie de $\chi \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^*$ dans $\Delta(P)$. Il est désigné par $\Delta(P)_\chi$ au lieu de $\Delta(P)_{\chi \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^*}$ pour simplifier les notations.

Remarquons que les données de G et ℓ impliquent, à isomorphisme près, celles de H, G_P, H_P puis celles de e, f, e_P et f_P. De même, la donnée d'une extension $\widetilde{G}$

de G implique celles de $\widetilde{H}$, $\widetilde{G}_P$, $\widetilde{H}_P$ puis celles de $\widetilde{e}$, $\widetilde{f}$, $\widetilde{e}_P$ et $\widetilde{f}_P$. La donnée de G, de ℓ, d'une isotypie I entre KHf et KGe et d'une extension finie $\widetilde{G}$ de G sera notée

$$(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G}).$$

Cette donnée permet de décrire entièrement la situation précédemment exposée.

Convention 1.26
Une donnée $(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G})$ *comme ci-dessus sera appelée configuration.*

1.3.2 Théorème

Soit $(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G})$ une configuration.

Pour tout sous-groupe P de S nous faisons les hypothèses suivantes :

• *Une condition d'équivariance au niveau des isométries bijectives :*
C1$_P$ *:* I_P *est stable sous* $\Delta(P)$*, i.e., pour tout élément* h *de* $\widetilde{H}_P$ *et tout caractère* χ *de* $\mathrm{Irr}(f_P)$,

$$I_P(\chi^h) = I_P(\chi)^h,$$

• *Une condition d'équivariance au niveau des extensions :*
C2$_P$ *: Pour chaque caractère* χ *de* $\mathrm{Irr}(f_P)$*, il existe des extensions dans* $\Delta(P)_\chi$ *de* $\chi \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^*$*. On en choisit une que l'on note* $E(\chi \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^*)$*. L'application qui, à* χ*, associe* $E(\chi \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^*)$*, doit être* $\Delta(P)$*-équivariante, c'est-à-dire que, pour tout élément* (h, g) *de* $\Delta(P)$*, elle doit vérifier*

$$E(\chi \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^*)^{(h,g)} = E(\chi^h \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^{*g}).$$

Les extensions de μ_P à $\Delta(P)$ données par

$$E(\mu_P) = \sum_{\chi \text{ modulo } \widetilde{H}_P} \varepsilon_P(\chi) \mathrm{Ind}_{\Delta(P)_\chi}^{\Delta(P)} E(\chi \times \varepsilon_P(\chi) I_P(\chi)^*)$$

sont alors bien définies. La somme porte aussi sur un système de représentants de l'ensemble $\{\chi \times I_P(\chi)^*,\ \chi \in \mathrm{Irr}(f_P)\}$ sous l'action de $\Delta(P)$.

Nous faisons alors une hypothèse supplémentaire. Ces extensions doivent vérifier les deux conditions suivantes :

• *Une condition dite de séparabilité :*
G1$_P$ *: Soit* (hh', gg') *un élément de* $\Delta(P)$ *tel que* $h \in (H_P)_\ell$, $g \in (G_P)_\ell$, $h' \in \mathrm{C}_{\widetilde{H}_P}(h)_{\ell'}$ *et* $g' \in \mathrm{C}_{\widetilde{G}_P}(g)_{\ell'}$. *Si* h *et* g *ne sont pas conjugués dans* G_P, *alors*

$$E(\mu_P)(hh', gg') = 0.$$

• *Une condition dite de recollement :*
G2$_P$ *: Soit* (zh', zg') *un élément de* $\Delta(P)$ *tel que* $z \in S$, $h' \in \mathrm{C}_{\widetilde{H}_P}(z)_{\ell'}$ *et* $g' \in \mathrm{C}_{\widetilde{G}_P}(z)_{\ell'}$. *Alors*

$$E(\mu_P)(zh', zg') = E(\mu_{P<z>})(h', g').$$

Posons

$$\widetilde{\mu}_P = (\widetilde{f}_P \otimes \widetilde{e}_P).\mathrm{Ind}_{\Delta(P)}^{\widetilde{H}_P \times \widetilde{G}_P} E(\mu_P).$$

On définit une famille d'applications $\widetilde{I}_P$ ainsi : pour tout caractère $\widetilde{\chi}$ de $\mathrm{Irr}(\widetilde{f}_P)$ et pour tout élément $\widetilde{g} \in \widetilde{G}_P$,

$$\widetilde{I}_P(\widetilde{\chi})(\widetilde{g}) = \frac{1}{|\widetilde{H}_P|} \sum_{\widetilde{h} \in \widetilde{H}_P} \widetilde{\mu}_P(\widetilde{h}, \widetilde{g}) \widetilde{\chi}(\widetilde{h}).$$

Définition 1.27

i) Les conditions **C1**$_P$, **C2**$_P$, **G1**$_P$ *et* **G2**$_P$ *sont dites de compatibilité.*

ii) Une configuration $(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G})$ *qui vérifie ces conditions et telle que* $\widetilde{I}_S$ *soit l'application identité est dite compatible.*

Remarques 1.28

• *La condition d'équivariance au niveau des isométries bijectives implique les isomorphismes suivants : pour tout caractère* χ *de* $\mathrm{Irr}(\mathrm{H}_P)$,

$$(\widetilde{H}_P)_\chi / H_P \simeq (\widetilde{G}_P)_{\varepsilon_P I_P(\chi)} / G_P.$$

• *La condition d'équivariance implique, pour tout élément* h *de* $\widetilde{H}_P$,

$$\varepsilon_P^h = \varepsilon_{P^h}.$$

• *La condition d'équivariance est équivalente à la condition suivante sur le bi-caractère généralisé associé à* I_P *: pour tout élément* h *de* $\widetilde{H}_P$

$$\mu_P^{(h,h)} = \mu_{P^h}.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}_P^{(h,h)} &= (\widetilde{f}_{P^h} \otimes \widetilde{e}_{P^h}).\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(f_P)/\widetilde{H}_P} [\mathrm{Ind}_{\Delta(P)_\chi}^{\widetilde{H}_P\times\widetilde{G}_P} \varepsilon_P(\chi)E(\chi\times\psi_\chi^*)]^{(h,h)}\\
&= (\widetilde{f}_{P^h} \otimes \widetilde{e}_{P^h}).\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(f_P)/\widetilde{H}_P} \mathrm{Ind}_{\Delta(\alpha_{P^h})_{\chi^h}}^{\widetilde{H}_{P^h}\times\widetilde{G}_{P^h}} \varepsilon_P(\chi)E(\chi^h\times\psi_\chi^{*h})\\
&= (\widetilde{f}_{P^h} \otimes \widetilde{e}_{P^h}).\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(f_{P^h})/\widetilde{H}_{P^h}} \mathrm{Ind}_{\Delta(\alpha_{P^h})_{\chi}}^{\widetilde{H}_{P^h}\times\widetilde{G}_{P^h}} \varepsilon_{P^h}(\chi)E(\chi\times\psi_\chi^*)\\
&= \widetilde{\mu}_{P^h}.
\end{aligned}$$

• *Dans le cas où $\widetilde{G}/\mathrm{G}$ est cyclique, les caractères $\chi\times\varepsilon_P(\chi)\mathrm{I}_P(\chi)$, pour χ dans* $\mathrm{Irr}(f_P)$*, s'étendent en fait à $(\widetilde{H}_P\times\widetilde{G}_P)_\chi$ (au lieu de $\Delta(P)_\chi$) et ce sont ces extensions que l'on construira.*

THÉORÈME 1.29

Soit $(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G})$ une configuration compatible. Alors la famille $\widetilde{I}_P$ forme une isotypie $\widetilde{I}$ entre $K\widetilde{H}\widetilde{f}$ et $K\widetilde{G}\widetilde{e}$ de système local $\{\widetilde{I}_P\}_{P\subseteq S}$, qui relève l'isotypie I.

Remarques 1.30

• *Le bi-caractère généralisé de $\widetilde{H}_P\times\widetilde{G}_P$ associé à $\widetilde{I}_P$ est $\widetilde{\mu}_P$.*

• *Les hypothèses faites vont permettre de construire des isométries bijectives $\widetilde{I}_P$ au-dessus de I_P, qui formeront une isotypie entre $K\widetilde{H}\widetilde{f}$ et $K\widetilde{G}\widetilde{e}$ relevant I.*

• *Pour le sous-groupe S et pour tout caractère χ de* $\mathrm{Irr}(H_S)$*, nous pouvons toujours choisir les extensions de $\chi\times\varepsilon_S(\chi)I_S(\chi)^*=\chi\times\chi^*$ à $\Delta(S)_\chi$ telles que $\widetilde{I}_S$ soit l'application identité et vérifie alors trivialement les conditions* $\mathbf{Equi}_S$ *et* $\mathbf{Com}_S$.

Démonstration : On fixe P un sous-groupe strict de S et χ un caractère de $\mathrm{Irr}(f_P)$. Pour cette démonstration et dans le but de simplifier les notations, le caractère $\varepsilon_P(\chi)I_P(\chi)$ de e_P sera noté ψ_χ.

Les constructions des relevés des caractères $E(\chi\times\psi^*)$ sont données par P. Fong et M. Harris dans leur théorème de relèvement d'isométries parfaites [FoHa2]. Le lecteur pourra donc se reporter à [FoHa2], paragraphe 1A. De plus le théorème 1.E de [FoHa2] assure que les applications $\widetilde{I}_P$ ainsi construites sont des isométries bijectives.

Montrons que ces isométries $\widetilde{I}_P$, pour P sous-groupe strict de S, vérifient les deux conditions $\mathbf{Equi}_P$ et $\mathbf{Com}_P$.

• **Equi**$_P$:

Soit un élément h de $\widetilde{H}$. Toute extension $\widetilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(\widetilde{f}_P)$ de $\chi \in \mathrm{Irr}(f_P)$ vérifie

$$\begin{aligned}
(\widetilde{I}_P)^h(\widetilde{\chi}^h) &= [\widetilde{I}_P(\widetilde{\chi})]^h \\
&= \tfrac{1}{|\widetilde{H}_P|}[\textstyle\sum_{x\in\widetilde{H}_P} \widetilde{\mu}_P^*(x,-)\widetilde{\chi}(x)]^h \\
&= \tfrac{1}{|\widetilde{H}_P|}[\textstyle\sum_{x\in\widetilde{H}_{P^h}} \widetilde{\mu}_P^*({}^hx,-)\widetilde{\chi}({}^hx)]^h \\
&= \tfrac{1}{|\widetilde{H}_P|}\textstyle\sum_{x\in\widetilde{H}_{P^h}} \widetilde{\mu}_P^*({}^hx,{}^h-)\widetilde{\chi}({}^hx) \\
&= \tfrac{1}{|\widetilde{H}_P|}\textstyle\sum_{x\in\widetilde{H}_{P^h}} \widetilde{\mu}_P^{*(h,h)}(x,-)\widetilde{\chi^h}(x).
\end{aligned}$$

Or $\widetilde{\mu}_P^{(h,h)} = \widetilde{\mu}_{P^h}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
(\widetilde{I}_P)^h(\widetilde{\chi}^h) &= \tfrac{1}{|\widetilde{H}_P|}\textstyle\sum_{x\in\widetilde{H}_{P^h}} \widetilde{\mu}_P^{*(h,h)}(x,-)\widetilde{\chi^h}(x) \\
&= \tfrac{1}{|\widetilde{H}_P|}\textstyle\sum_{x\in\widetilde{H}_{P^h}} \widetilde{\mu}_{P^h}^*(x,-)\widetilde{\chi^h}(x) \\
&= (\widetilde{I}_{P^h})(\widetilde{\chi}^h),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, $(\widetilde{I}_P)^h = \widetilde{I}_{P^h}$.

• **Com**$_P$ (pour plus de détails, le lecteur se reportera à [FoHa2] propositions 3D et 3E) :

L'ensemble $V_P = \{(v,1),\ v \in \widetilde{H}_P/H_P\}$ est un système de représentants de $\Delta(P)$ dans $\widetilde{H}_P \times \widetilde{G}_P$. Soit (h,g) un élément de $\widetilde{H}_P \times \widetilde{G}_P$, on a

$$\widetilde{\mu}_P(h,g) = \sum_{v\in V_P} E(\mu_P)({}^vh,g).$$

Si $\widetilde{\mu}_P(h,g) \neq 0$, alors il existe un élément v de V_P tel que $E(\mu_P)({}^vh,g) \neq 0$ et donc la condition **G1**$_P$ implique que les ℓ-parties de ${}^vh$ et g sont conjuguées dans $\widetilde{G}$ et donc que celles de h et g le sont aussi. Ainsi, quand $(hh',gg') \in \widetilde{H} \times \widetilde{G}$ est tel que $h \in \widetilde{H}_\ell$, $g \in \widetilde{G}_\ell$, $h' \in \mathrm{C}_{\widetilde{H}}(h)_{\ell'}$, $g' \in \mathrm{C}_{\widetilde{G}}(g)_{\ell'}$ et que h et g ne sont pas conjugués dans $\widetilde{G}$, on a

$$\widetilde{\mu}_P(hh',gg') = 0.$$

D'autre part, pour $z \in \mathrm{S}$, $h' \in \mathrm{C}_{\widetilde{H}_p}(z)_{\ell'}$ et $g' \in \mathrm{C}_{\widetilde{G}_p}(z)_{\ell'}$, si $\widetilde{\mu}_{P\langle z\rangle}(h',g') \neq 0$, la condition **G1**$_P$ implique

$$\widetilde{\mu}_P(zh',zg') = \sum_{v\in V} E(\mu_P)({}^v(zh'),zg'),$$

où V est est un ensemble de représentants de H_P dans $\mathrm{C}_{\widetilde{H}_P/H_P}(zh')$ et

$$\widetilde{\mu}_{P\langle z\rangle}(h',g') = \sum_{w\in W} E(\mu_{P\langle z\rangle})({}^w h',g'),$$

où W est un ensemble de représentants de $H_{P\langle z\rangle}$ dans $\mathrm{C}_{\widetilde{H}_{P\langle z\rangle}/H_{P\langle z\rangle}}(h')$. De plus on peut choisir $W \subset V$. La condition $\mathbf{G2}_P$ permet alors de conclure que

$$\widetilde{\mu}_P(zh',zg') = \widetilde{\mu}_{P<z>}(h',g').$$

Ces deux relations impliquent ([FoHa2] appendice) que, pour tout élément z de S, on a

$$\langle \widetilde{\mu}_P(-,zg')|\chi'\rangle_{\widetilde{\mathrm{H}}_P} = \langle \widetilde{\mu}_{P\langle z\rangle}(-,g')|d^z_{\widetilde{\mathrm{H}}_P}\chi'\rangle_{\widetilde{\mathrm{H}}_P},$$

ce qui est la condition de compatibilité à la fusion exprimée pour le bi-caractère généralisé associée a l'isotypie (remarque 1.25).

Les isométries bijectives $\widetilde{I}_P$ vérifient donc les trois conditions de la définition d'une isotypie (définition 1.18). $\dashv$

1.3.3 Deux cas particuliers connus

La situation des blocs isomorphes

Supposons que $\widetilde{G}$ est une extension de G qui vérifie :

- G est distingué dans $\widetilde{G}$,
- $\widetilde{G}/G$ est d'ordre premier à ℓ,
- $\widetilde{G} = \mathrm{C}_{\widetilde{G}}(S)G$ pour un ℓ-sous-groupe de Sylow S de G.

Quand on considérera le groupe symplectique de dimension 4, les trois premières hypothèses seront toujours vérifiées. Seule la dernière (qui est un argument plus fort que celui de Frattini) fera défaut pour certaines configurations.

J. Alperin a montré que dans cette situation l'application de restriction est une bijection entre l'ensemble des caractères irréductibles de $\widetilde{e}$ et celui des caractères irréductibles de e ([Al] lemme 1) et que $K\widetilde{G}\widetilde{e}$ et KGe sont des algèbres isomorphes ([Al] théorème 1). E. C. Dade a montré que $\mathcal{O}\widetilde{G}\widetilde{e}$ et $\mathcal{O}Ge$ sont des algèbres isomorphes ([Da1] théorème 1).

Définition 1.31
Dans cette situation une configuration $(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G})$ *sera dite de type Blocs Isomorphes (BI).*

Proposition 1.32

Une configuration de type BI est compatible pour toute isotypie I.

DÉMONSTRATION : Notons γ l'isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{O}\widetilde{G}\widetilde{e}$ et $\mathcal{O}Ge$ induit par l'application de restriction. Il est défini par

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathcal{O}Ge & \to & \mathcal{O}\widetilde{G}\widetilde{e} \\ & g & \mapsto & g\widetilde{e}. \end{array}$$

En posant

$$\widetilde{I}_P = \gamma^{-1} \circ I_P \circ \gamma$$

on obtient une isotypie $\widetilde{I}$ de système local $\widetilde{I}_P$ entre $K\widetilde{H}\widetilde{f}$ et $K\widetilde{G}\widetilde{e}$. ⊣

Remarque 1.33

Pour tout caractère χ de $\mathrm{Irr} f_P$, les extensions de χ et de $\varepsilon_P(\chi)I_P(\chi)$ dans, respectivement, $\mathrm{Irr}(\widetilde{f}_P)$ et $\mathrm{Irr}(\widetilde{e}_P)$, sont définies de manière unique. On les note, respectivement, $\widetilde{\chi}$ et $\varepsilon_P(\chi)\widetilde{I_P(\chi)}$. Les extensions dans $\Delta(P)_\chi$ données alors par

$$E(\chi \times \varepsilon_P(\chi)I_P(\chi)^*) = \mathrm{Res}_{\Delta(P)_\chi}^{\widetilde{H}_P \times \widetilde{G}_P}(\widetilde{\chi} \times \varepsilon_P(\chi)\widetilde{I_P(\chi)}^*)$$

vérifient les conditions de compatibilité et permettent de donner les isométries $\widetilde{I}_p$ ([FoHa2] théorème 6C).

La situation du sous-groupe de Sylow cyclique

Définition 1.34

Si les ℓ-sous-groupes de Sylow sont cycliques $(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G})$ sera dite de type Sylow Cyclique (SC).

Proposition 1.35

Une configuration SC est compatible pour toute isotypie I.

P. Fong et M. Harris ont montré ceci mais ne l'ont pas publié. Par ailleurs, lorsque S est cyclique, A. Marcus a démontré un résultat plus fort, sur les équivalences de Rickard, qui implique directement cette proposition ([Ma] exemple 5.5).

Chapitre 2

Descentes de Shintani et caractères fantômes

Le cadre de ce chapitre est les groupes finis de type de Lie. Une première partie est consacrée au rappel des définitions et de certaines propriétés de la théorie des descentes de Shintani. Puis, une seconde partie s'occupe des caractères fantômes. Pour cela, on considère certains groupes obtenus par produit en couronne, leurs propriétés et les inductions de Deligne-Lusztig dans ces groupes. Ceci permet de construire des relevés des caractères fantômes à chaque tranche de l'extension, dont les descentes de Shintani sont des caractères fantômes.

Soit p un nombre premier. On désigne par $\overline{\mathbf{F}}_p$ une clôture algébrique du corps à p éléments. Soient q_0 une puissance de p et n un entier. On pose $q = q_0^n$. Pour un tel q, $\mathbf{F}_q$ désigne un sous-corps à q éléments de $\overline{\mathbf{F}}_p$. Enfin, d représente un diviseur de n.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini et déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$. On note F_0 l'endomorphisme de Frobenius qui munit $\mathbf{G}$ de la structure rationnelle sous-jacente. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0^n$, $\mathrm{G} = \mathbf{G}^{\mathrm{F}}$, et, pour tout d, $\mathrm{G}_d = \mathbf{G}^{\mathrm{F}_0^d}$. Les groupes G et G_d sont dits finis de type de Lie.

Les deux morphismes F et F_0 commutent et donc F_0 agit sur G. La restriction de F_0 à G sera notée σ. C'est aussi l'image de F_0 dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ car $\langle \mathrm{F}_0 \rangle / \langle \mathrm{F} \rangle$ s'injecte dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{G})$ (F engendre le noyau de $\langle \mathrm{F}_0 \rangle \to \mathrm{Aut}(\mathrm{G})$). Ainsi, σ est un automorphisme de G d'ordre n.

Ceci nous permet aussi de considérer le groupe $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$, extension de G induite par un automorphisme σ.

Soit $\mathbf{T}_{1,1}$ un tore maximal F_0-stable déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$ de $\mathbf{G}$. On considère $\mathrm{W} = \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_{1,1})/\mathbf{T}_{1,1}$, le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$, relativement à $\mathbf{T}_{1,1}$. Pour tout élément w de W, on note $\mathbf{T}_{w,d}$ un tore maximal F_0^d-stable de type w relativement à $\mathbf{T}_{1,1}$ et $\mathrm{T}_{w,d} = \mathbf{T}_{w,d}^{\mathrm{F}_0^d}$. Pour simplifier les notations, on pose $\mathbf{T}_w = \mathbf{T}_{w,n}$ et $\mathrm{T}_w = \mathrm{T}_{w,n} = \mathbf{T}_{w,n}^{\mathrm{F}}$. Les tores $\mathrm{T}_{w,d}$ sont dit être des tores maximaux de G_d.

On note $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w,d}}^{\mathrm{G}_d}$ la fonction d'induction de Deligne-Lusztig de G_d définie à l'aide de la structure rationnelle de $\mathbf{G}$ donnée par F_0^d et du tore $\mathbf{T}_{w,d}$.

On notera id le caractère trivial d'un groupe de Weyl et Id celui d'un groupe fini de type de Lie. Si cela est nécessaire, on précisera en indice de quel groupe il s'agit. Enfin, pour les caractères de Deligne-Lusztig, on pose $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w,d}}^{\mathrm{G}_d}(1) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w,d}}^{\mathrm{G}_d}(\mathrm{Id})$.

2.1 Descentes de Shintani

2.1.1 Définitions et propriétés

Pour les définitions et propositions classiques de cette section, une référence est [DiMi1] chapitre I.7.

Définition 2.1
Soit F un endomorphisme de $\mathbf{G}$. Le groupe $\mathbf{G}$ est dit vérifier la propriété de Lang si le groupe des points fixes de $\mathbf{G}$ sous F est fini et si l'application de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}$, $g \mapsto g^{-1}F(g)$, est surjective.

Soient F et F' deux endomorphismes de $\mathbf{G}$ qui commutent et tels que $\mathbf{G}$ vérifie la propriété de Lang pour F et F' .

Définition 2.2
Soit x un élément de $\mathbf{G}^{F'}$. La F-classe de conjugaison de x dans $\mathbf{G}^{F'}$ est l'ensemble

$$\{g^{-1}xF(g),\ g \in \mathbf{G}^{F'}\}.$$

Proposition 2.3
Pour tout élément y de $\mathbf{G}$,

$$y^{-1}F(y) \in \mathbf{G}^{F'} \text{ si et seulement si } yF'(y^{-1}) \in \mathbf{G}^{F}.$$

Il y a une bijection, notée $\mathrm{N}_{F'/F}$, de l'ensemble des F-classes de conjugaison de $\mathbf{G}^{F'}$ dans l'ensemble des F'-classes de conjugaison de $\mathbf{G}^F$. En effet, si $y^{-1}F(y)$

appartient à $\mathbf{G}^{F'}$*, alors on associe la* F*-classe de conjugaison de* $y^{-1}F(y)$ *à la* F'*-classe de conjugaison de* $yF'(y^{-1})$.

De plus la bijection $\mathrm{N}_{F'/F}$ *préserve les cardinaux des centralisateurs. Plus exactement, soit* x *un élément de* $\mathbf{G}^{F'}$*. Il s'écrit* $x = y^{-1}F(y)$ *pour un certain* y *de* $\mathbf{G}$*. On pose* $x' = yF'(y^{-1})$*. Alors*

$$\mathrm{C}_{\mathbf{G}^{F'}}(xF) \simeq \mathrm{C}_{\mathbf{G}^F}(x'F').$$

En particulier, si c *est une* F*-classe de conjugaison de* $\mathbf{G}^{F'}$*, on a*

$$|\mathbf{G}^F|\ |c| = |\mathbf{G}^{F'}|\ |\mathrm{N}_{F'/F}(c)|.$$

Convention 2.4

Soit c *une* F*-classe de conjugaison de* $\mathbf{G}^{F'}$*. Pour tout élément* x *de* c*, on notera* $\mathrm{N}_{F'/F}(x)$ *un représentant de la* F'*-classe de conjugaison* $\mathrm{N}_{F'/F}(c)$.

Définition 2.5

La descente de Shintani de $\mathbf{G}^{F'}$ *à* $\mathbf{G}^F$*, notée* $\mathrm{Sh}_{F'/F}$*, est l'application de l'ensemble des fonctions de* F*-classe sur* $\mathbf{G}^{F'}$ *dans l'ensemble des fonctions de* F'*-classe sur* $\mathbf{G}^F$ *définie par*

$$\mathrm{Sh}_{F'/F}(f) = f \circ \mathrm{N}_{F/F'}.$$

Proposition 2.6

La descente de Shintani $\mathrm{Sh}_{F'/F}$ *est une isométrie pour le produit scalaire (défini comme au chapitre 1, section 1.2), de l'espace des fonctions de* F*-classe sur* $\mathbf{G}^{F'}$ *dans l'espace des fonctions de* F'*-classe sur* $\mathbf{G}^F$.

Cas particulier

On considère, dorénavant, la descente de Shintani, $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$, de l'ensemble des fonctions de F_0-classes sur G dans l'ensemble des fonctions centrales sur G_1.

Soit g un élément de G. La F_0-classe de conjugaison de g dans G définit l'ensemble des conjugués de $g\sigma$ par des éléments de G et réciproquement. En effet à un élément $h^{-1}g\mathrm{F}_0(h)$ de la F_0-classe de g on associe l'élément $h^{-1}g\mathrm{F}_0(h)\sigma = h^{-1}(g\sigma)h$. Nous désignerons par $cl(g\sigma)$ la F_0-classe de conjugaison de g dans G.

Un caractère χ de $\mathrm{G}_1\langle\sigma\rangle$ définit une fonction de F_0-classe de conjugaison de G : $g \mapsto \chi(g\sigma)$ et nous noterons, par abus de notation, $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\chi)$ la descente de Shintani de cette fonction.

Une base orthonormale de l'ensemble des fonctions centrales sur $\mathrm{G}\sigma$, pour le produit scalaire précédemment défini, est obtenue en prenant pour tout caractère irréductible σ-stable χ de G_1, la restriction à $\mathrm{G}\sigma$ d'une de ses extensions à $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$.

La propriété suivante sera nécessaire par la suite, pour le relèvement d'isotypie.

Proposition 2.7

Soient ℓ un nombre premier ne divisant pas n et g un élément de G. Les éléments de la F_0-classe $cl(g\sigma)$ sont ℓ-réguliers, respectivement ℓ-singuliers, si et seulement si les éléments de la classe $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(cl(g\sigma))$ sont ℓ-réguliers, respectivement ℓ-singuliers.

DÉMONSTRATION : La propriété de Lang assure de l'existence d'un élément x de $\mathbf{G}$, tel que $g = x^{-1}\mathrm{F}_0(x)$. Remarquons alors que

$$[(g\sigma)^n]^{-1} = [x^{-1}\mathrm{F}_0{}^n(x)\sigma^n]^{-1} = [x^{-1}\mathrm{F}(x)]^{-1} = \mathrm{F}(x^{-1})x.$$

Ainsi $[(g\sigma)^n]^{-1}$ est conjugué à $x\mathrm{F}(x^{-1})$ par x. Comme $x\mathrm{F}(x^{-1})$ appartient à la classe $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(cl(g\sigma))$, il suit que $[(g\sigma)^n]^{-1}$ est conjugué aux éléments de la classe $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(cl(g\sigma))$. Comme n et ℓ sont premiers entre eux, le résultat en découle. $\dashv$

Notation 2.8

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal F_0^d-stable de $\mathbf{G}$. On note $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}$ la norme de $\mathbf{T}^{\mathrm{F}}$ à $\mathbf{T}^{\mathrm{F}_0^d}$. Pour tout t dans $\mathbf{T}^{\mathrm{F}}$,

$$\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(t) = t\mathrm{F}_0^d(t)\dots\mathrm{F}_0^{\frac{n}{d}(d-1)}(t).$$

Remarque 2.9 ([Ka] lemme 2.10 iv), par exemple)

Sous les hypothèses précédentes, on a, au niveau des classes de conjugaison

$$\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(cl(t\sigma^d)) = cl(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(t)).$$

2.1.2 Descentes de certains caractères

Nous considérons la descente de Shintani $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}$ de certains caractères du groupe fini de type de Lie G.

Les caractères unipotents de la série principale

Un caractère de G_d est dit unipotent s'il apparaît dans la décomposition en caractères irréductibles d'un $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w,d}}^{\mathrm{G}_d}(1)$. Il est dit être dans la série principale de G_d s'il apparaît dans $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{1,d}}^{\mathrm{G}_d}(1)$.

Nous noterons $\mathrm{Uch}(\mathrm{G}_d)$ l'ensemble des caractères unipotents de G_d.

Soient X la variété des sous-groupes de Borel de $\mathbf{G}$ et E la représentation de permutation de G sur X^{F}, E est un G-module. On note H l'algèbre commutante de G dans E. Alors E admet une décomposition en somme directe de $H \otimes_K K$G-modules irréductibles, qui induit une bijection entre les caractères irréductibles de H et ceux de la série principale unipotente de G. Cette dernière bijection permet alors d'avoir une bijection entre les caractères irréductibles de W et ceux de la série principale unipotente de G ([DiMi1] chapitre II, corollaire 2.6).

Convention 2.10
Un caractère unipotent de la série principale de G_d *correspondant au caractère irréductible* ϕ *de* W*, par la bijection précédemment évoquée, sera noté* $\mathrm{U}_{\phi,d}$.

G. Lusztig a montré qu'il existe un ensemble, qu'on note ici $\mathcal{S}(\mathrm{W})$, contenant $\mathrm{Irr}(\mathrm{W})$, tel qu'il existe une bijection entre $\mathcal{S}(\mathrm{W})$ et $\mathrm{Uch}(\mathrm{G}_d)$ qui est indépendante de d. On la note

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S}(\mathrm{W}) & \longrightarrow & \mathrm{Uch}(\mathrm{G}_d) \\ \phi & \longmapsto & \mathrm{U}_{\phi,d} \end{array}$$

L'indice d rappelle juste que le caractère est dans G_d.
Si ϕ appartient à $\mathrm{Irr}(\mathrm{W})$, on retrouve le caractère $\mathrm{U}_{\phi,d}$ précédemment défini.

Puisque $\mathbf{G}$ est déployé, σ agit trivialement sur W, ce qui implique le lemme suivant :

Lemme 2.11
Un caractère unipotent de la série principale de G_d *est stable par* σ.

Définition 2.12
Soit ϕ *une fonction centrale de* W*. Nous posons*

$$\mathrm{R}_{\phi,d} = \frac{1}{|\mathrm{W}|} \sum_{w \in \mathrm{W}} \phi(w) \mathrm{R}_{\mathrm{T}_w,d}^{\mathrm{G}_d}(1).$$

Ainsi $\mathrm{R}_{\phi,d}$ est une fonction centrale sur G_d. Lorsque ϕ est un caractère irréductible de W, nous reconnaissons le caractère fantôme de G_d associé à ϕ.

THÉORÈME 2.13 ([DiMi1] théorème III 2.3)

Pour tout élément ψ de $\mathcal{S}(W)$, il existe une racine de l'unité notée ω_ψ, telle que pour tout caractère irréductible ϕ de W, il existe une extension bien choisie de U_ϕ à $\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle$, notée $\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\phi)$, pour laquelle nous avons la formule suivante :

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\phi)) = \sum_{\psi\in\mathcal{S}(W)} \langle \mathrm{R}_{\phi,d}, \mathrm{U}_{\psi,d}\rangle\ \omega_\psi^{n/d}\mathrm{U}_{\psi,d}.$$

Convention 2.14

Sous les notations de théorème 2.13, l'extension $\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\phi)$ de U_ϕ à $\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle$ sera appelée extension de U_ϕ donnée par la descente de Shintani à la tranche $\mathrm{G}\sigma^d$.

Les descentes de Shintani des caractères unipotents de la série principale ne sont pas toujours des caractères, même au signe près.

L'extension $\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\phi)$ dépend à priori de d. La question suivante se pose alors naturellement.

Question :

Les extensions données par Shintani à chaque tranche $\mathrm{G}\sigma^d$ se recollent-elles ? Plus précisément : soient ϕ un caractère irréductible de W et d' un diviseur de d. A-t-on

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma^{d'}\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\mathrm{E}_{d'}(\mathrm{U}_\phi) = \mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\phi)\ ?$$

Dans le chapitre suivant, nous montrerons que ceci est vérifié pour les caractères unipotents de la série principale du groupe symplectique de dimension 4 défini sur $\mathbf{F}_q$, $\mathrm{Sp}(4,q)$. Pour le faire nous aurons besoin des résultats présentés dans la deuxième partie de ce chapitre.

Certains caractères de Deligne-Lusztig

Nous donnons un dernier résultat dû à F. Digne.

Les descentes de Shintani peuvent se composer. En effet, $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}_0^r/\mathrm{F}_0^s}$ envoie une fonction de F_0^s-classe sur G_r sur une fonction de F_0^r-classe sur G_s. Si $r \equiv r_1$ modulo s, cette dernière est aussi une fonction de $\mathrm{F}_0^{r_1}$-classe à qui nous pouvons appliquer $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}_0^s/\mathrm{F}_0^{r_1}}$. On peut réitérer cette démarche jusqu'à trouver une fonction centrale sur $\mathrm{G}_{pgcd(r,s)}$. La composée ne dépend pas de la suite $(r_1, r_2\ldots)$ si deux r_i consécutifs ne sont pas égaux. Cette descente, composée u fois avec l'application ι, induite sur les fonctions par passage à l'inverse sur les éléments, où u est le nombre de foncteurs Sh composés, sera notée $\mathrm{G}_{r,s}$ (Gyoja est le premier à l'avoir considérée [Gy]). On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 2.15 ([Di2] théorème 4.5)

Soit $\mathbf{T}$ *un tore maximal* F_0*-stable de* $\mathbf{G}$*, on pose* $\mathrm{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{F}}$*. Soit* θ *un caractère de* $\mathbf{T}^{\mathrm{F}_0}$*. Pour tout* r*, notons* Θ_r *le remonté par la norme à* $\mathbf{T}^{\mathrm{F}_0^r}$ *de* θ*.*

Si la caractéristique est bonne pour $\mathbf{G}$ *et ne divise pas* n*, nous avons, pour tout entier strictement positif* r*,*

$$\mathrm{G}_{n,r}(\mathrm{R}_{\mathrm{T.F_0}^r}^{\mathrm{G.F_0}^r}(\Theta_n)) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_{pgcd(n,r)}}^{\mathrm{G}_{pgcd(n,r)}}(\Theta_{pgcd(n,r)})$$

où $\mathrm{R}_{\mathrm{T.F_0}^r}^{\mathrm{G.F_0}^r}(\Theta_n)$ *est la restriction à* $\mathrm{G.F_0}^r$ *d'une extension de* $\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}(\Theta_n)$ *au groupe* $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$*, extension qui est bien définie et qui ne dépend pas de* r*.*

Convention 2.16

Soit χ *un caractère de* G *de la forme* $\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}(\Theta)$*, vérifiant les conditions du théorème précédent, l'extension de* χ *à* $\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle$*, donnée par le théorème 2.15, sera appelée extension de* χ *donnée par la descente de Shintani à la tranche* $\mathrm{G}\sigma^d$ *et sera notée* $\mathrm{E}_d(\chi)$*.*

Remarques 2.17

On considère la descente de Shintani $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}$ *du caractère* $\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}(\theta\circ\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0})$*.*

1) Avec nos notations, le théorème 2.15 s'écrit

$$\iota\circ\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}\ [\mathrm{E}_d(\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}(\theta\circ\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}))] = \mathrm{R}_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}_0^d}}^{\mathrm{G}_d}(\theta\circ\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}).$$

2) Ce théorème montre, en particulier, que les extensions données par la descente de Shintani à chaque tranche $\mathrm{G}\sigma^d$ *se recollent et forment une extension de* $\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}(\theta\circ\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0})$ *à* $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$*. Pour tout diviseur* d' *de* d*,*

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}^{\mathrm{G}\langle\sigma^{d'}\rangle}\mathrm{E}_{d'}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}(\theta\circ\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0})) = \mathrm{E}_d(\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{G}}(\theta\circ\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0})).$$

2.2 Caractères fantômes

Le but de cette section est d'étendre les caractères fantômes au groupe $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$. Pour cela, nous passons par un groupe isomorphe à $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$, qui est obtenu par produit en couronne. Nous faisons les constructions dans ce groupe puis transposons les résultats à l'aide de l'isomorphisme. En même temps, nous mettons en évidence les propriétés qui seront utiles pour obtenir des résultats souhaités sur les descentes de Shintani (voir paragraphes 2.2.2 et 2.2.4).

On pose

$$\mathbf{G}^{\diamond} = \mathbf{G}\times\mathbf{G}\times\ldots\times\mathbf{G}\times\mathbf{G}\ (n \text{ termes})$$

et

$$\mathbf{T}_1^\diamond = \mathbf{T}_{1,1} \times \mathbf{T}_{1,1} \times \ldots \times \mathbf{T}_{1,1} \times \mathbf{T}_{1,1} \ (n \text{ termes}).$$

Le groupe de Weyl de $\mathbf{G}^\diamond$ relativement à $\mathbf{T}_1^\diamond$ est

$$\mathrm{W}^\diamond = \mathrm{W} \times \mathrm{W} \times \ldots \times \mathrm{W} \times \mathrm{W} \ (n \text{ termes}).$$

Le groupe des points fixes de $\mathbf{G}^\diamond$ sous F, où F agit sur chaque composante, est

$$\mathrm{G}^\diamond = \mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \ldots \times \mathrm{G} \times \mathrm{G} \ (n \text{ termes}).$$

Soient $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ un élément de $\mathbf{G}^\diamond$ et π la permutation circulaire de longueur n définie sur le n-uplet $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ suivante :

$$\pi(g_1,\ g_2, \ldots,\ g_n) = (g_{\pi^{-1}(1)},\ g_{\pi^{-1}(2)}, \ldots,\ g_{\pi^{-1}(n)}) = (g_n,\ g_1, \ldots,\ g_{n-1}).$$

Nous avons les actions sur $\mathbf{G}^\diamond$, $\mathrm{G}^\diamond$ et $\mathrm{W}^\diamond$ suivantes :
• π agit par permutation des composantes,
• F_0 agit sur chaque composante. Cette action est triviale sur $\mathrm{W}^\diamond$ car $\mathbf{G}$ est déployé.

On pose

$$\mathrm{F}_\pi = \pi \mathrm{F}_0.$$

2.2.1 Quelques résultats dans les produits en couronne

Les résultats qui suivent sont, le plus souvent, des cas particuliers de résultats sur les produits en couronne dû à C. Bonnafé, F. Digne et J. Michel. Pour plus de détails on se reportera donc à [Bon] et [DiMi3].

Trois isomorphismes

Comme

$$\mathrm{F}_\pi(g) = (\mathrm{F}_0(g_n),\ \mathrm{F}_0(g_1), \ldots,\ \mathrm{F}_0(g_{n-1})),$$

$\mathrm{F}_\pi(g) = g$ si et seulement si g_1 appartient à G et $g_i = \mathrm{F}_0(g_{i-1})$ pour tout i, $2 \leq i \leq n$.

Il suit un isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} \Phi\ : & \mathbf{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{G} \\ & (g,\ \mathrm{F}_0(g), \ldots,\ {\mathrm{F}_0}^{n-1}(g)) & \mapsto & g. \end{array}$$

Cet isomorphisme induit une bijection au niveau des caractères : si χ appartient à $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$, alors $\chi \circ \Phi$ appartient à $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi})$. On pose $\chi^\diamond = \chi \circ \Phi$.

Via l'isomorphisme Φ, l'action de π^{-1} sur $\mathbf{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi}$ se transporte en l'action de σ sur G. Il suit alors un second isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\Phi} & : & \mathbf{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{G}\langle\sigma\rangle \\ & & (g,\ \mathrm{F}_0(g), \ldots,\ {\mathrm{F}_0}^{n-1}(g))\pi^{-1} & \mapsto & g\sigma. \end{array}$$

Il induit aussi une bijection au niveau des caractères : si χ appartient à $\mathrm{Irr}(\mathrm{G}\langle\sigma\rangle)$, alors $\chi \circ \widetilde{\Phi}$ appartient à $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle)$. On pose $\chi^\diamond = \chi \circ \widetilde{\Phi}$. Cela ne portera pas à confusion avec la notation précédente sachant que les caractères considérés vivent dans des groupes différents.

Les isomorphismes précédents impliquent la construction suivante, qui sera utilisée par la suite. Soit χ un caractère de $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$. Supposons que l'on connaisse une extension $\widetilde{\chi^\diamond}$ de $\chi^\diamond$ dans $\mathrm{Irr}(\mathbf{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle)$. Alors nous pouvons définir une extension de χ dans $\mathrm{Irr}(\mathrm{G}\langle\sigma\rangle)$ en posant

$$\widetilde{\chi} = \widetilde{\chi^\diamond} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}.$$

Enfin, il y a un troisième isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{W} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{W}^{\diamond\pi} \\ w & \mapsto & (w,\ w, \ldots,\ w). \end{array}$$

Un caractère π-stable de $\mathrm{W}^\diamond$ est de la forme $\chi \otimes \chi \otimes \ldots \otimes \chi$, où χ est un caractère de W. On note $\chi^\diamond$ le caractère π-stable de $\mathrm{W}^\diamond$ donné par $\chi \otimes \chi \otimes \ldots \otimes \chi$.

Les π-classes de conjugaison de $\mathrm{W}^\diamond$

Soit $w = (w_1, \ldots, w_n)$ un élément de $\mathrm{W}^\diamond$. Notons $cl(w)_\pi$ la π-classe de w dans $\mathrm{W}^\diamond$. C'est l'ensemble

$$cl(w)_\pi = \{z^{-1}w\pi(z),\ z \in \mathrm{W}^\diamond\}.$$

Notons $cl_{\mathrm{W}}(w)$ la classe de $w_n w_{n-1} \ldots w_2 w_1$ dans W.

Lemme 2.18 (cas particulier de [Bon] lemme 2.2.1, par exemple)
Un élément $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathrm{W}^\diamond$ est dans $cl(w)_\pi$ si et seulement si

$$cl_{\mathrm{W}}(v) = cl_{\mathrm{W}}(w).$$

L'application, qui à $cl(w)_\pi$ associe $cl_{\mathrm{W}}(w)$, induit une bijection entre l'ensemble des π-classes de conjugaison de $\mathrm{W}^\diamond$ et l'ensemble des classes de conjugaison de W. L'égalité suivante est vérifiée :

$$|cl(w)_\pi|\ |\mathrm{W}| = |cl_{\mathrm{W}}(w)|\ |\mathrm{W}^\diamond|.$$

Remarques 2.19

i) Les éléments $(w_1, \ldots, w_n)$ *et* $(w_n w_{n-1} \cdots w_2 w_1, 1, \ldots, 1)$ *sont toujours dans la même* π*-classe de conjugaison de* $\mathrm{W}^\diamond$ *(d'après le lemme 2.18).*

ii) Soit r *un entier. Notons* d *le pgcd de* r *et* n*. Comme* $\mathrm{W}^{\diamond\pi^r}$ *est isomorphe à* d *copies de* W *permutées circulairement par* π*, il y a aussi une bijection entre les* π*-classes de conjugaison de* $\mathrm{W}^{\diamond\pi^r}$ *et les classes de conjugaison de* W*.*

Les classes des tores maximaux F_π-stables de $\mathbf{G}^\diamond$

On a une bijection entre les classes de tores F_π-stables de $\mathbf{G}^\diamond$ et les classes de tores F-stables de $\mathbf{G}$. Ainsi les classes de tores maximaux F_π-stables de $\mathbf{G}^\diamond$ sont paramétrées par les classes de conjugaison de W.

Notation 2.20

Soit w *un élément de* W*, on note* $\mathbf{T}^\diamond_w$ *un tore maximal* F_π*-stable de* $\mathbf{G}^\diamond$ *associé à* w*. On pose* $\mathrm{T}^\diamond_w = (\mathbf{T}^\diamond_w)^{\mathrm{F}_\pi}$*, le groupe des points fixes de* $\mathbf{T}^\diamond_w$ *par* F_π*.*

Les classes des quasi-tores maximaux F_π-stables de $\mathbf{G}^\diamond\langle\pi\rangle$

Définition 2.21 ([Bon] définition 6.1.3 ou [DiMi3] définition 1.2)

On appelle quasi-tore maximal un sous-groupe de Lévi d'un normalisateur dans $\mathbf{G}^\diamond\langle\pi\rangle$ *d'un sous-groupe de Borel de* $\mathbf{G}^\diamond$*.*

Soit r un entier.

