UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS 6

THESE DE DOCTORAT

Spécialité :

MATHEMATIQUES

Sur quelques problèmes non-linéaires en analyse géométrique

présentée par

Nicolas SAINTIER

pour obtenir le grade de
DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

soutenue le 8 décembre 2005 devant le jury composé de :

Emmanuel HEBEY	*directeur*
Thomas LACHAND-ROBERT	*rapporteur*
Elisabeth LOGAK	
Petru MIRONESCU	*rapporteur*
Sami MUSTAPHA	
Michel VAUGON	*directeur*

Thèse présentée à l'université Paris 6, effectuée sous la codirection des Professeurs Emmanuel Hebey (université de Cergy-Pontoise) et Michel Vaugon (université de Paris 6).

Publications issues de la thèse :

[1] N. Saintier, Asymptotic estimates and blow-up theory for critical equations involving the p-laplacian, à paraître dans la revue *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*.

[2] E. Hebey et N. Saintier, Stability and perturbations of the domain for the first eigenvalue of the 1-laplacian, à paraître dans la revue *Archiv der Mathematik*.

[3] N. Saintier, Changing sign solutions of a conformally invariant fourth order equation in the euclidean space, à paraître dans la revue *Communications in Analysis and Geometry*.

Merci ...

Je remercie tout d'abord Emmanuel Hebey et Michel Vaugon de m'avoir encadré pendant ces trois années de thèse, de m'avoir aidé et guidé lors de mes recherches dans les moments essentiels.

Je remercie également Thomas Lachand-Rober et Petru Mironescu d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse et Elisabeth Logak ainsi que Sami Mustapha d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Je remercie également ma mère et mes grand - parents de m'avoir toujours encouragé et mes amis de m'avoir supporté.

Je remercie enfin Magda d'avoir été à mes côtés.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est composée de trois chapitres traitant de trois problèmes indépendants dans le domaine de l'analyse non-linéaire sur les variétés. Le premier chapitre est tiré de l'article [47] à paraître dans la revue *Calculus of Variations and PDEs*. Il est consacré au développement d'une théorie H_1^p de renormalisation (on parle encore de blow-up) pour un problème critique non-linéaire impliquant l'opérateur p-laplacien. On y établit la validité de la décomposition H_1^p pour une large famille d'équations construites à partir du p-laplacien défini par $\Delta_p u = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ où $1 < p < n$, et n est la dimension de l'espace. Le caractère critique des équations renvoie aux inclusions de Sobolev par perte de compacité. L'aspect hautement non-linéaire de l'opérateur p-laplacien rend l'étude techniquement plus difficile que dans le cas du laplacien usuel, correspondant au cas où $p = 2$. Le second chapitre, écrit en collaboration avec E. Hebey, est consacré à l'étude de problèmes de perturbation de la première valeur propre du 1-laplacien Δ_1 sur des domaines bornés de $\mathbb{R}^n$ avec condition de Dirichlet nulle au bord. Le problème consiste à décrire le comportement du λ_1 lorsque l'on perturbe le domaine sur lequel il est regardé. L'opérateur 1-laplacien est fortement dégénéré. C'est un opérateur formel que l'on peut regarder comme étant la limite naturelle quand $p > 1$ et $p \to 1$ du p-laplacien étudié au premier chapitre. La description du comportement perturbatif du λ_1 fait appel à la notion de 1-capacité d'un domaine introduite en théorie du potentiel. Le troisième et dernier chapitre est consacré à l'étude d'un problème non-linéaire critique d'ordre 4 dans l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. On y démontre l'existence d'une infinité de solutions changeant de signe pour l'équation $\Delta^2 u = |u|^{2^\sharp-2}u$, où $2^\sharp$ est critique pour les inclusions de Sobolev, et Δ est le laplacien euclidien. L'étude fait appel aux propriétés d'invariance conforme de l'opérateur de Paneitz-Branson, aux propriétés des espaces de Sobolev de fonctions présentant des symétries, étudiés par Hebey-Vaugon [36], et aux techniques variationnelles d'Ambrosetti et Rabinowitz [3]. Les deux derniers chapitres de la thèse sont tirés des articles [35] et [48] à paraître dans *Archiv der Mathematik* et *Communication in Analysis and Geometry*.

Comme mentionné plus haut, le premier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude d'une équation critique impliquant l'opérateur p-laplacien où $1 < p < n$. Le contexte est celui d'une variété riemannienne compacte (M, g) de dimension n. Le p-laplacien $(\Delta_p)_g$ associé à g s'écrit sous la forme $(\Delta_p)_g u = -\mathrm{div}_g \left(|\nabla u|_g^{p-2} \nabla u\right)$. On considère dans ce premier chapitre une suite convergente (h_α) dans $C^{0,\theta}(M)$, $0 < \theta < 1$, de limite h_∞ pour laquelle l'opérateur $(\Delta_p)_g + h_\infty$ est coercif. Par coercif, suivant la définition usuelle, on entend que l'énergie associé à l'opérateur contrôle la norme de l'espace de Sobolev H_1^p des fonctions de L^p ayant leurs dérivées premières dans L^p. On considère ensuite des équations du type

$$(\Delta_p)_g u + h_\alpha u^{p-1} = u^{p^*-1} \tag{1}$$

où $p^* = \frac{np}{n-p}$ est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection des espaces de Sobolev $H_1^p(M)$ dans les espaces de Lebesgue $L^q(M)$. Le cas $p = 2$ dans ces équations correspond aux équations dites de Yamabe. Le cas $p > 1$, $p \to 1$, renvoie à l'isopérimétrie. L'objectif que nous nous fixons est de décrire de façon précise le comportement asymptotique des suites de solutions (ou plus généralement de Palais-Smale) des équations (1). Le principe de concentration - compacité de Lions règle facilement la question d'une théorie L^p (plus précisemment $L^{p^\star}$) pour ces équations, où l'asymptotique est décrite sous forme d'une somme de mesure de Dirac. On s'attaque pour notre part, dans le premier chapitre, à la question d'une théorie H_1^p en décrivant l'asymptotique sous la forme d'une somme de bulles. Les mesures de Dirac de la théorie $L^{p^\star}$ sont par suite les limites (formelles) des bulles de la théorie H_1^p. Toujours dans le premier chapitre, on aborde également la théorie C^0 en montrant qu'une estimée ponctuelle peut être rajoutée à la description en bulles lorsque cette description s'applique à des suites de solutions. Une bulle (B_α) en théorie H_1^p est, en gros, une famille à un paramètre obtenue par renormalisation d'une solution de l'équation $\Delta_p u = u^{p^\star-1}$ dans $\mathbb{R}^n$, où Δ_p est le p-laplacien euclidien. On écrira localement que

$$B_\alpha(x) = R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u \left(R_\alpha \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right)$$

où u est solution de $\Delta_p u = u^{p^\star-1}$ dans $\mathbb{R}^n$, $R_\alpha \to +\infty$ lorsque $\alpha \to +\infty$, et $\exp_{x_\alpha}$ est l'application exponentielle en x_α. On dit que les x_α sont les centres de la bulle (B_α). La puissance $(n-p)/p$ est l'exacte puissance qui permet la conservation de la norme $L^{p^\star}$. Dans $\mathbb{R}^n$, si $u \in L^{p^\star}$, et u_λ est la fonction donnée par $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n-p}{p}} u(\lambda(x-a))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, comme on le vérifie facilement, $\|u_\lambda\|_{2^\star} = \|u\|_{2^\star}$. L'équation limite associée à (1) est l'équation

$$(\Delta_p)_g u + h_\infty u^{p-1} = u^{p^*-1} \,. \tag{2}$$

Le principal résultat que nous obtenons dans ce premier chapitre est le suivant :

Théorème 0.0.1 *Soient (M, g) une variété riemannienne lisse compacte de dimension n, $p \in (1, n)$, et $(h_\alpha)_\alpha$ une suite de fonctions définies sur M de classe $C^{0,\theta}$, $0 < \theta < 1$, convergeant dans $C^{0,\theta}(M)$ vers une fonction limite h_∞ pour laquelle $(\Delta_p)_g + h_\infty$ est coercif. Soit $(u_\alpha)_\alpha$ une suite bornée dans $H_1^p(M)$ de solutions positives de (1). Il existe alors une solution $u^0 \in H_1^p(M)$ de l'équation limite (2) et k bulles $(B_\alpha^i)_\alpha$, $i = 1 \dots k$, telles que, à sous-suite près,*

$$u_\alpha = u^0 + \sum_{i=1}^{k} B_\alpha^i + S_\alpha$$

où $(S_\alpha)_\alpha$ est une suite de fonctions de $H_1^p(M)$ telles que $S_\alpha \to 0$ dans $H_1^p(M)$ quand $\alpha \to +\infty$. De plus, il existe une constante $C > 0$, indépendante de α et de $x \in M$, telle que pour tout α et tout $x \in M$,

$$\left(\min_{i=1,\dots,k} d_g\left(x_\alpha^i, x\right) \right)^{\frac{n-p}{p}} \left| u_\alpha(x) - u^0(x) \right| \leq C$$

où d_g est la distance induite par la métrique riemannienne g, et les x_α^i sont les centres des bulles $(B_\alpha^i)_\alpha$.

A titre de remarque importante, on montre de plus une propriété d'additivité de l'énergie associée aux différents termes intervenant dans la décomposition donnée par le théorème. Le cas $p = 2$ dans le théorème a été démontré par Struwe [52] en ce qui concerne la décomposition H_1^p, $p = 2$, et par Druet, Hebey et Robert [23] en ce qui concerne l'estimée ponctuelle.

Le second chapitre de la thèse traite de problèmes perturbatifs pour la première valeur propre $\lambda_{p,\Omega}$ du p-laplacien sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ avec condition de Dirichlet nulle au bord. Si Ω_δ est une suite d'ouverts lisses bornés de $\mathbb{R}^n$ "convergeant" vers Ω, on cherche à décrire le comportement de la suite de valeurs propres correspondantes $\lambda_{p,\Omega_\delta}$, et à montrer bien sûr en premier lieu que $\lambda_{p,\Omega_\delta} \to \lambda_{p,\Omega}$. La notion de convergence de la suite (Ω_δ) vers Ω est définie à partir de la p-capacité dans $\mathbb{R}^n$ de l'adhérence de la différence symétrique $\Omega_\delta \Delta \Omega = (\Omega_\delta \backslash \Omega) \bigcup (\Omega \backslash \Omega_\delta)$ de Ω_δ et Ω. On traite dans un premier temps le cas $1 < p < n$ pour une perturbation singulière d'un domaine Ω, à savoir une perturbation de la forme $\Omega_\delta = \Omega \backslash K_\delta$ où K_δ est un fermé lisse de Ω. On montre la convergence des $\lambda_{p,\Omega_\delta}$ vers $\lambda_{p,\Omega}$, et la convergence forte dans $H_1^p(\Omega)$ de la suite des fonctions propres normalisées associées aux $\lambda_{p,\Omega_\delta}$, et ce lorsque la p-capacité de K_δ tend vers 0. L'erreur entre $\lambda_{p,\Omega_\delta}$ et $\lambda_{p,\Omega}$ est estimée en terme de cette p-capacité. Ce type de résultat est bien connu dans le cas $p = 2$ (voir par exemple Flücher [26]). Un tel résultat a par ailleurs été montré par Sango [49] dans le cas $n > p \geq 2$. La démonstration donnée ici est plus générale (ce qui permet de passer à $1 < p < 2$) et plus simple que celle de Sango. Le cas $p = 1$ est traité dans un second temps. La question est ici plus délicate et il nous faut travailler avec les espaces BV des fonctions à variations bornées. Le $\lambda_{1,\Omega}$, défini par un problème de minimisation, est toujours atteint par la fonction caractéristique d'un ensemble de périmètre fini. On récupère alors un lien entre la première valeur propre du 1-laplacien et un problème de nature isopérimétrique lié à la constante de Cheeger. Un tel ensemble extrémal est dit propre. Par passage à la limite en p, $\lambda_{p,\Omega} \to \lambda_{1,\Omega}$ quand $p \to 1$. Comme déjà mentionné, les résultats que nous obtenons font appel à la notion de 1-capacité. La 1-capacité d'un compact K est l'infimum du volume du bord de domaines réguliers et bornés ω sous la contrainte $K \subset \omega$. Le premier résultat que nous obtenons concernant le comportement du $\lambda_{1,\Omega}$ par perturbation du domaine est le suivant :

Théorème 0.0.2 *Soit Ω un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$, (Ω_δ) une suite d'ouverts lisses bornés de $\mathbb{R}^n$ et $K_\delta = adh(\Omega \Delta \Omega_\delta)$. Soit A_δ un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega_\delta}$. Si $cap_1(K_\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$, alors pour tout δ,*

$$|\lambda_{1,\Omega_\delta} - \lambda_{1,\Omega}| = \frac{\epsilon_\delta}{|A_\delta|} cap_1(K_\delta) + o(cap_1(K_\delta))$$

où $\epsilon_\delta \in [0,1]$ et $|A_\delta| \geq C$ pour un certain $C > 0$ et tout δ. En particulier $\lambda_{1,\Omega_\delta} \to \lambda_{1,\Omega}$ quand $\delta \to 0$. De plus, à sous-suite près, $\chi_{A_\delta} \to \chi_A$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ quand $\delta \to 0$, où A est un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega}$.

Ce premier résultat est très général. Il peut être rendu plus précis lorsque l'on connait la forme de la perturbation, et donc de Ω_δ par rapport à Ω. Un exemple type, dont on a déjà parlé à propos de la valeur propre $\lambda_{p,\Omega}$, $p > 1$, est celui d'une perturbation singulière de Ω. Par exemple, $\Omega_\delta = \Omega \backslash K_\delta$, où K_δ est une union de petites boules dont les rayons tendent vers zéro. C'est le cas qui est traité dans notre second résultat énoncé ci-dessous, portant sur la première valeur propre $\lambda_{1,\Omega}$. Si A est un ensemble de périmètre fini, on notera $\partial^* A$ son bord réduit. C'est en gros le sous ensemble du bord de A qui est C^1 au sens de la mesure (l'ensemble des points du bord pour lesquels on peut définir une notion de normale extérieure). Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, $B_x(r)$ désigne la boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de centre x et de rayon r. On notera par ailleurs b_n le volume de $B_0(1)$. Le second résultat que nous obtenons concernant le comportement du $\lambda_{1,\Omega}$ par perturbation du domaine est le suivant :

Théorème 0.0.3 *Soit Ω un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$, A un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega}$, $x_1 \dots x_k$ des points de Ω, $(\epsilon_{i,\delta})_\delta$, $i = 1 \dots k$, k suites de réels positifs convergeant vers 0 quand $\delta \to 0$, $K_\delta = \cup_{i=1}^k \bar{B}_{x_i}(\epsilon_{i,\delta})$, $\delta > 0$ petit, et $\Omega_\delta = \Omega \backslash K_\delta$. On suppose qu'il existe $i_0 \in \{1 \dots k\}$ tel que $\epsilon_{i,\delta} = o(\epsilon_{i_0,\delta})$ pour tout $i \neq i_0$. Alors $cap_1(K_\delta) = \omega_{n-1}\epsilon_{i_0,\delta}^{n-1} + o(\epsilon_{i_0,\delta})$ et*

$$\lambda_{1,\Omega} \leq \lambda_{1,\Omega_\delta} \leq \lambda_{1,\Omega} + \frac{\omega_{n-1}}{|A|}\epsilon_{i_0,\delta}^{n-1} + o(\epsilon_{i_0,\delta}^{n-1})$$

pour tout δ. De plus,

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} \leq \lambda_{1,\Omega} + \begin{cases} o(\epsilon_{i_0,\delta}^{n-1}) \text{ si } x_{i_0} \in int(\Omega \backslash A) \\ \frac{\omega_{n-1} - 2b_{n-1}}{2|A|}\epsilon_{i_0,\delta}^{n-1} + o(\epsilon_{i_0,\delta}^{n-1}) \text{ si } x_{i_0} \in \partial^* A \end{cases} \tag{3}$$

où $int(\Omega \backslash A)$ est l'intérieur de $\Omega - A$.

Le théorème ci-dessus traite du cas d'une perturbation singulière. Notre dernier résultat sur le comportement du $\lambda_{1,\Omega}$ par perturbation du domaine traite du cas d'une perturbation régulière de Ω par difféomorphismes. Dans ce cas, on parvient à montrer la différentiabilité en 0 de l'application $\delta \to \lambda_{1,\Omega_\delta}$. Ce type de perturbation dans le cas du p-laplacien, $p > 1$, fut étudiée par Lamberti [39] et Garcia Melian et Sabina De Lis [45]. Etant donné un ouvert lisse borné Ω de $\mathbb{R}^n$, nous considérons une famille de C^1-difféomorphismes T_δ de la forme

$$T_\delta(x) = (1 - \delta\Lambda)x + R(x, \delta) \tag{4}$$

où $x \in \bar{\Omega}$, $\Lambda \in \mathbb{R}$, $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$ petit, et $R(., \delta) \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ vérifie $R(x, \delta) = o(\delta)$ et $D_x R(x, \delta) = o(\delta)$ quand $\delta \to 0$, uniformément en x. En particulier, $R(x, 0) = 0$ et, si $\Omega_\delta = T_\delta(\Omega)$, alors $\Omega_0 = \Omega$. Le troisième et dernier résultat que nous obtenons concernant le comportement du $\lambda_{1,\Omega}$ par perturbation du domaine est alors le suivant :

Théorème 0.0.4 *Soit Ω un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$ et $\Omega_\delta = T_\delta(\Omega)$ où les T_δ sont des C^1-difféomorphismes de la forme (4). L'application $\delta \to \lambda_{1,\Omega_\delta}$ est alors continue et dérivable en 0, de dérivée en 0 donnée par $(\lambda_{1,\Omega_\delta})'_0 = \Lambda\lambda_{1,\Omega}$.*

Dans le cadre de ce résultat, il est des exemples de domaines Ω et de difféomorphismes T_δ pour lesquels la 1-capacité de $K_\delta = adh(\Omega\Delta\Omega_\delta)$ est grande, et donc ne tend pas vers 0. Dans d'autres exemples, la 1-capacité de K_δ va effectivement tendre vers 0 et on se retrouve dans le cadre du premier théorème concernant le comportement du $\lambda_{1,\Omega}$ par perturbation du domaine.

Le dernier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$, de l'équation critique d'ordre 4 qui s'écrit

$$\Delta^2 u = |u|^{2^\sharp - 2} u \tag{5}$$

où Δ est le laplacien euclidien, et $2^\sharp = \frac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique pour les injections de Sobolev des espaces H_2^2 (l'espace des fonctions de L^2 dont les dérivées d'ordre 1 et 2 sont également dans L^2) dans les espaces L^p. L'objet de ce chapitre est de montrer que cette équation possède une infinité de solutions non-équivalentes. Suivant la terminologie usuelle, nous dirons que deux solutions u et v de (5) sont équivalentes s'il existe $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$v(x) = \lambda^{-\frac{n-4}{2}} u\left(\frac{x-a}{\lambda}\right). \tag{6}$$

D'après un résultat de Lin [41], deux solutions positives lisses de (5) sont toujours équivalentes. Les solutions lisses positives de (5) sont en effet toutes de la forme

$$u_{\lambda,a}(x) = \alpha_n \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2 |x-a|^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \tag{7}$$

où $\alpha_n = (n(n-4)(n^2-4))^{\frac{n-4}{8}}$, $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On vérifie par ailleurs facilement que deux solutions équivalentes ont la même "énergie" au sens où

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta v)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx$$

si u et v sont reliées par (6). Le théorème que nous démontrons dans ce troisième chapitre est le suivant :

Théorème 0.0.5 *Il existe une suite $(u_k)_k$ de solutions de (5) dont les énergies tendent vers $+\infty$ quand $k \to +\infty$, à savoir qui sont telles que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u_k)^2 dx \to +\infty$$

quand $k \to +\infty$. En particulier, l'équation (5) possède une infinité de solutions non-équivalentes. Ces solutions changent nécessairement de signe pour $k >> 1$.

Ce résultat est l'analogue d'un résultat de Ding [17] concernant l'équation critique d'ordre deux $\Delta u = |u|^{4/(n-2)} u$. La démonstration suit celle de Ding avec néanmoins des difficultés propres aux équations d'ordre 4, en particulier l'utilisation des propriétés conformes de l'opérateur de Paneitz-Branson.

Chapitre 1

Estimées asymptotiques et théorie du blow-up pour une équation critique avec le p-laplacien.

