INTRODUCTION

Ce travail est consacré, comme son titre l'indique, à l'étude des régulateurs en K-théorie algébrique.

En effet, depuis l'introduction de la K-théorie algébrique par Quillen [Q] en 1973 , on s'est heurté à la difficulté de calculer cette K-théorie algébrique même pour l'anneau de base $\mathbf{Z}$. D'où l'idée de construire ces régulateurs; il s'agit d'applications ayant comme espace de départ un groupe de K-théorie algébrique qui permettent de détecter des éléments non triviaux et donc d'avoir des informations sur cette K-théorie.

Plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens: voir [Bo], [B], [Col], [D], [M],[S], [So], [Y] pour la K-théorie de degré 3 et [Go] pour la K-théorie de degré 5.

Notre travail s'ajoute à cette longue liste pour construire en première partie un régulateur pour la K-théorie algébrique du corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ et en deuxième partie un régulateur pour la K-théorie algébrique de l'anneau des entiers p-adiques $\mathbf{Z}_p$.

Première partie: Description explicite du régulateur de Borel

Cette partie a fait l'objet d'une note aux Comptes rendues de l'académie des sciences de Paris [HN].

On s'est intéressé dans cette première partie, en particulier, au corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ mais ce travail se généralise à un corps de nombres $\mathbf{F}$ quelconque de degré d.

Pour ce cas, des applications régulateurs $R_{bor} : K_{2n-1}(\mathbf{F}) \to \mathbf{R}^{d_n}$ (où $d_n = r_1 + r_2$ si n est impair et r_2 si n est pair) ont été définies par Borel dès 1974 de la manière suivante:

$$K_{2n-1}(\mathbf{C}) \xrightarrow{h} H_{2n-1}(BGL(\mathbf{C})^{\delta}) \xrightarrow{\cap\, b_n} \mathbf{R}(n-1) = (2i\pi)^{n-1}\mathbf{R}$$

où h désigne l'homomorphisme de Hurewicz et b_n est l'image de u_{2n-1} par la composée

$$H^{2n-1}_{top}(U(N), \mathbf{R}(n)) = \bigwedge^*(u_1, .., u_N) \xrightarrow{\cong} H^{2n-1}_c(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1)) \to H^{2n-1}(GL(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1))$$

On a alors le théorème suivant [Bo1]:

Théorème: *Pour $n \geq 2$, le régulateur de Borel induit un isomorphisme de $K_{2n-1}(\mathbf{F})/Tor$ sur un réseau de $\mathbf{R}^{d_n}$ dont le covolume est égal, à un facteur $\mathbf{Q}^\times$ près, à*

$$\frac{\zeta_{\mathbf{F}}(n)|\Delta_F|^{1/2}}{\pi^n(d-d_N)}.$$

Un problème fondamental en théorie des nombres est la détermination de ces fonctions zêta $\zeta_{\mathbf{F}}(n)$. A ce problème, est lié une conjecture de D.Zagier en 1991:

Conjecture [Z1,Z2]: *Soit $\mathbf{F}$ un corps des nombres. Alors pour $n \geq 2$*

$$\zeta_{\mathbf{F}}(n) = q_n R_n \frac{\pi^n(d-d_n)}{|\Delta_{\mathbf{F}}|^{1/2}}$$

où $q_n \in \mathbf{Q}^\times$, R_n=Somme de produits de valeurs de n-log de Bloch-Wigner généralisé prises en des éléments de $\mathbf{F}$ et leurs conjugués.

Le théorème de Borel cité ci-dessus permettrait donc de résoudre cette conjecture à condition d'exprimer $b'_n \in H_c^{2n-1}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1))$ à l'aide des polylogarithmes. C'est pour essayer de répondre à cette question, qu'on donne en première partie de ce travail une formule explicite du régulateur de Borel (**Théorème 4.2.2**).

L'idée est d'utiliser une construction de Connes-Karoubi [C-K] (1988) pour un anneau de Banach A:

$$ch_n^{rel} : K_n^{rel}(A) \to HC_{n-1}(A)$$

où HC_* désigne l'homologie cylique et où $K_n^{rel}(A)$ est la K-théorie relative de l'anneau A définie comme étant les groupes d'homotopie de $\mathcal{F}_A$ la fibre homotopique de

$BGL(A)^+ \to BGL(A)^{top}$ (voir **Définition 2.1.2**).

Pour $A = \mathbf{C}$, on peut construire, grâce à l'existence de métriques sur les $GL(\mathbf{C})$-fibrés, une application

$$K_n(\mathbf{C}) \to K_n^{rel}(\mathbf{C}).$$

D'où la construction de notre régulateur $R_{2n-1} : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ (voir **Définition 3.1.3**).

On a alors les résultats suivants:

Théorème 3.2.1: *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'application composée R_{2n-1} associe à tout*

$\xi = (\varphi_{ij})_{0 \leq i,j \leq 2n-1}$ *, un* $\mathbf{C}$*-fibré plat virtuel sur* S^{2n-1} *où les* φ_{ij} *sont les applications de transition du fibré,*

$$R_{2n-1}(\xi) = \tfrac{(-1)^n (n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} Tr \int_{\Delta_{2n-1}} (\nu^{-1} d\nu)^{2n-1}$$

avec $\varphi_{ij} = g_i^{-1} g_j \in GL_N(\mathbf{C})$ *pour* N *assez grand et* $\nu = \sum_{i=0}^{2n-1} x_i \; g_i g_i^*$ *où*

$(x_i)_{0 \leq i \leq 2n-1} \in \Delta_{2n-1}$ *(On différencie par rapport aux* x_i*).*

Théorème 4.2.2: *Pour tout* $n \geq 1$*, la classe de cohomologie continue* b'_n *de Borel, plongée dans* $H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ *est représentée par le* $(2n-1)$*-cocycle continu à valeurs dans* $\mathbf{C}$ *donné sous forme homogène par*

$$(g_0, \cdots, g_{2n-1}) \longmapsto \tfrac{(-1)^n}{2^{3n-2}(i\pi)^{n-1}} \varphi(g_0, \cdots, g_{2n-1})$$

où φ *est le cocycle défini dans la proposition* 4.2.1.

Il reste maintenant à établir dans un cinquième et dernier paragraphe le lien entre cette formule de b'_n et les polylogarithmes.

Pour $n = 1$, un calcul directe de φ (voir **5.1**) donne

$$\varphi(g_0, g_1) = -2 Log|det(g_0^{-1} g_1)|.$$

Pour $n = 2$, on a utilisé des travaux de Dupont et de Yang (voir [$D1$] et [Y]) pour construire un cocycle $\tilde{\varphi}$ (non continu mais mesurable et localement borné) cohomologue à φ telle que $\tilde{\varphi}(g_0, g_1, g_2, g_3)$ ne dépend que des premières colonnes $g_i(\infty)$ pour $0 \leq i \leq 3$ et donc devient une fonction F du birraport.

Un deuxième résultat de Dupont [$D2$], nous permet de construire un deuxième cocycle $\tilde{\tilde{\varphi}}$ continu, cohomologue à φ, qui permet de montrer que cette fonction F vérifie l'identité fonctionnelle du dilogarithme: $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} - \{0, 1\}$

$$F(z_1) - F(z_2) + F(z_2/z_1) + F(1 - z_2^{-1}/1 - z_1^{-1}) - F(1 - z_2/1 - z_1) = 0.$$

Deuxième partie: Le régulateur p-adique

Dans cette deuxième partie, on a essayé de s'inspirer des méthodes de la première partie pour construire un régulateur R_p pour l'anneau des entiers p-adiques $\mathbf{Z}_p$.

En effet, il existe un équivalent au caractère de Chern relatif pour les $\mathbf{Q}$-algèbres ultramétriques (voir **Théorème 3.1.1**). Cependant, on ne dispose plus d'une application de la K-théorie algébrique vers la K-théorie relative. On a donc remplacé celà par une application de la K-théorie relative de Goodwillie $K_*(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p)$ vers $K_*^{rel}(\mathbf{Z}_p)$ qui est un isomorphisme (voir **Théorème 2.1.2**) et qui admet une formule explicite (voir **Proposition 2.2.2**).

Ceci nous permet alors de construire (voir **Définition 3.1.2**) une application

$$R_p : K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \to \mathbf{Q}_p.$$

De plus, cette application R_p est donnée par un cocycle explicite (voir **Proposition 3.1.3**).

En utilisant un argument de stabilité de la K-théorie relative de Goodwillie (voir **Corollaire 1.2.3**), on démontre que l'image de R_p se réduit au sous-groupe $p\mathbf{Z}_p$ de $\mathbf{Q}_p$ (voir **Proposition 3.1.4**).

La question essentielle qui se pose à ce stade du travail est la non-trivialité de R_p. Si la question de la non-trivialité de notre régulateur sur $\mathbf{C}$ dans la première partie était évidente (puisqu'il coïncidait avec le régulateur de Borel), pour R_p cette non-trivialité est loin d'être évidente. On va donc l'établir en plusieurs étapes:

Dans **3.2**, on s'intéresse à un résultat de Lazard $[La]$ qui établit un équivalent de l'isomorphisme de Van Est pour la cohomologie continue des groupes de Lie p-adiques.

Et on donnera en **3.2.2** une formule explicite pour cet isomorphisme.

Ce résultat nous permettra de prouver la non-trivialité du cocycle continue ϕ définissant l'application R_p (voir **Proposition 3.3.1**).

D'autre part, on considère le cocycle de Colemann défini pour un v donné dans l'espace projectif $\mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et pour $(g_0, g_1, g_2, g_3) \in GL_2(\mathbf{Q}_p)^4$ tels que (g_0v, g_1v, g_2v, g_3v) soient en position générique par

$$c(g_0, g_1, g_2, g_3) = D_p(r_2(g_0v, g_1v, g_2v, g_3v))$$

où $D_p(z) = l_{2,p}(z) + \frac{1}{2}log_p(z)log_p(1-z)$ avec $l_{2,p}(z)$ désigne le dilogarithme p-adique et où r désigne le birapport.

C'est un cocycle mesurable et localement borné (voir **Proposition 3.3.3.1**).

De plus, il est cohomologue au cocycle ϕ dans $H^3_{mes}(SL_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p)$ (voir **Proposition 3.3.3.3**).

Donc pour montrer que l'application R_p définie comme la composée

$$K_3(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) = \Pi_3(X(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p)^+) \xrightarrow{h} H_3(X(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p)^+) \xrightarrow{\cap\phi^*} p\mathbf{Z}_p$$

n'est pas triviale, il suffit de montrer que $H_3(SL_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cap c^*} \mathbf{Q}_p$ ne l'est pas.

Pour celà, on utilise le théorème de Bloch ci-dessous (non publié):

Théorème 3.3.3.3: *On a une suite exacte*

$$\cdots \to H_3(SL_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p) \xrightarrow{\beta} \bigwedge^2(\mathbf{Q}_p^\times/\mu_{\mathbf{Q}_p}) \to K_2(\mathbf{Q}_p) \to 0$$

où l'application α envoie le 3-simplexe (g_0, g_1, g_2, g_3) de $E_3^{\mathrm{gen}} SL_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\{z\}$, z désignant le birapport de (g_0v, g_1v, g_2v, g_3v) et l'application β envoie $\{z\}$ sur $z \wedge (1-z)$.

Ici $\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ désigne le groupe abélien libre de générateurs $\{z\}$ avec $z \in \mathbf{Q}_p^* - \{1\}$ modulo les relations

$$\{z_1\} - \{z_2\} + \{\tfrac{z_2}{z_1}\} + \{\tfrac{1-z_2}{1-z_1}\} - \{\tfrac{1-z_2^{-1}}{1-z_1^{-1}}\} = 0$$

$E_*^{\mathrm{gen}} GL_2(\mathbf{Q}_p)$ est l'ensemble simplicial obtenu à partir de $E_* GL_2(\mathbf{Q}_p)$ ($E_* GL_2(\mathbf{Q}_p) \to B_* GL_2(\mathbf{Q}_p)$ étant le fibré simplicial universel standard) en ne retenant que les simplexes (g_0, g_1, g_2, g_3) v-générique au sens que g_0v, g_1v, g_2v, g_3v sont en position générale dans $\mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et $\bigwedge^*$ désigne l'algèbre extérieure.

Ce théorème est démontré essentiellement dans [D-S] pour un corps de caractéristique 0.

Notre contribution est une démonstration de la formule de α.

Comme $Ker\beta$ est par définition le groupe de Bloch $B(\mathbf{Q}_p)$, on a donc une application surjective induite par α

$$\delta : H_3(SL_2(\mathbf{Z}_p), \mathbf{Z}_p) \to B(\mathbf{Q}_p).$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_3(SL_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\delta} & B(\mathbf{Q}_p) \\ & \searrow & \downarrow D_p \\ & \cap c^* & \mathbf{Q}_p \end{array}$$

La non-trivialité de D_p (voir [Co]), couplée avec la surjectivité de δ induit alors la non-trivialité de $\cap c^*$ et par suite celle du régulateur p-adique R_p.

Le dernier paragraphe de ce travail établit un lien (sous forme de diagramme commutatif) entre le régulateur p-adique R_p et la trace cyclotomique Trc définie dans [B-H-M]:

$$Trc : K(A) \to TC(A, p)$$

où $TC(A, p)$ désigne l'homologie cyclique topologique.

PREMIERE PARTIE

DESCRIPTION EXPLICITE DU REGULATEUR DE BOREL

0. INTRODUCTION

Le but de cette première partie est de définir des classes caractéristiques secondaires $R_{2n-1} : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ qui coïncident avec le régulateur de Borel.

La construction de ce R_{2n-1} utilise essentiellement le caractère de Chern relatif

$ch^{rel}_{2n-1} : K^{rel}_{2n-1}(A) \to HC_{2n-1}(A)$ où A est une algèbre de Fréchet quelconque.

Les définitions et les résultats concernant ce caractère de Chern relatif sont amplement rappelés dans les paragraphes 1 et 2 de ce chapitre. A la fin du paragraphe 2, on démontre que les définitions simpliciales qu'on choisit de considérer coïncident avec les définitions différentielles classiques.

La construction de R_{2n-1}, dans le paragraphe 3, se base sur certains détails de

démonstrations dans les paragraphes précédents.

le quatrième paragraphe de ce chapitre est alors consacré à la comparaison entre R_{2n-1} et le régulateur de Borel.

Enfin, on établit le lien entre notre régulateur et les polylogarithmes. On retrouve ainsi le fait que $R_3 : K_3(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ est défini par le cocycle $\mathcal{D}_2(r_2(g_0(\infty), g_1(\infty), g_2(\infty), g_3(\infty)))$ (où les g_i sont dans $GL_N(\mathbf{C})$, $\mathcal{D}_2$ désigne le dilogarithme et r_2 désigne le birapport).

Pour éviter d'allourdir les démonstrations, certains détails de calculs sont traités en appendice à la fin du chapitre. On y réfère par le symbole (A.).

1. LA K-THEORIE RELATIVE

On commence par rappeler, en suivant [K2], la définition et les résultats principaux de la K-théorie relative d'une algèbre de Banach A, notée $K_*^{rel}(A)$. En particulier, on donne une description simpliciale de cette K-théorie relative.

1.1 Définition de la K-théorie relative

Soit A une algèbre de Banach. On considère l'ensemble des triples (E, F, α) où E et F sont deux A-fibrés plats sur Y (voir [K2] pp43), $\alpha : E \to F$ est un isomorphisme de fibrés topologiques sous-jacents et $f : Y \to X$ est une fibration acyclique.

Deux tels triples (E, F, α) sur $Y \to X$ et (E', F', α') sur $Y' \to X$ sont dits équivalents s'il existe (E_1, F_1, α_1) sur $Y_1 \to X$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \sigma \downarrow & \nearrow & \uparrow f' \\ Y_1 & \overset{\sigma'}{\leftarrow} & Y' \end{array}$$

tels que (E, F, α) et (E', F', α') soient isomorphes respectivement à $\sigma^*(E_1, F_1, \alpha_1)$ et $\sigma'^*(E_1, F_1, \alpha_1)$ dans le sens suivant:

Deux triples (G, H, β) et (G', H', β') sont dits isomorphes s'il existe $u : G \to G'$ et $v : H \to H'$ tels que le diagramme suivant soit commutatif à isotopie près:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & G' \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta' \\ H & \xrightarrow[v]{} & H' \end{array}$$

1.1.1 Définition

On définit le monoïde $K_A^{rel}(X)$ comme le quotient du monoïde abélien formé des classes d'équivalence de tels triples par le sous-monoïde engendré par les triples du type (E, E, Id).

1.1.2 Remarque

Notons $d(E, F, \alpha)$ la classe du triple (E, F, α) dans le monoïde $K_A^{rel}(X)$. On a alors la relation $d(E, F, \alpha) + d(F, G, \beta) = d(E, G, \beta\alpha)$. D'où une structure de groupe abélien sur $K_A^{rel}(X)$.

On a alors le théorème suivant qui relie la K-théorie relative avec les K-théories algébrique et topologique:

1.1.3 Théorème: *Soit X un CW-complexe fini.*
Le groupe $K_A^{rel}(X)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes d'homotopie $[X, \mathcal{F}_A]$ avec $\mathcal{F}_A$ la fibre homotopique de l'application canonique

$$BGl(A)^+ \to BGL(A)^{top}$$

La démonstration de ce théorème nécessite un lemme technique qu'on va commencer par rappeler:

Soit $\gamma : GL(A) \to GL(A)^{top}$ l'application canonique, on a une fibration homotopique

$$GL(A) \xrightarrow{\gamma} GL(A)^{top} \to \mathcal{F} \xrightarrow{\theta} BGL(A) \to BGL(A)^{top}$$

Sur l'ensemble des couples (H, h), où H est un $GL(A)$-fibré principal sur X et $h : \gamma_*(H) = H \underset{GL(A)}{\times} GL(A)^{top} \to T = X \times GL(A)^{top}$ une trivialisation du $GL(A)^{top}$-fibré principal induit, on considère la relation d'équivalence suivante:

Les couples (H, h) et (H', h') sont équivalents s'il existe un isomorphisme $u : H \to H'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc} \gamma_*(H) & \xrightarrow{h} & T \\ {\scriptstyle \gamma_*(u)}\downarrow & & \| \\ \gamma_*(H') & \xrightarrow[h']{} & T \end{array}$$

1.1.4 Lemme: *L'ensemble des classes d'équivalence ξ de tels couples s'identifie naturellement à l'ensemble des classes d'homotopie $[X, \mathcal{F}]$.*

Démonstration du lemme (esquisse d'après [K2]):

Soit $f : X \to \mathcal{F}$ une application continue. On peut lui associer $g = \theta \circ f : X \to GL(A)^{top}$ et $F : X \times I \to BGl(A)^{top}$ tels que $F(x, 0) = *$ et $F(x, 1) = B\gamma \circ g(x)$. Donc $F^*(EGL(A)^{top})$ est isomorphe au fibré trivial $X \times I \times GL(A)^{top}$. On obtient alors une trivialisation h de $H = g^*(EGL(A)$. D'où une application de $[X, \mathcal{F}]$ dans ξ qui associe à f la classe de (H, h).

On montre que cette application est un isomorphisme.

Sa réciproque est donc une application de ξ vers $[X, \mathcal{F}]$ qui à toute classe de couple (H, h) associe une classe d'homotopie de fonction continue f tel que $H = (\theta \circ f)^*(EGL(A)) = f^*(\theta^*(EGL(A)) \equiv f^*(E)$.

Démonstration du théorème 1.1.3: (esquisse d'après [K2])

Soit $d(H, T, h) \in K_A^{rel}(X)$ alors $(H, h) \in \xi$. D'après le lemme précédent, il existe $[f] \in [X, \mathcal{F}]$ tel que $f^*(E) = H$.

On montre alors que l'application de $K_A^{rel}(X)$ vers $[X, \mathcal{F}_A]$ qui à tout $d(H, T, h)$ associe $f^+ : X \xrightarrow{f} \mathcal{F} \to \mathcal{F}_A$ est un isomorphisme.

1.2 Interprétation simpliciale de la K-théorie relative

Soit A une algèbre de Fréchet. On lui associe l'anneau simplicial A_* où $A_n = \mathcal{C}^\infty(\Delta_n)\hat{\otimes}A$. (Ici Δ_n est vu comme l'espace affine défini par l'équation $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$).

On a alors une suite de fibrations à homotopie près:

$$GL(A) \to GL(A_*) \to GL(A_*)/GL(A) \xrightarrow{\bar{\theta}} BGL(A) \to BGL(A_*)$$

où $\bar{\theta}$ est l'application définie par $\bar{\theta}(\sigma) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i = \tilde{\sigma}(i-1)\tilde{\sigma}(i)^{-1}$ avec $\tilde{\sigma}$ un représentant de $\sigma \in GL(A_n)/GL(A)$.

En appliquant la construction + de Quillen, on obtient une fibration homotopique

$$(GL(A_*)/GL(A))^+ \to BGL(A)^+ \to BGL(A_*)$$

1.2.1 Définition

La K-théorie relative d'un ensemble simplicial X est par définition

$$K_A^{rel}(X) = [X, (GL(A_*)/GL(A))^+]$$

En particulier, on pose $K_i^{rel}(A) = K_A^{rel}(S^i) = \Pi_i((GL(A_*)/GL(A))^+)$ où A est une algèbre de Fréchet.

1.2.2 Remarques

1) Si A une algèbre de Banach alors les deux définitions coïncident. En effet, la réalisation géométrique de $GL(A_*)$ a le type d'homotopie de $GL(A)^{top}$. Donc $BGL(A_*)$ est homotope à $BGL(A)^{top}$. D'où $\mathcal{F}_A$ est homotope à $(GL(A_*)/GL(A))^+$.

2) Si X est un ensemble simplicial fini (i.e la réalisation géométrique de X a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini) alors tout élément de $K_A^{rel}(X)$ peut être représenté par un $GL(A)$-fibré repéré sur X muni d'une trivialisation $\alpha : E \to T$ de $GL(A_*)$-fibré repéré (l'adaptation du théoréme 1.1.3 au cadre simplicial se fait sans problème).

2. LES CLASSES CARACTERISTIQUES RELATIVES

2.1 Construction simpliciale des classes caractéristiques relatives

On commence par rappeler la construction simpliciale des classes caractéristiques relatives telles que définies dans [C-K] puis on démontre que la construction simpliciale qu'on choisit de considérer coïncide avec la construction différentiable dans [K2].

Soient A une algèbre de Fréchet et $A_* = \mathcal{C}^\infty(\Delta_*)\hat{\otimes}A$ l'anneau simplicial associé à A.

Soit E le $GL(A)$-fibré repéré sur $GL(A_*)/GL(A)$ défini pour tout $\sigma \in GL(A_n)/GL(A)$ par $g_{ij}(\sigma) = g_i g_j^{-1}$ où $g_i = \sigma(i)$. Donc $E = \bar{\theta}^*(EGL(A))$ où $\bar{\theta} : GL(A_*)/GL(A) \to BGL(A)$ est l'application définie dans (1.2).

Soit $\tilde{E}$ le $GL(A_*)$-fibré repéré sur $GL(A_*)/GL(A)$ associé à E par l'injection de $GL(A)$ dans $GL(A_*)$. Comme l'application composée

$$GL(A_*)/GL(A) \xrightarrow{\bar{\theta}} BGl(A) \to BGl(A_*)$$

est homotopiquement triviale , le fibré $\tilde{E}$ se trivialise en tant que $GL(A_*)$-fibré. Cette trivialisation α est définie pour tout simplexe σ par $\alpha_i(\sigma) = \sigma\sigma(i)^{-1}$.

Munissons E de la connexion simpliciale définie par:

$$\Gamma_i(\sigma) = \Sigma x_k g_{ki}(\sigma)^{-1} d'' g_{ki}(\sigma)$$

Cette connexion, transportée sur le fibré trivial $\tilde{T}$ par l'isomorphisme α, est définie par

$$\Gamma_i'(\sigma) = \alpha_i \Gamma_i \alpha_i^{-1} + \alpha_i d\alpha_i^{-1} = -\Sigma x_k d\alpha_k \alpha_k^{-1} = \Gamma(\sigma)$$

avec $d = d' + d''$ la différentielle totale du bicomplexe $\Omega^*(\Delta_n, \Omega_*(A))$ et les x_k sont les coordonnées barycentriques de σ.

Or sur $\tilde{T}$, on a la connexion triviale $\Gamma = 0$.

On considère donc une homotopie entre Γ et 0 définie par $t \to t\Gamma$ donc la courbure est

$$R_{(E,T,\alpha)} = d(t\Gamma) + t^2\Gamma^2 = dt\Gamma + td\Gamma + t^2\Gamma^2.$$

D'où

$$R^n_{(E,T,\alpha)} = (td\Gamma + t^2\Gamma^2)^n + ndt\Gamma(td\Gamma + t^2\Gamma^2)^{n-1}.$$

Soit $\mathrm{Tr}(R^n) : GL(A_*)/GL(A) \times I \to \bigoplus_\sigma \bar{\Omega}^{2n}(\Omega^0(\sigma) \otimes A)$ qui a (σ, t) associe Tr $(R^n(\sigma, t))$

Alors

$$\begin{aligned} ch_n(D_{(E,T,\alpha)}) &= \frac{1}{n!}\mathrm{Tr}(R^n) \\ &= \frac{1}{n!}\int_\sigma \mathrm{Tr}(R^n(\sigma,t)) \in \bar{\Omega}^{2n}(GL(A_*)/GL(A) \times I, A) \end{aligned}$$

Le caractère de Chern relatif, noté $ch_n^{rel}(D_{(E,T,\alpha)})$, est par définition la classe de cohomologie dans $\mathcal{H}_A^{'2n}(GL(A_*)/GL(A)) = H^{2n-1}(\bar{\Omega}^*/\mathcal{C}^*)$ de

$$K(ch_n(D_{(E,T,\alpha)})) = \tfrac{1}{(n-1)!}\mathrm{Tr}\textstyle\int_\sigma\int_0^1 dt\Gamma(td\Gamma + t^2\Gamma^2)^{n-1}$$

où $K : \bar{\Omega}^*(GL(A_*)/GL(A) \times I, A) \to \bar{\Omega}^*(GL(A_*)/GL(A), A)$ l'opérateur d'homotopie standard et où $\mathcal{C}^{2n}(X, A) = \bigoplus_{\substack{p+q=2n \\ p<q}} \Omega^p(x; \bar{\Omega}_q A) \oplus Z^n(x; \bar{\Omega}_n A)$.