Proposition 2.22 ([DiMi3] proposition 1.40)

L'ensemble des classes de $(\mathbf{G}^\diamond\langle\pi^r\rangle)^{\mathrm{F}_\pi}$*-conjugaison des quasi-tores maximaux* F_π*-stables de* $\mathbf{G}^\diamond\langle\pi^r\rangle$ *est en bijection avec l'ensemble des classes de* $(\mathbf{G}^{\diamond\pi^r})^{\mathrm{F}_\pi}$*-conjugaison des tores maximaux* F_π*-stables de* $\mathbf{G}^{\diamond\pi^r}$*. En effet, dans la* $(\mathbf{G}^\diamond\langle\pi^r\rangle)^{\mathrm{F}_\pi}$*-classe d'un quasi-tore il existe un quasi-tore* $\mathbf{T}$ *qui contient* π^r*. On associe alors, à cette classe, la* $(\mathbf{G}^{\diamond\pi^r})^{\mathrm{F}_\pi}$*-classe de* $\mathbf{G}^{\diamond\pi^r}$ *qui contient* $(\mathbf{T}^{\pi^r})^\circ$*.*

Une conséquence du lemme 2.18 est la proposition suivante :

Proposition 2.23

Les classes de $(\mathbf{G}^{\diamond\pi^r})^{\mathrm{F}_\pi}$*-conjugaison des tores maximaux* F_π*-stables de* $\mathbf{G}^{\diamond\pi^r}$ *sont paramétrées par les* π*-classes de conjugaison de* $(\mathrm{W}^\diamond)^{\pi^r}$ *relativement au tore* $(\mathbf{T}^\diamond_1)^{\pi^r}$ *et donc par les classes de conjugaison de* W*.*

Notation 2.24

Soit w un élément de W*, on note* $\mathbf{T}_w^\diamond(\pi^r)$ *un quasi-tore maximal de la classe de* $(\mathbf{G}^\diamond\langle\pi^r\rangle)^{\mathrm{F}_\pi}$*-conjugaison des quasi-tores maximaux* F_π*-stables de* $\mathbf{G}^\diamond\langle\pi^r\rangle$ *paramétrée par w en composant les deux bijections précédentes (voir propositions 2.22 et 2.23).*

On pose $\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^r) = [\mathbf{T}_w^\diamond(\pi^r)]^{\mathrm{F}_\pi}$*, le groupe des points fixes de* $\mathbf{T}_w^\diamond(\pi^r)$ *sous* F_π*.*

Exemples

Soit w un élément de W.

• La classe de w correspond à la π-classe de $(w, 1, \ldots, 1)$ dans $\mathrm{W}^\diamond$ et

$$\mathbf{T}_{w,1} \times \mathbf{T}_{1,1} \times \ldots \times \mathbf{T}_{1,1}$$

est un quasi-tore maximal F_π-stable de la $(\mathbf{G}^\diamond)^{\mathrm{F}_\pi}$-classe de $\mathbf{T}_w^\diamond(1)$.

• La classe de w correspond à la π-classe de $(w, 1, \ldots, 1, w, 1, \ldots, 1, w, 1, \ldots, 1)$ dans $(\mathrm{W}^\diamond)^{\pi^d}$, où le n-uplet est formé de $\frac{n}{d}$ répétitions du d-uplet $(w, 1, \ldots, 1)$ et

$$(\mathbf{T}_{w,1} \times \mathbf{T}_{1,1} \times \ldots \times \mathbf{T}_{1,1} \times \mathbf{T}_{w,1} \times \ldots \times \mathbf{T}_{w,1} \times \mathbf{T}_{1,1} \times \ldots \times \mathbf{T}_{1,1}) \rtimes \langle\pi^d\rangle$$

est un quasi-tore maximal F_π-stable de la $(\mathbf{G}^\diamond\langle\pi^d\rangle)^{\mathrm{F}_\pi}$-classe de $\mathbf{T}_w^\diamond(\pi^d)$.

• La classe de w correspond à la π-classe de $(w, w, \ldots, w)$ dans $(\mathrm{W}^\diamond)^\pi$ et

$$(\mathbf{T}_{w,1} \times \mathbf{T}_{w,1} \times \ldots \times \mathbf{T}_{w,1}) \rtimes \langle\pi\rangle$$

est un quasi-tore maximal F_π-stable de la $(\mathbf{G}^\diamond\langle\pi\rangle)^{\mathrm{F}_\pi}$-classe de $\mathbf{T}_w^\diamond(\pi)$.

2.2.2 Caractères fantômes et descentes de Shintani

Extension dans le groupe de Weyl

Lemme 2.25 ([Bon] proposition 2.3.1)

Soit χ un caractère irréductible de W*. Il existe une unique extension de* $\chi^\diamond$ *à* $\mathrm{W}^\diamond\langle\pi\rangle$*, notée* $\widetilde{\chi}^\diamond$*, qui vérifie, pour tout* $w = (w_1, \ldots, w_n)$ *dans* $\mathrm{W}^\diamond$*,*

$$\begin{aligned} \widetilde{\chi}^\diamond(w\pi) &= \chi(w_{\pi^{n-1}(1)} w_{\pi^{n-2}(1)} \ldots w_{\pi(1)} w_1) \\ &= \chi(w_n w_{n-1} \ldots w_2 w_1). \end{aligned}$$

Soit f une fonction centrale de W. On définit $\widetilde{f}^\diamond(w\pi)$ par linéarité :

$$\widetilde{f}^\diamond(w\pi) = f(w_n w_{n-1} \ldots w_2 w_1).$$

Caractères fantômes

Soit w un élément de $\mathrm{W}^\diamond$. Le foncteur d'induction de Deligne-Lusztig de $\mathrm{G}^\diamond$ définit à l'aide de la structure rationnelle donnée par F_π sur $\mathbf{G}^\diamond$ et d'un tore maximal F_π-stable $\mathbf{T}_w^\diamond$ de $\mathbf{G}^\diamond$, sera noté $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond}^{\mathrm{G}^\diamond}$. Il correspond, par l'application Φ, au foncteur $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w}^{\mathrm{G}}$ de G ([Di2] proposition 3.1).

Soient $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ un élément de $\mathrm{W}^\diamond$ et χ une fonction centrale de W. Posons

$$\mathrm{R}_\chi^\diamond = \frac{1}{|\mathrm{W}^\diamond|} \sum_{w \in \mathrm{W}^\diamond} \widetilde{\chi}^\diamond(w\pi) \mathrm{R}_{\mathrm{T}^\diamond_{w_n w_{n-1} \ldots w_1}}^{\mathrm{G}^\diamond}(1).$$

D'après les lemmes 2.18 et 2.25, $\mathrm{R}_\chi^\diamond$ peut être défini de manière équivalente ainsi :

$$\mathrm{R}_\chi^\diamond = \frac{1}{|\mathrm{W}|} \sum_{w \in \mathrm{W}} \chi(w) \mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond}^{\mathrm{G}^\diamond}(1).$$

Il suit que $\mathrm{R}_\chi^\diamond$ est une fonction centrale de $\mathrm{G}^\diamond$ et que

$$\mathrm{R}_\chi^\diamond = \mathrm{R}_\chi \circ \Phi.$$

Lorsque χ est un caractère irréductible de W, une telle fonction centrale sera appelée caractère fantôme de $\mathrm{G}^\diamond$.

Le caractère fantôme R_χ est une fonction centrale et donc admet de multiples extensions au groupe $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$. Le but de ce paragraphe est de définir une extension bien particulière qui vérifie certaines propriétés (sa définition est liée à la notion de caractère fantôme). Pour cela, on passe par le groupe $\mathrm{G}^\diamond$. On définit une extension $\widetilde{\mathrm{R}}_\chi^\diamond$ de $\mathrm{R}_\chi^\diamond$ au groupe $\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle$, pour chaque caractère fantôme $\mathrm{R}_\chi^\diamond$ de $\mathrm{G}^\diamond$. Les isomorphismes Φ et $\widetilde{\Phi}$ permettent de passer d'un groupe à l'autre.

Induction de Deligne-Lusztig dans les groupes non connexes

L'induction de Deligne-Lusztig dans les groupes non connexes a été développée par F. Digne et J. Michel ; deux références sont [DiMi3] et [Bon]. Ils ont construits le foncteur d'induction $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond\langle\pi^d\rangle}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi^d\rangle}$.

Proposition 2.26 ([DiMi3] théorème 4.13 et proposition 2.10)

Le foncteur d'induction $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^d)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi^d\rangle}$ *vérifie*

$$i)\quad \mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^d)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi^d\rangle}(1)(\pi^d) = \mathrm{R}_{[\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^d)]^{\circ\pi^d}}^{(\mathrm{G}^\diamond)^{\pi^d}}(1)(1),$$

$$ii)\quad \mathrm{Res}_{\mathrm{G}^\diamond}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi^d\rangle}\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^d)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi^d\rangle}(1) = \mathrm{R}_{[\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^d)]^\circ}^{\mathrm{G}^\diamond}(1).$$

Remarques 2.27

1) Le caractère $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^d)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi^d\rangle}(1)$ *construit par F. Digne et J. Michel dans [DiMi3] est le caractère construit par F. Digne pour son théorème 4.5 dans [Di2] (cité, ici, en 2.15). En effet, pour les deux constructions sont utilisées la même variété de Deligne-Lusztig et la même action de* π *sur cette variété.*

2) Les isomorphismes utilisés par F. Digne dans [Di2] pour traduire ses résultats entre G *et* $\mathrm{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}$ *puis* $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$ *et* $\mathrm{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle$ *sont identiques à ceux utilisés ici.*

Notation 2.28

On note $\mathrm{T}_w(\sigma^d)$ *l'image par* $\widetilde{\Phi}$ *de* $\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^d)$ *et* $\mathrm{T}_w^\circ(\sigma^d) = \mathrm{T}_w(\sigma^d)\cap\mathrm{G}$.

On pose

$$\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w(\sigma^d)}^{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}(1) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi^d)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi^d\rangle}(1)\circ\widetilde{\Phi}^{-1}.$$

Remarque 2.29

On a

$$(\mathrm{T}_w^\circ(\sigma^d))^{\sigma^d} = \mathrm{T}_{w,d}.$$

Enfin, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 2.30

Supposons que la caractéristique de $\mathbf{F}_q$ *soit bonne pour* $\mathbf{G}$ *et qu'elle ne divise pas* n*. Soit* d' *un diviseur de* d*, on a les trois égalités suivantes :*

$$i)\qquad \mathrm{R}_{\mathrm{T}_w(\sigma^d)}^{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}(1) = \mathrm{E}_d(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w}^{\mathrm{G}}(1)),$$

$$ii)\qquad \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}[\mathrm{E}_d(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w}^{\mathrm{G}}(1))] = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w,d}}^{\mathrm{G}_d}(1),$$

$$iii)\qquad \mathrm{Res}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}^{\mathrm{G}\langle\sigma^{d'}\rangle}\mathrm{E}_{d'}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w}^{\mathrm{G}}(1)) = \mathrm{E}_d(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w}^{\mathrm{G}}(1)).$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des remarques 2.27 et 2.29 ainsi que du théorème 2.15. Pour le second point, l'application ι n'apparaît pas car

$$\begin{aligned} \iota \circ \mathrm{R}^{\mathrm{G}_d}_{[\mathrm{T}_w(\sigma^d)]^{\sigma^d}}(1) &= [\mathrm{R}^{\mathrm{G}_d}_{\mathrm{T}_{w,d}}(1)]^* \\ &= \mathrm{R}^{\mathrm{G}_d}_{\mathrm{T}_{w,d}}(1^*) \\ &= \mathrm{R}^{\mathrm{G}_d}_{\mathrm{T}_{w,d}}(1). \end{aligned}$$

⊣

Extensions des caractères fantômes

Soient u un entier et d le pgcd de u et n. Posons, pour tout élément g de $\mathrm{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi}$ et pour toute fonction centrale χ de W,

$$\widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_\chi(g\pi^u) = \frac{1}{|\mathrm{W}^{\diamond \pi^d}|} \sum_{w=(w_1,w_2,\ldots,w_d)\in \mathrm{W}^d} \widetilde{\chi}^\diamond(w\pi) \mathrm{R}^{\mathrm{G}^\diamond\langle \pi^d\rangle}_{\mathrm{T}^\diamond_{w_d w_{d-1}\cdots w_1}(\pi^d)}(1)(g\pi^u).$$

Ce qui s'écrit aussi, d'après les lemmes 2.18 et 2.25

$$\widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_\chi(g\pi^u) = \frac{1}{|\mathrm{W}|} \sum_{w\in \mathrm{W}} \chi(w) \mathrm{R}^{\mathrm{G}^\diamond\langle \pi^d\rangle}_{\mathrm{T}^\diamond_w(\pi^d)}(1)(g\pi^u).$$

Ainsi, $\widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_\chi$ est une fonction centrale de $\mathrm{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle$ dont la restriction à $\mathrm{G}^\diamond$ est $\mathrm{R}^\diamond_\chi$ (propositions 2.26 et 2.22). De plus elle définit $\widetilde{\mathrm{R}}_\chi$, une fonction centrale sur $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$, dont la restriction à G est R_χ, par

$$\widetilde{\mathrm{R}}_\chi = \widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_\chi \circ \widetilde{\Phi}^{-1}.$$

Il suit que

$$\widetilde{\mathrm{R}}_\chi(g\sigma^d) = \frac{1}{|\mathrm{W}|} \sum_{w\in \mathrm{W}} \chi(w) \mathrm{R}^{\mathrm{G}\langle \sigma^d\rangle}_{\mathrm{T}_w(\sigma^d)}(1)(g\sigma^d).$$

Corollaire 2.31

Pour toute fonction centrale χ de W, *on a*

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\widetilde{\mathrm{R}}_\chi) = \mathrm{R}_{\chi,d}.$$

Démonstration : D'après le corollaire 2.30, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\widetilde{\mathrm{R}}_\chi) &= \tfrac{1}{|\mathrm{W}|} \textstyle\sum_{w\in \mathrm{W}} \chi(w)\ \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}[\mathrm{R}^{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}_{\mathrm{T}_w(\sigma^d)}(1)] \\ &= \tfrac{1}{|\mathrm{W}|} \textstyle\sum_{w\in \mathrm{W}} \chi(w) \mathrm{R}^{\mathrm{G}_d}_{\mathrm{T}_{w,d}}(1) \\ &= \mathrm{R}_{\chi,d}. \end{aligned}$$

⊣

2.2.3 Propriétés des extensions des caractères fantômes

Dans le groupe non connexe $\mathbf{G}^\diamond\langle\pi\rangle$, la notion de sous-groupe parabolique F_π-stable ainsi que celle de sous-groupe de Lévi F_π-stable, sont définis (voir [DiMi3] et [Bon]).

Soit $\mathbf{L}$ un sous-groupe de Lévi F_0-stable d'un parabolique F_0-stable $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$. A conjugaison près, on peut supposer $\mathbf{T}_{1,1} \subset \mathbf{L}$, on note alors W_L le groupe de Weyl W_L par rapport à $\mathbf{T}_{1,1}$.

On pose $\mathbf{L}^\diamond = \mathbf{L} \times \mathbf{L} \times \ldots \times \mathbf{L}$ (n termes) et $\mathbf{P}^\diamond = \mathbf{P} \times \mathbf{P} \times \ldots \times \mathbf{P}$ (n termes). Alors $\mathbf{L}^\diamond\langle\pi\rangle$ est un sous-groupe de Lévi F_π-stable du parabolique F_π-stable $\mathbf{P}^\diamond\langle\pi\rangle$ de $\mathbf{G}^\diamond\langle\pi\rangle$.

On note $\mathrm{L}^\diamond\langle\pi\rangle$ le groupe des points fixes de $\mathbf{L}^\diamond\langle\pi\rangle$ par F_π. On peut alors construire le foncteur d'induction $\mathrm{R}_{\mathrm{L}^\diamond\langle\pi\rangle}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}$ (voir [DiMi3] paragraphe 2).

Lemme 2.32 ([Bon] lemme 8.3.1)
Soit ϕ une fonction centrale de W_L. Elle définit une fonction centrale $\mathrm{R}_\phi^{\diamond,\mathrm{L}}$ de $\mathrm{L}^\diamond$ et une extension $\widetilde{\mathrm{R}}_\phi^{\diamond,\mathrm{L}}$ à $\mathrm{L}^\diamond\langle\pi\rangle$ construite comme pour le groupe $\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle$. On a

$$\mathrm{R}_{\mathrm{L}^\diamond\langle\pi\rangle}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}\widetilde{\mathrm{R}}_\phi^{\diamond,\mathrm{L}} = \widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_{\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}_\mathrm{L}}^{\mathrm{W}}\phi}.$$

Lemme 2.33 ([Bon] lemme 8.1.2)
Soient χ et χ' deux fonctions centrales sur W. On a

$$\langle\widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_\chi|\widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_{\chi'}\rangle_{\mathrm{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle} = \langle\chi|\chi'\rangle_\mathrm{W}.$$

Dans [Bon], ces lemmes sont montrés pour le groupe $\mathrm{GL}(n,q)$, mais la construction est purement formelle et s'applique à tout groupe réductif.

2.2.4 Deux caractères unipotents particuliers

Le caractère trivial

Proposition 2.34 ([DiMi3] proposition 4.12)
Le caractère trivial vérifie

$$\widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_{\mathrm{id}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle}.$$

Ainsi, pour tout d, on a

$$\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id}}(\sigma^d) = \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id}})(1) = \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id},d}(1) = \mathrm{Id}_d(1).$$

En particulier

$$\mathrm{E}_1(\mathrm{Id}) = \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id}}.$$

Le caractère de Steinberg

F. Digne et J. Michel ont défini un opérateur de dualité $\mathrm{D}_{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}$, qui étend l'opérateur de dualité d'Alvis-Curtis aux groupes non connexes ([DiMi3] paragraphe 3.1). On définit le caractère de Steinberg du groupe $\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle$ ainsi ([DiMi3] définition 3.16) :

$$\mathrm{St}_{\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle} = \mathrm{D}_{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}\mathrm{Id}_{\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle}.$$

Alors $\mathrm{St}_{\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle}$ est un caractère irréductible de $\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle$ qui étend le caractère de Steinberg $\mathrm{St}_{\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}}$ de $\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}$.

Posons

$$\epsilon_{\mathrm{G}^\diamond\cdot\pi} = (-1)^{\mathbf{F}_q-\text{rang de } \mathrm{G}^{\diamond\pi}}$$

et, pour tout élément w de W,

$$\epsilon_{[\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)]^\circ\cdot\pi} = (-1)^{\mathbf{F}_q-\text{rang de } [\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)]^{\circ\pi}}.$$

On a d'une part ([DiMi3] corollaire 4.6)

$$\mathrm{D}_{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle} = (\epsilon_{\mathrm{G}^\diamond\cdot\pi})(\epsilon_{[\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)]^\circ\cdot\pi})\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle},$$

d'autre part ([DiMi2] remarque 12.10)

$$(\epsilon_{[\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)]^\circ\cdot\pi})(\epsilon_{\mathrm{G}^\diamond\cdot\pi}) = (-1)^{l(w)} = \mathrm{sgn}(w),$$

où sgn est le caractère signe de W.

Ceci implique la proposition suivante.

Proposition 2.35
Le caractère de Steinberg vérifie

$$\mathrm{St}_{\mathbf{G}^{\diamond\mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle} = \widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_{\mathrm{sgn}}.$$

Démonstration : On a simplement

$$\begin{aligned}
\mathrm{St}_{\mathbf{G}^{\diamond \mathrm{F}_\pi}\langle\pi\rangle} &= \mathrm{D}_{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}\tfrac{1}{|\mathrm{W}|}\textstyle\sum_{w\in\mathrm{W}}\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}(1)\\
&= \tfrac{1}{|\mathrm{W}|}\textstyle\sum_{w\in\mathrm{W}}(\epsilon_{\mathrm{G}^\diamond\cdot\pi})(\epsilon_{[\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)]^\circ\cdot\pi})\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}(1)\\
&= \tfrac{1}{|\mathrm{W}|}\textstyle\sum_{w\in\mathrm{W}}\mathrm{sgn}(w)\mathrm{R}_{\mathrm{T}_w^\diamond(\pi)}^{\mathrm{G}^\diamond\langle\pi\rangle}(1)\\
&= \widetilde{\mathrm{R}}^\diamond_{\mathrm{sgn}}.
\end{aligned}$$

$\dashv$

Ainsi, pour tout d, on a

$$\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{sgn}}(\sigma^d) = \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{sgn}})(1) = \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{sgn},d}(1) = \mathrm{St}_d(1).$$

En particulier

$$\mathrm{E}_1(\mathrm{St}) = \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{sgn}}$$

et

$$\mathrm{E}_1(\mathrm{St})(\sigma^d) = \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\mathrm{E}_1(\mathrm{St}))(1) = \mathrm{St}_d(1).$$

On dira que $\mathrm{E}_1(\mathrm{St})$ est le caractère de Steinberg de $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$.

Chapitre 3

Le groupe symplectique Sp(4,q)

Dans ce chapitre nous considérons les groupes symplectiques finis de dimension 4 définis sur $\mathbf{F}_q$, q impair, $\mathrm{Sp}(4, q)$, ainsi que leurs extensions obtenues par un endomorphisme de Frobenius. Nous appliquons à ces groupes le théorème de relèvement des isotypies (théorème 1.29) démontré dans le premier chapitre.

Pour cela nous décrivons le groupe algébrique symplectique de dimension 4, les groupes finis, leurs extensions, les sous-groupes de Sylow abéliens et leurs normalisateurs. Puis sont explicitées les différentes configurations $(G,\ \ell,\ I,\ \widetilde{G})$ obtenues suivant les degrés de l'extension et le sous-groupe de Sylow choisis. On énonce et démontre deux théorèmes de réduction, qui ramènent la vérification de la compatibilité de toutes les configurations à la vérification de la compatibilité de deux types de configuration, S1 et Sm et d'une hypothèse d'équivariance. Démontrer la compatibilité des configurations de type S1 et Sm demande plus de travail et cela sera fait dans les deux derniers chapitres de cette thèse. L'hypothèse d'équivariance sera alors vérifiée.

Enfin la dernière partie de ce chapitre est consacrée aux caractères unipotents de la série principale de $\mathrm{Sp}(4, q)$ et leurs descentes de Shintani. Nous montrons un théorème de recollement des extensions données par la descente de Shintani à différentes tranches (théorème 3.18). Ce dernier résultat sera nécessaire pour montrer la compatibilité de la configuration de type Sm (voir le chapitre 5).

3.1 Le groupe algébrique symplectique

Dorénavant p est différent de 2.

Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(4,\overline{\mathbf{F}}_p)$ est le groupe des matrices inversibles de taille 4×4 à coefficients dans $\overline{\mathbf{F}}_p$, qui préservent la forme symplectique

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire, qu'une telle matrice M doit vérifier

$$M \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} {}^tM = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}.$$

On le désignera par $\mathbf{G}$, il est algébrique semi-simple (donc réductif), simplement connexe ([Ca] paragraphe 1.19) et de centre $\{\pm 1\}$. La caractéristique de $\mathbf{F}_p$ est bonne pour $\mathbf{G}$ car différente de 2. Le groupe $\mathbf{G}$ est muni d'une structure rationnelle définie par l'endomorphisme de Frobenius $\mathrm{F}_0 \ : \ (a_{ij}) \mapsto (a_{ij}^{q_0})$. On pose $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0^n$. Le groupe $\mathbf{G}$ est déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$.

Le tore déployé $\mathbf{T}_{1,1}$

Pour deux éléments a et b de $\overline{\mathbf{F}}_p$, on pose

$$t_{a,b} = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a^{-1} & & \\ & & b & \\ & & & b^{-1} \end{pmatrix}.$$

C'est un élément de $\mathbf{G}$. On choisit pour $\mathbf{T}_{1,1}$

$$\mathbf{T}_{1,1} = \left\{ t_{a,b}, \ a, b \in \overline{\mathbf{F}}_p^* \right\}.$$

C'est un tore maximal déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$. On pourra représenter l'élément $t_{a,b}$ de $\mathbf{T}_{1,1}$ par le couple (a, b).

Le groupe de Weyl

On désignera par $\mathrm{W} = \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_{1,1})/\mathbf{T}_{1,1}$, le groupe de Weyl de $\mathbf{G}$ relativement à $\mathbf{T}_{1,1}$. Il est de type C_2. Il est diédral d'ordre 8, engendré par deux éléments s et t qui sont d'ordre 2. Un élément de Coxeter est $c = st$. L'élément de plus grande longueur par rapport à s et t est $w_0 = stst$. Des représentants dans $\mathbf{G}$ de ces éléments sont donnés par la suite. Les cinq classes de conjugaison de W peuvent être représentées par $1,\ s,\ t,\ c$ et w_0. Les degrés de W sont $2,\ 4$ et 6 [Bou2], ses nombres réguliers sont donc $1,\ 2$ et 4. La table des caractères de W est la suivante :

	1	s	w_0	t	st
id	1	1	1	1	1
α_s	1	1	1	-1	-1
α_t	1	-1	1	1	-1
sgn	1	-1	1	-1	1
α_2	2	0	-2	0	0

Représentants des éléments du groupe de Weyl

• Un représentant de s :

$$\dot{s} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right).$$

Il est d'ordre 2.

• Un représentant de t :

$$\dot{t} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right).$$

Il est d'ordre 4. Le signe moins est impliqué par le fait que $\dot{t}$ appartient à $\mathbf{G}$.

• Des représentants de c et w_0 :

On choisit $\dot{c} = \dot{s}\dot{t}$ et $\dot{w}_0 = \dot{c}^2$. On a

$$\dot{c} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & & -1 \\ & & 1 & \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \dot{w}_0 = \left(\begin{array}{cc|cc} & -1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right).$$

Ils sont, respectivement, d'ordre 8 et 4.

• On pose
$$\dot{\mathrm{W}} = \langle \dot{s}, \dot{t} \rangle.$$
On remarque que
$$\dot{\mathrm{W}} = \langle {}^{\dot{s}}\dot{t}, \dot{t} \rangle \rtimes \langle \dot{s} \rangle$$
et que ${}^{\dot{s}}\dot{t}$ et $\dot{t}$ commutent. L'ordre de $\dot{\mathrm{W}}$ est 32.

Le groupe $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_{1,1})$

La suite exacte
$$0 \to \mathbf{T}_{1,1} \to \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_{1,1}) \to \mathrm{W} \to 1$$
montre que
$$\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{T}_{1,1}) = \mathbf{T}_{1,1}\dot{\mathrm{W}}.$$
Les actions des éléments de $\dot{\mathrm{W}}$ sur un élément (a, b) de $\mathbf{T}_{1,1}$ sont données par :
$$\begin{aligned} {}^{\dot{s}}(a,b) &= (b,a) \\ {}^{\dot{t}}(a,b) &= (a,b^{-1}) \\ {}^{\dot{c}}(a,b) &= (b^{-1},a) \\ {}^{\dot{w}_0}(a,b) &= (a^{-1},b^{-1}). \end{aligned}$$
On a
$$\dot{\mathrm{W}} \cap \mathbf{T}_{1,1} = \langle {}^{\dot{s}}\dot{t}^2, \dot{t}^2 \rangle.$$
Enfin,
$$\dot{t}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^{\dot{s}}\dot{t}^2 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$
puis
$$\dot{\mathrm{W}}/\langle {}^{\dot{s}}\dot{t}^2, \dot{t}^2 \rangle \simeq \mathrm{W}.$$

Deux sous-groupes de Lévi

• $\mathbf{L}_s$ est le sous-groupe de Lévi qui est le centralisateur d'un élément semi-simple $t_{a,a},\ a \neq \pm 1$: $\mathbf{L}_s = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(t_{a,a})$. Le centralisateur de $t_{a,a}$, $a \neq \pm 1$ est de la forme
$$\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(t_{a,a}) = \begin{pmatrix} x_1 & & x_2 & \\ & y_1 & & y_2 \\ x_3 & & x_4 & \\ & y_3 & & y_4 \end{pmatrix},$$

où $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ y_1,\ y_2,\ y_3$ et y_4 sont des éléments de $\overline{\mathbf{F}}_p$. Pour que cette matrice soit dans $\mathbf{G}$ il faut que

$$x_1x_4 - x_2x_3 \neq 0$$

et

$$y_1 = \frac{x_4}{x_1x_4 - x_2x_3},\ y_2 = \frac{-x_3}{x_1x_4 - x_2x_3},\ y_3 = \frac{-x_2}{x_1x_4 - x_2x_3},\ y_4 = \frac{x_1}{x_1x_4 - x_2x_3}.$$

Ainsi on a un isomorphisme de $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ dans $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(t_{a,a})$.

Le sous-groupe $\mathbf{L}_s$ est aussi le sous-groupe de Lévi qui contient $\mathbf{T}_{1,1}$ et qui a $\langle s\rangle$ comme groupe de Weyl. On a

$$\mathbf{L}_s \simeq \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p).$$

• $\mathbf{L}_t$ est le sous-groupe de Lévi qui est le centralisateur d'un élément semi-simple $t_{a,1},\ a \neq \pm 1$: $\mathbf{L}_t = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(t_{a,1})$. La forme de l'élément $t_{a,1}$, $a \neq \pm 1$, donne immédiatement un isomorphisme entre $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(t_{a,1})$ et $\overline{\mathbf{F}}_p^* \times \mathrm{SL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$.

Le sous-groupe $\mathbf{L}_t$ est aussi le sous-groupe de Lévi qui contient $\mathbf{T}_{1,1}$ et qui a $\langle t\rangle$ comme groupe de Weyl. On a

$$\mathbf{L}_t \simeq \overline{\mathbf{F}}_p^* \times \mathrm{SL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p).$$

Ces deux sous-groupes de Lévi sont F_0-stables et sont les sous-groupes de Lévi de paraboliques F_0-stables.

Par la suite, il nous faudra travailler dans ${}^g\mathbf{T}_{1,1}$, un conjugué de $\mathbf{T}_{1,1}$. Le groupe de Weyl associé à ${}^g\mathbf{T}_{1,1}$ et un représentant de ce groupe de Weyl dans $\mathbf{G}$ sont les conjugués de W et $\dot{\mathrm{W}}$ par g. Un élément de ${}^g\mathbf{T}_{1,1}$ est ${}^g(x,y)$ pour (x,y) dans $\mathbf{T}_{1,1}$. Abusivement nous omettrons d'écrire la conjugaison par g. On fera le même abus pour les groupes $\dot{\mathrm{W}}$ et W.

3.2 Le groupe fini $\mathrm{Sp}(4, q)$

Le groupe des points fixes de $\mathbf{G}$ sous l'endomorphisme de Frobenius F est

$$\mathrm{G} = \mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_q) = \mathrm{Sp}(4, q).$$

Le cardinal de G est $q^4(q-1)^2(q+1)^2(q^2+1) = q^4(q^4-1)(q^2-1)$. On note Φ_d le $d^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique, le cardinal de G s'écrit alors $q^4\Phi_1^2(q)\Phi_2^2(q)\Phi_4(q)$.

Rappelons que F_0 agit sur G (voir l'introduction du chapitre 2). On note toujours σ la restriction de F_0 à G, c'est un automorphisme de G d'ordre n. On pose

$$\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}^\sigma = \mathbf{G}^{\mathrm{F}_0} = \mathrm{Sp}(4, q_0).$$

On garde aussi la notation $\mathrm{G}_d = \mathbf{G}^{\mathrm{F}_0^d}$ pour tout diviseur d de n.

Deux sous-groupes de Lévi

- $\mathrm{L}_s = \mathbf{L}_s^{\mathrm{F}} \simeq \mathrm{GL}_2(q)$. Son ordre est $q(q-1)(q^2-1)$.
- $\mathrm{L}_t = \mathbf{L}_t^{\mathrm{F}} \simeq \mathrm{SL}_2(q) \times \mathbf{F}_q^*$. Son ordre est $q(q-1)(q^2-1)$.

Les tores maximaux de G_d

Les différents types de tores maximaux sont donnés par rapport à $\mathbf{T}_{1,1}$ et F_0^d.

- $\mathrm{T}_{s,d}$ est un tore maximal de type s. Il est cyclique d'ordre $q_0^{2d}-1$. C'est aussi le centralisateur d'un élément de la forme $t_{2,d}(i)$ (voir le tableau d'éléments ci-après ainsi que la note qui suit). A conjugaison près, on peut le supposer inclus dans $\mathrm{L}_{s,d}$ (un tel tore existe car s est un élément du groupe de Weyl de $\mathbf{L}_s$)

- $\mathrm{T}_{t,d}$ est un tore maximal de type t. Il n'est pas cyclique, il est le produit de deux groupes cycliques d'ordres (q_0^d-1) et (q_0^d+1). C'est aussi le centralisateur d'un élément de la forme $t_{21,d}(i,j)$ (voir le tableau d'éléments ci-après ainsi que la note qui suit). A conjugaison près, on peut le supposer inclus dans $\mathrm{L}_{t,d}$ (un tel tore existe car t est un élément du groupe de Weyl de $\mathbf{L}_t$)

- $\mathrm{T}_{c,d}$ est un tore maximal de type c, il est dit de Coxeter. Il est cyclique d'ordre $q_0^{2d}+1$. Tous ses éléments, différents de ±1, sont réguliers.

- $\mathrm{T}_{w_0,d}$ est un tore maximal de type w_0. C'est le produit direct de deux groupes cycliques d'ordre q_0^d+1.

Quelques éléments de G

Voici la description de quelques éléments de G dont nous nous servirons.

Soit κ un générateur de $\mathbf{F}_{q^4}^*$. On pose $\zeta = \kappa^{q^2-1}$, $\theta = \kappa^{q^2+1}$, $\eta = \theta^{q-1}$ et $\gamma = \theta^{q+1}$. Alors θ et γ sont des générateurs de, respectivement, $\mathbf{F}_{q^2}^*$ et $\mathbf{F}_q^*$.

On fixe une injection du groupe multiplicatif $\mathbf{F}_{q^4}^*$ vers le groupe multiplicatif des nombres complexes $\mathbf{C}^*$. Pour alléger les notations, on notera encore ζ, θ, η et γ les images de ces éléments par cette injection. Cela ne portera pas à confusion : quand il s'agit du groupe, ces éléments sont vus dans $\mathbf{F}_{q^4}^*$ et quand il s'agit de valeurs de caractères, ils sont vus dans $\mathbf{C}^*$.

On définit les ensembles d'indices suivants, où d peut prendre la valeur 1 et 2 :

• L'ensemble d'indices $\mathcal{R}_d$:

$$\mathcal{R}_d = \{1, \ldots, \frac{\Phi_d(q)}{2} - 1\}.$$

Il est de cardinal $\frac{\Phi_d(q)-2}{2}$. C'est aussi le sous-ensemble quotient, privé de 0 et $\frac{\Phi_d(q)}{2}$, de $\mathbf{Z}/\Phi_d(q)\mathbf{Z}$ dans lequel on pose $s = s^{-1}$. Cette autre description permet de faire des calculs simples sur les indices. Nous nous en servirons.

• L'ensemble d'indices $\mathcal{R}_4$:

$$\mathcal{R}_4 = \{1, \ldots, \frac{q^2-1}{4}\}.$$

On peut aussi le voir comme sous-ensemble de $\mathbf{Z}/(q^2+1)\mathbf{Z}$.

• L'ensemble d'indices $\mathcal{R}'_4$:
C'est un ensemble de $\frac{1}{4}(q-1)^2$ entiers positif i tel que θ^i, θ^{-i}, θ^{qi} et θ^{-qi} soient tous distincts et si $j \notin \{i, -i, qi, -qi\}$ alors $\theta^j \notin \{\theta^i, \theta^{-i}, \theta^{qi}, \theta^{-qi}\}$.

Comme $\mathbf{G}$ est un groupe semi-simple simplement connexe, le centralisateur dans $\mathbf{G}$ d'un élément semi-simple est connexe ([St] corollaire 8.5). Il suit que l'intersection de la classe de conjugaison géométrique d'un élément semi-simple de $\mathbf{G}$ avec le groupe G forme une unique classe de conjugaison. On en déduit ([DiMi2] application 3.25) qu'une classe de conjugaison d'un élément semi-simple de G peut être représentée par un élément de $\mathrm{Sp}(4, \mathbf{F}_{q^4})$. C'est ce que nous faisons dans le tableau suivant. Nous gardons les notations de B. Srinivasan dans la seconde colonne, qui nomme les classes de conjugaison de G, et introduisons nos notations dans la première pour nommer un représentant de chaque classe dans G.

Si d divise n, les éléments de G_d seront distingués de ceux de G par l'indice d. Par exemple $t_{4,d}(i)$ est un élément de G_d.

représentant dans $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{F}_q)$	classe de $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{F}_q)$	représentant dans $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{F}_{q^4})$	ensemble des indices	ordre du centralisateur
$t_4(i)$	$B_1(i)$	$\begin{pmatrix} \zeta^i &&& \\ & \zeta^{-i} && \\ && \zeta^{qi} & \\ &&& \zeta^{-qi} \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}_4$	q^2+1
$t_2(i)$	$B_2(i)$	$\begin{pmatrix} \theta^i &&& \\ & \theta^{-i} && \\ && \theta^{qi} & \\ &&& \theta^{-qi} \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}'_4$	q^2-1
$t_{11}(i,j)$	$B_3(i,j)$	$\begin{pmatrix} \gamma^i &&& \\ & \gamma^{-i} && \\ && \gamma^{j} & \\ &&& \gamma^{-j} \end{pmatrix}$	$i,j \in \mathcal{R}_1,\ i \neq j$	$(q-1)^2$
$t_{22}(i,j)$	$B_4(i,j)$	$\begin{pmatrix} \eta^i &&& \\ & \eta^{-i} && \\ && \eta^{j} & \\ &&& \eta^{-j} \end{pmatrix}$	$i,j \in \mathcal{R}_2,\ i \neq j$	$(q+1)^2$
$t_{21}(i,j)$	$B_5(i,j)$	$\begin{pmatrix} \eta^i &&& \\ & \eta^{-i} && \\ && \gamma^{j} & \\ &&& \gamma^{-j} \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}_2,\ j \in \mathcal{R}_1,$	q^2-1
$t_{22}(i)$	$B_6(i)$	$\begin{pmatrix} \eta^i &&& \\ & \eta^{-i} && \\ && \eta^{i} & \\ &&& \eta^{-i} \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}_2$	$q(q+1)(q^2-1)$
$t_{11}(i)$	$B_8(i)$	$\begin{pmatrix} \gamma^i &&& \\ & \gamma^{-i} && \\ && \gamma^{i} & \\ &&& \gamma^{-i} \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}_1$	$q(q-1)(q^2-1)$
$t_{20}(i)$	$C_1(i)$	$\begin{pmatrix} \eta^i &&& \\ & \eta^{-i} && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}_2$	$q(q+1)(q^2-1)$
$t_{20}^-(i)$	$C'_1(i)$	$\begin{pmatrix} \eta^i &&& \\ & \eta^{-i} && \\ && -1 & \\ &&& -1 \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}_2$	$q(q+1)(q^2-1)$
$t_{10}(i)$	$C_3(i)$	$\begin{pmatrix} \gamma^i &&& \\ & \gamma^{-i} && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}_1$	$q(q-1)(q^2-1)$
$t_{10}^-(i)$	$C'_3(i)$	$\begin{pmatrix} \gamma^i &&& \\ & \gamma^{-i} && \\ && -1 & \\ &&& -1 \end{pmatrix}$	$i \in \mathcal{R}_1$	$q(q-1)(q^2-1)$

La table des caractères de $\mathrm{Sp}(4,\mathbf{F}_q)$ a été construite par B. Srinivasan [Sr1], quelques corrections sont apportées dans [Wh]. Nous utiliserons les notations de Deligne-Lusztig données par B. Srinivasan dans [Sr2] et rappellerons celles de [Sr1].

3.3 Les sous-groupes de Sylow et leurs normalisateurs

On considère le produit semi-direct $\mathrm{G} \rtimes \langle\sigma\rangle$. Il est noté $\widetilde{\mathrm{G}}$. On a

$$\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\langle\sigma\rangle \ \text{ et } \ \widetilde{\mathrm{G}}/\mathrm{G} \simeq \langle\sigma\rangle.$$

3.3.1 Les sous-groupes de Sylow abéliens de $\widetilde{\mathrm{G}}$

Soit ℓ un entier premier qui divise le cardinal de G.

Proposition 3.1
Soit S *un ℓ-sous-groupe de Sylow de* $\widetilde{\mathrm{G}}$*. Si* S *est abélien alors ℓ est premier à n. Par conséquent* S *est dans* G*.*

Démonstration : Supposons que ℓ divise n. Soit m le plus grand entier tel que l^m divise n. Alors $\sigma^{\frac{n}{l^m}}$, qui sera noté τ, appartient à un ℓ-sous-groupe de Sylow S de $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Comme G est distingué dans $\widetilde{\mathrm{G}}$, on a un morphisme surjectif $\widetilde{\mathrm{G}} \twoheadrightarrow \langle\sigma\rangle$ qui envoie S sur un ℓ-sous-groupe de Sylow de $\langle\sigma\rangle$, donc forcément sur $\langle\tau\rangle$ (car $\langle\sigma\rangle$ est cyclique). Posons $\mathrm{S}_0 = \mathrm{S} \cap \mathrm{G}$, c'est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G, il est non trivial car ℓ divise $|\mathrm{G}|$. Ainsi, nous avons la suite exacte $1 \to \mathrm{S}_0 \to \mathrm{S} \to \langle\tau\rangle \to 1$. Elle est scindée car τ appartient à S et donc il y a une section $\langle\tau\rangle \to \mathrm{S}$ donnée par l'inclusion. Finalement $\mathrm{S} = \mathrm{S}_0 \rtimes \langle\tau\rangle$.

Supposons maintenant S abélien. Ceci implique que tout élément s de S_0 vérifie $s\tau = \tau s$ et donc que S_0 est inclus dans $\mathrm{G}_{\frac{n}{\ell^m}}$. Ainsi S_0 est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G et de $\mathrm{G}_{\frac{n}{\ell^m}}$. Dans ce cas, ℓ divise $|\mathrm{G}_{\frac{n}{\ell^m}}|$ et donc $q_0^{\frac{n}{\ell^m}} \equiv \pm 1$ modulo ℓ ou $q_0^{\frac{2n}{\ell^m}} \equiv -1$ modulo ℓ. Ainsi on a, modulo ℓ :

$$\frac{q_0^{4n} - 1}{q_0^{\frac{4n}{\ell^m}} - 1} = 1 + q_0^{\frac{4n}{\ell^m}} + q_0^{2\frac{4n}{\ell^m}} + \ldots + q_0^{(\ell^m - 1)\frac{4n}{\ell^m}} \equiv \ell^m \equiv 0.$$

Comme $\frac{q_0^{2n}-1}{q_0^{\frac{2n}{\ell^m}}-1}$ est un entier, il suit que $\frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{G}_{\frac{n}{\ell^m}}|} \equiv 0$ modulo ℓ. Ceci montre que S_0 ne peut être, à la fois, un ℓ-sous-groupe de Sylow de G et de $\mathrm{G}_{\frac{n}{\ell^m}}$.

Finalement, si ℓ divise n, il n'existe pas de ℓ-sous-groupe de Sylow abélien dans $\widetilde{\mathrm{G}}$. Donc pour avoir un ℓ-sous-groupe de Sylow abélien dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ il faut que ℓ soit premier à n. Il est alors dans G car $\langle\sigma\rangle$ ne possède pas, dans ce cas, d'élément d'ordre ℓ. $\dashv$

Soit ℓ un entier premier qui divise le cardinal de G.

Lemme 3.2

Si ℓ divise deux nombres distincts parmi $\Phi_1(q)$, $\Phi_2(q)$ et $\Phi_4(q)$, alors $\ell = 2$.

Démonstration : En effet $2 = \Phi_2(q) - \Phi_1(q) = \Phi_4(q) - \Phi_1(q)\Phi_2(q)$. On rappelle que $\Phi_4(q) = q^2 + 1$, $\Phi_2(q) = q + 1$ et $\Phi_1(q) = q - 1$. $\dashv$

Le groupe G n'admet pas de 2-sous-groupe de Sylow abélien. En effet $\dot{\mathrm{W}}$ est un 2-groupe non abélien et il est donc inclus dans un 2-sous-groupe de Sylow, qui ne peut donc pas être abélien.

Enfin, si ℓ divise q, un ℓ-sous-groupe de Sylow n'est pas abélien. En effet

$$M = \left\{ M(x,y,z,u) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & xy+z \\ 0 & 1 & 0 & y \\ -y & z & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x,\ y,\ z,\ u \in \mathbf{F}_q \right\}$$

est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G ([Sr1] paragraphe 2). Son centre est l'ensemble $\{M(0,0,0,u),\ u \in \mathbf{F}_q\}$. Ainsi M n'est pas abélien. Comme les ℓ-sous-groupes de Sylow sont conjugués, il suit qu'aucun n'est abélien.

Finalement, on peut conclure que si S est un ℓ-sous groupe de Sylow abélien de $\widetilde{\mathrm{G}}$, alors ℓ est différent de 2, ne divise pas q, divise un unique nombre parmi $\Phi_1(q)$, $\Phi_2(q)$ et $\Phi_4(q)$ et ℓ est premier à n.

Hypothèse 3.3

Dorénavant, ℓ est un nombre premier qui divise un et un seul nombre parmi $\Phi_1(q)$, $\Phi_2(q)$ et $\Phi_4(q)$, puis n est un entier premier à ℓ. On fixe un ℓ-sous-groupe de Sylow S *de* $\widetilde{\mathrm{G}}$. *En particulier* S *est abélien.*

3.3.2 Les normalisateurs des ℓ-sous-groupes de Sylow abéliens de $\widetilde{\mathrm{G}}$

Considérons, dans un premier temps, le normalisateur de S dans G, noté $\mathrm{N_G(S)}$.

