THÈSE de DOCTORAT de L'UNIVERSITÉ

PARIS VI

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

Présentée par :

Mohamed BOUALI

pour obtenir le grade de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet :

Analyse Harmonique en dimension infinie

Soutenue le 05/05/2006 devant le jury composé de

M. Jacques FARAUT	**Directeur de thèse**
M. Grigori OLSHANSKI	**Rapporteur**
M. Bent ∅RSTED	**Rapporteur**
M. Jean-Louis CLERC	**Examinateur**
M. Sami MUSTAPHA	**Examinateur**

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse Jacques FARAUT, pour ses encouragements constants et ses judicieux conseils. Il a su me faire découvrir de nombreux domaines passionnants des mathématiques et me guider vers des problèmes à la fois intéressants et abordables. Sans lui, cette thèse n'aurait pas pu s'accomplir dans de si bonnes conditions.

J'exprime ma sincère reconnaissance aux rapporteurs, Grigori OLSHANSKI et Bent ∅RSTED, qui ont accepté de se lancer dans un travail certainement ingrat de relecture attentive et critique. Je remercie également les membres du jury, Sami MUSTAPHA et Jean-Louis CLERC, qui m'ont fait l'honneur d'être présents lors de la soutenance.

Je remercie également tout les membres de ma famille : frères, soeurs, beaux frères, belles soeurs, neuves, nièces et qui n'ont pas cessé a m'encourager pour faire ce travail et surtout deux personnes qui sont très cher pour moi, mon père et ma mère, je pense très fort à eux.

Je remercie également mes amis (Walid, Athina, Fathi, Abdel, Anouar, Nidhal, Fadhel, Mohamed, Nicolas, Aïcha, Sana, Syrine, Warda....) et la liste est longue, je ne peux pas citer tous les noms, dont la présence au jour le jour m'as permis durant ces années de thèse de travailler dans un cadre idéal.

En fin l'experience montre que je ne dois surtout pas oublier de souligner les excellentes ambiances dans les différentes équipes qui m'ont accueilli durant ma thèse et également je remercie tous les membres de la bibliothèque de Chevaleret.

Dédicace

Je dédie ce travail.

A mon père et ma mère.

Aucun mot ne serai témoigner de l'entendu
des sentiments que j'éprouve à leur égard.
Je souhaite que Dieu leur préserve une longue vie.

A mes (beaux) frères et (belles) soeurs.

Pour leur encouragement et leur affection.

A tous mes collègues et ami(e)s.

A eux tous je souhaite un avenir plein de joie, de bonheur et de succès.

Table des matières

0.1 INTRODUCTION

Cette thèse est une contribution à l'analyse harmonique en dimension infinie. Nous y étudions l'analyse de Fourier sur l'espace V_∞ des matrices hermitiennes de dimension infinie à coefficients dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, le corps des quaternions.

La transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur V_∞ est une fonction continue de type positif sur l'espace $V(\infty)$ des matrices hermitiennes infinies n'ayant qu'un nombre fini de coefficients non nuls :

$$V(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Herm(n, \mathbb{F}).$$

Cet espace est muni de la topologie de limite inductive. Sur les espaces V_∞ et $V(\infty)$ nous considérons l'action par conjugaison du groupe

$$K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(n, \mathbb{F}).$$

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, le groupe K_∞ est le groupe orthogonal infini $O(\infty)$, si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, c'est le groupe unitaire infini $U(\infty)$, et si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ le groupe K_∞ est isomorphe au groupe symplectique infini $Sp(\infty)$.

Notons $\mathscr{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur V_∞ qui sont invariantes par K_∞. C'est un ensemble convexe dont les points extrémaux sont les mesures ergodiques relativement à l'action de K_∞. Notons aussi $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions continues de type positif φ sur $V(\infty)$ qui sont invariantes par K_∞, normalisées par la condition $\varphi(0) = 1$. Cet ensemble est convexe et ses points extrémaux sont les fonctions sphériques relativement à la paire sphérique $(K_\infty \ltimes V_\infty, K_\infty)$. La transformation de Fourier établit une bijection de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{P}$, et par suite de l'ensemble des mesures ergodiques sur V_∞ sur l'ensemble des fonctions sphériques sur $V(\infty)$.

Dans leur article fondamental [22] Olshanski et Vershik déterminent les fonctions sphériques dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Leur démonstration utilise de façon essentielle des développements en séries de fonctions de Schur. Dans le cas général que nous considérons ils sont remplacés par des développements en séries de polynômes sphériques. Les formules que nous utilisons sont de ce fait moins explicites, et pour cette raison nous devons davantage faire appel à l'analyse fonctionnelle et à l'analyse complexe pour établir les estimations et la convergence de ces séries.

Au chapitre 1 nous établissons des résultats de l'analyse harmonique sur l'espace de dimension finie $V_n = Herm(n, \mathbb{F})$ dont nous aurons besoin dans la suite. Nous étudions en particulier les développements en séries de polynômes sphériques des fonctions holomorphes dans des domaines de l'espace complexifié de V_n qui sont invariantes par $K_n = U(n,\mathbb{F})$.

L'étude de la transformation de Fourier d'une mesure orbitale conduit à déterminer le comportement asymptotique de l'intégrale suivante

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \int_{S_{k,n}} e^{-i\operatorname{tr}(xva^{(n)}v^*)}\tau_k^{(n)}(dv),$$

sur la variété de Stiefel

$$S_{k,n} = \{v \in M(k,n;\mathbb{F}) \mid vv^* = I_k\}, \quad (k < n).$$

Nous verrons au chapitre 2 comment les théorèmes de Minlos et Poincaré permettent de déterminer la limite d'une telle intégrale. Cette méthode d'étude directe de l'intégrale ne nous permet pas d'obtenir le résultat le plus général. Nous faisons en effet des hypothèses sur le comportement asymptotique de la suite $a^{(n)}$ qui sont trop fortes comme nous le verrons au chapitre suivant.

Dans le chapitre 3 nous reprenons la méthode de Olshanski et Vershik. Son point de départ est le résultat suivant du à Vershik : une mesure ergodique est limite d'une suite de mesures $\nu^{(n)}$, la mesure $\nu^{(n)}$ étant une mesure orbitale relativement au groupe compact K_n. La méthode consiste ensuite à développer la transformée de Fourier de la mesure $\nu^{(n)}$ en série de polynômes sphériques :

$$\int_{K_n} e^{-i\operatorname{tr}(xk\xi k^*)}dk = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} a_{\mathbf{m}}\Phi_{\mathbf{m}}(x)\Phi_{\mathbf{m}}(\xi).$$

En déterminant le comportement asymptotique de cette série nous parvenons au résultat principal de cette thèse : la transformée de Fourier d'une mesure ergodique de $\mathscr{M}$ est une fonction sur $V(\infty)$ qui est invariante par K_∞ dont la restriction au sous-espace des matrices diagonales est donnée par la formule suivante

$$\varphi\big(\operatorname{diag}(\xi_1,\ldots,\xi_k,0,\ldots)\big) = \Pi(\xi_1)\ldots\Pi(\xi_k),$$

où

$$\Pi(\lambda) = e^{i\beta\lambda}e^{-\frac{\gamma}{d}\lambda^2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha_k\lambda}}{(1-i\frac{2}{d}\alpha_k\lambda)^{\frac{d}{2}}},$$

avec

$$\beta\in\mathbb{R},\ \gamma\geq 0,\ \alpha_k\in\mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 < \infty \text{ et } d = 1, 2 \text{ ou } 4.$$

En notant $\varphi = \varphi_\omega$, avec $\omega = (\alpha, \gamma, \beta)$, nous obtenons un paramétrage de l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{P}$ par l'ensemble

$$\Omega = \{\omega = (\alpha, \gamma, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R},\ \gamma \geq 0,\ \alpha_k \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty\}.$$

Les fonctions $\varphi \in \mathscr{P}$ admettent une représentation intégrale. Si $\varphi \in \mathscr{P}$, il existe une mesure de probabilité unique μ sur Ω telle que

$$\varphi(\xi) = \int_\Omega \varphi_\omega(\xi)\mu(d\omega).$$

Cette représentation intégrale a été établie par Olshanski et Borodin [4] lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Le démonstration qu'ils en donnent reste valable pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

Au chapitre 4 nous montrons que la fonction φ se prolonge par continuité à l'espace V_∞^2 des matrices hermitiennes de Hilbert-Schmidt si et seulement si le support de la mesure μ est contenu dans

$$\Omega_0 = \{(\alpha, \gamma, \beta) \in \Omega \mid \beta = 0\}.$$

Soit ν une mesure de probabilité sur V_∞ qui est invariante par K_∞ ($\nu \in \mathscr{M}$), et soit φ sa transformée de Fourier. Nous montrons que la mesure ν est concentrée sur le cône des matrices hermitiennes semi-définies positives si et seulement si le support de μ est contenu dans

$$\Omega^+ = \{(\alpha, \gamma, \beta) \in \Omega \mid \alpha_k \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma = 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \leq \beta\}.$$

Enfin au chapitre 5 nous établissons une représentation intégrale des fonctions continues de type négatif sur V_∞^2 qui sont K_∞-invariantes. C'est une formule qui est analogue à celle de Lévy-Khinchine : une fonction continue de type négatif ψ sur V_∞^2 et K_∞-invariante s'écrit

$$\psi(\xi) = A_0 + A_1 \mathrm{tr}(\xi^2) + \int_{\Omega_0 \setminus \{0\}} \big(1 - \varphi_\omega(\xi)\big)\kappa(d\omega),$$

où A_0, A_1 sont des constantes ≥ 0, et κ est une mesure positive sur $\Omega_0 \setminus \{0\}$ par rapport à laquelle les fonctions

$$\omega \mapsto 1 - \varphi_\omega(\xi), \quad (\xi \in V_\infty^2),$$

sont intégrables.

✯✯✯

Chapitre 1

Analyse harmonique sur l'espace $V_n = Herm(n, \mathbb{F})$

1.1 Rappels et notations

Soit $V_n = Herm(n, \mathbb{F})$ l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. On note d la dimension sur $\mathbb{R}$ de $\mathbb{F}$: $d = 1$, 2 ou 4, et $\delta(n)$ la dimension sur $\mathbb{R}$ de V_n : $\delta(n) = n + \frac{d}{2}n(n-1)$. Muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \Re\mathrm{tr}(xy^*)$, l'espace V_n est un espace euclidien.

On désigne par G_n, K_n, $G_n^{\mathbb{C}}$, U_n les groupes indiqués dans le tableau ci-dessous. Le groupe $G_n^{\mathbb{C}}$ est une complexification de G_n. Le groupe K_n est un sous-groupe compact maximal de G_n, et U_n de $G_n^{\mathbb{C}}$. Le groupe G_n agit naturellement dans V_n et $G_n^{\mathbb{C}}$ dans l'espace complexifié $V_n^{\mathbb{C}}$. On note $x \longmapsto g \cdot x$ cette action.

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$
V_n	$Sym(n, \mathbb{R})$	$Herm(n, \mathbb{C})$	$Herm(n, \mathbb{H})$
G_n	$GL(n, \mathbb{R})$ $g \cdot x = gxg^t$	$GL(n, \mathbb{C})$ $g \cdot x = gxg^*$	$GL(n, \mathbb{H})$ $g \cdot x = gxg^*$
K_n	$O(n, \mathbb{R})$ $k \cdot x = kxk^t$	$U(n, \mathbb{C})$ $k \cdot x = kxk^*$	$U(n, \mathbb{H}) \simeq Sp(n)$ $k \cdot x = kxk^*$
$V_n^{\mathbb{C}}$	$Sym(n, \mathbb{C})$	$M(n, \mathbb{C})$	$Asym(2n, \mathbb{C})$
$G_n^{\mathbb{C}}$	$GL(n, \mathbb{C})$ $g \cdot x = gxg^t$	$GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ $g \cdot x = g_1 x g_2^{-1}$	$GL(2n, \mathbb{C})$ $g \cdot x = gxg^t$
U_n	$U(n, \mathbb{C})$ $u \cdot x = uxu^t$	$U(n, \mathbb{C}) \times U(n, \mathbb{C})$ $u \cdot x = u_1 x u_2^*$	$U(2n, \mathbb{C})$ $u \cdot x = uxu^t$

Soit π la représentation de G_n dans l'espace $\mathcal{P}^{(n)}$ des fonctions polynômes sur V_n définie par

$$(\pi(g)p)(x) = p(g^{-1} \cdot x).$$

On note $\Delta_j(x)$ le j-ième déterminant mineur principal de la matrice x. Si $j = n$, $\Delta_n(x) = \Delta(x)$ est le déterminant de x. Pour un multiindice $\mathbf{m} = (m_1, ..., m_n)$ où les m_i sont des entiers vérifiants $m_1 \geq \cdots \geq m_n \geq 0$, (on notera $\mathbf{m} \geq 0$), on pose

$$\Delta_{\mathbf{m}}(x) = \Delta_1(x)^{m_1 - m_2} \Delta_2(x)^{m_2 - m_3} \ldots \Delta_n(x)^{m_n}.$$

La fonction $\Delta_{\mathbf{m}}(x)$ est un polynôme de degré $|\mathbf{m}| = m_1 + \cdots + m_n$. Les polynômes $\pi(g)\Delta_{\mathbf{m}}$ ($g \in G_n$), engendrent un sous-espace invariant irréductible $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$. On note $d_{\mathbf{m}}^{(n)}$ la dimension de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$ et $\pi_{\mathbf{m}}$ la restriction de la représentation π à $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$.

Les polynômes K_n-invariants de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$ sont proportionnels au polynôme sphérique $\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}$ défini par

$$\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x) := \int_{K_n} \Delta_{\mathbf{m}}(k \cdot x) \, dk,$$

où $x \in V_n$, et dk est la mesure de Haar normalisée de K_n.
Les polynômes sphériques constituent une base de l'espace des polynômes K_n-invariants.

Soit V_n^+ le cône des matrices hermitiennes définies positives. Si $x \in V_n^+$ alors $\Delta_j(x) > 0$ ($j = 1, \ldots, n$) et on peut définir

$$\Delta_{\mathbf{m}}(x) = \Delta_1(x)^{m_1 - m_2} \Delta_2(x)^{m_2 - m_3} \ldots \Delta_n(x)^{m_n},$$

pour $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{C}^n$.

La fonction Γ_n est définie par

$$\Gamma_n(\mathbf{m}) := \int_{V_n^+} e^{-\mathrm{tr}(x)} \Delta_{\mathbf{m}}(x) \Delta(x)^{-\frac{\delta(n)}{n}} \, dx,$$

où dx est la mesure de Lebesgue. Cette intégrale converge si $\Re(m_j) > \frac{d}{2}(j-1)$ ($j = 1, \ldots, n$) et vaut

$$\Gamma_n(\mathbf{m}) = (2\pi)^{\frac{\delta(n)-n}{2}} \prod_{j=1}^{n} \Gamma(m_j - \frac{d}{2}(j-1)).$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{m} \in \mathbb{C}^n$ on conviendra de noter

$$\lambda + \mathbf{m} = (\lambda + m_1, \ldots, \lambda + m_n).$$

Le symbole de Pochammer généralisé est défini par

$$(\lambda)_{\mathbf{m}} = \frac{\Gamma_n(\lambda + \mathbf{m})}{\Gamma_n(\lambda)}.$$

1.2 Série de Taylor sphérique

Une série de Taylor sphérique est une série de la forme

$$\sum_{\mathbf{m}\geq 0} c_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(z).$$

Pour étudier la convergence d'une telle série, on peut utiliser l'estimation suivante (voir [10] théorème VII.1.1. p.240). Toute matrice $z \in V_n^{\mathbb{C}}$ se décompose en $z = u \cdot a$ avec $u \in U_n$ et $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ est une matrice diagonale, $a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$. Pour tout $\mathbf{m} \geq 0$,

$$|\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(z)| \leq a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}. \tag{1.1}$$

Le développement en série de Taylor sphérique suivant joue un rôle important.

$$e^{\mathrm{tr}(z)} = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(z).$$

La convergence a lieu uniformément sur tout compact de $V_n^{\mathbb{C}}$ (voir [10] proposition XII.1.3).
Dans la suite on note $B_{V_n^{\mathbb{C}},R} = B_{V_n^{\mathbb{C}}}(0, R)$ respectivement $B_{V_n,R} = B_{V_n}(0, R)$ la boule dans $V_n^{\mathbb{C}}$ respectivement dans V_n de centre 0 et de rayon R pour la norme d'opérateur $||\cdot||_{op}$.

• Considérons une série de Taylor sphérique

$$f(z) = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} c_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(z),$$

et supposons qu'elle converge uniformément sur tout compact de $B_{V_n^{\mathbb{C}},R}$. Alors sa somme est une fonction holomorphe dans $B_{V_n^{\mathbb{C}},R}$. Les coefficients $c_{\mathbf{m}}$ sont donnés par, si $0 < \rho < R$,

$$c_{\mathbf{m}} = \rho^{-|\mathbf{m}|} d_{\mathbf{m}}^{(n)} \int_{U_n} f(\rho u \cdot 1) \overline{\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(u \cdot 1)} du, \tag{1.2}$$

où du est la mesure de Haar normalisée de U_n. C'est une conséquence des relations d'orthogonalité de Schur suivantes : si $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}'$

$$\int_{U_n} \Phi_{\mathbf{m}'}^{(n)}(u \cdot 1) \overline{\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(u \cdot 1)} du = 0, \tag{1.3}$$

et

$$\int_{U_n} |\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(u \cdot 1)|^2 du = \frac{1}{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}. \tag{1.4}$$

Des relations d'orthogonalité de Schur on déduit l'unicité des coefficients $c_{\mathbf{m}}$ et l'inégalité de Cauchy suivante.

$$|c_{\mathbf{m}}| \leq M_f(\rho)\sqrt{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}\rho^{-|\mathbf{m}|},$$

où $M_f(\rho) = \sup_{||z||_{op} \leq \rho} |f(z)|$. C'est en effet une conséquence de l'inégalité de Schwarz.

Théorème 1.1 *Soit f une fonction holomorphe dans $B_{V_n^{\mathbb{C}},R}$ et K_n-invariante. Alors f est développable en série de Taylor sphérique*

$$f(z) = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} c_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(z).$$

Cette série converge uniformément sur tout compact de $B_{V_n^{\mathbb{C}},R}$.

Démonstration.
Existence : Soit $r < R$. Considérons l'espace de Bergman

$$\mathcal{B}(B_{V_n^{\mathbb{C}},r}) = L^2(B_{V_n^{\mathbb{C}},r}) \cap \mathcal{O}(B_{V_n^{\mathbb{C}},r}),$$

des fonctions holomorphes et de carré intégrable sur la boule $B_{V_n^{\mathbb{C}},r}$. C'est un espace hilbertien de fonctions holomorphes pour le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{B_{V_n^{\mathbb{C}},r}} f(z)\overline{g(z)}dz,$$

dz est la mesure de Lebesgue euclidienne.
Son noyau reproduisant, le noyau de Bergman de $B_{V_n^{\mathbb{C}},r}$ admet le développement

$$\mathcal{K}_r(z, w) = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} r^{-2|\mathbf{m}|}(\frac{2\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}} K^{\mathbf{m}}(z, w), \tag{1.5}$$

où $K^{\mathbf{m}}$ est le noyau reproduisant de l'espace des polynômes $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$ muni du produit scalaire de Fischer, voir ([10] théorème XIII.2.4. p 266).
La convergence de cette série est uniforme sur tout compact de $B_{V_n^{\mathbb{C}},r} \times \overline{B_{V_n^{\mathbb{C}},r}}$.

Soit f une fonction holomorphe sur $B_{V_n^{\mathbb{C}},R}$. Sa restriction à $B_{V_n^{\mathbb{C}},r}$ appartient à l'espace de Bergman $\mathcal{B}(B_{V_n^{\mathbb{C}},r})$, et donc, pour tout $z \in B_{V_n^{\mathbb{C}},r}$,

$$f(z) = \int_{B_{V_n^{\mathbb{C}},r}} \mathcal{K}_r(z, w) f(w) dw.$$

Par suite

$$f(z) = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} f_{\mathbf{m}}(z),$$

où

$$f_{\mathbf{m}}(z) = r^{-2|\mathbf{m}|}(\frac{2\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}} \int_{B_{V_n^{\mathbb{C}},r}} K^{\mathbf{m}}(z,w) f(w) dw.$$

L'application $f \mapsto f_{\mathbf{m}}$ est la projection orthogonale de $\mathcal{B}(B_{V_n^{\mathbb{C}},r})$ sur $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$. Si f est K_n-invariante, il en est de même de $f_{\mathbf{m}}$, et alors $f_{\mathbf{m}}$ est proportionnelle au polynôme sphérique $\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}$:

$$f_{\mathbf{m}}(z) = c_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(z).$$

□

1.3 Série de Taylor sphérique double

Nous allons considérer des développements en séries de Taylor sphériques doubles qui interviendront dans la suite.

Soit μ une mesure de probabilité sur l'espace des matrices carrées $M(n, \mathbb{F})$ à coefficients dans $\mathbb{F}$ invariante à droite et à gauche par K_n. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $0 < \rho < \alpha$,

$$\int_{M(n,\mathbb{F})} e^{\rho |||y|||^2} \mu(dy) < \infty,$$

où $||| \cdot |||$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt.

Nous considérons la fonction

$$F(x, \xi) = \int_{M(n,\mathbb{F})} e^{\mathrm{tr}(xy\xi y^*)} \mu(dy),$$

où $x, \xi \in V_n^{\mathbb{C}}$.

Proposition 1.2 *La fonction F est définie pour $||x||_{op} < \sqrt{\alpha}$, $||\xi||_{op} < \sqrt{\alpha}$ et admet le développement suivant*

$$F(x, \xi) = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \gamma_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x) \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\xi),$$

où

$$\gamma_{\mathbf{m}} = \int_{M(n,\mathbb{F})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(yy^*) \mu(dy).$$

Démonstration. De l'inégalité

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}(xy\xi y^*)| &\leq |||xy|||\,|||\xi y^*||| \\ &\leq ||x||_{op}\,||\xi||_{op}\,|||y|||^2,\end{aligned}$$

on déduit que, si $||x||_{op} \leq \sqrt{\rho}$, $||\xi||_{op} \leq \sqrt{\rho}$

$$|e^{\mathrm{tr}(xy\xi y^*)}| \leq e^{\rho|||y|||^2}.$$

Ceci montre que la fonction F est définie et holomorphe sur $B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}} \times B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}}$.