Cette homologie est donnée par $\mathcal{H}_A^{'2n}(GL(A_*)/GL(A)) =$

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n-1\\ p>q+1}} H^p(GL(A_*)/GL(A),\bar{H}_q(A)) \oplus H^n(GL(A_*)/GL(A),\bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A).$$

Si on considère une autre homotopie de Γ à 0, elle sera homotope à $t\to t\Gamma$ et donnera donc la même classe dans $\mathcal{H}'^{2n}_A(GL(A_*)/GL(A))$.

En particulier, on pose $\Gamma=-\Gamma'+\Gamma''$ où $\Gamma''=-\Sigma x_k d''\alpha_k\alpha_k^{-1}$ et $\Gamma'=\Sigma x_k d'\alpha_k\alpha_k^{-1}=d'\sigma\sigma^{-1}$.

On a une homotopie h entre Γ et 0 formée par la composition des homotopies

$h_1: t\to -\Gamma'+t\Gamma''$ et $h_2: t\to -t\Gamma'$

D'où

$$\begin{aligned} ch_n^{rel}(E,T,\alpha) =& K(\frac{1}{n!}\int_\sigma \mathrm{Tr}R^n)\\ =&\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}\int_\sigma (K(R_1^n)+K(R_2^n)) \end{aligned}$$

Or $\int_\sigma K(R_1^n)=0$ (A.1)

et $R_2^n=(d(-t\Gamma')+t^2\Gamma'^2)^n=(-dt\Gamma'-td'\Gamma'-td''\Gamma'+t^2\Gamma'^2)^n=(-dt\Gamma'-td''\Gamma'+(t^2-t)\Gamma'^2)^n$.

Donc

$$\begin{aligned} w=ch_n^{rel}(E,T,\alpha) =&\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}\int_\sigma\int_0^1 -ndt\Gamma'(-td''\Gamma'+(t^2-t)\Gamma'^2)^{n-1}\\ =&\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\mathrm{Tr}\int_\sigma\int_0^1 dt\Gamma' t^{n-1}(d''\Gamma')^{n-1}+\int_\sigma\cdots\Gamma'^{2n-1}\\ =&\frac{(-1)^n}{n!}\mathrm{Tr}\int_\sigma \Gamma'(d''\Gamma')^{n-1}+0 \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de définir le caractère de Chern relatif de la manière suivante pour une $\mathbf{R}$-algèbre de Fréchet A:

2.1.1 Définition

Le caractère de Chern relatif $K_n^{rel}(A)\to\bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A$ est l'homomorphisme composé

$$\Pi_n((GL(A_*)/GL(A))^+)\xrightarrow{h} H_n(GL(A_*)/GL(A))\xrightarrow{\phi}\bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A$$

où h est l'homomorphisme de Hurewicz (simplicial) et ϕ est l'application définie par:

$$\phi(c)=\int_c w=\frac{(-1)^n}{n!}\int_c Tr\int_\sigma \Gamma'(\sigma)(d''\Gamma'(\sigma))^{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}Tr\int_c \Gamma'(c)(d''\Gamma'(c))^{n-1}.$$

2.1.2 Remarque

Si $n > 1$, le caractère de Chern qu'il convient de considérer est l'homomorphisme composé

$$K_n^{rel}(A) \to K_n^{rel}(\tilde{A}) \to \bar{\Omega}_{n-1}\tilde{A}/\bar{B}_{n-1}\tilde{A} = C_{n-1}^{\lambda}(A)/\overline{b(C_{n-1}^{\lambda}(A))}.$$

$\tilde{A}$ étant l'algèbre obtenue en rajoutant un élément unité à A. (noter que $d''(1) \neq 0$ car 1 n'est pas l'élément unité de $\tilde{A}$).

L'image du caractère de Chern défini ci-dessus est contenue dans le sous-groupe $HC_{n-1}(A)$ de $C_{n-1}^{\lambda}(A)/\overline{b(C_{n-1}^{\lambda}(A))}$. On le notera $ch_n^{rel} : K_n^{rel}(A) \to HC_{n-1}(A)$.

2.2 Comparaison avec le cas différentiable

Le but de ce paragraphe est de montrer que, lorsque A est une algèbre de Banach, la définition précédente coïncide avec la définition différentielle du caractère de Chern relatif.

Soient A une algèbre de banach et X un CW-complexe fini.

Soient H un A-fibré plat virtuel sur X et $h : H \to T$ un isomorphisme différentiable.

Soit D_H une connexion sur H dont la connexion partielle est celle associée à la structure plate de H alors H peut être muni de deux connexions plates D_H et $h^*(D_T)$ où D_T la connexion triviale sur T.

Si $\pi : X \times I \to X$ est la projection canonique, il s'en suit que $\pi^*(H)$ peut être muni de la connexion $D_{H,T,h} = (1-t)D_H + t\ h^*(D_T)$. D'où

$ch_n(D_{H,T,h}) = \frac{1}{n!}Tr(R^n_{H,T,h}) \in \bar{\Omega}^{2n}(X \times I, A)$ et $ch_n^{rel}(H,T,h) = K(ch_n(D_{H,T,h}))$ où K est l'opérateur d'homotopie standard.

Comme

$$\bar{\Omega}^*(X \times I, A) \cong \mathbf{Q}[t, dt] \stackrel{\wedge}{\otimes} \bar{\Omega}^*(X, A)$$

alors $ch_n(D_{(H,T,h)}) = dt \wedge \varphi + \varphi'$ et $K(ch_n(D_{(H,T,h)})) = \int_0^1 dt \wedge \varphi$ est une forme différentielle de degré $2n-1$ dans $\bar{\Omega}^*(X, A)$ fermée modulo $\bar{\mathcal{C}}^*(X, A)$.

Le caractère de Chern relatif $ch_n^{rel} : K_A^{rel}(X) \to H^{2n-1}(\bar{\Omega}^*/\mathcal{C}^*)$ est donc défini par

$$ch_n^{rel}(H,T,h) = [\textstyle\int_0^1 dt \wedge \varphi].$$

Pour définir cet homomorphisme $ch_n^{rel}(D_{(H,T,h)})$, on n'a pas vraiment besoin du calcul de $H^{2n-1}(\bar{\Omega}^*/\mathcal{C}^*)$, il suffit d'expliciter les différentes projections sur

$$\bigoplus_{\substack{p+q=2n-1\\p>q+1}} H^p(X, \bar{H}_q(A)) \oplus H^n(X, \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A).$$

On s'intéressera ici à la projection

$$\mathcal{H}_A'^{2n}(X) \overset{proj}{\to} Hom(H_n(X), \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A).$$

Les autres projections s'expriment de la même manière.

Soit $c' : \Delta_n \to X$ un n-simplexe de X.

L'intégrale $\int_{c'} w$ définit un élément de $\bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A$ qui ne dépend que de la classe d'homologie de c' dans $H_n(X)$.

Donc pour $X = S^n$, on a:

$$\begin{array}{ccccc}
K_n^{rel}(A) & \to & H^{2n-1}(\bar{\Omega}^*/\mathcal{C}^*) & \xrightarrow{\cong} & Hom(H_n(S^n), \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A) \\
 & & \searrow_{\cong} & & \downarrow\cong \\
 & & & & \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A
\end{array}$$

Cette application associe à tout triple (H,T,h) : $\int_{c'_0} \gamma$ où $\gamma = [\int_0^1 dt \wedge \varphi]$ et c'_0 le générateur de $H_n(S^n)$.

Il faut donc montrer que le diagramme suivant est commutatif. (Les notations ξ , $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ sont celles de la Démonstration 1.1).

$$\begin{tikzcd}
K_n^{rel}(A) \arrow[r] \arrow[ddd] & \xi \arrow[r, "\cong"] & \pi_n(\mathcal{F}) \arrow[r] & \pi_n(\mathcal{F}_A) \arrow[r, "\cong"] & \Pi_n((GL(A_*)/GL(A))^+) \arrow[d, "h"] \\
 & & & & H_n((GL(A_*)/GL(A))^+) \arrow[d, "\cong"] \\
 & & & & H_n((GL(A_*)/GL(A))) \arrow[d, "\phi"] \\
H^{2n-1}(\bar{\Omega}^*/\mathcal{C}^*) \arrow[rrrr, "\cong", "proj"'] & & & & \bar{\Omega}_{n-1}A/\bar{B}_{n-1}A
\end{tikzcd}$$

Soit $d(H,T,h) \in K_n^{rel}(A) = K_A^{rel}(S^n)$. On lui associe la classe de $(H,h) \in \xi$. Cette dernière est en bijection avec la classe d'homotopie de la fonction $f \in \Pi_n(\mathcal{F})$. Par construction $+$, on obtient la classe d'homotopie de $f^+ \in \Pi_n(\mathcal{F}_A)$ avec la propriété $(\theta f)^*(EGL(A)) = H$.

L'homotopie entre $\mathcal{F}_A$ et $(GL(A_*)/GL(A))^+$ associe à f^+ un élément v^+ dans

$\Pi_n((GL(A_*)/GL(A))^+)$, c'est à dire une application $v^+ : \Delta[n] \to (GL(A_*)/GL(A))^+$ où $\Delta[n]_m = Hom((m),(n))$.

L'application de Hurewicz simpliciale transforme v^+ en $c^+ = v_n^+(id_{(n)})$(A.3).

Soit c l'image dans $H_n(GL(A_*)/GL(A))$ de c^+, il faut donc montrer que $\int_{c_0'} \gamma = \int_c w$ avec

$$w = ch_n^{rel}(E,T,\alpha) = \bar{\theta}^*(ch_n^{rel}(EGL(A),T,\tilde{\alpha})) \text{ car } E = \bar{\theta}^*(EGL(A))$$

et

$$\gamma = ch_n^{rel}(H,T,h) = (\theta f)^*(ch_n^{rel}(EGL(A),T,\tilde{h})).$$

On a

$$\int_{c_0'} \gamma = \int_{\theta f c_0'} ch_n^{rel}(EGL(A),T,\tilde{h}).$$

et

$$\int_c w = \int_{\bar\theta(c)} ch_n^{rel}(EGL(A),T,\tilde\alpha) = \int_{c_0''} ch_n^{rel}(EGL(A),T,\tilde{\tilde\alpha})$$

avec c_0'' l'image de $\bar\theta(c)$ par l'application qui identifie le groupe simpliciale $BGL(A)$ au groupe discret $BGL(A)$ donné par la construction de Milnor.

Donc $c_0'' : \Delta_n \to BGL(A)$ est définie par

$$c_0''(u = (t_0, \cdots, t_n)) = (\alpha_0 t_0, \cdots, \alpha_n t_n) = <\alpha, u> \text{ où } \alpha_i = \tilde c(i-1)\tilde c(i).$$

Or, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
\Delta_n \xrightarrow{c_0'} & S^n & \xrightarrow{f} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\quad\theta\quad} & & BGL(A) \\
u \longrightarrow & c_0'(u) & \longrightarrow & f(c_0'(u)) & \xrightarrow{\qquad} & & <d,u> \\
 & & & \Big\downarrow & & & \Big\downarrow i \\
 & & & \mathcal{F}_A & \to & |(GL(A_*)/GL(A))^+| \to & BGL(A)^+ \\
 & & & f^+(c_0'(u)) & \to & cl(c^+,u) \quad \to & <c,u>^+
\end{array}$$

donc $d = c$ d'où $c_0'' = \theta f c_0'$. D'où le résultat.

3. LES CLASSES CARACTERISTIQUES SECONDAIRES

On s'intérèssera dans tout ce qui suit au cas $A = \mathbf{C}$.

3.1 Construction des classes secondaires $R_{2n-1} : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$

Soit $S_{n+1} : HC_{n+1}(A) \to HC_{n-1}(A)$ l'opérateur de périodicité de Connes induit sur les cycles par l'homomorphisme qui à une forme différentielle non commutative

$a_0 d'a_1 \cdots d'a_{n+1}$ associe

$\frac{-1}{n(n+1)}[a_0a_1a_2d'a_3..d'a_{n+1} + a_0d'a_1a_2a_3d'a_4..d'a_{n+1} + .. + a_0d'a_1..d'a_{n-1}a_na_{n+1}]$

On a alors le résultat suivant:

3.1.1 Proposition: *Pour n impair, la composée*

$$S = S_{n-1}S_{n-3}\cdots S_2 : HC_{n-1}(A) \to HC_0(A)$$

est définie par

$$S(a_0d'a_1\cdots d'a_{n-1}) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}(\frac{n-1}{2})!}{(n-1)!}a_0a_1\cdots a_{n-1}.$$

La démonstration de cette proposition est triviale (par récurrence) et en la combinant avec le caractère de Chern relatif de la définition 2.1.1, on obtient le théorème suivant:

3.1.2 Théorème: *La composée de S avec le caractère de Chern relatif*

$$K_{2n-1}^{rel}(A)\xrightarrow{ch_{2n-1}^{rel}}HC_{2n-2}(A)\xrightarrow{S}HC_0(A).$$

associe à tout élément $d(E,F,\alpha)$ de $K_{2n-1}^{rel}(A)$ la classe du cocycle

$S(\int_c w) = \int_c S_*(w) = \int_c S_*(\frac{-1}{(2n-1)!}\mathrm{Tr}\int_\sigma \Gamma'(\sigma)(d''\Gamma'(\sigma))^{2n-2}) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!}Tr\int_c \Gamma'(c)^{2n-1}$

où $S_* : H^n(GL(A_*)/GL(A), HC_{n-1}(A)) \to H^n(GL(A_*)/GL(A), HC_0(A))$

et $c = h(d(E,F,\alpha))$.

On est maintenant en mesure de définir les classes caractéristiques secondaires de la manière suivante:

3.1.3 Définition

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, La classe caractéristique secondaire R_{2n-1} est l'application composée

$$R_{2n-1} : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to K_{2n-1}^{rel}(\mathbf{C})\xrightarrow{\cong}\Pi_{2n-1}((GL(A_*)/GL(A))^+)\xrightarrow{ch_{2n-1}^{rel}}\mathbf{C}$$

où l'application $K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to K_{2n-1}^{rel}(\mathbf{C})$ est définie de la manière suivante:

Soit ξ un élément quelconque de $K_{2n-1}(\mathbf{C}) = K_{\mathbf{C}}(S^{2n-1})$. On peut voir ξ comme un $\mathbf{C}$-fibré plat virtuel sur S^{2n-1} et le munir ainsi d'une métrique η qui induit un isomorphisme entre ξ et son anti-dual $\bar{\xi}^*$. Ceci nous permet de définir une application canonique de $K_{2n-1}(\mathbf{C})$ vers $K_{2n-1}^{rel}(\mathbf{C})$ qui associe à ξ la classe du triplet $(\bar{\xi}^*, \xi, \eta)$.

3.2 Description explicite de $\mathbf{R}_{2n-1}$

3.2.1 Théorème: *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'application composée R_{2n-1} associe à tout $\mathbf{C}$-fibré plat virtuel sur S^{2n+1} $\xi = (\varphi_{ij})_{0\leq i,j\leq 2n-1}$, où les φ_{ij} sont les applications de transitions du fibré,*

$$R_{2n-1}(\xi) = \tfrac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} Tr \int_{\Delta_{2n-1}} (\nu^{-1} d\nu)^{2n-1}$$

avec $\varphi_{ij} = g_i^{-1} g_j \in GL_N(\mathbf{C})$ pour N assez grand et $\nu = \sum\limits_{i=0}^{2n-1} x_i \; g_i g_i^*$ où $(x_i)_{0\leq i\leq 2n-1} \in \Delta_{2n-1}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{U} = (U_k)_{k\in J}$ un recouvrement ouvert trivialisant de ξ tel que $\forall \; i \neq j, \; U_i \cap U_j$ est connexe ou vide.

Le fibré ξ est alors défini par des applications de transitions $\varphi_{ij} : U_i \cap U_j \to GL_N(\mathbf{C})$ localement constantes donc constantes car $U_i \cap U_j$ est connexe et le fibré $\bar{\xi}^*$ est le fibré dual défini par $({}^t\bar{\varphi}_{ij}^{-1}) = ((\varphi_{ij}^*)^{-1})$.

Soit $\eta : \bar{\xi}^* \to \xi$ l'application définie par $\eta_i = \eta_{|U_i} = \Sigma t_k \varphi_{ik} \varphi_{ik}^*$ où $(t_k)_k$ est une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$.

D'après le théorème 1.1.3, $K_{2n-1}^{rel}(\mathbf{C}) = K_{\mathbf{C}}^{rel}(S^{2n-1})$ s'identifie naturellement à l'ensemble des classes d'homotopie $[S^{2n-1}, \mathcal{F}_{\mathbf{C}}]$, où $\mathcal{F}_{\mathbf{C}}$ désigne la fibre homotopique de l'application canonique $BGL(\mathbf{C})^+ \to BGL(\mathbf{C})^{top}$.

De plus, on sait que $\Pi_{2n-1}(\mathcal{F}_{\mathbf{C}})$ est isomorphe à $\Pi_{2n-1}((GL(\mathbf{C}_*)/GL(\mathbf{C}))^+)$. Donc ξ peut être vu comme un $GL(\mathbf{C})$-fibré repéré sur $\Delta[2n-1]$ défini par $\varphi_{ij}(\sigma) = \varphi_{ij} \in GL(\mathbf{C})$ pour tout $\sigma \in \Delta[2n-1]$. ($\Delta[2n-1]$ désigne l'ensemble simplicial défini par $\Delta[2n-1]_m =$ l'ensemble des homomorphismes croissants de (m) vers $(2n-1)$ avec $(m) = \{0, 1, .., m\}$)

L'identification $K_{2n-1}^{rel}(\mathbf{C}) \cong [S^{2n-1}, \mathcal{F}_{\mathbf{C}}]$ implique que, en tant que $GL(\mathbf{C})$-fibré repéré, $\bar{\xi}^*$ est égal à $f^*(E)$ où f est une application simpliciale de $\Delta[2n-1]$ vers $GL(\mathbf{C}_*)/GL(\mathbf{C})$ et on a $c = h(d(\bar{\xi}^*, \xi, \eta)) = f_{2n-1}(id_{(2n-1)})$ (A.2). D'où

$$\begin{aligned} R_{2n-1}(\xi) &= \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} Tr \int_c \Gamma'(c)^{2n-1} \\ &= \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} Tr \int_{f_{2n-1}(id_{(2n-1)})} [\sum_{k=0}^{2n-1} x_k \alpha_k (f_{2n-1}(id_{(2n-1)}))^{-1} d' \alpha_k (f_{2n-1}(id_{(2n-1)}))]^{2n-1} \end{aligned}$$

Or l'application α est une trivialisation de E en tant que $GL(\mathbf{C}_*)$-fibré repéré et $(\bar{\xi}^*, \eta) = f^*((E, \alpha))$ donc pour tout $\sigma \in \Delta[2n-1]$, on a $\alpha_k(f(\sigma)) = \eta_k(\sigma)$.

D'où

$$R_{2n-1}(\xi) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} Tr \int_{id_{(2n-1)}} (\sum_{k=0}^{2n-1} x_k \eta_k(id_{(2n-1)})^{-1} d\eta_k(id_{(2n-1)}))^{2n-1}$$

Ceci implique que pour tout k, puisque $Tr(\eta_k^{-1} d\eta_k)$ est invariant (A.4),

$$R_{2n-1}(\xi) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} Tr \int_{id_{(2n-1)}} (\eta_k(id_{(2n-1)})^{-1} d\eta_k(id_{(2n-1)}))^{2n-1}.$$

En particulier, pour $k = 2n-1$, on déduit le théorème car $\eta_{2n-1} = g_{2n-1}^{-1} \nu g_{2n-1}^{*-1}$ et $id_{(2n-1)}$ induit un isomorphisme entre la réalisation géométrique de $\Delta[2n-1]$ et Δ_{2n-1} (Ici η_k est une application différentiable et $\eta_k(*)$ est l'application simpliciale associée).

4. COMPARAISON ENTRE $\mathbf{R}_{2n-1}$ ET LE REGULATEUR DE BOREL

4.1 Construction du régulateur de Borel $R_{bor} : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}(n-1)$ [Ca]

Soient G un groupe de Lie compact connexe, K un sous-groupe fermé connexe et $\mathbf{C}$ le G-module trivial. Notons p l'injection canonique $\Omega^*(G/K)^G$ dans $\Omega^*(G/K)$ et q l'application en sens inverse définie par: $q(\omega) = \int_G g.\omega dg$. on a $qp = id$ et pq est homotope à id. Donc $H^*(\Omega^*(G/K)^G) \cong H^*_{top}(G/K)$ d'où $H^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathbf{C}) \cong H^*_{top}(G/K)$.

Soient $\bar{G} = GL_N(\mathbf{C})$ et $K = U(N)$ donc $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{U}(N) \oplus i\mathcal{U}(N)$

soient $\mathcal{G} = \mathcal{U}(N) \oplus \mathcal{U}(N)$ et $G = U(N) \times U(N)$ le groupe de lie associé à $\mathcal{G}$.

Le groupe G étant compact, on a donc un isomorphisme

$H^*_{top}(U(N), \mathbf{C}) \cong H^*(\mathcal{G}, \mathcal{K}, \mathbf{C}) = H^*(Hom_{\mathcal{K}}(\bigwedge^*(\mathcal{G}/\mathcal{K}), \mathbf{C})) \cong H^*(Hom_{\mathcal{K}}(\bigwedge^* \mathcal{U}(N), \mathbf{C})$

$\cong H^*(Hom_{\mathcal{K}}(\bigwedge^* i\mathcal{U}(N), \mathbf{C})) \cong H^*(\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{K}, \mathbf{C}) \cong H^*_{cont}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{C})$

D'où un isomorphisme canonique entre $H^*_{top}(U(N), \mathbf{C})$ et $H^*_{cont}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ qui transforme $H^m_{top}(U(N), \mathbf{R}(n))$ en $i^m H^m_{cont}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n))$.

Or $H^*_{top}(U(N)) = \bigwedge^*(u_1, u_3, \cdots, u_{2N-1})$ avec $\partial u_{2n-1} = 2n-1$ et on peut choisir u_{2n-1} canoniquement comme image de la classe de chern c_n par la transgression dans la suite spectrale de Serre du $GL_N(\mathbf{C})$-fibré universel sur $BGL_N(\mathbf{C})$.

On pose b'_n l'image de u_{2n-1} par l'isomorphisme

$$H^{2n-1}_{top}(U(N), \mathbf{R}(n)) \to H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1))$$

et b_n l'image de b'_n par

$$H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1)) \to H^{2n-1}(GL_N(\mathbf{C})^\delta, \mathbf{R}(n-1)) \cong H^{2n-1}(GL(\mathbf{C})^\delta, \mathbf{R}(n-1))$$

Les applications précédentes représentent respectivement l'inclusion canonique et

l'isomorphisme de stabilisation.

On définit ainsi le régulateur de borel

$$R_{bor} : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \xrightarrow{h} H_{2n-1}(GL(\mathbf{C})^\delta) \xrightarrow{\cap b_n} \mathbf{R}(n-1).$$

Dans le cas $n = 1$, on retrouve l'application $Log|\ |$.

4.2 Comparaison entre R_{bor} et $\mathbf{R}_{2n-1}$

On va maintenant montrer notre résultat principal qui stipule que les cocycles continus φ (voir 4.2.1) et b'_n qui définissent les deux régulateurs R_{bor} et R_{2n-1} sont égaux à un scalaire près.

4.2.1 Proposition: *Soit φ l'application sur $GL_N(\mathbf{C})^{2n}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ définie par*

$$\varphi(g_0, \cdots, g_{2n-1}) = Tr \int_{\Delta_{2n-1}} (\nu(x)^{-1} d\nu(x)\ )^{2n-1}$$

où $x = (x_i)_{0 \le i \le 2n-1}$ représente un point du $(2n-1)$-simplexe standard Δ_{2n-1} et

$\nu(x) = \sum\limits_{i=0}^{2n-1} x_i g_i g_i^*.$

Alors φ est un $(2n-1)$-cocycle homogène $\mathcal{C}^\infty$ sur $GL_N(\mathbf{C})$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ qui est $U(N)$-normalisé (cf.[Gu] pp128).

Démonstration

Soit $g \in GL_N(\mathbf{C})$. On a $\varphi(gg_0, .., gg_{2n-1}) = Tr \int_{\Delta_{2n-1}} (\nu'(x)^{-1} d\nu'(x))^{2n-1}$

où $\nu'(x) = \sum\limits_{i=0}^{2n-1} x_i g g_i g_i^* g^* = g\nu(x)g^*$.

Or $(\nu'^{-1} d\nu')^{2n-1} = g^{*-1}(\nu^{-1}d\nu)^{2n-1} g^*$ donc $\varphi(gg_0, \cdots, gg_{2n-1}) = \varphi(g_0, \cdots, g_{2n-1})$.

Soient $k_0, .., k_{2n-1} \in U(N)$. On veut montrer que φ est $U(N)$-normalisé , c'est à dire que $\varphi(g_0k_0, \cdots, g_{2n-1}k_{2n-1}) = \varphi(g_0, \cdots, g_{2n-1})$.

Soit $\nu''(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x_i g_i k_i k_i^* g_i^*$, on a $\nu'' = \nu$ car $k_i k_i^* = 1 \ \forall k_i \in U(N)$.