Notons $\Phi_d(q)$ le nombre que ℓ divise. On pose

$$w_1 = 1,\ w_2 = w_0 \ \text{ et } \ w_4 = c.$$

Quitte à faire une conjugaison, on peut supposer que S est inclus dans $\mathbf{T}_{w_d}^{\mathrm{F}} = \mathrm{T}_{w_d}$ et c'est ce que nous faisons.

Lemme 3.4

$$\mathrm{C_G(S)} = \mathrm{T}_{w_d}.$$

Démonstration : Le sous-groupe S ne contient pas forcément d'élément semi-simple régulier (par exemple, pour $\ell = 3$, $q_0 = 5$ et $n = 2$, le 3-sous-groupe de Sylow est d'ordre 9 et ses éléments ne sont pas réguliers). On doit donc considérer les trois cas séparément.

Soit ξ une racine primitive $\ell^{\text{ème}}$ de l'unité. Comme ℓ est différent de 2, on a $\xi \neq \xi^{-1}$. On pose

$$x = \begin{pmatrix} \xi & & & \\ & \xi^{-1} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \xi & \\ & & & \xi^{-1} \end{pmatrix}.$$

• Cas 1 : ℓ divise $q-1$.

Les deux éléments x et y appartiennent à S et sont distincts. Ainsi $\mathrm{C_G(S)} \subset \mathrm{C_G}(x) \cap \mathrm{C_G}(y) = \mathrm{T}_1 \simeq \mathrm{T}'_1 \times \mathrm{T}'_1$, où T'_1 est le tore déployé de $\mathrm{GL}_2(q)$. Par ailleurs $\mathrm{S} \subset \mathrm{T}_1$ implique $\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{C_G(S)}$, d'où l'égalité voulue.

• Cas w_0 : ℓ divise $q+1$.

Il existe un élément g de $\mathbf{G}$ tel que ${}^g\mathrm{S}$ soit inclus dans $\mathbf{T}_{1,1}$. Alors x et y appartiennent à ${}^g\mathrm{S}$ et sont distincts. Ainsi $\mathrm{C_G}({}^g\mathrm{S}) \subset \mathrm{C_G}(x) \cap \mathrm{C_G}(y) = \mathrm{T}_2 \simeq \mathrm{T}'_2 \times \mathrm{T}'_2$, où T'_2 est un tore non déployé de $\mathrm{GL}_2(q)$ et donc $\mathrm{C_G(S)} \subset \mathrm{T}_{w_0}$. On conclut comme précédemment.

• Cas c : ℓ divise q^2+1.

Dans ce cas, tous les éléments de S autre que 1 sont semi-simples réguliers. Soit z un tel élément. La composante connexe de $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(z)$ est l'unique tore maximal qui contient z ([Ca] paragraphe 1.14). De plus, comme $\mathbf{G}$ est simplement connexe, $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(z)$ est connexe ([St] corollaire 8.5). Ainsi $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(z) = \mathbf{T}_c$ et donc $\mathrm{C_G}(z) = \mathrm{T}_c$. ⊣

De plus S est un sous groupe distingué de $\mathrm{C_G(S)}$. Prenons alors g un élément de $\mathrm{N_G[C_G(S)]}$. On a ${}^g\mathrm{S} \lhd \mathrm{C_G(S)}$. Ainsi S et ${}^g\mathrm{S}$ sont deux sous-groupes de Sylow distingués de $\mathrm{C_G(S)}$, ils sont donc égaux. D'où $\mathrm{N_G[C_G(S)]} \subset \mathrm{N_G(S)}$, *i.e.* $\mathrm{N_G}(\mathrm{T}_{w_d}) \subset \mathrm{N_G(S)}$. Enfin on a toujours $\mathrm{N_G(S)} \subset \mathrm{N_G[C_G(S)]}$. Finalement

$$\mathrm{N_G(S)} = \mathrm{N_G}(\mathrm{T}_{w_d}).$$

Dans l'annexe de ce travail la structure du groupe $\mathrm{N_G(T}_{w_d})$ est explicitée. Elle sera aussi rappelée lorsqu'il sera nécessaire de la connaître (pour la construction d'isotypies dans le chapitres 4).

Revenons maintenant au groupe $\widetilde{\mathrm{G}}$. Nous savons que σ ne stabilise pas forcément S, ni le tore qui le contient et qu'il faut dans certains cas tordre σ par un élément a de G pour avoir un automorphisme de G qui les stabilise (voir l'annexe de ce travail). Nous désignerons par σ_a la restriction à G de l'endomorphisme $a\mathrm{F}_0$ et nous posons $\mathrm{F}_a = (a\mathrm{F}_0)^n$ (on peut avoir $\sigma_a = \sigma$ par exemple dans le cas du tore déployé ou, dans certains autres cas, en choisissant bien le sous-groupe de Sylow).

Remarquons que

$$\sigma_a^n = (a\sigma)^n = a\sigma(a)\sigma^2(a)\ldots\sigma^{n-1}(a)\sigma^n = a\sigma(a)\sigma^2(a)\ldots\sigma^{n-1}(a)$$

et donc

$$\sigma_a^n \in \mathrm{G}.$$

De plus n est le plus petit entier non nul vérifiant cela car σ est d'ordre n.

On a

$$\mathrm{N}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\mathrm{S}) = \mathrm{N_G(S)}\langle\sigma_a\rangle.$$

On pose

$$\mathrm{H} = \mathrm{N_G(S)} \text{ et } \widetilde{\mathrm{H}} = \mathrm{N}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\mathrm{S}) = \mathrm{H}\langle\sigma_a\rangle.$$

3.4 Relèvement des isotypies de G

Les extensions considérées sont

$$\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\langle\sigma\rangle = \mathrm{G}\langle\sigma_a\rangle$$

$$\widetilde{\mathrm{H}} = \mathrm{N}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\mathrm{S}) = \mathrm{H}\langle\sigma_a\rangle.$$

On a

$$\widetilde{\mathrm{G}}/\mathrm{G} \simeq \langle\sigma\rangle \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{H}}/\mathrm{H} \simeq \langle\sigma\rangle.$$

Nous notons e, $\widetilde{\mathrm{e}}$, f et $\widetilde{\mathrm{f}}$ les idempotents centraux primitifs principaux de, respectivement, G, $\widetilde{\mathrm{G}}$, H et $\widetilde{\mathrm{H}}$.

Nous savons qu'il existe une isotypie I entre $K\mathrm{Hf}$ et $K\mathrm{Ge}$ ([BrMaMi] et [BrMi]).

Définition 3.5

On appelle préconfiguration un triplet $(q_0,\ n,\ \ell)$ *tel que*
i) q_0 *est une puissance de* p,
ii) n *est un entier naturel non nul,*
iii) ℓ *est un entier premier divisant un et un seul des nombres* $\Phi_1(q)$, $\Phi_2(q)$, $\Phi_4(q)$ *et ne divisant pas* n.

Remarque 3.6

La donnée d'une préconfiguration $(q_0,\ n,\ \ell)$ *et d'une isotypie* I *de* KHf *dans* KGe *définie une configuration. En effet, une configuration* $(\mathrm{G},\ \ell,\ \mathrm{I},\ \widetilde{\mathrm{G}})$ *est entièrement décrite par la connaissance de* q_0, n , ℓ *et* I. *On pourra alors aussi, appeler configuration le quadruplet* $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$.

THÉORÈME 3.7

Il existe une isotypie entre $K\widetilde{\mathrm{Hf}}$ *et* $K\widetilde{\mathrm{Ge}}$.

Le but de cette thèse est de démontrer ce théorème. En fait on va utiliser le théorème de relèvement des isotypies (théorème 1.29). En effet, considérons un ℓ-sous-groupe de Sylow abélien de $\widetilde{\mathrm{G}}$. On a vu que si un tel sous-groupe existe alors c'est aussi un ℓ-sous groupe de Sylow abélien de G. Ainsi il existe une isotypie I entre KHf et KGe et pour montrer qu'il en existe une entre $K\widetilde{\mathrm{Hf}}$ et $K\widetilde{\mathrm{Ge}}$, il suffit de montrer que la configuration $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ est compatible. Le théorème 3.7 découle immédiatement du théorème suivant.

THÉORÈME 3.8

Pour toute préconfiguration $(q_0,\ n,\ \ell)$, *il existe une isotypie* I *entre* KHf *et* KGe *telle que la configuration* $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ *soit compatible.*

Ce théorème est une conséquence des théorèmes 3.12, 3.13 et 3.14. Le théorème 3.12 sera montré aux chapitres 5 et 6.

Convention 3.9

Nous dirons que la préconfiguration $(q_0,\ n,\ \ell)$ *est singulière de type*

- 1 *si* $\ell \mid |\mathrm{G}_1|,\ n = 2,\ q_0^2 = q \equiv -1$ *modulo* ℓ,
- m *si* $\ell \mid |\mathrm{G}_1|,\ n = 2^m,\ m > 1,\ q_0^2 \equiv -1$ *modulo* ℓ *et* $q \equiv 1$ *modulo* ℓ,

On les appellera, de manière abrégée, respectivement préconfiguration de type S1 et Sm. On parlera aussi de configuration de type S1 et Sm et de préconfiguration de type BI et SC.

Remarquons que ces préconfigurations existent bien. Par exemple, une préconfiguration
- (3, 2, 5) est de type S1,
- (3, 4, 5) est de type Sm.

Rappelons que q_0 est une puissance de p. Posons $q_0 = p^{\nu_0}$. Considérons un diviseur ν de ν_0 (ν n'est donc jamais nul). Soit F_ν l'endomorphisme de $\mathbf{G}$: $(a_{ij}) \longmapsto (a_{ij}^{\nu})$. Notons τ_ν sa restriction à G. On considère la suite d'extensions de G :

$$\mathrm{G} \subset \widetilde{\mathrm{G}} \subset \widehat{\mathrm{G}},$$

où

$$\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\langle\sigma\rangle \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\langle\tau_\nu\rangle.$$

Remarquons que $\sigma = \tau_\nu^{\frac{\nu_0}{\nu}}$.

Nous allons introduire une nouvelle notion liée à cette situation.

Définition 3.10

On dira que la configuration $(\mathrm{G},\ \ell,\ \mathrm{I},\ \widetilde{\mathrm{G}})$*, qui est aussi décrite par* $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$*, est fortement compatible si pour tout diviseur* ν *de* ν_0 *et si pour tout caractère* χ *de* $\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_P)$*, il existe une extension de* $\chi \times \varepsilon_P(\chi)\mathrm{I}_P(\chi)$ *à* $(\widetilde{\mathrm{H}}_P \times \widetilde{\mathrm{G}}_P)_\chi$*, que l'on note* $\mathrm{E}(\chi \times \varepsilon_P(\chi)\mathrm{I}_P(\chi))$*, tel que*

1) avec ces choix d'extensions, la configuration $(\mathrm{G},\ \ell,\ \mathrm{I},\ \widetilde{\mathrm{G}})$ *est compatible,*

2) ces extensions vérifient

$$\mathrm{E}(\chi \times \varepsilon_P(\chi)\mathrm{I}_P(\chi))^{(\tau_{\nu,a'},\tau_{\nu,a'})} = \mathrm{E}(\chi^{\tau_{\nu,a'}} \times \varepsilon_P(\chi)\mathrm{I}_P(\chi)^{\tau_{\nu,a'}}),$$

où $\tau_{\nu,a'}$ *est l'automorphisme* τ_ν *tordu par un élément* a' *de sorte que* $\tau_{\nu,a'}$ *normalise* S *(comme pour* σ_a*),*

3) pour tout élément x *de* $\widetilde{\mathrm{H}}$ *et tout caractère* χ *de* $\mathrm{Irr}(\mathrm{f})$ *on a*

$$\varepsilon(\chi^x) = \varepsilon(\chi).$$

Proposition 3.11

Les configurations de type BI sont fortement compatibles.

DÉMONSTRATION : C'est clair car dans les configurations de type BI, chaque caractère d'un bloc principal a une unique extension dans le bloc principal et c'est avec celle-ci qu'on construit le relèvement de l'isotypie (voir remarque 1.33). ⊣

THÉORÈME 3.12

Soit $(q_0,\ n,\ \ell)$ *une préconfiguration de type S1 ou Sm. Alors, il existe une isotypie* I *telle que* $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ *soit une configuration fortement compatible.*

Ce théorème est démontré dans le chapitre 5 pour la configuration de type S1 et dans le chapitre 6 pour la configuration de type Sm.

Donnons nous une préconfiguration quelconque $(q_0,\ n,\ \ell)$. Le but de la fin de cette section est de montrer que sous condition que le théorème 3.12 soit vrai, il existe une isotypie I telle que $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ soit une configuration compatible.

3.4.1 Premier théorème de réduction

Ce premier théorème porte sur les cas où ℓ divise $|\mathrm{G}_1|$.

THÉORÈME 3.13

Supposons que ℓ *divise* $|\mathrm{G}_1|$, *que* ℓ *divise* $q+1$ *ou* $q-1$ *et que le théorème 3.12 soit vérifié. Alors pour toute préconfiguration* $(q_0,\ n,\ \ell)$, *il existe une isotypie* I *telle que* $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ *soit une configuration fortement compatible.*

DÉMONSTRATION : Déterminons les préconfigurations de type BI.

Rappelons que

$$\frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{G}_1|} = \frac{q^4}{q_0^4}\,\frac{q^4-1}{q_0^4-1}\,\frac{q^2-1}{q_0^2-1}.$$

Nous avons modulo ℓ :

$$\frac{q^4-1}{q_0^4-1} = 1 + q_0^4 + \ldots + q_0^{4(n-1)} \equiv n$$

et

$$\frac{q^2-1}{q_0^2-1} = 1 + q_0^2 + \ldots + q_0^{2(n-1)} \equiv \begin{cases} n & \text{si } q_0 \equiv \pm 1, \\ 1 & \text{si } q_0^2 \equiv -1 \text{ et } n \text{ impair}, \\ 0 & \text{si } q_0^2 \equiv -1 \text{ et } n \text{ pair}. \end{cases}$$

Comme n est premier à ℓ, seul le dernier cas donne une situation où il n'existe pas de ℓ-sous-groupe de Sylow qui est inclus à la fois dans G_1 et dans G. Dans les autres cas, il existe un ℓ-sous-groupe de Sylow de G qui est inclus dans G_1, il est donc fixe sous σ. Ce sont donc des préconfigurations de type BI, elles sont donc fortement compatibles (proposition 3.11).

Supposons alors que $n = 2^d n_0$, où $d \neq 0$, n_0 est impair et que $q_0^2 \equiv -1$ modulo ℓ.

Les groupes $\mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle$ et $\mathrm{H}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle$, sont des extensions de degré 2^d de G et H et sont associés à la préconfiguration

$$(q_0^{n_0},\ 2^d,\ \ell).$$

Si $d = 1$, on a $q = q_0^{2n_0} \equiv -1$ modulo ℓ, la préconfiguration est de type S1 et si $d > 1$, on a $q = (q_0^4)^{2^{d-2}n_0} \equiv 1$ modulo ℓ, elle est de type Sm. Par hypothèse, dans ces deux cas, il existe une isotypie I telle que la configuration $(q_0^{n_0},\ 2^d,\ \ell,\ \mathrm{I})$ soit fortement compatible. Donc l'isotypie I se relève en une isotypie I′ entre les ℓ-bloc principaux de $\mathrm{H}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle$ et $\mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle$, qui vérifie les conditions de la définition 3.10.

Comme n_0 et 2^d sont premiers entre eux on a

$$\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\langle\sigma_a\rangle = (\mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle)\langle\sigma_a^{2^d}\rangle \text{ et } \widetilde{\mathrm{H}} = (\mathrm{H}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle)\langle\sigma_a^{2^d}\rangle.$$

Ainsi $\widetilde{\mathrm{G}}$ et $\widetilde{\mathrm{H}}$ sont des extensions de degré n_0 de, respectivement, $\mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle$ et $\mathrm{H}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle$.

On sait que σ_a agit sur un élément x de S ainsi : $\sigma_a.x = x^{q_0}$. Il suit que σ_a^4 agit trivialement sur S car ℓ ne divise pas $\frac{q^4-1}{q_0^4-1}$ (voir le calcul précédent) et $q_0^4 \equiv 1$ modulo ℓ. Donc σ_a^4 appartient au centralisateur de S dans $\widetilde{\mathrm{G}}$. Ainsi, on a, d'une part

$$\langle\sigma_a^4\rangle \mathrm{C}_{\mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle}(\mathrm{S}) \subset \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\mathrm{S}),$$

d'autre part, comme n_0 et 4 sont premiers entre eux,

$$\widetilde{\mathrm{G}} = (\mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle)\langle\sigma_a^4\rangle.$$

Il suit que

$$\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(\mathrm{S})\mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle,$$

donc que la configuration est de type BI.

On a choisit I tel que $(q_0^{n_0},\ 2^d,\ \ell, \mathrm{I})$ (qui est aussi $(\mathrm{G},\ \ell,\ \mathrm{I},\ \mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle)$) soit fortement compatible, puis on a vu que $(\mathrm{G}\langle\sigma_a^{n_0}\rangle,\ \ell,\ \mathrm{I}',\ \widetilde{\mathrm{G}})$) est de type BI, il suit que $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ (qui est aussi $(\mathrm{G},\ \ell,\ \mathrm{I},\ \widetilde{\mathrm{G}})$) est fortement compatible (toujours par unicité des extensions dans le type BI). $\dashv$

3.4.2 Second théorème de réduction

Le théorème suivant montre qu'il suffit de prouver le théorème 3.12.

THÉORÈME 3.14

Supposons que le théorème 3.12 soit démontré. Alors pour toute préconfiguration $(q_0,\ n,\ \ell)$*, il existe une isotypie* I *telle que* $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ *soit une configuration compatible.*

DÉMONSTRATION : Soit $(q_0,\ n,\ \ell)$ une préconfiguration. Si ℓ divise q^2+1, alors la préconfiguration est de type SC, donc toute configuration associée est compatible (proposition 1.35). Si ℓ divise G_1, le théorème précédent donne le résultat. On suppose donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\ell \text{ ne divise pas } |\mathrm{G}_1|,\\ q \equiv \pm 1 \text{ modulo } \ell.\end{array}}$$

Une telle préconfiguration existe. Par exemple, les deux configurations $(5,\ 3,\ 7)$ et $(3,\ 3,\ 13)$ en sont. Pour la première on a $q \equiv -1$ modulo ℓ et pour la seconde $q \equiv 1$ modulo ℓ.

Montrons que sous les hypothèses du théorème, on peut trouver une isotypie I telle que $(q_0,\ n,\ \ell,\ \mathrm{I})$ soit une configuration compatible.

Soit d le plus petit entier divisant n et tel que ℓ divise le cardinal de G_d (il peut arriver que $d = n$).

Considérons alors σ_a^d. On pose

$$\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\langle\sigma_a^d\rangle \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}\langle\sigma_a^d\rangle = \mathrm{N}_{\overline{\mathrm{G}}}(\mathrm{S}).$$

Ces groupes sont des extensions d'ordre $\frac{n}{d}$ de G et H. Notons $\overline{\mathrm{e}}$ et $\overline{\mathrm{f}}$ leurs ℓ-blocs principaux respectifs. Pour tout sous-groupe P de S nous introduisons les notations habituelles $\overline{\mathrm{G}}_P$, $\overline{\mathrm{H}}_P$, $\overline{\mathrm{e}}_P$, $\overline{\mathrm{f}}_P$ etc (voir paragraphe 1.2).

Nous avons les isomorphismes, induits par les inclusions, suivants :

$$\widetilde{\mathrm{H}}/\mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{G}}/\mathrm{G},\ \widetilde{\mathrm{H}}/\overline{\mathrm{H}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{G}}/\overline{\mathrm{G}}, \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{H}}/\mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{G}}/\mathrm{G},$$

ainsi que leurs restrictions aux centralisateurs des sous-groupes P de S.

D'après le théorème 3.13, on sait qu'il existe une isotypie I telle que la configuration

$$(q_0^d,\ \frac{n}{d},\ \ell,\ \mathrm{I})$$

(qui est aussi décrite par le quadruplet $(\mathrm{G},\ \ell,\ \mathrm{I},\ \overline{\mathrm{G}})$) soit fortement compatible. Une isotypie I entre $K\mathrm{Hf}$ et $K\mathrm{Ge}$ se relève en une isotypie $\overline{\mathrm{I}}$ entre $K\overline{\mathrm{Hf}}$ et $K\overline{\mathrm{Ge}}$, qui vérifie les conditions de la définition 3.10. Nous noterons $\overline{\varepsilon}_P$ les signes associés aux isométries $\overline{\mathrm{I}}_P$ et $\overline{\mu}_P$ le bi-caractère généralisé défini par les isométries $\overline{\mathrm{I}}_P$. Les extensions, $\mathrm{E}(\chi \times \psi)$, choisies sont celles qui assurent que la configuration est fortement compatible.

Nous allons montrer que $\overline{\mathrm{I}}$ se relève en une isotypie $\widetilde{\mathrm{I}}$ entre $K\widetilde{\mathrm{Hf}}$ et $K\widetilde{\mathrm{Ge}}$. Pour cela nous utilisons encore le théorème de relèvement des isotypies.

La configuration à étudier est maintenant la suivante :

$$(\overline{\mathrm{G}},\ \ell,\ \overline{\mathrm{I}},\ \widetilde{\mathrm{G}}).$$

Lemme 3.15
Si P est un sous-groupe non trivial de S on a $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \overline{\mathrm{G}}_P$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \overline{\mathrm{H}}_P$.

Démonstration : Il suffit de montrer la première égalité. Soient d' un entier tel que $1 \leq d' < d$ et g un élément de G. Alors

$$\mathrm{G}^{g\sigma^{d'}} \subset \mathbf{G}^{g\mathrm{F}_0{}^{d'}} \simeq \mathbf{G}^{\mathrm{F}_0{}^{d'}} = \mathrm{G}_{d'}.$$

Or, par hypothèse, $\mathrm{G}_{d'}$ ne contient pas de ℓ-élément. Ainsi $g\sigma^{d'}$ ne centralise pas de ℓ-élément.

(fin de la démonstration du lemme 3.15)

$\dashv$

Ainsi, pour tout sous-groupe non trivial P de S,

$$\widetilde{\mathrm{G}}_P/\overline{\mathrm{G}}_P = \{1\} \text{ et } \widetilde{\mathrm{H}}_P/\overline{\mathrm{H}}_P = \{1\}$$

et les conditions $\mathbf{C1}_P$ et $\mathbf{C2}_P$ sont trivialement vérifiées. Puis $\mathbf{G1}_P$ et $\mathbf{G2}_P$ le sont aussi car $\overline{\mathrm{I}}$ est une isotypie.

Ce lemme montre donc qu'il suffit de vérifier les hypothèses de compatibilités pour $P = \{1\}$. C'est ce que nous faisons par la suite.

L'hypothèse **C1**

Il faut montrer que l'isométrie $\overline{\mathrm{I}}$ est stable sous $\Delta(1)$, *i.e.*, que pour tout élément h de $\widetilde{\mathrm{H}}$ et tout caractère χ de $\overline{\mathrm{f}}$ on a $\overline{\mathrm{I}}(\chi^h) = \overline{\mathrm{I}}(\chi)^{\widetilde{\alpha}(h)}$.

Or l'équivariance des extensions $\overline{\mathrm{E}}(\chi \times \psi^*)$ et de ε (venant de la définition d'une configuration fortement compatible) donne immédiatement $\overline{\mu}^{(h,h)} = \overline{\mu}$. Nous obtenons donc l'équivariance d'après le second point des remarques 1.28.

L'hypothèse **C2**

L'hypothèse est automatiquement vérifiée d'après le choix fait des extensions.

Les hypothèses **G1** et **G2**

Si (g, h) appartient à $\overline{\mathrm{G}} \times \overline{\mathrm{H}}$, on a $\mathrm{E}(\overline{\mu})(h, g) = \overline{\mu}(h, g)$ et les deux conditions sont vérifiées car $\overline{\mu}$ est le bi-caractère généralisé d'une isotypie.

Considérons maintenant l'élément $(g\sigma_a^i, h\sigma_a^i)$ de $\widetilde{\mathrm{G}} \times \widetilde{\mathrm{H}} \setminus \overline{\mathrm{G}} \times \overline{\mathrm{H}}$. Il ne centralise pas de ℓ-élément non trivial d'après le lemme 3.15.

Ainsi si un élément $(xh\sigma_a^i, yg\sigma_a^i)$ de $\Delta(\alpha)$ est tel que x et y sont des ℓ-éléments, $h\sigma_a^i$ appartient à $\mathrm{C_H}(x)_{\ell'}$ et $g\sigma_a^i$ appartient à $\mathrm{C_G}(y)_{\ell'}$, alors $x = y = 1$. Ainsi x et y sont conjugués et donc la troisième hypothèse du théorème de relèvement est trivialement vérifiée. Puis la quatrième l'est aussi car $\mu = \mu_{\langle 1 \rangle}$.

La configuration $(\overline{\mathrm{G}},\ \ell,\ \overline{\mathrm{I}},\ \widetilde{\mathrm{G}})$ vérifie les conditions de compatibilité et donc l'isotypie $\overline{\mathrm{I}}$ s'étend en une isotypie $\widetilde{\mathrm{I}}$ entre $\widetilde{\mathrm{f}}$ et $\widetilde{\mathrm{e}}$.

(fin de la démonstration du théorème 3.14)

$\dashv$

Il nous reste donc à vérifier que les configurations de type S1 et Sm sont compatibles ainsi que la condition d'équivariance du théorème 3.14. Ce travail effectué, on aura montré que la conjecture de Broué est vraie pour les extensions de $\mathrm{Sp}(4, q)$ obtenues par un automorphisme de corps.

Le but des chapitres suivants est de démontrer le théorème 3.12. Pour le faire nous aurons besoin de résultats sur les caractères unipotents de la série principale de G. Nous les exposons et démontrons ci-après.

3.5 Caractères unipotents de la série principale

On suppose dorénavant que n est un entier plus grand que 1.

Le but de ce paragraphe est de montrer que, pour les caractères unipotents de la série principale de G, les extensions données par Shintani à chaque tranche $\mathrm{G}\sigma^d$ se recollent. C'est-à-dire que, si χ est un caractère unipotent de la série principale de G, alors, pour tout d, on a

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\mathrm{E}_1(\chi) = \mathrm{E}_d(\chi).$$

Ce problème a été soulevé au second chapitre.

Le groupe $\mathbf{G}$ est déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$. L'endomorphisme de Frobenius F_0 a donc une action triviale sur les caractères unipotents de G. De plus la caractéristique de $\mathbf{F}_q$ est différente de 2, donc est bonne pour $\mathbf{G}$. Nous pouvons ainsi appliquer les résultats du second chapitre.

3.5.1 Descentes de Shintani

Caractères unipotents

Il y a six caractères unipotents dans G. Cinq d'entre eux sont dans la série principale (nous reprenons les notations de B. Srinivasan [Sr1]) :

- θ_0, qui est le caractère trivial, est de degré 1,
- θ_{13}, qui est le caractère de Steinberg, est de degré q^4,
- θ_9 est de degré $\frac{1}{2}q(1+q)^2$,
- θ_{11} et θ_{12} sont de degré $\frac{1}{2}q(1+q^2)$.

Enfin un des caractères unipotents est cuspidal :

- θ_{10} est de degré $\frac{1}{2}q(q-1)^2$.

Décrivons la bijection naturelle (évoquée au paragraphe 2.1.2) entre les caractères unipotents de la série principale de G et les caractères du groupe de Weyl W :

- les caractères θ_0 et θ_{13} sont respectivement U_{id} et $\mathrm{U}_{\mathrm{sgn}}$; ils sont notés Id et St,
- la spécialisation de la fonction de degré, en $q = 1$, montre que θ_9 est U_{α_2},
- pour θ_{11} et θ_{12}, considérons le tore T_s et le sous-groupe de Lévi L_s. Soit g un élément de la forme $t_{a,a},\ a \in \mathbf{F}_q^*\backslash\{\pm 1\}$, il vérifie ([DiMi2] proposition 12.5)

$$^*\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_s}(\mathrm{U}_{\alpha_1})(g) = \mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_s}(\mathrm{U}_{\alpha_t})(g) = \mathrm{U}_{\alpha_t}(g)$$

et

$$^*\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_s}(\mathrm{U}_{\alpha_s})(g) = \mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_s}(\mathrm{U}_{\alpha_s})(g) = \mathrm{U}_{\alpha_s}(g).$$

Par ailleurs, comme $\mathrm{T}_s \subset \mathrm{L}_s$, il vient que

$$^*\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_s}(\mathrm{U}_{\alpha_t}) = \mathrm{U}_{\mathrm{Res}^{\mathrm{W}}_{\langle s\rangle}(\alpha_t)} = \mathrm{St}_{\mathrm{L}_s}$$

et

$$^*\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_s}(\mathrm{U}_{\alpha_s}) = \mathrm{U}_{\mathrm{Res}^{\mathrm{W}}_{\langle s\rangle}(\alpha_s)} = \mathrm{Id}_{\mathrm{L}_s}.$$

Ainsi $\mathrm{U}_{\alpha_t}(g) = q$ et $\mathrm{U}_{\alpha_s}(g) = 1$. Or $\theta_{11}(g) = 1$ et $\theta_{12}(g) = q$, donc nous pouvons conclure que θ_{11} est associé à α_s et θ_{12} à α_t.

Dans le cas de $\mathrm{Sp}(4, q)$, on a $\mathcal{S}(\mathrm{W}) = \mathrm{Irr}(\mathrm{W}) \cup \{c\}$ et le caractère $\mathrm{U}_{c,d}$ est le caractère unipotent cuspidal de G_d. En accord avec les notations précédentes, on pose $\mathrm{U}_c = \mathrm{U}_{c,n}$.

Descentes de Shintani

Pour les caractères unipotents de la série principale les racines de l'unité ω_χ valent 1 et pour le caractère unipotent cuspidal $\omega_{\mathrm{U}_{c,d}} = -1$ ([Lu] paragraphe 7.3). Les coefficients $\langle \mathrm{R}_\phi, \chi\rangle$, où R_ϕ est le caractère fantôme de G associé au caractère irréductible ϕ de W, et χ est un caractère unipotent de G, sont donnés dans le tableau suivant ([Ca] paragraphe 13.6).

	Id	St	U_{α_2}	U_{α_s}	U_{α_t}	U_c
R_{id}	1					
$\mathrm{R}_{\mathrm{sgn}}$		1				
R_{α_2}			1/2	1/2	1/2	1/2
R_{α_s}			1/2	1/2	-1/2	- 1/2
R_{α_t}			1/2	-1/2	1/2	-1/2

Par exemple,

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2})) = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_{\alpha_2,d} + \mathrm{U}_{\alpha_s,d} + \mathrm{U}_{\alpha_t,d} + (-1)^{\frac{n}{d}}\mathrm{U}_{c,d})$$

et

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\mathrm{E}_d(\mathrm{Id})) = \mathrm{Id}_d.$$

3.5.2 Extensions

Le but de ce paragraphe est de montrer que, pour chaque caractère unipotent de la série principale, les extensions données par les descentes de Shintani aux tranches $G\sigma^d$ pour $1 \leq d < n$ se recollent - problème posé dans le second chapitre -. En particulier, cela permettra de connaître les valeurs des extensions des caractères unipotents de la série principale de G, non plus seulement sur les classes de $G\sigma$ dont on connaît la descente de Shintani, mais sur toutes celles de $G\langle\sigma\rangle$ dont on connaît la descente de Shintani, en particulier sur toutes les puissances de σ.

Dans le second chapitre, on a considéré le caractère trivial et celui de Steinberg et on a déjà montré le résultat souhaité. Rappelons le rapidement :

• Le caractère trivial

Le caractère trivial de $G\langle\sigma\rangle$ est $E_1(\mathrm{Id})$, il étend Id, le caractère trivial de G. Pour tout d, il vérifie (proposition 2.34)

$$E_1(\mathrm{Id})(\sigma^d) = \mathrm{Sh}_{F/F_0^d}(E_d(\mathrm{Id}))(1) = \mathrm{Id}_d(1).$$

• Le caractère de Steinberg

Le caractère de Steinberg de $G\langle\sigma\rangle$ est $E_1(\mathrm{St})$, il étend St, le caractère de Steinberg de G. Pour tout d, il vérifie (proposition 2.35)

$$E_1(\mathrm{St})(\sigma^d) = \mathrm{Sh}_{F/F_0^d}(E_d(\mathrm{St}))(1) = \mathrm{St}_d(1).$$

Montrons maintenant le résultat pour les autres caractères unipotents de la série principale de G.

• Les caractères U_{α_s}, U_{α_t} et U_{α_2}

Considérons les caractères fantômes R_{α_t}, R_{α_s} et R_{α_2} de G. Leurs décompositions en somme de caractères unipotents sont données par les valeurs des produits scalaires $\langle R_\phi, \chi\rangle$. Posons

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{\alpha_s+\alpha_2} = U_{\alpha_s} + U_{\alpha_2}, \\ R_2 &= R_{\alpha_t+\alpha_2} = U_{\alpha_t} + U_{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Ainsi R_1 et R_2 sont deux caractères de G.

Dans la partie 2.2 du second chapitre, il est expliqué comment construire des extensions des caractères fantômes de G à $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$. Nous reprenons cette démarche dans ce cas particulier et nous posons

$$\widetilde{\mathrm{R}}_1 = \widetilde{\mathrm{R}}_s + \widetilde{\mathrm{R}}_{\alpha_2} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{R}}_2 = \widetilde{\mathrm{R}}_t + \widetilde{\mathrm{R}}_{\alpha_2}.$$

Ce sont des extensions à $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$ de R_1 et R_2.

Proposition 3.16

Les fonctions centrales $\widetilde{\mathrm{R}}_1$ *et* $\widetilde{\mathrm{R}}_2$ *sont des caractères de* $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$.

Démonstration : Montrons, tout d'abord, que ces fonctions sont des caractères virtuels. On verra alors que cela suffit pour conclure qu'elles sont des caractères.

Pour montrer qu'elles sont des caractères virtuels, il suffit de montrer qu'elles sont des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ d'induits de caractères.

Pour cela considérons les deux décompositions en caractères irréductibles dans Irr(W) suivantes :

$$\mathrm{Ind}_{\langle s\rangle}^{\mathrm{W}}\mathrm{id} = \alpha_s + \mathrm{id} + \alpha_2,$$

$$\mathrm{Ind}_{\langle t\rangle}^{\mathrm{W}}\mathrm{id} = \alpha_t + \mathrm{id} + \alpha_2.$$

On note $\widetilde{\mathrm{R}}^{\diamond}_{\mathrm{id}_{\langle s\rangle}}$, respectivement $\widetilde{\mathrm{R}}^{\diamond}_{\mathrm{id}_{\langle t\rangle}}$, le caractère fantôme, associé au caractère trivial, de $\mathrm{L}_s^{\diamond}\langle\pi\rangle$, respectivement $\mathrm{L}_t^{\diamond}\langle\pi\rangle$ (voir le paragraphe 2.2.3). Comme $\mathrm{L}_s^{\diamond}\langle\pi\rangle$ et $\mathrm{L}_t^{\diamond}\langle\pi\rangle$ sont les sous-groupes de Lévi de paraboliques rationnels, on peut appliquer le lemme 2.32 et on obtient

$$\widetilde{\mathrm{R}}_1 + \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id}} = \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{Ind}_{\langle s\rangle}^{\mathrm{W}}\mathrm{id}} = \mathrm{R}_{\mathrm{L}_s^{\diamond}\langle\pi\rangle}^{\mathrm{G}^{\diamond}\langle\pi\rangle}\widetilde{\mathrm{R}}^{\diamond}_{\mathrm{id}_{\langle s\rangle}} \circ \widetilde{\Phi}^{-1},$$

$$\widetilde{\mathrm{R}}_2 + \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id}} = \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{Ind}_{\langle t\rangle}^{\mathrm{W}}\mathrm{id}} = \mathrm{R}_{\mathrm{L}_t^{\diamond}\langle\pi\rangle}^{\mathrm{G}^{\diamond}\langle\pi\rangle}\widetilde{\mathrm{R}}^{\diamond}_{\mathrm{id}_{\langle t\rangle}} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}.$$

Comme $\widetilde{\mathrm{R}}^{\diamond}_{\mathrm{id}_{\langle s\rangle}}$ et $\widetilde{\mathrm{R}}^{\diamond}_{\mathrm{id}_{\langle t\rangle}}$ sont des caractères irréductibles de $\mathrm{L}_s^{\diamond}\langle\pi\rangle$ et $\mathrm{L}_t^{\diamond}\langle\pi\rangle$, les fonctions centrales $\widetilde{\mathrm{R}}_1 + \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id}}$ et $\widetilde{\mathrm{R}}_2 + \widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id}}$ sont des caractères. De plus $\widetilde{\mathrm{R}}_{\mathrm{id}}$ est un caractère, donc $\widetilde{\mathrm{R}}_1$ et $\widetilde{\mathrm{R}}_2$ sont des caractères virtuels.

Déduisons-en que $\widetilde{\mathrm{R}}_1$ est un caractère (la démonstration est identique pour $\widetilde{\mathrm{R}}_2$).

Comme fonction centrale, $\widetilde{\mathrm{R}}_1$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$ de caractères irréductibles de $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$:

$$\widetilde{\mathrm{R}}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_i,$$

où les χ_i sont des caractères irréductibles de $G\langle\sigma\rangle$ et les a_i appartiennent à $\mathbf{Z}$.

Par ailleurs, le fait que (lemme 2.33)

$$\langle\widetilde{\mathrm{R}}_1|\widetilde{\mathrm{R}}_1\rangle = \langle\alpha_s+\alpha_2|\alpha_s+\alpha_2\rangle = 2$$

implique que les a_i sont tous nuls sauf deux, qui valent alors ± 1. On a

$$\widetilde{\mathrm{R}}_1 = a_1\chi_1 + a_2\chi_2$$

avec $a_1 = \pm 1$ et $a_2 = \pm 1$.

Puis la restriction de $\widetilde{\mathrm{R}}_1$ à G est R_1. Il suit que

$$a_1\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}\chi_1 + a_2\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}\chi_2 = \mathrm{U}_{\alpha_s} + \mathrm{U}_{\alpha_2}.$$

Ainsi, par exemple, U_{α_s} est une composante de $\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}\chi_1$ et donc χ_1 est une composante de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}\mathrm{U}_{\alpha_s}$. Or U_{α_s} est σ-stable et donc admet une extension ψ_1 dans $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$. Il suit que χ_1 est un caractère irréductible qui étend U_{α_s} ([Is] corollaire 6.17). De même χ_2 est un caractère irréductible qui étend U_{α_2}. D'où

$$a_1\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}\chi_1 + a_2\mathrm{Res}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}\chi_2 = a_1\mathrm{U}_{\alpha_s} + a_2\mathrm{U}_{\alpha_2} = \mathrm{U}_{\alpha_s} + \mathrm{U}_{\alpha_2}$$

et donc $a_1 = a_2 = 1$. Finalement

$$\widetilde{\mathrm{R}}_1 = \chi_1 + \chi_2,$$

et donc $\widetilde{\mathrm{R}}_1$ est un caractère de $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$. ⊣

Il s'agit maintenant de considérer les caractères unipotents de la série principale de G.

Proposition 3.17

Il existe des extensions $\widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2}$, $\widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_s}$ *et* $\widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_t}$ *de, respectivement,* U_{α_2}, U_{α_s} *et* U_{α_t} *à* $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$ *telles que*

$$\widetilde{\mathrm{R}}_1 = \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2} + \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_s}$$

et

$$\widetilde{\mathrm{R}}_2 = \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2} + \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_t}.$$

Démonstration : D'après la preuve de la proposition 3.16, il existe deux caractères irréductibles de $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$, $\widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2}$ et $\widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_s}$ qui étendent U_{α_2} et U_{α_s}, tels que

$$\widetilde{\mathrm{R}}_1 = \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2} + \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_s}.$$

De même, il existe deux caractères irréductibles de $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$, $\overline{\mathrm{U}}_{\alpha_2}$ et $\widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_t}$ qui étendent U_{α_2} et U_{α_t}, tels que

$$\widetilde{\mathrm{R}}_2 = \overline{\mathrm{U}}_{\alpha_2} + \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_t}.$$

Par ailleurs les deux égalités

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{R}}_{\alpha_t} - \widetilde{\mathrm{R}}_{\alpha_s} &= \widetilde{\mathrm{R}}_1 - \widetilde{\mathrm{R}}_2\\ &= \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_s} - \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_t} + \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2} - \overline{\mathrm{U}}_{\alpha_2},\end{aligned}$$

et

$$\langle \widetilde{\mathrm{R}}_{\alpha_t} - \widetilde{\mathrm{R}}_{\alpha_s} | \widetilde{\mathrm{R}}_{\alpha_t} - \widetilde{\mathrm{R}}_{\alpha_s}\rangle = \langle \alpha_t - \alpha_s | \alpha_t - \alpha_s\rangle = 2.$$

impliquent

$$\overline{\mathrm{U}}_{\alpha_2} = \widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2}$$

et donc le résultat souhaité. ⊣

3.5.3 Recollements des extensions données par Shintani

Soit g un élément de G et g' un élément de $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(g)$. D'après le corollaire 2.31, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{R}}_1(g\sigma^d) &= \mathrm{R}_{1,d}(g')\\ &= [\mathrm{U}_{\alpha_2,d} + \mathrm{U}_{\alpha_s,d}](g')\\ &= [\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}_{\alpha_2,d} + \mathrm{U}_{\alpha_s,d} + \mathrm{U}_{\alpha_t,d} + \mathrm{U}_{c,d})\\ &\quad +\tfrac{1}{2}(\mathrm{U}_{\alpha_2,d} + \mathrm{U}_{\alpha_s,d} - \mathrm{U}_{\alpha_t,d} - \mathrm{U}_{c,d})](g')\\ &= \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}[\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2}) + \mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_s})](g')\end{aligned}$$

et donc

$$(\mathbf{A}) \qquad \widetilde{\mathrm{R}}_1(g\sigma^d) = [\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2}) + \mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_s})](g\sigma^d).$$

Par ailleurs,

$$\widetilde{\mathrm{R}}_1(g\sigma^d) = \mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\widetilde{\mathrm{R}}_1(g\sigma^d).$$

Or $\mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\widetilde{\mathrm{R}}_1$ est une extension de R_1 à $\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle$, il existe donc λ_d et λ'_d, des caractères linéaires de $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$ triviaux sur G tels que

$$(\mathbf{B}) \qquad \mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\widetilde{\mathrm{R}}_1 = \lambda_d\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2}) + \lambda'_d\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_s}).$$

Les deux égalités **(A)** et **(B)** impliquent l'égalité suivante :

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}_{\mathrm{G}\sigma^d}[\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2}) + \mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_s})] = \mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}_{\mathrm{G}\sigma^d}[\lambda_d\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2}) + \lambda'_d\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_s})].$$

Or U_{α_2} et U_{α_s} sont deux caractères irréductibles distincts et σ^d-stables. Ainsi les restrictions $\mathrm{Res}_{\mathrm{G}\sigma^d}^{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2})$ et $\mathrm{Res}_{\mathrm{G}\sigma^d}^{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_s})$ sont linéairement indépendantes [Is]. Il suit que λ_d et λ'_d sont triviaux.

Ainsi, pour tout d,

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}^{\mathrm{G}}\widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2} = \mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2}).$$

Il suit que $\widetilde{\mathrm{U}}_{\alpha_2}$ est égal à $\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})$ l'extension donnée par la descente de Shintani à la tranche $\mathrm{G}\sigma$ de U_{α_2} et sa restriction à $\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle$ donne $\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2})$ pour tout d. Cette extension permet donc de recoller les extensions données par Shintani à chaque tranche. Il en est de même pour U_{α_s}.

Le même raisonnement avec $\widetilde{\mathrm{R}}_2$ donne les même résultats pour U_{α_t}.

On a donc le théorème principal de ce paragraphe sur le recollement des extensions données par Shintani.

THÉORÈME 3.18

Pour chaque caractère θ de Irr W *et pour tout entier d diviseur de n, on a*

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_\theta) = \mathrm{E}_d(\mathrm{U}_\theta).$$

Ceci donne le corollaire suivant.