Supposons maintenant que $x, \xi \in V_n^+ \cap B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}}$. Nous pouvons écrire

$$F(x, \xi) = \int_{M(n,\mathbb{F})} e^{\mathrm{tr}(\sqrt{x}y\xi y^*\sqrt{x})}\mu(dy).$$

Du développement

$$e^{\mathrm{tr}(z)} = \sum_{\mathbf{m}} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(z),$$

on déduit que

$$F(x, \xi) = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \int_{M(n,\mathbb{F})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\sqrt{x}y\xi y^*\sqrt{x})\mu(dy).$$

L'intégration terme à terme est justifiée car, la matrice hermitienne $\sqrt{x}y\xi y^*\sqrt{x}$ étant définie positive, les nombres $\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\sqrt{x}y\xi y^*\sqrt{x})$ sont positifs. En particulier, pour $x = \xi = \sqrt{\rho}1$ $(\rho < \alpha)$, on obtient

$$\sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \gamma_{\mathbf{m}}\rho^{|\mathbf{m}|} = \int_{M(n,\mathbb{F})} e^{\rho|||y|||^2}\mu(dy) < \infty.$$

Nous utilisons maintenant la relation fonctionnelle des fonctions sphériques :

$$\int_{K_n} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(gk \cdot \xi)dk = \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x)\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\xi), \qquad x = g \cdot 1, \quad (g \in G_n).$$

Voir [10] corollaire XI.3.2.

La mesure μ étant invariante à gauche par K_n, on en déduit que

$$\int_{M(n,\mathbb{F})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\sqrt{x}y\xi y^*\sqrt{x})\mu(dy) = \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x) \int_{M(n,\mathbb{F})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(y\xi y^*)\mu(dy).$$

Du fait que la mesure μ est invariante à droite par K_n on déduit de même que

$$\int_{M(n,\mathbb{F})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(y\xi y^*)\mu(dy) = \gamma_{\mathbf{m}}\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\xi).$$

(On a utilisé le fait que G_n est un ouvert dense de $M(n,\mathbb{F})$). Donc finalement, pour $x, \xi \in V_n^+ \cap B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}}$,

$$F(x,\xi) = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \gamma_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x)\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\xi).$$

Considérons maintenant la fonction

$$\widetilde{F}(x,\xi) = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \gamma_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x)\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\xi).$$

Si $||x||_{op} \leq \sqrt{\rho}$ et $||\xi||_{op} \leq \sqrt{\rho}$, $(\rho < \alpha)$, alors d'après l'équation (1.1)

$$|\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x)\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\xi)| \leq \rho^{|\mathbf{m}|},$$

et nous avons vu que

$$\sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \gamma_{\mathbf{m}} \rho^{|\mathbf{m}|} < \infty.$$

Par suite la fonction $\widetilde{F}$ est définie et holomorphe dans $B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}} \times B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}}$.

Les fonction F et $\widetilde{F}$, étant holomorphes dans $B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}} \times B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}}$ et égales sur $(B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}} \cap V_n^+) \times (B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}} \cap V_n^+)$, sont égales sur $B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}} \times B_{V_n^{\mathbb{C}},\sqrt{\alpha}}$. $\square$

Example 1 : Prenons pour μ la mesure de Haar normalisée du groupe K_n considérée comme mesure sur $M(n,\mathbb{F})$. La mesure μ ayant un support compact, la condition d'intégrabilité est satisfaite pour tout α.

De plus,

$$\gamma_{\mathbf{m}} = \int_{K_n} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(kk^*)dk = \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(1) = 1.$$

Nous obtenons

Proposition 1.3 *Pour tout $x, \xi \in V_n^{\mathbb{C}}$,*

$$\int_{K_n} e^{\operatorname{tr}(xk\xi k^*)}\, dk = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x)\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\xi).$$

Pour $x \in V_n$ notons $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x relativement à l'action de K_n :

$$\mathcal{O}_x = \{kxk^* \mid k \in K_n\},$$

et soit ν_x la mesure orbitale de support $\mathcal{O}_x$: si f est une fonction continue sur V_n,

$$\int_{V_n} f(y)\mu_x(dy) = \int_{K_n} f(kxk^*)dk,$$

où dk est la mesure de Haar normalisée du groupe K_n.

La proposition précédente fournit un développement en série de Taylor sphérique de la transformée de Fourier de ν_x :

$$\int_{V_n} e^{-i\langle \xi, y\rangle}\nu_x(dy) = \int_{K_n} e^{-i\mathrm{tr}(\xi kxk^*)}\, dk = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}}\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x)\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(-i\xi).$$

Exemple 2 : Prenons pour μ la mesure gaussienne

$$\mu(dy) = \pi^{-\frac{d}{2}n^2} e^{-|||y|||^2} dy.$$

Dans ce cas $\alpha = 1$. En effet, pour $\rho < 1$,

$$\int_{M(n,\mathbb{F})} e^{\rho|||y|||^2}\mu(dy) = \pi^{-\frac{d}{2}n^2}\int_{M(n,\mathbb{F})} e^{-(1-\rho)|||y|||^2} dy < \infty.$$

Nous allons montrer que

$$\gamma_{\mathbf{m}} = (\frac{dn}{2})_{\mathbf{m}}.$$

L'image par l'application

$$y \mapsto yy^*, \quad M(n,\mathbb{F}) \to \overline{V_n^+},$$

de la mesure μ, a pour densité

$$\frac{\pi^{\frac{d}{2}n^2}}{\Gamma(\frac{dn}{2})}\Delta(u)^{\frac{dn}{2}-\frac{\delta(n)}{n}} e^{-\mathrm{tr}(u)},$$

par rapport à la mesure de Lebesgue euclidienne de V_n (voir [10], proposition VI.1.1). Par suite

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathbf{m}} &= \int_{M(n,\mathbb{F})} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(yy^*)\pi^{-\frac{d}{2}n^2} e^{-|||y|||^2} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{dn}{2})}\int_{V_n^+} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(u) e^{-\mathrm{tr}(u)}\Delta(u)^{\frac{dn}{2}-\frac{\delta(n)}{n}} du \\
&= \frac{\Gamma(\frac{dn}{2}+\mathbf{m})}{\Gamma(\frac{dn}{2})} = (\frac{dn}{2})_{\mathbf{m}}.
\end{aligned}$$

D'autre part nous allons calculer explicitement la fonction F dans ce cas. Cette fonction étant doublement invariante par K_n :

$$F(k \cdot x, k' \cdot \xi) = F(x, \xi), \qquad (k, k' \in K_n),$$

elle est déterminée par sa restriction à l'espace des matrices diagonales. Considérons deux matrices diagonales, $x = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = \mathrm{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Alors

$$\begin{aligned}
F(x, \xi) &= \pi^{-\frac{d}{2}n^2} \int_{M(n,\mathbb{F})} e^{\sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i \xi_j |u_{ij}|^2} e^{-\sum\limits_{i,j=1}^{n} |u_{ij}|^2} \prod_{i,j=1}^{n} du_{ij} \\
&= \prod_{i,j=1}^{n} \pi^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{F}} e^{-(1-x_i\xi_j)|u_{ij}|^2}\, du_{ij} \\
&= \prod_{i,j=1}^{n} (1 - x_i \xi_j)^{-\frac{d}{2}}.
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu

Proposition 1.4 *Pour $x, \xi \in V_n$, $||x||_{op} < 1$, $||\xi||_{op} < 1$, alors*

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{d}{2}n^2} \int_{M(n,\mathbb{F})} e^{\mathrm{tr}(xy\xi y^*)} e^{-|||y|||^2} dy &= \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} (\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x) \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(\xi) \\
&= \prod_{i,j=1}^{n} (1 - x_i \xi_j)^{-\frac{d}{2}},
\end{aligned}$$

où les nombres x_i et ξ_i sont les valeurs propres de x et ξ.

Nous allons donner une application de ces développements en séries de Taylor sphériques doubles à l'étude des projections des mesures orbitales. Pour cela nous allons d'abord identifier la restriction d'un polynôme sphérique $\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x)$ défini sur V_n au sous-espace V_n^0 des matrices dont les coefficients de la dernière ligne et de la derniére colonne sont nuls.

Si a est inversible, alors $a \in G_n$ et la transformation A définie sur $\mathcal{P}^{(n)}$ par

$$Ap(x) = p(axa),$$

laisse stable $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$. Par passage à la limite ceci reste vrai pour tout $a \in V_n$. Soit $a = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0)$ alors l'application $x \mapsto axa$ est le projecteur orthogonal de V_n sur V_{n-1} et par suite A est le projecteur orthogonal de $\mathcal{P}^{(n)}$ sur le sous-espace $A\mathcal{P}^{(n)}$, des polynômes qui vérifient

$$p(x') = p(\begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}),$$

où x' est la projection de x sur V_{n-1}. Le sous-espace $A\mathcal{P}^{(n)}$ est G_{n-1}-invariant et c'est un sous-espace isomorphe à l'espace des restrictions $Res\left(\mathcal{P}^{(n)}\right)$ où Res est l'application définie par

$$\begin{aligned} Res : \mathcal{P}^{(n)} &\longrightarrow \mathcal{P}^{(n-1)} \\ p &\longmapsto p\mid_{V_{n-1}} . \end{aligned}$$

Proposition 1.5

a) Si $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$ *avec* $m_n > 0$, *alors*

$$Res\left(\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}\right) = \{0\}.$$

b) Si $\mathbf{m}' = (m_1, \dots, m_{n-1})$, $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{n-1}, 0)$, *alors*

$$Res\left(\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}\right) = \mathcal{P}_{\mathbf{m}'}^{(n-1)}.$$

Démonstration.

a) Si $m_n > 0$, du fait que tout polynôme de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$ est divisible par le déterminant on déduit a) immédiatement.

b)

• Puisque le sous-espace $A\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$ contient le polynôme $\Delta_{\mathbf{m}'}$ alors

$$\mathcal{P}_{\mathbf{m}'}^{(n-1)} \subset A\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$$

• Montrons que $A\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$ est G_{n-1}-irréductible.

Soit q un polynôme conique non nul de $A\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)} \subset \mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)}$ alors

$$q = C\Delta_\alpha,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$. Donc

$$\Delta_\alpha \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)},$$

et par suite

$$\alpha = \mathbf{m},$$

et

$$A\mathcal{P}_{\mathbf{m}}^{(n)} = \mathcal{P}_{\mathbf{m}'}^{(n-1)}.$$

□

Remarque 1.6 *Par récurrence on peut généraliser le résultat au cas où* $m_{k+1} = \cdots = m_n = 0$, *en considérant l'application de restriction*

$$Res_k : \mathcal{P}^{(n)} \to \mathcal{P}^{(k)},\ p \mapsto p\,|_{V_k}\,.$$

En effet,

$$Res_k = Res \circ Res \circ \cdots \circ Res,$$

est la composée de l'application Res, $(n-k)$-fois. On en déduit que

a) *Si* $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k, m_{k+1}, \ldots, m_n)$ *avec* $m_{k+1} > 0$, *alors*

$$Res_k\left(\mathcal{P}^{(n)}_{\mathbf{m}}\right) = \{0\}.$$

b) *Si* $\mathbf{m}' = (m_1, \ldots, m_k)$, $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k, 0, \ldots, 0)$, *alors*

$$Res_k\left(\mathcal{P}^{(n)}_{\mathbf{m}}\right) = \mathcal{P}^{(k)}_{\mathbf{m}'}.$$

Corollaire 1.7 *Si* $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{m}' = (m_1, \ldots, m_k)$ *alors pour tout* $x' \in V_k$

$$\Phi^{(n)}_{\mathbf{m}}(x) = \frac{d^{(k)}_{\mathbf{m}'}}{d^{(n)}_{\mathbf{m}}} \frac{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}'}} \Phi^{(k)}_{\mathbf{m}'}(x'),$$

où $x \in V_n$,

$$x = \begin{pmatrix} x' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. D'après la remarque précédente

$$Res_k\left(\Phi^{(n)}_{\mathbf{m}}\right)$$

est un polynôme K_k-invariant de l'espace $\mathcal{P}^{(k)}_{\mathbf{m}'}$. Puisque les polynômes K_k-invariants de l'espace $\mathcal{P}^{(k)}_{\mathbf{m}'}$ sont proportionnels à $\Phi^{(k)}_{\mathbf{m}'}(x')$, alors il existe une constante $C^{(n,k)}_{\mathbf{m}}$ telle que,

$$\Phi^{(n)}_{\mathbf{m}}(x) = C^{(n,k)}_{\mathbf{m}}\ \Phi^{(k)}_{\mathbf{m}'}(x'),$$

Pour calculer $C^{(n,k)}_{\mathbf{m}}$, on utilise le développement,

$$e^{\mathrm{tr}(x)} = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{d^{(n)}_{\mathbf{m}}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \Phi^{(n)}_{\mathbf{m}}(x).$$

Par restriction on obtient,

$$e^{\mathrm{tr}(x')} = \sum_{\mathbf{m}'} \frac{d^{(n)}_{\mathbf{m}}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} C^{(n,k)}_{\mathbf{m}} \Phi^{(k)}_{\mathbf{m}'}(x').$$

D'autre part,

$$e^{\mathrm{tr}(x')} = \sum_{\mathbf{m}'} \frac{d^{(k)}_{\mathbf{m}'}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}'}} \Phi^{(k)}_{\mathbf{m}'}(x').$$

Puisque le développement en série de polynômes sphériques est unique, alors

$$C^{(n,k)}_{\mathbf{m}} = \frac{d^{(k)}_{\mathbf{m}'}}{d^{(n)}_{\mathbf{m}}} \frac{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}'}}.$$

□

Corollaire 1.8

a) Si $m_2 > 0$,

$$\Phi^{(n)}_{\mathbf{m}}(\mathrm{diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)) = 0.$$

b) Si $\mathbf{m} = [m] := (m, 0, \ldots, 0)$,

$$\Phi^{(n)}_{\mathbf{m}}(\mathrm{diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)) = \frac{(\frac{\delta(n)}{n})_{[m]}}{d^{(n)}_{[m]}} \frac{1}{m!} \lambda^m.$$

Remarque 1.9 *Ce corollaire peut être obtenu plus simplement en remplaçant* x *par* $\mathrm{diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)$ *dans le développement*

$$e^{\mathrm{tr}(x)} = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{d^{(n)}_{\mathbf{m}}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \Phi^{(n)}_{\mathbf{m}}(x),$$

et en remarquant que $\Phi^{(n)}_{[m]}(x) = c_m \lambda^m$.

1.4 Projection des mesures orbitales

Rappelons que, pour $x \in V_n$, nous avons noté $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x relativement à l'action de K_n et ν_x la mesure orbitale de support $\mathcal{O}_x$. Nous nous intéressons à la projection M_x de la mesure orbitale ν_x sur la droite engendrée par une matrice hermitienne de rang un. Par raison d'invariance il suffit de considérer la matrice E_{11}. Ainsi la mesure M_x est définie par : si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) M_x(dt) = \int_{K_n} f((kxk^*)_{11}) dk.$$

D'après le théorème spectral l'orbite $\mathcal{O}_x$ contient une matrice diagonale. Cela signifie que la mesure ν_x, et par suite la mesure M_x, ne dépendent que des valeurs propres de x. On peut donc supposer que

$$x = a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit kxk^*, nous obtenons :

$$(kxk^*)_{11} = a_1|k_{11}|^2 + \cdots + a_n|k_{1n}|^2.$$

Considérons l'application

$$K_n \longrightarrow S_n,\ k \longmapsto (k_{11}, \ldots, k_{1n}),$$

qui à une matrice k associe sa première colonne, où S_n est la sphère unité de $\mathbb{F}^n$. L'image de la mesure de Haar normalisée dk par cette application est égale à la mesure uniforme normalisée $\tau^{(n)}$ sur la sphère S_n.
Donc,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) M_a(dt) = \int_{S_n} f(a_1|k_{11}|^2 + \cdots + a_n|k_{1n}|^2)\tau^{(n)}(dk). \tag{1.6}$$

Proposition 1.10 *La transformée de Fourier de la mesure M_a admet le développement en série de Taylor suivant*

$$\widehat{M_a}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} M_a(dt) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Phi_{[m]}^{(n)}(a)(i\lambda)^m.$$

Démonstration. D'après la proposition 1.3, pour tous x, $y \in V_n^{\mathbb{C}}$,

$$\int_{K_n} e^{\mathrm{tr}(xkyk^*)}\, dk = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(x)\Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(y),$$

où dk est la mesure de Haar normalisée du groupe unitaire K_n.

Si on prend $y = a$ et $x = \mathrm{diag}(i\lambda, 0, \ldots, 0)$, alors

$$\int_{S_n} e^{i\lambda(a_1|k_{11}|^2 + \cdots + a_n|k_{1n}|^2)}\ \tau^{(n)}(dk) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_{[m]}^{(n)}}{(\frac{\delta(n)}{n})_m} \Phi_{[m]}^{(n)}(a_1, \ldots, a_n)\Phi_{[m]}^{(n)}(i\lambda, 0, \ldots, 0).$$

où $[m] = (m, 0, \ldots, 0)$.

D'après $b)$ du corollaire 1.8 on a

$$\Phi^{(n)}_{[m]}(\mathrm{diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)) = \frac{(\frac{\delta(n)}{n})_{[m]}}{d^{(n)}_{[m]}} \frac{1}{m!} \lambda^m.$$

Donc,

$$\int_{S_n} e^{i\lambda(a_1|k_{11}|^2+\cdots+a_n|k_{1n}|^2)} \tau^{(n)}(dk) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Phi^{(n)}_{[m]}(a_1, \ldots, a_n)(i\lambda)^m.$$

Si on remplace $f(t)$ par $e^{i\lambda t}$ dans (1.6) on en déduit la proposition. □

La relation suivante sera utilisée au chapitre 3. Notons $A = \sup\limits_j |a_j|$ et U_A le plan complexe privé des deux demi-droites :

$$U_A = \mathbb{C} \backslash \left(i \left]-\infty, -\frac{1}{A}\right] \bigcup i \left[\frac{1}{A}, +\infty\right[\right).$$

Proposition 1.11 *Pour* $\lambda \in U_A$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 - i\lambda x)^{\frac{dn}{2}}} M_a(dx) = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} (1 - i\lambda a_j)^{\frac{d}{2}}}.$$

Pour $a \in [-A, A]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la détermination de la fonction

$$\lambda \mapsto \frac{1}{(1 - i\lambda a)^{\alpha}}.$$

Dans l'ouvert simplement connexe U_A qui est égale 1 pour $\lambda = 0$.

Démonstration. Pour $\lambda, t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{(1 - i\lambda t)^{\frac{dn}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{dn}{2})} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{dn}{2}-1} e^{i\lambda t u} dt.$$

Puisque M_a est une mesure de probabilité, nous pouvons appliquer le théorème de Fubini et nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 - i\lambda t)^{\frac{dn}{2}}} M_a(dt) = \frac{1}{\Gamma(\frac{dn}{2})} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{dn}{2}-1} \widehat{M_a}(\lambda u)\, du.$$

Pour $|\lambda| < \frac{1}{A}$, nous pouvons intégrer terme à terme le développement en série de Taylor de $\widehat{M_a}(\lambda u)$. En effet d'après l'inégalité (1.1)

$$|\Phi^{(n)}_{[m]}(a_1, \ldots, a_n)| \leq A^m,$$

et

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{m!}\left|\Phi_{[m]}^{(n)}(a_1,\ldots,a_n)(i\lambda)^m\right|e^{-t}t^{\frac{dn}{2}+m-1}\,dt\\
&\leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}|A\lambda|^m\Gamma(\frac{dn}{2}+m)\\
&=\Gamma(\frac{dn}{2})(1-A|\lambda|)^{-\frac{dn}{2}}.
\end{aligned}$$

Nous obtenons, si $|\lambda| < \frac{1}{A}$,

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1-i\lambda t)^{\frac{dn}{2}}}M_a(dt) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{nd}{2})_m}{m!}\Phi_{[m]}^{(n)}(a_1,\ldots,a_n)(i\lambda)^m.$$

Or, d'après la proposition 1.4 et le corollaire 1.8, pour $A < 1$ et $|\lambda| < 1$,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{nd}{2})_m}{m!}\Phi_{[m]}^{(n)}(a_1,\ldots,a_n)(i\lambda)^m = \frac{1}{\prod_{j=1}^{n}(1-i\lambda a_j)^{\frac{d}{2}}}.$$

Les deux membres de cette égalité admettent des prolongement holomorphes dans U_A. Finalement la relation

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)M_{\theta a}(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(\theta t)M_a(dt), \qquad (\theta\in\mathbb{R}),$$

permet de s'affranchir de la condition $A < 1$. □

1.5 Mesures de probabilité et transformation de Fourier

La transformation de Fourier permet d'étudier les mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$, et leur convergence. Rappelons ici les résultats que nous utiliserons dans la suite.

Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et ψ sa transformée de Fourier :

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu}\nu(du).$$

Proposition 1.12 *On suppose que la fonction ψ est développable en série de Taylor à l'origine : pour $|x| < R$,*

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

Alors la fonction ψ admet un prolongement holomorphe à la bande

$$\Sigma_R = \{z = x + iy \mid |y| < R\}.$$

De plus, pour $|y| < R$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{yu}\nu(du) < \infty,$$

et, pour $z \in \Sigma_R$, le prolongement $\widetilde{\psi}$ de ψ est donné par

$$\widetilde{\psi}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izu}\nu(du).$$

On considère une suite $\nu^{(n)}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ et on note $\psi^{(n)}$ la transformée de Fourier de $\nu^{(n)}$:

$$\psi^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu}\nu^{(n)}(du).$$

Proposition 1.13

(i) *On suppose que chacune des fonctions $\psi^{(n)}$ soit développable en série de Taylor dans le disque ouvert $D(0, R)$: pour $|z| < R$,*

$$\psi^{(n)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} z^m,$$

et que la suite des fonctions $\psi^{(n)}$ converge uniformément sur le disque fermé $\overline{D(0, r)}$, pour tout $r < R$.

Alors la suite des mesures $\nu^{(n)}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité ν. Notons ψ la transformée de Fourier de ν. Les fonctions $\psi^{(n)}$ et ψ admettent des prolongement holomorphes à Σ_R, et la suite $\psi^{(n)}$ converge vers ψ uniformément sur tout compact de Σ_R.

(ii) *On suppose que, pour tout m,*

$$\lim_{n\to\infty} c_m^{(n)} = c_m,$$

et qu'il existe une suite $a_m \geq 0$ telle que, pour tout $r < R$,

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m < \infty,$$

et, pour tous m et n,

$$|c_m^{(n)}| \leq a_m.$$

Alors les hypothèses de (i) *sont vérifiées.*

On peut trouver la démonstration de ces deux propositions dans [11], lemma 6.5 et lemma 6.6.

On note T_+ le demi-plan supérieur :

$$T_+ = \{z = x + iy \,|\, y > 0\}.$$

Si le support de la mesure μ est contenu dans $[0, +\infty[$, alors sa transformée de Fourier

$$\psi(z) = \int_{[0,\infty[} e^{izu} \nu(du),$$

est définie, continue et bornée sur $\overline{T_+}$, holomorphe dans T_+. Réciproquement :

Proposition 1.14 *On suppose que la fonction ψ se prolonge en une fonction continue bornée sur $\overline{T_+}$, holomorphe dans T_+.*

Alors le support de la mesure ν est contenu dans $[0, +\infty[$.