Donc $\varphi(g_0k_0, \cdots, g_{2n-1}k_{2n-1}) = \varphi(g_0, \cdots, g_{2n-1})$.

Soit δ la différentielle du complexe $\mathcal{C}^*(GL(\mathbf{C}), \mathbf{C})^{GL(\mathbf{C})}$ alors

$(\delta\varphi)(g_0, .., g_{2n}) = \sum_{p=0}^{2n}(-1)^i \varphi(g_0, .., \hat{g}_p, .., g_{2n}) = \sum_{p=0}^{2n}(-1)^p Tr \int_{\Delta_{2n-1}} (\nu_p^{-1} d\nu_p)^{2n-1}$

où $\nu_p(x) = \sum_{i=0}^{p-1} x_i g_i g_i^* + \sum_{i=p+1}^{2n} x_{i-1} g_i g_i^*$. D'où

$$\begin{aligned}(\delta\varphi)(g_0, \cdots, g_{2n}) &= Tr \int_{\partial\Delta_{2n}} (\mu^{-1}d\mu)^{2n-1} \text{ avec } \mu = \sum_{i=0}^{2n} x_i g_i g_i^* \\ &= Tr \int_{\Delta_{2n}} d(\mu^{-1}d\mu)^{2n-1} \text{(formule de Stokes)} \\ &= 0 \text{ car } Tr(\mu^{-1}d\mu)^{2n-1} \text{ est une forme fermée (voir}[K2]pp40)\end{aligned}$$

4.2.2 Théorème: *Pour tout* $n \geq 1$, *la classe de cohomologie continue* b_n' *de Borel, plongée dans* $H_{cont}^{2n-1}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{C})$, *est représentée par le* $(2n-1)$*-cocycle continu à valeurs dans* $\mathbf{C}$ *donné sous forme homogène par*

$$(g_0, \cdots, g_{2n-1}) \longmapsto \frac{(-1)^n}{2^{3n-2}(i\pi)^{n-1}} \varphi(g_0, \cdots, g_{2n-1})$$

où φ *est le cocycle défini dans la proposition* 4.2.1.

Démonstration

Pour $n = 1$, on a une formule explicite pour φ:

Soit $\nu = x_0 g_0 g_0^* + x_1 g_1 g_1^* = g_0((1-t) + tgg^*)g_0^*$ où $g = g_0^{-1} g_1$

$$\begin{aligned}\varphi(g_0, g_1) &= Tr \int_{\Delta_1} (\nu^{-1} d\nu) \\ &= -Tr \int_0^1 (gg^* - 1)(1 + (1-t)(gg^* - 1))^{-1} dt \\ &= -\ Log|dét(gg^*)| = -2Log|dét(g)| (\text{A.6})\end{aligned}$$

Or on sait que le régulateur de Borel λ_1 est défini par $\lambda_1(g) = Log|dét(g)|$.

Donc $b_1' = \frac{-1}{2}[\varphi(g_0, g_1)]$.

Pour $n > 1$, on considère l'isomorphisme

$$\tau : H_{sing}^{2n-1}(U(N), \mathbf{C}) \xrightarrow{\cong} H_{cont}^{2n-1}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{C})$$

obtenu en combinant le morphisme de complexes $\bar{u}^{2n-1}$ de $C^{2n-1}_{diff}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{C})_{U(N)}$ vers $Hom_{U(N)}(\bigwedge^{2n-1}(\mathcal{G}l_N(\mathbf{C})/\mathcal{U}(N)),\mathbf{C})$ qui induit l'isomorphisme de Van Est (voir [Gu] pp228) et la composée des isomorphismes décrits dans [Gu] pp366:

$$Hom_{U(N)}(\textstyle\bigwedge^{2n-1}\mathcal{U}(N),\mathbf{C})\cong Hom_{U(N)}(\bigwedge^{2n-1}T_0U(N),\mathbf{C})\cong\Omega^{2n-1}((U(N)))^{U(N)\times U(N)}$$

($\mathcal{G}l_N(\mathbf{C})$, resp. $\mathcal{U}(N)$, désigne l'algèbre de Lie associée à $GL_N(\mathbf{C})$, resp. $U(N)$).

Il est classique que $H^*_{sing}(U(N),\mathbf{C})=\bigwedge^*(u_1,u_3,\cdots,u_{2N-1})$, l'algèbre extérieure sur des générateurs $(u_{2k-1})_{1\leq k\leq N}$ de degré $(2k-1)_{1\leq k\leq N}$, qu'on peut choisir canoniquement comme images des classes de Chern entières $(c_k)_{1\leq k\leq N}$ par la transgression dans la suite spectrale de Serre du $GL_N(\mathbf{C})$-fibré universel sur $BGL_N(\mathbf{C})$.

Plus précisement, $u_{2n-1}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2i\pi)^n(2n-1)!}Tr(\alpha^{-1}d\alpha)^{2n-1}$ avec $\alpha^{-1}d\alpha$ égal à la forme de Maurer-Cartan sur le groupe $GL_N(\mathbf{C})$ (voir A.7).

La classe de Borel b'_n est définie comme image de u_{2n-1} par la composée des isomorphismes

$$H^{2n-1}_{sing}(U(N),\mathbf{R}(n))\xrightarrow{\tau|\mathbf{R}(n)}i^{2n-1}H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{R}(n))\xrightarrow{\frac{(-1)^n}{2\pi}}H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1)).$$

Donc τ transforme u_{2n-1} en $\frac{1}{(-1)^n2\pi}j_*(b'_n)$, où j est l'inclusion de $\mathbf{R}(n-1)$ dans $\mathbf{C}$ (voir A.6).

Pour comparer $[\varphi]$ et $j_*(b'_n)$, il suffit donc de comparer les deux classes de formes invariantes u_{2n-1} et $[w]$ au point base $0=\{K\}\in G/K$, où $[w]$ est l'image de $[\varphi]$ par τ^{-1}.

Un calcul technique (voir A.8) montre que

$$\bar{u}^{2n-1}(\phi)(\dot{X}_1,\cdots,\dot{X}_{2n-1})=$$

$$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!}Tr\sum_{s\in\Sigma_{2n-1}}\epsilon(s)(X_{s(1)}+X^*_{s(1)})\cdots(X_{s(2n-1)}+X^*_{s(2n-1)})$$

où ϕ est le cocycle non-homogène associé à φ et $\dot{X}$ la classe dans $\mathcal{G}L_N(\mathbf{C})/\mathcal{U}(N)$ d'un élément X de $\mathcal{G}L_N(\mathbf{C})$. ($\epsilon(s)=\pm1$ étant la signature d'un élément s de l'ensemble des permutations Σ_{2n-1}).

En explicitant τ (voir A.9), on a donc:

$$w_0(\alpha_1,\cdots,\alpha_{2n-1})=\frac{-(2i)^{2n-1}}{(2n1)!}Tr\sum_{s\in\Sigma_{2n-1}}\epsilon(s)\alpha_{s(1)}\cdots\alpha_{s(2n-1)}=\frac{-(2i)^{2n-1}}{(2n-1)!}Tr(d\alpha)^{2n-1}$$

D'où $[w]=2^{3n-1}\pi^ni^{n-1}u_{2n-1}$. Ce qui implique le théorème.

4.2.3 Corollaire 1: *Soient* $R_{bor} : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}(n-1)$ *le régulateur de Borel et* $R_{2n-1} : K_{2n-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ *l'application définie dans 3.1. Soit* j *l'inclusion de* $\mathbf{R}(n-1)$ *dans* $\mathbf{C}$*, on a alors l'égalité:*

$$j \circ R_{bor} = \frac{(2n-2)!(2n-1)!}{2^{3n-2}(i\pi)^{n-1}(n-1)!} R_{2n-1}.$$

Démonstration

Ce corollaire est une conséquence directe des théorèmes 3.2.1 et 4.2.2.

4.2.4 Corollaire 2: *Soit* B'_n *le cocycle non-homogène associé à* b'_n *et* $\bar{u}^{2n-1} : C^{2n-1}_{diff}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{C})_{U(N)} \to Hom_{U(N)}(\bigwedge^{2n-1}(\mathcal{G}l_N(\mathbf{C})/\mathcal{U}(N)), \mathbf{C})$ *le morphisme de complexes qui induit l'isomorphisme de Van Est. Alors*

$$\bar{u}^{2n-1}(j^*(B'_n))(\dot{X}_1, \cdots, \dot{X}_{2n-1}) =$$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(i\pi)^{n-1}2^{3n-2}(2n-1)} Tr \sum_{s \in \Sigma_{2n-1}} \epsilon(s)(X_{s(1)} + X^*_{s(1)}) \cdots (X_{s(2n-1)} + X^*_{s(2n-1)}).$$

5. RELATION ENTRE $\mathbf{R}_{2n-1}$ ET LES POLY-LOGARITHMES

Rappelons que le problème d'exprimer la classe de Borel $b'_n \in H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}), \mathbf{R}(n-1))$ avec un cocycle explicite, sinon continu, au moins mesurable et localement borné, est résolu pour n=1,2 et 3.

En effet, pour $n = 1$, b'_n est représenté par le cocycle continu

$$(g_0, g_1) \to log|dét g_0^{-1} g_1|.$$

Pour n=2, b'_n est représenté par le 3-cocycle continu donné sous forme homogène par

$$(g_0, g_1, g_2, g_3) \to \mathcal{D}_2(r_2(g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty)))$$

où $\mathcal{D}_2$ est le dilogarithme de Bloch-Wigner et r_2 le birapport (voir [B]).

Pour $n = 3$, b'_n est représenté à un facteur $\mathbf{Q}^\times$ près par un cocycle mesurable donné en notation homogène par $\tilde{\mathcal{D}}_3(r_3(g_0 v, \cdots, g_5 v))$ si $(g_0, \cdots, g_5)$ est v-générique et par 0 sinon; le choix de $v \neq 0$ est arbitraire (voir [$G2$]).

Notre but est de retrouver ces résultats avec la cochaine continue φ.

5.1 Cas où n=1

Pour $n = 1$, on a une formule explicite pour φ:

Soit $\nu = x_0 g_0 g_0^* + x_1 g_1 g_1^* = g_0((1-t) + tgg^*)g_0^*$ où $g = g_0^{-1}g_1$

$$\begin{aligned}\varphi(g_0, g_1) =& Tr \int_{\Delta_1} (\nu^{-1} d\nu) \\ =& - Tr \int_0^1 (gg^* - 1)(1 + (1-t)(gg^* - 1))^{-1} dt \\ =& - \ Log|d\acute{e}t(gg^*)| = -2Log|d\acute{e}t(g)| (\mathrm{A}.6).\end{aligned}$$

5.2 Cas où n=2

Soit $\varphi \in C^3(GL_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ la cochaine continue définie dans 4.2.1 et soit

$\phi \in C^3_{diff}(GL_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})_{U(2)}$ le cocycle inhomogène associé à φ.

alors $\phi(g_1, g_2, g_3)$ est cohomologue à $\bar{v}^3(\bar{u}^3(\phi))(g_1, g_2, g_3) = \int_{\Delta(g_1, g_2, g_3)} w$

où $\bar{u}^3$ et $\bar{v}^3$ sont les morphismes de complexes entre $C^3_{diff}(GL_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})_{U(2)}$ et

$Hom_{U(2)}(\bigwedge^3(\mathcal{G}L_2(\mathbf{C})/\mathcal{U}(2)), \mathbf{C})$ qui induisent l'isomorphisme de Van Est, w est la

(3)-forme sur $GL_2(\mathbf{C})/U(2)$ associée à $\bar{u}^3(\phi)$ par l'isomorphisme

$$\Omega^3(GL_2(\mathbf{C})/U(2))^{GL_2(\mathbf{C})} \cong Hom_K(\bigwedge^3(\mathcal{G}L_2(\mathbf{C})/\mathcal{U}(2)), \mathbf{C})$$

et $\Delta(g_1, g_2, g_3) \subset GL_2(\mathbf{C})/U(2)$ le simplexe géodésique de sommets $e, g_1e, g_1g_2e, g_1g_2g_3e$ défini comme étant le cône géodésique $g_1\Delta(g_2, g_3)$ avec $0 = \{K\} \in G/K$ le point base (voir $[D2]$).

Soit $\bar{\phi} = \bar{v}^3(\bar{u}^3(\phi))$, on peut lui associer de manière bijective $\bar{\varphi}$ un cocycle continu donné en représentation homogène par

$$\bar{\varphi}(g_0, g_1, g_2, g_3) = g_0. \int_{\Delta(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2, g_2^{-1}g_3)} w.$$

Soient $g_0, g_1, g_2, g_3 \in GL_2(\mathbf{C})$, on veut montrer que la classe de cohomologie de

$\bar{\varphi}(g_0, g_1, g_2, g_3)$ ne dépend que du birapport $r_2(g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty))$.

On remarque qu'on peut se restreindre à $g_0, g_1, g_2, g_3 \in SL_2(\mathbf{C})$ puisque

$BSL_2(\mathbf{C})^+ = BGL_2(\mathbf{C})^+$.

On va commencer par montrer que la classe de cohomologie de $\bar{\varphi}(g_0, g_1, g_2, g_3)$ ne dépend que des premières colonnes $g_i(\infty)$ $0 \le i \le 3$.

Pour celà, on va utiliser un résultat de Dupont (voir [D1]):

Soit G un groupe de Lie et $B_*(G)$ sa bar résolution (voir [McL]). Supposons que G agit sur une variété V $(q-1)$ connexe pour un certain entier q. Alors le complexe des chaines singulières de V est un complexe de G-modules (à gauche) $(q-1)$ acyclique. D'où l'existence d'une transformation de chaines σ de G-modules:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{Z} & \overset{\epsilon}{\leftarrow} & B_0(G) & \overset{\delta_G}{\leftarrow} & B_1(G) & \cdots & \overset{\delta_G}{\leftarrow} & B_q(G) & \\
\downarrow & & \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma & & & \downarrow \sigma & (*) \\
\mathbf{Z} & \underset{\epsilon}{\leftarrow} & C_0^{sing}(V) & \underset{\delta}{\leftarrow} & C_1^{sing}(V) & \cdots & \underset{\delta}{\leftarrow} & C_q^{sing}(V) & \\
. & & & & & & & &
\end{array}$$

Cette application σ nous permet de définir pour toute p-forme G-invariante w sur V (avec $p \le q$), une cochaine d'Eilenberg-MacLane $J(w)$ à coefficients dans $\mathbf{C}$ par l'intégrale:

$$J(w)(g_1, \cdots, g_p) = \int_{\sigma[g_1|\cdots|g_p]} w.$$

On a alors la proposition suivante (voir [D1]):

5.2.1 Proposition: *(i) La cochaine $J(w)$ est un cocycle si w est fermée et c'est un cobord si $w = dw'$ avec w' une forme différentielle G-invariante.*

(ii) Pour $p < q$ et w une forme fermée, la classe de cohomologie de $J(w)$ dans $H^p(G, \mathbf{C})$ est indépendante du choix de σ.

(iii) Pour $V = G/K$ avec K un sous-groupe compact maximal de G, $q = +\infty$ et il existe un choix canonique de $\sigma[g_1|\cdots|g_p] = \Delta(g_1, \cdots, g_p)$ le simplexe géodésique.

Donc pour montrer que la classe de cohomologie de $\bar{\varphi}$ ne dépend que des premières colonnes, il suffit de trouver une application σ vérifiant le diagramme (*) telle σ ne dépend que des premières colonnes.

Pour celà, notons C_p le groupe abélien libre de base $(x_0, \cdots, x_p),\ x_i \in \mathcal{P}^1(\mathbf{C})$. On forme alors un complexe

$$\cdots \xrightarrow{d} C_p \xrightarrow{d} C_{p-1} \xrightarrow{d} \cdots$$

en définissant la différentielle d sur les générateurs par

$$d(x_0, \cdots, x_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_p).$$

Il existe une augmentation naturelle $\epsilon : C_0 \to \mathbf{Z}$ définie par $\epsilon(x_0) = 1$.

On a alors le lemme suivant:

5.2.2 Lemme: *Le complexe augmenté* $C_* \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \to 0$ *est acyclique.*

En effet, soit $z = \Sigma n_i(x_0^i, \cdots, x_p^i)$ un p-cycle du complexe augmenté $(p \geq -1)$. Puisque $\mathbf{C}$ est infini, on peut trouver un point $x \in \mathcal{P}^1(\mathbf{C})$ différent de tous les x_j^i. On montre alors facilement que $z = d(\Sigma n_i(x, x_0^i, \cdots, x_p^i))$.

D'autre part, l'action naturelle de $G = GL_2(\mathbf{C})$ sur $\mathcal{P}^1(\mathbf{C})$ induit une action de G sur C_*. Donc C_* devient un complexe de G-modules acyclique sur $\mathbf{Z}$. Le lemme de comparaison des résolutions, nous permet alors de définir un homomorphisme $\theta : E_*(G) \to C_*$ de G-complexes sur $\mathbf{Z}$, unique à homotopie près, où $E_*(G)$ désigne la G-résolution libre sur $\mathbf{Z}$.

Ce morphisme se décrit de la manière suivante (voir $[Y]$):

Soit $E_*GL_2(\mathbf{C}) \to B_*GL_2(\mathbf{C})$ le fibré simplicial universel standard. On considère l'ensemble simplicial $E_*^{\text{gen}}GL_2(\mathbf{C})$ obtenu à partir de $E_*GL_2(\mathbf{C})$ en ne retenant que les simplexes (g_0, g_1, g_2, g_3) tels que $g_0(\infty), g_1(\infty), g_2(\infty), g_3(\infty)$ soient en position générale dans $\mathcal{P}^1(\mathbf{C})$. Soit alors $B_*^{\text{gen}}GL_2(\mathbf{C})$ l'image de $E_*^{\text{gen}}GL_2(\mathbf{C})$ dans $B_*GL_2(\mathbf{C})$.

Alors $B_*^{\text{gen}}GL_2(\mathbf{C}) \to B_*GL_2(\mathbf{C})$ induit un isomorphisme en homologie.

On en déduit que le morphisme θ provient du morphisme G-équivariant du complexe singulier de $E_*^{gen}(G)$ vers C_* donné par:

$$(g_0, g_1, g_2, g_3) \to (g_0(\infty), g_1(\infty), g_2(\infty), g_3(\infty)).$$

D'où une application σ_0 vérifiant le diagramme (*) telle σ_0 ne dépend que des premières colonnes définie par la composée

$$B_*^{gen}(G) \xrightarrow{\theta} (C_*)_G \to C_*^{sing}(G/K)$$

où $G = GL_2(\mathbf{C})$, $K = U_2(\mathbf{C})$ et où le morphisme $(C_*)_G \to C_*^{sing}(G/K)$ est induit par le lemme de comparaison des résolutions (car les deux complexes sont des résolutions acycliques de G-modules sur $\mathbf{Z}$).

Donc $\bar{\varphi}$ est cohomologue à $\tilde{\varphi} = \int_{\sigma_0[g_0^{-1}g_1|g_1^{-1}g_2|g_2^{-1}g_3]} w$ et $\tilde{\varphi}$ ne dépend que des points $g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty)$ de $\mathcal{P}^1(\mathbf{C})$.

Or on sait d'après $[D1]$ qu'il existe $k \in SL_2(\mathbf{C})$ tel que

$$(g_0(\infty), g_1(\infty), g_2(\infty), g_3(\infty)) = k(\infty, 0, 1, z)$$

avec $z = r_2(g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty))$.

Ce qui implique

$$\tilde{\varphi}(g_0, g_1, g_2, g_3) = F(r_2(g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty))).$$

D'après $[B2]$, à un scalaire multiplicatif près, $\mathcal{D}_2$ est déterminée par l'équation fonctionnelle du dilogarithme.

Donc il suffit de montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C} - \{0, 1\}$, F vérifie

$$F(z_1) - F(z_2) + F(z_2/z_1) + F((1 - z_2^{-1})/(1 - z_1^{-1})) - F((1 - z_2)/(1 - z_1)) = 0$$

Ceci équivaut à: $\forall g_0, \cdots, g_4 \in GL_2(\mathbf{C})$, de premières colonnes distinctes

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i F(r_2(g_0(\infty), \cdots, \hat{g}_i(\infty), \cdots, g_4(\infty))) = 0$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \tilde{\varphi}(g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_4) = 0$$

Ceci équivaut à montrer que

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \tilde{\tilde{\varphi}}(g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_4) = 0$$

avec $\tilde{\tilde{\varphi}}$ une cochaine quelconque cohomologue à $\tilde{\varphi}$ dans $H^3(GL_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})$.

On a un choix convenable de $\tilde{\tilde{\varphi}}$ donné par la proposition suivante:

5.2.3 Proposition: *On considère le cocycle donné en représentation homogène par*

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(g_0, \cdots, g_3) = \int_{\Delta_3} r^*(w)$$

où $r : \Delta_3 \to GL_2(\mathbf{C})/U(2)$ *est l'application définie par*

$$r(t_0, \cdots, t_3) = g_0^{-1}.\pi_{s_1}(g_0^{-1}g_1.\pi_{s_2/s_1}(g_1^{-1}g_2.\pi_{s_3/s_2}(g_2^{-1}g_3.e)))$$

avec $e = \{U(2)\} \in GL_2(\mathbf{C})/U(2)$, $s_i = t_i + t_{i+1} + \cdots + t_3$ *et* π_s *l'application de* $GL_2(\mathbf{C})/U(2)$ *dans lui-même définie pour tout* $s \in [0,1]$ *par* $\pi_s(x) = exp(s\ exp^{-1}(x))$.

Aors les classes de cohomologies de φ *défini en 4.2.1 et* $\tilde{\tilde{\varphi}}$ *coïncident dans* $H_c^3(G, \mathbf{C})$.

Démonstration

Soit $\bar{\varphi} = \int_{\Delta(g_0^{-1}g_1, g_1^{-1}g_2, g_2^{-1}g_3)} w$ le cocycle continu homogène associé à $\bar{v}^3(\bar{u}^3(\phi))$. En suivant $[D2]$ $pp241$, on montre que $\tilde{\tilde{\varphi}}$ est une cochaine continue cohomologue à $\bar{\varphi}$.

Ceci finira la démonstration puisqu'on sait que φ et $\bar{\varphi}$ sont cohomologues.

Il reste maintenant à prouver que

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \tilde{\tilde{\varphi}}(g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_4) = 0$$

Pour celà, on considère la fonction Ψ définie sur $GL_2(\mathbf{C})^5$ par

$$\Psi(g_0, \cdots, g_4) = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \tilde{\tilde{\varphi}}(g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_4)$$

L'application Ψ définit une cochaine continue de $C^4_{diff}(GL_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ car $\tilde{\tilde{\varphi}}$ est une cochaine continue.

De plus, l'isomorphisme de Van Est définit un morphisme de complexe u^4 entre $C^4_{diff}(GL_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ et $C^4(\mathcal{GL}_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ qui admet un inverse homologique. Donc il suffit de montrer que $u^4(\Psi) = 0$.

$$\begin{aligned} u^4(\Psi)(\dot{X}_1, \cdots, \dot{X}_4) &= \sum_{\sigma \in \Sigma_4} \epsilon(\sigma) \frac{dx^4}{dx_1 \cdots dx_4}_{|0,\cdots,0} \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \\ &\quad \tilde{\tilde{\varphi}}(1, expx_1X_1, .., exp(x_1X_1 \widehat{+ .. +} x_iX_i), .., exp(x_1X_1 + .. + x_4X_4)) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_4} \epsilon(\sigma) \frac{dx^4}{dx_1 \cdots dx_4}_{|0,..,0} \int_{\Delta_3} r_\sigma^*(w) \end{aligned}$$

avec $r_\sigma : \Delta_3 \to GL_2(\mathbf{C})/U(2)$ définie par:

$$r_\sigma(t) = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i r(1, expx_1X_{\sigma(1)}, .., exp(x_1X_{\sigma(1)} \widehat{+ .. +} x_iX_{\sigma(i)}), .., exp(x_1X_{\sigma(1)} + .. + x_4X_{\sigma(4)}))$$

Donc, au voisinage de 0, $r_\sigma(t) \cong 1 + s_2(x_2X_{\sigma(2)} + x_3X_{\sigma(3)})$.

D'où $u^4(\Psi)(\dot{X}_1, \cdots, \dot{X}_4) = \sum_{\sigma \in S_4} \epsilon(\sigma)(X_{\sigma(2)} + X_{\sigma(3)}) \int_{\Delta_3} r^*(w)$ avec $r(t) = s_2.e$

Or $\sum_{\sigma \in S_4} \epsilon(\sigma)(X_{\sigma(2)} + X_{\sigma(3)}) = \sum_{\sigma \in S_4} \epsilon(\sigma)X_{\sigma(2)} + \sum_{\tau = \sigma(23) \in S_4} \epsilon(\sigma)X_{\tau(2)} = 0$ car $\epsilon(\tau) = -\epsilon(\sigma)$.

En conclusion, on a:

$$\tilde{\varphi}(g_0, g_1, g_2, g_3) = \lambda \mathcal{D}_2(r_2(g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty))).$$

5.2.4 Remarque

Il est naturel que ni φ, ni $\bar{\varphi}$ ne soient égaux à un dilogarithme du birapport car ce sont des cochaines continues alors que $\mathcal{D}_2(r_2(g_0(\infty), g_1(\infty); g_2(\infty), g_3(\infty))$ n'est pas continu au voisinage de l'identité. Cependant, c'est une cochaine mesurable et localement bornée et on sait que, sur un groupe localement compact, la cohomologie continue coïncide avec la cohomologie des cochaines mesurables et localement bornées (voir $[Bl]$).