Corollaire 3.19

Pour chaque caractère unipotent de la série principale de G*, les valeurs de l'extension donnée par Shintani à* $\mathrm{G}\langle\sigma\rangle$ *sur les puissances de σ sont données dans le tableau suivant.*

	$\mathrm{E}_1(\mathrm{Id})$	$\mathrm{E}_1(\mathrm{St})$	$\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})$	$\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_s})$	$\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_t})$
1	1	q^4	$\frac{1}{2}q(1+q)^2$	$\frac{1}{2}q(1+q^2)$	$\frac{1}{2}q(1+q^2)$
σ^d, $\frac{n}{d}$ *pair*	1	q_0^4	$q_0^d(1+q_0^{2d})$	q_0^{2d}	q_0^{2d}
σ^d, $\frac{n}{d}$ *impair*	1	q_0^4	$\frac{1}{2}q_0^d(1+q_0^d)^2$	$\frac{1}{2}q_0^d(1+q_0^{2d})$	$\frac{1}{2}q_0^d(1+q_0^{2d})$

Démonstration : Donnons un exemple de calcul. On considère le caractère U_{α_2} et l'élément σ^d pour $\frac{n}{d}$ pair. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})(\sigma^d) &= \mathrm{Res}^{\mathrm{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{G}\langle\sigma^d\rangle}\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})(\sigma^d) \\
&= \mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2})(\sigma^d) \\
&= \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^d}(\mathrm{E}_d(\mathrm{U}_{\alpha_2})(1) \\
&= \tfrac{1}{2}[\mathrm{U}_{\alpha_2,d} + \mathrm{U}_{\alpha_s,d} + \mathrm{U}_{\alpha_t,d} + \mathrm{U}_{c,d}](1) \\
&= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}q_0^d(1+q_0^d)^2 + \tfrac{1}{2}q_0^d(1+q_0^{2d}) + \tfrac{1}{2}q_0^d(1+q_0^{2d}) + \tfrac{1}{2}q_0^d(q_0^d-1)^2] \\
&= q_0^d(1+q_0^{2d})
\end{aligned}$$

$\dashv$

Chapitre 4

Les isotypies de Sp(4,q)

Dans ce chapitre on construit des isotypies de $\mathrm{Sp}(4, q)$. On a vu dans le chapitre précédent (paragraphe 3.3) que $\mathrm{Sp}(4, q)$ n'admet pas de ℓ-sous-groupe de Sylow abélien quand $\ell = 2$ ou $\ell | q$. On s'intéresse donc au cas $\ell \neq 2$ et $\ell | q - 1$ ou $\ell | q + 1$ ou $\ell | q^2 + 1$.

On reprend les notations introduites dans le chapitre 3 : on note S un ℓ-sous-groupe de Sylow de G, H son normalisateur. Puis, pour tout sous-groupe P de S, on note G_P et H_P son centralisateur dans, respectivement, G et H. Enfin e, f, e_P et f_P sont les idempotents centraux primitifs principaux de, respectivement, G, H, G_P et H_P.

Dans les tables de caractères qui suivent, nous indiquons les valeurs des caractères sur les éléments qui nous permettront de vérifier qu'on a bien une isotypie. Quand un caractère est nul sur un élément, on laissera la case correspondante vide.

4.1 Le cas ℓ divise $q - 1$ et le cas ℓ divise $q + 1$

Ces deux cas sont très semblables. En effet, les structures des groupes sont identiques, leurs différences apparaissent dans des cardinaux ou l'ordre de racines primitives.

Nous introduisons donc l'entier d qui sera l'indice qui différencie ces deux cas.

• Si ℓ divise $q - 1$, on pose :

$$d = 1, \ w_d = 1 \ \text{ et } \ \delta = \gamma.$$

• Si ℓ divise $q+1$, on pose :

$$d = 2,\ w_d = w_0 \text{ et } \delta = \eta.$$

On définit les ensembles d'indices suivants :

• L'ensemble d'indices $\mathcal{S}_d$:

$$\mathcal{S}_d = \{\lambda \frac{\Phi_d(q)}{\ell^r},\ 1 \leq \lambda \leq \ell^r\},$$

Il est de cardinal ℓ^r. Il peut aussi être décrit comme étant l'ensemble des ℓ-éléments de $(\mathbf{Z}/\Phi_d(q)\mathbf{Z})$. Cette autre description permet de faire des calculs simples sur les indices. Nous nous en servirons.

• L'ensemble d'indices $\mathcal{S}_d^2$:
C'est un sous-ensemble de $\mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d$ tel que si (k,l) appartient à $\mathcal{S}_d^2$ alors $k \neq l$ et tel que la paire (l,k) est identifiée à la paire (k,l). Cet ensemble est de cardinal $\frac{1}{2}\ell^r(\ell^r - 1)$.

• L'ensemble d'indices $\mathcal{S}'_d$:

$$\mathcal{S}'_d = \{\lambda \frac{\Phi_d(q)}{\ell^r},\ 1 \leq \lambda \leq \frac{\ell^r - 1}{2}\}.$$

Il est de cardinal $\frac{\ell^r-1}{2}$. C'est aussi le sous-ensemble quotient, privé de 0, des ℓ-éléments de $(\mathbf{Z}/\Phi_d(q)\mathbf{Z})$ dans lequel on pose $s = s^{-1}$.

• L'ensemble d'indices $\mathcal{S}'^2_d$:
C'est un sous-ensemble de $\mathcal{S}'_d \times \mathcal{S}'_d$ tel que si (k,l) appartient à $\mathcal{S}'^2_d$ alors $k \neq l$ et tel que la paire (l,k) est identifiée à la paire (k,l). Cet ensemble est de cardinal $\frac{1}{8}(\ell^r - 1)(\ell^r - 3)$.

• L'ensemble d'indices $\mathcal{S}''_d$:
C'est un sous-ensemble de $\mathcal{S}_d$ tel que si k et l appartiennent à $\mathcal{S}''_d$ alors $l \not\equiv k, -k, q_0 k, -q_0 k$ modulo ℓ^r. Il est de cardinal $\frac{1}{4}(\ell^r - 1)$.

4.1.1 Le ℓ-sous groupe de Sylow

Soit S un ℓ-sous-groupe de Sylow de G. Il est de la forme

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}' \times \mathrm{S}',$$

où S' est cyclique d'ordre ℓ^r. Il est inclus dans un tore de type w_d, noté T_{w_d}. Le tore T_{w_d} est de la forme

$$\mathrm{T}_{w_d} = \begin{pmatrix} \mathrm{T}'_d & 0 \\ 0 & \mathrm{T}'_d \end{pmatrix},$$

où T'_d est cyclique d'ordre $\Phi_d(q)$.

On note τ un générateur de T'_d. Dans $\mathrm{Sp}(2, \mathrm{F}_{q^d})$, τ est conjugué à une puissance de $\begin{pmatrix} \delta & \\ & \delta^{-1} \end{pmatrix}$. Un générateur de S' est alors $\tau^{\frac{\Phi_d(q)}{\ell^r}}$.

Le normalisateur de S

On rappelle que $\dot{\mathrm{W}}$ et ses éléments notés ici sont en fait les conjugués par g des éléments définis au paragraphe 3.1.

Le normalisateur de S dans G est (voir annexe, paragraphe 6)

$$\mathrm{H} = \mathrm{T}_{w_d}\dot{\mathrm{W}}.$$

On a

- $\dot{t}$ est d'ordre 4. L'action de $\dot{t}$ sur T'_d est d'ordre 2. Pour tout (x, y) dans T_{w_d}, on a

$$^{\dot{t}}(x, y) = (x, y^{-1}).$$

- $\dot{s}$ est d'ordre 2. Il agit sur $\mathrm{T}_{w_d} = \mathrm{T}'_d \times \mathrm{T}'_d$ en permutant les composantes

$$^{\dot{s}}(x, y) = (y, x).$$

- $\mathrm{T}_{w_d} \cap \langle \dot{w}_0 \rangle = \langle {\dot{w}_0}^2 \rangle$, qui est d'ordre 2.

Les centralisateurs des sous-groupes de S

A conjugaison près, S contient uniquement des éléments de la forme

$$\{1,\ t_{dd}(i,j),\ (i,j) \in \mathcal{S}_d^2,\ t_{dd}(i),\ t_{d0}(i),\ t_{d0}^-(i),\ i \in \mathcal{S}_d\}.$$

Décrivons les centralisateurs dans G et dans H de ces éléments [Wh] :

- 1 est le seul ℓ-élément central, on a

$$\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(1) = \mathrm{G} \text{ et } \mathrm{C}_{\mathrm{H}}(1) = \mathrm{H},$$

• $t_{dd}(i,j)$ est semi-simple, on a vu que (paragraphe 3.3.2)

$$\mathrm{C_G}(t_{dd}(i,j)) = \mathrm{C_H}(t_{dd}(i,j)) = \mathrm{T}_{w_d},$$

• $t_{dd}(i)$ donne

$$\mathrm{C_G}(t_{dd}(i)) \simeq \mathrm{K}_d(2,q) \text{ et } \mathrm{C_H}(t_{dd}(i)) = \mathrm{T}_{w_d}\langle \dot{s} \rangle,$$

où

$$\mathrm{K}_1(2,q) = \mathrm{GL}_2(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_2(2,q) = \mathrm{U}_2(q),$$

• $t_{d0}(i)$ donne

$$\mathrm{C_G}(t_{d0}(i)) \simeq \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{T}'_d \text{ et } \mathrm{C_H}(t_{d0}(i)) = \mathrm{T}'_d\langle {}^{\dot{s}}\dot{t} \rangle \times \mathrm{T}'_d,$$

• $t^-_{d0}(i)$ donne le même centralisateur que $t_{d0}(i)$, nous le considérerons donc dans le cas $t_{d0}(i)$.

Notation 4.1

Soit P un sous-groupe de S*, nous dirons que P est de type*

- 1 *si* $\mathrm{C_G}(P) = \mathrm{G}$ *et* $\mathrm{C_H}(P) = \mathrm{H}$,
- S *si* $\mathrm{C_G}(P) = \mathrm{C_H}(P) = \mathrm{T}_{w_d}$,
- U *si* $\mathrm{C_G}(P) \simeq \mathrm{K}_d(2,q)$ *et* $\mathrm{C_H}(P) = \mathrm{T}_{w_d}\langle \dot{s} \rangle$,
- V *si* $\mathrm{C_G}(P) \simeq \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{T}'_d$ *et* $\mathrm{C_H}(P) = \mathrm{T}'_d\langle {}^{\dot{s}}\dot{t} \rangle \times \mathrm{T}'_d$.

Si P est de type X*, nous noterons* $\mathrm{G_X} = \mathrm{G}_P$, $\mathrm{H_X} = \mathrm{H}_P$, $\mathrm{e_X} = \mathrm{e}_P$, $\mathrm{f_X} = \mathrm{f}_P$ *et* $\mathrm{I_X} = \mathrm{I}_P$*. Pour le cas $P = 1$, nous omettrons l'indice.*

Remarquons que les cas 1, S, U et V décrivent donc tous les centralisateurs des sous-groupes de S. En effet, soit P est un sous-groupe de S, alors
- si P est trivial nous obtenons le cas 1,
- si P ne contient que des éléments de la forme $t_{dd}(i,j)$ nous obtenons le cas S,
- si P ne contient que des éléments de la forme $t_{dd}(i)$ nous obtenons le cas U,
- si P ne contient que des éléments de la forme $t_{d0}(i)$ nous obtenons le cas V,
- si P contient deux éléments non triviaux de formes différentes nous obtenons le cas S.

Pour construire une isotypie, nous avons besoin des sous-groupes de S. Nous donnons ici les renseignements qui nous seront utiles.

4.1.2 Caractères des centralisateurs des sous-groupes de S

Le type 1

Construisons tout d'abord les caractères de f.

Soit $O_{\ell'}\mathrm{H}$ le plus grand ℓ'-sous groupe normal de H. Les caractères du ℓ-bloc principal de H ont $O_{\ell'}\mathrm{H}$ dans leur noyau, *i.e.*, si χ est un caractère de Irr(f) et g un élément de $O_{\ell'}\mathrm{H}$ alors $\chi(g)=\chi(1)$ ([NaTs] théorème 8.1). Il suffit donc de connaître les caractères du ℓ-bloc principal de $\mathrm{H}/O_{\ell'}\mathrm{H}$ ([NaTs] théorème 8.8). Or

$$\mathrm{H}/O_{\ell'}\mathrm{H} \simeq \mathrm{S\dot{W}}/O_{\ell'}(\mathrm{S\dot{W}}) \simeq \mathrm{SW}.$$

Dans $(\mathrm{S}'\times 1)\langle {}^s t\rangle$, il y a deux caractères de degré 1, notés ξ_{00} et ξ_{02}, et $\frac{1}{2}(\ell^r-1)$ caractères de degré 2 notés ξ_k, $1\leq k\leq \ell^r-1$. Un tel caractère ξ_k est induit du caractère de $\mathrm{S}'\times 1$ non trivial $\theta_k : (\tau^{\frac{\Phi_d(q)}{\ell^r}})^i \mapsto \eta^{\frac{\Phi_d(q)}{\ell^r}ki}$. Il appartient au ℓ-bloc principal de T si et seulement si $1\leq k\leq \ell^r-1$. Si k et k' sont deux indices distincts et si $k'\equiv -k$ modulo ℓ alors $\xi_k=\xi_{k'}$.

Le groupe $(1\times \mathrm{S}')\langle t\rangle$ est isomorphe à $(\mathrm{S}'\times 1)\langle {}^s t\rangle$. Il admet donc les mêmes caractères.

Les caractères de $\mathrm{S}\langle {}^s t, t\rangle$ sont les produits d'un caractère ϕ_1 de $(\mathrm{S}'\times 1)\langle {}^s t\rangle$ par un caractère ϕ_2 de $(1\times \mathrm{S}')\langle t\rangle$. Ils seront notés $\phi_1\cdot\phi_2$.

Venons en maintenant au groupe SW.

- Les caractères $\xi_{00}\cdot\xi_{00}$ et $\xi_{02}\cdot\xi_{02}$ sont s-stables et donnent 4 caractères de degré 1 dans SW. Ils seront notés ψ_ϕ pour $\phi=\mathrm{id},\ \alpha_t,\ \alpha_s$ et sgn.

- Le caractère $\xi_{00}\cdot\xi_{02}$ donne par induction un caractère de degré 2 dans SW. Il sera noté ψ_{α_2}. Le caractère $\xi_{02}\cdot\xi_{00}$ donne le même caractère.

- Les $\xi_{0l}\cdot\xi_k$ donnent par induction $4\frac{\ell^r-1}{4}$ caractères de degré 4 dans SW. Ils seront notés $\psi_{1,k}$ et $\psi_{t,k}$.

- Les $\xi_k\cdot\xi_k$ sont s-stables et donnent $2\frac{\ell^r-1}{2}$ caractères de degré 4 dans SW. Ils seront notés ψ_k et ψ_k^-.

- Les $\xi_k\cdot\xi_l$, $k\neq l$, donnent par induction $\frac{1}{8}(\ell^r-1)(\ell^r-3)$ caractères de degré 8 dans SW. Ils seront notés ψ_{kl}.

On relève ces caractères dans H par le morphisme surjectif $\mathrm{H}\twoheadrightarrow \mathrm{SW}$.

Caractères du ℓ-bloc principal de H

On pose $\nu_u = \nu^u + \nu^{-u}$ pour tout entier u et pour $\nu = \gamma,\ \eta, \theta$ ou ζ.

Irr(f)	nombre de caractères	1	$\dot{c}$	$\dot{s}$	$\dot{t}$	$\dot{w}_0$	(τ^i, τ^j)
ψ_{id}	1	1	1	1	1	1	1
ψ_{α_s}	1	1	-1	-1	1	1	1
ψ_{α_t}	1	1	-1	1	-1	1	1
ψ_{sgn}	1	1	1	-1	-1	1	1
ψ_{α_2}	1	2				-2	2
$\psi_{1,k},\ k \in \mathcal{S}'_d$	$\frac{1}{2}(\ell^r - 1)$	4			1		$\delta_{ki} + \delta_{kj}$
$\psi_{t,k},\ k \in \mathcal{S}'_d$	$\frac{1}{2}(\ell^r - 1)$	4			-1		$\delta_{ki} + \delta_{kj}$
$\psi_k,\ k \in \mathcal{S}'_d$	$\frac{1}{2}(\ell^r - 1)$	4		1			$\delta_{ki}\delta_{kj}$
$\psi_k^-,\ k \in \mathcal{S}'_d$	$\frac{1}{2}(\ell^r - 1)$	4		-1			$\delta_{ki}\delta_{kj}$
$\psi_{kl},\ (k,l) \in \mathcal{S}'^2_d$	$\frac{1}{8}(\ell^r - 1)(\ell^r - 3)$	8					$\delta_{ki}\delta_{lj} + \delta_{kj}\delta_{li}$

Les cinq premiers caractères sont en fait indexés par les caractères irréductibles du groupe de Weyl.

Caractères du ℓ-bloc principal de $\mathrm{Sp}(4, q)$

Les caractères de $\mathrm{Sp}(4, q)$ ont été calculé par B. Srinivasan [Sr1], avant que la théorie de Deligne-Lusztig ne soit développée. Cette table a été réécrite plus tard en utilisant les notations de Deligne-Lusztig ([Sr2] et [Wh]). Nous donnons, ici, uniquement les valeurs de certains caractères sur certaines classes de conjugaison, qui seront utiles.

Soient $\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}$ pour $d = 1,\ 2$ et $\mathrm{L}_{\mathrm{SL},d}$ pour $d = 1,\ 2$ quatre sous-groupes de Lévi F-stables de G isomorphes à, respectivement, $\mathrm{GL}_2(q)$, $\mathrm{U}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{T}'_1$ (T'_1 est d'ordre $q-1$) et $\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{T}'_2$ (T'_2 est d'ordre $q+1$).

• Soit ϕ_k un caractère linéaire non trivial de $\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}$. Les caractères ϕ_k et $\mathrm{St}\phi_k$, où St est ici le caractère de Steinberg de $\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}$, donnent par le foncteur d'induction de Deligne-Lusztig les caractères irréductibles $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}}(\theta_k)$ et $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}}(\mathrm{St}\theta_k)$.

• Soit θ_k un caractère linéaire non trivial de T'_d. Les caractères $\mathrm{Id} \cdot \theta_k$ et $\mathrm{St} \cdot \theta_k$, où Id et St sont ici le caractère trivial et celui de Steinberg de $\mathrm{SL}_2(q)$, donnent par le foncteur d'induction de Deligne-Lusztig les caractères $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},d}}(\mathrm{Id}\cdot\theta_k)$ et $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},d}}(\mathrm{St}\cdot\theta_k)$.

Les notations de B. Srinivasan sont les suivantes :

$$\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l) = \chi_4(k,l),$$
$$\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}^{\mathrm{G}}(\phi_k) = \chi_6(k) \text{ et } -\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St}\phi_k) = -\chi_7(k),$$
$$\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Id} \cdot \theta_k) = \xi_1(k) \text{ et } \mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St} \cdot \theta_k) = \xi_1'(k),$$
$$\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l) = \chi_3(k,l),$$
$$\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},1}}^{\mathrm{G}}(\phi_k) = \chi_8(k) \text{ et } \mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},1}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St}\phi_k) = \chi_9(k),$$
$$-\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},1}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Id} \cdot \theta_k) = \xi_3(k) \text{ et } -\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},1}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St} \cdot \theta_k) = \xi_3'(k),$$

Les caractères $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ et $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l) = \chi_3(k,l)$ sont des vrais caractères car w_0 et 1 sont de signature 1. Les autres signes découlent du calcul du $\mathbf{F}_q$-rang des sous-groupes de Lévi considérés (voir [DiMi2] proposition 12.17).

	$\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ $(k,l) \in \mathcal{S}_2'^2$	$-\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}^{\mathrm{G}}(\phi_k)$ $k \in \mathcal{S}_2'$	$-\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St}\phi_k)$ $k \in \mathcal{S}_2'$	$-\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Id} \cdot \theta_k)$ $k \in \mathcal{S}_2'$	$-\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St} \cdot \theta_k)$ $k \in \mathcal{S}_2'$
1	$(1-q)^2(1+q^2)$	$(q-1)(1+q^2)$	$q(q-1)(1+q^2)$	$(q-1)(1+q^2)$	$q(q-1)(1+q^2)$
$t_{22}(i,j)$	$\eta_{ik}\eta_{jl}+\eta_{jk}\eta_{il}$	$-\eta_{ik}\eta_{jk}$	$\eta_{ik}\eta_{jk}$	$-\eta_{ik}-\eta_{jk}$	$\eta_{ik}+\eta_{jk}$
$t_{11}(i,j)$					
$t_{21}(i,j)$				$-\eta_{ik}$	$-\eta_{ik}$
$t_{22}(i)$	$(1-q)(\eta_{ki}\eta_{li})$	$q-1-\eta_{2ik}$	$1-q-q\eta_{2ik}$	$(q-1)\eta_{ik}$	$(1-q)\eta_{ik}$
$t_{11}(i)$		$q-1$	$q-1$		
$t_{20}(i)$	$(1-q)(\eta_{ki}+\eta_{li})$	$(q-1)\eta_{ik}$	$(1-q)\eta_{ik}$	$q-1-\eta_{ik}$	$1-q-q\eta_{ik}$
$t_{10}(i)$				$q-1$	$q-1$

	$\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ $(k,l) \in \mathcal{S}_1'^2$	$\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},1}}^{\mathrm{G}}(\phi_k)$ $k \in \mathcal{S}_1'$	$\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},1}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St}\phi_k)$ $k \in \mathcal{S}_1'$	$\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},1}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Id} \cdot \theta_k)$ $k \in \mathcal{S}_1'$	$\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},1}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St} \cdot \theta_k)$ $k \in \mathcal{S}_1'$
1	$(1+q)^2(1+q^2)$	$(q+1)(1+q^2)$	$q(q+1)(1+q^2)$	$(q+1)(1+q^2)$	$q(q+1)(1+q^2)$
$t_{22}(i,j)$					
$t_{11}(i,j)$	$\gamma_{ik}\gamma_{jl}+\gamma_{jk}\gamma_{il}$	$\gamma_{ik}\gamma_{jk}$	$\gamma_{ik}\gamma_{jk}$	$\gamma_{ik}+\gamma_{jk}$	$\gamma_{ik}+\gamma_{jk}$
$t_{21}(i,j)$				γ_{jk}	$-\gamma_{jk}$
$t_{22}(i)$		$1+q$	$-1-q$		
$t_{11}(i)$	$(1+q)\gamma_{ki}\gamma_{li}$	$q+1+\gamma_{2ik}$	$1+q+q\gamma_{2ik}$	$(1+q)\gamma_{ik}$	$(1+q)\gamma_{ik}$
$t_{20}(i)$				$1+q$	$-1-q$
$t_{10}(i)$	$(1+q)(\gamma_{ki}+\gamma_{li})$	$(1+q)\gamma_{ik}$	$(1+q)\gamma_{ik}$	$1+q+\gamma_{ki}$	$1+q+q\gamma_{ki}$

	Id	St	U_{α_2}	U_{α_s}	U_{α_t}	U_c
1	1	q^4	$\frac{1}{2}q(1+q)^2$	$\frac{1}{2}q(1+q^2)$	$\frac{1}{2}q(1+q^2)$	$\frac{1}{2}q(1-q)^2$
$t_{22}(i,j)$	1	1		-1	-1	-2
$t_{11}(i,j)$	1	1	2	1	1	
$t_{21}(i,j)$	1	-1		-1	1	
$t_{22}(i)$	1	$-q$		q	-1	$q-1$
$t_{11}(i)$	1	q	$1+q$	1	q	
$t_{20}(i)$	1	$-q$		-1	q	$q-1$
$t_{10}(i)$	1	q	$1+q$	q	1	

Les caractères du ℓ-bloc principal de G sont

$$\mathrm{Id},\ \mathrm{St},\ \mathrm{U}_{\alpha_s},\ \mathrm{U}_{\alpha_t},\ \mathrm{U}_{c_d},\ \text{où} \begin{cases} \mathrm{U}_{c_1} = \mathrm{U}_{\alpha_2}, \\ \mathrm{U}_{c_2} = \mathrm{U}_c, \end{cases}$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}}(\theta_k) \text{ et } \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}}(\mathrm{St}\theta_k) \text{ pour } k \in \mathcal{S}_d,$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},d}}(\mathrm{Id}\cdot\theta_k) \text{ et } \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},d}}(\mathrm{St}\cdot\theta_k) \text{ pour } k \in \mathcal{S}'_d,$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_d}}(\theta_k\cdot\theta_l) \text{ pour } (k,l) \in \mathcal{S}'^2_d.$$

Le type U

Caractères du ℓ-bloc principal de $\mathrm{T}_{w_d}\langle\dot{s}\rangle = \mathrm{H}_\mathrm{U}$

La table de caractères se calcule facilement. Les θ_k et θ_k^- sont des extensions de caractères de T_{w_d} alors que les ϕ_{kl} sont des inductions de caractères de T_{w_d}.

$\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_U)$	nombre de caractères	degré	(τ^i,τ^j)	$(\tau^i,\tau^j)\dot{s}$
$\theta_k,\ k \in \mathcal{S}_d$	ℓ^r	1	$\delta^{k(i+j)}$	$\delta^{k(i+j)}$
$\theta_k^-,\ k \in \mathcal{S}_d$	ℓ^r	1	$\delta^{k(i+j)}$	$-\delta^{k(i+j)}$
$\phi_{kl},\ (k,l) \in \mathcal{S}_d^2$	$\frac{1}{2}\ell^r(\ell^r-1)$	2	$\delta^{ki+lj}+\delta^{kj+li}$	

Caractères du ℓ-bloc principal de $\mathrm{K}_d(2,q) = \mathrm{G}_\mathrm{U}$

L'élément $\begin{pmatrix} \theta^i & \\ & \theta^{qi} \end{pmatrix}$ est conjugué à un élément de $\mathrm{GL}_2(q)$. On rappelle que θ est un générateur de $\mathbf{F}^*_{q^2}$ Dans la table qui suit, on gardera abusivement la matrice à coefficients dans $\mathbf{F}_{q^2}$.

• ℓ divise $q-1$, $\mathrm{K}_1(2,q) = \mathrm{GL}_2(q)$ [DiMi2]

$\mathrm{Irr}(\mathrm{e}_U)$	nombre de caractères	$\begin{pmatrix} \gamma^i & \\ & \gamma^i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \gamma^i & \\ & \gamma^j \end{pmatrix}$ $\gamma^i \neq \gamma^j$	$\begin{pmatrix} \theta^i & \\ & \theta^{qi} \end{pmatrix}$ $\theta^i \neq \theta^{qi}$	$\begin{pmatrix} \gamma^i & 1 \\ & \gamma^i \end{pmatrix}$
$\mathrm{Id}(\theta_k \circ det)$, $k \in \mathcal{S}_1$	ℓ^r	γ^{2ki}	$\gamma^{k(i+j)}$	γ^{-ki}	γ^{2ki}
$\mathrm{St}(\theta_k \circ det)$, $k \in \mathcal{S}_1$	ℓ^r	$q\gamma^{2ki}$	$\gamma^{k(i+j)}$	$-\gamma^{-ki}$	
$\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_1}^{\mathrm{GL}_2(q)}(\theta_k \cdot \theta_l)$, $(k,l) \in \mathcal{S}_1^2$	$\frac{1}{2}\ell^r(\ell^r - 1)$	$(q+1)\gamma^{(k+l)i}$	γ^{ki+lj} $+\gamma^{li+kj}$		$\gamma^{(k+l)i}$

• ℓ divise $q+1$, $\mathrm{K}_2(2,q) = \mathrm{U}_2(q)$ [En]

$\mathrm{Irr}(\mathrm{e}_U)$	nombre de caractères	$\begin{pmatrix} \eta^i & \\ & \eta^i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \eta^i & \\ & \eta^j \end{pmatrix}$ $\eta^i \neq \eta^j$	$\begin{pmatrix} \theta^i & \\ & \theta^{-qi} \end{pmatrix}$ $\theta^i \neq \theta^{-qi}$	$\begin{pmatrix} \eta^i & 1 \\ & \eta^i \end{pmatrix}$
$\mathrm{Id}(\theta_k \circ det)$, $k \in \mathcal{S}_2$	ℓ^r	η^{2ki}	$\eta^{k(i+j)}$	η^{-ki}	η^{2ki}
$\mathrm{St}(\theta_k \circ det)$, $k \in \mathcal{S}_2$	ℓ^r	$q\eta^{2ki}$	$-\eta^{k(i+j)}$	η^{-ki}	
$-\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_2}^{\mathrm{U}_2(q)}(\theta_k \cdot \theta_l)$, $(k,l) \in \mathcal{S}_2^2$	$\frac{1}{2}\ell^r(\ell^r - 1)$	$(q-1)\eta^{(k+l)i}$	$-\eta^{ki+lj}$ $-\eta^{kj+li}$		$-\eta^{(k+l)i}$

Le type V

Caractères du ℓ-bloc principal de $\mathrm{T}'_d\langle {}^{\dot{s}}\dot{t}\rangle$

On rappelle que $\mathrm{H}_{\mathrm{V}} = \mathrm{T}'_d\langle {}^{\dot{s}}\dot{t}\rangle \times \mathrm{T}'_d$.

La table de caractères se calcule facilement. Les deux caractères ξ_{00} et ξ_{02} sont des extensions de caractères de T'_d alors que les ξ_k sont des inductions de caractères de T'_d.

	nombre de caractères	degré	τ^i	$\tau^i\dot{s}\dot{t}\dot{s}$
ξ_{00}	1	1	1	1
ξ_{02}	1	1	1	-1
$\xi_k,\ k \in \mathcal{S}'_d$	$\frac{1}{2}(\ell^r - 1)$	2	δ_{ki}	$-\delta_{ki}$

Caractères de $\mathrm{SL}_2(q)$ [DiMi2]

On rappelle que $\mathrm{G_V} = \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{T}'_d$.

	nombre de caractères	$\begin{pmatrix} \epsilon & \\ & \epsilon \end{pmatrix}$ $\epsilon = \pm 1$	$\begin{pmatrix} \gamma^i & \\ & \gamma^{-i} \end{pmatrix}$ $\gamma^i \neq \pm 1$	$\begin{pmatrix} \zeta^i & \\ & \zeta^{qi} \end{pmatrix}$ $\zeta^i \neq \zeta^{qi}$	$\begin{pmatrix} \epsilon & \gamma^i \\ & \epsilon \end{pmatrix}$ $\epsilon = \pm 1,\ i = 0,1$
Id	1	1	1	1	1
St	1	q	1	-1	
$-\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_2}^{\mathrm{SL}_2(q)}(\theta_k)$, $k \in \mathcal{S}'_2$	$\frac{1}{2}(\ell^r - 1)$	$(q-1)\theta_k(\epsilon)$		$-\eta_{ki}$	$-\theta_k(\epsilon)$
$\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_1}^{\mathrm{SL}_2(q)}(\theta_k)$, $k \in \mathcal{S}'_1$	$\frac{1}{2}(\ell^r - 1)$	$(q+1)\theta_k(\epsilon)$	γ_{ki}		$\theta_k(\epsilon)$

On remarque que γ n'est jamais un carré car q est impair.

Les caractères du ℓ-bloc principal, où ℓ divise $\Phi_d(q)$ sont

$$\mathrm{Id},\ \mathrm{St},\ \text{ et }\ (-1)^{d-1}\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{SL}_2(q)}(\theta_k)\ \text{ pour } k \in \mathcal{S}'_d.$$

4.1.3 Deux remarques

1. Dans le cas 1, U ou V, si x appartient à S et s'il vérifie $P\langle x\rangle = \mathrm{S}$, la condition de compatibilité à la fusion s'écrit

$$\mathrm{I_S}\ d^x_{\mathrm{H}_P} = d^x_{\mathrm{G}_P}\ \mathrm{I}_P.$$

C'est-à-dire que pour tout χ caractère de $\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_P)$ et tout ℓ'-élément x' de T_{w_d} on veut

$$\chi(x'x) = \mathrm{I}_P(\chi)(x'x).$$

Remarquons que $x'x$ appartient à $\mathrm{T}_{w_d}\backslash\{\pm 1\}$ car l'ordre de $x'x$ est le produit le l'ordre de x par celui de x' (car ces ordres sont premier entre eux) et $x \neq 1$.

Il suffit donc que $\chi(y) = \mathrm{I}_P(\chi)(y)$ pour tout y appartenant à $\mathrm{T}_{w_d}\backslash\{\pm 1\}$, *i.e.*, que deux caractères en correspondance par I_P aient la même valeur sur $\mathrm{T}_{w_d}\backslash\{\pm 1\}$ au signe près.

2. On rappelle que pour tout caractère de $\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_P)$ on a (lemme 1.24)

$$\mathrm{I}_P(\chi)(1) \equiv \chi(1) \text{ modulo } \ell.$$

Ces deux remarques donnent des indices pour construire les isotypies et, en fait, imposent souvent l'isotypie comme on le verra.

4.1.4 Les isométries bijectives

Pour construire une isotypie I entre f et e, il faut définir, pour tout sous-groupe P de S, des isométries bijectives (définition 1.18)

$$\mathrm{I}_P : \mathbf{Z}\mathrm{Irr}(f_P) \to \mathbf{Z}\mathrm{Irr}(e_P).$$

Suivant la remarque 1.19, prenons un système de représentants des sous-groupes de S modulo H. On le note $\mathcal{P}$. On va décrire une isométrie bijective I_P pour tout sous-groupe P de $\mathcal{P}$ et on posera, pour tout élément h de H : $\mathrm{I}_{P^h} = (\mathrm{I}_P)^h$.

L'isométrie I_{S}

Pour ce cas, nous savons que I_{S} doit être l'application identité.

L'isométrie I

On pose

$$
\mathrm{I}\ :\ \left\{\begin{array}{c}\psi_{\mathrm{id}}\\ \psi_{\alpha_s}\\ \psi_{\alpha_t}\\ \psi_{\mathrm{sgn}}\\ \psi_{\alpha_2}\\ \psi_{1,k}\\ \psi_{t,k}\\ \psi_k\\ \psi_k^-\\ \psi_{kl}\end{array}\right\}\mapsto\left\{\begin{array}{c}\mathrm{Id}\\ (-1)^{d-1}\mathrm{U}_{\alpha_s}\\ (-1)^{d-1}\mathrm{U}_{\alpha_t}\\ \mathrm{St}\\ (-1)^{d-1}\mathrm{U}_{c_d}\\ (-1)^{d-1}\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},d}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{id}\cdot\theta_k)\\ \mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},d}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St}\cdot\theta_k)\\ (-1)^{d-1}\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}}^{\mathrm{G}}(\phi_k)\\ \mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},d}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St}\phi_k)\\ \mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_d}}^{\mathrm{G}}(\theta_k\cdot\theta_l)\end{array}\right\},
$$

$k, \in \mathcal{S}'_d$ et $(k,l)\in\mathcal{S}'^2_d$.

On note M_1 la matrice de I, elle donne les signes de l'isométrie I. Pour $d=1$, c'est donc la matrice identité. Par contre pour $d=2$, cette matrice contient des coefficients -1.

L'isométrie I_U

On pose

$$
\mathrm{I}_\mathrm{U}\ :\ \left\{\begin{array}{c}\theta_k\\ \theta_k^-\\ \phi_{kl}\end{array}\right\}\mapsto\left\{\begin{array}{c}\mathrm{Id}(\theta_k\circ det)\\ (-1)^{d-1}\mathrm{St}(\theta_k\circ det)\\ (-1)^{d-1}\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{K}_d(q)}(\theta_k\cdot\theta_l)\end{array}\right\},
$$

$k, \in \mathcal{S}_d$ et $(k,l)\in\mathcal{S}^2_d$.et

$$
\mathrm{K}_1(q)=\mathrm{GL}_2(q),\ \mathrm{K}_2(q)=\mathrm{U}_2(q).
$$

L'isométrie I_V

Soient I'_V une isométrie bijective entre le ℓ-bloc principal de $\mathrm{T}\langle{}^{\dot s}\dot t\rangle$ et le ℓ-bloc principal de $\mathrm{SL}_2(q)$ et id l'application identité de l'ensemble des caractères du ℓ-bloc principal de T'_d dans lui-même. En posant

$$
\mathrm{I}_\mathrm{V}=\mathrm{I}'_\mathrm{V}\times\mathrm{id},
$$

nous obtenons une isométrie bijective entre le ℓ-bloc principal de $\mathrm{T}'_d\langle {}^{\dot s}\dot t\rangle \times \mathrm{T}'_d$ et le ℓ-bloc principal de $\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{T}'_d$.

On pose

$$\mathrm{I}'_{\mathrm{V}}\ :\ \left\{\begin{array}{c}\xi_{00}\\ \xi_{02}\\ \xi_k\end{array}\right\} \mapsto \left\{\begin{array}{c}\mathrm{Id}\\ (-1)^{d-1}\mathrm{St}\\ \mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{SL}_2(q)}(\theta_k)\end{array}\right\},$$

$k \in \mathcal{S}'_d$.

Ainsi

$$\mathrm{I}_{\mathrm{V}}\ :\ \left\{\begin{array}{c}\xi_{00}\cdot\theta_k\\ \xi_{02}\cdot\theta_k\\ \xi_l\cdot\theta_k\end{array}\right\} \mapsto \left\{\begin{array}{c}\mathrm{Id}\cdot\theta_k\\ (-1)^{d-1}\mathrm{St}\cdot\theta_k\\ \mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{SL}_2(q)}(\theta_l)\cdot\theta_k\end{array}\right\},$$

$k, l \in \mathcal{S}'_d$.

Proposition 4.2

L'isométrie bijective I *est une isotypie entre* f *et* e.

Le but de la fin de cette section est de démontrer cette affirmation.

4.1.5 L'équivariance

D'après le choix des isométries I_P pour tout sous-groupe P de S, il faut montrer que si h appartient à $\mathrm{N}_{\mathrm{H}}(P)$, alors $(\mathrm{I}_P)^h = \mathrm{I}_P$.

• Pour le cas U, on a

$$\mathrm{N}_{\mathrm{H}}(P) = \mathrm{C}_{\mathrm{H}}(P)\langle \dot w_0\rangle.$$

On doit donc montrer que, pour tout caractère χ de $\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_P)$,

$${}^{\dot w_0}I_P(\chi) = \mathrm{I}_P({}^{\dot w_0}\chi).$$

• Pour le cas V, on a

$$\mathrm{N}_{\mathrm{H}}(P) = \mathrm{C}_{\mathrm{H}}(P)\langle {}^{\dot s}\dot t\rangle.$$

On doit donc montrer que, pour tout caractère χ de $\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_P)$,

$${}^{{}^{\dot s}\dot t}I_P(\chi) = \mathrm{I}_P({}^{{}^{\dot s}\dot t}\chi).$$

On vérifie ces égalités directement sur les tables de caractères. On remarque que la conjugaison par un de ces éléments (suivant qu'on regarde le cas U ou le cas V) implique sur les indices des caractères de $\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_P)$ comme sur ceux de $\mathrm{Irr}(\mathrm{e}_P)$ leurs changements en leurs opposés.

4.1.6 La compatibilité à la fusion

Le cas 1

Le seul ℓ-élément central est 1. Il suffit donc de vérifier :
• pour x de la forme $t_{dd}(i)$: $\mathrm{I}_\mathrm{U} \circ d^x_\mathrm{H} = d^x_\mathrm{G} \circ \mathrm{I}$,
• pour x de la forme $t_{d0}(i)$: $\mathrm{I}_\mathrm{V} \circ d^x_\mathrm{H} = d^x_\mathrm{G} \circ \mathrm{I}$.

Cette réduction dans les vérifications vient du fait, d'une part que pour tout groupe fini G, il y a un isomorphisme entre $CF(G)$ et $\oplus_x CF_{\ell'}(C_G(x))$ où x parcourt un système de représentants des ℓ-éléments de G ([Br2] paragraphe 4A), d'autre part que pour x de la forme $t_{dd}(i,j)$ la vérification est inutile d'après les remarques du paragraphe 4.1.3 sur les isométries données.

Ces égalités se vérifient directement sur les tables de caractères.

On peut aussi utiliser les matrices de décomposition généralisée (elles sont données en annexe de ce chapitre). Voici comment faire :

• $d = 2$:

$\underline{t_{22}(i)}$

Comme $\mathrm{I}_\mathrm{U}(\overline{1}) = \overline{\mathrm{Id}}$ et $\mathrm{I}_\mathrm{U}(\overline{sgn}) = -\overline{\mathrm{St}} = -\overline{\mathrm{R}^{\mathrm{U}_2(q)}_{\mathrm{T}'_2}} - \overline{\mathrm{Id}}$, la matrice M_U de I_U restreinte à $\mathrm{CF}_{\ell'}(\mathrm{f}_\mathrm{U}, K)$ est

$$M_\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On souhaite

$$M_\mathrm{U} M^\mathrm{H}_{t_{22}(i)} = M^\mathrm{G}_{t_{22}(i)} M_1.$$

Un calcul matriciel permet de vérifier l'égalité souhaitée.

$\underline{t_{20}(i)}$

Comme $\mathrm{I}_\mathrm{V}(\overline{1}) = \overline{\mathrm{Id}}$ et $\mathrm{I}_\mathrm{V}(\overline{sgn}) = -\overline{\mathrm{St}} = -\overline{\mathrm{R}^{\mathrm{U}_2(q)}_{\mathrm{T}'_2}} - \overline{\mathrm{Id}}$, la matrice M_V de I_V

restreinte à $\mathrm{CF}_{\ell'}(\mathrm{f_V}, K)$ est

$$M_{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On souhaite

$$M_{\mathrm{V}} M^{\mathrm{H}}_{t_{20}(i)} = M^{\mathrm{G}}_{t_{20}(i)} M_1.$$

Un calcul matriciel permet de vérifier l'égalité souhaitée.

• $d = 1$:

$\underline{t_{11}(i)}$

Comme $\mathrm{I_U}(\overline{1}) = \overline{\mathrm{Id}}$ et $\mathrm{I_U}(\overline{sgn}) = \overline{\mathrm{St}}$, la matrice M_{U} de $\mathrm{I_U}$ restreinte à $\mathrm{CF}_{\ell'}(\mathrm{f_U}, K)$ est

$$M_{\mathrm{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il faut donc que les deux matrices de décomposition généralisée $M^{\mathrm{H}}_{t_{11}(i)}$ et $M^{\mathrm{G}}_{t_{11}(i)}$ soient identiques, ce qui est le cas.

$\underline{t_{10}(i)}$

Comme $\mathrm{I_V}(\overline{1}) = \overline{\mathrm{Id}}$ et $\mathrm{I_V}(\overline{sgn}) = \overline{\mathrm{St}}$, la matrice M_{V} de $\mathrm{I_V}$ restreinte à $\mathrm{CF}_{\ell'}(\mathrm{f_U}, K)$ est

$$M_{\mathrm{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il faut donc encore que les deux matrices de décomposition généralisée $M^{\mathrm{H}}_{t_{10}(i)}$ et $M^{\mathrm{G}}_{t_{10}(i)}$ soient identiques, ce qui est le cas.

Le cas U

Tout ℓ-élément x de la forme $t_{dd}(i)$ est central dans $\mathrm{H_U}$. Il faut vérifier que

$$\mathrm{I_U} \circ d^x_{\mathrm{H_U}} = d^x_{\mathrm{G_U}} \circ \mathrm{I_U}$$

pour tous ces x centraux. Pour cela il suffit de vérifier :

• pour tout χ caractère irréductible du ℓ-bloc principal de $\mathrm{H_U}$,

$$\frac{I_{\mathrm{U}}(\chi)(x)}{I_{\mathrm{U}}(\chi)(1)} = \frac{\chi(x)}{\chi(1)},$$

• $\mathrm{I_U} \circ d^1_{\mathrm{H_U}} = d^1_{\mathrm{G_U}} \circ \mathrm{I_U}$.

On vérifie le premier point sur les tables de caractères données précédemment. Pour le deuxième point, considérons Z, le ℓ-centre de $\mathrm{G_U}$.

Dans $\mathrm{G_U/Z}$, on a les caractères suivants :

- $\overline{\mathrm{Id}}$, qui est l'image de Id par la projection $\mathrm{G_U} \twoheadrightarrow \mathrm{G_U/Z}$,

- $\overline{\mathrm{St}}$, qui est l'image de St par la projection $\mathrm{G_U} \twoheadrightarrow \mathrm{G_U/Z}$,

- pour $(k,l) \in \mathcal{S}_d^2$, on pose $k = k'\frac{\Phi_d(q)}{\ell^r}$ et $l = l'\frac{\Phi_d(q)}{\ell^r}$. Il existe α', $0 \leq \alpha' < \ell^r$, tel que $k' + l' \equiv 2\alpha'$ modulo ℓ^r. On pose $\alpha = \alpha'\frac{\Phi_d(q)}{\ell^r}$ et on a $\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{K}_d(q)}(\theta_k \cdot \theta_l) = \mathrm{Id}(\theta_\alpha \circ det)\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{K}_d(q)}(\theta_{k-\alpha} \cdot \theta_{l-\alpha})$. On a donc dans $\mathrm{G_U/Z}$, les caractères $\overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{K}_d(q)}(\theta_{k-\alpha} \cdot \theta_{l-\alpha})$, qui sont les images de $\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{K}_d(q)}(\theta_{k-\alpha} \cdot \theta_{l-\alpha})$ par la projection $\mathrm{G_U} \twoheadrightarrow \mathrm{G_U/Z}$.

De même dans $\mathrm{H_U/Z}$, on a les caractères suivants :

- $\overline{\mathrm{id}}$, qui est l'image de θ_1 par la projection $\mathrm{H_U} \twoheadrightarrow \mathrm{H_U/Z}$,

- $\overline{\mathrm{sgn}}$, qui est l'image de θ_1^- par la projection $\mathrm{H_U} \twoheadrightarrow \mathrm{H_U/Z}$,

- $\overline{\phi}_{(k-\alpha)(l-\alpha)}$, qui sont les images de $\phi_{(k-\alpha)(l-\alpha)}$ par la projection $\mathrm{H_U} \twoheadrightarrow \mathrm{H_U/Z}$.