Ces résultats se généralisent aux mesures de probabilité sur un espace vectoriel réel normé V. On note sa norme $||\cdot||_V$ et on considère sur l'espace comlexifié $V^{\mathbb{C}}$ une norme qui coïncide sur V avec la norme $||\cdot||_V$. On désigne aussi par $||\cdot||_{V'}$ la norme de l'espace dual de V, qui est définie par

$$||u||_{V'} = \sup\{\langle x, u\rangle, \ \forall x \in V; ||x||_V \leq 1\}.$$

Soit ν une mesure de probabilité sur l'espace dual V'. Sa transformée de Fourier ψ est définie sur V par :

$$\psi(x) = \int_{V'} e^{i\langle x,u\rangle} \nu(du).$$

Proposition 1.15 *On suppose que la fonction ψ admette un prolongement holomorphe dans la boule $B_{V^{\mathbb{C}},R}$ de centre o et de rayon R de $V^{\mathbb{C}}$. Alors la fonction ψ admet un prolongement holomorphe au tube*

$$\Sigma_R = \{z = x + iy \,|\, ||y||_V < R\} = V + iB(0, R).$$

Si $||y||_V < R$,

$$\int_{V'} e^{\langle y,u\rangle} \nu(du) < \infty,$$

et, pour tout $z \in \Sigma_R$, le prolongement $\widetilde{\psi}$ de ψ est donné par

$$\widetilde{\psi}(z) = \int_{V'} e^{i\langle z,u\rangle} \nu(du).$$

De même considérons une suite $\nu^{(n)}$ de mesures de probabilité sur V', et leurs transformées de Fourier $\psi^{(n)}$.

Proposition 1.16 *On suppose que chacune des fonctions $\psi^{(n)}$ admette un prolongement holomorphe à $B_{V^{\mathbb{C}},R}$, et que la suite des fonctions $\psi^{(n)}$ converge uniformément sur tout compact de $B_{V^{\mathbb{C}},R}$.*

Alors la suite des mesures $\nu^{(n)}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité ν. Notons ψ la transformée de Fourier de ν. Les fonctions $\psi^{(n)}$ et ψ admettent des prolongements holomorphes au tube Σ_R, et la suite $\psi^{(n)}$ converge vers ψ uniformément sur tout compact de Σ_R.

Dans la proposition suivante on considère le cas où $V = V' = Herm(k, \mathbb{F})$ muni de la norme d'opérateur $||\cdot||_{op}$, et on suppose que les mesures $\nu^{(n)}$, et par suite leurs transformées de Fourier $\psi^{(n)}$, soient invariantes par le groupe compact K_k.

Proposition 1.17 *On suppose que chacune des fonctions $\psi^{(n)}$ soit développable en série de Taylor sphérique dans la boule ouverte $B(0, R)$:*

$$\psi^{(n)}(x) = \sum_{\mathbf{m}\geq 0}^{\infty} c_{\mathbf{m}}^{(n)} \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(x),$$

On suppose de plus que, pour tout $\mathbf{m}$,

$$\lim_{n\to\infty} c_{\mathbf{m}}^{(n)} = c_{\mathbf{m}},$$

et qu'il existe une suite $a_{\mathbf{m}} \geq 0$ telle que, pour tout $r < R$,

$$\sum_{\mathbf{m}\geq 0}^{\infty} a_{\mathbf{m}} r^{|\mathbf{m}|} < \infty,$$

et, pour tous $\mathbf{m}$ et n,

$$|c_{\mathbf{m}}^{(n)}| \leq a_{\mathbf{m}}.$$

Alors les hypothèses de de la proposition 1.16 sont vérifiées.

Soit Γ un cône convexe fermé dans V' qu'on suppose pointu : $\Gamma \cap (-\Gamma) = \{0\}$, et d'intérieur non vide. On note $\Omega \subset V$ l'intérieur du cône dual :

$$\Omega = \{x \in V \mid \forall u \in \Gamma \backslash \{0\},\ \langle x, u\rangle > 0\}.$$

On note $T_\Omega = V + i\Omega \subset V^{\mathbb{C}}$ le tube de base Ω ; si le support de la mesure μ est contenu dans Γ, alors sa transformée de Fourier ψ est définie, continue et bornée sur $\overline{T_\Omega} = V + i\overline{\Omega}$, et holomorphe dans T_Ω ; Réciproquement :

Proposition 1.18 *On suppose que la fonction ψ se prolonge en une fonction continue bornée sur $\overline{T_\Omega}$, holomorphe dans T_Ω.*

Alors le support de la mesure ν est contenu dans Γ.

La méthode suivante permet de passer de la dimension un aux dimensions supérieures. Soit ν une mesure de probabilité sur V' et ψ sa transformée de Fourier. Pour $x \in V$ fixé, on considère la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ définie par, si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mu_x(dt) = \int_{V'} f(\langle x, u\rangle)\nu(du).$$

(C'est essentiellement la projection de la mesure ν sur la droite engendrée par x.) La transformée de Fourier de ν_x est la fonction ψ_x définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_x(\tau) = \psi(\tau x).$$

Démonstration de la proposition 1.15. Soit $r < R$. On pose

$$M(r) = \sup_{z \in B_{V^{\mathbb{C}},r}} |\psi(z)|.$$

Soit $y \in B(0, R)$ un vecteur non nul fixé. En appliquant la proposition 1.12 à la mesure ν_y et à sa transformée de Fourier ψ_y, qui est holomorphe sur le disque $D(0, \frac{R}{||y||_V})$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{|t|}\nu_y(dt) \leq \psi_y(i) + \psi_y(-i) \leq 2M(r),$$

c'est-à-dire

$$\int_{V'} e^{|\langle y,u\rangle|}\nu(du) \leq 2M(r).$$

Donc, si $||y||_V \leq r$ alors,

$$\int_{V'} e^{r||u||_{V'}}\nu(du) \leq 2M(r).$$

Par suite la fonction définie par

$$\widetilde{\psi}(z) = \int_{V'} e^{i\langle z,u\rangle}\nu(du),$$

est holomorphe sur Σ_R et coïncide avec ψ sur $B_{V^{\mathbb{C}},R}$. $\square$

Démonstration de la proposition 1.16. D'après la proposition 1.15, $\psi^{(n)}$ se prolonge en une fonction holomorphe dans Σ_R.

Soit $r < R$, pour $||y||_V \leq r$,

$$\psi^{(n)}(iy) + \psi^{(n)}(-iy) = 2\int_{V'} \cosh(\langle y, u\rangle)\nu^{(n)}(du).$$

Puisque, $\lim_{n\to\infty} \psi^{(n)}(iy) + \psi^{(n)}(-iy) = \psi(iy) + \psi(-iy)$ alors il existe $M(r) > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$,

$$\int_{V'} \cosh(\langle y, u\rangle)\nu^{(n)}(du) \leq M(r),$$

or pour $z \in \Sigma_R$,

$$\psi^{(n)}(z) = \int_{V'} e^{i\langle z,u\rangle}\nu^{(n)}(du).$$

Par suite pour tout $z \in \Sigma_r$,

$$|\psi^{(n)}(z)| \leq M(r).$$

D'après le théorème de Montel, on peut extraire de la suite $\psi^{(n)}$ une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact du tube Σ_R. Puisque $\psi^{(n)}$ converge sur $B_{V^{\mathbb{C}},R}$, on en déduit que $\psi^{(n)}$ converge uniformément sur tout compact de Σ_R. □

Démonstration de la proposition 1.18. On applique la proposition 1.14 à la mesure ν_y et sa transformée de Fourier ψ_y. Pour $y \in \Omega$, la fonction ψ_y se prolonge en une fonction continue bornée sur $\overline{T_+}$ et holomorphe dans T_+. Donc, d'après la proposition 1.14, le support de ν_y est contenu dans $[0, \infty[$. Ceci implique que

$$supp(\nu) \subset \{u \,|\, \langle u, y\rangle \geq 0\}.$$

Par suite

$$supp(\nu) \subset \{u \,|\, \forall y \in \Omega, \langle u, y\rangle \geq 0\}.$$

Il résulte du théorème des bipolaires que

$$\{u \,|\, \forall y \in \Omega, \langle u, y\rangle \geq 0\} = \Gamma.$$

Donc

$$supp(\nu) \subset \Gamma.$$

□

☆☆☆

Chapitre 2

Convergence des mesures orbitales, méthode utilisant les théorèmes de Poincaré et de Minlos

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, qui a fait l'objet d'une publication aux annales de la Faculté des Sciences de Toulouse [6], nous allons étudier les intégrales

$$\int_{S_{k,n}} e^{-i\mathrm{tr}(\xi v a^{(n)} v^*)} \, \tau_k^{(n)}(dv), \tag{2.1}$$

où $S_{k,n}$ est la variété de Stiefel

$$S_{k,n} = \big\{ v \in M(k,n;\mathbb{F}) \,;\, vv^* = I_k \big\}, \qquad k < n,$$

et $\tau_k^{(n)}$ est la mesure de probabilité uniforme définie sur $S_{k,n}$ considérée comme mesure sur $M(k,\infty;\mathbb{F})$, et les comportement asymptotiques de ces intégrales.

Notons $\widetilde{S}_{k,n}$ l'homothétique de $S_{k,n}$ dans le rapport $\sqrt{n}$:

$$\widetilde{S}_{k,n} = \big\{ v \in M(k,n;\mathbb{F}) \,;\, vv^* = nI_k \big\},$$

et $\widetilde{\tau}_k^{(n)}$ la mesure de probabilité uniforme définie sur $\widetilde{S}_{k,n}$. Nous pouvons exprimer (2.1) comme une intégrale sur $\widetilde{S}_{k,n}$:

$$\int_{\widetilde{S}_{k,n}} e^{-i\mathrm{tr}(\xi v \frac{a^{(n)}}{n} v^*)} \, \widetilde{\tau}_k^{(n)}(dv).$$

En généralisant un théorème de Poincaré, nous montrons que la suite des mesures $\widetilde{\tau}_k^{(n)}$, considérées comme des mesures sur $M(k,\infty;\mathbb{F})$, convergent vers une mesure gaussienne. Ensuite en appliquant un théorème de Minlos, nous montrons la convergence de ces intégrales sous des hypothèses portant sur la suite $a^{(n)}$ que nous précisons.

On commence par regarder ce problème dans le cas où $k = 1$ (proposition 2.1). Ensuite k sera un entier fixé quelconque (proposition 2.12).

On note $\varphi_k^{(n)}$ la fonction définie par

$$\varphi_k^{(n)}(\xi) = \int_{S_{k,n}} e^{-i\mathrm{tr}(\xi v a^{(n)} v^*)}\ \tau_k^{(n)}(dv), \tag{2.2}$$

où x, $a^{(n)}$ sont des matrices hermitiennes, $x \in V_k$ et $a^{(n)} \in V_n$.

Étant donnée que la mesure $\tau_k^{(n)}$ est invariante à gauche par le groupe unitaire K_k et à droite par le groupe unitaire K_n, on peut supposer que ξ et $a^{(n)}$ sont des matrices diagonales réelles .

Dans la suite on prendra $a^{(n)} = \mathrm{diag}(a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$, $\xi = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $a_j^{(n)} \in \mathbb{R}$ et $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Si $k = 1$ et $x = \mathrm{diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)$ alors, la fonction $\varphi_1^{(n)} = \varphi^{(n)}$ s'écrit,

$$\varphi^{(n)}(\lambda) = \int_{S_n} \exp(-i\lambda \sum_{j=1}^{n} a_j^{(n)} |x_j|^2)\ \tau^{(n)}(dx), \tag{2.3}$$

où S_n est la sphère unité de $\mathbb{F}^n$ et $\tau^{(n)}$ est la mesure de probabilité uniforme sur S_n.

Le résultat principal de ce chapitre est la proposition suivante.

Proposition 2.1 *On suppose que pour tout j,*

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_j^{(n)}}{n} = \alpha_j.$$

De plus on suppose que la suite $\alpha = \{\alpha_j\}$ est sommable et que

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^{(n)}}{n} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j,$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j^{(n)}}{n}\right)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2.$$

Alors, la fonction $\varphi^{(n)}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers la fonction φ définie par :

$$\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + \frac{2}{d} i\lambda\alpha_j)^{-\frac{d}{2}}.$$

Avec $d = 1, 2$ ou 4 suivant que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Nous établirons au chapitre 3 ce résultat sous des hypothèses plus faibles en utilisant une autre méthode.

2.2 Théorème de Poincaré

On désigne par $M(k, n; \mathbb{F})$ l'espace des matrices $k \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}$. Il est muni du produit scalaire défini par

$$\langle x, \xi \rangle = \Re(\mathrm{tr}(x\xi^*)).$$

Soit $M(k, \infty; \mathbb{F}) = \varprojlim M(k, n; \mathbb{F})$, la limite projective des espaces $M(k, n; \mathbb{F})$, c'est l'espace des matrices à k lignes et une infinité de colonnes. On munit cet espace de la topologie de la limite projective. C'est un espace séparable, métrisable et complet puisqu'il est homéomorphe à $(\mathbb{F}^\infty)^k$. On désigne aussi par $M(k, (\infty); \mathbb{F}) = \varinjlim M(k, n; \mathbb{F})$, la limite inductive des espaces $M(k, n; \mathbb{F})$. C'est l'espace des matrices à k lignes et qui n'ont qu'un nombre fini de colonnes non nulles,

$$M(k, (\infty); \mathbb{F}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(k, n; \mathbb{F}),$$

c'est également l'espace dual de $M(k, \infty; \mathbb{F})$ pour le produit scalaire défini ci-dessus. On munit cet espace de la topologie de la limite inductive. En particulier une fonction f est continue sur $M(k, (\infty); \mathbb{F})$, si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa restriction $f \mid_{M(k,n;\mathbb{F})}$ à $M(k, n; \mathbb{F})$ est continue.

On rappelle d'abord la définition et le théorème suivants.

Définition 2.2 Une suite $\nu^{(n)}$ de mesures de probabilité sur $M(k, \infty; \mathbb{F})$ *converge étroitement* vers une mesure ν sur $M(k, \infty; \mathbb{F})$, si pour toute fonction continue bornée f sur $M(k, \infty; \mathbb{F})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M(k,\infty;\mathbb{F})} f(x)\nu^{(n)}(dx) = \int_{M(k,\infty;\mathbb{F})} f(x)\nu(dx).$$

Théorème 2.3 *Une suite de mesures de probabilité $\nu^{(n)}$ sur $M(k,\infty;\mathbb{F})$ converge étroitement vers une mesure ν si et seulement si, pour tout $m \geq 1$, la suite $\nu_m^{(n)} = s_m(\nu^{(n)})$ converge étroitement vers $\nu_m = s_m(\nu)$ où $s_m : M(k,\infty;\mathbb{F}) \longrightarrow M(k,m;\mathbb{F})$, est la projection canonique.*

(Bellingsley [3] p.29-30).

Pour démontrer le théorème de Poincaré théorème 2.4, nous avons besoin du résultat suivant. La transformée de Fourier de la mesure $\tau_k^{(n)}$ est donnée par :

$$\widehat{\tau_k^{(n)}}(\xi) = \int_{S_{k,n}} e^{-i\langle \xi,x\rangle}\ \tau_k^{(n)}(dx) = \mathcal{J}^{(k)}_{\frac{nd}{2}}(\frac{\xi\xi^*}{4}), \qquad \xi \in M(k,n;\mathbb{F}),\ \ k \leq n,$$

où $\mathcal{J}_\nu^{(k)}$ est la fonction de Bessel d'indice ν définie sur $V_k^{\mathbb{C}}$ par :

$$\mathcal{J}_\nu^{(k)}(z) = \sum_{\mathbf{m}\geq 0} (-1)^{|\mathbf{m}|} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(k)}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}}} \frac{1}{(\nu)_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(z), \qquad (\nu)_{\mathbf{m}} \neq 0.$$

La somme est étendue au $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^k$, $\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_k)$ et $m_1 \geq \cdots \geq m_k \geq 0$. C'est un cas particulier de la proposition XVI.2-3 de [10].

On suppose que $k = 1$ et on note $\widetilde{S}_{1,n} = \widetilde{S}_n$ la sphère de $\mathbb{F}^n$ de centre o et de rayon $\sqrt{n}$

$$\widetilde{S}_n = \left\{ v = (v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{F}^n \ \ | \ \ \sum_{j=1}^n |v_j|^2 = n \right\},$$

et $\widetilde{\tau}_1^{(n)} = \widetilde{\tau}^{(n)}$ est la mesure uniforme normalisée sur cette sphère considérée comme mesure sur $\mathbb{F}^\infty$. Le résultat suivant est attribué à Poincaré.

Théorème 2.4 (Poincaré) :
La mesure $\widetilde{\tau}^{(n)}$ converge étroitement vers la mesure gaussienne γ de $\mathbb{F}^\infty$ dont la transfomée de Fourier est :

$$\psi(\xi) = e^{-\frac{\rho^2}{2d}}, \qquad \textit{avec}\ \ \rho^2 = \sum_{j=1}^\infty \xi_j^2, \qquad\qquad \xi \in \mathbb{F}^{(\infty)}.$$

($\mathbb{F}^{(\infty)}$ est le dual de $\mathbb{F}^\infty$ pour le produit scalaire euclidien.)

Ce théorème a été démontré à plusieurs reprises, on peut voir la preuve probabiliste proposée par Diaconis et Freedman [13]. Ici on en donne une preuve plus analytique.

Démonstration. Soit $\psi^{(n)}$ la transformée de Fourier de la mesure $\widetilde{\tau}^{(n)}$. Pour $\xi \in \mathbb{F}^\ell, \ell < n$ on a :

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(\xi) &= \int_{\widetilde{S}_n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\ \widetilde{\tau}^{(n)}(dx)\\ &= \mathcal{J}^{(1)}_{\frac{nd}{2}}(\frac{n}{4}||\xi||^2)\\ &= \mathcal{J}^{(1)}_{\frac{nd}{2}}(\frac{n}{4}\rho^2).\end{aligned}$$

où $\rho^2 = \sum_{j=1}^{\ell} |\xi_j|^2$.

Pour, $k = 1$ et $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^{(1)}_{\frac{nd}{2}}(\frac{t^2}{4}) &= \Gamma(\frac{nd}{2})(\frac{2}{t})^{\frac{nd}{2}-1} J_{\frac{nd}{2}-1}(t)\\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{nd(nd+2)\cdots(nd+2m-2)}(\frac{t^2}{2})^m.\end{aligned}$$

Donc,

$$\psi^{(n)}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(nd)^m}{nd(nd+2)\cdots(nd+2m-2)}(\frac{\rho^2}{2d})^m.$$

Mais,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(nd)^m}{nd(nd+2)\cdots(nd+2m-2)} = 1,$$

et

$$\frac{(nd)^m}{nd(nd+2)\cdots(nd+2m-2)} \leq 1.$$

Donc, d'après la proposition 1.13,

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{(n)}(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}(\frac{\rho^2}{2d})^m = e^{-\frac{\rho^2}{2d}}.$$

Par suite, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $s_\ell(\widetilde{\tau}^{(n)})$ converge étroitement vers la mesure gaussienne γ_ℓ sur $\mathbb{F}^\ell$ définie par :

$$\gamma_\ell(dx) = (\frac{2\pi}{d})^{-\frac{d\ell}{2}} e^{-\frac{d}{2}\sum_{j=1}^{\ell}|x_j|^2} dx.$$

où dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{F}^\ell$.

Puisque les projections des mesures $\widetilde{\tau}^{(n)}$ sur les sous-espaces de dimension finie $\mathbb{F}^\ell$ convergent pour tout ℓ alors, d'après le théorème 2.3, la suite des mesures $\widetilde{\tau}^{(n)}$ converge étroitement vers la mesure gaussienne γ sur $\mathbb{F}^{\infty}$, dont la transformée de Fourier est définie sur $\mathbb{F}^{(\infty)}$ par

$$\int_{\mathbb{F}^{\infty}} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\gamma(dx) = e^{-\frac{1}{2d}||\xi||^2}, \qquad \xi \in \mathbb{F}^{(\infty)}.$$

□

On suppose maintenant que $k \geq 1$.

Théorème 2.5 *La mesure $\widetilde{\tau}_k^{(n)}$ converge étroitement vers la mesure de gaussienne γ_k sur $M(k,\infty;\mathbb{F})$ dont la transformée de Fourier ψ_k est donnée par :*

$$\psi_k(\xi) = e^{-\frac{\rho^2}{2d}},$$

où

$$\rho^2 = \mathrm{tr}(\xi\xi^*) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{\infty} |\xi_{j,\ell}|^2,$$

et $\xi \in M(k,(\infty);\mathbb{F})$.

Démonstration. Soit $\psi_k^{(n)}$ la transformée de Fourier de $\widetilde{\tau}_k^{(n)}$. Pour $\xi \in M(k,p;\mathbb{F})$, $p < n$.

$$\begin{aligned}\psi_k^{(n)}(\xi) &= \int_{\widetilde{S}_{k,n}} e^{-i\langle \xi,x\rangle}\ \widetilde{\tau}_k^{(n)}(dx) = \mathcal{J}^{(k)}_{\frac{nd}{2}}(\frac{n}{4}\xi\xi^*)\\ &= \sum_{\mathbf{m}\geq 0} (-1)^{|\mathbf{m}|} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(k)}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}}} \frac{1}{(\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(\frac{n}{4}\xi\xi^*)\\ &= \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(k)}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}}} \frac{(\frac{nd}{2})^{|\mathbf{m}|}}{(\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(-\frac{1}{2d}\xi\xi^*).\end{aligned}$$

Lemme 2.6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{nd}{2})^{|\mathbf{m}|}}{(\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}}} = 1.$$

De plus il existe une constante $C_{k,d} > 0$ telle que pour tout n

$$\frac{(\frac{nd}{2})^{|\mathbf{m}|}}{(\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}}} \leq C_{k,d}.$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
(\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}} &= \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma\left(m_j + \frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1)\right)}{\Gamma\left(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1)\right)} \\
&= \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1)\right)\left(\frac{nd}{2} + 1 - \frac{d}{2}(j-1)\right)\dots\left(\frac{nd}{2} + m_j - 1 - \frac{d}{2}(j-1)\right) \\
&= \prod_{j=1}^{k} \prod_{\ell=0}^{m_j-1} \left(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1) + \ell\right) \\
&\geq \prod_{j=1}^{k} \prod_{0\leq\ell\leq\frac{d}{2}(j-1)} \left(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1) + \ell\right) \prod_{\frac{d}{2}(j-1)\leq\ell\leq m_j-1} \left(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1) + \ell\right).
\end{aligned}
$$

Pour n assez grand, il existe une constante $A_{j,\ell} > 0$ telle que pour tout $1 \leq j \leq k$ et pour tout $0 \leq \ell \leq \frac{d}{2}(j-1)$

$$\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1) + \ell \geq A_{j,\ell}\frac{nd}{2},$$

D'autre part, si $\frac{d}{2}(j-1) \leq \ell \leq m_j - 1$, alors,

$$\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1) + \ell \geq \frac{nd}{2}.$$

Donc, il existe une constante $C_{k,d} > 0$ telle que

$$(\frac{nd}{2})^{|\mathbf{m}|} \leq C_{k,d}(\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}}.$$

Pour n assez grand ($n \to \infty$),

$$(\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}} = \prod_{j=1}^{k}\left(\frac{nd}{2}-\frac{d}{2}(j-1)\right)\left(\frac{nd}{2}+1-\frac{d}{2}(j-1)\right)\dots\left(\frac{nd}{2}+m_j-1-\frac{d}{2}(j-1)\right) \sim (\frac{nd}{2})^{|\mathbf{m}|}.\square$$

D'après la proposition 1.13 et le lemme précédent, on peut intervertir les signes somme et limite dans l'expression de $\psi_k^{(n)}$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \psi_k^{(n)}(\xi) &= \sum_{\mathbf{m}\geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(k)}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(-\frac{1}{2d}\xi\xi^*) \\
&= e^{-\frac{1}{2d}tr(\xi\xi^*)} = e^{-\frac{1}{2d}|||\xi|||^2},
\end{aligned}
$$

et la convergence est uniforme sur tout compact de V_k.