Soit (M,g) une variété riemannienne lisse compacte de dimension n et $p \in (1,n)$. On note $H_1^p(M)$ l'espace de Sobolev usuel des fonctions de $L^p(M)$ qui sont telles que leur gradient est également dans $L^p(M)$. Etant donnée une suite de fonctions $(h_\alpha)_\alpha \subset C^{0,\theta}(M)$, $0 < \theta < 1$, on considère la famille d'équations critiques non-linéaires s'écrivant sous la forme

$$(\Delta_p)_g u + h_\alpha u^{p-1} = u^{p^*-1} \tag{1.1}$$

où $(\Delta_p)_g u = -div_g\left(|\nabla u|_g^{p-2}\nabla u\right)$ est l'opérateur p-laplacien, et où l'exposant $p^* = np/(n-p)$ est critique pour les injections de Sobolev des espaces $H_1^p(M)$ dans les espaces $L^q(M)$. Par régularité standard pour le p-laplacien, voir par exemple Druet [19], Guedda-Véron [33] et Tolksdorf [53], si u est solution faible de (1.1), alors $u \in C^{1,\theta}(M)$. On supposera dans la suite que les h_α convergent dans $C^{0,\theta}(M)$ vers une fonction h_∞ pour laquelle l'opérateur limite associé est coercif. A savoir, on suppose qu'il existe $\lambda > 0$ vérifiant que pour tout $u \in H_1^p(M)$,

$$\int_M \left(|\nabla u|^p + h_\infty |u|^p\right) dv_g \geq \lambda \|u\|_{H_1^p}^p. \tag{1.2}$$

Puisque les h_α convergent, on récupère une équation limite

$$(\Delta_p)_g u + h_\infty u^{p-1} = u^{p^*-1} \tag{1.3}$$

On obtient (1.3) en faisant tout simplement tendre $\alpha \to +\infty$ dans (1.1). On considère aussi une suite bornée $(u_\alpha)_\alpha \subset H_1^p(M)$ de solutions strictement positives de (1.1). On suppose en d'autres termes que pour tout α,

$$(\Delta_p)_g u_\alpha + h_\alpha u_\alpha^{p-1} = u_\alpha^{p^*-1} \tag{1.4}$$

et que $\|u_\alpha\|_{H_1^p} \leq \Lambda$, où $\Lambda > 0$ est une constante indépendante de α. Ce chapitre est alors consacré à l'étude du comportement asymptotique de la suite (u_α) lorsque $\alpha \to +\infty$. Le cas $p = 2$, correspondant au laplacien usuel, a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Brézis-Coron [7], Lions [43], Sacks-Uhlenbeck [46], et surtout Struwe [52] pour le type d'équation que nous considérons, ont développé la théorie H_1^2 dans le cas euclidien en obtenant la décomposition des u_α dans $H_1^2(\mathbb{R}^n)$. Le résultat s'étend au cas riemannien et l'on obtient, à sous-suite près, que les u_α s'écrivent comme une solution de l'équation limite (1.3), plus une somme finie de "bulles" obtenues par changement d'échelle des solutions fondamentales de l'équation critique euclidienne $\Delta u = u^{2^*-1}$, plus enfin un reste convergeant vers 0 dans H_1^2 quand $\alpha \to +\infty$. Nous étendons ici cette décomposition au cas plus général de l'équation (1.1) sur une variété riemannienne compacte, et développons ainsi la théorie H_1^p

pour de telles équations. Le cadre dans lequel nous travaillons est le cadre riemannien. La théorie H_1^p dans le cas euclidien avec $2 \leq p < n$ a été développée par Alves [2]. Notre résultat, le théorème 1.0.6 ci-dessous, est lui valable pour tout $p \in (1, n)$. La théorie C^0, consistant à étudier le comportement asymptotique des u_α dans $C^0(M)$, a été développée par Druet-Hebey-Robert [23] dans le cas $p = 2$. Les estimées C^0 que nous prouvons dans ce chapitre pour l'équation générale (1.1) remontent à Schoen-Zhang [50] et Druet [18] dans certaines situations particulières (entre autre quand l'énergie est minimale). De telles estimées ont des applications intéressantes (parmi d'autres références possibles, nous renvoyons à Druet [18] et Druet-Hebey [22]). Notamment, un des aspects intéressants et prometteurs de l'étude du p-laplacien est que le 1-laplacien, qui apparaît dans les problèmes d'isopérimétrie, peut être vu comme la limite quand $p \to 1$ du p-laplacien. Cette remarque a déjà été utilisée par Druet [20], [21] pour montrer que les inégalités isopérimétriques optimales sont contrôlées par la courbure scalaire, démontrant ainsi une version locale de la conjecture de Cartan-Hadamard.

Dans ce qui suit, on note i_g le rayon d'injectivité de (M, g). Si $\delta \in (0, i_g/2)$ est fixé, on considère une fonction cut-off lisse η_δ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\eta_\delta = 1$ dans $B_0(\delta)$, et $\eta_\delta = 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash B_0(2\delta)$. Pour $x \in M$, on note $\eta_{\delta,x}$ la fonction cut-off lisse définie sur M par

$$\eta_{\delta,x}(y) = \eta_\delta \left(\exp_x^{-1}(y)\right)$$

où $\exp_x$ est l'application exponentielle au point x. On regarde ici l'application exponentielle exp comme étant définie sur $M \times \mathbb{R}^n$. Une définition intrinsèque est possible si M est parallélisable. Sinon on note Ω_i et $\tilde{\Omega}_i$, $i = 1, \ldots, N$, des ouverts de M tels que pour tout i, $\tilde{\Omega}_i$ est parallélisable et $\overline{\Omega_i} \subset \tilde{\Omega}_i$, et tels que $M = \cup \Omega_i$. L'application exponentielle induit alors N applications exp définie sur $\Omega_i \times \mathbb{R}^n$, et exp est, selon les cas, l'une de ces applications. Une propriété de $\exp_x$ valable pour tout $x \in M$ doit alors être regardée commme une propriété vraie pour tout i et tout $x \in \overline{\Omega_i}$. Toujours dans ce qui suit, on note $D_1^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev euclidien défini comme étant le complété de l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact pour la norme $\|u\| := \|\nabla u\|_p$. On considère $u \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$ une solution positive ou nulle, non triviale, de l'équation euclidienne critique

$$\Delta_p u = u^{p^*-1}.$$

Etant données une suite convergente $(x_\alpha)_\alpha$ de points de M et une suite $(R_\alpha)_\alpha$ de réels strictement positifs tels que $R_\alpha \to +\infty$ quand $\alpha \to +\infty$, on définit une bulle comme étant une suite de fonctions $(B_\alpha)_\alpha$ définies sur M

par l'équation

$$B_\alpha(x) = \eta_{\delta,x_\alpha}(x) R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u\left(R_\alpha \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right). \tag{1.5}$$

Concernant la terminologie, les suites (x_α) et (R_α) sont appelées les centres et les poids de la bulle (B_α). A titre de remarque, les solutions positives radiales de l'équation euclidienne $\Delta_p u = u^{p^*-1}$ ont été classifiées par Ghoussoub et Yuan [29] (et on renvoie aussi à Damascelli - Pacella [12] et Damascelli - Pacella - Ramaswamy [13]). A constante multiplicative près, on trouve pour solutions les fonctions

$$u_{x_0}^\lambda(x) = \left(\frac{1}{\lambda + |x - x_0|^{\frac{p}{p-1}}}\right)^{\frac{n-p}{p}}$$

où $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le principal résultat de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1.0.6 *Soient (M, g) une variété riemannienne lisse compacte de dimension n, $p \in (1, n)$, et $(h_\alpha)_\alpha$ une suite de fonctions définies sur M de classe $C^{0,\theta}$, $0 < \theta < 1$, convergeant dans $C^{0,\theta}(M)$ vers une fonction limite h_∞ vérifiant (1.2). Soit $(u_\alpha)_\alpha$ une suite bornée dans $H_1^p(M)$ de solutions positives de (1.1). Il existe alors une solution $u^0 \in H_1^p(M)$ de l'équation limite (1.3), et k bulles $(B_\alpha^i)_\alpha$, $i = 1 \dots k$, telles que, à sous-suite près,*

$$u_\alpha = u^0 + \sum_{i=1}^{k} B_\alpha^i + S_\alpha$$

où $(S_\alpha)_\alpha$ est une suite de fonctions de $H_1^p(M)$ telles que $S_\alpha \to 0$ fortement dans $H_1^p(M)$ quand $\alpha \to +\infty$. De plus, il existe aussi une constante $C > 0$, indépendante de α et de $x \in M$, telle que pour tout α et tout $x \in M$,

$$\left(\min_{i=1,\dots,k} d_g\left(x_\alpha^i, x\right)\right)^{\frac{n-p}{p}} \left|u_\alpha(x) - u^0(x)\right| \leq C$$

où d_g est la distance induite par la métrique riemannienne g, et les x_α^i sont les centres des bulles $(B_\alpha^i)_\alpha$.

Une remarque importante sur ce résultat est que l'on peut également montrer une propriété d'additivité de l'énergie associée aux différents termes intervenant dans la décomposition donnée par ce théorème. Nous renvoyons à l'équation (1.8) ci-dessous pour plus de détails. On peut enfin préciser l'estimée ponctuelle en montrant que

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{x\in M\setminus\Omega_\alpha(R)} R_\alpha^k(x)^{\frac{n-p}{p}} \left|u_\alpha(x) - u^0(x)\right| = 0$$

où $R_\alpha^k(x) = \min_{i=1,\dots,k} d_g\left(x_\alpha^i, x\right)$ et, pour $R > 0$, $\Omega_\alpha(R) = \bigcup_{i=1}^k B_{x_\alpha^i}(R\mu_\alpha^i)$. Les sections 1.1 - 1.3 sont consacrées à la preuve du théorème 1.0.6, tandis que la section 1.4 concerne la preuve de l'estimée C^0 du théorème 1.0.6.

1.1 La décomposition H_1^p

On démontre la première partie du théorème dans cette section en passant par la notion plus générale de suite de Palais-Smale. En particulier, on ne fait ici aucune hypothèse sur le signe des u_α. Dans ce qui suit, on fixe $1 < p < n$ et on considère la fonctionnelle I_g^α définie sur $H_1^p(M)$ par

$$I_g^\alpha(u) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla u|^p dv_g + \frac{1}{p}\int_M h_\alpha(x)|u|^p dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |u|^{p^*} dv_g.$$

Une suite $(u_\alpha)_\alpha \subset H_1^p(M)$ est dite de Palais - Smale (P-S) pour I_g^α si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

1. la suite $\left(I_g^\alpha(u_\alpha)\right)_\alpha$ est bornée, et
2. $DI_g^\alpha(u_\alpha) \to 0$ fortement dans $H_1^p(M)'$ quand $\alpha \to +\infty$.

Etant donnée une suite $(u_\alpha)_\alpha$ de Palais-Smale pour I_g^α, on démontre dans cette section l'existence de k suites $(R_\alpha^i)_\alpha$, $i = 1 \dots k$, de réels positifs tels que $R_\alpha^i \to +\infty$ pour tout $i = 1 \dots k$ lorsque $\alpha \to +\infty$, de k suites convergentes $(x_\alpha^i)_\alpha$, $i = 1 \dots k$, de points de M, d'une solution $u^0 \in H_1^p(M)$ de l'équation limite

$$\Delta_p u + h_\infty |u|^{p-2}u = |u|^{p^*-2}u \;, \tag{1.6}$$

et de k solutions non triviales $u^i \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$ de l'équation euclidienne critique $\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$, $i = 1 \dots k$, tels que, à une sous-suite près,

$$u_\alpha = u^0 + \sum_{i=1}^k \eta_\alpha^i u_\alpha^i + o(1) \;, \text{ et} \tag{1.7}$$

$$I_g^\alpha(u_\alpha) = I_g^\infty(u^0) + \sum_{i=1}^k E(u^i) + o(1) \tag{1.8}$$

où

$$u_\alpha^i(x) = \left(R_\alpha^i\right)^{\frac{n}{p}-1} u^j\left(R_\alpha^i \exp_{x_\alpha^j}^{-1}(x)\right) \;,$$

$\eta_\alpha^i = \eta_{\delta, x_\alpha^i}$, $\|o(1)\|_{H_1^p} \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$,

$$I_g^\infty(u) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla u|^p dv_g + \frac{1}{p}\int_M h_\infty(x)|u|^p dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |u|^{p^*} dv_g \;,$$

et où, pour finir,

$$E(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx.$$

En admettant le fait que u^0 et les u^i sont positifs dès que les u_α le sont, ce qui sera démontré à la section 1.3, on vérifie facilement que les équations (1.7) et (1.8) entrainent la première partie du théorème 1.0.6. Il suffit pour cela de remarquer qu'une suite bornée dans $H_1^p(M)$ de solutions de (1.1) est une suite de Palais - Smale pour I_g^α.

On divise la preuve de (1.7) et (1.8) en plusieurs étapes que l'on détaille ci-dessous.

Etape 1.1.1 *Toute suite de Palais - Smale pour I_g^α est bornée dans l'espace $H_1^p(M)$.*

Preuve de l'étape 1.1.1. Soit (u_α) une suite de Palais-Smale pour I_g^α. On peut écrire, par définition même des suites de Palais-Smale, que

$$\begin{aligned} &I_g^\alpha(u_\alpha) \\ &= \frac{1}{p}\int_M |\nabla u_\alpha|^p dv_g + \frac{1}{p}\int_M h_\alpha(x)|u_\alpha|^p dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |u_\alpha|^{p^*} dv_g \\ &= O(1) \end{aligned} \tag{1.9}$$

et que

$$\begin{aligned} &DI_g^\alpha(u_\alpha).u_\alpha \\ &= \int_M |\nabla u_\alpha|^p dv_g + \int_M h_\alpha(x)|u_\alpha|^p dv_g - \int_M |u_\alpha|^{p^*} dv_g \\ &= o(1)\|u_\alpha\|_{H_1^p} \end{aligned} \tag{1.10}$$

En considérant l'équation (1.9) à laquelle on soustrait $\frac{1}{p}$(1.10), à savoir $\frac{1}{p}$ fois l'équation (1.10), on en déduit que

$$\int_M |u_\alpha|^{p^*} dv_g = O(1) + o(1)\|u_\alpha\|_{H_1^p}. \tag{1.11}$$

Par ailleurs, la convergence uniforme de h_α vers h permet d'écrire que

$$\int_M h_\alpha(x)|u_\alpha|^p dv_g = \int_M h_\infty(x)|u_\alpha|^p dv_g + o(1)\|u_\alpha\|_{H_1^p}^p. \tag{1.12}$$

En injectant (1.11) et (1.12) dans (1.10), on obtient que

$$\begin{aligned}&\int_M |\nabla u_\alpha|^p dv_g + \int_M h_\infty(x)|u_\alpha|^p dv_g \\ &= O(1) + o(1)\left(\|u_\alpha\|_{H_1^p} + \|u_\alpha\|_{H_1^p}^p\right).\end{aligned}$$

La propriété de coercivité (1.2) donne alors que

$$\|u_\alpha\|_{H_1^p}^p = O(1) + o(1)\left(\|u_\alpha\|_{H_1^p} + \|u_\alpha\|_{H_1^p}^p\right). \tag{1.13}$$

Il s'ensuit facilement que la suite (u_α) est bornée dans $H_1^p(M)$, ce qui clôt la preuve de l'étape 1.1.1.

L'étape 1.2 dans la preuve de (1.7) et (1.8) est maintenant la suivante.

Etape 1.1.2 *Soit $(u_\alpha)_\alpha$ une suite de Palais-Smale pour I_g^α telle que $u_\alpha \rightharpoonup u^0$ faiblement dans $H_1^p(M)$. Alors u^0 est une solution de l'équation limite (1.6).*

Preuve de l'étape 1.1.2. L'étape 1.1.2 est évidente dans le cas où $p = 2$ et un peu plus délicate lorsque $p \neq 2$. D'après l'étape 1.1.1, la suite (u_α) est bornée dans $H_1^p(M)$, d'où, par définition d'une suite de P-S,

$$\begin{aligned}&\int_M |\nabla u_\alpha|_g^{p-2}\nabla u_\alpha \nabla\phi dv_g + \int_M h_\alpha |u_\alpha|^{p-2}u_\alpha \phi dv_g \\ &= \int |u_\alpha|^{p^*-2}u_\alpha\phi dv_g + o(1)\end{aligned} \tag{1.14}$$

pour toute fonction lisse ϕ définie sur M. Nous pouvons supposer, sans perdre en généralité, que, à sous-suite près, $u_\alpha \to u^0$ presque partout et dans L^p. On passe alors facilement à la limite dans la seconde et troisième intégrale de (1.14) par des arguments de convergence faible. Par exemple, la suite $(|u_\alpha|^{p^*-2}u_\alpha)$ convergeant presque partout vers $|u^0|^{p^*-2}u^0$, et étant bornée dans $L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(M)$, elle converge faiblement vers $|u^0|^{p^*-2}u^0$ dans $L^{\frac{p^*}{p^*-1}}(M)$. La convergence forte L^p règle quand à elle la question de la seconde intégrale. Il reste donc à montrer que

$$\int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha\nabla\phi dv_g = \int_M |\nabla u^0|^{p-2}\nabla u^0\nabla\phi dv_g + o(1). \tag{1.15}$$

On s'inspire pour ce faire d'idées développées dans Evans [24] et Demengel-Hebey [15]. Notons respectivement Σ_α et Θ les champs de vecteurs

$$\Sigma_\alpha = |\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha \text{ et } \Theta = |\nabla u^0|^{p-2}\nabla u^0$$

Alors $(\Sigma_\alpha)_\alpha$ est une suite bornée dans $L^{\frac{p}{p-1}}(M)$ et nous pouvons donc supposer que $(\Sigma_\alpha)_\alpha$ converge faiblement dans $L^{\frac{p}{p-1}}(M)$ vers un champ de vecteurs $\Sigma \in L^{\frac{p}{p-1}}(M)$. Fixons $\delta > 0$. D'après le théorème d'Egorov, il existe $E_\delta \subset M$ tel que

$$\int_{M\setminus E_\delta} dv_g < \delta$$

et tel que la suite $(u_\alpha)_\alpha$ converge uniformément vers u^0 dans E_δ. Etant donné $\epsilon > 0$, on peut choisir α suffisamment grand de sorte que $|u_\alpha(x) - u^0(x)| < \epsilon/2$ pour tout $x \in E_\delta$. On définit une fonction de troncature β_ϵ par

$$\beta_\epsilon(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| < \epsilon \\ \frac{\epsilon x}{|x|} & \text{si } |x| \geq \epsilon \end{cases}$$

On vérifie alors facilement que

$$(\Sigma_\alpha - \Theta)\,.\nabla\left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) \geq 0 \tag{1.16}$$

presque partout dans M. On renvoie ici à la preuve du lemme 1.1.1 en annexe de ce chapitre. En appliquant ceci à ∇u_α et ∇u^0, on obtient

$$(\Sigma_\alpha - \Theta).\nabla(u_\alpha - u^0) \geq 0$$

d'où l'on déduit (1.16). Il s'ensuit que pour α suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \int_{E_\delta} (\Sigma_\alpha - \Theta)\,.\nabla\left(u_\alpha - u^0\right) dv_g &= \int_{E_\delta} (\Sigma_\alpha - \Theta)\,.\nabla\left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) dv_g \\ &\leq \int_M (\Sigma_\alpha - \Theta)\,.\nabla\left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) dv_g. \end{aligned}$$

En remarquant que $\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)$ converge faiblement vers 0 dans $H_1^p(M)$, on peut écrire que

$$\int_M \Theta.\nabla\left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) dv_g \to 0.$$

Par ailleurs, pour α suffisamment grand,

$$\int_M \Sigma_\alpha.\nabla\left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) dv_g < C\epsilon.$$

En effet, $(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0))$ étant borné dans $H_1^p(M)$ et (u_α) étant une suite de P-S pour I_g^α,

$$DI_g^\alpha(u_\alpha)\left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) = o(1)$$

et donc
$$\int_M \Sigma_\alpha \nabla \left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) dv_g = o(1) + I_1 + I_2$$
où
$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_M |u_\alpha|^{p^*-2} u_\alpha \left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) dv_g \right| \\ &\leq \epsilon \int_M |u_\alpha|^{p^*-1} dv_g \leq C\epsilon \end{aligned}$$
et, pour α suffisamment grand,
$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_M h_\alpha |u_\alpha|^{p-2} u_\alpha \left(\beta_\epsilon \circ (u_\alpha - u^0)\right) dv_g \right| \\ &\leq \epsilon(\|h_\infty\|_\infty + 1) \int_M |u_\alpha|^{p-1} dv_g \leq C\epsilon. \end{aligned}$$
Il s'ensuit que l'équation annoncée ci-dessus a bien lieu, et, au final, nous obtenons donc que
$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{E_\delta} (\Sigma_\alpha - \Theta) . \nabla \left(u_\alpha - u^0\right) dv_g \leq C\epsilon.$$
Puisque $\epsilon > 0$ est arbitraire, nous en déduisons que $(\Sigma_\alpha - \Theta).\nabla(u_\alpha - u^0)$ converge vers 0 dans $L^1(E_\delta)$ et donc, à sous-suite près, également presque partout dans E_δ. Enonçons maintenant le lemme suivant dont la preuve est donnée en annexe :

Lemme 1.1.1 *Soit $(X_\alpha)_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ et $X \in \mathbb{R}^n$ tels que*
$$\left(|X_\alpha|^{p-2} X_\alpha - |X|^{p-2} X\right) . (X_\alpha - X) \to 0 .$$
Alors $X_\alpha \to X$.

On déduit du lemme précédent que $\nabla u_\alpha \to \nabla u^0$ presque partout dans E_δ. Puisque $\delta > 0$ est quelconque, nous obtenons la convergence presque partout dans M de ∇u_α vers ∇u^0 et donc, en particulier, celle de $|\nabla u_\alpha|^{p-2} \nabla u_\alpha$ vers Θ. Comme $\left(|\nabla u_\alpha|^{p-2} \nabla u_\alpha\right)_\alpha$ est bornée dans $L^{\frac{p}{p-1}}(M)$, nous en déduisons que $\left(|\nabla u_\alpha|^{p-2} \nabla u_\alpha\right)_\alpha$ converge faiblement vers Θ dans $L^{\frac{p}{p-1}}(M)$ puis que $\Sigma = \Theta$, ce qui prouve (1.15). Avec (1.15) on revient maintenant à (1.14) et on fait tendre $\alpha \to +\infty$. On obtient alors que
$$\int_M |\nabla u^0|_g^{p-2} \nabla u^0 \nabla \phi dv_g + \int_M h_\infty |u^0|^{p-2} u^0 \phi dv_g = \int |u^0|^{p^*-2} u^0 \phi dv_g$$

pour toute fonction lisse ϕ définie sur M. En particulier, u^0 est solution de l'équation limite (1.6), ce qui achève la preuve de l'étape 1.1.2.