La bijection

$$\overline{\mathrm{I}}_\mathrm{U} \ : \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathrm{id}} \\ \overline{\mathrm{sgn}} \\ \overline{\phi}_{(k-\alpha)(l-\alpha)} \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \overline{\mathrm{Id}} \\ \overline{\mathrm{St}} \\ \overline{\mathrm{R}}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{K}_d(q)}(\theta_{k-\alpha} \cdot \theta_{l-\alpha}) \end{array} \right\}$$

est clairement une isotypie. En particulier, le bi-caractère généralisé $\overline{\mu}_\mathrm{U}$ associé à $\overline{\mathrm{I}}_\mathrm{U}$ vérifie les conditions de compatibilité (remarque 1.25).

On a une bijection entre $\mathrm{Irr(e}_U)$ et $\mathrm{Irr(Z)} \times \mathrm{Irr(e}_{\mathrm{G_U/Z}})$, où $\mathrm{Irr(e}_{\mathrm{G_U/Z}})$ est l'ensemble des caractères irréductibles du ℓ-bloc principal de $\mathrm{G_U/Z}$ et Irr(Z) est l'ensemble des caractères irréductibles de Z. En effet, soit χ un caractère de $\mathrm{Irr(e}_U)$. Il s'écrit $\theta\phi$ où θ est un relevé d'un caractère de Irr(Z) et ϕ est un caractère de $\mathrm{Irr(e}_U)$ trivial sur Z.

Décrivons cette bijection :

- les caractères $\mathrm{Id}(\theta_k \circ det)$ pour $k \in \mathcal{S}_d$ sont des caractères irréductibles qui étendent les caractères irréductibles du ℓ-centre de $\mathrm{G_U}$,

- le caractère de Steinberg St est trivial sur le centre,

- pour $k \in \mathcal{S}_d$, on a $\mathrm{St}(\theta_k \circ det) = \mathrm{Id}(\theta_k \circ det)\mathrm{St}$,

- pour $(k,l) \in \mathcal{S}_d^2$, on pose $k = k'\frac{q-1}{\ell^r}$ et $l = l'\frac{\Phi_d(q)}{\ell^r}$. Il existe α', $0 \leq \alpha' < \ell^r$, tel que $k' + l' \equiv 2\alpha'$ modulo ℓ^r. On pose $\alpha = \alpha'\frac{\Phi_d(q)}{\ell^r}$ et on a $\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{K}_d(q)}(\theta_k \cdot \theta_l) = \mathrm{Id}(\theta_\alpha \circ det)\mathrm{R}_{\mathrm{T}'_d}^{\mathrm{K}_d(q)}(\theta_{k-\alpha} \cdot \theta_{l-\alpha})$.

De même du côté de $\mathrm{H_U}$ on a, pour $k \in \mathcal{S}_d$ et $(k,l) \in \mathcal{S}_d^2$,

- $\theta_k = \theta_k\theta_1$,

- $\theta_k^- = \theta_k\theta_1^-$,

- $\phi_{kl} = \theta_\alpha\phi_{(k-\alpha)(l-\alpha)}$, où α est construit comme ci-dessus.

L'isométrie $\mathrm{I_U}$ vérifie

$$\mathrm{I_U}(\chi) = \mathrm{I_U}(\theta\phi) = \theta\widetilde{\overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{U}}(\overline{\phi})},$$

où $\widetilde{\overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{U}}(\overline{\phi})}$ est le caractère de $\mathrm{G_U}$ obtenu par inflation du caractère $\overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{U}}(\overline{\phi})$ de $\mathrm{G_U/Z}$ (c'est-à-dire, via le caractère $\overline{\mathrm{I}}_{\mathrm{U}}(\overline{\phi})$ composé avec la projection $\mathrm{H_U} \twoheadrightarrow \mathrm{H_U/Z}$).

Ceci implique que le bi-caractère généralisé μ_{U} associé à $\mathrm{I_U}$ vérifie aussi les conditions de compatibilité. Il suit que l'isométrie $\mathrm{I_U}$ vérifie le dernier point souhaité.

Cette méthode, pour démontrer ce dernier point, vient de R. Rouquier. Elle est applicable de manière plus générale, sous condition que le ℓ-sylow soit abélien.

Le cas V

On rappelle que $\mathrm{G_V} = \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{T}'_d$ et $\mathrm{H_V} = \mathrm{T}'_d\langle {}^{\dot{s}}\dot{t}\rangle \times \mathrm{T}'_d$. Il n'y pas pas de ℓ-élément central autre que 1 dans $\mathrm{SL}_2(q)$. Donc il n'y a rien à vérifier pour I'_{V}. De plus, sur T'_d on a choisi l'isométrie identité, il n'y a donc rien à vérifier.

Nous avons donc montré que I est bien une isotypie entre f et e.

4.2 ℓ divise q^2+1

4.2.1 Le ℓ-sous groupe de Sylow

Soit S un ℓ-sous-groupe de Sylow de G. Il est cyclique d'ordre ℓ^r. Il est inclus dans un tore de type c, noté T_c. Le tore T_c est cyclique d'ordre q^2+1.

On note τ un générateur de T_c. Dans $\mathrm{Sp}(4, \mathrm{F}_{q^4})$, τ est conjugué à une puissance de $t_4(i)$. Un générateur de S est alors $\tau^{\frac{q^2+1}{\ell^r}}$.

Le normalisateur de S

Le normalisateur de S dans G est (voir annexe, paragraphe 6)

$$\mathrm{H} \simeq \mathrm{T}_c\langle\dot{c}\rangle.$$

On rappelle que $\dot{c}$ est d'ordre 8. Son action sur T_c est

$${}^{\dot{c}}t = t^{-q}.$$

Elle est d'ordre 4. Remarquons que

$${}^{\dot{c}^2}t = t^{-1}.$$

4.2.2 Caractères

On définit l'ensemble d'indices $\mathcal{S}_4$:
C'est l'ensemble de $\frac{1}{4}(\ell^r-1)$ éléments contenu dans $\{\lambda\frac{q^2+1}{\ell^r},\ 1 \leq \lambda \leq \ell^r-1\}$ tel que si i appartient à $\mathcal{S}_4$ alors i, $-i$, qi et $-qi$ sont deux à deux distincts modulo ℓ^r et si i et j appartiennent à $\mathcal{S}_4$ alors $\{i, -i, qi, -qi\} \cap \{j, -j, qj, -qj\} = \emptyset$.

Si u est un diviseur de n, on notera $\mathcal{S}_{4,u}$ l'ensemble d'indice précédent, pour le groupe $\mathbf{G}^{\mathrm{F}_0^u}$.

Par la suite, on aura besoin de tous les caractères de H et pas seulement ceux de son ℓ-bloc principal, nous les décrivons donc tous ici. Les calculs des caractères de H se font facilement. On a

- huit caractères de degré 1, notés ξ'_{0i} pour $0 \leq i \leq 7$,

- $\frac{q^2-1}{4}$ caractères de degré 4 notés ξ'_i. L'indice i appartient à $\mathcal{S}_4$. Remarquons que les indices i, qi, $-i$ et $-qi$ modulo q^2+1 donnent le même caractère. En effet un tel caractère vient d'un caractère non trivial de T_c, qui est induit à $\mathrm{T}_c\langle\dot{c}\rangle$.

<u>Classes de conjugaison de H</u>

• pour tout élément x de $\mathrm{T}_c\backslash\{\pm 1\}$, on a $cl(x) = \{x,\ {}^{\dot c}x,\ {}^{\dot c^2}x,\ {}^{\dot c^3}x\}$. Ceci vient du fait que T_c est abélien et $\dot c^4$ agit trivialement. Cela donne $\frac{q^2+1-2}{4}$ classes de cardinal 4.

• $cl(-1) = \{-1\}$ car ${}^{\dot c}(-1) = (-1)^{-q} = -1$ car q est impair.

• $cl(\dot c^i) = \{\tau^{2d}\dot c^i, \tau^{2d+1}\dot c^{4+i},\ 0 \le d \le \frac{q^2-1}{2}\}$, $i = 1, 2, 3, 5, 6$ ou 7.

En effet, $\dot c^i$ est conjugué à $\tau^d\dot c^i$ par τ^u si et seulement si

$$(1-q^i)u \equiv d \ \text{ modulo } \ q^2+1.$$

Cette équation n'a de solution que si d est pair. On a alors

$$\frac{1-q^i}{2}u \equiv \frac{d}{2} \ \text{ modulo } \ \frac{q^2+1}{2}.$$

Comme $\frac{1-q^i}{2}$ et $\frac{q^2+1}{2}$ sont premier entre eux, $\frac{1-q^i}{2}$ est inversible modulo $\frac{q^2+1}{2}$ et on trouve une solution pour u.

Puis, on remarque que $\dot c^{4+i}$ et $\tau\dot c^i$ sont conjugués pour $i = 1,\ 2$ et 3. en effet, pour que τ^u les conjugue, il suffit que

$$(1-q)u \equiv 1 - \frac{q^2+1}{2} \ \text{ modulo } \ q^2+1$$

Or $1 - \frac{q^2+1}{2} = \frac{1-q^2}{2}$ est pair (car q est une puissance d'un nombre impair). On peut donc diviser le tout par 2 et conclure comme précédemment.

Cela donne donc six classes de cardinal $\frac{q^2+1}{2}$.

<u>Table des caractères de H</u>

Soit α est une racine primitive $8^{\text{ème}}$ de l'unité.

On pose $\zeta_u = \zeta^u + \zeta^{-u}$ pour tout entier u.

	degré	t^k	$\dot{c}$	$\dot{c}^2$	$\dot{c}^3$	$\dot{c}^4$	$\dot{c}^5$	$\dot{c}^6$	$\dot{c}^7$
ξ'_{00}	1	1	1	1	1	1	1	1	1
ξ'_{01}	1	$(-1)^k$	α	α^2	α^3	-1	$-\alpha$	$-\alpha^2$	$-\alpha^3$
ξ'_{02}	1	1	α^2	-1	$-\alpha^2$	1	α^2	-1	$-\alpha^2$
ξ'_{03}	1	$(-1)^k$	α^3	$-\alpha^2$	α	-1	$-\alpha^3$	α^2	$-\alpha$
ξ'_{04}	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ξ'_{05}	1	$(-1)^k$	$-\alpha$	α^2	$-\alpha^3$	-1	α	$-\alpha^2$	α^3
ξ'_{06}	1	1	$-\alpha^2$	-1	α^2	1	$-\alpha^2$	-1	α^2
ξ'_{07}	1	$(-1)^k$	$-\alpha^3$	$-\alpha^2$	$-\alpha$	-1	α^3	α^2	α
$\xi'_j,\ j \in \mathcal{S}_4$	4	$\zeta_{jk} + \zeta_{qjk}$				$(-1)^j$			

Caractères du ℓ-bloc principal de $\mathrm{Sp}(4, q)$

Les notations de B. Srinivasan sont les suivantes : $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_c}^{\mathrm{G}}(\theta_k) = \chi_1(k)$.
Le caractère $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_c}^{\mathrm{G}}(\theta_k)$ est un vrai caractère car c est de signature 1.

	$\mathrm{R}_{\mathrm{T}_c}^{\mathrm{G}}(k)$ $k \in \mathcal{S}'_4$	Id	St	U_{α_2}	U_c
1	$(1-q^2)^2$	1	q^4	$\frac{1}{2}q(1+q)^2)$	$\frac{1}{2}q(1-q)^2$
$t_4(i)$	$\zeta_{ik} + \zeta_{qik}$	1	1	-1	1

4.2.3 L'isotypie

On sait qu'une isotypie existe ([BrMaMi] et [BrMi]). D'après les remarques 1.19 et comme les ℓ-classes de conjugaison sont de la forme $t_4(i)$ et sont régulières, pour qu'une bijection entre les caractères de f et ceux de e soit une isotypie, il faut que deux caractères en correspondance aient la même valeur sur $\mathrm{T}_c \backslash \{\pm 1\}$ au signe près et que leurs degrés modulo ℓ donnent le signe de l'isotypie. Cela donne une unique solution et on sait alors que c'est une isotypie.

L'isotypie est donc

$$\mathrm{I}_c \ : \ \left\{ \begin{array}{c} \xi'_{00} \\ \xi'_{02} \\ \xi'_{04} \\ \xi'_{06} \\ \xi'_{k} \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Id} \\ -\mathrm{U}_{\alpha_2} \\ \mathrm{St} \\ \mathrm{U}_c \\ \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_c}(\theta_k) \end{array} \right\},$$

$k \in \mathcal{S}_4$.

Annexe du chapitre 4 : Matrices de décomposition généralisée

La matrice de décomposition généralisée associée à l'application de décomposition généralisée d_x^{G} sera notée M_x^{G}. Nous allons calculer les matrices de décomposition généralisée en x de la forme $t_{dd}(i)$, respectivement $t_{d0}(i)$, du côté de H dans la base $\{\chi\}$ où χ parcourt les caractères modulaires irréductibles de H_{U}, respectivement H_{V}, et du côté de G dans la base $\{I_{\mathrm{U}}(\chi)\}$, respectivement $\{I_{\mathrm{V}}(\chi)\}$.

Du côté de H

On calcule les matrices de décompositions généralisée M_x^{H} pour $x = t_{dd}(i)$ et $x = t_{d0}(i)$, $d = 1$ et $d = 2$. Nous avons les mêmes résultats pour $d = 1$ et $d = 2$, nous gardons donc l'indice général d.

- $x = t_{dd}(i)$:

Dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{T}_{w_d}\langle \dot{s} \rangle$ il y a deux caractères modulaires de degré 1, que l'on désignera par $\overline{1}$ et $\overline{sgn}$ (ils viennent de la réduction de deux caractères irréductibles de degré 1).

La matrice $M^{\mathrm{H}}_{t_{dd}(i)}$ est donnée par les coefficients du tableau suivant :

	ψ_{id}	ψ_{α_s}	ψ_{α_t}	ψ_{sgn}	ψ_{α_2}	$\psi_{1,k}$	$\psi_{t,k}$	ψ_k	ψ_k^-	ψ_{kl}
$\overline{1}$	1		1		1	2	2	3	1	4
$\overline{sgn}$		1		1	1	2	2	1	3	4

• $x = t_{d0}(i)$:

Dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{T}'_d\langle {}^s\dot{t}\rangle \times \mathrm{T}'_d$ il y a deux caractères modulaires de degré 1, que l'on désignera par $\overline{1}$ et $\overline{sgn}$ (ils viennent de la réduction de deux caractères irréductibles de degré 1).

La matrice $M^{\mathrm{H}}_{t_{d0}(i)}$ est donnée par les coefficients du tableau suivant :

	ψ_{id}	ψ_{α_s}	ψ_{α_t}	ψ_{sgn}	ψ_{α_2}	$\psi_{1,k}$	$\psi_{t,k}$	ψ_k	ψ_k^-	ψ_{kl}
$\overline{1}$	1		1		1	3	1	2	2	4
$\overline{sgn}$		1		1	1	1	3	2	2	4

Du côté de G

Caractères modulaires

La proposition suivante permet de réduire le nombre de caractères modulaires à calculer. Je remercie C. Bonnafé de m'en avoir donné une preuve.

Si $\mathrm{K} = \mathrm{SL}_2(q), \mathrm{K}_1(q)$ ou $\mathrm{K}_2(q)$, nous noterons $\mathrm{Umch}(\mathrm{K})$ l'ensemble des caractères modulaires unipotents de K.

Proposition 4.3
L'application $\mathrm{Res}^{\mathrm{K}_d(q)}_{\mathrm{SL}_2(q)}$ *induit une bijection entre* $\mathrm{Umch}(\mathrm{K}_d(q))$ *et* $\mathrm{Umch}(\mathrm{SL}_2(q))$.

DÉMONSTRATION : L'analogue de cette proposition en caractéristique 0 est bien connue ([DiMi2] proposition 13.20). Comme tout caractère modulaire de K est unipotent si et seulement s'il est contenu dans la restriction à $\mathrm{K}_{\ell'}$ d'un caractère ordinaire unipotent, il en résulte qu'un caractère modulaire unipotent de $\mathrm{SL}_2(q)$ est contenu dans la restriction à $\mathrm{SL}_2(q)$ d'un caractère modulaire unipotent de $\mathrm{K}_d(q)$. Par conséquent, il suffit de montrer l'assertion suivante :

(*) *Si V un $k\mathrm{K}_d(q)$-module irréductible dont le caractère modulaire est unipotent, alors* $\mathrm{Res}^{\mathrm{K}_d(q)}_{\mathrm{SL}_2(q)}V$ *est encore irréductible.*

Montrons (*). Par la théorie de Clifford, le $k\mathrm{SL}_2(q)$-module $\mathrm{Res}^{\mathrm{K}_d(q)}_{\mathrm{SL}_2(q)}V$ est semi-simple ([Is] chapitre 6).

Le groupe $\mathrm{K}_d(q)/\mathrm{SL}_2(q)$ étant cyclique (d'ordre $\Phi_d(q)$), le $k\mathrm{SL}_2(q)$-module $\mathrm{Res}_{\mathrm{SL}_2(q)}^{\mathrm{K}_d(q)} V$ est sans multiplicité. Par conséquent

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{SL}_2(q)}^{\mathrm{K}_d(q)} V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_a,$$

où $V_1,\ V_2,\ \ldots V_a$ sont des $k\mathrm{SL}_2(q)$-modules irréductibles deux à deux non isomorphes (et $a \geq 1$). Ils sont conjugués sous $\mathrm{K}_d(q)$.

Notons X le stabilisateur (dans $\mathrm{K}_d(q)$) du sous-$k\mathrm{SL}_2(q)$-modulesV_1. Alors V_1 est un kX-module irréductible et

$$V \simeq \mathrm{Ind}_X^{\mathrm{K}_d(q)} V_1$$

([Is] chapitre 6). On a alors $a = |\mathrm{K}_d(q)/X|$. Or, X contient forcément le centre Z_d de $\mathrm{K}_d(q)$ (car ce dernier agit par homothétie), et X contient aussi $\mathrm{SL}_2(q)$. De plus $\mathrm{SL}_2(q)Z_d$ est d'indice 2 dans $\mathrm{K}_d(q)$. Par suite X est d'indice 1 ou 2 dans $\mathrm{K}_d(q)$. Il s'agit donc de montrer que $X = \mathrm{K}_d(q)$.

Supposons que $X \neq \mathrm{K}_d(q)$. Notons $\epsilon : \mathrm{K}_d(q) \to k^*$ l'unique caractère linéaire non trivial et trivial sur X (il existe car $\ell \neq 2$ et $|\mathrm{K}_d(q)/X| = 2$), et k_ϵ le $k\mathrm{K}_d(q)$-module k sur lequel $\mathrm{K}_d(q)$ agit via ϵ. Par la formule de Frobenius, on a

$$(\star) \quad \begin{aligned} V \otimes_k k_\epsilon &= \mathrm{Ind}_X^{\mathrm{K}_d(q)}(V_1 \otimes_k \mathrm{Res}_X^{\mathrm{K}_d(q)} k_\epsilon) \\ &\simeq V. \end{aligned}$$

Mais, d'après [DeLu] corollaire 7.6, il existe un tore maximal T de $\mathrm{K}_d(q)$ tel que V apparaît dans le $k\mathrm{K}_d(q)$-module $\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{K}_d(q)}(k)$. D'après $(\star)$, il apparaît aussi dans $\mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{K}_d(q)}(k) \otimes_k k_\epsilon = \mathrm{R}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{K}_d(q)}(k_{\epsilon'})$, où ϵ' est la restriction de ϵ à T. Or ϵ' est non trivial (car $\mathrm{K}_d(q) = \mathrm{SL}_2(q) \cdot \mathrm{T}$), donc il est d'ordre 2. On obtient alors une contradiction avec le théorème de disjonction des séries de Lusztig pour les caractères modulaires ([BrMi] théorème 2.2). $\dashv$

• Pour $\ell | q+1$:

Proposition 4.4 ([Ge], par exemple)

Dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{U}_2(q)$ il y a deux caractères modulaires irréductibles : la réduction du caractère trivial et celle d'un caractère de degré $q-1$.

On désignera ces deux caractères modulaires par $\overline{\mathrm{Id}}$ et $\overline{\mathrm{R}_{\mathrm{T}_2'}^{\mathrm{U}_2(q)}}$.

Corollaire 4.5

Dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{SL}_2(q)$ il y a deux caractères modulaires irréductibles, la réduction du caractère trivial et celle d'un caractère de degré $q-1$.

On désignera ces deux caractères modulaires par $\overline{\mathrm{Id}}$ et $\overline{\mathrm{R}_{\mathrm{T}_2'}^{\mathrm{SL}_2(q)}}$.

• Pour $\ell | q-1$:

Proposition 4.6 ([Dip1] et [Dip2], par exemple)
Dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{GL}_2(q)$ *il y a deux caractères modulaires irréductibles : la réduction du caractère trivial et celle du caractère de Steinberg* St.

On désignera ces deux caractères modulaires par $\overline{\mathrm{Id}}$ et $\overline{\mathrm{St}}$.

Corollaire 4.7
Dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{SL}_2(q)$ *il y a deux caractères modulaires irréductibles, la réduction du caractère trivial et celle du caractère de Steinberg*

On désignera ces deux caractères modulaires par $\overline{\mathrm{Id}}$ et $\overline{\mathrm{St}}$.

Les deux corollaires 4.5 et 4.7 découlent directement du calcul des caractères modulaires du ℓ-bloc principal de $\mathrm{U}_2(q)$ et de $\mathrm{GL}_2(q)$ et de la proposition 4.3.

Matrices de décomposition généralisée

• ℓ divise $q+1$

La matrice $M^{\mathrm{G}}_{t_{22}(i)}$ est donnée par les coefficients du tableau suivant :

	Id	U_{α_s}	U_{α_t}	St	U_c	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}(\mathrm{Id}\cdot\theta_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}(\mathrm{St}\cdot\theta_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}(\phi_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}(\mathrm{St}\phi_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k\cdot\theta_l)$
$\overline{\mathrm{Id}}$	1	1	-1	-1				-2	-2	
$\overline{\mathrm{R}_{\mathrm{T}_2'}^{\mathrm{U}_2(q)}}$		1		-1	-1	2	-2	1	-3	-4

La matrice $M^{\mathrm{G}}_{t_{20}(i)}$ est donnée par les coefficients du tableau suivant :

	id	U_{α_s}	U_{α_t}	St	U_c	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}(\mathrm{Id}\cdot\theta_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}(\mathrm{St}\cdot\theta_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}(\phi_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}(\mathrm{St}\phi_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k\cdot\theta_l)$
$\overline{\mathrm{Id}}$	1	-1	1	-1		-2	-2			
$\overline{\mathrm{R}_{\mathrm{T}_2'}^{\mathrm{SL}_2(q)}}$			1	-1	1	1	-3	2	-2	-4

• ℓ divise $q-1$

La matrice $M^{\mathrm{G}}_{t_{11}(i)}$ est donnée par les coefficients du tableau suivant :

	Id	U_{α_s}	U_{α_t}	St	U_{α_2}	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{SL,1}}}(\mathrm{Id}\cdot\theta_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{SL,1}}}(\mathrm{St}\cdot\theta_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,1}}}(\phi_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,1}}}(\mathrm{St}\phi_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T_0}}(\theta_k\cdot\theta_l)$
$\overline{\mathrm{Id}}$	1		1		1	2	2	3	1	4
$\overline{\mathrm{St}}$		1		1	1	2	2	1	3	4

La matrice $M^{\mathrm{G}}_{t_{10}(i)}$ est donnée par les coefficients du tableau suivant :

	Id	U_{α_s}	U_{α_t}	St	U_{α_2}	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{SL,1}}}(\mathrm{Id}\cdot\theta_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{SL,1}}}(\mathrm{St}\cdot\theta_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,1}}}(\phi_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,1}}}(\mathrm{St}\phi_k)$	$\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T_0}}(\theta_k\cdot\theta_l)$
$\overline{\mathrm{Id}}$	1	1			1	3	1	2	2	4
$\overline{\mathrm{St}}$			1	1	1	1	3	2	2	4

Chapitre 5

La configuration de type S1

Utilisation de la théorie des descentes de Shintani.

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème 3.12 pour la préconfiguration de type S1. On montre qu'avec l'isotypie construite au chapitre 4, la configuration est compatible et on constate simplement qu'elle est même fortement compatible (voir paragraphe 5.2.3). Nous allons tous d'abord choisir un ℓ-sous-groupe de Sylow S qui est σ-stable. De plus le sous-groupe des points fixes de H sous σ est le normalisateur du ℓ-sous-groupe de Sylow S^σ de G^σ. Ceci mène à l'utilisation de la théorie des descentes de Shintani : les valeurs des extensions des caractères σ-stables des ℓ-blocs principaux de H et G s'expriment à l'aide des valeurs des caractères dans les groupes des points fixes. On pourra alors exprimer les valeurs de l'extension $E(\mu)$ à l'aide du bi-caractère généralisé associé à l'isotypie entre les ℓ-blocs principaux de H^σ et G^σ et d'un autre bi-caractère. Ceci permettra de vérifier que les conditions de compatibilité sont satisfaites.

La situation est la suivante (voir convention 3.9) :

$$\boxed{\begin{array}{c}\ell \text{ divise } |\mathrm{G}_1|,\\ n=2,\\ q_0^2 = q \equiv -1 \text{ modulo } \ell.\end{array}}$$

Le fait que ℓ divise $|\mathrm{G}_1|$ est une conséquence de l'égalité $q_0^2 \equiv -1$ modulo ℓ. Nous le laissons quand-même en évidence car il est au départ de la démarche adoptée pour démontrer la configuration de type S1.

Choix du ℓ-sous-groupe de Sylow

On peut choisir le ℓ-sous-groupe de Sylow S de G de tel sorte qu'il soit σ-stable.

En effet, considérons le tore $\mathbf{T}_{1,1}$ de $\mathbf{G}$. Il existe un élément g de $\mathbf{G}$ tel que

$$^{g}\mathbf{T}_{1,1} = \mathbf{T}_{c,1}$$

et tel que $g^{-1}\mathrm{F}_0(g) = \dot{c}$. Il suit

$$g^{-1}\mathrm{F}(g) = g^{-1}\mathrm{F}_0(g)\mathrm{F}_0(g^{-1}\mathrm{F}_0(g)) = \dot{w}_0.$$

Ainsi, on peut supposer que

$$^{g}\mathbf{T}_{1,1} = \mathbf{T}_{w_0,2} = \mathbf{T}_{w_0} = \mathbf{T}_{c,1}.$$

Choisissons alors pour S le ℓ-sous-groupe de Sylow de T_{w_0}. Comme $\mathbf{T}_{w_0}$ est égal à $\mathbf{T}_{c,1}$, qui est F_0-stable, il suit que S est σ-stable.

Action de σ sur T_{w_0}

D'après ce qui précède F_0 agit sur $\mathbf{T}_{w_0}$ comme $c\mathrm{F}_0$ agit sur $\mathbf{T}_{1,1}$. Soit (x, y) un élément de $\mathbf{T}_{1,1}$, on a

$$^{c\mathrm{F}_0}(x, y) = {}^{c}(x^{q_0}, y^{q_0}) = (y^{-q_0}, x^{q_0}).$$

Ainsi pour tout élément (x, y) de T_{w_0}, on a

$$^{\sigma}(x, y) = (y^{-q_0}, x^{q_0}).$$

Action de σ sur $\dot{\mathrm{W}}$

Toujours d'après ce qui précède σ agit sur $\dot{\mathrm{W}}$ comme la conjugaison par $\dot{c}$. Les éléments $\dot{c}$ et $\dot{w}_0$ sont donc stables sous σ et on a

$$^{\sigma}\dot{s} = \dot{s}\dot{t}\dot{s}\dot{t}^{-1}\dot{s}$$

$$^{\sigma}\dot{t} = \dot{s}\dot{t}\dot{s}.$$

Normalisateur de S **dans** G

On a vu dans le chapitre 4 que

$$\mathrm{H} = \mathrm{T}_{w_0}\dot{\mathrm{W}},$$

où
• $\mathrm{T}_{w_0} = \mathrm{T}'_2 \times \mathrm{T}'_2$, où T'_2 est cyclique d'ordre $q+1$.
• $\dot{t}$ est d'ordre 4. L'action de $\dot{t}$ sur T_{w_0} est d'ordre 2. Pour tout (x,y) dans T_{w_0}, on a

$$^{\dot{t}}(x,y) = (x, y^{-1}).$$

• $\dot{s}$ est d'ordre 2. Il agit sur T_{w_0} en permutant les composantes

$$^{\dot{s}}(x,y) = (y,x).$$

• $\mathrm{T}_{w_0} \cap \langle \dot{w}_0 \rangle = \langle {\dot{w}_0}^2 \rangle$, qui est d'ordre 2.

• $\mathrm{T}_{w_0} \cap \dot{\mathrm{W}} = \langle {}^{\dot{s}}\dot{t}^2, \dot{t}^2 \rangle$, qui est d'ordre 4.

On rappelle que l'on note τ un générateur de T'_2.

Points fixes de H **sous** σ

On a

$$\mathrm{T}_{w_0}^{\sigma} = \mathbf{T}_{c,1}^{\mathrm{F}_0} = \mathrm{T}_{c,1} \simeq \mathbf{T}_{1,1}^{c\mathrm{F}_0}.$$

L'élément $\tau_1 = (\tau, \tau^{q_0})$ est un générateur de $\mathrm{T}_{c,1}$. Par ailleurs,

$$\dot{\mathrm{W}}^{\sigma} = \langle \dot{c} \rangle$$

et

$$\mathrm{W}^{\sigma} = \langle c \rangle,$$

ce qui implique

$$\mathrm{H}^{\sigma} = \mathrm{T}_{c,1}\langle \dot{c} \rangle.$$

Or

$$\mathrm{S}^{\sigma} = \mathrm{S} \cap \mathrm{T}_{w_0}^{\sigma} = \mathrm{S} \cap \mathrm{T}_{c,1}.$$

Le sous-groupe S^{σ} est donc le ℓ-sous-groupe de Sylow de G_1 inclus dans $\mathrm{T}_{c,1}$. Le groupe de Weyl d'un tore de Coxeter est $\langle c \rangle$, on a donc

$$\mathrm{N}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{S}^{\sigma}) = \mathrm{T}_{c,1}\langle \dot{c} \rangle.$$

On pose

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}^{\sigma} \ \text{ et } \ \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}^{\sigma},$$

on a alors

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{N}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{S}_1).$$

5.1 Extensions de caractères et descente de Shintani

Considérons les centralisateurs des sous-groupes P de S dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ et $\widetilde{\mathrm{H}}$.

Proposition 5.1
Soit P un sous-groupe S_1.

- *Si $P \not\subset \mathrm{S}_1$ et $P \not\subset {}^s\mathrm{S}_1$, alors $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P$,*
- *Si $P \subset \mathrm{S}_1$ alors $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle\sigma\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle\sigma\rangle$,*
- *Si $P \subset {}^s\mathrm{S}_1$, alors $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle\dot{w}_0\sigma\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle\dot{w}_0\sigma\rangle$.*

Démonstration : On replace le problème dans $\mathbf{T}_{1,1}$ à l'aide de la conjugaison par g, l'élément g a été défini par le choix du ℓ-sous-groupe de Sylow.

On rappelle que deux éléments de $\mathbf{T}_{1,1}$ sont conjugués sous $\mathbf{G}$ si et seulement s'ils sont conjugués sous W. Soient x un ℓ-élément de $\mathbf{T}_{1,1}^{w_0^F}$ et $g\sigma$ un élément de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)$, où g appartient à G. Dans ce cas x et ${}^\sigma x$ sont conjugués sous W. Or σ agit comme $c\mathrm{F}_0$ et c appartient à W, on cherche donc x tel que ${}^{\mathrm{F}_0}x$ et x soient conjugués sous W. Supposons alors que l'élément w de W les conjugue. On a

$$x \in \mathbf{T}_{1,1}^{w\mathrm{F}_0}$$

et donc

$$x \in \mathbf{T}_{1,1}^{w^2\mathrm{F}}.$$

Par ailleurs

$$x \in \mathbf{T}_{1,1}^{w_0\mathrm{F}}.$$

Ainsi

$$x \in \mathrm{C}_{\mathbf{T}_{1,1}}(w_0 w^{-2}).$$

Or dans W il y a deux carrés : 1 et w_0.

• Si $w^2 = 1$, alors x appartient à $\mathrm{C}_{\mathbf{T}_{1,1}}(w_0)$. Comme ℓ est différent de 2, l'unique solution est $x = 1$.

• Si $w^2 = w_0$, alors soit $w = c$ soit $w = c^{-1}$.
- Si $w = c$, alors x appartient à $\mathbf{T}_{1,1}^{c\mathrm{F}_0}$ et donc à S_1 et on a $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle\sigma\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle\sigma\rangle$.
- Si $w = c^{-1}$, alors x appartient à $\mathbf{T}_{1,1}^{c^{-1}\mathrm{F}_0}$. Or

$$\mathbf{T}_{1,1}^{c^{-1}\mathrm{F}_0} = {}^s(\mathbf{T}_{1,1}^{c\mathrm{F}_0}).$$

Il suit que x appartient à ${}^s\mathrm{S}_1$. Enfin $c^{-1}\mathrm{F}_0 = w_0 c\mathrm{F}_0$ et donc on a $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle \dot{w}_0\sigma\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle \dot{w}_0\sigma\rangle$. ⊣

Les quatre cas 1, S, U et V (notation 4.1) se répartissent ainsi :

• Les deux cas U et V ainsi que les cas où $P \not\subset \mathrm{S}_1$ et $P \not\subset {}^s\mathrm{S}_1$ vérifient $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P$. On pose alors

$$E(\mu_P) = \mu_P.$$

• Les cas où $P \subset \mathrm{S}_1$, P non trivial, vérifient

$$\mathrm{G}_P = \mathrm{H}_P = \mathrm{T}_{w_0} \ \text{ et } \ \widetilde{\mathrm{G}}_P = \widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{T}_{w_0}\langle\sigma\rangle.$$

On a vu au chapitre 1, qu'il n'y a alors rien à construire.

• Les cas où $P \subset {}^s\mathrm{S}_1$, P non trivial, vérifient

$$\mathrm{G}_P = \mathrm{H}_P = \mathrm{T}_{w_0} \ \text{ et } \ \widetilde{\mathrm{G}}_P = \widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{T}_{w_0}\langle\dot{w}_0\sigma\rangle.$$

Ce cas ne diffère pas du cas $P \subset \mathrm{S}_1$, car la conjugaison par un élément de H n'intervient pas dans la théorie des caractères de H et G.

• Pour le cas 1, nous devons construire les extensions de chaque caractère σ-stable de G et H à $\widetilde{\mathrm{G}}$ et $\widetilde{\mathrm{H}}$. C'est ce que nous allons faire dans la suite de cette section.

5.1.1 Caractères de Irr(e) et descente de Shintani

Les caractères unipotents

Les caractères unipotents de Irr(e) sont σ-stables car $\mathbf{G}$ est déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$.

Au paragraphe 3.5.1, nous avons défini l'extension donnée par la descente de Shintani sur la tranche $\mathrm{G}\sigma$ d'un caractère unipotent χ de Irr(e). Elle est notée $\mathrm{E}_1(\chi)$ et c'est cette extension que nous choisissons. Pour chaque caractère unipotent χ de Irr(e), on pose

$$\mathrm{E}(\chi) = \mathrm{E}_1(\chi).$$

Les caractères de la forme $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$

Rappelons que $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ est un caractère de Deligne-Lusztig construit à partir du caractère irréductible $\theta_k \cdot \theta_l$ de T_{w_0} : $(\tau^i, \tau^j) \mapsto \eta^{ki+lj}$, où $(k,l) \in \mathcal{S}_2'^2$.

Lemme 5.2

Un caractère $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ *est* σ*-stable si et seulement si* $l \equiv -q_0 k$ *ou* $l \equiv q_0 k$ *modulo* ℓ*. Il y en a* $\frac{1}{4}(\ell^r - 1)$ *distincts.*

Démonstration : Le tore T_{w_0} est σ-stable, ainsi

$$^{\sigma}\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_l) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(^{\sigma}(\theta_k \cdot \theta_l)).$$

Or $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_l) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(^{\sigma}(\theta_k \cdot \theta_l))$ si et seulement s'il existe un élément w de W tel que ([DiMi2] corollaire 11.15)

$$^{\sigma}(\theta_k \cdot \theta_l) = {}^{w}(\theta_k \cdot \theta_l).$$

On voit $\theta_k \cdot \theta_l$ comme un caractère de $\mathbf{T}_{1,1}^{w_0\mathrm{F}}$. Ainsi σ agit comme $c\mathrm{F}_0$ et c appartient à W, donc $^{\sigma}(\theta_k \cdot \theta_l)$ est conjugué à $\theta_k \cdot \theta_l$ sous W si et seulement s'il existe un élément w de W qui conjugue $^{\mathrm{F}_0}(\theta_k \cdot \theta_l)$ et $\theta_k \cdot \theta_l$. Ainsi

$$\theta_k \cdot \theta_l \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}_{1,1}^{w_0\mathrm{F}})^{w\mathrm{F}_0}.$$

Que $\theta_k \cdot \theta_l$ soit invariant sous $w\mathrm{F}_0$ implique qu'il l'est sous $w^2\mathrm{F}$. Il suit que $\theta_k \cdot \theta_l$ est invariant sous $w_0 w^{-2}$. Or dans W il y a deux carrés : 1 et w_0.

• Si $w^2 = 1$, alors $\theta_k \cdot \theta_l$ est invariant sous w_0 ce qui implique $\theta_k \cdot \theta_l = \theta_{-k} \cdot \theta_{-l}$. Comme ℓ est différent de 2, l'unique solution est $\theta_k \cdot \theta_l = \mathrm{Id}$, qui n'est pas acceptable.

• Si $w^2 = w_0$, alors soit $w = c$ soit $w = c^{-1}$.
- Si $w = c$, alors $\theta_k \cdot \theta_l$ est invariant sous c ce qui implique $\theta_k \cdot \theta_l = \theta_{-q_0 l} \cdot \theta_{q_0 k}$. Ceci donne une solution $l \equiv q_0 k$ modulo ℓ.
- Si $w = c^{-1}$, alors $\theta_k \cdot \theta_l$ est invariant sous c^{-1} ce qui implique $\theta_k \cdot \theta_l = \theta_{q_0 l} \cdot \theta_{-q_0 k}$. Ceci donne une solution $l \equiv -q_0 k$ modulo ℓ.

Finalement $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ est σ-stable si et seulement si $l \equiv kq_0$ modulo ℓ ou $l \equiv -kq_0$ modulo ℓ. Or $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_{q_0 k}) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_{-q_0 k})$ car $\theta_k \cdot \theta_{q_0 k} =^{\dot{t}} \theta_k \cdot \theta_{-q_0 k}$. ⊣

Soulignons que

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_{q_0 k}) &= \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_{-q_0 k}) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_{-k} \cdot \theta_{q_0 k}) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_{-k} \cdot \theta_{-q_0 k}) \\
&= \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_{q_0 k} \cdot \theta_k) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_{q_0 k} \cdot \theta_{-k}) \\
&= \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_{-q_0 k} \cdot \theta_k) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_{-q_0 k} \cdot \theta_{-k}).
\end{aligned}$$

Notation 5.3
Nous noterons $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(k)$ *le caractère* $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(\theta_k \cdot \theta_{-q_0k})$, *lorsque* k *appartient à* $\mathcal{S}''_2$.

Remarquons qu'on choisit le caractère de T_{w_0} qui est σ-stable et que cela conduit donc simplement au prochain lemme.

Nous voulons maintenant étendre un tel caractère. Nous allons appliquer le théorème 2.15.

Considérons le tore $\mathbf{T}_{1,1}$. On a vu que

$$\mathbf{T}_{1,1}^{\mathrm{F}} = \mathrm{T}_{w_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{1,1}^{\mathrm{F}_0} = \mathrm{T}_{c,1}.$$

Soit $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$ la norme de T_{w_0} sur $\mathrm{T}_{c,1}$. Pour tout élément x de T_{w_0}, on a .

$$\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x) = x^{\sigma}x.$$

Lemme 5.4
Soit μ_k *le caractère irréductible de* $\mathrm{T}_{c,1}$ *suivant :* $\tau_1^i \mapsto \eta^{ki}$.
Nous avons

$$\theta_k \cdot \theta_{-q_0k} = \mu_k \circ \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}.$$

Démonstration : La norme de T_{w_0} sur $\mathrm{T}_{c,1}$ envoie (τ^i, τ^j) sur $\tau_1^{i-q_0j}$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mu_k \circ \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\tau^i, \tau^j) &= \mu_k[(\tau^i, \tau^j)^{\sigma}(\tau^i, \tau^j)] \\
&= \mu_k[(\tau^i, \tau^j)(\tau^{-q_0j}, \tau^{q_0i})] \\
&= \mu_k(\tau^{i-q_0j}, \tau^{j+q_0i}) \\
&= \eta^{k(i-q_0j)}
\end{aligned}$$

car $j + q_0 i \equiv q_0(i - q_0 j)$ modulo $q+1$ et donc $(\tau^{i-q_0j}, \tau^{j+q_0i}) = (\tau^{i-q_0j}, \tau^{q_0(i-q_0j)})$. ⊣

La caractéristique est différente de 2. On notera $\mathrm{E}(\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(k))$ l'extension donnée par la descente de Shintani à la tranche $\mathrm{G}\sigma$ de $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(k)$ (théorème 2.15). Pour tout élément g de G, elle vérifie

$$\mathrm{E}(\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(k))(g\sigma) = \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(k)))(g') = \mathrm{R}^{\mathrm{G}_1}_{\mathrm{T}_{c,1}}(\mu_k)(g'),$$

où g' est un élément de la classe $\mathrm{N}_{\mathrm{F}_0{}^2/\mathrm{F}}(g)$ (voir proposition 2.3).

On pose

$$\mathrm{R}^{\mathrm{G}_1}_{\mathrm{T}_{c,1}}(k) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}_1}_{\mathrm{T}_{c,1}}(\mu_k).$$

Les autres caractères

Les caractères $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,2}}}(\phi_k)$, $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,2}}}(\mathrm{St}\phi_k)$, $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{SL,2}}}(\mathrm{Id}\cdot\theta_k)$ et $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{SL,2}}}(\mathrm{St}\cdot\theta_k)$, où $k \in \mathcal{S}'_2$ ne sont pas σ-stables.

En effet, considérons un caractère $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,2}}}(\phi_k)$, $k \in \mathcal{S}'_2$. Nous avons

$$^{\sigma}\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,2}}}(\phi_k) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,2}}}(^{\sigma}\phi_k) = \mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,2}}}(\phi_{q_0k}).$$

Ce qui implique

$$q_0k \equiv \pm k \text{ modulo } q+1.$$

Comme k est de la forme $\lambda\frac{q+1}{\ell^r}$ et ℓ est différent de 2, cette équation modulaire n'a pas de solution dans $\mathcal{S}'_2$.

Ainsi les $\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{L_{K,2}}}(\phi_k)$ ne sont pas σ-stables. Il en est de même pour les autres caractères.

5.1.2 Caractères de Irr(f)

L'élément $\dot{c}$ appartenant à H, on peut, pour étudier la stabilité des caractères de H, considérer l'automorphisme $\dot{c}^{-1}\sigma$ au lieu de σ. On pose

$$\sigma' = \dot{c}^{-1}\sigma.$$

Ainsi σ' agit sur $\dot{\mathrm{W}}$ comme $\dot{c}^{-1}\dot{c}\mathrm{F}_0$, c'est-à-dire trivialement. Pour tout élément (x, y) de T_{w_0}, on a

$$^{\sigma'}(x, y) = (x^{q_0}, y^{q_0}).$$

Caractères σ-stables

En reprenant la construction des caractères de H nous obtenons les informations suivantes (paragraphe 4.1.4) :

- Les caractères ψ_ϕ, $\phi \in \mathrm{Irr}\mathrm{W}$, sont σ'-stables car d'une part leurs valeurs ne dépendent pas des éléments du tore et d'autre part $\dot{\mathrm{W}}$ est fixe sous σ'. Ils sont donc σ-stables.

- Pour $j \equiv -q_0i$ modulo ℓ, les $\frac{1}{4}(\ell^r - 1)$ caractères ψ_{ij} ainsi définis, sont les seuls autres caractères σ-stables. On note ψ_{q_0i} le caractère ψ_{i,q_0i}. On rappelle que

$$\psi_{i,q_0i} = \psi_{i,-q_0i} = \psi_{-i,q_0i} = \psi_{-i,-q_0i} = \psi_{q_0i,i} = \psi_{q_0i,-i} = \psi_{-q_0i,i} = \psi_{-q_0i,-i}.$$

- Les autres caractères ne sont pas σ-stables.

Extensions

Les caractères σ-stables décrits précédemment seront considérés comme des caractères de $\mathrm{S\dot{W}}$ (voir chapitre 4). Pour tout caractère σ-stable ψ, on va construire $\mathrm{E}(\psi)$, une extension à $\mathrm{S\dot{W}}\langle\sigma\rangle$ bien choisie.