Donc les projections $s_p(\widetilde{\tau}_k^{(n)})$ sur les sous-espaces de dimension finie $M(k,p;\mathbb{F})$, convergent étroitement vers la mesure gaussienne $s_p(\gamma_k) = \gamma_{k,p}$ pour tout p où

$$\gamma_{k,p}(dx) = (\frac{d}{2\pi})^{\frac{dkp}{2}} e^{-\frac{d}{2}\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{\ell=1}^{p}|x_{j\ell}|^2} \, dx,$$

et dx est la mesure de Lebesgue euclidienne sur $M(k,p;\mathbb{F})$.
En utilisant de nouveau le théorème 2.3, on en déduit que la mesure $\widetilde{\tau}_k^{(n)}$ converge étroitement vers la mesure gaussienne γ_k sur $M(k,\infty,\mathbb{F})$, dont la transformée de Fourier est définie sur $M(k,(\infty);\mathbb{F})$ par :

$$\int_{M(k,\infty;\mathbb{F})} e^{-i\langle \xi, x\rangle}\gamma_k(dx) = e^{-\frac{1}{2d}\mathrm{tr}(\xi\xi^*)}.$$

□

2.3 Théorème de Minlos

On note $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles de carré sommable. Pour une suite $a = \{a_j\}$ de nombres strictement positifs qui est sommable on note,

$$\ell_a^2(\mathbb{N}) = \big\{x \in \mathbb{R}^\infty \ / \ \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j^2 < \infty\big\}.$$

L'espace $\ell_a^2(\mathbb{N})$ est un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}^\infty$. En effet soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^\infty$ par,

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^2.$$

Les fonctions f_n sont continues, donc $f(x) = \sup\limits_n f_n(x)$ est une fonction mesurable. Par suite l'ensemble

$$\ell_a^2(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R}^\infty \ \mid \ f(x) < \infty\},$$

est mesurable.

Nous utiliserons dans la suite la forme suivante du théorème de Minlos.

Théorème 2.7 (Minlos) : *Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^\infty$, et soit φ sa transformée de Fourier. On suppose que φ, qui est définie sur $\mathbb{R}^{(\infty)}$, se prolonge par continuité à $\ell^2(\mathbb{N})$ pour la topologie induite par celle de $\ell^2(\mathbb{N})$. Alors, pour toute suite $a = \{a_k\}$ de nombres strictement positifs qui est sommable,*

$$\nu(\ell^2_a(\mathbb{N})) = 1.$$

Pour des énoncés plus généraux du théorème de Minlos voir (Yamasaki [29] théorème 17.1).

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned} I_{\delta,n} &= \int_{\mathbb{R}^\infty} e^{-\frac{\delta}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j^2} \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j^2} \nu_n(dx), \end{aligned}$$

où ν_n est la projection de ν sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrons d'abord que

$$\lim_{\delta\to 0}(\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n}) = \nu(\ell^2_a(\mathbb{N})).$$

Pour $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\delta}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j^2} = \begin{cases} e^{-\frac{\delta}{2}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j x_j^2} & \text{si } x \in \ell^2_a(\mathbb{N}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^\infty} e^{-\frac{\delta}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j^2} \nu(dx) = \int_{\ell^2_a(\mathbb{N})} e^{-\frac{\delta}{2}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j x_j^2} \nu(dx).$$

De plus, pour $x \in \ell^2_a(\mathbb{N})$,

$$\lim_{\delta\to 0} e^{-\frac{\delta}{2}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j x_j^2} = 1,$$

donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{\delta\to 0}(\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n}) = \nu(\ell^2_a(\mathbb{N})),$$

b) En exprimant $I_{\delta,n}$ à l'aide de la fonction φ nous allons montrer que

$$\lim_{\delta\to 0}(\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n}) \geq 1.$$

En utilisant la formule

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2s}\xi^2} e^{ixy} dy = (2\pi s)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{s}{2}x^2} \qquad (\text{où } s > 0,\ x \in \mathbb{R}),$$

nous obtenons

$$I_{\delta,n} = \prod_{k=1}^{n} (2\pi\delta a_j)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2\delta}\sum_{j=1}^{n}\frac{\xi_j^2}{a_j}} \varphi(\xi)\, d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Puisque φ est continue en 0 pour la topologie de $\ell^2(\mathbb{N})$ et que $\varphi(0) = 1$.

$$\forall\ \varepsilon > 0\ , \exists\ \rho > 0\ , ||\xi|| < \rho \Rightarrow |\varphi(\xi) - 1| < \varepsilon \text{ et } \Re\varphi(\xi) \geq 1 - \varepsilon.$$

D'autre part, pour tout $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$$|\varphi(\xi)| \leq 1 \text{ et } \Re\varphi(\xi) \geq -1.$$

Par suite, pour tout ξ,

$$\Re\varphi(\xi) \geq 1 - \varepsilon - 2\frac{||\xi||^2}{\rho^2}.$$

En utilisant la formule

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2a}\xi^2} \xi^2 d\xi = a(2\pi a)^{\frac{1}{2}}, \qquad (\text{où } a > 0)$$

Nous obtenons

$$I_{\delta,n} \geq 1 - \varepsilon - \frac{2\delta}{\rho^2} \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n} \geq 1 - \varepsilon - 2\frac{\delta}{\rho^2} \sum_{j=1}^{\infty} a_j,$$

et

$$\lim_{\delta\to 0}(\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Donc

$$\nu(\ell_a^2(\mathbb{N})) \geq 1 - \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\nu(\ell_a^2(\mathbb{N})) = 1.$$

$\square$

Remarque 2.8 *C'est en particulier le cas si γ est une mesure gaussienne : pour toute suite $a = \{a_k\}$ de nombres strictements positifs qui est sommable,*

$$\gamma(\ell_a^2(\mathbb{N})) = 1.$$

Une première application du théorème de Minlos est l'evaluation de l'intégrale suivante.

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{E}^\infty} \exp(-i\lambda \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^2)\ \gamma(dx),$$

où $\mathbb{E}$ est un espace euclidien de dimension d, et γ est la mesure gaussienne sur $\mathbb{E}^\infty$ dont la transformée de Fourier est égale à

$$\psi(\xi) = e^{-\frac{1}{2d}||\xi||^2},$$

et $\{\alpha_j\}$ est une suite sommable de nombres réels .

Proposition 2.9 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \frac{2}{d} i\lambda\alpha_j)^{-\frac{d}{2}}.$$

Démonstration. D'après le théorème de Minlos la série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^2,$$

converge γ-presque partout sur $\mathbb{E}^\infty$, et d'après le théorème de convergence dominée

$$\int_{\mathbb{E}^\infty} \exp(-i\lambda \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^2)\ \gamma(dx) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{E}^\infty} \exp(-i\lambda \sum_{j=1}^{N} \alpha_j |x_j|^2)\ \gamma(dx).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{E}^\infty} \exp(-i\lambda \sum_{j=1}^{N} \alpha_j |x_j|^2)\ \gamma(dx) \\
&= \int_{\mathbb{E}^N} \exp(-i\lambda \sum_{j=1}^{N} \alpha_j |x_j|^2)\ \gamma_N(dx) \\
&= \prod_{j=1}^{N} (\frac{d}{2\pi})^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{E}} e^{-i\lambda\alpha_j |x_j|^2} e^{-\frac{d}{2}|x_j|^2} dx_j \\
&= \prod_{j=1}^{N} (1 + i\frac{2}{d}\lambda\alpha_j)^{-\frac{d}{2}}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Démonstration de la proposition 2.1

Les étapes de la démonstration : La preuve repose sur les deux importants théorèmes 2.4 et 2.7. Dans un premier temps on considère la suite sommable $(c_j) = (|\alpha_j| + \frac{1}{j^2})_j$ et on associe à cette suite l'espace de Hilbert $\ell^2_c(\mathbb{N})$. D'après le théorème de Minlos $\gamma(\ell^2_c(\mathbb{N})) = 1$. Ensuite à l'aide d'un découpage de l'intégrale qui figure dans l'équation (2.3) on va faire apparaître une certaine intégrale de la forme

$$\int_{S_n} f(\sqrt{n}v)\tau^{(n)}(dv),$$

où f est une fonction continue bornée sur $\mathbb{F}^\infty$, à laquelle on applique le théorème de Poincaré (théorème 2.4).

Lemme 2.10 *Soit $x^{(n)} = \{x_j^{(n)}\}$ une suite d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} x_j^{(n)} = x_j, \quad \forall \ j,$$
$$\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)}||_2 = ||x||_2.$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)} - x||_2 = 0,$$

où $||\cdot||_2$ est la norme euclidienne sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

Démonstration. On écrit

$$||x^{(n)} - x||_2^2 = ||x^{(n)}||_2^2 + ||x||_2^2 - 2\Re\langle x^{(n)}, x\rangle.$$

Pour établir le lemme, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x^{(n)}, x\rangle = ||x||_2^2.$$

Pour $N < n$,

$$\langle x^{(n)}, x\rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j^{(n)} x_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} x_j^{(n)} x_j.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{j=N+1}^{\infty} x_j^{(n)} x_j\right| \leq ||x^{(n)}||_2 \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la deuxième hypothèse du lemme on en déduit que

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty} x_j^{(n)} x_j = 0.$$

D'après la première hypothèse du lemme

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{N} x_j^{(n)} x_j = ||x||_2^2.$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty}\langle x^{(n)}, x\rangle = ||x||_2^2.$$

Ceci complète la preuve du lemme. □

Lemme 2.11 *Pour tout $j, \ell \geq 1$*

$$\int_{S_n} |v_j|^2 |v_\ell|^2 \tau^{(n)}(dv) = \begin{cases} \dfrac{d}{n(nd+2)} & si\ j \neq \ell, \\ \dfrac{d+2}{n(nd+2)} & si\ j = \ell. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$\begin{aligned}\int_{S_n} e^{-i\langle v,x\rangle}\, \tau^{(n)}(dv) &= \mathcal{J}^{(1)}_{\frac{nd}{2}}\Big(\frac{||x||^2}{4}\Big) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{nd(nd+2)\cdots(nd+2m-2)} \left(\frac{||x||^2}{2}\right)^m.\end{aligned} \tag{2.4}$$

où $||x||^2 = \sum_{\ell=1}^{n} |x_\ell|^2$.

Pour $v_\ell \in \mathbb{F}$, $v_\ell = (v_\ell^1, \ldots, v_\ell^d)$ alors,

$$\begin{aligned}\int_{S_n} |v_\ell|^4\, \tau^{(n)}(dv) &= \int_{S_n} ((v_\ell^1)^2 + \cdots + (v_\ell^d)^2)^2\, \tau^{(n)}(dv) \\ &= \sum_{j=1}^{d} \int_{S_n} (v_\ell^j)^4\, \tau^{(n)}(dv) + \sum_{1\leq j\neq i\leq d} \int_{S_n} (v_\ell^j)^2 (v_\ell^i)^2\, \tau^{(n)}(dv) \\ &= d\int_{S_n} (v_\ell^1)^4\, \tau^{(n)}(dv) + d(d-1)\int_{S_n} (v_\ell^1)^2 (v_\ell^2)^2\, \tau^{(n)}(dv)\end{aligned}$$

On prend $x = (0, 0, \ldots, x_\ell, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{dn}$ dans l'équation (2.4). Par identification des coefficients on obtient

$$\int_{S_n} (v_\ell^1)^4 \, \tau^{(n)}(dv) = \frac{3}{nd(nd+2)}.$$

De même si $x = (0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0, x_j, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{dn}$, $j \neq i$ alors, par identification on déduit que

$$\int_{S_n} (v_\ell^j)^2 (v_\ell^i)^2 \, \tau^{(n)}(dv) = \frac{1}{nd(nd+2)}.$$

Par suite

$$\int_{S_n} |v_\ell|^4 \tau^{(n)}(dv) = \frac{3d}{nd(nd+2)} + \frac{d(d-1)}{nd(nd+2)} = \frac{d+2}{n(nd+2)}.$$

$$1 = \int_{S_n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} |v_\ell|^2 \right)^2 \tau^{(n)}(dv) = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_n} |v_\ell|^4 \, \tau^{(n)}(dv) + \sum_{1 \leq j \neq \ell \leq n} \int_{S_n} |v_\ell|^2 |v_j|^2 \, \tau^{(n)}(dv),$$

et par invariance de la mesure $\tau^{(n)}$

$$n \int_{S_n} |v_\ell|^4 \, \tau^{(n)}(dv) + n(n-1) \int_{S_n} |v_\ell|^2 |v_j|^2 \, \tau^{(n)}(dv) = 1,$$

donc

$$n(n-1) \int_{S_n} |v_\ell|^2 |v_j|^2 \, \tau^{(n)}(dv) = 1 - \frac{d+2}{nd+2}.$$

Autrement dit, pour tout $j \neq \ell$,

$$\int_{S_n} |v_\ell|^2 |v_j|^2 \, \tau^{(n)}(dv) = \frac{d}{n(nd+2)}.$$

$\square$

Démonstration de la proposition 2.1. Nous avons vu que la fonction φ admet la représentation intégrale

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{F}^\infty} e^{-i\lambda \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^2} \, \gamma(dx).$$

Nous introduisons les intégrales suivantes :

$$A_{m,n}(\lambda) = \int_{S_n} e^{-i\lambda n \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j|^2} \, \tau^{(n)}(dx),$$

pour $m \leq n$, et

$$B_m(\lambda) = \int_{\mathbb{F}^\infty} e^{-i\lambda \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j|^2} \gamma(dx),$$

de façon à décomposer la différence $\varphi^{(n)}(\lambda) - \varphi(\lambda)$ en

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(\lambda) - \varphi(\lambda) = \varphi^{(n)}(\lambda) - A_{n,n}(\lambda) + A_{n,n}(\lambda) - A_{m,n}(\lambda) \\ + A_{m,n}(\lambda) - B_m(\lambda) + B_m(\lambda) - \varphi(\lambda).\end{aligned}$$

(i) Majoration de $\varphi^{(n)}(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)$. On va utiliser l'inégalité suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|e^{ix} - 1| \leq |x|.$$

$$|\varphi^{(n)}n(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)| \leq \int_{S_n} \left| \exp\left(-in\lambda \sum_{j=1}^{n} (\frac{a_j^{(n)}}{n} - \alpha_j)|v_j|^2\right) - 1 \right| \tau^{(n)}(dv),$$

donc

$$|\varphi_n(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)| \leq n|\lambda| \int_{S_n} \left| \sum_{j=1}^{n} (\frac{a_j^{(n)}}{n} - \alpha_j)|v_j|^2 \right| \tau^{(n)}(dv).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\varphi^{(n)}(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)| \leq n|\lambda| \left(\int_{S_n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\frac{a_j^{(n)}}{n} - \alpha_j)|v_j|^2 \right)^2 \tau^{(n)}(dv) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus

$$\begin{aligned}&\int_{S_n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\frac{a_j^{(n)}}{n} - \alpha_j)|v_j|^2 \right)^2 \tau^{(n)}(dv) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} (\frac{a_\ell^{(n)}}{n} - \alpha_\ell)(\frac{a_j^{(n)}}{n} - \alpha_j) \int_{S_n} |v_\ell|^2 |v_j|^2 \tau^{(n)}(dv).\end{aligned}$$

D'après le lemme 2.11

$$\int_{S_n} |v_\ell|^2 |v_j|^2 \tau^{(n)}(dx) = \begin{cases} \dfrac{d}{n(nd+2)} \ si\ j \neq \ell, \\ \dfrac{d+2}{n(nd+2)} \ si\ j = \ell. \end{cases}$$

Par suite

$$\int_{S_n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_j^{(n)}}{n}-\alpha_j)|v_j|^2\right)^2\tau^{(n)}(dv)=\frac{d}{n(nd+2)}I_n,$$

où

$$I_n=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{(n)}}{n}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2+\frac{2}{d}\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_j^{(n)}}{n}-\alpha_j)^2.$$

Donc

$$|\varphi^{(n)}(\lambda)-A_{n,n}(\lambda)|\leq|\lambda|\frac{\sqrt{nd}}{\sqrt{nd+2}}\sqrt{I_n}. \tag{2.5}$$

Remarquons que les suites $(\frac{a_j^{(n)}}{n})_{1\leq j\leq n}$ et $(\alpha_j)_{1\leq j\leq n}$ vérifient les hypothèses du lemme 2.10, donc

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_j^{(n)}}{n}-\alpha_j)^2=0,$$

et en utilisant la première hypothèse du théorème on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}I_n=0.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi^{(n)}(\lambda)-A_{n,n}(\lambda)|=0,$$

et la convergence a lieu uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(ii) Majoration de $A_{n,n}(\lambda)-A_{m,n}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}|A_{n,n}(\lambda)-A_{m,n}(\lambda)|&\leq n|\lambda|\sum_{j=m+1}^{n}|\alpha_j|\int_{S_n}|v_j|^2\tau^{(n)}(dx)\\&\leq|\lambda|\sum_{j=m+1}^{\infty}|\alpha_j|.\end{aligned}$$

(on a utilisé le fait que $\int_{S_n}|v_j|^2\tau^{(n)}(dv)=\frac{1}{n}$ et que $|e^{ix}-1|\leq|x|$).

(iii) Convergence de $A_{m,n}(\lambda)$ vers $B_m(\lambda)$ quand $n\to\infty$.

La fonction

$$g_m(x)=e^{-i\lambda\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j|x_j|^2},$$

est continue sur $\mathbb{F}^\infty$ et bornée. D'après le théorème de Poincaré (théorème 2.4), $\forall\ m \in \mathbb{N}$, et $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_n} g_m(\sqrt{n}\, x)\tau^{(n)}(dx) = \int_{\mathbb{F}^\infty} g_m(x)\gamma(dx).$$

Autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} A_{m,n}(\lambda) = B_m(\lambda).$$

(iv) Convergence de $B_m(\lambda)$ vers $\varphi(\lambda)$ quand $m \to \infty$.
Si $x \in \ell^2_c(\mathbb{N})$ avec ($c = \{|\alpha_j| + \frac{1}{j^2}\}_{j\geq 1}$), alors

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^2,$$

donc

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = g_\infty(x) \qquad \gamma - \text{presque par tout},$$

où $g_\infty(x) = e^{-i\lambda \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^2}$.

Ainsi, d'après le théorème de Minlos et le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{m\to\infty} B_m(\lambda) = \varphi(\lambda).$$

et la convergence a eu lieu uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
(v) Conclusion. Soit $\varepsilon > 0$.

(1) D'après l'inégalité (2.5) on peut trouver N_0 tels que, si $n \geq N_0$,

$$|\varphi^{(n)}(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)| \leq |\lambda|\varepsilon.$$

(2) On peut trouver N_1 tel que, si $m \geq N_1$,

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} |\alpha_j| \leq \varepsilon,$$

d'où

$$|A_{n,n}(\lambda) - A_{m,n}(\lambda)| \leq |\lambda|\varepsilon.$$

(3) On peut trouver N_2 tels que, si $m \geq N_2$,

$$|B_m(\lambda) - \varphi(\lambda)| \leq \varepsilon.$$

(4) On fixe $m \geq \max(N_0, N_1, N_2)$,
On peut trouver $n_0 \geq m$ tels que, si $n \geq n_0$,

$$|A_{m,n}(\lambda) - B_m(\lambda)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que, pour $n \geq n_0$ et tout λ dans un compact de $\mathbb{R}$,

$$|\varphi^{(n)}(\lambda) - \varphi(\lambda)| \leq C\varepsilon.$$

où C est une constante indépendante de n.
Donc $\varphi^{(n)}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers φ. □

Considérons maintenant le cas général $k \geq 1$.

Proposition 2.12 *On suppose que $\xi \in V_k$ est une matrice hermitienne $k\times k$. Sous les hypothèses de la proposition 2.1, la fonction $\varphi_k^{(n)}(\xi)$ définie sur V_k par*

$$\varphi_k^{(n)}(\xi) = \int_{S_{k,n}} \exp(-i\mathrm{tr}(\xi v a^{(n)} v^*))\ \tau_k^{(n)}(dv),$$

converge uniformément sur tout compact de V_k vers la fonction φ_k définie par

$$\varphi_k(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} \det(1 + \frac{2}{d} i\alpha_j \xi)^{-\frac{d}{2}}.$$

Démonstration. Par invariance à gauche de la mesure $\tau_k^{(n)}$ et de la mesure γ_k par le groupe K_k, on peut supposer que la matrice ξ est diagonale : $\xi = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, et donc

$$\varphi_k^{(n)}(\xi) = \int_{S_{k,n}} \exp(-i \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \lambda_\ell a_j^{(n)} |v_{\ell j}|^2)\ \tau_k^{(n)}(dv),$$

et

$$\varphi_k(\xi) = \int_{M(k,\infty;\mathbb{F})} \exp(-i \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_\ell \alpha_j |v_{\ell j}|^2)\ \gamma_k(dv).$$

La démonstration suit pas à pas celle qui a été donnée dans le cas où $k = 1$. On définit l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_{c,k} = \left\{ v \in M(k,\infty,\mathbb{F}) \mid \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{j=1}^{\infty} c_j |v_{\ell j}|^2 < \infty \right\},$$

qui s'identifie à l'espace $(\ell_c^2(\mathbb{N}))^k$. D'après le théorème de Minlos

$$\gamma_k(\mathcal{H}_{c,k}) = 1.$$

La fonction

$$v \mapsto \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_\ell |v_{\ell j}|^2,$$

est définie γ_k-presque par tout sur $M(k,\infty,\mathbb{F})$ donc l'intégrale suivante

$$\varphi_k(\xi) = \int_{M(k,\infty,\mathbb{F})} \exp(-i \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_\ell |v_{\ell j}|^2)\ \gamma_k(dv),$$

est bien définie. On obtient comme dans le cas où $k=1$

$$\varphi_k(\xi) = \prod_{\ell=1}^{k} \prod_{j=1}^{\infty} (1 + i\frac{2}{d}\lambda_\ell \alpha_j)^{-\frac{d}{2}} = \prod_{j=1}^{\infty} \det(1 + i\frac{2}{d}\alpha_j \xi)^{-\frac{d}{2}}.$$

Le reste de la preuve est identique à celle de la proposition 2.1. □

☆☆☆

Chapitre 3

Convergence des mesures orbitales, méthode de Olshanski et Vershik : Développement en séries de polynômes sphériques

3.1 Introduction

Dans leur article [22], Olshanski et Vershik ont déterminé les mesures ergodiques sur l'espace H_∞ des matrices hermitiennes de dimension infinie relativement à l'action du groupe unitaire infini $U(\infty)$.