Dans ce qui suit, on note I_g la fonctionnelle définie pour $u \in H_1^p(M)$ par

$$I_g(u) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla u|^p dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |u|^{p^*} dv_g\ .$$

Etant donné $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et $p > 1$, on utilisera dans la suite que pour $\theta > 0$ suffisamment petit,

$$\begin{aligned} &\big\| \|x+y\|^{p-2}(x+y) - \|x\|^{p-2}x - \|y\|^{p-2}y \big\| \\ &\quad \le C\left(\|x\|^{p-1-\theta}\|y\|^{\theta} + \|x\|^{\theta}\|y\|^{p-1-\theta}\right) \end{aligned} \tag{1.17}$$

et

$$\begin{aligned} &|\ \|x+y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p| \\ &\le C\left(\|x\|^{p-\theta}\|y\|^{\theta} + \|y\|^{p-\theta}\|x\|^{\theta}\right). \end{aligned} \tag{1.18}$$

pour tout $x, y \in E$, où la constante $C > 0$ est indépendante de x et y. On renvoit à l'annexe 1.5 pour une preuve de (1.17) et (1.18). En continuant avec la preuve de (1.7) et (1.8), la troisième étape dans cette preuve est la suivante :

Etape 1.1.3 *Soit $(u_\alpha)_\alpha$ une suite de Palais-Smale pour I_g^α telle que $u_\alpha \rightharpoonup u^0$ faiblement dans $H_1^p(M)$. Notons $v_\alpha = u_\alpha - u^0$. Alors*

$$I_g(v_\alpha) = I_g^\alpha(u_\alpha) - I_g^\infty(u^0) + o(1)$$

et (v_α) est une suite de Palais-Smale pour I_g.

Preuve de l'étape 1.1.3. On écrit que

$$\begin{aligned} I_g^\alpha(u_\alpha) &= I_g^\alpha(u^0) + I_g(v_\alpha) \\ &+ \frac{1}{p}\int_M \left(|\nabla(v_\alpha + u^0)|^p - |\nabla u^0|^p - |\nabla v_\alpha|^p\right) dv_g \\ &+ \frac{1}{p}\int_M h_\alpha\left(|v_\alpha + u^0|^p - |u^0|^p\right) dv_g \\ &- \frac{1}{p^*}\int_M \left(|v_\alpha + u^0|^{p^*} - |v_\alpha|^{p^*} - |u^0|^{p^*}\right) dv_g. \end{aligned} \tag{1.19}$$

L'injection $H_1^p(M) \hookrightarrow L^p(M)$ étant compacte, nous pouvons supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $u_\alpha \to u^0$ dans $L^p(M)$. En particulier, la seconde intégrale dans (1.19) tend vers 0 quand $\alpha \to +\infty$. Nous pouvons d'autre part montrer, comme dans la preuve de l'étape 1.1.2, que $|\nabla u_\alpha| \to |\nabla u^0|$ presque partout. La convergence vers 0 de la première et troisième intégrale dans (1.19) est alors une conséquence directe du théorème 1 de Brezis-Lieb [8]. Nous obtenons donc finalement

$$I_g^\alpha(u_\alpha) = I_g^\alpha(u^0) + I_g(v_\alpha) + o(1)$$

et puisque $I_g^\infty(u^0) = I_g^\alpha(u^0) + o(1)$, on peut écrire que

$$I_g(v_\alpha) = I_g^\alpha(u_\alpha) - I_g^\infty(u^0) + o(1).$$

On montre maintenant que $(v_\alpha)_\alpha$ est une suite de P-S pour I_g. On écrit tout d'abord que

$$\begin{aligned} I_g(v_\alpha) &= I_g^\alpha(u_\alpha) - I_g^\infty(u^0) + o(1) \\ &= O(1) + o(1) \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $\left(I_g^\infty(v_\alpha)\right)_\alpha$ est bornée. Il reste donc à montrer que $DI_g(v_\alpha) \to 0$ dans $H_1^p(M)'$, et donc que

$$DI_g(v_\alpha).\phi = o(1)\|\phi\|_{H_1^p(M)} \tag{1.20}$$

pour tout $\phi \in H_1^p(M)$, où $o(1)$ ne dépend pas de ϕ. Etant donné une fonction $\phi \in C^\infty(M)$, on a que

$$\begin{aligned} & DI_g^\alpha(u_\alpha).\phi - DI_g(v_\alpha).\phi \\ & = -\int_M \Phi_\alpha \phi dv_g + \int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha \nabla\phi dv_g \\ & - \int_M |\nabla v_\alpha|^{p-2}\nabla v_\alpha \nabla \phi dv_g + \int_M h_\alpha |u_\alpha|^{p-2} u_\alpha \phi dv_g \\ & - \int_M |u^0|^{p^*-2} u^0 \phi dv_g \end{aligned} \tag{1.21}$$

où

$$\Phi_\alpha = |v_\alpha + u^0|^{p^*-2}(v_\alpha + u^0) - |v_\alpha|^{p^*-2}v_\alpha - |u^0|^{p^*-2}u^0.$$

Soit $C > 0$, donné par (1.17), tel que pour tout α

$$\begin{aligned} & \left||v_\alpha + u^0|^{p^*-2}(v_\alpha + u^0) - |v_\alpha|^{p^*-2}v_\alpha - |u^0|^{p^*-2}u^0\right| \\ & \le C\left(|v_\alpha|^{p^*-1-\theta}|u^0|^\theta + |v_\alpha|^\theta |u^0|^{p^*-1-\theta}\right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inegalité de Hölder, on obtient que

$$\begin{aligned}&\left|\int_M \Phi_\alpha \phi dv_g\right|\\&\le C\|\phi\|_{p^*}\left(\left\||v_\alpha|^{p^*-1-\theta}|u^0|^\theta\right\|_{\frac{p^*}{p^*-1}}+\left\||u^0|^{p^*-1-\theta}|v_\alpha|^\theta\right\|_{\frac{p^*}{p^*-1}}\right)\end{aligned}$$

et, par des arguments classiques en théorie de l'intégration, il suit que

$$\begin{aligned}\int_M \Phi_\alpha \phi dv_g &= o(1)\|\phi\|_{p^*}\\&= o(1)\|\phi\|_{H_1^p(M)}.\end{aligned}$$

Puisque d'autre part u^0 est une solution faible de l'équation limite (1.3), on constate qu'il suffit, pour montrer (1.20), de prouver que

$$\begin{aligned}o(1)\|\phi\|_{H_1^p} &= \int_M |\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha \nabla\phi dv_g - \int_M |\nabla v_\alpha|^{p-2}\nabla v_\alpha\nabla\phi dv_g\\&\quad-\int_M |\nabla u^0|^{p-2}\nabla u^0\nabla\phi dv_g\\&\quad+\int_M h_\alpha|u_\alpha|^{p-2}u_\alpha\phi dv_g-\int_M h_\infty|u^0|^{p-2}u^0\phi dv_g.\end{aligned}$$

Il suffit encore pour cela de montrer, d'après l'inégalité de Hölder, que

$$\int_M \left||\nabla u_\alpha|^{p-2}\nabla u_\alpha-|\nabla v_\alpha|^{p-2}\nabla v_\alpha-|\nabla u^0|^{p-2}\nabla u^0\right|^{\frac{p}{p-1}}dv_g=o(1)\qquad(1.22)$$

et que

$$\int_M \left|h_\alpha|u_\alpha|^{p-2}u_\alpha-h_\infty|u^0|^{p-2}u^0\right|^{\frac{p}{p-1}}dv_g=o(1).\qquad(1.23)$$

La preuve de (1.22) est basée sur (1.17) comme ci-dessus, tandis que (1.23) est une conséquence du théorème 1 de Brezis-Lieb [8] puisque $u_\alpha\to u^0$ presque partout et $\left(|u_\alpha|^{p-2}u_\alpha\right)_\alpha$ est bornée dans $L^{\frac{p}{p-1}}(M)$. Le tout termine la preuve de l'étape 1.1.3.

Dans ce qui suit, on note $K(n,p)$ la meilleure constante K dans l'inégalité de Sobolev euclidienne

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}\le K\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}.$$

La valeur de $K(n,p)$ est bien connue. On trouve

$$K(n,p)=\frac{1}{n}\left(\frac{n(p-1)}{n-p}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n/p)\Gamma(n+1-n/p)\omega_{n-1}}\right)^{1/n}$$

où Γ est la fonction d'Euler, et ω_{n-1} est le volume de la sphère unité de dimension $n-1$. On définit ensuite β^* par l'équation

$$\beta^* = \frac{1}{n} K(n,p)^{-n} \tag{1.24}$$

où $K(n,p)$ est comme ci-dessus. La quatrième étape dans la preuve de (1.7) et (1.8) est la suivante :

Etape 1.1.4 *Soit $(v_\alpha)_\alpha$ une suite de Palais-Smale pour I_g telle que $v_\alpha \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^p(M)$ et $I_g(v_\alpha) \to \beta$ quand $\alpha \to +\infty$. Si $\beta < \beta^*$ alors $\beta = 0$ et $v_\alpha \to 0$ fortement dans $H_1^p(M)$ quand $\alpha \to +\infty$.*

Preuve de l'étape 1.1.4. On écrit que

$$\begin{aligned} o(1) &= DI_g(v_\alpha).v_\alpha \\ &= \int_M |\nabla v_\alpha|^p dv_g - \int_M |v_\alpha|^{p^*} dv_g \end{aligned}$$

et $I_g(v_\alpha) = \beta + o(1)$. Ces deux équations et la définition de I_g donnent

$$\int_M |\nabla v_\alpha|^p dv_g = n\beta + o(1)$$

et

$$\int_M |v_\alpha|^{p^*} dv_g = n\beta + o(1).$$

En particulier $\beta \geq 0$. L'injection $H_1^p(M) \hookrightarrow L^p(M)$ étant compacte, on peut supposer que $v_\alpha \to 0$ dans $L^p(M)$. Pour $\epsilon > 0$ donné, il existe une constante B_ϵ telle que pour tout α,

$$\|v_\alpha\|_{p^*}^p \leq (K(n,p)^p + \epsilon)\|\nabla v_\alpha\|_p^p + B_\epsilon \|v_\alpha\|_p^p.$$

On obtient alors, en passant à la limite dans cette équation, que

$$(n\beta)^{\frac{p}{p^*}} \leq (K(n,p)^p + \epsilon)\, n\beta.$$

Il s'ensuit, puisque $\epsilon > 0$ est quelconque, que

$$(n\beta)^{\frac{p}{p^*}} \leq K(n,p)^p n\beta.$$

Si on suppose que β est strictement positif, alors

$$(n\beta)^{\frac{p}{p^*}-1} = (n\beta)^{-\frac{p}{n}} \leq K(n,p)^p$$

et par suite

$$K(n,p)^p = (n\beta^*)^{-\frac{p}{n}} < (n\beta)^{-\frac{p}{n}} \leq K(n,p)^p$$

ce qui est absurde. Par conséquent $\beta = 0$ et

$$\int_M |\nabla v_\alpha|^p dv_g = o(1).$$

Puisque $v_\alpha \to 0$ fortement dans $L^p(M)$, ceci montre que $v_\alpha \to 0$ fortement dans $H_1^p(M)$. L'étape 1.1.4 est démontrée.

Dans ce qui suit on note $D_1^p(\mathbb{R}^n)$ le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions régulières à support compact dans $\mathbb{R}^n$, pour la norme $\|u\| = \|\nabla u\|_p$. La cinquième étape dans la preuve de (1.7) et (1.8) est alors la suivante :

Etape 1.1.5 *Soit $u \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$ une solution non triviale de l'équation euclidienne critique $\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$. Alors $E(u) \geq \beta^*$.*

Preuve de l'étape 1.1.5. On considère une suite $(u_n)_n \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|u_n - u\| \to 0$ quand $n \to +\infty$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_n dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*-2} u u_n dx \tag{1.25}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla u_n dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-1} |\nabla(u_n - u)| dx \\ &\leq \|u_n - u\| . \|u\|^{p-1}, \end{aligned}$$

le terme de droite tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. De la même manière, l'inégalité de Sobolev relative à l'injection $D_1^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ donne

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*-2} u u_n dx - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*-1} |u - u_n| dx \\ &\leq \|u - u_n\|_{p^*} \|u\|_{p^*}^{p^*-1} \end{aligned}$$

et on récupère une expression qui tend également vers 0 quand $n \to +\infty$. On obtient alors, en passant à la limite dans (1.25), que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx.$$

L'inégalité de Sobolev euclidienne optimale donne ensuite que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx \\ &\leq K(n,p)^{p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p^*}{p}}\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \geq K(n,p)^{-n}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}E(u) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \\ &= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \\ &\geq \frac{1}{n} K(n,p)^{-n} = \beta^*.\end{aligned}$$

Le tout termine la preuve de l'étape 1.1.5.

Outre les étapes 1.1.1 - 1.1.5, nous avons besoin, dans la preuve de (1.7) et (1.8), du lemme suivant. Etant données une suite convergente $(x_\alpha)_\alpha$ de points de M et une suite $(R_\alpha)_\alpha$ de réels positifs tels que $R_\alpha \to +\infty$ quand $\alpha \to +\infty$, nous définissons une bulle généralisée comme étant une suite $(\hat{B}_\alpha)_\alpha$ de fonctions définies sur M par

$$\hat{B}_\alpha(x) = \eta_{\delta,x_\alpha}(x) R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} v\left(R_\alpha \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right) \tag{1.26}$$

où v est une solution, non nécessairement positive ou nulle, de l'équation critique euclidienne $\Delta_p u = |u|^{p^*-2} u$.

Lemme 1.1.2 *Soit $(v_\alpha)_\alpha$ une suite de Palais-Smale pour I_g telle que $v_\alpha \rightharpoonup 0$ dans $H_1^p(M)$ faiblement mais pas fortement. Il existe alors une bulle généralisée $(\hat{B}_\alpha)_\alpha$ telle que, à une sous-suite près, $(w_\alpha)_\alpha$ est une suite de Palais-Smale pour I_g, $w_\alpha \rightharpoonup 0$ dans $H_1^p(M)$ et*

$$I_g(w_\alpha) = I_g(v_\alpha) - E(v) + o(1)$$

où $w_\alpha = v_\alpha - \hat{B}_\alpha$ et $v \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$ est la fonction à partir de laquelle la bulle $(\hat{B}_\alpha)$ est définie suivant (1.26).

Ce lemme est l'étape principale dans la preuve de (1.7) et (1.8). Nous reportons sa preuve à la section suivante et montrons maintenant comment déduire (1.7) et (1.8) du lemme 1.1.2 et des étapes 1.1.1 - 1.1.5.

Preuve de (1.7) et (1.8). Soit $(u_\alpha)_\alpha$ une suite de Palais-Smale pour I_g^α. D'après l'étape 1.1.1, $(u_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $H_1^p(M)$. Nous pouvons donc supposer qu'il existe $u^0 \in H_1^p(M)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, à sous-suite près, $u_\alpha \rightharpoonup u^0$ faiblement dans $H_1^p(M)$, fortement dans $L^p(M)$, et presque partout, et tels que $I_g^\alpha(u_\alpha) \to c$. D'après l'étape 1.1.2, u^0 est solution de l'équation limite. En notant $v_\alpha = u_\alpha - u^0$, et d'après l'étape 1.1.3, (v_α) est une suite de Palais-Smale pour I_g vérifiant

$$\begin{aligned} I_g(v_\alpha) &= I_g^\alpha(u_\alpha) - I_g^\infty(u^0) + o(1) \\ &= c - I_g^\infty(u^0) + o(1). \end{aligned}$$

Si $c - I_g^\infty(u^0) < \beta^*$ alors, d'après l'étape 1.1.4, $(v_\alpha)_\alpha$ converge fortement vers 0 dans $H_1^p(M)$ et nous obtenons (1.7) et (1.8) avec $k = 0$. Sinon, nous déduisons du lemme 1.1.2 l'existence d'une nouvelle suite de Palais-Smale pour I_g notée $(v_\alpha^1)_\alpha$ convergeant faiblement vers 0 dans $H_1^p(M)$ et telle que

$$I_g(v_\alpha^1) = I_g(v_\alpha) - E(v) + o(1)$$

où $v \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$ est solution de l'équation euclidienne non-linéaire critique $\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$. D'après l'étape précédente, $E(v) \geq \beta^*$ et donc

$$I_g(v_\alpha^1) \leq I_g(v_\alpha) - \beta^* + o(1).$$

Si $c - I_g^\infty(u^0) < 2\beta^*$, nous pouvons de nouveau utiliser l'étape 1.1.4 pour obtenir la convergence forte dans $H_1^p(M)$ vers 0 de $(v_\alpha^1)_\alpha$. En particulier, (1.7) et (1.8) sont vrais avec $k = 1$. Dans le cas contraire, i.e. dans le cas où $c - I_g^\infty(u^0) \geq 2\beta^*$, nous appliquons une fois encore le lemme 1.1.2 et obtenons une nouvelle suite de P-S pour I_g. Alors soit $c - I_g^\infty(u^0) < 3\beta^*$, soit $c - I_g^\infty(u^0) \geq 3\beta^*$. En itérant le processus, il s'ensuit clairement que (1.7) et (1.8) sont vraies pour un certain $k \geq 1$.

1.2 Preuve du lemme 1.1.2

On démontre le lemme 1.1.2 dans cette section. Sans perdre en généralité, on pourra supposer, à sous-suite près, que $I_g(v_\alpha) \to \beta$ quand $\alpha \to +\infty$. Dans la mesure où $C^\infty(M)$ est dense dans $H_1^p(M)$, on pourra également supposer que les v_α sont lisses. Pour le voir on considère $\overline{v}_\alpha \in C^\infty(M)$ tel que $\|v_\alpha - \overline{v}_\alpha\|_{H_1^p} \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$. Alors $I_g(v_\alpha) = I_g(\bar{v}_\alpha) + o(1)$ et

$$DI_g(v_\alpha)\phi = DI_g(\bar{v}_\alpha)\phi + o(1)\|\phi\|_{H_1^p}$$

pour tout $\phi \in H_1^p(M)$. En particulier, $(\overline{v}_\alpha)_\alpha$ est une suite de P-S pour I_g. De plus $\overline{v}_\alpha \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^p(M)$ mais pas fortement. Reste maintenant à vérifier que la conclusion du lemme 1.1.2 est satisfaite par la suite $(v_\alpha)_\alpha$ si elle l'est par la suite $(\overline{v}_\alpha)_\alpha$. On s'en convainc en remarquant que si $(\hat{B}_\alpha)$ est une bulle généralisée définie à partir de $v \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$ comme dans (1.26), et telle que, à sous-suite près, les $\bar{w}_\alpha = \bar{v}_\alpha - \hat{B}_\alpha$ constituent une suite de Palais-Smale pour I_g qui satisfait $I_g(\bar{w}_\alpha) = I_g(\bar{v}_\alpha) - E(v) + o(1)$, alors les w_α définis par $w_\alpha := v_\alpha - \hat{B}_\alpha$ satisfont les relations $I_g(w_\alpha) = I_g(\bar{w}_\alpha) + o(1)$ et $DI_g(w_\alpha)\phi = DI_g(\bar{w}_\alpha)\phi + o(1)\|\phi\|_{H_1^p}$ pour tout $\phi \in H_1^p(M)$.

A partir de maintenant, comme dans l'énoncé du lemme 1.1.2, on considère $(v_\alpha)_\alpha$ une suite de Palais-Smale pour I_g telle que $v_\alpha \rightharpoonup 0$ dans $H_1^p(M)$ faiblement mais pas fortement. Suite à la discussion précédente, on suppose que $I_g(v_\alpha) \to \beta$ quand $\alpha \to +\infty$, et que les v_α sont lisses. Comme on a aussi que $DI_g(v_\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$, on peut écrire que

$$\int_M |\nabla v_\alpha|^p dv_g = n\beta + o(1). \tag{1.27}$$

D'après l'étape 1.1.4 de la section 1.1, $\beta \geq \beta^*$. Pour $t > 0$, on note

$$\mu_\alpha(t) = \max_{x \in M} \int_{B_x(t)} |\nabla v_\alpha|^p dv_g \tag{1.28}$$

où $B_x(t)$ est la boule géodésique de centre x et de rayon t. Pour $t_0 > 0$ petit, (1.27) donne l'existence de $x_0 \in M$ et $\lambda_0 > 0$ tels que, à sous-suite près,

$$\int_{B_{x_0}(t_0)} |\nabla v_\alpha|^p dv_g \geq \lambda_0 \tag{1.29}$$

pour tout α. L'application $t \to \mu_\alpha(t)$ étant continue, on en déduit l'existence pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0)$ de réels $t_\alpha \in (0, t_0)$ tels que $\mu_\alpha(t_\alpha) = \lambda$. Il est par ailleurs évident qu'il existe un point $x_\alpha \in M$ tel que

$$\mu_\alpha(t_\alpha) = \int_{B_{x_\alpha}(t_\alpha)} |\nabla v_\alpha|^p dv_g\,. \tag{1.30}$$

A sous-suite près, la suite $(x_\alpha)_\alpha$ converge. Pour $R_\alpha \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $|x| < i_g R_\alpha$, on note

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\alpha(x) &= R_\alpha^{-\frac{n-p}{p}} v_\alpha\left(\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}x)\right)\,, \text{ et} \\ \tilde{g}_\alpha(x) &= \left(\exp_{x_\alpha}^\star g\right)(R_\alpha^{-1}x)\,. \end{aligned} \tag{1.31}$$

On divise dans la suite la preuve du lemme 1.1.2 en plusieurs étapes. La première étape, préparatoire, est la suivante. Les paramètres libres dans l'énoncé qui suit, à fixer plus tard, sont les constantes $r \in (0, r_0)$ et $\lambda \in (0, \lambda_0)$.