Les caractères ψ_{id}, ψ_{α_s}, ψ_{α_t}, ψ_{sgn} et ψ_{α_2}

Ces caractères ont S dans leur noyau. Ils peuvent être ainsi vus comme des caractères de $\mathrm{S\dot{W}/S}$. Or

$$\mathrm{S\dot{W}/S} \simeq \mathrm{\dot{W}}$$

et

$$\mathrm{\dot{W}} \cap \langle\sigma'\rangle = \langle\sigma'^2\rangle = \langle\dot{c}^2\rangle = \langle\dot{w}_0\rangle.$$

De plus σ' centralise $\mathrm{\dot{W}}$. Il suit que les caractères de $\mathrm{\dot{W}}\langle\sigma\rangle$ sont de la forme $\psi\omega$, où ψ est un caractère de $\mathrm{\dot{W}}$ et ω est un caractère linéaire de $\langle\sigma'\rangle$, tels que $\psi(\sigma'^2) = \psi(1)\omega(\sigma'^2)$ ([Is] problème 4.4).

Ainsi pour les 4 premiers caractères de dimension 1, d'une part

$$\psi(\sigma'^2) = \psi(\dot{w}_0{}^{-1})\omega(1) = 1$$

et d'autre part

$$\psi(\sigma'^2) = \psi(1)\omega(\sigma'^2) = \omega(\sigma'^2).$$

Il suit que $\omega(\sigma'^2) = 1$ et donc $\omega(\sigma') = \pm 1$ car ω est un caractère linéaire.

Pour le caractère ψ_{α_2}, on a d'une part

$$\psi_{\alpha_2}(\sigma'^2) = \psi_{\alpha_2}(\dot{w}_0) = -2$$

et d'autre part

$$\psi_{\alpha_2}(\sigma'^2) = \psi_{\alpha_2}(1)\omega(\sigma'^2) = 2\omega(\sigma'^2).$$

Il suit que $\omega(\sigma'^2) = -1$. Rappelons que α est une racine primitive $8^{\text{ème}}$ de l'unité.

On choisit pour l'extension $\mathrm{E}(\psi_\phi)$, $\phi \in \mathrm{IrrW}$, $\mathrm{E}(\psi_\phi) = \psi_\phi\omega_\phi$ avec

$$\begin{array}{rl} \omega_\phi(\sigma') = 1 & \text{pour } \ \phi = \mathrm{id} \text{ et } \phi = \mathrm{sgn}, \\ \omega_\phi(\sigma') = -1 & \text{pour } \ \phi = \alpha_s \text{ et } \phi = \alpha_t \\ \omega_\phi(\sigma') = \alpha^2 & \text{pour } \ \phi = \alpha_2. \end{array}$$

Ainsi pour tout élément h de $\mathrm{S\dot{W}}$ et tout caractère ψ de $\{\psi_{\mathrm{id}},\ \psi_{\alpha_s},\ \psi_{\alpha_t},\ \psi_{\mathrm{sgn}}\}$ on a

$$\mathrm{E}(\psi)(h\sigma') = \psi(h).$$

Ce qui implique

$$\mathrm{E}(\psi)(h\sigma) = \psi(h\dot{c}).$$

Puis

$$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})(h\sigma') = \psi_{\alpha_2}(h)\alpha^2.$$

Ce qui implique

$$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})(h\sigma) = \psi_{\alpha_2}(h\dot{c})\alpha^2.$$

<u>Les caractères $\psi_{q_0 i}$, $i \in \mathcal{S}_2'$</u>

Un tel caractère a été construit à partir du caractère de T_{w_0} suivant $\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i}$: $(\tau^l, \tau^k) \mapsto \eta^{i(l-q_0 k)}$.

Le caractère $\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i}$ s'étend au produit semi-direct $\mathrm{T}_{w_0}\langle\sigma\rangle$ trivialement sur $\langle\sigma\rangle$ car d'une part σ fixe ce caractère et d'autre part T_{w_0} est abélien. Soit $\mathrm{E}(\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i})$ l'extension de $\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i}$ à $\mathrm{T}_{w_0}\langle\sigma\rangle$ définie par,

$$\mathrm{E}(\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i})(x\sigma) = (\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i})(x),$$

pour tout élément x de T_{w_0}.

Puis, on induit le caractère $\mathrm{E}(\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i})$ à $\mathrm{T}_{w_0}\dot{\mathrm{W}}\langle\sigma\rangle$. Un système de représentants de $\mathrm{T}_{w_0}\dot{\mathrm{W}}\langle\sigma\rangle$ modulo $\mathrm{T}_{w_0}\langle\sigma\rangle$ est

$$\mathcal{T} = \{1,\ \dot{t},\ \dot{s},\ \dot{s}\dot{t}\dot{s},\ \dot{t}\dot{s}\dot{t},\ \dot{w}_0,\ \dot{t}\dot{s},\ \dot{c}\}.$$

Pour induire le caractère, on cherche, pour tout élément ρ de $\mathcal{T}$, les éléments x de $\mathrm{T}_{w_0}\dot{\mathrm{W}}\langle\sigma\rangle$ tels que ${}^{\rho}x$ appartienne à $\mathrm{T}_{w_0}\langle\sigma\rangle$. Comme tout élément de $\mathcal{T}$ normalise T_{w_0}, il suffit de chercher les éléments x de $\dot{\mathrm{W}}\langle\sigma\rangle$ et ρ de $\mathcal{T}$ tels que ${}^{\rho}x$ appartienne à $\langle\sigma\rangle$. Nous trouvons :

- pour $\rho \in \{1,\ \dot{c},\ \dot{w}_0,\ \dot{t}\dot{s}\}$, $x = \sigma$,
- pour $\rho \in \{\dot{s},\ \dot{t},\ \dot{t}\dot{s}\dot{t},\ \dot{s}\dot{t}\dot{s}\}$, $x = \dot{t}\dot{s}\dot{t}^{-1}\dot{s}\sigma$.

Nous avons alors, pour tout élément x de T_{w_0},

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{E}(\psi_{q_0 i})(x\sigma) & = & \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}_{w_0}\langle\sigma\rangle}^{\widetilde{\mathrm{H}}} \mathrm{E}(\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i})(x\sigma) \\
& = & [\mathrm{E}(\theta_i \cdot \theta_{-q_0 i}) + \mathrm{E}(\theta_{q_0 i} \cdot \theta_i) + \mathrm{E}(\theta_{-i} \cdot \theta_{q_0 i}) + \mathrm{E}(\theta_{-q_0 i} \cdot \theta_{-i})](x) \\
& = & \eta^{i(l-q_0 k)} + \eta^{i(q_0 l+k)} + \eta^{i(-l+q_0 k)} + \eta^{i(-q_0 l-k)} \\
& = & \eta_{i(l-q_0 k)} + \eta_{q_0 i(l-q_0 k)}
\end{array}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\psi_{q_0 i})(x\dot{t}\dot{s}\dot{t}^{-1}\dot{s}\sigma) &= \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}_{w_0}\langle\sigma\rangle}^{\widetilde{\mathrm{H}}}\mathrm{E}(\theta_i\cdot\theta_{-q_0 i})(x\dot{w}_0\sigma) \\
&= [\mathrm{E}(\theta_{-q_0 i}\cdot\theta_i)+\mathrm{E}(\theta_i\cdot\theta_{q_0 i})+\mathrm{E}(\theta_{q_0 i}\cdot\theta_{-i})+\mathrm{E}(\theta_{-i}\cdot\theta_{-q_0 i})](x) \\
&= \eta^{i(-q_0 l+k)}+\eta^{i(l+q_0 k)}+\eta^{i(q_0 l-k)}+\eta^{i(-l-q_0 k)} \\
&= \eta_{i(l+q_0 k)}+\eta_{q_0 i(l+q_0 k)}.
\end{aligned}$$

Enfin $\mathrm{E}(\psi_{q_0 i})$ est nulle sur tout autre élément.

Remarquons que $(x^l, x^k)\sigma$ est conjugué à $(x^l, x^{-k})\dot{w}_0\sigma$ par $\dot{t}$ et que nous trouvons bien la même valeur de $\mathrm{E}(\psi_{iq_0})$ pour ces deux éléments.

Classes de conjugaison de $\mathrm{SW}\sigma$

Nous donnons, ici, les résultats directement et quelques indications de calculs. On note $cl(x)$ la classe de conjugaison de x dans $\mathrm{SW}\sigma$.

- $cl(\sigma) = \{(x, x^{-q_0})\sigma,\ (x, x^{-q_0})w_0\sigma,\ x \in \mathrm{S}'\}$. Elle est de cardinal $2\ell^r$.

Si (x, y) appartient à $cl(\sigma)$, on a $xy^{q_0} = 1$ et $yx^{-q_0} = 1$. On a déjà vu que $(x, y)\sigma$ est conjugué à $(x, y^{-1})w_0\sigma$.

- $cl(x\sigma) = \left\{ \begin{array}{l} \{x'\sigma,\ \rho.x'\sigma\} \text{ pour } \rho \in \{1,\ t,\ sts,\ w_0\} \\ \{x'\sigma,\ \rho.x'w_0\sigma\} \text{ pour } \rho \in\ s,\ ts,\ c,\ tst\}. \end{array} \right.$

Il y a $\frac{\ell^r-1}{4}$ telles classes, de cardinal $8\ell^r$.

Les calculs pour trouver les élément x' de chaque classe sont longs mais simples.

- $cl(t\sigma) = \{xt\sigma, xsts\sigma,\ x \in \mathrm{S}\}$. Elle est de cardinal $2\ell^{2r}$.

- $cl(s\sigma) = \{x\dot{s}\sigma, xtst\sigma,\ x \in \mathrm{S}\}$. Elle est de cardinal $2\ell^{2r}$.

- $cl(ts\sigma) = \{xts\sigma,\ x \in \mathrm{S}\}$. Elle est de cardinal ℓ^{2r}.

- $cl(c\sigma) = \{xc\sigma,\ x \in \mathrm{S}\}$. Elle est de cardinal ℓ^{2r}.

Table des valeurs des extensions sur les classes de conjugaison

La table des extensions des caractères σ-stables de f est la suivante :

	degré	$(\tau^l, \tau^k)\sigma$	$\dot{s}\sigma$	$\dot{t}\sigma$	$\dot{t}\dot{s}\sigma$	$\dot{c}\sigma$
$\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}})$	1	1	1	1	1	1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_t})$	1	1	-1	1	-1	-1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_s})$	1	1	1	-1	-1	-1
$\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}})$	1	1	-1	-1	1	1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})$	2				$2\alpha^2$	$-2\alpha^2$
$\mathrm{E}(\psi_{q_0 i})$	4	$\eta_{i(l-q_0k)} + \eta_{q_0 i(l-q_0k)}$				

5.1.3 Une “descente de Shintani” pour H

Dans le groupe H, la théorie de Shintani ne s’applique pas. En effet, H n’est pas un groupe connexe et donc la propriété de Lang (définition 2.1), qui est au départ de la théorie des descentes de Shintani, n’y est pas vérifiée.

Nous allons définir une application, que l’on désignera aussi par $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$, de l’ensemble des σ-classes de conjugaison de H vers l’ensemble des classes de conjugaison de H_1. Cette application respectera pour un élément le fait d’être un ℓ-élément ou un ℓ'-élément.

Puis on définira une application $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$ d’un ensemble formé de certaines extensions des caractères σ-stables de f vers un ensemble de caractères de H_1. Ces applications permettront, comme les descentes de Shintani, d’exprimer les valeurs des extensions des caractères σ-stables de H sur la tranche $\mathrm{H}\sigma$ en fonction des valeurs des caractères de H_1.

Les caractères de H_1 ont été calculés dans le chapitre 4 (ici, le corps est $\mathbf{F}_{q_0}$, il faut donc changer le q de la table donnée en q_0). On pose

$$A = \frac{1}{2}(\xi'_{02} + \xi'_{06}),$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi'_{01} - \xi'_{05} + \xi'_{07} - \xi'_{03}),$$

$$C = \frac{1}{2}(\xi'_{03} + \xi'_{07} - \xi'_{01} - \xi'_{05}),$$

$$A' = \xi'_{02} - \xi'_{06}.$$

On constate que $\alpha + \alpha^{-1}$ est une racine carré de 2 et cet elle qu’on note $\sqrt{2}$.

On a le tableau de valeurs suivant :

	1	τ_1^k	$\dot{c}$	$\dot{c}^3$	$\dot{c}^2$	$\dot{c}^6$
ξ'_{00}	1	1	1	1	1	1
$A-B$	1	1	-1	1	-1	-1
$A+B$	1	1	1	-1	-1	-1
ξ'_{04}	1	1	-1	-1	1	1
C					$-2\alpha^2$	$2\alpha^2$
ξ'_j	4	$\eta_{jk}+\eta_{q_0jk}$				
A'			$2\alpha^2$	$-2\alpha^2$		
B			1	-1		

“Descente de Shintani sur les classes”

Dans le tableau suivant, on associe à un élément $x\sigma$ de $\widetilde{\mathrm{H}}$, où x appartient à H, un élément x' de H_1. C'est ainsi qu'on définit les valeurs de $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$ sur les éléments de la première ligne du tableau.

$x\sigma$	$(\tau^i,\tau^j)\sigma$	$\dot{s}\sigma$	$\dot{t}\sigma$	$\dot{c}\sigma$	$\dot{t}\dot{s}\sigma$
x'	$\tau_1^{i-q_0j}$	$\dot{c}$	$\dot{c}^3$	$\dot{c}^2$	$\dot{c}^6$

Pour tout $\rho \in \mathrm{H}\backslash\mathrm{T}_{w_0}$, on pose $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\rho\sigma)=\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\rho'\sigma)$, où ρ' est l'unique élément de $\{\dot{t},\ \dot{s},\ \dot{c},\dot{w}_0\}$ tel que son image dans W et celle de ρ soient conjuguées.

On rappelle que la σ-classe de x dans H est identifiée à la classe de $x\sigma$ dans $\widetilde{\mathrm{H}}$, notée $cl(x\sigma)$. On pose

$$\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(cl(x\sigma))=cl(x').$$

Par abus de notation, on notera $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x)$, un représentant de l'image par $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$ de la σ-classe de x dans $\widetilde{\mathrm{H}}$, c'est donc un élément de H_1.

“Descente de Shintani sur les caractères”

Les choix précédents impliquent que, pour tout élément x de $\widetilde{\mathrm{H}}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}})(x\sigma) &= \xi'_{00}(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x))\\
\mathrm{E}(\psi_{\alpha_t})(x\sigma) &= (A-B)(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x))\\
\mathrm{E}(\psi_{\alpha_s})(x\sigma) &= (A+B)(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x))\\
\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}})(x\sigma) &= \xi'_{04}(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x))\\
\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})(x\sigma) &= C(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x))
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(\psi_k)(x\sigma) \quad = \quad \xi'_k(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x)).$$

On pose ainsi

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}})) & = & \xi'_{00} \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\alpha_t})) & = & (A-B) \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\alpha_s})) & = & (A+B) \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}})) & = & \xi'_{04} \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})) & = & C \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_k)) & = & \xi'_k.
\end{array}$$

On étend cette définition par linéarité.

La descente de Shintani ainsi définie vérifie bien les conditions souhaitées (voir l'introduction de ce paragraphe 5.1.3), à savoir, si h est un ℓ-élément, respectivement un ℓ'-élément, de H et si h' appartient à $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(h)$, alors h' est un ℓ-élément, respectivement un ℓ'-élément.

5.2 Relèvement de l'isotypie

Pour vérifier les hypothèses du théorème de relèvement des isotypies nous aurons besoin de l'isotypie I_c entre les ℓ-blocs principaux de H_1 et G_1. Cela nous permettra d'écrire les valeurs du bi-caractère généralisé $E(\mu)$ donné par les extensions précédemment définies, en fonction du bi-caractère généralisé μ_c associé à I_c et d'un autre bi-caractère généralisé, noté ρ_μ. L'avantage de ceci est le contrôle efficace qu'on a sur μ_c et donc sur une partie des valeurs obtenues du bi-caractère généralisé $E(\mu)$. De plus le bi-caractère généralisé ρ_μ va s'avérer être assez simple.

5.2.1 Expression de $\mathrm{E}(\mu)$

A l'aide des descentes de Shintani, exprimons $\mathrm{E}(\mu)(h\sigma, g\sigma)$ en fonction des valeurs de μ_c et d'un autre bi-caractère généralisé.

Soit χ un caractère σ-stable de Irr(f) et ψ un caractère σ-stable de Irr(e), on pose

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\chi)\times\mathrm{E}(\psi)^*) = \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\chi))\times\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi))^*,$$

où $\mathrm{E}(\chi)$ et $\mathrm{E}(\psi)$ sont les extensions choisies précédemment pour les caractères σ-stables de f et e. On rappelle que la descente de Shintani d'une combinaison linéaire de tels caractères sera la combinaison linéaire des descentes de Shintani de ces caractères.

De même pour les classes de conjugaison, si (h,g) appartient à $\mathrm{H}\times\mathrm{G}$ alors

$$\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(h,g)=(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(h),\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(g)).$$

Remarquons dans un premier temps que

$$\Delta(1)=\{(h\sigma^k,g\sigma^k),\ (h,g)\in\mathrm{H}\times\mathrm{G},\ k=0,1\}$$

et que les caractères $\chi\times\psi$ qui interviennent dans l'expression de $E(\mu)$ sont
- soit σ-stables et donc $\Delta(1)_\chi=\Delta(1)$.
- soit non σ-stables et donc $\Delta(1)_\chi=\mathrm{H}\times\mathrm{G}$.

L'extension $\mathrm{E}(\chi\times\psi^*)$ du caractère $\chi\times\psi^*$ de $\mathrm{H}\times\mathrm{G}$ est donnée par

$$\mathrm{E}(\chi\times\psi^*)=\mathrm{Res}_{\Delta(1)_\chi}^{\widetilde{\mathrm{H}}_\chi\times\widetilde{\mathrm{G}}_\psi}(\mathrm{E}(\chi)\times\mathrm{E}(\psi)^*).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mu)=\quad&\mathrm{Res}_{\Delta(1)}^{\widetilde{\mathrm{H}}\times\widetilde{\mathrm{G}}}[(\textstyle\sum_{k\in\mathcal{S}_2'}\mathrm{E}(\psi_k)\times\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(k))^*)+\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}})\times\mathrm{E}(\mathrm{Id})^*\\ &+\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}})\times\mathrm{E}(\mathrm{St})^*-\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})\times\mathrm{E}(\mathrm{U}_c)^*-\mathrm{E}(\psi_{\alpha_t})\times\mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_t})^*\\ &-\mathrm{E}(\psi_{\alpha_s})\times\mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_s})^*]+\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}\times\mathrm{G}}^{\Delta(1)}\mu',\end{aligned}$$

où μ' est le bi-caractère généralisé formé par les caractères non σ-stables.

Considérons maintenant un élément $(h\sigma,g\sigma)$, où (g,h) appartient à $\mathrm{G}\times\mathrm{H}$. Nous avons

$$\begin{aligned}E(\mu)(h\sigma,g\sigma)&=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{f})}\varepsilon(\chi)\mathrm{E}(\chi\times\varepsilon(\chi)I(\chi)^*)(h\sigma,g\sigma)\\ &=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{f}),\ {}^{\sigma}(\chi)=\chi}\varepsilon(\chi)\mathrm{E}(\chi\times\varepsilon(\chi)I(\chi)^*(h\sigma,g\sigma)\\ &=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{f}),\ {}^{\sigma}(\chi)=\chi}\varepsilon(\chi)\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(E(\chi\times\varepsilon(\chi)I(\chi)))(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(h,g))\\ &=\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(E(\mu))(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(h,g)).\end{aligned}$$

Regardons alors l'effet de $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$ sur le bi-caractère généralisé $\mathrm{E}(\mu)$. On remarque que l'ensemble des indices des $\mathrm{E}(\psi_k)$ est le même que celui des ξ'_k : $\mathcal{S}'_2 = \mathcal{S}_{4,1}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mu)) = \quad & \mathrm{Res}_{\Delta(1)}^{\widetilde{\mathrm{H}}_\chi \times \widetilde{\mathrm{G}}_\psi} \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}[(\textstyle\sum_{k\in\mathcal{S}''_2} \mathrm{E}(\psi_k) \times \mathrm{E}(\mathrm{R}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}_{w_0}}(k))^*) \\
& + \mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}}) \times \mathrm{E}(\mathrm{Id})^* + \mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}}) \times \mathrm{E}(\mathrm{St})^* - \mathrm{E}(\psi_{\alpha_2}) \times \mathrm{E}(\mathrm{U}_c)^* \\
& - \mathrm{E}(\psi_{\alpha_t}) \times \mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_t})^* - \mathrm{E}(\psi_{\alpha_s}) \times \mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_s})^*] \\
= \quad & (\textstyle\sum_{k\in\mathcal{S}_{4,1}} \xi'_k \times \mathrm{R}^{\mathrm{G}_1}_{\mathrm{T}_{c,1}}(k)^*) + \xi'_{00} \times \mathrm{Id}_1^* + \xi'_{04} \times \mathrm{St}_1^* \\
& - \xi'_{02} \times \mathrm{U}^*_{\alpha_2,1} + \xi'_{06} \times \mathrm{U}^*_{c,1} + \rho_\mu \\
= \quad & \mu_c + \rho_\mu,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\rho_\mu = \; & \xi'_{02} \times \mathrm{U}^*_{\alpha_2,1} - \xi'_{06} \times \mathrm{U}^*_{c,1} \\
& - \tfrac{1}{2} C \times (\mathrm{U}_{\alpha_2,1} - \mathrm{U}_{\alpha_s,1} - \mathrm{U}_{\alpha_t,1} + \mathrm{U}_{c,1})^* \\
& - \tfrac{1}{2}(A - B) \times (\mathrm{U}_{\alpha_2,1} + \mathrm{U}_{\alpha_s,1} - \mathrm{U}_{\alpha_t,1} - \mathrm{U}_{c,1})^* \\
& - \tfrac{1}{2}(A + B) \times (\mathrm{U}_{\alpha_2,1} - \mathrm{U}_{\alpha_s,1} + \mathrm{U}_{\alpha_t,1} - \mathrm{U}_{c,1})^* \\
= \; & \tfrac{1}{2}(2\xi'_{02} - 2A - C) \times \mathrm{U}^*_{\alpha_2,1} + \tfrac{1}{2}(-2\xi'_{06} + 2A - C) \times \mathrm{U}^*_{c,1} \\
& + (B + \tfrac{1}{2}C) \times \mathrm{U}^*_{\alpha_s,1} + (-B + \tfrac{1}{2}C) \times \mathrm{U}^*_{\alpha_t,1} \\
= \; & \tfrac{1}{2}(A' - C) \times (\mathrm{U}_{\alpha_2,1} + \mathrm{U}_{c,1})^* + (B + \tfrac{1}{2}C) \times \mathrm{U}^*_{\alpha_s,1} + (-B + \tfrac{1}{2}C) \times \mathrm{U}^*_{\alpha_t,1}.
\end{aligned}$$

5.2.2 Les hypothèses de compatibilité

Les cas $P \neq 1$

- Les cas U, V et $P \not\subset \mathrm{S}_1$

On a vu que $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P$, $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P$ et donc que $\Delta(P) = \mathrm{G}_P \times \mathrm{H}_P$ et $\mathrm{E}(\mu_P) = \mu_P$. Les hypothèses $\mathbf{C1}_P$ et $\mathbf{C2}_P$ sont trivialement vérifiées. Comme μ_P est lui-même le bi-caractère d'une isotypie il en est de même pour les hypothèses $\mathbf{G1}_P$ et $\mathbf{G2}_P$.

- Les cas $P \subset \mathrm{S}_1$

C'est un sous-cas du cas S, d'après la remarque qui suit le théorème de relèvement il est inutile de vérifier quoi que ce soit.

Le cas $P = 1$

Rappelons que l'isométrie I vérifie que χ est σ-stable si et seulement si $\mathrm{I}(\chi)$ l'est (remarque 1.28).

L'hypothèse C1

Montrons que l'isométrie I est $\Delta(1)$-stable. Il s'agit de montrer que pour tout caractère χ de Irr(f), on a $\mathrm{I}({}^{\sigma}\chi) = {}^{\sigma}\mathrm{I}(\chi)$.

Les caractères unipotents Id, U_{α_2}, U_{α_s}, U_{α_t} et St, sont σ-stables. Ils sont en correspondance par I avec les caractères ψ_{id}, ψ_{α_2}, ψ_{α_s}, ψ_{α_t} et ψ_{sgn} qui sont σ-stables. La relation est donc vérifiée pour ces caractères.

Nous avons aussi vu que (lemme 5.2)

$$ {}^{\sigma}\mathrm{I}(\psi_{kl}) = {}^{\sigma}\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(\theta_{-q_0 l} \cdot \theta_{q_0 k}) = \mathrm{I}({}^{\sigma}(\psi_{kl})). $$

Ainsi que

$$ {}^{\sigma}\mathrm{I}(\psi_{1,k}) = {}^{\sigma}\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}^{\mathrm{G}}(\phi_k) = \mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}^{\mathrm{G}}(\phi_{q_0 k}) = \mathrm{I}({}^{\sigma}\psi_{1,k}) $$

et qu'il en est de même pour les trois autres familles de caractères de Irr(e) de la forme $\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{K},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St}\phi_k)$, $\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Id} \cdot \theta_k)$ et $\mathrm{R}_{\mathrm{L}_{\mathrm{SL},2}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{St} \cdot \theta_k)$.

L'hypothèse C2

Montrons que les extensions sont $\Delta(1)$-équivariantes. Il s'agit de montrer que pour tout caractère χ de Irr(f), on a $\mathrm{E}((\chi \times \psi)^{(\sigma,\sigma)}) = (\mathrm{E}(\chi \times \psi))^{(\sigma,\sigma)}$, où $\psi = \varepsilon_1(\chi)I(\chi)^*$.

On remarque que, pour tout ψ, caractère de Irr(f) ou de Irr(e), on a

$$ \mathrm{E}(\psi)^{\sigma} = \mathrm{E}(\psi^{\sigma}). $$

Ainsi

$$ \begin{aligned} \mathrm{E}((\chi \times \psi)^{(\sigma,\sigma)}) &= \mathrm{E}(\chi^{\sigma} \times \psi^{\sigma}) \\ &= \mathrm{Res}_{\Delta(1)_\chi}^{\widetilde{\mathrm{H}}_\chi \times \widetilde{\mathrm{G}}_\psi} \mathrm{E}(\chi^{\sigma}) \times \mathrm{E}(\psi^{\sigma}) \\ &= \mathrm{Res}_{\Delta(1)_\chi}^{\widetilde{\mathrm{H}}_\chi \times \widetilde{\mathrm{G}}_\psi} \mathrm{E}(\chi)^{\sigma} \times \mathrm{E}(\psi)^{\sigma} \\ &= \mathrm{Res}_{\Delta(1)_\chi}^{\widetilde{\mathrm{H}}_\chi \times \widetilde{\mathrm{G}}_\psi} (\mathrm{E}(\chi) \times \mathrm{E}(\psi))^{(\sigma,\sigma)} \\ &= (\mathrm{E}(\chi \times \psi))^{(\sigma,\sigma)}. \end{aligned} $$

L'hypothèse G1

Soit (hh', gg') un élément de $\Delta(1)$ tel que h et g appartiennent à S, h', respectivement g', soit un ℓ'-élément de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{H}}}(h)$, respectivement $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(g)$ et que h et g ne soient pas conjugués.

- Si h' appartient à H, alors g' appartient à G et donc

$$\mathrm{E}(\mu)(hh', gg') = \mu(hh', gg') = 0$$

car μ est le bi-caractère généralisé d'une isotypie (remarques 1.25).

- Si h' appartient à $\widetilde{\mathrm{H}} \backslash \mathrm{H}$, alors $h' = x\sigma$ et $g' = y\sigma$, où x appartient à H et y à G.

Un élément de la forme $x\sigma$ centralise un ℓ-élément h, différent de 1, si et seulement h est dans S_1 et x est dans T_{w_0} ou h est dans ${}^s\mathrm{S}_1$ et x est dans $\mathrm{T}_{w_0}\langle \dot{w}_0 \rangle$ (voir la démonstration de la proposition 5.1). Nous considérons seulement le cas où h est dans S_1, le second donne les mêmes calculs au niveau des éléments et ne change rien au niveau des caractères. De même g est dans S_1 et y est dans T_{w_0}. Soit (x', y') un élément de $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx\sigma, gy\sigma)$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mu)(hx\sigma, gy\sigma) &= \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mu))(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx, gy)) \\ &= \mu_c(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx, gy)) + \rho_\mu(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx, gy)).\end{aligned}$$

Comme hx appartient à T_{w_0}, la descente de Shintani est alors donnée par la norme $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$, on a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx) &= \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx) \\ &= hx\sigma(hx) \\ &= h\sigma(h)x\sigma(x) \\ &= h^2 x\sigma(x),\end{aligned}$$

car h appartient à S_1 et donc est fixe sous σ. De même $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(gy) = g^2 y\sigma(y)$.

Comme $\ell \neq 2$, h^2 et g^2 sont des ℓ-éléments de $\mathrm{T}_{c,1}$ non conjugués et $x\sigma(x)$ et $y\sigma(y)$ sont des ℓ'-éléments de $\mathrm{T}_{c,1}$. De plus $x\sigma(x)$ et $y\sigma(y)$ centralisent respectivement h^2 et g^2.

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mu)(hx\sigma, gy\sigma) &= \mu_c\ (h^2x\sigma(x), g^2y\sigma(y)) + \rho_\mu\ (h^2x\sigma(x), g^2y\sigma(y)) \\ &= 0 + \rho_\mu\ (h^2x\sigma(x), g^2y\sigma(y)).\end{aligned}$$

Or A', B, et C sont nuls sur $\mathrm{T}_{c,1}$ donc $\rho_\mu\ (h^2x\sigma(x), g^2y\sigma(y)) = 0$ et

$$\mathrm{E}(\mu)(hx\sigma, gy\sigma) = 0.$$

L'hypothèse G2

Soit (zh', zg') un élément de $\Delta(1)$ tel que z soit un élément de S et h', respectivement g', soit un ℓ'-élément de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{H}}}(z)$, respectivement $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(z)$.

Si $z = 1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $z \neq 1$.

• Si h' appartient à H, alors g' appartient à G. Comme μ est le bi-caractère généralisé d'une isotypie il suit (remarques 1.25)

$$\mathrm{E}(\mu)(zh', zg') = \mu(zh', zg') = \mu_{\langle z\rangle}(h', g') = \mathrm{E}(\mu_{\langle z\rangle})(h', g').$$

• Si h' appartient à $\widetilde{\mathrm{H}}\backslash\mathrm{H}$ alors $h' = x\sigma$ et $g' = y\sigma$, où x appartient à H et y appartient à G. Il faut alors que z soit dans S_1 ou dans ${}^s\mathrm{S}_1$ et que x et y soient dans T_{w_0} (voir le démonstration de la proposition 5.1).

Lemme 5.5
Pour tout élément z de S_1, différent de 1, la descente de Shintani vérifie :

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mu_{\langle z\rangle})) = \mu_{c\langle z\rangle}.$$

Démonstration : L'élément z est semi-simple régulier, il suit que $\mathrm{C}_\mathrm{G}(z) = \mathrm{C}_\mathrm{H}(z) = \mathrm{T}_{w_0}$. Or la descente de Shintani entre T_{w_0} et $\mathrm{T}_{w_0}^\sigma = \mathrm{T}_{c,1}$ est donnée par la norme $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$. De plus tout caractère χ du ℓ-bloc principal de T_{w_0} est σ-stable si et seulement s'il est le remonté par la norme d'un caractère ψ du ℓ-bloc principal de $\mathrm{T}_{c,1}$, *i.e.* $\chi = \psi \circ \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$. On note $\mathrm{E}(\chi)$ une extension de χ à $\mathrm{T}_{w_0}\langle\sigma\rangle$.

Or, d'après la théorie des descentes de Shintani, il existe une extension $\mathrm{E}_1(\chi)$ qui vérifie, pour tout x dans T_{w_0},

$$\mathrm{E}_1(\chi)(x\sigma) = \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}_1(\chi))[\mathrm{Nr}_{\sigma'^2/\sigma'}(x)] = \psi(x\sigma(x)).$$

L'extension $\mathrm{E}(\chi)$ diffère de $\mathrm{E}_1(\chi)$ sur la tranche $\mathrm{T}_{w_0}\sigma$ d'une racine seconde de l'unité, notée ϵ. Ainsi

$$\mathrm{E}(\chi)(x\sigma) = \epsilon\ \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}_1(\chi))(x\sigma(x)) = \epsilon\psi(x\sigma(x)).$$

On sait que $\mathrm{I}_{\langle z\rangle}$ est l'application identité (c'est une conséquence remarquée de la proposition 5.1) et donc

$$\mu_{\langle z\rangle} = \sum_{\chi\in \mathrm{f}_{\mathrm{T}_{w_0}}} \chi \times \chi^*.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mu_{\langle z\rangle})) &= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_{\mathrm{T}_{w_0}}),\ {}^\sigma\chi=\chi} \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\chi)) \times \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\chi))^* \\
&= \sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_{\mathrm{T}_{c,1}})} \epsilon\psi \times \epsilon\psi^* \\
&= \sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{f}_{\mathrm{T}_{c,1}})} \psi \times \psi^* \\
&= \mu_{c\langle z\rangle}.
\end{aligned}$$

$\dashv$

Par ailleurs z et z^2 donnent la même isotypie car ℓ est premier à 2. Il suit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mu)(zx\sigma, zy\sigma) &= \mu_c(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(zx\sigma, zy\sigma)) + \rho_\mu(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(zx\sigma, zy\sigma)) \\
&= \mu_c(z^2x\sigma(x), z^2y\sigma(y)) + \rho_\mu(z^2x\sigma(x), z^2y\sigma(y)) \\
&= \mu_{c_{<z^2>}}(x\sigma(x), y\sigma(y)) + 0 \\
&= \mu_{c_{< z >}}(x\sigma(x), y\sigma(y)) \\
&= \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mu_{\langle z\rangle}))(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x,y)) \\
&= \mathrm{E}(\mu_{\langle z\rangle})(x\sigma, y\sigma),
\end{aligned}$$

qui est l'égalité souhaitée.

5.2.3 La forte compatibilité

On a montré que S1 est une configuration compatible, on constate qu'elle est fortement compatible directement sur les tables de caractères et l'isotypie choisie.

Cela termine la démonstration du théorème 3.9.

Chapitre 6

La configuration de type Sm

Utilisation du recollement des extensions données par la théorie des descentes de Shintani.

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème 3.12 pour la préconfiguration de type Sm. On montre qu'avec l'isotypie construite au chapitre 4, la configuration est compatible et on constate simplement qu'elle est même fortement compatible (voir paragraphe 6.2.1). La démarche est la même que celle adoptée pour la configuration de type S1. Un problème nouveau apparaît qui est lié au fait que $n > 2$ et que l'on doit donc connaître la valeurs des extensions sur différentes tranches $\mathrm{G}\sigma^i$, $1 \leq i < n$. C'est là qu'intervient le recollement des extensions données par la théorie des descentes de Shintani, des caractères unipotents de la série principale de G (théorème 3.18).

La situation est la suivante (voir convention 3.9) :

$$\boxed{\begin{array}{c} \ell \text{ divise } |\mathrm{G}_1|, \\ n = 2^m \text{ et } \ m > 1, \\ q_0^2 \equiv -1 \text{ modulo } \ell \text{ et } q \equiv 1 \text{ modulo } \ell. \end{array}}$$

Le fait que ℓ divise $|\mathrm{G}_1|$ est une conséquence de l'égalité $q_0^2 \equiv -1$ modulo ℓ. Nous le laissons quand-même en évidence car il est au départ de la démarche adoptée pour démontrer la configuration de type Sm.

Choix du ℓ-sous-groupe de Sylow

On peut choisir le ℓ-sous-groupe de Sylow S de G de tel sorte qu'il soit σ-stable.

En effet, considérons le tore $\mathbf{T}_{c,1}$ de $\mathbf{G}$. Il existe un élément g de $\mathbf{G}$ tel que

$$^g\mathbf{T}_{1,1} = \mathbf{T}_{c,1}.$$

et tel que $g^{-1}\mathrm{F}_0(g) = \dot{c}$. Il suit que

$$g^{-1}\mathrm{F}(g) = g^{-1}\mathrm{F}_0(g)\mathrm{F}_0(g^{-1}\mathrm{F}_0(g))\ldots {\mathrm{F}_0}^{n-1}(g^{-1}\mathrm{F}_0(g)) = \dot{c}^n$$

et donc son image dans $\dot{\mathrm{W}}$ est $c^n = 1$ car 4 divise n. Ainsi on peut supposer que

$$^g\mathbf{T}_{1,1} = \mathbf{T}_{1,n} = \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_{c,1}.$$

Choisissons alors pour S le ℓ-sous-groupe de Sylow de T_1 ($\mathbf{T}_1$ n'est pas déployé pour F_0 mais il l'est pour F). Comme $\mathbf{T}_1$ est égal à $\mathbf{T}_{c,1}$, qui est F_0-stable, il suit que S est σ-stable.

Action de σ sur T_1

D'après ce qui précède F_0 agit sur $\mathbf{T}_1$ comme $c\mathrm{F}_0$ agit sur $\mathbf{T}_{1,1}$. Soit (x, y) un élément de $\mathbf{T}_{1,1}$, on a

$$^{c\mathrm{F}_0}(x, y) = {}^c(x^{q_0}, y^{q_0}) = (y^{-q_0}, x^{q_0}).$$

Ainsi pour tout élément (x, y) de T_1, on a

$$^\sigma(x, y) = (y^{-q_0}, x^{q_0}).$$

On remarque alors que

$$^{\sigma^2}(x, y) = (x^{-q_0^2}, y^{-q_0^2})$$

Comme $q_0^2 \equiv -1$ modulo ℓ et que ℓ ne divise pas $\frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{G}_2|}$, on en déduit que σ^2 centralise S.

Action de σ sur $\dot{\mathrm{W}}$

Toujours d'après ce qui précède σ agit sur $\dot{\mathrm{W}}$ comme la conjugaison par $\dot{c}$. Les éléments $\dot{c}$ et $\dot{w}_0$ sont donc stables sous σ et on a

$$^\sigma\dot{s} = \dot{s}\dot{t}\dot{s}\dot{t}^{-1}\dot{s}$$

$$^\sigma\dot{t} = \dot{s}\dot{t}\dot{s}.$$

Normalisateur de S **dans** G

On a vu dans le chapitre 4 que

$$\mathrm{H} = \mathrm{T}_1\dot{\mathrm{W}},$$

où
• $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_1' \times \mathrm{T}_1'$, où T_1' est cyclique d'ordre $q-1$.
• $\dot{t}$ est d'ordre 4. L'action de $\dot{t}$ sur T_1 est d'ordre 2. Pour tout (x,y) dans T_1, on a

$$^{\dot{t}}(x,y) = (x, y^{-1}).$$

• $\dot{s}$ est d'ordre 2. Il agit sur T_1 en permutant les composantes

$$^{\dot{s}}(x,y) = (y,x).$$

• $\mathrm{T}_1 \cap \langle \dot{w}_0 \rangle = \langle {\dot{w}_0}^2 \rangle$, qui est d'ordre 2.

• $\mathrm{T}_1 \cap \langle \dot{\mathrm{W}} \rangle = \langle {}^{\dot{s}}\dot{t}^2, \dot{t}^2 \rangle$, qui est d'ordre 4.

On rappelle que l'on note τ un générateur de T_1'.

Points fixes de H **sous** σ

On a

$$\mathrm{T}_1^\sigma = \mathbf{T}_{c,1}^{\mathrm{F}_0} = \mathrm{T}_{c,1} \simeq \mathbf{T}_{1,1}^{c\mathrm{F}_0}.$$

L'élément $\tau_1 = (\tau^{\frac{q-1}{q_0^2+1}}, \tau^{q_0\frac{q-1}{q_0^2+1}})$ est un générateur de $\mathrm{T}_{c,1}$. Par ailleurs,

$$\dot{\mathrm{W}}^\sigma = \langle \dot{c} \rangle$$

et

$$\mathrm{W}^\sigma = \langle c \rangle$$

et donc

$$\mathrm{H}^\sigma = \mathrm{T}_{c,1}\langle \dot{c} \rangle.$$

Or

$$\mathrm{S}^\sigma = \mathrm{S} \cap \mathrm{T}_{w_0}^\sigma = \mathrm{S} \cap \mathrm{T}_{c,1}.$$

Le sous-groupe S^σ est donc le ℓ-sous-groupe de Sylow de G_1 inclus dans $\mathrm{T}_{c,1}$. Le groupe de Weyl d'un tore de Coxeter est $\langle c \rangle$, on a donc

$$\mathrm{N}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{S}^\sigma) = \mathrm{T}_{c,1}\langle \dot{c} \rangle.$$

On pose

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}^\sigma \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}^\sigma,$$

on a alors

$$\mathrm{H}_1 = \mathrm{N}_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{S}_1).$$

6.1 Extensions de caractères et descente de Shintani

Faisons tout d'abord une remarque qui est à l'origine de la démarche adoptée pour démontrer la compatibilité de cette configuration.

Considérons l'extension $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ de G. La configuration est

$$(q_0^2,\ \frac{n}{2},\ \ell,\ \mathrm{I}) \text{ avec } q \equiv 1 \text{ modulo } \ell \text{ et } q_0^2 \equiv -1 \text{ modulo } \ell.$$

C'est une configuration de type BI (définition 1.31). En effet, on a déjà vu que σ^2 centralise le ℓ-sous-groupe de Sylow S.

Considérons maintenant les centralisateurs des sous-groupes P de S dans $\widetilde{\mathrm{G}}$ et $\widetilde{\mathrm{H}}$.

Proposition 6.1
Soit P un sous-groupe S_1.

- *Si $P \not\subset \mathrm{S}_1$ et $P \not\subset {}^s\mathrm{S}_1$, alors $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle\sigma^2\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle\sigma^2\rangle$,*
- *Si $P \subset \mathrm{S}_1$ alors $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle\sigma\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle\sigma\rangle$,*
- *Si $P \subset {}^s\mathrm{S}_1$, alors $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle\dot{w}_0\sigma\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle\dot{w}_0\sigma\rangle$.*

Démonstration : Soient x un ℓ-élément de T_1 et $g\sigma^d$ un élément de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(x)\backslash\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x)$, où g appartient à G. On a $g\sigma^d x\sigma^{-d}g^{-1} = x$ et donc $g({}^{\sigma^d}x)g^{-1} = x$. Or σ^2 stabilise x on peut donc supposer que $d = 1$. On considère donc $g({}^{\sigma}x)g^{-1} = x$ et on conclut comme pour la configuration de type S1 (proposition 5.1). ⊣

Les quatre cas 1, S, U et V (notation 4.1) se répartissent ainsi :

• Les deux cas U et V ainsi que les cas où $P \not\subset \mathrm{S}_1$ et $P \not\subset {}^s\mathrm{S}_1$ vérifient $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle\sigma^2\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle\sigma^2\rangle$. L'extension $\mathrm{E}(\mu_P)$ est définie par la situation BI (blocs isomorphes).

• Les cas où $P \subset \mathrm{S}_1$, P non trivial, vérifient

$$\mathrm{G}_P = \mathrm{H}_P = \mathrm{T}_1 \text{ et } \widetilde{\mathrm{G}}_P = \widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{T}_1\langle\sigma\rangle.$$

On a vu au chapitre 1, qu'il n'y a alors rien à démontrer.

• Les cas où $P \subset {}^s\mathrm{S}_1$, P non trivial, vérifient

$$\mathrm{G}_P = \mathrm{H}_P = \mathrm{T}_1 \text{ et } \widetilde{\mathrm{G}}_P = \widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{T}_1\langle\dot{w}_0\sigma\rangle.$$

Ce cas ne diffère pas du cas $P \subset \mathrm{S}_1$, car la conjugaison par un élément de H n'intervient pas dans la théorie des caractères de H et G.

• Le cas 1 vérifie $\widetilde{\mathrm{G}}_P = \mathrm{G}_P\langle\sigma\rangle$ et $\widetilde{\mathrm{H}}_P = \mathrm{H}_P\langle\sigma\rangle$. Nous devons construire les extensions de chaque caractère σ-stable de G et H à $\widetilde{\mathrm{G}}$ et $\widetilde{\mathrm{H}}$. C'est ce que nous allons faire dans la suite de cette section.

Soit χ un caractère de Irr(f) et $\psi = \varepsilon(\chi)\mathrm{I}(\chi)$. Nous savons alors qu'il existe une unique extension de $\chi \times \psi$ à $\mathrm{H}\langle\sigma^2\rangle \times \mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ qui soit dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{H}\langle\sigma^2\rangle \times \mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ et de plus on sait qu'elle vérifie les conditions de compatibilité souhaitées (remarque 1.33).

La théorie des descentes de Shintani va nous aider à choisir une extension de $\chi \times \psi$ à $\widetilde{\mathrm{H}} \times \widetilde{\mathrm{G}}$ (on construira une “descente de Shintani” pour H comme pour la configuration de type S1). Il faudra alors vérifier que cette extension vérifie les conditions de compatibilité **C1** et **C2** et que sa restriction à $\mathrm{H}\langle\sigma^2\rangle \times \mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ est dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{H}\langle\sigma^2\rangle \times \mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$. Il suivra que les conditions **G1** et **G2** seront automatiquement vérifiées sur les éléments de la forme $(g\sigma^d, h\sigma^d)$ pour d pair. Il restera alors à considérer les éléments $(g\sigma^d, h\sigma^d)$ pour d impair.