Dans ce chapitre, en suivant la même méthode, nous étendons leur résultat au cas des matrices hermitiennes de dimension infinie à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ relativement à l'action du groupe $O(\infty)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $U(\infty)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $Sp(\infty)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$.

Rappelons la définition d'une mesure ergodique : soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable sur lequel un groupe G agit par des transformations mesurables.

Soit ν une mesure de probabilité G-invariante sur X . Un ensemble $E \in \mathcal{B}$ est dit G-invariant relativement à ν si, pour tout $g \in G$,

$$\nu((gE)\Delta E) = 0.$$

où Δ désigne la différence symétrique. La mesure ν est dite ergodique relativement à l'action du groupe G si, pour tout $E \in \mathcal{B}$ qui est ν-invariant

$$\nu(E) = 0 \text{ ou } 1.$$

Soit V_n l'espace des matrices hermitiennes $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbb{F}$ et $K_n = U(n, \mathbb{F})$ le groupe des matrices unitaires d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{F}$. On note par V_∞ respectivement $V(\infty)$, l'espace des matrices hermitiennes infinies respectivement l'espace des matrices hermitiennes infinies n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Soit K_∞ le groupe des matrices unitaires infinies $(u_{ij})_{ij}$ à coefficients dans $\mathbb{F}$ telles que $u_{ij} = \delta_{ij}$ si $i+j$ est très grand,

$$K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Le groupe K_∞ agit sur les espaces V_∞ et $V(\infty)$ par conjugaison. On s'intéresse à la classe $\mathscr{M}$ des mesures de probabilité sur V_∞ qui sont invariantes par K_∞.

Soit ν une mesure de $\mathscr{M}$, sa transformée de Fourier est la fonction de type positif et K_∞-invariante φ définie sur $V(\infty)$ par

$$\varphi(\xi) = \int_{V_\infty} e^{i\mathrm{tr}(x\xi)} \nu(dx).$$

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.
Théorème : La transformée de Fourier d'une mesure ergodique ν de $\mathscr{M}$ est une fonction de type positif φ sur $V(\infty)$ qui est invariante par K_∞ et dont la restriction au sous-espace des matrices diagonales est donnée par la formule suivante

$$\varphi\big(\mathrm{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots)\big) = \Pi(\xi_1) \ldots \Pi(\xi_k),$$

où

$$\Pi(\lambda) = e^{i\beta\lambda} e^{-\frac{\gamma}{d}\lambda^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_k\lambda}}{(1 - i\frac{2}{d}\alpha_k\lambda)^{\frac{d}{2}}},$$

avec

$$\beta \in \mathbb{R},\ \gamma \geq 0,\ \alpha_k \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty \text{ et } d = 1, 2 \text{ ou } 4.$$

Nous dirons que (α, γ, β) sont les paramètres de la mesure ergodique ν.

L'idée de la démonstration de ce théorème est la suivante ; on utilise le résultat suivant de Vershik : si ν est une mesure ergodique sur V_∞ relativement à l'action du groupe K_∞ alors ν est limite étroite d'une suite de mesures orbitales $\nu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$ étant une mesure orbitale relativement au groupe K_n, associée à une matrice hermitienne $\Lambda^{(n)}$ et définie par : si f est une fonction continue sur V_∞

$$\int_{V_\infty} f(y)\nu^{(n)}(dy) = \int_{K_n} f(k\Lambda^{(n)}k^*)dk,$$

où dk est la mesure de Haar normalisée de K_n.

Notons $\varphi^{(n)}$ la transformée de Fourier de la mesure $\nu^{(n)}$

$$\varphi^{(n)}(\xi) = \int_{V_\infty} e^{i\mathrm{tr}(\xi x)} \nu^{(n)}(dx).$$

Nous établirons en premier temps le lien qui existe entre la convergence de la suite des mesures $\nu^{(n)}$ et le comportement asymptotique des valeurs propres de la matrice $\Lambda^{(n)}$.

Pour la réciproque, on va montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(\mathrm{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots)) = \Pi(\xi_1)...\Pi(\xi_k), \tag{3.1}$$

où $\Pi(\xi)$ est la fonction de Pólya qu'on introduit dans la définition 3.1.

Pour montrer (3.1), on développe $\varphi^{(n)}$ en série de polynômes sphériques, et on fera un passage à la limite sur n.
On en déduit que la fonction

$$\varphi(\xi) = \det \Pi(\xi),$$

est de type positif. Puisque φ est multiplicative, c'est un élément extrémal du cône $\mathscr{P}$ des fonctions continues de type positif sur $V(\infty)$, K_∞-invariantes et normalisées par la condition $\varphi(0) = 1$. Par suite φ est la transformée de Fourier d'une mesure ergodique.

3.2 Fonction de Pólya-Définition

Définition 3.1 *La fonction de Pólya* de paramètres $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \geq 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\Pi(\lambda; \alpha, \gamma, \beta) := e^{i\beta\lambda} e^{-\frac{\gamma}{d}\lambda^2} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_j \lambda}}{(1 - i\frac{2}{d}\alpha_j \lambda)^{\frac{d}{2}}}.$$

Au couple (α, γ) on associe la mesure positive et bornée σ sur $\mathbb{R}$ définie par : si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\sigma(dt) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 f(\alpha_j) + \gamma f(0).$$

On obtient ainsi un ensemble Ω_0 de mesures que l'on munit de la topologie de la convergence étroite. Remarquons que les moments de la mesures σ sont donnés par

$$\mathcal{M}_0(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(dt) = \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 = \gamma + p_2(\alpha),$$

et pour $m \geq 1$,

$$\mathcal{M}_m(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} t^m \sigma(dt) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{m+2} = p_{m+2}(\alpha),$$

où p_m est la $m^{\text{ième}}$ somme de Newton définie par : si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $m \geq 2$,

$$p_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^m.$$

La dérivée logarithmique de la fonction de Pólya $\Pi(\lambda) = \Pi(\lambda; \alpha, \gamma, \beta)$ est égale à

$$\begin{aligned}\frac{\Pi'(\lambda)}{\Pi(\lambda)} &= i\beta - \frac{2}{d}(\gamma + p_2(i\alpha))\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} p_{m+2}(i\alpha)\left(\frac{2\lambda}{d}\right)^m, \\ &= i\beta - \frac{2}{d}\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{1 - i\frac{2}{d}\lambda}\sigma(dt).\end{aligned}$$

Les fonctions de Pólya sont paramétrées par l'ensemble $\Omega = \Omega_0 \times \mathbb{R}$ muni de la topologie produit.

Théorème 3.2 *Une suite de points $\omega^{(n)} = (\alpha^{(n)}, \gamma^{(n)}, \beta^{(n)})$ de Ω converge vers $\omega = (\alpha, \gamma, \beta)$ si et seulement si les fonctions de Pólya correspondantes $\Pi^{(n)}(\lambda) = \Pi(\lambda; \alpha^{(n)}, \gamma^{(n)}, \beta^{(n)})$ convergent uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers $\Pi(\lambda) = \Pi(\lambda; \alpha, \gamma, \beta)$.*

Démonstration.

Condition nécessaire. Supposons que $\omega^{(n)}$ converge vers ω pour la topologie de Ω. Remarquons que les fonctions des Pólya $\Pi^{(n)}$ et Π sont holomorphes dans le disque $D(0, R)$ où $\frac{1}{R} = \frac{2}{d}\sup_{m,n}\left|\alpha_m^{(n)}\right|$. Donc pour tout $\lambda \in D(0, R)$, leurs dérivées logarithmiques sont données par

$$\frac{\Pi^{(n)\prime}(\lambda)}{\Pi^{(n)}(\lambda)} = i\beta^{(n)} - \frac{2}{d}\left(\gamma^{(n)} + p_2(\alpha^{(n)})\right)\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} p_{m+2}(i\alpha^{(n)})\left(\frac{2\lambda}{d}\right)^m,$$

$$\frac{\Pi'(\lambda)}{\Pi(\lambda)} = i\beta - \frac{2}{d}(\gamma + p_2(i\alpha))\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} p_{m+2}(i\alpha)\left(\frac{2\lambda}{d}\right)^m.$$

Pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)\sigma^{(n)}(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\sigma(dt),$$

où $\sigma^{(n)}$ est la mesure positive et bornée sur $\mathbb{R}$ associée au couple $(\alpha^{(n)}, \gamma^{(n)})$. Donc, si $f = 1$, on en déduit que la suite $p_2(\alpha^{(n)}) + \gamma^{(n)}$ converge. Par suite il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout n

$$0 \leq p_2(\alpha^{(n)}) + \gamma^{(n)} \leq A^2.$$

Donc, la suite $\{\alpha_m^{(n)}\}$ est bornée par A pour tout m et tout n.
D'où,

$$\mathrm{supp}(\sigma^{(n)}) \subset [-A, A] \ \text{ et } \mathrm{supp}(\sigma) \subset [-A, A].$$

Donc la convergence de la suite des mesures $\sigma^{(n)}$ vers σ a lieu pour toutes fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout $m \geq 3$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} p_m(\alpha^{(n)}) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} t^{m-2} \sigma^{(n)}(dt) \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^{m-2} \sigma(dt) = p_m(\alpha),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}|p_m(\alpha^{(n)})| &\leq \sup_m |\alpha_m^{(n)}|^{m-2} p_2(\alpha^{(n)}) \\ &\leq p_2(\alpha^{(n)})^{\frac{m}{2}-1} p_2(\alpha^{(n)}) \\ &\leq p_2(\alpha^{(n)})^{\frac{m}{2}} \leq A^m.\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\lim_{n\to\infty} (p_2(\alpha^{(n)}) + \gamma^{(n)}) = p_2(\alpha) + \gamma,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \beta^{(n)} = \beta.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Pi^{(n)'}(\lambda)}{\Pi^{(n)}(\lambda)} = \frac{\Pi'(\lambda)}{\Pi(\lambda)},$$

la convergence est uniforme sur tout compact du disque D(0, R). Par suite

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}(\lambda) = \Pi(\lambda),$$

puisque $\Pi^{(n)}(0) = 1$ et $\Pi(0) = 1$.

Les fonctions $\Pi^{(n)}$ et Π étant de type positif, d'après la proposition 1.13, $\Pi^{(n)}(\lambda)$ converge uniformément sur tout compact de Σ_R vers $\Pi(\lambda)$. Ceci implique la convergence uniforme de $\Pi^{(n)}$ vers Π sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Condition suffisante. On suppose que $\Pi^{(n)}(\lambda)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers $\Pi_0(\lambda) = \Pi(\lambda; \alpha_0, \gamma_0, \beta_0)$.

Puisque Π_0 est continue sur $\mathbb{R}$ et que $\Pi_0(0) = 1$, et puisque de plus $\Pi^{(n)}$ converge vers Π_0 sur $\mathbb{R}$, alors il existe $\lambda_0 > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\Re(\Pi^{(n)}(\lambda_0)) \geq C.$$

Donc,

$$|\Pi^{(n)}(\lambda_0)| \geq C.$$

Par suite

$$e^{-\frac{4\gamma^{(n)}}{d^2}\lambda_0^2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{4}{d^2}(\alpha_m^{(n)})^2\lambda_0^2)} \geq C^{\frac{4}{d}},$$

et

$$\frac{4}{d^2}\lambda_0^2\gamma^{(n)} + \frac{4}{d^2}\lambda_0^2 \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^{(n)})^2 \leq e^{\frac{4\gamma^{(n)}}{d^2}\lambda_0^2} \prod_{m=1}^{\infty} (1 + \frac{4}{d^2}(\alpha_m^{(n)})^2\lambda_0^2) \leq \frac{1}{C^{\frac{4}{d}}}.$$

Donc

$$\gamma^{(n)} + p_2(\alpha^{(n)}) \leq \frac{d^2}{4\lambda_0^2 C^{\frac{4}{d}}}. \tag{3.2}$$

D'autre part, en utilisant la convergence de la suite $\log(\Pi^{(n)}(\lambda_0))$, on montre qu'il existe une constante $A(\lambda_0)$ telle que pour tout n,

$$\begin{aligned} |\beta^{(n)}|\lambda_0 &\leq \left|\log\left(\Pi^{(n)}(\lambda_0)e^{-i\beta^{(n)}\lambda_0}\right)\right| + A(\lambda_0) \\ &\leq -\log(|\Pi^{(n)}(\lambda_0)|) + \pi + A(\lambda_0) \\ &\leq -\log(C) + \pi + A(\lambda_0). \end{aligned}$$

Donc, pour tout n,

$$|\beta^{(n)}| \leq B(\lambda_0). \tag{3.3}$$

Les équations (3.2) et (3.3) impliquent qu'il existe une constante R telle que, pour tout n,

$${\beta^{(n)}}^2 + \gamma^{(n)} + p_2(\alpha^{(n)}) \leq R^2.$$

D'après la proposition VI.2.5 de [11], l'ensemble

$$\Omega_R = \{\omega \in \Omega \ \mid \ \beta^2 + \gamma + p_2(\alpha) \leq R^2\},$$

est un compact de Ω. On peut donc extraire une sous-suite $(\omega^{(n_k)})_k$ qui converge vers $\omega = (\alpha, \gamma, \beta)$ pour la topologie de Ω. Donc la suite des fonctions de Pólya $\Pi^{(n_k)}(z)$ converge uniformément sur tout compact de Σ_R vers la fonction de Pólya $\Pi(z) = \Pi(z; \alpha, \gamma, \beta)$, et par suite

$$\Pi = \Pi_0$$

ou encore

$$\omega = \omega_0 = (\alpha_0, \gamma_0, \beta_0).$$

Puisque la suite $\omega^{(n)}$ reste dans le compact Ω_R, alors le point ω_0 est son unique point d'adhérence. Finalement $\omega^{(n)}$ converge vers ω_0. □

Corollaire 3.3

(i) *L'application qui à ω on associe la fonction de Pólya Π_ω est un homéomorphisme, l'ensemble des fonctions de Pólya étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.*

(ii) *L'ensemble Ω est localement compact, séparable, métrisable et complet.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate du théorème précédent. Le fait que Ω est un ensemble séparable, métrisable et complet, se déduit immédiatement du théorème 6.2. du livre [23].

Pour $R > 0$ on définit l'ensemble

$$\Omega_R = \left\{ \omega \in \Omega \ \mid \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \gamma + \beta^2 \leq R \right\}.$$

Puisque l'application

$$\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} \sigma(dt) + \beta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \gamma + \beta^2,$$

est continue, alors l'ensemble

$$\left\{ \omega \in \Omega \ \mid \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \gamma + \beta^2 < R \right\}.$$

est un ouvert. D'autre part d'après la proposition VI.2.5 [11], l'ensemble Ω_R est compact. Donc tout point ω possède un voisinage compact. Ceci prouve que Ω est localement compact. □

3.3 Convergence des mesures orbitales

Soit $\Lambda^{(n)}$ une suite de matrices diagonales.

$$\Lambda^{(n)} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}).$$

Nous leur associons la suite de mesures orbitales $\nu^{(n)}$ définie par : si f est une fonction continue sur V_∞

$$\int_{V_\infty} f(x)\nu^{(n)}(dx) = \int_{K_n} f(k\Lambda^{(n)}k^*)dk.$$

La transformée de Fourier $\varphi^{(n)}$ de $\nu^{(n)}$ est définie sur $V(\infty)$ par

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}(\xi) &= \int_{V_\infty} e^{i\mathrm{tr}(\xi x)}\nu^{(n)}(dx) \\ &= \int_{K_n} e^{i\mathrm{tr}(\xi k\Lambda^{(n)}k^*)}\, dk.\end{aligned}$$

Nous allons établir des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur la suite $\Lambda^{(n)}$, pour que la suite de mesures $\nu^{(n)}$ converge.

À la matrice $\Lambda^{(n)}$ on associe le point $\omega^{(n)} = (\alpha^{(n)}, \gamma^{(n)}, \beta^{(n)})$ de Ω défini par

$$\alpha^{(n)} = \left(\frac{\lambda_1^{(n)}}{n}, \ldots, \frac{\lambda_n^{(n)}}{n}, 0, 0, \ldots\right),$$

$$\gamma^{(n)} = 0,$$

et

$$\beta^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)}.$$

Théorème 3.4 *La suite $\nu^{(n)}$ converge étroitement si et seulement si la suite $\omega^{(n)}$ converge dans Ω. Si $\lim_{n\to\infty} \omega^{(n)} = \omega$, alors, pour tout $\xi \in V(\infty)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(\xi) = \det \Pi_\omega(\xi),$$

où Π_ω est la fonction de Pólya associée à ω :

$$\Pi_\omega(\lambda) = e^{i\beta\lambda}e^{-\frac{\gamma}{d}\lambda^2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha_j\lambda}}{(1 - i\frac{2}{d}\alpha_j\lambda)^{\frac{d}{2}}}.$$

Démonstration.
Condition nécessaire. Nous supposons que la suite $\nu^{(n)}$ des mesures orbitales converge étroitement vers une mesure ν. On va montrer que la suite $\omega^{(n)}$ converge dans Ω. Pour cela, on utilise le lemme suivant qui est une observation dû a Curry et Schoenberg [9].

Lemme 3.5 *Soit $m^{(n)}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. On pose,*

$$g^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (1 - i\frac{tx}{n})^{-n} m^{(n)}(dx).$$

Si $m^{(n)}$ converge étroitement vers une mesure m. Alors $g^{(n)}$ converge localement uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par,

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} m(dx).$$

Démonstration. On pose

$$f^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} m^{(n)}(dx).$$

$$|g^{(n)}(t) - f^{(n)}(t)| \leq \int_{-A}^{A} \left| \left(1 - i\frac{tx}{n}\right)^{-n} - e^{itx} \right| m^{(n)}(dx) + 2(1 - m^{(n)}([-A, A])).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $R > 0$, d'après le critère de Prokhorov (Voir [3] (théorèmes 6.1 et 6.2 p.37 ou [23] théorème 6.7 p.47), on peut choisir un réel $A = A(\varepsilon)$ tel que,

$$2(1 - m^{(n)}([-A, A])) \leq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall\ n. \tag{3.4}$$

Pour ε, R et A, il existe un entier $N = N(\varepsilon, R, A)$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $|z| \leq RA$,

$$|(1 - \frac{z}{n})^{-n} - e^{z}| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Par suite, si $t \in [-R, R]$ alors,

$$\int_{-A}^{A} \left| \left(1 - i\frac{tx}{n}\right)^{-n} - e^{itx} \right| m^{(n)}(dx) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.5}$$

Les équations (3.4) et (3.5) impliquent que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, si $n \geq N$,

$$|g^{(n)}(t) - f^{(n)}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout $t \in [-R, R]$.

D'autre part, puisque la mesure $m^{(n)}$ converge étroitement vers la mesure m, la transformée de Fourier $f^{(n)}$ de $m^{(n)}$ converge vers la transformée de Fourier g de m uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$: il existe N' tel que, si $n \geq N'$,

$$\forall\, t \in [-R, R], \qquad |f^{(n)}(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, pour $n \geq \sup(N, N')$,

$$\forall\, t \in [-R, R], \qquad |g^{(n)}(t) - g(t)| \leq \varepsilon.$$

□

Notons p la projection de V_∞ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$p(x) = x_{11}.$$

La suite de mesures $M^{(n)} = p(\nu^{(n)})$ converge étroitement vers la mesure $M = p(\nu)$.

D'après la proposition 1.11, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} (1 - i\frac{2}{d}\frac{t}{n}\tau)^{-\frac{dn}{2}} M^{(n)}(dt) = \Pi^{(n)}(\tau),$$

où $\Pi^{(n)}$ est la fonction de Pólya associée à $\omega^{(n)}$:

$$\Pi^{(n)}(\tau) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - i\frac{2}{d}\frac{\lambda_j^{(n)}}{n}\tau\right)^{-\frac{d}{2}}.$$

Puisque la suite des mesures $M^{(n)}$ converge étroitement vers M, d'après le lemme précédent

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} M(dt),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

On en déduit qu'il existe $\rho > 0$ tel que, sur $i[-\rho, \rho]$, la suite des polynômes

$$Q^{(n)}(z) = \prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} z),$$

converge uniformément. D'après un résultat de Schoenberg ([18], théorème 3.4) la suite des polynômes $Q^{(n)}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction de la classe de Laguerre-Pólya

$$\lim_{n\to\infty} Q^{(n)}(z) = \psi(z),$$

$$\psi(z) = e^{-\beta z} e^{-\frac{\gamma}{2}z^2} \prod_{j=1}^{\infty} (1-\alpha_j z) e^{\alpha_j z}.$$

$$\beta \in \mathbb{R},\ \gamma \geq 0,\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty.$$

La dérivée logarithmique de $Q^{(n)}$ converge vers celle de ψ dans un voisinage de 0.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{Q^{(n)}}'(z)}{Q^{(n)}(z)} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

En considérant les développements en série entière en 0 de ces dérivées logarithmique on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} = \beta,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j^{(n)}}{n}\right)^2 = \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2,$$

et, pour tout $m \geq 3$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j^{(n)}}{n}\right)^m = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^m.$$

Ceci revient à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \omega^{(n)} = \omega = (\alpha, \gamma, \beta).$$

Conditions suffisante. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} \omega^{(n)} = \omega$. Nous allons montrer que, pour tout $\xi \in V(\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(\xi) = \det \Pi_\omega(\xi),$$

Cela signifie que pour tout k,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(\mathrm{diag}(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, \ldots)) = \Pi_\omega(\xi_1) \ldots \Pi_\omega(\xi_k).$$

D'après la proposition 1.3, si $\xi \in V_k$ et si $n \geq k$

$$\varphi^{(n)}(\xi) = \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_k \geq 0} \frac{d_{\mathbf{m}}^{(k)}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(i\Lambda^{(n)}) \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(\xi).$$

1) Traitons d'abord le cas où $k = 1$. Dans ce cas les seuls termes non nuls du développement de Taylor sphérique sont ceux pour lesquels $\mathbf{m} = (m, 0, \ldots, 0) = [m]$, et alors

$$\frac{d_{[m]}}{(\frac{\delta(n)}{n})_{[m]}} \Phi^{(n)}_{[m]}(\mathrm{diag}(\xi, 0, \ldots, 0)) = \frac{1}{m!}\xi^m.$$

Donc

$$\varphi^{(n)}(\mathrm{diag}(\xi, 0, \ldots, 0)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Phi^{(n)}_{[m]}(i\lambda_1^{(n)}, \ldots, i\lambda_n^{(n)})\xi^m.$$

Considérons la fonction de Pólya $\Pi^{(n)}$ associée à $\omega^{(n)}$:

$$\Pi^{(n)}(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{2}{d} i \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} \xi\right)^{-\frac{d}{2}}.$$

D'après le théorème 3.2, la suite des fonctions de Pólya $\Pi^{(n)}$ converge vers la fonction de Pólya $\Pi = \Pi_\omega$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. De plus, $\Pi^{(n)}$ converge uniformément sur tout compact du disque $D(0, R) \subset \mathbb{C}$ $\dfrac{1}{R} = \dfrac{2}{d} \sup_{j,n} \left|\dfrac{\lambda_j^{(n)}}{n}\right|$. Considérons les développements de Taylor de $\Pi^{(n)}$ et Π en 0.

$$\Pi^{(n)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} z^m,$$

$$\Pi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m.$$

D'après la proposition 1.4

$$c_m^{(n)} = (\frac{nd}{2})_{[m]} \frac{1}{m!} \Phi^{(n)}_{[m]}(i\frac{2}{d}\frac{\lambda_1^{(n)}}{n}, \ldots, i\frac{2}{d}\frac{\lambda_n^{(n)}}{n}).$$

De la convergence uniforme de la suite $\Pi^{(n)}$ vers Π on déduit que

$$\lim_{n\to\infty} c_m^{(n)} = c_m,$$

De plus, d'après les inégalités de Cauchy, pour tout $r < R$ il existe $M > 0$ tel que

$$|c_m^{(n)}| \leq \frac{M}{r^m}.$$

D'autre part

$$\varphi^{(n)}(\mathrm{diag}(z,0,\dots,0)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{nd}{2})^m}{(\frac{nd}{2})_{[m]}} c_m^{(n)} z^m.$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{nd}{2})^m}{(\frac{nd}{2})_{[m]}} = 1,\ \frac{(\frac{nd}{2})^m}{(\frac{nd}{2})_{[m]}} \leq 1.$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(\mathrm{diag}(z,0,\dots,0)) = \Pi(z),$$

sur tout compact de $D(0,R)$. En appliquant la proposition 1.13, on en déduit que la convergence a lieu uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

2) Traitons maintenant le cas où $k>1$.

