Université Pierre et Marie Curie - Paris VI

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité

MATHÉMATIQUES

présentée par

Mr SEIFOUDINI MOHAMED M'ZÉ

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse :

PROBLÈME DE GOURSAT POUR DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AVEC CONDITIONS DE LEVI

Soutenue le 7 décembre 2005

devant le jury composée de :

Mr GAVEAU B.	**Professeur**	:	Président du jury
Mr GOURDIN D.	**Professeur**	:	Directeur de thèse
Mr GRAMCHEV T.	**Professeur**	:	Rapporteur
Mr MECHAB M.	**Professeur**	:	Examinateur
Mr REISSIG M.	**Professeur**	:	Rapporteur
Mr VAILLANT J.	**Professeur Emerite**	:	Examinateur

DEDICACES

Maman, je te dédie ce Doctorat pour tout le mal que tu t'es donnée pour moi.

A mon père, je partage cette thèse avec toi.

Je la dédie également :

A mes frères, soeurs et toute ma famille, je vous dis merci.

A ma tante Madame Monjoin Toioussi d'avoir cru en moi, en me

donnant la chance de venir en France, pour poursuivre des études supérieures.

A mon grand frère Docteur Monjoin Mohamed, dont j'ai essayé de suivre les pas et à sa femme Wardat.

A ma grande soeur Monjoin Nadia, je suis très reconnaissant et un grand merci pour tout.

A tous mes cousins et cousines .

A mes neveux et nièces, je leur dis merci.

A mes beaux frères et belles soeurs.
A tous mes camarades et amis .
Enfin à Akouti Bacar Kassim (Nadya) à qui , je lui dois beaucoup.Tu supportes mes humeurs et toute ma nervosité de tous les jours. Je ne te remercierai jamais assez : MERCI.

Aux autres : un grand Merci ...

Une pensée profonde

A tous ceux qui ne sont plus avec nous.

A Tonton ABDOU SALAM, que son âme repose en paix

A Assad'llah Mohamed M'zé ; petit frère, tu es parti très jeune mais, nous ne t'oublierons jamais.

Remerciements

Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Daniel GOURDIN pour l'attention toute particulière qu'il a bien voulu porter à mon travail et les encouragements qu'il m'a constamment apportés.

Je remercie Monsieur le Professeur Bernard GAVEAU de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse .

Mes remerciements vont également à Messieurs les Professeurs Todor GRAMCHEV et Michaël REISSIG qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Je remercie également le Professeur Monsieur Mustapha MECHAB d'avoir assisté à la soutenance de cette thèse.

Un remerciement particuliers va au Professeur Émerite Monsieur Jean VAILLANT d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie également le Professeur TAKOHAMA, de sa présence à la soutenance .

Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

1 Introduction et Enoncés des Résultats

1.1 Introduction

Dès que l'on se place dans les espaces de Sobolev ou dans les espaces C^∞, il est bien connu que les problèmes de Cauchy et de Goursat non caractéristiques même locaux pour les équations et systèmes linéaires hyperboliques non stricts ne sont pas bien posés sans d'autres hypothèses supplémentaires appelées usuellement Conditions de Levi.
L'objet de cette thèse est de comparer simultanément et de façon semi historique deux résultats.
Un ancien résultat datant de 1974 sur le problème de Cauchy linéaire et un nouveau résultat de 2005 sur le problème de Goursat linéaire tous deux dans les espaces de Sobolev avec des systèmes d'équations aux dérivées partielles et des conditions de Levi.
Le problème de Cauchy linéaire dans les espaces de Sobolev et dans C^∞ sur $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$ a été étudié en 1972-1974 pour les opérateurs matriciels faiblement hyperboliques à caractéristiques doubles par D.Gourdin qui a généralisé un résultat de Mizohata-Ohya pour une équation publiée en 1967 et qui a montré qu'une seule condition scalaire de Levi suffit pour résoudre ce problème.

Il a utilisé les opérateurs de Calderon-Zygmund tels qu'ils étaient présentés à cette époque notamment dans les conférences de S.Mizohata au Tata Institute de Bombay publié en 1969 et dans le livre de S.Mizohata publié en 1973 au Cambridge University Press ainsi que les classifications des systèmes d'équations aux dérivées partielles de J.Vaillant (1965) .
D.Gourdin n'avait pas étudié à cette époque (1972-1974) le domaine de dépendance .
Nous améliorons le résultat précédent en calculant le domaine de dépendance dans la première partie de cette thèse tout en rappelant le détail des démonstrations utilisées .

Dans la seconde partie de cette thèse, nous étudions le problème de Goursat dans les espaces de Sobolev pour un système de N équations à N fonctions inconnues des variables $(t, x, y) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^n_y$.
Ce système peut être décrit comme une composition de deux opérateurs aux dérivées partielles à coefficients matriciels hyperboliques respectivement dans la direction de t pour le premier et dans la direction de x pour le second avec des caractéristiques doubles et des conditions de Levi scalaires comme en 1972-1974 et avec un opérateur matriciel aux dérivées partielles additif rési-

duel spécifique.
Les données du problème de Goursat sont sur $t = 0$ et $x = 0$. Cela est suffisant pour résoudre le problème posé, qui généralise ainsi un résultat de Mme Y. Hasegawa obtenu pour une seule équation.
On utilise dans cette seconde partie les opérateurs pseudo-différentiels classiques de Hörmander et la classification de J.Vaillant .
Nous calculons aussi le domaine de dépendance du problème de Goursat.

Summary

In the framework of Sobolev or C^∞ spaces, it is well-known that the Cauchy and Goursat problems even for local non characteristic linear non strict hyperbolic equations and systems are not well posed without other additional assumptions usually called Levi conditions.

The aim of this thesis is to compare simultaneously and semi-historical two results for systems :
an old result of Pr. D. Gourdin (1974) about linear Cauchy Problem and a new result (2005) about linear Goursat Problem in the framework of Sobolev spaces and under suitable Levi type conditions.

The linear Cauchy problem in Sobolev and C^∞ spaces on $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ was studied for the matrix operators nor strictly hyperbolic with double characteristics by Pr. D.Gourdin in 1972-1974 who generalized a result of Mizohata-Ohya for one scalar equation published in 1967 and who showed that a unique scalar Levi condition was enough to solve this problem.
He used the Calderon-Zygmund operators as exhibited in lectures of S.Mizohata in Tata Institute of Bombay, published in 1969, the book of S.Mizohata published in 1973 in Cambridge University Press, and the Classification of the Systems of Partial differential equations of J.Vaillant (1965).
Pr. D.Gourdin had not studied in the obventionned works in 1972-1974 the domain of dependence.

We improve the former result by calculating the domain of dependence in the first part of this thesis while pointing out the detail of the demonstrations used.

In the second part of this thesis, we study the Goursat problem in Sobolev spaces for a system of N equations to N unknown functions of the variables $(t, x, y) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^n$.

This system can be described as a composition of two linear partial differential with matrix coefficients hyperbolic, respectively in the direction of t for the first and in the direction of x for the second with double characteristics and scalar conditions of Levi as in 1972-1974 and with one matrix operator with on additive residual specific matricial partial differential operators.

The data of the Goursat problem are on $t = 0$ and $x = 0$. That is sufficient to solve the problem arising, which thus generalizes a result of Mrs. Y. Hasegawa obtained for only one equation.
One uses in this second part the traditional pseudo-differentials operators of Hörmander and the classification of J.Vaillant.
Then, we calculate the domain of dependence of Goursat problem .

1.2 Notations et Définitions

Soient $N, m \in \mathbb{N}$, le point générique de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, sera noté (t,x,y). On utlisera les notations habituelles de dérivations, à savoir :

$D_t = -i\dfrac{\partial}{\partial_t},\ D_x = -i\dfrac{\partial}{\partial_x}$ et $D_y = \Big(-i\dfrac{\partial}{\partial_{y_1}},\dots,-i\dfrac{\partial}{\partial_{y_n}}\Big)$ et les variables duales de t, x et y sont notées τ, ξ et η.
$S^m_{1,0} = S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m défini dans [14] et $BS^m_{1,0}$ cet même espace borné.

On notera $D^\alpha_y = (\frac{1}{i})^{|\alpha|}(\frac{\partial}{\partial y})^\alpha = (\frac{1}{i})^{|\alpha|}(\frac{\partial}{\partial y_1})^{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial y_2})^{\alpha_2}\dots(\frac{\partial}{\partial y_n})^{\alpha_n}$,

$\forall\ \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ avec $\mid\alpha\mid = \displaystyle\sum_{j=1}^n \alpha_j$

On notera également $\mathcal{E}_t$ l'espace des fonctions C^∞ en t,

$$\tilde{H}^\infty_{x,y} = \Big\{f\ \in\ C^\infty_{x,y};\ \int_{|x|<X}\int_{\mathbb{R}^n} \mid D^\alpha_x D^\beta_y f(x,y)\mid^2 dxdy < \infty,\ \ \forall\ \alpha,\beta,X>0\Big\}.$$

l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ dont toutes les dérivées sont bornées sur $B(0,X)\times\mathbb{R}^n$, pour tout $X>0$, où $B(0,X) = \{x\in\mathbb{R}, \mid x\mid < X\}$ et

$$H^\infty_{x,y} = \Big\{f\ \in\ C^\infty_{x,y};\ \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} \mid D^\alpha_x D^\beta_y f(x,y)\mid^2 dxdy < \infty,\ \ \forall\ \alpha,\beta>0\Big\}.$$

$\forall\ \bar{k}$, on notera également les normes suvantes :

$$\begin{aligned}
\parallel f\parallel^2{}_{\bar{k},\Omega(t)} &= \sum_{j+|\alpha|\le\bar{k}}\int_{\Omega(t)} \mid D^j_x D^\alpha_y f\mid^2 dxdy\\
\parallel u\parallel_{\bar{k}} &= \parallel u\parallel_{H^{\bar{k}}(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}^n_y)}\\
\parallel \psi\parallel^2{}_{y,\bar{k}} &= \sum_{|\alpha|\le\bar{k}}\int \mid D^\alpha_y\psi\mid^2 dy
\end{aligned}$$

Rappelons l'expression du polynôme sous-caractéristique d'un opérateur h faiblement hyperbolique à caractéristique à multiplicité constante au plus deux (J. Vaillant [22] page 15), en utilisant les notations de sommation d'Einstein

$$\mathcal{K}_h \equiv [H^{\star A}_B - \frac{1}{2}\partial^\lambda_\lambda(H^A_B)]\gamma_A\delta^B + \frac{1}{2}H^A_B(\partial^\lambda\delta^B\partial_\lambda\gamma_A - \partial^\lambda\gamma_A\partial_\lambda\delta^B)$$

avec γ et δ vecteurs propres respectivement à gauche et à droite de la matrice caractéristique H^A_B et $H^{\star A}_B$ la matrice sous principale calculée sur les racines caractéristiques de multiplicité 2 (cf $ 2.1) Rappelons quelques définitions suivantes :

1. **Intégrale Oscillante**[21]

   Soient $\theta \in \mathbb{R}^n$, $x \in X$ avec X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et il existe un compact $K \subset X$ tel que $u_{|_{X\setminus K}} = 0$.

   On considère l'intégrale oscillante suivante :

   $$I(a,\phi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\phi(x,\theta)} a(x,\theta) d\theta$$

   et on considère :

   $$(\star) \quad < I(a,\phi), u >= \int\int e^{i\phi(x,\theta)} a(x,\theta) u(x) dx d\theta$$

   Pour décrire $a(x,\theta)$ et $\phi(x,\theta)$, nous introduisons les définitions suivantes :

   Définition 1.1 *[21]*
   Soient m,ρ et δ des nombres réels ; $0 \leq \delta \leq 1$, $0 \leq \rho \leq 1$ avec $0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$. La classe $S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)$ est la classe des fonctions $a(x,\theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$ telle que pour tout multi-indices α, β et pour tout compact $K \subset X$, pour tout $x \in K$ et $\theta \in \mathbb{R}^n$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta,K}$ tel que :

   $$| \partial_\theta^\alpha \partial_x^\beta a(x,\theta) | \leq C_{\alpha,\beta,K} < \theta >^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

   On notera $S^m(X \times \mathbb{R}^n)$ au lieu de $S^m_{1,0}(X \times \mathbb{R}^n)$ et $S^{-\infty} = \bigcap_m S^m$

   Définition 1.2 .
   On dit que $\phi(x,\theta)$ est une fonction phase, si $\phi(x,\theta) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$,$\phi(x,\theta)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ et est positivement homogène de degré 1 en θ.
   Ce qui équivaut à pour tout $t > 0$, $x \in X$ et $\theta \in \mathbb{R}^n$,$\phi(x,t\theta) = t\phi(x,\theta)$ et $\phi(x,\theta)$ n'a pas de points critiques pour tout $\theta \neq 0$. C'est-à-dire pour tout $x \in X$, $\theta \in (\mathbb{R}^n \setminus 0)$,$\phi'_{x,\theta}(x,\theta) \neq 0$ (avec $\phi'_{x,\theta}(x,\theta)$ définit le gradient de $\phi(x,\theta)$) respectivement en x et θ).

   Définition 1.3 .
   Pour tout $a(x,\theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^n)$ et $\phi(x,\theta)$ étant une fonction phase, alors $(\star)$ est appelée une intégrale oscillante.

2. **Opérateurs intégraux de Fourier**[21]

   Soient X, Y deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $u(y) \in C_0^\infty(Y)$, $x \in X$, $a(x,y,\theta) \in S^m(X \times Y \times \mathbb{R}^n)$ et $\phi(x,y,\theta)$ est une fonction phase dans $X \times Y \times \mathbb{R}^n$. On considère l'expression suivante :

$$(\star\star) \quad Au(x) = \int\int e^{i\phi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta)u(y)dyd\theta$$

   Définition 1.4 .
   Un opérateur A de la forme $(\star\star)$ est appelé opérateur d'intégrale de Fourrier avec la fonction phase $\phi(x,y,\theta)$

   Définition 1.5 .
   Soit $w \in C_0^\infty(X \times Y)$.La distribution $K_A \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ définie par l'intégrale oscillante

$$< K_A, w > = \int\int\int e^{i\phi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta)w(x,y)dxdyd\theta$$

   est appelé le noyau de A.

   Définition 1.6 *Fonction Phase*
   Une fonction $\phi(x,y,\theta)$ est une fonction phase, si les deux conditions suivantes sont remplies :

$$\begin{cases} \phi'_{y,\theta}(x,y,\theta) \neq 0 \ \forall \ \theta \neq 0, \ x \in X, \ y \in Y \\ \phi'_{x,\theta}(x,y,\theta) \neq 0 \ \forall \ \theta \neq 0, \ x \in X, \ y \in Y \end{cases}$$

3. **Opérateurs pseudo-différentiels**[21]

   Définition 1.7 .
   Soient $X = Y$, $a(x,y,\theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ et $\phi(x,y,\theta) = (x-y).\theta$, alors

$$(\star\star)' \quad Au(x) = \int\int e^{i(x-y).\theta} a(x,y,\theta)u(y)dyd\theta$$

   est appelé Opérateur pseudo-différentiel d'ordre m.

   Propriétés [21]

   Soient A un opérateur pseudo-différentiel définit par la formule $(\star\star)'$ et K_A le noyau de A et Δ le diagonal dans $X \times X$, alors

(a) $K_A \in C^\infty((X \times X) \setminus \Delta)$;

(b) A définit une application linéaire continue $\begin{cases} A : C_0^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X) \\ A : \mathcal{E}'(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X) \end{cases}$ pour $u \in \mathcal{E}'$

(c) Si la fonction $a(x, y, \theta) \in S^m_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ qui s'annule pour $x = y$ et $\delta < \rho$, alors on peut écrire A sous la forme de $(\star\star)'$ avec $b(x, y, \theta) \in S^{m-(\rho-\delta)}_{\rho,\delta}(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ à la place de $a(x, y, \theta)$

(d) Si $a(x, y, \theta)$ a un zéro d'ordre infini quand $x = y$, alors $K_A \in C^\infty(X \times X \times \mathbb{R}^n)$ et l'opérateur A transforme $\mathcal{E}'(X)$ en $C^\infty(X)$

Proposition [21]

Soit A un opérateur pseudo-différentiel et on suppose que A est une application continue de C_0^∞ dans lui même,alors A définit une application : $A : C_0^\infty(X) \longrightarrow C_0^\infty(X)$ qui peut s'étendre à des applications continues suivantes :

$$\begin{cases} A : \mathcal{E}'(X) \longrightarrow \mathcal{E}'(X) \\ A : C^\infty(X) \longrightarrow C^\infty(X) \\ A : \mathcal{D}'(X) \longrightarrow \mathcal{D}'(X) \end{cases}$$

4. **L'algèbre $\mathfrak{a}$ des opérateurs de Calderón Zygmund** [10]

Pour rappeler le théorème relatif au problème de Cauchy hyperbolique C^∞ à caractéristiques de multiplicité constante au plus deux et sa démonstration suivant [10][9],on va utiliser aussi une algèbre de composition $\mathfrak{a}$ proposée par S.Mizohata [18] engendrée par les opérateurs de la forme $\displaystyle\sum_{|(\alpha_0,\alpha)|\leq r} H_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; D_x) D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha}$ et leurs adjoints, où $H_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; D_x)$ est un opérateur intégral singulier de Calderón-Zygmund de classe $C^\infty_\infty = \displaystyle\bigcap_{r\in\mathbb{N}} C_r^\infty$ dépendant uniformément du paramètre $t \in [0, T]$:

$$H_{(\alpha_0,\alpha)}\phi = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; \xi)\hat{\phi}(t, \xi) e^{i<x,\xi>} d\xi \ \ avec\, \phi \in \mathcal{E}_t(\mathcal{D}_x(\mathbb{R}^n))$$

où $\hat{\phi}$ est l'image de Fourier de ϕ pour la dualité $< x, \xi > \cdot \hat{h}_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; \xi)$ est indéfiniment dérivable par rapport à t et pour tout $\nu_0 \geq 0$, $(\frac{\partial}{\partial t})^{\nu_0} \hat{h}_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; \xi)$ est homogène de dégré 0 en ξ et de classe

$C^{\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n; \complement_{\xi} 0)$ ($\complement_{\xi} 0$: lire complémentaire de 0 par rapport à y dans $\mathbb{R}^n$) uniformément par rapport à $t \in [0, T]$:

$$Sup_{(t,x)\in\Omega} Sup_{|\xi|\geq 1} \mid (\frac{\partial}{\partial t})^{\nu_0} (\frac{\partial}{\partial x})^{\nu} (\frac{\partial}{\partial \xi})^{\mu} \hat{h}_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; \xi) \mid < \infty \ \forall \ \nu_0, \nu, \mu$$

$$\sum_{|(\alpha_0,\alpha)|\leq r} H_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; D_x) D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha}$$

est d'ordre r, admet un symbole

$$\sigma = \sum_{|(\alpha_0,\alpha)|\leq r} \hat{h}_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; \xi) \tau^{\alpha_0} \xi^{\alpha}$$

et un symbole principal

$$\sigma_r = \sum_{|(\alpha_0,\alpha)|=r} \hat{h}_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; \xi) \tau^{\alpha_0} \xi^{\alpha}.$$

En particuliers,on désigne par Λ l'opérateur d'ordre 1 et de symbole $\mid \xi \mid$:

$$\Lambda \phi = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int e^{i<x,\xi>\hat{\phi}(t,\xi)} \mid \xi \mid d\xi \quad avec \ \hat{\phi}(t, \xi) \in \mathcal{E}_t(\mathcal{D}_x(\mathbb{R}^n))$$

voir [18] .
Les opérateurs $H(t, x; D_x)$ ont les propriétés suivantes [18] : H se prolonge en un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}_t(L^p(\mathbb{R}^n))$; $(0 \leq t \leq T; 1 < p < \infty)$ dans lui-même et on a :

$$\| H\phi \|_p (t) \leq C(n, p) \sum_{\nu \leq 2n} Sup_{(t,x)\in\Omega} \mid (\frac{\partial}{\partial \xi})^{\nu} \hat{h}_{(\alpha_0,\alpha)}(t, x; \xi) \mid . \| \phi \|_p (t)$$

où $C(n, p)$ est une constante ne dépendant que de n et p .
Le noyau $h(t, x; y)$ de H est de la forme :

$$h(t, x; y) = a(t, x)\delta_y + (v.p)_y f(t, x; y)$$

où a est indéfiniment dérivable, à dérivées bornées ; $f(t, x; y)$ est indéfiniment dérivable par rapport à t et $\forall \ \nu_0 \geq 0$, $(\frac{\partial}{\partial t})^{\nu_0} f(t, x; y)$ est positivement homogène de degré $-n$ par rapport à y et de classe $C^{\infty}_{\infty}(\mathbb{R}^n; C_y 0)$ uniformément par rapport à t .

$\int_{S^{n-1}} f(t,x;y)d\sigma_y = 0$ pour tout $(t,x) \in \Omega$; $d\sigma_y$ est la mesure superficielle de Lebesgue sur la sphère unité S_y^{n-1} de $\mathbb{R}_y^n$.
On a :

$$H\phi(t,x) = a(t,x)\phi(t,x) + v.p.f \star \phi$$

pour toute $\phi \in \mathcal{E}_t(\mathcal{D}(\mathbb{R}_x^n))$.
On désigne par $H^{\text{и}}$ l'opérateur intégral singulier de CZ de symbole $\overline{\sigma(H)(t,x;\xi)}$, $\hat{H}$ l'opérateur adjoint de H :

$$\hat{H}\phi(t,x) = \overline{a(t,x)}\phi(t,x) + v.p.\bar{f} \star \phi$$

pour $\phi \in \mathcal{E}_t(\mathcal{D}(\mathbb{R}_x^n))$.

