

UNIVERSITÉ DENIS DIDEROT PARIS VII  
Institut Mathématique de Jussieu  
Ecole Doctorale Sciences Mathématiques de Paris Centre

## T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Mathématiques de l'Université Paris Diderot

Discipline : MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue par

Moheddine IMSATFIA

---

# Géométrie de Cartan fondée sur la notion d'aire et application du problème d'équivalence

---

Thèse dirigée par :  
**Frédéric Hélein**

Soutenue le 12 décembre 2012 devant le **Jury** composé de :

*Rapporteurs :*

M. SHEN ZHONGMIN - Prof Indiana University-U.S.A.  
M. VLADIMIR ROUBTSOV - Prof Université d'Angers

*Directeur :*

M. FRÉDÉRIC HÉLEIN - Prof Université Paris-7

*Examineurs :*

M. ABDELGHANI ZEGHIB - Prof E.N.S de Lyon  
M. CHARLES FRANCES - Prof Université Paris sud 11  
M. RABAH SOUAM - Chargé de rech. Univ Paris-7



*Je dédie cette thèse à  
Mes chers parents Fatma ezzina, Belgacem  
Ma femme Maria, ma fille Amina  
Et mon petit garçon Mohamed de 8 mois et 12 jours.*



# REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à Frédéric Hélein, mon directeur de thèse. En acceptant de m'encadrer, il m'a témoigné sa confiance, je le remercie énormément. J'ai vraiment bénéficié de ses immenses qualités humaines et de sa grande disponibilité qu'il a toujours manifestées à mon égard et pour m'avoir transmis de précieuses connaissances durant ces années de thèse, au cours desquelles il a su me faire partager son savoir mathématique et pédagogique. Merci Frédéric.

Je remercie très sincèrement Vladimir Roubtsov et Shen Zhongmin, qui m'on fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie plus précisément pour leurs remarques constructives qui m'ont permis d'améliorer ce texte. Merci Shen, Merci Vladimir.

Je remercie chaleureusement Rabah Souam, Charles Frances et Abdelghani Zeghib qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membre du jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à Rabah Souam avec qui j'ai tant échangé ces dernières années, ainsi qu'aux autres membres de l'équipe *géométrie et dynamique*.

J'exprime ma reconnaissance envers Régine Guittard pour toutes ses aides administratives.

Je tiens à remercier très chaleureusement Dimitri Ara, Abdekarim Chakhar, Dominique Prochasson et Yvan pour leur amitié précieuse et leur conseils avisés. Aussi, je remercie, Van-Dinh-Ngô et tous les collègues du bureau, les thésards et anciens thésards qui m'ont respecté.

Zergui Maria, je n'oublierai jamais ce que tu as fait pour moi, merci infiniment pour tous, depuis 2010 ma vie a vraiment changé avec toi. J'adresse en particulier un merci à ma belle-mère Zayneb.

Surtout Maman Fatma ezzina, Papa Belgacem, mon frère Imsatfia Mohamed et sa femme Bouzenna Najet. Aussi mes chers amis S. Othmen, S. Ennaji, Bouzenna Brahim et Bouzenna Chahida aucun mot ne peut exprimer ma reconnaissance à leur égard, eux qui m'ont encouragé et soutenu durant toutes ces années pour continuer à faire des Mathématiques. Je les remercie infiniment pour tout l'amour dont ils m'ont entouré. Sans oublier ma famille : mes frères Mohamed Thaher, Mohamed Ali, Lamjed, Houssein et mes soeurs Aicha, Nessrin et Houda (Macha Allah).

Paris, le 15 Novembre 2012.



---

# Table des matières

Remerciements . . . . .	2
Table des figures . . . . .	5
Liste des Tableaux . . . . .	6
<b>Présentation des travaux de la thèse</b>	<b>8</b>
<b>1 Préliminaires de géométrie différentielle</b>	<b>16</b>
1.1 Les bases du calcul différentiel extérieur . . . . .	17
1.1.1 L’algèbre extérieure . . . . .	17
1.1.2 Formes différentielles sur les variétés . . . . .	18
1.2 Connexions et courbures sur les fibrés . . . . .	19
1.2.1 Connexions sur un fibré vectoriel . . . . .	19
1.2.2 Connexions sur un fibré tangent . . . . .	20
1.2.3 La géométrie riemannienne . . . . .	21
1.3 L’espace de Minkowski . . . . .	22
1.4 Introduction à la géométrie finslerienne . . . . .	25
1.4.1 Géodésique . . . . .	27
1.5 Connexion “au sens de Cartan” . . . . .	29
1.5.1 Méthode de calcul des coefficients $C_{kh}^i, \Gamma_{kh}^i$ . . . . .	30
1.5.2 Les tenseurs . . . . .	31
<b>2 Formulation invariante du problème</b>	<b>34</b>
2.1 Le cas présenté par Cartan : une surface $\Sigma$ dans une variété $\mathcal{M}$ de dimension 3	34
2.1.1 Formulation lagrangienne . . . . .	36
2.1.2 Formulation hamiltonienne (multisymplectique) . . . . .	37
2.1.3 Application . . . . .	40
2.1.4 Comparaison avec les graphes . . . . .	41
2.2 Formulation du problème avec les sous-variétés de dimension $p$ , de façon invariante	43

2.2.1	Formulation Lagrangienne : . . . . .	44
2.2.2	Transformée de Legendre-Formulation hamiltonienne (multisymplectique) . . . . .	45
2.2.3	Comparaison avec les graphes . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Géométrie de Cartan</b>	<b>48</b>
3.1	Définitions générales . . . . .	48
3.2	Étude de la géométrie de Cartan en dimension 2 . . . . .	50
3.2.1	Connexion euclidienne “au sens de Cartan” . . . . .	53
3.2.2	Méthode de calcul des coefficients $C_k^{jh}, \Gamma_{kh}^j$ . . . . .	54
3.2.3	Présentation des courbes sur la Grassmannienne . . . . .	57
3.3	La métrique, les tenseurs . . . . .	57
3.3.1	Détermination des coefficients $g^{ij}$ au voisinage d’un élément . . . . .	57
3.3.2	Métrique angulaire en un point de la variété . . . . .	58
3.3.3	Les tenseurs . . . . .	59
3.3.4	Théorie des surfaces . . . . .	61
3.3.5	Exemple : l’espace harmonique . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Caractérisation d’orthogonalité</b>	<b>64</b>
4.1	Caractérisation variationnelle de la notion d’orthogonalité . . . . .	65
4.1.1	Formulation de Lagrange . . . . .	65
4.1.2	Cas de dimension 2 . . . . .	65
4.1.3	Généralisation de ce résultat pour $n > 3$ et $0 < p < n$ . . . . .	69
4.2	Calcul de la longueur du vecteur normale à $\Sigma$ . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Problème d’équivalence</b>	<b>76</b>
5.1	Définitions de Base . . . . .	76
5.1.1	Exemples de $G$ -structures . . . . .	77
5.1.2	Équivalence locale de deux $G$ -structures . . . . .	77
5.2	Application du problème d’équivalence de Cartan aux distributions de plans . . . . .	78
5.2.1	Calcul des équations de structure . . . . .	78
5.2.2	Absorption de la torsion . . . . .	80
5.2.3	Normalisation . . . . .	81
5.2.4	Test d’involution (test de Cartan) . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Application aux équations de Monge-Ampère</b>	<b>86</b>
6.1	Équation de Monge-Ampère . . . . .	86
6.2	Problème d’équivalence . . . . .	88



---

6.2.1	Travail préparatoire . . . . .	89
6.2.2	Étude du cas hyperbolique . . . . .	89
6.2.3	Remarque sur le test d'involution . . . . .	96
6.2.4	Étude du cas elliptique . . . . .	97
<b>Conclusion</b>		<b>104</b>
<b>7 Annexes</b>		<b>105</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>107</b>

---

# Liste des figures

1.1	.....	24
2.1	.....	38
2.2	Cas $L$ et $\ell$ sont $\mathcal{C}^\infty$ . . . . .	41
2.3	$k = 0$ et $L$ et $\ell$ sont $\mathcal{C}^0$ par morceaux. . . . .	42
3.1	.....	49
3.2	.....	51
4.1	.....	66

---

# Liste des tableaux

1	Tableau précisant les degrés d'homogénéité de certaines fonctions. . . .	14
6.1	Comparaison des constantes de structures. . . . .	99



---

# Présentation des travaux de la thèse

CETTE thèse consiste en l'étude d'une géométrie introduite par Cartan en 1933 dans le livre [Car33]. Cet ouvrage semble avoir été peu considéré et il semble qu'il y ait eu peu de travaux sur cette géométrie, à part, par exemple, la thèse de Robert Debever en 1947 [Deb]. Le point de départ de Cartan est de penser l'espace comme étant un lieu « d'éléments de contact », un *élément de contact* étant la donnée d'un point  $M \in \mathcal{M}^n$  et d'un hyperplan orienté  $H$  de l'espace tangent en ce point, ce que, en langage moderne, on présenterait aujourd'hui comme le fibré grassmannien des hyperplans, muni de la structure de contact. La démarche de Cartan offre aussi une généralisation originale de *la géométrie de Finsler* qui présente de nombreuses analogies avec cette théorie. Plusieurs mathématiciens l'ont étudié, entre autres, comme Cartan en 1934 [Car34] et Rund en 1959 [Run59b], et récemment Chern [Che92] Bryant [Bry02], [Bry95] et Shen [CS05]. Dans cette thèse, nous nous proposons de revisiter les bases de cette *géométrie de Cartan*, fondée sur la notion d'aire. Dans un premier temps, nous nous sommes attachés à bien définir la notion d'orthogonalité, en étudiant le cas du graphe d'une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  où  $n > 2$  et  $1 \leq p \leq n-1$ , et en utilisant des techniques du calcul des variations notamment inspirées des surfaces minimales à bord régulier. Dans le cas où  $p = n-1$ , on peut voir le graphe de  $f$  comme une hypersurface et nous avons déterminé son vecteur normal unitaire.

En géométrie riemannienne, la distance de deux points infiniment voisins  $ds$  a une forme simple bien connue. Mais Riemann avait également proposé de donner à  $ds$  une expression plus générale :  $ds$  est alors une fonction quelconque de  $x^i$  et  $dx^i$ , homogène et de degré un par rapport aux  $dx^i$ . Ces espaces ont fait l'objet de nombreuses généralisations. En particulier, en 1918, dans la thèse de P. Finsler qui considère que les coefficients de la métrique sont des fonctions des  $x^k$  et de la direction de la droite portée par  $dx^k$ . L'objet géométrique central dans cette théorie a donc pour un ensemble sous-jacent l'ensemble des couples  $(M, D)$ , où  $M$  est un point de la variété  $\mathcal{M}$  et  $D$  est une droite orientée dans  $T_M\mathcal{M}$ , autrement dit, le fibré tangent projectif.

En 1934, dans [Car34], E. Cartan a montré qu'il est possible de définir les coefficients de la connexion à partir des données de la géométrie finslerienne et donc la dérivée covariante associée à cette connexion. Il a également défini les notions de courbure et de géodésique qui, comme en géométrie riemannienne, jouent un rôle très important. La géométrie de Finsler, tout comme la géométrie de Riemann, est donc intimement liée avec le calcul des variations. Cartan propose dans [Car33] de fonder une nouvelle géométrie à partir d'un lagrangien qui n'est plus défini sur des courbes, mais défini sur des hypersurfaces d'une variété. Pour cela il adopte le point de vue suivant : « Au lieu de construire l'espace avec des morceaux ponctuels, nous allons imaginer l'espace comme un lieu d'éléments de contact, un élément étant l'ensemble d'un point et d'un

plan passant par ce point ». Cartan se place ici en dimension 3 ; en dimension supérieur, le plan deviendra un hyperplan. Cet hyperplan doit de plus être orienté.

On est donc conduit à considérer l'espace de ces éléments, qui n'est autre que le fibré grassmannien

$$Gr_{n-1}\mathcal{M} = \{E = (M, H) | M \in \mathcal{M}, H : \text{hyperplan orienté dans } T_M\mathcal{M}\}.$$

Cet espace est de dimension  $n + n - 1 = 2n - 1$ . Plus généralement, si  $p$  est un entier vérifiant  $1 \leq p \leq n - 1$ , on définit le fibré grassmannien

$$Gr_p\mathcal{M} = \{(M, E) | M \in \mathcal{M}, E \text{ est un sous-espace vectoriel orienté de } T_M\mathcal{M} \text{ de dimension } p\}.$$

Cette variété est de dimension  $n + p(n - p)$ .

Nous avons essayé tout d'abord de donner une formulation invariante du problème variationnel. On représente le plan orienté à l'aide d'un 2-multivecteurs  $u$  sur  $T_x\mathcal{M}$  qu'on peut décomposer dans une base de  $\Lambda^2 T_x\mathcal{M}$ . On en déduit des coordonnées  $(x, y)$  sur la grassmannienne et un isomorphisme

$$Gr_x^2\mathcal{M} \simeq (\Lambda^2 T_x\mathcal{M} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^{*+}.$$

Nous avons défini une 2-forme *d'action aréolaire*  $\ell(x, y)$  sur  $Gr_x^2\mathcal{M}$  qui est homogène et de degré 0 en  $y$ , et un lagrangien  $L(x, y)$  sur  $\Lambda^2 T\mathcal{M}$  de degré 1 en  $y$  tels que  $\frac{dL}{dy} = \ell$ . Enfin, si  $L$  est non dégénéré, nous avons montré que l'image de la transformée de Legendre est une hypersurface régulière convexe. Puis, nous avons considéré le cas particulier où la surface  $\Sigma$  est le graphe d'une fonction et nous avons construit de la même manière un lagrangien  $L$ . Nous comparons notre présentation de cette construction avec celle donnée par Cartan dans [Car33].

Dans la deuxième partie de cette thèse nous nous sommes attachés à la notion d'orthogonalité. Nous avons tout d'abord étudié le cas  $n = 3$  en faisant le lien avec le problème de plateau et plus précisément avec le résultat suivant : étant donné une courbe fermée connexe de Jordan de l'espace euclidien de dimension 3, alors il existe une surface minimale régulière et ayant la topologie d'un disque dont le bord soit la courbe fermée. (Au début des années 1930, Tibor Rado [Rad30] et Jesse Douglas [Dou31] obtiennent indépendamment par la méthode variationnelle les premiers résultats généraux du problème de plateau). Nous avons ensuite étudié le cas du graphe d'une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ . Notons  $\beta$  la  $p$ -forme  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$ ,  $\Gamma_f$  le graphe de  $f$  et  $Gr_p^\beta\mathcal{M}$  le fibré grassmannien. Supposons de plus que  $\Gamma_f$  soit une surface minimale plongée dans  $\mathbb{R}^n$  de bord  $\partial\Gamma_f$  régulier. Nous avons défini le fibré orthogonal au fibré tangent par un problème variationnel. La méthode est la suivante. Considérons un lagrangien  $L : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et notons  $d\sigma = L(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f)\beta$ . Supposons que  $\Gamma_f$  soit la surface extrême (ou critique) de l'action

$$\mathcal{L}(f) = \int d\sigma,$$

c'est-à-dire  $\Gamma_f$  est la sous-variété qui réalise l'extremum de cette intégrale (qui joue naturellement un rôle important dans cette géométrie) sous la condition d'être à bord

régulier<sup>(\*)</sup> non vide. En tout point du graphe, notons  $E$  le sous-espace vectoriel<sup>(\*\*)</sup> tangent à  $\Gamma_f$ . Dans [Moh12b], nous avons montré le théorème suivant :

**Théorème 0.0.1.** *Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  un point critique de  $\int_{\Omega} L\beta$ . Notons  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 < i \leq n-p}} = (q_j^i)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 < i \leq n-p}}$ . Soient  $M \in \Gamma_f \subset \mathbb{R}^n$ , alors l'orthogonal de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$  est engendré par les vecteurs*

$$v^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^1} \\ -L + q_j^1 \frac{\partial L}{\partial q_j^1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^2} \\ 0 \\ -L + q_j^2 \frac{\partial L}{\partial q_j^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v^{n-p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^{n-p}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^{n-p}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -L + q_j^{n-p} \frac{\partial L}{\partial q_j^{n-p}} \end{pmatrix}$$

Pour ce faire, l'idée est de faire varier  $\Gamma_f$  en fonction d'un paramètre  $t \geq 0$  suivant un champ de vecteurs  $X \in T_M \mathcal{M}$  de sorte que pour chaque  $t$ , si  $E_t$  est l'espace tangent à  $\Gamma_{f_t}$  en  $M_t$ , alors en chaque point  $M \in \Gamma_f$ , la famille des sous-espaces vectoriels  $E_t$  forme un feuilletage d'une sous-variété de dimension  $p+1$  inclus dans  $\mathbb{R}^n$ . On note  $e^{dtX}$  le flot de  $u$ . On a

$$e^{dtX}(\Gamma_t) = \Gamma_{t+dt}.$$

Notons

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{L}(f_t).$$

Cartan, postule que  $X$  est orthogonal à  $E$  si la dérivée de  $\mathcal{A}(t)$  par rapport à  $t$  en  $t=0$  est nulle. En se basant sur la définition (0.0.2), nous pouvons alors déterminer le sous-espace orthogonal.

**Définition 0.0.2.** Soit  $\mathcal{D}$  une distribution des droites vectorielles dans  $T\mathcal{M}$ . On dit que  $\mathcal{D}$  est une distribution *normale* si pour tout  $\Gamma \subset \mathcal{M}$  et pour tout champ de vecteurs  $N$  défini le long de  $\partial\Gamma$  tel que  $N(M) \in \mathcal{D}(M)$  pour tout  $M \in \partial\Gamma$ , alors si note  $\Gamma_t$  la surface minimale de bord  $\partial\Gamma_t := \{e^{tN}(M) | M \in \partial\Gamma, t \in ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \}$  et  $\mathcal{A}(t)$  l'aire de  $\Gamma_t$ , on a  $\frac{d}{dt}(\mathcal{A}(t))|_{t=0} = 0$ .

Si  $p = n - 1$ , en nous inspirant de Cartan, nous définissons une métrique sur  $Gr_{n-1}^\beta(\mathcal{M})$ . Nous déterminons dans ce cas le vecteur unitaire normal à l'élément  $H$ .

Dans la troisième partie de cette thèse nous étudions la méthode d'équivalence mise au point par E. Cartan dans les années 1905-1910. Cette méthode permet de décider de l'équivalence locale de deux  $G$ -structures par un changement de coordonnées. En guise d'introduction nous la présentons d'abord sur l'exemple simple des distributions de plans. Puis, nous l'utilisons pour décider de l'équivalence locale entre deux systèmes

(\*)La définition à l'élément orthogonal en ce point se construit en testant des variations première de l'action sur des surfaces extrémales à bord réguliers.

(\*\*)Le sous-espace vectoriel qu'on parle ici est appelé « élément » par Cartan.  $E = T_x \Gamma_f$ .

de Monge-Ampère en deux variables. Nous appelons équation de Monge-Ampère, pour une fonction réelle  $u$  de deux variables  $x$  et  $y$ , une équation de la forme

$$\begin{aligned} & \Psi_{p_1 p_2} [u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2] + \Psi_{p_1 y} u_{xx} + \Psi_{p_2 x} u_{yy} \\ & + (\Psi_{p_1 x} + \Psi_{p_2 y}) u_{xy} + \Psi_{xy} = 0, \end{aligned}$$

où les coefficients  $\Psi_{**}$  sont des fonctions régulières de  $(x, y, u(x))$ . Localement, l'ensemble des solutions de cette équation est décrit par l'ensemble des surfaces  $\Sigma$  plongées dans l'espace des jets  $\mathcal{J}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) := \{(x, y, z, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2\}$ , muni de la forme de contact  $\theta = dz - p_1 dx^1 - p_2 dx^2$  telles que

$$\begin{cases} \Psi|_{\Sigma} = 0, \\ \theta|_{\Sigma} = 0 \quad (\Rightarrow d\theta|_{\Sigma} = 0), \\ dx^1 \wedge dx^2|_{\Sigma} \neq 0, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \Psi = & \Psi_{p_1 p_2} dp_1 \wedge dp_2 + \Psi_{p_1 y} dp_1 \wedge dy + \Psi_{p_2 y} dp_2 \wedge dy + \Psi_{p_1 x} dp_1 \wedge dx \\ & + \Psi_{p_2 x} dp_2 \wedge dx + \Psi_{xy} dx \wedge dy \quad \text{mod}(\theta). \end{aligned}$$

La méthode d'équivalence est ici utilisée pour décider si deux équations de Monge-Ampère de ce type sont équivalents par un changement de variables qui se ramène à une transformation de contact dans  $\mathcal{J}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Après une étape préliminaire de normalisation de  $\Psi$ , nous pouvons supposer génériquement qu'il existe trois orbites

1.  $\Psi = \omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^3 \wedge \omega^4$ , (cas hyperbolique).
2.  $\Psi = \omega^1 \wedge \omega^4 - \omega^3 \wedge \omega^2$ , (cas elliptique).
3.  $\Psi = \omega^1 \wedge \omega^3$ , (cas parabolique).

Alors il est possible de construire des invariants locaux  $S_1$  et  $S_2$  qui sont des fonctions locales des coefficients de  $\Psi$  et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini. D'abord l'orbite hyperbolique a été étudiée par Bryant, Griffiths et Grossman dans [BGG03], et qui ont montré les théorèmes suivants :

**Théorème 0.0.3.** *Il existe un invariant local  $S_2 = \begin{pmatrix} P_3^1 + P_2^4 & P_4^1 - P_2^3 \\ P_3^2 - P_1^4 & P_4^2 + P_1^3 \end{pmatrix}$ , dépendant de  $\Psi$ . On a  $S_2 = 0$  si et seulement si le système hyperbolique de Monge-Ampère  $\chi = \{\omega^0, \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^3 \wedge \omega^4\}$  est localement d'origine variationnelle i.e. est équivalent à un système d'équations d'Euler-Lagrange.*

**Théorème 0.0.4.** *Il existe un invariant local  $S_1 = \begin{pmatrix} P_3^1 - P_2^4 & P_4^1 + P_2^3 \\ P_3^2 + P_1^4 & P_4^2 - P_1^3 \end{pmatrix}$ .*

*Un système de Monge-Ampère hyperbolique  $\chi$  satisfait  $S_1 = S_2 = 0$  si et seulement s'il est localement équivalent à l'équation des ondes  $u_{xx} - u_{yy} = 0$ , i.e.*

$$\varepsilon = \{dz - p dx - q dy, dp \wedge dx + dq \wedge dy, dp \wedge dx - dq \wedge dy\}.$$

Ces travaux nous ont servi de référence pour aborder le cas elliptique. En préliminaire, nous donnons des plongements des groupes de structures dans des groupes de Lie complexes qui sont valables dans tous les cas et, nous précisons le résultat du test d'involution de Cartan dans le cas hyperbolique.



Cette thèse comporte six chapitres.

**Le premier chapitre** est un chapitre d'introduction générale dans lequel nous définissons les outils que nous utiliserons par la suite. Pour commencer, nous introduisons les bases du calcul différentiel extérieur. Ensuite, nous définissons la notion de connexion sur un fibré vectoriel et, en particulier, sur un fibré tangent. Puis, nous donnons les définitions générales de la géométrie Riemannienne et des espaces de Minkowski.

Dans la deuxième partie, nous définissons la géométrie de Finsler qui présente plusieurs analogies avec la géométrie de Cartan qui est fondée sur la notion d'aire. Dans [Car34] et [Car33], on peut voir clairement cette analogie entre ces deux géométries. En plus, comme en géométrie riemannienne, Cartan a défini la notion de courbure, de géodésique et surtout de connexion. Récemment, cette géométrie a été étudiée, entre autres, par Shen, Chern et Bryant.

Dans **le chapitre 2**, on part d'un problème variationnel « invariant » sur les sous-variétés de dimension  $p$  dans une variété de dimension  $n$ . Nous définissons le fibré en  $p$ -grassmanniennes sur  $\mathcal{M}$ , par

$$Gr^p\mathcal{M} := \{(x, E) | x \in \mathcal{M}, E \text{ élément orienté dans } T_x\mathcal{M}\}.$$

Pour  $n = 3$  et  $p = 2$ , celui-ci est isomorphe à  $(\Lambda_D^2 T_x\mathcal{M} \setminus \{0\}) / ]0, +\infty)$ . Puis nous construisons un lagrangien  $L$  sur  $\Lambda_D^2 T\mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$ , qui dépend des dérivées premières du plongement de la sous-variété. Nous montrons la proposition suivante :

**Proposition 0.0.5.** *Notons*

$$\mathcal{N} = \{(x, p) \in \Lambda_D^2 T^*\mathcal{M} / p_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(x, y), y \in \Lambda^2 T\mathcal{M}\}$$

*l'image de la transformée de Legendre. Supposons que le lagrangien  $L : \Lambda_D^2 T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 2$  et est non dégénéré. Alors  $\mathcal{N}$  est une hypersurface régulière et convexe de  $\Lambda^2 T^*\mathcal{M}$  (de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ ).*

Nous déterminons une formulation hamiltonnienne de type multisymplectique du problème variationnel invariant. Nous avons considéré le cas particulier où la surface  $\Sigma$  est le graphe d'une fonction. Nous construisons de la même manière un lagrangien  $L$ . Nous comparons notre présentation de cette construction avec celle donnée par Cartan dans [Car33]. Nous montrons également que ces résultats restent vrais pour un lagrangien  $L : \Lambda_D^p T_x\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < n$ .

Dans **le chapitre 3**, nous donnons une définition de *la géométrie de Cartan* qui est fondée sur la notion d'aire. Dans cette géométrie, l'espace est considéré comme l'ensemble des « éléments de contact » au sens de Cartan. Pour mieux comprendre cette géométrie, nous étudions d'abord le cas d'une variété  $\mathcal{M}$  de dimension 2. Nous généralisons ensuite au cas  $n > 2$ . En s'inspirant des idées de Cartan, nous définissons une connexion sur  $\mathcal{M}$  et introduisons des méthodes pour calculer ses coefficients. Nous déterminons localement la métrique, la métrique angulaire et les tenseurs en utilisant le langage de Cartan introduit dans [Car33]. Nous terminons par un exemple : l'espace harmonique.

Dans le **chapitre 4**, nous étudions des questions d'orthogonalité dans l'espace de Cartan en utilisant un problème variationnel. Nous commençons par le cas  $p = 1$ . À partir d'un lagrangien  $L$  défini sur le fibré en grassmanniennes des hyperplans de dimension  $2n - 1$ , nous déterminons le vecteur unitaire normal à un hyperplan orienté dans  $T_M\mathcal{M}$ . Dans le cas le plus général où  $0 < p < n$ , et à partir d'une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ , nous construisons la grassmannienne sur le graphe  $\Gamma_f$  de  $f$  et nous définissons le lagrangien  $L : Gr_p^M\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous déterminons à partir de cela le sous-espace orthogonal à un élément tangent à  $\Gamma_f$  en  $M$ .

Dans le **chapitre 5**, nous nous appuyons sur l'exemple d'une variété de distribution de plans (une grassmannienne) pour décrire la méthode d'équivalence mise au point par E. Cartan dans les années 1905-1910. Cette méthode permet de décider de l'équivalence locale de deux  $G$ -structures par un changement de coordonnées.

Enfin, nous étudions dans le **chapitre 6** les équations de Monge-Ampère, en appliquant la méthode d'équivalence de Cartan pour une classification locale des systèmes de Monge-Ampère. Pour étudier le cas elliptique, nous suivons de près le cas hyperbolique qui a été traité par Bryant, Griffiths et Grossman dans [BGG03]. Nous remarquons que le test d'involution de Cartan n'est pas vérifié.

Nom	Notation	Homogénéité
Norme de Finsler	$F$	1
Norme de Cartan	$L$	1
Coefficient de géodésique	$G^i$	2
Tenseur de Cartan	$C_{ijk}$ (*)	-1
Tenseur de Cartan	$A_{ijk} = FC_{ijk}$	-1
Symbole de Christoffel	$\Gamma_{jk}^i$	0
Métrique	$g$ (**)	0
Coefficients de la métrique de Finsler	$g_{ij} = \frac{1}{2}(F^2(x^k, y^k))_{y^i y^j}$	0
Coefficients de la métrique de Cartan	$g^{ij} = \frac{1}{2a} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ (***)	0
	$g^{ij}$ l'inverse de $g_{ij}$	0
2-forme d'action aréolaire	$\ell$	0
Lagrangien	$L$	1

**Tableau 1** — Tableau précisant les degrés d'homogénéité de certaines fonctions.

---

(\*) Dans le chapitre 2 : coefficient de la métrique de Finsler. Dans la suite coefficient de la métrique de Cartan.

(\*\*) Dans le chapitre 1 : métrique riemannienne. Dans le chapitre 2 : métrique de Finsler. Dans la suite métrique de Cartan.

(\*\*\*)  $a = |a^{ij}| = \left| L \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} \right|$



---

# Préliminaires de géométrie différentielle

## Introduction

Ce chapitre est consacré à des rappels de notions fondamentales utiles pour la suite. Il s'agit de présenter des objets de base en géométrie différentielle dans le langage de Cartan, c'est-à-dire en utilisant les formes différentielles et les repères mobiles. Nous introduisons dans la première partie les bases du calcul différentiel extérieur : on présente l'algèbre extérieure et les  $p$ -formes sur les variétés et leurs images inverses par une application régulière. Dans la deuxième partie, nous introduisons les 1-formes de connexion sur un fibré vectoriel et en particulier sur un fibré tangent. Nous définissons aussi la 2-forme de courbure sur un fibré vectoriel quelconque au dessus d'une variété différentielle, en particulier nous nous spécialisons au cas des fibrés tangents et nous définirons la 2-forme de connexion. Puis, nous donnons les définitions de la géométrie riemannienne. Enfin, nous définissons l'espace de Minkowski.

Dans la géométrie riemannienne la distance  $ds$  entre deux points infiniment voisins est une expression qui dépend des coordonnées  $(x^i)$ , d'un point  $M \in \mathcal{M}$ . Riemann a envisagé une expression analytique beaucoup plus générale,  $ds$  devenant une fonction quelconque de  $x^i$  et  $dx^i$  à la condition d'être homogène et de premier degré par rapport aux  $dx^i$ . Cette géométrie la plus générale, a fait aussi l'objet d'assez nombreuses études, en particulier dans la thèse de P. Finsler en 1918 et donc il a construit *la géométrie finslerienne* qui a été développée, entre autres, par Cartan en 1934 dans [Car34], H. Rund dans [Run59b] et récemment par Bryant dans [Bry02], Shen et Chern dans [She01] et [CS05] qui considèrent que les coefficients de la métrique sont les fonctions des  $x^k$  et de la direction de la droite portée par  $dx^k$  c'est à dire que la variété base a pour un ensemble sous-jacent l'ensemble

$$\{ \text{élément } (M, D), M \in \mathcal{M} \text{ et } D \text{ la droite orientée dans } T_M \mathcal{M} \}.$$

Tout d'abord nous donnons des définitions, des exemples et des remarques dans la géométrie finslerienne, et nous étudions les géodésiques. Puis nous donnons la connexion au sens de Cartan et nous déterminons ses coefficients. Enfin nous donnons les définitions des tenseurs. Cette géométrie constitue une introduction à la géométrie construite par Cartan en 1933 dans [Car34] que l'on va étudier par la suite.

## 1.1 Les bases du calcul différentiel extérieur

### 1.1.1 L'algèbre extérieure

Soit  $V$  un espace vectoriel, on note  $V^*$  l'espace vectoriel des formes linéaires sur  $V$ .

**Définition 1.1.1.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie  $m$ , une  $p$ -forme  $\alpha$  sur  $V$  est une application  $\alpha : V^p \rightarrow \mathbb{R}$  qui est

1. Multilinéaire, i.e.  $\forall 1 \leq i \leq p$ , pour tous  $v_1, \dots, v_i, \dots, v_p, w_i \in V$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  on a

$$\alpha(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu w_i, \dots, v_p) = \lambda \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_p) + \mu \alpha(v_1, \dots, w_i, \dots, v_p)$$

2. Alternée, i.e.  $\forall i, j \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq i, j \leq p$ , on a

$$\alpha(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \alpha(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) = 0$$

On note  $\Lambda^p V^*$  l'espace vectoriel des  $p$  formes sur  $V$ .

**Définition 1.1.2.** Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , on définit *le produit extérieur*

$$\begin{aligned} \Lambda^p V^* \times \Lambda^q V^* &\longrightarrow \Lambda^{p+q} V^* \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

par

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^{|\sigma|} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

**Remarque 1.1.3.** :

1. Si  $p > m$ , alors  $\Lambda^p V^* = \{0\}$ .
2. L'opération  $\alpha \wedge \beta$  est clairement bilinéaire.

**Définition 1.1.4.** On note

$$\Lambda^* V^* := \bigoplus_{p=0}^m \Lambda^p V^*$$

Alors le produit extérieur s'étend par linéarité en une loi de composition interne dans  $\Lambda^* V^*$ , on obtient *l'algèbre extérieure*  $(\Lambda^* V^*, +, \wedge)$ . qui satisfait les conditions suivantes :

1. Associative :

$$\forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*, \forall \gamma \in \Lambda^r V^*, \text{ on a } \alpha \wedge \beta \wedge \gamma = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

2. Elle n'est pas commutative mais elle est *commutative graduée*, c'est à dire :

$$\forall \alpha \in \Lambda^p V^*, \forall \beta \in \Lambda^q V^*, \text{ on a } \beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta$$

**Proposition 1.1.5.** Soit  $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$  une base de  $V$  et soit  $(\theta^1, \dots, \theta^m)$  la base de  $V^*$  qui est duale de  $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la famille

$$(\theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m}$$

est une base de  $\Lambda^p V^*$ , par conséquent  $\dim \Lambda^p V^* = \frac{m!}{(m-p)!p!}$ . On en déduit aussi que

$$\dim \Lambda^* V^* = \sum_{p=0}^m \dim \Lambda^p V^* = 2^m$$

### 1.1.2 Formes différentielles sur les variétés

**Définition 1.1.6.** Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle, une  $p$ -forme différentielle  $\alpha$  sur  $\mathcal{M}$  est la donnée, en chaque point  $M \in \mathcal{M}$ , d'une  $p$ -forme  $\alpha_M \in \Lambda^p T_M^* \mathcal{M}$ . On note  $\Omega^p(\mathcal{M})$  l'espace vectoriel des  $p$ -formes différentielles sur  $\mathcal{M}$

**Définition 1.1.7.** Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés, de dimensions quelconques (et différentes en général) et  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application régulière. Pour tout  $0 \leq p \leq n$  on considère

$$\begin{aligned} \Omega^p(\mathcal{N}) &\longrightarrow \Omega^p(\mathcal{M}) \\ \alpha &\longmapsto \varphi^* \alpha \end{aligned}$$

Nous appellerons *image inverse* de  $\alpha$  par  $\varphi$  ou *pull-back* de  $\alpha$  par  $\varphi$  la  $p$ -forme  $\varphi^* \alpha$  qui est définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad \forall v_1, \dots, v_p \in T_M \mathcal{M}, \quad (\varphi^* \alpha)_M(v_1, \dots, v_p) = \alpha_{\varphi(M)}(d\varphi_M(v_1), \dots, d\varphi_M(v_p))$$

Observons que  $\varphi^* \alpha$  est automatiquement  $p$ -multilinéaire et alternée et

$$\forall f \in \Omega^0(\mathcal{N}) = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{N}), \quad \varphi^* f = f \circ \varphi$$

Pour tout  $N \in \mathcal{N}$ , la différentielle  $df_N$  est un élément de  $T_N^* \mathcal{N}$  donc  $df$  est une section régulière de  $T^* \mathcal{N}$  c'est à dire  $df \in \Omega^1(\mathcal{N})$  et on a

$$\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^* f)$$

ou plus généralement, étant donnée une carte locale  $y = (y^1, \dots, y^m) : \mathcal{O} \subset \mathcal{N} \longrightarrow U$ , si la restriction d'une  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{N})$  sur  $\mathcal{O}$  s'écrit

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \alpha_{j_1 \dots j_p} dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_p}$$

alors  $\varphi^* \alpha$  a l'expression suivante dans  $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$  :

$$(\varphi^* \alpha)_M = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n}} \alpha_{j_1 \dots j_p}(\varphi(M)) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^{j_1}}{\partial x^{i_1}}(M) & \dots & \frac{\partial \varphi^{j_1}}{\partial x^{i_p}}(M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{j_p}}{\partial x^{i_1}}(M) & \dots & \frac{\partial \varphi^{j_p}}{\partial x^{i_p}}(M) \end{vmatrix} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

où l'on utilise une carte locale  $x = (x^1, \dots, x^m)$  sur  $\varphi^{-1}(\mathcal{O})$  et l'on note  $\varphi^j := y^j \circ \varphi$ . On peut écrire

$$\varphi^* \alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} (\alpha_{j_1 \dots j_p} \circ \varphi)(\varphi^* dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge (\varphi^* dy^{j_p})$$

et du fait que  $\varphi^* dy^j = d(\varphi^* y^j) = d(y^j \circ \varphi) = d\varphi^j$ , on obtient

$$\varphi^* \alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} (\alpha_{j_1 \dots j_p} \circ \varphi) d\varphi^{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_p}$$

**Proposition 1.1.8.** (*règle de Leibniz graduée*)

Soit  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application régulière et soit  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  et  $\beta \in \Omega^q(\mathcal{N})$  où  $1 \leq p, q \leq m$ . Alors

$$\begin{aligned}\varphi^*(\alpha \wedge \beta) &= \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta) \\ d(\alpha \wedge \beta) &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta\end{aligned}$$

**Définition 1.1.9.** Une forme  $\alpha \in \Omega^*(\mathcal{M})$  est dite *fermée* si  $d\alpha = 0$  et elle est dite *exacte* s'il existe une forme  $\beta \in \Omega^*(\mathcal{M})$  telle que  $\alpha = d\beta$ .

**Théorème 1.1.10.** *toute forme extérieure exacte est fermée mais la réciproque est vraie localement (il s'agit du lemme de Poincaré), mais non globalement en général.*

**Définition 1.1.11.** Pour toute  $p$ -forme  $\alpha \in \Omega^p(\mathcal{M})$  et pour tout champ de vecteur  $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ , on appelle produit intérieur de  $\alpha$  par  $X$  et on note  $X \lrcorner \alpha$  (ou parfois  $\iota_X \alpha$ ) la  $(p-1)$ -forme sur  $\mathcal{M}$  définie en chaque point  $M \in \mathcal{M}$  par

$$\begin{aligned}(X \lrcorner \alpha)_M &: (T_M \mathcal{M})^{p-1} \rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_{p-1}) &\mapsto \alpha_M(X(M), v_1, \dots, v_{p-1})\end{aligned}$$

**Proposition 1.1.12.** *Le produit intérieur satisfait une propriété analogue à la règle de Leibniz graduée i.e. Soit  $X \in \mathcal{X}$  un champ de vecteur. Alors  $\forall \alpha \in \Omega^p(\mathcal{M}), \forall \beta \in \Omega^q(\mathcal{N})$  où  $1 \leq p, q \leq m$*

$$X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (X \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (X \lrcorner \beta)$$

## 1.2 Connexions et courbures sur les fibrés

### 1.2.1 Connexions sur un fibré vectoriel

Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension  $m$  et  $\mathcal{F}$  un fibré vectoriel, on note  $\mathcal{X}(M)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents sur  $\mathcal{M}$  et  $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  l'espace vectoriel des sections de  $\mathcal{F}$  au dessus de  $\mathcal{M}$ .