APPENDICE A

(A.1) $R_1 = d(-\Gamma' + t\Gamma'') + (-\Gamma' + t\Gamma'')^2 = -d'\Gamma' - d''\Gamma' + dt\Gamma'' + td\Gamma'' + \Gamma'^2 + t^2\Gamma''^2 - t\Gamma'\Gamma'' = dt\Gamma'' + (-d'\Gamma' + \Gamma'^2) + \Delta$

où Δ ne contient que des formes différentielles de degrés inférieurs ou égals à 1 et

$-d'\Gamma' + \Gamma'^2 = 0$. D'où $\int_\sigma K(R_1^n(\sigma)) = \int_\sigma \int_0^1 dt\Gamma''\Delta^{n-1} = 0$

(A.2) Soit X un ensemble simplicial. L'application de $H_n(X)$ dans $H_n(|X|)$ associe à $x_n \in X_n$ l'application $\epsilon : \Delta_n \to |X|$ définie par $\epsilon(u) = cl(x_n, u)$

Etant donnée $f \in \Pi_n(X)$, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Pi_n(X) & \xrightarrow{h} & H_n(X) \\ {\scriptstyle |\,|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |\,|} \\ \Pi_n(|X|) & \xrightarrow[h]{} & H_n(|X|) \end{array}$$

implique que la composée $\Pi_n(X) \xrightarrow{h} H_n(X) \to H_n(|X|)$ transforme f en ϵ avec la propriété $|f| = \epsilon$ d'où $h(f) = f_n(id_{(n)})$.

(A.3) on a $E = (g_{ji})$ un $GL(A)$-fibré repéré sur $GL(A_*)/GL(A)$ avec $g_{ji}(\sigma) = g_j g_i^{-1} \in GL(A)$ où $g_i = \sigma(i)$ et $\alpha : \tilde{E} \to \tilde{T}$ un isomorphisme de $GL(A_*)$-fibré repéré avec $E = \bar{\theta}^*(EGL(A))$.

Soient $\xi = (\varphi_{ji})$ un $GL(A)$-fibré plat virtuel sur S^n défini par $\xi = f^*(\theta^*(EGL(A))$ et $\nu : \xi \to \bar{\xi}^*$ un isomorphisme avec $\nu = \Sigma x_k \varphi_{ki}^* \varphi_{ki}$.

Or d'après 1.3.1, $K_n^{rel}(\mathbf{C}) = K_{\mathbf{C}}^{rel}(S^n) \cong K_{\mathbf{C}}^{rel}(\Delta[n])$ donc ξ peut être vu comme un $GL(A)$-fibré repéré sur $\Delta[n]$ défini par $\varphi_{ji}(\sigma) = \varphi_{ji}\ \forall \sigma \in \Delta[n]$.

Et on a bien $\nu_j \varphi_{ji} = {}^t\bar{\varphi}_{ij}^{-1} \nu_i$ donc $\nu : \xi \to \bar{\xi}^*$ est un isomorphisme des $GL(A_*)$-fibrés repérés associés. (Ici les x_k représentent les coordonnées barycentriques de σ).

En tant que $GL(A)$-fibré repéré $\xi = F^*(\bar{\theta}^*(EGL(A))) = F^*(E)$ où

$F : \Delta[n] \to GL(A_*)/GL(A)$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc}
\Delta_n & \xrightarrow{|F|} & |GL(A_*)/GL(A)| & \to & |(GL(A_*)/GL(A))^+| \\
{\scriptstyle c'_0}\downarrow & & & & \downarrow \sim \\
S^n & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}_{\mathcal{A}}
\end{array}$$

(on rappelle ici qu'on identifie Δ_n à $|\Delta[n]|$ par $u_n \to |(id_{(n)}, u_n)|$).

En comparant avec la construction de c dans 2.2, on a $F^+ = v^+$ donc $c = F_n(id_{(n)})$.

(A.4) Soient $j \neq k$ deux entiers.

$Trd\nu_j\nu_j^{-1} = Tr \sum\limits_i t_i\varphi_{ji}\varphi_{ji}^* = Tr \sum\limits_i t_i\varphi_{jk}\varphi_{ki}(\varphi_{jk}\varphi_{ki})^* = Tr \sum\limits_i t_i\varphi_{jk}\varphi_{ki}\varphi_{ki}^*\varphi_{jk}^*$

$= Tr\varphi_{jk}[\sum\limits_i t_i\varphi_{ki}\varphi_{ki}^*]\varphi_{jk}^* = Tr \sum\limits_i t_i\varphi_{ki}\varphi_{ki}^* = Trd\nu_k\nu_k^{-1}$

(A.5) Soit $M = g^*g - I$ et supposons que M est diagonalisable (ceci ne nuit pas à la généralité car les diagonalisables sont denses dans $GL(\mathbf{C})$) donc $M = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
Tr \int_0^1 M(tPDP^{-1} + PP^{-1})^{-1}dt &= Tr \int_0^1 M(P(tD+I)P^{-1})^{-1}dt \\
&= Tr \int_0^1 MP(tD+I)^{-1}P^{-1}dt \\
&= TrMP(\int_0^1 (tD+I)^{-1}dt)P^{-1}
\end{aligned}$$

$$=TrMP(\int_0^1 \begin{pmatrix} t\lambda_1+1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & t\lambda_n+1 \end{pmatrix}^{-1} dt)P^{-1}$$

$$=TrMP(\int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{1}{t\lambda_1+1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t\lambda_n+1} \end{pmatrix} dt)P^{-1}$$

$$=TrMP \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1}log(1+\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n}log(1+\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$=TrPD \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1}log(1+\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n}log(1+\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$=TrP^{-1}PD \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1}log(1+\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_n}log(1+\lambda_n) \end{pmatrix}$$

$$=Tr(\begin{pmatrix} log(1+\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & log(1+\lambda_n) \end{pmatrix}$$

$$=log(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i))$$
$$=log(detP(I+D)P^{-1})$$
$$=log(det(I+M))$$
$$=log(det(g^*g))$$

(A.6) On sait que l'isomorphisme canonique entre $H^*_{top}(U(N),\mathbf{C})$ et $H^*_{cont}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{C})$ transforme $H^{2n-1}_{top}(U(N),\mathbf{R}(n))$ en $i^{2n-1}H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{R}(n))$ et u_{2n-1} en $b'_n \in H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1))$.

L'identification $i^{2n-1}H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{R}(n))$ et $H^{2n-1}_{cont}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{R}(n-1))$ provient du fait que tout $z = i^{2n-1}(2i\pi)^n x \in i^{2n-1}\mathbf{R}(n)$ s'écrit $z = (-1)^n 2\pi(2i\pi)^{n-1}x$.

Donc l'isomorphisme $H^*_{top}(U(N),\mathbf{C}) \cong H^*_{cont}(GL_N(\mathbf{C}),\mathbf{C})$ transforme u_{2n-1} en

$\frac{1}{(-1)^n 2\pi} j_*(b'n)$ où $j : \mathbf{R}(n-1) \hookrightarrow \mathbf{C}$.

(A.7) On montre dans $[K2]$(pp 40) que la classe fondamentale de S^{2n-1} est définie par:

$$[S^{2n-1}] = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2i\pi)^n(2n-1)!} Tr(\alpha^{-1}d\alpha)^{2n-1} \in H^{2n-1}(S^{2n-1}).$$

Soit x_0 le générateur de $\Pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ et x le générateur de Bott de $\Pi_{2n-1}(U) \cong \mathbf{Z}$.

Le générateur x est atteint en $\Pi_{2n-1}(U(n))$ car $\Pi_{2n-1}(U(n)) \to \Pi_{2n-1}(U)$ est surjective et on a:

- u_{2n-1} est l'image de $[S^{2n-1}]$ par la fonction en cohomologie induite par la fibration
$$U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}.$$
- L'accouplement $\Pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \times H^{2n-1}(S^{2n-1}) \to \mathbf{Z}$ transforme $(x_0, [S^{2n-1}])$ en 1
- l'accouplement $\Pi_{2n-1}(U(n)) \times H^{2n-1}(U(n)) \to \mathbf{Z}$ transforme (x, u_{2n-1}) en 1.

Donc il suffit de connaitre $l \in \mathbf{Z}$ tel que $\Pi_{2n-1}(U(n)) \xrightarrow{\times l} \Pi_{2n-1}(S^{2n-1})$ pour déduire que

$$u_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2i\pi)^n(2n-1)!\ l} Tr(\alpha^{-1}d\alpha)^{2n-1} \in H^{2n-1}(U(n)).$$

Or, encore d'après $[K2]$(pp 41;85) $l = (n-1)!$. Donc $u_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2i\pi)^n(2n-1)!} Tr((d\alpha)\alpha^{-1})^{2n-1}$

(A.8) Soit $\varphi(g_0,\cdots,g_{2n-1}) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} Tr \int_{\Delta_{2n-1}} (\nu^{-1}d\nu)^{2n-1}$

avec $\nu = \sum_{i=0}^{2n-1} x_i\ g_i g_i^*$ où$(x_i)_{0\leq i\leq 2n-1} \in \Delta_{2n-1}$ et ϕ la classe non-homogène associée à φ par l'isomorphisme

$$\phi(g_1,\cdots,g_{2n-1}) = \varphi(1, g_1, g_1g_2, \cdots, g_1\cdots g_{2n-1}).$$

La classe $[u^{2n-1}(\phi)]$ correspondante à la classe $[\varphi]$ par l'isomorphisme de Van Est est donnée par:

$u^{2n-1}(\phi)(\dot{X}_1,..,\dot{X}_{2n-1}) = \sum_{s\in\Sigma_{2n-1}} \epsilon(s) \frac{d^{2n-1}}{dt_1..dt_{2n-1}} \phi(expt_1X_{s(1)},\cdots,expt_{2n-1}X_{s(2n-1)})_{|0,..,0}$

Etant au voisinage de 0, on peut considérer que $expt_iX_{s(i)} = 1 + t_iX_{s(i)}$,

donc $u^{2n-1}(\phi)(\dot{X}_1,\cdots,\dot{X}_{2n-1})$

$$=\sum_{s\in\Sigma_{2n-1}} \epsilon(s)\frac{d^{2n-1}}{dt_1\cdots dt_{2n-1}}\phi(1+t_1X_{s(1)},\cdots,1+t_{2n-1}X_{s(2n-1)})_{|0,\cdots,0}$$

$$=\sum_{s\in\Sigma_{2n-1}} \epsilon(s)\frac{d^{2n-1}}{dt_1\cdots dt_{2n-1}}\varphi(1,1+t_1X_{s(1)},\cdots,\prod_{i=1}^{2n+1}(1+t_iX_i))_{|0,\cdots,0}$$

$$=\sum_{s\in\Sigma_{2n-1}}\epsilon(s)\frac{d^{2n-1}}{dt_1..dt_{2n-1}}\left(\frac{(-1)^n(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!}Tr\int_{\Delta_{2n-1}}(d'\tilde{\nu}(t,s)\ \tilde{\nu}(t,s)^{-1})^{2n-1}\right)_{|0,..,0}$$

avec

$$\tilde{\nu}(t,s)=x_0+\sum_{i=1}^{2n-1}x_i\prod_{k=1}^{i}(1+t_kX_{s(k)})^*\prod_{k=1}^{i}(1+t_kX_{s(k)})$$
$$=1+\sum_{i=1}^{2n-1}x_i\sum_{k=1}^{i}t_k(X^*_{s(k)}+X_{s(k)}).$$

Au voisinage de $(t_1,\cdots,t_n)=(0,\cdots,0)$

$$d'\tilde{\nu}(t,s)\tilde{\nu}(t,s)^{-1}=[\sum_{i=1}^{2n-1}dx_i\sum_{k=1}^{i}t_k(X^*_{s(k)}+X_{s(k)})][1+\sum_{i=1}^{2n-1}x_i\sum_{k=1}^{i}t_k(X^*_{s(k)}+X_{s(k)})]^{-1}$$
$$=[\sum_{i=1}^{2n-1}dx_i\sum_{k=1}^{i}t_k(X^*_{s(k)}+X_{s(k)})][1-\sum_{i=1}^{2n-1}x_i\sum_{k=1}^{i}t_k(X^*_{s(k)}+X_{s(k)})])$$

D'où $(d'\tilde{\nu}(t,s)\tilde{\nu}(t,s)^{-1})^{2n+1}=\sum_{\tau\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(\tau)\prod_{i=1}^{2n-1}\sum_{k=1}^{i}t_k(X^*_{\tau s(k)}+X_{\tau s(k)})dx_1\cdots dx_{2n-1}$

Donc $u^{2n-1}(\phi)(\dot{X}_1,..,\dot{X}_{2n-1})=$

$$\delta_n\sum_{s\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(s)\frac{d^{2n-1}}{dt_1..dt_{2n-1}}V(\Delta_{2n-1})Tr\sum_{\tau\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(\tau)\prod_{i=1}^{2n-1}\sum_{k=1}^{i}t_k(X^*_{\tau s(k)}+X_{\tau s(k)})_{|0,..,0}$$

$$\delta_n\sum_{s\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(s)\frac{d^{2n-1}}{dt_1\cdots dt_{2n-1}}(Tr\sum_{\tau\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(\tau)\prod_{i=1}^{2n-1}\sum_{k=1}^{i}t_k(X^*_{\tau s(k)}+X_{\tau s(k)}))_{|0,..,0}$$

$$\delta_n\sum_{s\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(s)Tr\sum_{\tau\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(\tau)(X^*_{\tau s(1)}+X_{\tau s(1)})..(X^*_{\tau s(2n-1)}+X_{\tau s(2n-1)})$$

$$\delta_nTr\sum_{s\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(s)(X^*_{s(1)}+X_{s(1)})\cdots(X^*_{s(2n-1)}+X_{s(2n-1)})$$

où $V(\Delta_{2n-1})=\iint\cdots\int_{\Delta_{2n-1}}dx_1\cdots dx_{2n-1}=\frac{1}{(2n-1)!}$ et $\delta_n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!}$.

(A.9)

Soit $\bar{\Psi}\in Hom_{U(N)}(\bigwedge^{2n-1}\mathcal{U}(N),\mathbf{C})$ définie par:

$$\bar{\Psi}(Y_1,\cdots,Y_{2n-1})=u^{2n-1}(\phi)(iY_1,\cdots,iY_{2n-1}).$$

La forme w est l'image de $\bar{\Psi}$ par l'isomorphisme:

$Hom_{U(N)}(\bigwedge^{2n-1}\mathcal{U}(N),\mathbf{C})=Hom_K(\bigwedge^{2n-1}(\mathcal{G}/\mathcal{K}),\mathbf{C})\xrightarrow{\bar{\Gamma}}Hom_K(\bigwedge^{2n-1}T_0(G/K),\mathbf{C})$

$\xrightarrow{\cong}\Omega^{2n-1}(G/K)^G=\Omega^{2n-1}(U(N))^{U(N)\times U(N)}\xrightarrow{\cong}\Omega^{2n-1}(U(N))$

où $G=U(N)\times U(N),\ K=U(N)$ et où $\mathcal{G}$ resp. $\mathcal{K}$ désigne les algèbres de Lie associées aux groupes G et K et où l'isomorphisme $\bar{\Gamma}$ est induit par $\Gamma=d\pi(1):\mathcal{G}\to T_0(G/K)$ avec $\pi:G\to G/K$ la projection canonique.

L'isomorphisme entre $Hom_K(\bigwedge^{2n-1}T_0U(N),\mathbf{C})$ et $\Omega^{2n-1}(U(N))^{U(N)\times U(N)}$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{2n-1}(U(N))^{U(N)\times U(N)} & \longleftrightarrow & Hom_K(\bigwedge^{2n-1}T_0U(N),\mathbf{C}) \\ w & \to & w_0 \end{array}$$

Sa réciproque associe à f la forme w telle que $w_m=g.(f\circ\bigwedge^{2n-1}\mu_{g^{-1},m})=f\circ\bigwedge^{2n-1}\mu_{g^{-1},m}$ (car l'action de G est triviale sur $\mathbf{C}$) avec $m=\dot{g}$ et

$\mu_{g^{-1},m}=d(g^{-1}.)(m):T_mU(N)\to T_0U(N).$

et l'isomorphisme entre $\Omega^{2n-1}(U(N))^{U(N)\times U(N)}$ et $\Omega^{2n-1}(U(N))$ est donné par

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{2n-1}(U(N)) & \longleftrightarrow & \Omega^{2n-1}(U(N))^{U(N)\times U(N)} \\ w & \to & \int_{U(N)\times U(N)}g.wdg \\ w & \longleftarrow & w \end{array}$$

Donc

$$w_m=f\circ\bigwedge^{2n-1}\mu_{g^{-1},m} \text{ avec } f\in Hom_K(\bigwedge^{2n-1}T_0U(N),\mathbf{C}) \text{ définie par}$$

$$\begin{aligned} f(\xi_1,\cdots,\xi_{2n-1}) &=\bar{\Psi}(\bar{\Gamma}^{-1}(\xi_1),\cdots,\bar{\Gamma}^{-1}(\xi_{2n-1})) \\ &=u^{2n-1}(\phi)(i\bar{\Gamma}^{-1}(\xi_1),\cdots,i\bar{\Gamma}^{-1}(\xi_{2n-1})) \end{aligned}$$

Donc

$f(\xi_1,\cdots,\xi_{2n-1})=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!((2n-1)!)^2}Tr\sum_{s\in\sigma_{2n-1}}\epsilon(s)(\delta^*_{s(1)}+\delta_{s(1)})\cdots(\delta^*_{s(2n-1)}+\delta_{s(2n-1)})$

avec $expit\bar{\Gamma}^{-1}(\xi_k)=1+t\delta_k$ quand t est au voisinage de 0.

D'où

$$\begin{aligned} w_m(\alpha_1, .., \alpha_{2n-1}) =& f(\mu_{g^{-1},m}\alpha_1, \cdots, \mu_{g^{-1},m}\alpha_{2n-1}) \\ =& \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!((2n-1)!)^2} Tr \sum_{s\in\sigma_{2n-1}} \epsilon(s)(\delta^*_{s(1)} + \delta_{s(1)})..(\delta^*_{s(2n-1)} + \delta_{s(2n-1)}) \end{aligned}$$

avec $expit\bar{\Gamma}^{-1}(\mu_{g^{-1},m}\alpha_k) = 1 + t\delta_k$ d'où $\delta_k = i\bar{\Gamma}^{-1}(\mu_{g^{-1},m}\alpha_k)$.

Or $\bar{\Gamma}^{-1}(\mu_{g^{-1},m}\alpha_k) \in \mathcal{U}(N) \Rightarrow \delta_k = iX$ avec $X \in \mathcal{U}(N) \Rightarrow X^* = -X \Rightarrow \delta^*_k = \delta_k$

Donc $w_m(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n-1}) = \frac{2^{2n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} Tr \sum_{s\in\sigma_{2n-1}} \epsilon(s)\delta_{s(1)} \cdots \delta_{s(2n-1)}$

D'autre part, soient $d\alpha = (dx_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ base de $\Omega^1(GL_N(\mathbf{C}))$ et $\tau : GL_N(\mathbf{C}) \to GL_N(\mathbf{C})$ qui transforme M en M^{-1}.

On pose $\alpha^{-1}d\alpha \equiv \tau d\alpha \in \mathcal{M}_n(\Omega^1(GL_N(\mathbf{C})))$.

On a alors $u_{2n-1} = \lambda_n Tr(\alpha^{-1}d\alpha)^{2n-1}|_{U(N)}$ avec $\lambda_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2i\pi)^n(2n-1)!}$ (A.7)

Les deux formes w et u_{2n-1} étant invariantes, il suffit de les comparer au point $m = 0$.

En identifiant α_k à $\bar{\Gamma}^{-1}(\alpha_k) = (x_{ij}) \in \mathcal{U}(n)$ et comme $\alpha = 1$ en 0, il s'agit donc de comparer

$$w_0(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n-1}) = \frac{(2i)^{2n-1}(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2n-2)!((2n-1)!)^2} Tr \sum_{s\in\sigma_{2n-1}} \epsilon(s)\alpha_{s(1)} \cdots \alpha_{s(2n-1)}$$

et

$$u_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2i\pi)^n(2n-1)!} Tr(d\alpha)^{2n-1}.$$

Pour $n = 2$

$w_0(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\frac{i}{3} \sum_{s\in\sigma_3} \epsilon(s)[x_{s(1)}(y_{s(2)}z_{s(3)} - y_{s(3)}z_{s(2)}) - y_{s(1)}(z_{s(2)}t_{s(3)} - z_{s(3)}t_{s(2)})]$

avec

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} x_k & z_k \\ y_k & t_k \end{pmatrix} \in U(2)$$

d'où $w_0 = -\frac{i}{3}(dxdydz - dydzdt)$.

D'autre part $Tr(d\alpha)^3 = Tr \begin{pmatrix} dx & dz \\ dy & dt \end{pmatrix}^3 = -3(dxdydz - dydzdt)$

d'où $w = \frac{i}{9\lambda_2} u_3 = \frac{8i\pi^2}{3} u_3$.

Ce calcul se généralise pour n quelconque et on a:

$$w = \frac{2^{3n-1} i^{n-1} \pi^n (-1)^n (n-1)!}{(2n-2)!(2n-1)!} u_{2n-1}.$$

DEUXIEME PARTIE

LE REGULATEUR P-ADIQUE

0. INTRODUCTION

On va commencer par rappeler quelques définitions et résultats concernant la K-théorie relative de Goodwillie d'un anneau A par rapport à un idéal bilatère I, notée $K_*(A, I)$.

On démontre ensuite que cette K-théorie relative de Goodwillie se stabilise et qu'elle est isomorphe à la K-théorie relative de A, notée $K_*^{rel}(A)$.

Dans un troisième paragraphe, on s'intéresse au cas particulier où $A = \mathbf{Z}_p$ et $I = p\mathbf{Z}_p$ pour définir un régulateur p-adique

$$R_p : K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \to p\mathbf{Z}_p$$

dont on établit la non trivialité.

Enfin, on établit le lien entre ce régulateur R_p et la trace cyclotomique définie par Madsen [M]

$$Trc : K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p) \to TC(\mathbf{Z}_p)$$

où TC désigne l'homologie cyclique topologique définie dans [BHM].

Pour ne pas allourdir les démonstrations, certains détails de calculs sont traités en appendice, on y réfère par le symbole (B.).

1. LA K-THEORIE RELATIVE DE GOODWILLIE: MODELE DE VOLODIN

1.1 La K-théorie relative de Goodwillie

Soit A un anneau et soit I un idéal bilatère de A.

On désigne par $\overline{GL}(A/I)$ l'image de l'application $GL(A) \to GL(A/I)$ induite par la projection canonique de A sur A/I et par $\mathcal{K}(\mathcal{A},\mathcal{I})$ la fibre homotopique de l'application

$BGL(A)^+ \to B\overline{GL}(A/I)^+$.

On définit la K-théorie relative de Goodwillie par $K_n(A,I) := \Pi_n(\mathcal{K}(\mathcal{A},\mathcal{I}))$. On a alors une suite exacte longue en homotopie

$$\cdots \to K_n(A,I) \to K_n(A) \to K_n(A/I) \to \cdots.$$

Cette K-théorie relative admet un modèle de Volodin, en effet, soit

$$T_n^\gamma(A,I) = \{1 + (a_{ij}) \in GL_n(A)/a_{ij} \in I \text{ si } i \not<^\gamma j\}$$

où γ est un ordre partiel. L'inclusion $T_n^\gamma(A,I) \subset GL_n(A)$ induit une cofibration

$BT^\gamma(A,I) \hookrightarrow BGL(A)$ et on pose par définition

$$X(A,I) := \bigcup_\gamma BT^\gamma(A,I) \subset BGL(A)$$

On a alors le résultat suivant $[Lo1]$:

1.1.1 Proposition: *Il existe une équivalence d'homotopie naturelle* $X(A,I)^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}(\mathcal{A},\mathcal{I})$.

1.2 Théorèmes de stabilité

Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de stabilité pour la K-théorie relative de Goodwillie. Pour cela, on va utiliser un théorème de stabilité établi par Suslin [S1] pour la K-théorie de Quillen d'un anneau A: $K_{i,n}^Q(A) := \Pi_i(BGL_n(A)^+)$.

Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A^n$. On dit que a est unimodulaire ssi $\sum_i Aa_i = A$.

1.2.1 Définition: (voir [V])

On appelle rang stable d'un anneau A et on note $s.r.A$ le plus petit entier r vérifiant:

$\forall n > r$ et $\forall a = (a_1, \cdots, a_n) \in A^n$, $\exists (b_1, \cdots, b_{n-1})$ tel que

$(a_1 + b_1a_2, \cdots, a_{n-1} + b_{n-1}a_n)$ est unimodulaire.

Voici quelques exemples de calcul du rang stable d'un anneau

1) Si A est semi-local alors $s.r.A = 1$.

2) Si A est un anneau de Dedekind alors $s.r.A = 2$.

3) Si A est un anneau de coordonnées d'une variété algébrique de dimension d, alors $s.r.A = d+1$.

4) Si I est un idéal de A alors $s.r.A = s.r.(A/I)$.

1.2.2 Théorème [S1]: *Soit A un anneau de rang stable r.*

L'homomorphisme canonique $K^Q_{i,n}(A) \to K^Q_{i,n+1}(A)$ est

$$\text{surjectif pour } n \geq max(2i, r+i-1)$$

$$\text{et bijectif pour } n \geq max(2i+1, r+i)$$

.