Soient H et K deux opérateurs intégraux singuliers de Calderón Zygmund d'ordre 0, alors

$$\begin{cases} \Lambda(H\circ K - HK), (H\circ K - HK)\Lambda, (H\circ K - KH)\Lambda, \\ \Lambda(HK - KH), \Lambda\hat{H} - \hat{H}\Lambda, H\Lambda - \Lambda H, (\hat{H} - H^{\text{и}})\Lambda, \Lambda(H^{\text{и}} - \hat{H}) \\ \textit{opérent continuement de } \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^0) \to \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^0). \\ \textit{Plus généralement le composé de deux opérateurs de } \mathfrak{a} \textit{ et leur convolé} \\ \textit{sont de même ordre et la différence est d'ordre strictement inférieur.} \end{cases}$$

D'autre part, on a pour toute $\phi \in \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2})$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}.H\phi(t,x) - H\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = [\frac{\partial}{\partial t}H(t,x;D_x)]\phi(t,x)$$

En effet :

$$[H\phi](t+h,x) - [H\phi](t,x) - h\big[\frac{\partial}{\partial t}H(t,x;D_x)\phi(t,x) + H\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)\big] =$$

$$H(t+h,x;\frac{\partial}{\partial x})\phi(t+h,x) - H\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) - hH(t,+h,x;\frac{\partial}{\partial x})\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) +$$

$$+h\big[H(t+h,x;\frac{\partial}{\partial x}) - H(t,x;\frac{\partial}{\partial x})\big]\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)$$

$$+H(t+h,x;\frac{\partial}{\partial x})\phi(t,x) - H(t,x;\frac{\partial}{\partial x})\phi(t,x)$$

$$-h\frac{\partial H}{\partial t}(t,x;\frac{\partial}{\partial x})\phi(t,x).$$

D'où

$$\| \, [H\phi](t+h,x) - [H\phi](t,x) - h\big[\frac{\partial}{\partial t}H(t,x;D_x)\phi(t,x) + H\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)\big] \, \|_{L^2} \, (t) \leq$$

$$\leq C(n)\Big\{\Big[\sum_{\nu\leq 2n} Sup_{(t,x)\in\Omega,|\xi|\geq 1} \mid (\frac{\partial}{\partial\xi})^{\nu}\hat{h}(t,x;\xi)\mid\Big] \parallel \phi(t+h,x)-\phi(t,x)-h\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)\parallel_{L^2}$$

$$+h\Big[\sum_{\nu\leq 2n} Sup_{(t,x)\in\Omega,|\xi|\geq 1} \mid (\frac{\partial}{\partial\xi})^{\nu}\hat{h}(t+h,x;\xi)-(\frac{\partial}{\partial\xi})^{\nu}h(t,x;\xi)\mid\Big] \parallel \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)\parallel_{L^2}$$

$$+\Big[\sum_{\nu\leq 2n} Sup_{(t,x)\in\Omega,|\xi|\geq 1} \mid (\frac{\partial}{\partial\xi})^{\nu}\hat{h}(t+h,x;\xi)-\hat{h}(t,x;\xi)-h(\frac{\partial}{\partial\xi})^{\nu}\hat{h}(t,x;\xi)\mid\Big] \parallel \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)\parallel_{L^2}\Big\};$$

avec les hypothèses sur $\hat{h}(t,x;\xi)$ cette majoration est de la forme $h\epsilon(h)$ avec $\epsilon(h)\to 0$ quand $h\to 0$.

1.3 Hypothèses

On considère ϖ un opérateur matriciel d'opérateurs différentiels par rapport à t et x, et pseudo-différentiels par rapport à y d'ordre θ. On suppose que ϖ admet la décomposition suivante :

$$\varpi = hk - r \tag{1.1}$$

où h, k et r satisfont les hypothèses suivantes :

$$h(t,x,y;D_t,D_x,D_y) = \sum_{i+j\leq m} a_{i,j}(t,x,y;D_y)D_t^iD_x^j \tag{1.2}$$

où $a_{ij}(t,x,y;D_y)$ est un opérateur matriciel d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $m-(i+j)$.

Nous supposons que

$$a_{ij}(t,x,y;\eta) \in \ [BS_{1,0}^{m-(i+j)}]_{N\times N}$$

(t,x) est considéré comme un paramètre et l'application

$$(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto a_{ij}(t,x,y) \ \in [BS_{1,0}^{m-(i+j)}]_{N\times N} \ est \ C^\infty$$

Soit h_m la matrice principale de h, c'est à dire que :

$$h_m(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = \sum_{j+k\leq m} \overset{\circ}{a}_{jk}(t,x,y;\eta)\tau^j\xi^k$$

où $\overset{\circ}{a}_{jk}(t,x,y;\eta)$ est homogène de dégrés $m-(j+k)$ en η.

On considère H_m son déterminant

$$H_m = det(h_m(t,x,y;\tau,\xi,\eta))$$

On suppose qu'on peut décomposer H_m sous la forme

$$H_m(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = \prod_{j=1}^{n''}(\tau-\tau_j(t,x,y;\xi,\eta))^{\rho_j}$$

On impose l'hypothèse suivante :

(A-1) Les racines τ_j de $H_m(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = 0$ sont réelles de multiplicité constante au plus 2 . De plus, il existe une constante positive δ (qui est indépendant de (t,x,y) et (ξ,η) , mais dépendant de (T,X)) tel que, pour $i \neq j$, $(t,x,y) \in [0,T] \times [-X,X] \times \mathbb{R}^n,\ T,X > 0, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$, on ait :

$$\mid \tau_i(t,x,y;\xi,\eta) - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta) \mid \geq \delta \mid (\xi,\eta) \mid$$

Plus exactement

$$H_m = \prod_{j=1}^{m_1} (\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta))^2 \prod_{j=m_1+1}^{m_2} (\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta)) = (H_{m_1})^2 H'_{m_2-m_1}$$

Avec $2m_1 + (m_2 - m_1) = m_2 + m_1 = Nm$.

(A-2) (voir [22], [1])
(i) On suppose que la matrice réduite de h_m dans le localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\tau]$ par le sous-anneau des polynômes divisible par $\tau - \tau_j$ est :

$$\mathbf{h_m} \sim \begin{pmatrix} (\tau-\tau_j)^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall j = 1,...,m_1$$

$\Longleftrightarrow \exists$ un mineur de h_m non divisible par $\tau - \tau_j$, $\forall\ j = 1,...,m_1$.

(**ii**) De plus h satisfait à la condition de Levi suivante (Hyperbolicité faible dans la direction de t) :

(L-1) Le polynôme sous caractéristique de h est divisible par

$$H_{m_1} = \prod_{j=1}^{m_1} (\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta))$$

Ce qui équivaut à :
Il existe p (resp. p') différentiel en t et pseudo-différentiel en (x,y) de symbole principal $P = cof(h_m)$ d'ordre $Nm - m = N(m-1)$, $\Delta(m_1)$ (resp. $\Delta'(m_1)$) de symbole principal H_{m_1} et $\Delta(m_2)$ (resp. $\Delta'(m_2)$) de symbole

principal $H'_{m_2-m_1}$ différentiels en t et pseudo-différentiels en (x,y) tels que :

$$ph = \Delta(m_2)\Delta(m_1)I_{N\times N} + C(m_2-1)\Delta(m_1) + C(m_2+m_1-2).$$

(resp.

$$hp' = \Delta'(m_2)\Delta'(m_1)I_{N\times N} + C'(m_2-1)\Delta'(m_1) + C'(m_2+m_1-2)).$$

Où $C(m_2-1)$ (resp. $C'(m_2-1)$) et $C(m_2+m_1-2)$ (resp. $C'(m_2+m_1-2)$) sont d'ordre respectifs m_2-1 et m_2+m_1-2.

Remarque 1.1 .
Lorsque $m=1$, $(A-2.i)$ signifie que la réduite de Jordan de h_m est :

$$\mathbf{h}_m \sim \begin{pmatrix} \tau-\tau_1 & \mid \xi,\eta \mid & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau-\tau_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \tau-\tau_{m_1} & \mid \xi,\eta \mid & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & 0 & \tau-\tau_{m_1} & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 & \tau-\tau_{m_1+1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & \tau-\tau_{m_2} \end{pmatrix}$$

En ce qui concerne k :

$$k(t,x,y;D_x,D_y) = \sum_{j=0}^{l} b_j(t,x,y;D_y)D_x^j \tag{1.3}$$

avec $b_j(t,x,y;D_y)$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $l-j$ en y. On suppose

$$b_j(t,x,y;\eta) \ \in \ [BS^{l-j}_{1,0}]_{N\times N}.$$

(cf [3]) (t,x) est considéré comme un paramètre et l'application

$$(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto b_j(t,x,y;\eta) \in [BS^{l-j}_{1,0}]_{N\times N} \ est \ C^\infty.$$

Soit k_l la matrice principale de k.

$$k_l(t,x,y;\xi,\eta) = \sum_{j=0}^{l} b^\circ{}_j(t,x,y;\eta)\xi^j$$

où $b^\circ{}_j(t,x,y;\eta)$ est homogène de dégré $l-j$ en η.

On considère K_l son déterminant, c'est-à-dire

$$K_l = det(k_l(t,x,y;\xi,\eta))$$

On suppose qu'on peut décomposer K_j sous la forme

$$K_l(t,x,y;\xi,\eta) = \prod_{j=1}^{n'} (\xi - \xi_j(t,x,y;\eta))^{\nu_j}$$

(A-3) Les racines ξ_j de $K_l(t,x,y;\xi,\eta) = 0$ sont réelles de multiplicité constante au plus égale à 2.

En plus, il existe une constante positive δ' tel que pour tout $i \neq j$, $(t,x,y) \in [0,T] \times [-X,X] \times \mathbb{R}^n,\ T,X > 0, \eta \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, on ait :

$$\mid \xi_i(t,x,y;\eta) - \xi_j(t,x,y;\eta) \mid \geq \delta' \mid \eta \mid$$

Plus exactement

$$K_l = \prod_{j=1}^{l_1} (\xi - \xi_j(t,x,y;\eta))^2 \prod_{j=l_1+1}^{l_2} (\xi - \xi_j(t,x,y;\eta)) = (K_{l_1})^2 K'_{l_2-l_1}$$

Avec $2l_1 + (l_2 - l_1) = l_2 + l_1 = Nl$.

(A-4) (voire [22], [1])
(i) On suppose que la matrice réduite de k_l dans le localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\xi]$ par le sous-anneau divisible par $\xi - \xi_j$ est :

$$\mathbf{k}_l \sim \begin{pmatrix} (\xi-\xi_j)^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall j = 1,...,l_1.$$

$\Longleftrightarrow \exists$ un mineur de k_l non divisible par $\xi - \xi_j$, $\forall j = 1, ..., l_1$.

(ii) De plus k satisfait à la condition de Levi suivante (Hyperbolicité faible dans la direction de x) :

(L-2) Le polynôme sous caractéristique de k est divisible par

$$K_{l_1} = \prod_{j=1}^{l_1} (\xi - \xi_j(t, x, y; \eta))$$

Ce qui équivaut à :
Il existe q (resp. q') différentiel en x et pseudo-différentiel en y, de symbole principal $Q = {}^{coff}(k_l)$ d'ordre $l_1 + l_2$, Γ_{l_1} (resp. Γ'_{l_1}) de symbole principal K_{l_1} et Γ_{l_2} (resp. Γ'_{l_2}) de symbole principal $K'_{l_2 - l_1}$ différentiels en x et pseudo-différentiels en y tels que :

$$qk = \Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1} I_N + C_{l_2-1}\Gamma_{l_1} + C_{l_2+l_1-2}.$$

(resp. $kq' = \Gamma'_{l_2}\Gamma'_{l_1} I_N + C'_{l_2-1}\Gamma'_{l_1} + C'_{l_2+l_1-2}$).
Où C_{l_2-1} (resp. C'_{l_2-1}) et $C_{l_2+l_1-2}$ (resp. $C'_{l_2+l_1-2}$) sont d'ordre respectifs $l_2 - 1$ et $l_2 + l_1 - 2$.

Remarque 1.2 .

Lorsque $l = 1$, **(A-4.i)** *signifie que la réduite de Jordan de k_l est :*

$$\mathbf{k_l} \backsim \begin{pmatrix} \xi-\xi_1 & |\eta| & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi-\xi_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \xi-\xi_{l_1} & |\eta| & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & 0 & \xi-\xi_{l_1} & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 & \xi-\xi_{l_1+1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & \xi-\xi_{l_2} \end{pmatrix}$$

Ecrivons

$$D_x - \xi_j(t,x,y;D_y) = \partial_j$$

On a :

$$\begin{cases} \partial_1\partial_2\ldots\partial_{l_2} = \Gamma_{l_2} \\ \partial_1\partial_2\ldots\partial_{l_1} = \Gamma_{l_1} \end{cases}$$

où $1 \leq l_1 \leq l_2$, et

$$\begin{cases} \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{l_1} \text{ sont des racines doubles} \\ \xi_{l_1+1}, \ldots, \xi_{l_2} \text{ sont des racines simples} \end{cases}$$

L'hypothèse **(A-4)** est équivaut à l'hypothèse **(A-4)'** suivante :

(A-4)' Il existe un opérateur q de symbole principal $Q =^{coff} (k_l)$ tel *que* :

$$kq = \Gamma(l_2)\Gamma(l_1)I_N + A(l_2-1)\Gamma(l_1) + A(l_1+l_2-2)$$

où $A(i) \equiv A(i;t,x,y,D_x,D_y)$ est un opérateur pseudo-différentiel suivant y et différentiel suivant x, d'ordre total i et I_N est la matrice identité .

Pour r, on peut dire :
(A-5) r est d'ordre total $m+l-2$.
En désignant par R la matrice principale de r et par $R^\star$ sa matrice sous-principale,on suppose qu'il existe une matrice A ; $N \times N$ homogène de dégré $m-2$ telle que :

$$(1.4) \qquad \begin{cases} R = AK \\ ([R^\star - AK^\star + \sum_{|\alpha|=1} A^{(\alpha)}K_{(\alpha)}] \times \ {}^{cof}(K)) \mid_{\xi=\xi_j} = 0 \ \ \forall\ 1 \leq j \leq l_1 \end{cases}$$

Ce qui est équivaut à :

$$rq = B_{m-2}\Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1} + B_{m+l_2-3}\Gamma_{l_1} + B_{m+l-4}I_N$$

où B_j est un opérateur matriciel différentiel suivant t et x , pseudo-différentiel suivant y et d'ordre total au plus j . En plus l'ordre en D_t dans $B(j)$ est au plus $m-2$.

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \textit{Les matrices } \mathrm{R} \textit{ et } \mathrm{R}^\star \ \text{ vérifient :} \\ \textit{Il existe une matrice } \mathrm{A} \textit{ tels que } \mathrm{R} = \mathrm{AK} \textit{ et } \ \mathrm{R}^\star = AK^\star. \\ \textit{Avec } \ \mathrm{K} \textit{ la matrice caratéristique de } \ \mathrm{k} \\ \textit{et } \mathrm{K}^{\ \star} \ \text{ sa matrice sous-caractéristique} \end{cases}$$

En effet

Ecrivons les décompositions de $k' = kq$ et $r' = rq$ en symboles homogènes ; On a :

$$\begin{cases} k' = kq = KQ + K^\star Q + KQ^\star + K^{(\alpha)} Q_{(\alpha)} + ... \\ r' = rq = AKQ + R^\star Q + AKQ^\star + (AK)^{(\alpha)} Q_{(\alpha)} + ... \end{cases}$$

En désignant les décompositions en symboles homogènes de $k, r,$ et q respectivement :

$$\begin{cases} k = K + K^\star + ... \\ r = R + R^\star + ... \\ q = Q + Q^\star + ... \end{cases}$$

et en supposant $R = AK$.

La partie principale de k' (resp. de r') est : KQ (resp. AKQ).
Les parties sous principales de k' et de r' sont :

$$\begin{cases} K'^\star = K^\star Q + KQ^\star + K^{(\alpha)} Q_{(\alpha)} \\ R'^\star = R^\star Q + AKQ^\star + (AK)^{(\alpha)} Q_{(\alpha)}) \end{cases}$$

Puisque

$$\begin{cases} (AK)^{(\alpha)} = A^{(\alpha)} K + AK^{(\alpha)} \\ A^{(\alpha)} KQ_{(\alpha)} = A^{(\alpha)} (KQ)_{(\alpha)} - A^{(\alpha)} K_{(\alpha)} Q = -A^{(\alpha)} K_{(\alpha)} Q \\ Car \ A^{(\alpha)} (KQ)_{(\alpha)} = 0 \ \ [mod(\xi - \xi_j)] \ \forall 1 \leq j \leq l_1. \end{cases}$$

On a :

$$R'^\star = A(KQ^\star + K^\star + K^{(\alpha)} Q_{(\alpha)}) + R^\star Q - AK^\star Q - A^{(\alpha)} K_{(\alpha)} Q$$

Et

$$R'^\star = A(KQ^\star + K^\star Q + K^{(\alpha)} Q_{(\alpha)}) + (R^\star - AK^\star - A^\alpha K_\alpha) Q$$

Car

$$R^\star Q - AK^\star Q - A^{(\alpha)}K_{(\alpha)}Q = (R^\star - AK^\star - A^\alpha K_\alpha)Q \quad [mod\prod_{j=1}^{l_1}(\xi - \xi_j)]$$

Par l'hypothèse $(A-4)$, il existe $Q^\star$ tel que

$$KQ^\star + K^\star Q + K^{(\alpha)}Q_{(\alpha)} \textit{ soit divisible par } \prod_{j=1}^{l_1}(\xi - \xi_j)$$

D'où l'équivalence entre 1.4 et 1.5.

Définition 1.8 .
On dit que ϖ vérifie les conditions de Levi $\mathcal{L}$, si h et k vérifient respectivement $(\mathbf{L_1})$ *et* $(\mathbf{L_2})$.

1.4 Enoncé

On considère le problème de Goursat suivant :

$$(1.6) \qquad \begin{cases} \varpi u(t,x,y) = (hk - r)u(t,x,y) = f(t,x,y) \\ D_t^i u \mid_{t=0} = \phi_i(x,y) \quad {\scriptstyle 0\le i\le m-1} \\ D_x^j u \mid_{x=0} = \psi_j(t,y) \quad {\scriptstyle 0\le j\le l-1} \end{cases}$$

avec les conditions de compatibilités suivantes :

$$(\mathbf{C}) \quad D_x^j\phi_i(0,y) = D_t^i\psi_j(0,y), \quad \forall\ 0 \le i \le m-1\ ,\ 0 \le j \le l-1$$

On obtient le premier résultat principal suivant :

Théorème 1 .

Si l'opérateur ϖ vérifie les conditions **(A.1)-(A.5)** *et celles de Levi $\mathcal{L}$, alors pour tout $f \in \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y})$, $\phi_i \in \tilde{H}^\infty_{x,y}$, $0 \le i \le m-1$ et $\psi_j \in \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_y)$, $0 \le j \le l-1$, vérifiant les conditions de compatibilité (C), il existe une unique solution u dans $\mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y})$ du problème (1.6).*

Exemple d'opérateur $\varpi = hk - r$ (avec $m = 2$ et $l = 1$)

$$\varpi = \begin{pmatrix} 0 & D_t^2 - D_x^2 \\ D_t^2 - D_x^2 & D_x^2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & D_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K_2^{\star 1}(t,x,y) \\ K_1^{\star 2}(t,x,y) & K_2^{\star 2}(t,x,y) \end{pmatrix} \right]$$

$$- \left[\begin{pmatrix} A_1^1(t,x,y) & A_2^1(t,x,y) \\ A_1^2(t,x,y) & A_2^2(t,x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & D_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1^{\star 1}(t,x,y) & R_2^{\star 1}(t,x,y) \\ R_1^{\star 2}(t,x,y) & R_2^{\star 2}(t,x,y) \end{pmatrix} \right]$$

vérifie les conditions : (A-1)-(A-2) (L-1),(A-3)-(A-4) (L-2), d'après J. Vaillant ([Séminaire Goulaouic-Schartz exposé n°11, 1979]) et (A-5) si et seulement si :

$$R_1^{\star 1} = A_2^1 K_2^{\star 1} \qquad et \qquad R_1^{\star 2} = A_2^2 K_1^{\star 2}$$

puisque $K = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \xi & \eta \end{pmatrix}$, $\quad {}^{coef}K = \begin{pmatrix} \eta & -\xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix}$
et que dans ces conditions :

$$\left[R^\star - AK^\star \right] \begin{pmatrix} \eta & -\xi \\ -\xi & 0 \end{pmatrix}_{|\xi \equiv 0} \equiv 0$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} \quad , \; K = \begin{pmatrix} K_1^{\star 1} & K_2^{\star 1} \\ K_1^{\star 2} & K_2^{\star 2} \end{pmatrix} \quad et \;\; R^\star \begin{pmatrix} R_1^{\star 1} & R_2^{\star 1} \\ R_1^{\star 2} & R_2^{\star 2} \end{pmatrix}.$$

2 Preuve

Nous allons prouver le Théorème 1 par induction en se ramenant à des problèmes de Cauchy pour h et k relativement hyperboliques à des données sur les hyperplans $t = 0$ et $x = 0$ et on construira un domaine de dépendance. De plus, le Théorème 2.0 que l'on va énoncer et démontrer après, est essentiel pour la preuve longue et technique du Théorème 1.

2.1 Préliminaires

2.1.1 Problème de Cauchy faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples constantes égale à deux

(a)-Rappelons les hypothèses sur h.

$$(1) \quad h(t,x,y;D_t,D_x,D_y) = \sum_{i+j\leq m} a_{i,j}(t,x,y;D_y)D_t^iD_x^j$$

où $a_{ij}(t,x,y;D_y)$ est une matrice d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $m-(i+j)$ de l'algèbre de Calderón Zygmund (cf. [18], [10]).

Par la suite, nous supposerons que

$$(2) \quad a_{ij}(t,x,y;\eta) \in \ [BS_{1,0}^{m-(i+j)}]_{N\times N}$$

(t,x) est considéré comme un paramètre et l'application

$$(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto a_{ij}(t,x,y) \ \in [BS_{1,0}^{m-(i+j)}]_{N\times N} \ est \ C^\infty$$

Soit h_m la matrice principale ou matrice caractéristique de h, c'est à dire que :

$$h_m(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = \sum_{j+k\leq m} \overset{\circ}{a}_{jk}(t,x,y;\eta)\tau^j\xi^k$$

où $\overset{\circ}{a}_{jk}(t,x,y;\eta)$ est la partie homogène de dégrés $m-(j+k)$ en η de $a_{jk}(t,x,y;\eta)$.

On considère H_{mN} son déterminant

$$H_{mN} = det(h_m(t,x,y;\tau,\xi,\eta))$$

On suppose qu'on peut décomposer H_{mN} sous la forme

$$H_{mN}(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = \prod_{j=1}^{n''}(\tau - \tau_j(t,x,y;\xi,\eta))^{\rho_j}$$

On impose l'hypothèse suivante :

(A-1) Les racines τ_j de $H_{mN}(t,x,y;\tau,\xi,\eta)=0$ sont réelles de multiplicité constante ρ_j au plus 2 .
De plus, il existe une constante positive δ (qui est indépendant de (t,x,y) et (ξ,η) , mais dépendant de (T,X)) tel que, pour $i\neq j$, $(t,x,y)\in[0,T]\times[-X,X]\times\mathbb{R}^n,\ T,X>0,(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, on ait :

$$\mid \tau_i(t,x,y;\xi,\eta)-\tau_j(t,x,y;\xi,\eta)\mid\geq\delta\mid(\xi,\eta)\mid$$

Plus exactement

$$H_{mN}=\prod_{j=1}^{m_1}(\tau-\tau_j(t,x,y;\xi,\eta))^2\prod_{j=m_1+1}^{m_2}(\tau-\tau_j(t,x,y;\xi,\eta))=(H_{m_1})^2H'_{m_2-m_1}$$

Avec $2m_1+(m_2-m_1)=m_2+m_1=Nm.$

(A-2) (voire [22], [1])

(i) On suppose que la matrice réduite de h_m dans le localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\tau]$ par le sous-anneau des polynômes divisible par $\tau-\tau_j$ est :

$$\begin{pmatrix} (\tau-\tau_j)^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim \mathbf{h_m}\quad \forall j=1,...,m_1.$$

$\Longleftrightarrow$ Pour chaque (t,x,y) , $\exists$ un mineur de h_m non divisible par $\tau-\tau_j$, $\forall$ $j=1,...,m_1$ (cofacteurs dans le developpement de $det(h_{mN})$).