Considérons la fonction $\Psi^{(n)}(z)$ de la variable $z \in V_k^{\mathbb{C}}$ définie par

$$\Psi^{(n)}(z) = \det \Pi^{(n)}(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\det\left(1 - \frac{2}{d} i \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} z\right)^{\frac{d}{2}}}.$$

Notons que

$$\Psi^{(n)}(\mathrm{diag}(z_1,\dots,z_k)) = \Pi^{(n)}(z_1)\dots\Pi^{(n)}(z_k).$$

La fonction $\Psi^{(n)}$ est holomorphe dans la boule $B_{V_k^{\mathbb{C}},R}$

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{d} \sup_{j,n} \left| \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} \right|,$$

et elle est K_k-invariante. Elle admet le développement en série de Taylor sphérique suivant :

$$\Psi^{(n)}(z) = \sum_{m_1\geq\dots\geq m_k\geq 0} c_{\mathbf{m}}^{(n)} \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(z),$$

où (proposition 1.4)

$$c_{\mathbf{m}}^{(n)} = \frac{d_{\mathbf{m}}^{(k)}}{(\frac{\delta(k)}{k})_{\mathbf{m}}} (\frac{nd}{2})_{\mathbf{m}} \Phi_{\mathbf{m}}^{(n)}(i\frac{2}{d}\frac{\lambda_1^{(n)}}{n},\dots,i\frac{2}{d}\frac{\lambda_n^{(n)}}{n}).$$

On va montrer que les coefficients $c_{\mathbf{m}}^{(n)}$ convergent. Pour cela on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.6 *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $M(U)$ l'ensemble des matrices $X \in V_k^{\mathbb{C}}$ dont le spectre est contenu dans U.*

Si $f^{(n)}$ est une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge vers f uniformément sur tout compact de U, alors $f^{(n)}(X)$ converge vers $f(X)$ uniformément sur tout compact de $M(U)$.

Démonstration. Soit E un compact de $M(U)$. Puisque l'application qui à une matrice associe la suite de ses valeurs propres est continue alors, il existe un compact Q de $\mathbb{C}$ tel que $E \subset M(Q)$. Soit γ le bord orienté d'un compact à bord, dont l'intérieur contient Q. Puisque $f^{(n)}$ est holomorphe dans U alors, pour tout $X \in E$,

$$f^{(n)}(X) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (\lambda I - X)^{-1} f^{(n)}(\lambda) d\lambda.$$

De la convergence uniforme de la suite de fonctions $f^{(n)}$ sur γ, on déduit la convergence de $f^{(n)}(X)$ vers $f(X)$ uniformément sur le compact E. $\square$

Les fonctions $\Pi^{(n)}$ et Π sont holomorphes dans la bande

$$U = \{\lambda \in \mathbb{C} \ \mid \ |\Im(\lambda)| < R\},$$

et $\Pi^{(n)}$ converge vers Π uniformément sur tout compact de U donc, pour toute matrice z de $V_k^{\mathbb{C}}$ dont le spectre est contenu dans U, en particulier pour toute matrice hermitienne,

$$\lim_{n\to\infty} \Pi^{(n)}(z) = \Pi(z),$$

uniformément sur tout compact de $M(U)$, et, puisque le déterminant est une fonction continue,

$$\lim_{n\to\infty} \det \Pi^{(n)}(z) = \det \Pi(z).$$

Par différentiation on obtient

$$c_{\mathbf{m}}^{(n)} = \frac{1}{||\Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}||_F^2} \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(\frac{\partial}{\partial z}) \Psi^{(n)}(z),$$

où $||\cdot||_F$ est la norme de Fischer ; cette formule résulte du corollaire XI.4.2 et de la proposition XI.4.1 de [10]. On en déduit la convergence des coefficients : pour tout $\mathbf{m} \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} c_{\mathbf{m}}^{(n)} = c_{\mathbf{m}},$$

où les nombres $c_{\mathbf{m}}$ sont les coefficients du développement de la fonction $\det \Pi(z)$ en série de Taylor sphérique.

D'après les inégalités de Cauchy, pour tout $r < R$, il existe $M > 0$ tel que

$$|c_{\mathbf{m}}^{(n)}| \leq M d_{\mathbf{m}}^{(k)} \frac{1}{r^{|\mathbf{m}|}}.$$

Pour $\rho < 1$,

$$\sum_{\mathbf{m}} d_{\mathbf{m}}^{(k)} \rho^{|\mathbf{m}|} = (1-\rho)^{-\frac{\delta(k)}{k}}.$$

D'autre part (proposition1.3)

$$\varphi^{(n)}(z) = \sum_{\mathbf{m} \geq 0} \frac{\left(\frac{nd}{2}\right)^{|\mathbf{m}|}}{\left(\frac{nd}{2}\right)_{\mathbf{m}}} c_{\mathbf{m}}^{(n)} \Phi_{\mathbf{m}}^{(k)}(z),$$

et d'après le lemme 2.6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{nd}{2}\right)^{|\mathbf{m}|}}{\left(\frac{nd}{2}\right)_{\mathbf{m}}} = 1, \; \frac{\left(\frac{nd}{2}\right)^{|\mathbf{m}|}}{\left(\frac{nd}{2}\right)_{\mathbf{m}}} \leq C_{k,d}.$$

En appliquant la proposition 1.17, nous obtenons finalement

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{(n)}(z) = \det \Pi(z).$$

et la convergence a lieu unifomément sur tout compact de Σ_R. □

3.4 Points extrémaux de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{P}$

On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur V_∞ qui sont K_∞-inariantes et $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions continues de type positif sur $V(\infty)$ qui sont K_∞-invariantes.

D'après le théorème de Bochner la transformée de Fourier établit une bijection de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{P}$. Les points extrémaux de l'ensemble convexe $\mathscr{M}$ sont les mesures de probabilité ergodiques, on peut voir à ce sujet [24] proposition 10.4.

Les points extrémaux de l'ensemble convexe $\mathscr{P}$ sont les fonctions multiplicatives de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire de la forme

$$\varphi(\xi) = \det \Phi(\xi).$$

où Φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $\Phi(0) = 1$, on peut voir à ce sujet [21] théorème 23.8 ou [11] théorème V.2.1.

Théorème 3.7 *Les points extrémaux de l'ensemble $\mathscr{P}$ sont les fonctions $\varphi_\omega = \det \Pi_\omega$, où Π_ω est la fonction de Pólya associée à $\omega \in \Omega$.*

Nous obtenons ainsi une paramétrisation de l'ensemble $\mathrm{ext}(\mathscr{P})$ par Ω.

$$\omega \mapsto \det \Pi_\omega.$$

Démonstration.
a) D'après le théorème 2.1 et le théorème 2.9 de [22], dans le cas où $d = 2$, la fonction $\varphi_\omega = \det \Pi_\omega$ est un élément extrémal de $\mathscr{P}$. Dans le cas où $d = 1$ ou 4 le résultat reste vrai et les preuves sont les mêmes.
b) Soit $\varphi \in \mathrm{ext}(\mathscr{P})$. C'est la transformée de Fourier d'une mesure ergodique ν sur V_∞ relativement à l'action du groupe K_∞. D'après un théorème de Vershik [27], théorème 1, on peut voir aussi [22], théorème 3.2 (Olshanski et Vershik), la mesure ν est limite étroite d'une suite de mesures $\nu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$ étant une mesure orbitale relativement à K_n. Par suite φ est limite de la suite $\varphi^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$ étant la transformée de Fourier de $\nu^{(n)}$. D'après le théorème 3.4, il existe $\omega \in \Omega$ tel que

$$\varphi = \det \Pi_\omega.$$

$\square$

☆☆☆

Chapitre 4

Théorème de Bochner invariant

4.1 Théorème de Bochner invariant :

Dans le chapitre précédent nous avons montré que l'ensemble ext($\mathscr{P}$) des points extrémaux de l'ensemble convexe $\mathscr{P}$ est paramétré par l'ensemble Ω (théorème 3.7). Puisque la transformation de Fourier est une bijection affine de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{P}$, c'est aussi une bijection de ext($\mathscr{M}$) sur ext($\mathscr{P}$). Par suite l'ensemble ext($\mathscr{M}$) est aussi paramétré par Ω. D'après un résultat de Olshanski et Borodin ([4], proposition 9.4), la structure borélienne de ext($\mathscr{P}$) qui est induite par la structure borélienne de $\mathscr{P}$, coïncide avec la structure borélienne de Ω.

Théorème 4.1 (Bochner invariant) :
Soit φ une fonction de type positif définie continue sur $V(\infty)$, K_∞-invariante et vérifiant la condition $\varphi(0) = 1$. Alors il existe une unique mesure de probabilité μ définie sur Ω telle que pour tout $\xi \in V(\infty)$,

$$\varphi(\xi) = \int_\Omega \varphi_\omega(\xi)\, \mu(d\omega).$$

Ce théorème a été établi par Olshanski et Borodin dans le cas où $V_\infty = H_\infty$ est l'espace des matrices hermitiennes infinies à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $K_\infty = U(\infty)$ est le groupe unitaire infini voir [4] (théorème 9.1 p.32), mais la preuve est la même dans les trois cas c'est-à-dire $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.

Pour d'autres résultats consernant le théorème de Bochner on peut voir [25], [19], [28] et [15].

Dans ce chapitre nous allons établir quelques résultats complémentaires à ce théoreme. Nous verrons à quelle condition portant sur la mesure μ la fonction φ se prolonge par continuité à l'espace V_∞^2 des matrices hermitiennes de Hilbert-Schmidt. Nous verrons aussi à quelle condition la fonction φ est la transformée de Fourier d'une mesure concentrée sur le cône V_∞^+ des matrices hermitiennes semi-définies positives.

4.2 Compléments

4.2.1 Fonctions de type positif K_∞-invariantes sur l'espace V_∞^2

On note V_∞^2 l'espace des matrices hermitiennes de Hilbert-Schmidt. Sa topologie est définie par la norme

$$|||\xi||| = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |\xi_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considérons la fonction φ_ω définie sur $V(\infty)$ par

$$\varphi_\omega(\xi) = e^{i\beta \operatorname{tr}(\xi)} e^{-\frac{\gamma}{d}\operatorname{tr}(\xi^2)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_k \operatorname{tr}(\xi)}}{(\det(1 - i\frac{2}{d}\alpha_k \xi))^{\frac{d}{2}}},$$

Rappelons que

$$\Omega = \{(\alpha, \gamma, \beta) \,|\, \alpha \in \ell^2(\mathbb{N}), \beta \in \mathbb{R}, \gamma \geq 0\}.$$

Aux paramètres α et γ on associe la mesure sur $\mathbb{R}$

$$\sigma = \gamma\delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \delta_{\alpha_k}.$$

La topologie considérée sur Ω est celle qui est induite par la topologie de $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ des mesures positives bornées sur $\mathbb{R}$ étant muni de la topologie de la convergence étroite. On note Ω_0 le fermé de Ω défini par $\beta = 0$.

Proposition 4.2 *La fonction φ_ω, qui est définie sur $V(\infty)$, se prolonge en une fonction continue sur V_∞^2 si et seulement si $\beta = 0$, c'est-à-dire si $\omega \in \Omega_0$.*

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant.

Lemme 4.3 ***Déterminant régularisé :***
Pour tout opérateur nucléaire ξ on définit la fonction,

$$\mathcal{D}(\xi) = \det{}_2(1 + \xi) := \det\left((1 + \xi)e^{-\xi}\right).$$

La fonction $\mathcal{D}$ se prolonge en une fonction continue sur l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt.

(Voir [20], proposition 6.3.2).
Démonstration de la proposition 4.2. Supposons que $\beta = 0$, et notons φ_σ la fonction suivante

$$\varphi_\sigma(\xi) = e^{-\frac{\gamma}{d}\mathrm{tr}(\xi^2)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_k \mathrm{tr}(\xi)}}{(\det(1 - i\frac{2}{d}\alpha_k\xi))^{\frac{d}{2}}}.$$

Remarquons que pour tout $\xi \in V(\infty)$,

$$\varphi_\sigma(\xi) = e^{-\frac{\gamma}{d}\mathrm{tr}(\xi^2)} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{D}(-\frac{2}{d}i\alpha_k\xi)^{-\frac{d}{2}}.$$

Puisque la fonction $\xi \longmapsto e^{-\frac{\gamma}{d}\mathrm{tr}(\xi^2)}$ est continue sur V^2_∞ il reste à montrer la continuité du produit infini.

Lemme 4.4 *$\forall\ \rho < 1$, $\exists\ C_\rho$ telle que pour $|||w||| \leq \rho$,*

$$\left|\det\left[e^{-\frac{d}{2}w}(1-w)^{-\frac{d}{2}}\right] - 1\right| \leq C(\rho, d)|||w|||^2,$$

Démonstration du lemme. Puisque $|||w||| \leq \rho < 1$, alors

$$\det(1 - w) = \exp\mathrm{tr}\left(\log(1 - w)\right).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\det\left[e^{-\frac{d}{2}w}(1-w)^{-\frac{d}{2}}\right] - 1 &= \exp -\frac{d}{2}\left[\mathrm{tr}(w) + \mathrm{tr}\left(\log(1-w)\right)\right] - 1 \\ &= \exp\frac{d}{2}\left(-\mathrm{tr}(w) + \mathrm{tr}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^m}{m}\right]\right) - 1 \\ &= \exp\left(\frac{d}{2}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\mathrm{tr}(w^m)}{m}\right) - 1.\end{aligned}$$

Pour tout opérateur de Hilbert-Schmidt w de valeurs propres $(\lambda_j)_j$,

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}(w^m)| &\leq \sup_j |\lambda_j|^{m-2}|||w|||^2 \\ &\leq |||w|||^{m-2}|||w|||^2 = |||w|||^m.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\mathrm{tr}(w^m)}{m}\right| &\leq \sum_{m=2}^{\infty}\frac{|||w|||^m}{m} \\ &\leq \frac{1}{2(1-\rho)}|||w|||^2.\end{aligned}$$

Puisque pour tout $\omega \in \mathbb{C}$,

$$|e^{\omega} - 1| \leq e^{|\omega|} - 1 \leq |\omega| e^{|\omega|},$$

il existe une constante $C_\rho > 0$ telle que

$$\left| \det \left[e^{-\frac{d}{2}w} (1-w)^{-\frac{d}{2}} \right] - 1 \right| \leq C_\rho |||w|||^2.$$

$\square$

Soit $\rho < 1$ et $R > 0$; il existe n_0 tel que pour tout $k \geq n_0$; $|\alpha_k| < \frac{d\rho}{2R}$ (un tel n_0 existe puisque $\sum_k \alpha_k^2 < \infty$). Donc, si $|||\xi||| \leq R$, alors

$$|||\frac{2}{d}\alpha_k \xi||| \leq \rho.$$

D'après le lemme précédent

$$\left| \mathcal{D}(-\frac{2}{d} i\alpha_k \xi)^{-\frac{d}{2}} - 1 \right| \leq C(\rho, d) \alpha_k^2 |||\xi|||^2.$$

Puisque $\displaystyle\sum_k \alpha_k^2 < \infty$ alors, le produit infini

$$\prod_k \mathcal{D}(-\frac{2}{d} i\alpha_k \xi)^{-\frac{d}{2}},$$

converge uniformément sur toute boule $B(0, R)$ de centre 0 et de rayon R de V_∞^2, pour la norme de Hilbert-Schmidt.

D'après le lemme 4.3, ce produit définit une fonction continue sur V_∞^2 et par suite φ_σ est continue aussi.

Supposons que φ_ω soit continue sur V_∞^2. Si $\omega = (\alpha, \gamma, \beta)$, on note $\omega_0 = (\alpha, \gamma, 0)$. La fonction φ_{ω_0} est continue sur V_∞^2 et ne s'annule pas. Par suite le quotient

$$\frac{\varphi_\omega(\xi)}{\varphi_{\omega_0}(\xi)} = e^{i\beta \mathrm{tr}(\xi)},$$

est continue sur V_∞^2, mais ceci n'est possible que si $\beta = 0$. $\square$

Soit φ une fonction continue sur $V(\infty)$, de type positif, K_∞-invariante, et vérifiant $\varphi(0) = 1$. D'après le théorème 4.1, il existe une unique mesure de probabilité μ sur Ω telle que

$$\varphi(\xi) = \int_\Omega \varphi_\omega(\xi) \mu(d\omega).$$

Proposition 4.5 *La fonction φ se prolonge en une fonction continue sur V_∞^2 si et seulement si le support de la mesure μ est contenu dans Ω_0.*

Démonstration.

a) Supposons que le support de la mesure μ soit contenu dans Ω_0. Alors, d'après la proposition 4.2, pour tout ω du support de μ, la fonction φ_ω est continue sur V_∞^2. On en déduit, en utilisant le théorème de convergence dominée, que la fonction φ est aussi continue sur V_∞^2.

b) Supposons maintenant que la fonction φ soit continue sur V_∞^2. Nous allons considérer les paramètres σ et β comme fonctions de ω. On écrira $\beta = \beta(\omega)$, $\sigma = \sigma_\omega$, et

$$\varphi_\omega(\xi) = e^{i\beta(\omega)\mathrm{tr}(\xi)}\varphi_{\sigma_\omega}(\xi).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et considérons la suite des matrices diagonales de $V(\infty)$

$$\xi_0^{(n)} = \mathrm{diag}(\underbrace{\frac{t}{n}, \ldots, \frac{t}{n}}_{n fois}, 0, 0, \ldots),$$

alors,

$$\mathrm{tr}((\xi_0^{(n)})^2) = \frac{t^2}{n},$$

et

$$\mathrm{tr}(\xi_0^{(n)}) = t.$$

La suite $\xi_0^{(n)}$ tend vers 0 au sens de la norme de Hilbert-Schmidt .
D'autre part,

$$\varphi(\xi_0^{(n)}) = \int_\Omega e^{i\beta(\omega)t}\varphi_{\sigma_\omega}(\xi_0^{(n)})\mu(d\omega),$$

et

1. $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sigma_\omega}(\xi_0^{(n)}) = \varphi_{\sigma_\omega}(0) = 1$, car φ_{σ_ω} est continue sur V_∞^2 (voir proposition 4.2)
2. $|e^{i\beta(\omega)t}\varphi_{\sigma_\omega}(\xi_0^{(n)})| \leq 1$,
3. μ est une probabilité.

Par application du théorème de convergence dominée on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega e^{i\beta(\omega)t}\varphi_{\sigma_\omega}(\xi_0^{(n)})\mu(d\omega) = \int_\Omega e^{i\beta(\omega)t}\mu(d\omega).$$

La fonction φ est continue sur V_∞^2 donc

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\xi_0^{(n)}) = \varphi(0) = 1,$$

par suite pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_\Omega e^{i\beta(\omega)t}\mu(d\omega) = 1.$$

ceci implique que

$$\beta(\omega) = 0 \qquad \mu\text{−p.p.}$$

Le support de la mesure μ est donc contenu dans Ω_0. □

4.2.2 Mesures de probabilité invariantes concentrées sur le cône V_∞^+

Dans ce paragraphe, nous allons Déterminer à quelle condition une mesure de probabilité ν sur V_∞ qui est K_∞-invariante est concentrée sur le cône V_∞^+ des matrices hermitiennes semi-définies positives. Nous utilisons pour cela la notion de fonction analytique au sens de Gâteaux.

Soit V_n^+ le cône ouvert des matrices hermitiennes définies positives, $V^+(\infty)$ la limite inductive des cônes des matrices hermitiennes définies positives V_n^+,

$$V^+(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^+,$$

et V_∞^+ le cône des matrices hermitiennes semi-définies positives de V_∞ qui est également la limite projective des cônes V_n^+. On note $V^{\mathbb{C}}(\infty) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n^{\mathbb{C}}$ la limite inductive des espaces complexifiés $V_n^{\mathbb{C}}$ et

$$T := V(\infty) + iV^+(\infty) \subset V^{\mathbb{C}}(\infty),$$

le tube de base $V^+(\infty)$.

Le tube T est *un ouvert de type fini* de $V^{\mathbb{C}}(\infty)$. C'est-à-dire que, pour tout sous-espace $E \subset V^{\mathbb{C}}(\infty)$ de dimension finie, $E \bigcap T$ est un ouvert de E. Voir à ce sujet [17] p.35.

On rappelle qu'une fonction $f : V^{\mathbb{C}}(\infty) \mapsto \mathbb{C}$ est *continue*, si pour tout n sa restriction $f\,|_{V_n^{\mathbb{C}}}\colon V_n^{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{C}$ est continue.

Définition 4.6 Une fonction $f : T \mapsto \mathbb{C}$ est *analytique au sens de Gâteaux* si f est continue et, pour tout n, sa restriction $f\,|_{V_n+iV_n^+}$ est analytique sur $V_n + iV_n^+$.