1.2.3 Corollaire: *Soient $X_n(A,I) = \bigcup_\gamma BT^\gamma_n(A,I)$ et $K_{i,n}(A,I) = \Pi_i(X_n(A,I))$.*

L'homomorphisme canonique $K_{i,n}(A,I) \to K_{i,n+1}(A,I)$ est

$$\text{surjectif pour } n \geq max(2i+2, s.r.A+i)$$

$$\text{et bijectif pour } n \geq max(2i+3, s.r.A+i+1).$$

Démonstration

La fibration homotopique

$$X_n(A,I)^+ \to BGL_n(A)^+ \to B\overline{G}L_n(A/I)^+$$

induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^Q_{i+1,n}(A) & \to & K^Q_{i+1,n}(A/I) & \to & K_{i,n}(A,I) & \to & K^Q_{i,n}(A) & \to & K^Q_{i,n}(A/I) \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
K^Q_{i+1,n+1}(A) & \to & K^Q_{i+1,n+1}(A/I) & \to & K_{i,n+1}(A,I) & \to & K^Q_{i,n+1}(A) & \to & K^Q_{i,n+1}(A/I)
\end{array}$$

D'après le lemme des cinq et le théorème 1.2.2, l'application $K_{i,n}(A,I) \to K_{i,n+1}(A,I)$ est bijective pour $n \geq max(2i+3, s.r.A+i+1)$.

De plus, l'application $K_{i,n}(A,I) \to K_{i,n+1}(A,I)$ est surjective si les applications f_2 et f_4 sont surjectives et si f_5 est injective (voir B.1).

Donc il suffit que n vérifie les trois hypothèses suivantes:

$n \geq max(2(i+1), r+i)$

$n \geq max(2i, r+i-1)$

$n \geq max(2i+1, r+i)$

D'où le résultat.

2. RELATION ENTRE LA K-THEORIE RELATIVE DE KAROUBI ET CELLE DE GOODWILLIE

Dans ce paragraphe, on va établir les conditions sous lesquelles on a un isomorphisme entre $K_*^{rel}(A)$ et $K_*(A, I)$ où A est un anneau et I un idéal bilatère de A. .

2.1 Existence d'un isomorphisme entre $K_n(A, I)$ et $K_n^{rel}(A)$

Pour définir cet isomorphisme $K_n(A, I) \cong K_n^{rel}(A)$, on va utiliser un résultat de A.Calvo [Cv] pour la K-théorie topologique des anneaux de Banach ultramétriques:

2.1.1 Proposition: *Soient A un anneau de Banach ultramétrique (i.e muni d'une quasi-norme vérifiant $\forall(x, y) \in A^2$, $\|x+y\| \leq Sup(\|x\|, \|y\|)$) et I un idéal bilatère fermé topologiquement nilpotent (i.e $\lim_{k\to+\infty} Sup\{\|x\|, x \in I^k\} = 0$).*

Alors pour tout n, l'application $K_n^{top}(A) \to K_n^{top}(A/I)$ induite par la surjection canonique est un isomorphisme.

2.1.2 Théorème: *Soient A un anneau de Banach ultramétrique et I un idéal bilatère fermé topologiquement nilpotent tels que A/I est noethérien régulier.*

Alors il existe un isomorphisme

$$K_n(A, I) \to K_n^{rel}(A)$$

où $K_n(A, I) = \Pi_n(\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{I}))$ et $K_n^{rel}(A) = \Pi_n(\mathcal{F}_{\mathcal{A}})$avec $\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$) est la fibre homotopique de $BGL(A)^+ \to B\overline{GL}(A/I)^+$ (resp. $BGL(A)^+ \to BGL(A)^{top}$).

Démonstration

Soit $\mathcal{H}$ la fibre homotopique de $BGL(A)^+ \to BGL(A/I)^{top}$

le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}_{\mathcal{A}} & \to & BGL(A)^+ & \to & BGL(A)^{top} \\
 & & \| & & \downarrow \\
\mathcal{H} & \to & BGL(A)^+ & \to & BGL(A/I)^{top}
\end{array}$$

permet de définir un morphisme $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{H}$ qui d'après la proposition 2.1.1 induit un isomorphisme en homotopie.

D'autre part, soit $\mathcal{H}'$ la fibre homotopique de $BGL(A)^+ \to BGL(A/I)^+$. On a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{K}(\mathcal{A},\mathcal{I}) & \to & BGL(A)^+ & \to & B\overline{GL}(A/I)^+ \\
 & & \| & & \downarrow \\
\mathcal{H}' & \to & BGL(A)^+ & \to & BGL(A/I)^+
\end{array}$$

Or $\Pi_i(B\overline{GL}(A/I)^+) = \Pi_i(BGL(A/I)^+)$ si $i \geq 2$ (B.2). D'où un morphisme $\mathcal{K}(\mathcal{A},\mathcal{I}) \to \mathcal{H}'$ qui induit un isomorphisme en homotopie pour $i \geq 2$.

De plus, on sait que si R est un anneau noethérien régulier alors on a un isomorphisme entre les K-théories algébrique et topologique de R. Donc $BGL(A/I)^+$ a le type d'homotopie de $BGL(A/I)^{top}$ d'où une équivalence d'homotopie $\mathcal{H}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}$.

La composition de tous ces isomorphismes donne l'isomorphisme cherché

$$K_n(A,I) \to K_n^{rel}(A).$$

2.2 Description explicite de l'isomorphisme $K_n(A,I) \to K_n^{rel}(A)$

Pour définir explicitement cet isomorphisme entre $K_n(A,I)$ et $K_n^{rel}(A)$, on a besoin d'un équivalent simplicial pour la K-théorie relative. On a alors la remarque suivante (voir [K3]):

2.2.1 Remarque

Comme dans le cas d'une algèbre de Fréchet (première partie), la définition de la K-théorie relative pour les anneaux ultramétriques admet une interprétation simpliciale.

En effet, soit m un entier positif fixé et soit $A_n = B_n/I_n$ avec B_n l'anneau des séries formelles à $n+1$ variables:

$$P(x_0, \cdots, x_n) = \sum_{i_0 \cdots i_n} a_{i_0 \cdots i_n} x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$$

à coefficients dans A telles que $(i_0 \cdots i_n)^m \parallel a_{i_0 \cdots i_n} \parallel \to 0$ et I_n est l'idéal formé des séries P telles que:

$$P(x_0, \cdots, x_n) = 0 \text{ si } x_0 + \cdots + x_n = 1.$$

alors les groupes d'homotopies de la réalisation géométrique de $GL(A_*)$ sont

indépendants de m et coïncident avec les groupes d'homotopies de $BGl(A)^{top}$.

On a alors le résultat suivant:

2.2.2 Proposition: *Soient A un anneau de Banach ultramétrique et I un idéal bilatère fermé topologiquement nilpotent tels que A/I soit noethérien régulier.*

Alors l'isomorphisme entre $K_n(A,I)$ et $K_n^{rel}(A)$ est induit par l'application simpliciale

$\varphi : X(A, I) \to GL(A_*)/GL(A)$ *définie pour tout* $(g_1, \cdots, g_r) \in T_r^\gamma(A, I) = BT_r^\gamma(A, I)$ *par*

$$\varphi(g_1, \cdots, g_r) = [\tilde{\sigma} = \sum_{i=0}^{r-1} g_{i+1} \cdots g_r x_i + x_r].$$

Démonstration

On considère le diagramme suivant qui est une juxtaposition de diagrammes commutatifs:

$$
\begin{array}{ccccc}
X(A,I) & \hookrightarrow & BGL(A) & \rightarrow & B\overline{G}L(A/I) \\
{\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\
\mathcal{K}(\mathcal{A},\mathcal{I}) & \rightarrow & BGL(A)^+ & \rightarrow & B\overline{GL}(A/I)^+ \\
{\scriptstyle \alpha_2}\downarrow & & \| & & \downarrow \\
\mathcal{H}' & \rightarrow & BGL(A)^+ & \rightarrow & BGL(A/I)^+ \\
{\scriptstyle \alpha_3}\downarrow & & \| & & \downarrow \\
\mathcal{H} & \xrightarrow{\gamma} & BGL(A)^+ & \rightarrow & BGL(A/I)^{top} \\
{\scriptstyle \beta_2}\uparrow & & \| & & \uparrow \\
\mathcal{F}_{\mathcal{A}} & \rightarrow & BGL(A)^+ & \rightarrow & BGL(A)^{top} \\
{\scriptstyle \beta_1}\uparrow & & \| & & \uparrow \\
(GL(A_*)/GL(A))^+ & \xrightarrow[\theta^+]{} & BGL(A)^+ & \rightarrow & BGL(A_*)
\end{array}
$$

L'application θ est définie par $\theta(\sigma) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i = \tilde{\sigma}(i-1)\tilde{\sigma}(i)^{-1}$ où $\sigma = [\tilde{\sigma}] \in GL(A_n)/GL(A)$.

D'après ce grand diagramme, l'application φ qui induit l'isomorphisme $K_n(A,I) \cong K_n^{rel}(A)$ doit vérifier le diagramme commutatif suivant:

$$
\begin{array}{ccc}
X(A,I) & \hookrightarrow & BGL(A) \\
{\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \| \\
GL(A_*)/GL(A) & \xrightarrow[\theta]{} & BGL(A)
\end{array}
$$

On vérifie facilement que l'application φ définie ci-dessus répond au problème. En effet,

$$\forall i \ g_i = \begin{pmatrix} 1+I & & A \\ 0 & \ddots & \\ & & 1+I \end{pmatrix} \Rightarrow det g_i \in 1+I \Rightarrow g_i \in GL(A) \Rightarrow \tilde{\sigma} \in GL(A_*).$$

Donc φ est bien définie.

D'autre part, on a bien $\theta \circ \varphi(g_1, \cdots, g_r) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ avec

$\alpha_i = \tilde{\sigma}(i-1)\tilde{\sigma}(i)^{-1} = g_i \cdots g_r (g_{i+1} \cdots g_r)^{-1} = g_i \ \forall 1 \leq i \leq r-1$ et $\alpha_r = g_r 1^{-1} = g_r$.

Il reste donc à montrer que $\beta_2\beta_1 i\varphi = \alpha_3\alpha_2\alpha_1$.

Or $\gamma\beta_2\beta_1 i\varphi = \theta^+ i\varphi = i\theta\varphi = ij = \gamma\alpha_3\alpha_2\alpha_1$ et γ est injective.

3. CONSTRUCTION ET CALCUL DU REGULATEUR p-ADIQUE.

Dans tout ce paragraphe, on suppose $A = \mathbf{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques et $I = p\mathbf{Z}_p$.

3.1 Construction du régulateur p-adique.

La construction de ce régulateur p-adique utilise le caractère de Chern relatif construit par M.Karoubi (voir $[K3]$):

3.1.1 Théorème: *Soit A' une $\mathbf{Q}$-algèbre ultramétrique vérifiant: il existe un entier s et une constante C_s tels que $\| 1/k \| \leq C_s k^s$ $\forall k \in \mathbf{N}^*$.*

Alors il existe des homomorphismes

$$ch_n^{rel} : K_n^{rel}(A') \to F_n A' = \underset{r<0}{\oplus} HC_{n-1+2r}^{top}(A') \oplus C_{n-1}^{\lambda\ top} A' / b(C_n^{\lambda\ top} A')$$

qui rendent commutatifs les diagrammes:

$$\begin{array}{ccccc} K_{n+1}(A') & \to & K_{n+1}^{top}(A') & \to & K_n^{rel}(A') \\ {\scriptstyle ch}\downarrow & & {\scriptstyle ch^{top}}\downarrow & & {\scriptstyle ch^{rel}}\downarrow \\ \underset{r>0}{\oplus} HC_{n-1+2r}^{top}(A') & \to & \underset{r\in\mathbf{Z}}{\oplus} HC_{n-1+2r}^{top}(A') & \to & F_n A' \end{array}$$

De plus, en considérant la dernière composante du morphisme ch_n^{rel}, on a aussi un diagramme commutatif:

$$
\begin{array}{ccccc}
K_n^{rel}(A') & \rightarrow & K_n(A') & & \\
\downarrow & & & \overset{D_n^{top}}{\searrow} & \\
C_{n-1}^{\lambda\ top}A'/b(C_n^{\lambda\ top}A') & \xrightarrow{B} & C_n^{top}A'/b(C_{n+1}^{top}A') & \leftarrow & H_n^{top}(A',A')
\end{array}
$$

où B est l'opérateur de Connes et où D_n^{top} est l'homomorphisme de Dennis composé avec l'homomorphisme canonique $H_n(A',A') \rightarrow H_n^{top}(A',A')$.

Démonstration

Soit A un anneau ultramétrique et A_* l'anneau simplicial associé à A.

Ce théorème reprenant le même raisonnement que celui de la première partie (2) à quelques différences près:

- Pour définir $C_n^{top}(A)$, on remplace le produit tensoriel complété projectif dans le cas des algèbres de Banach, par des produits tensoriels complétés analogues: par exemple $C_2^{top}(A)$ est le séparé complété de $A \underset{\mathbf{Q}}{\hat{\otimes}} A$ pour la semi-norme $p(z) = \underset{E}{Inf}\underset{i}{Sup} \| x_i \| \times \| y_i \|$ pour toutes les écritures de E élément de z de $A \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} A$ sous la forme $\underset{i}{\Sigma}\, x_i \otimes y_i$ (c.f [C]).

- L'intégration sur les simplexes qui permet de passer de la cohomologie de Rham à la cohomologie simpliciale fait apparaitre des dénominateurs d'où la nécessité de la condition au début de ce théorème.

Ce théorème nous permet de définir $\forall n \geq 1$ une application $\tilde{R}_p$ par la composée

$$K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \xrightarrow{\varphi} K_{2n+1}^{rel}(\mathbf{Z}_p) \xrightarrow{j_*} K_{2n+1}^{rel}(\mathbf{Q}_p) \xrightarrow{p_n ch_{2n+1}^{rel}} C_{2n}^{\lambda\ top}\mathbf{Q}_p / bC_{2n+1}^{\lambda\ top}\mathbf{Q}_p$$

avec φ l'application définie dans la proposition 2.3 , p_n la n-ième projection et j_* l'application induite par l'inclusion $\mathbf{Z}_p \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbf{Q}_p$.

3.1.2 Définition-Proposition: *L'image de $\tilde{R}_p$ définie ci-dessus est contenue dans le sous-groupe $HC_{2n}^{top}(\mathbf{Q}_p)$ de $C_{2n}^{\lambda\ top}\mathbf{Q}_p/bC_{2n+1}^{\lambda\ top}\mathbf{Q}_p$.*

On définit alors le régulateur p-adique

$$R_p : K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \xrightarrow{\tilde{R}_p} HC_{2n}^{top}(\mathbf{Q}_p) \xrightarrow{S^{top}} HC_0^{top}(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$$

où l'application S^{top} est l'équivalent topologique de l'opérateur de périodicité de Connes S définie en première partie (voir 3.1.1).

Démonstration

On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_{2n}^{\lambda\ top}\mathbf{Q}_p/bC_{2n+1}^{\lambda\ top}\mathbf{Q}_p & \xrightarrow{B} & C_{2n+1}^{top}\mathbf{Q}_p/bC_{2n+2}^{top}\mathbf{Q}_p \\ b\downarrow & & b\downarrow \\ C_{2n-1}^{\lambda top}\mathbf{Q}_p & \xrightarrow{B_1} & C_{2n}^{top}\mathbf{Q}_p \end{array}$$

Soit $x \in K_{2n+1}^{rel}(\mathbf{Q}_p)$. On sait d'après le théorème 3.1.1 (dernier diagramme) que $Bp_nch_{2n+1}^{rel}(x) \in H_{2n+1}^{top}(A, A)$ d'où $bBp_nch_{2n+1}^{rel}(x) = 0$. D'où $B_1bp_nch_{2n+1}^{rel}(x) = 0$.
Or, d'après [K2] (2.14), B_1 est injective donc $bp_nch_{2n+1}^{rel}(x) = 0$.

Le résultat suivant nous permet d'expliciter le régulateur p-adique R_p:

3.1.3 Proposition: *Pour tout $[f] \in K_{2n+1}(A, I)$, le régulateur R_p est défini par:*

$$R_p([f]) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{2n)!(2n+1)!} Tr \int_{\Delta_{2n+1}} (\nu^{-1}d\nu)^{2n+1}$$

où $\nu(x_0, \cdots, x_{2n+1}) = \sum_{i=0}^{2n} x_i g_{i+1} \cdots g_{2n+1} + x_{2n+1}$ avec $(g_1, \cdots, g_{2n+1}) = f_{2n+1}(id_{2n+1}) \in H_{2n+1}(X(A, I))$.

Démonstration

D'après [C-K], la définition du caractère de Chern peut être vue sans les considérations géométriques. Cette remarque nous permet d'affirmer que la classe de cohomologie de $p_n ch_{2n+1}^{rel} \in HC_{2n}^{top}(\mathbf{Q}_p)$ peut aussi être définie à l'aide d'une intégrale:

$$K_{2n+1}^{rel}(\mathbf{Q}_p) \xrightarrow{h} H_{2n+1}(GL(\mathbf{Z}_p^*)/GL(\mathbf{Z}_p)) \xrightarrow{\phi} HC_{2n}^{top}(\mathbf{Q}_p)$$

où h désigne l'homomorphisme de Hurewicz et ϕ l'application définie en première partie (2.1).

Ces considérations nous permettent de faire un calcul analogue à celui de la première partie (3.1.4):

Soit donc $[f] \in K_{2n+1}(A,I) = \Pi_{2n+1}(X(A,I)^+) \Rightarrow f$ est une application simpliciale $f : \Delta[2n+1] \to X(A,I)^+$ avec $\Delta[2n+1]$ l'ensemble simplicial où les p-simplexes sont les applications croissantes de $(p) = \{1, \cdots, p\}$ vers $(2n+1)$.

$$R_p([f]) = S\phi h\varphi([f]) = S\phi\varphi h([f]) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{(2n)!(2n+1)!} Tr \int_\sigma \Gamma^{2n+1}(\sigma)$$

avec

$\sigma = [\tilde{\sigma} = \sum_{i=0}^{2n} g_{i+1} \cdots g_{2n+1} x_i + x_{2n+1}]$ où $(g_1, \cdots, g_{2n+1}) = h([f]) = f_{2n+1}(id_{2n+1})$

et $\Gamma(\sigma) = \sum_{i=0}^{2n+1} x_i \alpha_i(\sigma)^{-1} d\alpha_i(\sigma)$ où $\alpha_i(\sigma) = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}(i)^{-1}$.

Donc

$$\begin{aligned} R_p([f]) &= \frac{(-1)^{n+1}n!}{(2n)!(2n+1)!} Tr \int_{\varphi f_{2n+1}(id_{2n+1})} [\sum_{i=0}^{2n+1} x_i \alpha_i(\varphi f_{2n+1}(id_{2n+1}))^{-1} d\alpha_i(\varphi f_{2n+1}(id_{2n+1}))]^{2n+1} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}n!}{(2n)!(2n+1)!} Tr \int_{id_{2n+1}} [\sum_{i=0}^{2n+1} x_i \nu_i(id_{2n+1})^{-1} d\nu_i(id_{2n+1})]^{2n+1} \end{aligned}$$

où $\nu_i = \alpha_i \varphi f$ (on a bien $\nu_i(id_{2n+1}) = \alpha_i(\sigma) = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}(i)^{-1}$).

Or $Tr\nu_i^{-1} d\nu_i$ est invariant. En effet,

$$\begin{aligned} Tr\nu_i^{-1} d\nu_i &= Tr(g_{i+1} \cdots g_{2n+1})(\sum_{i=0}^{2n+1} g_{i+1} \cdots g_{2n+1} x_i + x_{2n+1})^{-1} \\ &\quad d(\sum_{i=0}^{2n+1} g_{i+1} \cdots g_{2n+1} x_i + x_{2n+1})(g_{i+1} \cdots g_{2n+1})^{-1} \\ &= Tr(g_{i+1} \cdots g_{2n+1})\nu^{-1} d\nu (g_{i+1} \cdots g_{2n+1})^{-1} \\ &= Tr\nu^{-1} d\nu \end{aligned}$$

où $\nu = \sum_{i=0}^{2n+1} g_{i+1} \cdots g_{2n+1} x_i + x_{2n+1}$.

Donc

$$\begin{aligned} R_p([f]) =& \frac{(-1)^{n+1} n!}{(2n)!(2n+1)!} Tr \int_{id_{2n+1}} (\nu(id_{2n+1})^{-1} d\nu(id_{2n+1}))^{2n+1} \\ =& \frac{(-1)^{n+1} n!}{(2n)!(2n+1)!} Tr \int_{\Delta_{2n+1}} (\nu^{-1} d\nu)^{2n+1} \end{aligned}$$

car id_{2n+1} induit un isomorphisme entre la réalisation géométrique de $\Delta_{[2n+1]}$ et Δ_{2n+1}.

3.1.4 Proposition: *Pour tout nombre premier $p > 4n+3$, l'image de l'application $R_p : K_{2n+1}(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \to \mathbf{Q}_p$ est contenue dans le sous-groupe $p\mathbf{Z}_p$ de $\mathbf{Q}_p$.*

La démonstration de cette proposition nécessite un lemme technique qu'on démontre en appendice (voir B.3).

3.1.5 Lemme: *Soit $\epsilon = \begin{pmatrix} p & & * \\ & \ddots & \\ p & & p \end{pmatrix} \in GL_r(A)$. Alors le produit de $kr+1$ matrices de cette forme $\epsilon_1 \cdots \epsilon_{kr+1} = p^k \begin{pmatrix} p & & * \\ & \ddots & \\ p & & p \end{pmatrix}$.*

Démonstration de la proposition 3.1.4

Soient $A = \mathbf{Z}_p$ et $I = p\mathbf{Z}_p$. D'après le corollaire 1.2.3, $K_{2n+1}(A, I)$ se stabilise à partir de $r \geq 4n+4$.

Soit $\nu = \sum_{i=0}^{2n+1} x_i g_i$ où $g_i \in X_{4n+4}(A, I)$ et où $(x_i)_{0 \leq i \leq 2n+1} \in \Delta_{2n+1}$.

donc $\nu = 1 + x_0(g_0 - 1) + \cdots + x_{2n}(g_{2n} - 1) = 1 + x_0\epsilon_0 + \cdots + x_{2n}\epsilon_{2n} = 1 - h$.

$$\begin{aligned} (\nu^{-1} d\nu)^{2n+1} =& (-1)^n \nu^{-1} (d\nu d\nu^{-1})^n d\nu \\ =& (-1)^n \sum_{i=0}^{+\infty} h^i (-dh \sum_{j=0}^{+\infty} dh^j)^n - dh \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= - \sum_{i=0}^{+\infty} h^i (dh \sum_{j=1}^{+\infty} j h^{j-1} dh)^n dh \\
&= - \sum_{i=0}^{+\infty} h^i (\sum_{j=1}^{+\infty} j h^{j-1})^n dh^{2n+1} \\
&= - \sum_{i\geq 0, j_1, \cdots, j_n \geq 1} j_1 \cdots j_n h^{i+j_1+\cdots+j_n-n} dh^{2n+1} \\
&= - \sum_{i\geq 0, j_1, \cdots, j_n \geq 1} j_1 \cdots j_n (-x_0\epsilon_0 + \cdots - x_{2n}\epsilon_{2n})^{k_0} (-1)^{2n+1} (2n+1)! \\
&\quad \epsilon_0 \cdots \epsilon_{2n} dx_0 \cdots dx_{2n} \\
&= (2n+1)! \sum_{i\geq 0, j_1, \cdots, j_n \geq 1} (-1)^{k_0} j_1 \cdots j_n \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_{2n}=0}^{k_{2n-1}} C_{k_0}^{k_1} C_{k_1}^{k_2} \cdots C_{k_{2n-1}}^{2n} \\
&\quad \epsilon_0 \cdots \epsilon_{2n} (x_0\epsilon_0)^{k_{2n}} \cdots (x_{2n-1}\epsilon_{2n-1})^{k_1-k_2} (x_{2n}\epsilon_{2n})^{k_0-k_1} dx_0 \cdots dx_{2n}
\end{aligned}
$$

avec $k_0 = i + j_1 + \cdots + j_n - n$.

$$
\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \int_{\Delta_{2n+1}} Tr(\nu^{-1} d\nu)^{2n+1} \\
&= (2n+1)! \int_{\Delta_{2n+1}} \sum_{i\geq 0, j_1, \cdots, j_n \geq 1} (-1)^{k_0} j_1 \cdots j_n \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_{2n}=0}^{k_{2n-1}} C_{k_0}^{k_1} C_{k_1}^{k_2} \cdots C_{k_{2n-1}}^{2n} \\
&\quad x_0^{k_{2n}} x_1^{k_{2n}-k_{2n-1}} \cdots x_{2n}^{k_0-k_1} Tr \epsilon_0^{k_{2n}+1} \cdots \epsilon_{2n-1}^{k_1-k_2+1} \epsilon_{2n}^{k_0-k_1+1} \\
&= (2n+1)! \int_{\Delta_{2n+1}} \sum_{i\geq 0, j_1, \cdots, j_n \geq 1} (-1)^{k_0} j_1 \cdots j_n \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_{2n}=0}^{k_{2n-1}} C_{k_0}^{k_1} C_{k_1}^{k_2} \cdots C_{k_{2n-1}}^{2n} \\
&\quad \frac{k_0!}{(k_{2n}+1)!(k_{2n-1}-k_{2n}+1)! \cdots (k_1-k_0+1)!} Tr \epsilon_0^{k_{2n}+1} \cdots \epsilon_{2n-1}^{k_1-k_2+1} \\
&= (2n+1)! \int_{\Delta_{2n+1}} \sum_{i\geq 0, j_1, .., j_n \geq 1} A(i, j_1, .., j_n, k_0, .., k_{2n}) Tr \epsilon_0^{k_{2n}+1} .. \epsilon_{2n-1}^{k_1-k_2+1} \epsilon_{2n}^{k_0-k_1+1}
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
A(i, j_1, .., j_n, k_0, .., k_{2n}) &= (-1)^{k_0} j_1 \cdots j_n \sum_{k_1=0}^{k_0} \sum_{k_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{k_{2n}=0}^{k_{2n-1}} C_{k_0}^{k_1} C_{k_1}^{k_2} \cdots C_{k_{2n-1}}^{2n} \\
&\quad \frac{k_0!}{(k_{2n}+1)!(k_{2n-1}-k_{2n}+1)! \cdots (k_1-k_0+1)!}
\end{aligned}
$$

En appliquant le lemme 3.1.6 avec $r = 4n + 4$, le produit $\epsilon_0^{k_{2n}+1} .. \epsilon_{2n-1}^{k_1-k_2+1} \epsilon_{2n}^{k_0-k_1+1}$ est de la forme

$$
p^{k+1} \begin{pmatrix} p & & * \\ & \ddots & \\ p & & p \end{pmatrix} \text{ pour } (4k-1)n + 4k \leq i + j_1 + \cdots + j_n \leq (4k+3)n + 4k + 4.
$$

Ceci nous permet de subdiviser I_{2n+1} en plusieurs sommes:

$$I_{2n+1} = \sum_{n\leq i+j_1+\cdots+j_n<3n+4} A(i,j_1,..,j_n,k_0,..,k_{2n})(4n+4)p + \sum_{k\geq 1} \sum_{(4k-1)n+4k\leq i+j_1+\cdots+j_n\leq(4k+3)n+4k+4} A(i,j_1,..,j_n,k_0,..,k_{2n})(4n+4)p^{k+1}$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit donc de montrer que

$v_p(A(i,j_1,..,j_n,k_0,..,k_{2n})) \leq k+1$ pour tout $k \geq 0$.