(ii) De plus h satisfait à la condition de Levi suivante (Hyperbolicité faible dans la direction de t) :

(L-1) Le polynôme sous caractéristique de h est divisible par

$$H_{m_1} = \prod_{j=1}^{m_1} (\tau - \tau_j(t, x, y; \xi, \eta))$$

Ce qui équivaut à :
Il existe p (resp. p') différentiel en t et pseudo-différentiel en (x, y) de symbole principal $P = cof(h_m)$ d'ordre $Nm - m = N(m-1)$, $\Delta(m_1)$ (resp. $\Delta'(m_1)$) de symbole principal H_{m_1} et $\Delta(m_2)$ (resp. $\Delta'(m_2)$) de symbole principal $H'_{m_2-m_1}$ différentiels en t et pseudo-différentiels en (x, y) tels que :

$$ph = \Delta(m_2)\Delta(m_1)I_{N\times N} + C(m_2-1)\Delta(m_1) + C(m_2+m_1-2).$$

(resp.

$$hp' = \Delta'(m_2)\Delta'(m_1)I_{N\times N} + C'(m_2-1)\Delta'(m_1) + C'(m_2+m_1-2)).$$

Où $C(m_2-1)$ (resp. $C'(m_2-1)$) et $C(m_2+m_1-2)$ (resp. $C'(m_2+m_1-2)$) sont d'ordre respectifs m_2-1 et m_2+m_1-2.

Remarques

1. Lorsque $m = 1$, $(A-2.i)$ signifie que la réduite de Jordan de h_m est :

$$\mathbf{h}_m \sim \begin{pmatrix} \tau-\tau_1 & \mid \xi,\eta \mid & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau-\tau_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \dots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \tau-\tau_{m_1} & \mid \xi,\eta \mid & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots\dots & 0 & \tau-\tau_{m_1} & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & 0 & \tau-\tau_{m_1+1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 & \tau-\tau_{m_2} \end{pmatrix}$$

2. $(A-1)$ implique que la matrice réduite de h_m dans le localisé de l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[\tau]$ par le sous-anneau des polynômes divisibles par $\tau - \tau_j$ est

$$\begin{pmatrix} (\tau-\tau_j)^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \mathbf{h_m} \quad \forall j = m_1+1, ..., m_2.$$

$\iff$ Pour chaque (t, x, y), il existe un mineur de h_m non divisible par $\tau - \tau_j$ ($\forall j = m_1 + 1, ..., m_2$) (cofacteur dans le developpement de $deth_m = H_{mN}$).
On note P_A^D le cofacteur de $(h_m)_D^A$, P_{AB}^{DE} le cofacteur de $(h_m)_D^A(h_m)_E^B$ dans le developpement du déterminant H_{mN} de h_m.

3. On suppose que l'on puisse trouver α et β indépendanment de (t, x, y) et de $j = 1, \dots, m_2$ ($\alpha, \beta \in \{1, \dots, N\}$) tels que le cofacteur P_β^α satisfasse $(A-2)(i)$ et la remarque (2) issue de $(A-1)$, c'est-à-dire tels que P_β^α soit non divisible par $(\tau - \tau_j)$ ($\forall j = m_1 + 1, ..., m_2$).
Quitte à faire un changement dans l'ordre des équations et des inconnues, on pourra alors choisir P_1^1 non divisible par $(\tau - \tau_j)$ ($\forall j = m_1 + 1, ..., m_2$) quelque soit (t, x, y). (i.e $\alpha = \beta = 1$). A fortiori, P_1^1 ne sera pas divisible par H_{m_1} ($\forall (t, x, y)$).

Par conséquent

$$P_1^1\big(t, x, y; \tau = \tau_i(t, x, y; \eta, \eta_{n+1} = \xi), \eta, \eta_{n+1} = \xi\big) \neq 0$$

$\forall$ (t, x, y), $\forall i$, $\forall (\eta, \eta_{n+1}) \in S^n$ (sphère de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^{n+1}$).
On suppose

$$\theta_i = inf\big[\mid P_D^A\big((t,x,y);\tau_i(t,x,\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1}\big)\mid_{1\leq A,D\leq N};(t,x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{n+1};(\eta,\eta_{n+1}\in S^n)\big] > 0$$

Pour chaque $\epsilon \in]0, \theta_i[$, il existe un voisinage ouvert $S(i, \epsilon, t, x, y, \eta, \eta_{n+1})$ du point $(t, x, y, \eta, \eta_{n+1})$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n$ et des indices $a(i, t, x, y, \eta, \eta_{n+1})$ et $d(i, t, x, y, \eta, \eta_{n+1})$ tels que

$$\mid P_{d(i,t,x,y,\eta,\eta_{n+1})}^{a(i,t,x,y,\eta,\eta_{n+1})}\big(t', x', y'; \tau_i(t', x', y', \eta', \eta'_{n+1}), \eta', \eta'_{n+1}) \mid > \theta_i - \epsilon$$

pour tout $(t', x', y'; \eta', \eta') \in S(i, \epsilon, t, x, y, \eta, \eta_{n+1})$.
On pose

$$S_k^j(i) = \bigcup_{\substack{(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n \\ a(i,t,x,y,\eta,\eta_{n+1}) = j \\ d(i,t,x,y,\eta,\eta_{n+1}) = k}} S(i, \epsilon, t, x, y, \eta, \eta_{n+1})$$

où j et k sont des entiers de $\{1, \ldots, N\}$.
Soit $U(i) = \{(j,k) \in [1, \ldots, N]^2; S_k^j(i) \neq 0\}$.
Nous obtenons le lemme suivant :

Lemme

$\big(S_k^j(i)\big)_{(j,k)\in U(i)}$ forme un recouvrement fini de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S^n$ formé d'ouverts non vides dans lesquels

$$\begin{cases} \theta_i - \epsilon <\mid A_k^j\big(t', x', y'; \tau_i(t', x', y; \eta', \eta'_{n+1}), \eta, \eta'_{n+1}\big) \mid \\ \forall\ (t', x', y'; \eta', \eta'_{n+1}) \in S_k^j(i) \end{cases}$$

D'autre part, nous avons :

Lemme de Bourbaki

$$\sum_{1 \leq B \leq N} h_{m,B}^A P_D^B = (H_{m_1})^2 H'_{m_2-m_1} \delta_D^A \qquad P_A^D P_B^E - P_B^D P_A^E = (H_{m_1})^2 P_{AB}^{DE}$$

Preuve cf. [1] .

Soit

$$\tau_{max} = max_{\{t\ \in[0,T], |x|\leq X, y\ \in\mathbb{R}^n, |(\xi,\eta)|=1, i=1,\ldots,m_2\}} \mid \tau_i(t, x, y; \xi, \eta) \mid$$

Supposons que

$$\overline{\lim}_{X\to\infty} \tau_{max} < \infty$$

Soient

$$\mathcal{D}(t_0, x_0) = \{(t, x, y); \mid x - x_0 \mid < \tau_{max}(t - t_0),\ t \leq t_0\}$$

$$\Omega(t_0, X_0) = \bigcup_{|x_0|<X_0} \mathcal{D}(t_0, x_0),\ X_0 > 0.$$

On prend un point (t_0, X_0) et on le fixe. Posons : $\Omega(t_0, X_0) \equiv \Omega$.

Et on note $\Omega(s)$ l'intersection de Ω et de l'hyperplan $t = s$.

Soit $\Omega(s) = \Omega \cap \{(s, x, y)\}$,
on obtient le deuxième résultat essentiel suivant :

Théorème 2.0([5],[10])

Sous les hypothèses $(A-1)-(A-2)$, la solution du problème de Cauchy

$$(3) \qquad \begin{cases} hv = f \in \mathcal{E}_t(H^{\infty}_{x,y}) \\ D^i_t v \mid_{t=0} = \phi_i(x,y) \in H^{\infty}_{x,y}, 0 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

existe, est unique et vérifie l'éstimation suivante :

$$\sum_{i=0}^{m+p-2} \parallel D^i_t v \parallel_{k+m-2+p-i}$$

$$\leq C_1(k,p)\Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} \parallel \phi_i \parallel_{k+m-1+p-i} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \parallel D^i_s f(s) \parallel_{k+p-i} ds \Big\}$$

Ce resultat est vrai sous l'hypothèse (2) au lieu de (1).

Preuve du Théorème 2.0

(b)- Existence de la solution du problème de Cauchy (3)

Soit p un opérateur différentiel en t et pseudo-différentiel en (x, y) de symbole principal $P = {}^{cof}h_m$ d'ordre $Nm - m = (N-1)m$.
On effectue un changement de fonctions inconnues dans (3) : $u = pz$.
Le problème de Cauchy (3) se transforme en un problème de Cauchy (4) :

$$(4)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{1\le B\le N\\ 1\le C\le N}} h^A_B P^B_C z^C = f^A \qquad (1\le A\le N) \\ \displaystyle\sum_{C=1}^{N}[P^B_C z^C](0,x) = \phi^B_0(x) \quad (1\le B\le N) \\ \displaystyle\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{C=1}^{N}[P^B_C z^C]\Big)(0,x) = \phi^B_1(x) \qquad (1\le B\le N) \\ \vdots \\ \displaystyle\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Big(\sum_{C=1}^{N}[P^B_C z^C]\Big)(0,x) = \phi^B_{m-1}(x) \quad (1\le B\le N) \end{cases}$$

On peut écrire

$$(5)\quad p^B_C = P^B_C(t,x,y;(1,0,0))\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{m(N-1)} + \sum_{1\le|\alpha|\le m(N-1)} p^{B,0}_{C,\alpha}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{m(N-1)-|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha}$$

$$+ \sum_{|\beta|\le m(N-1)-1} p^{B,0}_{C,\beta}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{m(N-1)-1-|\beta|}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\beta}$$

en appliquant $\frac{\partial}{\partial t}$ à p^B_C, on obtient :

$$(6)\quad \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}p^B_C = P^B_C(t,x,y;(1,0,0))\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{m(N-1)+1} + \displaystyle\sum_{1\le|\alpha|\le m(N-1)+1} p^{B,1}_{C,\alpha}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{m(N-1)+1-|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha} + \dots \\ (\frac{\partial}{\partial t})^2 p^B_C = P^B_C(t,x,y;(1,0,0))\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{m(N-1)+2} + \displaystyle\sum_{1\le|\alpha|\le m(N-1)+2} p^{B,2}_{C,\alpha}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{m(N-1)+2-|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha} + \dots \\ \vdots \\ (\frac{\partial}{\partial t})^{m-1} p^B_C = P^B_C(t,x,y;(1,0,0))\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{mN-1} + \displaystyle\sum_{1\le|\alpha|\le mN-1} p^{B,Nm-1}_{C,\alpha}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^{mN-1-|\alpha|}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha} + \dots \end{array}$$

où les $p^{B,\mu}_{C,\alpha}(\mu = 0,\dots,m-1 \ et \ 1\le|\ \alpha\ |\le mN-1)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 (de classe $[S^0_{1,0}]_{N\times N}$).
D'autre part, on a :

$$det(P^A_B)det(H^B_C)(t,x,y;1,0,0) = H_{mN}(t,x;1,0,0)1 \neq 0$$

Donc les relations (4)(5)(6) permettent de calculer

$$\Big[(\tfrac{\partial}{\partial t})^{m(N-1)}z^C\Big](0,x,y) = z^C_{m(N-1)}(x,y)$$

$$\Big[(\tfrac{\partial}{\partial t})^{m(N-1)+1}z^C\Big](0,x,y) = z^C_{m(N-1)+1}(x,y)$$

$$\vdots$$

$$\Big[(\tfrac{\partial}{\partial t})^{mN-1}z^C\Big](0,x,y) = z^C_{mN-1}(x,y)$$

quelque soit C, en fonction des $\phi_0(x,y),\dots,\phi_{m-1}(x,y)$ et des valeurs $z^C_0(x,y),\dots,z^C_{m(N-1)-1}(x,y)$ prises arbitrairement (nulles par exemple) dans les espaces convenables.
Il existe des données initiales $(z^C_0(x,y),\dots,z^C_{m(N-1)-1}(x,y))$ dans l'espace $[H^{mN+p}\times H^{mN+p-1}\times\dots\times H^{p+1}]^N_N$ tel que pour toute solution z^C, où

$$\Big(z^C,\dots,(\frac{\partial}{\partial t})^{mN}z^C\Big) \in \Big[C^0(\mathbb{R}^+,H^{mN+p-1})\times\dots\times C^0(\mathbb{R}^+,H^p)\Big]^N$$

du problème de Cauchy

$$(7)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{B,C} h^A_B p^B_C z^C = f^A = h'^A_C z^C \ (1\leq A\leq N) \\ avec \quad les \quad données \quad (z^C_0,\dots,z^C_{mN-1})(x,y) \end{cases}$$

$y^B = p^B_C z^C$ soit solution du problème de Cauchy (3),h_p admet pour matrice caractéristique $H_{mN}I$, on a $H_{mN}(t,x,y;1,0,0)=1$

(c)- Résolution du système (7)

On peut supposer que les racines en τ de H_{m_1} sont ordonnées de façon strictement croissante : $\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_{m_1}$ de même celles de $H'_{m_2-m_1}$: $\tau_{m_1+1}<\dots<\tau_{m_2-m_1}$; elles sont homogènes de dégré 1 en (ξ,η).
Les coefficients de $h^A_B(t,x,y;D_t,D_x,D_y)$ étant indéfiniment différentielles et à dérivées bornées dans $\Omega=[0,T]\times\mathbb{R}^n$, le théorème des fonctions implicites nous permettent de dire que $\tau_i(t,x,y;\xi,\eta)$ existe sur des ouverts de $\Omega\times C_{\{0\}}$ sur $\Omega\times C_{\{0\}}$ tout entier car le classement par ordre croissant donne le recollement des τ_i sur les intervalles d'ouverts .
On en déduit que $(\frac{\partial}{\partial t})^{\nu_0}\tau_i\Big(t,x,y;\frac{(\xi,\eta)}{|\xi,\eta|}\Big)$ appartient à $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_{(x,y)}\times C_{\{0\}})$ uniformément par rapport à t et on considère les opérateurs pseudo-différentiels en x,y : $\tau_j(t,x,y;D_x,D_y)$ de symbole principal $\tau_j(t,x,y;\xi,\eta)\in S^1$
$\partial_j = D_t-\tau_j(t,x,y;D_x,D_y)$ de symbole $\triangle_j(t,x,y;\xi,\eta)=\tau-\tau_j(t,x,y;\xi,\eta)$ $(1\leq j\leq m)$ $\delta_0=1=\partial_0$, $\delta_1=\partial_1$,$\delta_2=\partial_2\partial_1$, …, $\delta_{m_1-m_2}=\partial_{m_1+m_2}\dots\partial_2\partial_1$

On a

$$\begin{aligned}
&\varpi_{m_2+m_1} = \partial_{m_2}\partial_{m_2-1}\dots\partial_2\partial_1\partial_{m_1}\dots\partial_1\\
&et\\
&C^A_B = h'^A_B(t,x,y;D_t,D_x,D_y) - \varpi_{m_2+m_1}(t,x,y;D_t,D_x,D_y)\delta^A_B
\end{aligned}$$

En exprimant la base $1,\tau,\tau^2,\dots,\tau^{m_2+m_1-1}$ dans la base $\Big(1,\tau-\tau_1,(\tau-\tau_2)(\tau-\tau_1),\dots,(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_{m_1})\dots(\tau-\tau_1),\dots,(\tau-\tau_{m_2-1})\dots(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_1)\dots(\tau-\tau_1)\Big)$, on peut écrire le symbole principal $\mathbb{C}^A_B$ de C^A_B sous la forme :

$$(7)' \quad \begin{aligned}
&\mathbb{C}^A_B(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = \mathbb{C}^A_{B,m_2+m_1-1}(t,x,y;\xi,\eta) + \mathbb{C}^A_{B,m_2+m_1-2}(\tau-\tau_1)\\
&+\mathbb{C}^A_{B,m_2+m_1-2}(\tau-\tau_{m_1-1})\dots(\tau-\tau_1)+\dots\\
&+\mathbb{C}^A_{B,0}(\tau-\tau_{m_2-1})\dots(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_{m_1})\dots(\tau-\tau_1)
\end{aligned}$$

On considère des opérateurs pseudo-différentiels $\mathbb{C}^A_{B,k}(t,x,y;D_x,D_y)$ de symboles principaux $\mathbb{C}^A_{B,k}(t,x,y;\xi,\eta)$ respectifs $(0 \le k \le m_2+m_1-1)$ et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{C}^A_B(t,x,y;D_t,D_x,D_y) = \mathbb{C}^A_{B,m_2+m_1-1}(t,x,y;D_x,D_y) + \mathbb{C}^A_{B,m_2+m_1-2}(t,x,y;D_x,D_y)\partial_1+\\
&+\mathbb{C}^A_{B,m_2+m_1-3}(t,x,y;D_x,D_y)\partial_2\partial_1+\dots+\mathbb{C}^A_{B,m_2}(t,x,y;D_x,D_y)\partial_{m_1-1}\dots\partial_1+\dots\\
&+\mathbb{C}^A_{B,0}(t,x,y;D_x,D_y)\partial_{m_2-1}\dots\partial_1\partial_{m_1}\dots\partial_1
\end{aligned}$$

Alors

$$C^A_B(t,x,y;D_t,D_x,D_y) = \mathbb{C}^A_B(t,x,y;D_x,D_y) + d^A_B(t,x,y;D_x,D_y)$$

où $d^A_B(t,x,y;D_x,D_y)$ est différentiel en t d'ordre m_2+m_1-2 et pseudo-différentiel en y et x d'ordre m_2+m_1-2 globalement par rapport à t,x,y.
Le système (7) s'écrit en posant

$$\begin{aligned}
&I = (\delta^A_B)_{1\le A,B\le N};\quad Z = {}^{trans}(z^1,\dots,z^C,\dots,z^N);\quad F = {}^{trans}(f^1,\dots,f^C,\dots,f^N)\\
&C(t,x,y;D_t,D_x,D_y) = (C^A_B(t,x,y,D_t,D_x,D_y))_{1\le A,B\le N}\\
&\mathbb{C}(t,x,y;D_t,D_x,D_y) = (\mathbb{C}^A_B(t,x,y,D_t,D_x,D_y))_{1\le A,B\le N}
\end{aligned}$$

on a alors

$$(8)\quad \begin{cases}\Big[\varpi_{Nm}(t,x,y;D_t,D_x,D_y)I + C(t,x,y;D_t,D_x,D_y)\Big]Z = F\\ Z_0(x,y) = Z(0,x,y),\dots,Z_{Nm-1}(x,y) = ((\frac{\partial}{\partial t})^{Nm-1}Z)(0,x,y)\end{cases}$$

avec $(Nm = m_1+m_2)$.

On considère d'abord le système $N\times N$:

$$(9)\quad \begin{cases} \Big[\varpi_{Nm} I + \mathbb{C}\Big](t,x,y;D_t,D_x,D_y)Z(t,x,y) = F(t,x,y) \\ Z_0, Z_1 \dots, Z_{Nm-1} \quad \textit{(Données de Cauchy)} \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= {}^t({}^tZ, \partial_1{}^tZ, \partial_2\partial_1{}^tZ, \dots, \partial_{m_2-1}\dots\partial_1\partial_{m_1}\dots\partial_1{}^tZ) \\ \mathcal{F} &= {}^t(0,0,0,\dots,{}^tF) \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(t,x,y;D_x,D_y)$ l'opérateur de symbole

$$\begin{pmatrix} \tau_1 I & I & I & \cdots & & & \cdots & I \\ \vdots & \tau_2 I & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & & \\ \vdots & & & \tau_{m_1} I & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \tau_1 I & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \tau_{m_2-1} I & I \\ \mathbb{C}_{m_2+m_1-1} & \mathbb{C}_{m_2+m_1-2} & \cdots & \mathbb{C}_{m_2} & \mathbb{C}_{m_2-1} & \cdots & \mathbb{C}_1 & \tau_{m_2} I + \mathbb{C}_0 \end{pmatrix}$$

Soit Λ l'opérateur de symbole $\sqrt{\mid \xi \mid^2 + \mid \eta \mid^2}$ et effectuons le nouveau changement de fonctions inconnues

$$\mathcal{Z}' = {}^t\Big((\Lambda+1)^{m_2+m_1-2}\,{}^tZ, (\Lambda+1)^{m_2+m_1-3}\partial_1{}^tZ, \dots, (\Lambda+1)^{m_2-1}\partial_{m_1-1}\dots\partial_1{}^tZ,$$
$$(\Lambda+1)^{m_2-1}\partial_{m_1}\partial_{m_1-1}\dots\partial_1{}^tZ, (\Lambda+1)^{m_2-2}\partial_1\partial_{m_1}\dots\partial_1{}^tZ, \dots, \partial_{m_2-1}\dots\partial_1\partial_{m_1}\dots\partial_1{}^tZ)\Big)$$

(9) équivaut alors à :

$$(10)\quad \begin{cases} D_t\mathcal{Z}'(t,x,y) = \mathcal{H}_0(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda\mathcal{Z}'(t,x,y) + \mathcal{B}\mathcal{Z}' + \mathcal{F} \\ \mathcal{Z}'_0(x,y) = \mathcal{Z}'(t,x,y) \quad \textit{(données de Cauchy)} \end{cases}$$

où $\mathcal{H}_0(t,x,y;D_x,D_y)$ et $\mathcal{B}(t,x,y;D_x,D_y)$ sont des opérateurs d'ordre 0 de l'algèbre $\mathfrak{a}$ de Calderón -Zygmund .
$(10)'$ En choisissant $\mathbb{C}_{m_2+m_1-k}(t,x,y;\xi,\eta) = 0, (\forall k = 1,\dots,m_1), \mathcal{H}_0(t,x,y;\xi,\eta)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \theta_1 I & I & & & & & & & \\ & \theta_2 I & I & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & \theta_{m_1} I & I & 0 & & & \\ & & & & & \theta_1 I & I & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \theta_{m_2-1} I & I \\ & & & & & & & & \theta_{m_2} I \end{pmatrix} = \mathcal{H}_0$$

avec

$$\theta_i(t,x,y;\xi,\eta) = \tau_i(t,x,y;\frac{\xi}{\sqrt{\mid \xi \mid ^2 + \mid \eta \mid ^2}}, \frac{\eta}{\sqrt{\mid \xi \mid ^2 + \mid \eta \mid ^2}})$$

Considérons la matrice $\eta'(t,x,y;\xi,\eta)$ qui est explicitée à la prochaine page. η' diagonalise $\mathcal{H}_0$: $\eta'\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{00}\eta'$ avec

$$\mathcal{H}_{00} = \begin{pmatrix} \theta_1 I & & & & & & & \\ & \theta_2 I & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \theta_{m_1} I & & & & \\ & & & & \theta_1 I & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \theta_{m_2-1} I & \\ & & & & & & & \theta_{m_2} I \end{pmatrix}$$

η' est le symbole d'un opérateur d'ordre 0 de l'algèbre $\mathfrak{a}$ de Calderón-Zygmund.

$$\eta'(t,x,y;\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(t,x,y;\xi,\eta) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathcal{B}(t,x,y;\xi,\eta) \end{pmatrix}$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & I & I & \dots & \dots & I \\ 0 & (\theta_2-\theta_1)I & (\theta_3-\theta_1)I & \dots & \dots & (\theta_{m_1}-\theta_1)I \\ \vdots & \ddots & (\theta_3-\theta_2)(\theta_3-\theta_1)I & \dots & \dots & (\theta_{m_1}-\theta_2)(\theta_{m_1}-\theta_1)I \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (\theta_{m_1}-\theta_{m_1-1}) & \dots & (\theta_{m1}-\theta_1)I \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} I & I & I & \dots & \dots & I \\ 0 & (\theta_2-\theta_1)I & (\theta_3-\theta_1)I & \dots & \dots & (\theta_{m_2}-\theta_1)I \\ \vdots & \ddots & (\theta_3-\theta_2)(\theta_3-\theta_1)I & \dots & \dots & (\theta_{m_2}-\theta_2)(\theta_{m_2}-\theta_1)I \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (\theta_{m_2}-\theta_{m_2-1}) & \dots & (\theta_{m2}-\theta_1)I \end{pmatrix}$$

et

$\mathbb{O}$ est la matrice nulle .