**Définition 1.2.1.** Une connexion ou dérivée covariante sur le fibré  $\mathcal{F}$  est un opérateur différentiel

$$\begin{aligned}\nabla : \mathcal{X}(M) \times \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{F}) &\rightarrow \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \\ (X, \sigma) &\mapsto \nabla_X \sigma\end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés suivantes :  $\nabla_{X+Y}\sigma = \nabla_X\sigma + \nabla_Y\sigma$ ,  $\nabla_{\lambda X}\sigma = \lambda\nabla_X\sigma$ ,  $\nabla_X(\sigma + \tau) = \nabla_X\sigma + \nabla_X\tau$  et l'identité de Leibniz  $\nabla_X(f\sigma) = df(X)\sigma + f\nabla_X\sigma$  où  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma, \tau \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{F})$  et  $f$  une fonction sur  $\mathcal{M}$

Si on note  $X = X^i e_i$ ,  $\sigma = \sigma^a f_a$  où  $(f_1, \dots, f_k)$  est une base de la fibre  $\mathcal{F}_M$  alors

$$\nabla_X \sigma = d\sigma^a(X) f_a + \omega_a^b(X) \sigma^a f_b$$



où  $\omega_b^a$  sont des 1-formes sur un ouvert  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{M}$ . On peut décomposer  $\omega_b^a(X) := X^i \Gamma_{ia}^b$  où les coefficients  $\Gamma_{ia}^b$  vérifient  $\nabla_{e_i} f_a := \Gamma_{ia}^b f_b$  et représentent la déformation de cet espace par rapport à un espace plat, sont appelés *symboles de Christoffel*. Pour tout  $M \in \mathcal{M}$  on peut identifier  $\nabla \sigma_M$  avec un élément de  $\mathcal{F}_M \otimes T_M^* \mathcal{M}$ ; ainsi  $M \mapsto \nabla \sigma$  peut être vue comme une section de  $\mathcal{F} \otimes T^* \mathcal{M}$  par suite on peut écrire

$$\nabla \sigma = f_b (d\sigma^b + \omega_a^b \sigma^a)$$

**Définition 1.2.2.** Soit  $\mathcal{F}$  un fibré vectoriel au-dessus d'une variété  $\mathcal{M}$  et  $\nabla$  une connexion sur  $\mathcal{F}$ . La courbure de  $\nabla$  est une section de  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^* \otimes T^* \mathcal{M} \otimes T^* \mathcal{M}$  définie par

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \forall \sigma \in \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{F}), \quad \mathcal{R}^\nabla(X, Y)\sigma = \nabla_X(\nabla_Y \sigma) - \nabla_Y(\nabla_X \sigma) - \nabla_{[X, Y]}\sigma$$

**Théorème 1.2.3.** Soient  $f, g$  et  $h$  des fonctions définies sur la variété  $\mathcal{M}$ , alors  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \forall \sigma \in \Gamma(\mathcal{M})$ , la courbure  $\mathcal{R}^\nabla$  vérifie

$$\mathcal{R}^\nabla(fX, gY)(h\sigma) = fgh\mathcal{R}^\nabla(X, Y)\sigma$$

$\mathcal{R}^\nabla$  s'écrit en coordonnées locales

$$\mathcal{R}^\nabla(X, Y)\sigma = \mathcal{R}_{aij}^{\nabla b} f_b \sigma^a X^i Y^j$$

avec

$$\mathcal{R}_{aij}^{\nabla b} f_b := \nabla_{e_i}(\nabla_{e_j} f_a) - \nabla_{e_j}(\nabla_{e_i} f_a) - \nabla_{[e_i, e_j]} f_a$$

On peut voir le tenseur de courbure comme une 2-forme à valeur dans  $End(\mathcal{F})$ , on note  $End(\mathcal{F}) \otimes \Omega^2(\mathcal{M})$  l'ensemble des sections de  $End(\mathcal{F}) \otimes \Lambda^2 T^* \mathcal{M}$ , i.e. les 2-formes à valeur dans  $End(\mathcal{F})$  ainsi

$$\mathcal{R}^\nabla(X, Y)\sigma = \mathcal{R}_{aij}^{\nabla b} \Omega_a^b(X, Y) \sigma^a f_b = (d\omega_a^c + \omega_a^b \wedge \omega_b^c)(X, Y) \sigma^a f_c$$

où  $\omega_b^a$  sont les 1-formes de la connexion c'est à dire  $\nabla_{e_i} f_a = \omega_b^a(e_i) f_b$  et on a

$$\mathcal{R}_{aij}^{\nabla b} = \frac{\partial \Gamma_{ja}^b}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ia}^b}{\partial x^j} + \Gamma_{ja}^k \Gamma_{ik}^b - \Gamma_{ia}^k \Gamma_{jk}^b$$

On note le 2-forme de courbure par :

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

## 1.2.2 Connexions sur un fibré tangent

Dans cette partie on va étudier un cas particulier où  $\mathcal{F} = T\mathcal{M}$ , alors l'opérateur différentiel  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$

**Définition 1.2.4.** Soit  $\nabla$  une connexion sur le fibré tangent  $\mathcal{M}$ , la *torsion* de  $\nabla$  est l'opérateur  $T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$  défini par

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = T_{i,j}^k e_k X^i Y^j$$

**Remarque 1.2.5.** 1. Dans le cas d'une connexion sur un fibré vectoriel qui n'est pas le fibré tangent, cette notion n'a pas de sens.

2. Une connexion est dite à torsion nulle si  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ ,  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ .

**Définition 1.2.6.** La torsion  $T$  est antisymétrique donc nous pouvons la voir comme une section de  $T\mathcal{M} \otimes \Lambda^2 T^*\mathcal{M}$  on définit  $\Theta = (\Theta^i)$  la 2-forme de la connexion  $\nabla$  par

$$\Theta^i = d\alpha^i + \omega_k^i \wedge \alpha^k$$

où  $(\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  est une base de  $T_x^*\mathcal{M}$

**Définition 1.2.7.** Dans notre cas la courbure de  $\nabla$  est une section de  $T\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M} \otimes T^*\mathcal{M}$  définie par

$$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathcal{M}), \quad \mathcal{R}^\nabla(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

### 1.2.3 La géométrie riemannienne

Dans une variété Riemannienne, si l'on reste au voisinage d'un point  $M$ , la distance de ce point à tout point infiniment voisin s'exprime à l'ordre 1 de la même manière que si on était dans un espace euclidien rapporté à un système de coordonnées cartésiennes convenablement choisi. Étant donnée alors une variété  $\mathcal{M}$  à  $n$  dimensions rapportée à un système de coordonnées de nature quelconque  $x^1, x^2, \dots, x^n$ , le carré de la longueur d'un vecteur  $(X^1, X^2, \dots, X^n)$  d'origine  $M = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  serait alors exprimé par la forme quadratique

$$g = g_{ij}(x^k)X^i X^j;$$

où la métrique riemannienne  $g$  est une section de  $S^2 T^*\mathcal{M}$  telle qu'en tout point  $M \in \mathcal{M}$ ,  $g_M$  est un produit scalaire sur  $T_M\mathcal{M}$ .

**Définition 1.2.8.** On dit qu'une connexion  $D$  respecte la métrique  $g$  ou que la métrique est *parallèle* si et seulement si  $Dg = 0$  c'est-à-dire que le vecteur ne change pas de longueur lorsque sa dérivée covariante est nulle.

**Définition 1.2.9.** A toute métrique riemannienne sur une variété, on peut associer une unique connexion parallèle et à torsion nulle, appelée connexion de Levi-Civita.

Levi-Civita a introduit la notion de transport parallèle qui permet de choisir comment déplacer le vecteur  $X = (X^i)_{1 \leq i \leq n}$  d'origine  $M = (x^i)$  jusqu'à un point infiniment voisin  $M'$  de coordonnées  $x^i + dx^i$  de façon que sa longueur soit inchangée (et aussi, accessoirement, avec une torsion nulle). Le choix de ce transport parallèle est spécifié par la donnée de la dérivée covariante de  $X = (X^i)$  notée  $DX^i$  (appelé par Cartan "*différentielle absolue*") et en imposant la condition qu'elle soit parallèle.

**Définition 1.2.10.** La dérivée covariante d'un vecteur variable d'origine  $(x^i)$  et de composantes  $X^i$  s'écrit :

$$DX^i = dX^i + X^k \Gamma_{kh}^i dx^h = dX^i + X^k \omega_k^i$$

où les coefficients  $\Gamma_{kh}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{lh}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^l} \right)$  sont les symboles de Christoffel qui représentent la déformation infinitésimale de l'espace par rapport à un espace plat, et  $\omega_k^i = \Gamma_{kh}^i dx^h$ .

Notons  $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$  le produit scalaire défini localement sur l'espace tangent  $T_M\mathcal{M}$ , on a :

$$Dg = (dg_{ij} - g_{jk}\omega_i^k - g_{ik}\omega_j^k)X^iX^j$$

Or du fait que la connexion  $D$  respecte la métrique  $g$ , on peut tirer les relations suivantes entre  $g_{ij}$  et  $\Gamma_{kh}^i$  :

$$dg_{ij} = g_{jk}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k$$

ou encore

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{ik}\Gamma_{jh}^k + g_{jk}\Gamma_{ih}^k$$

En tout point  $M \in \mathcal{M}$ , le produit scalaire sur  $T_M\mathcal{M}$  induit un produit scalaire sur son dual  $T_M^*\mathcal{M}$ , alors on peut introduire les composantes covariantes  $X_i$  qui sont par définition  $X_i = g_{ik}X^k$ , on note aussi  $X^i = g^{ik}X_k$  avec la condition  $g_{ik}g^{kj} = \delta_j^i$ . On a

$$g_{ij}X^iX^j = X^iX_i = g^{ij}X_iX_j$$

Ainsi en tenant compte du fait que la connexion respecte la métrique, et du fait que  $\omega_{ij} = g_{ik}\omega_j^k$ ,  $\omega^{ij} = g^{ik}\omega_k^j$ ,  $\Gamma_{ijh} = g_{ik}\Gamma_{jh}^k$ , et  $\Gamma_h^{ij} = g^{ik}\Gamma_{hk}^j$ , on peut obtenir facilement :

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji} \text{ ou } \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = \Gamma_{ijh} + \Gamma_{jih}$$

$$dg^{ij} = -\omega^{ij} - \omega^{ji} \text{ ou } \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^h} = -\Gamma_h^{ij} - \Gamma_h^{ji}$$

### 1.3 L'espace de Minkowski

**Définition 1.3.1.** (Définition de l'espace de Minkowski)

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension fini, une norme de Minkowski dans  $V$  est une fonction  $F : V \rightarrow [0, +\infty)$  qui vérifie :

1.  $F$  est  $C^\infty$  dans  $V \setminus \{0\}$ .
2.  $F$  est homogène de degré 1 i.e.

$$F(\lambda y) = \lambda F(y), \text{ pour tout } \lambda > 0 \text{ et } y \in V$$

3. Pour tout  $y \in V \setminus \{0\}$ , la forme bilinéaire symétrique  $g_y : V \times V \rightarrow \mathcal{R}$  :

$$g_y(u, v) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(y + su + tv)}{\partial s \partial t} \Big|_{t=s=0}$$

est définie positive.

On dit que  $(V, F)$  est *un espace de Minkowski*. La norme  $F$  est dite *réversible* si  $F(-y) = F(y)$ .

Soit  $(F, V)$  un espace de Minkowski. On note  $(b_i)$  une base de  $V$ , on a

$$g_{ij}(y) := g_y(b_i, b_j) = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j}(y)$$

Si on note  $u = u^i b_i$ ,  $v = v^i b_i$  et  $y = y^i b_i$  on a

$$g_y(u, v) = g_{ij}(y)u^i v^j \text{ et } F(y) = \sqrt{g_{ij}(y)y^i y^j}$$

**Lemme 1.3.2.** Soit  $(F, V)$  un espace de Minkowski, alors pour tout  $y, v \in V$  on a

$$F(y + v) \leq F(y) + F(v)$$

on a  $F(y + v) = F(y) + F(v)$  si et seulement s'il existe  $\lambda \geq 0$  telle que  $y = \lambda v$ .

*Démonstration.* Si on fixe un vecteur  $v \in V \setminus \{0\}$ , on note  $y(t) = ty + (1 - t)v \neq 0$ , soit :

$$\varphi(t) := F(y(t)) := F(ty + (1 - t)v).$$

On suppose que  $y(t) \neq 0$  pour tout  $0 \leq t \leq 1$ , alors  $\varphi(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On observe

$$2\varphi''\left(\frac{1}{2}\right) \leq \varphi(0) + \varphi(1).$$

c'est-à-dire

$$F(y + v) < F(y) + F(v)$$

On suppose qu'il existe  $0 < t_0 < 1$  telle que  $y(t_0) = 0$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $t_0 \geq \frac{1}{2}$ . Donc  $v = -\frac{1-t_0}{t_0}y$  et  $y + v = \frac{2t_0-1}{t_0}y$ . Alors

$$F(y + v) = \frac{2t_0 - 1}{t_0}F(y) = F(y) - \frac{1 - t_0}{t_0}F(y) \leq F(y) + F(v).$$

□

**Lemme 1.3.3.** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit  $(F, V)$  un espace de Minkowski, alors pour tout  $v \in V$  et  $y \neq 0$ , on a

$$g_y(y, v) \leq F(y)F(v)$$

et on a  $g_y(y, v) = F(y)F(v)$  si et seulement s'il existe  $\lambda \geq 0$  telle que  $y = \lambda v$ .

*Démonstration.* On note

$$S := \{y \in V / F(y) = 1\} = F^{-1}(1)$$

Soit  $y \in S$  alors l'espace tangent  $T_y S$  est naturellement identifié à l'hyperplan

$$W_y = \left\{w \in V; \frac{\partial F^2}{\partial y^j}(y)w^j = 0\right\} = \{w \in V, g_y(y, w) = 0\}$$

Soit  $v \in V$  et décomposons  $v = \lambda y + w$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $w \in W_y$ . On observe que

$$g_y(y, v) = \lambda g_y(y, y) = \lambda F^2(y)$$

Si  $\lambda < 0$  le résultat est immédiat, si  $\lambda = 0$  on a l'égalité. Il reste le cas où  $\lambda > 0$  : en utilisant le lemme précédent on a

$$g_y(y, v) = \lambda F(y)F(y) \leq \lambda F\left(y + \frac{1}{\lambda}w\right)F(y) = F(v)F(y)$$

on a égalité si  $w = 0$  i.e.  $v = \lambda y$  pour un certain  $\lambda \geq 0$ .

□

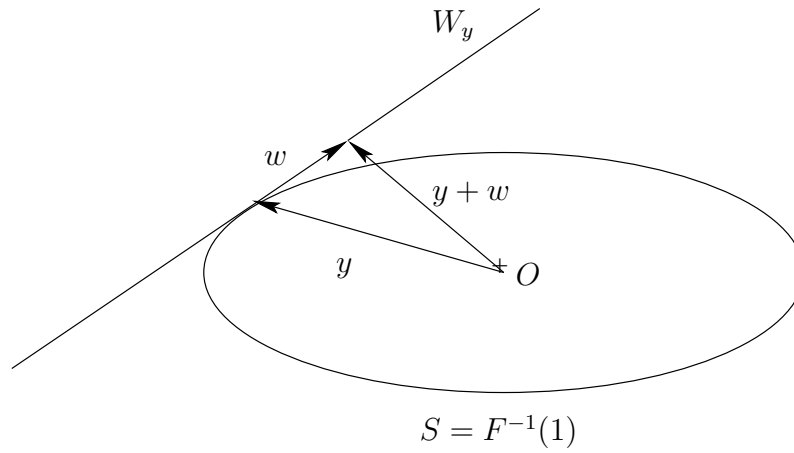


Figure 1.1 —

**Lemme 1.3.4.** Soit  $(F, V)$  un espace de Minkowski, on suppose que  $y, v \in V \setminus \{0\}$  vérifient la condition suivante

$$g_y(y, w) = g_v(v, w), \quad \forall w \in V$$

Alors  $y = v$

*Démonstration.* Si  $w = v$  alors

$$F(v)^2 = g_v(v, v) = g_y(y, v) \leq F(y)F(v)$$

donc

$$F(v) \leq F(y)$$

et si on prend  $w = y$  alors de même on obtient

$$F(y) \leq F(v)$$

Donc  $F(v) = F(y)$  et

$$g_y(y, v) = F(v)^2 = F(y)F(v)$$

En appliquant le lemme précédent on conclut que  $y = v$ . □

**Définition 1.3.5.** (Définition du dual de la norme de Minkowski)

La duale de la norme de Minkowski [Dah06] est une fonction  $F^* : V^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$F^*(\xi) = \max\{\xi(y) : y \in V, F(y) = 1\}$$

Comme  $\{y \in V : F(y) = 1\}$  est compact, alors la duale de la norme de Minkowski existe et finie, et de plus elle est une norme de Minkowski.

**Définition 1.3.6.** D'après la définition du dual de la norme de Minkowski on peut définir la transformation de Legendre  $\ell : V \rightarrow V^*$  définie par :

$$\ell(y) = g_y(y, \cdot) \text{ pour } y \in V \setminus \{0\}, \text{ et } \ell(0) = 0$$

**Exemple 1.3.7.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , soit  $\alpha$  la norme euclidienne et  $\beta$  une forme linéaire dans  $V$ . On définit

$$F(y) := \alpha(y) + \beta(y)$$

Alors  $F$  est une norme de Minkowski si et seulement si  $\|\beta\| < 1$ .

*Démonstration.* Il est trivial que la norme  $F$  satisfait 1 et 2 de la définition (1.3.1), il suffit alors de montrer 3 si et seulement si  $\|\beta\| < 1$ .

On note  $(b_i)_{i=1}^n$  une base de  $V$ , alors on a

$$\alpha(y) = \sqrt{\alpha_{ij}y^i y^j} \text{ et } \beta(y) = b_i y^i, \quad y = y^i b_i \in V$$

où  $(\alpha_{ij})$  est une matrice symétrie définie positive. On a

$$\|\beta\| := \sup_{\alpha(y)=1} \beta(y) = \sqrt{a^{ij} b_i b_j}$$

où  $(a^{ij}) = (\alpha_{ij})^{-1}$ . On note

$$g_{ij}(y) := g_y(b_i, b_j) = \frac{1}{2}[F]_{y^i y^j}(y)$$

Par un simple calcul on trouve

$$g_{ij}(y) = \frac{F}{\alpha} \left( \alpha_{ij} - \frac{y_i y_j}{\alpha} \right) + \left( \frac{y_i}{\alpha} + b_i \right) \left( \frac{y_j}{\alpha} + b_j \right)$$

où  $y_i := a_{is} y^s$ , on conclut alors que pour  $y \neq 0$ ,  $g_y$  est définie positive si et seulement si  $\|\beta\| < 1$ .

La fonction  $F$  vérifie facilement le lemme 1.2, en effet

$$\begin{aligned} F(u+v) &= \alpha(u+v) + \beta(u) + \beta(v) \\ &\leq \alpha(u) + \alpha(v) + \beta(u) + \beta(v) \\ &= F(u) + F(v) \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.3.8.** Dans le cas où  $F(y) := \alpha(y) + \beta(y)$  et  $\|\beta\| < 1$  on dit que  $F$  est une *norme de Randers*.

## 1.4 Introduction à la géométrie finslerienne

Dans la géométrie construite par Finsler, les coefficients  $g_{ij}$  sont des fonctions données des variables  $x^i$  et de la direction de la droite portée par  $dx^i$ . Nous définissons ainsi la variété base comme étant :

$$Gr_1 \mathcal{M} := \{ \text{élément } (M, D), M \in \mathcal{M} \text{ et } D \in T_M \mathcal{M} \}$$

**Définition 1.4.1.** Une variété finslerienne  $(\mathcal{M}, F)$  est une variété différentielle  $\mathcal{M}$  munie d'une fonction de Finsler  $F^{(*)}$  définie sur le fibré tangente  $T\mathcal{M}_0 := \bigcup_{x \in \mathcal{M}} T_x\mathcal{M} \setminus \{0\}$  à valeur dans  $[0, +\infty)$

$$F : T\mathcal{M}_0 \rightarrow [0, +\infty)$$

qui vérifie les conditions suivantes :

1.  $F$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $T\mathcal{M}_0$ .
2.  $F$  est homogène de degré 1 en  $y^k$ , c'est à dire pour tout  $\lambda$  positif on a :

$$F(x^k, \lambda y^k) = \lambda F(x^k, y^k)$$

3. La matrice hessienne définie par

$$(g_{ij}(x^k, y^k)) := \left[ \frac{1}{2} (F^2(x^k, y^k))_{y^i y^j} \right]$$

est définie positive en tout point de  $T\mathcal{M}_0$ . Le tenseur  $g_{ij}$  est homogène de degré zéro en  $y$  i.e. en tout  $x \in \mathcal{M}$ ,  $F|_{T_x\mathcal{M}_0}$  est une norme de Minkowski.

**Remarque 1.4.2.** Une métrique  $F = F(x, y)$  est dite *réversible* si et seulement si

$$F(x, -y) = F(x, y) \quad \forall y \in T_x\mathcal{M}.$$

**Exemple 1.4.3.** Soit  $(\mathcal{M}, g)$  une variété riemannienne. Alors

$$F(x, y) = \sqrt{g_x(y, y)} \quad y \in T_x\mathcal{M}$$

est une norme de Finsler.

**Exemple 1.4.4.** Soit  $|\cdot|$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$

$$|y| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i)^2}.$$

On définit  $F = F(x, y)$  par

$$F := |y|, \quad y \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$$

$F$  est la métrique euclidienne de Finsler sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 1.4.5.** Soit une courbe  $C$  de  $p$  vers  $q$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux paramétrée par  $\gamma : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow Gr_1\mathcal{M}$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$  telle que  $\gamma(a) = p$  et  $\gamma(b) = q$ , soit  $F_x : T_x\mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$ . Alors la longueur de  $C$  est définie par :

$$\mathcal{L}_F(C) = \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

---

(\*)La fonction  $F$  dite aussi la norme de Finsler (i.e.)  $F(x, \cdot) := F_x(\cdot)$  est une norme de Finsler sur  $T_x\mathcal{M}$ .

Si  $C$  est représentée par une autre fonction  $\bar{\gamma} : I' = [a', b'] \subset \mathbb{R} \rightarrow Gr_1\mathcal{M}$  telle que  $\bar{\gamma}(a') = p$  et  $\bar{\gamma}(b') = q$  alors il existe une fonction positive  $\varphi$  qui vérifie  $\bar{t} = \varphi(t)$  et telle que  $\bar{\gamma}(\bar{t}) = \gamma(t)$  et  $\bar{\gamma}(a') = a$  et  $\bar{\gamma}(b') = b$ . Alors

$$d\bar{t} = \varphi'(t)dt, \quad \dot{\gamma}(t) = \dot{\bar{\gamma}}(\bar{t})\varphi'(t)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))dt &= \int_a^b F(\bar{\gamma}(\bar{t}), \dot{\bar{\gamma}}(\bar{t})\varphi'(t)) dt = \int_a^b F(\bar{\gamma}(\bar{t}), \dot{\bar{\gamma}}(\bar{t})) \varphi'(t)dt \\ &= \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} F(\bar{\gamma}(\bar{t}), \dot{\bar{\gamma}}(\bar{t})) d\bar{t} \end{aligned}$$

Donc la longueur de  $C$ ,  $\mathcal{L}_F(C)$ , ne dépend pas de sa paramétrisation  $\gamma$ . On définit la fonction  $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty)$  par

$$d(p, q) = \inf_C \mathcal{L}_F(C) \text{ où } \gamma \text{ est } C^\infty \text{ par morceaux}$$

Avec  $d$  vérifie

1.  $d(p, q) \geq 0$ , pour tout  $p, q \in \mathcal{M}$  et on a égalité si et seulement si  $p = q$ .
2. Pour tous  $p, q, r \in \mathcal{M}$  on a

$$d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$$

**Remarque 1.4.6.** Soit la courbe  $C$  qui représente les positions successives d'un point  $M$  entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  et soit  $I$  l'intégrale définie par :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x^k, y^k)dt$$

L'étude de la variation de  $I$  est indépendante de la direction de l'intégration sur  $C$  ce qui donne :

$$F(x^k, -y^k) = F(x^k, y^k)$$

et par homogénéité on aura :

$$F(x^k, \lambda y^k) = |\lambda|F(x^k, y^k), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

### 1.4.1 Géodésique

**Définition 1.4.7.** On dit qu'une courbe  $\gamma$  dans une variété finslerienne est une *géodésique* si et seulement si  $\mathcal{L}$  est stationnaire en  $\gamma$  c'est à dire pour toute variation de  $\gamma_s$  de  $\gamma$  on a

$$\frac{d}{ds} (\mathcal{L}_F(\gamma_s)) \Big|_{s=0} = 0$$



**Lemme 1.4.8.** Soit  $F : T\mathcal{M} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ . On dit que la fonction  $\mathcal{L}_F(\gamma) : \gamma \mapsto \int_b^a F \circ \dot{\gamma}$  est stationnaire si et seulement si :

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma} \right) = 0 \quad (1.1)$$

De plus, cette condition est indépendante des coordonnées locales.

*Démonstration.* On suppose que  $a = t_1 < \dots < t_N = b$  est une partition de  $[a, b]$ , et que la courbe  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur chaque  $[t_{i-1}, t_i]$ . Soit la fonction  $H : (-\varepsilon, +\varepsilon) \times [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$  telle que

1.  $H$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $(-\varepsilon, +\varepsilon) \times [a, b]$ .
2.  $H$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $(-\varepsilon, +\varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$ .
3.  $\gamma(t) = H(0, t)$ ,  $0 \leq t \leq b$ .

On note  $\gamma_s(t) = H(t, s)$  une petite variation de  $\gamma(t)$ , alors le vecteur tangent est  $V(t) = \dot{\gamma}(t) := \frac{\partial H}{\partial s}(t, 0)$  donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\mathcal{L}_F(\gamma_s(t)))|_{s=0} &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial F}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma}(t) \frac{\partial H^i}{\partial s}(t, 0) + \frac{\partial F}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma}(t) \frac{\partial^2 H^i}{\partial t \partial s}(t, 0) \right] dt \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ \frac{\partial F}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma}(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma}(t) \right) \right] \frac{\partial H^i}{\partial s}(t, 0) dt \end{aligned}$$

Si la courbe  $\gamma$  est stationnaire sur  $[a, b]$  alors elle est stationnaire sur  $[t_k, t_{k+1}]$ , de plus si on a vérifié que  $\gamma$  est stationnaire, alors 1.1 est indépendant des coordonnées locales.  $\square$

**Définition 1.4.9.** Dans une variété finslerienne, on définit localement les coefficients de la métrique par  $g_{ij}(y) := \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}(y)$  et les coefficients des géodésiques par

$$G^i(y) := \frac{1}{4} g_{ik}(y) \left( 2 \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} \right) y^j y^l, \quad y \in T\mathcal{M} \setminus \{0\}$$

On peut encore écrire

$$G^i(y) = \frac{1}{4} g_{ik}(y) \left[ [F^2]_{x^l y^k}(y) y^k - [F^2]_{x^l}(y) \right]$$

**Proposition 1.4.10.** Une courbe  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$  est stationnaire si et seulement si pour tout  $t \in I$ , on a dans les coordonnées locales

$$\frac{d^2 \dot{\gamma}(t)}{dt^2} + 2G^i(\dot{\gamma}(t)) = 0$$

*Démonstration.* On note  $\frac{\partial F}{\partial x^k} := [F]_{x^k}$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^k \partial y^l} := [F]_{y^k y^l}$  et comme  $V^i = \frac{\partial H^i}{\partial s}(t, 0)$  alors on observe que l'équation 1.1 s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} (\mathcal{L}_F(\gamma_s(t)))|_{s=0} &= \int_a^b \frac{1}{2F} \left[ [F^2]_{x^k} V^k + [F^2]_{y^k} \frac{dV^k}{dt} \right] dt \\
&= \int_a^b \left[ \frac{1}{2F} [F^2]_{x^k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2F} [F^2]_{y^k} \right) \right] V^k dt + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2F} [F^2]_{y^k} V^k|_{t_{i-1}}^{t_i} \\
&= \int_a^b \frac{1}{2F} \left[ [F^2]_{x^k} - [F^2]_{x^l y^k} \dot{\gamma}^l - [F^2]_{y^k y^l} \dot{\gamma}^l \right] V^k dt + \sum_{i=1}^k \frac{1}{F} g_{jk} \dot{\gamma}^j V^k|_{t_{i-1}}^{t_i} \\
&= - \int_a^b \frac{1}{F} g_{jk} [\dot{\gamma}^j + 2G^j(\dot{\gamma})] V^k dt + \sum_{i=1}^k \frac{1}{F} g_{jk} \dot{\gamma}^j V^k|_{t_{i-1}}^{t_i}
\end{aligned}$$

Or  $H(t, s)$  est une variation de  $c(t)$ , on peut choisir  $H(t, s) = c(t)$ , donc  $V(t_i) = 0$  pour  $i = 0, \dots, k$  ce qui donne

$$\frac{d}{ds} (\mathcal{L}_F(\gamma_s(t)))|_{s=0} = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \frac{1}{F} g_{jk} [\dot{\gamma}^j + 2G^j(\dot{\gamma})] V^k dt$$

Ce qui donne dans les coordonnées locales

$$\dot{\gamma}^j + 2G^j(\dot{\gamma}) = 0$$

□

## 1.5 Connexion “au sens de Cartan”

**Définition 1.5.1.** On note par  $g(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire définit localement en tout point de  $T\mathcal{M}_0$  et soit  $g(x, y) = g_{ij}(x, y)y^i y^j$ , alors une variété différentielle munie de la métrique  $g$  est dite *variété Finslerienne*.

**Remarque 1.5.2.** Dans le cas où  $g_{ij}(x, y)$  ne dépend pas de  $y \neq 0$  alors  $F$  a une structure riemannienne.

**Définition 1.5.3.** Soit  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Gr_1\mathcal{M}$  un chemin sur  $Gr_1\mathcal{M}$ , on note par  $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow Gr_1\mathcal{M}$ , et par  $\gamma_0 = \gamma(0) = (x_0, D_0)$ . Soit  $X_0 = (X_0^i)_i \in \pi^*(x_0, D_0)$ ,  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow T\mathcal{M}$  le relèvement de  $\gamma$  sur  $T\mathcal{M}$  et  $X(t) = (X^i)_i \subset T\mathcal{M}$  un vecteur variable d'origine  $(x^i(t), y^i(t))$ . Alors la dérivée covariante de  $X(t)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
D_{\dot{\gamma}} X(t) &:= \frac{dX^i(t)}{dt} e_i + \left( X^k(t) C_{kh}^i(x, y) \frac{dy^h(t)}{dt} + X^k(t) \Gamma_{kh}^i(x, y) \frac{dx^h(t)}{dt} \right) e_i \\
&:= \left( \frac{dX^i(t)}{dt} + X^k(t) \omega_k^i(x, y) \right) e_i
\end{aligned}$$

avec  $\omega_k^i = C_{kh}^i dy^h + \Gamma_{kh}^i dx^h$  et les  $C_{kh}^i$  et  $\Gamma_{kh}^i$  sont naturellement des fonctions de  $x$  et de  $y$  et ne sont pas absolument arbitraires.

### 1.5.1 Méthode de calcul des coefficients $C_{kh}^i, \Gamma_{kh}^i$

Pour calculer les coefficients  $C_{kh}^i$  on impose la condition que si  $X$  et  $Y$  sont deux vecteurs du même élément d'appui et  $DX$  et  $DY$  sont leurs dérivées covariantes lorsque ces vecteurs conservent les composantes contrevariantes  $X^i$  et  $Y^i$  fixes et lorsque leur élément d'appui commun subit une même rotation infinitésimale autour de son centre, on a la loi de symétrie  $XDY = YDX$

Le calcul de la dérivée de covariante de  $g_{(M,D)}$  donne :

$$\begin{aligned} Dg_{(M,D)} &= dg_{ij}X^iX^j - g_{ik}X^iX^j(C_{jh}^k dy^h + \Gamma_{jh}^k dx^h) - g_{jk}X^iX^j(C_{ih}^k dy^h + \Gamma_{ih}^k dx^h) \\ &= (dg_{ij} - (C_{ijh} + C_{jih})dy^h - (\Gamma_{ijh} + \Gamma_{jih})dx^h)X^iX^j \\ &= (dg_{ij} - (\omega_{ij} + \omega_{ji}))X^iX^j \end{aligned}$$

Nous tiendrons compte de la condition que la longueur d'un vecteur ne change pas quand sa dérivée covariante est nulle c'est à dire :  $Dg_{(M,D)} = 0$  alors :

$$dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{jk}\omega_i^k = \omega_{ij} + \omega_{ji}$$

Ce qui donne des relations importantes pour déterminer les coefficients  $C_{ih}^j$  et  $\Gamma_{ih}^j$ , si la métrique  $g_{(M,D)}$  est donnée, qui sont :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^h} = g_{ik}C_{jh}^k + g_{jk}C_{ih}^k = C_{ijh} + C_{jih}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{ik}\Gamma_{jh}^k + g_{jk}\Gamma_{ih}^k = \Gamma_{ijh} + \Gamma_{jih}$$

Comme le cas de la géométrie riemannienne on peut introduire aussi les composantes covariantes  $X_i$  qui sont :

$$X_i = g_{ik}X^k \text{ ou } X^i = g^{ik}X_k$$

où l'on a :  $g_{ik}g^{kj} = \delta_j^i$  on a donc

$$g_{ij}X^iX^j = X^iX_i = g^{ij}X_iX_j$$

ce qui donne, en tenant compte du fait que la connexion  $D$  respecte la métrique  $g_{(M,D)}$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial y^h} = -C_{ijh} - C_{jih}$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^h} = -\Gamma_{ijh} - \Gamma_{jih}$$

**Définition 1.5.4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs de même élément et de composantes  $X^i, Y^j$  fixes ; soient  $DX$  et  $DY$  leurs dérivées, lorsque leur élément commun subit la même rotation infinitésimale autour de son centre, on a la loi de symétrie

$$XDY = YDX$$

**Théorème 1.5.5.** Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs de même élément et de composantes  $X^i, Y^j$  fixes et si  $XDY = YDX$  alors on a

$$C_{jnh} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{jn}}{\partial y^h}$$

*Démonstration.* La loi de symétrie est une condition nécessaire pour la détermination des coefficients  $C_{kh}^i$  en effet

$$XDY = YDX \Rightarrow Y_i X^k C_{kh}^i dy^h = X_i Y^k C_{kh}^i dy^h$$

ce qui donne

$$Y^i X^k C_{kjh} dy^h = X^i Y^k C_{kjh} dy^h$$

par un changement d'indice on a alors

$$C_{kjh} = C_{ikh}$$

comme on a  $C_{kjh} + C_{ikh} = -\frac{\partial g_{jn}}{\partial y^h}$ , alors

$$C_{jnh} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jn}}{\partial y^h}$$

□

## 1.5.2 Les tenseurs

Soit un tenseur contrevariant à deux indices  $T(x^k, y^k) = T_{ij}(x^k, y^k) e^i \otimes e^j$ , alors on a :

$$\begin{aligned} DT_{ij} &= dT_{ij} + T_{kj}(C_{ih}^k dy^h + \Gamma_{ih}^k dx^h) \\ &\quad + T_{ik}(C_{jh}^k dy^h + \Gamma_{jh}^k dx^h). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Si  $l^i = \frac{y^i}{F}$  est le vecteur unitaire de composante contravariante fixe, et de direction celle de son élément d'appui, alors avec un déplacement parallèle, on a :

$$Dl^i = d\left(\frac{y^i}{F}\right) + l^k \Gamma_{kh}^i dx^h \quad \text{car } y^k C_{kh}^i = 0 \quad (1.3)$$

ce qui donne :

$$dy^i = F(x, y) Dl^i + y^i \left( \frac{dF}{F(x, y)} \right) - \Gamma_{rs}^i y^r dx^s \quad (1.4)$$

D'après 1.4, les coefficients de  $Dl^i$  dans 1.2 sont :

$$-\{T_{kj}(F(x, y)C_{ih}^k) + T_{ik}(F(x, y)C_{jh}^k)\}$$

Cartan a défini le tenseur  $A(x^k, y^k) = A_{ih}^k e_k \otimes e^i \otimes e^h$  par :

$$A_{ih}^k := F(x, y)C_{ih}^k \text{ ou encore } A_{ijh} = g_{jk}A_{ih}^k = F(x, y)C_{ijh}$$

Alors de 1.3 on peut déduire :

$$y^k C_{kih} = 0 \text{ et d'après la loi de symétrie, on a } y^k \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^h} = 0$$

On a

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}$$

et on obtient l'expression de tenseur  $A$  dans la base  $e^i \otimes e^j \otimes e^h$  :

$$A = (A_{ijh}) = \frac{1}{4} F(x^k, y^k) \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^i \partial y^j \partial y^h}$$

Notons  $A := (A_i) := (A_{ik}^k)_k = g^{hk} A_{khi}$  alors :

$$A_i = \frac{1}{2} F(x, y) g^{hk} \frac{\partial g^{hk}}{\partial y^i} = \frac{1}{2} F(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} (\log g) \quad \text{ou } g = \det |g_{ij}|$$

On peut encore définir le tenseur  $A^{ijh} = F(x, y) C^{ijh}$  dans la base  $e_i \otimes e_j \otimes e_h$  qui redonne le vecteur  $A^i$ .

Revenons à 1.2, on remarque que le coefficient de  $dx^h$  s'écrit :

$$-(T_{kj} \Gamma_{ih}^{*k} + T_{ik} \Gamma_{jh}^{*k}) dx^h \quad \text{où } \Gamma_{ih}^{*k} = \Gamma_{ih}^k - C_{ij}^k \Gamma_{lh}^j y^l$$

ce qui donne :

$$DT_{ij} = dT_{ij} - (T_{kj} A_{ih}^k + T_{ik} A_{jh}^k) Dl^h - (T_{kj} \Gamma_{ih}^{*k} + T_{ik} \Gamma_{jh}^{*k}) dx^h$$

Or on sait que  $dT_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h} dx^h + \frac{\partial T_{ij}}{\partial y^h} dy^h$  et en utilisant 1.4 on obtient l'expression de la variation totale de la dérivé covariante du tenseur  $T_{ij}$

$$\begin{aligned} DT_{ij} &= (F \frac{\partial T_{ij}}{\partial y^h} - T_{kj} A_{ih}^k - T_{ik} A_{jh}^k) Dl^h \\ &\quad + (\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial y^h} \Gamma_{rh}^k y^r - T_{kj} \Gamma_{ih}^{*k} - T_{ik} \Gamma_{jh}^{*k}) dx^h \end{aligned}$$

On peut noter  $T_{ij|h} dx^h = (\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^h} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial y^h} \Gamma_{rh}^k y^r - T_{kj} \Gamma_{ih}^{*k} - T_{ik} \Gamma_{jh}^{*k}) dx^h$  qui représente la variation de tenseur quand son élément se déplace parallèlement de point de coordonnées  $x^i$  vers le point de coordonnées  $x^i + dx^i$ , on aura alors :

$$DT_{ij} = (F \frac{\partial T_{ij}}{\partial y^h} - T_{kj} A_{ih}^k - T_{ik} A_{jh}^k) Dl^h + T_{ij|h} dx^h$$

On peut vérifier aussi que si  $T_{ij} = g_{ij}$  alors on a  $Dg_{ij} = g_{ij|h}^{(*)}$ .