Soit p un nombre premier supérieur à $3n+4$.

Pour $n \leq i+j_1+\cdots+j_n < 3n+4$, on a:

$v_p(j_1) = \cdots = v_p(j_n) = v_p(k_0! = (i+j_1+\cdots+j_n)!) = 0$.

D'autre part, on a $0 \leq k_{2n} \leq k_{2n-1} \leq \cdots \leq k_1 \leq i+j_1+\cdots+j_n-n < 3n+4$ d'où $v_p((k_1-k_2+1)! = \cdots = v_p((k_{2n}+1)!) = 0$.

Donc $\sum_{n\leq i+j_1+\cdots+j_n<3n+4} A(i,j_1,..,j_n,k_0,..,k_{2n})(4n+4)p \in p\mathbf{Z}_p$.

Pour $k \geq 1$ et $(4k-1)n+4k \leq i+j_1+\cdots+j_n \leq (4k+3)n+4k+4$, on pose:

$$n_{2n+1} = v_p((k_{2n}+1)!) \Rightarrow k_{2n}+1 > n_{2n+1}p \Rightarrow k_{2n}+1 > n_{2n+1}p-1$$
$$n_{2n} = v_p((k_{2n}-k_{2n-1}+1)!) \Rightarrow k_{2n}-k_{2n-1}+1 > n_{2n}p \Rightarrow k_{2n-1} > n_{2n+1}+n_{2n}-2$$
$$\vdots$$
$$n_1 = v_p((k_0-k_1+1)!) \Rightarrow i+j_1+\cdots+j_n-n > (n_1+\cdots+n_{2n+1})p-(2n+1)$$

Si $i+j_1+\cdots+j_n-n \geq (n_1+\cdots+n_{2n+1})p$ alors $v_p((i+j_1+\cdots+j_n-n)! =\geq n_1+\cdots+n_{2n+1}$. Donc $v_p(A(i,j_1,..,j_n,k_0,..,k_{2n})) \geq 0$.

Sinon $i+j_1+\cdots+j_n-n = (n_1+\cdots+n_{2n+1})p-k$ avec $1 \leq k \leq 2n \leq p$ donc

$i+j_1+\cdots+j_n-n > (n_1+\cdots+n_{2n+1}-1)p$.

D'où $v_p((i+j_1+\cdots+j_n-n)!) \geq n_1+\cdots+n_{2n+1}-1$. Ceci implique que

$v_p(A(i,j_1,..,j_n,k_0,..,k_{2n}))\geq -1$ et donc $v_p(p^{k+1}A(i,j_1,..,j_n,k_0,..,k_{2n}))\geq k \geq 1$.

3.2 Un isomorphisme de "Van Est" en cohomologie de Lie p-adique.

On va commencer par un rappel sur les groupes et les algèbres de Lie p-adiques et leur cohomologie [La], [Bou] et [Ho]. D'après Lazard [La] (sous certaines conditions), il existe un isomorphisme entre la cohomologie continue d'un groupe de Lie p-adique (ou plus généralement un pro-p-groupe) et la cohomologie de son algèbre de Lie. Le but de ce paragraphe est d'expliciter cet isomorphisme.

On démontre par la suite que l'application R_p telle que définie dans (3.1.4) induit un cocycle continu du pro-p-groupe $GL_N(A) \supset X_N(A, I)$. Ceci nous permet d'établir sa non-trivialité en le testant au niveau de la cohomologie de son algèbre de Lie.

3.2.1 Notations et rappels

Soit G un pro-p-groupe (i.e une limite projective de p-groupes). A tout sous-groupe ouvert distingué U de G, on associe l'algèbre $\mathbf{Z}_p[G/U]$. Si $U' \subset U$, l'épimorphisme canonique $G/U \to G/U'$ se prolonge en un épimorphisme $f_{U,U'} : \mathbf{Z}_p[G/U] \to \mathbf{Z}_p[G/U']$.

On définit la $\mathbf{Z}_p$-algèbre complétée de G, et on note AlG, la limite projective $\underset{\leftarrow}{lim}\ \mathbf{Z}_p[G/U]$ construite par les morphismes $f_{U,U'}$ sur l'ensemble des sous-groupes distingués ouverts de G ordonnés par anti-inclusion. L'algèbre AlG est munie de sa topologie de limite projective, les algèbres $\mathbf{Z}_p[G/U]$ ayant leur topologie de $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang fini.

Si M est un $\mathbf{Z}_p[G]$-module, on définit le n-ième groupe de cohomologie continue de G à valeurs dans M, et on note $H^n_c(G, M)$, le groupe $H^n(Hom_c(Y_*, M))$ où $Y_* = \mathbf{Z}_p[G] \otimes T^* \mathbf{Z}_p[G]$ (i.e Y_n est la puissance tensorielle $(n+1)$-ième du $\mathbf{Z}_p$-module $\mathbf{Z}_p[G]$). L'algèbre $\mathbf{Z}_p[G]$ est une algèbre supplémentée, avec l'augmentation ϵ définie par $\epsilon(x) = 1$ pour $x \in G$. Le $\mathbf{Z}_p$-module $\mathbf{Z}_p[G]$ possède alors une base canonique formée des éléments $x \in G$. D'où Y_n posssède aussi une base en correspondance bijective avec G^n, et une application $\mathbf{Z}_p[G]$ -linéaire de Y_n dans m s'identifie ainsi à une application quelconque de G^n dans M. On retrouve ainsi la définition de la cohomologie des groupes par les n-cochaines.

Soit $A = AlG$. On note $\mathcal{C}_A$ la catégorie des A-modules linéairement topologisés complets.

3.2.1.1 Proposition

Soient $X_n = \underleftarrow{lim}\, \mathbf{Z}_p[G/U] \otimes T^* \mathbf{Z}_p[G/U]$ *et* $\delta_n : X_{n+1} \to X_n$ *définie par*

$$\delta_n(x_0 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_0 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+1} + (-1)^n x_0 \otimes \cdots \otimes x_n \epsilon(x_{n+1})$$

où ϵ *désigne l'augmentation de* A.

Alors, pour tout $M \in \mathcal{C}_A$*, les groupes de cohomologie du complexe* $Hom_{\mathcal{C}_A}(X_*, M)$ *s'identifient aux groupes de cohomologie continue de* G *à valeurs dans* M *définies au moyen des cochaines continues.*

3.2.1.2 Lemme

Soient G *un pro-p-groupe et* M *un* $\mathbf{Z}_p$*-module complet. Alors toute application continue* $f : G \to M$ *se prolonge en un morphisme unique* $\bar{f} : AlG \to M$.

L'anneau $\mathbf{Z}_p$ est un anneau valué commutatif, on note v sa valuation p-adique.

Un $\mathbf{Z}_p$-module valué X est un $\mathbf{Z}_p$-module muni d'une application $w : X \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ qui vérifie $w(\lambda x) = v(\lambda) + w(x)$ pour $\lambda \in \mathbf{Z}_p$ et $x \in X$.

Soit X un $\mathbf{Z}_p$-module valué. On note par $divX$ le module:

$$divX = \{\lambda^{-1} \otimes x \text{ avec} \lambda \in \mathbf{Z}_p^* \text{ et } x \in X \text{ telle que } w(\lambda^{-1} \otimes x) \geq 0\}$$

et par $SatX$ le complété de $divX$ par rapport à la valuation w:

$$SatX = \underleftarrow{lim}\, divX/divX_\nu \text{ avec } divX_\nu = \{y \in divX \text{ telle que } w(y) \geq \nu\}.$$

3.2.1.3 Définition-Proposition

(i) L'algèbre $A = AlG$ *est valuée en tant que* $\mathbf{Z}_p$*-module.*

(ii) Le module $SatA$ *est une algèbre saturée diagonale.*

Soit alors $\Delta : SatA \to SatA \otimes SatA$. *On définit*

$$\mathcal{L}SatA = \{x \in SatA \text{ telle que } \Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}.$$

(ii)L'injection canonique $\mathcal{L}SatA \to SatA$ *se prolonge en une application* $U(\mathcal{L}SatA) \to SatA$ *où* $U(\mathcal{L}SatA)$ *désigne l'algèbre enveloppante de* $\mathcal{L}SatA$. *Sa restriction à* $SatU(\mathcal{L}SatA)$ *est un isomorphisme* $SatU(\mathcal{L}SatA) \cong SatA$. *On dit que* $SatA$ *est une algèbre normale.*

3.2.1.4 Lemme: *Soient* $A = AlG$ *et* $B = \mathbf{Q}_p \otimes SatA$.

Alors, pour tout A*-module filtré libre de rang fini* X*, les modules* $\mathbf{Q}_p \otimes SatX$ *et* $B \otimes X$ *sont canoniquement isomorphes.*

3.2.1.5 Lemme: *Soient* $A = AlG$ *et* $B = \mathbf{Q}_p \otimes SatA$.

Supposons qu'il existe une résolution filtrée scindée de $\mathbf{Z}_p$ *par un complexe* X_* *de* A*-modules filtrés libres de rangs finis. Alors* $B \otimes X_*$ *est une résolution scindée de* $\mathbf{Q}_p$ *par des* B*-modules libres de rangs finis.*

En particulier, pour tout B*-module* M*, les complexes* $Hom^*_B(B \otimes X_*, M)$ *et* $Hom^*_A(X_*, M)$ *s'identifient. Leurs groupes de cohomologie s'identifient respectivement à* $H^*(B, M)$ *et* $H^*(A, M)$.

Maintenant, on dispose de tous les ingrédients qui ont permis à Lazard d'énoncer son théorème principal (voir [La]):

3.2.1.6 Théorème

Soit G *un pro-p-groupe,* $A = AlG$, $L = \mathbf{Q}_p \otimes \mathcal{L}SatA$ *l'algèbre de Lie associée à* G *et* M *un* $\mathbf{Q}_p$*-espace vectoriel muni d'une structure de* $SatA$*-module toplogique complet.*

Alors l'homologie continue du groupe G *à valeurs dans* M *s'identifie à la cohomologie de son algèbre de Lie définie par le complexe* $Z_n = UL \otimes \bigwedge^n L$ *où* $\bigwedge^*$ *désigne l'algèbre extérieure et* $d_n : Z_{n+1} \to Z_n$ *définie par* $d_n(u \otimes U_1 \wedge \cdots U_{n+1}) =$

$$\sum_{i=1}^{n+1} uU_i \otimes U_1 \wedge \cdots \wedge \hat{U}_i \wedge \cdots \wedge U_{n+1} + \sum_{i<j} u \otimes [U_i, U_j] \wedge \cdots \wedge \hat{U}_i \wedge \cdots \wedge \hat{U}_j \wedge \cdots \wedge U_{n+1}.$$

3.2.2 Description explicite de l'isomorphisme $H_c^*(G,M) \to H^*(L,M)$.

Pour expliciter cet isomorphisme, on va le décomposer en plusieurs isomorphismes de complexes:

$$\alpha^n : \mathcal{C}(G^n, M) \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_n, M)$$
$$a^n : Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_n, M) \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_n, M)$$
$$\beta^n : Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_n, M) \to Hom_{UL_0}(Z_n, M)$$

où $X_n = \varprojlim \mathbf{Z}_p[G/U] \otimes T^* \mathbf{Z}_p[G/U]$ et $Z_n = UL_0 \otimes \bigwedge^n L_0$ avec $L_0 = \mathcal{L}SatA$.

Soient $A = AlG$ et $B = \mathbf{Q}_p \otimes SatA$.

Soient $\mathcal{C}_B$ la catégorie des B-modules linéairement topologisés complets et $M \in \mathcal{C}_B$.

La proposition suivante explicite les deux isomorphismes α^n et β^n:

3.2.2.1 Proposition

On a des isomorphismes de complexes:

$$\alpha^n : \mathcal{C}(G^n, M) \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_n, M)$$
$$\beta^n : Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_n, M) \to Hom_{UL_0}(Z_n, M)$$

définies pour $f \in \mathcal{C}(G^n, M)$, $F \in Hom(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_n, M)$, $\varphi \in Hom(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_n, M)$ et $\phi \in Hom(Z_n, M)$ par:

$$\alpha^n(f)(\lambda^{-1} \otimes cl(a').e) = \begin{cases} [1 \otimes cl(\lambda a')]g(e) & \text{si} \quad w_{A'}(\lambda a') \geq 0 \\ [\lambda'^{-1} \otimes cl(\lambda' \lambda a')]g(e) & \text{si} \quad w_{A'}(\lambda a') = -v(\lambda') \leq 0 \end{cases}$$

avec $a' \in A' = \mathbf{Q}_p \otimes A$, $\{e'\}$ une base filtrée de X_n et $g : A \otimes \hat{T}^n A \to M$ définie par $g(a \otimes x) = a.\bar{f}(x)$ où $\bar{f}$ est le prolongement de f à $Al(G^n) \cong \hat{T}^n A$.

Son inverse est l'application

$(\alpha^n)^{-1}(F)(g_1, \cdots, g_n) = F(1_{\mathbf{Q}_p} \otimes cl(1_{A'}).(1_A \otimes cl(g_1, \cdots, g_n)))$

où $cl(g_1, \cdots, g_n)$ désigne l'image de $(g_1, \cdots, g_n)$ par l'application $G^n \to Al(G^n) \cong \hat{T}^n A$ et $e = 1_A \otimes cl(g_1, \cdots, g_n)$ une base filtrée de X_n.

$\beta^n(\varphi)(e') = \varphi(1_{\mathbf{Q}_p} \otimes cl(1_{UL'_0}).e')$.

Son inverse est l'application

$$(\beta^n)^{-1}(\phi)(\lambda^{-1} \otimes cl(l').e') = \begin{cases} [1 \otimes cl(\lambda l')]\phi(e') & \text{si} \quad w(\lambda l') \geq 0 \\ [\lambda'^{-1} \otimes cl(\lambda' \lambda l')]\phi(e') & \text{si} \quad w(\lambda l') = -v(\lambda') \leq 0 \end{cases}$$

Avant de démontrer cette proposition, on va reprendre la démonstration du lemme 3.2.1.4 pour donner une expression explicite de l'isomorphisme $\mathbf{Q}_p \otimes SatX \cong B \otimes X$

3.2.2.2 Lemme: *L'isomorphisme $\mathbf{Q}_p \otimes SatX \cong B \otimes X$ est donné par les applications suivantes:*

A tout $\lambda^{-1} \otimes cl(a') \otimes e \in B \otimes X$ on associe $1 \otimes cl(\lambda a').e$ si $w_{A'}(\lambda a') + t \geq 0$ et $\lambda'^{-1} \otimes cl(\lambda' \lambda a').e$ si $w_{A'}(\lambda a') + t = -v(\lambda') \leq 0$.

Réciproquement à tout $\lambda^{-1} \otimes cl(a').e \in \mathbf{Q}_p \otimes SatX$ on associe $1 \otimes cl(\lambda a') \otimes e$ si $w_{A'}(\lambda a') \geq 0$ et $\lambda'^{-1} \otimes cl(\lambda' \lambda a') \otimes e$ si $w_{A'}(\lambda a') = -v(\lambda') \leq 0$.

Démonstration

Soit $A' = \mathbf{Q}_p \otimes A$.

La valuation p-adique v sur $\mathbf{Z}_p$ induit une valuation w_A sur A, d'où une valuation

$w_{A'} : A' \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ définie par $w_{A'}(\lambda^{-1} \otimes a) = w_A(a) - v(\lambda)$.

Pour tout $\nu \in \mathbf{R}$, on pose $A'_\nu = \{a' \in A' / w(a') \geq 0\}$ et $\hat{A}' = \underleftarrow{lim}\, A'/A'_\nu$. on note par $cl(a')$ les éléments de $\hat{A}'$ avec $a' \in A'$ ainsi que les éléments de $SatA = \underleftarrow{lim}\, divA/divA_\nu$ avec $a' \in divA \subset A'$.

Alors il existe un isomorphisme qui identifie l'algèbre $B = \mathbf{Q}_p \otimes SatA$ à la complétée $\hat{A}'$ de A' pour la topologie définie par w. Cet isomorphisme est donné par les applications suivantes:

L'application $B \to \hat{A}'$ associe à $\lambda^{-1} \otimes cl(a')$ l'élément $cl(\lambda a')$. sa réciproque associe à $cl(a')$ l'élément $1 \otimes cl(a')$ si $w(a') \geq 0$ et $\lambda^{-1} \otimes cl(\lambda a')$ si $w(a') = -v(\lambda) \leq 0$.

Puisque le foncteur Sat, ainsi que les produits tensoriels, permutent aux sommes directes finies, nous pouvons supposer que X est un A-module possédant la base filtrée $\{e\}$ avec $w(e) = t$.

On peut alors voir $divX$ comme étant l'ensemble des $a'.e \in A'.e$ vérifiant $w_{A'}(a') + t \geq 0$, $SatX$ est alors l'ensemble des $cl(a').e \in \hat{A}'.e$ vérifiant $w_{A'}(a') + t \geq 0$.

On a donc de la même manière que pour B et $\hat{A}'$, un isomorphisme entre $\mathbf{Q}_p \otimes SatM$ et le $\hat{A}'$-module $\hat{A}'.e$.C.Q.F.D.

Démonstration de la proposition 3.2.2.1

L'application α^n est la composée des applications suivantes:

L'application $\mathcal{C}(G^n, M) \to Hom_{\mathbf{Z}_p}(Al(G^n), M)$ induite par le lemme 3.2.1.2.

Or $Al(G^n) = \underleftarrow{lim}\, \mathbf{Z}_p[G^n/U] = \underleftarrow{lim}\, T^n\mathbf{Z}_p[G/U] = \hat{T}^n A$

d'où l'isomorphisme $Hom_{\mathbf{Z}_p}(Al(G^n), M) \cong Hom_{\mathbf{Z}_p}(\hat{T}^n A, M) \to Hom_A(A\hat{\otimes}\hat{T}^n A, M)$.

Or $X_n = \underleftarrow{lim}\, \mathbf{Z}_p[G/U] \otimes T^n\mathbf{Z}_p[G/U] \cong \underleftarrow{lim}\, \mathbf{Z}_p[G/U] \hat{\otimes}\, \underleftarrow{lim}\, \hat{T}^n\mathbf{Z}_p[G/U] = A\hat{\otimes}\hat{T}^n A$

d'où l'isomorphisme $Hom_A(A\hat{\otimes}\hat{T}^n A, M) \cong Hom_A(X_n, M) \to Hom_B(B \otimes X_n, M)$.

Il reste donc à composer ces isomorphismes avec l'isomorphime de complexes induit par le lemme 3.2.2.2.

Avant de définir le troisième isomorphisme de complexes

$$a^n : Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_n, M) \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_n, M)$$

on a besoin du résultat suivant qui est une conséquence de la proposition 3.2.2.1:

3.2.2.3 Corollaire: *On a des résolutions fortes et relativement injectives*

$$0 \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatA, M) \xrightarrow{\delta_0} Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_1, M) \xrightarrow{\delta_1} Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_2, M) \to \cdots$$

et

$$0 \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatUL_0, M) \xrightarrow{d_0} Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_1, M) \xrightarrow{d_1} Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_2, M) \to$$

Démonstration

On sait d'après [Gu] que $\mathcal{C}(G^*, M)$ est une résolution forte avec l'homotopie contractante

$s^n : \mathcal{C}(G^{n+1}, M) \to \mathcal{C}(G^n, M)$ définie pour tout $F \in \mathcal{C}(G^{n+1}, M)$ par

$s^n(F)(g_1, \cdots, g_n) = F(1, g_1, \cdots, g_n)$.

Donc $Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_*, M)$ est aussi une résolution forte et exacte avec l'homotopie contractante

$$S^n = \alpha^n s^n (\alpha^{n+1})^{-1}$$

définie pour tout $f \in Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_{n+1}, M)$ par

$$S^n(f)(\lambda^{-1} \otimes cl(a').e) = \begin{cases} [1 \otimes cl(\lambda a')]f(1_{\mathbf{Q}_p} \otimes cl(1_{A'}).e & \text{si} \quad w(\lambda a') \geq 0 \\ [\lambda'^{-1} \otimes cl(\lambda' \lambda a')]f(1_{\mathbf{Q}_p} \otimes cl(1_{A'}).e & \text{si} \quad w(\lambda a') = -v(\lambda') \leq 0 \end{cases}$$

.

De plus, soit $u : A \to B$ un G-morphisme injectif fort (i.e il existe s tel que $s \circ u = 1$) et soit $v : A \to \mathcal{C}(G^n, M)$ alors il existe w tel que $w \circ u = v$ défini par

$$w(b)(g_1, \cdots, g_n) = (v.s.g_1^{-1}.b)(1, g_1^{-1}g_2, \cdots, g_1^{-1}g_n).$$

Donc le complexe $Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_*, M)$ est relativement injectif avec $W = \alpha^n w$.

D'autre part, on sait d'après un résultat de M.Duflo et D.Wigner (voir [Gu]) qu'on a une homotopie contractante explicite du complexe Z_n, à savoir $s' : Z_n \to Z_{n+1}$ avec

$s'(U^r \otimes U_1 \wedge \cdots \wedge U_{n+1}) = r!\Sigma C_{q,h_1,\cdots,h_n} X^q \otimes X \wedge (adX)^{h_1}.X_1 \wedge \cdots \wedge (adX)^{h_n}.X_n$

où $q + h_1 + \cdots + h_n = r - 1, C_{q,h_1,\cdots,h_n} = (q!h_1! \cdots h_n!)^{-1} \int_0^1 t^q B_{h_1}(t) \cdots B_{h_n}(t)dt$

et où B_h est un polynome (type Bernoulli) donné pour tout entier positif t par

$B_0(t) = t$ et $B_h(t) \sum_{m=1}^{t-1} m^h$.

D'où une homotopie contractante $s'_n : Hom(Z_{n+1}, M) \to Hom(Z_n, M)$.

Donc $Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_*, M)$ est une résolution forte et exacte avec l'homotopie contractante

$$S'_n = (\beta^n)^{-1} s'_n \beta^{n+1}$$

définie pour tout $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_{n+1}, M)$ par

$$S'_n(\varphi)(\lambda^{-1} \otimes cl(l').e') = \begin{cases} [1 \otimes cl(\lambda l')]\varphi(1_{\mathbf{Q}_p} \otimes cl(1_{UL'_0}).s'(e')) & \text{si} \quad w(\lambda l') \geq 0 \\ [\lambda'^{-1} \otimes cl(\lambda' \lambda l')]\varphi(1_{\mathbf{Q}_p} \otimes cl(1_{UL'_0}).s'(e')) & \text{si} \quad w(\lambda l') = -v(\lambda') \leq 0 \end{cases}$$

De plus, soit $u' : A \to B$ un morphisme injectif fort (i.e il existe s' tel que $s' \circ u' = 1$) et soit $v' : A \to Hom(Z_n, M)$ alors il existe w' tel que $w' \circ u' = v'$. défini par

$$w'(b)(u \otimes U_1 \wedge \cdots \wedge U_n) = v'(s'(u.b))(1 \otimes U_1 \wedge \cdots \wedge U_n).$$

Donc $Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_n, M)$ est relativement injectif avec $W' = \beta_n^{-1} w'$.

3.2.2.5 Corollaire: *Il existe des quasi-isomorphismes de complexes*

$$a^n : Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_n, M) \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_n, M)$$

et

$$b^n : Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_n, M) \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_n, M)$$

Démonstration

On sait d'après 3.2.1.3 qu'il existe un isomorphisme

$$a : Hom(\mathbf{Q}_p \otimes SatA, M) \to Hom(\mathbf{Q}_p \otimes SatUL_0, M).$$

Ce corollaire devient alors une conséquence directe du corollaire précédent et du lemme de comparaison des résolutions. (Pour une formule explicite de a_n voir (B.5)).

On est maintenant en mesure d'expliciter l'isomorphisme $H_c^*(G, M) \cong H^*(L, M)$ du théorème 3.2.1.6:

3.2.2.6 Proposition

L'isomorphisme $u^n : H_c^*(G, M) \to H^*(L, M)$ du théorème 3.2.1.6 est la composée

$$u^n = \beta^n a^n \alpha^n$$

Son inverse homologique est le morphisme $v^n : H^*(L, M) \to H_c^*(G, M)$ suivant:

$$v^n = (\alpha^n)^{-1} b^n (\beta^n)^{-1}$$

3.3 Calcul du régulateur p-adique.

Dans ce paragraphe, on va essentiellement s'intéresser au cas $n = 1$:

$$R_p : K_3(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \to p\mathbf{Z}_p.$$

Comme dans le cas du corps complexe $\mathbf{C}$, on montre que le cocycle continu qui définit le régulateur est aussi le dilogarithme (p-adique) d'un certain birapport.