Voir [17] p.35 ou [14].

Soit ν une mesure de probabilité sur l'espace V_∞. Sa transformée de Fourier φ est définie sur $V(\infty)$ par :

$$\varphi(\xi) = \int_{V_\infty} e^{i\mathrm{tr}(\xi x)} \nu(dx).$$

Si la mesure ν est concentrée sur V_∞^+, alors sa transformée de Fourier φ est définie, continue et bornée sur T, et analytique au sens de Gâteaux dans T. Réciproquement :

Proposition 4.7 *Si φ se prolonge en une fonction continue bornée sur T, et analytique au sens de Gâteaux dans T, alors la mesure ν est concentrée sur le cône V_∞^+.*

Démonstration. Notons $\varphi_n = \varphi \mid_{V_n + iV_n^+}$ la restriction de φ au tube $V_n + iV_n^+$ et ν_n la projection de la mesure ν sur l'espace V_n. D'après la définition 4.6, la fonction φ_n est holomorphe dans le tube $T_n = V_n + iV_n^+$, continue et bornée sur $\overline{T_n} = V_n + i\overline{V_n^+}$. D'après la proposition 1.18, le support de la mesure ν_n est contenu dans le cône fermé $\overline{V_n^+} \subset V_\infty^+$. De la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$V_\infty^+ = \left\{ x = (x_{ij})_{i,j\geq 1} \in V_\infty \;\mid\; \sum_{i,j\geq 1} x_{ij} c_i \overline{c_j} \geq 0, \; \forall\, c = (c_j)_{j\geq 1} \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^{(\infty)} \right\},$$

où $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^{(\infty)}$ est l'espace des suites infinies à coefficients dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls et $\mathbb{Q}$ est le corps des nombres rationnels.

Pour $c \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^{(\infty)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n$, notons

$$F_c = \left\{ x = (x_{ij})_{i,j\geq 1} \in V_\infty \;\mid\; \sum_{i,j\geq 1} x_{ij} c_i \overline{c_j} \geq 0 \right\}.$$

L'ensemble F_c est un fermé de V_∞. De plus

$$V_\infty^+ = \bigcap_{c \in (\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^{(\infty)}} F_c.$$

Par suite V_∞^+ est un fermé de V_∞.

Puisque $c \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^{(\infty)}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $c \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n$.

Donc,

$$\nu(F_c) = \nu_n(p_n(F_c)) \geq \nu_n(\overline{V_n^+}) = 1.$$

Par suite

$$\nu(V_\infty^+) = 1.$$

La mesure ν est concentrée sur V_∞^+. □

Remarque 4.8 *On peut remplacer dans la proposition précédente l'hypothèse φ est bornée sur T par φ est bornée sur $iV(\infty)$, et la conclusion reste la même.*

On note Ω^+ le sous-ensemble de Ω défini par

$$\Omega^+ = \{\omega \mid \alpha_k \geq 0, \beta \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \leq \beta, \gamma = 0\}.$$

Remarque 4.9 *L'ensemble Ω^+ est un fermé.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, on considère la fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon + |t|}.$$

Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\sigma(dt) = \frac{1}{\varepsilon}\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\varepsilon + |\alpha_k|}.$$

Si $\omega \in \Omega^+$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\sigma(dt) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \leq \beta.$$

D'après le corollaire 3.3, les applications

$$\Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\sigma(dt),$$
$$\Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \beta,$$

sont continues. Si ω appartient à l'adhérence de Ω^+, alors $\alpha_k \geq 0$, et

$$\frac{1}{\varepsilon}\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\varepsilon + \alpha_k} \leq \beta.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\gamma = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \leq \beta.$$

C'est-à-dire que ω appartient à Ω^+. □

Pour $\omega \in \Omega$, on note ν_ω la mesure de probabilité dont la transformée de Fourier est égale à φ_ω,

$$\varphi_\omega(\xi) = \int_{V_\infty} e^{i\mathrm{tr}(x\xi)} \nu_\omega(dx).$$

Proposition 4.10 *La mesure ν_ω est concentrée sur le cône V_∞^+ si et seulement si $\omega \in \Omega^+$.*

Démonstration.
a) Si $\omega \in \Omega^+$ la fonction φ_ω s'écrit

$$\varphi(\xi) = e^{i\beta_0 \mathrm{tr}(\xi)} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\det\left(1 - \frac{2}{d} i\alpha_j \xi\right)^{\frac{d}{2}}},$$

avec

$$\alpha_j \geq 0, \quad \beta_0 = \beta - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j.$$

La fonction φ_ω définie sur $V(\infty)$ se prolonge au tube T en une fonction continue et analytique au sens de Gâteaux dans T, de plus

$$|\varphi_\omega(iy)| \leq 1 \text{ pour tout } y \in V^+(\infty).$$

D'après la proposition 4.7 et la remarque 4.8 la mesure ν_ω est concentrée sur le cône V_∞^+.

b) Supposons que la mesure ν_ω est concentrée sur V_∞^+. Alors, la fonction φ_ω se prolonge en une fonction continue bornée sur T, holomorphe au sens de Gâteaux dans T. Par suite, pour $\xi = \mathrm{diag}(i\eta, 0, \ldots)$ avec $\eta \geq 0$,

$$|\varphi_\omega(\mathrm{diag}(i\eta, 0, \ldots))| \leq 1.$$

Puisque φ est bornée alors, $\alpha_j \geq 0$ pour tout $j \geq 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $C_\varepsilon > 0$ telle que, pour tout $\eta \geq 0$,

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha_j \eta}}{\left(1 + \frac{2}{d}\alpha_j \eta\right)^{\frac{d}{2}}} \geq C_\varepsilon e^{-\frac{d}{2}\varepsilon\eta^2}, \tag{4.1}$$

(pour la preuve de cette inégalité voir [11] proposition III.3.3).

Donc, pour tout $\eta \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$C_\varepsilon e^{-\frac{d}{2}\varepsilon\eta^2} e^{-\beta\eta} e^{\frac{\gamma}{d}\eta^2} = C_\varepsilon e^{-\beta\eta} e^{(\frac{\gamma}{d} - \frac{d}{2}\varepsilon)\eta^2} \leq \varphi_\omega(\mathrm{diag}(i\eta, 0, \ldots)) \leq 1.$$

Par suite $\gamma = 0$ et $\beta \geq 0$.

- Fixons $0 < \delta < 1$ alors il existe $A_\delta > 0$ telle que pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{e^x}{1+x} \geq A_\delta e^{\delta x}.$$

Donc pour tout N et $\eta \geq 0$,

$$A^N e^{(\delta \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j - \beta)\eta} \leq e^{-\beta\eta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha_j \eta}}{(1 + \frac{2}{d}\alpha_j \eta)^{\frac{d}{2}}} \leq 1.$$

D'où

$$\delta \sum_{j=1}^{N} \alpha_j - \beta \leq 0,$$

pour tout $0 < \delta < 1$ et $N \in \mathbb{N}$.

En faisant tendre δ vers 1 et N vers $+\infty$ on obtient

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \leq \beta,$$

et si on pose,

$$\beta_0 = \beta - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j,$$

on en déduit l'expression de φ annoncée. $\square$

Soit φ une fonction continue de type positif sur $V(\infty)$, K_∞-invariante et vérifiant $\varphi(0) = 1$. D'après le théorème de Bochner, il existe une mesure de probabilité ν sur V_∞, K_∞-invariante, telle que

$$\varphi(\xi) = \int_{V_\infty} e^{i\mathrm{tr}(x\xi)} \nu(dx).$$

Mais aussi, d'après le théorème de Bochner invariant, il existe une mesure de probabilité μ sur Ω telle que

$$\varphi(\xi) = \int_{\Omega} \varphi_\omega(\xi) \mu(d\omega).$$

Les mesures ν et μ sont uniques. Elles sont liées par la relation suivante : si f est une fonction mesurable bornée sur V_∞ alors,

$$\int_{V_\infty} f(x)\nu(dx) = \int_{\Omega} \int_{V_\infty} f(x)\nu_\omega(dx)\mu(d\omega).$$

Proposition 4.11 *La mesure ν est concentrée sur le cône V_∞^+ si et seulement si le support de la mesure μ est contenu dans Ω^+.*

Démonstration.

a) Supposons que la mesure $\nu(V_\infty^+) = 1$ et montrons que $\mu(\Omega^+) = 1$. D'une part d'après ce qui précède

$$\int_\Omega \nu_\omega(V_\infty^+)\mu(d\omega) = \nu(V_\infty^+) = 1,$$

et donc $\nu_\omega(V_\infty^+) = 1$, μ-presque partout.

D'autre part, puisque $\nu_\omega(V_\infty^+) = 1$ si et seulement si $\omega \in \Omega^+$,

$$\begin{aligned}\mu(\Omega^+) &= \int_{\Omega^+} \nu_\omega(V_\infty^+)\mu(d\omega) \\ &= \int_\Omega \nu_\omega(V_\infty^+)\mu(d\omega) = 1\end{aligned}.$$

b) Supposons que le support de la mesure μ est contenu dans Ω^+. Alors, d'après la proposition 4.10, pour tout ω du support de μ, la mesure ν_ω est concentrée sur le cône V_∞^+, donc la fonction φ_ω se prolonge en une fonction continue bornée sur T et analytique au sens de Gâteaux dans T. En appliquant le théorème de convergence dominée, on en déduit que la fonction φ se prolonge en une fonction continue bornée sur T et analytique au sens de Gâteaux dans T. D'après la proposition 4.7, la mesure ν est concentrée sur le cône V_∞^+. □

☆☆☆

Chapitre 5

Fonctions continues de type négatif K_∞-invariantes sur l'espace V_∞^2

5.1 Introduction

Les fonctions de type négatif interviennent dans l'étude des mesures de probabilité indiféfiniment divisibles. Une fonction de type négatif sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ admet une représentation intégrale : c'est la formule de Lévy-Khinchine on peut voir à ce sujet Courrège [8].

En dimension infinie beaucoup de résultats dans cette direction ont été obtenu par Schoenberg [25], Hamedani et Mandrekar [16], Varadhan [26]. Schoenberg a établi l'analogue de la formule de Lévy-Khinchine pour les fonctions continues de type négatif sur $\mathbb{R}^{(\infty)}$ qui sont radiales. Une telle fonction se prolonge automatiquement par continuité à $\ell^2(\mathbb{N})$. On peut trouver une étude systématique des fonctions de type négatif sur un groupe ou un semi-groupe dans les livres de Berg, Christensen et Ressel [1] ; Berg et Forst [2]. Dans le cas des fonctions de type négatif définies sur un espace homogène Faraut et Harzallah [12] ont donné une representation.

Dans ce chapitre nous interessons aux fonctions continues de type négatif sur l'espace de Hilbert V_∞^2 des matrices hermitiennes de Hilbert-Schmidt à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, qui sont invariantes par le groupe K_∞.

$$K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(n, \mathbb{F}).$$

Nous établissons pour ces fonctions une représentation intégrale analogue à la formule de Lévy-Khinchine.

La méthode que nous suivons est inspirée de la démonstration qui est utilisée par Berg, Christensen et Ressel [1]. Pour établir l'unicité de la représentation nous utilisons la relation fonctionnelle des fonctions sphériques de la paire sphérique $(K_\infty \ltimes V(\infty), K_\infty)$.

5.2 Formule de Lévy-Khinchine des fonctions continues de type négatif et K_∞-invariantes sur l'espace V_∞^2

Une fonction ψ définie sur un espace vectoriel réel V à valeurs complexes est dite de *type négatif* si $\psi(0) \geq 0$, $\psi(-\xi) = \overline{\psi(\xi)}$, et si, pour $\xi_1, \ldots, \xi_n \in V$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, vérifiants $\sum\limits_{j=1}^{n} c_i = 0$ alors,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \psi(\xi_i - \xi_j) c_i \overline{c_j} \leq 0.$$

Si φ est une fonction de type positif, alors $\psi(\xi) = \varphi(0) - \varphi(\xi)$ est de type négatif.

Proposition 5.1 (Schoenberg). *La fonction ψ est de type négatif, si et seulement si $\psi(0) \geq 0$, et, pour tout $t \geq 0$, $e^{-t\psi}$ est de type positif.*

Voir [2] théorème 7.8.

Les fonctions de type négatif constituent un cône convexe. Les fonctions continues de type négatif sur un espace vectoriel réel de dimension finie admettent une représentation intégrale. C'est la formule de Lévy-Khinchine.

Dans le cas où $V = \mathbb{R}^{(\infty)}$, l'espace des suites réelles n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, Schoenberg a établi une représentation intégrale des fonctions continues de type négatif qui sont invariantes par $O(\infty)$ voir [25].

Nous allons établir un résultat analogue dans le cas où $V = V_\infty^2$ est l'espace des matrices hermitiennes de Hilbert-Schmidt à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ sur lequel agit le groupe des matrices unitaire $K_\infty = U(\infty, \mathbb{F})$.

Rappelons que Ω_0 désigne l'ensemble des mesures positives et bornées σ sur $\mathbb{R}$ définies par :

$$\sigma = \gamma\delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \delta_{\alpha_k},$$

où $\gamma \geq 0$, $\alpha = (\alpha_k)$ est une suite réelle de carré sommable et la topologie que nous considérons sur Ω_0 est celle qui est induite par $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ des mesures positives et bornées sur $\mathbb{R}$ est muni de la topologie étroite.

Nous notons

$$p_m(\alpha) := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^m = \int_{\mathbb{R}} t^{m-2}\sigma(dt) \qquad (m \geq 3),$$

$$||\omega||^2 = \gamma + p_2(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(dt).$$

Rappelons aussi qu'à $\omega = (\alpha, \gamma)$ est associée la fonction φ_ω définie sur $V(\infty)$ par

$$\varphi_\omega(\xi) = \det \Pi_\omega(\xi),$$

où

$$\Pi_\omega(\lambda) = e^{-\frac{\gamma}{d}\lambda^2} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_j\lambda}}{(1 - i\frac{2}{d}\alpha_j\lambda)^{\frac{d}{2}}}.$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que, pour $\omega \in \Omega_0$, la fonction φ_ω se prolonge en une fonction continue sur V_∞^2. Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

Théorème 5.2 (Formule de Lévy-Khinchine invariante). *Soit ψ une fonction continue sur V_∞^2 qui est K_∞-invariante. Alors ψ est de type négatif si et seulement si elle admet la représentation intégrale suivante*

$$\psi(\xi) = A_0 + A_1 \mathrm{tr}(\xi^2) + \int_{\Omega_0 \setminus \{0\}} (1 - \varphi_\omega(\xi))\, \mu(d\omega).$$

où A_0, A_1 sont des constantes positives ou nulles et μ est une mesure positive sur $\Omega_0 \setminus \{0\}$ telle que

$$\int_{\Omega_0 \setminus \{0\}} \frac{||\omega||^2}{1 + ||\omega||^2} \mu(d\omega) < \infty.$$

Les constantes A_0, A_1 et la mesure μ sont determinées de manière unique.

Lemme 5.3 *On pose*

$$\varphi_\omega(\xi) = 1 - \frac{1}{d}||\omega||^2 \mathrm{tr}(\xi^2) + R(\omega, \xi).$$

1) *Pour tout $\xi \in V(\infty)$,*

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{R(\omega, \xi)}{||\omega||^2} = 0$$

2) $\forall\ \rho > 0$, $\exists\ C > 0$, $\exists\ \varepsilon > 0$, *tels que, si $||\omega|| \leq \varepsilon$ et $|||\xi||| \leq \rho$, alors*

$$|1 - \varphi_\omega(\xi)| \leq C||\omega||^2.$$

Démonstration. 1) Si $\xi = 0$, le résultat est évident. On suppose que $\xi \neq 0$. Pour $\omega \in \Omega_0$ assez proche de zéro

$$\varphi_\omega(\xi) = \exp\left(-\frac{\gamma}{d}\mathrm{tr}(\xi^2) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[i\alpha_k \mathrm{tr}(\xi) + \frac{d}{2}\mathrm{tr}\log\left(1 - i\frac{2}{d}\alpha_k\xi\right)\right]\right),$$

(on a utilisé le fait que pour toute matrice $\xi \in V(\infty)$ et tout $z \in \mathbb{C}$ proche de zéro, $\det(1 + z\xi) = \exp(\mathrm{tr}\log(1 + z\xi))$.
D'après le développement du logarithme, si $|z| < 1$,

$$\log(1 - z) = -\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m}.$$

Pour tout $\xi \in V(\infty)$ et tout ω dans un voisinage de zéro on obtient,

$$\varphi_\omega(\xi) = \exp\left(-\frac{\gamma}{d}\mathrm{tr}(\xi^2) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[i\alpha_k\mathrm{tr}(\xi) + \frac{d}{2}\mathrm{tr}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-i\frac{2}{d})^m}{m}\alpha_k^m\xi^m\right)\right]\right). \tag{5.1}$$

Remarquons que pour tout $m \geq 2$

$$|p_m(\alpha)| \leq p_m(|\alpha|) \leq ||\omega||^m, \tag{5.2}$$

où $p_m(|\alpha|) = \sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^m$.

Par suite pour ω assez petit et $||\omega|| < \frac{d}{2|||\xi|||}$

$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 3}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{m}\left(\frac{2|\alpha_k|}{d}\right)^m|||\xi|||^m &\leq \frac{1}{3}\sum_{m\geq 3}\left(\frac{2||\omega||\,|||\xi|||}{d}\right)^m \\ &= \frac{1}{3}\frac{(\frac{2||\omega||\,|||\xi|||}{d})^3}{1 - \frac{2||\omega||\,|||\xi|||}{d}}.\end{aligned}$$

Donc on peut permuter les sommes dans l'équation (5.1) et on obtient

$$\varphi_\omega(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{d}||\omega||^2\mathrm{tr}(\xi^2) - \frac{d}{2}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-i\frac{2}{d})^m}{m}p_m(\alpha)\mathrm{tr}(\xi^m)\right). \tag{5.3}$$

Posons

$$f(\omega,\xi) = -\frac{1}{d}||\omega||^2\mathrm{tr}(\xi^2) - \frac{d}{2}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-i\frac{2}{d})^m}{m}p_m(\alpha)\mathrm{tr}(\xi^m),$$

et

$$g(\omega,\xi) = -\frac{d}{2}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-i\frac{2}{d})^m}{m}p_m(\alpha)\mathrm{tr}(\xi^m).$$

Dans la suite de la preuve, on notera indifféremment $f(\gamma,\alpha;\xi)$ ou $f(\omega,\xi)$.

En développant l'exponentielle l'équation (5.3) s'écrit

$$\varphi_\omega(\xi) = 1 - \frac{1}{d}||\omega||^2\mathrm{tr}(\xi^2) + g(\omega,\xi) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(f(\omega,\xi))^n}{n!}. \tag{5.4}$$

D'après l'équation (5.2)

$$|g(\omega,\xi)| \leq \frac{d}{2}\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(\frac{2}{d})^{m-1}}{m}(|||\xi|||||\omega||)^m.$$

On a utilisé le fait que $|\mathrm{tr}(\xi^m)| \leq |||\xi|||^m$.

Par suite, si $||\omega|| < \dfrac{d}{2|||\xi|||}$ on obtient

$$|g(\omega,\xi)| \leq \frac{2}{3d}\frac{|||\xi|||^3}{1-\frac{2}{d}|||\xi|||||\omega||}||\omega||^3. \tag{5.5}$$

De l'expression de f et de l'équation (5.5) on déduit aussi que

$$|f(\omega,\xi)| \leq \left(\frac{1}{d}|||\xi|||^2 + \frac{2}{3d}\frac{|||\xi|||^3||\omega||}{1-\frac{2}{d}|||\xi|||||\omega||}\right)||\omega||^2.$$

Posons

$$B(\omega,\xi) = \frac{1}{d}|||\xi|||^2 + \frac{2}{3d}\frac{|||\xi|||^3||\omega||}{1-\frac{2}{d}|||\xi|||||\omega||}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(f(\omega,\xi))^n}{n!}\right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(B(\omega,\xi))^n||\omega||^{2n}}{n!}\\ &= ||\omega||^3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(B(\omega,\xi))^n||\omega||^{2n-3}}{n!}.\end{aligned}$$

Si $||\omega|| < \inf\left(\frac{d}{2|||\xi|||},1\right)$ alors, pour, $n\geq 2$, $||\omega||^{2n-3}\leq 1$ et par suite

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(f(\omega,\xi))^n}{n!}\right| \leq ||\omega||^3\exp(B(\omega,\xi)), \tag{5.6}$$

D'après l'équation (5.4), pour ω assez proche de zéro on a

$$R(\omega,\xi) = g(\omega,\xi) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(f(\omega,\xi))^n}{n!},$$

et d'après les équations (5.5) et (5.6), si $||\omega|| < \inf\left(\frac{d}{2|||\xi|||}, 1\right)$ et ω est assez petit on obtient,

$$|R(\omega,\xi)| \leq \left(\exp(B(\omega,\xi)) + \frac{2}{3d}\frac{|||\xi|||^3||\omega||}{1-\frac{2}{d}|||\xi|||||\omega||}\right)||\omega||^3. \qquad (5.7)$$

D'où on en déduit que

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{R(\omega,\xi)}{||\omega||^2} = 0.$$

2) Soit $\rho > 0$ et $\varepsilon < \inf(\dfrac{d}{2\rho}, 1)$. Si $||\omega|| \leq \varepsilon$ et $|||\xi||| \leq \rho$, alors

$$\begin{aligned} B(\omega,\xi) &= \frac{1}{d}|||\xi|||^2 + \frac{2}{3d}\frac{|||\xi|||^3||\omega||}{1-\frac{2}{d}|||\xi|||||\omega||} \\ &\leq \frac{1}{d}\rho^2 + \frac{2}{3d}\frac{\varepsilon\rho^3}{1-\frac{2}{d}\varepsilon\rho} = C_1. \end{aligned}$$

Donc de l'équation (5.7) on déduit

$$|R(\omega,\xi)| \leq C_2||\omega||^2,$$

où $C_2 = \varepsilon(\exp(C_1) + C_1 - \frac{1}{d}\rho^2)$ et par suite

$$|1-\varphi_\omega(\xi)| \leq \frac{1}{d}|||\xi|||^2||\omega||^2 + |R(\omega,\xi)| \leq C||\omega||^2,$$

où $C = \frac{1}{d}\rho^2 + C_2$. Ceci achève la preuve du lemme. □

Démonstration du théorème 5.2.

a) Remarquons d'abord que, d'après le lemme 5.3, l'intégrale est bien définie et qu'une fonction ψ donnée par une telle représentation est de type négatif et invariante par K_∞. Pour montrer que c'est une fonction continue, on applique la proposition 4.2 et le théorème de convergence dominée.

b) Existence de la représentation : Soit ψ une fonction continue de type négatif sur V_∞^2, invariante par K_∞. Puisque $\psi(\xi) - \psi(0)$ est aussi continue de type négatif et invariante par K_∞, alors on peut supposer que $\psi(0) = 0$.