Etape 1.2.1 *Il existe des constantes* $r_0 \in (0, i_g/2)$ *et* $C_0 \in [1,2]$ *telles que pour* $r \in (0, r_0)$*, et* $t_0 > 0$ *suffisamment petit choisi de sorte que* $C_0 r t_0^{-1} \geq 1$*, si* $\lambda \in (0, \lambda_0)$*, et les* $R_\alpha \geq 1$ *sont tels* $C_0 r R_\alpha^{-1} = t_\alpha$*, alors, pour tout* $z \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $|z| < r_0 R_\alpha - r$*, on a*

$$\begin{aligned} &\int_{B_z(r)} |\nabla \tilde{v}_\alpha|^p dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq \lambda \,, \ \textit{et} \\ &\int_{B_0(C_0 r)} |\nabla \tilde{v}_\alpha|^p dv_{\tilde{g}_\alpha} = \lambda \,, \end{aligned} \tag{1.32}$$

où λ_0*, les* t_α*, les* $\tilde{v}_\alpha$*, et les* $\tilde{g}_\alpha$ *sont donnés par (1.28) - (1.31).*

Preuve de l'étape 1.2.1. On définit $r_0 \in (0, i_g/2)$ et $C_0 \in [1,2]$ par la propriété que pour tout $x \in M$ et tout $y, z \in \mathbb{R}^n$, si $|y| \leq r_0$ et $|z| \leq r_0$ alors

$$d_g\left(\exp_x(y), \exp_x(z)\right) \leq C_0 |z - y| \,. \tag{1.33}$$

Les constantes r_0 et C_0 sont des éléments classiques de comparaison locale du riemannien avec l'euclidien. On en démontre facilement l'existence. Si maintenant $|z| + r < i_g R_\alpha$, où R_α est comme dans l'énoncé de l'étape 1.2.1, on obtient avec (1.31) que

$$\int_{B_z(r)} |\nabla \tilde{v}_\alpha|^p dv_{\tilde{g}_\alpha} = \int_{\exp_{x_\alpha}\left(R_\alpha^{-1} B_z(r)\right)} |\nabla v_\alpha|^p dv_g \,. \tag{1.34}$$

Lorsque $|z| + r < r_0 R_\alpha$, (1.33) permet d'écrire que

$$\exp_{x_\alpha}\left(R_\alpha^{-1} B_z(r)\right) \subset B_{\exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1} z)}\left(C_0 r R_\alpha^{-1}\right) \tag{1.35}$$

tandis que

$$\exp_{x_\alpha}\left(R_\alpha^{-1} B_0(C_0 r)\right) = B_{x_\alpha}\left(C_0 r R_\alpha^{-1}\right) \,. \tag{1.36}$$

Il suit facilement des relations (1.34) - (1.36), et de l'équation $C_0 r R_\alpha^{-1} = t_\alpha$, que pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $|z| < r_0 R_\alpha - r$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{B_z(r)} |\nabla \tilde{v}_\alpha|^p dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq \lambda \,, \text{ et} \\ &\int_{B_0(C_0 r)} |\nabla \tilde{v}_\alpha|^p dv_{\tilde{g}_\alpha} = \lambda \,. \end{aligned}$$

En particulier, l'étape 1.2.1 est démontrée.

On note dans ce qui suit $\delta \in (0, i_g)$ et $C_1 > 1$ des constantes telles que pour tout $x \in M$ et tout $R \geq 1$, si $\tilde{g}_{x,R}(y) = \exp_x^\star g(R^{-1} y)$, alors

$$\frac{1}{C_1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dv_{\tilde{g}_{x,R}} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \tag{1.37}$$

pour tout $u \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$ tel que supp $u \subset B_0(\delta R)$. Sans perdre en généralité on pourra également demander que

$$\frac{1}{C_1}\int_{\mathbb{R}^n}|u|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n}|u|dv_{\tilde{g}_{x,R}} \leq C_1\int_{\mathbb{R}^n}|u|dx \tag{1.38}$$

pour tout $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tel que supp $u \subset B_0(\delta R)$. On note aussi $\tilde{\eta} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction cut-off telle que $0 \leq \tilde{\eta} \leq 1$, $\tilde{\eta} = 1$ dans $B_0(1/4)$, et $\tilde{\eta} = 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash B_0(3/4)$. On pose $\tilde{\eta}_\alpha(x) = \tilde{\eta}\left(\delta^{-1}R_\alpha^{-1}x\right)$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla(\tilde{\eta}_\alpha\tilde{v}_\alpha)|^p dv_{\tilde{g}_\alpha} = O(1)$$

et il suit de (1.37) que la suite $(\tilde{\eta}_\alpha\tilde{v}_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $D_1^p(\mathbb{R}^n)$. En particulier, à sous-suite près, il existe $v \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$ tel que $\tilde{\eta}_\alpha\tilde{v}_\alpha \rightharpoonup v$ faiblement dans $D_1^p(\mathbb{R}^n)$. Toute la preuve du lemme 1.1.2 consiste maintenant à montrer que la bulle généralisée construite à partir de cette limite v, suivant la formule (1.26), est la bulle qu'il convient de choisir dans le lemme. Pour cela on procède en plusieurs étapes. On montre pour commencer que, quitte à prendre r et λ suffisamment petits dans l'étape 1.2.1, la convergence des $\tilde{\eta}_\alpha\tilde{v}_\alpha$ vers v est forte dans H_1^p. C'est l'objet de l'étape 1.2.2 (voir aussi la remarque qui suit la preuve de l'étape 1.2.3). Avec cette convergence forte on obtient que v est bien solution, dans $\mathbb{R}^n$, de l'équation $\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$. C'est l'objet de l'étape 1.2.4. Reste alors une étape pour montrer que si $V_\alpha = \hat{B}_\alpha$ est cette bulle généralisée construite à partir de v comme dans (1.26), alors les $w_\alpha = v_\alpha - V_\alpha$ vérifient les relations annoncées dans le lemme 1.1.2. C'est l'objet de l'étape 1.2.5. L'étape 1.2.2 est la suivante.

Etape 1.2.2 *Pour r et λ suffisamment petits,*

$$\tilde{\eta}_\alpha\tilde{v}_\alpha \to v \textit{ fortement dans } H_1^p\left(B_0(C_0 r)\right) \tag{1.39}$$

quand $\alpha \to +\infty$.

Preuve de l'étape 1.2.2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le lemme de Fatou et le théorème de Fubini donnent que

$$\begin{aligned}&\int_r^{2r}\left(\liminf_{\alpha\to\infty}\int_{S_{x_0}(r)}N_\xi(\tilde{\eta}_\alpha\tilde{v}_\alpha)dv_{h_\rho}\right)d\rho\\ &\leq \liminf_{\alpha\to\infty}\int_{B_{x_0}(2r)}N_\xi(\tilde{\eta}_\alpha\tilde{v}_\alpha)dx \leq C\end{aligned}$$

où h_ρ et ξ désignent respectivement la métrique standard sur la sphère $S_{x_0}(\rho)$ et la métrique euclidienne, et où $N_\xi(u) = |\nabla u|_\xi^p + |u|^p$. Il existe donc $\rho \in [r, 2r]$ tel que, à une sous-suite près et pour tout α,

$$\int_{S_{x_0}(\rho)} N_\xi(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha) dv_{h_\rho} \leq C.$$

Soit $C = C(\rho) > 0$ tel que pour tout $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$N_{h_\rho}\left(\phi_{|S_{x_0}(\rho)}\right) \leq C N_\xi(\phi)$$

sur $S_{x_0}(\rho)$. La suite $\left((\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)_{|S_{x_0}(\rho)}\right)_\alpha$ est alors bornée dans $H_1^p\left(S_{x_0}(\rho)\right)$. L'injection

$$H_1^p\left(S_{x_0}(\rho)\right) \hookrightarrow H^p_{\frac{p-1}{p}}\left(S_{x_0}(\rho)\right)$$

étant compacte, il s'ensuit qu'il existe une sous-suite $\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha$ convergeant vers v dans $H^p_{\frac{p-1}{p}}\left(S_{x_0}(\rho)\right)$. Notons $A = B_{x_0}(3r) \backslash B_{x_0}(\rho)$ et considérons la fonction ψ_α définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\psi_\alpha = \begin{cases} \tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha - v & \text{dans } \bar{B}_{x_0}(\rho) \\ z_\alpha & \text{dans } \bar{B}_{x_0}(3r) - B_{x_0}(\rho) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où z_α est la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_p u = 0 \ \text{ dans } A\ , \\ u = \tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha - v \ \text{ sur } S_{x_0}(\rho)\ ,\ \text{and} \\ u = 0 \ \text{ sur } S_{x_0}(3r). \end{cases} \tag{1.40}$$

On renvoie à l'étape 1.2.3 ci-dessous pour l'existence de z_α. Toujours d'après l'étape 1.2.3, $\psi_\alpha \to 0$ dans $H_1^p(A)$ et $\psi_\alpha \rightharpoonup 0$ dans $D_1^p(\mathbb{R}^n)$. Fixons $r < \frac{\delta}{24}$ et notons $\tilde{\psi}_\alpha \in H_1^p(M)$ la fonction définie sur M par changement d'échelle de ψ_α. A savoir

$$\tilde{\psi}_\alpha(x) = \begin{cases} R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \psi_\alpha\left(R_\alpha \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right) & \text{si } d_g(x_\alpha, x) < 6r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\tilde{\eta}\left(\delta^{-1} \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right) = 1$ si $d_g(x_\alpha, x) < 6r$ et, si de plus $|x_0| < 3r$, nous avons

$$\begin{aligned} DI_g(v_\alpha).\tilde{\psi}_\alpha &= DI_g(\tilde{\eta}_\alpha v_\alpha).\tilde{\psi}_\alpha \\ &= \int_{B_{x_0}(3r)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} < \nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha); \nabla \psi_\alpha >_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\ &\quad - \int_{B_{x_0}(3r)} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha|^{p^*-2} \tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha \psi_\alpha dv_{\tilde{g}_\alpha}. \end{aligned}$$

La suite $(\psi_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $D_1^p(\mathbb{R}^n)$. Il suit de l'inégalité de Sobolev que $(\psi_\alpha)_\alpha$ est alors également bornée dans $H_1^p(\mathbb{R}^n)$. Par définition de $\tilde{\psi}_\alpha$ et $\tilde{g}_\alpha$, $(\tilde{\psi}_\alpha)_\alpha$ est donc bornée dans $H_1^p(M)$. Nous en déduisons, $(v_\alpha)_\alpha$ étant une suite de Palais-Smale pour I_g, que

$$DI_g(v_\alpha).\tilde{\psi}_\alpha = o(1). \tag{1.41}$$

Remarquons que si

$$I = \int_A |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha).\nabla\psi_\alpha\right)_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha}$$

alors $I = o(1)$. En effet, d'après l'inégalité de Hölder,

$$|I| \leq \left(\int_A |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_A |\nabla\psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous pouvons d'autre part supposer, quitte à diminuer r, que $supp(\psi_\alpha) \subset B_{x_0}(3r) \subset B_0(\delta) \subset B_0(\delta R_\alpha)$, d'où, d'après (1.37),

$$\begin{aligned}\int_A |\nabla\psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha} &\leq C \int_A |\nabla\psi_\alpha|^p dx \\ &= o(1).\end{aligned}$$

De plus, par définition de $\tilde{\eta}_\alpha$, $supp(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha) \subset B_0(\frac{3\delta R_\alpha}{4}) \subset B_0(\delta R_\alpha)$, et donc

$$\begin{aligned}\int_A |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha} &\leq C \int_A |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|^p dx \\ &= O(1)\end{aligned}$$

ce qui montre que $I = o(1)$. Nous allons maintenant prouver que

$$\begin{aligned}&\int_{B_{x_0}(3r)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha).\nabla\psi_\alpha\right)_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1).\end{aligned} \tag{1.42}$$

On remarque tout d'abord que

$$\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha) \to \nabla v \ p.p. \tag{1.43}$$

La preuve de (1.43) est analogue à celle de l'étape 1.1.2 de la section 1.1. Il suffit de montrer que, pour $\epsilon > 0$ quelconque, il existe $C > 0$ tel que

$$\int_\Omega \Sigma_\alpha \nabla\beta_{\epsilon,\alpha} dx \leq C\epsilon$$

où $\beta_{\epsilon,\alpha} = \beta_\epsilon \circ (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha - v)$ et $\Sigma_\alpha = |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_\xi^{p-2} \nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)$. Pour $\theta > 0$ petit fixé et $C > 0$ donné par (1.17), on écrit que

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_0}(\rho)} K dv_{\tilde{g}_\alpha} &\le C \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla \psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}} |\nabla v|_{\tilde{g}_\alpha}^{\frac{p\theta}{p-1}} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\ &\quad + C \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla \psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^{\frac{p\theta}{p-1}} |\nabla v|_{\tilde{g}_\alpha}^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\ &\le C \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla \psi_\alpha|_\xi^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}} |\nabla v|_\xi^{\frac{p\theta}{p-1}} dx \\ &\quad + C \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla \psi_\alpha|_\xi^{\frac{p\theta}{p-1}} |\nabla v|_\xi^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}} dx\end{aligned}$$

où

$$K = \left| |\nabla(\psi_\alpha + v)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \nabla(\psi_\alpha + v) - |\nabla \psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \nabla \psi_\alpha - |\nabla v|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \nabla v \right|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Puisque $|\nabla \psi_\alpha| \to 0$ presque partout (d'après (1.43)) et $(\psi_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $D_1^p(\mathbb{R}^n)$, il suit d'arguments standard en théorie de l'intégration que

$$\int_{B_{x_0}(\rho)} K dv_{\tilde{g}_\alpha} = o(1).$$

Donc, $(\psi_\alpha)_\alpha$ étant bornée dans $D_1^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}&\int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla(\psi_\alpha + v)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla(\psi_\alpha + v).\nabla \psi_\alpha\right)_{\tilde{g}_\alpha} \\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla \psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha} + \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla v|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla v.\nabla \psi_\alpha\right)_{\tilde{g}_\alpha} |dv_{\tilde{g}_\alpha} \\ &+ o(1).\end{aligned} \tag{1.44}$$

En utilisant (1.41), (1.44), la convergence faible de ψ_α vers 0 dans $D_1^p(\mathbb{R}^n)$, et la convergence forte ψ_α vers 0 dans $D_1^p(A)$, nous obtenons finalement que

$$\begin{aligned}&\int_{B_{x_0}(3r)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha).\nabla \psi_\alpha\right)_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha).\nabla \psi_\alpha\right)_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1) \\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla \psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha} + \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla v|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla v.\nabla \psi_\alpha\right)_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1) \\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla \psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^p dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1)\end{aligned}$$

ce qui prouve (1.42). De la même manière on obtient que

$$\begin{aligned}&\int_{B_{x_0}(3r)} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha|^{p^*-2}\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha \psi_\alpha dv_{\tilde{g}_\alpha}\\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\psi_\alpha + v|^{p^*-2}(\psi_\alpha + v)\psi_\alpha dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1)\\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\psi_\alpha|^{p^*} dv_{\tilde{g}_\alpha} + \int_{B_{x_0}(\rho)} |v|^{p^*-2} v\psi_\alpha dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\alpha|^{p^*} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1).\end{aligned}$$

Finalement, d'après (1.41) et ce qui précède,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} - \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\alpha|^{p^*} dv_{\tilde{g}_\alpha} = o(1). \tag{1.45}$$

Montrons maintenant que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha}\\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} - \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla v|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1).\end{aligned} \tag{1.46}$$

Fixons $\theta > 0$ petit et $C > 0$ tels que

$$\begin{aligned}&\int_{B_{x_0}(\rho)} \left| |\nabla(\psi_\alpha + v)|^p_{\tilde{g}_\alpha} - |\nabla v|^p_{\tilde{g}_\alpha} - |\nabla\psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} \right| dv_{\tilde{g}_\alpha}\\ &\le C \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla\psi_\alpha|^{p-\theta}_{\tilde{g}_\alpha} |\nabla v|^\theta_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + C \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla\psi_\alpha|^\theta_{\tilde{g}_\alpha} |\nabla v|^{p-\theta}_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha}\\ &\le C' \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla\psi_\alpha|^{p-\theta} |\nabla v|^\theta dx + C' \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla\psi_\alpha|^\theta |\nabla v|^{p-\theta} dx.\end{aligned}$$

Par théorie standard d'intégration on a que

$$\begin{aligned}&\int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla(\psi_\alpha + v)|^p_{\tilde{g}_\alpha}\\ &= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla v|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla\psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1).\end{aligned}$$

En écrivant que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\
&= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1) \\
&= \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} - \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla v|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1)
\end{aligned}$$

on obtient (1.46). Il suit en particulier de (1.46) que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq \int_{B_{x_0}(\rho)} |\nabla (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1). \tag{1.47}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $B_0(2)$ puisse être recouverte par N boules de rayon 1 centrées en des points de $B_0(2)$. Il existe alors N points $x_1, ..., x_N$ de $B_{x_0}(2r)$ tels que

$$B_{x_0}(\rho) \subset B_{x_0}(2r) \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{x_i}(r)$$

et nous déduisons de (1.32) et (1.47) que pour x_0 et r vérifiant l'inégalité $|x_0| + 3r < r_0$, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq N\lambda + o(1). \tag{1.48}$$

Pour x_0 et r tels que $|x_0| + 3r < \delta$, (1.45) et l'inégalité de Sobolev donnent l'existence de $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \right)^{p/p^*} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_\alpha|^{p^*} dv_{\tilde{g}_\alpha} \right)^{p/p^*} + o(1) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1)
\end{aligned}$$

et avec (1.48), nous obtenons l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \leq \left(C\lambda^{\frac{p^*}{p}-1} + o(1) \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} + o(1).$$

On choisit $\lambda > 0$ suffisamment petit de sorte que $C\lambda^{\frac{p^*}{p}-1} < 1$. On a alors que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi_\alpha|^p_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} = o(1).$$

Donc $\psi_\alpha \to 0$ dans $\mathcal{D}_1^p(\mathbb{R}^n)$. Comme $r \le \rho$, nous en déduisons que

$$\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha \to v \ in \ H_1^p(B_{x_0}(r)) \tag{1.49}$$

et cette convergence est valable dès que

$$C\lambda^{\frac{p^*}{p}-1} < 1 \ , \ |x_0| < 3r \ , \ |x_0| + 3r < \min\{r_0, \delta\}$$

et r est suffisamment petit. Fixons $r > 0$ et λ tels que ces contraintes soient satisfaites. Alors (1.49) est vérifiée pour tout $x_0 \in B_0(2r)$. Puisque $C_0 \le 2$, $B_0(C_0 r)$ est recouverte par N boules de rayon r centrées en des points de $B_0(2r)$. Par conséquent $\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha \to v$ dans $H_1^p(B_0(C_0 r))$ ce qui prouve l'étape 1.2.2.

L'étape 1.2.3 ci-dessous a été utilisée dans la démonstration de l'étape précédente.

Etape 1.2.3 *Soit Ω un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$, $p \in (1, n)$ et $\hat{p}$ défini par $\hat{p} = \frac{p-1}{p}$. Considérons également $h \in H_{\hat{p}}^p(\partial\Omega)$. Il existe alors une solution $u \in H_1^p(\Omega)$ au problème*

$$\begin{aligned} &\Delta_p u = 0 \ \ dans\, \Omega \ , \\ &u = h \ \ sur\, \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

Il existe de plus une constante $C > 0$ indépendante de u et h telle que $\|u\|_{H_1^p(\Omega)} \le C\|h\|_{H_{\hat{p}}^p(\partial\Omega)}$.

Preuve de l'étape 1.2.3. On obtient facilement, en s'inspirant de Struwe [52], voir l'appendice A, l'existence de constantes strictement positives C_1, C_2 telles que pour tout $u \in H_1^p(\Omega)$,

$$\int_\Omega |u|^p dx \le C_1 \int_\Omega |\nabla u|^p dx + C_2 \int_{\partial\Omega} |u_{|\partial\Omega}|^p dx. \tag{1.50}$$

Soit $h \in H_{\hat{p}}^p(\partial\Omega)$. Notons $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions $v \in H_1^p(\Omega)$ telles que $v - h \in H_0^{1,p}(\Omega)$ où $H_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence dans $H_1^p(\Omega)$ de l'espace des fonctions lisses à support compacte dans Ω. Considérons

$$\lambda = \inf_{v \in \mathcal{H}} \int_\Omega |\nabla v|^p dx$$

et soit $(v_m)_m$ une suite minimisante pour λ. D'après (1.50), $(v_m)_m$ est bornée dans $H_1^p(\Omega)$. Nous pouvons donc supposer que $v_m \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_1^p(\Omega)$, fortement dans $L^p(\Omega)$ et $L^p(\partial\Omega)$. En particulier, $u \in \mathcal{H}$ et

$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \lambda$. On en déduit que u est une solution faible de $\Delta_p u = 0$ dans Ω et que $u = h$ sur $\partial\Omega$. Soit H donné par l'opérateur d'extension de $H^p_{\hat{p}}(\partial\Omega)$ dans $H^p_1(\Omega)$. Alors $H \in H^p_1(\Omega)$ et $H_{|\partial\Omega} = h$. On montre facilement à partir de l'équation vérifiée par u que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = 0$$

où $v = u - H \in H^{1,p}_0(\Omega)$. On montre ensuite, avec l'inégalité de Hölder, que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \le \int_\Omega |\nabla H|^p dx.$$

En particulier, d'après la continuité de l'opérateur d'extension,

$$\|\nabla u\|_p \le C\|h\|_{H^p_{\hat{p}}(\partial\Omega)}$$

où $C > 0$ est indépendante de u et h. On obtient finalement, en injectant cette inégalité dans (1.50), que $\|u\|_{H^p_1(\Omega)} \le C\|h\|_{H^p_{\hat{p}}(\partial\Omega)}$ où $C > 0$ est indépendante de u et h. Ceci achève la preuve de l'étape 1.2.3.