3.3.1 Proposition

Soient $G = GL_N(\mathbf{Z}_p)$ et ϕ l'application de G^{2n+1} à valeurs dans $p\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\phi(g_1, \cdots, g_{2n+1}) = Tr \int_{\Delta_{2n+1}} (\nu^{-1}(x) d\nu(x))^{2n+1}$$

où $x = (x_i)_{0 \leq i \leq 2n+1}$ représente un point du $(2n+1)$-simplexe standard Δ_{2n+1} et
$\nu(x) = \sum\limits_{i=0}^{2n} x_i g_{i+1} \cdots g_{2n+1} + x_{2n+1}$.
Alors ϕ est un $(2n+1)$-cocycle non-homogène sur G à valeurs dans $p\mathbf{Z}_p$.

Démonstration

Soit δ la différentielle du complexe $\mathcal{C}^*(G, p\mathbf{Z}_p)$ alors

$$\begin{aligned}(\delta\phi)(g_1, \cdots, g_{2n+2}) &= \phi(g_2, \cdots, g_{2n+2}) + \phi(g_1, \cdots, g_{2n+1}) \\ &+ \sum_{p=1}^{2n+1} (-1)^p \phi(g_1, \cdots, g_{p-1}, g_p g_{p+1}, \cdots, g_{2n+2}) \\ &= Tr \int_{\Delta_{2n+1}} (\nu_0^{-1} d\nu_0)^{2n+1} + (\nu_{2n+2}^{-1} d\nu_{2n+2})^{2n+1} \\ &+ \sum_{p=1}^{2n+1} (-1)^p (\nu_p^{-1} d\nu_p)^{2n+1}\end{aligned}$$

avec $\nu_0 = \sum\limits_{i=0}^{2n} x_i gi + 2 \cdots g_{2n+2}$, $\nu_{2n+2} = \sum\limits_{i=0}^{2n} x_i gi + 1 \cdots g_{2n+1} + x_{2n+1}$ et $\nu_p = \sum\limits_{i=0}^{p-1} x_i g_{i+1} \cdots \hat{g}_p \cdots g_{2n+2}$
$x_i g_{i+2} \cdots g_{2n+2} + x_{2n+1}$ pour $1 \leq p \leq 2n+1$.
Soit $\mu = \sum\limits_{i=0}^{2n+1} x_i g_{i+1} \cdots g_{2n+2} + x_{2n+2}$ alors

$$Trc \int_{\partial\Delta_{2n+2}} (\mu^{-1} d\mu)^{2n+1} = \int_{\Delta_{2n+1}} (\mu_0^{-1} d\mu_0)^{2n+1} + (\mu_{2n+2}^{-1} d\mu_{2n+2})^{2n+1}$$
$$+ \sum_{p=1}^{2n+1} (-1)^p (\mu_p^{-1} d\mu_p)^{2n+1}$$

avec $\mu_0 = \sum\limits_{i=0}^{2n+1} x_i g_{i+1} \cdots g_{2n+2}$, $\mu_{2n+2} = \sum\limits_{i=0}^{2n} x_i g_{i+2} \cdots g_{2n+2} + x_{2n+1}$ et

$\mu_p = \sum\limits_{i=0}^{p-1} x_i g_{i+1} \cdots \hat{g}_p \cdots g_{2n+2} + \sum\limits_{i=p}^{2n} x_i g_{i+2} \cdots g_{2n+2} + x_{2n+1}$

Donc $(\partial\phi)(g_1,\cdots,g_{2n+2}) = Trc\int_{\partial\Delta_{2n+2}}(\mu^{-1}d\mu)^{2n+1} + Trc\int_{\Delta_{2n+1}}(\nu_{2n+2}^{-1}d\nu_{2n+2})^{2n+1} - Trc\int_{\Delta_{2n+1}}(\mu_0^{-1}d\mu_0)^{2n+1}$

Or $Trc\int_{\partial\Delta_{2n+2}}(\mu^{-1}d\mu)^{2n+1} = Trc\int_{\Delta_{2n+1}} d(\mu^{-1}d\mu)^{2n+1} = 0$ puisque $Trc(\mu^{-1}d\mu)^{2n+1}$ est une forme fermée.

Donc

$$\begin{aligned}(\partial\phi)(g_1,\cdots,g_{2n+2}) &= Trc\int_{\Delta_{2n+1}} \quad (\nu_{2n+2}^{-1}d\nu_{2n+2})^{2n+1} - (g_{2n+2}^{-1}\nu_{2n+2}^{-1}d\nu_{2n+2}g_{2n+2})^{2n+1}\\ &= Trc\int_{\Delta_{2n+1}} \quad \nu_{2n+2}^{-1}d\nu_{2n+2})^{2n+1} - g_{2n+2}^{-1}(\nu_{2n+2}^{-1}d\nu_{2n+2})^{2n+1}g_{2n+2}\\ &= \quad 0\end{aligned}$$

3.3.2 Calcul de R_p dans le cas où n=0

Remarquons qu'on peut étendre la définition de R_p au cas $n = 0$ par la formule

$$R_p : K_1(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p) \to \mathbf{Q}_p$$

avec $R_p([f]) = -Tr\int_{\Delta_1}\nu^{-1}d\nu$ où $\nu(x_0,x_1) = x_0g + x_1$ et $g = 1 + pu = h([f])$.

D'où $R_p(g) = Tr\int_0^1(1+tpu)^{-1}pudt = TrLog_p(1+pu) = Tr\sum\limits_{n\geq 1}\frac{p^nu^n}{n} \in p\mathbf{Z}_p$

3.3.3 Calcul de R_p dans le cas où n=1

Soit $D_p(z) = l_{2,p}(z) + \frac{1}{2}log_p(z)log_p(1-z)$ où $l_{2,p}(z)$ désigne le dilogarithme p-adique.

3.3.3.1 Proposition

Soient $v \in \mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ l'espace projectif de dim2 et $(g_0,g_1,g_2,g_3) \in GL_2(\mathbf{Q}_p)^4$ tel que (g_0v,g_1v,g_2v,g_3v) soit en position générique.

Soit

$$c(g_0,g_1,g_2,g_3) = D_p(r_2(g_0v,g_1v;g_2v,g_3v))$$

où r désigne le birapport.

Alors c est un cocycle mesurable, localement borné.

Démonstration

D'après Colemann-Dwork [Col], l'application D_p vérifie l'identité fonctionnelle:

$$D_p(xy) = D_p(x) + D_p(y) - D_p(\tfrac{x}{x-1}(1-y)) - D_p(\tfrac{y}{y-1}(1-x))$$

Donc

$$\begin{aligned} dc(g_0, \cdots g_4) &= \sum_{i=0}^{4} (-1)^i c(g_0, \cdots, \hat{g}_i, \cdots, g_4) \\ &= \sum_{i=0}^{4} (-1)^i D_p(r_2(g_0 v, \cdots, \hat{g}_i v, \cdots, g_4 v)) \end{aligned}$$

Or, a invariance projective près, cinq points $(g_0 v, \cdots, g_4 v)$ de $\mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ sont équivalents à $(\infty, 0, 1, x, y)$.

Donc

$$\begin{aligned} dc(g_0, .., g_4) &= D_p(r_2(0,1;x,y)) - D_p(r_2(\infty,1;x,y)) + D_p(r_2(\infty,0;x,y)) \\ &\quad - D_p(r_2(\infty,0;1,y)) + D_p(r_2(\infty,0;1,x)) \\ &= D_p(\tfrac{1-y^{-1}}{1-x^{-1}}) - D_p(\tfrac{1-y}{1-x}) + D_p(\tfrac{y}{x}) - D_p(y) + D_p(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.3.3.2 Lemme:(voir $[Y]$**)** *Soit $E_* GL_2(\mathbf{Q}_p) \to B_* GL_2(\mathbf{Q}_p)$ le fibré simplicial universel standard et v un vecteur non nul de $V_2 = \mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. On considère l'ensemble simplicial $E_*^{\mathrm{gen}} GL_2(\mathbf{Q}_p)$ obtenu à partir de $E_* GL_2(\mathbf{Q}_p)$ en ne retenant que les simplexes $(g_0, \cdots, g_3)$ v-générique au sens que $g_0 v, g_1 v, g_2 v, g_3 v$ sont en position générale dans $\mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. Soit alors $B_*^{\mathrm{gen}} GL_2(\mathbf{Q}_p)$ l'image de $E_*^{\mathrm{gen}} GL_2(\mathbf{Q}_p)$ dans $B_* GL_2(\mathbf{Q}_p)$.*

Alors $B_*^{\mathrm{gen}} GL_2(\mathbf{Q}_p) \to B_* GL_2(\mathbf{Q}_p)$ induit un isomorphisme en homologie.

On désigne par $\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ le groupe abélien libre de générateurs $\{z\}$ avec $z \in \mathbf{Q}_p^* - \{1\}$ et les relations

$$\{z_1\} - \{z_2\} + \{\tfrac{z_2}{z_1}\} + \{\tfrac{1-z_2}{1-z_1}\} - \{\tfrac{1-z_2^{-1}}{1-z_1^{-1}}\} = 0$$

et par $\bigwedge^*(.)$ l'algèbre extérieure. On a alors un théorème dû à Bloch (non publié):

3.3.3.3 Théorème

On a une suite exacte

$$\cdots \to H_3(SL_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p) \xrightarrow{\beta} \bigwedge^2(\mathbf{Q}_p^\times/\mu_{\mathbf{Q}_p}) \to K_2(\mathbf{Q}_p) \to 0$$

où l'application α envoie le 3-simplexe (g_0,g_1,g_2,g_3) de $E_3^{\mathrm{gen}}SL_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\{z\}$, z désignant le birapport de (g_0v,g_1v,g_2v,g_3v) (voir lemme précédent)et l'application β envoie $\{z\}$ sur $z\wedge(1-z)$.

Ce théorème est une variante du théorème de Bloch démontré dans [D-S] pour un corps de caractéristique 0. On remarquera que certaines parties de la démonstration de [D-S] ne necessite pas cette condition sur la caractéristiques, on va donc reprendre ces parties pour plus de clarté.

Notre contribution sera une démonstration pour la formule de α.

Démonstration

On considère le complexe C_* où C_p désigne le groupe abélien libre de bases $(x_0,\cdots,x_p)$ avec les x_i des points distincts de $\mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ et la différentielle est donnée par la formule

$$d(x_0,\cdots,x_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(x_0,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_p)$$

L'action naturelle de $G=PSL_2(\mathbf{Q}_p)=PGL_2(\mathbf{Q}_p)$ (car $\mathbf{Q}_p^\times=\mathbf{Q}_p^{\times 2}$) sur $\mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ induit une action de G sur C_*. On a alors une suite exacte de G-modules (voir (B.5)):

$$\cdots \to C_k \to C_{k-1} \to \cdots \to C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

Cette suite exacte se scinde en trois G-suites exactes courtes

$$0 \to Z_0 \to C_0 \to \mathbf{Z} \to 0 \ (*)$$

$$0 \to Z_1 \to C_1 \to Z_0 \to 0 \ (**)$$

$$\cdots \to C_k \to C_{k-1} \to \cdots \to C_2 \to Z_1 \to 0 \ (***)$$

La suite exacte (*) induit une suite exacte longue en homologie

$$\to H_3(G,\mathbf{Z}) \xrightarrow{\alpha} H_2(G,Z_0) \xrightarrow{\beta} H_2(G,C_0) \to H_2(G,\mathbf{Z}) \to$$

L'action de G sur C_* est transitive pour *=0,1,2 et les stabilisateurs de (0),(0,∞),(0,∞,1) sont égaux à $B_2=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_p^* & * \\ 0 & \mathbf{Q}_p^*\end{pmatrix}$, $T_2=\begin{pmatrix}\mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_p^*\end{pmatrix}$ et $\mathbf{Q}_p^*$.

En utilisant le lemme de Shapiro $[Br]$, on a alors:

$$H_*(G,C_0)\cong H_*(T_2,\mathbf{Z})\cong\begin{cases}\bigwedge^*_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}_p^*/\mu_{\mathbf{Q}_p}) & \text{si} \quad * \text{ est paire}\\ \bigwedge^*_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}_p^*/\mu_{\mathbf{Q}_p})\bigsqcup\mu_{\mathbf{Q}_p} & \text{si} \quad * \text{ est impaire}\end{cases}$$

$$H_*(G,C_1)\cong H_*(B_2,\mathbf{Z})\cong H_*(T_2,\mathbf{Z})$$

D'où l'égalité $H_2(G,C_0)=\bigwedge^2_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}_p^*/\mu_{\mathbf{Q}_p})$.

On va maintenant montrer l'égalité $H_2(G,Z_0)=\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$.

L'augmentation $\epsilon: C_0\to\mathbf{Z}$ induit un homomorphisme $H_k(G,C_0)\to H_k(G,\mathbf{Z})$ qui n'est autre que l'inclusion de $H_k(T_2,\mathbf{Z})\to H_k(G,\mathbf{Z})$.

Or, d'après le théorème de Matsumoto-Moore [S-W], l'inclusion de $\tilde{T}_2$ dans $\tilde{G}$ induit un homomorphisme surjectif en H_2 ($\tilde{T}_2$ désigne l'image réciproque du tore T_2 dans la suite exacte $1\to\{\pm I\}\to\tilde{G}=SL_2(\mathbf{Q}_p)\to G\to 1$).

On a donc un diagramme commutatif induit par (*)

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & \to & H_1(\tilde{G},Z_0) & \to & H_1(\tilde{G},C_0)=\mathbf{Q}_p^* & \to & H_1(\tilde{G},\mathbf{Z})=0\\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 2 & & \\ 0\to & & \mathbf{Z}/2 & \to & H_1(G,Z_0) & \to & H_1(G,C_0)=\mathbf{Q}_p^* & \to & H_1(G,\mathbf{Z})=0\end{array}$$

On conclut alors que l'application $H_1(\tilde{G},C_0)\to H_1(G,C_0)$ correspond à l'élévation au carré dans $\mathbf{Q}_p^*$.

Ce qui implique que l'application $H_1(G,C_0)=H_1(T_2,\mathbf{Z})\to H_1(G,Z_0)$ induite par (**) est un isomorphisme et l'application $H_1(\tilde{T}_2,\mathbf{Z})\to H_1(\tilde{G},Z_0)$ correspond au carré.

En utilisant(**), on a donc un isomorphisme $H_2(G,Z_0)\cong H_1(G,Z_1)$. En effet on a la longue suite exacte

$$0\to H_2(G,Z_0)\to H_1(G,Z_1)\to H_1(G,C_1)=H_1(T_2,\mathbf{Z})\to H_1(G,Z_0)\to 0.$$

Or pour calculer $H_1(G,Z_1)$, il suffit d'appliquer le foncteur $\mathbf{Z}\underset{\mathbf{Z}G}{\otimes}-$ à (***) et en utilisant le fait que G est 3-transitive sur $\mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, on a l'isomorphisme

$$H_1(G,Z_1) \cong \mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_3/d(\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_4).$$

Pour conclure, il suffit donc de remarquer que $\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_3$ peut être vu comme le groupe abélien libre de base $\{z\}$ avec $z \in \mathbf{Q}_p^* - \{1\}$. En effet la classe d'un élément $(x_0,\cdots,x_3) \in C_3$ sous l'action de G est représenté par l'élément $(\infty,0,1,z)$ où z désigne le birrapport de $(x_0,\cdots,x_3)$.

L'isomorphisme $\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_3/d(\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_4) \to \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ est alors induit par la projection naturelle p de $\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_3$ sur $\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$.

Il reste maintenant à déterminer les morphismes

$$\alpha : H_3(SL_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p) \text{ et } \beta : \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p) \to \bigwedge^2(\mathbf{Q}_p^\times/\mu_{\mathbf{Q}_p}).$$

L'application β résulte de la composée suivante:

$$\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_3 \to H_1(G,Z_1) \overset{l}{\cong} H_2(G,Z_0) \to H_2(G,C_0) \xrightarrow{\rho} H_2(B_2,\mathbf{Z}) \xrightarrow{d_*} H_2(T_2,\mathbf{Z})$$

où l est l'isomorphisme étudier précédement, ρ l'application inverse induite par le lemme de Shapiro et d_* est l'application induite par la différentielle en 0 de l'action de B_2 sur $\mathcal{P}^1(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p \bigcup(\infty)$ (i.e $d(h) = h(1) - h(0) \in \mathbf{Q}_p^\times$).

Une étude explicite de cette composée (B.4) montre que

$$\beta(\{z\}) = 2.(z \wedge (1-z))$$

Notons que ce facteur 2 est immatériel car $\mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$ est divisible.

Pour la définition de α, on sait d'après le lemme de comparaison des résolutions qu'il existe un homomorphisme $C_*(G) \to C_*$ de G-complexes sur $\mathbf{Z}$, unique à homotopie près où $C_*(G)$ désigne la G-résolutions libre standard de $\mathbf{Z}$. Cet homomorphisme induit une application canonique $\theta : H_3(G) \to H_3(\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_*)$.

D'après $[Y]$, ce morphisme θ provient du morphisme $GL_2(\mathbf{Q}_p)$-invariant du complexe singulier de $E_*^{\mathrm{gen}}GL_2(\mathbf{Q}_p)$ (voir Lemme 3.3.3.2) dans C_* donné par

$$(g_0,g_1,g_2,g_3) \to (g_0v,g_1v,g_2v,g_3v)$$

Or $H_3(\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_*) = \mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_3/d(\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_4) = H_1(G,Z_1)$. Donc l'application α est la composée $H_3(G) \xrightarrow{\theta} H_3(\mathbf{Z} \underset{\mathbf{Z}G}{\otimes} C_*) = H_1(G,Z_1) \overset{p}{\cong} \mathcal{P}(\mathbf{Q}_p)$

D'où

$$\alpha(g_0,g_1,g_2,g_3)=r_2(g_0v,g_1v;g_2v,g_3v).$$

3.3.3.4 Proposition

le régulateur p-adique

$$R_p : K_3(\mathbf{Z}_p,p\mathbf{Z}_p)\to p\mathbf{Z}_p$$

défini en 3.1.2, 3.1.3 et 3.1.4 est non trivial pour p premier régulier.

La démonstration de ce théorème nécessite un résultat intermédiaire qu'on va énoncer dans la proposition suivante:

3.3.3.5 Proposition

Soit ϕ le cocycle défini dans 3.3.1. Alors ϕ^* est cohomologue à c^* en tant que classe de cohomologie mesurable dans $H^3_{mes}(SL_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}_p)=H^3_c(SL_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}_p)$.

Démonstration

Soit $u^3 : H^3_c(SL_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}_p)\to H^3(\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}_p)$ l'isomorphisme définie en 3.2.2.6.

Or $H^*(\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}_p)$ est définie par le complexe $Z_n=Hom(U\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p)\otimes\bigwedge^*\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}_p)$ et comme $dim\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p)=3$ alors $\bigwedge^4\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p)=0$, $\bigwedge^3\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p)=\mathbf{Q}_p$ et la différentielle

$d_2 : Z_3\to Z_2$ est nulle.

Donc $dim_{\mathbf{Q}_p}H^3(\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}_p)=1$. D'où $dim_{\mathbf{Q}_p}H^3_c(SL_2(\mathbf{Q}_p),\mathbf{Q}_p)=1$.

Donc pour démontrer que les deux cocycles sont cohomologues, il suffit de montrer que ϕ^* est non triviale en tant que classe de cohomologie continue.

Pour celà, il suffit de prouver que $u^3(\phi^*)\neq 0$ (voir (**B.5**)).

En réalité, ϕ est définit sur les matrices $g_i\in X_N(\mathbf{Z}_p,p\mathbf{Z}_p)$ (i.e les matrices (a_{ij}) telle que $a_{ii}\in 1+p\mathbf{Z}_p$ et $a_{ij}\in p\mathbf{Z}_p$ $\forall i\geq j$ avec N un entier assez grand, plus précisément N désigne le degré de stabilité de l'homologie de $X(\mathbf{Z}_p,p\mathbf{Z}_p)$ (voir 1.2.3)). Mais, pour tester sa non trivialité, on plonge $X_N(\mathbf{Z}_p,p\mathbf{Z}_p)$ qui n'est pas un groupe dans le groupe $GL_N(\mathbf{Z}_p)$ puis on se restreind à $SL_N(\mathbf{Z}_p)\subset SL_N(\mathbf{Q}_p)$.

Démonstration du théorème 3.3.3.4

L'application R_p est la composée de l'homomorphisme de Hurewicz de

$\Pi_3(X(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p)^+) \xrightarrow{h} H_3(X(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p))$ et de l'application $\tilde{R}_p : H_3(X(\mathbf{Z}_p, p\mathbf{Z}_p)) \xrightarrow{\cap\phi^*} p\mathbf{Z}_p$.

Donc il suffit de montrer que $\tilde{R}_p$ est non triviale. Ceci revient, d'après 3.3.3.5, à montrer que le cocycle de Colemann c induit une application non triviale

$$H_3(SL_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cap c^*} \mathbf{Q}_p.$$

Soit $B(\mathbf{Q}_p) = Ker\beta$ le groupe de Bloch.

Soit alors l'application surjective $\delta : H_3(SL_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}) \to B(\mathbf{Q}_p)$ induite par α.

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_3(SL_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} & & B(\mathbf{Q}_p) \\ & \searrow & \downarrow D_p \\ & \cap c^* & \mathbf{Q}_p \end{array}$$

Donc pour démontrer la non-trivialité de $H_3(SL_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Q}_p) \xrightarrow{\cap c^*} \mathbf{Q}_p$, il suffit de trouver un élément dans $B(\mathbf{Q}_p)$ pour lequel D_p ne s'annule pas.

Or, d'après le principe de Hensel (voir **(B.6)**), il existe $\xi_N^{-a} \in \mathbf{Q}_p$ avec ξ_N une racine N-ième de l'unité et comme $\beta(N\{\xi_N^{-a}\}) = N(\xi_N^{-a} \wedge (1 - \xi_N^{-a})) = (\xi_N^{-a})^N \wedge (1 - \xi_N^{-a}) = 0$ donc $N\{\xi_N^{-a}\} \in B(\mathbf{Q}_p)$.

Il reste donc à montrer que $D_p(N\{\xi_N^{-a}\}) = l_{2,p}(N\{\xi_N^{-a}\}) \neq 0$.

Soit Ξ un caractère primitif de Dirichlet de conducteur d et w le caractère de Teichmuller sur $\mathbf{Z}_p^*$ [Wa], on remarque d'après la relation [Col]:

$$L_p(2, \Xi \otimes w^{-1}) = (1 - \tfrac{\Xi(p)}{p^2}) g(\Xi, \xi) d^{-1} \sum_{a=1}^{d-1} \bar{\Xi}(a) l_{2,p}(\xi^{-a})$$

qu'il suffit de montrer que cette L-fonction p-adique $L_p(2, \Xi \otimes w^{-1})$ est non triviale.

D'après [Co] ceci est vrai (voir (**B.7**)). D'où le résultat.

4. LIEN AVEC LA TRACE CYCLOTOMIQUE

On établira dans ce dernier paragraphe le lien entre le régulateur p-adique R_p et la trace cyclotomique Trc définie dans $[BHM]$.

4.1 Rappels

Soient A un anneau et $THH(A)$ l'homologie de Hochschild topologique telle que définie dans $[B]$.

L'homologie cyclique topologique est définie par $[BHM]$, elle associe à tout anneau A et à tout nombre premier p un espace de lacets infini.

$$TC(A,p) = [\underleftarrow{holim}\, THH(A)^{C_{p^n}}]^{h\phi_p}$$

où C_{p^n} désigne le groupe cyclique d'ordre p^n et ϕ_p une application simpliciale de

$sd_{p^n} THH_{.}(A)^{C_{p^n}}$ vers $sd_{p^{n-1}} THH_{.}(A)^{C_{p^{n-1}}}$ ($sd_{.}$ désigne la subdivision barycentrique).

la trace cyclotomique est une transformation naturelle dans la catégorie des espaces de lacets

$$Trc : K(A) \to TC(A,p).$$

Enfin, soit β l'application induite par la projection de $\underleftarrow{holim}$ sur le zéro terme.

4.1.1 Théorème (voir $[BHM]$): *Il existe un foncteur naturel*

$$L : THH(A) \to HH(A)$$

telle que la composée

$$K(A) \xrightarrow{Trc} TC(A,p) \xrightarrow{\beta} THH(A) \xrightarrow{L} HH(A)$$

est la trace de Dennis.

4.2 Relation entre le régulateur p-adique et la trace cyclotomique.

4.2.1 théorème: *Soit A' une $\mathbf{Q}$-algèbre ultramétrique vérifiant: il existe un entier s et une constante C_s tels que $\| 1/k \| \leq C_s k^s$ $\forall k \in \mathbf{N}^*$ et I un idéal bilatère de A'.*

Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
K_{2n+1}(A') & \xrightarrow{Trc} & TC_{2n+1}(A',p) & \xrightarrow{\beta} & THH_{2n+1}(A') & \xrightarrow{L} & HH_{2n+1}(A') \\
\uparrow & & & & & & \downarrow \\
K_{2n+1}(A',I) & \xrightarrow{R_p} & HC^{top}_{2n}(A') & & \longleftarrow & & HH^{top}_{2n+1}(A')
\end{array}$$

,

Démonstration

La proposition (2.3) et les théorèmes (3.1.1) et (4.1) permettent d'avoir le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
K_{2n+1}(A') \arrow[r, "Trc"] \arrow[d, equal] & TC_{2n+1}(A',p) \arrow[r, "\beta"] & THH_{2n+1}(A') \arrow[r, "L"] & HH_{2n+1}(A') \arrow[d] \\
K_{2n+1}(A') \arrow[rrr, "D_n^{top}"] & & & HH^{top}_{2n+1}(A') \arrow[d] \\
K_{2n+1}(A',I) \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"'] & K^{rel}_{2n+1}(A') \arrow[ul] \arrow[r] & C^{\lambda top}_{2n}A'/bC^{\lambda top}_{2n+1}A' \arrow[r, "B"'] & C^{top}_{2n+1}A'/bC^{top}_{2n+2}A'
\end{tikzcd}$$

D'où le résultat.