On peut refaire le même travail pour un tenseur contravariante  $T(x, y) = T^{ij}(x, y) e_i \otimes e_j$ , si on prend par exemple le vecteur  $X^i$  alors en 1.4 on peut montrer facilement que :

$$DX^i = (F \frac{\partial X^i}{\partial y^h} + A_{kh}^i X^k) Dl^h + X^i_{|h} dx^h$$

où  $X^i_{|h} dx^h = \frac{\partial X^i}{\partial x^h} - \frac{\partial X^i}{\partial y^h} y^s \Gamma_{sh}^k + \Gamma_{kh}^{*i} X^k$ .

---

(\*) Voir [Run59a] à la page 73-74.



# Formulation invariante du problème variationnel de départ

## Introduction

Le but de ce chapitre est de construire une formulation hamiltonienne de type multisymplectique d'un problème variationnel invariant sur les sous-variétés de dimension  $p$  dans une variété de dimension  $n$ . Tout d'abord, nous considérons une surface orientée dans une variété  $\mathcal{M}$  de dimension 3 et, en tout point  $M$  de la surface, on note  $P$  le plan tangent orienté. Nous définissons le *fibré grassmannien* comme étant l'ensemble de ces éléments  $(M, P)$ , qui est isomorphe à  $(\Lambda^2 T_x \mathcal{M} - \{0\}) / ]0, +\infty[$ . Puis nous définissons la 2-forme d'action aréolaire  $\ell$  qui est homogène et de degré 0 en  $y$ , on considère un lagrangien  $L$  homogène et de degré 1 en  $y$  sur  $\Lambda_D^2 T\mathcal{M}$ , tel que  $\frac{dL}{dy} = \ell$ , et nous construisons une forme multisymplectique. En supposant que  $L$  est non dégénéré, nous montrons que l'image de la transformée de Legendre est une hypersurface régulière convexe. Ce résultat reste vrai pour une hypersurface dans une variété de dimension  $n$  ou plus généralement pour les sous-variétés de codimension  $n - p$ . Dans la deuxième partie on considère le cas particulier où la surface  $\Sigma$  est le graphe d'une fonction et nous construisons de la même manière le lagrangien, et nous comparons avec la présentation donnée par Cartan dans [Car33].

## 2.1 Le cas présenté par Cartan : une surface $\Sigma$ dans une variété $\mathcal{M}$ de dimension 3

Soit  $\Sigma$  une surface dans une variété  $\mathcal{M}$  dimension 3. On définit le fibré grassmannien des plans dans  $T\mathcal{M}$  par :

$$Gr^2 \mathcal{M} := \{(x, E) \mid x \in \mathcal{M}, E \text{ plan orienté dans } T_x \mathcal{M}\}$$

**Définition 2.1.1.** On pose  $\Lambda^2 T_x \mathcal{M} := (\Lambda^2 T_x^* \mathcal{M})^*$  et  $\Lambda^2 T\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} \Lambda^2 T_x \mathcal{M}$ . Si  $u_1, u_2 \in T_x \mathcal{M}$  alors on définit  $u_1 \wedge u_2 \in \Lambda^2 T_x \mathcal{M}$  par :  $\forall \alpha, \beta \in T_x^* \mathcal{M}$  :

$$(\alpha \wedge \beta)(u_1 \wedge u_2) := \alpha \wedge \beta(u_1, u_2) = \alpha(u_1)\beta(u_2) - \alpha(u_2)\beta(u_1)$$

cette opération est clairement bilinéaire.

On note  $\pi_{Gr^2\mathcal{M}} : Gr^2\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$  la projection canonique. Soit  $x = (x^1, x^2, x^3)$  les coordonnées locales sur  $\mathcal{M}$  et  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$  une base de  $T_x\mathcal{M}$ , une base de  $\Lambda^2 T_x\mathcal{M}$  est

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^1} \right)$$

Soit  $E$  un plan orienté dans  $T_x\mathcal{M}$  et soit  $(u_1, u_2)$  une base directe de  $E$  on dit alors que  $u_1 \wedge u_2 \in \Lambda^2 T_x\mathcal{M}$  représente  $E$ , on note les coordonnées sur  $\Lambda^2 T\mathcal{M}$  par  $(x^1, x^2, x^3; y^{12}, y^{23}, y^{31})$  où  $y^{12}, y^{23}$  et  $y^{31}$  sont les coordonnées qui représentent le plan (appelé “élément” par Cartan), on a

$$u := u_1 \wedge u_2 = y^{12} \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} + y^{23} \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3} + y^{31} \frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^1}$$

**Remarque 2.1.2.** Notons la 3-forme de volume  $\omega := dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

1. Le noyau de  $u \lrcorner \omega$  est le plan  $E$ , ce qui permet de retrouver directement le plan  $E$  à partir de  $y^{12}, y^{23}$  et  $y^{31}$ .
2. A cause de l'orientation on a

$$Gr_x^2\mathcal{M} \simeq (\Lambda^2 T_x\mathcal{M} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^* +$$

On déduit que les coordonnées homogènes sur le fibré Grassmannien au dessus de  $\mathcal{M}$  sont  $(x^1, x^2, x^3; [y^{12} : y^{23} : y^{31}])$  i.e.

$$Gr^2\mathcal{M} := \{(x; [y]) := (x^1, x^2, x^3; [y^{12} : y^{23} : y^{31}]) | x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathcal{M},$$

$$E = (y) = [y^{12} : y^{23} : y^{31}] \text{ plan orienté dans } T_x\mathcal{M}\}$$

de sorte qu'en tout point  $x \in \mathcal{M}$ ,  $Gr_x^2\mathcal{M}$ , est l'espace de tous les plans orientés dans  $T_x\mathcal{M}$ .

**Définition 2.1.3.** Soit  $\mathcal{M}$  une variété différentielle, soit  $n \in \mathbb{N}$  on dit qu'une  $(n+1)$ -forme  $\Omega$  dans  $\mathcal{M}$  est *multisymplectique* ssi

1.  $\Omega$  est non dégénérée, i.e.  $\forall M \in \mathcal{M}, \forall \xi \in T_M\mathcal{M}, \text{ si } \xi \lrcorner \Omega_M = 0, \text{ alors } \xi = 0.$
2.  $\Omega$  est fermée, i.e.  $d\Omega = 0.$

Toute variété  $\mathcal{M}$  munie d'une forme multisymplectique  $\Omega$  est une *variété multisymplectique*.

**Définition 2.1.4.** ([Hél10]) : La  $(n+1)$ -forme  $\Omega$  est dite *pré-multisymplectique* si elle vérifie seulement 2, alors une variété différentielle  $\mathcal{M}$  munie de  $\Omega$  est une *variété pré-multisymplectique*.



### 2.1.1 Formulation lagrangienne

**Définition 2.1.5.** Une 2-forme *d'action aréolaire* est une 2-forme  $\ell$  sur  $Gr^2\mathcal{M}$  de la forme :

$$\ell(x, y) := \ell_{12}(x, y)dx^1 \wedge dx^2 + \ell_{23}(x, y)dx^2 \wedge dx^3 + \ell_{31}(x, y)dx^3 \wedge dx^1$$

où  $\ell_{12}(x, y), \ell_{23}(x, y)$  et  $\ell_{31}(x, y)$  sont homogènes et de degré 0 en  $y$  sur  $]0, +\infty[$ , i.e.  $\forall \lambda \in ]0, +\infty[, \ell_{\alpha\beta}(x, \lambda y) = \ell_{\alpha\beta}(x, y)$ .

**Définition 2.1.6.** On définit un lagrangien homogène  $L : \Lambda^2 T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  comme étant une fonction continue sur  $\Lambda^2 T\mathcal{M}$  telle que :

1.  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Lambda^2 T\mathcal{M} \setminus \sigma_0$  où  $\sigma_0$  est la section nulle.
2.  $L$  est homogène et de degré 1 en  $y$  sur  $]0, +\infty[$  i.e.  $\forall \lambda > 0, L(x, \lambda y) = \lambda L(x, y)$ .

**Remarque 2.1.7.** Si  $u_1, u_2$  deux vecteurs de l'élément  $E_x$  alors  $L(x, u_1 \wedge u_2)$  représente « l'aire infinitésimale » du parallélepède formé par  $u_1$  et  $u_2$ .

Soit  $\Sigma$  une surface orientée dans  $\mathcal{M}$ , soit  $(u_1, u_2)$  un repère mobile sur  $\Sigma$  et  $(\theta_1, \theta_2)$  sa base duale, on définit

$$\mathcal{L}(\Sigma) := \int_{\Sigma} L(x, u_1 \wedge u_2) \theta_1 \wedge \theta_2 \quad (2.1)$$

Notons :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial y^{12}} = \ell_{12} \\ \frac{\partial L}{\partial y^{23}} = \ell_{23} \\ \frac{\partial L}{\partial y^{31}} = \ell_{31} \end{cases}$$

alors on a par la formule d'Euler  $L(x, y) = \sum_{\alpha < \beta} \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(x, y) y^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} \ell_{\alpha\beta}(x, y) y^{\alpha\beta}$ .  
Donc

$$\ell(x, y) := \sum_{\alpha < \beta} \left( dx^\alpha \wedge dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha\beta}} \right) \lrcorner dL = \frac{\partial L}{\partial y^{12}} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial L}{\partial y^{23}} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial L}{\partial y^{31}} dx^3 \wedge dx^1$$

On voit donc que le produit intérieur par  $\sum_{\alpha < \beta} \left( dx^\alpha \wedge dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha\beta}} \right)$  coïncide avec l'opérateur canonique de  $(\Lambda^2 T_x \mathcal{M})^* \rightarrow \Lambda^2 T_x^* \mathcal{M}$  et que :

$$\ell = \sum_{\alpha < \beta} \left( dx^\alpha \wedge dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha\beta}} \right) \lrcorner dL$$

avec la condition  $y^{\alpha\beta} + y^{\beta\alpha} = 0$ . On note  $\mathcal{G}$  l'ensemble de toutes les surfaces  $\Sigma$  orientées dans  $\mathcal{M}$ . Alors  $\forall x \in \Sigma, T_x \Sigma \in Gr_x^2 \mathcal{M}$ , on note  $T\Sigma = \{(x, T_x \Sigma) \in Gr^2 \mathcal{M}; x \in \Sigma\}$  et on peut écrire l'action définie en 2.1 par :

$$\mathcal{L}(\Sigma) := \int_{T\Sigma} \ell = \int_{T\Sigma} \sum_{\alpha < \beta} \left( dx^\alpha \wedge dx^\beta \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha\beta}} \right) \lrcorner dL.$$

**Définition 2.1.8.** On dit qu'une surface  $\Sigma$  est un point critique de  $\mathcal{L}$  si est seulement si, pour tout compact  $K \subset \mathcal{M}$ ,  $K \cap \Sigma$  est un point critique de  $\mathcal{L}_K(\Sigma) := \int_{\pi_{Gr^2 \mathcal{M}}^{-1}(K) \cap T\Sigma} \ell$ .

### 2.1.2 Formulation hamiltonienne (multisymplectique)

-*Transformée de Legendre* : On définit la fonction

$$\begin{aligned} \Lambda^2 T\mathcal{M} &\longrightarrow \Lambda^2 T^*\mathcal{M} \\ (x, y) &\longmapsto \left( x, \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) \right) \end{aligned}$$

où  $\frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = \left( \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(x, y) \right)_{\alpha < \beta}$ . On considère la fonction hamiltonienne par

$$\mathcal{H}(x, P) = \sum_{\alpha < \beta} p_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} - L(x, y),$$

où  $y$  est une solution de  $\frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = p_{\alpha\beta}$ . Comme  $L$  est homogène de degré 1 en  $y$  sur  $]0, +\infty[$ , on a par la formule d'Euler :

$$L(x, y) = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(x, y) y^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha < \beta} p_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} \text{ où } p_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(x, y)$$

Et donc l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  s'annule.

**Définition 2.1.9.** On dit que le lagrangien  $L$  est non dégénéré si  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Lambda^2 T\mathcal{M} \setminus \sigma_0$  et  $\frac{\partial^2(L^2)}{\partial y^{\alpha\beta} \partial y^{\alpha'\beta'}} > 0$  en dehors de  $\sigma_0$ . (En particulier  $L^2$  est alors une fonction strictement convexe).

**Proposition 2.1.10.** Notons  $\mathcal{N}$  l'image de la transformée de Legendre,

$$\mathcal{N} = \left\{ (x, p) \in \Lambda^2 T^*\mathcal{M} / p_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(x, y), y \in \Lambda^2 T\mathcal{M} \right\}$$

On suppose que le lagrangien  $L : \Lambda^2 T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$   $k \geq 2$  est non dégénéré. Alors  $\mathcal{N}$  est une hypersurface régulière et convexe de  $\Lambda^2 T^*\mathcal{M}$  (de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ ).

*Démonstration.* Soit  $x$  fixé dans  $\mathcal{M}$  et soit

$$\mathcal{N}_x = \left\{ p \in \Lambda^2 T_x^*\mathcal{M} / p_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(x, y), y \in \Lambda^2 T\mathcal{M} \right\}$$

Nous allons d'abord montrer que  $\mathcal{N}_x$  est une surface dans  $\Lambda^2 T_x^*\mathcal{M}$  On se place en  $x \in \mathcal{M}$ , pour alléger les notations, on note  $L(x, y) = L(y)$ , Notons

$$S_x := \{ y \in \Lambda^2 T_x\mathcal{M} \mid L^2(y) = 1 \}$$

$S_x$  est une sous-variété plongée, en effet :  $\forall y \in S$  on a  $y^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y) = L(y) = 1 \neq 0 \Rightarrow d(L^2)_y \neq 0$ .

On sait que  $\frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(\lambda y) = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y)$  donc l'image de  $\Lambda^2 T_x\mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$  par  $\frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}$  est la même que celle de  $S_x$ , car pour toute demi-droite,  $D \subset \Lambda^2 T_x\mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$ ,  $D$  coupe  $S_x$  en un unique point.

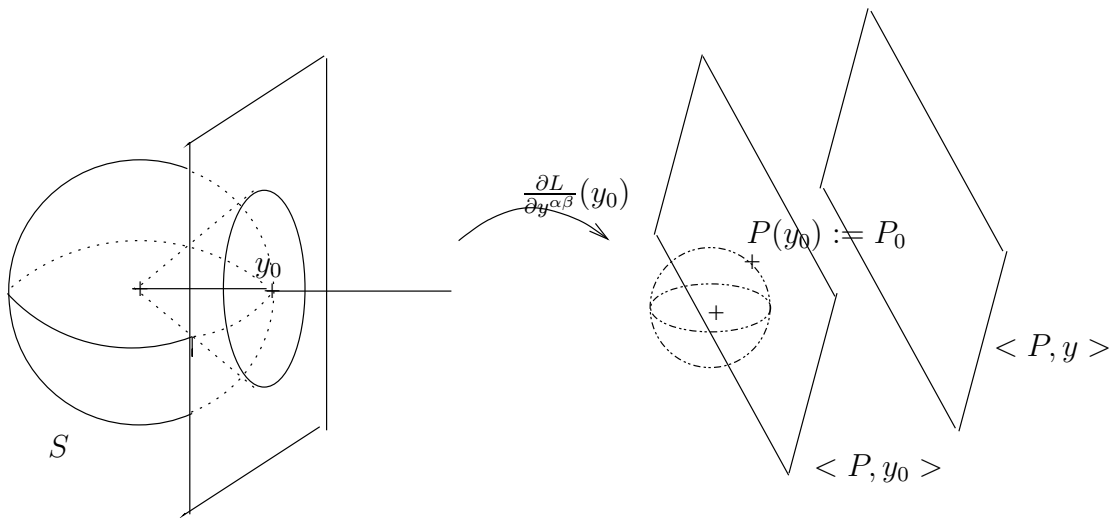


Figure 2.1 —

Montrons que  $\frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(S)$  est une variété plongée et convexe : comme  $L^2$  est une fonction strictement convexe, alors la transformée de Legendre

$$\begin{aligned} \frac{\partial(L^2)}{\partial y^{\alpha\beta}} : \Lambda^2 T_x \mathcal{M} &\longrightarrow \Lambda^2 T_x^* \mathcal{M} \\ y &\longmapsto \frac{\partial L^2}{\partial y^{\alpha\beta}}(y) \end{aligned}$$

est un homéomorphisme global et, comme  $L^2$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Lambda^2 T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$  alors  $L^2 : \Lambda^2 T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\} \longrightarrow \Lambda^2 T_x^* \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0^*\}$  est un difféomorphisme, Comme  $S$  est une sous-variété plongée alors  $\frac{\partial L^2}{\partial y^{\alpha\beta}}(S_x)$  l'est. Or  $\frac{\partial(L^2)}{\partial y^{\alpha\beta}}|_{S_x} = 2L \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}|_{S_x} = 2 \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}|_{S_x}$  (car  $\forall y \in S_x$  on a  $L(y) = 1$ ) alors  $\frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(S_x)$  est une variété plongée.

**Lemme 2.1.11.** Soit  $L$  le lagrangien défini plus haut on a

$$\text{rang} \left( \frac{\partial^2 L^2}{\partial y^{\alpha\beta} \partial y^{\alpha'\beta'}} \right) = 1 + \text{rang}(\text{Hess}(L))$$

*Démonstration.* Soit un lagrangien  $L$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Lambda^2 T_x \mathcal{M}$  et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Lambda^2 T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$  alors  $L^2$  est homogène de degré 2 et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Lambda^2 T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$ . Comme  $L$  est non dégénéré, cela entraîne la convexité, et on peut vérifier facilement que  $\frac{\partial(L^2)}{\partial y^{\alpha\beta}}(0) = 0$ . En effet  $L$  s'annule en 0 et  $\frac{\partial(L^2)}{\partial y^{\alpha\beta}} = 2L \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}$ .

Calculons la matrice  $\frac{\partial^2(L^2)}{\partial y^{\alpha\beta} \partial y^{\alpha'\beta'}}$  en dehors de  $\sigma_0$ .

$$\begin{pmatrix} 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{12} \partial y^{12}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{12}} \frac{\partial L}{\partial y^{12}} & 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{12} \partial y^{23}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{12}} \frac{\partial L}{\partial y^{23}} & 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{12} \partial y^{31}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{12}} \frac{\partial L}{\partial y^{31}} \\ 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{23} \partial y^{12}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{23}} \frac{\partial L}{\partial y^{12}} & 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{23} \partial y^{23}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{23}} \frac{\partial L}{\partial y^{23}} & 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{23} \partial y^{31}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{23}} \frac{\partial L}{\partial y^{31}} \\ 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{31} \partial y^{12}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{31}} \frac{\partial L}{\partial y^{12}} & 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{31} \partial y^{23}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{31}} \frac{\partial L}{\partial y^{23}} & 2L \frac{\partial^2 L}{\partial y^{31} \partial y^{31}} + 2 \frac{\partial L}{\partial y^{31}} \frac{\partial L}{\partial y^{31}} \end{pmatrix}$$

$$= 2L \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial y^{12} \partial y^{12}} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^{12} \partial y^{23}} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^{12} \partial y^{31}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^{23} \partial y^{12}} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^{23} \partial y^{23}} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^{23} \partial y^{31}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^{31} \partial y^{12}} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^{31} \partial y^{23}} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^{31} \partial y^{31}} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial y^{12}} \\ \frac{\partial L}{\partial y^{23}} \\ \frac{\partial L}{\partial y^{31}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial y^{12}} & \frac{\partial L}{\partial y^{23}} & \frac{\partial L}{\partial y^{31}} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

On note  $T_y S_x = \ker \left( \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(S_x) \right)$ , soit  $(e_1, e_2)$  une base de  $T_y S_x$  et  $e_3 = y = y^{\alpha'\beta'} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha\beta}}$ ; on note  $(z^1, z^2, z^3)$  les coordonnées dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . On a  $\frac{\partial L}{\partial z^1} = \frac{\partial L}{\partial z^2} = 0$ . De plus  $d \left( \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}} \right) (e_3) = y^{\alpha'\beta'} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha'\beta'}} \left( \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}} \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^{\alpha\beta} \partial y^{\alpha'\beta'}} y^{\alpha'\beta'} = 0$  par homogénéité, ce qui se traduit dans les coordonnées  $z^a$  par  $\frac{\partial^2 L}{\partial z^3 \partial z^a} = 0 \quad \forall a = 1, 2, 3$ , Alors la relation (2.2) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2(L^2)}{(\partial z^1)^2} & \frac{\partial^2(L^2)}{\partial z^1 \partial z^2} & \frac{\partial^2(L^2)}{\partial z^1 \partial z^3} \\ \frac{\partial^2(L^2)}{\partial z^2 \partial z^1} & \frac{\partial^2(L^2)}{(\partial z^2)^2} & \frac{\partial^2(L^2)}{\partial z^2 \partial z^3} \\ \frac{\partial^2(L^2)}{\partial z^3 \partial z^1} & \frac{\partial^2(L^2)}{\partial z^3 \partial z^2} & \frac{\partial^2(L^2)}{(\partial z^3)^2} \end{pmatrix} = 2L \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{(\partial z^1)^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^1 \partial z^2} & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2 \partial z^1} & \frac{\partial^2 L}{(\partial z^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc on a

$$\text{rang} \left( \frac{\partial^2 L^2}{\partial z^a \partial z^b} \right)_{1 \leq a, b \leq 3} = 1 + \text{rang}(\text{Hess}(L)) = 1 + \text{rang} \left. d \left( \frac{\partial L}{\partial y} \right) \right|_{T_y S} \quad (2.3)$$

En particulier  $L$  est non dégénéré si et seulement si  $\text{rang} \left. d \left( \frac{\partial L}{\partial y} \right) \right|_{T_y S_x} = 2$ , c'est à dire  $\left. \frac{\partial L}{\partial y} \right|_{S_x}$  est une immersion de  $S_x$ . Nous voyons donc que  $\mathcal{N}_x$  coïncide avec l'image de  $S_x$  par une immersion.  $\square$

On note

$$B_x := \{y \in \Lambda^2 T_x \mathcal{M} \mid L^2(y) \leq 1\}$$

Montrons que  $\frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(B_x)$  est un ensemble convexe : Soit  $P_0, P'_0 \in \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(B_x)$ . Montrons que

$$\forall t \in [0, 1] \Rightarrow tP_0 + (1-t)P'_0 \in \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(B_x)$$

On a  $P_0, P'_0 \in \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(B_x)$  donc il existe  $y_0, y'_0 \in B_x$  tels que  $P_0 = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y_0)$  et  $P'_0 = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y'_0)$  or  $B_x$  est convexe donc  $ty_0 + (1-t)y'_0 \in B_x \Rightarrow L(ty_0 + (1-t)y'_0) = 1$  et comme  $\frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}} : \Lambda^2 T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\} \rightarrow \Lambda^2 T_x^* \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0^*\}$  est un difféomorphisme alors il existe un unique  $P''_0 \in \Lambda^2 T_x^* \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0^*\}$  (donc il existe un unique  $y''_0 \in \Lambda^2 T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$ ) tels que  $t \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y_0) + (1-t) \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y'_0) = P''_0 := \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y''_0)$  et comme  $L$  homogène de degré 1 alors  $\forall y \in \Lambda^2 T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$  il existe un unique  $\lambda > 0$  telle que  $L(\lambda y) = 1$ , alors  $\lambda = \frac{1}{L(y'')}$  ce qui donne  $\frac{1}{L(y'')} y''_0 \in B_x$  alors  $t \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y_0) + (1-t) \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y'_0) = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(y''_0) = \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}} \left( \frac{1}{L(y'')} y''_0 \right) \in \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(B_x)$ , ce qui montre la convexité de  $\frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}}(B_x)$ . Ainsi  $\partial B_x = S_x$  est une surface convexe.  $\square$

**Remarque 2.1.12.** Dans le cas où  $\frac{\partial^2(L^2)}{\partial y^{\alpha\beta} \partial y^{\alpha'\beta'}} > 0$  alors au dessus de tout point  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}_x$  est topologiquement une sphère dans  $\Lambda^2 T_x^* \mathcal{M}$ .

### 2.1.3 Application

On définit sur  $\Lambda^2 T^* \mathcal{M}$  la 2-forme  $\theta = p_{12} dx^1 \wedge dx^2 + p_{23} dx^2 \wedge dx^3 + p_{31} dx^3 \wedge dx^1$

$$d\theta = dp_{12} \wedge dx^1 \wedge dx^2 + dp_{23} \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dp_{31} \wedge dx^3 \wedge dx^1.$$

On a bien  $d\theta$  est une forme multisymplectique sur  $\Lambda^2 T^* \mathcal{M}$  et  $d\theta|_{\mathcal{N}}$  est une forme pré-multisymplectique.

**Théorème 2.1.13.** *On a  $\Sigma \subset \mathcal{M}$  un point critique de  $\int L$  si et seulement si son image par le Legendre est une surface dans  $\mathcal{N}$  sur laquelle  $d\theta$  s'annule, autrement  $\frac{\partial L}{\partial y}(T\Sigma) \subset (\mathcal{N}; \omega|_{\mathcal{N}})$ , si on note*

$$\beta = \sum_{\alpha < \gamma} p_{\alpha\gamma} dx^\alpha \wedge dx^\gamma = \theta|_{\mathcal{N}}$$

Alors

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \int_{\frac{\partial L}{\partial y}(T\Sigma)} \beta = \int_{\Gamma} \beta \quad (2.4)$$

où  $\Gamma := \frac{\partial L}{\partial y}(T\Sigma) \subset \mathcal{N}$ .

*Démonstration.* On peut voir facilement

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^* \theta = \frac{\partial L}{\partial y^{12}} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial L}{\partial y^{23}} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial L}{\partial y^{31}} dx^3 \wedge dx^1 = \ell(x, y)$$

donc

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \int_{T\Sigma} \ell = \int_{T\Sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^* \theta$$

Et comme  $\frac{\partial L}{\partial y}|_{T\Sigma}$  est un plongement alors

$$\mathcal{L}(\Sigma) = \int_{T\Sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^* \theta = \int_{\frac{\partial L}{\partial y}(T\Sigma)} \theta = \int_{\Gamma} \theta.$$

□

**Exemple 2.1.14.** On va prendre le cas particulier où  $k = 1$  i.e.  $L$  et  $\ell$  sont  $\mathcal{C}^\infty$

**Exemple 2.1.15.** Maintenant on prend  $k = 0$  avec  $\ell$  et  $L$  sont  $\mathcal{C}^0$  par morceaux i.e.  $L$  est  $\mathcal{C}^0$  et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $\ell$  est  $\mathcal{C}^0$  par morceaux.

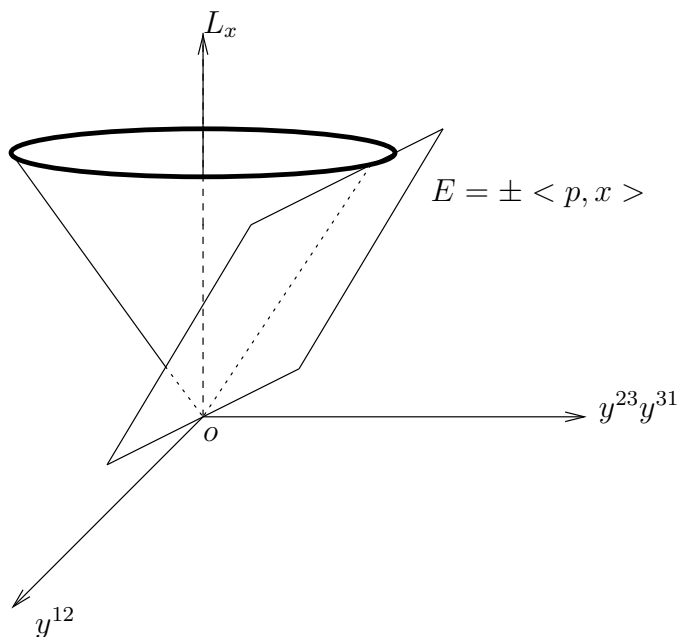


Figure 2.2 — Cas  $L$  et  $\ell$  sont  $C^\infty$ .

### 2.1.4 Comparaison avec les graphes

Cela correspond à la présentation donnée par Cartan. Prenons  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  et soit  $\Sigma$  la surface de graphe d'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on sait qu'au voisinage d'un point  $x \in (x^1, x^2, f(x^1, x^2)) \in \Sigma$ , l'espace tangent  $T_x \Sigma$  est engendré par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x^1} \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

et comme

$$\begin{aligned} u_1 \wedge u_2 &= \left( \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x^1} \left( \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^2} \left( \frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \end{aligned}$$

On note

$$y^{12} = 1, \quad y^{23} = -\frac{\partial f}{\partial x^1} \text{ et } y^{31} = -\frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Soit  $F(x^1, x^2, f, df)$  une densité lagrangienne telle que l'action au-dessus d'un carré infinitésimal  $dx^1 \wedge dx^2$  soit  $F(x^1, x^2, f, df) dx^1 \wedge dx^2$ . Alors il est possible de trouver une 2-forme d'action-aire  $\ell$  et un Lagrangien  $L$ , tels que pour toute surface  $\Sigma$  qui est un graphe au-dessus de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  on ait

$$\int_{\Omega} F(x^1, x^2, f, df) dx^1 \wedge dx^2 = \mathcal{L}(\Sigma) = \int_{T\Sigma} \ell.$$

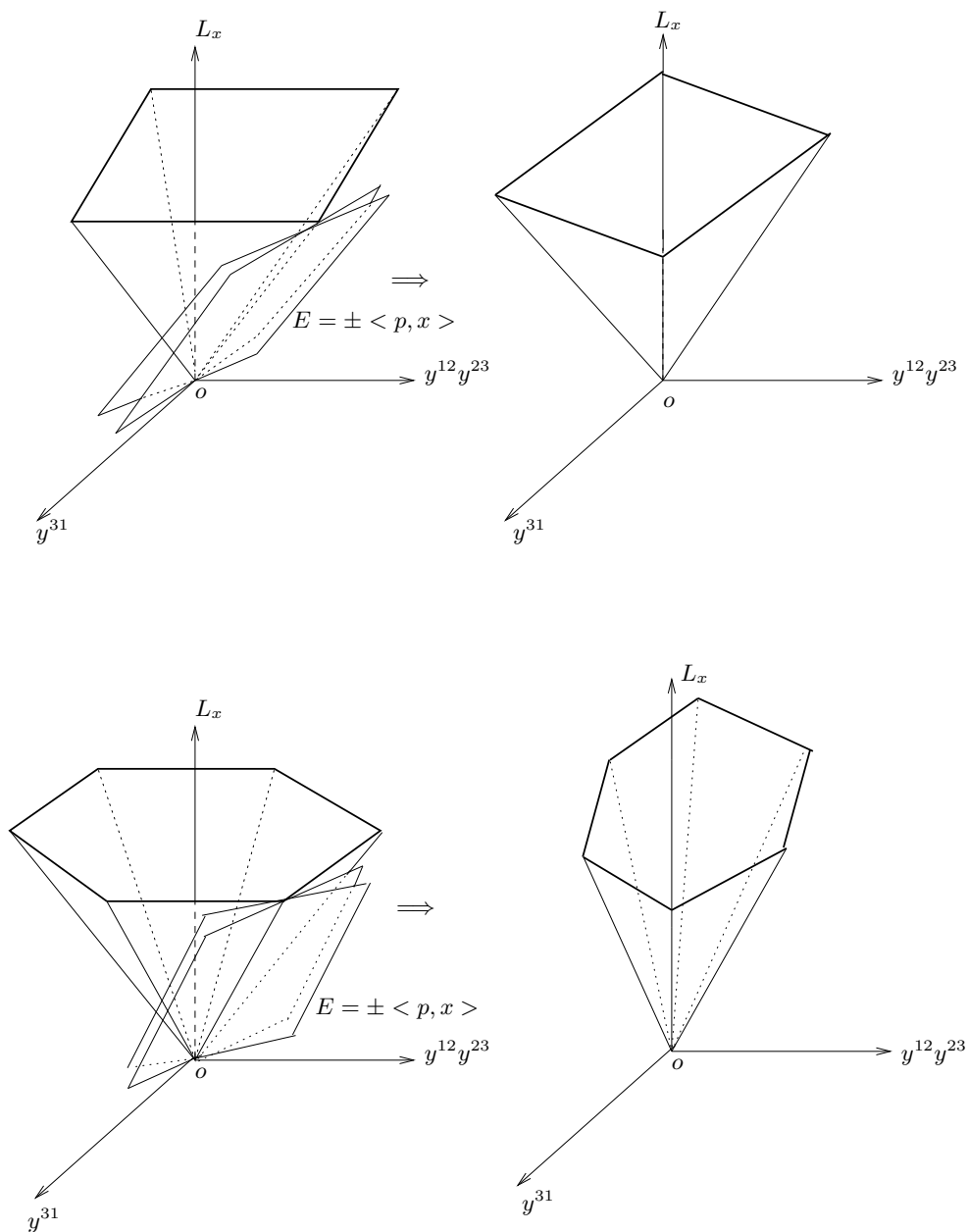


Figure 2.3 —  $k = 0$  et  $L$  et  $\ell$  sont  $C^0$  par morceaux.

En effet si  $(e_1, e_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  et si  $(u_1, u_2)$  est la base de  $T_x\Sigma$  au-dessus de  $(e_1, e_2)$  (i.e.  $u_1 = (e_1, df_x(e_1))$ ,  $u_2 = (e_2, df_x(e_2))$ ), et si  $F(x^1, x^2, f, df)$  est une densité lagrangienne, alors son action infinitésimale au-dessus du parallélogramme engendré par  $(e_1, e_2)$  vaut :

$$F(x^1, x^2, f, df) dx^1 \wedge dx^2(e_1, e_2) = F(x^1, x^2, f, df) dx^1 \wedge dx^2(u_1, u_2) = F(x^1, x^2, f, df) y^{12}$$

Mais par ailleurs on demande que cette quantité soit égale à

$$\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 3} \ell_{\alpha\beta}(x, y) dx^\alpha \wedge dx^\beta(u_1, u_2) = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 3} \ell_{\alpha\beta}(x, y) y^{\alpha\beta} = L(x, y)$$

On a donc

$$L(x, y) = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 3} \frac{\partial L}{\partial y^{\alpha\beta}} y^{\alpha\beta} = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 3} \ell_{\alpha\beta} y^{\alpha\beta} = y^{12} F(x^1, x^2, f, df)$$

comme  $\frac{y^{23}}{y^{12}} = -\frac{\partial f}{\partial x^1}$ ,  $\frac{y^{31}}{y^{12}} = -\frac{\partial f}{\partial x^2}$ , donc

$$L(x, y) = y^{12} F\left(x, f, -\frac{y^{23}}{y^{12}}, -\frac{y^{31}}{y^{12}}\right)$$

**Remarque 2.1.16.** Ce cas se généralise facilement pour les hypersurfaces dans une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$  et on trouve pour la comparaison des graphes

$$L(x_1 \dots x_n, [y]) = y^{1 \dots n-1} F\left(x, f, -\frac{y^{2 \dots n}}{y^{1 \dots n-1}}, \dots, -\frac{y^{n1 \dots n-2}}{y^{1 \dots n-1}}\right).$$

## 2.2 Formulation du problème avec les sous-variétés de dimension $p$ , de façon invariante

Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $x = (x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées locales sur  $\mathcal{M}$  et  $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$  une base de  $T_x \mathcal{M}$ , soit  $p < n$ , une base de  $\Lambda^p T_x \mathcal{M}$  est

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}.$$

On note  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y^{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$  les coordonnées sur  $\Lambda_D^p T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$  avec  $y = (y^{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$  représentent l'élément  $E$ . Si  $(u_1, \dots, u_p)$  une base direct de  $E$  alors  $u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in \Lambda^p T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$  représente  $E$ , plus précisément on note le sous ensemble de  $\Lambda_D^p T_x \mathcal{M}$  par

$$\Lambda_D^p T_x \mathcal{M} := \{u_1 \wedge \dots \wedge u_p | (u_1, \dots, u_p) \text{ base directe de } E \text{ et orientée dans } T_x \mathcal{M}\}$$

alors pour  $u \in \Lambda_D^p T_x \mathcal{M}$  on a

$$u := u_1 \wedge \dots \wedge u_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} y^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}$$

**Définition 2.2.1.** Soit un entier  $p < n$ , on définit le fibré grassmannien des sous espaces orientés de dimension  $p$ , dans  $T_x \mathcal{M}$  par :

$$Gr_x^p \mathcal{M} := \{(x, E) | x \in \mathcal{M}, E \text{ un élément orienté}^{(*)} \text{ dans } T_x \mathcal{M}\},$$

Pour tout  $x \in \mathcal{M}$ ,  $Gr_x^p \mathcal{M}$  est l'espace de tout les éléments de dimension  $p$  et orientés dans  $T_x \mathcal{M}$ .

On note  $\pi_{Gr^p \mathcal{M}} : Gr^p \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$  la projection canonique.



**Remarque 2.2.2.** On a

$$Gr_x^p \mathcal{M} \simeq (\Lambda_D^p T_x \mathcal{M} - \{\sigma_0\}) / \mathbb{R}^*,$$

donc les coordonnées homogènes sur le fibré Grassmannien au dessus de  $\mathcal{M}$  sont  $(x_1, \dots, x_n; [y^{i_1 \dots i_p}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n})$  i.e.

$$Gr^p \mathcal{M} := \{(x; [y]) := (x_1, \dots, x_n; [y^{i_1 \dots i_p}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}) \mid x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{M}$$

$$E = (y) = [y^{i_1 \dots i_p}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \text{ élément orienté dans } T_x \mathcal{M}\}$$

avec la condition  $y^{i_1 \dots i_k \dots i_{k'} \dots i_p} + y^{i_1 \dots i_{k'} \dots i_k \dots i_p} = 0$ .

### 2.2.1 Formulation Lagrangienne :

**Définition 2.2.3.** On note  $E_x = (x, [y]) := (x_1, \dots, x_n; [y^{i_1 \dots i_p}]_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}) \in T_x \mathcal{M}$ , on note une  $p$ -forme d'action aréolaire  $\ell$  sur  $Gr_x^p \mathcal{M}$  par

$$\ell(x, [y]) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \ell_{i_1 \dots i_p}(x, y) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

où  $\ell_{i_1 \dots i_p}$  sont homogènes de degré 0 en  $y$  sur  $]0, +\infty[$  i.e.  $\forall \lambda \in ]0, +\infty[$ ,  $L(x, \lambda y) = L(x, y)$ .