Composons à gauche le système (10) par l'opérateur $\eta'(t,x,y;D_x,D_y)$, on obtient

$$\eta'(t,x,y;D_x,D_y)D_t\mathcal{Z}'(t,x,y) = \eta'(t,x,y;D_x,D_y)\mathcal{H}_0\Lambda\mathcal{Z}' + \eta'\mathcal{B}\mathcal{Z}' + \eta'\mathcal{F}$$

Or

$$\eta'(t,x,y;D_x,D_y)D_tZ' = D_t\big[\eta'(t,x,y;D_x,D_y)Z'\big] - \big[D_t\eta'(t,x,y;D_x,D_y)\big]Z'$$

et

$$\begin{aligned}&\eta'(t,x,y;D_x,D_y)\mathcal{H}_0(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda\\ &= \mathcal{H}_{00}(t,x,y;D_x,D_y)\eta'(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda + \mathcal{B}'(t,x,y;D_x,D_y)\\ &= \mathcal{H}_{00}(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda\eta'(t,x,y;D_x,D_y) + \mathcal{B}"(t,x,y;D_x,D_y)\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}"$ sont des opérateurs d'ordre 0 de a.

En posant $\mathcal{Z}" = \eta'\mathcal{Z}'$, à partir du système (10),on obtient le système d'équations

$$(11)\quad D_t\mathcal{Z}" = \mathcal{H}_{00}\Lambda\mathcal{Z}" + \big[\eta'\mathcal{B} + D_t\eta' + \mathcal{B}"\big]\mathcal{Z}' + \eta'\mathcal{F}$$

c'est-à-dire en posant $\mathcal{B}'" = \eta'\mathcal{B} + D_t\eta' + \mathcal{B}"$ et $\mathcal{F}' = \eta'\mathcal{F}$

$$(12)\quad D_t\mathcal{Z}" = \mathcal{H}_{00}\Lambda\mathcal{Z}" + \mathcal{B}'"\mathcal{Z}' + \mathcal{F}'$$

Choisissons $\mathcal{Z}'$ dans

$$\mathcal{C}^1\Big([0,T],[\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)]^{N(m_2+m_1)}\Big) \subset \mathcal{C}^0\Big([0,T],[H^1(\mathbb{R}^n)]^{N(m_2+m_1)}\Big)$$

où $N(m_1+m_2) = N^2m$.
On note $<,>$ le produit scalaire dans $[L^2(\mathbb{R}^n)]^{N^2m}$; on a $\mathcal{H}_{00}^\star$ étant l'adjoint de $\mathcal{H}_{00}$,

$$\frac{d}{dt} < \mathcal{Z}",\mathcal{Z}" > = \ i < (\mathcal{H}_{00}\Lambda - \Lambda\mathcal{H}_{00}^\star)\mathcal{Z}",\mathcal{Z}" > +2\mathcal{R}e < \mathcal{B}'"\mathcal{Z}' + \mathcal{F}',\mathcal{Z}" >$$

D'où, il existe des constantes γ et c positives indépendantes de $\mathcal{Z}'$,$\mathcal{Z}"$, $\mathcal{F}'$ et de $t \in [0,T]$ telles que

$$\frac{d}{dt} \parallel \mathcal{Z}" \parallel_{L^2} \leq \gamma \parallel \mathcal{Z}" \parallel_{L^2} + c \parallel \mathcal{Z}' \parallel_{L^2} + \parallel \mathcal{F}' \parallel_{L^2}$$

($\mathcal{H}_{00}\Lambda - \Lambda\mathcal{H}_{00}^\star$ est d'ordre 0, $\mathcal{H}_{00}$ étant diagonale.
D'après S.Mizohata ([18],p.353), il existe β constante strictement positive, indépendante de $t \in [0,T]$ (β suffisament grande) telle que

$$||| \mathcal{Z}' ||| = \parallel \eta\mathcal{Z}' \parallel + \beta \parallel (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{Z}' \parallel$$

définisse une norme dans $[L^2(\mathbb{R}^n)]^{N^2m}$ équivalente à la norme $\| \mathcal{Z}' \|$ uniformément par rapport à $t \in [0,T]$.

Proposition 1

Toute solution $\mathcal{Z}'$ de classe $\mathcal{C}^1([0,T], H^{+\infty}(\mathbb{R}^n))$ de (10) vérifie une inégalité d'énergie notée (e_0)pour la norme $\||\ .\ \||$ donc pour la norme $\|\||$:

$$(e_0) \quad \| \mathcal{Z}' \|_{L^2}(t) \le c(T)\Big\{ \| \mathcal{Z}'_0 \|_{L^2} + \int_0^t \| F(s) \|_{L^2}\, ds\Big\}$$

Preuve

En effet

$$(13) \quad \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \||\ \mathcal{Z}'\ \||= \frac{d}{dt}\Big(\| \eta\mathcal{Z}' \| + \beta \| (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{Z}' \| \Big) \\ \le \gamma \| \eta\mathcal{Z}' \| + \| \eta'\mathcal{F} \| + c \| \mathcal{Z}' \| + \beta\frac{d}{dt}(\| (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{Z}' \|) \end{array}$$

Or, on a

$$\begin{array}{l} D_t\mathcal{Z}' = \mathcal{H}_0\Lambda\mathcal{Z}' + \mathcal{B}\mathcal{Z}' + \mathcal{F} \\ et \\ (\Lambda+1)^{-1}D_tZ' = (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{H}_0\Lambda\mathcal{Z}' + (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{B}\mathcal{Z}' + (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{F} \\ Or \\ (\Lambda+1)^{-1}H_0\Lambda = (\Lambda+1)^{-1}\Lambda\mathcal{H}_0 + (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{B}_2 \end{array}$$

où $\mathcal{B}_2$ est d'ordre 0 .
D'où

$$\frac{d}{dt} \| (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{Z}' \| (t) \le \delta_0\Big(\| \mathcal{Z}' \| + \| (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{Z}' \| \Big) + \| (\Lambda+1)^{-1}\mathcal{F} \|$$

et en substituant dans (13), on obtient

$$\frac{d}{dt} \||\ \mathcal{Z}'\ \||(t) \le \gamma' \||\ \mathcal{Z}'\ \||(t) + \||\ \mathcal{F}\ \||(t).$$

Or

$$e^{\gamma'(t-s)}\Big[\frac{d}{ds} \||\ \mathcal{Z}'\ \||(s) - \gamma' \||\ \mathcal{Z}'\ \||(s)\Big] = \frac{d}{ds}\Big[exp\gamma'(t-s) \||\ \mathcal{Z}'\ \||(s)\Big]$$

D'où en multipliant la dernière inégalité passée en s (au lieu de t) par $exp(\gamma'(t-s))$et en intégrant par rapport às de 0 à t, on obtient :

$$|||\ \mathcal{Z}'\ |||\ (t) \leq \gamma' t\ |||\ \mathcal{Z}'_0\ |||+\int_0^t\ |||\ \mathcal{F}(s)\ |\ \gamma'(t-s)ds$$

et l'inégalité voulue pour tout $t \in [0,T]$

$$\|\ \mathcal{Z}'\ \|\ (t) \leq c(T)\Big\{\ \|\ \mathcal{Z}'_0\ \| + \int_0^t\ \|\ F(s)\ \|_{L^2}\ ds\Big\}$$

Extension à la norme dans $[H^r(\mathbb{R}^n)]^{N^2m}$

On a :

Proposition 2

Toute solution $\mathcal{Z}'$ de classe $\mathcal{C}^1([0,T], H^{+\infty}(\mathbb{R}^n))$ de (10) vérifie une inégalité d'énergie (e_k) :

$$(e_k) \quad \|\ \mathcal{Z}'\ \|_{H^k} \leq c(T)\Big\{\ \|\ \mathcal{Z}'_0\ \|_{H^k} + \int_0^t\ \|\ F(s)\ \|_{H^k}\ ds\Big\}$$

Preuve

Pour $k=0$, on a déjà démontré (e_0).
Pour $k=1$, en dérivant par $\frac{\partial}{\partial x}$ les deux termes de (10) et en posant $\mathcal{Z}'^0 = \frac{\partial \mathcal{Z}'^0}{\partial x}$ et $\mathcal{Z}'^j = \frac{\partial \mathcal{Z}'^j}{\partial y_j}$, on a :

$$D_t\mathcal{Z}'^j = \mathcal{H}_{00}(t,x,y,D_x,D_y)\Lambda\mathcal{Z}'^j + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial y_j}(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda\mathcal{Z}' + \mathcal{B}'\mathcal{Z}'^j + \frac{\partial \mathcal{B}'}{\partial y_j}\mathcal{Z}' + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_j}$$

$(j=0,\ldots,n)$ où $\mathcal{Z}'^j \in C^0([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$.
En posant $\sum\ |||\ \mathcal{Z}'^j(t)\ ||| = \phi_1(t)$, on a :

$$\frac{d\phi_1}{dt} \leq \gamma_1\phi_1(t) + \sum_j\ |||\ \frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{B}\mathcal{Z}'\ ||| + \sum_j\ |||\ \frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{F}\ |||$$

On intégre les deux côtés de l'intégrale. D'après la proposition précédente, on obtient (e_1).
En répètant l'argument, k fois, on a (e_k)

$$(e_k) \quad \|\ \mathcal{Z}'\ \|_{H^k} \leq c(T)\Big\{\ \|\ \mathcal{Z}'_0\ \|_{H^k} + \int_0^t\ \|\ F(s)\ \|_{H^k}\ ds\Big\}$$

On considère la norme

$$|||\ \mathcal{Z}\ |||\ ^2{}_p = \sum_{B=1}^{N} |||\ z^B\ |||\ ^2{}_p$$

$$|||\ \mathcal{Z}^B\ |||\ ^2{}_p(t) = \sum_{k=0}^{N^2m-1} |||\ \frac{\partial^k}{\partial_t^k} z^B\ |||\ ^2{}_{H^{N^2m+p-1-k}}$$

On a alors pour la solution z de (9), l'éstimation suivante :

$$(i) \quad |||\ \mathcal{Z}\ |||_p\ (t) \leq \tilde{c}(T)\Big\{\ |||\ (\Lambda+1)\mathcal{Z}\ |||_p\ (0) + \int_0^t \|\ F(s)\ \|_{p+1}\ ds\Big\}$$

$(\forall t \in [0,T])$
Considèrons le système (7), on a :

$$(ii) \quad \|\ d\mathcal{Z}\ \|_{H^{p+1}}\ (t) \leq c'(T)\ |||\ \mathcal{Z}\ |||\ (t)$$

(i) et (ii) nous permettent de résoudre le problème de Cauchy (7) avec les données dans $[H^{+\infty}]^m \times \ldots \times [H^{+\infty}]^m$ et F dans $C^0([0,T], H^{+\infty})$.
En utilisant la méthode d'approximation successive, on a les mêmes données initiales :

$$[\varpi_{Nm} + C]\mathcal{Z}_0 = F \qquad \textit{détermine}\ \ \mathcal{Z}_0$$

$$[\varpi_{Nm} + C]\mathcal{Z}_1 = F - d\mathcal{Z}_0 \qquad \textit{détermine}\ \ \mathcal{Z}_1$$

$$[\varpi_{Nm} + C]\mathcal{Z}_2 = F - d\mathcal{Z}_1 \qquad \textit{détermine}\ \ \mathcal{Z}_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$[\varpi_{Nm} + C]\mathcal{Z}_{k-1} = F - d\mathcal{Z}_{k-2} \quad \textit{détermine}\ \ \mathcal{Z}_{k-1}$$

$$[\varpi_{Nm} + C]\mathcal{Z}_k = F - d\mathcal{Z}_{k-1} \qquad \textit{détermine}\ \ \mathcal{Z}_k$$

La suite $(\mathcal{Z}_k)$ est de Cauchy pour $|||\ .\ |||$. Elle converge vers une fonction $\mathcal{Z}$ de classe $C^\tau([0,T], H^{+\infty})$, qui est solution du problème posé par (7).

On montre par le lemme de Gronwall que la solution de (7) vérifie

$$\vert\vert\vert \mathcal{Z} \vert\vert\vert_{Nm^{\tau},p} (t) \leq \tilde{c}(T)\Big\{ \vert\vert\vert (\Lambda+1)\mathcal{Z} \vert\vert\vert_{Nm^{\tau},p} (0) + \int_0^t \parallel F(s) \parallel_{p+1} ds\Big\}$$

On en déduit l'existence de la solution du Problème (3), pour des données initiales sur $t=0$ telles que $\phi_0 \in \tilde{H}^{\infty}_{x,y}, \phi_1 \in \tilde{H}^{\infty}_{x,y}, \ldots, \phi_{m-1} \in \tilde{H}^{\infty}_{x,y}$.

Le théorème est demontré modulo la proposition suivante :

Proposition 3

Le problème (9) admet une solution $\mathcal{Z}$ vérifiant (i) lorsque les données sont dans $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve

On utilise les résultas de M. Gourdin [9] et M. Mechab [19] appliqués au système (9).
On peut aussi utiliser la proposition suivante pour terminer la résolution de notre théorème .

Proposition 4

Le problème (10) admet une solution $\mathcal{Z}'$ lorsque la donnée est dans $H^{+\infty}$.

Preuve

On commence par la première équation ,on a d'abord le sous-système de N équations à N inconnues suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{Z}'^{N^2m} - i\tau^{Nm-m_1}(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda\mathcal{Z}'^{N^2m} = i\mathcal{F}^{N^2m}(t,x,y) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{Z}'^{N^2m-N+1} - i\tau^{Nm-m_1}(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda\mathcal{Z}'^{N^2m-N+1} = i\mathcal{F}^{N^2m-N+1}(t,x,y) \end{cases}$$

En utilisant la méthode des sémi-groupes, S.Mizohata [18] associe pour ces équations l'existence d'une solution $\mathcal{Z}'^{N^2m}, \ldots, \mathcal{Z}'^{N^2m-N+1}$ continues en t à valeurs dans H^{p+1}, continuement dérivables dans H^p pour le problème

de Cauchy à valeurs initiales sur $t = 0$ dans $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ et les fonctions $\mathcal{F}'^{N^2m}, \dots, \mathcal{F}'^{N^2m-N+1}$ à valeurs dans H^{p+1} continues en t.
Dans notre cas, nous obtenons donc ainsi une solution $\mathcal{Z}'^{N^2m}, \dots, \mathcal{Z}'^{N^2m-N+1}$ de classe $C^1_t(H^{+\infty})$.On a ensuite le sous-système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{Z}'^{N^2m-N+1} - i\tau^{Nm-m_1-1}(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda\mathcal{Z}'^{N^2m-N+1} = i\mathcal{Z}'^{N^2m} + i\mathcal{F}^{N^2m-N+1}(t,x,y) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{Z}'^{N^2m-2N+1} - i\tau^{Nm-m_1-1}(t,x,y;D_x,D_y)\Lambda\mathcal{Z}'^{N^2m-2N+1} = i\mathcal{Z}'^{N^2m-N+1} i\mathcal{F}^{N^2m-2N+1}(t,x,y) \end{cases}$$

que l'on résoud de la même façon, on obtient ainsi les composantes $\mathcal{Z}'^{N^2m-N}, \dots, \mathcal{Z}'^{N^2m-2N+1}$ de $\mathcal{Z}'$.
De proche en proche, $\mathcal{Z}'$ solution de (10) est ainsi déterminée.

(d)- La condition de Levi généralisée

Proposition 5

Il existe un opérateur différentiel p par rapport à t d'ordre $Nm - m$, de symbole principal $P =^{cof} (h_m)$ et à coefficients dans l'algèbre $\mathfrak{a}$, tels que les symboles $\mathbb{C}_{Nm-i}$ correspondants (cf (7)') soient identiquement nuls $(i = 1, \dots, m_1)$ si et seulement si l'invariant polynomial sous-caractéristique $\mathcal{K}_h$ de h est divisible par H_{m_1} avec

$$\mathcal{K}_h = \sum_{1,B\leq N} \Big[(h^\star)^A_B - \frac{1}{2}\partial^\lambda_\lambda(h^A_B)\Big]\gamma_A\delta^B + \frac{1}{2}h^A_{mB}\big(\partial^\lambda\delta^B\partial_\lambda\gamma_A - \partial^\lambda\gamma_A\partial_\lambda\delta^B\big)$$

Preuve

D'après [6],et en posant $\eta_0 = 0, \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n), \eta_{n+1} = \xi, y_0 = t, y = (y_1, \dots, y_n), y_{n+1} = x$, on a :

$$\mathbb{C}(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1}) = \Big[h'^\star_{Nm-1} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{n+1}\big(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}(\frac{\partial}{\partial\eta_0}h'_{Nm})\big)\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\tau_i\Big](t,x,y;\tau_i,\eta,\eta_{n+1})\ \forall i = 1,\dots,m_1$$

h'$_{Nm}(t,x,y;\eta_0,\eta,\eta_{n+1}) + h'^{\star A}_B(t,x,y;\eta_0,\eta,\eta_{n+1}) + \dots$
où

$h'^A_B(t,x,y;\eta_0,\eta,\eta_{n+1}) = (H_{m_1})^2 H'_{m_2-m_1}(t,x,y;\eta_0,\eta,\eta_{n+1})\delta^A_B$ est un polynôme homogène de dégré Nm et $h'^{\star A}_B(t,x,y;\eta_0,\eta,\eta_{n+1})$ est la partie homogène de degré $Nm-1$ de h'^A_B.
On a donc

$$\Big[\frac{\partial}{\partial\eta_0}(h'_{Nm})^A_B\Big]\big(t,x,y;\tau^i(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1}\big) = 0$$

$\forall i = 1,\ldots,m_1; (t,x,y)\in\Omega$ et en dérivant par rapport à y^α, on obtient :

$$\big(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta_0}h'^A_B\big)(\tau=\tau^i) + \big(\frac{\partial^2}{\partial{\eta^2}_0}h'^A_B\big)(\tau=\tau^i)\frac{\partial}{\partial\eta^\alpha}p^i_0 = 0$$

D'autre part,

$$\big(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta_0}h'^A_B\big)(\tau=\tau^i) = \delta^A_B\Big[\big(\frac{\partial}{\partial\eta_0}H_{m_1}\big)\big(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1}\big)H'_{m_2-m_1}\Big](\tau=\tau^i)$$

$$\big(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta_0}h'^A_B\big)(\tau=\tau^i) = 2\delta^A_B\Big[\big(\frac{\partial}{\partial\eta_0}H_{m_1}\big)\big(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1}\big)H'_{m_2-m_1}\Big](\tau=\tau^i)$$

$\forall i = 1,\ldots,m_1; \forall\alpha = 0,\ldots,n+1$, $(\eta_0=\tau, \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n), \eta_{n+1}=\xi)$ $(y_0,=t, y=(y_1,\ldots,y_n), y_{n+1}=x)$

D'où

$$\underbrace{(H_{m_1})^2H'_{m_2-m_1}(t,x,y;1,0,\ldots,0)}_{=1}\mathbb{C}^A_B(t,x,y;\tau=\tau^i,\xi,\eta)$$

$$= ({h'_{Nm-1}}^\star)^A_B(\tau=\tau^i) - \sum_{\alpha=0}^{n+1}\big[(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha})H'_{m_2-m_1}\big]_{\tau=\tau^i}\delta^A_B$$

$$= ({h'_{Nm-1}}^\star)^A_B(t,x,y;\tau^i,\xi,\eta) - \sum_{\alpha=0}^{n+1}\big[(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}(h'_{Nm})^A_B\big](t,x,y;\tau^i,\xi,\eta)$$

où $i = 1,\ldots,m_1$ et $\alpha = 0,\ldots,n+1$

D'autre part

$$({h'_{Nm-1}}^\star)^A_B(t,x,y;\tau^i,\xi,\eta)$$

$$= \sum_{C=1}^{N}\big[h^A_{mC}P^{\star C}_B + (h_{m-1})^A_CP^C_B + \sum_{\alpha=0}^{n+1}(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}h^A_{mC})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}P^C_B)\big](t,x,y;\tau,\xi,\eta)$$

D'où

$$\mathbb{C}_B^A\big(t,x,y;\tau=\tau^i(t,x,y;\xi,\eta),\xi,\eta\big)=0$$

$\forall A$ *et* $B=1,\ldots,N$ *et* $\forall i=1,\ldots,m_1$ si et seulement si la matrice

$$\sum_{C=1}^{N}\Big[h_{mC}^{A}P^{\star C}_{\ B}+(h_{m-1})_C^A P_B^C\Big]+\sum_{\alpha=0}^{N+1}\Big\{(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_C^A)(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}P_B^C)$$

$$-\frac{1}{2}[\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}h_{mB}^A]\Big\}(t,x,y;\tau^\alpha,\xi,\eta)=\Big\{\sum_{C=1}^{N}[h_{mC}^{A}P^{\star C}_{\ B}+(h_{m-1})_C^A P_B^C]+$$

$$\sum_{\alpha=0}^{N+1}(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}h_{mC}^A)(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}P_B^C)-[H'_{m_2-m_1}(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha})\delta_B^A]\Big\}(t,x,y;\tau^\alpha,\xi,\eta)$$

a tous des éléments nuls.
Pour tout $(t,x,y;\tau^\alpha,\xi,\eta)$ de l'ouvert

$$\Gamma_k^j(i)=\Big\{(t,x,y;\eta,\eta_{n+1})\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0);(t,x,y;\frac{\eta,\eta_{n+1}}{\mid(\eta,\eta_{n+1})\mid})\in S_k^j(i)\Big\}$$

($\Gamma_k^j(i)$ forme un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$), on multiplie la matrice précédente par la ligne $[P_1^j,\ldots,P_A^j,\ldots,P_N^j](t,x,y;\lambda^i(t,x,y,\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1})$ à gauche ; cette ligne est non nulle dans $\Gamma_k^j(i)$ car $P_k^j(t,x,y;\lambda^i,\eta,\eta_{n+1})\neq 0$, $\forall(t,x,y;\eta,\eta_{n+1})\in\Gamma_k^j(i)$;

On obtient :

$$\frac{P_A^j(h_{mN-1}^\star)_C^A P_k^C-\sum_\alpha(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P_A^j)h_C^A(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}P_k^C)-P_k^jH'(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_m)(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}H_m)}{P_k^j}\times$$

$$\times\Big[P_1^j,\ldots,...,P_B^j,\ldots,P_m^j\Big](t,x,y;\tau(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1})$$

pour tout $(t,x,y;\eta,\eta_{n+1})\in\Gamma_k^j(i)$.