APPENDICE B

(B.1) Soit le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & X_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & X_5 \\
\downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\
Y_1 & \xrightarrow[\beta_1]{} & Y_2 & \xrightarrow[\beta_2]{} & Y_3 & \xrightarrow[\beta_3]{} & Y_4 & \xrightarrow[\beta_4]{} & Y_5
\end{array}$$

Le but est de démontrer le lemme suivant:

Lemme: *Si f_2 et f_4 sont surjectives et f_5 est injective alors f_3 est surjective.*

Démonstration

Soit $y \in Y_3$ et $z = \beta_3(y)$.

Comme f_4 est surjective, il existe $t \in X_4$ tel que $f_4(t) = z$ qui vérifie $\alpha_4(t) = 0$ (car $\beta_4(z) = 0$ et f_5 injective). Donc il existe $x \in X_3$ tel que $\alpha_3(x) = t$.

On a $\beta_3(f_3(x)) = f_4(\alpha_3(x)) = f_4(t) = z = \beta_3(y)$ donc $y - f_3(x) \in Ker\beta_3 = Im\beta_2$. D'où l'exitence de $y_0 \in Y_3$ tel que $y = f_3(x) + \beta_2(y_0)$. Or f_2 est surjective donc $y_0 = f_2(x_0)$.

Ce qui implique que $y = f_3(x) + \beta_2(f_2(x_0)) = f_3(x + \alpha_2(x_0))$.C.Q.F.D.

(B.2) Soit $G = GL(A/I)/\overline{GL}(A/I)$, on a une suite exacte

$$1 \to \overline{GL}(A/I) \to GL(A/I) \to G \to 1.$$

Ce qui implique une fibration

$$B\overline{GL}(A/I)^+ \to BGL(A/I)^+ \to BG^+.$$

D'où la longue suite exacte

$$\cdots \to \Pi_{i+1}(BG^+) \to \Pi_i(B\overline{GL}(A/I)^+) \to \Pi_i(BGL(A/I)^+) \to \Pi_i(BG^+) \to \cdots.$$

Ce qui implique un isomorphisme $\Pi_i(B\overline{GL}(A/I)^+) \xrightarrow{\cong} \Pi_i(BGL(A/I)^+)$ $\forall i \geq 2$ car G est un groupe abélien puisque $E(A/I) \subset \overline{GL}(A/I)$.

(B.3) soit $\epsilon = \begin{pmatrix} p & * & * \\ p & \ddots & * \\ p & p & p \end{pmatrix} \in GL_r(A)$, il s'agit de montrer que $\epsilon^{kr+1} \in p^k GL_r(A)$.

Pour $k = 1$, on a:

Si $m = 2$ alors $\epsilon = \begin{pmatrix} p & * \\ p & p \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon^2 = \begin{pmatrix} p & p \\ p^2 & p \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon^3 = \begin{pmatrix} p^2 & p \\ p^2 & p^2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} p & * \\ p & p \end{pmatrix}$.

Si $m = 3$ alors $\epsilon = \begin{pmatrix} p & * & * \\ p & p & * \\ p & p & p \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon^2 = \begin{pmatrix} p & p & * \\ p & p & p \\ p^2 & p & p \end{pmatrix}$ et $\epsilon^3 = \begin{pmatrix} p & p & p \\ p^2 & p & p \\ p^2 & p^2 & p \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \epsilon^4 = \begin{pmatrix} p^2 & p & p \\ p^2 & p^2 & p \\ p^2 & p^2 & p^2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} p & * & * \\ p & p & * \\ p & p & p \end{pmatrix}$.

Si $m = 4$ alors $\epsilon = \begin{pmatrix} p & * & * & * \\ p & p & * & * \\ p & p & p & * \\ p & p & p & p \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon^2 \begin{pmatrix} p & p & * & * \\ p & p & p & * \\ p & p & p & p \\ p^2 & p & p & p \end{pmatrix}$ et $\epsilon^3 = \begin{pmatrix} p & p & p & * \\ p & p & p & p \\ p^2 & p & p & p \\ p^2 & p^2 & p & p \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \epsilon^4 = \begin{pmatrix} p & p & p & p \\ p^2 & p & p & p \\ p^2 & p^2 & p & p \\ p^2 & p^2 & p^2 & p \end{pmatrix}$ et $\epsilon^5 = \begin{pmatrix} p^2 & p & p & p \\ p^2 & p^2 & p & p \\ p^2 & p^2 & p^2 & p \\ p^2 & p^2 & p^2 & p^2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} p & * & * & * \\ p & p & * & * \\ p & p & p & * \\ p & p & p & p \end{pmatrix}$.

Ceci s'étend à m quelconque et à k quelconque. En effet, toute matrice de $GL_r(A)$ a $2r-1$ diagonales et chaque multiplication par ϵ nous permet de multiplier une diagonale par p en partant de la dernière diagonale. D'où le résultat.

(B.4) Il s'agit de calculer l'application β qui résulte de la composée suivante:

$$H_0(G,C_3) \xrightarrow{\delta} H_0(G,Z_2) \overset{l'}{\cong} H_1(G,Z_1) \overset{l}{\cong} H_2(G,Z_0) \to H_2(G,C_0) \xrightarrow{\rho} H_2(B_2,\mathbf{Z}) \xrightarrow{d_*} H_2(T_2,\mathbf{Z})$$

Pour tout G-module M, on note $C_*^{bar}(G,M)$ le complexe standard non-homogène normalisé où $C_q^{bar}(G,M)$ est engendré par les symboles $[g_1|\cdots|g_q]x$ avec $g_i \in G$ et $x \in M$ et le bord ∂_G est donné par

$$\delta_G[g_1|\cdots|g_q]x = [g_2|\cdots|g_q]x + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i [g_1|\cdots|g_i g_{i+1}|\cdots|g_q]x + (-1)^q [g_1|\cdots|g_q] g_q(x).$$

Pour définir ρ, on considère l'application $\hat{}: G \to G$ une section quelconque de $G \to G/B_2$. Soient $x_1, \cdots, x_q, y$ dans g et soit $z_i = x_{i+1} \cdots x_q y$.

On définit alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \rho: & C_*^{bar}(G, ind_{B_2}^G \mathbf{Z}) & \to & C_*^{bar}(B_2, \mathbf{Z}) \\ & [x_1|\cdots|x_q]yB_2 & \to & [\hat{z}_0^{-1}x_1\hat{z}_1|\cdots|\hat{z}_{q-1}^{-1}x_q\hat{z}_q] \end{array}$$

On vérifie facilement que ρ est un quasi-isomorphisme de complexes inverse à l'inclusion de B_2 dans G.

Soit $z \in \mathbf{Q}_p - \{0,1\}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ l'élément du groupe de Weyl dans $G = PGL_2(\mathbf{Q}_p)$.

Soient $g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-z & z \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g_3 = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On définit $\hat{}: G \to G$ de la manière suivante:

$$\hat{g} = \begin{cases} 1 & \text{si } g(\infty) = \infty \\ w & \text{si } g(\infty) = 0 \\ g_2 w & \text{si } g(\infty) = 1 \\ g_2^2 w & \text{si } g(\infty) = z \end{cases}$$

On a alors $\partial\{z\} = (0,1,z) - (\infty,1,z) + (\infty,0,z) - (\infty,0,1) = (g_1 - g_2 + g_3 - 1)(\infty,0,1) = \partial_G X_1$ dans $C_*^{bar}(G, C_2)$ avec $X_1 = [g_2 g_1^{-1}]g_1(\infty,0,1) - [g_3](\infty,0,1)$.

On obtient alors $l'\partial\{z\}$ en appliquant ∂ à X_1. D'où $l'\partial\{z\} = \partial X_1 = \partial_G X_2$ avec $X_2 = [g_3g_1g_2^{-1}|g_2g_1^{-1}](0,1) - [g_3g_2g_1^{-1}|g_3g_1g_2^{-1}](\infty,1) - [g_3g_2g_1^{-1}g_3^{-1}g_1g_2^{-1}|g_2g_1^{-1}](0,z) + [g_3g_2g_1^{-1}g_3^{-1}g_1g_2^{-1}|g_2^2](\infty,0) - [g_2^2|g_3^2](\infty,0) + [g_2g_1^{-1}|g_1^2](\infty,0) - [g_1^2|g_3^{-1}](\infty,0) + [g_3^{-1}|g_3^2](\infty,0)$.

Ceci s'obtient en utilisant les égalités:

$$g_1^{-1}g_3^{-1}g_1g_2 = u_1 = \text{multiplication par } z(z-1) = \begin{pmatrix} z(z-1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2^{-2}g_3g_2 = u_2 = \text{multiplication par } z/(z-1) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix}$$

$g_3g_2g_1^{-1}g_3^{-1}g_1g_2^{-1} = g_2^2g_3^2g_2^{-2}$

$g_1^{-1}g_2^{-1}g_1^2 =$ multiplication par $z = g_3$

$g_2g_1^{-1} = g_1^2g_3^{-1}g_1^{-2}$

De même, on a $ll'\partial\{z\} = \partial X_2$. On applique alors ρ définie précédement, ensuite d_* pour obtenir que $\beta\{z\} \in H_2(T_2, \mathbf{Z})$ est représentée par:

$[z-1|z^{-1}] - [z^{-2}|z] + [z^3|z^{-2}] - [z^{-1}|z-1] + [z^2|z] - [z^{-2}|z] - [z^2|(z-1)^2] + [z|1]$

$-[z^{-1}|z-1] + [z-1|z^{-1}] - [1|z] + [(z-1)^2|z^2] - [1|z^{-2}] + [z|z^{-2}] - [z^{-1}|z^2]$.

Or l'identification $H_2(T_2, \mathbf{Z}) \cong \bigwedge^2_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Q}_p^\times)$ est obtenue en indentifiant $a \wedge b$ avec $[b^{-1}|a^{-1}] - [a^{-1}|b^{-1}]$. Il ne reste plus qu'à utiliser le fait que $\partial_{T_2}[z^2|z|z^{-2}] = [z|z^{-2}] - [z^3|z^{-2}] + [z^2|z^{-1}] - [z^2|z]$, pour obtenir:

$$\varphi\{z\} = 2.z \wedge (1-z) + z^{-1} \wedge z^2 = 2.z \wedge (1-z).$$

(B.5) Soit $\phi(g_1, \cdots, g_{2n+1}) = Tr \int_{\Delta_{2n+1}} (\nu^{-1}(x)d\nu(x))^{2n+1}$

où $x = (x_i)_{0 \le i \le 2n+1}$ représente un point du $(2n+1)$-simplexe standard Δ_{2n+1} et $\nu(x) = \sum_{i=0}^{2n} x_i g_{i+1} \cdots g_{2n+1} + x_{2n+1}$.

Il s'agit de montrer que $u^3(\phi) \neq 0$ avec $u^3 : H_c^*(G, M) \to H^*(L, M)$ l'isomorphisme du théorème 3.2.1.6 définie par la composée

$$u^3 = \beta^3 a^3 \alpha^3$$

Les applications α^3 et β^3 sont définies dans la proposition 3.2.2.1 de la manière suivante:

$$\alpha^3 : \mathcal{C}(G^3, M) \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_3, M)$$
$$\beta^3 : Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_3, M) \to Hom_{UL_0}(Z_3, M)$$

définies pour $f \in \mathcal{C}(G^3, M)$, $F \in Hom(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_3, M)$, $\varphi \in Hom(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_3, M)$ et $\phi \in Hom(Z_3, M)$ par:

$$\alpha^3(f)(\lambda^{-1} \otimes cl(a').e) = \begin{cases} [1 \otimes cl(\lambda a')]g(e) & \text{si} \quad w_{A'}(\lambda a') \ge 0 \\ [\lambda'^{-1} \otimes cl(\lambda'\lambda a')]g(e) & \text{si} \quad w_{A'}(\lambda a') = -v(\lambda') \le 0 \end{cases}$$

avec $g : A \otimes \hat{T}^3 A \to M$ définie par $g(a \otimes x) = a.\bar{f}(x)$ où $\bar{f}$ est le prolongement de f à $Al(G^3) \cong \hat{T}^3 A$ et $\{e\}$ une base fitrée de $X_3 = A \hat{\otimes} \hat{T}^3 A$.

$\beta^3(\varphi)(e') = \varphi(1_{\mathbf{Q}_p} \otimes cl(1_{UL'_0}).e')$ avec $\{e'\}$ une base filtrée de $Z_3 = UL_0 \otimes \bigwedge^3 L_0$.

Il reste donc à définir

$$a^3 : Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatX_3, M) \to Hom_{\mathcal{C}_B}(\mathbf{Q}_p \otimes SatZ_3, M)$$

Pour celà, il suffit de construire des morphismes de complexes $a_n : (SatZ_n, d_n) \to (SatX_n, \delta_n)$ qui prolonge l'isomorphisme naturel $a : SatUL_0 \to SatA$.

Soit alors l'application de $T^n L_0 \to UL_0 = TL_0/\{x \otimes y - y \otimes x - [x,y]\}$ qui à $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ associe la classe de $\sum\limits_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ dans UL_0. Cette application passe au quotient pour induire une application $\bigwedge^n L_0 \to UL_0$.

Soit alors l'application composée $a_n : Sat \bigwedge^n L_0 \to SatUL_0 \xrightarrow{a} SatA \xrightarrow{s_n} SatT^n A$.

L'application $a_n : SatZ_n \to SatX_n$ est alors définie de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} SatZ_n = & Sat & (SatUL_0 & \otimes & Sat \bigwedge^n L_0) \\ a_n \downarrow & & a \downarrow & & a_n \downarrow \\ SatX_n = & Sat & (SatA & \hat{\otimes} & SatT^n A) \end{array}$$

On vérifie alors qu'on a bien un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} SatZ_{n+1} & \xrightarrow{d_n} & SatZ_n \\ a_{n+1} \downarrow & & \downarrow a_n \\ SatX_{n+1} & \xrightarrow[\delta_n]{} & SatX_n \end{array}$$

Il reste donc à calculer $u^3(\phi) = \beta^3 a^3 \alpha^3(\phi)$.

Un calcul directe donne

$u^3(\phi)(e') = Sat\bar{\phi}(\sum_{\sigma\in\Sigma_3} \epsilon(\sigma)cl[a(U_{\sigma(1)}) \otimes a(U_{\sigma(2)}) \otimes a(U_{\sigma(3)})]$ où $e' = 1 \otimes U_1 \wedge U_2 \wedge U_3$ est une base filtrée de Z_3 et où $\bar{\phi}$ est le prolongement de ϕ à $Al(G^3)$.

En se restreingnant à $G \to AlG$, on peut considérer que $a(U_{\sigma(i)}) = 1 + t_iU_{\sigma(i)}$ avec t_i au voisinage de 0 et on a alors

$$u^3(\Phi)(e') = V(\Delta_3)Tr \sum_{\sigma\in\Sigma_3} \epsilon(\sigma)[t_1U_{\sigma(1)} + t_2U_{\sigma(2)} + t_3U_{\sigma(3)}][t_2U_{\sigma(2)} + t_3U_{\sigma(3)}]t_3U_{\sigma(3)}$$

Pour voir que $u^3(\Phi)$ n'est pas un cobord, il suffit de considérer les isomorphismes

$$H^3(\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}), \mathbf{Q}) \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{Q}_p = H^3(\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}_p), \mathbf{Q}_p)$$

$$H^3(\mathcal{S}l_2(\mathbf{Q}), \mathbf{Q}) \underset{\mathbf{Q}}{\otimes} \mathbf{C} = H^3(\mathcal{S}l_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})$$

Or on sait d'une manière analogue à 3.3.3.5 que $dim_{\mathbf{C}}H^3(\mathcal{S}l_2(\mathbf{C}), \mathbf{C}) = 1$ et que l'image de $u^3(\Phi)$ dans $H^3(\mathcal{S}l_2(\mathbf{C}), \mathbf{C})$ est le cocycle de Borel. On conclut donc à la non-trivialité de $u^3(\Phi)$.

(B.6) Il s'agit de trouver ξ_N une racine N-ième de l'unité dans $\mathbf{Z}_p$.

On considére l'application $\mathbf{Z}_p \to \mathbf{F}_p$ et on veut résoudre dans $\mathbf{F}_p$ l'équation $y^N = 1$.

Soit $x_0 \in \mathbf{Z}_p$ tel que $\bar{x}_0 = y$ alors $x_0^N = 1 + p\lambda$.

Soit $y = x_0(1 + p\lambda)^{-\frac{1}{N}}$. Alors $y \in \mathbf{Z}_p$ en effet $(N, p) = 1$ donc il existe $u, v \in \mathbf{Z}$ tels que $\frac{1}{N} = \frac{u}{1-pv} = u(1 + pv + p^2v^2 + \cdots$ donc N est inversible dans $\mathbf{Z}_p$. de même, $(N^k, p) = 1\forall k$ donc N^k est inversible dans $\mathbf{Z}_p$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

D'où $(1 + p\lambda)^{-\frac{1}{N}} = 1 + \frac{b_1}{N}p\lambda + \frac{b_2}{N^2}p^2\lambda^2 + \cdots + \frac{d_k}{n^k}p^k\lambda^k + \cdots \in \mathbf{Z}_p$.

Ceci finit la démonstration puisque $y^N = x_0^N(1 + p\lambda)^{-1} = (1 + p\lambda)(1 + p\lambda)^{-1} = 1$.

(B.7) Cette démonstration est due à P.COLMEZ:

Il s'agit de trouver une racine $p - 1$-ième de l'unité ξ telle que $D_{k,p}(\xi) \neq 0$.

Ceci revient d'après [Col], à montrer qu'il existe Ξ un caractère primitif de Dirichlet tel que $L_p(\Xi, k) \neq 0$.

Comme $\xi \in \mu_{p-1}$ alors il existe un entier i tel que $\Xi = w^i$. Il faut donc montrer que la i-ième branche de la fonction zeta p-adique $L_p(w^i, k) = \zeta_{p,i}(k) \neq 0$ où w est le caractère de Teichmuller.

Or $\zeta_{p,i}(s) = g_i((1+p)^s - 1)$ où $g_i(T) \in \mathbf{Z}_p[[T]]$ on a donc le résultat suivant:

$$\text{s'il existe } k_0 \text{ tel que } v_p(\zeta_{p,i}(k_0)) \neq 0 \text{ alors } v_p(\zeta_{p,i}(k)) \neq 0 \text{ pour tout } k$$

car $g_i((1+p)^s - 1)$ est une série formelle où tous les termes sont divisibles par p sauf peut-être la constante.

D'autre part, on sait que $\zeta_p(-1) = -\frac{1}{12}$, on choisit donc la i-ième branche de la fonction zeta qui passe par $\zeta_p(-1)$.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[*A*] J.AISBETT *On K_3 and K_4 of integers mod n*, B.A.M.S Vol 6 n3 (1982), pp417-420.

[*Bl*] Ph.BLANC *Sur la cohomologie continue des groupes localement compacts*, A.S.E.N.S 12 (1979) pp137-168.

[*B*] M.BOKSTEDT *Topological Hochschild homology*, Topology

[*B*1] S.BLOCH *Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry*, Proc.Int.Symp.Alg.Geom., Kyoto (1977), pp 1-14.

[*B*2] S.BLOCH *Higher regulators, algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves*, L.N.U.C.Irvine (1977).

[*B.H.M*] M.BOKSTEDT-W.C.HSIANG-I.MADSEN *The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces*, Invent.Math. 11 (1993), pp 465-540.

[*Bo*1] A.BOREL *Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers*, A.S.E.N.S. Pisa 4 (1974), pp 613-636.

[*Bo*2] A.BOREL *Stable real cohomology of arithmetic groups*, A.S.E.N.S 7 (1974), pp 253-272.

[*Bou*] N.BOURBAKI *Groupes et algèbres de Lie*, Chap.2 et 3, Hermann (1972).

[*Br*] K.S.BROWN *Cohomolgy of groups*, Springer-verlag 87 (1982).

[*Ca-W*] W.CASSELMAN-D.WIGNER *Continous cohomology and a conjecture of Serre's*, Invent.Math 25 (1974), pp199-211.

[*CH*] C.CHEVALLEY *Theory of Lie groups*, Princeton.Math.8 (1946).

[*Col*] R.F.COLEMANN *Dilogaritms, Regulators and p-adic L-functions*, Invent.Math. 69 (1982), pp171-208.

[*Co*] P.COLMEZ (Communications privés) (voir (B.7)).

[*C*] A.CONNES *Non commutative differential geometry*, Part2 (1983).

[*Ca*] J.L.CATHELINEAU *Homologie du groupe linéaire et polylogarithmes*, Séminaire Bourbaki 772 (1992-93) , Astérisque 216, pp 311-341.

[*Cv*] A.CALVO *K-théorie des anneaux ultramétriques*, C.R.A.S 300 n14 (1985), pp 459-462.

[*C-K*] A.CONNES-M.KAROUBI *Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm*, K-theory 2 (1988), pp 431-463.

[*D*1] J.L.DUPONT *The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles*, J.pure and applied algebra 44 n1-3 (1987) , pp137-164.

[*D*2] J.L.DUPONT *Simplicial De Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles*, Toplogy 15 (1975), pp 233-245.

[D-H-Z] DUPONT-HAIN-ZUCKER *Regulators and characteristic classes of flat bundles*

[*D-S*] J.L.DUPONT-C.H.SAH *Scissors congruences, II*, J.Pure and Applied Algebra 25 (1982), pp159-195.

[*G*] T.G.GOODWILLIE *Relative algebraic K-theory and cyclic homology*, Annals of math. 124 (1986), pp347-402.

[*Go*1] A.B.GONCHAROV *The classical polylogarithm, algebraic K-theory of fields* *and Dedekind zeta functions*, Bull.A.M.S (1) 29 (1991), pp 155-161.

[*Go*2] A.B.GONCHAROV *Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology*, Adv.Math.114 n1 (1995), pp 197-318.

[*Gu*] A.GUICHARDET *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie* (1980), Cedic/Fernand Nathan.

[*Ho*] R.HOOKE *Linear p-adic groups and their Lie algebras*, Ann.Math 43 (1942).

[*H*] D.HUSMOLLER *Fiber bundles*, Springer Verlag (1994).

[*HN*] N.HAMIDA *Description explicite du régulateur de Borel*, C.R.Acad.Sci.Paris, t330, SérieI,pp169-172 (2000).

[*K*1] M.KAROUBI *Connexions, courbures et classes caractéristiques en K-théorie algébrique*, Canadian Math. Soc. Conf. Proceeding vol2 part I Current trends in algebraic topology (1982), pp 19-27.

[*K*2] M.KAROUBI *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque 149 (1987).

[*K*3] M.KAROUBI *Homolgie cyclique et régulateurs en K-théorie algébrique*, C.R.A.S 297 n10 (1983), pp 557-560.

[*La*] M.LAZARD *Groupes analytiques p-adiques*, Publ.Math.I.H.E.S 26 (1965).

[*Lo*1] J.L.LODAY *Cyclic homology*,(19) Springer Verlag.

[*Lo*2] J.L.LODAY *K-théorie algébrique et représentations des groupes*, A.S.E.N.S(4) 9 n3 (1976), pp 309-377.

[*M*1] I.MADSEN *The cyclotomic trace in algebraic K-theory*

[*M*2] I.MADSEN *Trace maps in algebraic K-theory and the Coates-Wiles homomorphism*, J.Reine Angew.Math 411 (1990), pp 171-195.

[McL] S.MAC LANE *Homology*, Grundlehren Math. Wissenschaften 114, Springer-Verlag (1963).

[MY] J.P.MAY *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand Math. studies n11 (1967).

[O] J.OSTERLE *Polylogarithmes*, Séminaire Bourbaki 762 (1992-93).

[Q] D.QUILLEN *Higher algebraic K-theory*, Lect.Notes.Math 341 pp85-147 (1973).

[$So1$] C.SOULE *On higher p-adic regulators*, Springer lecture Notes, 854 (1981), pp372-401.

[$So2$] C.SOULE *Régulateurs*, Séminaire Bourbaki 644 (1984-1985), Astérisque 133-134 (1986).

[$S1$] A.A.SUSLIN *Stability in algebraic K-theory*, Lect.Notes.Math 966, pp304-333.

[$S2$] A.A.SUSLIN *K_3 of a field and the Bloch group*, Proceedings of the Steklov institute of math. (1991), Issue 4.

[$S3$] A.A.SUSLIN *Algebraic K-theory of fields*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Berkley, California (1986), pp222-244.

[$S-W$] C.H.SAH-J.B.WAGONER *Second homology of Lie groups made discrete*, Comm. in Algebra 5 (1977), pp611-642.

[V] L.N.VASERHTEIN *Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces*, Translated from Funktsional'nyi Analiz Ego Prilozheniya, Vol 5 No 2, pp17-27.

[W] J.WAGONER *The $\mathbf{Z}_p$-regulator problem for K_3*, Contempory Mathematics Vol 55 Part 2 (1986).

[Wa] L.C.WASHINGTON *Introduction to cyclotomic fields*,(1982) Springer Verlag 83.

[Y] J.YANG *The Hain-MacPherson third logarithm, the third Borel regulator and the values of Dedekind zeta function at 3*,preprint.

[$Z1$] D.ZAGIER *Hyperbolic manifolds and special values of Dedekind zeta functions*, Inv.Math. 83 (1986), pp285-301.

[$Z2$] D.ZAGIER *Polylogarithms, dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields*, Proc.Texel Conf.on Aritm.Alg.Geometry (1989), Birkhausser, Boston (1991), pp391-430.