**Définition 2.2.4.** On définit un Lagrangien  $L$ , homogène de degré 1,  $L : \Lambda_D^p T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  comme étant une fonction continue sur  $\Lambda_D^p T_x \mathcal{M}$  telle que :

1.  $L$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $L : \Lambda^p T_x \mathcal{M} \setminus \{\sigma_0\}$  où  $\sigma_0$  est la section nulle.
2.  $L$  est homogène et de degré 1 en  $y$  sur  $]0, +\infty[$  i.e.  $\forall \lambda \in ]0, +\infty[$ ,  $L(x, \lambda y) = \lambda L(x, y)$ .

**Remarque 2.2.5.** Pour tout  $x \in \mathcal{M}$ , si  $(u_1, \dots, u_p)$  une base directe de  $T_x \mathcal{M}$  et soit l'élément  $E_x \in Gr_x^p \mathcal{M}$  alors  $L(x, u_1 \wedge \dots \wedge u_p)$  représente « *le volume infinitésimal* » formé par les  $p$  vecteurs  $u_1, \dots, u_p$ .

Soient  $(\theta_1, \dots, \theta_p)$  la base duale de  $(u_1, \dots, u_p)$ , on définit

$$\mathcal{L}(Gr_x^p \mathcal{M}) := \int_{TGr_x^p \mathcal{M}} L(x, u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_p, \quad (2.5)$$

On note

$$\ell_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial L}{\partial y^{i_1 \dots i_p}} \text{ pour } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n,$$

Par la formule d'Euler, on a

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \frac{\partial L}{\partial y^{i_1 \dots i_p}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \ell_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \ell(x; [y]) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \left( dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_1 \dots i_p}} \right) \lrcorner dL \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \frac{\partial L}{\partial y^{i_1 \dots i_p}} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \end{aligned}$$

On voit donc que le produit intérieur par  $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \left( dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_1 \dots i_p}} \right)$  coïncide avec l'opérateur canonique de  $(\Lambda^p T\mathcal{M})^* \rightarrow \Lambda^p T_x^* \mathcal{M}$ ; on écrit

$$\ell(x; [y]) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \left( dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_1 \dots i_p}} \right) \lrcorner dL$$

On note  $\mathcal{G} = \{(x, Gr_x^p \mathcal{M}); x \in \mathcal{M}\}$ . Soit  $L$  le Lagrangien pour tout  $\mathcal{G}$ ; on peut écrire l'action définie par (5.2) :

$$\mathcal{L}(Gr_x^p \mathcal{M}) := \int_{TGr_x^p \mathcal{M}} \ell = \int_{TGr_x^p \mathcal{M}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \left( dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_1 \dots i_p}} \right) \lrcorner dL.$$

**Définition 2.2.6.** Un point critique de  $\mathcal{L}$  si et seulement si, pour tout compact  $K \subset \mathcal{M}$ ,  $K \cap Gr_x^p \mathcal{M}$  est un point critique de  $\mathcal{L}_K(Gr_x^p \mathcal{M}) := \int_{\pi_{Gr_x^p \mathcal{M}}^{-1}(K) \cap TGr_x^p \mathcal{M}} \ell$ .

## 2.2.2 Transformée de Legendre-Formulation hamiltonienne (multisymplectique)

On définit la fonction

$$\begin{aligned} \Lambda_D^p T\mathcal{M} &\longrightarrow \Lambda_D^p T^* \mathcal{M} \\ (x, [y]) &\longmapsto \left( x, \frac{\partial L}{\partial y}(x, [y]) \right), \end{aligned}$$

où  $\frac{\partial L}{\partial y}(x, [y]) = \left( \frac{\partial L}{\partial y^{i_1 \dots i_p}}(x, y) \right)_{i_1 < \dots < i_p}$ . On considère la fonction hamiltonienne

$$\mathcal{H}(x, P) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} p_{i_1 \dots i_p} y^{i_1 \dots i_p} - L(x, y)$$

où  $y$  est solution de  $\frac{\partial L}{\partial y}(x, [y]) = p_{i_1 \dots i_p}(x, [y])$ . Comme  $L$  est homogène de degré 1 en  $y$  sur  $]0, +\infty[$ , on a par la formule d'Euler-Lagrange :

$$L(x, [y]) = \frac{\partial L}{\partial y^{i_1 \dots i_p}}(x, y) y^{i_1 \dots i_p} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} p_{i_1 \dots i_p} y^{i_1 \dots i_p}$$

Et donc l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  s'annule.

**Définition 2.2.7.** On dit que le Lagrangien est non dégénéré si  $L$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Lambda_D^p T\mathcal{M} \setminus \sigma_0$  et  $\frac{\partial(L^2)}{\partial y^{i_1 \dots i_p} \partial y^{i_1 \dots i_p}} > 0$

**Proposition 2.2.8.** *Notons  $\mathcal{I}$  l'image de la transformée de Legendre*

$$\mathcal{I} = \{(x, p) \in \Lambda_D^p T^* \mathcal{M} / p_{i_1 \dots i_p}(x, [y]) = \frac{\partial L}{\partial y^{i_1 \dots i_p}}(x, [y]), y \in \Lambda_D^p T \mathcal{M}\}$$

*On suppose que le lagrangien  $L : \Lambda_D^p T \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  est non dégénéré. Alors  $\mathcal{I}$  est une hypersurface régulière et convexe de  $\Lambda_D^p T^* \mathcal{M}$ .*

*Démonstration.* Voir la démonstration de la proposition (2.1.10). □

Dans le cas où le Lagrangien  $L$  est non dégénéré alors au dessus de tout point  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{I}$  est topologiquement une sphère dans  $\Lambda_D^p T^* \mathcal{M}$ .

On définit sur  $\Lambda^p T^* \mathcal{M}$  la  $p$ -forme  $\theta$  par

$$\theta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} p_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Soit  $\omega = d\theta$  alors

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} dp_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

On a bien que  $\omega$  est une forme multisymplectique sur  $\Lambda^p T^* \mathcal{M}$  et  $\omega|_{\mathcal{I}}$  est une forme pré-multisymplectique.

### 2.2.3 Comparaison avec les graphes

On va prendre  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  et  $\Gamma$  est le graphe de la fonction  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ . Notons  $(q_i^j := \frac{\partial f_j}{\partial x_i})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}}$ . On sait qu'au voisinage d'un point  $x = (x_1, \dots, x_p, f_1, \dots, f_{n-p}) \in \Gamma$ , on a l'espace tangent  $T_x \Gamma$  est engendré par

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_1} \end{pmatrix}, u^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \dots, u^p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_{n-p}}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

On a

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_p = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{j=p+1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_{j-p}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x_2} + \sum_{j=p+1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_{j-p}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \wedge \dots \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x_p} + \sum_{j=p+1}^n \frac{\partial f_p}{\partial x_{j-p}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} c^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}$$

avec  $c^{1\dots p} = 1$  et les  $c^{i_1\dots i_p}$  (où  $i_1\dots i_p \neq 1\dots p$ ) sont des fonctions qu'on peut déterminer et qui dépendent des  $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}}$ . En particulier, on peut vérifier que

$$\begin{cases} c^{12\dots p} = 1 \\ \frac{c^{1\dots i\dots pp+j}}{c^{123\dots p}} = -\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ pour } 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq n-p \end{cases}$$

On note  $c^{i_1\dots i_p} = y^{i_1\dots i_p}$ . Si  $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-p}$  et si  $(u_1, \dots, u_p)$  est la base de  $T_x\Gamma$  au-dessus de  $(e_1, \dots, e_p)$  i.e.  $\forall i = 1, \dots, p$  on a  $u_i = (e_i, df_x(e_i))$  et si  $F(x_1, \dots, x_p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f)$  est une densité Lagrangienne, alors son action infinitésimale au-dessus du parallélépipède engendré par  $(e_1, \dots, e_p)$  vaut :

$$F(x_1, \dots, x_p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p(e_1, \dots, e_p) =$$

$$F(x_1, \dots, x_p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p(u_1, \dots, u_p) = F(x_1, \dots, x_p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f) y^{1\dots p}$$

Mais par ailleurs on demande que cette quantité soit égale à

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}} \ell_{1\dots i\dots pp+j}(x, [y]) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_p \wedge dx_{p+j}(u_1, \dots, u_p)$$

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}} \ell_{1\dots i\dots pp+j}(x, [y]) y^{1\dots i\dots pp+j} = L(x, [y^{1\dots i\dots pp+j}]).$$

On a donc

$$\begin{aligned} L(x; [y]) &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}} \frac{\partial L}{\partial y^{1\dots i\dots pp+j}} y^{1\dots i\dots pp+j} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}} \ell_{1\dots i\dots pp+j}(x; [y]) y^{1\dots i\dots pp+j} = y^{1\dots p} F(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}, -\nabla f). \end{aligned}$$

Et comme  $\frac{c^{1\dots i\dots pp+j}}{c^{123\dots p}} = -\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq n-p$  or  $c^{i_1\dots i_p} = y^{i_1\dots i_p}$ ; alors

$$L(x, [y]) = y^{1\dots p} F \left( x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}, \left( \frac{y^{1\dots i\dots pp+j}}{y^{123\dots p}} \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}} \right).$$

# Géométrie de Cartan fondée sur la notion d'aire

## Introduction

L'espace construit par Cartan dans [Car33] est composé d'une multitude d'espaces euclidiens. Ces espaces sont distribués au voisinage d'un point  $M \in \mathcal{M}$ , en restant tangents à la variété. Dans cet espace, la distance entre deux points « infiniment voisins »,  $ds$  dépend encore de l'orientation de l'hyperplan autour de  $M \in \mathcal{M}$  dont les directions pourraient être représentées par le noyau de la forme linéaire  $\xi := x^1 \xi_1 + \dots + x^n \xi_n \in T_M^* \mathcal{M}$ . Soient  $\beta = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$  la  $(n-1)$ -forme et  $H$  l'hyperplan orienté dans  $T_M \mathcal{M}$ . On appelle « élément de contact » la donnée du point  $M$  et de l'hyperplan  $H$ . Nous allons considérer l'espace de ces éléments, que nous appelons la grassmannienne et notons  $Gr_{n-1}(\mathcal{M})$  (qui est de dimension  $2n-1$ ). Plus généralement, pour  $1 \leq p \leq n-1$ , nous introduisons l'élément  $E = (\xi_1, \dots, \xi_p)$  tangent en un point  $M \in \Sigma$  et orienté dans  $T_M \mathcal{M}$ , et on définit

$$Gr_p \mathcal{M} = \{E = (M, H) | M \in \mathcal{M}, H : \text{élément orienté dans } T_M \mathcal{M}\}.$$

Cet espace est de dimension  $n + p(n-p)$ , et la grassmannienne présentée ici est le modèle de variété de type espace de Cartan qui nous intéresse. Dans ce chapitre, nous donnons des définitions générales. Nous considérons une métrique  $g^{(**)}$  définie localement sur l'image inverse « pull-back » de l'espace tangent. Nous commençons par le cas particulier  $n = 2$ . Nous définissons la connexion sur l'espace tangent et nous déterminons son expression dans un repère mobile. Nous constatons que, si  $n = 2$ , la géométrie de Cartan coïncide avec celle de Finsler. Nous définissons la métrique et les tenseurs au sens de Cartan et nous terminons par un exemple : « l'espace harmonique ».

## 3.1 Définitions générales

La géométrie finslerienne a été généralisée par Élie Cartan qui fait appel à la notion d'espace d'éléments linéaires à connexion euclidienne, un élément étant l'ensemble d'un

---

(\*\*) La métrique définit par Cartan dans [Car33].

point  $M(x^i)$  et d'un hyperplan  $H$  passant par ce point. Si on note  $(e_1, \dots, e_n)$  le repère mobile sur  $\mathcal{M}$  et le corepère  $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  la base duale, et si  $\xi \in T_M^* \mathcal{M}$  alors  $\xi = \xi_i \alpha^i$  nous pouvons considérer l'hyperplan comme le noyau de la forme linéaire  $\xi$ . On note le fibré grassmannien  $Gr_{n-1}(\mathcal{M})$  par :

$$Gr_{n-1} \mathcal{M} = \{E = (M, H) \mid M \in \mathcal{M}, H : \text{hyperplan orienté dans } T_M \mathcal{M}\}$$

Notons la projection  $\pi$  par :

$$\begin{aligned} \pi : Gr_{n-1} \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (M, H) &\longmapsto M \end{aligned}$$

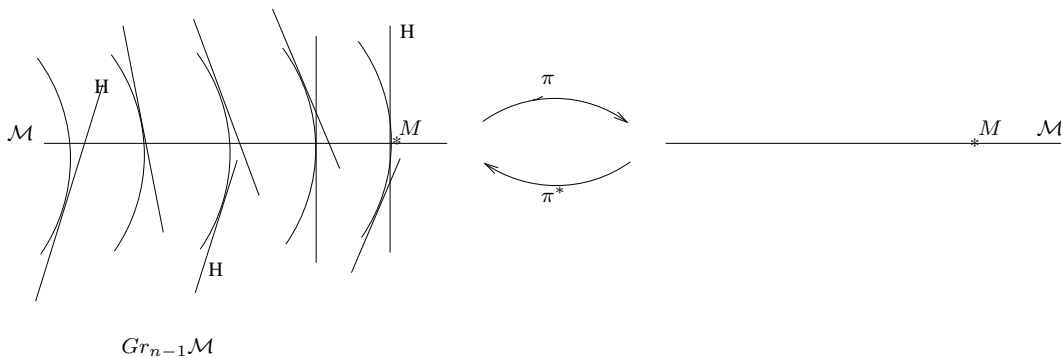


Figure 3.1 —

Nous considérons  $\pi^* T \mathcal{M}$  le fibré au-dessus du fibré grassmannien dont la fibre en  $(M, H)$  est  $T_M \mathcal{M}$  et nous définissons la métrique  $g$  sur  $\pi^* T \mathcal{M}$  comme étant la donnée, pour toute paire  $(M, H)$ , d'un produit scalaire sur  $T_M \mathcal{M}$  noté

$$g_{(M,H)} = g_{ij}(x^k, \xi_k) dx^i dx^j$$

qui définira la distance du centre  $(x^i)$  de l'élément  $(x^i, \xi_i)$  au centre  $(x^i + dx^i)$  de l'élément infiniment voisin  $(x^i + dx^i, \xi_i + d\xi_i)$ . Si l'on regarde les différentielles  $dx^i$  comme les composantes  $X^i$  d'un vecteur d'origine  $(x^i)$ , alors le carré de la longueur de ce vecteur devient :

$$g_{ij}(x^k, \xi_k) X^i X^j$$

Cartan considère que les coefficients  $g_{ij}$  ne dépendront pas seulement des coordonnées du centre  $M$  ; ils dépendront encore de l'orientation de l'élément autour de  $M$  c'est-à-dire des vecteurs  $\xi_i$ .

**Définition 3.1.1.** Une *géométrie fondée sur la notion d'aire*  $(\mathcal{M}, F)$  est une variété différentielle  $\mathcal{M}$  munie d'une fonction  $F$  définie sur  $T^* \mathcal{M}$  à valeur dans  $\mathbb{R}_+$

$$F : T^* \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

qui vérifie les conditions suivantes :

1.  $F$  est  $C^\infty$  sur  $T^*\mathcal{M} \setminus 0$
2.  $F$  est de degré un en  $\xi_k$ , c'est à dire pour tout  $\lambda$  positif on a :

$$F(x^k, \lambda\xi_k) = \lambda F(x^k, \xi_k)$$

3. La matrice hessienne définie par

$$(g_{ij}) := \left[ \frac{1}{2}(F^2)_{\xi_i, \xi_j} \right]$$

est définie positive en tout point de  $Gr_{n-1}(\mathcal{M}) \setminus 0$ .

C'est à dire que  $F|_{T_x^*\mathcal{M}}$  est une norme de Minkowski pour tout  $x \in \mathcal{M}$ .

**Définition 3.1.2.** Les vecteurs verticaux sur la Grassmannienne  $Gr_{n-1}(\mathcal{M})$  sont les vecteurs tangents aux fibres qui sont obtenus en calculant  $\ker \pi_* := \ker d\pi$

**Définition 3.1.3.**  $\alpha$  une forme horizontale  $\Leftrightarrow \forall v$  vertical alors  $\iota_v \alpha = 0$

**Remarque 3.1.4.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectorielle et  $E^* := \{ \text{formes linéaires } h : E \rightarrow \mathbb{R} \}$ .

On peut voir que les hyperplans sur  $Gr_{n-1}(E)$  sont représentés comme les noyaux des formes  $h$  et on a donc :

$$Gr_{n-1}(E) \simeq P(E^*) := (E^* - \{0\}) / \mathbb{R}^*$$

et du fait qu'on a  $T^*\mathcal{M} \setminus \{0\} := \bigcup_{x \in \mathcal{M}} (T_x^*\mathcal{M} \setminus \{0\})$  on peut donner la définition suivante

**Définition 3.1.5.** Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension  $n$  et  $T^*\mathcal{M}$  l'espace cotangent à  $\mathcal{M}$  alors on a

$$Gr_{n-1}(\mathcal{M}) \simeq P(T^*\mathcal{M}) := (T^*\mathcal{M} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^*$$

## 3.2 Étude de la géométrie de Cartan fondée sur la notion d'aire en dimension 2

On se place tout d'abord dans le cas  $n = 2$ . Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension 2 et  $(x, y)$  les coordonnées sur  $\mathcal{M}$ , nous considérons l'intégrale

$$\int F(x, y, p) dx$$

Supposons qu'on intègre sur une partie de la courbe  $y = f(x)$ , où l'on a posé  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ , supposons que cette intégrale soit étendue à une portion de courbe (extrémale)  $\gamma$  limité par deux points  $M_1$  et  $M_2$ , déformons légèrement ces deux points respectivement en  $M'_1$  et  $M'_2$  et reliant ces deux points par un courbe (extrémale)  $\gamma'$  alors, d'après le théorème

de Donder du calcul des variations l'intégrale précédente subit une petite variation qui est égale à l'intégrale :

$$\int \left( F - p \frac{\partial F}{\partial p} \right) dx - \frac{\partial F}{\partial p} dy$$

où  $p$  désigne le paramètre directeur du tangent à la courbe (extrémale)  $\gamma$  et aussi ce n'est plus la dérivée de  $f(x)(= y)$  par rapport à  $x$ . Si on trace les deux courbes  $M_1M'_1$  et  $M_2M'_2$  qui représentent les positions successives de passage de la portion de courbe  $\gamma$  à  $\gamma'$ , alors, d'après Cartan dans [Car33], pour que la variation de longueur des courbes (extrémales)  $\gamma_t$  pour passer de  $\gamma$  à  $\gamma'$  soit nulle, il suffit que les tangentes à  $M_1M'_1$  et  $M_2M'_2$  aient pour paramètres directeurs

$$F - p \frac{\partial F}{\partial p}, -\frac{\partial F}{\partial p}$$

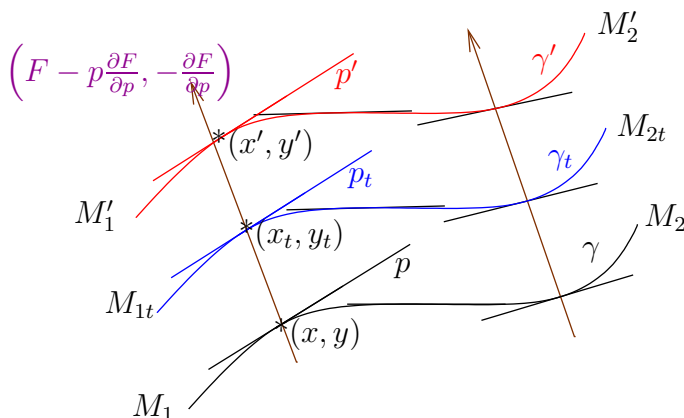


Figure 3.2 —

La direction normale ne dépend que de l'élément  $(x, y, p)$  déterminé par le point  $(x, y)$  et la droite de paramètre directeur  $p$ . On conclut alors que la direction normale à l'élément  $(x, y, p)$  est

$$F - p \frac{\partial F}{\partial p}, -\frac{\partial F}{\partial p}$$

$F dx$  représente la longueur d'un élément de courbe dont la tangente a pour paramètre  $p$ . Introduisons des coordonnées homogènes  $\xi_1, \xi_2$  telles que  $\xi_2 = \frac{\xi_1}{-p}$  et posons

$$\xi_2 F(x^1, x^2; p) = L(x^1, x^2; \xi_1, \xi_2)$$

$L$  étant homogène et du premier degré par rapport à  $(\xi_1, \xi_2)$ , on a :

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1} = -\frac{\partial F}{\partial p}$$



$$\frac{\partial L}{\partial \xi_2} = F - p \frac{\partial F}{\partial p}$$

alors les paramètres directeurs de la direction normale à l'élément  $(x, y, \xi_1, \xi_2)$  sont

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial \xi_2}$$

Soit  $\mathcal{M}$  une variété de dimension 2 alors la variété base est

$$\begin{aligned} Gr_1(\mathcal{M}) &= \{E = (M, D) | M \in \mathcal{M} \text{ et } D \text{ droite orientée dans } T_M \mathcal{M}\} \\ &= \{E = (x^1, x^2, \xi_1, \xi_2) \in T_M \mathcal{M} | dx^1 \wedge dx^2|_E > 0\} \end{aligned}$$

où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont des coordonnées homogènes qui définissent la direction tangent à l'élément  $E := (x, y, \xi_1, \xi_2)$ , cette dernière peut être représentée par le noyau de la forme linéaire suivante

$$\xi_1 \alpha^1 + \xi_2 \alpha^2 = 0$$

où  $(\alpha^1, \alpha^2)$  représente la base de  $T_x^* \mathcal{M}$ , avec  $x \in \mathcal{M}$ .

**Remarque 3.2.1.** Dans le cas  $n = 2$ , Cartan et Finsler ont la même variété de base, donc nous sommes dans le cas de Finsler.

**Proposition 3.2.2.** Soient  $\ell = (\ell^1, \ell^2)$  un vecteur unitaire normal à l'élément  $(x^1, x^2; \xi_1, \xi_2)$  et  $L$  la fonction qui définit l'espace de Cartan; on a :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial L}{\partial \xi_1}, \frac{\partial L}{\partial \xi_2} \right)$$

*Démonstration.* Nous avons déjà montré que la direction normale à l'élément  $(x^1, x^2; \xi_1, \xi_2)$  a comme paramètres directeurs

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial \xi_2}$$

Notons  $dl$  une petite variation sur l'élément alors

$$dl = \left( \frac{\partial L}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial L}{\partial \xi_2} \frac{\partial}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \frac{\partial L}{\partial \xi_1} dx^2 + \frac{\partial L}{\partial \xi_2} dx^1;$$

Il nous reste à calculer la longueur de la normale dont les composantes sont les  $\left( \frac{\partial L}{\partial \xi_1}, \frac{\partial L}{\partial \xi_2} \right)$ . Pour cela regardons que la variation sur l'élément est construite sur le vecteur  $(dx^1, dx^2)$ ; remarquons

$$d\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial \xi_1} & -\frac{\partial L}{\partial \xi_2} \\ dx^1 & dx^2 \end{vmatrix}$$

Le second membre est le déterminant formé par les composantes des deux vecteurs, l'un de longueur  $l$  normal à l'élément et l'autre tangent à l'élément alors l'aire sera

$l d\sigma = \sqrt{g} d\sigma$ ,<sup>(\*)</sup> ce qui donne  $l = \sqrt{g}$ , alors les composantes contravariantes du vecteur unitaire normal à l'élément  $(\xi_1, \xi_2)$ , sont les quantités

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial \xi_1} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial \xi_2}$$

□

**Remarque 3.2.3.** Ce résultat se généralise même pour  $n > 2$ . Il devient donc

$$\ell := (\ell^i)_{i=1, \dots, n} = \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \right)_{i=1, \dots, n}$$

### 3.2.1 Connexion euclidienne : expression d'une connexion dans un repère mobile

La connexion dans ce cas sera définie localement sur  $\pi^*T_x\mathcal{M}$ . Soit  $E = (M, D)$  représenté par  $(x^1, x^2; \xi_1, \xi_2)$  un élément qui varie infiniment peu; imaginons que ses coordonnées soient exprimées en fonction d'un paramètre  $t$  à cet instant l'élément est noté  $E(t)$  où  $t$  est un paramètre réel positif. Si  $(e_1, e_2)$  un repère mobile cartésien de  $\pi^*T_M\mathcal{M}$  à l'instant  $t$ , alors  $\forall i = 1, 2$ ,  $e_i$  est une section de  $\pi^*T_M\mathcal{M}$  satisfaisant aux équations différentielles :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dM(t)}{dt} = \frac{dx^i}{dt} e_i \\ D \frac{d}{dt} e_i = (C_i^{jh}(x^k, \xi_k) \frac{d\xi_h}{dt} + \Gamma_{ih}^j(x^k, \xi_k) \frac{dx^h}{dt}) e_j \end{array} \right.$$

où les coefficients  $C_{ih}^j$  et  $\Gamma_{ih}^j$  sont naturellement des fonctions des  $(x^1, x^2; \xi_1, \xi_2)$  et sont arbitraires et qui représentent respectivement la déformation de la droite  $D$  par rapport à sa position initiale et la déformation infinitésimale de l'espace par rapport à un espace plat. Si on change les coefficients la métrique change alors si on veut que la connexion  $D$  respecte la métrique on obtient alors certaines conditions supplémentaires sur les coefficients.

Notons à l'instant  $t = 0$ , la position du repère  $e_i^0$ , qui vérifie la condition :

$$e_i^0 e_j^0 = g_{ij}^0.$$

Notons  $PT^*\mathcal{M}$  la projection sur l'espace cotangent de la variété  $\mathcal{M}$ , l'espace des plans modulo une fonction et notons

$$\mathcal{F}_1|_{PT_x^*\mathcal{M}} = T_x\mathcal{M} \times PT_x^*\mathcal{M}$$

$$\mathcal{F}_2|_{T_x\mathcal{M}} = T_x\mathcal{M} \times PT_x^*\mathcal{M}$$

Pour déterminer la connexion complète on remarque que :

---

(\*) Démontrer dans le chapitre suivant.

1. si on reste dans la même fibre c'est-à-dire on laisse le point  $M$  fixe et si on fait varier infiniment peu l'élément autour de point  $M$ , on définit sur  $\mathcal{F}_1$  la connexion plate et canonique  $D_1$  et les coefficients qui interviennent sont les  $C_k^{ij}$ . Dans ce cas la dérivée covariante de la  $i^{\text{ème}}$  composante d'un vecteur  $X \in \pi^*T_M\mathcal{M} = (X^1, X^2)$  est donnée par

$$D_1X^i = (X^1, X^2) \begin{pmatrix} C_1^{i1} & C_1^{i2} \\ C_2^{i1} & C_2^{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi_1 \\ d\xi_2 \end{pmatrix} = X^k C_k^{ih} d\xi_h$$

où les coefficients  $C_k^{ih}$  sont des fonctions des  $(x^1, x^2; \xi_1, \xi_2)$  homogènes et de degré un par rapport à  $(\xi_1, \xi_2)$ .

2. soit  $E$  un élément de centre  $M$ , et soit un vecteur  $X = (X^1, X^2)$ . Quand son origine se déplace infiniment peu et quand son élément se déduit de proche en proche de  $E$  par transport parallèle, alors la dérivée de covariante  $D_2$  définie sur  $\mathcal{F}_2$  est donnée par

$$D_2X^i = \begin{pmatrix} dX^1 \\ dX^2 \end{pmatrix} + (X^1, X^2) \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^i & \Gamma_{21}^i \\ \Gamma_{12}^i & \Gamma_{22}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \end{pmatrix} = dX^i + X^k \Gamma_{kh}^i dx^h$$

**Définition 3.2.4.** Soient  $X, Y$  deux éléments de  $\pi^*T_M\mathcal{M}$ , on peut écrire alors  $X = X^i = (X^1, X^2)$ . Lorsque le vecteur tangent  $X$  et ses composantes varient infiniment peu, sa variation géométrique ou sa dérivée covariante est donnée par :

$$D_X = D_1X^i + D_2X^i = dX^i + X^k \omega_k^i$$

où

$$\omega_k^i = C_k^{ih} d\xi_h + \Gamma_{kh}^i dx^h$$

### 3.2.2 Méthode de calcul des coefficients $C_k^{ih}, \Gamma_{kh}^i$

Le calcul de la dérivée covariante de  $g_{(M,P)}$  donne :

$$\begin{aligned} Dg_{(M,P)} &= dg_{ij}X^iX^j - g_{ik}X^iX^j(C_j^{kh}d\xi_h + \Gamma_{jh}^k dx^h) - g_{jk}X^iX^j(C_i^{kh}d\xi_h + \Gamma_{ih}^k dx^h) \\ &= (dg_{ij} - (C_{jn}^h + C_{ij}^h)d\xi^h - (\Gamma_{jh}^i + \Gamma_{ij}^h)dx^h)X^iX^j \\ &= (dg_{ij} - (\omega_{ij} + \omega_{ji}))X^iX^j \end{aligned}$$

En vertu de  $Dg_{(M,P)} = 0$ , alors :

$$dg_{ij} = g_{ik}\omega_j^k + g_{jk}\omega_i^k = \omega_{ij} + \omega_{ji}$$

Ce qui donne des relations importantes pour déterminer les coefficients  $C_{ij}^h$  et  $\Gamma_{ijh}$ , si la métrique  $g_{(M,P)}$  est donnée, qui sont :

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi_h} = g_{ik}C_j^{kh} + g_{jk}C_i^{kh} = C_{jn}^h + C_{ij}^h$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{ik}\Gamma_{jh}^k + g_{jk}\Gamma_{ih}^k = \Gamma_{jh} + \Gamma_{ijh}$$

Comme le cas de la géométrie riemannienne, en tout points  $M \in \mathcal{M}$ , la métrique  $g$  sur  $\pi^*T_M\mathcal{M}$  induit une métrique sur son dual  $(\pi^*T_M\mathcal{M})^* = \pi^*T_M^*\mathcal{M}$ , on peut introduire aussi les composantes covariantes  $X_i$  qui sont :

$$X_i = g_{ik}X^k \text{ ou } X^i = g^{ik}X_k.$$

où l'on a :  $g_{ik}g^{kj} = \delta_j^i$  alors

$$g_{ij}X^iX^j = X^iX_i = g^{ij}X_iX_j$$

ce qui donne en tenant compte que la connexion  $D$  respecte la métrique  $g_{(M,P)}$  et qu'on définit  $DX_i = dX_i - X_kC_i^{kh}d\xi_h - X_k\Gamma_{ih}^k dx^h$ , on démontre facilement :

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi_h} = -C^{ijh} - C^{jhi}. \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^h} = -\Gamma_h^{ij} - \Gamma_h^{ji}. \quad (3.2)$$

• **calcul des coefficients  $C_k^{nh}$**  : En utilisant 3.1 et on impose la condition que  $C_k^{nh} = C_k^{hn}$  mais la question est “ que signifie  $C_k^{nh} = C_k^{hn} ? ”$ . On va définir “la loi de symétrie”<sup>(\*)</sup>

**Proposition 3.2.5.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux éléments de la même fibre, supposons que les composantes contravariantes restent fixe, et que l'élément d'appui tourne autour de son centre nous faisons l'hypothèse que*

$$YD_1X = XD_1Y \quad \text{pour } i, j \text{ on a } Y_iD_1X^i = X_iD_1Y^i.$$

Alors

$$Y_iX^kC_k^{nh}d\xi_h = X_iY^kC_k^{nh}d\xi_h,$$

en multipliant par,  $g^{jk}g_{jk}$ , on obtient

$$Y_iX_jC^{jh}d\xi_h = X_iY_jC^{jh}d\xi_h$$

ce qui donne par un changement d'indice :

$$C^{nh}X_iY_jd\xi_h = C^{ijh}Y_jX_id\xi_h.$$

Cette relation est vérifiée pour tous  $i, j$  et  $h$ , ce qui entraîne effectivement que les coefficients  $C^{ijh}$  sont symétriques par rapport aux deux premiers indices :

$$C^{ijk} = C^{jik}$$

En utilisant 3.1 on a :

$$C^{ijk} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial \xi_k}.$$

---

(\*)La loi de symétrie imposé par Cartan dans [Car33].

• **calcul des coefficients**  $\Gamma_{kh}^i$  : Les équations 3.2 sont au nombre de  $\frac{n \cdot n(n+1)}{2} = 6$  seulement et nous avons  $n^3 = 8$  inconnus sachant qu'on n'a pas de condition symétrique sur les  $\Gamma_h^{ij}$ . Il faut donc ajouter des conditions pour achever la détermination complète de la connexion. Pour déterminer complètement la connexion, il nous reste à expliciter les coefficients  $\Gamma_{kh}^i$ . Imaginons, comme en géométrie riemannienne, un cycle ponctuel infinitésimal partant d'un point  $M$  et y revenant et soit  $E$  un élément donné de centre  $M$ . Effectuons dans l'espace euclidien la carte de cycle en attachant à chaque point du cycle l'élément qui se déduit de proche en proche de  $(E)$  par transport parallèle. Dans la carte ainsi construite, et si les coefficients  $\Gamma_{kh}^i$  sont quelconques, alors le cycle ne fermera pas. Nous imposerons à ces coefficients la condition que le cycle se ferme (la même condition que celle que la connexion euclidienne de Levi-Civita impose aux coefficients  $\Gamma_{kh}^i$ , en géométrie riemannienne qui se traduit par la relation  $\Gamma_{kh}^i = \Gamma_{hk}^i$ , il n'en est plus de même ici).

Le cycle se fait sans rotation de l'hyperplan, alors la dérivée covariante du vecteur unitaire normal, est sur  $\mathcal{F}_2$ , donnée par :

$$\begin{aligned} D_2 \ell_i &= d\ell_i - \ell_k \Gamma_{kh}^i dx^h = d\left(\sqrt{g} \frac{\xi_i}{L}\right) - \sqrt{g} \frac{\xi_k}{L} \Gamma_{kh}^i dx^h \\ &= \sqrt{g} d\frac{\xi_i}{L} + \left(\frac{\xi_i}{L} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^h} - \sqrt{g} \frac{\xi_k}{L} \Gamma_{ih}^k\right) dx^h \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$d\xi_i = \xi_i \frac{dL}{L} - \frac{1}{2} \xi_i \frac{\partial \log g}{\partial x^h} dx^h + \xi_k \Gamma_{ih}^k dx^h$$

Or du faite que  $\xi_k C_i^{jk} = 0$  on a

$$\begin{aligned} \omega_i^j &= C_i^{jk} d\xi_k + \Gamma_{ih}^j dx^h = C_i^{jk} \left(\xi_k \frac{dL}{L} - \frac{1}{2} \xi_k \frac{\partial \log g}{\partial x^h} dx^h + \xi_l \Gamma_{kh}^l dx^h\right) + \Gamma_{kh}^j dx^h \\ &= (\Gamma_{ih}^j + C_i^{jk} \xi_l \Gamma_{kh}^l) dx^h \end{aligned}$$

Si on pose  $\tau_{ih}^j = \Gamma_{ih}^j + C_i^{jk} \xi_l \Gamma_{kh}^l$ . Posons :

$$\Upsilon_{ih}^j = \tau_{ih}^j - \tau_{hi}^j = \Gamma_{ih}^j + C_i^{jk} \xi_l \Gamma_{kh}^l - (\Gamma_{hi}^j + C_h^{jk} \xi_l \Gamma_{ki}^l)$$

Dans le cas où le cycle est ferme, on a bien  $\Upsilon_{ih}^j = 0$ , mais ces équations sont au nombre de  $\frac{n \cdot n(n-1)}{2} = 2$ , alors que les inconnues sont au nombre de  $n^3 = 8$ . Il faut encore ajouter les équations suivantes, au nombre de  $\frac{n \cdot n(n+1)}{2} = 6$  :

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^h} = -\Gamma_h^{ij} - \Gamma_h^j$$

Finalement le nombre des équations égal au nombre des inconnues (c'est-à-dire  $n^3$ ), et cela détermine complètement la connexion, mais il faut faire attention, c'est-à-dire il faut montrer que ce système suivant admet une seule solution :

$$\begin{cases} \Gamma_{ih}^j + C_i^{jk} \xi_l \Gamma_{kh}^l - (\Gamma_{hi}^j + C_h^{jk} \xi_l \Gamma_{ki}^l) = 0 \\ \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^h} = -\Gamma_h^{ij} - \Gamma_h^j \end{cases} \quad (3.3)$$

On va résoudre le cas  $n = 2$ ; (et le cas pour  $n > 2$  est résolu dans [Car33]). Dans le où  $n = 2$ , le système 3.3 s'écrit sous la forme des deux système 3.4 et 3.5.

$$\begin{cases} \tau_{12}^1 - \tau_{21}^1 \\ \tau_{12}^2 - \tau_{21}^2 \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_1^{11} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{11}}{\partial x^1} \\ \Gamma_2^{11} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{11}}{\partial x^1} \\ \Gamma_1^{22} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{22}}{\partial x^1} \\ \Gamma_2^{22} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{22}}{\partial x^2} \\ \Gamma_1^{12} + \Gamma_1^{21} = -\frac{\partial g^{12}}{\partial x^1} \\ \Gamma_2^{12} + \Gamma_2^{21} = -\frac{\partial g^{12}}{\partial x^2} \end{cases} \quad (3.5)$$

dans le système 3.5 on a déterminé les  $\Gamma_1^{11}, \Gamma_2^{11}, \Gamma_1^{22}$  et  $\Gamma_2^{22}$ , d'après le système 3.4 et les deux dernières équations de système et en utilisant le fait que  $\Gamma_{hk}^k = g_{hk} \Gamma_i^{lk}$  on peut déterminer facilement les  $\Gamma_1^{12}, \Gamma_1^{21}, \Gamma_2^{12}$  et  $\Gamma_2^{21}$ .

### 3.2.3 Présentation des courbes sur la Grassmannienne

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe sur la variété  $\mathcal{M}$ , on lui associe une famille d'éléments  $E$  ayant comme centre chaque point de la courbe; comme la distance de deux points dépend de l'orientation de l'élément autour de ce point alors la courbe n'a pas de longueur précise et la théorie des courbes disparaît complètement et pour donner un sens à ceci on va donner la définition suivante :

**Définition 3.2.6.** Étant donné un courbe  $\mathcal{C}$  sur  $\mathcal{M}$  et un point  $M = (x^i)_i \in \mathcal{C}$  et  $M' = (x^i + dx^i)_i \in \mathcal{C}$  infiniment voisin, si on attache à chaque point de  $\mathcal{C}$  l'élément normal à la courbe en ce point, alors  $\mathcal{C}$  a une longueur bien déterminée. Soit  $\ell = (\ell^i)_i$  un vecteur unitaire normal à la courbe en ce même point, on définit la longueur d'arc  $ds$  par

$$ds := \frac{1}{\ell^i} dx^i \text{ ou encore } ds := \frac{\sqrt{g}}{\frac{\partial L}{\partial \xi_i}} dx^i.$$

Les lignes qui réalisent l'extremum de  $\int ds$  sont les *géodésiques*, ou on peut dire sont celles le long desquelles le vecteur unitaire tangent au éléments normaux à la courbe restent parallèles à lui-même i.e  $D\ell^i := \omega^i = 0$ .