Il suit facilement de l'étape 1.2.2 que $v \not\equiv 0$. Il suffit pour le voir de revenir à (1.32) et d'écrire que

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_{B_0(C_0 r)} |\nabla(\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|^p dv_{\tilde{g}_\alpha} \\ &\le C_1 \int_{B_0(C_0 r)} |\nabla v|^p dx + o(1) \end{aligned}$$

d'où $v \not\equiv 0$. Il suit également de l'étape 1.2.2 que $R_\alpha \to +\infty$ quand $\alpha \to +\infty$. En effet si $R_\alpha \to R$ quand $\alpha \to +\infty$, $R \ge 1$, alors, puisque $v_\alpha \rightharpoonup 0$ dans $H^p_1(M)$, $\tilde{v}_\alpha \rightharpoonup 0$ dans $H^p_1(B_0(C_0 r))$. Ce qui contredit le fait que $v \not\equiv 0$. Par conséquent

$$R_\alpha \to +\infty \tag{1.51}$$

quand $\alpha \to +\infty$. Nous pouvons alors montrer, grâce à (1.51), que pour tout $R > 0$,

$$\tilde{v}_\alpha \to v \text{ dans } H^p_1(B_0(R)) \tag{1.52}$$

quand $\alpha \to +\infty$. Pour voir cela, donnons nous $R \ge 1$. D'après (1.51), $R_\alpha > R$ pour α assez grand. Alors (1.32) est satisfaite pour les $z \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $|z| < r_0 R - r$, et il découle de la preuve de l'étape 1.2.2 que (1.49) est vraie si $|x_0| < 3r(2R-1)$, $|x_0| + 3r < r_0 R$ et $|x_0| + 3r < \delta R$. En particulier, (1.49) est vraie si $|x_0| < 2rR$ et donc $\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha \to v$ fortement dans $H^p_1(B_0(2rR))$. Comme $R \ge 1$ est quelconque et $\tilde{\eta}_\alpha(x) = 1$ pour α grand si $|x| \le R$, nous obtenons (1.52). L'étape suivante se montre maintenant facilement.

Etape 1.2.4 *L'équation euclidienne critique*

$$\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$$

est vérifiée par la limite v de l'étape 1.2.2.

Preuve de l'étape 1.2.4. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $R_0 > 0$ un réel strictement positif tel que *supp* $\phi \subset B_0(R_0)$, et $\hat{\phi}_\alpha \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\hat{\phi}_\alpha(x) = R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \phi(R_\alpha x).$$

Alors *supp* $\hat{\phi}_\alpha \subset B_0(R_0 R_\alpha^{-1})$. Pour α grand, définissons $\phi_\alpha \in C^\infty(M)$ par l'équation $\hat{\phi}_\alpha = \phi_\alpha \circ \exp_{x_\alpha}$. Nous obtenons alors, pour α grand, que

$$\begin{aligned}
&\int_M |\nabla v_\alpha|_g^{p-2} \left(\nabla v_\alpha . \nabla \phi_\alpha\right)_g dv_g \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \tilde{v}_\alpha|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla \tilde{v}_\alpha . \nabla \phi\right)_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha) . \nabla \phi\right)_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_M |v_\alpha|^{p^*-2} v_\alpha \phi_\alpha dv_g &= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}_\alpha|^{p^*-2} \tilde{v}_\alpha \phi dv_{\tilde{g}_\alpha} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha|^{p^*-2} \tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha \phi dv_{\tilde{g}_\alpha}.
\end{aligned}$$

De plus $(\phi_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $H_1^p(M)$ et donc

$$\begin{aligned}
o(1) &= DI_g(v_\alpha).\phi_\alpha \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha)|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \left(\nabla (\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha) . \nabla \phi\right)_{\tilde{g}_\alpha} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha|^{p^*-2} \tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha \phi \, dv_{\tilde{g}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Puisque $R_\alpha \to \infty$, nous pouvons écrire que $\tilde{g}_\alpha \to \xi$ dans $C^1(B_0(R))$ et donc que $dv_{\tilde{g}_\alpha} = \epsilon_\alpha dx$ où $\epsilon_\alpha \to 1$ uniformément dans $B_0(R)$. Par ailleurs $\tilde{\eta}_\alpha \tilde{v}_\alpha \to v$ dans $D_1^p(\mathbb{R}^n)$. Nous obtenons donc en passant à la limite dans l'équation ci-dessus, que pour tout $\phi \in D_1^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \phi dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p^*-2} v \phi dx$$

i.e v est solution faible de $\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$.

Pour $\hat{\delta} \in \left(0, \frac{\delta}{8}\right)$ fixé, notons V_α la fonction obtenue par changement d'échelle de v sur M par l'équation

$$V_\alpha(x) = \eta_\alpha(x) R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} v\left(R_\alpha \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right)$$

où $\eta_\alpha = \eta_{\hat{\delta},x_\alpha}$. Posons $w_\alpha = v_\alpha - V_\alpha$. La dernière étape dans la preuve du lemme 1.1.2 est la suivante :

Etape 1.2.5 *Les fonctions V_α et w_α vérifient d'une part que*

$$w_\alpha \rightharpoonup 0 \ \text{ dans } H_1^p(M). \tag{1.53}$$

Elles vérifient d'autre part que

$$DI_g(V_\alpha) \to 0 \ \text{ et } \ DI_g(w_\alpha) \to 0 \ \text{ dans } \ H_1^p(M)'. \tag{1.54}$$

Elles vérifient pour finir que

$$I_g(w_\alpha) = I_g(v_\alpha) - E(v) + o(1) \tag{1.55}$$

où $o(1) \to 0$, et toutes ces limites ont lieu lorsque $\alpha \to +\infty$.

Preuve de l'étape 1.2.5. Montrons d'abord que $w_\alpha \rightharpoonup 0$ in $H_1^p(M)$. Il suffit de montrer que $V_\alpha \rightharpoonup 0$ in $H_1^p(M)$. Remarquons que la suite $(V_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $H_1^p(M)$. L'injection $H_1^p(M) \hookrightarrow L^p(M)$ étant compacte, il est donc suffisant de montrer que $V_\alpha \rightharpoonup 0$ dans $L^p(M)$. Soit $f \in L^q(M)$ où $q = \frac{p}{p-1}$. Etant donné $R > 0$ quelconque, on note

$$B_\alpha = B_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}R) \ , \ B_\alpha^c = B_{x_\alpha}(2\hat{\delta}) \backslash B_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}R)$$

et $g_\alpha = \exp_{x_\alpha}^* g$. Nous pouvons alors écrire que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B_\alpha} f V_\alpha dv_g \right| \\
&\leq R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \int_{B_0(R_\alpha^{-1}R)} \left| f(\exp_{x_\alpha}(x)) \right| \left| v(R_\alpha x) \right| dv_{g_\alpha} \\
&\leq C.R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \left(\int_{B_0(R_\alpha^{-1}R)} \left| v(R_\alpha x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \times \left(\int_{B_0(R_\alpha^{-1}R)} \left| f(\exp_{x_\alpha}(x)) \right|^q dv_{g_\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \|f\|_q R_\alpha^{-1} \left(\int_{B_0(R)} |v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

et, de façon similaire que,

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_\alpha^c} fV_\alpha dv_g\right| &\leq C\|f\|_q R_\alpha^{-1}\left(\int_{B_0(2\hat\delta R_\alpha)\backslash B_0(R)} |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\|f\|_q\left(\int_{B_0(2\hat\delta R_\alpha)\backslash B_0(R)} |v|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}.\end{aligned}$$

Puisque $R_\alpha \to \infty$ et $R > 0$ est arbitraire, nous obtenons

$$\int_M fV_\alpha dv_g = o(1).$$

Comme $f \in L^q(M)$ est quelconque, ceci prouve que $V_\alpha \rightharpoonup 0$ faiblement dans $H_1^p(M)$, et donc que (1.53) est vérifié. Montrons (1.54). Fixons $\phi \in C^\infty(M)$ et écrivons

$$\begin{aligned}DI_g(V_\alpha)\phi &= \int_{B_\alpha^c} |\nabla V_\alpha|^{p-2}\nabla V_\alpha\nabla\phi dv_g + \int_{B_\alpha} |\nabla V_\alpha|^{p-2}\nabla V_\alpha\nabla\phi dv_g\\ &\quad -\int_{B_\alpha^c} |V_\alpha|^{p^*-2}V_\alpha\phi dv_g - \int_{B_\alpha} |V_\alpha|^{p^*-2}V_\alpha\phi dv_g \qquad (1.56)\end{aligned}$$

où B_α et B_α^c sont comme ci-dessus. D'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{B_\alpha^c} |\nabla V_\alpha|^{p-2}\nabla V_\alpha\nabla\phi dv_g\right|\\ &\leq \|\phi\|_{H_1^p}\left(\int_{B_\alpha^c} |\nabla V_\alpha|^p dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\leq C\|\phi\|_{H_1^p}\left(\int_{\mathbb{R}^n\backslash B_0(R)} |\nabla v|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n\backslash B_0(R)} |v|^p|\nabla(\eta_{\hat\delta}(R_\alpha^{-1}x))|\right)^{\frac{p-1}{p}} \qquad (1.57)\\ &\leq C\|\phi\|_{H_1^p}\|v\|^{p-1}_{H_1^p(\mathbb{R}^n - B_0(R))}\\ &= O\left(\|\phi\|_{H_1^p}\right)\epsilon_R\end{aligned}$$

où $\epsilon_R \to 0$ quand $R \to +\infty$. Par ailleurs, pour α grand,

$$\int_{B_\alpha} |\nabla V_\alpha|^{p-2}\nabla V_\alpha\nabla\phi dv_g = \int_{B_0(R)} |\nabla v|^{p-2}_{\tilde g_\alpha}\nabla v\nabla\phi_\alpha dv_{\tilde g_\alpha}$$

où

$$\phi_\alpha(x) = R_\alpha^{-\frac{n-p}{p}}\eta_{\hat\delta}(R_\alpha^{-1}x)\phi\left(exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}x)\right).$$

Comme $\tilde{g}_\alpha \to \xi$ dans $C^1\left(\bar{B}_0(R)\right)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_0(R)} |\nabla v|_{\tilde{g}_\alpha}^{p-2} \nabla v \nabla \phi_\alpha dv_{\tilde{g}_\alpha} \\
&= \int_{B_0(R)} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \phi_\alpha dx + o\left(\|\phi\|_{H_1^p}\right) \qquad (1.58) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \phi_\alpha dx + (O(1)\epsilon_R + o(1)) \|\phi\|_{H_1^p}.
\end{aligned}$$

On obtient donc, en combinant (1.57) et (1.58), que

$$\begin{aligned}
&\int_M |\nabla V_\alpha|^{p-2} \nabla V_\alpha \nabla \phi dv_g \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \phi_\alpha dx + (O(1)\epsilon_R + o(1)) \|\phi\|_{H_1^p}.
\end{aligned}$$

On montre de même que

$$\int_M |V_\alpha|^{p^*-2} V_\alpha \phi dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p^*-2} v \phi_\alpha dx + (O(1)\epsilon_R + o(1)) \|\phi\|_{H_1^p}$$

et v étant solution de $\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$, (1.56) s'écrit finalement

$$DI_g(V_\alpha)\phi = (O(1)\epsilon_R + o(1)) \|\phi\|_{H_1^p}$$

pour tout $R > 0$. Donc $DI_g(V_\alpha) \to 0$ fortement. Il reste encore à montrer que $DI_g(w_\alpha) \to 0$ fortement. Ecrivons pour cela que, pour une fonction $\phi \in C^\infty(M)$ donnée,

$$\begin{aligned}
DI_g(w_\alpha)\phi &= DI_g(v_\alpha)\phi - DI_g(V_\alpha) + \int_M \psi_\alpha \nabla \phi dv_g - \int_M \chi_\alpha \phi dv_g \\
&= o(1)\|\phi\|_{H_1^p} + \int_M \psi_\alpha \nabla \phi dv_g - \int_M \chi_\alpha \phi dv_g
\end{aligned}$$

où

$$\psi_\alpha = |\nabla w_\alpha|^{p-2} \nabla w_\alpha - |\nabla v_\alpha|^{p-2} \nabla v_\alpha + |\nabla V_\alpha|^{p-2} \nabla V_\alpha$$

et

$$\chi_\alpha = |w_\alpha|^{p^*-2} w_\alpha - |v_\alpha|^{p^*-2} v_\alpha + |V_\alpha|^{p^*-2} V_\alpha.$$

On a

$$\left| \int_M \psi_\alpha \nabla \phi dv_g \right| \leq \|\phi\|_{H_1^p} \left(\int_M |\psi_\alpha|^{\frac{p}{p-1}} dv_g \right)^{\frac{p-1}{p}}. \qquad (1.59)$$

D'après l'inégalité (1.17), il existe $\theta > 0$ petit et $C > 0$ tels que pour tout α

$$\left(\int_M |\psi_\alpha|^{\frac{p}{p-1}} dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}} \le C\left(\int_M \left||\nabla w_\alpha|^{p-1-\theta}|\nabla V_\alpha|^\theta + |\nabla V_\alpha|^{p-1-\theta}|\nabla w_\alpha|^\theta\right|^{\frac{p}{p-1}} dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Par suite, par définition de η_α,

$$\begin{aligned}&\left(\int_M |\psi_\alpha|^{\frac{p}{p-1}} dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\le C\left(\int_{B_{x_\alpha}(2\hat\delta)} |\nabla w_\alpha|^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}}|\nabla V_\alpha|^{\frac{p\theta}{p-1}} dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &+ C\left(\int_{B_{x_\alpha}(2\hat\delta)} |\nabla V_\alpha|^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}}|\nabla w_\alpha|^{\frac{p\theta}{p-1}} dv_g\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\tilde v_\alpha - \hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}}|\nabla(\hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p\theta}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\\ &+ C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}}|\nabla(\tilde v_\alpha - \hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p\theta}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\end{aligned} \tag{1.60}$$

avec

$$\hat\eta_\alpha(x) = \eta_{\hat\delta, x_\alpha}\left(exp_{x_\alpha}(R_\alpha^{-1}x)\right) = \eta_{\hat\delta}(R_\alpha^{-1}x).$$

Nous pouvons, d'après (1.52), supposer que la suite des

$$f_\alpha := |\nabla(\tilde v_\alpha - \hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}}$$

est bornée dans $L^{\frac{p-1}{p-1-\theta}}(\mathbb{R}^n)$ et converge presque partout vers 0. Par conséquent, que $f_\alpha \rightharpoonup 0$ faiblement dans $L^{\frac{p-1}{p-1-\theta}}(\mathbb{R}^n)$. D'où

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\tilde v_\alpha - \hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}}|\nabla(\hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p\theta}{p-1}} dx\\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha |v|^{\frac{p\theta}{p-1}} dx + C\int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha |\nabla v|^{\frac{p\theta}{p-1}} dx\\ &= o(1).\end{aligned} \tag{1.61}$$

On montre de la même façon que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p(p-1-\theta)}{p-1}}|\nabla(\tilde v_\alpha - \hat\eta_\alpha v)|^{\frac{p\theta}{p-1}} dx = o(1). \tag{1.62}$$

Finalement (1.59), (1.60), (1.61) et (1.62) donnent

$$\int_M \psi_\alpha \nabla\phi dv_g = o(1)\|\phi\|_{H_1^p}.$$

On montrerait de même que

$$\int_M \chi_\alpha \phi dv_g = o(1).$$

Par conséquent $DI_g(w_\alpha)\phi = o(1)\|\phi\|_{H_1^p}$ pour tout $\phi \in C^\infty(M)$ i.e. $DI_g(w_\alpha) \to 0$ dans $H_1^p(M)'$. On montre maintenant (1.55). On écrit que

$$I_g(w_\alpha) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla w_\alpha|_g^p dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |w_\alpha|^{p^*} dv_g$$

et que

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla w_\alpha|_g^p dv_g = \int_{B_\alpha} |\nabla w_\alpha|_g^p dv_g + \int_{B_\alpha^c} |\nabla w_\alpha|_g^p dv_g \\ + \int_{M\setminus B_{x_\alpha}(2\hat\delta)} |\nabla w_\alpha|_g^p dv_g\end{aligned} \tag{1.63}$$

où B_α et B_α^c sont comme ci-dessus. D'une part,

$$\begin{aligned}\int_{B_\alpha} |\nabla w_\alpha|_g^p dv_g &= \int_{B_0(R)} |\nabla \tilde v_\alpha - \nabla v|_{\tilde g_\alpha}^p \, dv_{\tilde g_\alpha} \\ &\le C\int_{B_0(R)} |\nabla \tilde v_\alpha - \nabla v|^p \, dx.\end{aligned}$$

Puisque $\tilde v_\alpha \to v$ dans $H_1^p(B_0(R))$, nous en déduisons que

$$\int_{B_\alpha} |\nabla w_\alpha|_g^p dv_g = o(1). \tag{1.64}$$

D'autre part, en utilisant (1.18) comme ci-dessus, on peut montrer que

$$\int_{B_\alpha^c} |\nabla w_\alpha|^p dv_g = \int_{B_\alpha^c} |\nabla v_\alpha|^p dv_g - \int_{B_\alpha^c} |\nabla V_\alpha|^p dv_g$$

avec

$$\left|\int_{B_\alpha^c} |\nabla V_\alpha|^p dv_g\right| \le C\|v\|_{H_1^p\left(B_0(2\hat\delta R_\alpha)\setminus B_0(R)\right)}.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{B_\alpha^c} |\nabla w_\alpha|_g^p dv_g = \int_{B_\alpha^c} |\nabla v_\alpha|_g^p dv_g + B_R(\alpha) \tag{1.65}$$

où $B_R(\alpha)$ est mis pour toute expression telle que

$$\lim_{R\to+\infty}\limsup_{\alpha\to+\infty} B_R(\alpha)=0.$$

Finalement, par définition de $\eta_{\hat\delta,x_\alpha}$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}&\int_{M\setminus B_{x_\alpha}(2\hat\delta)}|\nabla w_\alpha|_g^p dv_g\\ &=\int_M|\nabla v_\alpha|_g^p dv_g-\int_{B_\alpha}|\nabla v_\alpha|_g^p dv_g-\int_{B_\alpha^c}|\nabla v_\alpha|_g^p dv_g.\end{aligned}\tag{1.66}$$

Nous obtenons alors en injectant (1.64), (1.65) et (1.66) dans (1.63),

$$\int_M|\nabla w_\alpha|_g^p dv_g=\int_M|\nabla v_\alpha|_g^p dv_g-\int_{B_\alpha}|\nabla v_\alpha|_g^p dv_g+B_R(\alpha)+o(1).$$

Il s'ensuit, puisque $\tilde g_\alpha\to\xi$ dans $C^0\left(B_0(R)\right)$ et $\tilde v_\alpha\to v$ dans $H_1^p\left(B_0(R)\right)$, que

$$\begin{aligned}\int_{B_\alpha}|\nabla v_\alpha|_g^p dv_g &= \int_{B_0(R)}|\nabla\tilde v_\alpha|_{\tilde g_\alpha}^p dv_{\tilde g_\alpha}\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^p dx+B_R(\alpha)+o(1).\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement que

$$\int_M|\nabla w_\alpha|_g^p dv_g=\int_M|\nabla v_\alpha|_g^p dv_g-\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v|^p dx+B_R(\alpha)+o(1).$$

On montre de la même façon que

$$\int_M|w_\alpha|^{p^*}dv_g=\int_M|v_\alpha|^{p^*}dv_g-\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{p^*}dx+B_R(\alpha)+o(1).$$

Comme $R>0$ est arbitraire, on en déduit que (1.55) est vérifié. Ceci termine la preuve de l'étape 1.2.5.

D'après ce qui précède, le lemme 1.1.2 est démontré pour tout δ tel que $\delta\in\left(0,\frac{i_g}{2}\right)$. Soient $\delta_1<\delta_2$ dans $\left(0,\frac{i_g}{2}\right)$. On vérifie facilement à partir de la définition de η_{δ_i,x_α} que

$$\left\|\hat B_\alpha^1-\hat B_\alpha^2\right\|_{H_1^p}=o(1)$$

où $\hat B_\alpha^i(x)=\eta_{\delta_i,x_\alpha}(x)R_\alpha^{\frac{n-p}{p}}v\left(R_\alpha\exp_{x_\alpha}^{-1}(x)\right)$, $i=1,2$. Par exemple

$$\int_M\left|\hat B_\alpha^1-\hat B_\alpha^2\right|^{p^*}dv_g\le 2\int_{B_0(2\delta_2R_\alpha)-B_0(\delta_1R_\alpha)}|v|^{p^*}dv_{\tilde g_\alpha}=o(1).$$

On procède de façon similaire pour le terme en gradient. On en déduit que le lemme 1.1.2 est vérifié pour tout $\delta\in\left(0,\frac{i_g}{2}\right)$, ce qui en achève la preuve.