En effet , on :

$$P^j_B P^C_k = P^C_B P^j_k \quad (mod \;\; {H^2}_{m_1})$$

$$P^j_A(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^A_C) = -(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^j_A)h^A_{mC} \quad (mod \;\; H_{m_1})$$

$$\tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}P^C_B = \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\left(\tfrac{P^j_B P^C_k}{P^j_k}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{P^j_k}\tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}(P^i_B P^C_k) + P^j_B P^C_k \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}(\tfrac{1}{P^j_k}) \;\; (mod \; H_{m_1})$$

et en multipliant cette dernière ligne membre à membre avec l'égalité

$$P^i_A(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}h^A_{mC}) = -(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^j_A)h^A_{mC},$$

on obtient le résultat.
Donc pour que la matrice $(\mathbb{C}(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1}))$ soit nulle, il est necéssaire que cette valeur propre, qui est aussi valeur propre de

$(H_{m_1})^2 H'_{m_2-m_1}(t,x,y;1,0)(\mathbb{C}(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})) - h^A_{mC}{P^\star}^C_B(t,x,y;\lambda,\eta,\eta_{n+1})$
$= L^A_B(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})$

soit nulle dans $\Gamma^j_k(i)$, c'est-à-dire que le numérateur

$$\Big[P^j_A {h^\star}^A_{mC} P^C_k - \sum_\alpha(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^j_A)h^A_{mC}(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}P^C_k) - P^j_k H'_{m_2-m_1}(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1})(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}H_{m_1})\Big](t,x,y;\lambda_i(t,x,y;\tau^i,l))$$

soit nul pour tout $(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}) \in \Gamma^j_k(i)$, $(j,k) \in P(i)$.

D'autre part, nous avons les relations :

$$P^{j'}_{k'}[P^j_A(h)^A_c P^C_k] = P^j_k[P^{j'}_A {h^\star}^A_C P^C_{k'}] \quad (mod \; H_{m_1})$$

$$P^{j'}_{k'}(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^j_A).h^A_{mC}(\tfrac{\partial}{\partial y_\alpha}P^C_k) = -P^{j'}_{k'}P^j_A(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}h^A_{mC})(\tfrac{\partial}{\partial y_\eta}P^C_k)$$

$$-P^j_{k'}P^j_A(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}h^A_{mC})(\tfrac{\partial}{\partial y_\eta}P^C_k) = P^j_{k'}(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^{j'}_A)h^A_{mC}(\tfrac{\partial}{\partial y_\eta}P^C_k)$$

$$-P^j_{k'}(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^{j'}_A)(\tfrac{\partial}{\partial y_\alpha}(h_m)^A_k)P^C_k = -P^j_k(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^{j'}_A)(\tfrac{\partial}{\partial y_\alpha}h^A_{mC})P^C_k$$

$$= P^j_k(\tfrac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^{j'}_A)h^A_{mC}(\tfrac{\partial}{\partial y_\alpha}P^C_{k'}) \;\; (mod \;\; H_{m_1})$$

On a donc

$$P_{k'}^{j'}\Big[P_A^j h^{\star A}_{\ C} P_k^C - \sum_\alpha (\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} P_A^j) h^A_{mC} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} P_k^C) - P_k^j H'_{m_2-m_1} (\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} H_{m_1})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} H_{m_1})\Big]$$
$$= P_k^j\Big[P_A^j h^{\star A}_{\ C} P_{k'}^C - \sum_\alpha (\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} P_A^{j'}) h^A_{mC} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} P_{k'}^C) - P_{k'}^j H'_{m_2-m_1} (\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} H_{m_1})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} H_{m_1})$$

$$-P_{k'}^j H'_{m_2-m_1} (\tfrac{\partial}{\partial \eta_\alpha} H_{m_1})(\tfrac{\partial}{\partial y_\alpha} H_{m_1})\Big] \qquad (mod \quad H_{m_1})$$

à l'aide de cette relation, en déduit que

$$P_A^1 h^{\star A}_{\ C} P_1^C - \sum_\alpha (\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} P_A^1) h^A_{mC} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} P_1^C) - P_1^1 H'_{m_2-m_1} (\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} H_m)(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} H_{m_1})$$

est nécessairement nul pour $\eta_0 = \tau = \tau^i$ $(1 \le i \le m_1)$ dans $[0,T] \times [-X,X] \times \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que ce polynôme en $(\eta_0, \eta, \eta_{n+1})$ est divisible par H_{m_1}.
On voit facilement que cela revient à dire que $\mathcal{K}_h$ est divisible par H_{m_1} .
Reciproquement, supposons que $\mathcal{K}_h$ est divisible par H_{m_1} .
Le système d'équations à résoudre

$$\mathbb{C}_B^A(t,x,y;\tau^i(t,x,y,\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1}) = 0$$

$(A\ et\ B = 1,\ldots,N; i = 1,\ldots,m_1)$ se met sous forme :

$$(1_C) \quad h^A_{mC} P^{\star C}_{\ B}(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1}) + L_B^A(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1}) = 0$$

où l'inconnue est la matrice $P^{\star C}_{\ B}(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})$.
Séparons les inconnues en colonnes, en fixant i et B.On a alors un système linéaire de N équations à N inconnues $P^{\star C}_{\ B}(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})$ dont on va chercher une solution particulière localement dans $[0,T] \times [-X,X] \times S^{n-1}$.
Nous allons auparavant "élargir" les ouverts $(S_k^j(i))_{(j,k)\in P(i)}$ recouvrant $[0,T] \times [-X,X] \times S^{n-1}$.
Or, il existe une constante $A'_i > 0$ telle que

$$\mid P_k^j(t,x,y;\lambda^i(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1}) \mid > A'_i \ \ \forall\ (t,x,y;\eta,\eta_{n+1}) \ \in \ S_k^j(i)$$

Pour tout

$$(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}) \ \in \ V_k^j(i) = \Gamma_k^j(i) \bigcap \Big\{[0,T] \times \mathbb{R}^n \times [-X,X] \times \complement_{B_f^n(0,2)} B^n(0,\frac{1}{2})\Big\}$$

où $B^n(0,\frac{1}{2})$ est la boule ouverte de rayon $\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}_\eta^n$ et $B_f^n(0,r)$ celle fermée de rayon r, centrée en 0, on a :

$$| P_k^j(t,x,y;\lambda^i(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1}) |> A_i'(\frac{1}{2})^{(N-1)m} = B(i)$$

On pose

$$B_k^j(i) = inf\Big\{ | P_k^j(t,x,y;\lambda^i(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1}) |, (t,x,y;\eta,\eta_{n+1}) \in \overline{V_k^j(i)}\Big\}$$

pour tout $(j,k) \in P(i)$.

On a :

$$B_k^j(i) \geq B(i)$$

D'autre part les dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à $y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}; \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n+1}$ de $h_{mB}^A(t,x,y;\eta_0 = \tau^i, \eta, \eta_{n+1})$ étant bornées dans $\Omega = [0,T]\times\mathbb{R}^n\times[-X,X]\times$ $\complement_{B_f^n(0,2)} B^n(0,\frac{1}{2})$ et celles des $P_C^B(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})$ le sont aussi dans Ω.
On désignera par B un majorant de ces quantités .
Soit $U = (t,x,y;\eta,\eta_{n+1})$ et $U'(t,x,y;\eta,\eta_{n+1})$ deux points de Ω, on a :

$$| P_C^B(U;\tau^i(U)) - P_C^B(U';\tau^i(U')) |\leq B \parallel U - U' \parallel$$

Soit

$$W_k^j(i) = \Big\{U \in \Omega \backslash \mid P_k^j(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1}) |> \frac{B_k^j(i)}{2}\Big\}$$

Supposons que pour tout $(j,k) \in P(i), \complement_\Omega W_k^j(i) \neq \varnothing$, alors $U \in V_k^j(i)$ et $U' \in \complement_\Omega W_k^j(i)$, on a :

$$\parallel U - U' \parallel\geq \frac{B_k^j(i)}{2B} \quad car \mid P_C^B(U;\tau^i(U)) - P_C^B(U';\tau^i(U')) |> \frac{B_k^j(i)}{2}$$

On pose

$$U_k^j = \Big\{U \in \Omega; d(U, V_k^j) < \frac{B_k^j(i)}{2}\Big\}$$

On a

$$U_k^j \supset \overline{V_k^j} \quad et \quad d(\complement_\Omega U_k^j, V_k^j) = \frac{B_k^j(i)}{2},$$

les $(U_k^j)_{(j,k)\in P(i)}$ forment un recouvrement de Ω, tout comme les $(V_k^j)_{(j,k)\in P(i)}$.

De plus $U_k^j \bigcap \big([0,T]\times\mathbb{R}^n\times[-X,X]\times S^{n-1}\big) = \underline{S}_k^j(i)$ est un ouvert de $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times[-X,X]\times S^{n-1}$ contenant $\overline{S_k^j(i)}$.

On va chercher une solution particulière sur chacun des ces ouverts $\underline{S}_k^j(i)$ de $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times[-X,X]\times S^{n-1}$.
Le système (1) est de rang $N-1$ car $P_k^j(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})\neq 0$ dans $\underline{S}_k^j(i)$. Il est résoluble dans $\underline{S}_k^j(i)$ car

$$det\begin{bmatrix} h_{m_1}^1 & \dots & L_B^1 & \dots & h_{mN}^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{m_1}^k & \dots & L_B^k & \dots & h_{mN}^k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{m_1}^N & \dots & L_B^N & \dots & h_{mN}^N \end{bmatrix}(U,\tau^i(U))=0$$

dans $\underline{S}_k^j(i)$, puisque la matrice admet un noyau à gauche contenant la ligne $[P_1^j,\dots,P_k^j,\dots,P_N^j](U,\tau^i(U))$, ($\mathcal{K}_h$ étant divisible par H_{m_1}) non nulle dans $\underline{S}_k^j(i)$ ($P_k^j(U,\tau^i(U))\neq 0$ dans $\underline{S}_k^j(i)$).
Pour résoudre (1) dans $\underline{S}_k^j(i)$, on ne considère que les équations principales ($\hat{A}\neq k$) et on résoud par rapport aux inconnues principales $\hat{C}\neq j$:

$$[(h_m)_{\hat{C}}^{\hat{A}}(P^\star)_B^{\hat{C}}+(h_m)_j^{\hat{A}}(P^\star)_B^j+L_B^{\hat{A}}](U,\tau^i(U))=0$$

Multiplions à gauche par la matrice $(N-1)\times(N-1)$ $(P_{k\,\hat{A}}^{j\,\hat{E}}(U,\tau^i(U)))$ avec $\hat{E}\neq j$, on a d'après le lemme de Bourbaki [1]

$$[P_k^jH'_{m_2-m_1}P^\star{}_B^{\hat{E}}-P_k^{\hat{E}}H'_{m_2-1}P^\star{}_B^j+P_{k\,\hat{A}}^{j\,\hat{E}}L_B^{\hat{A}}](U,\tau^i(U))=0$$

On choisit une solution particulière $P^\star{}_B^{E,(j,k)}$ dans $\underline{S}_k^j(i)$:

$$(2_C)\quad\begin{cases} P^\star{}_B^{j,(j,k)}=0\ dans\ \underline{S}_k^j(i) \\ P^\star{}_B^{\hat{E},(j,k)}=-\dfrac{P_{k\,\hat{A}}^{j\,\hat{E}}L_B^{\hat{A}}}{P_k^jH'_{m_2-m_1}}(U,\tau^i(U))\quad dans\ \underline{S}_k^j(i) \end{cases}$$

Pour avoir une solution dans $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times[-X,X]\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ tout entier, on fait une partition de l'unité $(g_k^j)_{(j,k)\in P(i)}$ indéfiniment différentiable, à dérivées bornées, subordonnée au recouvrement $(U_k^j)_{(j,k)deP(i)}$ de Ω.
Alors

$$P^\star{}_B^E(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})=\sum_{(j,k)\in P(i)}g_k^j(t,x,y;\frac{\eta}{|\eta|})P^\star{}_B^{E,(j,k)}(t,x,y;\frac{\eta}{|\eta|})\mid\eta\mid^{(N-1)m-1}$$

est bien solution de (1_C) dans l'espace $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times[-X,X]\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ puisque

$$\sum_{(j,k)\in P(i)}g_k^j(t,x,y;\frac{\eta}{|\eta|})=1\ \ pour\ \ tout\ U\in\ [0,T]\times\mathbb{R}^n\times[-X,X]\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$$

Si il existe $(j,k) \in P(i)$ tel que $\complement_\Omega W_k^j(i) = \varnothing$, alors les relations (2_C) sont valables dans $[0,T]\times\mathbb{R}^n\times[-X,X]\times S^{n-1}$ tout entier et une solution particulière de (1_C) peut s'écrire

$$P^{\star}{}^E_B(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1}) = P^{\star}{}^{E,(j,k)}_B(t,x,y;\frac{\eta}{\mid \eta \mid}) \mid \eta \mid^{(N-1)m-1}$$

$P^{\star}{}^C_B(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})$ est bien homogène de degré $(N-1)m-1$ en η et c'est un symbole de Calderón-Zygmund d'après les propriétés de $(g_k^j)_{(j,k)\in P(i)}$.
Le polynôme en τ : $P^{\star}{}^C_B(t,x,y;\tau,\eta,\eta_{n+1})$ de degré $(N-1)m-1$ homogène de degré (η_0,η,η_{n+1}) peut se mettre sous la forme :

$$P^{\star}{}^C_B(t,x,y;\tau,\eta,\eta_{n+1}) = P^{\star}{}^C_{B,(N-1)m-1}(t,x,y;\tau,\eta,\eta_{n+1}) + P^{\star}{}^C_{B,(N-1)m-2}(t,x,y;\tau,\eta,\eta_{n+1})(\tau-\tau_1)$$

$$+\ldots+P^{\star}{}^C_{B,0}(t,x,y;\tau,\eta,\eta_{n+1})(\tau-\tau^{(N-1)m-m_1-1})\ldots(\tau-\tau^1)(\tau-\tau^{m_1})\ldots(\tau-\tau^1)$$

et existe donc pourvu que $d^\circ P^{\star}{}^C_B = (N-1)m-1 \geq$ nombre de valeurs -1 prises obligatoirement par $P^{\star}{}^C_B$ aux points $\tau=\tau^1,\ldots,\tau=\tau^{m_1}$ soit m_1-1, c'est-à-dire $(N-1)m-1 \geq m_1-1$ soit $Nm \geq m_1+m$
Or ceci est vérifié car :

$$P_A^D P_B^E - P_B^D P_A^E = (H_{m_1})^2 P^{DE}{}_{AB} \quad d'où\ d^\circ P_A^D \geq d^\circ H_{m_1} = m_1$$

Or on a

$$h^A_{mB} P^B_C = (H_{m_1})^2 H'_{m_2-m_1} \delta^A_C$$

D'où

$$d^\circ h^A_{mB} \leq d^\circ (H_{m_1})^2 H'_{m_2-m_1} \qquad c'est-à-dire \quad m \leq Nm-m$$

Construction de la partition de l'unité $(g^j_{kh(k,j)\in P(i)})$ à dérivées bornées

La distance de $\complement_\Omega U_k^j$ à $\overline{V_k^j}$ étant strictement positive, il existe une application $h_k^j(U)$ à valeurs dans $[0,1]$ indéfiniment différentiable, à dérivées bornées, telle que $h_k^j(U)=0$ dans $\complement_\Omega U_k^j$ et $h_k^j(U)=1$ dans $\overline{V_k^j}$ pour tout $(j,k)\in P(i)$.
En effet, soit $U=(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} v(U) = k.exp(\frac{1}{\|U\|^2-1}) \quad pour \quad \| U \| < 1 \\ \\ v(U) = 0 \quad pour \quad \| U \| \geq 1 \end{cases}$$

avec

$$k = \frac{1}{\int_{\|U\|<1} exp(\frac{1}{\|U\|^2-1})} dU, \qquad v_\delta(U) = \frac{1}{\delta^{2n+3}} v(\frac{U}{\delta})$$

Soient A et B deux fermés de $\mathbb{R}^{2n+3}$ tels que $d(A,B) > 0$ (A et B étant disjoints), il existe une fonction $\mathbb{R}^{2n+3} \to [0,1]$ indéfiniment différentiable, à dérivées bornées, égale à 0 en tout point de A et à 1 en tout point de B .
Si $\delta = d(A,B) > 0$, $B_1 = \{U; d(U,B) \leq \frac{\delta}{3}\}$, $C_1 = \{U; d(U,B) < \frac{2\delta}{3}\}$ et r un nombre > 0 et strictement inférieur à $\frac{\delta}{3}$, f une fonction : $\mathbb{R}^{2n+3} \to [0,1]$ égale à 1 sur B_1 et à 0 dans $\complement C_1$ et continue (f existe car $\mathbb{R}^{2n+3}$ est un espace normal), alors

$$f_r(U) = \int_{t\in\mathbb{R}^{2n+3}} v_r(U-t)f(t)dt \quad convient.$$

Les $(V_k^j)_{(j,k)\in P(i)}$ forment un recouvrement de Ω,

$$\Big(g_k^j(U) = \frac{h_k^j(U)}{\sum\limits_{(j',k')\in P(i)} h_{k'}^{j'}(U)}\Big)_{(j,k)\in P(i)}$$

est une partition différentiable, à dérivées bornées , de l'unité, subordonnées du recouvrement ouvert $(U_k^j)_{(j,k)\in P(i)}$de Ω.

(e) - Unicité de la solution

Montrons que dans les espaces de Sobolev cités, la seule solution du problème :

$$(1_e) \quad \begin{cases} h_B^A(t,x,y; D_t, D_y, D_x) y^B(t,x,y) = 0 \\ y_0^B(y,x) = \ldots = y_{m-1}^B(y,x) = 0 \quad (\forall B = 1, \ldots, N) \\ (Données\ de\ cauchy\ nulles\ sur\ t=0) \end{cases}$$

est la solution nulle lorsque la condition de Levi généralisée est satisfaite .

En effet, considérons l'adjoint de l'équation de l'opérateur (h_B^A) que l'on notera $(\widehat{h_B^A}) = ((\hat{h})_B^A)$; on a :

$$(\widehat{h_B^A}) = \Big((-1)^m\ {}^t h_{mB}^A + (-1)\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\ {}^t h_{mB}^A + (-1)^{m-1}\ {}^t h^{\star}{}_{m-1}{}^{A}_{B} + \ldots\Big)$$

où l'on reconnait que la matrice caractéristique de $(\widehat{h_B^A})$ et $((-1)^m\ {}^t h_{mB}^A)$ et la partie homogène de degré $m-1$ se son symbole complet est

$$(-1)\sum_\alpha \frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\ {}^t h_{mB}^A + (-1)^{m-1}\ {}^t h^{\star}{}_{m-1}{}^{A}_{B}$$

en désignant par ${}^tM$ la transposée de la matrice M.
Si on applique à l'opérateur $(\widehat{h^A_B})$, la méthode de construction de solution pour le problème de Cauchy relatif à (h^A_B) exposé précèdemment, on forme de la même façon, en notant abusivement $(\widehat{\mathbb{C}^A_B})$ le $(\mathbb{C}^A_B)$ à l'opérateur $\widehat{h^A_B}$,

$$\mathbb{C}^A_B(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1}) = \frac{(-1)^{Nm}}{(H_{m_1})^2(H'_{m_2-m_1})(t,x,y;1,0,0)}\Big\{{}^th^A_{mC}\hat{P}^{\star C}_{B}+\sum_\alpha(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\,{}^th^A_{mC})\,{}^tP^C_B$$

$$+\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\,{}^th^A_{mC}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}{}^th^C_{mB}-{}^th^{\star A}_{\ C}\,{}^tP^C_B-[H'_{m_2-m_1}\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}H_{m_1}]\delta^A_B\Big\}(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})$$

(on note aussi abusivement $\hat{P}^{\star C}_{B}$ le $P^{\star C}_{B}$ relatif à $\hat{h}$).

On a :

$$\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}({}^th^A_{mC}\;{}^tP^C_B) = (\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}{}^th^A_{mC})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}{}^tP^C_B) + (\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\;{}^th^A_{mC})\;{}^tP^C_B$$

$$+\,{}^th^A_{mC}\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\;{}^tP^C_B+(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}{}^th^A_{mC})(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}{}^tP^C_B) = 2H'_{m_2-m_1}(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}H_{m_1})\quad (mod\;\, H_{m_1})$$

D'où

$$\hat{\mathbb{C}}^A_B(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1}) = \frac{(-1)^{Nm+1}}{(H_{m_1})^2H'_{m_2-m_1}(t,x,y;1,0,0)}\Big\{-\,{}^th^A_{mC}\hat{P}^{\star C}_{B}+{}^th^{\star\ A}_{m-1C}\,{}^tP^C_B+$$

$$(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}{}^th^A_{mC})(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}{}^tP^C_B)+{}^th^A_{mC}\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\;{}^tP^C_B-H'_{m_2-m_1}(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}H_{m_1})\delta^A_B\Big\}(t,x,y;\tau^i,\eta,\eta_{n+1})$$

pour $i=1,\ldots,m_1$; A et $B=1,\ldots,N$.

Multiplions $\hat{\mathbb{C}}^A_B(t,x,y;\tau^1,\eta,\eta_{n+1})$ par la ligne $[P^1_{\delta_1},\ldots,P^B_{\delta_1},\ldots,P^N_{\delta_1}]$ à gauche ; on trouve :

$$\frac{P^{\gamma_1}_C h^{\star\ C}_{m-1D}P^D_{\delta_1} - (\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}P^{\gamma_1}_C)h^C_{mD}(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}P^D_{\delta_1}) - H'_{m_2-m_1}P^{\gamma_1}_{\delta_1}(\frac{\partial}{\partial\eta_\alpha}H_{m_1})(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}H_{m_1})}{P^{\gamma_1}_{\delta_1}}$$

$$\times\frac{(-1)^{Nm+1}}{(H_{m_1})^2H'_{m_2-m_1}(t,x,y;1,0,0)}\times[P^1_{\delta_1},\ldots,P^B_{\delta_1},\ldots,P^N_{\delta_1}](t,x,y;\tau^1(t,x,y;\eta,\eta_{n+1}),\eta,\eta_{n+1})$$

pour $(t,x,y;\eta,\eta_{n+1})\in\Gamma^{\gamma_1}_{\delta_1}$.

Si $\mathcal{K}_h$ est divisible par H_{m_1}, $(\hat{h}^A_B)$ possède les mêmes propriétés que (h^A_B), on peut donc appliquer le théorème d'existence du paragraphe (d) et affirmer que le problème de Cauchy rétrograde

$$(2_E)\quad \begin{cases} \hat{h}^A_B z^A = g^A \\ Donn\acute{e}es\ de\ Cauchy\ z^B(\theta;x,y),\ldots,[(\frac{\partial}{\partial y_0})^{m-1}z^B](\theta;y,x) \\ pour\ \theta\ fix\acute{e}\ dans\ [0,T] \end{cases}$$

possède une solution au moins dans les espaces déjà cités.