## 3.3 La métrique, les tenseurs

### 3.3.1 Détermination des coefficients $g^{ij}$ au voisinage de l'élément $(x^1, x^2, \xi_1, \xi_2)$

Comme  $L$  est homogène et de première degré en  $\xi_1, \xi_2$  alors  $\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial \xi_1} \xi_1 + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial \xi_2} \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} L$ , si on note  $(l^1, l^2)$  les composantes covariantes du vecteur unitaire normal, du fait que

$l^1 l_1 = 1 = l^2 l_2$ , on aura pour  $i = 1, 2$  :

$$l_i = \sqrt{g} \frac{\xi_i}{L}.$$

Alors on a bien :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = g^{ik} \sqrt{g} \frac{\xi_i}{L}$$

ou encore :

$$g g^{ik} \xi_k = L \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \quad (3.6)$$

Ces équations sont au nombre de 2, mais nous avons 3 inconnues ; pour achever cette détermination considérons, en particulier, un vecteur dont les composantes covariantes sont  $\xi_i$  et notons  $\xi^i$  ces composantes contravariantes

$$D\xi^i := \xi^k C_{kh}^i d\xi^h = \xi_k C^{ikh} d\xi_h = -\frac{1}{2} \xi_k dg^{ik} = \frac{1}{2} \frac{dg}{g} \cdot g^{ik} \xi_k$$

On déduit que

$$\xi_k d(gg^{ik}) = 0$$

alors la différentiation des équations 3.6 donne :

$$g g^{ij} = L \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \frac{\partial L}{\partial \xi_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (L^2)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$$

la multiplication de ces équations par  $\xi_j$  et la sommation par rapport à  $j$  et le fait que  $L_j := \frac{\partial L}{\partial \xi_j}$  est homogène de degré zéro redonnent les équations 3.6.

Posons  $a = |a^{ij}|$  où  $a^{ij}$  sont les coefficients de la hessienne de la forme  $\frac{1}{2}L^2$ , on a bien alors :

$$a^{ij} = L \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \frac{\partial L}{\partial \xi_j}$$

Comme :

$$a = |a^{ij}| = |g g^{ij}| = g^2 |g^{ij}| = g^2 g^{-1} = g$$

ceci nous donne ;

$$g^{ij} = \frac{1}{2a} \frac{\partial^2 (L^2)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$$

### 3.3.2 Métrique angulaire en un point de la variété

Soit  $\{H, (M, H) \in Gr_{n-1}\mathcal{M}\}$  la fibre en  $M$  de la variété, notée  $T_{(M,H)}((Gr_{n-1})_M\mathcal{M}) \subset T_{(M,H)}(Gr_{n-1}\mathcal{M})$ . On veut alors déterminer l'angle  $\varphi$  de deux éléments infiniment voisins de la même fibre ; il se définira exactement comme en géométrie euclidienne :

Si on note  $\ell^i$  et  $\ell_i$  les composantes et les composantes duales des vecteurs unitaires considérés alors sur  $\mathcal{F}_1$  on a :

$$D\ell_i = d\ell_i - \ell_k C_i^{kh} d\xi_h \text{ et } D\ell^i = d\ell^i + \ell^k C_k^{ih} d\xi_h$$

on a alors :

$$d\varphi^2 = D\ell_i D\ell^i$$

En utilisant ce qui précède, on a bien :

$$\begin{aligned} D\ell^i &= d\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial L}{\partial \xi_i}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial L}{\partial \xi_k} C_k^{ih} \xi_h = d\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial L}{\partial \xi_i}\right) + \frac{1}{2} \frac{dg}{g} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial \xi_i} \\ &= d\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial L}{\partial \xi_i}\right) - d\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\sqrt{g}} d\frac{\partial L}{\partial \xi_i} \end{aligned}$$

De même, on montre que :

$$D\ell_i = \sqrt{g} d\frac{\xi_i}{L}$$

Le carré de l'angle de deux éléments infiniment voisins et de même centre est donc :

$$d\varphi^2 = d\frac{\partial L}{\partial \xi_i} d\frac{\xi_i}{L} = d\frac{\partial L}{\partial \xi_i} \left( \frac{d\xi_i}{L} - \frac{\xi_i}{L^2} dL \right)$$

or on a :

$$\xi_i d\frac{\partial L}{\partial \xi_i} = \xi_i \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \xi_k} d\xi_k = 0 \text{ car } \frac{\partial L}{\partial \xi_k} \text{ est homogène de degré zéro en } \xi_k$$

on obtient alors :

$$d\varphi^2 = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \xi_j} d\xi_i d\xi_j \quad (3.7)$$

### 3.3.3 Les tenseurs

Jusqu'à présent, on a vu deux types de tenseurs, le vecteur unitaire  $\ell^i$  et le tenseur fondamental  $g_{ij}$ . Soit alors un tenseur quelconque, contravariant, covariant ou mixte et de rang  $(r, s)$  noté  $T = (T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r})$  qui s'écrit :

$$T = \sum_{i, j=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}.$$

Ainsi une base dans l'espace grassmanien formé par les tenseurs de type  $(r, s)$  attaché à un élément donné  $(x^k, \xi_k)$  est de la forme :

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}.$$

et de dimension  $n^{r+s}$  et  $\forall i, j = 1, \dots, n, \nu = 1, \dots, r, \mu = 1, \dots, s$ , où  $e_{i_\nu}$  est une section de  $\pi^*T\mathcal{M}$  satisfaisant aux équations (\*), et  $e^{j_\mu}$  son corepère dual sur  $(\pi^*T\mathcal{M})^* \sim \pi^*T^*\mathcal{M}$  les composantes covariantes associées.

On définit :

$$DT_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = dT_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{\nu=1}^r T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{\nu-1} k i_{\nu+1} \dots i_r} (C_k^{i_\nu h} d\xi_h + \Gamma_{kh}^{i_\nu} dx^h)$$



$$+ \sum_{\mu=1}^s T_{j_1 \dots j_{\mu-1} k j_{\mu+1} \dots j_s}^{\iota_1 \dots \iota_r} (C_{j_\mu}^{kh} d\xi_h + \Gamma_{j_\mu h}^k dx^h). \quad (3.8)$$

D'après le théorème 2, on sait que le coefficient de dilatation de volume construit sur  $n$  vecteurs quand le centre de l'élément d'appui reste fixe et que cet élément d'appui tourne autour de son centre est égale à  $\frac{1}{2} \frac{dg}{g}$ . Dans ce cas, on a montré que la différentielle absolue du vecteur unitaire normale est  $\omega_i = \sqrt{g} d\frac{\xi_i}{L}$ , cherchons le tenseur  $A^i$  tel que

$$\frac{1}{2} \frac{dg}{g} = A^1 \omega_1 + A^2 \omega_2 + \dots + A^n \omega_n = \sqrt{g} d\frac{\xi_i}{L} A^i = \frac{\sqrt{g}}{L} A^i d\xi_i - \sqrt{g} A^i \xi_i \frac{dL}{L^2},$$

comme les dérivées par rapport à  $\xi_i$  sont égales aussi alors :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial \xi_i} = \frac{\sqrt{g}}{L} A^i - \frac{\sqrt{g}}{L^2} A^k \xi_k \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$$

En multipliant par  $\xi_i$  et sommant par rapport à  $i$  (expliquer ici comment on peut donner la valeur lambda à  $A^k \xi_k$ ) on obtient alors :

$$A^i = \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial \log g}{\partial \xi_i} + \frac{\lambda}{L} \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = -L \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial \xi_i} + \frac{\lambda}{L} \frac{\partial L}{\partial \xi_i}$$

Pour que  $A^i$  soit dans l'élément, il faut que ses composantes suivant le vecteur normal zéro, alors il n'as pas de composante suivant  $\frac{\partial L}{\partial \xi_i}$  ou encore il faut prendre  $\lambda = 0$ , ainsi on a bien :

$$A^i = -L \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial \xi_i}$$

La signification géométrique de  $A = (A^i)$  est la suivante : imaginons une rotation infinitésimale de l'élément autour de son centre, si l'on considère un parallélépipède construit sur  $n$  vecteurs quelconques, le coefficient de dilatation de son volume quand les  $n$  vecteurs conservent leurs composantes contravariantes, et que leur élément d'appui commun subit la rotation indiquée, est égal au produit scalaire  $D\ell^i \cdot A$ .

Soit  $X$  un vecteur de composantes contravariantes fixes on a déjà montré que sa différentielle absolue quand son élément d'appui subit autour de son centre une rotation infinitésimale  $\omega_i$ , est  $X_k C^{ikh} d\xi_h$ . Soit  $Y$  un vecteur quelconque de même origine d'après la relation (7), on a bien :

$$YDX = Y_i X_k C^{ikh} d\xi_h = -\frac{1}{2} Y_i X_k \frac{\partial g^{ik}}{\partial \xi_h} d\xi_h$$

or on a  $\omega_i = \sqrt{g} d\frac{\xi_i}{L}$  et comme  $g^{ik}$  sont homogènes et degré zéro en  $\xi_i$  alors on montre facilement :

$$YDX = \frac{F}{\sqrt{g}} Y_i X_k C^{ikh} \omega_h$$

Comme ça on peut définir un nouveau tenseur  $A^{ikh}$  de façon que :

$$YDX = Y_i X_k A^{ikh} \omega_h,$$

on a alors :

$$\begin{aligned} A^{vjh} &= \frac{L}{\sqrt{g}} C^{vjh} = \frac{L}{\sqrt{g}} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{vj}}{\partial \xi_h} \right) = -\frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{1}{\partial \xi_h} \left( \frac{a^{\frac{1}{1-n}}}{2} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{1}{\partial \xi_h} \left( \frac{1}{g} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) = g^{vj} A^h - \frac{L}{4g\sqrt{g}} \frac{\partial^3(L^2)}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_h} \end{aligned}$$

On peut remarquer que ce tenseur admet deux tenseurs contractés, a savoir  $A_k^{ik}$  et  $A_k^{ki}$  avec :

$$A_k^{ki} := g_{kh} A^{hki} = -\frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{g}} g_{kh} \frac{\partial g^{kh}}{\partial \xi_i} = (???) - L \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial \xi_i} = A^i$$

En utilisant l'expression de  $A^{vjh}$  et le fait que  $A_k^{ik} := g_{kh} A^{hik}$  on obtient facilement :

$$A_k^{ik} - A_k^{ki} = A^i - g^i_k A^k = (1-n)A^i$$

On obtient alors :

$$A_k^{ki} = A^i = \frac{1}{2-n} A_k^{ik}.$$

### 3.3.4 Théorie des surfaces

On prend  $n = 3$  :

Soit par exemple  $x^3 = 0$ , nous pouvons prendre  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  et  $\xi_3 = 1$  alors  $d\xi_i = 0$ , soit  $X = (X^1, X^2, X^3)$  un vecteur tangent à l'élément  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 0, 1)$ , forcément on a  $X^3 = 0$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{\sqrt{g}}{L} (\Gamma_{11}^3 dx^1 + \Gamma_{12}^3 dx^2) \\ \omega_2 = -\frac{\sqrt{g}}{L} (\Gamma_{21}^3 dx^1 + \Gamma_{22}^3 dx^2) \end{cases}$$

Or d'après la définition de  $\Upsilon_{ih}^j$  on a :

$$\Upsilon_{12}^3 = 0 \implies \Gamma_{12}^3 + C_1^{3k} \Gamma_{k2}^3 = \Gamma_{21}^3 + C_2^{3k} \Gamma_{k1}^3$$

supposons que les composantes covariantes de  $X$  restent fixes ( $\implies dX^i = 0$ ) et que l'élément tourne autour de son centre ( $\implies \Gamma_{ih}^j = 0$ ) par définition on a bien  $DX^i = X^j C_j^{ik} d\xi^k$  et comme  $DX^3 = 0$  alors :

$$X^1 C_1^{3k} d\xi^k + X^2 C_2^{3k} d\xi^k = 0 \implies C_1^{3k} = C_2^{3k} = 0$$

on conclut que  $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3$ , ce qui entraîne que les deux formes fondamentales de la surfaces seront :

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{11} d(x^1)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} d(x^2)^2$$

### 3.3.5 Exemple : l'espace harmonique

Soient  $u, v$  et  $w$  les coordonnées homogènes du plan de l'élément  $(x, y, z; p, q)$  où  $p = -\frac{u}{w}$  et  $q = -\frac{v}{w}$ ; prenons  $L(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2$  c'est-à-dire :

$$F(x, y, z; u, v, w) = wL(x, y, z; p, q) = \frac{u^2 + v^2}{w}$$

on a bien

$$(a^{ij}) = \frac{2}{w^2} \begin{pmatrix} 3u^2 + v^2 & 2uv & -2u\frac{u^2+v^2}{w} \\ 2uv & u^2 + 3v^2 & -2v\frac{u^2+v^2}{w} \\ -2u\frac{u^2+v^2}{w} & -2v\frac{u^2+v^2}{w} & \frac{3}{2}\frac{(u^2+v^2)^2}{w^2} \end{pmatrix}$$

alors  $a = 4\frac{(u^2+v^2)^4}{w^8} \implies g = 2\frac{(u^2+v^2)^2}{w^4}$  et  $\sqrt{g} = \sqrt{2}\frac{(u^2+v^2)}{w^2}$

donc les composantes contrevariantes et covariantes du vecteur unitaire normal sont :

$$\begin{cases} l^1 = -\sqrt{2}\frac{p}{p^2+q^2}, & l^2 = -\sqrt{2}\frac{q}{p^2+q^2}, & l^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ l_1 = -\sqrt{2}p, & l_2 = -\sqrt{2}q, & l_3 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

On peut aussi calculer directement les  $g^{ij}$ ; on trouve :

$$\begin{cases} g^{11} = \frac{3p^2+q^2}{(p^2+q^2)^2}, & g^{12} = -\frac{2pq}{(p^2+q^2)^2}, & g^{22} = \frac{p^2+3q^2}{(p^2+q^2)^2}; \\ g^{13} = \frac{2p}{p^2+q^2}, & g^{23} = \frac{2q}{p^2+q^2}, & g^{33} = \frac{3}{2}; \end{cases}$$

Alors on trouve aussi les  $g_{ij}$ ;

$$\begin{cases} g_{11} = 3p^2 + q^2, & g_{12} = 2pq, & g_{22} = p^2 + 3q^2; \\ g_{13} = -4p, & g_{23} = -4q, & g_{33} = 6; \end{cases}$$

Alors on a

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (pdx + qdy - 2dz)^2 + (qdx - pdy)^2(pdx + qdy - dz)^2$$

par un simple calcul on trouve aussi le vecteur A :

$$\begin{cases} A^1 = \frac{-\sqrt{2}p}{p^2+q^2}, & A^2 = \frac{-\sqrt{2}q}{p^2+q^2}, & A^3 = -\sqrt{2}; \\ A_1 = \sqrt{2}p, & A_2 = \sqrt{2}q, & A_3 = -2\sqrt{2}. \end{cases}$$

et le vecteur  $\omega$ .

$$\omega^1 = -\sqrt{2}\frac{dp}{p^2+q^2}, \quad \omega^2 = -\sqrt{2}\frac{dq}{p^2+q^2}, \quad \omega^3 = -\sqrt{2}\frac{pdp + qdq}{p^2+q^2},$$

Alors l'angle  $d\varphi$  de deux éléments infiniment voisins de même centre est :

$$d\varphi^2 = 2 \frac{dp^2 + dq^2}{p^2 + q^2}$$

L'espace ici est totalement singulier c'est-à-dire  $|H^{ij}| = 1$  en effet : pour  $i, j = 1, 2, 3$  on a,

$$H^{ij} = g^{ij} + A^i A^j - \frac{L}{4g^{\frac{3}{2}}} A_k \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}$$

or comme  $\frac{\partial^2(L^2)}{\partial u_i \partial u_j}$  est homogène et de degré zéro en  $u = u_1, v = u_2, w = u_3$ , on a :

$$\begin{aligned} A_k \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} &= \frac{-\sqrt{2}}{w} \left( u \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u} + v \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial v} + 2w \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial w} \right) \\ &= -2\sqrt{2} \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial w} \end{aligned}$$

Alors :

$$H^{ij} = g^{ij} + A^i A^j + \frac{L}{\sqrt{2}g^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial w} (gg^{ij}) = g^{ij} + A^i A^j + \frac{1}{4} \frac{w^5}{(u^2 + v^2)^2} \frac{\partial (gg^{ij})}{\partial w}$$

Par un simple calcul, on trouve :

$$\begin{cases} H^{11} = \frac{2p^2}{(p^2+q^2)^2}, & H^{12} = \frac{2pq}{(p^2+q^2)^2}, & H^{22} = \frac{2q^2}{(p^2+q^2)^2}, \\ H^{13} = \frac{p}{p^2+q^2}, & H^{23} = \frac{q}{p^2+q^2}, & H^{33} = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

On peut vérifier par un simple calcul, que  $H^{ij} = l^i l^j = \frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\partial F}{\partial u_j}$  et comme on l'a déjà le montrer, l'espace sera alors totalement singulier.

# Caractérisation variationnelle de la notion d'orthogonalité dans l'espace de Cartan

## Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des questions d'orthogonalité. Soit  $\Gamma_f$  le graphe d'une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  avec  $n > 2$  et  $0 < p < n$ . Nous allons d'abord étudier le cas  $n = 3$  et  $p = 2$ , et nous généraliserons ensuite aux cas  $n > 2$  et  $0 < p < n$ . Soit la  $p$ -forme  $\beta = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p$ . En tout point  $M = (x^1, \dots, x^p; f_1, \dots, f_{n-p})$  de  $\Gamma_f$ , on note  $d\sigma = L(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f) \beta$ . Nous supposons que  $\Gamma_f$  est un point critique de l'action

$$\mathcal{L}(f) = \int d\sigma,$$

c'est-à-dire, la sous-variété qui réalise l'extremum de cette intégrale, avec la condition que  $\Gamma_f$  soit à bord régulier  $\partial\Gamma_f \neq \emptyset$ . En tout point  $M$  de  $\Gamma_f$ , notons  $E$  l'élément tangent en ce point.

Pour trouver le sous-espace orthogonal en un point  $M \in \mathcal{M}$ , (*En fait c'est l'orthogonal à l'élément tangent en un point  $M = (x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}) \in \Gamma_f$* ), l'idée est de faire varier  $\Gamma_f$  en fonction d'un paramètre  $t$ . On impose de plus qu'en chaque point  $M \in \Gamma_{f_t}$  la famille des ouverts réguliers  $E_t$  forme un feuilletage d'un domaine  $U \subset \mathbb{R}^{p+1}$ . Considérons un champs de vecteur  $X$  qui pousse  $E_t$  à  $E_{t+dt}$  et notons :

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{L}(f_t).$$

D'après Cartan, la condition pour que  $X$  soit orthogonal en  $M$  à  $\Gamma_f$  est que la dérivée de  $\mathcal{A}(t)$  par rapport à  $t$  en  $t = 0$  soit nulle. Cela va nous permettre de trouver les vecteurs orthogonaux.

Dans le cas où  $p = n - 1$ , le graphe  $\Gamma_f$  est une hypersurface  $\Sigma$  qui a, en tout point, une direction tangente dans le noyau de la forme linéaire  $x^i \xi_i$ ; le vecteur orthogonal prend la direction du champs de vecteurs  $X$ . Si on connaît la métrique au voisinage de l'élément  $(x^1, \dots, x^n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ , nous pouvons alors calculer la longueur  $\ell$  du vecteur normal.

## 4.1 Caractérisation variationnelle de la notion d'orthogonalité

### 4.1.1 Formulation de Lagrange

On prend  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  où  $1 < p < n$ , soit  $\Gamma_f$  le graphe d'une fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $\beta$  la  $p$ -forme  $\beta = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$ . Nous définissons le fibré Grassmannien au dessus de  $\mathbb{R}^n$  par :

$$Gr_p^\beta(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}) := \{(x, E); x \in \Gamma_f \text{ et } E \text{ plan orienté égale à } T_x \Gamma_f\}$$

Soit le lagrangien

$$L : Gr_p^\beta(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

défini par

$$L(x^1, \dots, x^p, x^{p+1}, \dots, x^n, (q_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq n-p \\ 1 \leq j \leq p}}) := L(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f)$$

nous écrivons l'intégrale d'action :

$$\mathcal{L}(f) = \int_{\Omega} L(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f) \beta,$$

**Définition 4.1.1.** Soit  $\mathcal{D}$  la distribution des droites vectorielles dans  $(T\mathcal{M})$  définie le long de  $\Sigma = \Sigma_0 \subset \mathcal{M}$ , si  $N$  est un champ de vecteur défini le long de  $\partial\Sigma$  et  $\forall M \in \partial\Sigma$ ,  $N$  est orthogonale à  $T_M \mathcal{M}$  telle que  $N(M) \in \mathcal{D}(M)$ , si on définit le bord de  $\Sigma_t$  par  $\partial\Sigma_t := \{e^{tN}(M) | M \in \partial\Sigma, t \in ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \}$  et

$$\mathcal{A}(t) := \mathcal{L}(f_t) = \int_{\Omega} L(x^1, \dots, x^p, (f_t)_1, \dots, (f_t)_{n-p}, \nabla f_t) \beta,$$

alors  $\mathcal{D}$  est une distribution *normale* si  $\frac{d}{dt}(\mathcal{A}(t))|_{t=0} = 0$ .

### 4.1.2 Cas de dimension 2

Supposons que l'intégrale d'action soit étendue à une portion de surface extrémale  $(\Sigma)$  limitée par un contour  $(C)$ . Déformons légèrement le contour et faisons passer par le contour  $(C')$  une surface extrémale  $(\Sigma')$ , mathématiquement on fait varier, dans l'intégrale précédente,  $f$  à  $f + \varepsilon g$  où  $g$  n'est pas à support compact. Alors on considère une famille  $(\Sigma_t)_t$ , dépendant d'un paramètre réel  $t \in [0, 1]$ , de surfaces à bord qui forme un feuilletage d'un domaine  $U \subset \mathbb{R}^3$  qui coïncide à  $t = 0$  avec  $\Sigma$  et à  $t = 1$  avec  $\Sigma'$ . On suppose que, pour tout  $t$ ,  $(\Sigma_t)_t$  est une surface de  $\mathbb{R}^3$  qui est un point critique de  $\mathcal{L}$  que nous allons représenter par un domaine  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$  et une fonction  $f_t : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $\Sigma_t$  soit le graphe de  $f_t$ , c'est à dire :

$$\Sigma_t = \{(x, y, f_t(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega_t\}$$

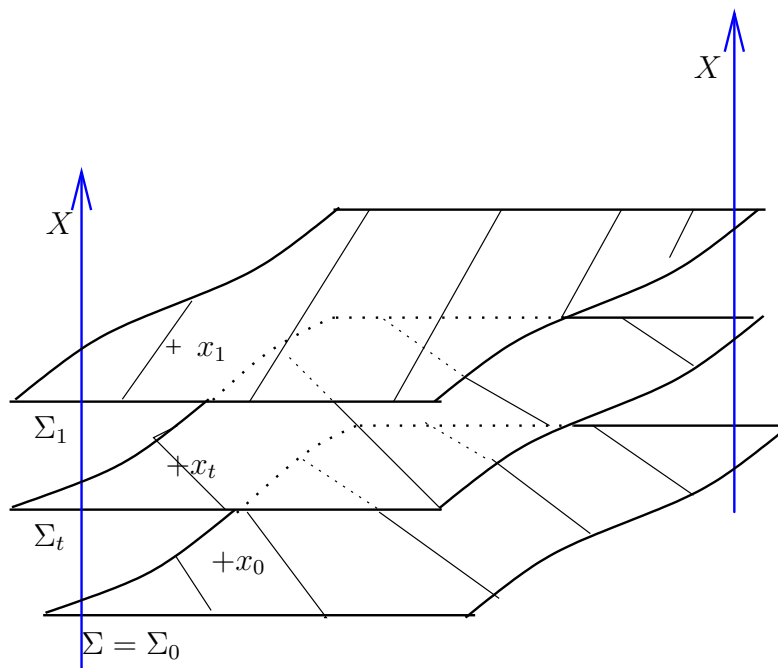


Figure 4.1 —

Soit  $X$  un champ de vecteur défini sur  $U$  tel que, si  $e^{sX}$  est le flot de  $u$ , alors :

$$e^{sX}(\Sigma_t) = \Sigma_{t+s}.$$

On peut le voir géométriquement dans le schéma suivant :

Notons

$$\begin{cases} f(t, x, y) = f_t(x, y) \\ f(x, y) = f(0, x, y) = f_0(x, y) \\ \Phi(t, x, y) = e^{tX}(x, y, f(x, y)) \end{cases}$$

à  $t = 0$  on a bien  $\Phi = f = f_0$  et  $\forall t \in ]0, 1]$ , la fonction  $(x, y) \mapsto \Phi(t, x, y)$  est une paramétrisation de  $\Sigma_t$ , en notant  $\Phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$  et  $\phi^3(t, x, y) = f(t, \phi^1(t, x, y), \phi^2(t, x, y))$  donc, en dérivant par rapport à  $t$  on a :

$$\frac{\partial \phi^3}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi^1, \phi^2) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi^1, \phi^2) \frac{\partial \phi^1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi^1, \phi^2) \frac{\partial \phi^2}{\partial t}.$$

ce qui donne à  $t = 0$  :

$$X^3(x, y, f) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, x, y)X^1(x, y, f) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, x, y)X^2(x, y, f).$$

Donc, le long de  $\Sigma = \Sigma_0$ , on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X^3 - X^1 \frac{\partial f}{\partial x} - X^2 \frac{\partial f}{\partial y} \quad (4.1)$$

Soit un lagrangien  $(x, y, z, p, q) \mapsto L(x, y, z, p, q)$  ; on pose :

$$\mathcal{A}(t) = \int_{\Omega_t} L(x, y, f_t(x, y), \frac{\partial f_t}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f_t}{\partial y}(x, y)) dx dy$$

En supposant que  $\Omega_t$  est régulier (c'est à dire que  $\partial\Omega_t$  est une courbe  $\mathcal{C}^1$  du plan  $\mathbb{R}^2$ ) alors on a :

$$\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} L(x, y, f_t, \frac{\partial f_t}{\partial x}, \frac{\partial f_t}{\partial y}) dx dy + \int_{\partial\Omega_t} L(x, y, f_t, \frac{\partial f_t}{\partial x}, \frac{\partial f_t}{\partial y}) \langle (X^1, X^2), v \rangle d\ell$$

où  $v$  est la normale extérieure à  $\Omega_t$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\langle (X^1, X^2), v \rangle$  représente la variation de l'aire de  $\Omega_t$  et  $d\ell$  mesure de dimension 1 sur  $\partial\Omega$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t} L(x, y, f_t, \frac{\partial f_t}{\partial x}, \frac{\partial f_t}{\partial y}) dx dy + \int_{\partial\Omega_0} L(x, y, f_t, \frac{\partial f_t}{\partial x}, \frac{\partial f_t}{\partial y}) \langle (X^1, X^2), v \rangle d\ell \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial p} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} + \int_{\partial\Omega} L \langle (X^1, X^2), v \rangle d\ell \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial f}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) \right] \\ &+ \int_{\partial\Omega} L \langle (X^1, X^2), v \rangle d\ell. \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) \right] + \int_{\partial\Omega} \left\langle \left( \frac{\partial L}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial t} \right), v \right\rangle d\ell \\ &+ \int_{\partial\Omega} L \langle (X^1, X^2), v \rangle d\ell. \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) \right] + \int_{\partial\Omega} \left\langle \left( \frac{\partial L}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial t} + LX^1, \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial t} + LX^2 \right), v \right\rangle d\ell \end{aligned}$$

Or  $\Sigma = \Sigma_0$  est le point critique de  $\int_{\Omega} L$ , et les équations d'Euler Lagrange sont bien vérifiées, on a donc :

$$\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \int_{\partial\Omega} \left\langle \left( \frac{\partial L}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial t} + LX^1, \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial t} + LX^2 \right), v \right\rangle d\ell$$

On cherche une condition sur le champ de vecteur  $X$  (en fait sur sa restriction à  $\partial\Omega$ ) pour que cette intégrale s'annule, une condition suffisante est :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial t} + LX^1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial t} + LX^2 = 0 \end{cases}$$

Cela entraîne, en notant  $\lambda = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{L}$ , que :

$$\begin{cases} X^1 = \lambda \frac{\partial L}{\partial p} \\ X^2 = \lambda \frac{\partial L}{\partial q} \end{cases}$$

de 4.1, on tire :

$$X^3 = -\lambda L + \lambda \frac{\partial L}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial y}$$



alors, pour que  $\frac{dA(t)}{dt} |_{t=0} = 0$ , il suffit que :

$$X = \lambda \left( \frac{\partial L}{\partial p}, \frac{\partial L}{\partial q}, p \frac{\partial L}{\partial p} + q \frac{\partial L}{\partial q} - L \right).$$

**Exemple 4.1.2.** Dans le cas de la fonctionnelle aire  $L(x, y, z, p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$  et en prenant  $\lambda = 1$ , alors on trouve :

$$\begin{aligned} X &= \left( \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{q^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \sqrt{1 + p^2 + q^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}(p, q, -1), \end{aligned}$$

qui a la même direction que la normale  $n$  à la surface  $\Sigma$  engendré par  $(1, 0, p)$  et  $(1, 0, q)$  au sens classique euclidien.

**Remarque 4.1.3.** Autre méthode pour résoudre le problème (indication) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f + \varepsilon g) &= \int_{\Omega_\varepsilon} L \left( x, y, f + \varepsilon g, \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} L(x, y, f(x, y), \nabla f(x, y)) + \varepsilon \left( \int_{\Omega_\varepsilon} g \frac{\partial L}{\partial f} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial p} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial L}{\partial q} \right) \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} L(x, y, f(x, y), \nabla f(x, y)) + \varepsilon \left( \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left( g \frac{\partial L}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( g \frac{\partial L}{\partial q} \right) \right) \\ &\quad + \varepsilon \left( \int_{\Omega_\varepsilon} g \left( \frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

noter que  $\Sigma_\varepsilon$  est le point critique de  $\int_{\Omega_\varepsilon} L$ , les équations d'Euler-Lagrange sont vérifiées et en utilisant le théorème de Stokes, on a :

$$\mathcal{L}(f + \varepsilon g) = \varepsilon \int_{\partial \Omega_\varepsilon} g \frac{\partial L}{\partial p} + g \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Il faut faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 et voir ce qui se passe.

### Généralisation de ce résultat pour $n > 3$ et $p = n - 1$

Pour  $n > 3$ , on refait le même travail, ce cas devient évident la notion d'orthogonalité à une hypersurface  $\Sigma_t := \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega_t\}$  où  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^{n-1}$  se traduit par :

$$X = \lambda \left( \frac{\partial L}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial p_{n-1}}, \sum_{i=1}^{n-1} p_i \frac{\partial L}{\partial p_i} - L \right).$$

avec  $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  pour  $i = 1, \dots, n-1$  et le Lagrangien s'écrit  $L : (x^1, \dots, x^{n-1}, x^n, p_1, \dots, p_{n-1}) \mapsto L(x^1, \dots, x^{n-1}, f, \frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{n-1}})$ . Ainsi on justifie le fait que le vecteur de composantes  $\frac{\partial F}{\partial x^i}$  est la direction normale à l'hypersurface limitée par le contour  $C$  défini dans la démonstration du théorème 1.

### 4.1.3 Généralisation de ce résultat pour $n > 3$ et $0 < p < n$

**Théorème 4.1.4.** *On considère  $Gr_p^\beta(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p})$  le fibré grassmannien au dessus de  $\Gamma_f$ , graphe de la fonction  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$  qui est un point critique de  $\int_\Omega L\beta$  où  $\beta$  est une  $p$ -forme et  $L$  le Lagrangien défini en haut. On note  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 < i \leq n-p}} = (q_j^i)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 < i \leq n-p}}$ .*

*Alors le sous-espace orthogonal à  $Gr_p^\beta(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p})$  en un point  $x \in \Gamma_f$  dans  $\mathbb{R}^n$  est engendré par  $(v^1, \dots, v^{n-p})$  où :*

$$v^1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^1} \\ -L + q_j^1 \frac{\partial L}{\partial q_j^1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^2} \\ 0 \\ -L + q_j^2 \frac{\partial L}{\partial q_j^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v^{n-p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^{n-p}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^{n-p}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -L + q_j^{n-p} \frac{\partial L}{\partial q_j^{n-p}} \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ ; on note  $f = (f_1, \dots, f_{n-p})$  où  $1 < p < n$ . Soit  $\Omega_t$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^p$  et notons :

$$\Sigma_t := \{(x, f(x)) \mid x \in \Omega_t\} \subset \mathbb{R}^n;$$

un domaine de dimension  $p$ , et  $\beta = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^p$ . On écrit le Lagrangien  $L : (x^1, \dots, x^p, x^{p+1}, \dots, x^n, (q_j^i)_{1 \leq j \leq p < i \leq n}) \mapsto L(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f)$ , l'intégrale d'action est alors :

$$\mathcal{L}(f) := \int_{\Omega_t} L(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}, \nabla f)\beta.$$

Supposons que la famille  $(\Sigma_t)_t$  des domaines à bord forme un feuilletage d'un domaine  $U \subset \mathbb{R}^n$ ; on suppose que pour tout  $t$ ,  $\Sigma_t$  est un point critique de  $\mathcal{L}$ . Soit  $X$  un champ de vecteur défini sur  $U$  qui pousse  $\Sigma_t$  en  $\Sigma_{t+dt}$  c'est à dire, si  $e^{sX}$  est le flot de  $u$ , alors  $e^{sX}(\Sigma_t) = \Sigma_{t+s}$ . Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t, x^1, \dots, x^p) = f_t(x^1, \dots, x^p) \text{ c'est-à-dire } f_i(t, x^1, \dots, x^p) = (f_i)_t(x^1, \dots, x^p) \forall i = 1, \dots, n-p \\ f(x^1, \dots, x^p) = f(0, x^1, \dots, x^p) = f_0(x^1, \dots, x^p) \text{ c'est-à-dire } \forall i = 1, \dots, n-p \text{ on a} \\ f_i(x^1, \dots, x^p) = f_i(0, x^1, \dots, x^p) = (f_i)_0(x^1, \dots, x^p); \\ \Phi(t, x^1, \dots, x^p) = e^{tX}(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}); \end{array} \right.$$

La fonction  $\Phi$  est une paramétrisation de  $\Sigma_t$ , si on note :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = (\varphi^1, \dots, \varphi^p, \varphi^{p+1}, \dots, \varphi^n); \\ \varphi^{p+i}(t, x^1, \dots, x^p) = f_i(t, \varphi^1, \dots, \varphi^p) \text{ pour } i = 1, \dots, n-p; \end{array} \right.$$

en dérivant par rapport à  $t$ , on a  $\forall i = 1, \dots, n-p$  :

$$\frac{\partial \varphi^{p+i}}{\partial t} = \frac{\partial f_i}{\partial t}(t, \varphi^1, \dots, \varphi^p) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(t, \varphi^1, \dots, \varphi^p) \frac{\partial \varphi^j}{\partial t},$$

pour  $t = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-p$ , on a :

$$X^{p+i}(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p}) = \frac{\partial f_i}{\partial t}(0, x^1, \dots, x^p) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(0, x^1, \dots, x^p) X^j(x^1, \dots, x^p, f_1, \dots, f_{n-p})$$

ce qui donne le long de  $\Sigma = \Sigma_0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-p$  :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = X^{p+i} - \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x^j} X^j \quad (4.2)$$

Si on note  $\mathcal{A}(t) = \mathcal{L}(f_t)$ , on a donc :

$$\mathcal{A}(t) = \int_{\Omega_t} L(x^1, \dots, x^p, (f_1)_t, \dots, (f_{n-p})_t, \nabla f_t) \beta$$

En dérivant par rapport à  $t$ , on aura :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} L(x^1, \dots, x^p, (f_1)_t, \dots, (f_{n-p})_t, \nabla f_t) \beta \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_t} L(x^1, \dots, x^p, (f_1)_t, \dots, (f_{n-p})_t, \nabla f_t) \langle (X^1, \dots, X^p), \nu \rangle d\ell, \end{aligned}$$

où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\Omega_t$  dans  $\mathbb{R}^p$ ,  $\langle (X^1, \dots, X^p), \nu \rangle$  représente la variation de volume de  $\Omega_t$  et  $d\ell$  une mesure de dimension 1 sur  $\partial\Omega_t$ .

À  $t = 0$  on a :

$$\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} L(x^1, \dots, x^p, (f_1)_t, \dots, (f_{n-p})_t, \nabla f_t) \beta + \int_{\partial\Omega} L \langle (X^1, \dots, X^p), \nu \rangle d\ell.$$

Or on a

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} L(x^1, \dots, x^p, (f_1)_t, \dots, (f_{n-p})_t, \nabla f_t) \beta \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{n-p} \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 < i \leq n-p}} \frac{\partial F}{\partial p_j^i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial t} \right) \beta = \sum_{i=1}^{n-p} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial F}{\partial p_j^i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial t} \right) \beta \\ &= \sum_{i=1}^{n-p} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j^i} \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial f_i}{\partial t} \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j^i} \right) \right) \beta \\ &= \sum_{i=1}^{n-p} \int_{\Omega} \frac{\partial f_i}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial x^i} - \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j^i} \right) \right] \beta + \sum_{i=1}^{n-p} \int_{\partial\Omega} \left\langle \left( \frac{\partial L}{\partial q_1^i} \frac{\partial f_i}{\partial t}, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_p^i} \frac{\partial f_i}{\partial t} \right), \nu \right\rangle d\ell \end{aligned}$$

Comme  $\Sigma = \Sigma_0$  est un point critique de  $\mathcal{L}$  alors les équations d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \sum_{j=1}^p \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial L}{\partial q_j^i} \right) = 0 \text{ donnent :}$$

$$\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n-p} \int_{\partial\Omega} \left\langle \left( \frac{\partial L}{\partial q_1^i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + LX^1, \dots, \frac{\partial L}{\partial q_p^i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + LX^p \right), \nu \right\rangle d\ell.$$

En utilisant la définition précédente, on peut, de même, considérer une fonction  $f_{t\psi}$  telle que  $\frac{\partial f_{t\psi}}{\partial t} = \psi \frac{\partial f_t}{\partial t}$ . Par la même procédure que ait précédemment, pour que  $\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$ , il suffit que pour tout  $j = 1, \dots, p$  on a :

$$\sum_{i=1}^{n-p} \frac{\partial L}{\partial q_j^i} \frac{\partial f_i}{\partial t} + LX^j = 0.$$

Si on note  $\lambda_i = \frac{-\frac{\partial f_i}{\partial t}}{L}$  on trouve :

$$X^j = \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i \frac{\partial L}{\partial q_j^i} \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, p,$$

Si on note  $\nabla f := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 < i \leq n-p}} = (q_j^i)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 < i \leq n-p}}$ , de 4.2, on conclut que, pour  $i = 1, \dots, n-p$ , on a :

$$X^{p+i} = -\lambda_i L + \sum_{j=1}^p \lambda_i q_j^i \frac{\partial L}{\partial q_j^i}.$$

ce qui donne  $X = (X^1, \dots, X^n)$  avec :

$$\begin{cases} X^1 = \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial q_1^1} + \lambda_2 \frac{\partial L}{\partial q_1^2} + \dots + \lambda_{n-p} \frac{\partial L}{\partial q_1^{n-p}} \\ \vdots \\ X^p = \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial q_p^1} + \lambda_2 \frac{\partial L}{\partial q_p^2} + \dots + \lambda_{n-p} \frac{\partial L}{\partial q_p^{n-p}} \\ X^{p+1} = \lambda_1 \left( -L + q_1^1 \frac{\partial L}{\partial q_1^1} + \dots + q_p^1 \frac{\partial L}{\partial q_p^1} \right) \\ \vdots \\ X^n = \lambda_{n-p} \left( -L + q_1^{n-p} \frac{\partial L}{\partial q_1^{n-p}} + \dots + q_p^{n-p} \frac{\partial L}{\partial q_p^{n-p}} \right) \end{cases}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^1} \\ -L + q_1^1 \frac{\partial L}{\partial q_1^1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^2} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^2} \\ 0 \\ -L + q_2^2 \frac{\partial L}{\partial q_2^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-p} \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q_1^{n-p}} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_p^{n-p}} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -L + q_j^{n-p} \frac{\partial L}{\partial q_j^{n-p}} \end{pmatrix}$$

$= \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + \dots + \lambda_{n-p} v^{n-p}$ , ainsi la théorème est bien démontré.  $\square$

**Exemple 4.1.5.** Dans le cas  $n = 3$  et  $p = 2$ , avec la fonctionnelle aire

$$L(x, y, z, p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

on a

$$v = v^1 = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}(p, q, -1),$$

qui a la même direction que la normale  $n$  au plan  $\Sigma$  engendré par  $(1, 0, p)$  et  $(0, 1, q)$ , au sens classique euclidien.