Pour $t \geq 0$, la fonction $e^{-t\psi}$ est continue de type positif sur V_∞^2 et invariante par K_∞. Donc d'après le théorème de Bochner invariant, théorème 4.1, et la proposition 4.5, il existe une unique mesure de probabilité m_t sur Ω_0 telle que

$$e^{-t\psi(\xi)} = \int_{\Omega_0} \varphi_\omega(\xi) m_t(d\omega).$$

En séparant les parties réelles et imaginaires on obtient

$$e^{-t\Re\psi(\xi)} \cos(t\Im\psi(\xi)) = \int_{\Omega_0} \Re\varphi_\omega(\xi) m_t(d\omega). \tag{5.8}$$

et

$$e^{-t\Re\psi(\xi)} \sin(t\Im\psi(\xi)) = -\int_{\Omega_0} \Im\varphi_\omega(\xi) m_t(d\omega). \tag{5.9}$$

Par un passage à la limite quand t tend vers 0 dans l'équation (5.8) on va établir une représentation intégrale de la fonction $\Re\psi$. Puis, en utilisant l'équation (5.9), on obtiendra la représentation intégrale de la fonction ψ.
a) L'équation (5.8) s'écrit

$$\frac{1 - e^{-t\Re\psi(\xi)} \cos(t\Im\psi(\xi))}{t} = \int_{\Omega_0} (1 - \Re\varphi_\omega(\xi)) \frac{m_t}{t}(d\omega),$$

et on vérifie facilement que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 - e^{-t\Re\psi(\xi)} \cos(t\Im\psi(\xi))}{t} = \Re\psi(\xi),$$

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{1 - e^{-t\Re\psi(\xi)} \cos(t\Im\psi(\xi))}{t} = 0.$$

De plus, pour ξ fixé, cette expression est une fonction continue de t sur $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 quand t tend vers l'infini. Il existe donc une constante $C(\xi) \geq 0$ telle que

$$0 \leq \frac{1 - e^{-t\Re\psi(\xi)} \cos(t\Im\psi(\xi))}{t} \leq C(\xi),$$

par suite

$$\int_{\Omega_0} (1 - \Re\varphi_\omega(\xi)) \frac{m_t}{t}(d\omega) \leq C(\xi).$$

En particulier pour $\xi_0 = \mathrm{diag}(1, 0, 0, ...)$,

$$\int_{\Omega_0} (1 - \Re\varphi_\omega(\xi_0)) \frac{m_t}{t}(d\omega) \leq C(\xi_0) = M. \tag{5.10}$$

Rappelons que $\varphi_\omega(\xi_0) = \Pi_\omega(1) = e^{-\frac{\gamma}{d}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha_k}}{(1 - i\frac{2}{d}\alpha_k)^{\frac{d}{2}}}$.

Dans la suite on note κ_t la mesure positive et bornée définie sur Ω_0 par

$$\kappa_t = (1 - \Re\varphi_\omega(\xi_0))\frac{m_t}{t}.$$

Puisque, pour tout $t > 0$, $\kappa_t(\Omega_0) \leq M$, l'ensemble $\{\kappa_t \mid t > 0\}$, est relativement compact pour la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}(\Omega_0), \mathscr{C}_0(\Omega_0))$ où $\mathcal{M}(\Omega_0)$ est l'ensemble des mesures positives et bornées sur Ω_0 et $\mathscr{C}_0(\Omega_0)$ est l'ensemble des fonctions continues sur Ω_0 tendant vers 0 à l'infini. Par suite, il existe une suite t_j de $]0, +\infty[$ qui tend vers 0, telle que les mesures κ_{t_j} tendent faiblement vers une mesure positive bornée κ, c'est-à-dire que, pour toute $f \in \mathscr{C}_0(\Omega_0)$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\Omega_0} f(\omega)\, \kappa_{t_j}(d\omega) = \int_{\Omega_0} f(\omega)\, \kappa(d\omega),$$

Nous pouvons écrire

$$\frac{1 - e^{-t\Re\psi(\xi)} \cos(t\Im\psi(\xi))}{t_j} = \int_{\Omega_0} \left[\frac{1 - \Re\varphi_\omega(\xi)}{1 - \Re\varphi_\omega(\xi_0)} - 1\right] \kappa_{t_j}(d\omega) + \frac{1 - e^{-t\Re\psi(\xi_0)} \cos(t\Im\psi(\xi_0))}{t_j}. \tag{5.11}$$

Vérifions que, pour $\xi \neq 0$, la fonction f définie sur Ω_0 par

$$f(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1 - \Re\varphi_\omega(\xi)}{1 - \Re\varphi_\omega(\xi_0)} - 1 & \text{si } \omega \neq 0, \\ \operatorname{tr}(\xi^2) - 1 & \text{si } \omega = 0, \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{C}_0(\Omega_0)$.

Notons d'abord que $\Re\varphi_\omega(\xi_0) = 1$ si et seulement si $\omega = 0$. Cette fonction est donc bien définie sur $\Omega_0 \backslash \{0\}$. La continuité de f sur $\Omega_0 \backslash \{0\}$ résulte du corollaire 3.3 (on peut voir aussi la proposition VI de [11]). La continuité en 0 est une conséquence du lemme 5.3 :

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{1 - \Re\varphi_\omega(\xi)}{1 - \Re\varphi_\omega(\xi_0)} = \operatorname{tr}(\xi^2).$$

De l'inégalité,

$$0 \leq |\Re\varphi_\omega(\xi)| \leq e^{-\frac{\gamma}{d}\operatorname{tr}(\xi^2)} \prod_{k=1}^{\infty} \det\left(1 + \frac{4}{d^2}\alpha_k^2 \xi^2\right)^{-\frac{d}{4}}, \tag{5.12}$$

on déduit que

$$\lim_{\omega\to+\infty} \Re\varphi_\omega(\xi) = 0,$$

et donc que

$$\lim_{\omega\to\infty} f(\omega) = 0.$$

En faisant tendre j vers l'infini dans l'équation (5.11), on déduit que, pour tout $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned}\Re\psi(\xi) &= \int_{\Omega_0} f(\omega)\,\kappa(d\omega) + \Re\psi(\xi_0) \\ &= (\mathrm{tr}(\xi^2) - 1)\kappa(\{0\}) + \int_{\Omega_0\setminus\{0\}} \left(\frac{1-\Re\varphi_\omega(\xi)}{1-\Re\varphi_\omega(\xi_0)} - 1\right)\kappa(d\omega) + \Re\psi(\xi_0).\end{aligned}$$

En faisant tendre ξ vers 0 et en utilisant le théorème de convergence dominée, on en déduit que $\kappa(\Omega_0) = \Re\psi(\xi_0)$ Nous obtenons finalement

$$\Re\psi(\xi) = \mathrm{tr}(\xi^2)\kappa(\{0\}) + \int_{\Omega_0\setminus\{0\}} \frac{1-\Re\varphi_\omega(\xi)}{1-\Re\varphi_\omega(\xi_0)}\kappa(d\omega)$$

ou

$$\Re\psi(\xi) = A_1\mathrm{tr}(\xi^2) + \int_{\Omega_0\setminus\{0\}} (1-\Re\varphi_\omega(\xi))\mu(d\omega)$$

avec $A_1 = \kappa(\{0\})$ et μ est la mesure définie sur Ω_0 par

$$\mu = \frac{1}{1-\Re\varphi_\omega(\xi_0)}\kappa\mid_{\Omega_0\setminus\{0\}}.$$

Vérifions maintenant que

$$\int_{\Omega_0\setminus\{0\}} \frac{||\omega||^2}{1+||\omega||^2}\mu(d\omega) < \infty.$$

La fonction $\omega \mapsto \dfrac{||\omega||^2}{(1-\Re\varphi_\omega(\xi_0))(1+||\omega||^2)}$ est continue sur $\Omega_0\setminus\{0\}$, a pour limite d en 0 d'après le lemme 5.3, et pour limite 1 à l'infini. Elle est donc bornée et

$$\int_{\Omega_0} \frac{||\omega||^2}{1+||\omega||^2}\mu(d\omega) = \int_{\Omega_0} \frac{||\omega||^2}{(1-\Re\varphi_\omega(\xi_0))(1+||\omega||^2)}\kappa(d\omega) < \infty.$$

c) De même on montre que la fonction g définie sur Ω_0 par

$$g(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\Im\varphi_\omega(\xi)}{1-\Re\varphi_\omega(\xi_0)} & \text{si } \omega \neq 0, \\ 0 & \text{si } \omega = 0, \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{C}_0(\Omega_0)$. Par passage à la limite à partir de la relation

$$e^{-t_j\Re\psi(\xi)}\frac{\sin(t_j\Im\psi(x))}{t_j}=-\int_{\Omega_0}\frac{\Im\varphi_\omega(\xi)}{1-\Re\varphi_\omega(\xi_0)}\kappa_{t_j}(d\omega).$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Im\psi(\xi)&=-\int_{\Omega_0}\frac{\Im\varphi_\omega(\xi)}{1-\Re\varphi_\omega(\xi_0)}\kappa(d\omega)\\&=-\int_{\Omega_0\setminus\{0\}}\Im\varphi_\omega(\xi)\mu(d\omega),\end{aligned}$$

puisque $\Im\varphi_\omega(0)=0$.
Finalement nous obtenons

$$\psi(\xi)=A_1\mathrm{tr}(\xi^2)+\int_{\Omega_0\setminus\{0\}}(1-\varphi_\omega(\xi))\mu(d\omega).$$

Unicité : La fonction de Pólya Π_ω est de type positif sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, $\Pi_\omega(0)=1$

$$\begin{aligned}1-\Re\Pi_\omega(s)&=\int_{\mathbb{R}}(1-\cos(su))\mu(du)\\&\leq\frac{1}{2}s^2\int_{\mathbb{R}}u^2\mu(du)=-s^2\Pi_\omega''(0).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\varphi_\omega(s\xi_0)=\Pi_\omega(s)\ \text{ et }\ \Pi_\omega''(0)=-\frac{1}{d}||\omega||^2.$$

Donc pour tout $s\geq 1$,

$$\frac{1-\Re\varphi_\omega(s\xi_0)}{s^2}\leq\begin{cases}\frac{1}{d}||\omega||^2 & \text{si } ||\omega||\leq 1,\\ 2 & \text{si } ||\omega||\geq 1.\end{cases}$$

En écrivant

$$\frac{\psi(s\xi_0)}{s^2}=A_1+\int_{\Omega_0\setminus\{0\}}\frac{1-\Re\varphi_\omega(s\xi_0)}{s^2}\mu(d\omega),$$

et en appliquant le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{\psi(s\xi_0)}{s^2}=A_1,$$

d'où l'unicité de la constante A_1.

Il reste à prouver l'unicité de la mesure μ. C'est-à-dire, si μ_1 et μ_2 sont deux mesures positives sur $\Omega_0\backslash\{0\}$ qui vérifient.

$$\int_{\Omega_0\backslash\{0\}} \frac{||\omega||^2}{1+||\omega||^2}\mu_i(d\omega) < \infty, \qquad (i=1,2), \tag{5.13}$$

et sont telles que, pour tout $\xi \in V(\infty)$

$$\int_{\Omega_0\backslash\{0\}} (1-\varphi_\omega(\xi))\,\mu_1(d\omega) = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}} (1-\varphi_\omega(\xi))\,\mu_2(d\omega). \tag{5.14}$$

alors $\mu_1 = \mu_2$. Ce sera une conséquence du lemme suivant.

Lemme 5.4 *Soit μ_1 et μ_2 deux mesures sur $\Omega_0\backslash\{0\}$ vérifiants* (5.13) et (5.14). Alors, pour tout $\xi, \eta \in V(\infty)$,

$$\int_{\Omega_0\backslash\{0\}} \varphi_\omega(\eta)(1-\Re\varphi_\omega(\xi))\,\mu_1(d\omega) = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}} \varphi_\omega(\eta)(1-\Re\varphi_\omega(\xi))\,\mu_2(d\omega).$$

Démonstration du lemme. La fonction φ_ω est une fonction sphérique pour la paire sphérique $(K_\infty \ltimes V(\infty), K_\infty)$. Elle vérifie donc la relation, pour $\xi, \eta \in V(\infty)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} \varphi_\omega(\xi + k\eta k^*)\,dk = \varphi_\omega(\xi)\varphi_\omega(\eta). \tag{5.15}$$

où dk est la mesure de Haar normalisée du groupe compact K_n.
Dans un premier temps on va montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K_n} \int_{\Omega_0\backslash\{0\}} (1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*))\,\mu_1(d\omega)\,dk = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}} (1-\varphi_\omega(\xi)\varphi_\omega(\eta))\,\mu_1(d\omega).$$

On va appliquer le théorème de Fubini. Pour cela on va majorer la fonction

$$(\omega, k) \mapsto (1+||\omega||^2)\frac{1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*)}{||\omega||^2}.$$

Soit $R > 0$, tel que $|||\xi||| + |||\eta||| \le R$ et $0 < \varepsilon < \inf(\frac{d}{2R}, 1)$ (pour le choix de ε, voir la preuve du deuxième point du lemme 5.3).

a) Si $||\omega|| \le \sqrt{\varepsilon}$, puisque $|||\xi + k\eta k^*||| \le |||\xi||| + |||\eta||| \le R$, alors d'après le lemme 5.3,

$$(1+||\omega||^2)\frac{|1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*)|}{||\omega||^2} \le (1+\varepsilon)C,$$

où C est une constante qui dépend de R et ε.

b) Si $||\omega|| \geq \sqrt{\varepsilon}$ alors

$$(1+||\omega||^2)\frac{|1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*)|}{||\omega||^2} \leq 2(1+\frac{1}{\varepsilon}).$$

Puisque les mesure dk et $\dfrac{||\omega||^2}{1+||\omega||^2}\mu_1(d\omega)$ sont bornées, alors la fonction

$$(\omega,k) \mapsto (1+||\omega||^2)\frac{|1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*)|}{||\omega||^2},$$

est intégrable par rapport à la mesure produit $\dfrac{||\omega||^2}{1+||\omega||^2}\mu_1(d\omega)\times dk$. D'après le théorème de Fubini.

$$\int_{K_n}\int_{\Omega_0\backslash\{0\}}(1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*))\,\mu_1(d\omega)\,dk = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}}\int_{K_n}(1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*))\,dk\mu_1(d\omega).$$

En utilisant les inégalités a) et b) et le fait que la mesure dk est une probabilité, on en déduit que la fonction

$$\omega \mapsto \int_{K_n}(1+||\omega||^2)\frac{1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*)}{||\omega||^2}\,dk,$$

est majorée indépendament de n et de ω. Puisque la mesure $\dfrac{||\omega||^2}{1+||\omega||^2}\mu_1(d\omega)$ est positive et bornée, alors en appliquant le théorème de convergence dominée on déduit de l'équation (5.15) que,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_0\backslash\{0\}}\int_{K_n}(1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*))\,dk\mu_1(d\omega) = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}}(1-\varphi_\omega(\xi)\varphi_\omega(\eta))\mu_1(d\omega),$$

et donc,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}\int_{\Omega_0\backslash\{0\}}(1-\varphi_\omega(\xi+k\eta k^*))\,\mu_1(d\omega)\,dk = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}}(1-\varphi_\omega(\xi)\varphi_\omega(\eta))\,\mu_1(d\omega).$$

En utilisant cette équation, l'équation (5.14) s'écrit

$$\int_{\Omega_0\backslash\{0\}}(1-\varphi_\omega(\xi)\varphi_\omega(\eta))\,\mu_1(d\omega) = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}}(1-\varphi_\omega(\xi)\varphi_\omega(\eta))\,\mu_2(d\omega).$$

En remplaçant dans l'équation précédente ξ par $-\xi$, puis en utilisant le fait que $\varphi_\omega(-\xi)=\overline{\varphi_\omega(\xi)}$, on obtient en effectuant la somme,

$$\int_{\Omega_0\backslash\{0\}}(1-\varphi_\omega(\eta)\Re\varphi_\omega(\xi))\,\mu_1(d\omega) = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}}(1-\varphi_\omega(\eta)\Re\varphi_\omega(\xi))\,\mu_2(d\omega).$$

En remplaçant ξ par η dans l'équation (5.14), puis en effectuant la différence avec l'équation précédente on déduit le résultat du lemme. $\square$

Suite de la preuve d'unicité : Considérons la fonction $\widetilde{\varphi}$ définie sur $V(\infty)$ par

$$\widetilde{\varphi}(\eta) = \int_{\Omega_0\backslash\{0\}} \varphi_\omega(\eta)(1 - \Re\varphi_\omega(\xi))\, \mu_1(d\omega)$$

elle est K_∞-invariante puisque la fonction φ_ω est K_∞-invariante. De plus $1 - \Re\varphi_\omega(\xi) \geq 0$ et $\varphi_\omega(\eta)$ est de type positif donc $\widetilde{\varphi}$ est de type positif. $\widetilde{\varphi}$ est continue puisque $\varphi_\omega(\eta)$ est continue et majorée par une fonction μ_1-intégrable sur $\Omega_0\backslash\{0\}$

$$|\varphi_\omega(y)(1 - \Re\varphi_\omega(\xi))| \leq 1 - \Re\varphi_\omega(\xi).$$

Pour tout $\eta \in V(\infty)$,

$$\int_{\Omega_0} \varphi_\omega(\eta)\, \widetilde{\mu_{1,\xi}}(d\omega) = \int_{\Omega_0} \varphi_\omega(\eta)\, \widetilde{\mu_{2,\xi}}(d\omega).$$

où $\widetilde{\mu_{i,\xi}}(d\omega) = (1 - \Re\varphi_\omega(\xi))\chi_{\Omega_0\backslash\{0\}}(\omega)\, \mu_1(d\omega)$ $(i = 1, 2)$ et $\chi_{\Omega_0\backslash\{0\}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\Omega_0\backslash\{0\}$.
En raison de l'unicité de la représentation intégrale de l'énoncé du théorème de Bochner invariant (théorème 4.1), on obtient

$$\widetilde{\mu_{1,\xi}} = \widetilde{\mu_{2,\xi}}, \qquad \text{sur } \Omega_0.$$

Par suite les mesures μ_1 et μ_2 coïncident sur l'ensemble $\Omega_0\backslash\{0\}$. $\square$

Corollaire 5.5 *Les génératrices extrémales du cône des fonctions de type négatif continues sur V_∞^2, invariantes par K_∞ et nulles à l'origine, sont engendrées par les fonctions* :

(i) $1 - \varphi_\omega(\xi)$ *où* $\omega \in \Omega_0\backslash\{0\}$,

(ii) $\mathrm{tr}(\xi^2)$.

☆☆☆

Bibliographie

[1] C. Berg, J. P. Christensen, P. Ressel. *Harmonic analysis on semigroups.*Theory of positive definite and related functions. Springer, (1984)

[2] C. Berg, G. Forst. *Potentiel theory on locally compact abelian groups.* Springer, (1975).

[3] P. Billingsley. *Convergence of probability measures.* John Wiley, (1968).

[4] A. Borodin, G. Olshanski. *Infinite random matrices and ergodic measures.* Comm. Math. Phys. 223, no. 1, (2001), 87–123.

[5] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces.* Academic Press, (1967).

[6] M. Bouali. *Application des théorèmes de Minlos et Poincaré à l'étude asymptotique d'une intégrale orbitale.* À paraître aux annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol no. 4, (2006).

[7] G. Choquet. *Lectures on analysis. Vol. II : Representation theory.* Benjamin, (1969).

[8] P. Courrège. *Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur* $\mathbb{R}^n$*, et formule de Lévy-Khinchine.* Bull. Sci. Math. 88, (1964),3-10.

[9] H.B. Curry, I.J. Schoenberg. *On pólya frequency functions IV. The fundamental spline functions and their limits*, J. Analyse Math. 17, (1996), 71-107.

[10] J. Faraut, A. Korányi. *Analysis on Symmetric Cones.* Oxford University Press, (1994).

[11] J. Faraut. *Infinite dimensional harmonic analysis and probability*, in probability measures on groups : Proceedings of the CIMPA-TIFR School. Recents Directions and Trends, TIFR, Mumbaï. Narosa Publishing House, India, (2006).

[12] J. Faraut, K. Harzallah. *Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène*, Ann. Inst. Fourier, 24, (1974), 171-217.

[13] D. Freedman, P. Diaconis. *A dozen de Finetti-style result in search of a theory.* Ann. Inst. Henri Poincaré (Probbilités et Statistiques), 23, (1987), 397-423.

[14] H. Glöckner. *Positive definite functions on infinite-dimensional convex cones*, Memoirs of the Amer. Math. Soc 789, (2003).

[15] P. Graczyk, J. J. Loeb. *Bochner and Schoenberg theorems on symmetric spaces in the complex case*, Bull. Soc. Math. France, 122, (1994), 571-590.

[16] G. G. Hamedani, V. Mandrekar. *Lévy-Khinchine representation and Banach spaces of type and cotype.* Studia. Math. 66 , (1979/80), no. 3, 299-306.

[17] M. Hervé. *Analyticity in infinite dimensional spaces.* Walter de Gruyter ; New York, (1989).

[18] I.I. Hirschman, D.V. Widder. *The convolution transform.* Princeton University Press, (1955).

[19] M. G. Krein. *Hermitian kernels on homogeneous spaces.* Amer. Math. Translations (2), vol. 34, I. (1949), II.1950.

[20] J. Mickelsson. *Current algebras and groups*, Plenum Press, New York, (1989).

[21] G. Olshanski. *Unitary representations of infinite dimensional pairs* (G, K) *and the formalism sf R.Howe, in Representation of Lie groups and related topics* (Eds. A.M. Vershik, D.P. Zhelobenko). Advanced Studies in contemporary Mathematics, vol. 7. Gordon and Breach, (1990),.

[22] G. Olshanski, A. Vershik. *Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices*, Contemporary Mathematical physics (R. L. Dobroshin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, M. A. Vershik) Amer. Math. soc. Translations (2), 175, (1996), p.137-175.

[23] K. R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces.* Academic Press, (1967).

[24] R. R. Phelps. *Lecture on Choquet's theorem.* Van Nostrand, (1966).

[25] I. J. Schoenberg. *Metric spaces and completely monotone functions.* Ann. of math. (2) 39, no. 4, (1938), 811-841.

[26] S. R. S. Varadhan. *Limit theorems for sums of independent random variables with values in a Hilbert space. Sankhȳa* 24, (1962), 213-238.

[27] A. M. Vershik. *Description of invariant measures for the action of some infinite-dimensional groups*, Dokl.Akad.Naud SSSR 218, 749-752 ; English transl, Soviet Math. Dokl. 15, (1974), 1396-1400.

[28] D. Voiculescu. *Représentation factorielles de type* II_1 *de* $U(\infty)$, J. Math. pures et appl, 55, (1976),1-22.

[29] Y. Yamasaki. *Measures on infinite dimensional spaces.* World Scientific, (1985).