La proposition suivante donne une caractérisation des extensions cherchées.

Proposition 6.2

Soit ψ un caractère de Irr(e) *et $\widehat{\psi}$ une extension de ψ à $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$. Alors $\widehat{\psi}$ appartient au ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ si et seulement si*

$$\frac{\widehat{\psi}(\sigma^2)}{\psi(1)} \equiv 1 \textit{ modulo } \mathcal{L}.$$

Démonstration : Il existe une extension de ψ à $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ qui est dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$, notons la $\widetilde{\psi}$. Toute extension de ψ à $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ s'écrit alors $\omega\widetilde{\psi}$, où ω est un caractère linéaire de $\langle\sigma^2\rangle$.

Comme σ^2 centralise S, ℓ ne divise pas le cardinal de la classe de σ^2. De plus comme ω est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité et comme $\ell \neq 2$, l'équation $\omega(\sigma^2) \equiv 1$ modulo $\mathcal{L}$ admet l'unique solution $\omega(\sigma^2) = 1$. Ainsi $\omega\widetilde{\psi}$ est dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ si et seulement si

$$\frac{\omega\widetilde{\psi}(\sigma^2)}{\omega\psi(1)} \equiv 1 \text{ modulo } \mathcal{L}.$$

C'est-à-dire

$$\frac{\omega(\sigma^2)\widetilde{\psi}(\sigma^2)}{\psi(1)} \equiv 1 \text{ modulo } \mathcal{L}.$$

Or $\widetilde{\psi}$ est dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ et vérifie donc

$$\frac{\widetilde{\psi}(\sigma^2)}{\psi(1)} \equiv 1 \text{ modulo } \mathcal{L}.$$

Ainsi $\omega\widetilde{\psi}$ est dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ si et seulement si

$$\omega(\sigma^2) \equiv 1 \text{ modulo } \mathcal{L}.$$

et donc si et seulement si

$$\omega(\sigma^2) = 1.$$

$\dashv$

Le corollaire suivant découle immédiatement de cette proposition.

Corollaire 6.3

Pour tout caractère σ-stable ψ de $\mathrm{Irr}(e)$, une extension $\mathrm{E}(\psi)$ de ψ à $\widetilde{\mathrm{G}}$ a sa restriction dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ si et seulement si

$$\frac{\mathrm{E}(\psi)(\sigma^2)}{\psi(1)} \equiv 1 \textit{ modulo } \mathcal{L}.$$

Le même résultat est vrai pour les caractères σ-stable de $\mathrm{Irr}(f)$.

6.1.1 Caractères de Irr(e) et descente de Shintani

Les caractères unipotents

Les caractères unipotents de Irr(e) sont σ-stables car $\mathbf{G}$ est déployé sur $\mathbf{F}_{q_0}$.

Au paragraphe 3.5.1, nous avons défini l'extension donnée par la descente de Shintani sur la tranche $\mathrm{G}\sigma$ d'un caractère unipotent χ de Irr(e). Elle est notée $\mathrm{E}_1(\chi)$.

Lemme 6.4

Les extensions $\mathrm{E}_1(\mathrm{Id})$, $\mathrm{E}_1(\mathrm{St})$, $\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_s})$, $\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_t})$ et $\iota\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})$, où ι est un caractère irréductible de $\widetilde{\mathrm{G}}$, trivial sur G, d'ordre 4, ont leur restriction à $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$.

Démonstration : D'après la proposition 6.2, il suffit de regarder ces extensions sur σ^2. Prenons, par exemple $\iota\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})$. On a, à l'aide des valeurs données dans le théorème 3.18,

$$\begin{aligned}
\frac{\iota\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})(\sigma^2)}{\iota\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})(1)} &= \frac{(-1)q_0^2(1+q_0^4)}{\frac{1}{2}q(1+q)^2} \\
&\equiv \frac{-(-2)}{2} \text{ modulo } \mathcal{L} \\
&\equiv 1 \text{ modulo } \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

La restriction de $\iota\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})$ à $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ est donc bien dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$. ⊣

Remarque 6.5

On voit, au passage, que l'extension donnée par la descente de Shintani de U_{α_2} *n'est pas dans le ℓ-bloc principal de* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *car*

$$\frac{\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})(\sigma^2)}{\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2})(1)} \equiv -1 \textit{ modulo } \mathcal{L}.$$

On pose

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\mathrm{Id}) = \mathrm{E}_1(\mathrm{Id}),\\
&\mathrm{E}(\mathrm{St}) = \mathrm{E}_1(\mathrm{St}),\\
&\mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_s}) = \mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_s}),\\
&\mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_t}) = \mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_t}),\\
&\mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_2}) = \iota\mathrm{E}_1(\mathrm{U}_{\alpha_2}).
\end{aligned}$$

Ce sont ces extensions que l'on choisit pour le théorème de relèvement des isotypies.

Les caractères de la forme $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$

Rappelons que $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ est un caractère de Deligne-Lusztig construit à partir du caractère irréductible $\theta_k \cdot \theta_l$ de T_1 : $(\tau^i, \tau^j) \mapsto \gamma^{ki+lj}$, où $(k,l) \in \mathcal{S}_1'^2$.

Les mêmes calculs que ceux faits pour le caractère $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0}}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ de la configuration S1, montrent que $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_l)$ est σ-stable si et seulement si $l \equiv -q_0 k$ modulo ℓ (ou $l \equiv q_0 k$ modulo ℓ, qui donne le même caractère). Il y en a $\frac{1}{4}(\ell^r - 1)$ distincts.

Soulignons que

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_{q_0 k}) &= \mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_{-q_0 k}) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_{-k} \cdot \theta_{q_0 k}) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_{-k} \cdot \theta_{-q_0 k})\\
&= \mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_{q_0 k} \cdot \theta_k) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_{q_0 k} \cdot \theta_{-k})\\
&= \mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_{-q_0 k} \cdot \theta_k) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_{-q_0 k} \cdot \theta_{-k}).
\end{aligned}$$

Notation 6.6

Nous noterons $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k)$ *le caractère* $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(\theta_k \cdot \theta_{-q_0 k})$*, lorsque* k *appartient à* $\mathcal{S}_1''$.

Remarquons qu'on choisit le caractère de T_1 qui est σ-stable et que cela conduit donc simplement au prochain lemme.

Nous voulons maintenant étendre un tel caractère. Nous allons appliquer le théorème 2.15.

Considérons le tore $\mathbf{T}_{c,1}$. On a vu que

$$\mathbf{T}_{c,1}^{\mathrm{F}} = \mathrm{T}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{c,1}^{\mathrm{F}_0} = \mathrm{T}_{c,1}.$$

De la même manière, comme $c\mathrm{F}_0(c) = w_0$ et $c\mathrm{F}_0(c)\dots\mathrm{F}_0{}^{2^d-1}(c) = 1$ pour $d \geq 2$, il suit que

$$\mathbf{T}_{c,1}^{\mathrm{F}_0^2} = \mathrm{T}_{w_0,2} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{c,1}^{\mathrm{F}_0^{2^d}} = \mathrm{T}_{1,2^d}.$$

Le groupe $\mathbf{T}_{w_0,2}$ est le produit de deux groupes cyclique d'ordre q_0^2+1, chacun engendré par $\tau^{\frac{q-1}{q_0^2+1}}$. Tandis que le groupe $\mathrm{T}_{1,2^d}$ est le produit de deux groupes cyclique d'ordre $q_0^{2^d}-1$, chacun engendré par $\tau^{\frac{q-1}{q_0^{2^d}-1}}$. On pose

$$\tau_2 = \tau^{\frac{q-1}{q_0^2+1}} \quad \text{et} \quad \tau_{2^d} = \tau^{\frac{q-1}{q_0^{2^d}-1}}.$$

Soit $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$, respectivement $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^2}$, $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^{2^d}}$, la norme de T_1 sur $\mathrm{T}_{c,1}$, respectivement sur $\mathrm{T}_{w_0,2}$, $\mathrm{T}_{1,2^d}$.

Lemme 6.7

Soient $\mu_{k,1}$ *le caractère irréductible de* $\mathrm{T}_{c,1}$ *suivant :* $\tau_1^i \mapsto \gamma^{\frac{q-1}{q_0^2+1}ki}$.
Nous avons

$$\theta_k \cdot \theta_{q_0 k} = \mu_{k,1} \circ \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}.$$

Démonstration : Il suffit de calculer la norme. La norme de T_1 sur $\mathrm{T}_{c,1}$ envoie (τ^i, τ^j) sur $\tau_1^{i-q_0 j}$. En effet

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0} &= (\tau^i,\tau^j)\sigma(\tau^i,\tau^j)\sigma^2(\tau^i,\tau^j)\dots \\
&= (\tau^i,\tau^j)(\tau^{-q_0 j},\tau^{q_0 i})(\tau^{-q_0^2 i},\tau^{-q_0^2 j})(\tau^{q_0^3 j},\tau^{-q_0^3 i})\dots \\
&= \left(\tau^{(i-q_0 j)(1-q_0^2+q_0^4\dots+(-1)^{m-1}q_0^{2^m})}, \tau^{(j+q_0 i)(1-q_0^2+q_0^4\dots+(-1)^{m-1}q_0^{2^m})}\right) \\
&= \left(\tau^{\frac{q-1}{q_0^2+1}(i-q_0 j)}, \tau^{\frac{q-1}{q_0^2+1}(j+q_0 i)}\right) \\
&= \tau_1^{i-q_0 j}
\end{aligned}$$

car $j + q_0 i \equiv q_0(i - q_0 j)$ modulo $q_0^2 + 1$. $\dashv$

Notation 6.8

Soit $1 \leq d \leq m$. On pose

$$\mu_{k,2^d} = \mu_{k,1} \circ \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_0^{2^d}/\mathrm{F}_0}.$$

Si $d = 1$, $\mu_{k,2}$ est le caractère irréductible de $\mathrm{T}_{w_0,2}$ suivant :

$$(\tau_2^i, \tau_2^j) \mapsto \gamma^{\frac{q-1}{q_0^2+1}k(i-q_0j)},$$

sinon $\mu_{k,2^d}$ est le caractère irréductible de $\mathrm{T}_{1,2^d}$ suivant :

$$(\tau_{2^d}^i, \tau_{2^d}^j) \mapsto \gamma^{\frac{q-1}{q_0^{2^d}-1}k(i-q_0j)}.$$

Ce caractère vérifie

$$\theta_k \cdot \theta_{q_0 k} = \mu_{k,2^d} \circ \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^{2^d}}.$$

La caractéristique de $\mathbf{F}_p$ est différente de 2 et ne divise donc pas $n = 2^m$. Nous savons alors, d'après le théorème 2.15 et la remarque 2.17, qu'il existe une extension $\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k))$ de $\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k)$ à $\widetilde{\mathrm{G}}$ telle que (proposition 2.3)

$$\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k))(g\sigma^{2^d}) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_1^{\sigma^{2^d}}}^{\mathrm{G}_{2^d}}(\mu_{k,2^d})(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0^{2^d}}(g)).$$

Soit u un entier. Si u est premier à n, *i.e.* pour tout u impair, on a

$$\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k))(g\sigma^u) = \mathrm{R}_{\mathrm{T}_{c,1}}^{\mathrm{G}_1}(\mu_{k,1})(g),$$

où g' est l'image de g par l'application de Gyoja $\mathrm{G}_{n,u}$ (voir théorème2.15).

Il faut maintenant vérifier que la restriction du caractère $\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k))$ à $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$ est bien dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{G}\langle\sigma^2\rangle$.

D'après la corollaire 6.3, il suffit de considérer l'élément σ^2. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k))(\sigma^2) &= \mathrm{E}_1(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k)(\sigma^2) \\ &= \mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0,2}}^{\mathrm{G}_2}(\mu_{k,2})(1).\end{aligned}$$

On rappelle que $q \equiv 1$ modulo ℓ et $q_0^2 \equiv -1$ modulo ℓ.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k))(\sigma^2)}{\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k)(1)} &= \frac{\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{w_0,2}}^{\mathrm{G}_2}(\mu_{k,2})(1)}{\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k)(1)} \\
&= \frac{(1-q_0^2)^2(1+q_0^4)}{(1+q)^2(1+q^2)} \\
&\equiv 1 \quad \text{modulo} \quad \mathcal{L}.
\end{aligned}$$

On choisit l'extension $\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k))$ pour le théorème de relèvement.

Les autres caractères

Ils se traitent comme pour la configuration de type S1. Aucun n'est σ-stable.

6.1.2 Caractères de Irr(f) et "descente de Shintani"

La démarche est exactement la même que pour la configuration de type S1 (paragraphe 5.1.2). Nous ne la réexposons pas entièrement mais donnons seulement les quelques points essentiels, dont les quelques différences avec le cas précédent. En particulier, il faut considérer les puissances de σ.

Les caractères σ-stables sont les mêmes que pour le cas de la configuration de type S1, c'est-à-dire ψ_ϕ pour $\phi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{W})$ et les $\frac{1}{4}(\ell^r - 1)$ caractères de la forme $\psi_{i,-q_0 i}$. On note encore $\psi_{q_0 i}$ le caractère $\psi_{i,q_0 i}$. Tous les autres caractères sont σ^2-stables car S est centralisé par σ^2.

Pour construire les extensions des caractères σ-stables nous utilisons encore le groupe $\mathrm{S}\dot{\mathrm{W}}$ et $\sigma' = \dot{c}^{-1}\sigma$. Une différence apparaît :

- Si $m > 2$, alors
$$\dot{\mathrm{W}} \cap \langle \sigma' \rangle = 1.$$
- Si $m = 2$, alors
$$\dot{\mathrm{W}} \cap \langle \sigma' \rangle = \langle \sigma'^4 \rangle = \langle \dot{c}^4 \rangle = \langle \dot{w_0}^4 \rangle.$$

Cela implique que si ψ est un caractère de $\{\psi_\phi,\ \phi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{W})\}$, alors une extension $\mathrm{E}(\psi)$ de ψ à $\widetilde{\mathrm{H}}$ vérifie, pour tout élément h de H et tout entier u,

$$\mathrm{E}(\psi)(h\sigma'^u) = \psi(hc)\omega(\sigma')^u,$$

où

• si $m > 2$, ω est un caractère linéaire de $\langle\sigma'\rangle$.

• si $m = 2$, ω est un caractère linéaire de $\langle\sigma'\rangle$ d'ordre 4.

Les caractères $\psi_{q_0 i}$ s'étendent de la même manière que dans le cas de la configuration de type S1.

Il faut maintenant choisir une extension dont la restriction à $\mathrm{H}\langle\sigma^2\rangle$ soit dans le ℓ-bloc principal de $\mathrm{H}\langle\sigma^2\rangle$.

D'après la corollaire 6.3, il suffit de considérer l'élément σ^2 et choisir une extension $\mathrm{E}(\psi)$ qui vérifie

$$\frac{\mathrm{E}(\psi)(\sigma^2)}{\psi(1)} \equiv 1 \text{ modulo } \mathcal{L}.$$

On choisit pour l'extension $\mathrm{E}(\psi_\phi)$, $\phi \in \mathrm{Irr W}$, $\mathrm{E}(\psi_\phi) = \psi_\phi \omega_\phi$ avec

$$\begin{array}{ll} \omega_\phi(\sigma') = 1 & \text{pour } \ \phi = \mathrm{id} \text{ et } \phi = \mathrm{sgn}, \\ \omega_\phi(\sigma') = -1 & \text{pour } \ \phi = \alpha_s \text{ et } \phi = \alpha_t \\ \omega_\phi(\sigma') = \alpha^2 & \text{pour } \ \phi = \alpha_2. \end{array}$$

Table des valeurs des extensions sur les classes de conjugaison

Le tableau suivant donne les valeurs des extensions sur certaines classes de conjugaison de la tranche $\mathrm{H}\sigma$ de $\widetilde{\mathrm{H}}$:

	degré	$(\tau^k, \tau^l)\sigma$	$\dot{t}\sigma$	$\dot{s}\sigma$	$\dot{c}\sigma$	$\dot{t}\dot{s}\sigma$
$\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}})$	1	1	1	1	1	1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_t})$	1	1	-1	1	-1	-1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_s})$	1	1	1	-1	-1	-1
$\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}})$	1	1	-1	-1	1	1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})$	2				-2	2
$\mathrm{E}(\psi_{q_0 i})$	4	$\gamma_{i(l+q_0k)} + \gamma_{q_0 i(l+q_0 k)}$				

Le tableau suivant donne les valeurs des extensions sur de certaines classes de conjugaison de la tranche $\mathrm{H}\sigma^2$ de $\widetilde{\mathrm{H}}$. Remarquons que σ^2 agit sur $\dot{\mathrm{W}}$ comme la conjugaison par w_0, c'est-à-dire trivialement.

	$(\tau^k, \tau^l)\sigma^2$	$\dot{t}\sigma^2$	$\dot{s}\sigma^2$	$\dot{c}\sigma^2$	$\dot{w}_0\sigma^2$
$\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}})$	1	1	1	1	1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_t})$	1	-1	1	-1	1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_s})$	1	1	-1	-1	1
$\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}})$	1	-1	-1	1	1
$\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})$	-2				2
$\mathrm{E}(\psi_{q_0 i})$	$\gamma_{i(l+q_0k)} + \gamma_{q_0 i(l+q_0k)})$				

Descente de Shintani

La descente de Shintani de H est définie comme pour la configuration de type S1 (paragraphe 5.1.3).

• Sur les classes :

Dans le tableau suivant, on associe à un élément $x\sigma$ de $\widetilde{\mathrm{H}}$, où x appartient à H, un élément x' de H_1. C'est ainsi qu'on définit les valeurs de $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$ sur les éléments de la première ligne du tableau.

$x\sigma$	$(\tau^i, \tau^j)\sigma$	$\dot{s}\sigma$	$\dot{t}\sigma$	$\dot{t}\dot{s}\sigma$	$\dot{c}\sigma$
x'	$\tau_1^{i-q_0 j}$	$\dot{c}$	$\dot{c}^3$	$\dot{c}^2$	$\dot{c}^6$

Pour tout $\rho \in \mathrm{H} \setminus \mathrm{T}_1$, on pose $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\rho\sigma) = \mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\rho'\sigma)$, où ρ' est l'unique élément de $\{\dot{t},\ \dot{s},\ \dot{c}, \dot{w}_0\}$ tel que son image dans W et celle de ρ soient conjuguées.

On rappelle que la σ-classe de x dans H est identifiée à la classe de $x\sigma$ dans $\widetilde{\mathrm{H}}$, notée $cl(x\sigma)$. On pose

$$\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(cl(x\sigma)) = cl(x').$$

Par abus de notation, on notera $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x)$, un représentant de l'image par $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$ de la σ-classe de x dans $\widetilde{\mathrm{H}}$, c'est donc un élément de H_1.

• Sur les caractères :

On pose

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}})) &= \xi'_{00} \\ \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\alpha_t})) &= (A - B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\alpha_s})) &= (A+B) \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}})) &= \xi'_{04} \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})) &= C \\
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\psi_k)) &= \xi'_k,
\end{aligned}$$

où A, B et C sont les combinaisons linéaires de caractères de H_1 suivantes

$$A = \frac{1}{2}(\xi'_{02} + \xi'_{06}),$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\xi'_{01} - \xi'_{05} + \xi'_{07} - \xi'_{03}),$$

$$C = \frac{1}{2}(\xi'_{03} + \xi'_{07} - \xi'_{01} - \xi'_{05}),$$

où $\sqrt{2}$ est la racine carré de 2 donnée par $\alpha + \alpha^{-1}$.

On étend cette définition par linéarité.

On utilisera aussi la combinaison suivante

$$A' = \xi'_{02} - \xi'_{06}.$$

La descente de Shintani ainsi définie vérifie bien les conditions souhaitées (voir l'introduction de ce paragraphe 5.1.3), à savoir, si h est un ℓ-élément, respectivement un ℓ'-élément, de H et si h' appartient à $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(h)$, alors h' est un ℓ-élément, respectivement un ℓ'-élément.

6.2 Relèvement de l'isotypie

La démarche est identique à celle suivie pour la configuration de type S1 (paragraphe 5.2). En particulier, les cas $P \neq 1$ et les hypothèses **C1** et **C2** du cas $P = 1$ se traitent exactement de la même manière. Nous considérons donc directement les hypothèses **G1** et **G2** du cas $P = 1$, qui demandent plus d'attention.

On remarque que $\mathcal{S}''_1 = \mathcal{S}_{4,1}$. L'expression de $\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mu))$ est maintenant la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mu)) = & \quad \mathrm{Res}_{\Delta(1)}^{\widetilde{\mathrm{H}}_\chi\times\widetilde{\mathrm{G}}_\psi}\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}[(\textstyle\sum_{k\in\mathcal{S}_1''}\mathrm{E}(\psi_k)\times\mathrm{E}(\mathrm{R}_{\mathrm{T}_1}^{\mathrm{G}}(k))^*) \\
& +\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{id}})\times\mathrm{E}(\mathrm{Id})^*+\mathrm{E}(\psi_{\mathrm{sgn}})\times\mathrm{E}(\mathrm{St})^*-\mathrm{E}(\psi_{\alpha_2})\times\mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_2})^* \\
& -\mathrm{E}(\psi_{\alpha_s})\times\mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_s})^*-\mathrm{E}(\psi_{\alpha_t})\times\mathrm{E}(\mathrm{U}_{\alpha_t})^*] \\
= & \quad (\textstyle\sum_{k\in\mathcal{S}_{4,1}}\xi'_k\times\mathrm{R}_{\mathrm{T}_{c,1}}^{\mathrm{G}_1}(k)^*)+\xi'_{00}\times\mathrm{Id}_1^*+\xi'_{04}\times\mathrm{St}_1^* \\
& -\xi'_{02}\times\mathrm{U}_{\alpha_2,1}^*+\xi'_{06}\times\mathrm{U}_{c,1}^*+\rho_\mu \\
= & \quad \mu_c+\rho_\mu,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\rho_\mu = & \ \xi'_{02}\times\mathrm{U}_{\alpha_2,1}^*-\xi'_{06}\times\mathrm{U}_{c,1}^* \\
& -\tfrac{1}{2}C\times\iota(\mathrm{U}_{\alpha_2,1}+\mathrm{U}_{\alpha_s,1}+\mathrm{U}_{\alpha_t,1}+\mathrm{U}_{c,1}))^* \\
& -\tfrac{1}{2}(A+B)\times(\mathrm{U}_{\alpha_2,1}+\mathrm{U}_{\alpha_s,1}-\mathrm{U}_{\alpha_t,1}-\mathrm{U}_{c,1}))^* \\
& -\tfrac{1}{2}(A-B)\times(\mathrm{U}_{\alpha_2,1}-\mathrm{U}_{\alpha_s,1}+\mathrm{U}_{\alpha_t,1}-\mathrm{U}_{c,1}))^* \\
= & \ \tfrac{1}{2}(2\xi'_{02}-2A-\iota C)\times\mathrm{U}_{\alpha_2,1}^*+\tfrac{1}{2}(-2\xi'_{06}+2A-\iota C)\times\mathrm{U}_{c,1}^* \\
& +(-B-\tfrac{1}{2}\iota C)\times\mathrm{U}_{\alpha_s,1}^*+(B-\tfrac{1}{2}\iota C)\times\mathrm{U}_{\alpha_t,1}^* \\
= & \ \tfrac{1}{2}(A'-C)\times(\mathrm{U}_{\alpha_2,1}+\mathrm{U}_{c,1})^*-(B+\tfrac{1}{2}\iota C)\times\mathrm{U}_{\alpha_s,1}^*-(-B+\tfrac{1}{2}\iota C)\times\mathrm{U}_{\alpha_t,1}^*.
\end{aligned}$$

L'hypothèse G1

Soit (hh', gg') un élément de $\Delta(1)$ tel que h et g appartiennent à S, h', respectivement g', soit un ℓ'-élément de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{H}}}(h)$, respectivement $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(g)$ et que h et g ne soient pas conjugués.

- Si h' appartient à H alors g' appartient à G et donc

$$E(\mu)(hh', gg') = \mu(hh', gg') = 0$$

car μ est le bi-caractère généralisé d'une isotypie (remarques 1.25).

- Si h' appartient à $\widetilde{\mathrm{H}}\backslash\mathrm{H}$, alors $h' = x\sigma^d$ et $g' = y\sigma^d$, où x appartient à H et y à G et $0 < d < n$.

On a déjà vu qu'il suffit de regarder un tel élément pour d impair et que pour que $x\sigma^d$ centralise un ℓ-élément h, différent de 1, il faut que h soit dans S_1 et que x

soit dans T_1 ou que h soit dans ${}^s\mathrm{S}_1$ et que x soit dans $\mathrm{T}_1\langle\dot{w}_0\rangle$ (proposition 6.1) . Il en est de même pour g et y.

On considère donc l'élément $(hx\sigma^d, gy\sigma^d)$ où h, respectivement g, est un ℓ-élément de T_1, respectivement G, x et y appartiennent à T_1 et d est impair donc premier à n.

Montrons qu'on peut se ramener au cas où $d = 1$.

D'après le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet, il existe une infinité de nombre premier de la forme $d + un$, où u est un entier. Il en existe donc un qui est premier à $n|\mathrm{G}|$. Soit d' un tel entier. Ainsi tout élément v de $\mathrm{T}_1\langle\sigma\rangle$ a son ordre premier à d' (puisqu'il divise $n|\mathrm{G}|$) et donc $\langle v^{d'}\rangle = \langle v\rangle$ et

$$\mathrm{T}_1\langle\sigma\rangle = \{v^{d'},\ v \in \mathrm{T}_1\langle\sigma\rangle\}.$$

Il existe donc un élément g_d de T_1 tel que

$$gy\sigma^d = (g_d\sigma)^{d'}.$$

On pose

$$g_1 = (g_d\sigma)_\ell \ \text{ et } \ y_1\sigma = (g_d\sigma)_{\ell'}$$

la ℓ-partie, respectivement ℓ'-partie de $g_d\sigma$. On a donc

$$g_d\sigma = g_1y_1\sigma = y_1\sigma g_1.$$

Puis

$$gy\sigma^d = g_1^{d'}(y_1\sigma)^{d'}.$$

Par unicité de la décomposition en ℓ et ℓ'-partie d'un élément, on a

$$g_1^{d'} = g.$$

De la même manière

$$hx\sigma^d = (h_d\sigma)^{d'},$$

où h_d appartient à T_1. On pose

$$h_1 = (h_d\sigma)_\ell \ \text{ et } \ x_1\sigma = (h_d\sigma)_{\ell'}$$

et on a

$$h_1^{d'} = h.$$

Ainsi d'une part, l'élément $(h_1x_1\sigma, g_1y_1\sigma)$ appartient à $\Delta(1)$ et comme h et g ne sont pas conjugués, h_1 et g_1 ne le sont pas non plus.

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mu)(h\sigma^d, g\sigma^d) &= \mathrm{E}(\mu)((h_d\sigma)^{d'}, (g_d\sigma)^{d'}) \\ &= (\alpha_{d'}.E(\mu))((h_1x_1\sigma), (g_1y_1\sigma)),\end{aligned}$$

où $\alpha_{d'}$ est l'élément du groupe de Galois $Gal(\mathbf{Q}[n|\mathrm{G}|]/\mathbf{Q})$ associé à d' (il existe car d' est premier à $|\mathrm{G}\langle\sigma\rangle|$).

Nous nous ramenons ainsi au cas $d = 1$.

Considérons donc maintenant l'élément $(hx\sigma, gy\sigma)$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mu)(hx\sigma, gy\sigma) &= \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mathrm{E}(\mu))(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx, gy)) \\ &= \mu_c(x', y') + \rho_\mu(\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx, gy)).\end{aligned}$$

Comme hx appartient à T_1, la descente de Shintani est donnée par la norme $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}$, on a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx) &= \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(hx) \\ &= hx\sigma(hx)\ldots\sigma^{n-1}(hx) \\ &= h\sigma(h)\ldots h\sigma^{n-1}(h)\sigma(x)\ldots\sigma^{n-1}(x) \\ &= h^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x),\end{aligned}$$

car h appartient à S_1 et donc est fixe sous σ. De même $\mathrm{N}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(gy) = g^n\mathrm{Nr}_{\sigma^n/\sigma}(y)$.

Comme ℓ est premier à n, h^n et g^n sont des ℓ-éléments de $\mathrm{T}_{c,1}$ non conjugués et $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x)$ et $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y)$ sont des ℓ'-éléments de $\mathrm{T}_{c,1}$. De plus $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x)$ et $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y)$ centralisent respectivement h^n et g^n.

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\mu)(hx\sigma, gy\sigma) = &\quad \mu_c\ (h^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x)), g^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y))) \\ &\quad +\rho_\mu\ (h^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}, g^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y))) \\ = &\quad 0 + \rho_\mu\ (h^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x), g^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y)).\end{aligned}$$

Or A', B, et C sont nuls sur $\mathrm{T}_{c,1}$ donc $R\ (h^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x), g^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y)) = 0$ et

$$\mathrm{E}(\mu)(hx\sigma, gy\sigma) = 0.$$

L'hypothèse G2

Soit (zh', zg') un élément de $\Delta(1)$ tel que z soit un élément de S et h', respectivement g', soit un ℓ'-élément de $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{H}}}(z)$, respectivement $\mathrm{C}_{\widetilde{\mathrm{G}}}(z)$.

Si $z = 1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $z \neq 1$.

• si h' appartient à H, alors g' appartient à G. Comme μ est le bi-caractère généralisé d'une isotypie il suit (remarques 1.25)

$$\mathrm{E}(\mu)(zh', zg') = \mu(zh', zg') = \mu_{<z>}(h', g') = E(\mu_{<z>})(h', g').$$

• Si h' appartient à $\widetilde{\mathrm{H}} \backslash \mathrm{H}$, alors $h' = x\sigma^d$ et $g' = y\sigma^d$, x dans H et y dans G. On se ramène comme précédemment au cas $d = 1$.

Lemme 6.9

Pour tout élément z de S_1, différent de 1, la descente de Shintani vérifie :

$$\mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mu_{\langle z\rangle}) = \mu_{c\langle z\rangle}.$$

La démonstration est identique à celle du lemme 5.5.

Par ailleurs z et z^n donnent la même isotypie car ℓ est premier à n. Il suit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mu)(zx\sigma, zy\sigma) &= \mu_c(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(zx\sigma', zy\sigma')) + \rho_\mu(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(zx\sigma', zy\sigma')) \\
&= \mu_c(z^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x), z^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y)) + \rho_\mu(z^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x), z^n\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y)) \\
&= \mu_{c_{<z^n>}}(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x), \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y)) + 0 \\
&= \mu_{c_{<z>}}(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x), \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(y)) \\
&= \mathrm{Sh}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(\mu_{\langle z\rangle})(\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}/\mathrm{F}_0}(x, y)) \\
&= \mathrm{E}(\mu_{\langle z\rangle})(x\sigma, y\sigma).
\end{aligned}$$

qui est l'égalité souhaitée.

6.2.1 La forte compatibilité

On a montré que Sm est une configuration compatible, on constate qu'elle est fortement compatible directement sur les tables de caractères et l'isotypie choisie.

Cela termine la deuxième partie du démonstration du théorème 3.9.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés aux extensions du groupe symplectique de dimension 4 défini sur un corps à q éléments, où q est une puissance d'un nombre premier impair, extensions données par un endomorphisme de Frobenius.

On a montré que la conjecture de Broué sur les ℓ-blocs principaux dans ces extensions est vérifiée.

Ce faisant, on a donnée, d'une part une version utilisable d'un théorème de relèvement, d'autre part résolu un problème de recollement d'extensions données par la théorie des descentes de Shintani à chaque tranche.

Ce travail ouvre différentes voies de recherche.

• Le recollement des caractères unipotents du groupe $\mathrm{Sp}(4, q)$ n'a été montré que pour les caractères de la série principale. Il reste donc à considérer le caractère unipotent cuspidal θ_{10}. La démarche suivie pour les autres caractères unipotents n'est pas directement applicable car θ_{10} apparaît dans des caractère $\mathrm{R}_\mathrm{T}^\mathrm{G}(\theta)$ où T n'est pas le tore d'un Borel rationnel.

• La méthode mise en place pour démontrer le recollement des extensions données par la descente de Shintani des caractères unipotents de la série principale est par contre tout à fait transposable à n'importe quel caractère unipotent de la série principale d'un groupe fini de type de Lie. Le travail effectué sur les caractères fantômes a été fait dans le carde général des groupes finis de type de Lie. On s'est restreint à $\mathrm{Sp}(4, q)$ au dernier moment, quand il a fallu considérer des combinaison linéaires des caractères fantômes. Or ceci peut être fait dans tout autre groupe de type de Lie, au moins à la main. La base de ce travail est la connaissance des caractères fantômes et celle-ci est donnée par ce qu'on appelle les matrice transformée de Fourier. Il faudrait donc étudier ces matrices et trouver de bonnes combinaisons linéaires.

• Enfin, il me paraît possible de démontrer la conjecture de Broué pour des extensions d'un groupe symplectique de dimension quelconque. En effet, le travail effectué pour $\mathrm{Sp}(4, q)$ a ouvert tous les problèmes (en particulier celui du recollement) et à montrer comment les résoudre. Je ne pense pas que de changer de dimension apportera d'autres difficulté que, premièrement celle de la rédaction (difficulté qui n'est pas mineure : il faudra trouver des indexations de caractères, de classes etc ... qui permettent d'écrire et de lire facilement les résultats), deuxièmement trouver de bonnes combinaisons pour écrire la descente de Shintani du côté du normalisateur du sous-groupe de Sylow.

Par ailleurs, dans l'annexe de ce travail, j'ai décrit les normalisateurs de certains tores qui permettent de décrire tous les normalisateurs de ℓ-sous groupes de Sylow abéliens dans tous les groupes symplectiques.

Annexe : Structure du normalisateur d'un tore dans un groupe symplectique

Le but de ce chapitre est de connaître la structure du normalisateur d'un tore maximal dans un groupe symplectique et dans une extension d'un groupe symplectique, extension obtenue à l'aide d'un endomorphisme de Frobenius.

Soit q_0 une puissance d'un nombre premier et q une puissance de q_0. On note $\mathbf{F}_q$ un corps à q éléments et $\overline{\mathbf{F}}_q$ une clotûre algébrique de $\mathbf{F}_q$.

Soient κ un générateur de $\mathbf{F}_{q^4}^*$ et $\zeta = \kappa^{q^2-1}$. Une description simple d'un tore maximal de Coxeter T de $\mathrm{Sp}(4,q)$ est donnée dans $\mathrm{Sp}(4,q^4)$: le tore T est conjugué dans $\mathrm{Sp}(4,q^4)$ à

$$\mathrm{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta^i & & & \\ & \zeta^{-i} & & \\ & & \zeta^{qi} & \\ & & & \zeta^{-qi} \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq q^2+1 \right\}.$$

L'élément conjuguant n'est pas simple à trouver et il n'est pas fixé par l'endomorphisme de Frobenius $\mathrm{F} : (a_{ij}) \to (a_{ij}^q)$, sinon D appartiendrait à $\mathrm{Sp}(4,q)$. Il suit que T n'est pas forcément F-stable. Nous ne pouvons donc pas raisonner avec cette matrice D et nous n'avons pas de représentation de T dans $\mathrm{Sp}(4,q)$.

Dans $\mathrm{Sp}(2m,q)$, considérons l'endomorphisme de Frobenius $\mathrm{F}_0 : (a_{ij}) \to (a_{ij}^{q_0})$. Soient T_1 un tore F_0-stable maximal et déployé de $\mathrm{Sp}(2m,\overline{\mathbf{F}}_q)$ et T_w un tore maximal F-stable de type w par rapport à T_1. Alors T_w n'est pas forcément F_0-stable. Le tore $\mathrm{F}_0(\mathrm{T}_w)$ est de type $\mathrm{F}_0(w)$. Comme $\mathrm{Sp}(2m,\overline{\mathbf{F}}_q)$ est déployé, F_0 agit trivialement sur son groupe de Weyl. Ainsi $\mathrm{F}_0(\mathrm{T}_w)$ et T_w sont de même type w. Il existe donc

([Ca] 3.3.3) $a \in \mathrm{Sp}(2m, q)$ tel que $\mathrm{F}_0(\mathrm{T}_w) =^{a^{-1}} \mathrm{T}_w$. On voit alors que $a\mathrm{F}_0$ stabilise T_w mais on ne connaît pas son action sur T_w.

La solution présentée consiste à passer par une autre structure, le groupe de collinéation. Ce groupe est isomorphe à une extension du groupe symplectique, extension obtenue à l'aide de l'endomorphisme de Frobenius F_0 et a un quotient isomorphe au groupe symplectique. Nous travaillerons dans cette structure abstraite puis transposerons les résultats dans le groupe symplectique. Nous trouverons ainsi la structure du normalisateur de certains tores dans un groupe symplectique. Pour chacun de ces tores, nous retrouverons l'existence d'un élément a tel que $a\mathrm{F}_0$ le stabilise. Nous ne donnons pas explicitement l'élément a mais nous pouvons décrire l'action de $a\mathrm{F}_0$ sur le tore considéré.

Nous obtiendrons ainsi le normalisateur d'un tore d'ordre $q^m - 1$ ou $q^m + 1$ dans $\mathrm{Sp}(2m, q)$. Le produit en couronne permet alors de donner la structure du normalisateur dans $\mathrm{Sp}(2m, q)$ d'un tore de la forme $\prod_i \mathrm{T}_i . \prod_j \mathrm{T}_j$ où T_i est d'ordre $q^{m_i} - 1$, T_j est d'ordre $q^{m_j} + 1$ et $\sum_i m_i + \sum_j m_j = m$.

Soient q_0 un entier impair, n, m et r des entiers non nuls. On pose $q = q_o^n$.

Pour tout entier s, on note $\mathbf{F}_s$ un corps à s éléments.

Si L est une extension de degré fini de K, $\mathrm{N}_{L/K}$, respectivement $\mathrm{Tr}_{L/K}$, désignera la norme, respectivement la trace, de cette extension. Enfin $Gal(L/K)$ désigne le groupe de Galois de L sur K.

1 Le groupe de collinéation

Soient F un corps, $\mathcal{K}$ un groupe d'automorphismes de F et V un F-espace vectoriel de dimension finie paire $2m$, munie d'une forme symplectique non dégénérée notée $\langle\ ,\ \rangle$. On note $\mathrm{Sp}(V,\ \langle\ ,\ \rangle)$ le groupe symplectique défini sur V à l'aide de $\langle\ ,\ \rangle$, de dimension $2m$.

Désignons par $\mathcal{A}(V, +)$ le groupe des automorphismes de V en tant que groupe additif. Soit

$$\mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle) = \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, k), \quad \varphi \in \mathcal{A}(V, +),\ k \in \mathcal{K} \text{ tels que} \\ \qquad\qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall a \in F,\ v \in V\ \varphi(av) = k(a)\varphi(v), \\ \forall v, w \in V\ \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = k(\langle v, w \rangle). \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

Remarquons que : $\forall a, b \in F,\ \forall v, w \in V$,

$$\begin{aligned}\langle \varphi(av), \varphi(aw) \rangle &= \langle k(a)\varphi(v), k(b)\varphi(w) \rangle \\ &= k(a)k(b)\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle \\ &= k(ab\langle v, w \rangle) \\ &= k(\langle av, bw \rangle).\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle)$ est muni d'une structure de groupe ainsi :

$$\forall (\varphi_1, k_1), (\varphi_2, k_2) \in \mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle),\ (\varphi_1, k_1)(\varphi_2, k_2) = (\varphi_1\varphi_2, k_1k_2).$$

En effet, $\forall a \in F,\ \forall v \in V$,

$$\varphi_1(\varphi_2(av)) = \varphi_1(k_2(a)\varphi_2(v)) = (k_1k_2)(a)(\varphi_1\varphi_2)(v).$$

Suivant la définition de Dieudonné, ce groupe est appelé groupe de collinéation [Die].

Lemme 1
L'application de projection

$$\begin{aligned}\pi :\ \ \mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle) &\to \mathcal{K} \\ (\varphi, k) &\mapsto k\end{aligned}$$

est surjective. Son noyau est le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(V,\ \langle\ ,\ \rangle)$.

Démonstration : Soit $\{(v_i, v_i'),\ 1 \leq i, i' \leq m\}$ une base de V qui vérifie $\langle v_i, v_j' \rangle = \delta_{ij}$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ et $\langle v_i', v_j' \rangle = 0$, pour $1 \leq i, j \leq m$. Pour k donné, nous définissons φ_k de la manière suivante : pour tous éléments a_i, b_i de F,

$$\varphi_k(\sum_{i=1}^{m} a_iv_i + b_iv_i') = \sum_{i=1}^{m}(k(a_i)v_i + k(b_i)v_i').$$

Cela donne bien $(\varphi_k, k) \in \mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle)$ et la surjectivité de π. $\dashv$

Proposition 1
La suite

$$1 \to \mathrm{Sp}(V,\ \langle\ ,\ \rangle) \to \mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle) \xrightarrow{\pi} \mathcal{K} \to 1,$$

est exacte et induit un isomorphisme de groupes

$$\mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle) \simeq \mathrm{Sp}(V,\ \langle\ ,\ \rangle) \rtimes \mathcal{K}.$$

Démonstration : L'application $\mathcal{K} \to \mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle)$, qui à k associe (φ_k, k) est bien définie d'après ce qui précède et de plus c'est un morphisme. La suite exacte donnée admet donc une section. ⊣

Remarquons que cet isomorphisme dépend de la base symplectique choisie.

On pose

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(V,\ \mathcal{K},\ \langle\ ,\ \rangle) \text{ et } \mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}(V,\ \langle\ ,\ \rangle).$$

2 Cas d'un tore de Coxeter

Un tore de Coxeter dans $\mathrm{Sp}(2m, \mathbf{F}_q)$ est cyclique d'ordre $q^m + 1$.

Soit σ l'automorphisme de $\mathbf{F}_{q^{2m}} : x \to x^{q_0}$. On note Res σ sa restriction à $\mathbf{F}_q$.
Choisissons : $F = \mathbf{F}_q$, $\mathcal{K} = Gal(\mathbf{F}_q/\mathbf{F}_{q_0}) = \langle \text{Res } \sigma \rangle$ et $V = \mathbf{F}_{q^{2m}}$, qui est bien un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension $2m$.
Soit T le sous-groupe d'ordre $q^m + 1$ du groupe multiplicatif cyclique $\mathbf{F}^*_{q^{2m}}$. On le munit de l'action sur V suivante : pour tout élément t de T et x de V,

$$t.x = tx.$$

Proposition 2
Il existe une forme symplectique non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$ *sur* $\mathbf{F}_{q^{2m}}$*, qui est préservée par* T *et par aucun autre sous-groupe non inclus dans* T *de* $\mathbf{F}_{q^{2m}}$*.*

Démonstration : Considérons $\mathbf{F}_{q^{2m}}$ comme une extension quadratique de $\mathbf{F}_{q^m}$. A un scalaire multiplicatif près, il existe une unique forme symplectique non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle_0$ sur le $\mathbf{F}_{q^m}$-espace vectoriel $\mathbf{F}_{q^{2m}}$. Regardons maintenant $\mathbf{F}_{q^{2m}}$ comme un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel avec la forme symplectique suivante : pour deux éléments x et y de $\mathbf{F}_{q^{2m}}$.

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q}(\langle x, y \rangle_0).$$

Comme $\mathbf{F}_q$ est un corps parfait l'extension $\mathbf{F}_{q^m}$ de $\mathbf{F}_q$ est séparable. De plus elle est finie. Ainsi la forme $\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q}$ est non dégénérée ([Bou1] chapitre 5 paragraphes 7.3 et 10.6).

Nous allons préciser une de ces formes $\langle\ ,\ \rangle$ en choisissant explicitement la forme $\langle\ ,\ \rangle_0$.

• L'application $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_{q^{2m}}/\mathrm{F}_{q_0}}$ est un morphisme surjectif de $\mathbf{F}^*_{q^{2m}}$ dans $\mathbf{F}^*_{q_0}$. Comme q_0 est impair,$(-1)^{q_0 - 1} = 1$ et donc -1 appartient à $\mathbf{F}^*_{q_0}$. Il existe donc un élément ξ

de $\mathbf{F}^*_{q^{2m}}$ tel que $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_{q^{2m}}/\mathrm{F}_{q_0}}(\xi) = -1$ *i.e.*

$$\xi^{\frac{q^{2m}-1}{q_0-1}} = -1.$$

• Posons $\zeta = \xi^{q^m+1}$. Il appartient à $\mathbf{F}_{q^m}$ car $\zeta^{q^m-1} = \xi^{q^{2m}-1} = 1$. Nous avons $\zeta^{\frac{q^{2m}-1}{q_0-1}} = (\zeta^{\frac{q^m-1}{q_0-1}})^{q^m+1} = (-1)^{q^m+1} = 1$ car q_0 est impair. L'ordre de ζ divise donc $\frac{q^{2m}-1}{q_0-1}$.

• L'élévation à la puissance $q_0 - 1$ dans le groupe $\mathbf{F}^*_{q^{2m}}$ a pour image l'ensemble des éléments d'ordre divisant $\frac{q^{2m}-1}{q_0-1}$. Par conséquent il existe ω dans $\mathbf{F}^*_{q^{2m}}$ tel que

$$\omega^{q_0-1} = \zeta = \xi^{q^m+1}.$$

En posant, pour tous éléments x et y de $\mathbf{F}_{q^{2m}}$,

$$\langle x, y\rangle_0 = \omega(x^{q^m} y - xy^{q^m}),$$

nous obtenons une forme symplectique sur le $\mathbf{F}_{q^m}$-espace vectoriel $\mathbf{F}_{q^{2m}}$. Elle est non dégénérée car $\langle 1, \omega\rangle_0 = 2\omega^2 \neq 0$.