**Exemple 4.1.6.** On prend  $n = 4$  et  $p = 2$  alors  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  les  $\Sigma_t$  sont des domaines à bord de dimension 2 de  $\mathbb{R}^4$ , on définit la fonctionnelle aire par  $L(x, y, u, v, q_1^1, q_2^1, q_1^2, q_2^2) := \sqrt{1 + (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2 + (q_1^2)^2 + (q_2^2)^2 + (q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)^2}$ . Un calcul facile nous donne que l'espace orthogonal  $\mathcal{V}$  à  $\Sigma$  est  $\mathcal{V} = (v^1, v^2)$  avec :

$$v^1 = \begin{pmatrix} \frac{q_1^1 + q_2^2(q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)}{\sqrt{1 + (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2 + (q_1^2)^2 + (q_2^2)^2 + (q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)^2}} \\ \frac{q_2^1 - q_1^2(q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)}{\sqrt{1 + (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2 + (q_1^2)^2 + (q_2^2)^2 + (q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)^2}} \\ -\frac{1 + (q_2^2)^2 + (q_1^2)^2}{\sqrt{1 + (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2 + (q_1^2)^2 + (q_2^2)^2 + (q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)^2}} \\ 0 \end{pmatrix}, v^2 = \begin{pmatrix} \frac{q_1^2 - q_2^1(q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)}{\sqrt{1 + (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2 + (q_1^2)^2 + (q_2^2)^2 + (q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)^2}} \\ \frac{q_2^2 + q_1^1(q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)}{\sqrt{1 + (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2 + (q_1^2)^2 + (q_2^2)^2 + (q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)^2}} \\ 0 \\ -\frac{1 + (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2}{\sqrt{1 + (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2 + (q_1^2)^2 + (q_2^2)^2 + (q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1)^2}} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$v^1 = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} q_1^1 + q_2^2(q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1) \\ q_2^1 - q_1^2(q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1) \\ -1 - (q_2^2)^2 - (q_1^2)^2 \\ 0 \end{pmatrix}, v^2 = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^1(q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1) \\ q_2^2 + q_1^1(q_1^1 q_2^2 - q_1^2 q_2^1) \\ 0 \\ -1 - (q_1^1)^2 - (q_2^1)^2 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 4.1.7.** : On sait que l'espace tangent à  $\Sigma_M$  au voisinage d'un point  $M$  donné est engendré par

$$T\Sigma_M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ q_1^1 \\ q_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q_2^1 \\ q_2^2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Alors, au sens euclidien, l'espace orthogonal à  $\Sigma_M$  est engendré par

$$(T\Sigma_M)^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1^2 \\ q_2^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

qui coïncide avec notre résultat si

$$\begin{cases} (q_1^1)^2 + (q_2^1)^2 = (q_2^2)^2 + (q_1^2)^2 = 0 \\ q_1^1 q_2^1 - q_2^2 q_1^2 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} q_1^1 & q_2^1 \\ q_2^1 & q_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou bien en complexe } \begin{cases} q_1^1 = \pm i q_2^1 \\ q_2^2 = \pm i q_1^2 \end{cases}$$

## 4.2 Calcul de la longueur du vecteur normale à $\Sigma$

**Proposition 4.2.1.** *Dans un espace à  $n$  dimensions, le déterminant de Gram permet de calculer un volume  $\mathcal{V}$  d'un paralléloétope formé par  $n$  vecteurs  $\xi_1, \dots, \xi_n$  avec  $\xi_i = \xi_i^j e_j$  pour  $i, j = 1, \dots, n$ , sans nécessité de munir l'espace d'une métrique  $g$ . On a :*

$$\mathcal{V} = \sqrt{G(\xi_1, \dots, \xi_n)}.$$

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème se fait par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$  c'est évident ; en supposant la propriété vraie pour toute famille de  $n$  vecteurs, on l'établit pour  $n + 1$ . Le volume  $v$  de paralléloétope à  $n + 1$  dimensions est, par définition le volume de la base  $F$ , espace engendré par les  $n$  premiers vecteurs, de volume égal à  $\sqrt{G(\xi_1, \dots, \xi_n)}$ , par hypothèse de récurrence, multiplié par la hauteur de  $\xi_{n+1}$ . Alors  $v = \sqrt{G(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})}$  à cause de la troisième point de résultat suivant.  $\square$

**Proposition 4.2.2.** *1. Le volume construit sur  $n$  vecteurs de même origine est égal au déterminant formé par les composantes de ces vecteurs, multiplié par le volume construit sur les  $n$  vecteurs unitaires.*

$$\mathcal{V}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \mathcal{V}\left(\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}, \dots, \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}\right) |\xi_1, \dots, \xi_n|.$$

*2. Dans le cas où les vecteurs  $\xi_i$  sont unitaire on a  $g(\xi_i, \xi_j) = g_{ij}$  alors le volume formé par  $n$  vecteurs unitaires est :*

$$G(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sqrt{g}.$$

*3. Soit  $v$  un vecteur orthogonal au paralléloétope engendré par les  $n$  vecteurs  $\xi_1, \dots, \xi_n$  alors on a :*

$$G(v, \xi_1, \dots, \xi_n) = \sqrt{g(v, v)}G(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

*Démonstration.* 2 et 3 sont triviaux, on montre seulement 1. On a  $g(\xi_i, \xi_j) = t_{\xi_i} g_{ij} \xi_j$ , si on pose  $\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^n)$ , alors on a :

$$G(\xi_1, \dots, \xi_n) = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^1 & \dots & \xi_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_n^n \end{pmatrix},$$

si on passe au déterminant et en utilisant 2, on trouve facilement 1.  $\square$

**Définition 4.2.3.** Soient  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale dans un espace  $E$  de dimension  $n$  et  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$   $n$  vecteurs, considérons  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ . On rappelle que

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_p^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{i_p} & \dots & \xi_p^{i_p} \end{vmatrix}.$$

**Proposition 4.2.4.** *La longueur  $\ell$  du vecteur  $v$  normal à l'hypersurface  $\Sigma$  est  $\sqrt{g}$ .*

*Démonstration.* Notons que l'hypersurface  $\Sigma$  admet comme plan tangent les  $n - 1$  vecteurs  $p_i = (p_i^1, \dots, p_i^n)$  pour  $i = 1, \dots, n - 1$  de volume  $d\sigma$ . Le volume du paralléloépe à  $n$  dimensions engendré par  $\Sigma$  et  $v$  est  $\mathcal{V} = \ell d\sigma$ , pour simplifier le calcul, introduisons les variables  $\xi_1, \dots, \xi_n$  telle que  $\xi_n = -\frac{\xi_1}{p_1} = \dots = -\frac{\xi_{n-1}}{p_{n-1}}$  et notons la fonction  $F$  telle que  $\xi_n L(x^1, \dots, x^n; -\frac{\xi_1}{\xi_n}, \dots, -\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n}) = F(x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n)$  et comme  $F$  homogène et de degré 1 en  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , alors

$$v = \left( \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \right), \quad (4.3)$$

d'autre part d'après 1 de proposition précédente, on a :

$$\mathcal{V} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \\ \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1}^1 & \cdots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Si on note  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale alors l'élément de surface  $d\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} e_1^* \wedge \dots \wedge e_{i-1}^* \wedge e_{i+1}^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ . Maintenant il reste à calculer :

$$\begin{aligned} d\sigma(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} e_1^* \wedge \dots \wedge e_{i-1}^* \wedge e_{i+1}^* \wedge \dots \wedge e_n^*(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_{n-1}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{i-1} & \cdots & \xi_{n-1}^{i-1} \\ \xi_1^{i+1} & \cdots & \xi_{n-1}^{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \cdots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \xi_n} \\ \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1}^1 & \cdots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui donne  $\ell = \sqrt{g}$ . □

**Corollaire 4.2.5.** *Les composantes de  $\nu$  dans la base duale sont :*

$$\sqrt{g} \left( \frac{\xi_1}{F}, \dots, \frac{\xi_n}{F} \right)$$

*Démonstration.* Notons  $\ell^i$  et  $\ell_i$  les composantes de  $\nu$  respectivement dans la base et dans la base duale, alors  $\ell^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \xi_i}$ , et comme  $\nu$  est normal alors  $\ell^i \ell_i = 1$ . Or  $F$  est homogène du premier degré en  $\xi_i$  alors

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \xi_i = \frac{1}{\sqrt{g}} F \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \sqrt{g} \frac{\xi_i}{F} = 1,$$

ce qui donne bien les composante de vecteur unitaire normal dans la base duale. □





# La méthode de Cartan pour le problème d'équivalence

## Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons la méthode d'équivalence développée par Élie Cartan en travaillant sur l'exemple des distributions de plans dans l'espace tangent à une variété. Cette méthode consiste en un test d'involution qui permet de décider quand est ce que deux  $G$ -structures sont localement équivalentes. D'ailleurs, nous montrons que le problème est involutif dans le cas présent (les distributions de plans).

## 5.1 Définitions de Base

Soit  $\mathcal{M}$  une variété analytique réelle de dimension  $n \in \mathbb{N}$  et  $G$  un sous-groupe de  $GL(n, \mathbb{R})$ . Informellement, une  $G$ -structure de base  $\mathcal{M}$  est une réduction du fibré des repères de  $\mathcal{M}$ . Plus précisément, pour tout  $x \in \mathcal{M}$ , notons  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $T_x \mathcal{M}$  et  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  la variété qui contient l'ensemble des repères de  $\mathcal{M}$ . En posant pour tout repère  $R = (x, \{e_i\})$  et  $g \in GL(n, \mathbb{R})$ ,

$$R.g = (x, \{\bar{e}_i\}) \text{ avec } \bar{e}_i = e_i g_j^i,$$

on définit une action à droite de  $GL(n, \mathbb{R})$  sur  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ . Un  $G$ -structure, noté  $\mathcal{G}$ , est une sous-variété  $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}(\mathcal{M})$  possédant la propriété

$$\forall R \in \mathcal{G}, \forall g \in GL(n, \mathbb{R}), R.g \in \mathcal{G} \text{ ssi } g \in G,$$

Cela signifie que deux éléments de  $\mathcal{G}$  sont dans la même fibre (deux repères de même origine  $x$ ) si et seulement s'ils se déduisent l'un de l'autre par une matrice de passage dans le groupe  $G$ . Ce groupe est appelé *groupe structural* de  $\mathcal{G}$ . Par exemple,  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  est une  $GL(n, \mathbb{R})$ -structure tandis que l'ensemble des repères orthonormés d'une variété riemannienne est une  $O(n, \mathbb{R})$ -structure.

Tout difféomorphisme  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$  se prolonge de manière unique en un difféomorphisme  $\phi : \mathcal{R}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{R}(\bar{\mathcal{M}})$  en posant pour tout repère  $R = (x, \{e_i\})$ ,

$$\phi(R) = (\varphi(x), \{\bar{e}_i\}) \text{ avec } \bar{e}_i = \varphi'(x)e_i, \quad (5.1)$$

où  $\varphi'(x)$  désigne la jacobienne de  $\varphi(x)$  et on vérifie que

$$\forall g \in GL(n, \mathbb{R}), \quad \phi(R.g) = \phi(R).g,$$

**Définition 5.1.1.** Deux  $G$ -structures  $\mathcal{G}$  et  $\bar{\mathcal{G}}$  de base  $\mathcal{M}$  et  $\bar{\mathcal{M}}$  sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$  tel que le prolongement  $\phi : \mathcal{R}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{R}(\bar{\mathcal{M}})$  défini par (5.1) vérifie

$$\phi(\mathcal{G}) = \bar{\mathcal{G}}.$$

On écrira alors  $\mathcal{G} \sim \bar{\mathcal{G}}$ . La restriction de  $\phi$  à la variété  $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}(\mathcal{M})$  est un isomorphisme de  $\mathcal{G}$  dans  $\bar{\mathcal{G}}$ .

### 5.1.1 Exemples de $G$ -structures

**Exemple 5.1.2.** Le fibré des repères d'une variété  $\mathcal{M}$  est une  $GL(n, \mathbb{R})$ -structure. En tout point  $x \in \mathcal{M}$ , il est clair que l'on peut passer d'une base de  $T_x\mathcal{M}$  à une autre par une matrice de  $GL(n, \mathbb{R})$ . Les automorphismes de cette  $G$ -structure  $\mathcal{R}(\mathcal{M})$  correspondent aux difféomorphismes de  $\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}$ .

**Exemple 5.1.3.** Le fibré des repères orthonormés d'une variété riemannienne  $\mathcal{M}$  est une  $O(n)$ -structure. En tout point  $x \in \mathcal{M}$ , on peut passer d'une base orthonormée de  $T_x\mathcal{M}$  à une autre par une matrice de  $O(n)$ . Les automorphismes de la  $G$ -structure correspondent aux difféomorphismes  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , dont la jacobienne  $\varphi'(x)$  transforme un repère orthonormé en  $x$  en un repère orthonormé en  $\varphi(x)$ . Ce sont les isométries de  $\mathcal{M}$  c'est à dire les transformations qui conservent la métrique de  $\mathcal{M}$ .

### 5.1.2 Équivalence locale de deux $G$ -structures

**Définition 5.1.4.** Soient  $\mathcal{G} \subset \mathcal{R}(\mathcal{M})$  et  $\bar{\mathcal{G}} \subset \mathcal{R}(\bar{\mathcal{M}})$  deux  $G$ -structures. On dit que  $\mathcal{G}$  et  $\bar{\mathcal{G}}$  sont localement équivalentes en  $(x, \bar{x}) \in \mathcal{M} \times \bar{\mathcal{M}}$  s'il existe des voisinages ouverts  $U$  de  $x$  et  $\bar{U}$  de  $\bar{x}$  et un isomorphisme  $\phi : \mathcal{G}|_U \rightarrow \bar{\mathcal{G}}|_{\bar{U}}$ .

**Proposition 5.1.5.** Soit  $\theta$  et  $\bar{\theta}$  deux formes canoniques définies sur les  $G$ -structures  $\mathcal{G}$  et  $\bar{\mathcal{G}}$  et  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$  un difféomorphisme entre ces deux variétés. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Le difféomorphisme  $\phi$  est un isomorphisme de  $G$ -structures.
2. Le difféomorphisme  $\phi$  vérifie  $\phi^*(\bar{\theta}) = \theta$ .

Le difféomorphisme  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$  est un isomorphisme de  $G$ -structure si et seulement si  $\phi^*(\bar{\theta}) = \theta$ , cela signifie que le graphe de  $\phi$  dans  $\mathcal{G} \times \bar{\mathcal{G}}$  vérifie le système de Pfaff.

$$\begin{cases} \bar{\theta} = \theta, \\ \theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^n \neq 0, \end{cases}$$

## 5.2 Application du problème d'équivalence de Cartan aux distributions de plans

### 5.2.1 Calcul des équations de structure

La première étape de l'algorithme de Cartan est le calcul des équations de structure. Pour commencer, on va prendre  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ , on note  $D$  et  $\bar{D}$  deux distributions de plans dans  $Gr_2(\mathbb{R}^3)$

$$D : \{\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto P(x) \in Gr_2(\mathbb{R}^3)\},$$

$$\bar{D} : \{\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \bar{P}(x) \in Gr_2(\mathbb{R}^3)\},$$

L'existence d'un difféomorphisme  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $d(\Phi_x(P(x))) = \bar{P}(\Phi(x))$  n'est pas toujours vraie, mais nous essayons de trouver des conditions pour qu'une telle application soit un difféomorphisme. Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $(e_1, e_2)$  soit une base de  $P(x)$ . Notons  $\mathcal{R}(\mathbb{R}^3)$  le fibré des repères sur  $\mathbb{R}^3$ , soit  $\mathcal{G} \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $\mathcal{G} \simeq \mathbb{R}^3 \times S$  avec

$$S = \left( \begin{array}{cc} A & B \\ 0 & b_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} a_1^1 & a_2^1 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{array} \right) \in GL(3, \mathbb{R}^3),$$

où  $a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 \neq b_3 \neq 0$ . Une section locale  $\sigma$  de  $\mathcal{G}$  est la donnée d'un champ de repères, c'est-à-dire d'une application

$$\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \sigma(x) \in \mathcal{G} \text{ avec } \sigma(x) = (x, (X_1(x), X_2(x), X_3(x))),$$

où  $(X_1(x), X_2(x))$  est une base de  $P(x)$ . Tout repère  $R \in \mathcal{G}$  d'origine  $x$  est un repère qui se déduit de façon unique de  $\sigma(x)$  par multiplication à droite par une matrice du groupe  $G$ . Soit  $g \in G$  tel que

$$\sigma(x) = R.g,$$

Un élément de  $\mathcal{G}$  est donc la donnée d'un couple  $(x, g) \in \mathbb{R}^3 \times S$ . Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^3$ , il existe une base  $(v_1(x), v_2(x))$  de  $P(x) \subset T_x \mathbb{R}^3$ , qu'on complète par  $v_3(x)$  pour obtenir une base  $(v_1(x), v_2(x), v_3(x))$  de  $T_x \mathbb{R}^3$

$$\left( x, (v_1, v_2, v_3)(x) \left( \begin{array}{ccc} a_1^1 & a_2^1 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{array} \right) \right) \in \mathcal{G}.$$

Considérons les 1-formes  $\theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  du corepère définies par

$$\theta^a = \sum_{\mu=1}^3 f_{\mu}^a(x, A, b) dx^{\mu} \text{ et } dS = \left\{ dx, \left( \begin{array}{ccc} da_1^1 & da_2^1 & db_1 \\ da_2^1 & da_2^2 & db_2 \\ 0 & 0 & db_3 \end{array} \right) \right\}.$$

Localement on a  $\theta = S\omega$  ou encore  $\theta = S_b \omega^b$ , on peut écrire aussi  $\theta^a = S_b^a \omega^b$ . Alors

$$d\theta = d(S\omega) = dS \wedge \omega + S.d\omega,$$

$$\begin{aligned}
&= (dS.S^{-1}) \wedge S\omega + S.d\omega, \\
&= (dS.S^{-1}) \wedge \theta + S.d\omega.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Décomposons  $d\theta^a$  dans la base des 2-formes différentielles de  $\mathcal{G}$

$$d\theta^a = d(S_b^a \omega^b) = dS_b^a \wedge \omega^a + S_b^a .d\omega^b.$$

Considérons un corepère :  $\pi = (\pi^1, \dots, \pi^7)$  du groupe structural  $G$ . L'ensemble  $(\theta, \pi)$  forme donc un corepère de la  $G$ -structure  $\mathcal{G} \simeq \mathcal{M} \times S$ . On peut montrer que  $dS.S^{-1}$  est une matrice de formes de Maurer-Cartan, donc il existe des tenseurs  $A_{bc}^a$  tels que  $(dS.S^{-1})_b^a = A_{bc}^a \pi^c$ . Comme  $\theta^a = S_b^a \omega^b$ , il existe des tenseurs  $T_{bd}^a$  tels que  $S_b^a .d\omega^b = T_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c$ . Alors la décomposition des  $d\theta^a$  dans la base des 2-formes différentielles de  $\mathcal{G}$  est de la forme

$$d\theta^a = A_{bc}^a \pi^c \wedge \theta^b + T_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c,$$

Reprenons notre exemple. Le calcul des formes de Maurer-Cartan du groupe  $G$  est le suivant

$$(dS.S^{-1})_b^a = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} \begin{pmatrix} da_1^1 & da_2^1 & db_1 \\ da_1^2 & da_2^2 & db_2 \\ 0 & 0 & db_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_1^2 & \frac{a_1^2 b_2 - a_2^2 b_1}{b_3} \\ -a_2^1 & a_1^1 & \frac{a_2^1 b_1 - a_1^1 b_2}{b_3} \\ 0 & 0 & \frac{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2}{b_3} \end{pmatrix}.$$

On note alors

$$dS.S^{-1} = \begin{pmatrix} \pi^1 & \pi^2 & \pi^3 \\ \pi^4 & \pi^5 & \pi^6 \\ 0 & 0 & \pi^7 \end{pmatrix},$$

où  $\pi^1, \dots, \pi^7$  les formes de Maurer-Cartan qui vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^1 = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} (a_2^2 da_1^1 - a_2^1 da_2^1), \\ \pi^2 = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} (a_1^1 da_2^1 - a_2^2 da_1^1), \\ \pi^3 = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} \left( \frac{a_1^2 b_2 - a_2^2 b_1}{b_3} da_1^1 + \frac{a_2^1 b_1 - a_1^1 b_2}{b_3} da_2^1 + \frac{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2}{b_3} db_1 \right), \\ \pi^4 = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} (a_2^2 da_1^2 - a_2^1 da_2^2), \\ \pi^5 = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} (a_1^1 da_2^2 - a_2^1 da_1^2), \\ \pi^6 = \frac{1}{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2} \left( \frac{a_2^2 b_2 - a_2^1 b_1}{b_3} da_1^2 + \frac{a_2^1 b_2 - a_1^1 b_1}{b_3} da_2^2 + \frac{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2}{b_3} db_2 \right), \\ \pi^7 = \frac{1}{b_3} db_3, \end{array} \right.$$

Comme  $d\omega^b$  est une 2-forme, on peut par exemple choisir  $\omega$  de sorte que  $d\omega^b = \sum_{ac \in \{12, 23, 31\}} B_{ac}^b \theta^a \wedge \theta^c$ . Le calcul des équations de structure donne

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta^1 = \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + \pi^3 \wedge \theta^3 + T_{12}^1 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{23}^1 \theta^2 \wedge \theta^3 + T_{31}^1 \theta^3 \wedge \theta^1, \\ d\theta^2 = \pi^4 \wedge \theta^1 + \pi^5 \wedge \theta^2 + \pi^6 \wedge \theta^3 + T_{12}^2 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{23}^2 \theta^2 \wedge \theta^3 + T_{31}^2 \theta^3 \wedge \theta^1, \\ d\theta^3 = \pi^7 \wedge \theta^3 + T_{12}^3 \theta^1 \wedge \theta^2 + T_{23}^3 \theta^2 \wedge \theta^3 + T_{31}^3 \theta^3 \wedge \theta^1, \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{12}^1 = a_1^1 B_{12}^1 + a_2^1 B_{12}^2 + b_1 B_{12}^3, \\ T_{23}^1 = a_1^1 B_{23}^1 + a_2^1 B_{23}^2 + b_1 B_{23}^3, \\ T_{31}^1 = a_1^1 B_{31}^1 + a_2^1 B_{31}^2 + b_1 B_{31}^3, \\ T_{12}^2 = a_1^2 B_{12}^1 + a_2^2 B_{12}^2 + b_2 B_{12}^3, \\ T_{23}^2 = a_1^2 B_{23}^1 + a_2^2 B_{23}^2 + b_2 B_{23}^3, \\ T_{31}^2 = a_1^2 B_{31}^1 + a_2^2 B_{31}^2 + b_2 B_{31}^3, \\ T_{12}^3 = b_3 B_{12}^3, \\ T_{23}^3 = b_3 B_{23}^3, \\ T_{31}^3 = b_3 B_{31}^3, \end{array} \right.$$

## 5.2.2 Absorption de la torsion

La deuxième étape de l'algorithme de Cartan consiste à simplifier un maximum de coefficients  $T_{ac}^b$  dans les équations de structure, en utilisant un changement de formes, pour  $i = 1, \dots, 7$

$$\pi'^i = \pi^i + \lambda_a^i \theta^a,$$

On obtient des relations de la formes suivantes

$$T_{ac}'^b = T_{ac}^b + A_{ci}^b \lambda_a^i - A_{ai}^b \lambda_c^i,$$

$\pi' = \pi + \Lambda \theta$  où  $\Lambda = (\lambda_b^a)$  est une matrice des fonctions "inconnues" et qu'on va déterminer, et  $T' = T + L(\Lambda)$  où  $L$  est un opérateur linéaire qui dépend uniquement du tenseur  $A_{bc}^a$ . On commence d'abord par faire le changement de forme  $\pi'^i = \pi^i + \lambda_a^i \theta^a$ . On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{12}'^1 = T_{12}^1 - \lambda_2^1 + \lambda_1^2, \\ T_{23}'^1 = T_{23}^1 - \lambda_3^2 + \lambda_2^3, \\ T_{31}'^1 = T_{31}^1 - \lambda_1^3 + \lambda_3^1, \\ T_{12}'^2 = T_{12}^2 - \lambda_2^4 + \lambda_1^5, \\ T_{23}'^2 = T_{23}^2 - \lambda_3^5 + \lambda_2^6, \\ T_{31}'^2 = T_{31}^2 - \lambda_1^6 + \lambda_3^4, \\ T_{12}'^3 = T_{12}^3, \\ T_{23}'^3 = T_{23}^3 + \lambda_2^7, \\ T_{31}'^3 = T_{31}^3 - \lambda_1^7, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Donc on peut choisir les paramètres  $\lambda_2^1, \lambda_3^2, \lambda_1^3, \lambda_2^4, \lambda_3^5, \lambda_1^6, \lambda_1^7$  et  $\lambda_2^7$  de façon à ce que les nouveaux coefficients  $T'$  soient nuls sauf  $T_{12}'^3 = T_{12}^3$  qui est donc invariant. Donc pour absorber la torsion il faut poser

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi^1 \rightarrow \pi^1 - T_{12}^1 \theta^2, \\ \pi^2 \rightarrow \pi^2 - T_{23}^1 \theta^3, \\ \pi^3 \rightarrow \pi^3 - T_{31}^1 \theta^1, \\ \pi^4 \rightarrow \pi^4 - T_{12}^2 \theta^2, \\ \pi^5 \rightarrow \pi^5 - T_{23}^2 \theta^3, \\ \pi^6 \rightarrow \pi^6 - T_{31}^2 \theta^1, \\ \pi^7 \rightarrow \pi^7 - T_{31}^3 \theta^1 + T_{23}^3 \theta^2, \end{array} \right.$$

C'est à dire  $\pi = \pi + \Lambda^{(1)}\theta$  avec

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -T_{12}^1 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{23}^1 \\ -T_{31}^1 & 0 & 0 \\ 0 & -T_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{23}^2 \\ -T_{31}^2 & 0 & 0 \\ -T_{31}^3 & T_{23}^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les variables  $\lambda_1^1, \lambda_3^1, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_2^3, \lambda_3^3, \lambda_1^4, \lambda_3^4, \lambda_1^5, \lambda_2^5, \lambda_2^6, \lambda_3^6$  et  $\lambda_3^7$  sont des variables arbitraires. On note alors

$$\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 0 & \lambda_3^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \\ \lambda_1^4 & 0 & \lambda_3^4 \\ \lambda_1^5 & \lambda_2^5 & 0 \\ 0 & \lambda_2^6 & \lambda_3^6 \\ 0 & 0 & \lambda_3^7 \end{pmatrix}$$

Donc, si on fait le changement de forme  $\pi \rightarrow \pi + \Lambda\theta$  avec  $\Lambda = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}$ , les équations de structure deviennent

$$\begin{cases} d\theta^1 = \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + \pi^3 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 = \pi^4 \wedge \theta^1 + \pi^5 \wedge \theta^2 + \pi^6 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 = \pi^7 \wedge \theta^3 + T_{12}^3 \theta^1 \wedge \theta^2, \end{cases}$$

Avec  $T_{12}^3 = b_3 B_{12}^3$  est un invariant.

### 5.2.3 Normalisation

Notons  $\lambda = T_{12}^3$ . On a

$$\begin{aligned} d(d\theta^3) &= d\pi^7 \wedge \theta^3 - \pi^7 \wedge d\theta^3 + d\lambda \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 - \lambda d\theta^1 \wedge \theta^2 + \lambda \theta^1 \wedge d\theta^2, \\ &= d\pi^7 \wedge \theta^3 - \lambda \pi^7 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 + d\lambda \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 + \lambda \pi^1 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 + \lambda \pi^3 \wedge \theta^3 \wedge \theta^2, \\ &\quad - \lambda \theta^1 \wedge \pi^5 \wedge \theta^2 - \lambda \theta^1 \wedge \pi^6 \wedge \theta^3, \\ &= (d\lambda - \lambda(\pi^7 - (\pi^1 + \pi^5))) \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{mod } \theta^3, \end{aligned}$$

On mesure horizontalement suivant  $\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$  alors on a

$$d\lambda = \lambda(\pi^7 - (\pi^1 + \pi^5)).$$

On bloque fibre à fibre (pas de façon uniforme) verticalement  $\mathcal{G}$ . On considère alors une sous- $G_1$ -structure  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$  telle que le sous-groupe  $G_1 \subset G$  qui agit est

$$S = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & b_1 \\ a_2^1 & a_2^2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}^3),$$

avec  $\frac{a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2}{b_3} = 1$ . On peut normaliser  $G_1$  au sous-groupe

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R}^3), \quad \text{avec } \rho > 0 \text{ et } \rho^{-1}\lambda = 1,$$

et toujours la même formule fondamentale de la méthode d'équivalence de Cartan

$$d\theta = \pi \wedge \theta + \tau,$$

avec

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^1 & \pi^2 & \pi^3 \\ \pi^4 & \pi^5 & \pi^6 \\ 0 & 0 & \pi^7 \end{pmatrix}.$$

On recalcule ensuite les équations de structure avec le nouveau sous groupe sous la contrainte  $\pi^1 + \pi^5 = \pi^7$ . Il n'est plus possible de faire des changements de formes qu'avant. Après nouvelle absorption de la torsion, on peut réécrire les équations de structure toujours sous la même forme

$$\begin{cases} d\theta^1 = \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + \pi^3 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 = \pi^4 \wedge \theta^1 + \pi^5 \wedge \theta^2 + \pi^6 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 = (\pi^1 + \pi^5) \wedge \theta^3 & + \lambda \theta^1 \wedge \theta^2, \end{cases}$$

Donc

$$0 \equiv d(d\theta^3) = d\lambda \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 \pmod{\theta^3},$$

Alors, sur  $\mathcal{G}_1$ , on peut normaliser  $\lambda = 1$ . En effet, soit le changement de formes

$$\begin{cases} \theta^1 \leftarrow \theta^1, \\ \theta^2 \leftarrow \theta^2, \\ \theta^3 \leftarrow \tilde{\theta}^3 = \rho^{-1}\theta^3, \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} d\tilde{\theta}^3 &= d(\rho^{-1}\theta^3) = d\rho^{-1} \wedge \theta^3 + \rho^{-1}((\pi^1 + \pi^5) \wedge \theta^3 + \lambda \theta^1 \wedge \theta^2) \\ &= d\rho^{-1} \wedge \theta^3 + (\pi^1 + \pi^5) \wedge \tilde{\theta}^3 + \theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

Ici  $d\rho^{-1}$  est semi-basique, donc il existe des fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  telle que  $d\rho^{-1} = \alpha\theta^1 + \beta\theta^2$ , on peut donc absorber dans  $\pi^7$  sans toucher à l'expression  $\pi^1 + \pi^5 = \pi^7$ . Les équations de structure s'écrivent :

$$\begin{cases} d\theta^1 = \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + \pi^3 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 = \pi^4 \wedge \theta^1 + \pi^5 \wedge \theta^2 + \pi^6 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 = (\pi^1 + \pi^5) \wedge \theta^3 & + \theta^1 \wedge \theta^2, \end{cases} \quad (5.4)$$

### 5.2.4 Test d'involution (test de Cartan)

Imaginons qu'on a un problème d'équivalence dans la base  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ . Soit  $r$  la dimension du groupe  $G_1$ . Les équations de structure s'écrivent

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r A_{jk}^i \pi^k \wedge \theta^j + \sum_{j,l=1}^n T_{jl}^i \theta^j \wedge \theta^l, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.5)$$

où les  $\pi^k$  sont les formes de Maurer-Cartan et les  $A_{jk}^i$  sont les coefficients de la structure. On remplace chaque  $\pi^k$  par une combinaison linéaire  $\lambda_j^k \theta^j$ , on obtient le système dont les inconnues sont les  $\lambda_j^k$

$$\sum_{k=1}^r (A_{jk}^i \lambda_l^k - A_{lk}^i \lambda_j^k) = T_{jk}^i, \quad i, j, l = 1, \dots, n, \quad j < k. \quad (5.6)$$

**Définition 5.2.1.** On définit  $r^{(1)}$  le nombre de variables libres du le système linéaire

$$\sum_{k=1}^r (A_{jk}^i \lambda_l^k - A_{lk}^i \lambda_j^k) = 0, \quad i, j, l = 1, \dots, n, \quad j < k. \quad (5.7)$$

Autrement dit,  $r^{(1)}$  est la dimension de l'espace des solutions du système (5.7).

Dans l'exemple des  $p$ -plan, on a  $r = 6$  et  $n = 3$ . On remplace dans (5.4) les  $\pi^k$  par  $\lambda_1^k \theta^1 + \lambda_2^k \theta^2 + \lambda_3^k \theta^3$ , on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_3^1 - \lambda_1^3 = \lambda_3^2 - \lambda_2^3 = 0, \\ \lambda_3^4 - \lambda_1^6 = \lambda_2^6 - \lambda_3^5 = 0, \\ \lambda_1^2 = \lambda_2^1 = -\lambda_2^5, \\ \lambda_2^4 = \lambda_1^5 = -\lambda_1^1, \end{cases} \quad (5.8)$$

Dans les équations (5.8) les dix variables  $\lambda_2^1, \lambda_3^1, \lambda_3^2, \lambda_1^5, \lambda_3^4, \lambda_2^6, \lambda_2^2, \lambda_3^3, \lambda_3^6, \lambda_1^4$  peuvent être choisies arbitrairement, donc

$$r^{(1)} = 10,$$

Pour continuer la description du test d'involution de Cartan, on définit ensuite les caractères réduits de Cartan.

**Définition 5.2.2.** Soient  $X = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  et la matrice  $M$  de dimension  $n \times r$  définit par

$$M(X) := M_k^i(X) := \sum_{j=1}^n A_{jk}^i x^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, r,$$

avec les  $A_{jk}^i$  définit dans (5.6). Alors si on note par  $s'_1, \dots, s'_{n-1}, s'_n$  les caractères réduits de Cartan, nous définissons :

$$s'_1 + \dots + s'_k = \max_{X_1, \dots, X_k \in \mathbb{R}^n} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} M(X_1) \\ \vdots \\ M(X_k) \end{pmatrix} \quad k = 1, \dots, n-1,$$



et  $s'_n$  est défini par l'équation

$$s'_1 + \dots + s'_{n-1} + s'_n = r.$$

**Définition 5.2.3.** Soit  $\theta$  une base du fibré cotangent  $T_x^*\mathbb{R}$  et  $s'_1, \dots, s'_n$  les caractères réduits de Cartan, et soit  $r^{(1)}$  défini dans (5.2.1). Alors  $\theta$  est dite *involutive* si le test de Cartan satisfait

$$s'_1 + 2s'_2 + \dots + ns'_n = r^{(1)},$$

**Remarque 5.2.4.** Nous avons toujours

$$r^{(1)} \leq s'_1 + 2s'_2 + \dots + ns'_n,$$

Revenons à notre problème. On a  $n = 3$  et  $r = 6$ , dans les équations (5.4) :

$$(A_{2k}^i + A_{3k}^i + A_{1k}^i)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq k \leq 6}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, pour  $X = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$  on retrouve

$$M(X) = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ x^3 & 0 & 0 & 0 & x^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

Pour  $X = (0, 0, 1)$  on a  $\text{rg}M(0, 0, 1) = 3$  donc

$$s'_1 = 3.$$

De plus, on a

$$s'_1 + s'_2 = \max_{X, Y \in \mathbb{R}^3} \text{rg} \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ x^3 & 0 & 0 & 0 & x^3 & 0 \\ y^1 & y^2 & y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^1 & y^2 & y^3 \\ y^3 & 0 & 0 & 0 & y^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour  $X = (0, 0, 1)$  et  $Y = (1, 1, 0)$ , alors  $s'_1 + s'_2 = 5$ , ce qui donne

$$s'_2 = 2 \text{ et alors } s'_3 = 6 - 3 - 2 = 1.$$

On a bien  $s'_1 + 2s'_2 + 3s'_3 = 10 = r^{(1)}$  donc le système (5.4) est involutif.



# Application de la méthode d'équivalence aux équations de Monge-Ampère

## Introduction

Dans ce chapitre, Nous appliquons la méthode d'équivalence de Cartan aux équations de Monge-Ampère et nous retrouvons le fait qu'il existe, à isomorphisme près, trois cas : parabolique, hyperbolique et elliptique. Nous développons ici le cas hyperbolique qui a été étudié en 2002 par Bryant, Griffiths et Grossman dans [BGG03] et par la suite, en s'inspirant de ces travaux, nous nous attaquons au cas elliptique. Nous donnons une présentation du groupe qui agit sous forme de groupe de Lie complexe ( $SL(2, \mathbb{C})$ ), ce qui le rend plus simple à appréhender.