1.3 Positivité des bulles

Le but de cette section est de montrer que si les u_α de la section précédente sont positifs, il en est de même de u^0 et des u^i. Remarquons que puisque $u_\alpha \to u^0$ presque partout, il est évident que $u^0 \geq 0$ dès que les u_α sont positifs. En ce qui concerne les u^i, nous procédons comme suit. Fixons un entier N dans $\{1,..,k\}$. Nous allons montrer que $u^N \geq 0$ en prouvant que $\tilde{u}_\alpha^N \to u^N$ presque partout dans $\mathbb{R}^n$ où

$$\tilde{u}_\alpha^N(x) = (\mu_\alpha^N)^{\frac{n-p}{p}} u_\alpha \left(\exp_{x_\alpha^N}(\mu_\alpha^N x)\right). \tag{1.67}$$

Notons $\mu_\alpha^i = 1/R_\alpha^i$ et $v_\alpha = u_\alpha - u^0$, et considérons $\tilde{v}_\alpha^N$ et $\tilde{u}_\alpha^{0,N}$ définis par

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\alpha^N(x) &= (\mu_\alpha^N)^{\frac{n-p}{p}} v_\alpha \left(\exp_{x_\alpha^N}(\mu_\alpha^N x)\right), \\ \tilde{u}_\alpha^{0,N}(x) &= (\mu_\alpha^N)^{\frac{n-p}{p}} u^0 \left(\exp_{x_\alpha^N}(\mu_\alpha^N x)\right). \end{aligned}$$

Supposons pour l'instant qu'il existe un entier p, qu'il existe p suites $(y_\alpha^j)_\alpha$ de points de M, et qu'il existe p suites (λ_α^j) de réels positifs, $j = 1, \ldots, p$, tels que $\lambda_\alpha^j/\mu_\alpha^N \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$, la suite formée des $d_g(x_\alpha^N, y_\alpha^j)/\mu_\alpha^N$ est bornée et telle que pour tous $R, R' > 0$,

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\setminus\bigcup_{j=1}^p B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left|v_\alpha - u_\alpha^N\right|^{p^*} dv_g = o(1) + \epsilon(R') \tag{1.68}$$

où $\epsilon(R') \to 0$ quand $R' \to +\infty$. Nous déduisons alors de (1.68) que

$$\int_{B_0(R)\setminus\bigcup_{j=1}^p B_{\tilde{y}_\alpha^j}(R'C\frac{\lambda_\alpha^j}{\mu_\alpha^N})} \left|\tilde{v}_\alpha^N - u^N\right|^{p^*} dx = o(1) + \epsilon(R') \tag{1.69}$$

où $y_\alpha^j = \exp_{x_\alpha^N}(\mu_\alpha^N \tilde{y}_\alpha^j)$. Les $\tilde{y}_\alpha^j$ étant bornés, nous pouvons supposer que $\tilde{y}_\alpha^j \to \tilde{y}^j$ quand $\alpha \to \infty$ pour tout j. Alors (1.69) donne

$$\tilde{v}_\alpha^N \to u^N \text{ dans } L_{loc}^{p^*}\left(B_0(R)\setminus\{\tilde{y}^j, j = 1,..,p\}\right)$$

pour tout $R > 0$. Nous pouvons donc supposer que

$$\tilde{u}_\alpha^N - \tilde{u}_\alpha^{0,N} \to u^N \text{ p.p dans } \mathbb{R}^n. \tag{1.70}$$

De plus, si $\tilde{g}_\alpha(x) = \left((\exp_{x_\alpha^N})^* g\right)(\mu_\alpha^N x)$, nous pouvons écrire que pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{B_0(R)} \left|\tilde{u}_\alpha^{0,N}\right|^{p^*} dx &\leq C \int_{B_0(R)} \left|\tilde{u}_\alpha^{0,N}\right|^{p^*} dv_{\tilde{g}_\alpha} \\ &= \int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)} \left|u^0\right|^{p^*} dv_g \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand $\alpha \to +\infty$. Par conséquent $\tilde{u}_\alpha^{0,N} \to 0$ dans $L^{p^*}(B_0(R))$ pour tout $R > 0$, et nous pouvons donc également supposer que $\tilde{u}_\alpha^{0,N} \to 0$ presque partout dans $\mathbb{R}^n$. Nous obtenons alors, d'après (1.70), que $\tilde{u}_\alpha^N \to u^N$ presque partout dans $\mathbb{R}^n$. On déduit donc de (1.68) que u^0 et les u^i de la section précédente sont positifs si les u_α le sont. Nous allons maintenant déduire (1.68) de l'assertion plus générale suivante. Nous affirmons que pour tout entier $N \in \{1, .., k\}$ et pour tout entier $s \in \{0, .., N-1\}$, il existe un entier p, il existe p suites $(y_\alpha^j)_\alpha$ de points de M, et il existe p suites (λ_α^j) de réels positifs, $j = 1, \dots, p$, tels que $\lambda_\alpha^j / \mu_\alpha^N \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$, la suite formée des $d_g(x_\alpha^N, y_\alpha^j)/\mu_\alpha^N$ est bornée et tels que pour tout $R, R' > 0$,

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N) \setminus \bigcup_{j=1}^p B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} \left| v_\alpha - \sum_{i=1}^s u_\alpha^i - u_\alpha^N \right|^{p^*} dv_g = o(1) + \epsilon(R') \tag{1.71}$$

où $\epsilon(R') \to 0$ quand $R' \to +\infty$, (u_α^i) et (x_α^i) étant les suites, ordonnées en i, obtenues dans la section précédente. Alors (1.68) se déduit de (1.71) quand $s = 0$. On fixe un entier N dans $\{1, .., k\}$ et on montre (1.71) pour tout s par récurrence inverse sur s. Si $s = N - 1$, alors, d'après (1.52), pour tout $R > 0$,

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)} \left| v_\alpha - \sum_{i=1}^N u_\alpha^i \right|^{p^*} dv_g = o(1)$$

d'où (1.71) avec $p = 0$. Supposons maintenant que (1.71) est vrai pour un $s \le N - 1$ et fixons $R, R' > 0$. Si $d_g(x_\alpha^s, x_\alpha^N) \not\to 0$ quand $\alpha \to \infty$, alors, pour $\tilde{R} > 0$ arbitraire et à sous-suite près,

$$B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N) \bigcap B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\mu_\alpha^s) = \emptyset.$$

D'où

$$\begin{aligned} &\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N) \setminus \bigcup_{j=1}^p B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} |u_\alpha^s|^{p^*} dv_g \\ &\le \int_{M \setminus B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\mu_\alpha^s)} |u_\alpha^s|^{p^*} dv_g \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0(\tilde{R})} |u^s|^{p^*} dx. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Puisque $u^s \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{R} > 0$ est arbitraire, nous en déduisons que

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N) \setminus \bigcup_{j=1}^p B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)} |u_\alpha^s|^{p^*} dv_g = o(1).$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\setminus\bigcup_{j=1}^p B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)}\left|v_\alpha-\sum_{i=1}^{s-1}u_\alpha^i-u_\alpha^N\right|^{p^*}dv_g\\
&\leq C\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\setminus\bigcup_{j=1}^p B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)}\left|v_\alpha-\sum_{i=1}^{s}u_\alpha^i-u_\alpha^N\right|^{p^*}dv_g\\
&\quad+C\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\setminus\bigcup_{j=1}^p B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)}|u_\alpha^s|^{p^*}dv_g\\
&=o(1)+\epsilon(R').
\end{aligned}$$

Ceci montre (1.71) pour $s-1$. Nous pouvons donc supposer dans la suite que $d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)\to 0$ quand $\alpha\to\infty$. Il s'agit maintenant de comparer soigneusement les croissances respectives des distances $d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)$ avec les rayons μ_α^s et μ_α^N. Soient $r_0>0$ et $C\geq 1$ tels que pour tout $x\in M$ et tout $y,z\in\mathbb{R}^n$, si $|y|,|z|\leq r_0$, alors

$$\frac{1}{C}|z-y|\leq d_g(\exp_x(y),\exp_x(z))\leq C|z-y|.$$

Si $\tilde{x}_\alpha^s$ et $\tilde{y}_\alpha^j$ sont tels que

$$x_\alpha^s=\exp_{x_\alpha^N}(\mu_\alpha^N\tilde{x}_\alpha^s)\ \text{ et }\ y_\alpha^j=\exp_{x_\alpha^N}(\mu_\alpha^N\tilde{y}_\alpha^j)\ ,$$

alors

$$B_{\tilde{y}_\alpha^j}\left(\frac{R'}{C}\frac{\lambda_\alpha^j}{\mu_\alpha^N}\right)\subset\frac{1}{\mu_\alpha^N}\exp_{x_\alpha^N}^{-1}\left(B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)\right)\subset B_{\tilde{y}_\alpha^j}\left(R'C\frac{\lambda_\alpha^j}{\mu_\alpha^N}\right)\tag{1.73}$$

et

$$B_{\tilde{x}_\alpha^s}\left(\frac{R'}{C}\frac{\mu_\alpha^s}{\mu_\alpha^N}\right)\subset\frac{1}{\mu_\alpha^N}\exp_{x_\alpha^N}^{-1}\left(B_{x_\alpha^s}(R'\mu_\alpha^s)\right)\subset B_{\tilde{x}_\alpha^s}\left(R'C\frac{\mu_\alpha^s}{\mu_\alpha^N}\right).\tag{1.74}$$

Etant donné $\tilde{R}>0$, nous avons, d'après (1.52),

$$\int_{B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\mu_\alpha^s)}\left|v_\alpha-\sum_{i=1}^{s}u_\alpha^i\right|^{p^*}dv_g=o(1).$$

Donc d'après (1.71),

$$\int_{\left(B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\setminus\bigcup_{j=1}^p B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)\right)\bigcap B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\mu_\alpha^s)}|u_\alpha^N|^{p^*}dv_g=o(1)+\epsilon(R')$$

et on déduit de (1.73) et (1.74) que

$$\int_{\left(B_0(R)\setminus\bigcup_{j=1}^{p}B_{\tilde{y}_\alpha^j}(R'C\frac{\lambda_\alpha^j}{\mu_\alpha^N})\right)\bigcap B_{\tilde{x}_\alpha^s}(\frac{\tilde{R}}{C}\frac{\mu_\alpha^s}{\mu_\alpha^N})}|u^N|^{p^*}dx = o(1)+\epsilon(R'). \tag{1.75}$$

On distingue maintenant deux cas. Dans un premier cas on suppose que la suite $\left(d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)/\mu_\alpha^N\right)$ est telle que $d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)/\mu_\alpha^N \to +\infty$ quand $\alpha\to\infty$. Dans ce cas, $d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)/\mu_\alpha^s \to +\infty$ puisque autrement, (1.75) entraîne, pour $\tilde{R}$ suffisamment grand, que $\mu_\alpha^s/\mu_\alpha^N \to 0$, tandis que

$$\frac{d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)}{\mu_\alpha^s} = \frac{d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)}{\mu_\alpha^N}\frac{\mu_\alpha^N}{\mu_\alpha^s}.$$

Par conséquent

$$B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\bigcap B_{x_\alpha^s}(\tilde{R}\mu_\alpha^s)=\emptyset$$

pour $\tilde{R}>0$ et nous pouvons alors procéder comme dans le cas où $d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)$ ne converge pas vers 0 pour obtenir (1.71) avec s-1. Supposons maintenant que la suite $(d_g(x_\alpha^s,x_\alpha^N)/\mu_\alpha^N)$ est convergeante. Dans ce cas, d'après (1.75), les quotients $\mu_\alpha^s/\mu_\alpha^N$ sont tels que $\mu_\alpha^s/\mu_\alpha^N \to 0$. Posons $y_\alpha^{p+1}=x_\alpha^s$ et $\lambda_\alpha^{p+1}=\mu_\alpha^s$. Alors d'après (1.71),

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\setminus\bigcup_{j=1}^{p+1}B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)}\left|v_\alpha-\sum_{i=1}^{s}u_\alpha^i-u_\alpha^N\right|^{p^*}dv_g = o(1)+\epsilon(R')$$

tandis que

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\setminus\bigcup_{j=1}^{p+1}B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)}|u_\alpha^s|^{p^*}dv_g &\le \int_{M\setminus B_{x_\alpha^s}(R'\mu_\alpha^s)}|u_\alpha^s|^{p^*}dv_g\\ &= \epsilon(R').\end{aligned}$$

D'où

$$\int_{B_{x_\alpha^N}(R\mu_\alpha^N)\setminus\bigcup_{j=1}^{p+1}B_{y_\alpha^j}(R'\lambda_\alpha^j)}\left|v_\alpha-\sum_{i=1}^{s-1}u_\alpha^i-u_\alpha^N\right|^{p^*}dv_g = o(1)+\epsilon(R')$$

et (1.71) est vrai pour s-1. Comme expliqué ci-dessus, ceci implique (1.68) puis le fait que u^0 et les u^i de la section précédente sont positifs si les u_α le sont.

1.4 L'estimée C^0

D'après le principe du maximum et les résultats de régularité classiques (voir Druet [19], Guedda-Véron [33] et Tolksdorf [53]), on a que $u^0 \in C^{1,\theta}(M)$ et, soit $u^0 > 0$ partout, soit $u^0 \equiv 0$. Il suffit donc, pour prouver l'estimée C^0 du théorème 1.0.6, de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout α et tout x,

$$\left(\min_{i=1,\ldots,k} d_g\left(x_\alpha^i, x\right)\right)^{\frac{n-p}{p}} u_\alpha(x) \leq C \tag{1.76}$$

où d_g est la distance induite par la métrique g et où les x_α^i sont les centres des bulles $(B_\alpha^i)_\alpha$ apparaissant dans le théorème 1.0.6. Considérons la fonction Φ_α définie par

$$\Phi_\alpha(x) = \min_{i=1,\ldots,k} d_g\left(x_\alpha^i, x\right)$$

ainsi que la function v_α définie par

$$v_\alpha(x) = \Phi_\alpha^{\frac{n-p}{p}}(x) u_\alpha(x).$$

Soit $y_\alpha \in M$ tel que

$$v_\alpha(y_\alpha) = \max_{x \in M} v_\alpha(x).$$

Supposons par l'absurde que $v_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$ quand $\alpha \to +\infty$. Considérons $\mu_\alpha > 0$ défini par $\mu_\alpha = u_\alpha(y_\alpha)^{-p/(n-p)}$. Alors $\mu_\alpha \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$. Etant donné $\delta \in (0, i_g)$, où i_g est le rayon d'injectivité de (M, g), définissons la fonction w_α sur la boule euclidienne $B_0(\delta\mu_\alpha^{-1})$ de centre 0 et de rayon $\delta\mu_\alpha^{-1}$ par

$$w_\alpha(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right).$$

Par définition de y_α,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{d_g(x_\alpha^i, y_\alpha)}{\mu_\alpha} = +\infty \tag{1.77}$$

pour tout i. Pour $R > 0$, $x \in B_0(R)$, et $i = 1, \ldots, k$, écrivons que

$$\begin{aligned} d_g\left(x_\alpha^i, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right) &\geq d_g\left(x_\alpha^i, y_\alpha\right) - d_g\left(y_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right) \\ &\geq \Phi_\alpha(y_\alpha) - \mu_\alpha |x| \\ &\geq \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right) \Phi_\alpha(y_\alpha). \end{aligned}$$

D'après (1.77), le membre de droite dans l'équation ci-dessus est strictement positif. Par conséquent,

$$\begin{aligned} w_\alpha(x) &= \frac{\mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} v_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)}{\Phi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)^{\frac{n-p}{p}}} \\ &\leq \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{-\frac{n-p}{p}} \frac{u_\alpha(y_\alpha)^{-1} v_\alpha(y_\alpha)}{\Phi_\alpha(y_\alpha)^{\frac{n-p}{p}}} \\ &= \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{-\frac{n-p}{p}}. \end{aligned}$$

Les w_α sont donc uniformément bornés sur tout compact de $\mathbb{R}^n$. Soit g_α la métrique riemannienne sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$g_\alpha(x) = \left(\exp_{y_\alpha}^\star g\right)(\mu_\alpha x).$$

L'équation (1.4) s'écrit alors

$$(\Delta_p)_{g_\alpha} w_\alpha + \mu_\alpha^p \tilde{h}_\alpha w_\alpha^{p-1} = w_\alpha^{p^\star - 1} \tag{1.78}$$

avec $\tilde{h}_\alpha(x) = h_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)$. Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, $g_\alpha \to \xi$ dans $C^2(K)$ quand $\alpha \to +\infty$, où ξ désigne la métrique euclidienne. Nous déduisons alors de (1.78) et du schéma itératif de De Giorgi-Nash-Moser l'existence d'une constante $C > 0$, indépendante de α, telle que pour tout α,

$$\sup_{x \in B_0(1)} w_\alpha(x) \leq C \left(\int_{B_0(2)} w_\alpha^{p^\star} dv_{g_\alpha}\right)^{1/p^\star}. \tag{1.79}$$

Indépendamment,

$$\int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^\star} dv_g = \int_{B_0(2)} w_\alpha^{p^\star} dv_{g_\alpha} \tag{1.80}$$

tandis que grâce à la décomposition H_1^p de la première partie du théorème 1.0.6,

$$\int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^\star} dv_g = \int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} \left(u^0 + \sum_{i=1}^k B_\alpha^i + R_\alpha\right)^{p^\star} dv_g$$

où u^0, les B_α^i et les R_α sont comme dans le théorème 1.0.6. En particulier, u^0 étant continue,

$$\int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^\star} dv_g \leq C \sum_{i=1}^k \int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} (B_\alpha^i)^{p^\star} dv_g + o(1) \tag{1.81}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de α et $o(1) \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$. Fixons $i = 1, \ldots, k$, et considérons les centres et poids x_α^i et $\mu_\alpha^i = (R_\alpha^i)^{-1}$ des $(B_\alpha^i)_\alpha$ (voir (1.5)). Nous distinguons deux cas. Dans le premier cas : pour tout $R > 0$ et tout α,

$$B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha) \cap B_{x_\alpha^i}(R\mu_\alpha^i) = \emptyset.$$

Dans le second cas : il existe $R > 0$ tel que pour tout α,

$$B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha) \cap B_{x_\alpha^i}(R\mu_\alpha^i) \neq \emptyset.$$

A sous suite près, on se trouve toujours dans l'un de ces deux cas. Dans le premier cas on écrit que

$$\int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} (B_\alpha^i)^{p^\star} dv_g \leq \int_{M \setminus B_{x_\alpha^i}(R\mu_\alpha^i)} (B_\alpha^i)^{p^\star} dv_g.$$

En remarquant que

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{M \setminus B_{x_\alpha^i}(R\mu_\alpha^i)} (B_\alpha^i)^{p^\star} dv_g = 0,$$

nous obtenons

$$\int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} (B_\alpha^i)^{p^\star} dv_g = o(1). \tag{1.82}$$

Dans le second cas, $d_g(x_\alpha^i, y_\alpha) \leq 2\mu_\alpha + R\mu_\alpha^i$, et il suit de (1.77) que $\mu_\alpha = o(\mu_\alpha^i)$ et $d_g(x_\alpha^i, y_\alpha) = O(\mu_\alpha^i)$. Ecrivons que

$$B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha) \subset \exp_{x_\alpha^i}\left(\mu_\alpha^i B_{z_\alpha}\left(C\frac{2\mu_\alpha}{\mu_\alpha^i}\right)\right)$$

où

$$z_\alpha = \frac{1}{\mu_\alpha^i} \exp_{x_\alpha^i}^{-1}(y_\alpha)$$

converge dans $\mathbb{R}^n$ (à sous-suite près) et $C > 1$ est indépendante de α. Nous obtenons alors

$$\int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} (B_\alpha^i)^{p^\star} dv_g \leq \int_{B_{z_\alpha}\left(C\frac{2\mu_\alpha}{\mu_\alpha^i}\right)} u^{p^\star} dv_{g_\alpha}$$

où u est donnée par (1.5). Puisque $\mu_\alpha = o(\mu_\alpha^i)$,

$$\int_{B_{z_\alpha}\left(C\frac{R\mu_\alpha}{\mu_\alpha^i}\right)} u^{p^\star} dv_{g_\alpha} = o(1)$$

d'où de nouveau

$$\int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} (B_\alpha^i)^{p^\star} dv_g = o(1). \tag{1.83}$$

Finalement, d'après (1.82) et (1.83), à sous-suite près,

$$\int_{B_{y_\alpha}(2\mu_\alpha)} (B_\alpha^i)^{p^\star} dv_g = o(1) \tag{1.84}$$

pour tout $i = 1, \dots, k$. Il suit alors de (1.80), (1.81) et (1.84) que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{B_0(2)} w_\alpha^{p^\star} dv_{g_\alpha} = 0. \tag{1.85}$$

Nous pouvons alors déduire une contradiction de (1.85), (1.79) et du fait que $w_\alpha(0) = 1$, ce qui prouve l'estimée C^0 du théorème 1.0.6.

L'estimée C^0 implique en particulier que les u_α sont uniformément bornés sur tout compact de $M\backslash\mathcal{S}$ où

$$\mathcal{S} = \left\{ \lim_{\alpha\to\infty} x_\alpha^i, i = 1, ..., k \right\}$$

est l'ensemble des points de blow-up géométriques des u_α ($\mathcal{S} = \emptyset$ s'il n'y a pas de blow-up pour les u_α). Puisque $u_\alpha \to 0$ dans $H^p_{1,loc}(M - \mathcal{S})$, le schéma itératif de Moser donne, à sous-suite près, que

$$u_\alpha \to 0 \text{ in } C^0_{loc}(M\backslash\mathcal{S}). \tag{1.86}$$

Si $\mathcal{S} = \emptyset$, la convergence a lieu sur M tout entier.