Soient $x,\ y$ et t des éléments de $\mathbf{F}_{q^{2m}}$. Nous avons

$$\langle tx, ty\rangle_0 = \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_{q^{2m}}/\mathrm{F}_{q^m}}(t)\langle x, y\rangle_0.$$

Or le morphisme $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_{q^{2m}}/\mathrm{F}_{q^m}}$ est surjectif de $\mathbf{F}^*_{q^{2m}}$ sur $\mathbf{F}^*_{q^m}$, son noyau est donc un sous-groupe de $\mathbf{F}^*_{q^{2m}}$ de cardinal $q^m + 1$. Le noyau de $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_{q^{2m}}/\mathrm{F}_{q^m}}$ est donc le groupe T. Ainsi $\langle tx, ty\rangle_0 = \langle x, y\rangle_0$ pour tout x et y si et seulement si t appartient à T.

Considérons pour finir la forme symplectique $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit t un élément de $\mathbf{F}_{q^{2m}}$. Supposons que quels que soient x, y dans $\mathbf{F}_{q^{2m}}$, $\langle tx, ty\rangle = \langle x, y\rangle$; montrons que t appartient à T. Soit $\alpha = \mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_{q^{2m}}/\mathrm{F}_{q^m}}(t) - 1$. Supposons $\alpha \neq 0$. Il existe β dans $\mathbf{F}_{q^m}$ tel que $\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q}(\beta) \neq 0$ (si la caractéristique de $\mathbf{F}_q$ ne divise pas m on peut choisir β égal à 1). Comme $\langle\ ,\ \rangle_0$ est surjective, il existe v et w tels que $\langle v, w\rangle_0 = \alpha^{-1}\beta$. Ainsi $\langle v, w\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q}(\alpha\langle v, w\rangle_0) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q}(\alpha\alpha^{-1}\beta) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q}(\beta) \neq 0$. Donc $\langle tx, ty\rangle - \langle x, y\rangle = (\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_{q^{2m}}/\mathrm{F}_{q^m}}(t) - 1)\langle x, y\rangle = 0$ pour tout x, y dans $\mathbf{F}_{q^{2m}}$ implique $\mathrm{Nr}_{\mathrm{F}_{q^{2m}}/\mathrm{F}_{q^m}}(t) = 1$ et finalement t appartient à T. $\dashv$

Posons $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{F}_{q^{2m}},\ \langle \mathrm{Res}\ \sigma\rangle,\ \langle\ ,\ \rangle)$ et $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}(\mathbf{F}_{q^{2m}},\ \langle\ ,\ \rangle)$. On a

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Sp} \rtimes \langle \mathrm{Res}\ \sigma\rangle.$$

Proposition 3
Soit

$$\begin{aligned} \mu_\xi\sigma\ : \quad & \mathbf{F}_{q^{2m}} \to \mathbf{F}_{q^{2m}} \\ & x \mapsto \xi\sigma(x) = \xi x^{q_0}. \end{aligned}$$

Cet application est un élément de $\mathcal{A}(\mathbf{F}_{q^{2m}}, +)$ et $(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)$ appartient au normalisateur $\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T})$ de T dans $\mathcal{C}$. Enfin $(\mu_\xi\sigma)^{2mn} = -\mathrm{id}$.

Démonstration : Montrons que $(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)$ est bien dans $\mathcal{C}$:
Pour a dans $\mathbf{F}_q$ et x dans $\mathbf{F}_{q^{2m}}$ on a $\mu_\xi\sigma(ax) = \xi\sigma(a)\sigma(x) = \sigma(a)\mu_\xi\sigma(x)$.
Pour tout x et y dans $\mathbf{F}_{q^{2m}}$

$$\langle \mu_\xi\sigma(x), \mu_\xi\sigma(y)\rangle_0 = \xi^{q^m+1}\omega\sigma(x^{q^m}y - xy^{q^m}) = \frac{\xi^{q^m+1}}{\omega^{q_0-1}}\sigma(\langle x, y\rangle_0) = \sigma(\langle x, y\rangle_0)$$

et donc

$$\langle \mu_\xi\sigma(x), \mu_\xi\sigma(y)\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q}(\sigma(\langle x, y\rangle_0)) = \sigma(\mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q}(\langle x, y\rangle_0)) = \sigma(\langle x, y\rangle).$$

D'autre part, pour tout entier k,

$$(\mu_\xi\sigma)^k = \mu_\xi \circ \sigma \circ \mu_\xi \circ \sigma \ldots = \mu_\xi\mu_{\sigma(\xi)} \ldots \mu_{\sigma^{k-1}(\xi)}\sigma^k = \mu_{\xi^{1+q_0+q_0^2+\ldots+q_0^{k-1}}}\sigma^k,$$

et donc

$$(\mu_\xi\sigma)^k = \mu_{\xi^{\frac{q_0^k-1}{q_0-1}}}\sigma^k.$$

Comme $\xi^{\frac{q_0^{2mn}-1}{q_0-1}} = -1$, ceci prouve que $(\mu_\xi\sigma)^{2mn} = -\mathrm{id}$.

L'élément $(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)$ est dans le normalisateur de T dans $\mathcal{C}$. En effet, pour t dans T on a

$$(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)(t, 1) = (\sigma(t), 1)(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma).$$

⊣

Théorème 1
En gardant les notations précédentes, nous avons les deux égalités suivantes :

$$\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}\langle(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)\rangle$$

et

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{T}) \simeq \mathrm{T}\langle(\mu_{\xi^{\frac{q-1}{q_0-1}}}\sigma^n, \mathrm{id}\rangle.$$

DÉMONSTRATION : Soit un groupe cyclique d'ordre $4mn$ et notons σ' un élément générateur de ce groupe. Il existe un morphisme $\langle\sigma'\rangle \to \mathcal{A}(\mathrm{T})$ qui permet de définir un produit semi-direct $\mathrm{T} \rtimes \langle\sigma'\rangle : \sigma'.t = \sigma(t)$. Montrons que l'application

$$\begin{array}{ll} \mathrm{T} \rtimes \langle\sigma'\rangle & \to \mathcal{C} \\ (t, \sigma'^i) & \mapsto (t(\mu_\xi\sigma)^i, \mathrm{Res}\ \sigma^i), \end{array}$$

définit un morphisme surjectif

$$\mathrm{T} \rtimes \langle\sigma'\rangle \to \mathrm{N}_{\mathcal{C}(V,\mathcal{K},\langle\ ,\ \rangle)}(\mathrm{T})$$

dont le noyau est le sous-groupe d'ordre 2 de $\mathrm{T} \rtimes \langle\sigma'\rangle$ engendré par $(-1, \sigma'^{2mn})$.

Pour cela, il suffit de montrer que $\mathrm{T}\langle(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)\rangle$ contient $\mathrm{N_{Sp}}(\mathrm{T})$. En effet, nous avons alors la suite exacte scindée

$$1 \to \mathrm{N_{Sp}}(\mathrm{T}) \to \mathrm{T}\langle(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma) \to \langle(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma) \to 1.$$

Par ailleurs la proposition précédente donne une autre suite exacte scindée

$$1 \to \mathrm{N_{Sp}}(\mathrm{T}) \to \mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T}) \to \langle(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma) \to 1.$$

Ainsi

$$\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T}) \simeq \mathrm{N_{Sp}}(\mathrm{T})(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma) \simeq \mathrm{T}\langle(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma).$$

Montrons donc que $\mathrm{N_{Sp}}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{T}\langle(\mu_\xi\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)$. L'élément $(\mu_\xi\sigma)^n$ appartient à $\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T})$. Il vérifie

$$\langle(\mu_\xi\sigma)^n(x), (\mu_\xi\sigma)^n(y)\rangle = \sigma^n(\langle x, y\rangle) = \langle x, y\rangle,$$

car $\langle x, y\rangle$ appartient à $\mathbf{F}_q$. Donc $(\mu_\xi\sigma)^n$ appartient à $\mathrm{N_{Sp}}(\mathrm{T})$. Ainsi

$$\mathrm{T}\langle((\mu_\xi\sigma)^n, \mathrm{Res}\ \sigma^n))\rangle \subset \mathrm{N_{Sp}}(\mathrm{T}).$$

Nous savons que $(\mu_\xi\sigma)^{2mn} = -\mathrm{id} \in \mathrm{T}$.

Montrons que $(\mu_\xi\sigma)^k$ ne définit pas une action venant d'un élément de T pour $k < 2mn$. Supposons qu'il existe un élément t de T tel que $(\mu_\xi\sigma)^k = \mu_t$. Alors pour tout $x \in V$ on a $\xi^{\frac{q_0^k-1}{q_0-1}} x^{q_0^k} = tx$. En prenant $x = 1$ il vient $\xi^{\frac{q_0^k-1}{q_0-1}} = t$. Or $\xi^{\frac{q_0^k-1}{q_0-1}}$ appartient à T si et seulement si son ordre divise $q_0^{mn}+1$. L'ordre de ξ est $2\frac{q_0^{2mn}-1}{q_0-1}$. Nous voulons donc que $2\frac{q_0^{2mn}-1}{q_0^k-1}$ divise $q_0^{mn}+1$. Le premier terme est $2\prod_{d|2mn, d\nmid mn} \Phi_d(q)$, le second est $\prod_{d|2mn, d\nmid k} \Phi_d(q)$, où Φ_d est le $d^{\text{ème}}$ polynôme cyclotomique. Ainsi k doit être un multiple de mn. Si $k = mn$ on obtient que $2(q^m + 1)$ doit diviser $q^m + 1$ ce qui est absurde. Donc k doit au moins être égal à $2mn$.

Ainsi $\mathrm{T}\langle(\mu_\xi\sigma)^n\rangle$ est d'ordre $(q^m + 1)2m$.

L'ordre de $\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{T})$ est majoré par $|\mathrm{T}||\mathrm{W}_G(\mathrm{T})| = (q^m + 1)2m$, où $\mathrm{W}_G(\mathrm{T})$ est le centralisateur dans W de l'élément de Coxeter, qui est d'ordre $2m$. L'inclusion précédente est donc une égalité et l'inclusion voulue est démontrée. $\dashv$

3 Cas d'un tore de la forme T^r, où T est cyclique d'ordre $q^m + 1$

On garde les notations antérieures, en particulier l'élément σ'. L'action de σ'^n sur T est celle induite par σ', on a

$$\sigma'^n.t = t^q.$$

Posons

$$Y = \mathrm{T}\langle\sigma'^n\rangle.$$

Soit $\Omega = \{1, \ldots, r\}$. On note $S(\Omega)$ l'ensemble des permutations de Ω. Soit $\mathcal{F}(\Omega, Y)$ le groupe des fonctions de Ω dans Y, il peut être vu comme le groupe de r-uplets de Y (la multiplication est faite composante par composante). Le produit en couronne $Y \wr S(\Omega)$ est l'ensemble $\mathcal{F}(\Omega, Y) \rtimes S(\Omega)$ muni de la multiplication suivante : pour toutes fonctions $f,\ g$ de $\mathcal{F}(\Omega, Y)$ et pour toutes permutations $\gamma,\ \eta$ de $S(\Omega)$,

$$(f, \gamma)(g, \eta) = (f(g \circ \gamma^{-1}), \gamma\eta).$$

Nous avons les actions suivantes de σ' :
- sur Y : $\forall (t, h) \in Y$, $\sigma'.(t, h) = (\sigma'.t, h)$,
- sur $\mathcal{F}(\Omega, Y)$: composante par composante,
- sur $Y \wr S(\Omega)$: $\forall f \in \mathcal{F}(\Omega, Y)$ et $\forall \gamma \in S(\Omega)$, $\sigma'.(f, \gamma) = (\sigma'.f, \gamma)$.

Nous pouvons alors former le produit semi-direct $Y \wr S(\Omega) \rtimes \langle\sigma'\rangle$.

Soit $V = \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{F}_{q^{2m}})$ l'ensemble des r-uplets de $\mathbf{F}_{q^{2m}}$. C'est un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension $2mr$. L'action de $\mathcal{K}$ se fait composante par composante. La forme symplectique précédemment définie sur $\mathbf{F}_{q^{2m}}$ vu comme $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel, permet de définir une forme symplectique sur V ainsi : pour tous éléments ϕ et ψ de V

$$\langle\langle \phi, \psi \rangle\rangle = \sum_{w \in \Omega} \langle \phi(w), \psi(w) \rangle.$$

Cette forme est non dégénérée. En effet, si $\langle\langle \phi,\psi\rangle\rangle = 0$ pour tout ψ, en choisissant ψ nulle sauf sur un $w_0 \in \Omega$ il vient $\langle \phi(w_0), \psi(w_0)\rangle = 0$ pour toute valeur de $\psi(w_0)$. Or $\psi(w_0)$ décrit $\mathbf{F}_{q^{2m}}$ et donc $\phi(w_0) = 0$. Ceci quelque soit w_0, donc ϕ doit être nulle.

Posons $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{F}^r_{q^{2m}},\ \langle \mathrm{Res}\ \sigma\rangle,\ \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle)$ et $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}(\mathbf{F}^r_{q^{2m}},\ \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle)$, on a

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Sp} \rtimes \langle \mathrm{Res}\ \sigma\rangle.$$

Proposition 4

L'application suivante, notée ν est un morphisme de noyau d'ordre $2^r \times 4m$

$$\begin{array}{lcl} Y \wr S(\Omega) \rtimes \langle\sigma'\rangle & \to & \mathcal{C} \\ (f,\ \gamma,\ \sigma'^k) & \mapsto & (\nu(f,\ \gamma,\ \sigma'^k), \mathrm{Res}\ \sigma^k), \end{array}$$

où, pour ϕ dans V et w dans Ω,

$$\nu(f,\ \gamma,\ \sigma'^k)(\phi)(w) = f(w)(\mu_\xi\sigma)^k\phi(\gamma^{-1}(w)).$$

Son image est isomorphe au normalisateur du tore T^r *dans* Sp.

Démonstration : Remarquons que si $f(w) = (t_w, \sigma'^{nh_w})$ la définition de ν dit que

$$\nu(f,\gamma,\sigma'^k)(\phi)(w) = t_w(\mu_\xi\sigma)^{nh_w+k}\phi(\gamma^{-1}(w)).$$

Montrons que cette application est bien définie. Soient ϕ et ψ dans V et a dans $\mathbf{F}_q$, nous avons

$$\begin{aligned} \nu(f,\gamma,\sigma'^k)(a\phi)(w) &= t_w(\mu_\xi\sigma)^{nh_w+k}a\phi(\gamma^{-1}(w)) \\ &= \sigma^{nh_w+k}(a)t_w(\mu_\xi\sigma)^{nh_w+k}\phi(\gamma^{-1}(w) \\ &= \sigma^k(a)\nu(f,\gamma,\sigma'^k)(\phi)(w). \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} &\langle\langle \nu(f,\gamma,\sigma'^k)(\phi), \nu(f,\gamma,\sigma'^k)(\psi)\rangle\rangle \\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega} \nu(f,\gamma,\sigma'^k)(a\phi)(w)\langle(\xi\sigma)^{nh_w+k}(\phi(\gamma^{-1}(w))), (\xi\sigma)^{nh_w+k}(\psi(\gamma^{-1}(w)))\rangle \\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}\langle t_w(\xi\sigma)^{nh_w+k}(\phi(\gamma^{-1}(w))), t_w(\xi\sigma)^{nh_w+k}(\psi(\gamma^{-1}(w)))\rangle \\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}\sigma^{nh_w+k}\langle\phi(\gamma^{-1}(w)), \psi(\gamma^{-1}(w))\rangle \\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}\sigma^{nh_w+k}\langle\phi(w), \psi(w)\rangle \\ &= \sigma^k(\langle\langle\phi,\psi\rangle\rangle) \end{aligned}$$

Montrons que ν est un morphisme. Soient (f_1,γ_1,τ_1) et (f_2,γ_2,τ_2) deux éléments dans $Y \wr S(\Omega) \rtimes \langle\sigma'\rangle$.

$$\begin{aligned} \nu(f_1,\gamma_1,\tau_1)\nu(f_2,\gamma_2,\tau_2)(\phi)(w) &= \nu(f_1,\gamma_1,\tau_1)(f_2(w)\tau_2.\phi(\gamma_2^{-1}(w))) \\ &= f_1(w)\tau_1.f_2(\gamma_1^{-1}(w)\tau_1\tau_2.\phi(\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}(w)) \\ &= f_1(w)\tau_1.(f_2\gamma_1^{-1})(w)\tau_1\tau_2.\phi((\gamma_1\gamma_2)^{-1}(w)) \\ &= \nu(f_1(\tau_1.f_2\gamma_1^{-1}), \gamma_1\gamma_2, \tau_1\tau_2) \\ &= \nu((f_1,\gamma_1,\tau_1)(f_2,\gamma_2,\tau_2))(\phi)(w). \end{aligned}$$

Calculons le noyau de ce morphisme. Supposons que,,pour tout ϕ dans V et tout w dans Ω, on ait

$$t_w(\xi\sigma)^{nh_w+k}(\phi(\gamma^{-1}(w))) = \phi(w).$$

En prenant ϕ identiquement égal à 1 sur Ω, nous voyons que

$$t_w\xi\sigma(\xi)\sigma^2(\xi)\ldots\sigma^{nh_w+k-1}(\xi) = 1$$

pour tout w, et donc que

$$\sigma^{nh_w+k}(\phi(\gamma^{-1}(w)) = \phi(w)$$

pour tout ϕ et tout w. En prenant ϕ à valeurs dans $\mathbf{F}_{q_0}$, il vient

$$\gamma = \mathrm{id}_{S(\Omega)}$$

et

$$\sigma^{nh_w+k}(\phi(w)) = \phi(w)$$

pour tout ϕ et tout w. Nous avons donc

$$t_w(\mu_\xi\sigma)^{nh_w+k} = \mathrm{id}.$$

Ceci implique

- soit $nh_w + k = 2mn$ et $t_w = -1$,
- soit $nh_w + k = 0$ et $t_w = 1$.

Ainsi le noyau est engendré par les éléments $(t_w, \sigma'^{nh_w}, 1, \sigma'^k)$, où k est un multiple de n modulo $4m$, et pour $k = \lambda n$ alors $(t_w, h_w) \in \{(1, -\lambda), (-1, 2m-\lambda)\}$ pour tout $w \in \Omega$. Son cardinal est donc $2^r \times 4m$.

Notons $f_{\sigma'^n}$ la fonction de $\mathcal{F}(\Omega, V)$ constante à la valeur σ'^n sur Ω. Pour $\gamma \in S(\Omega)$, nous avons

$$\nu(f_{\sigma'^n}, \gamma, \mathrm{id})(\phi)(w) = (\mu_\xi\sigma)^n\phi(\gamma(w)) = -\phi(\gamma)(w)),$$

L'élément $(f_{\sigma'^n}, \gamma, \mathrm{id})$ appartient donc à $\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T})$ et à Sp. Ainsi

$$\mathrm{T}\langle(\mu_\xi\sigma)^n\rangle \wr S(\Omega) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{T}).$$

De plus ces deux groupes sont d'ordre $(q^m+1)^r 2mr!$. Nous pouvons conclure comme dans le cas précédent. $\dashv$

4 Cas d'un tore d'ordre $q^m - 1$

Soient σ l'automorphisme de $\mathbf{F}_{q^m} : x \to x^{q_0}$. On note Res σ sa restriction à $\mathbf{F}_q$.

Choisissons : $F = \mathbf{F}_q$, $\mathcal{K} = Gal(\mathbf{F}_q/\mathbf{F}_{q_0}) = \langle \text{Res } \sigma \rangle$ et $V = \mathbf{F}_{q^m} \times \mathbf{F}_{q^m}$, qui est bien un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension $2m$. L'automorphisme σ agit sur V composante par composante.

Soit $\mathrm{T} = \mathbf{F}^*_{q^m}$, muni de l'action sur V suivante : pour tout élément t de T et pour tout couple (x_1, x_2) de V,

$$t.(x_1, x_2) = (tx_1, t^{-1}x_2).$$

Une forme symplectique non dégénérée de V sur $\mathbf{F}_{q^m}$ est :

$$\langle x, y \rangle_0 = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Pour montrer qu'elle est non dégénérée il suffit de choisir $x = (y_2, y_1)$ et $x' = (y_2, -y_1)$. Nous trouvons $\langle x, y \rangle_0 = y_2^2 - y_1^2$ et $\langle x', y \rangle_0 = y_2^2 + y_1^2$. Si les deux sont nuls alors il vient $y_2 = 0$ puis $y_1 = 0$, *i.e.* $y = 0$.

Enfin une forme symplectique non dégénérée de V sur $\mathbf{F}_q$ est

$$\langle\ ,\ \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{F}_{q^m}/\mathrm{F}_q} \langle\ ,\ \rangle_0.$$

Posons $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{F}_{q^m} \times \mathbf{F}_{q^m},\ \langle \text{Res } \sigma \rangle,\ \langle\ ,\ \rangle)$ et $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}(\mathbf{F}_{q^m} \times \mathbf{F}_{q^m},\ \langle\ ,\ \rangle)$, on a

$$\mathcal{C} \simeq \rtimes \langle \text{Res } \sigma \rangle.$$

Lemme 2

La forme symplectique précédemment définie est préservée par T.

Démonstration : En effet soit $t \in \mathrm{T}$ et $x, y \in V$ alors

$$\langle tx, ty \rangle_0 = ((tx_1)(t^{-1}y_2), (ty_1)(t^{-1}x_2)) = \langle x, y \rangle_0.$$

$\dashv$

Proposition 5

Nous pouvons définir deux éléments de $\mathcal{A}(V, +)$ ainsi :

$$\sigma : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^{q_0}, x_2^{q_0})$$

$$\psi : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1).$$

Alors les éléments $(\sigma, \text{Res } \sigma)$ et $(\psi, 1)$ appartiennent à $\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T})$; le premier est d'ordre mn, le second est d'ordre 4 et a une action sur T d'ordre 2.

De plus nous avons $\sigma \circ \psi = \psi \circ \sigma$.

Démonstration : Montrons que $(\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)$ et (σ^n, id) appartiennent bien à $\mathcal{C}$. Soient a un élément de $\mathbf{F}_q$ et x et y de V.

Pour le premier élément on a :

$$\begin{aligned}\sigma(ax) &= \sigma(ax_1, ax_2)\\ &= ((ax_1)^{q_0}, (ax_2)^{q_0})\\ &= a^{q_0}(x_1^{q_0}, x_2^{q_0})\\ &= \sigma(a)\sigma(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\sigma(x), \sigma(y)\rangle_0 &= x_1^{q_0}y_2^{q_0} - y_1^{q_0}x_2^{q_0}\\ &= (x_1y_2 - y_1x_2)^{q_0} = \sigma(\langle x, y\rangle_0).\end{aligned}$$

Pour le second élément on a :

$$\begin{aligned}\psi(ax) &= \psi(ax_1, ax_2)\\ &= (ax_2, (-ax_1)\\ &= a(x_2, -x_1)\\ &= a\psi(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\psi(x), \psi(y)\rangle_0 &= \langle(x_2, -x_1), (y_2, -y_1)\rangle\\ &= -x_2y_1 + y_2x_1\\ &= \langle x, y\rangle_0.\end{aligned}$$

Soit $t \in \mathrm{T}$. D'une part nous avons :

$$(\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)(t, 1) = (\sigma(t)\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma) = (\sigma(t), 1)(\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma).$$

D'autre part calculons $\psi.t$ sur un élément x :

$$\begin{aligned}\psi.t(x_1, x_2) &= \psi(tx_1, t^{-1}x_2)\\ &= (t^{-1}x_2, -tx_1)\\ &= (t^{-1}x_2, t(-x_1))\\ &= t^{-1}.(x_2, -x_1)\\ &= t^{-1}\psi(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Donc $\psi.t = t^{-1}\psi$. Ainsi ces deux éléments appartiennent au normalisateur de T.

Pour connaître l'ordre de $(\psi, 1)$ il suffit de regarder son action sur x.

La relation de commutativité vient du fait que q_0 est impair. ⊣

Théorème 2

Nous avons

$$\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}\langle\psi\rangle\langle(\sigma, \mathrm{Res}\ \sigma)\rangle$$

et

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{T}) \simeq \mathrm{T}\langle\psi\rangle\langle\sigma^n\rangle.$$

Démonstration : Comme précédemment, il suffit de montrer le deuxième isomorphisme. Nous avons une inclusion évidente à l'aide de la proposition précédente. Pour montrer l'égalité, il suffit de regarder les cardinaux. D'une part, $|\mathrm{T}.\langle\psi\rangle.\langle\sigma^n\rangle| \leq (q^m - 1)2m$ car $\psi^2 = -1$ appartient à T. D'autre part, le tore de $\mathrm{Sp}(2m, \mathbf{F}_q)$ vient de l'injection hyperbolique de $\mathrm{GL}(m, \mathbf{F}_q)$ dans $\mathrm{Sp}(2m, \mathbf{F}_q)$, qui à g associe $\begin{pmatrix} g & \\ & g^{-\tau} \end{pmatrix}$. Dans $\mathrm{Gl}(m, \mathbf{F}_q)$ nous avons $|\mathrm{N}_{\mathrm{GL}(m,\mathbf{F}_q)}(\mathrm{T})| = (q^m - 1)m$. Ainsi $|\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{T})| \geq (q^m - 1)2m$. Le facteur 2 vient de la permutation de g et $g^{-\tau}$ dans l'injection hyperbolique. Nous avons donc l'égalité des cardinaux. $\dashv$

5 Cas d'un tore de la forme T^r, où T est cyclique d'ordre $q^m - 1$

Comme pour le cas du tore de Coxeter, nous formons $Y \wr S(\Omega) \rtimes \langle\sigma\rangle$ mais ici

$$Y = \mathrm{T}.\langle\psi\rangle.\langle\sigma^n\rangle.$$

Soit $V = \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{F}_{q^m} \times \mathbf{F}_{q^m})$, l'ensemble des r-uplets de $\mathbf{F}_{q^m} \times \mathbf{F}_{q^m}$. C'est un $\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de dimension $2mr$. L'action de $\mathcal{K}$ se fait composante par composante.

La forme symplectique sur $\mathbf{F}_{q^m} \times \mathbf{F}_{q^m}$, $\langle\ ,\ \rangle$, permet de définir une forme symplectique non dégénérée sur V

$$\langle\langle \phi, \psi \rangle\rangle = \sum_{w \in \Omega} \langle \phi(w), \psi(w) \rangle$$

et de poser $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbf{F}^r_{q^{2m}},\ \langle \mathrm{Res}\ \sigma\rangle,\ \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle)$ et $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}(\mathbf{F}^r_{q^{2m}}, \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle)$. On a

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Sp} \rtimes \langle \mathrm{Res}\ \sigma \rangle.$$

Proposition 6

L'application suivante, désignée par ν est un morphisme de noyau d'ordre m

$$\begin{array}{lcl} Y \wr S(\Omega) \rtimes \langle\sigma\rangle & \to & \mathcal{C} \\ (f,\ \gamma,\ \sigma^k) & \mapsto & (\nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k), \mathrm{Res}\ \sigma^k) \end{array}$$

où, pour ϕ dans V et w dans Ω,

$$\nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k)(\phi)(w) = f(w)\sigma^k\phi(\gamma^{-1}(w)).$$

Si $f(w) = (t_w, \psi_w, \sigma^{nh_w})$ cela donne

$$\nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k)(\phi)(w) = t_w(\psi_w\sigma^{k+nh_w})\phi(\gamma^{-1}(w)).$$

Son image est isomorphe au normalisateur du tore T^r dans Sp.

Démonstration : Montrons que $\nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k)$ appartient bien à $\mathcal{C}$. Soient ϕ, λ deux éléments de V, a de $\mathbf{F}_q$ et w de Ω

$$\begin{aligned}\nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k)(a\phi)(w) &= t_w(\psi_w\sigma^{k+nh_w})(a\phi)(\gamma^{-1}(w))\\ &= \sigma^{k+nh_w}(a)t_w(\psi_w\sigma^{k+nh_w})(\phi)(\gamma^{-1}(w))\\ &= \sigma^{k+nh_w}(a)\nu(f,\gamma,\sigma^k)(\phi)(w)\\ &= \sigma^k(a)\nu(f,\gamma,\sigma^k)(\phi)(w)\end{aligned}$$

car a appartient à $\mathbf{F}_q$ et $\sigma^n(a) = a^q = a$.

$$\begin{aligned}&\langle\langle\nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k)(\phi), \nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k)(\lambda)\rangle\rangle\\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}\langle\nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k)(\phi)(w)\nu(f,\ \gamma,\ \sigma^k)(\lambda)(w)\rangle\\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}\langle t_w(\psi_w\sigma^{k+nh_w})(\phi)(\gamma^{-1}(w)), t_w(\psi_w\sigma^{k+nh_w})(\lambda)(\gamma^{-1}(w))\rangle\\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}\langle(\psi_w\sigma^{k+nh_w})(\phi)(\gamma^{-1}(w)), (\psi_w\sigma^{k+nh_w})(\lambda)(\gamma^{-1}(w))\rangle \quad \text{car} \quad t_w \in \mathrm{T}\\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}(\psi_w\sigma^{k+nh_w}).\langle\phi(\gamma^{-1}(w)), \lambda(\gamma^{-1}(w))\rangle\\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}\sigma^{k+nh_w}.\langle\phi(\gamma^{-1}(w)), \lambda(\gamma^{-1}(w))\rangle\\ &= \sigma^{k+nh_w}.\textstyle\sum_{w\in\Omega}\langle\phi(\gamma^{-1}(w)), \lambda(\gamma^{-1}(w))\rangle\\ &= \textstyle\sum_{w\in\Omega}(\langle\phi(\gamma^{-1}(w)), \lambda(\gamma^{-1}(w)) rangle)\end{aligned}$$

Nous montrons que ν est un morphisme comme dans le cas précédent.

Enfin calculons le noyau de ν. Cherchons les (f, γ, σ^k) tels que pour tout ϕ dans V : $\nu(f, \gamma, \sigma^k)(\phi) = \phi$ et Res $\sigma^k = \mathrm{id}$. Il faut avoir $k = n$. Puis, pour tout $w \in \Omega$ il faut

$$t_w(\psi_w\sigma^{n+nh_w})\phi(\gamma^{-1}(w)) = \phi(w).$$

En choisissant $\phi = \mathrm{id}$ nous obtenons

$$t_w = 1$$

pour tout $w \in \Omega$. Puis en prenant ϕ constante sur Ω et à valeur dans $\mathbf{F}_q^*$, nous obtenons alors

$$\psi_w = \mathrm{id}$$

pour tout $w \in \Omega$. Enfin pour ϕ constante sur Ω et à valeur dans $\mathbf{F}_{q^m}^* - \mathbf{F}_q^*$, nous voyons que

$$h_w = -1.$$

Et enfin

$$\gamma = \mathrm{id}_{S(\Omega)}.$$

D'où $\ker\nu = \langle((1, \sigma^{-n}, \mathrm{id}), id, \sigma^n)\rangle$. Il est d'ordre m.

Considérons l'élément $((t_w, \psi_w, \sigma^n), \gamma, \mathrm{id})$. Il appartient à $\mathrm{N}_{\mathcal{C}}(\mathrm{T})$ et à Sp. Ainsi $\mathrm{T}\langle\psi\rangle\langle\sigma^n\rangle \wr S(\Omega) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{Sp}}(\mathrm{T})$. Nous concluons comme dans le cas précédent. $\dashv$

6 Application à $\mathrm{Sp}(2m, \mathbf{F}_q) \rtimes \langle\sigma\rangle$

Si $\mathcal{B}$ est une F-base de V et ϕ un application linéaire de V on notera $mat_{\mathcal{B}}\phi$ la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$.

Reprenons les même notations que pour les cas d'un tore de Coxeter ou d'un tore d'ordre $q^m - 1$.

Proposition 7
Soit $\mathcal{B} = \{v_i, v_i'\}_{i \leq i \leq m}$ une $\mathbf{F}_q$-base symplectique de V pour la forme symplectique $\langle\ ,\ \rangle$. L'isomorphisme $I_{\mathcal{B}}$ entre $\mathcal{C}$ et $\mathrm{Sp}(2m, \mathbf{F}_q) \rtimes \langle\sigma\rangle$ est donné par

$$(\varphi,\ \sigma^k) \mapsto (mat_{\mathcal{B}}(\varphi\varphi_\sigma^{-k}),\ \sigma^k).$$

Une base étant fixée, rappelons que nous définissons φ_σ ainsi : $\forall\ a_i,\ b_i \in \mathbf{F}_q$

$$\varphi_\sigma(\sum_{i=1}^m a_i v_i + b_i v_i') = \sum_{i=1}^m \sigma(a_i)v_i + \sigma(b_i)v_i' = \sum_{i=1}^m a_i^{q_0} v_i + b_i^{q_0} v_i'.$$

Démonstration : La base $\mathcal{B}$ permet de définir les deux isomorphismes suivant :

$$\begin{array}{cccc} I_{\mathcal{B}}' : & \mathrm{Sp} \rtimes \langle\sigma\rangle & \to & \mathrm{Sp}(2m, \mathbf{F}_q) \rtimes \langle\sigma\rangle \\ & (\varphi, \mathrm{Res}\ \sigma^k) & \mapsto & (mat_{\mathcal{B}}\varphi, \mathrm{Res}\ \sigma^k) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} I_{\mathcal{B}}'' : & \mathcal{C} & \to & \mathrm{Sp} \rtimes \langle\sigma\rangle \\ & (\varphi, \mathrm{Res}\ \sigma^k) & \mapsto & (\varphi\varphi_\sigma^{-k}, \mathrm{Res}\ \sigma^k). \end{array}$$

La composée $I_{\mathcal{B}}'' \circ I_{\mathcal{B}}'$ donne $I_{\mathcal{B}}$. $\dashv$

Pour le tore de Coxeter

Désignons par T_b l'image de T par l' isomorphisme $I_{\mathcal{B}}$ et par a la matrice de $\mu_\xi\sigma\varphi_\sigma^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$. Nous savons alors que $a\sigma$ normalise T_b.

Nous avons

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)\rtimes\langle\sigma\rangle}(\mathrm{T}_b) \simeq \mathrm{T}_b\langle a\sigma\rangle$$

et

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)}(\mathrm{T}_b) \simeq \mathrm{T}_b.\langle c\rangle,$$

où $c = (a\sigma)^n$ est d'ordre $4m$, et a une action sur T_b : $c.t = t^q$, d'ordre $2m$.

Pour le tore d'ordre $q^m - 1$

Nous reprenons la notation T_b. Désignons par η et ϵ les images de σ^n et ψ par l'isomorphisme$I_{\mathcal{B}}$.

Nous avons

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)\rtimes\langle\sigma\rangle}(\mathrm{T}_b) \simeq \mathrm{T}_b\langle\eta\rangle\langle\epsilon\rangle \rtimes \langle\sigma\rangle$$

et

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)}(\mathrm{T}_b) \simeq \mathrm{T}_b\langle\eta\rangle\langle\epsilon\rangle,$$

où η est d'ordre m avec une action sur T : $\eta.t = t^q$, d'ordre m et où ϵ est d'ordre 4 avec une action sur T : $\epsilon.t = t^{-1}$, d'ordre 2.

Enfin regardons les produits de tels tores. Nous reprenons les notations utilisées pour ces produits.

Proposition 8

La base $\mathcal{B}^r$ est une $\mathbf{F}_q$-base symplectique de V pour la forme symplectique $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$. Nous définissons φ_σ dans la base $\mathcal{B}^r$ par l'élévation à la puissance q_0 des coefficients. L'isomorphisme $I_{\mathcal{B}}$ entre $\mathcal{C}(\mathbf{F}_q^r),\ \langle\sigma\rangle,\ \langle\langle\ ,\ \rangle\rangle)$ et $\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)\rtimes\langle\sigma\rangle$ est donné par

$$((\varphi,\ \sigma^k) \mapsto (mat_{\mathcal{B}^r}\varphi\varphi_\sigma^{-k},\ \sigma^k).$$

Pour un produit de tores d'ordre q^m+1

Désignons par T_{bi} l'image de $(1,1,\ldots\mathrm{T},1,\ldots1)$, où T est à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée par l'isomorphisme $I_{\mathcal{B}}$, par T_b^r le produit $\prod_{i=1}^r \mathrm{T}_{bi}$, par T_b une copie de T_{bi} et enfin par a la matrice de $\xi\sigma\varphi_\sigma^{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit

$$b_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & a & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

où a est à la $i^{\text{ème}}$ place. Posons $c_i = (b_i\sigma)^n$.

Un élément s de $S(\Omega)$ agit dans $\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)$ par permutation. Nous savons alors que les $b_i\sigma$ normalisent T_{bi} pour tout i et que

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)\rtimes\langle\sigma\rangle}(\mathrm{T}_b^r) \simeq \prod_i(\mathrm{T}_{bi}\langle c_i\rangle)S(\Omega)\langle\prod_i b_i\sigma\rangle.$$

En posant $a = \prod_i b_i$, nous avons

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)\rtimes\langle\sigma\rangle}(\mathrm{T}_b^r) \simeq (\mathrm{T}_b\langle c\rangle) \wr S(\Omega)\langle a\sigma\rangle,$$

où $a\sigma$ est d'ordre $4mn$, et a une action : $a.t = t^{q_0}$, d'ordre $2mn$.

Et enfin
$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)} \simeq (\mathrm{T}_b\langle c\rangle) \wr S(\Omega).$$

Pour un produit de tores d'ordre $q^m - 1$

Reprenons la notation T_{bi}. Soient

$$\eta_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \eta & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \epsilon_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \epsilon & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

où η et ϵ sont à la $i^{\text{ième}}$ place.

Un élément s de $S(\Omega)$ agit toujours par permutation. Nous savons alors que

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)\rtimes\langle\sigma\rangle}(\mathrm{T}_b^r) \simeq \prod_i (\mathrm{T}_{bi}.\langle\eta_i\rangle.\langle\epsilon_i\rangle).S(\Omega).\langle\sigma\rangle.$$

Plus simplement

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)\rtimes\langle\sigma\rangle}(\mathrm{T}_b^r) \simeq (\mathrm{T}_b.\langle\eta\rangle.\langle\epsilon\rangle) \wr S(\Omega).\langle\sigma\rangle$$

et

$$\mathrm{N}_{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{F}_q)}(\mathrm{T}_b^r) \simeq (\mathrm{T}_b.\langle\eta\rangle.\langle\epsilon\rangle) \wr S(\Omega).$$

Bibliographie

[Al] J.L. **Alperin**, *Isomorphic Blocks*, J. of Algebra 43 (1976), 694–698.

[AlBr] J.L. **Alperin** et M. **Broué**, *Local methods in block theory*, Ann. of Math. 110 (1979), 143–157.

[Bon] C. **Bonnafé**, *Produit en couronne de groupes linéaires*, J. Algebra 211 (1999), 57–98.

[Bou1] N. **Bourbaki**, *Algèbre, Eléments de Mathématiques*, Hermann.

[Bou2] N. **Bourbaki**, *Groupes et Algèbres de Lie, Eléments de Mathématiques*, Hermann.

[Bra] **Brauer**, *Blocks of characters II*, J. of Algebra 1 (1964).

[Br1] M. **Broué**, *Radical, hauteur, p-sections et blocs*, Annals of Math 107 (1978), 89–107.

[Br2] M. **Broué**, *Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées*, Astérisque 181-182 (1990), 61–92.

[Br3] M. **Broué**, *Rickard equivalences and block theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser (1995), 58–79.

[BrMaMi] M. **Broué**, G. **Malle** et J. **Michel**, *Generic blocks of finite reductive groups*, Astérisque 212 (1993), 7–92.

[BrMi] M. **Broué** et J. **Michel**, *Blocs à groupes de défaut abéliens des groupes réductifs finis*, Astérisque 212 (1993), 93–117.

[Ca] R. **Carter**, *Finite groups of Lie type*, Wiley-Interscience Publication.

[Cl] A.H. **Clifford**, *Representations induced in a invariant subgroup*, Annals of Math 38 (1937).

[Da1] E.C. **Dade**, *Remarks on Isomorphic Blocks*, Journal of Algebra 45 (1977), 254–258.

[Da2] E.C. **Dade**, *A correspondence of characters*, In The Santa Cruz Conference on Finite Groups (1979), Amer. Math. Soc. (1980), 401–403.

[DeLu] P. **Deligne** et G. **Lusztig**, *Representations of reductive groups over finite fields* Annals of Math. 103 (1976), 103–161.

[Die] J.A. **Dieudonné**, *Géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag (1971).

[Di1] F. **Digne**, *Shintani Descent and $\mathcal{L}$ functions on Deligne-Lusztig varieties*, Proc. Sympos. Pure Math. 47 (1987), 61–68.

[Di2] F. **Digne**, *Descente de Shintani et restriction des scalaires*, J. London Math. Soc 59 (1999), 867–880.

[DiMi1] F. **Digne** et J. **Michel**, *Fonctions $\mathcal{L}$ des variétés de Deligne-Lusztig et Descente de Shintani*, Bulletin SMF mémoire 20 (1985).

[DiMi2] F. **Digne** et J. **Michel**, *Representations of finite groups of Lie type*, London Math. Soc. Student Texts 21, Cambridge University press (1991).

[DiMi3] F. **Digne** et J. **Michel**, *Groupes réductifs non connexes*, Ann. scient. ENS 27 (1994), 345–406.

[Dip1] R. **Dipper**, *On the decomposition numbers of the finite general linear group I*, Trans Am. Soc 290 (1985), 315–344.

[Dip2] R. **Dipper**, *On the decomposition numbers of the finite general linear group II*, Trans Am. Soc 292 (1985), 123–133.

[En] V. **Ennola**, *On the characters of the finite unitar groups*, Ann. acad. Sc. Fennicae 323 (1963).

[Fo] P. **Fong**, *Isotypies and Shintani theory in* $\mathrm{SL}(2,q)$, à paraître.

[FoHa1] P. **Fong** et M. **Harris**, *On Perfect Isometries and Isotypies in Alternating Groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 3469–3516.

[FoHa2] P. **Fong** et M. **Harris**, *On Perfect Isometries and Isotypies in Finite Groups*, Invent. Math. 114 (1993), 139–191.

[Ge] M. **Geck**, *On the decomposition numbers of the unitary groups in non-defining characteristic*, Math Z. 207 (1991), 83–89.

[Gy] A. **Gyoja**, *Liftings of irreducible characters of finite reductive groups*, Osaka J. Math 16 (1979), 1–30.

[HaLi] M. **Harris** et M. **Linckelmann**, *Splendid derived equivalences for blocks of finite p-solvable groups*, J. London Math. Soc. 62 (2000), 85–96.

[Is] I.M. **Isaacs**, *Character theory of finite groups*, Academic Press (1976).

[Ka] N. **Kawanaka**, *Liftings of irreducible characters of finite classical groups I*, J. Fac. Sc. Tokyo Sect IA Math. 28 (1981), 851–861.

[Li] M. **Linckelmann**, *Derived equivalence for cyclic blocks over a P-adic ring*, Math. Z. 207(2), (1991), 293–304.

[Lu] G. **Lusztig**, *Coxeter Orbits and Eigenspaces of Frobenius*, Inventiones math. 38 (1976), 101–159.

[Ma] A. **Marcus**, *On equivalences between blocks of group algebras : reduction tu the simple components* J. of Algebra 184 (1996), 372–396.

[NaTs] H. **Nagao** et Y. **Tsushima**, *Representations of finite groups*, Academic Press, INC. (1987).

[Pu] L. **Puig**, *Algbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley*, Astrisque, (181-182) :9 (1990), 221–236.

[Ri1] J. **Rickard**, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra 61 (1989), 303–317.

[Ri2] J. **Rickard**, *Spendid equivalences : derived categories and permutation modules*, Proc. London Math. Soc 72 (1996), 331–358.

[Ro1] R. **Rouquier**, *Isomtries parfaites dans les blocs à dfaut ablien des groupes symtriques et sporadiques*, J. Algebra 168 (1194), 648–694.

[Ro2] R. **Rouquier**, *The derived category of blocks with cyclic defect groups*, LNM 1685, chapitre 10, Springer (1998).

[Ro3] R. **Rouquier**, *From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect*, Groups 93 Galway/St. Andrews, Vol. 2 Cambridge Univ. Press (1995), 512–523.

[Se] J.P. **Serre**, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann

[Sr1] B. **Srinivasan**, *The characters of the finite symplectic group Sp(4,q)*, Trans. Amer. Math. Soc. 131 (1968), 488–525.

[Sr2] B. **Srinivasan**, *Characters sheaves : Applications to finite groups*, Poc. Symp. Pure Math. 56 (1994), 183–194.

[St] R. **Steinberg**, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of AMS 80 (1968).

[Th] J. **Thévenaz**, *G-Algebras and Modular Representation Theory*, Oxford science publications.

[Wh] D.L. **White**, *Decomposition Numbers of* $\mathrm{Sp}(4,q)$ *for prime dividing* $q \pm 1$, J. of Algebra 132 (1990), 488–500.