## 6.1 Équation de Monge-Ampère

Soit l'espace des jets d'ordre 1, la variété définie par

$$\mathcal{J}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) := \{(x^1, x^2, z, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2\},$$

on note  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^5 \simeq \mathcal{J}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , à toute application  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , nous associons le graphe de  $u$  noté  $\Sigma := j^1u(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{M}$  avec :

$$j^1u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{J}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

qui vérifie  $z \circ (\mathcal{J}^1(u)) = u$  et pour  $1 \leq a \leq 2$  on a  $p_a \circ (\mathcal{J}^1(u)) = \frac{\partial u}{\partial x^a}$ , on a

$$\Sigma := \left\{ \left( x^1, x^2, u(x), \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2} \right), x \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

qui est clairement une sous-variété de  $\mathcal{J}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Nous définissons la 1-forme  $\theta$  non fermée par :

$$\theta = dz - p_1 dx^1 - p_2 dx^2,$$

Soit  $\Psi$  une 2-forme sur  $\mathcal{J}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , elle s'écrit

$$\begin{aligned} \Psi = & \Psi_{p_1 p_2} dp_1 \wedge dp_2 + \Psi_{p_1 x^2} dp_1 \wedge dx^2 + \Psi_{p_2 x^2} dp_2 \wedge dx^2 + \Psi_{p_1 x^1} dp_1 \wedge dx^1 \\ & + \Psi_{p_2 x^1} dp_2 \wedge dx^1 + \Psi_{x^1 x^2} dx^1 \wedge dx^2 \quad \text{mod}(\theta), \end{aligned}$$

et on impose les conditions

$$\begin{cases} \Psi|_{\Sigma} = 0, \\ \theta|_{\Sigma} = 0 \quad (\Rightarrow d\theta|_{\Sigma} = 0), \\ dx^1 \wedge dx^2|_{\Sigma} \neq 0, \end{cases}$$

ce qui donne sur,  $\Sigma$ , les équations de Monge-Ampère :

$$\begin{aligned} \Psi_{p_1 p_2} \left[ \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^2)^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} \right)^2 \right] + \Psi_{p_1 x^2} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^1)^2} + \Psi_{p_2 x^1} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^2)^2} \\ + (\Psi_{p_1 x^1} + \Psi_{p_2 x^2}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} + \Psi_{x^1 x^2} \left( x^a, u(x), \frac{\partial u}{\partial x^a} \right) = 0, \end{aligned}$$

Pour avoir une bijection entre l'ensemble  $\{\Psi\} \text{ mod}(\theta)$  et les équations de Monge-Ampère, il faut "normaliser" les 2-formes  $\Psi$ , c'est-à-dire

$$\Psi_{p_1 x^1} = \Psi_{p_2 x^2} \Leftrightarrow d\theta \wedge \Psi = 0 \quad \text{mod}(\theta),$$

Nous pouvons en déduire les équations de Monge-Ampère

$$\begin{cases} \theta \in \Omega^1(\mathcal{M}) \text{ et } \Psi \in \Omega^2(\mathcal{M}), \\ \Psi \wedge d\theta = 0 \quad \text{mod}(\theta), \\ \theta \wedge d\theta \wedge d\theta \neq 0, \end{cases}$$

**Lemme 6.1.1.** Soit la 1-forme  $\Lambda = L(x, z, p)dx$  avec  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $z = u(x)$  et  $p = (p_i) = \frac{\partial u}{\partial x^i}$ , sur  $\mathcal{J}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ; on introduit de la forme de contact,  $\theta = dz - p_i dx^i$ . Soit le graphe  $\Sigma \subset \mathcal{J}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  défini par  $\Sigma = \mathcal{J}^1 u(\Omega) = \{(x, u(x), p); \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n\}$  avec

$$\begin{cases} dx|_{\Sigma} \neq 0, \\ \theta|_{\Sigma} \neq 0, \end{cases}$$

Alors il existe une unique forme  $\Xi$  et une forme  $\alpha$  telle que

$$d\Lambda = \theta \wedge \Xi + d\alpha,$$

**Remarque 6.1.2.** Le lemme est vrai pour toute forme  $\Lambda \in \Omega^n(\mathcal{M})$ . On va faire la démonstration seulement dans le cas  $\Lambda = L(x, z, p)dx$ .

*Démonstration.* Sens direct : on a

$$d\Lambda = \frac{\partial L}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial L}{\partial p^i} dp^i \wedge dx^i = \frac{\partial L}{\partial z} \theta \wedge dx - \frac{\partial L}{\partial p^i} d\theta \wedge dx_{(i)},$$

avec  $dx_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner dx$ ,

$$d\Lambda = \theta \wedge \left( \frac{\partial L}{\partial z} dx \right) - d \left( \theta \wedge \frac{\partial L}{\partial p^i} dx_{(i)} \right) - \theta \wedge d \left( \frac{\partial L}{\partial p^i} dx_{(i)} \right),$$

Donc il suffit de prendre  $\Xi = \frac{\partial L}{\partial z} dx - d\left(\frac{\partial L}{\partial p^i} dx_{(i)}\right)$  et  $\alpha = \theta \wedge \frac{\partial L}{\partial p^i} dx_{(i)}$ .

Réciproquement : Si  $\Xi$  une forme de  $\Sigma$  tel que  $d\Lambda = \theta \wedge \Xi + d\alpha$ , d'après les équations de Monge-Ampère  $\theta \wedge \Xi = d\theta$ , avec les contraintes  $\Xi|_{\Sigma} = 0$  et  $\theta|_{\Sigma} = 0$ , alors  $\Sigma$  est un point critique de  $\int_{\Sigma} \alpha$  et donc

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_X \left( \int_{\Sigma} \alpha \right) = \int_{\Sigma} L_X \alpha = \int_{\Sigma} (X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha)) \\ &= \int_{\Sigma} X \lrcorner (\theta \wedge \Xi) = \int_{\Sigma} (\theta(X)\Xi - \theta \wedge (X \lrcorner \Xi)) = \int_{\Sigma} \theta(X)\Xi, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$d\Lambda = \theta \wedge \Xi + d\alpha \Leftrightarrow \Xi|_{\Sigma} = 0.$$

□

**Remarque 6.1.3.** Nous avons  $\Xi = \frac{\partial L}{\partial z} dx - d\left(\frac{\partial L}{\partial p^i} dx_{(i)}\right)$ , et comme  $\Xi|_{\Sigma} = 0$ , nous avons le long de  $\Sigma$  les équations d'Euler Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial z} dx - \frac{d}{dx^i} \left( \frac{\partial L}{\partial p^i} \right) = 0.$$

**Définition 6.1.4.** L'unique forme définie par  $\Pi := \theta \wedge \Psi$  est dite *forme de Poincaré-Cartan*.

**Théorème 6.1.5.** *Un système de Monge-Ampère  $(\mathcal{M}, \chi)$  avec  $\chi = \{\theta, d\theta, \Psi\}$  est localement équivalent au système d'Euler Lagrange si et seulement si*

$$d\Pi := d(\theta \wedge \Psi) = \varphi \wedge \Pi,$$

avec  $d\varphi \equiv 0 \pmod{\{\theta, d\theta, \Psi\}}$ .

*Démonstration.* Voir [BGG03] page 18-19.

□

**Théorème 6.1.6.** *(Théorème de Darboux) Soit une 1-forme  $\theta$  telle que  $\theta \wedge d\theta \neq 0$ . Alors elle s'écrit sous la forme*

$$\theta = dz - p_1 dx^1 - p_2 dx^2.$$

## 6.2 Problème d'équivalence

Notre but sera de classer les systèmes de Monge Ampère  $\Xi = (\mathcal{M}, \theta, \Psi)$  et  $\bar{\Xi} = (\bar{\mathcal{M}}, \bar{\theta}, \bar{\Psi})$  tels que

$$\begin{cases} \theta \wedge d\theta \wedge d\theta \neq 0, \\ \Psi \wedge d\theta = 0 \pmod{(\theta)}, \end{cases}$$

par des difféomorphisme  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \bar{\mathcal{M}}$  tels que

$$\begin{cases} \varphi^* \bar{\theta} = \theta \\ \varphi^* \bar{\Psi} = \Psi \end{cases}$$

### 6.2.1 Travail préparatoire

Soit  $\eta = \alpha\theta \neq 0$  avec  $\alpha$  une fonction non nulle. Par le théorème de Darboux, localement, on peut trouver des 1-formes  $\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$  tels que

$$d\eta^0 = \eta^1 \wedge \eta^2 + \eta^3 \wedge \eta^4 \pmod{(\theta)}, \quad (6.1)$$

Il existe des fonctions  $b_{ij}$  telles que  $\Psi = \frac{1}{2}b_{ij}\eta^i \wedge \eta^j$ , et comme  $\Psi \wedge d\eta^0 = 0 \pmod{(\theta)}$ , alors

$$b_{12} + b_{34} = 0,$$

Donc on peut étudier les conditions imposée par  $\eta = (\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4)$  pour que (6.1) soit vérifié. On montre qu'il y a quatre orbites, d'abord l'orbite nulle correspond au cas  $\Psi = 0$  et les autres sont :

$$\Psi = \eta^1 \wedge \eta^2 - \eta^3 \wedge \eta^4 \pmod{(\theta)},$$

cela correspond au problème variationnel classique (cas hyperbolique),

$$\Psi = \eta^1 \wedge \eta^3 \pmod{(\theta)},$$

cela correspond au problème variationnel classique (cas parabolique),

$$\Psi = \eta^1 \wedge \eta^4 - \eta^3 \wedge \eta^2 \pmod{(\theta)},$$

cela correspond au problème variationnel classique (cas elliptique).

### 6.2.2 Étude du cas hyperbolique

En s'inspirant sur les travaux dans [BGG03], nous allons commencer par étudier le cas hyperbolique. On impose les conditions suivantes

$$\begin{cases} \eta = \alpha\theta \neq 0 \\ d\eta^0 = \eta^1 \wedge \eta^2 + \eta^3 \wedge \eta^4 \pmod{(\theta)}, \\ \Psi = \eta^1 \wedge \eta^2 - \eta^3 \wedge \eta^4 \pmod{(\theta)}, \end{cases} \quad (6.2)$$

Pour tout  $\omega := (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4) \in (\mathbb{R}^4)^*$ , soit l'application symétrique non dégénérée

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* \times \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \langle \alpha, \beta \rangle := \frac{\alpha \wedge \beta}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4},$$

L'algèbre de Lie  $SL(4, \mathbb{R})$  agit sur  $\mathbb{R}^4$  ou sur  $(\mathbb{R}^4)^*$ , donc elle agit sur  $\Lambda^2\mathbb{R}^4$  ou sur  $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* \simeq \mathbb{R}^6$  par l'action :  $\forall g \in SL(4, \mathbb{R})$

$$q : \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^* \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*,$$

$$\alpha \longmapsto q(\alpha) := g^*\alpha,$$

$q$  est une forme quadratique en  $g$  et on a

$$\langle q(\alpha), q(\beta) \rangle = \langle g^* \alpha, g^* \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

On veut représenter  $SL(4, \mathbb{R}) = \text{Sp}(\mathbb{R}^{3,3}) := \text{Sp}(3, 3)^{(*)}$  sur  $\mathbb{R}^6$ , on note  $G := SO(\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*, \langle \cdot, \cdot \rangle) \subset GL(6, \mathbb{R})$ . Soit la forme quadratique

$$\begin{aligned} \Phi : SL(4, \mathbb{R}) &\longrightarrow G, \\ \alpha &\longmapsto q(\alpha), \end{aligned}$$

Soit  $(\alpha_L^1, \alpha_L^2, \alpha_L^3, \alpha_R^1, \alpha_R^2, \alpha_R^3)$  une base de  $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$  définie par

$$\begin{cases} \alpha_L^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ \alpha_L^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^4 \wedge \omega^2, \\ \alpha_L^3 = \omega^1 \wedge \omega^4 + \omega^2 \wedge \omega^3, \\ \alpha_R^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^3 \wedge \omega^4, \\ \alpha_R^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 - \omega^4 \wedge \omega^2, \\ \alpha_R^3 = \omega^1 \wedge \omega^4 - \omega^2 \wedge \omega^3, \end{cases}$$

On a  $\forall a, b \in \{1, 2, 3\}$

$$\langle \alpha_L^a, \alpha_L^b \rangle = 2\delta_b^a, \quad \langle \alpha_R^a, \alpha_R^b \rangle = -2\delta_b^a \text{ et } \langle \alpha_L^a, \alpha_R^b \rangle = 0,$$

La signature de  $\Phi$  est donc  $(3, 3)$  et  $SO(\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*, \langle \cdot, \cdot \rangle) \subset SL(4, \mathbb{R})$  et comme  $\dim SL(4, \mathbb{R}) = 4^2 - 1 = 15$  et  $\dim SO(\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \frac{6(6-1)}{2} = 15$ , on a

$$G = \text{Spin}(3, 3),$$

Dans le cas hyperbolique, pour déterminer le groupe qui conserve les formes dans (6.2), on définit

$$G_0 = G_{\text{hyper}} = \{g \in SL(4, \mathbb{R}), \quad g^* \alpha_L^1 = \alpha_L^1; \quad g^* \alpha_R^1 = \alpha_R^1\} \simeq \text{Spin}(2, 2),$$

Soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{\text{hyper}}$ , alors  $\xi \in \mathfrak{g}_{\text{hyper}}$ . On a  $\xi \in M(4, \mathbb{R})$  et  $\text{trace} \xi = 0$ ; de plus, on a

$$\begin{cases} \xi \in M(4, \mathbb{R}), \\ \xi^* \alpha_L^1 = \alpha_L^1; \quad \xi^* \alpha_R^1 = \alpha_R^1, \end{cases} \quad (6.3)$$

On note

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_3^1 & \xi_4^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_4^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 & \xi_4^3 \\ \xi_1^4 & \xi_2^4 & \xi_3^4 & \xi_4^4 \end{pmatrix}$$

Donc (6.3) donne

$$\begin{cases} \xi_a^1 \omega^a \wedge \omega^2 + \xi_a^2 \omega^1 \wedge \omega^a + \xi_a^3 \omega^a \wedge \omega^4 + \xi_a^4 \omega^3 \wedge \omega^a = \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ \xi_a^1 \omega^a \wedge \omega^2 + \xi_a^2 \omega^1 \wedge \omega^a - \xi_a^3 \omega^a \wedge \omega^4 - \xi_a^4 \omega^3 \wedge \omega^a = \omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^3 \wedge \omega^4, \end{cases}$$

(\*) Les physiciens utilisent en général la notation Spin. ( $\text{Spin}(1, 3) = SL(2, \mathbb{C})$ ).

Par identification, on trouve

$$\begin{cases} \xi_1^1 + \xi_2^2 = \xi_3^3 + \xi_4^4, \\ \xi_3^1 + \xi_2^4 = \xi_3^1 - \xi_2^4 = 0, \\ \xi_4^1 - \xi_2^3 = \xi_4^1 + \xi_2^3 = 0, \\ \xi_3^2 - \xi_1^4 = \xi_3^2 + \xi_1^4 = 0, \\ \xi_4^2 + \xi_1^3 = \xi_4^2 - \xi_1^3 = 0, \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & 0 & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3^3 & \xi_4^3 \\ 0 & 0 & \xi_3^4 & \xi_4^4 \end{pmatrix} \text{ avec } \xi_1^1 + \xi_2^2 = \xi_3^3 + \xi_4^4,$$

Donc le corepère adapté au système de Monge-Ampère dans le cas hyperbolique, est formé de section de  $G$ -structure dans  $\mathcal{M}^5$ , où  $G \subset GL(5, \mathbb{R})$  est le sous-groupe engendré par toutes les matrices de la forme

$$g_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ C & A & 0 \\ D & 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ a_4 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

avec

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si on fixe un sous-groupe  $G \subset GL(5, \mathbb{R})$ , la trivialisatation locale  $\mathcal{G} = \mathcal{M} \times G$  dépend du choix de la section  $\eta$  de  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}$  telle que son image soit identifiée à  $\mathcal{M} \times \{e\} \subset \mathcal{M} \times G$ . Pour  $g \in G$ , notons

$$\omega = g^{-1}\eta \in \Omega(\mathcal{G}) \otimes \mathbb{R}^5$$

alors

$$d\omega = dg^{-1} \wedge \eta + g^{-1} \wedge d\eta = -g^{-1}dg \wedge \omega + g^{-1}d\eta$$

car

$$0 = d(g^{-1}g) = dg^{-1} + g^{-1}dg;$$

$g^{-1}d\eta$  est une 2-forme qu'on peut l'écrire sous la forme

$$\tau := g^{-1}d\eta = \frac{1}{2}T_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c,$$

où les  $T_{bc}^a$  sont les coefficients de la torsion. Soit  $\varphi$  une 1-forme, alors on a  $\varphi = g^{-1}dg \bmod \eta$  ce qui donne l'expression fondamentale de la méthode d'équivalence de Cartan :

$$d\omega = -\varphi \wedge \omega + \tau.$$



Notons  $g^{-1}\eta = \omega = (\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$  et  $\varphi = g^{-1}dg \subset G$  qui est un sous-groupe de  $GL(5, \mathbb{R})$  alors  $\varphi$  est une matrice de 1-forme s'écrit :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_0^1 & \varphi_1^1 & \varphi_2^1 & 0 & 0 \\ \varphi_0^2 & \varphi_1^2 & \varphi_2^2 & 0 & 0 \\ \varphi_0^3 & 0 & 0 & \varphi_3^3 & \varphi_4^3 \\ \varphi_0^4 & 0 & 0 & \varphi_3^4 & \varphi_4^4 \end{pmatrix},$$

avec la condition  $\varphi_0^0 = \varphi_1^1 + \varphi_2^2 = \varphi_3^3 + \varphi_4^4$ . Notons  $\tau = (\tau^0, \tau^1, \tau^2, \tau^3, \tau^4)$  les coefficients de la torsion à valeur dans  $\mathbb{R}^5$ , soit

$$\tau^0 := d\omega^0 + \varphi_0^0 \wedge \omega^0 = \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4 + \sigma \wedge \omega^0,$$

Par un changement de forme  $\varphi_0^0 \leftarrow \varphi_0^0 - \sigma$ , nous pouvons éliminer le terme  $\sigma \wedge \omega^0$ , alors  $T_{12}^0 = T_{34}^0 = 1$  et tous les autres sont nuls,  $T_{bc}^0 = 0$ .

Pour  $1 \leq a, b, c \leq 4$ , on note

$$\tau^a = T_{b0}^a \omega^b \wedge \omega^0 + \frac{1}{2} T_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c,$$

Avec  $T_{bc}^a = -T_{cb}^a$ . On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} d\omega^0 = -\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^1 = -\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + \frac{1}{2} T_{bc}^1 \omega^b \wedge \omega^c, \\ d\omega^2 = -\varphi_0^2 \wedge \omega^0 - \varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + \frac{1}{2} T_{bc}^2 \omega^b \wedge \omega^c, \\ d\omega^3 = -\varphi_0^3 \wedge \omega^0 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + \frac{1}{2} T_{bc}^3 \omega^b \wedge \omega^c, \\ d\omega^4 = -\varphi_0^4 \wedge \omega^0 - \varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + \frac{1}{2} T_{bc}^4 \omega^b \wedge \omega^c, \end{cases} \quad (6.5)$$

Avec des changement de la même type on peut s'arranger au système suivant

$$\begin{cases} d\omega^0 = -\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^1 = -\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + T_{13}^1 \omega^1 \wedge \omega^3 + T_{14}^1 \omega^1 \wedge \omega^4 + T_{34}^1 \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^2 = -\varphi_0^2 \wedge \omega^0 - \varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + T_{23}^2 \omega^2 \wedge \omega^3 + T_{24}^2 \omega^2 \wedge \omega^4 + T_{34}^2 \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^3 = -\varphi_0^3 \wedge \omega^0 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + T_{13}^3 \omega^1 \wedge \omega^3 + T_{23}^3 \omega^2 \wedge \omega^3 + T_{12}^3 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^4 = -\varphi_0^4 \wedge \omega^0 - \varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + T_{14}^4 \omega^1 \wedge \omega^4 + T_{24}^4 \omega^2 \wedge \omega^4 + T_{12}^4 \omega^1 \wedge \omega^2, \end{cases}$$

Par un nouveau changement  $\varphi_1^1 - \varphi_2^2$  et  $\varphi_3^3 - \varphi_4^4$ , on peut montrer les égalités :

$$T_{23}^2 = T_{13}^1, \quad T_{24}^2 = T_{14}^1, \quad T_{13}^3 = T_{14}^4, \quad T_{23}^3 = T_{24}^4$$

Alors le système (6.5) s'écrit

$$\begin{cases} d\omega^0 = -\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^1 = -\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + (V_3 \omega^3 + V_4 \omega^4) \wedge \omega^1 + U^1 \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^2 = -\varphi_0^2 \wedge \omega^0 - \varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + (V_3 \omega^3 + V_4 \omega^4) \wedge \omega^2 + U^2 \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^3 = -\varphi_0^3 \wedge \omega^0 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + (V_1 \omega^1 + V_2 \omega^2) \wedge \omega^3 + U^3 \omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^4 = -\varphi_0^4 \wedge \omega^0 - \varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + (V_1 \omega^1 + V_2 \omega^2) \wedge \omega^4 + U^4 \omega^1 \wedge \omega^2, \end{cases} \quad (6.6)$$

Le détail de calcul est dans l'annexe

$$0 = d(dw^0) = -d\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \varphi_0^0 \wedge d\omega^0 + d\omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^1 \wedge d\omega^2 + d\omega^3 \wedge \omega^4 - \omega^3 \wedge d\omega^4$$

On obtient les relations suivantes :

$$U^1 = -2V_2, \quad U^2 = 2V_1, \quad U^3 = -2V_4, \quad U^4 = 2V_3, \quad (6.7)$$

donc (6.6) s'écrit

$$\begin{cases} d\omega^0 = -\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^1 = -\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + V_3\omega^3 \wedge \omega^1 + V_4\omega^4 \wedge \omega^1 - 2V_2\omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^2 = -\varphi_0^2 \wedge \omega^0 - \varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + V_3\omega^3 \wedge \omega^2 + V_4\omega^4 \wedge \omega^2 + 2V_1\omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^3 = -\varphi_0^3 \wedge \omega^0 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + V_1\omega^1 \wedge \omega^3 + V_2\omega^2 \wedge \omega^3 - 2V_4\omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^4 = -\varphi_0^4 \wedge \omega^0 - \varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + V_1\omega^1 \wedge \omega^4 + V_2\omega^2 \wedge \omega^4 + 2V_3\omega^1 \wedge \omega^2, \end{cases} \quad (6.8)$$

On a

$$0 = d(dw^1) = -d\varphi_0^1 \wedge \omega^0 + \varphi_0^1 \wedge d\omega^0 - d\varphi_1^1 \wedge \omega^1 + \varphi_1^1 \wedge d\omega^1 - d\varphi_2^1 \wedge \omega^2 + \varphi_2^1 \wedge d\omega^2$$

. Donc

$$0 \equiv \varphi_0^1 + U_1\varphi_1^1 + U_2\varphi_2^1 + dU_1 - U_1\varphi_0^0 \text{ mod}\{\omega^0, \dots, \omega^4\}. \quad (6.9)$$

On refait le même calcul pour  $d(dw^2)$ , on trouve

$$0 \equiv \varphi_0^2 + U_1\varphi_1^2 + U_2\varphi_2^2 + dU_2 - U_2\varphi_0^0 \text{ mod}\{\omega^0, \dots, \omega^4\}. \quad (6.10)$$

Alors (7.1) et (6.10) s'écrivent matriciellement

$$0 \equiv d \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_0^1 \\ \varphi_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} - \varphi_0^0 \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

De même pour calculer  $d(dw^3)$  et  $d(dw^4)$ , on obtient :

$$0 \equiv d \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_0^3 \\ \varphi_0^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_3^3 & \varphi_4^3 \\ \varphi_3^4 & \varphi_4^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} - \varphi_0^0 \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

ou encore (6.11) et (6.12) s'écrivent mod $\{\omega^0, \dots, \omega^4\}$

$$d \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \varphi_0^1 \\ \varphi_0^2 \\ \varphi_0^3 \\ \varphi_0^4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi_1^1 - \varphi_0^0 & \varphi_3^1 & 0 & 0 \\ \varphi_1^2 - \varphi_0^0 & \varphi_2^2 - \varphi_0^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3^3 - \varphi_0^0 & \varphi_4^3 \\ 0 & 0 & \varphi_3^4 & \varphi_4^4 - \varphi_0^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

On note  $t \rightarrow g_t = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 \\ C(t) & A(t) & 0 \\ D(t) & 0 & B(t) \end{pmatrix}$  dans  $G_0$  où  $g_{t=0} = I_5$ . Pour tout  $x \in B_0$

soit, dans le fibré  $B_0 \rightarrow \mathcal{M}$ , le chemin  $\gamma : t \rightarrow \gamma(t) = x.g_t$  passant par le point  $x$ , pour  $t = 0$ . Nous pouvons interpréter (6.13) comme suit :

$$dU = -\varphi_0 - \Omega U \text{ mod}\{\omega^0, \dots, \omega^4\},$$

ou encore

$$\frac{dU(\gamma(t))}{dt} = -\varphi_0(\dot{\gamma}(t)) - \Omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))U(\gamma(t)), \quad (6.14)$$

On est ramené à une équation différentielle de premier ordre, et la solution est sous la forme

$$U(\gamma(t)) = M(t)(U(\gamma(0)) + N(t)),$$

Maintenant on considère une nouvelle  $G_1$ -structure  $B_1 \subset B_0$  dans laquelle, pour  $1 \leq i \leq 4$ , on a  $\tau^i = 0$  et  $\varphi_0^i$  est semi-basique, nous considérons le projecteur<sup>(\*)</sup>  $\Phi : B_0 \rightarrow B_1$  tel que, pour  $x \in B_0$  on lui associe  $x.g_0$  est une submersion qui respecte les fibres. Considérons un chemin  $C(t) \in B_0$  alors  $\Phi(C(t)) \in B_1$  et on a pour  $x_1 \in B_1$

$$\frac{\Phi(C(t))}{dt} \Big|_{t=0} = d\Phi_{x_1}(\dot{C}(0)),$$

Alors le sous-groupe  $G_1$  qui agit sur  $B_1$  est engendré par les matrices de type

$$g_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Notons alors

$$\varphi_0^i = P_0^i \omega^0 + P_j^i \omega^j,$$

Donc les équations de structure s'écrivent

$$\begin{cases} d\omega^0 = -\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^1 = -\varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + P_j^1 \omega^j \wedge \omega^0, \\ d\omega^2 = -\varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + P_j^2 \omega^j \wedge \omega^0, \\ d\omega^3 = -\varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + P_j^3 \omega^j \wedge \omega^0, \\ d\omega^4 = -\varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + P_j^4 \omega^j \wedge \omega^0, \end{cases} \quad (6.16)$$

De nouveau nous absorbons la torsion, et en respectant la condition  $\varphi_0^0 = \varphi_1^1 + \varphi_2^2 = \varphi_3^3 + \varphi_4^4$  alors (6.16) s'écrit (voir [BGG03] page 56-57)

$$\begin{cases} d\omega^0 = -\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^1 = -\varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + (P_3^1 \omega^3 + P_4^1 \omega^4) \wedge \omega^0, \\ d\omega^2 = -\varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + (P_3^2 \omega^3 + P_4^2 \omega^4) \wedge \omega^0, \\ d\omega^3 = -\varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + (P_1^3 \omega^1 + P_2^3 \omega^2) \wedge \omega^0, \\ d\omega^4 = -\varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + (P_1^4 \omega^1 + P_2^4 \omega^2) \wedge \omega^0, \end{cases} \quad (6.17)$$

ou encore

$$\begin{cases} d\omega^0 = -\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ d\omega^1 = -\varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + (P_3^1 \omega^3 + P_4^1 \omega^4) \wedge \omega^0, \\ d\omega^2 = -\varphi_1^2 \wedge \omega^1 - (\varphi_0^2 - \varphi_1^1) \wedge \omega^2 + (P_3^2 \omega^3 + P_4^2 \omega^4) \wedge \omega^0, \\ d\omega^3 = -\varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + (P_1^3 \omega^1 + P_2^3 \omega^2) \wedge \omega^0, \\ d\omega^4 = -\varphi_3^4 \wedge \omega^3 - (\varphi_0^4 - \varphi_3^3) \wedge \omega^4 + (P_1^4 \omega^1 + P_2^4 \omega^2) \wedge \omega^0, \end{cases} \quad (6.18)$$

---

(\*)Ce projecteur vrai localement, globalement on peut dire que c'est une submersion et ce qui reste valable dans notre raisonnement.  $\Phi$  force les  $\varphi_0^i$  d'être semi-basique.

On a

$$0 \equiv d(d\omega^0) = d(-\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4),$$

donc

$$d\varphi_0^0 = (P_3^2 - P_1^4)\omega^1 \wedge \omega^3 - (P_3^1 + P_2^4)\omega^2 \wedge \omega^3 + (P_4^2 + P_1^3)\omega^1 \wedge \omega^4 - (P_4^1 - P_2^3)\omega^2 \wedge \omega^4, \quad (6.19)$$

**Théorème 6.2.1.** *Soit  $S_2 = \begin{pmatrix} P_3^1 + P_2^4 & P_4^1 - P_2^3 \\ P_3^2 - P_1^4 & P_4^2 + P_1^3 \end{pmatrix}$  un invariant. Alors,  $S_2 = 0$  si et seulement si le système hyperbolique de Monge-Ampère  $\chi = \{\omega^0, \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^3 \wedge \omega^4\}$  est localement équivalent au système d'Euler-Lagrange.*

*Démonstration.* Par la théorème 6.1.5, la forme de Poincaré-Cartan  $\Pi = \lambda\omega^0 \wedge (\omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^3 \wedge \omega^4)$  est fermée, pour un certain  $\lambda \in B_1$ , ce qui donne

$$(d\lambda - 2\lambda\varphi_0^0) \wedge \omega^0 \wedge (\omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^3 \wedge \omega^4) = 0,$$

Les opérations sur l'algèbre extérieure montrent qu'il existe une fonction  $f$  telle que

$$d\lambda - 2\lambda\varphi_0^0 = f\lambda\omega^0,$$

ou encore

$$d(\log\lambda) - 2\varphi_0^0 = f\omega^0,$$

D'où  $-2d\varphi_0^0 = df \wedge \omega^0 + fd\omega^0$  et  $d\varphi_0^0 \equiv d\omega^0 \pmod{\chi}$ . Or  $d\omega^0 = \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4$  donc, d'après (6.19), on conclut que  $S_1 = 0$ .

□

**Théorème 6.2.2.** *Soit  $S_1 = \begin{pmatrix} P_3^1 - P_2^4 & P_4^1 + P_2^3 \\ P_3^2 + P_1^4 & P_4^2 - P_1^3 \end{pmatrix}$  un invariant. Un système hyperbolique de Monge-Ampère  $\chi$  satisfait  $S_1 = S_2 = 0$  si et seulement s'il est localement équivalent à l'équation des ondes i.e.*

$$\varepsilon = \{dz - pdx - qdy, dp \wedge dx + dq \wedge dy, dp \wedge dx - dq \wedge dy\},$$

*Démonstration.* D'après (6.19),  $S_2 = 0$  si et seulement si  $\varphi_0^0$  est fermé i.e. pour une certaine fonction  $\mu > 0$ , on a

$$\varphi_0^0 = \mu^{-1}d\mu.$$

Dans le cas où  $S_1 = S_2 = 0$ , on a  $P_3^1 = P_2^4 = P_4^1 = P_2^3 = P_3^2 = P_1^4 = P_4^2 = P_1^3 = 0$  donc

$$d(\omega^1 \wedge \omega^2) = d\omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^1 \wedge d\omega^2 = -\varphi_0^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Or on a

$$d(\mu\omega^1 \wedge \omega^2) = d\mu \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \mu d(\omega^1 \wedge \omega^2),$$

donc

$$d(\mu\omega^1 \wedge \omega^2) = 0,$$

Par le théorème de Darboux, il existe des fonctions  $p$  et  $x$  telles que

$$-dp \wedge dx = \mu\omega^1 \wedge \omega^2,$$

de même, il existe des fonctions  $q$  et  $y$  telles que

$$-dq \wedge dy = \mu\omega^3 \wedge \omega^4.$$

On a donc

$$d(\mu\omega^0) = \mu(\omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4) = -dp \wedge dx - dq \wedge dy,$$

Par le lemme de Poincaré, il existe localement une fonction  $z$  telle que

$$\mu\omega^0 = dz - p dx - q dy,$$

□

### 6.2.3 Remarque sur le test d'involution

Pour suivre, en général, l'algorithme de Cartan, le test d'involution est très important parce qu'il met fin à cet algorithme. Ce qui est clair c'est que si à certain point nous trouvons le problème involutif. Nous commençons, par exemple, de tester l'involution dans le cas hyperbolique. Dans (6.18), nous prenons  $r = 7$  et  $n = 5$ ; pour déterminer les caractères réduits de Cartan, remplaçons dans (6.18) les  $\varphi_j^i$  par  $z_{j0}^i\omega^0 + z_{j1}^i\omega^1 + z_{j2}^i\omega^2 + z_{j3}^i\omega^3 + z_{j4}^i\omega^4$ , et nous pouvons achever :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{0j}^0 = 0 \quad j = 0, \dots, 4, \\ z_{10}^1 = z_{13}^1 = z_{14}^1 = 0, \quad z_{11}^1 = z_{12}^2, \\ z_{20}^1 = z_{23}^1 = z_{24}^1 = 0, \quad z_{12}^1 = z_{21}^1, \\ z_{10}^2 = z_{13}^2 = z_{14}^2 = 0, \quad z_{34}^3 = z_{43}^3, \\ z_{30}^3 = z_{31}^3 = z_{32}^3 = 0, \quad z_{33}^3 = z_{34}^4, \\ z_{40}^3 = z_{41}^3 = z_{42}^3 = 0, \\ z_{30}^4 = z_{31}^4 = z_{32}^4 = 0, \end{array} \right. \quad (6.20)$$

Ici les variables  $z_{11}^1, z_{12}^1, z_{22}^1, z_{11}^2, z_{34}^3, z_{33}^3, z_{44}^3$  et  $z_{33}^4$  peuvent être choisis arbitrairement donc

$$r^{(1)} = 8$$

Soient  $X = (x^0, \dots, x^4) \in \mathbb{R}^5$  et la matrice  $M$  de dimension  $5 \times 7$  définie par

$$M(X) := M_k^{il}(X) := \sum_{j=0}^4 A_{jk}^{il} x^j, \quad i = 0, \dots, 4, \quad \binom{l}{k} \in \binom{0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4}{0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 3},$$

avec les  $A_{jk}^{il}$  définis dans (5.5). Par identification (6.18), on retrouve

$$M(X) = (A_{0k}^{i0}(x^0) + A_{1k}^{i1}(x^1) + A_{2k}^{i2}(x^2) + A_{3k}^{i3}(x^3) + A_{4k}^{i4}(x^4))_{\substack{0 \leq i \leq 4 \\ \binom{l}{k} \in \binom{0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4}{0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 3}}},$$

Donc

$$M(X) = \begin{pmatrix} -x^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & x^2 & 0 & -x^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^3 & -x^4 & 0 \\ -x^4 & 0 & 0 & 0 & x^4 & 0 & -x^3 \end{pmatrix}.$$

Pour  $X = (-1, -1, 0, -1, 0)$ , on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on note par  $s'_1, \dots, s'_5$  les caractères réduits de Cartan :

$$s'_1 = 5.$$

Et pour  $X = (x^0, \dots, x^4)$  et  $Y = (y^0, \dots, y^4)$ , on a

$$\begin{pmatrix} M(X) \\ M(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & x^2 & 0 & -x^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^3 & -x^4 & 0 \\ -x^4 & 0 & 0 & 0 & x^4 & 0 & -x^3 \\ -y^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y^1 & -y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y^2 & y^2 & 0 & -y^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y^3 & -y^4 & 0 \\ -y^4 & 0 & 0 & 0 & y^4 & 0 & -y^3 \end{pmatrix}.$$

Et pour  $X = (-1, -1, 0, -1, 0)$  et  $Y = (0, 0, -1, 0, -1)$ , on a  $s'_1 + s'_2 = 7$ , donc

$$s'_2 = 2.$$

et comme  $s'_1 + s'_2 + s'_3 + s'_4 + s'_5 = r = 7$ , alors

$$s'_3 = s'_4 = s'_5 = 0.$$

On a donc

$$s'_1 + 2s'_2 + 3s'_3 + 4s'_4 + 5s'_5 = 9 \geq r^{(1)} = 8.$$

Alors le système n'est pas en involution. On conclut qu'il est nécessaire de prolonger le système pour continuer.