Soit $[0,\theta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}=b_\theta$, on a l'existence et l'égalité des intégrales

$$\int_{b_\theta}\sum_A (h^A_B y^B) z^A dtdydx = \int_{b_\theta}\sum_A (\hat{h}^A_B y^B) z^A dtdydx$$

y^B étant une solution du problème (1_D) et (z^B) une solution du problème (2_C) pour vu que les données $[z^B(\theta;y,x),\ldots,(\frac{\partial}{\partial t})^{m-1}z^B(\theta;y,x)]$ soient nulles
.
D'où

$$\int_{b_\theta}\sum_A y^A g^A dtdydx = 0 \quad pour\ toute\ fonction\ g_A\in C^0_t(H^{p+1}).$$

On en déduit que

$$\int_{b_\theta}\sum_A y^A g^A dtdydx = 0 \quad pour\ toute\ fonction\ g^A\in C^0_t(H^{p})$$

En effet : $C_t(H^p)\subset C_t(L^2)$ et d'autre part $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ est dense dans H^p pour la norme de H^p, donc pour la norme de L^2 ; on approxime g^A par les fonctions de la forme

$$g^A_a(t,x,y) = \Big\{\theta_a(x,y)_{(x',y')} * [\alpha_a(x',y')g^A(t,x',y')]\Big\}(t,x,y)$$

(Yoshida,Functional Analysis, p.38).
pour la norme de $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ uniformément par rapport à t dans $[0,\theta]$

$$\mid \int_{b_\theta}\sum_A y^A(g^A-g^A_a)dtdxdy \mid$$

$$\leq \int_0^\theta \parallel (y^A) \parallel_{(L^2)^N}\parallel (g^A-g^A_a) \parallel_{(L^2)^N} dy_0$$

$\leq \theta \parallel (y^A) \parallel_{(L^2)^N} sup_{y_0 \in [0,\theta]} \parallel (g^A - g_a^A) \parallel_{(L^2)^N} (y_0) \to 0 \quad quand \quad a \to \infty$

D'où $y^A = 0$ dans L^2 pour tout θ, car s'il existe $\theta \in [0,T]$ tel que $y^A(\theta,.) \neq 0$ pour la norme L^2,on pourrait trouver un voisinage $V_\theta = [\theta', \theta"]$ de θ dans $[0,T]$ dans lequel $inf\Big\{ \parallel (y^A) \parallel_{L^2} (y_0); y_0 \in V_\theta \Big\} > 0$ et en choisissant $g^A = y^A$, on aurait

$$0 = \int_0^{\theta'} \sum_A \parallel y^A \parallel {}^2{}_{L^2} dy_0 \geq \int_{\theta'}^{\theta"} \sum_A \parallel y^A \parallel {}^2{}_{L^2} dy_0 \geq inf_{y \in [\theta', \theta"]} \sum_A \parallel y^A \parallel_{L^2} {}^2(y_0)(\theta" - \theta')$$

Ce qui est impossible.
D'où

$$y^A(t,.) = 0 \quad dans \quad L^2(\mathbb{R}^{n+1}) \quad pour\ tout \quad t \in [0,T];$$

or $y^A \in C_t(H^{m+p-1}), \ldots, (\frac{\partial}{\partial t})^{m-1} y^A \in C_t(H^p)$, d'où $(y^A)^A$ nulle dans cet espace .
Ceci complète la preuve du Théorème 2.0.

2.1.2 Domaine de dépendance pour le problème de Cauchy C^∞ lorsque l'opérateur h vérifie les conditions de (A.1)-(A.2) et que $a_{ij}(t,x,y;D_y)$ est une matrice d'opérateurs différentiels d'ordre $m-(i+j)$, $(\forall(i,j)$ tel que $i+j\leq m)$

([8])

1. **Propriétés d'hyperbolicité du radical caractéristique**

En désignant par $(y';\eta') = (t,x,y;\tau,\xi,\eta)$ le point générique du fibré cotangent $T^\star(\mathbb{R}^{n+2})$ avec $y' = (t,x,y) = (y_{-1},y_0,y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$ et $\eta' = (\tau,\xi,\eta) = (\eta_{-1},\eta_0,\eta_1,\dots,\eta_n) \in T^\star(\mathbb{R}^{n+2}) = \mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$
Soit $\mathcal{N}' = (\mathcal{N}_{-1},\mathcal{N}_0,\mathcal{N}) = (\mathcal{N}_{-1},\mathcal{N}_0,\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2,\dots,\mathcal{N}_n)$ un champ de covecteurs sur $\mathbb{R}^{n+2}$ de composantes en chaque point $y'\in\mathbb{R}^{n+2}$,
Pour tout $y' = (t,x,y) = (t,x,y_1,\dots,y_n) = (y_{-1},y_0,y_1,y_2,\dots,y_n)$, on a :

$\mathcal{N}'_{y'}=\mathcal{N}'(y')=(\mathcal{N}_{-1}(y'),\mathcal{N}_0(y'),\mathcal{N}(y'))=(\mathcal{N}_{-1}(y'),\mathcal{N}_0(y'),\mathcal{N}_1(y'),\mathcal{N}_2(y'),\dots,\mathcal{N}_n(y'))$.
On désignera également le covecteur $\mathcal{I}_t$ (resp. $\mathcal{I}_x$) dont les composantes sont $(\tau=1,\xi=0,\eta=0)$ (resp. $(\tau=0,\xi=1,\xi=1)$).

Nous rappelons les définitions et propriétés suivantes :

Définition 2.1 *([14]).*

L' application

$$\mathcal{R}(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = (H_{m_1}H'_{m_2-m_1})(t,x,y;\tau,\xi,\eta) = \mathcal{R}(t,x,y;\mathcal{I}_t)\prod_{j=1}^{m_2}(\tau-\tau^j(t,x,y;\xi,\eta))$$

est le radical caractéristique de h des racines $\tau^j(t,x,y;\xi,\eta)_{1\leq j\leq m_2}$.

Définition 2.2 *([14]).*

On considère $\mathcal{R}(y',\eta')$ le radical caractéristique,il est dit hyperbolique par rapport au champ de covecteur $\mathcal{N}'$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$ si pour tout $y\in\mathbb{R}^{n+2}$, on a :

(a) $\mathcal{R}(y';\mathcal{N}'_{y'})\neq 0$

(b) $\mathcal{R}(y';\eta'+\alpha\mathcal{N}'_{y'})$ *n'a que des zéros réels en* α *quel que soit* $\eta'\in\mathbb{R}^{n+2}$

Propriété 1 *([14]).*

Supposons que $\mathcal{R}$ soit hyperbolique par rapport au champ de covecteurs $\mathcal{N}'$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$.
Soit $\Gamma_{y'}(\mathcal{R},\mathcal{N'}_{y'})$ l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}^{n+2}$ tels que $\mathcal{R}(y';\theta+\alpha\mathcal{N'}_{y'})$ n'ait que des zéros négatifs en α, y étant fixé dans $\mathbb{R}^{n+2}$. On a alors les résultas suivants :

(a) *$\Gamma_{y'}(\mathcal{R},\mathcal{N'}_{y'})$ est la composante connexe contenant $\mathcal{N'}_{y'}$ de l'ouvert $\{\eta \in \mathbb{R}^{n+2}; \mathcal{R}(y';\mathcal{N'}_{y'}) \neq 0\}$*

(b) *$\Gamma_{y'}\mathcal{R}(y',\mathcal{N'}_{y'})$ est un demi-cône connexe, épointé de sommet 0.*

(c) *$\mathcal{R}(y,\eta')$ est hyperbolique par rapport à tout champ de covecteurs θ tel que $\theta \in \Gamma_y(\mathcal{R},\mathcal{N}_y)$ quel que soit $y \in \mathbb{R}^{n+2}$.*

D'après les hypothèses sur h , le radical caractéristique $\mathcal{R}$ de h est hyperbolique par rapport au champ constant de covecteurs sur $\mathbb{R}^{n+2}$ noté $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_{y'})_{y'\in\mathbb{R}^{n+2}}$ avec $\mathcal{I}'_y$ de comopantes $\eta_{-1} = 1$ et $\eta_0 = \eta_1 = \ldots = \eta_n = 0$ suivant h pour tout $y' \in \mathbb{R}^{n+2}$.

Pour chaque $y' \in \mathbb{R}^{n+2}$, on pose

$$\begin{aligned}
\Gamma_y^+ &= \Gamma(\mathcal{R},\mathcal{I}_y) \subset T^\star(\mathbb{R}^{n+2}) = \mathbb{R}^{n+2}\\
\Gamma_y^- &= \Gamma(\mathcal{R},-\mathcal{I}_y) = -\Gamma_y^+ \subset T^\star(\mathbb{R}^{n+2}) = \mathbb{R}^{n+2}\\
\Gamma_y &= \Gamma_y^+ \cup \Gamma_y^- \subset T^\star(\mathbb{R}^{n+2}) = \mathbb{R}^{n+2}
\end{aligned}$$

Propriété 2 .

$\mathcal{R}(y';\eta')$ est hyperbolique par rapport à tout champ de covecteurs $\mathcal{N}'$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$ tel que $\mathcal{N'}_{y'} \in \Gamma_{y'}$ quel que soit $y' \in R^{n+2}$.

Rappelons que

$$0 < \tau_{max} = max\Big\{ \mid \tau^j(y';\xi,\eta) \mid ; \mid (\xi,\eta) \mid = 1, y' \in \mathbb{R}^{n+2}, 1 \leq j \leq m_2 \Big\} < \infty$$

On note :

$\mathcal{V}_t^+$ *représente le demi − cône connexe, ouvert, de sommet* 0,
d'équation $\tau - \tau_{max} \mid (\xi,\eta) \mid > 0$ *dans* $T^\star_{y'}(\mathbb{R}^{n+2})$,

$\mathcal{V}_t^-$ *représente le demi − cône connexe, ouvert, de sommet* 0,
d'équation $\tau - \tau_{max} \mid (\xi,\eta) \mid < 0$ *dans* $T^\star_{y'}(\mathbb{R}^{n+2})$,

$\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_t^+ \cup \mathcal{V}_t^-$ *représente le cône ouvert, de sommet* 0,
d'équation $(\tau)^2 - (\tau_{max})^2 \mid (\xi,\eta) \mid^2 > 0$ *dans* $T^\star_{y'}(\mathbb{R}^{n+2})$

On a le résultat suivant :

Propriété 3 .

D'après les notations précedentes, on a :

$$\Gamma_{y'}(R\,;\mathcal{N'}_{y'}) = \Gamma^+_{y'} \qquad si \quad N'_{y'} \in \Gamma^+_{y'}$$
$$\Gamma_{y'}(R\,;N'^-_{y'}) = \Gamma^-_{y'} \qquad si \quad N'_{y'} \in \Gamma^-_{y'}$$

$$\mathcal{I}_{y'} \in \mathcal{V}^+_{y'} \subset \Gamma^+_{y'} \subset T^\star_{y'}(\mathbb{R}^{n+2})$$
$$-\mathcal{I}_{y'} \in \mathcal{V}^-_{y'} \subset \Gamma^-_{y'} \subset T^\star_{y'}(\mathbb{R}^{n+2})$$

Rappelons que $\Delta^j_h(y';\eta') = \tau - \tau_j(y';\xi,\eta)(j=1,\ldots,m_2)$ suivant h . Δ^j est de classe $C^0(\mathbb{R}^{n+2}\times\mathbb{R}^{n+2})$ lorsque l'on prolonge τ_j par continuité en lui donnant la valeur 0 en tout point $(y';0)$, τ_j(resp. ξ_j) étant homogène de degré 1 en η'. Grâce à la connexité de la droite $\{\eta' + \alpha\mathcal{N'}_{y'};\alpha\in\mathbb{R}\}$ et à l'hyperbolicité de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{N}'$, on a la propriété 4.

Remarque 2.1 .

$$\Delta_j \textit{ désignera } \Delta^j_h$$

Propriété 4 .

Soit $\mathcal{N}'$ *un champ de covecteurs sur* $\mathbb{R}^{n+2}$ *tel que* $\mathcal{N'}_{y'} \in \mathcal{V}_{y'}$ $(\forall y' \in R^{n+2})$. *Alors quels que soient* $y' \in \mathbb{R}^{n+2}$ *et* $\eta' \in \mathbb{R}^{n+2}$, *l'équation en* α

$$\Delta_j(y';\eta' + \alpha\mathcal{N'}_{y'}) = 0$$

possède une solution réelle et une seule $\alpha = \alpha^j_{\mathcal{N}'}(y';\eta')$ *et définit une fonction* $\alpha^j_{\mathcal{N}'}$ *sur* $\mathbb{R}^{n+2}\times\mathbb{R}^{n+2}$ *telle que* $\alpha^j_{\mathcal{N}'}(y';\eta')$ *soit positivement homogène de degré 1 en* η' *quel que soit* $y' \in \mathbb{R}^{n+2}$. *On obtient de plus les relations :*

(a) $\Delta^j(y';\eta' + \alpha\mathcal{N}'_{y'}) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \alpha^j_{\mathcal{N}'}(y';\eta') = 0$

(b) $\mathcal{R}_((y';\mathcal{N}'_{y'}) = \mathcal{R}_h(y';\mathcal{I}_t)\prod_{j=1}^{m_2}\Delta^j(y';\mathcal{N}'_{y'})$

(c) $\mathcal{R}(y';\eta' + \alpha\mathcal{N}'_{y'}) = \mathcal{R}(y';\mathcal{I}_t)\prod_{j=1}^{m_2}\Delta^j(y';\eta' + \alpha\mathcal{N}'_{y'})$

(d) $\mathcal{R}(y';\eta' + \alpha\mathcal{N}'_{y'}) = \mathcal{R}(y';\mathcal{I}_t)\prod_{j=1}^{m_2}(\alpha - \alpha\mathcal{N}'^j(y';\eta'))$

Définition 2.3 .

On dira que le champ de covecteurs $\mathcal{N}'$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$ appartient au champ de cône $\mathcal{V}$ (resp. de demi-cônes $\mathcal{V}^+$ ou $\mathcal{V}^-$) et on notera $\mathcal{N} \in \mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}^+$ ou $\mathcal{V}^-$) si $\mathcal{N}'_{y'} \in \mathcal{V}_{y'}$ (resp. $\mathcal{V}^+{}_{y'}$ ou $\mathcal{V}^-{}_{y'}$) pour tout $y' \in \mathbb{R}^{n+2}$

Par simple application du théorème des fonctions implicites dans le cas où h vérifie les bonnes hypothèses, on a la propriété suivante :

Propriété 5 .

Quel que soit le champ de covecteurs $\mathcal{N}' \in \mathcal{V}$, la fonction $\alpha^j_{\mathcal{N}'}(y';\eta')$ définie implicitement par l'équation en α

$$\Delta_j(y';\eta' + \alpha\mathcal{N}'_{y'}) = 0$$

en chaque point $(y';\eta')$ de $\mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2}$ et positivement homogène de degré 1 en η', est continue en η' dans $\mathbb{R}^{n+2}$ pour chaque y' fixé dans $\mathbb{R}^{n+2}$.

A l'aide de cette propriété 5, par des raisonnements de type ([14]), on déduit successivement les unes des autres , les propriétés 6,7 et 8 suivantes :

Propriété 6 .

Lorsque $\mathcal{N}'_{y'} \in V_{y'}$, soit $\Gamma_{y'}(\Delta_{y'}, \mathcal{N}'_{y'}) = \{\theta \in \mathbb{R}^{n+2}$; la racine en α de $\Delta_j(y', \eta' + \alpha\mathcal{N}'_{y'}) = 0$ soit strictement négative$\}$; on a alors les résultats suivants :

(a) *$\Gamma_{y'}(\Delta_{y'}, \mathcal{N}'_{y'})$ est la composante connexe contenant $\mathcal{N}'_{y'}$ de l'ouvert $\{\theta \in \mathbb{R}^{n+2}; \Delta_j(y';\theta) \neq 0\}$*

(b) $\Gamma_{y'}(\Delta_{y'}, \mathcal{N}'_{y'})$ *a pour frontière* $\Sigma^j_{y'}$ *d'équation* $\Delta_j(y';\eta') = 0$

(c) $\Gamma_{y'}(\Delta_{y'}, \mathcal{N}'_{y'})$ *est un demi-cône , de sommet 0, épointé.*

Propriété 7 .

Pour chaque y' *fixé dans* $\mathbb{R}^{n+2}$*, on a :*

$$\mathcal{I}_{y'} \in \mathcal{V}^+{}_{y'} \subset \Gamma^+_{y'} \subset \Gamma_{y'}(\Delta_j, \mathcal{I}_{y'})$$

Quel que soit $\mathcal{N} \in \mathcal{V}^+$ *et* $j = 1; \dots m_2$*,*

$$-\mathcal{I}_{y'} \in \mathcal{V}^-{}_{y'} \subset \Gamma^-_{y'} \subset \Gamma_{y'}(\Delta_j, -\mathcal{I}_{y'})$$

Quel que soit $\mathcal{N} \in \mathcal{V}^-$ *et* $j = 1; \dots m_2$*,*

On pose :

$${}^j\Gamma^+_{y'} = \Gamma_{y'}(\Delta_{y'}, \mathcal{N}'_{y'}) \ \ \textit{et} \ \ {}^j\Gamma^-_{y'} = \Gamma_{y'}(\Delta_{y'}, -\mathcal{N}'_{y'})$$

D'où

$$\mathcal{I} \in \mathcal{V}^+ \subset \ {}^j\Gamma^+ \ {}_{(1 \le j \le m_2)}$$
$$-\mathcal{I} \in \mathcal{V}^- \subset \ {}^j\Gamma^- \ {}_{(1 \le j \le m_2)}$$

Propriété 8 .

Quels que soient $\mathcal{N}'_{y'} \in V^+_{y'}$ *(resp.* $\mathcal{V}'^-_{y'}$*) et* $\theta_{y'} \in {}^j\Gamma^+_{y'}$ *(resp.* ${}^j\Gamma^-_{y'}$*), le segment* $[\mathcal{N}_{y'}, \theta_{y'}]$ *joignant* $\mathcal{N}_{y'}$ *à* $\theta_{y'}$ *dans* $\mathbb{R}^{n+2}$ *est inclus dans* ${}^j\Gamma^+_{y'}$ *(resp.* ${}^j\Gamma^-_{y'}$*)*

Avec un raisonnement par l'absurde, on déduit de la propriété 8, la propriété suivante

Propriété 9 .

Dans $T^\star_y(\mathbb{R}^{n+2}) = \mathbb{R}^{n+2}$*, tout hyperplan tangent à* $\Sigma^j_{y'}$ *en un point* η' *est inclus dans* $C_{\mathbb{R}^{n+2}}\Gamma_{y'}$

Soit $\mathcal{N}$ un champ C^∞ de covecteurs sur $\mathbb{R}^{n+2}$ appartenant à $\mathcal{V}$, on pose :

(a) $\tau^j_{\mathcal{N}}(y', \eta) = \alpha^j_{\mathcal{N}}(y', 0, 0, \eta)$ *pour tout* $(y'; \eta) \in \mathbb{R}^{n+2} \times (\mathbb{R}^n \setminus (0, 0))$.
On a alors les relations suivantes déduites des équations (a) et (d) de la Propriété 4 :

(b) $\Delta_j(y'; \alpha\mathcal{N}_t(y'), \eta + \alpha\mathcal{N}(y')) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \tau^j_{\mathcal{N}}(y'; \eta) = 0$

(c) $\mathcal{R}(y';\alpha\mathcal{N}_t(y'),\eta+\alpha\mathcal{N}(y')) = \mathcal{R}((y';\alpha\mathcal{N}_{y'})\prod_{j=0}^{l-1}(\alpha-\tau^j_{\mathcal{N}}(y';\eta))$ pour tout $y' \in \mathbb{R}^{n+2}$, tout $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ et $j = 1,\ldots,m_2$

Grâce à la propriété 9, on démontre que

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\Delta_j(y';\alpha\mathcal{N}_t(y'),\eta+\alpha\mathcal{N}(y'))] \neq 0 \text{ } lorsque \text{ } \alpha = \tau^j_{\mathcal{N}}(y';\eta)$$

Par application du théorème des fonctions implicites, on obtient alors le résultat de régularité C^∞ suivant :

Propriété 10 .

Pour tout champ de covecteurs $\mathcal{N}' = (\mathcal{N}_{-1},\mathcal{N}_t,\mathcal{N})$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$, de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ et tel que

$$inf\{|\ \mathcal{N}_t(y')\ | - \tau_i\ |\ \mathcal{N}(y')\ |; y' \in \mathbb{R}^{n+2}\} > 0,$$

la fonction $\tau^j_{\mathcal{N}} : \mathbb{R}^{n+2} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}) \to \mathbb{R}$ determinée implicitement en chaque point $(y',\eta) \in \mathbb{R}^{n+2} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ par l'équation en α $\Delta_j(y';\alpha\mathcal{N}_t(y'),\eta+\alpha\mathcal{N}(y')) = 0$ est de classe S^1.
De plus $\tau^j_{\mathcal{N}}(y';\eta)$ est positivement homogène de degré 1 en η sur $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ et peut être donc se prolonger continument à $\mathbb{R}^n$ en posant $\tau^j_{\mathcal{N}}(y';0) = 0$ ($\forall y' \in \mathbb{R}^{n+2}$).

Propriété 11 .

Quels que soient $j = 1,\ldots,m_2$, por tout champ de covecteurs $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ tel que

$$inf\{|\ \mathcal{N}_t(y')\ | - \tau_i\ |\ \mathcal{N}(y')\ |; y' \in \mathbb{R}^{n+2}\} > 0,$$

il existe des fonctions réelles $\Psi(y';\alpha,\eta)$ définies sur $\mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ positivement homogène de degré 0 en (α,η), indéfiniment différentaibles dans l'ouvert $\{(y',\alpha,\eta) \in \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \eta+\lambda\mathcal{N}(y') \neq 0, \forall\lambda \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2}$ et au voisinage de chaque point de type $(y', p^\gamma_{\mathcal{N}}(y';\eta),\eta) \in$

$\mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ $(\forall \gamma = 1, \dots m_2)$ *telles que*

$$\begin{cases} \Delta_j(y'; \alpha \mathcal{N}_t(y'), \eta + \alpha \mathcal{N}(y') = \\ \\ = (\mathcal{N}_t(y') - \tau^j(y', \mathcal{N}(y')))\Psi_j(y'; \alpha, \eta)(\alpha - \tau^j_{\mathcal{N}}(y', \eta)) \\ \\ \textit{pour tout } (y';\alpha, \eta) \textit{ de } \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ \\ \prod_{j=0}^{l-1,m-1} \Psi_j(y'; \alpha, \eta) = 1 \textit{ pour tout } (y';\alpha, \eta) \textit{ de } \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

2. **Les conditions de Levi L_1 et l'unicité de la solution du problème de Cauchy local à données sur des hypersurfaces spatiales de $\mathbb{R}^{n+2}$ - Domaine de dépendance**

   A l'aide des propriétés 10 et 11, on démontre le lemme suivant :

   Lemme 1 .

   Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ *à dérivées premières bornéee sur* $\mathbb{R}^{n+2}$ *telle que*

$$\begin{cases} inf\left\{ \mid \frac{\partial \Phi}{\partial_t} \mid -\tau_{max} \mid grad_y \Phi \mid ; y' = (t = y_{_{-1}}, x = y_{_0}, y) \in \mathbb{R}^{n+2} \right\} > 0, \\ \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^n, \textit{ on a } \Phi(\mathbb{R}, x, y) = \mathbb{R} \\ \\ \exists M > 0 \textit{ et } C \in \mathbb{R} \textit{ tels que } \Phi(y') = t + C \textit{ lorsque } \mid y' \mid > M \end{cases}$$

On a alors les résultats suivants :

(a) La transformation $\Psi : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ *définie par*

$$\begin{cases} \eta' = (\tau, \xi, \eta) = \Psi(t, x, y) = \Psi(y') \\ \tau = \Phi(t, x, y) \\ \xi = x - e_0 \\ \eta = y - e \text{ où } e' = (e_{-1}, e_0, e) \text{ est fixé dans } \mathbb{R}^{n+2} \end{cases}$$

est un difféomorphisme C^∞ *de* $\mathbb{R}^{n+2}$ *sur* $\mathbb{R}^{n+2}$.

(b) L' opérateur $\tilde{h}$ *définis par*

$$\tilde{h}v = (h(v \circ \Psi) \circ \Psi^{-1}$$

vérifie les mêmes hypothèses que celles émises sur h *.*

(c) Si h *vérifie les conditions de Levi* L_1*,il est en de même pour* $\tilde{h}$ *.*

Le difféomorphisme Φ transporte l'opérateur h et vérifiant L_1 en l'opérateur $\Psi(h) = \tilde{h}$ de même nature que h et vérifiant L_1.

Lemme 1'

Soit $v \in C^m(\mathcal{O})$ vérifiant

$$\begin{cases} hv = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{O} \text{ voisinage de } 0 \in \mathbb{R}^{n+2} \\ v|_{t=0} = \ldots = D_t^{m-1} v_{|t=0} = 0 \text{ sur } \mathcal{O} \cap \Pi_0 \end{cases}$$

où Π_0 est l'hyperplan de $\mathbb{R}^{n+2}$, d'équation $t = 0$.
Alors v s'annule dans un voisinage $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ de $0 \in \mathbb{R}^{n+2}$.

Preuve

Le lemme 1' résulte du lemme 1 par transport par Ψ du problème précédent sur un problème des paraboloïdes spatiaux , puis prolongement sur le problème suivant :

$$\begin{cases} \tilde{h}\tilde{v} = 0 \quad \text{dans une bande } [0, \epsilon] \times \mathbb{R}^{n+1} \\ \tilde{v} \;|_{t=0} = \ldots = (D_t^{m-1})\tilde{v}_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

auquel on applique le théorème 2.0 ; d'où $\tilde{v} = 0$ et par la suite $v = 0$.
On en déduit

Proposition (Domaine de dépendance)

Soient $e' = (e_{-1}, e_0, e) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que $e_{-1} > 0$ et

$D(e_{-1}, e_0, e) = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^{n+2}; \mid (x - e_0, y - e) \mid < \tau_{max}(e_{-1} - t), t \leq e_{-1}\}$

où

$$\tau_{max} = max_{t \in [0, e_{-1}], |x| \leq X, y \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq m_2; |(\xi, \eta)| = 1, X > 0} \mid \tau_i(t, x, y; \xi, \eta) \mid$$

Soit $v \in (D(e_{-1}, e_0, e)) \cap \mathbb{R}_+^{n+2}$ vérifiant le problème

$$\begin{cases} hv = 0 \quad \text{ } dans \quad D(e_{-1}, e_0, e) \cap \mathbb{R}_+^{n+2} \\ v|_{t=0} = \ldots = D_t^{m-1} v_{|t=0} = 0 \ sur \ \Pi_0 \cap D(e_{-1}, e_0, e) \end{cases}$$

alors $v = 0$ dans $D(e_{-1}, e_0, e) \cap \mathbb{R}_+^{n+2}$.

2.2 Preuve du Théorème 1

2.2.1 Inégalités d'Energie

Soit

$$(2.1) \qquad \tau'_{max} = max_{\{t \ \in [0,T], |x| \leq X, y \ \in \mathbb{R}^n, |\xi|=1, i=1,\ldots,m_2\}} \mid \tau_i(t, x, y; \xi, 0) \mid$$

$$(2.2) \qquad \mathcal{D}(t_0, x_0) = \{(t, x, y); \mid x - x_0 \mid < \tau'_{max}(t_0 - t), \ t \leq t_0\}$$

$$\Omega(t_0, X_0) = \bigcup_{|x_0| < X_0} \mathcal{D}(t_0, x_0), \ X_0 > 0.$$

On prend un point (t_0, X_0) . Posons :

$$\Omega(t_0, X_0) \equiv \Omega.$$

Et on note $\Omega(s)$ l'intersection de Ω et de l'hyperplan $t = s.Soit$

$$\Omega(s) = \Omega \cap \{(s, x, y)\}$$

Proposition 2.1 .

On considère le problème suivant :

$$(2.3) \qquad \begin{cases} hv = f \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y}) \\ D^i_t v \mid_{t=0} = \phi_i(x, y) \in \tilde{H}^\infty_{x,y}, 0 \leq i \leq m - 1 \end{cases}$$

où

$$\tilde{H}^\infty_{x,y} = \left\{ f \ \in \ C^\infty_{x,y}; \int_{|x|<X} \int_{\mathbb{R}^n} \mid D^\alpha_x D^\beta_y f(x, y) \mid^2 dxdy < \infty, \quad \forall \ \alpha, \beta, X > 0 \right\}.$$

Sous les suppositions $(A - 1)$ et $(A - 2)$, la solution du problème de Cauchy (2.3) admet l'éstimation suivante :

$$(2.4) \qquad \sum_{i=0}^{m-2+p} \parallel D^i_t v \parallel_{\bar{k}+m-2+p-i, \Omega(t)}$$

$$\leq C_1(\bar{k},p)\Big\{\sum_{i=0}^{m-1} \| \phi_i \|_{\bar{k}+m-1+p-i,\Omega(0)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{\bar{k}+p-i,\Omega(s)} ds\Big\}$$

où $C_1(\bar{k},p)$ est une constante dépendante de $\bar{k}$,p et $\Omega(t)$ mais indépendante de f et de $\{\phi_i\}$.

Preuve de la Proposition 2.1

Pour la preuve, nous allons utiliser le théorème 2.0 et les deux lemmes suivants, grâce aux quelles,on localise les inégalités sur $\Omega(t), \Omega(0)$ *et* $\Omega(s)$ respectivement(h n'est différentiel que relativement à t et à x et pas par rapport à y).

Lemme 2 .
On considère le problème (2.3) .
On suppose $(A-1)$, $(A-2)$ *et en plus* $f \in \mathcal{E}_t(H^\infty_{x,y}), \phi_i(x,y) \in H^\infty_{x,y}$, *alors la solution du problème (2.3) a une éstimation suivante :*

(2.5)
$$\sum_{i=0}^{m-2+p} \| D_t^i v \|_{\bar{k}+m-2+p-i} \leq C_1(\bar{k},p)\{\sum_{i=0}^{m-1} \| \phi_i \|_{\bar{k}+m-1+p-i} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{\bar{k}+p-i} ds\}.$$

Le lemme 2 résulte du Théorème 2.0 .

Lemme 3 .
Dans le problème de Cauchy (2.3), le domaine de dépendance du point (t_0, x_0, y) *est* $\mathcal{D}(t_0, x_0)$.
Ce qui signifie :
Si $f \equiv 0$ *dans* $\mathcal{D}(t_0,x_0)$ *et* $\phi \equiv 0$ *dans* $\mathcal{D}(t_0,x_0) \cap \{t=0\}$, *alors* $v \equiv 0$ *dans* $\mathcal{D}(t_0,x_0)$.

Preuve du Lemme 3

Rappelons que :

$$\begin{array}{l}
\tau'_{max} = max_{\{t\ \in[0,T],|x|\leq X, y\ \in \mathbb{R}^n, |\xi|=1, i=1,\dots,m_2\}} \mid \tau'_i(t,x,y;\xi,0) \mid \\
avec \quad \overline{\lim}_{X\to\infty}\tau'_{max} < \infty \\
\mathcal{D}_-(t_0,x_0) = \mathcal{D}(t_0,x_0) = \{(t,x,y); \mid x-x_0 \mid < \tau'_{max}(t_0-t),\ t\leq t_0\} \\
\mathcal{D}_+(t_0,x_0) = \{(t,x,y); \mid x-x_0 \mid < \tau'_{max}(t-t_0),\ t\leq t_0\}
\end{array}$$

Soit v vérifiant

$$\begin{cases} hv = f \quad (= 0\ dans\ \mathcal{D}_-(t_0,x_0)\cap \mathbb{R}^{n+2}_+) \\ D^j_t v \mid_{t=0} = \phi_j(x,y) \quad (= 0\ dans\ \mathcal{D}_-(t_0,x_0)\cap\{t=0,x,y\} \quad ; 0\leq j\leq m-1 \end{cases}$$

On considère la famille de surfaces spatiales pour h notées S^-_λ dans $\mathbb{R}^{n+2}$ d'équations

$$t = t_0 - \frac{1}{\tau'_{max}}\sqrt{\lambda + \mid x-x_0 \mid^2} \quad (\lambda > 0).$$

On a

$$\mathcal{D}_-(t_0,x_0) = \bigcup_{\lambda\in]0,(\tau'_{max}t_0)^2]} S^-_\lambda$$

On démontre qu'il existe $\Gamma_\lambda > 0$ et $\Theta_\lambda \in C^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ tel que

$$\Theta_\lambda(x,y) = \Theta_\lambda(x) = 1\ si \quad \mid x-x_0 \mid < \sqrt{(\tau'_{max}t_0)^2 - \lambda}$$

$$\Theta_\lambda(x,y) = \Theta_\lambda(x) = 0\ si \quad \mid x-x_0 \mid > \sqrt{(\tau'_{max}t_0)^2 - \lambda + \Gamma_\lambda}$$

$$\phi_\lambda(t,x,y) = \phi_\lambda(t,x) = t - t_0 + \tfrac{\Theta_\lambda(x)}{\tau'_{max}}\sqrt{\lambda + \mid x-x_0 \mid^2}$$

$vérifie$

$$(\tfrac{\partial\phi_\lambda}{\partial t})^2 > (\tau'_{max})^2 \mid \tfrac{\partial\phi_\lambda}{\partial x} \mid^2 \quad pour \quad (t,x)\in\mathbb{R}^2$$

Alors ϕ_λ vérifie :
La fonction $\phi_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ est à dérivées premières bornées sur $\mathbb{R}^{n+2}$ telle que

$$\begin{cases} inf\{\tfrac{\partial\phi_\lambda}{\partial t} - \tau'_{max} \mid \tfrac{\partial\phi_\lambda}{\partial x} \mid, \quad (t,x)\in\mathbb{R}^2\} > 0 \\ \forall x\in\mathbb{R}, \phi(\mathbb{R},x) = \mathbb{R}, \\ \exists\ M > 0\ et\ C\in\mathbb{R}\ tel\ que\ \phi(t,x) = t + C\ lorsque \quad \mid x \mid > M \end{cases}$$

On a alors

Lemme (cf. Lemme 8 de [10])

La transformation $\psi : \mathbb{R}^{n+2} \mapsto \mathbb{R}^{n+2}$ définie par

$$\begin{cases} (\Theta, U, V) = \psi(t,x,y) = \psi(t,x) \;\; avec \\ \Theta = \psi(t,x,y) = \psi_\lambda(t,x) \\ (U,V) = (x - x_0, y) \;\; où \; x_0 \; est \; fixé \; dans \; \mathbb{R} \end{cases}$$

est un difféomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}^{n+2}$ sur $\mathbb{R}^{n+2}$.
L'opérateur $\tilde{h} = \psi(h)$ défini par

$$\tilde{h}w = (h(w \circ \psi)) \circ \psi^{-1}$$

vérifie les mêmes hypothèses que celles de h.
Si h vérifie les conditions de Levi, il en est de même de $\tilde{h}$.
Soient σ_λ l'hypersurface spatiale de $\mathbb{R}^{n+2}$ d'équation $\phi_\lambda(t,x,y) = 0$ et σ'_λ le sous-ensemble de σ_λ tel que $\mid x - x_0 \mid^{\,2} \leq (\tau'_{max} t_0)^2 - \lambda$.
On a :

$$\bigcup_{\lambda \in]0,(\tau'_{max} t_0)^2} \sigma'_\lambda = \mathcal{D}_-(t_0, x_0) \cap \mathbb{R}^{n+2}_+$$

Fixons δ tel que $0 < \delta < (\tau'_{max} t_0)^2$ et posons

$$\Lambda_\delta = \left\{ \lambda \in [\delta, (\tau'_{max} t_0)^2]; v = \frac{\partial v}{\partial t} = \ldots = (\frac{\partial v}{\partial t})^{m-1} = 0 \; sur \; \sigma_\lambda \right\}$$

Comme dans [18] (p.371), on montre que λ_δ est ouvert grâce à la proposition suivante et fermé dans $[\delta, (\tau'_{max} t_0)^2]$.
Comme λ_δ contient le point $(\tau'_{max} t_0)^2$, on a
$\Lambda_\delta = [\delta, (\tau'_{max} t_0)^2]$, δ étant arbitraire.
On obtient $v = 0$ dans $\mathcal{D}_-(t_0, x_0) \cap \mathbb{R}^{n+2}_+$.
Si t_0 étant négatif, on procèderait de la même façon pour démontrer le Lemme 3 en utilisant la famille d'hypersurface spatiales de $\mathbb{R}^{n+2}$ d'équations

$$t = t_0 + \frac{1}{\tau'_{max}} \sqrt{\lambda + \mid x - x_0 \mid^{\,2}} \;\; (\lambda > 0),$$

Proposition ([10][18])

Si h vérifie les conditions de Levi, quel que soient l'hypersurface spatiale σ de $\mathbb{R}^{n+2}$, le point $e = (t_0, x_0, y_0)$ de σ, le voisinage V de e dans $\mathbb{R}^{n+2}$ et la fonction u de classe $C^m(V)$ vérifiant

$$\begin{cases} hv = 0 \;\; dans \; V \\ v_0 = \cdots = v_{m-1} = 0 \;\; sur \; V \cap \sigma \end{cases}$$

où $v_j = \left[(\frac{\partial}{\partial t})^j v \right]_{V \cap \sigma}$ sont les données de Cauchy sur $V \cap \sigma$, alors v est nulle au voisinage de e dans $\mathbb{R}^{n+2}$.

Ainsi, on déduit le Lemme 3, qui implique avec le théorème 2.0 le Lemme 2 et la Proposition 2.1.

Ensuite,on pose $u = qu'$.
Ainsi,on a :

$$\begin{cases} kqu' = v \\ hv = rqu' + f \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} k'u' = v \\ hv = r'u' + f \end{cases}$$

On a alors :

Proposition 2.2 .

On considère le problème suivant :

$$(2.6) \qquad \begin{cases} kqu' = v \;\in\; \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y}) \\ D^j_x u' \mid_{x=0} = \psi'_j(t,y) \;\in\; \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_y), \;\; 0 \le j \le l_2 + l_1 - 1 = Nl - 1 \end{cases}$$

Sous les suppositions $(A-3)$ *et* $(A-4)$*, la solution du problème de Cauchy (2.6) admet l'éstimation suivante :*

$$(2.7) \qquad \sum_{\bar{h}=0}^{p'} \| \; D^{\bar{h}}_t \{\Gamma(l_2 - i)\Gamma(l_1)u'\} \; \|_{q'(i)+\bar{k}+p'-\bar{h},\Omega(t)}$$

$$\le C_2(\bar{k}, p') \Big\{ \sum_{\bar{h}=0}^{p'} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| \; D^{\bar{h}}_t \psi'_j(t,y) \; \|_{y,\bar{k}+p'+l-1-j-\bar{h}} + \sum_{\bar{h}=0}^{p'} \| \; D^{\bar{h}}_t v \; \|_{\bar{k}+p'-\bar{h},\Omega(t)} \Big\}$$

$0 \le i \le l-1$ *où* $q'(i) = Nl - (l_1 + l_2) - i$ *,*
$C_2(\bar{k}, p')$ *est une constante dépendante de* $\bar{k}, p'$ *et* $\Omega(t)$ *mais indépendante de* v *et de* $\{\psi_j\}$.

En particuliers si $i = 2$*, l'inégalité (2.7) devient :*

$$(2.8)\qquad \sum_{\bar{h}=0}^{p'} \| D_t^{\bar{h}} u' \|_{Nl-2+\bar{k}+p'-\bar{h},\Omega(t)}$$

$$\leq C_2(\bar{k},p')\{\sum_{\bar{h}=0}^{p'} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| D_t^{\bar{h}} \psi_j'(t,y) \|_{y,\bar{k}+p'-\bar{h}} + \sum_{\bar{h}=0}^{p'} \| D_t^{\bar{h}} v \|_{\bar{k}+p'-\bar{h},\Omega(t)}\}$$

Preuve de la Proposition 2.2

On considère le problème (2.6)

$$(2.6)\begin{cases} k'u' = kqu' = v \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{x,y}) \\ D_x^j u' \mid_{x=0} = \psi_j'(t,y) \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^{\infty}_{y}),\ 0 \leq j \leq l_2 + l_1 - 1 = Nl - 1 \end{cases}$$

On pose $u = qu'$.

k' *étant hyperbolique dans la direction de* x *.On considère* t *comme paramètre . Par la théorie des équations hyperboliques, nous avons le lemme suivant :*

Lemme 4 .
Le problème de Cauchy (2.6) admet une solution unique $u \in \mathcal{E}_x(H_y^{\infty})$ *et nous avons l'éstimation suivante :*

$$(2.9)\qquad \sum_{j=0}^{q'(i)+p} \| D_x^j \{\Gamma(l_2 - i)\Gamma(l_1)u'\} \|_{y,\bar{k}+q'(i)+p-j}$$

$$\leq C(\bar{k},p)\{\| \psi(t,y) \|_{y,\bar{k}+p+l-1} + \int_{|x'|\leq|x|} \sum_{j=0}^{p} \| D_{x'}^j v(x') \|_{y,\bar{k}+p-j} dx'\}$$

On fixe t *et soit* $X(t) = max_{(t,x,y)\ \in\Omega(t)} \mid x \mid$.
De (2.9), posons $\bar{k} = 0$, *nous avons :*

$$(2.10)\qquad \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{q'(i)+p} \| D_x^j \{\Gamma(l_2 - i)\Gamma(l_1)u'\} \|^2{}_{y,q'(i)+p-j} dx$$

$$\leq C'(\bar{k},p)\Big\{ \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{Nl-1} \| \psi'_j(t,y) \|^2{}_{y,p+Nl-1-j} dx +$$

$$+ \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{p} \Big(\int_{|x'|\leq|x|} \| D^j_{x'} v(x') \|_{y,p-j} dx' \Big)^2 dx \Big\}$$

Et on a :

$$\int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{q'(i)+p} \| D^j_x\{\Gamma(l_2-i)\Gamma(l_1)u\} \|^2{}_{y,q'(i)+p-j} dx \tag{2.11}$$

$$= \| \Gamma(l_2-i)\Gamma(l_1)u \|^2{}_{q'(i)+p,\Omega(t)}$$

Et en plus, on a :

$$\int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{p} \Big(\int_{|x'|\leq|x|} \| D^j_{x'} v(x') \|_{y,p-j} dx' \Big)^2 dx$$

$$\leq \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{p} \Big\{ \int_{|x'|\leq|x|} 1^2 dx' \int_{|x'|\leq|x|} \| D^j_{x'} v(x') \|^2{}_{y,p-j} dx' \Big\} dx$$

$$\leq \int_{|x|\leq X(t)} \sum_{j=0}^{p} \Big\{ 2X(t) \int_{|x'|\leq|x|} \| D^j_{x'} v(x') \|^2{}_{y,p-j} dx' \Big\} dx$$

$$\leq (2X(t))^2 \| v \|^2{}_{p,\Omega(t)}.$$

Ainsi,on a :

$$\| \Gamma(l_2-i)\Gamma(l_1)u \|^2{}_{q'(i)+p,\Omega(t)} \tag{2.12}$$

$$\leq C'(0,p)\Big\{ 2X(t) \| \psi(t,y) \|^2{}_{y,p+l-1} + (2X(t))^2 \| v \|^2{}_{p,\Omega(t)} \Big\}$$

Si $p' = 0$ dans (2.7) alors (2.7) est équivalent à (2.12).

Ensuite on considère les éstimées de la dérivée dans la direction de t .On différencie (2.12) par rapport à t. Et de la même manière,on obtient l'éstimation de la dérivée dans la direction de t.

Remarque 2.2 *.*

Posons :

$$\begin{cases} u = qu' \\ \psi_j(t,y) = D_x^j u \mid_{x=0} \quad (0 \le j \le m-1) \end{cases}$$

Pour $p' = m-2$ *et* $\bar{k} = 0$ *,l'inégalité (2.8) implique :*

$$\sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} u \|_{m-2-\bar{h},\Omega(t)} \le \ C \sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} u' \|_{Nl-2+m-2-\bar{h},\Omega(t)}$$

$$\le CC_2(\bar{k},p')\{\sum_{\bar{h}=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{Nl-1} \| D_t^{\bar{h}} \psi'_j(t,y) \|_{y,m-2-\bar{h}} + \sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} v \|_{m-2-\bar{h},\Omega(t)}\}$$

$$\le CC_2(\bar{k},p')\{\sum_{\bar{h}=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{m-1} \| D_t^{\bar{h}} \psi_j(t,y) \|_{y,m-2-\bar{h}} + \sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} v \|_{m-2-\bar{h},\Omega(t)}\}$$

Où ψ_j et ψ'_j sont reliés par les relations

$$\begin{cases} \psi_0 = q_0 \mid_{x=0} \psi'_0 + q_1 \mid_{x=0} \psi'_1 + \ldots + q_{(N-1)l} \mid_{x=0} \psi'_{(N-1)l} \\ \ldots \\ \psi_{l-1} = q_{l-1} \mid_{x=0} \psi'_{l-1} + q_{l-2} \mid_{x=0} \psi'_{l-2} + \ldots + q_{(N-1)l} \mid_{x=0} \psi'_{(N-1)l} \end{cases}$$

avec $D_x^j(q(t,x,y;D_x,D_y)) = q_j(t,x,y;D_x,D_y), \forall\ 0 \le j \le (N-1)l$
Ainsi on a une proposition plus analogue à la Proposition 2.2 dont la preuve est similaire à celle de la Proposition 2.2.

Proposition 2.3 .