Il reste, pour conclure, à montrer la remarque suivant le théorème 1.0.6. A savoir, il reste à montrer que

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \sup_{x\in M\backslash\Omega_\alpha(R)} R_\alpha^k(x)^{\frac{n-p}{p}} \left| u_\alpha(x) - u^0(x) \right| = 0 \tag{1.87}$$

où $R_\alpha^k(x) = \min_{i=1,\dots,k} d_g\left(x_\alpha^i, x\right)$ et, pour tout $R > 0$,

$$\Omega_\alpha(R) = \bigcup_{i=1}^k B_{x_\alpha^i}(R\mu_\alpha^i).$$

Nous montrons (1.87) par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(y_\alpha)_\alpha$ de points de M et $\delta_0 > 0$ telles que pour tout $i = 1, \dots, k$,

$$\frac{d_g(x_\alpha^i, y_\alpha)}{\mu_\alpha^i} \to +\infty \tag{1.88}$$

quand $\alpha \to +\infty$, et pour tout α,

$$R_\alpha^k(y_\alpha)^{\frac{n-p}{p}} \big| u_\alpha(y_\alpha) - u^0(y_\alpha) \big| \geq \delta_0 \,. \tag{1.89}$$

Alors $R_\alpha^k(y_\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$ puisque sinon, autrement, d'après (1.86), $u_\alpha(y_\alpha) - u^0(y_\alpha) \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$ ce qui contredit (1.89).
Posons $\mu_\alpha = u_\alpha(y_\alpha)^{-p/(n-p)}$. Nous pouvons alors réécrire (1.89) en

$$\frac{R_\alpha^k(y_\alpha)}{\mu_\alpha} \geq \delta_1 \,, \tag{1.90}$$

où $\delta_1^{(n-p)/p} = \delta_0/2$. En particulier, $\mu_\alpha \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$. Pour $\delta > 0$ plus petit que le rayon d'injectivité de (M, g), définissons la fonction w_α sur la boule euclidienne $B_0(\delta\mu_\alpha^{-1})$ par

$$w_\alpha(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u_\alpha \left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x) \right)$$

et notons g_α la métrique définie par

$$g_\alpha(x) = \left(\exp_{y_\alpha}^\star g \right) (\mu_\alpha x).$$

Nous avons pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$, si ξ désigne la métrique euclidienne, $g_\alpha \to \xi$ dans $C^2(K)$ quand $\alpha \to +\infty$. D'après (1.90) nous pouvons écrire que si (x_α) est une suite dans $B_0(\delta_1/2)$, alors

$$\begin{aligned} d_g\big(x_\alpha^i, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x_\alpha)\big) &\geq d_g\big(y_\alpha, x_\alpha^i\big) - d_g\big(y_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x_\alpha)\big) \\ &\geq \delta_1 \mu_\alpha - |x_\alpha| \mu_\alpha \end{aligned}$$

pour tout i et tout α. En particulier,

$$d_g\big(x_\alpha^i, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x_\alpha)\big) \geq C \mu_\alpha$$

pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de α, et à sous-suite près, nous obtenons avec l'estimée C^0 que

$$w_\alpha(x) \leq C \tag{1.91}$$

pour tout $x \in B_0(\delta_1/2)$ et tout α, où $C > 0$ est indépendante de α et x. Nous pouvons maintenant procéder comme dans la preuve de l'estimée C^0. Les w_α sont d'une part solution d'une équation de la forme

$$(\Delta_p)_{g_\alpha} w_\alpha + \mu_\alpha^p \tilde{h}_\alpha w_\alpha^{p-1} = w_\alpha^{p^*-1} \tag{1.92}$$

dans $B_0(\delta_1/2)$, avec $\tilde{h}_\alpha(x) = h_\alpha\left(exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)$, et sont d'autre part bornés dans $B_0(\delta_1/2)$ d'après (1.91). Nous pouvons donc supposer (voir [38]) que, à sous-suite près, $w_\alpha \to w$ dans $C^0(B_0(\delta_1/8))$ quand $\alpha \to +\infty$ où w vérifie

$$\Delta_p w = w^{p^*-1}.$$

De plus

$$w(0) = 1$$

puisque $w_\alpha(0) = 1$ pour tout α. Soit $\delta_2 = \delta_1/8$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{B_{y_\alpha}(\delta_2\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^*} dv_g &= \int_{B_0(\delta_2)} w_\alpha^{p^*} dv_{g_\alpha} \\ &= \int_{B_0(\delta_2)} w^{p^*} dx + o(1)\ ,\end{aligned} \tag{1.93}$$

où $o(1) \to 0$ quand $\alpha \to +\infty$, tandis que, par la décomposition H_1^p de la première partie du théorème 1.0.6,

$$\int_{B_{y_\alpha}(\delta_2\mu_\alpha)} u_\alpha^{p^*} dv_g \le C \sum_{i=1}^k \int_{B_{y_\alpha}(\delta_2\mu_\alpha)} (B_\alpha^i)^{p^*} dv_g + o(1)\ , \tag{1.94}$$

où $C > 0$ est indépendante de α. Nous avons par ailleurs, de la même façon que lors de la preuve de l'estimée C^0, que

$$\int_{B_{y_\alpha}(\delta_2\mu_\alpha)} (B_\alpha^i)^{p^*} dv_g = o(1) \tag{1.95}$$

pour tout i. On montre (1.95) de la même façon que (1.84) en considérant les deux cas où $B_{y_\alpha}(\delta_2\mu_\alpha) \cap B_{x_\alpha^i}(R\mu_\alpha^i) = \emptyset$ pour tout $R > 0$, et $B_{y_\alpha}(\delta_2\mu_\alpha) \cap B_{x_\alpha^i}(R\mu_\alpha^i) \neq \emptyset$ pour un certain $R > 0$. On retrouve (1.77) dans le second cas grâce à (1.88) en remarquant que (1.90) et l'intersection non vide entrainent que $\delta_1\mu_\alpha \le \delta_2\mu_\alpha + R\mu_\alpha^i$ d'où $\mu_\alpha \le C\mu_\alpha^i$. Combinant (1.93)-(1.95), on obtient finalement

$$\int_{B_0(\delta_2)} w^{p^*} dx = 0$$

ce qui est impossible, w étant continue, positive, et telle que $w(0) = 1$. Ceci prouve (1.87).

1.5 Annexe

1.5.1 Preuve du lemme 1.1.1

Nous démontrons dans cette partie le lemme 1.1.1. Soit donc $(X_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ et $X \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\left(|X_\alpha|^{p-2}X_\alpha - |X|^{p-2}X\right).(X_\alpha - X) \to 0\,. \tag{1.96}$$

Supposons la suite (X_α) non bornée. Alors $|X_\alpha| \to +\infty$ à une sous-suite près. Considérons $Y_\alpha = \frac{X_\alpha}{|X_\alpha|}$. Nous pouvons supposer que $Y_\alpha \to Y$, $|Y| = 1$. Divisons alors (1.96) par $|X_\alpha|^p$ et passons à la limite $\alpha \to +\infty$. Nous obtenons $|Y| = 0$ ce qui est impossible. Donc la suite (X_α) est bornée. Nous pouvons ainsi supposer que $X_\alpha \to Z$ à une sous-suite près. Nous obtenons alors en passant à la limite dans (1.96) que

$$\left(|Z|^{p-2}Z - |X|^{p-2}X; Z - X\right) = 0. \tag{1.97}$$

Or, comme on le constate facilement,

$$\begin{aligned}\left(|Z|^{p-2}Z - |X|^{p-2}X; Z - X\right) &= |Z|^p + |X|^p - \left(|X|^{p-2} + |Z|^{p-2}\right)(X, Z)\\ &\geq |Z|^p + |X|^p - \left(|X|^{p-2} + |Z|^{p-2}\right)|X||Z|\\ &= \left(|Z|^{p-1} - |X|^{p-1}\right)(|Z| - |X|)\ ,\end{aligned}$$

de sorte que (1.97) entraîne que $|Z| = |X|$. Il suit que

$$\left(|Z|^{p-2}Z - |X|^{p-2}X; Z - X\right) = |X|^{p-2}|Z - X|^2\,,$$

et avec (1.97) on obtient que $Z = X$. Ceci étant vrai pour toute sous-suite, nous pouvons en conclure que la suite (X_α) toute entière converge vers X.

1.5.2 Preuve des inégalités (1.17) et (1.18)

Cette partie est consacrée à la preuve des inégalités (1.17) et (1.18). On considère $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et $p > 1$. Etant donné $\theta \in]0, 1[$ tel que $\theta < p - 1$ si $1 < p < 2$ et $\theta < \frac{p-1}{2}$ si $p > 2$, on affirme qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de la norme $\|.\|$ telle que pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}&\Big\| \|x + y\|^{p-2}(x + y) - \|x\|^{p-2}x - \|y\|^{p-2}y\Big\|\\ &\leq C\left(\|x\|^{p-1-\theta}\|y\|^\theta + \|x\|^\theta\|y\|^{p-1-\theta}\right).\end{aligned} \tag{1.98}$$

De même, étant donné $\theta < min(1, \frac{p}{2})$, on affirme qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de la norme $\|.\|$ telle que pour tout $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}&\| \|x + y\|^p - \|x\|^p - \|y\|^p\|\\ &\leq C\left(\|x\|^{p-\theta}\|y\|^\theta + \|y\|^{p-\theta}\|x\|^\theta\right).\end{aligned} \tag{1.99}$$

Les inégalités (1.17) et (1.18) suivent clairement de ces deux inégalités (1.98) et (1.99). On démontre (1.98) et (1.99) dans ce qui suit.

On commence par la preuve de (1.98). On fixe $p > 1$ et $\theta < \min\{1, p-1\}$. On remarque pour commencer que la preuve de (1.98) se réduit, par symétrie et homogénéité, à montrer l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de la norme $\|.\|$ telle que pour tout $x, y \in E$ vérifiant $\|x\| = \|y\| = 1$ et pour tout $t \in]0,1]$,

$$\frac{\| \, \|x+ty\|^{p-2}(x+ty) - x - t^{p-1}y\|}{t^{\theta} + t^{p-1-\theta}} \leq C. \tag{1.100}$$

Supposons en effet (1.100) vérifiée et considérons $x', y' \in E$ quelconques. L'inégalité (1.98) étant symétrique en x, y et trivialement vérifiée si $x' = 0$ ou $y' = 0$, nous pouvons supposer que $\|x'\| \geq \|y'\| > 0$. Alors (1.100) appliquée à $x = \frac{x'}{\|x'\|}$, $y = \frac{y'}{\|y'\|}$ et $t = \frac{\|y'\|}{\|x'\|}$ donne, par homogénéité, (1.98). Montrons donc (1.100). Etant donnés $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$, considérons la fonction $h_{(x,y)}$ définie sur $0 \leq t \leq 1$ si $p \geq 2$ et sur $0 \leq t < 1$ si $1 < p < 2$ par

$$h_{(x,y)}(t) = \|x+ty\|^{p-2} - 1.$$

Alors

$$\begin{cases} (1-t)^{p-2} - 1 \leq h_{(x,y)}(t) \leq (1+t)^{p-2} - 1 & \forall t \in [0,1] \ si \ p \geq 2 \\ (1+t)^{p-2} - 1 \leq h_{(x,y)}(t) \leq (1-t)^{p-2} - 1 & \forall t \in [0,1[\ si \ 1 < p < 2 \end{cases}$$

d'où, pour tout $t \in [0,1[$ si $1 < p < 2$ et $t \in [0,1]$ si $p \geq 2$,

$$\left| h_{(x,y)}(t) \right| \leq a(t)$$

où

$$a(t) = \max\left\{ |(1+t)^{p-2} - 1|, |(1-t)^{p-2} - 1| \right\}$$

puis

$$\begin{aligned} &\left\| \, \|x+ty\|^{p-2}(x+ty) - x - t^{p-1}y \right\| \\ &= \left\| x(\|x+ty\|^{p-2} - 1) + ty(\|x+ty\|^{p-2} - 1) + ty - t^{p-1}y \right\| \\ &\leq t + |h_{(x,y)}(t)| + t|h_{(x,y)}(t)| + t^{p-1} \\ &= t + (t+1)a(t) + t^{p-1}. \end{aligned} \tag{1.101}$$

Indépendamment, pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \left\| \, \|x+ty\|^{p-2}(x+ty) - x - t^{p-1}y \right\| &\leq \|x+ty\|^{p-1} + \|x + t^{p-1}y\| \\ &\leq (1+t)^{p-1} + 1 + t^{p-1}. \end{aligned}$$

Posons $b(t) = (1+t)^{p-1} + 1 + t^{p-1}$, $c(t) = t + (t+1)a(t) + t^{p-1}$ et $d(t) = \min\left(b(t), c(t)\right)$. Alors

$$\Big\| \|x+ty\|^{p-2}(x+ty) - x - t^{p-1}y \Big\| \leq d(t) \tag{1.102}$$

pour tout $x, y \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$ et pour tout $t \in [0,1[$ si $1 < p < 2$ et $t \in [0,1]$ si $p \geq 2$. La fonction d est continue sur $[0,1]$ pour tout $p > 1$. En effet, d est continue sur $[0,1]$ si $p \geq 2$, sur $[0,1[$ si $1 < p < 2$ et, de plus, si $1 < p < 2$, alors pour tout $t \in [0,1[$ proche de 1,

$$\begin{array}{rcl} c(t) & = & t + (t+1)\left((1-t)^{p-2} - 1\right) + t^{p-1} \\ & = & (t+1)(1-t)^{p-2} + t^{p-1} - 1 \\ & \to & +\infty \textit{ quand } t \to 1 \end{array}$$

et donc, si $1 < p < 2$, $d(t) = b(t)$ pour t proche de 1. Il suffit donc, au vue de (1.102), de montrer que la fonction $e(t) = \frac{d(t)}{t^\theta + t^{p-1-\theta}}$, qui est continue sur $]0,1]$, peut être prolongée par continuité en 0. Pour $t \in]0,1]$ proche de 0, on a $d(t) = c(t)$ avec $a(t) \sim |p-2|t$ d'où

$$d(t) \sim \begin{cases} (p-1)t & \text{si } p > 2 \\ t^{p-1} & \text{si } 1 < p < 2 \end{cases}$$

et

$$t^\theta + t^{p-1-\theta} \backsim \begin{cases} 2t^{\frac{p-1}{2}} & \text{si } \theta = \frac{p-1}{2} \\ t^\theta & \text{si } \theta < \frac{p-1}{2} \\ t^{p-1-\theta} & \text{si } \theta > \frac{p-1}{2}. \end{cases}$$

On vérifie alors que $e(t)$ peut être prolongée par continuité en 0 pour $0 < \theta < p-1$ si $1 < p < 2$, $0 < \theta < \frac{p-1}{2}$ si $2 < p < 3$, $0 < \theta < 1$ si $p \geq 3$ ce qui prouve (1.98).

Reste à démontrer (1.99). La preuve de (1.99) est analogue. Nous remarquons d'abord, comme précédemment, qu'il suffit de montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y, \in E$, $\|x\| = \|y\| = 1$, et pour tout $t \in]0,1]$,

$$\frac{\| \, \|x+ty\|^p - 1 - t^p \|}{t^{p-\theta} + t^\theta} \leq C.$$

Fixons donc $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$ et écrivons

$$\| \, (\|x+ty\|^p - 1) - t^p \| \leq |h(t)| + t^p$$

où $h(t) = \|x + ty\|^p - 1$, $t \in [0, 1]$. On a

$$(1-t)^p - 1 \leq h(t) \leq (1+t)^p - 1$$

d'où

$$|h(t)| \leq f(t) := \max\left(|(1+t)^p - 1|, |(1-t)^p - 1|\right).$$

Donc

$$\frac{\| \, \|x + ty\|^p - 1 - t^p \|}{t^{p-\theta} + t^\theta} \leq g(t) = \frac{f(t) + t^p}{t^{p-\theta} + t^\theta}.$$

La fonction g est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0 dès que $\theta < \min\{1, \frac{p}{2}\}$. En effet dans ce cas $t^\theta + t^{p-\theta} \sim t^\theta$ et $f(t) \sim pt$ pour $t > 0$ proche de 0.

Chapitre 2

Stabilité et perturbation du domaine pour la 1ère valeur propre du p-laplacien, $1 \leq p < n$.

Dans ce qui suit, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, et p un réel tel que $1 \leq p < n$. On note $\lambda_{p,\Omega}$ la première valeur propre du p-laplacien définie par

$$\lambda_{p,\Omega} = \inf_{\begin{cases} u \in \dot{H}_1^p(\Omega) \\ \int_\Omega |u|^p dx = 1 \end{cases}} \int_\Omega |\nabla u|^p dx \qquad (2.1)$$

où $\dot{H}_1^p(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont le gradient est dans $L^p(\Omega)$ et qui sont de trace nulle sur le bord de Ω. Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement de $\lambda_{p,\Omega}$ lorsque l'on perturbe Ω, la notion de perturbation étant quantifiée par la p-capacité. La première section du chapitre est consacrée aux cas $1 < p < n$. On y étudie la stabilité de $\lambda_{p,\Omega}$ sous l'effet de perturbations singulières de Ω, à savoir du type $\Omega_\delta = \Omega \backslash K_\delta$ où les K_δ sont des fermés lisses de Ω de p-capacité dans Ω tendant vers 0. Le résultat que nous obtenons généralise ceux dont on disposait jusqu'alors (qui traitaient principalement des cas $2 \leq p < n$). La seconde section du chapitre est consacrée au cas $p = 1$. L'étude devient alors plus délicate, notamment dans la mesure où il nous faut travailler avec les espaces BV des fonctions à variations bornées. Des références possibles sur les espaces BV sont les livres écrits par Ambrosio, Fusco et Pallara [4], Evans et Gariepy [25], Giusti [31] et Ziemer [55]. On établit dans cette seconde section trois résultats de stabilité du $\lambda_{1,\Omega}$. Cette seconde partie est issue d'un article écrit en collaboration avec E. Hebey et à paraître dans *Archiv der Mathematik*.

2.1 Stabilité de $\lambda_{p,\Omega}$ par perturbation du domaine

Soit Ω un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$, et soit p réel tel que $1 < p < n$. On définit l'opérateur p-laplacien euclidien par $\Delta_p = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ et, suivant une terminologie maintenant usuelle, on dit qu'un réel λ est une valeur propre de Δ_p dans Ω s'il existe $u \in \dot{H}_1^p(\Omega)$ tel que

$$\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u.$$

Ici, $\dot{H}_1^p(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions de L^p qui ont leur dérivée première dans L^p et qui sont nulles sur le bord de Ω. Une fonction u vérifiant l'équation ci-dessus est dite une fonction propre associée à la valeur propre λ. Par théorie standard de régularité (voir Tolksdorf [53] et Liebermann [40]), les fonctions propres sont dans $C^{1,\theta}(\bar{\Omega})$, $\theta \in (0, 1)$, et d'après le principe du maximum, voir par exemple Vazquez [54], elles sont strictement positives dans Ω lorsqu'elles n'y sont pas identiquement nulles. La première valeur propre $\lambda_{p,\Omega}$ du p-laplacaien dans Ω est donnée par le problème de minimisation

$$\lambda_{p,\Omega} = \inf_{\begin{cases} u \in \dot{H}_1^p(\Omega) \\ \int_\Omega |u|^p dx = 1 \end{cases}} \int_\Omega |\nabla u|^p dx. \tag{2.2}$$

On peut montrer que $\lambda_{p,\Omega} > 0$, et que l'inf dans (2.2) est atteint par une fonction positive $u_{p,\Omega} \in \dot{H}_1^p(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$. Un résultat important, dont on trouvera par exemple une démonstration dans Lindqvist [42] et Belloni-Kawohl [6], est que $\lambda_{p,\Omega}$ est simple au sens où toute autre fonction propre associée à $\lambda_{p,\Omega}$ est multiple de $u_{p,\Omega}$.

Etant donnés Ω un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$, et K un sous ensemble compact de Ω, on définit (voir, par exemple, Flucher [27]) la p-capacité de K dans Ω par

$$cap_p(K,\Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p dx \ , \ u \in \dot{H}_1^p(\Omega) \ , \ K \subset \ int \ \{u \geq 1\} \right\}$$

ce qui se définit aussi comme l'inf des expressions $\int_\Omega |\nabla u|^p dx$ sur les $u \in C_c^\infty(\Omega)$ qui sont positives ou nulles et telles que $u \geq 1$ sur K. Si $cap_p(K,\Omega) < +\infty$ alors l'inf définissant $cap_p(K,\Omega)$ est atteint par l'unique solution $v \in \dot{H}_1^p(\Omega)$, appelé p-potentiel harmonique, du problème

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 \ dans \ \Omega - K \\ v = 1 \ sur \ K. \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour $0 < r < R$ donnés, on pourra montrer que

$$cap_p(\bar{B}_0(r), B_0(R)) = \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-p} \omega_{n-1} \left(r^{-\frac{n-p}{p-1}} - R^{-\frac{n-p}{p-1}}\right)^{1-p} \tag{2.4}$$

et le p-potentiel harmonique est dans ce cas

$$v(x) = \begin{cases} \frac{K(|x|)-K(R)}{K(r)-K(R)} \ si \ r \leq |x| \leq R \\ 1 \ si \ |x| \leq r \end{cases}$$

où $K(r) = \frac{p-1}{n-p} \omega_{n-1}^{\frac{1}{1-p}} r^{\frac{n-p}{1-p}}$.

Le resultat que l'on obtient dans le cas d'une perturbation singulière de Ω, à savoir de la forme $\Omega_\delta = \Omega \backslash K_\delta$, est le suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit Ω un ouvert lisse de $\mathbb{R}^n$ et (K_δ) une suite de sous-ensembles fermés lisses de Ω. On note $\Omega_\delta = \Omega \backslash K_\delta$ et on suppose que $cap_p(K_\delta, \Omega) \to 0$. Alors*

$$\lambda_{p,\Omega} \leq \lambda_{p,\Omega_\delta} \leq \begin{cases} \lambda_{p,\Omega} + O\left(cap_p(K_\delta,\Omega)^{\frac{1}{p}}\right) & si\ p \geq 2 \\ \lambda_{p,\Omega} + O\left(cap_p(K_\delta,\Omega)^{1-\frac{1}{p}}\right) & si\ p \leq 2. \end{cases} \tag{2.5}$$

En particulier $\lambda_{p,\Omega_\delta} \to \lambda_{p,\Omega}$. De plus $u_{p,\Omega_\delta} \to u_{p,\Omega}$ fortement dans $H_1^p(\Omega)$ lorsque l'on étend les u_{p,Ω_δ} à Ω par 0, et où les fonctions propres u_{p,Ω_δ} et $u_{p,\Omega}$ sont les solutions du problème de minimisation (2.2).