## 6.2.4 Étude du cas elliptique

Maintenant, nous allons étudier le cas elliptique. Nous posons les conditions suivantes

$$\begin{cases} \eta = \alpha\theta \neq 0 \\ d\eta^0 = \eta^1 \wedge \eta^2 + \eta^3 \wedge \eta^4 \pmod{\theta}, \\ \Psi = \eta^1 \wedge \eta^4 - \eta^3 \wedge \eta^2 \pmod{\theta}, \end{cases} \quad (6.21)$$

Pour déterminer le groupe  $G_0$  qui agit sur  $G_0$ -structure  $B_0$ . Ici  $G_0$  conserve les formes dans (6.21), on définit

$$G_0 = G_{\text{elliptique}} = \{g \in SL(4, \mathbb{R}), \quad g^* \alpha_L^1 = \alpha_L^1; \quad g^* \alpha_L^3 = \alpha_L^3\},$$

Soit l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{elliptique} = \mathfrak{g}$ , pour  $\xi \in \mathfrak{g}_{elliptique}$ . On a  $\xi \in M(4, \mathbb{R})$  et  $\text{trace} \xi = 0$ , de plus on a

$$\begin{cases} \xi \in M(4, \mathbb{R}), & \text{trace} \xi = 0, \\ \xi^* \alpha_L^1 = \alpha_L^1; & \xi^* \alpha_L^3 = \alpha_L^3, \end{cases} \quad (6.22)$$

On note

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_3^1 & \xi_4^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_4^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 & \xi_4^3 \\ \xi_1^4 & \xi_2^4 & \xi_3^4 & \xi_4^4 \end{pmatrix}$$

Donc (6.22) donne

$$\begin{cases} \xi_1^1 + \xi_2^2 + \xi_3^3 + \xi_4^4 = 0, \\ \xi_a^1 \omega^a \wedge \omega^2 + \xi_a^2 \omega^1 \wedge \omega^a + \xi_a^3 \omega^a \wedge \omega^4 + \xi_a^4 \omega^3 \wedge \omega^a = \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4, \\ \xi_a^1 \omega^a \wedge \omega^4 + \xi_a^4 \omega^1 \wedge \omega^a + \xi_a^2 \omega^a \wedge \omega^3 + \xi_a^3 \omega^2 \wedge \omega^a = \omega^1 \wedge \omega^4 + \omega^2 \wedge \omega^3, \end{cases}$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \xi_1^1 + \xi_2^2 = \xi_3^3 + \xi_4^4, \\ \xi_1^1 + \xi_3^3 = \xi_2^2 + \xi_4^4, \\ \xi_3^1 + \xi_2^4 = \xi_3^1 - \xi_4^2 = 0, \\ \xi_4^1 - \xi_2^3 = \xi_2^1 + \xi_4^3 = 0, \\ \xi_3^2 + \xi_1^4 = \xi_2^2 + \xi_3^4 = 0, \\ \xi_4^2 + \xi_1^3 = \xi_2^4 - \xi_1^3 = 0, \end{cases}$$

Alors il existe des réels  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  et une base  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$  de  $\mathfrak{g}$  tels que :

$$\xi = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3 + d\xi_4 + e\xi_5 + f\xi_6,$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \xi_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xi_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xi_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xi_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \xi_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$\Phi : \mathfrak{g} \longrightarrow sl(2, \mathbb{C})$$

$$X, Y \longmapsto \Phi([X, Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]$$

On note  $(h_0, e_0, f_0, h_1, e_1, f_1)$  la base réelle de  $sl(2, \mathbb{C})$ , définie par

$$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a,

$$\begin{aligned} [h_0, h_1] &= [e_0, e_1] = [f_0, f_1] = 0, & [h_a, e_b] &= -2i^{a+b}e_0, \\ [h_a, f_b] &= -2i^{a+b}f_0 \text{ et } [e_a, f_b] &= -i^{a+b}h_0, \end{aligned}$$

Par un calcul facile, nous pouvons montrer des relations de même type sur la base de  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\text{elliptique}}$ , qui sont

Constantes de structures de $\mathfrak{g}$	Constantes de structures de $sl(2, \mathbb{C})$
$[\xi_a, \xi_{3+a}] = 0$ pour $a = 1, 2, 3$	$[h_0, h_1] = [e_0, e_1] = [f_0, f_1] = 0$
$[\xi_1, \xi_2] = -2\xi_2,$	$[h_0, e_0] = -2e_0,$
$[\xi_1, \xi_3] = 2\xi_3,$	$[h_0, f_1] = 2f_1,$
$[\xi_1, \xi_5] = -2\xi_5,$	$[h_0, e_1] = -2e_1,$
$[\xi_1, \xi_6] = 2\xi_6,$	$[h_0, f_0] = 2f_0,$
$[\xi_4, \xi_2] = -2\xi_5,$	$[h_1, e_0] = -2e_1,$
$[\xi_4, \xi_6] = 2\xi_3,$	$[h_1, f_0] = 2f_1,$
$[\xi_4, \xi_5] = 2\xi_2,$	$[h_1, e_1] = 2e_0,$
$[\xi_4, \xi_3] = -2\xi_6,$	$[h_1, f_1] = -2f_0,$
$[\xi_2, \xi_6] = -\xi_1,$	$[e_0, f_0] = -h_0,$
$[\xi_2, \xi_3] = -\xi_4,$	$[e_0, f_1] = -h_1,$
$[\xi_5, \xi_6] = -\xi_4,$	$[e_1, f_0] = -h_1,$
$[\xi_5, \xi_3] = \xi_1,$	$[e_1, f_1] = h_0,$

**Tableau 6.1** — Comparaison des constantes de structures.

Par l'isomorphisme  $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow sl(2, \mathbb{C})$ , nous pouvons envoyer la base de  $\mathfrak{g}$  sur la base réelles de  $sl(2, \mathbb{C})$  et réciproquement et on a la correspondance suivante

$$\xi_1 \longleftrightarrow h_0,$$

$$\xi_2 \longleftrightarrow e_0,$$

$$\xi_3 \longleftrightarrow f_1,$$

$$\xi_4 \longleftrightarrow h_1,$$

$$\xi_5 \longleftrightarrow e_1,$$

$$\xi_6 \longleftrightarrow f_0,$$

Si on note

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x^3 + ix^1 \\ x^2 + ix^4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

on a  $\forall 1 \leq i \leq 6$

$$T(\xi_i X) = \Phi(\xi_i)T(X),$$



cela nous a conduit à poser

$$\begin{cases} \pi^0 = \omega^0, \\ \pi^1 = \omega^3 + i\omega^1, \\ \pi^2 = \omega^2 + i\omega^4, \\ \bar{\pi}^1 = \omega^3 - i\omega^1, \\ \bar{\pi}^2 = \omega^2 - i\omega^4, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \omega^0 = \pi^0, \\ \omega^1 = -\frac{i}{2}\pi^1 + \frac{i}{2}\bar{\pi}^1, \\ \omega^2 = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\bar{\pi}^2, \\ \omega^3 = \frac{1}{2}\pi^1 + \frac{1}{2}\bar{\pi}^1, \\ \omega^4 = -\frac{i}{2}\pi^2 + \frac{i}{2}\bar{\pi}^2, \end{cases}$$

Si on note  $\omega = \begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \\ \omega^4 \end{pmatrix}$  et  $\pi = \begin{pmatrix} \pi^0 \\ \pi^1 \\ \pi^2 \\ \bar{\pi}^1 \\ \bar{\pi}^2 \end{pmatrix}$ , on a

$$\omega = P\pi,$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & 0 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Si on prend  $M \in M(5, \mathbb{C})$  telle que  $\forall M_{\mathfrak{h}} = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq 4} \in \mathfrak{g}$ , on a

$$M = \begin{pmatrix} a_0^0 & 0 \\ 0 & M_{\mathfrak{h}} \end{pmatrix},$$

D'après la formule fondamentale de problème d'équivalence de Cartan  $\tau = d\omega + \varphi \wedge \omega$ , nous obtenons

$$\tau = P(d\pi + P^{-1}\varphi P \wedge \pi),$$

ou encore

$$P^{-1}\tau = d\pi + \psi \wedge \pi, \tag{6.23}$$

avec  $\psi = P^{-1}\varphi P$ . En tenant du fait que  $M_{\mathfrak{h}} = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq 4} \in \mathfrak{g}$ , on a

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a_0^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^1 + ia_3^1 & a_4^1 + ia_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3^2 - ia_1^2 & a_2^2 - ia_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3^3 + ia_1^3 & a_2^3 + ia_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^4 - ia_3^4 & a_4^4 - ia_2^4 \end{pmatrix},$$

avec  $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  et  $\det A = a_0^0 \neq 0$ .

**Proposition 6.2.3.** *Soit  $(\mathcal{M}^5, \varepsilon)$  un système elliptique de Monge-Ampère, alors les sections de  $G_0$ -structure dans  $\mathcal{M}$ , où  $G_0$  est le plus petit groupe engendré par les matrices par bloc et de taille  $(1,2,2)$  de la forme*

$$\begin{pmatrix} a_0^0 & 0 & 0 \\ C & A & 0 \\ \bar{C} & 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

conservent les équations (6.21) de  $(\mathcal{M}^5, \varepsilon)$ , avec  $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  et  $\det A = a_0^0 \neq 0$ .

*Démonstration.* Les sections de  $G$ -structure qui conservent les équations (6.21) vérifient (6.24).  $\square$

Revenons à (6.23) on a

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_0^1 & \psi_1^1 & \psi_2^1 & 0 & 0 \\ \psi_0^2 & \psi_1^2 & \psi_2^2 & 0 & 0 \\ \bar{\psi}_0^1 & 0 & 0 & \bar{\psi}_1^1 & \bar{\psi}_2^1 \\ \bar{\psi}_0^2 & 0 & 0 & \bar{\psi}_1^2 & \bar{\psi}_2^2 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

avec  $\psi_1^1 + \psi_2^2 = \bar{\psi}_1^1 + \bar{\psi}_2^2 = \psi_0^0$ .

Supposons que  $P^{-1}\tau = \begin{pmatrix} \tau^0 \\ \tau^1 \\ \tau^2 \\ \bar{\tau}^1 \\ \bar{\tau}^2 \end{pmatrix}$ , avec

$$\tau^0 := d\pi^0 + \psi_0^0 \wedge \pi^0 = \frac{i}{2}(\bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 - \pi^1 \wedge \pi^2),$$

Et pour  $i = 1, 2, 3, 4$ ,

$$\begin{aligned} \tau^i &= T_{12}^i \pi^1 \wedge \pi^2 + T_{1\bar{1}}^i \pi^1 \wedge \bar{\pi}^1 + T_{1\bar{2}}^i \pi^1 \wedge \bar{\pi}^2 + T_{2\bar{1}}^i \pi^2 \wedge \bar{\pi}^1 + T_{2\bar{2}}^i \pi^2 \wedge \bar{\pi}^2 + T_{\bar{1}\bar{2}}^i \bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 \\ &\quad + T_{01}^i \pi^0 \wedge \pi^1 + T_{02}^i \pi^0 \wedge \pi^2 + T_{0\bar{1}}^i \pi^0 \wedge \bar{\pi}^1 + T_{0\bar{2}}^i \pi^0 \wedge \bar{\pi}^2, \end{aligned}$$

donc les équations de structures s'écrivent

$$\begin{cases} d\pi^0 = -\psi_0^0 \wedge \pi^0 + \frac{i}{2}(\bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 - \pi^1 \wedge \pi^2), \\ d\pi^1 = -\psi_0^1 \wedge \pi^0 - \psi_1^1 \wedge \pi^1 - \psi_2^1 \wedge \pi^2 + \tau^1, \\ d\pi^2 = -\psi_0^2 \wedge \pi^0 - \psi_1^2 \wedge \pi^1 - \psi_2^2 \wedge \pi^2 + \tau^2, \\ d\pi^3 = -\bar{\psi}_0^1 \wedge \pi^0 - \bar{\psi}_1^1 \wedge \bar{\pi}^1 - \bar{\psi}_2^1 \wedge \bar{\pi}^2 + \bar{\tau}^1, \\ d\pi^4 = -\bar{\psi}_0^2 \wedge \pi^0 - \bar{\psi}_1^2 \wedge \bar{\pi}^1 - \bar{\psi}_2^2 \wedge \bar{\pi}^2 + \bar{\tau}^2, \end{cases} \quad (6.26)$$

Maintenant nous allons essayer d'absorber le maximum de la torsion de (6.26) en respectant  $\psi_1^1 + \psi_2^2 = \bar{\psi}_1^1 + \bar{\psi}_2^2 = \psi_0^0$ . D'abord par un changement de forme  $\psi_0^i \leftarrow \psi_0^i - T_{0*}^i \pi^*$  nous pouvons considérer<sup>(\*)</sup>

$$T_{0*}^i = 0.$$

---

<sup>(\*)</sup>  $* \in \{1, 2, \bar{1}, \bar{2}\}$ .

Par changement sur  $\psi_2^1$  et  $\psi_1^2$ , on peut affirmer que

$$T_{2\bar{1}}^1 = T_{2\bar{2}}^1 = T_{1\bar{2}}^1 = T_{1\bar{1}}^2 = T_{1\bar{2}}^2 = T_{1\bar{2}}^2 = 0,$$

En respectant  $\psi_1^1 + \psi_2^2 = \bar{\psi}_1^1 + \bar{\psi}_2^2 = \psi_0^0$ , on peut s'arranger pour que

$$T_{1\bar{1}}^1 = T_{2\bar{1}}^2 = V_1 \text{ et } T_{2\bar{2}}^2 = T_{1\bar{2}}^1 = V_2,$$

Donc (6.26) s'écrit

$$\begin{cases} d\pi^0 = -\psi_0^0 \wedge \pi^0 + \frac{i}{2}(\bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 - \pi^1 \wedge \pi^2), \\ d\pi^1 = -\psi_0^1 \wedge \pi^0 - \psi_1^1 \wedge \pi^1 - \psi_2^1 \wedge \pi^2 + V_1 \pi^1 \wedge \bar{\pi}^1 + V_2 \pi^1 \wedge \bar{\pi}^2 + U_1 \bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2, \\ d\pi^2 = -\psi_0^2 \wedge \pi^0 - \psi_1^2 \wedge \pi^1 - \psi_2^2 \wedge \pi^2 + V_1 \pi^2 \wedge \bar{\pi}^1 + V_2 \pi^2 \wedge \bar{\pi}^2 + U_2 \bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2, \\ d\bar{\pi}^1 = -\bar{\psi}_0^1 \wedge \pi^0 - \bar{\psi}_1^1 \wedge \bar{\pi}^1 - \bar{\psi}_2^1 \wedge \bar{\pi}^2 + \bar{V}_1 \bar{\pi}^1 \wedge \pi^1 + \bar{V}_2 \bar{\pi}^1 \wedge \pi^2 + \bar{U}_1 \pi^1 \wedge \pi^2, \\ d\bar{\pi}^2 = -\bar{\psi}_0^2 \wedge \pi^0 - \bar{\psi}_1^2 \wedge \bar{\pi}^1 - \bar{\psi}_2^2 \wedge \bar{\pi}^2 + \bar{V}_1 \bar{\pi}^2 \wedge \pi^1 + \bar{V}_2 \bar{\pi}^2 \wedge \pi^2 + \bar{U}_2 \pi^1 \wedge \pi^2, \end{cases} \quad (6.27)$$

Avec  $V_i$  et  $U_i$  sont les nouveaux coefficients de la torsion qui s'expriment en fonction des  $T_{**}^i$ .

Après avoir calculé  $0 \equiv d(d\pi^0)$ , on a les relations suivantes :

$$U_1 = -2\bar{V}_2, \quad U_2 = 2\bar{V}_1.$$

Maintenant nous calculons  $d(d\pi^1) \equiv 0$  et  $d(d\pi^2) \equiv 0$ , on met les termes par modulo  $\{\pi^0, \pi^1, \pi^2\}$ , on obtient

$$0 \equiv d \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \psi_0^1 \\ \psi_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \psi_2^1 \\ \psi_1^2 & \psi_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} - \psi_0^0 \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad (6.28)$$

Nous avons des relations de même type sur  $d \begin{pmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \end{pmatrix}$ .

(6.28) s'écrit

$$d \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \psi_0^1 \\ \psi_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1^1 - \psi_0^0 & \psi_2^1 \\ \psi_1^2 & \psi_2^2 - \psi_0^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

Soit un nouveau  $G_1$ -structure  $B_1 \subset B_0$  dans laquelle on a  $\tau^1 = \tau^2 = 0$  et  $\varphi_0^1$  et  $\varphi_0^2$  sont semi-basiques, nous considérons le projecteur  $\Phi : B_0 \rightarrow B_1$  tel que, pour  $x \in B_0$  on lui associe  $x.g_0$  est une submersion qui respecte les fibres. Alors le sous-groupe  $G_1$  qui agit sur  $B_1$  est engendré par les matrices de type

$$g_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad (6.30)$$

Notons alors

$$\psi_0^i = P_0^i \pi^0 + P_*^i \pi^*, \text{ et } \bar{\psi}_0^i = \bar{P}_0^i \pi^0 + \bar{P}_*^i \pi^*$$

Donc les équations de structure s'écrivent

$$\begin{cases} d\pi^0 = -\psi_0^0 \wedge \pi^0 + \frac{i}{2}(\bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 - \pi^1 \wedge \pi^2), \\ d\pi^1 = -\psi_1^1 \wedge \pi^1 - \psi_2^1 \wedge \pi^2 - P_*^1 \pi^* \wedge \pi^0, \\ d\pi^2 = -\psi_1^2 \wedge \pi^1 - \psi_2^2 \wedge \pi^2 + P_*^2 \pi^* \wedge \pi^0, \end{cases} \quad (6.31)$$

De nouveau nous absorbons la torsion, et en respectant la condition  $\psi_1^1 + \psi_2^2 = \psi_0^0$

$$\begin{cases} d\pi^0 = -\psi_0^0 \wedge \pi^0 + \frac{i}{2}(\bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 - \pi^1 \wedge \pi^2), \\ d\pi^1 = -\psi_1^1 \wedge \pi^1 - \psi_2^1 \wedge \pi^2 - P\pi^1 \wedge \pi^0 - P_1^1 \bar{\pi}^1 \wedge \pi^0 - P_2^1 \bar{\pi}^2 \wedge \pi^0, \\ d\pi^2 = -\psi_1^2 \wedge \pi^1 - \psi_2^2 \wedge \pi^2 - P\pi^2 \wedge \pi^0 - P_1^2 \bar{\pi}^1 \wedge \pi^0 - P_2^2 \bar{\pi}^2 \wedge \pi^0, \end{cases} \quad (6.32)$$

Si on respecte  $\psi_1^1 + \psi_2^2 = \bar{\psi}_1^1 + \bar{\psi}_2^2 = \psi_0^0$ , avec absorption de la torsion on montre que

$$P + \bar{P} = 0. \quad (6.33)$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= -d\psi_0^0 \wedge \pi^0 + \frac{i}{2}\psi_0^0 \wedge \bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 - \frac{i}{2}\psi_0^0 \wedge \pi^1 \wedge \pi^2 \\ &+ \frac{i}{2}d\bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 - \frac{i}{2}\bar{\pi}^1 \wedge d\bar{\pi}^2 - \frac{i}{2}d\pi^1 \wedge \pi^2 + \frac{i}{2}\pi^1 \wedge d\pi^2 \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} 2id\psi_0^0 \wedge \pi^0 &= (2\bar{P}\bar{\pi}^1 \wedge \bar{\pi}^2 - 2P\pi^1 \wedge \pi^2 - (P_1^2 + \bar{P}_1^2)\pi^1 \wedge \bar{\pi}^1 + (\bar{P}_1^1 - P_2^2)\pi^1 \wedge \bar{\pi}^2 \\ &+ (P_1^1 - \bar{P}_2^2)\pi^2 \wedge \bar{\pi}^1 + (\bar{P}_2^1 - P_2^1)\pi^2 \wedge \bar{\pi}^2) \wedge \pi^0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$P - \bar{P} = 0,$$

en utilisant (6.33), on a donc

$$P = 0,$$

en particulier, on a

$$\begin{aligned} 2id\psi_0^0 &= -(P_1^2 + \bar{P}_1^2)\pi^1 \wedge \bar{\pi}^1 + (\bar{P}_1^1 - P_2^2)\pi^1 \wedge \bar{\pi}^2 \\ &+ (P_1^1 - \bar{P}_2^2)\pi^2 \wedge \bar{\pi}^1 + (\bar{P}_2^1 - P_2^1)\pi^2 \wedge \bar{\pi}^2, \end{aligned}$$

**Remarque 6.2.4.** On a la même conclusion dans le cas hyperbolique avec l'invariant

$$\text{local } S_1 = \begin{pmatrix} P_1^1 - \bar{P}_2^2 & \bar{P}_2^1 - P_2^1 \\ P_1^2 + \bar{P}_1^2 & \bar{P}_1^1 - P_2^2 \end{pmatrix}.$$

---

# Conclusion

Nous avons vu dans les chapitres 2, 3 et 4 certains aspects de la « géométrie fondée sur la notion d'aire » d'Elie Cartan en nous inspirant de la démarche qu'il a décrit dans son mémoire. Cette construction s'inscrit dans la longue série de « géométries » au sens large explorées par Cartan, suite aux idées de Félix Klein et à l'impulsion donnée par la théorie de la relativité générale d'Einstein : les géométries faisant intervenir des connexions riemanniennes, conformes, projectives, etc., géométrie finslérienne... Dans toutes ces approches, nous savons que la méthode mise au point par Cartan pour étudier le problème d'équivalence, et que nous avons décrite au chapitres 5 et 6 est un outil crucial. Cependant cette démarche a été occultée par Cartan dans son mémoire. En nous inspirant du travail de R. Bryant, P. Griffiths et D. Grossmann, nous avons tenté d'en reconstruire certains aspects. Il reste cependant de nombreux points à clarifier pour disposer d'un dictionnaire évident entre le travail de Bryant, Griffiths et Grossmann et celui de Cartan. De plus l'exemple de « l'espace harmonique » que nous avons vu à la fin du chapitre trois reste peu compris : cet exemple avait pourtant attiré l'attention de Cartan car cette géométrie possède la propriété inhabituelle d'être invariant par un (pseudo-)groupe de symétrie de dimension infinie (en fait le groupe des transformations conformes des ouverts de dimension deux).

Enfin la thèse de Robert Debever, dont nous avons eu connaissance à la fin de notre travail, constitue aussi un champ d'exploration du plus grand intérêt.

On commence par calculer d'abord  $d(d\omega^0)$  :

$$\begin{aligned}
0 &= d(d\omega^0) = -d\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \varphi_0^0 \wedge d\omega^0 + d\omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^1 \wedge d\omega^2 + d\omega^3 \wedge \omega^4 - \omega^3 \wedge d\omega^4 \\
&= -d\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \varphi_0^0 \wedge (-\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4) \\
&\quad + (-\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + (V_3\omega^3 + V_4\omega^4) \wedge \omega^1 + U^1\omega^3 \wedge \omega^4) \wedge \omega^2 \\
&\quad - \omega^1 \wedge (-\varphi_0^2 \wedge \omega^0 - \varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + (V_3\omega^3 + V_4\omega^4) \wedge \omega^2 + U^2\omega^3 \wedge \omega^4) \\
&\quad + (-\varphi_0^3 \wedge \omega^0 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + (V_1\omega^1 + V_2\omega^2) \wedge \omega^3 + U^3\omega^1 \wedge \omega^2) \wedge \omega^4 \\
&\quad - \omega^3 \wedge (-\varphi_0^4 \wedge \omega^0 - \varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + (V_1\omega^1 + V_2\omega^2) \wedge \omega^4 + U^4\omega^1 \wedge \omega^2), \\
&= -d\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \varphi_0^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \varphi_0^0 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - \varphi_0^1 \wedge \omega^0 \wedge \omega^2 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad + V_3\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + V_4\omega^4 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + U^1\omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \varphi_0^2 \wedge \omega^0 \\
&\quad + \omega^1 \wedge \varphi_2^2 \wedge \omega^2 - V_3\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^2 - V_4\omega^1 \wedge \omega^4 \wedge \omega^2 - U^2\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \\
&\quad - \varphi_0^3 \wedge \omega^0 \wedge \omega^4 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + V_1\omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + V_2\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \\
&\quad + U^3\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + \omega^3 \wedge \varphi_0^4 \wedge \omega^0 + \omega^3 \wedge \varphi_4^4 \wedge \omega^4 - V_1\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^4 \\
&\quad - V_2\omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 - U^4\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2, \\
&= (2V_3 - U^4)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (U^1 + 2V_2)\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + (2V_1 - U^2)\omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 \\
&\quad + (U^3 + 2V_4)\omega^4 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + (-d\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \varphi_0^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \varphi_0^0 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \\
&\quad - \varphi_0^1 \wedge \omega^0 \wedge \omega^2 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^1 \wedge \varphi_0^2 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \varphi_2^2 \wedge \omega^2 \\
&\quad - \varphi_0^3 \wedge \omega^0 \wedge \omega^4 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + \omega^3 \wedge \varphi_0^4 \wedge \omega^0 + \omega^3 \wedge \varphi_4^4 \wedge \omega^4),
\end{aligned}$$

Or on a  $\varphi_0^0 = \varphi_1^1 + \varphi_2^2 = \varphi_3^3 + \varphi_4^4$  donc on trouve

$$\begin{aligned}
&(2V_3 - U^4)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (U^1 + 2V_2)\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + (2V_1 - U^2)\omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 \\
&\quad + (U^3 + 2V_4)\omega^4 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \equiv 0 \pmod{\omega^0},
\end{aligned}$$

Maintenant calculons :

$$\begin{aligned}
0 &= d(dw^1) = -d\varphi_0^1 \wedge \omega^0 + \varphi_0^1 \wedge d\omega^0 - d\varphi_1^1 \wedge \omega^1 + \varphi_1^1 \wedge d\omega^1 - d\varphi_2^1 \wedge \omega^2 + \varphi_2^1 \wedge d\omega^2 \\
&\quad + dV_3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + V_3 d\omega^3 \wedge \omega^1 - V_3 \omega^3 \wedge d\omega^1 + dV_4 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 + V_4 d\omega^4 \wedge \omega^1 \\
&\quad - V_4 \omega^4 \wedge d\omega^1 - 2dV_2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - 2V_2 d\omega^3 \wedge \omega^4 + 2V_2 \omega^3 \wedge d\omega^4, \\
&= -d\varphi_0^1 \wedge \omega^0 + \varphi_0^1 \wedge (-\varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \omega^1 \wedge \omega^2 + \omega^3 \wedge \omega^4) - d\varphi_1^1 \wedge \omega^1 \\
&\quad + \varphi_1^1 \wedge (-\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + V_3 \omega^3 \wedge \omega^1 + V_4 \omega^4 \wedge \omega^1 - 2V_2 \omega^3 \wedge \omega^4) \\
&\quad - d\varphi_2^1 \wedge \omega^2 + \varphi_2^1 \wedge (-\varphi_0^2 \wedge \omega^0 - \varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + V_3 \omega^3 \wedge \omega^2 + V_4 \omega^4 \wedge \omega^2 + 2V_1 \omega^3 \wedge \omega^4) \\
&\quad + dV_3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + V_3 (-\varphi_0^3 \wedge \omega^0 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + V_1 \omega^1 \wedge \omega^3 + V_2 \omega^2 \wedge \omega^3 - 2V_4 \omega^1 \wedge \omega^2) \wedge \omega^1 \\
&\quad - V_3 \omega^3 \wedge (-\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + V_3 \omega^3 \wedge \omega^1 + V_4 \omega^4 \wedge \omega^1 - 2V_2 \omega^3 \wedge \omega^4) \\
&\quad + dV_4 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 + V_4 (-\varphi_0^4 \wedge \omega^0 - \varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + V_1 \omega^1 \wedge \omega^4 + V_2 \omega^2 \wedge \omega^4 + 2V_3 \omega^1 \wedge \omega^2) \wedge \omega^1 \\
&\quad - V_4 \omega^4 \wedge (-\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + V_3 \omega^3 \wedge \omega^1 + V_4 \omega^4 \wedge \omega^1 - 2V_2 \omega^3 \wedge \omega^4) \\
&\quad - 2dV_2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - 2V_2 (-\varphi_0^3 \wedge \omega^0 - \varphi_3^3 \wedge \omega^3 - \varphi_4^3 \wedge \omega^4 + V_1 \omega^1 \wedge \omega^3 + V_2 \omega^2 \wedge \omega^3 - 2V_4 \omega^1 \wedge \omega^2) \wedge \omega^4 \\
&\quad + 2V_2 \omega^3 \wedge (-\varphi_0^4 \wedge \omega^0 - \varphi_3^4 \wedge \omega^3 - \varphi_4^4 \wedge \omega^4 + V_1 \omega^1 \wedge \omega^4 + V_2 \omega^2 \wedge \omega^4 + 2V_3 \omega^1 \wedge \omega^2), \\
&= -d\varphi_0^1 \wedge \omega^0 - \varphi_0^1 \wedge \varphi_0^0 \wedge \omega^0 + \varphi_0^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \varphi_0^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - d\varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_1^1 \wedge \varphi_0^1 \wedge \omega^0 \\
&\quad - \varphi_1^1 \wedge \varphi_1^1 \wedge \omega^1 - \varphi_1^1 \wedge \varphi_2^1 \wedge \omega^2 + V_3 \varphi_1^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + V_4 \varphi_1^1 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 - 2V_2 \varphi_1^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \\
&\quad - d\varphi_2^1 \wedge \omega^2 - \varphi_2^1 \wedge \varphi_0^2 \wedge \omega^0 - \varphi_2^1 \wedge \varphi_1^2 \wedge \omega^1 - \varphi_2^1 \wedge \varphi_2^2 \wedge \omega^2 + V_3 \varphi_2^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^2 \\
&\quad + V_4 \varphi_2^1 \wedge \omega^4 \wedge \omega^2 + 2V_1 \varphi_2^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + dV_3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 - V_3 \varphi_0^3 \wedge \omega^0 \wedge \omega^1 - V_3 \varphi_3^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 \\
&\quad - V_3 \varphi_4^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 + V_3 V_1 \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + V_3 V_2 \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 - 2V_3 V_4 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 + V_3 \omega^3 \wedge \varphi_0^1 \wedge \omega^0 \\
&\quad + V_3 \omega^3 \wedge \varphi_1^1 \wedge \omega^1 + V_3 \omega^3 \wedge \varphi_2^1 \wedge \omega^2 - V_3 V_3 \omega^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 - V_4 V_3 \omega^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 + 2V_2 V_3 \omega^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \\
&\quad + dV_4 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 - V_4 \varphi_0^4 \wedge \omega^0 \wedge \omega^1 + V_4 \varphi_3^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + V_4 \varphi_4^4 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 - V_1 V_4 \omega^1 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 \\
&\quad - V_4 V_2 \omega^2 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 - 2V_3 V_4 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^1 + V_4 \omega^4 \wedge \varphi_0^1 \wedge \omega^0 + V_4 \omega^4 \wedge \varphi_1^1 \wedge \omega^1 + V_4 \omega^4 \wedge \varphi_2^1 \wedge \omega^2 \\
&\quad - V_3 V_4 \omega^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 - V_4 V_4 \omega^4 \wedge \omega^4 \wedge \omega^1 + 2V_2 V_4 \omega^4 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - 2dV_2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + 2V_2 \varphi_0^3 \wedge \omega^0 \wedge \omega^4 \\
&\quad + 2V_2 \varphi_3^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + 2V_2 \varphi_4^3 \wedge \omega^4 \wedge \omega^4 - 2V_2 V_1 \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - 2V_2 V_2 \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \\
&\quad + 4V_2 V_4 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 - 2V_2 \omega^3 \wedge \varphi_0^4 \wedge \omega^0 + 2V_2 \omega^3 \wedge \varphi_3^4 \wedge \omega^3 + 2V_2 \omega^3 \wedge \varphi_4^4 \wedge \omega^4 \\
&\quad - 2V_1 V_2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^4 - 2V_2 V_2 \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 - 4V_3 V_2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2,
\end{aligned}$$

Tous les termes qui contiennent les  $\{\omega^0, \omega^1, \omega^3\}$  on les mets dans un  $\text{mod}\{\omega^0, \omega^1, \omega^3\}$  donc on trouve

$$\begin{aligned}
d(dw^1) &= \varphi_0^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - 2V_2 \varphi_1^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + 2V_1 \varphi_2^1 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - 2dV_2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \\
&\quad + 2V_2 \varphi_3^3 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 - 2V_2 \omega^3 \wedge \varphi_4^4 \wedge \omega^4 \text{ mod } \{\omega^0, \omega^1, \omega^3\}
\end{aligned}$$

Où encore et en utilisant (6.7) on obtient

$$0 \equiv (\varphi_0^1 + U_1 \varphi_1^1 + U_2 \varphi_2^1 + dU_1 - U_1 \varphi_3^3 - U_1 \varphi_4^4) \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 \text{ mod } \{\omega^0, \omega^1, \omega^3\}$$

Donc

$$0 \equiv \varphi_0^1 + U_1 \varphi_1^1 + U_2 \varphi_2^1 + dU_1 - U_1 \varphi_0^0 \text{ mod } \{\omega^0, \dots, \omega^4\} \quad (7.1)$$

---

# Bibliographie

- [Aub01] Thierry Aubin. *A course in differential geometry*, volume 27 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [BGG03] Robert Bryant, Phillip Griffiths, and Daniel Grossman. *Exterior differential systems and Euler-Lagrange partial differential equations*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2003.
- [Bry95] Robert L. Bryant. Finsler surfaces with prescribed curvature conditions. 1995.
- [Bry02] Robert L. Bryant. Some remarks on Finsler manifolds with constant flag curvature. *Houston J. Math.*, 28(2) :221–262, 2002. Special issue for S. S. Chern.
- [Car33] E. Cartan. *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*. Hermann. 6, rue de la Sorbonne, Paris, 1933.
- [Car34] E. Cartan. *Les espaces de Finsler*. Hermann. 6, rue de la Sorbonne, Paris, 1934.
- [Car45] Élie Cartan. *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*. Actualités Sci. Ind., no. 994. Hermann et Cie., Paris, 1945.
- [Che92] Shiing Shen Chern. On Finsler geometry. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 314(10) :757–761, 1992.
- [Con08] Lawrence Conlon. *Differentiable manifolds*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2008.
- [CS05] Shiing-Shen Chern and Zhongmin Shen. *Riemann-Finsler geometry*, volume 6 of *Nankai Tracts in Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.
- [Dah06] Matias Dahl. An brief introduction to finsler geometry. 2006.
- [Deb] Robert Debever. *Une classe d'espaces à connexion euclidienne*. PhD thesis.



- [Des] Laura Desideri. *Problème de Plateau, équations fuchsienues et problème de Riemann-Hilbert*. PhD thesis. dirigée par Frédéric Hélein.
- [Dou31] Jesse Douglas. Solution of the problem of plateau. *Trans. Amer. Maths. Soc.*, 33, 1931.
- [Hél04] Frédéric Hélein. Hamiltonian formalisms for multidimensional calculus of variations and perturbation theory. In *Non compact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, volume 350 of *Contemp. Math.*, pages 127–147. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [Hof72] David A. Hoffman. Surfaces in constant curvature manifolds with parallel mean curvature vector fields. *Amer. Maths. Soc.*, 78(2), 1972.
- [Hél10] Frédéric Hélein. Multisymplectic formalism and the covariant phase space. 2010.
- [IL03] Thomas A. Ivey and J. M. Landsberg. *Cartan for beginners : differential geometry via moving frames and exterior differential systems*, volume 61 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Moh12a] Imsatfia Moheddine. Application of equivalence method to monge-ampere equations *Elliptic case*, in progress. 2012.
- [Moh12b] Imsatfia Moheddine. The concept of orthogonality in cartan's geometry based on the concept of area, submit in journal advances in geometry (adv geom a910). 2012.
- [Moh12c] Imsatfia Moheddine. Invariant formulation of a variational problem, submit in journal indian journal of pure and applied mathematics. 2012.
- [Mor79] Tohru Morimoto. La géométrie des équations de Monge-Ampère. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 289(1) :A25–A28, 1979.
- [Olv95] Peter J. Olver. *Equivalence, invariants, and symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Rad30] Tibord Rado. On plateau's problem. *Ann. of Math.*, 2(31) :457–469, 1930.
- [Run59a] Hanno Rund. *The differential geometry of Finsler spaces*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 101. Springer-Verlag, Berlin, 1959.
- [Run59b] Hanno Rund. Historical remarks on finsler geometry. 1959.
- [She01] Zhongmin Shen. *Lectures on Finsler geometry*. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.
- [Spi79] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. (I-II-III-IV-V)*. Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

- [Sti61] George J. Stigler. The economics of information. *Journal of Political Economy*, 69 :213, 1961.

---

# Notations

$\mathcal{M}$  ou  $\mathcal{M}^n$  une variété de dimension  $n$ .

$\mathcal{N}$  une sous-variété de dimension  $p$ .

$T\mathcal{M}$  le fibré tangent.

$T^*\mathcal{M}$  le fibré cotangent.

$M$  point sur  $\mathcal{M}$ .

$x = (x^i)$  coordonnées de  $M$ .

$\Sigma$  hypersurface.

$\mathcal{C}^\infty, \mathcal{C}^k$  différentiable.

*i.e.* identiquement équivalent.

$df$  différentiel de  $f$ .

$D_X Y = D(X, Y)$ .

$D$  dérivée total.

$D_x$  dérivée total par rapport à  $x$ .

$dx$  forme volume.

$dx^i$  coordonné d'une forme

$g$  la métrique de Cartan.

$f$  fonction.

$\mathbb{R}$  les nombres réelles.

$\mathbb{C}$  les nombres complexes.

$\Gamma$  ou  $\Gamma_f$  graphe d'une fonction.

$\mathcal{V}$  l'espace orthogonal à  $E$ .

$v$  les vecteurs sur  $\mathcal{V}$ .

$\exp$  ou  $e$  fonction exponentielle.

$G$  groupe de Lie.

$\mathfrak{g}$  algèbre de Lie.

$g^{ij}, g_{ij}$  les composante de  $g$ .

$Gr_{n-1}$  la grassmanienne des hyperplans.

$Gr_p$  la grassmanienne des sev de dim  $p$ .

$E$  élément noté par Cartan, ici sev de dim  $p$ .

$H$  hyperplan.

$\mathcal{H}$  l'ensemble des hyperplans.  
 $\mathcal{L}$  l'action d'intégral.  
 $A_{jk}^i$  coefficients dans les équations de structure.  
 $T_{jk}^n$  coefficients de la torsion.  
 $\det$  déterminant.  
 $\dim$  dimension.  
 $tr$  trace d'une matrice.  
 $u_x$  dérivé première de  $u$  par rapport à  $x$ .  
 $r^{(1)}$  degré d'intermination.  
 $s_k$  Caractère de Cartan.  
 $s'_k$  Caractère réduite de Cartan.  
 $t$  paramètre.

---

## La géométrie de Cartan

**Résumé :** Mon travail de thèse consiste à comprendre une géométrie introduite par Cartan en 1933 [Car33]. *La géométrie de Finsler* présente de nombreuses analogies avec cette théorie. Nous avons étudié les grandes lignes de cette géométrie. Le point de départ de Cartan qui est analogue à celui qui conduit à la géométrie finslerienne, est d’imaginer l’espace comme étant un lieu “d’éléments de contact”, un élément étant la donnée d’un point  $M \in \mathcal{M}^n$  et d’un hyperplan  $H$  passant par ce point et orienté dans l’espace tangent  $T_M\mathcal{M}^n$ . Nous avons ainsi défini *la géométrie de Cartan fondée sur la notion d’aire* dans un premier temps, je me suis intéressé à la notion d’orthogonalité dans cette géométrie. La méthode de Cartan pour étudier le problème d’équivalence est un outil puissant qui est implicitement décrit dans cette géométrie. Nous avons ensuite appliqué cette méthode aux équations de Monge-Ampère (cas elliptique), en s’inspirant des travaux de R. Bryant, D. Grossmann et P. Griffiths. Plusieurs faits ne sont pas encore suffisamment clairs pour disposer d’un dictionnaire évident entre ces travaux et celui donné par Cartan.

**Mots clés :** Géométrie différentielle, Géométrie de Finsler, Calcul des variations, Système différentiels extérieurs, Problème d’équivalence, Équations de Monge-Ampère.

---

## Cartan’s geometry

**Abstract :** The main objective of this thesis is to present a geometry given by Cartan in 1933 [Car33]. The Finsler geometry has many analogies with this theory. We studied the outline of this geometry. The starting point of Cartan which is similar to that which leads to the Finsler geometry, is to imagine the space to be made of “contact elements”, an element being given by a point  $M$  in  $\mathcal{M}$  and an oriented hyperplan passing through this point in the tangent space  $T_M\mathcal{M}^n$ . Thus we have defined *Cartan geometry based on the concept of area*. In a first step, I was interested in the notion of orthogonality in this geometry. Cartan’s method to state the equivalence problem is a crucial tool. After, we applied this method to Monge-Ampere equations (elliptic case). Hence following the work of R. Bryant, D. Grossman and P. Griffiths in the years 2002-2005 in order to clarify the strategy of Cartan. However, many points have to be explored in order to have a clear dictionary between a modern language as the one used by Bryant, Griffiths and Grossman and that of Cartan.

**Keywords :** Differential geometry, Finsler geometry, Calculus of variations, Exterior Differential Systems, Equivalence problem, Monge-Ampere equations.

---