Quel que soit k, le problème

$$\begin{cases} ku = v \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_{x,y}) \\ D_x^j u \mid_{x=0} = \psi_j(t,y) \ \in \ \mathcal{E}_t(\tilde{H}^\infty_y), \ 0 \le j \le l-1 \end{cases} \tag{2.14}$$

admet l'éstimation suivante :

$$\sum_{\bar h=0}^{m-2} \| D_t^{\bar h} u \|_{m-2-\bar h,\Omega(t)} \leq C \sum_{\bar h=0}^{m-2} \| D_t^{\bar h} u' \|_{Nl-2+m-2-\bar h,\Omega(t)} \tag{2.15}$$

$$\leq C \Big\{ \sum_{\bar h=0}^{m-2} \sum_{j=0}^{m-1} \| D_t^{\bar h} \psi_j(t,y) \|_{y,m-2-\bar h} + \sum_{\bar h=0}^{m-2} \| D_t^{\bar h} v \|_{m-2-\bar h,\Omega(t)} \Big\}$$

Preuve de la Proposition 2.3

Etablissons la première inégalité par récurrence sur $\bar h$.

<u>Prenons $\bar h = 0$</u>

A-t-on

$$\| u \|_{m-2,\Omega(t)} \leq C \| u' \|_{Nl-2+m-2,\Omega(t)} ?$$

Oui, car on a :

$$\| qu' \|_{m-2,\Omega(t)} \leq C \| u' \|_{m-2,\Omega(t)} \ \textit{et que } Nl \geq 2$$

<u>Pour $\bar h$ quelconque</u>

Supposons (H.R)

$$\sum_{\bar h=0}^{m-3} \| D_t^{\bar h} u \|_{m-3-\bar h,\Omega(t)} \leq C \sum_{\bar h=0}^{m-3} \| D_t^{\bar h} u' \|_{Nl-2+m-3-\bar h,\Omega(t)} \ \textit{est vraie}$$

Prouvons que

$$\sum_{\bar h=0}^{m-2} \| D_t^{\bar h} u \|_{m-2-\bar h}, \Omega(t) \leq C \sum_{\bar h=0}^{m-2} \| D_t^{\bar h} u' \|_{Nl-2+m-2-\bar h,\Omega(t)} \ \textit{est aussi vraie}$$

On a :

$$\sum_{\bar h=0}^{m-2} \| D_t^{\bar h} u \|_{m-2-\bar h}, \Omega(t) = \sum_{\bar h=0}^{(m+1)-3} \| D_t^{\bar h} u' \|_{Nl-2+(m+1)-3-\bar h}, \Omega(t) = \sum_{\bar h=0}^{m'-3} \| D_t^{\bar h} u \|_{m'-3-\bar h,\Omega(t)}$$

$$\leq C \sum_{\bar h=0}^{m'-3} \| D_t^{\bar h} u' \|_{Nl-2+m'-3-\bar h,\Omega(t)} = C \sum_{\bar h=0}^{m-2} \| D_t^{\bar h} u \|_{Nl+m-2-\bar h,\Omega(t)}$$

D'où la première inégalité .

La deuxième est exactement la Proposition 2.2 en prenant $p' = m - 2$.

2.2.2 Construction de la solution

Soit

$$ku = v \tag{2.16}$$

Alors $\varpi u = (hk - r)u = f$ est équivalent à

$$\begin{cases} ku = v \\ hv = ru + f \end{cases} \tag{2.17}$$

On re-écrit

$$D_t^i(ku)\mid_{t=0} = \sum_{\bar{k}=0}^{i} C_{i\bar{k}}(x, y; D_x, D_y)\phi_{\bar{k}(x,y)} \equiv \tilde{\phi}_i'(x, y) \tag{2.18}$$

,où $C_{i\bar{k}}$ est un opérateur différentiel suivant x et pseudo-différentiel suivant y et d'ordre total au plus l.

D'après le parargaphe 2.1, v_1 est une solution de :

$$\begin{cases} hv_1 = f \\ D_t^j v_1 \mid_{t=0} = \tilde{\phi}_j'(x, y)\ ,\ 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

Et u_1 une solution de :

$$\begin{cases} ku_1 = v_1 \\ D_x^j u \mid_{x=0} = \psi_j(t, y)\ ,\ 0 \leq j \leq l-1 \end{cases}$$

En général, pour $\rho \geq 2$, v_ρ est une solution de :

$$\begin{cases} hv_\rho = ru_{\rho-1} \\ D_t^i v_\rho \mid_{t=0} = 0\ ,\ 0 \leq i \leq m-1 \end{cases}$$

Et u_ρ est solution de :

$$\begin{cases} ku_\rho = v_\rho \\ D_x^j u_\rho \mid_{x=0} = 0, 0 \leq j \leq l-1 \end{cases}$$

Nous voulons montrer que la série $u_1 + u_2 + \ldots$ converge.
Prenons $\bar{k}$ et p' dans (2.7) et on les fixe .
Par la preuve de la Proposition 2.1, nous avons :

(2.19)

$$\sum_{i=0}^{m-2+p} \| D_t^i v_1 \|_{\bar{k}+m-p-2-i,\Omega(t)} \leq C_1 \Big\{ \sum_{i=0}^{m-1} \| \tilde{\phi}_i \|_{\bar{k}+m+p-1-i,\Omega(0)} + \int_0^t \sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{\bar{k}+p-i,\Omega(s)} ds \Big\}$$

Et par la proposition 2.2, nous avons l'éstimation de u_1' $(u_1 = qu_1')$.
Dans l'inégalité (2.4), soit k comme dans le problème (2.6) et $p' = m-2+p$
Ainsi,on a :

$$(2.17)' \begin{cases} k'u' = v \\ hv = r'u' + f, r' = rq \end{cases}$$

d'ordre total $(m+l-2)N$, avec

$$(2.18)' \begin{cases} u = qu' \\ k' = kq \ d'ordre \ lN \end{cases}$$

on a :

(2.20)

$$\sum_{\bar{h}=0}^{p'=m-2+p} \| D_t^{\bar{h}} \{\Gamma(l_2 - i)\Gamma(l_1)u_1'\} \|_{q'(i)+\bar{k}+m-2+p-1-\bar{h},\Omega(t)}$$

$$\leq C_2 \Big\{ \sum_{\bar{h}=0}^{m-2+p} \sum_{j=1}^{lN-1} \| D_t^{\bar{h}} \psi_j'(t,y) \|_{y,\bar{k}+m-2+p+lN-j-\bar{h}} + \sum_{\bar{h}=0}^{m-2+p} \| D_t^{\bar{h}} v_1 \|_{\bar{k}+m-2+p-\bar{h},\Omega(t)} \Big\}$$

Soit

$$\begin{cases} k'u_1' = v_1 \ (k' = kq \ , \ u_1 = qu_1') \\ D_x^j u_1' = \psi_j'(t,y), \ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} hv_\rho = r'u_{\rho-1}' \ (r' = rq \ , \ u_\rho = qu_\rho') \\ D_t^i v_\rho \mid_{t=0} = 0 \ (0 \leq j \leq Nl-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k'u_\rho' = v_\rho \ (k' = kq \ , \ u_\rho = qu_\rho') \\ D_x^j u_\rho = 0, \ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases}$$

Soient

$$(2.21) \qquad \sum_{i=0}^{m-1} \| \tilde{\phi}_i \|_{\bar{k}+m-1+p-i,\Omega(0)} = M_1$$

$$sup_{0\leq s\leq T}\{\sum_{i=0}^{p} \| D_s^i f(s) \|_{\bar{k}+p-i,\Omega(s)}\} = K \tag{2.22}$$

$$\sum_{\bar{h}=0}^{m-2+p}\sum_{j=0}^{Nl-1} \| D_t^{\bar{h}} \psi_j'(t,y) \|_{y,\bar{k}+m-2+p+Nl-1-j-\bar{h}} = M_2 \tag{2.23}$$

De (2.20) à (2.23),on a :

(2.24)

$$\sum_{\bar{h}=0}^{m-2+p} \| D_t^{\bar{h}}\{\Gamma(l_2)\Gamma(l_1)u_1'\} \|_{q'(i)+\bar{k}+m-2+p-i-\bar{h},\Omega(t)}$$

$$\leq C_2M_2 + C_2C_1M_1 + C_1C_2\int_0^t Kds = C_2M_2 + C_2C_1M_1 + C_1C_2Kt$$

Par l'hypothèse $(A-5)$ et de (2.24), on a

(2.25)

$$\sum_{\bar{h}=0}^{p} \| D_t^{\bar{h}}(r'u_1') \|_{\bar{k}+p-\bar{h},\Omega(t)} \leq C_3' \sum_{i=0}^{2}\sum_{\bar{h}=0}^{m-2+p} \| D_t^{\bar{h}}\{\Gamma(l_2-i)\Gamma(l_1)u_1'\} \|_{q'(i)+\bar{k}+p-1-\bar{h},\Omega(t)}$$

En posant $C_3 = 3C_3'$, par (2.24) et (2.25), on a :

$$\sum_{\bar{h}=0}^{p} \| D_t^{\bar{h}}(r'u_1') \|_{\bar{k}+p-\bar{h},\Omega(t)} \leq C_2C_3M_2 + C_1C_2C_3M_1 + C_1C_2C_3Kt. \tag{2.26}$$

Et en général, par induction, on a :

La solution u_ρ' du problème

$$\begin{cases} k'u_\rho' = v_\rho \ (k' = kq \ , \ u_\rho = qu_\rho') \\ D_x^j u_\rho' = \psi_j'(t,y), \ 0 \leq j \leq Nl-1 \end{cases} \tag{2.27}$$

a l'éstimation suivante :

$$(2.28) \qquad \sum_{\bar{h}=0}^{m-2+p} \parallel D_t^{\bar{h}}\{\Gamma(l_2-i)\Gamma(l_1)u'_\rho\} \parallel_{q'(i)+\bar{k}+m-2+p,\Omega(t)}$$

$$\leq (C_1C_2C_3)^{\rho-1}\Big\{(C_2M_2+C_1C_2M_1)\frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!}+C_1C_2K\frac{t^\rho}{(\rho)!}\Big\}$$

En particuliers si $i=2$, (2.28) devient :

$$(2.29) \qquad \sum_{\bar{h}=0}^{m-2+p} \parallel D_t^{\bar{h}}u'_\rho \parallel_{Nl-2+m-2+p-\bar{h},\Omega(t)}$$

$$\leq (C_1C_2C_3)^{\rho-1}\{M\frac{t^{\rho-1}}{(\rho-1)!}+N\frac{t^\rho}{(\rho)!}\}$$

où $M=C_2M_2+C_1C_2M_1$,$\tilde{K}=C_1C_2K$.

Par conséquent

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} D_t^{\bar{h}}u'_\rho$$

$(0\leq \bar{h}\leq m-2+p)$ est convergente dans $H^{Nl-2+m-2+\bar{k}+p-\bar{h}}(\Omega(t))$.

En posant

$$u'=\sum_{\rho=1}^{\infty}u'_\rho$$

Alors $D_t^{\bar{h}}u'_\rho \in \ H^{Nl-2+m-2+\bar{k}+p-\bar{h}}(\Omega(t)), 0\leq \bar{h}\leq m-2+p$,où $\bar{k}$ et p sont arbitraires,alors par le Lemme de Sobolev, $u'\in \ C^\infty(\Omega(t))$.
Tout comme dans le cas scalaire de Mme Y. Hasegawa, [13], Il est évident que $u=qu'$ est solution du problème de Goursat (1.6), en utilisant le lemme suivant :

Lemme ([5][10] Prop.2.2)

Il existe des données initiales ϕ'_i et ψ'_j de u' respectivement sur $t=0$ et $x=0$, tel que toute solution de

$$(1.6)' \begin{cases} \varpi' u'(t,x,y)=(hk'-r')u'(t,x,y)=f(t,x,y) \\ D_t^i u' \mid_{t=0}=\phi'_i(x,y) \ \ 0\leq i\leq m-1 \\ D_x^j u' \mid_{x=0}=\psi'_j(t,y) \ \ 0\leq j\leq Nl-1 \end{cases}$$

avec les conditions de compatibilités suivantes :

$$(\mathbf{C}') \quad D_x^j {\phi'}_i(0,y) = D_t^i {\psi'}_j(0,y), \quad \forall\ 0 \le i \le m-1\ ,\ 0 \le j \le Nl-1$$

$u = qu'$ soit solution de

$$(1.6) \begin{cases} \varpi u(t,x,y) = (hk-r)u(t,x,y) = f(t,x,y) \\ D_t^i u\mid_{t=0} = \phi_i(x,y) \quad 0 \le i \le m-1 \\ D_x^j u\mid_{x=0} = \psi_j(t,y) \quad 0 \le j \le l-1 \end{cases}$$

avec les conditions de compatibilités suivantes :

$$(\mathbf{C}) \quad D_x^j \phi_i(0,y) = D_t^i \psi_j(0,y), \quad \forall\ 0 \le i \le m-1\ ,\ 0 \le j \le l-1$$

Preuve

La preuve de ce lemme consiste à résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} D_t^i[qu']\mid_{t=0} = \phi_i(x,y) \quad (1)_i, \quad 0 \le i \le m-1 \\ D_x^j[qu']\mid_{x=0} = \psi_j(t,y) \quad (2)_j, \quad 0 \le j \le l-1 \end{cases}$$

aux inconnus $(D_t^i u')\mid_{t=0} = \phi'_{i;0\le i\le m-1}$ et $(D_x^j u')\mid_{x=0} = \psi'_{j;0\le j\le (N-1)l}$.

Prenons <u>i=0</u> dans l'équation

$$(1)_i \quad D_t^i[qu']\mid_{t=0} = \phi_i(x,y), \quad 0 \le i \le m-1$$

Elle devient :

$$(1)_0 \quad (qu')\mid_{t=0} = \phi_0(x,y)$$

Soit

$$(qu')\mid_{t=0} = q(0,x,y;D_x,D_y)u'(0,x,y) = \phi_0(x,y)$$

$$\Rightarrow k(0,x,y;D_x,D_y)q(0,x,y;D_x,D_y)u'(0,x,y) = k(0,x,y;D_x,D_y)\phi_0(x,y)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{l_2}\Gamma_{l_1}I_N(0,x,y;D_x,D_y)u'(0,x,y) + C_{l_2-1}(0,x,y;D_x,D_y)\Gamma_{l_1}u'(0,x,y)$$
$$+C_{l_2+l_1-1}(0,x,y;D_x,D_y)u'(0,x,y) = k(0,x,y;D_x,D_y)\phi_0(x,y)$$

système différentiel par rapport à x, pseudo-différentiel par y d'ordre $l_1 + l_2$, faiblement hyperbolique par rapport à D_x, bien décomposable (au sens de De Paris [2]).
Donc $(1)_0$ admet une solution $u'(0,x,y) = \psi'_0(x,y)$ pour un choix quelconque de données initiales sur

$$x = 0 : \quad u'(0,0,y), D_x u'(0,0,y), \ldots, D_x^{l_1+l_2-1}u'(0,0,y)$$

quelconques fixés dans la classe de régularité voulue .

Puis, on prend i=1 , on a :

$$(1)_1 D_t(qu') \mid_{t=0} = \phi_1(x,y)$$

Soit

$$q \mid_{t=0} D_t(u') \mid_{t=0} + D_t(q) \mid_{t=0} u'(0,x,y) = \phi_1(x,y)$$

$$\Rightarrow k(0,x,y;D_x,D_y)[q \mid_{t=0} D_t(u') \mid_{t=0}] +$$

$$k(0,x,y;D_x,D_y)[D_t(q) \mid_{t=0} u'(0,x,y)] = k(0,x,y;D_x,D_y)\phi_1(x,y)$$

$$\Rightarrow k(0,x,y;D_x,D_y)[q(0,x,y;D_x,D_y)D_t(u') \mid_{t=0}]$$

$$= k(0,x,y;D_x,D_y)\phi_1(x,y) - k(0,x,y;D_x,D_y[D_t(q) \mid_{t=0} u'(0,x,y)]$$

On résoud par rapport à $D_t(u')(0,x,y) = \phi_1'(x,y)$ avec un choix quelconque de données initiales sur

$$x = 0 : \quad (D_t u')(0,0,y), D_x(D_t u')(0,0,y), \ldots, D_x^{l_1+l_2-1}(D_t u')(0,0,y)$$

De proche en proche, on établit l'existence de $D_t^{m-1}u' \mid_{t=0} = \phi_{m-1}'(x,y)$ solution de l'équation

$$(1)_{m-1} D_t^{m-1}[qu'] \mid_{t=0} = \phi_{m-1}(x,y)$$

en fonction des $\phi_i'(x,y); 0 \leq i \leq m-2$. Ainsi $(1)_{i,0\leq i\leq m-1}$ est résolue .

Ensute, on résoud :

$$(2)_j D_x^j(qu') \mid_{x=0} = \psi_j(t,y), \quad 0 \leq j \leq (N-1)l-1$$

Comme $x=0$ est non caractéristique par rapport à k donc est aussi non caractéristique par rapport à q. Il existe donc

$$u'(t,0,y), D_x(u')(t,0,y), \ldots, D_x^{(N-1)l-1}(u')(t,0,y)$$

solution de l'équation précédente (cf Proposition 2.2).

Conditions de Compatibilité

On commence pour les j, ce qui implique $u'(t,0,y), \ldots, D_x^{N(l-1)-1}u'(t,0,y)$ Après on passe aux i et les $u'(0,0,y), \ldots, D_x^{N(l-1)-1}u'(0,0,y)$ données initiales pour les i qui sont donc fixés.

2.2.3 Unicité de la solution

Soient u^1 et u^2 deux solutions du problème (1.6). Posons $w = u^1 - u^2$. Ainsi w satisfait

$$\begin{cases} \varpi w = (hk - r)w = 0 \\ D_t^i w \mid_{t=0} = 0 \ , \ 0 \leq i \leq m-1 \\ D_x^j w \mid_{x=0} = 0 \ , \ 0 \leq j \leq l-1 \end{cases} \tag{2.30}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} kw = v \\ hv = rw \\ D_t^i w \mid_{t=0} = 0 \ , \ 0 \leq i \leq m-1 \\ D_x^j w \mid_{x=0} = 0 \ , \ 0 \leq j \leq l-1 \end{cases}$$

Montrons que le problème (2.30) a pour seule solution $w = 0$.

Par la Proposition 2.1, nous avons

$$\sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} kw \|_{m-2-\bar{h},\Omega(t)} \leq C_1 \int_0^t \| rw \|_{\Omega(s)} ds \tag{2.31}$$

Dans la Proposition 2.3, posons $p' = m-2$ et $\bar{k} = 0$,nous avons

$$\sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} w \|_{m-2-\bar{h},\Omega(t)} \leq C_2 \sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} kw \|_{m-2-\bar{h},\Omega(t)} \tag{2.32}$$

Par l'hypothèse $(A-5)$, on a :

$$\| rw \|_{\Omega(s)} \leq C_3 \sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} w \|_{m-2-\bar{h},\Omega(s)} \tag{2.33}$$

Soit

$$M_3(t) \equiv \sum_{\bar{h}=0}^{m-2} \| D_t^{\bar{h}} \ w \|_{m-2-\bar{h},\Omega(t)} \tag{2.34}$$

Ainsi, de (2.32) à (2.34), nous avons

$$M_3(t) \leq 3C_2C_1 \int_0^t \parallel rw \parallel_{\Omega(s)} ds \leq 3C_1C_2C_3 \int_0^t M_3(s)ds \tag{2.35}$$

Posons $N_3 = sup_{0 \leq t \leq T} M_3(t)$ et $3C_1C_2C_3 = C$, nous avons

$$M_3(t) \leq C \int_0^t M_3(s)ds \leq CN_3t \tag{2.36}$$

Ainsi $M_3(t) \leq CN_3(t)$.
Par (2.36), nous avons

$$M_3(t) \leq C \int_0^t CN_3 s ds \leq C^2 N_3 \frac{t^2}{2!} \tag{2.37}$$

En général pour tout j arbitraire ;$j \geq 1$, nous avons

$$M_3(t) \leq C^j N_3 \frac{t^j}{j!} \tag{2.38}$$

$$Ainsi\ M_3(t) \equiv 0 \Longrightarrow w \equiv 0$$

Ceci complète la preuve du Théorème 1.

Références

[1] BOURBAKI, *Modules plats.Localisations.* Hermann, Paris 1961.

[2] De PARIS J.-C.,*Problème de Cauchy analytique a données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable* J. Math. Pures Appl. 1972 (9)-51

[3] J.CHAZARAIN,A.PIRIOU, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Collection mu B.Gauthier-Villars.p224 §11,11-1.

[4] Y. CHOQUET-BRUHAT,*Ondes Asymptotiques et Approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires* , J. Math. pures et appl. 48, 1969, 117-158

[5] D. GOURDIN , *Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples* . Comptes rendus Acad. Sci. Paris 278, série A,1974, 269-274.

[6] D. GOURDIN , *Le problème de Cauchy pour les systèmes linéaires, faiblement hyperboliques caractéristiques multiples.* Comptes rendus Acad. Sci. Paris 282, série A,1976, 1105-1107.

[7] D. GOURDIN , *Les opérateurs faiblement hyperboliques matriciels à caractéristiques de multiplicités constantes , bien décomposables et le problème de Cauchy non caractéristiques associé* . J. Math. Kyoto Univ.,17-3 (1977),539-566 .

[8] D. GOURDIN , *Problème de Cauchy non caractéristique pour les systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable, Domaine de dépendance.* Comm. in Partial Diff. equations, 4(5),1979,447-507.

[9] D. GOURDIN ,M. MECHAB ,*Etude du problème de Cauchy faiblement hyperbolique C^∞ pour des systèmes à caractéristiques de multiplicité variable quelconque.* Edition Jean Vaillant ,1985,121-147.

[10] D. GOURDIN , *Systèmes hyperboliques à caractéristiques constantes ou variables*, Thèses de Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques soutenues le 12 octobre 1978 à Paris VI.

[11] D.GOURDIN, M.SEIFOUDINI, *Problème de Goursat avec conditions de Levi pour un système d'équations aux dérivées partielles* (A paraître).

[12] Y. HASEGAWA , *On the Levi condition for Goursat problem*, J. Math. Kyoto Univ.,27-1 (1987),1-25.

[13] Y. HASEGAWA, *On the C^∞ Goursat problem for the equations with constant coefficients* , J. Math. Kyoto Univ.,19-1 (1979),125-151.

[14] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators .vol.III* , Springer-Verlag, 1985.

[15] A. LAX , *On the Cauchy's Problem for differential equations with multiple characteristics*, Comm. pure apll. Math.,IX (1956), 135-169.

[16] P. D. LAX , *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems* Duke Mth. J.,vol.24,1957,627-646.

[17] D. LUDWIG,*Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem*, Comm. pure appl. Math. vol. 13,1960,473-508

[18] S.MIZOHATA, *Theory of partial differential equation* Cambridge University Press - 1973.

[19] M.MECHAB,*Systèmes faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples*, Thèse de Troisième Cycle , 1982.

[20] T.NISHITANI,*On the* $\mathcal{E}-$ *wellposedness for Goursat problem with constant coefficients*, J.Math. Kyoto Univ.,20-1 (1980),179 -190.

[21] M. A. SHUBIN,*Pseudodifferential Operators and Spectra Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

[22] J. VAILLANT ,*Données de Cauchy portées par une caractéristique double dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles,rôle des bicaractéristiques*. J.Math. pures . appl. 47, 1968, p.1-40

[23] J. VAILLANT , *Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples*, J. Math. Pures et apl. 58,1979, 165-216.