Ce théorème améliore des travaux précédents de Sango [49]. La cas d'une perturbation régulière est par ailleurs traitée dans Lamberti [39] et Garcia Melian - Sabina de Lis [45]. Le reste de cette première section, donc la sous section suivante, est consacré à la preuve du théorème 2.1.1.

2.1.1 Preuve du théorème 2.1.1

Afin d'alléger l'écriture, on note λ, λ_δ, u et u_δ au lieu de respectivement $\lambda_{p,\Omega}$, $\lambda_{p,\Omega_\delta}$, $u_{p,\Omega}$ et u_{p,Ω_δ}. On supposera également avoir étendu u et les u_δ par 0 en dehors de Ω et Ω_δ respectivement. Puisque $\Omega_\delta \subset \Omega$, on a déjà que $\lambda \leq \lambda_\delta$. Réciproquement, on note $v_\delta \in \dot{H}_1^p(\Omega)$ le potentiel p-harmonique de K_δ dans Ω. Alors v_δ est l'unique solution positive dans $\dot{H}_1^p(\Omega)$ de

$$\begin{cases} \Delta_p v_\delta = 0 & \text{dans } \Omega\backslash K_\delta \\ v_\delta = 1 & \text{dans } K_\delta \end{cases}$$

et la p-capacité $cap_p(K_\delta, \Omega)$ de K_δ dans Ω est donnée par

$$cap_p(K_\delta,\Omega) = \int_\Omega |\nabla v_\delta|^p dx.$$

D'après le principe du maximum, $0 < v_\delta \leq 1$. De plus, comme $u \in L^\infty(\Omega)$, $w_\delta := u(1 - v_\delta) \in \dot{H}_1^p(\Omega)$. On pourra alors écrire que

$$\begin{aligned} \lambda_\delta &\leq \frac{\int_{\Omega_\delta} |\nabla w_\delta|^p dx}{\int_{\Omega_\delta} |w_\delta|^p dx} \\ &= \frac{\int_\Omega |\nabla w_\delta|^p dx}{\int_\Omega |w_\delta|^p dx}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

On écrit maintenant que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left||\nabla w_\delta|^p - |\nabla u|^p|1-v_\delta|^p - |u|^p|\nabla v_\delta|^p\right| dx\\
&\leq C\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|1-v_\delta|^{p-1}|u||\nabla v_\delta|dx\\
&\quad + C\int_\Omega |\nabla u||1-v_\delta||u|^{p-1}|\nabla v_\delta|^{p-1}dx\\
&\leq C\int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v_\delta|dx + C\int_\Omega |\nabla u||\nabla v_\delta|^{p-1}dx.\end{aligned}$$

Ici comme dans tout le reste de cette thèse, la lettre C désigne une constante dont la valeur change a priori d'une ligne à l'autre. Par inégalité de Hölder on obtient alors que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left||\nabla w_\delta|^p - |\nabla u|^p|1-v_\delta|^p - |u|^p|\nabla v_\delta|^p\right| dx\\
&\leq C\left(cap_p(K_\delta,\Omega)^{\frac{1}{p}} + cap_p(K_\delta,\Omega)^{1-\frac{1}{p}}\right).\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de λ. On note q le réel défini par $q = 1-\frac{1}{p}$ si $p \leq 2$ et $q = \frac{1}{p}$ sinon. On a alors que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla w_\delta|^p dx\\
&= \int_\Omega |\nabla u|^p|1-v_\delta|^p dx + \int_\Omega |u|^p|\nabla v_\delta|^p dx + O\left(cap_p(K_\delta,\Omega)^q\right)\\
&\leq \lambda + C cap_p(K_\delta,\Omega) + O\left(cap_p(K_\delta,\Omega)^q\right)\end{aligned}$$

et donc, par suite,

$$\int_\Omega |\nabla w_\delta|^p dx \leq \lambda + O\left(cap_p(K_\delta,\Omega)^q\right). \tag{2.7}$$

On estime maintenant le dénominateur dans (2.6) par l'inégalité de Poincaré. On écrit que

$$\begin{aligned}\|w_\delta\|_p &\geq \|u\|_p - \|u-w_\delta\|_p\\
&= 1-\|uv_\delta\|_p\\
&\geq 1-C\|v_\delta\|_p\\
&\geq 1-C\|\nabla v_\delta\|_p\\
&= 1-C cap_p(K_\delta,\Omega)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

On obtient alors (2.5) en injectant (2.7) et (2.8) dans (2.6). Reste maintenant à montrer la convergence des fonctions propres. Comme $cap_p(K_\delta, \Omega) \to 0$ quand $\delta \to 0$, on déduit de de ce qui vient d'être dit que $\lambda_\delta \to \lambda$ quand $\delta \to 0$. La suite (u_δ) est alors bornée dans $\dot{H}_1^p(\Omega)$. Nous pouvons donc supposer, à sous suite près, qu'il existe $v \in \dot{H}_1^p(\Omega)$, $v \geq 0$, tel que $u_\delta \to v$ faiblement dans $H_1^p(\Omega)$, fortement dans $L^q(\Omega)$, $q < p^*$, et presque partout. En particulier

$$\int_\Omega v^p dx = \lim_{\delta \to 0} \int_\Omega u_\delta^p dx = 1 \tag{2.9}$$

et on montre, comme à l'étape 1.1.2 du chapitre 1, que $\nabla u_\delta \to \nabla v$ presque partout dans Ω. De plus, par convergence faible, en raison de ce qui a été démontré plus haut, et en passant à la limite dans l'équation $\int_\Omega |\nabla u_\delta|^p dx = \lambda_\delta$, on voit que v résout le problème de minimisation qui définit λ. Les premières fonctions propres étant simples, il suit que nécessairement $v = u$. D'après l'inégalité (1.99) du chapitre 1, il existe $\theta > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout δ,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega ||\nabla(w_\delta + u)|^p - |\nabla w_\delta|^p - |\nabla u|^p|\, dx \\
&\leq C \int_\Omega |\nabla w_\delta|^{p-\theta} |\nabla u|^\theta dx + C \int_\Omega |\nabla u|^{p-\theta} |\nabla w_\delta|^\theta dx
\end{aligned}$$

où $w_\delta = u_\delta - u$. En remarquant que $|\nabla w_\delta|^{p-\theta} \rightharpoonup 0$ faiblement dans $L^{\frac{p}{p-\theta}}(\Omega)$, on obtient la convergence vers 0 de la première intégrale. Avec le même type de raisonnement, on obtient la convergence de la seconde intégrale vers 0. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u_\delta - u)|^p dx &= \int_\Omega |\nabla u_\delta|^p dx - \int_\Omega |\nabla u|^p dx + o(1) \\
&= \lambda_{p,\Omega_\delta} - \lambda_{p,\Omega} + o(1) = o(1)
\end{aligned}$$

d'après ce qui a été démontré auparavant, ce qui prouve la convergence forte, à sous-suite près, de u_δ vers u dans $H_1^p(\Omega)$. Par unicité de la limite, la suite entière converge. Le théorème est démontré.

2.2 Stabilité de $\lambda_{1,\Omega}$ par perturbation du domaine

On traite dans cette section de la stabilité de la première valeur propre du 1-laplacien par perturbation du domaine. Les résultats de cette section ont été obtenus dans un travail effectué en collaboration avec E. Hebey. Comme ci-dessus, on considère Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le 1-laplacien sur Ω est alors l'opérateur formel défini par

$$\Delta_1 u = -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right).$$

On peut l'obtenir par dérivation de la fonctionnelle $F(u) = \int_\Omega |\nabla u| dx$, ou bien encore en faisant tendre $p \to 1$ dans la définition du p-laplacian, $p > 1$. On définit alors, par analogie avec (2.2), la première valeur propre $\lambda_{1,\Omega}$ de Δ_1 sur Ω comme étant la solution du problème de minimisation

$$\lambda_{1,\Omega} = \inf_{\begin{cases} u \in \dot{H}_1^1(\Omega) \\ \int_\Omega |u| dx = 1 \end{cases}} \int_\Omega |\nabla u| dx \,, \tag{2.10}$$

où $\dot{H}_1^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions de L^1 ayant leur dérivée première dans L^1 et qui s'annulent sur le bord de Ω. Par théorie de la mesure géométrique, et formule de la co-aire, on a aussi que $\lambda_{1,\Omega} = h(\Omega)$, où $h(\Omega)$ est défini comme étant l'infimum des quotients $|\partial D|/|D|$ où D parcourt l'ensemble des ouverts lisses $D \subset\subset \Omega$, et $|\partial D|$ et $|D|$ désignent respectivement les mesures $(n-1)$-dimensionnelle et n-dimensionelle de ∂D et D. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Cheeger [11], et $h(\Omega)$ est aussi appelé constante de Cheeger de Ω (voir par exemple Chavel [10]). On remarquera que l'inf dans $h(\Omega)$ n'est pas atteint par un ouvert lisse $D \subset\subset \Omega$. Autrement, nous pourrions le renormaliser par un facteur strictement plus grand que un, ce qui permettrait de diminuer h, contredisant ainsi l'optimalité de D. Tout minimiseur de $h(\Omega)$ touche en fait le bord $\partial\Omega$.

Un espace naturel pour étudier $\lambda_{1,\Omega}$ est l'espace $BV(\Omega)$ des fonctions à variations bornées. Par propriétés standard de ces espaces, $\lambda_{1,\Omega}$ se définit aussi par le problème de minimisation

$$\lambda_{1,\Omega} = \inf_{\begin{cases} u \in BV(\Omega) \\ \int_\Omega |u| dx = 1 \end{cases}} \left(\int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| d\sigma\right) . \tag{2.11}$$

On remarquera ici que si $u \in BV(\Omega)$ et $\overline{u}$ désigne l'extension de u par 0 dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$, alors $\overline{u} \in BV(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{u}| = \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| d\sigma. \tag{2.12}$$

Par semicontinuité inférieure de la variation totale, et par compacité de l'injection $BV(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, on déduit facilement de (2.12) que l'inf dans (2.11) est atteint par une fonction positive $u \in BV(\Omega)$. Cette fonction u est alors une solution de l'équation $\Delta_1 u = \lambda_{1,\Omega}$ au sens où il existe $\Lambda \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|\Lambda\|_\infty \leq 1$, tel que

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\Lambda = \lambda_{1,\Omega}\ ,\ u \geq 0\ , \\ \Lambda\nabla u = |\nabla u| \text{ dans } \Omega\ , \text{ et} \\ (\Lambda\nu)u = -|u| \text{ sur } \partial\Omega\ , \end{cases} \tag{2.13}$$

où ν est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, et $\Lambda\nabla u$ est la distribution définie par intégration par partie de $\int_\Omega (\Lambda\nabla u)vdx$ quand $v \in C_0^\infty(\Omega)$ et divΛ fait sens. De plus, voir par exemple Demengel [14], $u \in L^\infty(\Omega)$ et, puisque $\|u\|_1 = 1$, il existe $C = C(n,\Omega)$, $C > 0$, telle que $\|u\|_\infty \leq C$. On dit que u est une fonction propre de $\lambda_{1,\Omega}$. Définissons maintenant un ensemble de Cacciopoli dans Ω comme étant un ensemble $D \subset \Omega$ tel que $\chi_D \in BV(\Omega)$, où χ_D est la fonction caractéristique de D. Puisque $\lambda_{1,\Omega} = h(\Omega)$, il existe des ensembles de Caccioppoli $D \subset \Omega$, par exemple les ensembles de niveau des fonctions propres, tels que $u = |D|^{-1}\chi_D$ est un minimiseur du membre de droite de (2.11). De tels ensembles sont appelés ensembles propres pour $\lambda_{1,\Omega}$ (et parfois ensembles de Cheeger). Une discussion générale concernant l'unicité et la non-unicité des ensembles propres se trouve dans Fridman et Kawohl [28]. Nous renvoyons également à Stredulinsky et Ziemer [51] (ainsi qu'à Belloni et Kawohl [6] pour le cas du p-laplacien). Concernant la régularité, des références possibles sont Almgren [1], De Giorgi [30], Gonzales, Massari et Tamanini [32], et Stredulinsky et Ziemer [51]. Par symétrisation, voir Fridman et Kawohl [28] pour les détails,

$$\lambda_{1,\Omega} \geq n\omega_n^{1/n}|\Omega|^{-1/n}\ ,$$

où ω_n est le volume de la sphère unité de dimension n. On pourra par ailleurs montrer, voir par exemple Fridman-Kawohl [28], que $\lambda_{p,\Omega} \to \lambda_{1,\Omega}$ lorsque $p \to 1$, où $\lambda_{p,\Omega}$ est la première valeur propre du p-laplacien dont il a été question dans la première section de ce chapitre.

Soit K un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. On définit la 1-capacité de K, notée $\mathrm{cap}_1(K)$, comme étant l'inf des normes L^1 de $|\nabla u|$, où l'inf est pris sur l'ensemble des fonctions $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui sont telles que $K \subset \mathrm{int}\,\{u \geq 1\}$. Une autre définition possible (voir, par exemple, Maz'ja [44]) est que $\mathrm{cap}_1(K) = \inf|\partial\omega|$, où l'inf est pris sur l'ensemble des ouverts lisses bornés ω qui sont tels que $K \subset \omega$. En particulier, d'après l'inégalité isopérimétrique, $|K|^{(n-1)/n} \leq C\mathrm{cap}_1(K)$, où $C > 0$ ne dépend pas de K (mais seulement de la dimension). Etant donnés deux ensembles A et B

de $\mathbb{R}^n$, nous notons $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B définie par $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. Notre premier résultat traite du cas de perturbations très générales du domaine. Il s'énonce de la façon suivante :

Théorème 2.2.1 *Soit Ω un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$, $(\Omega_\delta)_{\delta>0}$ une suite d'ouverts bornés lisses de $\mathbb{R}^n$, et $K_\delta = adh(\Omega\Delta\Omega_\delta)$ l'adhérence de la différence symétrique $\Omega\Delta\Omega_\delta$. Soit A_δ un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega_\delta}$. On suppose que $cap_1(K_\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. Alors pour tout δ,*

$$|\lambda_{1,\Omega_\delta} - \lambda_{1,\Omega}| = \frac{\varepsilon_\delta}{|A_\delta|} cap_1(K_\delta) + o\left(cap_1(K_\delta)\right) \ , \tag{2.14}$$

où $\varepsilon_\delta \in [0,1]$, et $|A_\delta| \geq \Lambda$ pour un certain $\Lambda > 0$ et tout δ. En particulier $\lambda_{1,\Omega_\delta} \to \lambda_{1,\Omega}$ quand $\delta \to 0$. De plus, à sous-suite près, $\chi_{A_\delta} \to \chi_A$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ quand $\delta \to 0$, où A est un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega}$.

A titre de remarque, on a choisi d'énoncer la seconde partie du théorème 2.2.1 pour les fonctions caractéristiques d'ensembles propres. La convergence a en fait lieu pour des fonctions propres générales. Nous montrerons dans la section 2.2.1 que si les u_δ sont des fonctions propres pour $\lambda_{1,\Omega_\delta}$, alors, à sous-suite près, avec les notations rappelées ci-dessus, $\overline{u}_\delta \to \overline{u}$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ quand $\delta \to 0$, où u est une fonction propre pour $\lambda_{1,\Omega}$. Nous montrons également que les mesures $\mu_\delta = |\nabla\overline{u}_\delta|$ et $\mu = |\nabla\overline{u}|$ sont telles que $\mu_\delta \rightharpoonup \mu$ faiblement quand $\delta \to 0$.

Le théorème suivant spécialise le théorème précédent au cas d'un domaine avec trou, et donc d'une perturbation singulière comme étudiée pour le p-laplacien à la section précédente. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B_x(r)$ la boule euclidienne de $\mathbb{R}^n$ de centre x et rayon r, et b_n le volume de $B_0(1)$. Notre second résultat s'énonce alors de la façon suivante :

Théorème 2.2.2 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$, A un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega}$, $x_1, \ldots, x_k$ des points fixés de Ω, $(\varepsilon_{i,\delta})_{\delta>0}$, $i = 1, \ldots, k$, k suites de réels strictement positifs convergeant vers 0 quand $\delta \to 0$, $K_\delta = \bigcup_{i=1}^k \overline{B}_{x_i}(\varepsilon_{i,\delta})$, $\delta > 0$ petit, et $\Omega_\delta = \Omega\backslash K_\delta$. On suppose qu'il existe un indice $i_0 = 1, \ldots, k$ tel que $\varepsilon_{i,\delta} = o\left(\varepsilon_{i_0,\delta}\right)$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, $i \neq i_0$. Alors $cap_1(K_\delta) = \omega_{n-1}\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1} + o(\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1})$ et*

$$\lambda_{1,\Omega} \leq \lambda_{1,\Omega_\delta} \leq \lambda_{1,\Omega} + \frac{\omega_{n-1}}{|A|}\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1} + o\left(\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1}\right) \tag{2.15}$$

pour tout δ. De plus

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} \leq \lambda_{1,\Omega} + \begin{cases} o\left(\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1}\right) \ si\, x_{i_0} \in int(\Omega\backslash A) \\ \frac{\omega_{n-1}-2b_{n-1}}{2|A|}\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1} + o\left(\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1}\right) \ si\, x_{i_0} \in \partial^\star A \ , \end{cases} \tag{2.16}$$

où $int(\Omega\backslash A)$ désigne l'intérieur de $\Omega\backslash A$ et $\partial^\star A$ désigne le bord réduit de A.

Si A est un ensemble de périmètre fini, son bord réduit $\partial^\star A$, voir par exemple Evans-Gariepi [25] ou Giusti [31], est la partie du bord de A qui est régulière au sens de la mesure (et pour laquelle on peut définir la notion de normale au bord). On a évidemment dans la situation du théorème ci-dessus que $\mathrm{cap}_1(K_\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. La convergence des ensembles propres (resp. fonctions propres) énoncée dans le théorème 2.2.1 est du coup vérifiée. A titre de remarque, on peut caractériser en dimension 2 les ensembles convexes Ω qui sont tels que $\Omega = A$, donc par suite aussi ceux pour lesquels $\Omega\backslash A \neq \emptyset$, et donc pour lesquels l'équation (2.16) du théorème n'est pas vide. On renvoit à Bellettini, Caselles et Novaga [5], et à Kawohl et Lachand-Robert [37] pour cette caractérisation. Lorsque Ω est convexe et $n = 2$, l'ensemble propre $A = A_\Omega$ est unique. On parle d'un domaine calibrable Ω lorsque $\Omega = A$. L'ovoïde $(x^2+y^2)^2 < x^3$ est un bel exemple dans Kawohl et Lachand-Robert [37] d'un domaine non calibrable. Indépendamment, avec les notations du théorème 2.2.1, on remarquera que (2.16) implique que l'on peut prendre $\varepsilon_\delta = 0$ si $x_{i_0} \in \mathrm{int}(\Omega\backslash A)$, et $\varepsilon_\delta < 1/2$ si $x_{i_0} \in \partial^\star A$. Quand $x_{i_0} \in \mathrm{int}(A)$, la majoration dans (2.15), où $\varepsilon_\delta = 1$, ne peut pas en général être améliorée. Pour le voir on pourra considérer les boules $\Omega = B_0(r)$ et $K_\varepsilon = \overline{B}_0(\varepsilon)$, $r > 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$, puis l'anneau $\Omega_\varepsilon = \Omega\backslash K_\varepsilon$. Alors Ω et Ω_ε sont tous deux des domaines calibrables. On renvoit à Kawohl et Lachand-Robert [37] et Demengel-De Vuyst-Motron [16] pour ces affirmations. En particulier, $\lambda_{1,\Omega} = n/r$, $\lambda_{1,\Omega_\varepsilon}$ est donné par $\lambda_{1,\Omega_\varepsilon} = n(r^{n-1} + \varepsilon^{n-1})/(r^n - \varepsilon^n)$, et on obtient que

$$\lambda_{1,\Omega_\varepsilon} = \lambda_{1,\Omega} + \frac{\omega_{n-1}}{|A|}\varepsilon^{n-1} + o\left(\varepsilon^{n-1}\right)$$

pour tout ε, où $A = \Omega$ est l'ensemble propre de $\lambda_{1,\Omega}$. Sans hypothèse supplémentaire, la majoration dans (2.15) est optimale.

Dans notre dernier résultats de perturbation du $\lambda_{1,\Omega}$ on considère le cas d'une perturbation régulière du domaine par difféomorphismes. On montre alors la dérivabilité en 0 de l'application $\delta \to \lambda_{1,\Omega_\delta}$ et la convergence des fonctions propres sans hypothèses supplémentaires sur la 1-capacité des K_δ. Dans le cas du p-laplacien, $p > 1$, de tels problèmes ont été considérés par Lamberti [39] et Garcia Melian et Sabina De Lis [45]. Etant donné un ouvert Ω borné lisse de $\mathbb{R}^n$, on considère le famille $(T_\delta)_\delta$ de C^1-difféomorphismes donnés par

$$T_\delta(x) = (1 - \delta\Lambda)\, x + S(x, \delta)\ , \tag{2.17}$$

où $x \in \overline{\Omega}$, $\Lambda \in \mathbb{R}$, $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$ est petit, et $S(., \delta) \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ est un terme perturbatif tel que $S(x, \delta) = o(\delta)$ et $D_x S(x, \delta) = o(\delta)$ quand $\delta \to 0$, uniformément en x. En particulier $S(x, 0) = 0$, et si $\Omega_\delta = T_\delta(\Omega)$, on a que $\Omega_0 = \Omega$. Notre troisième et dernier résultat portant sur la perturbation du $\lambda_{1,\Omega}$ s'énonce de la façon suivante :

Théorème 2.2.3 *Soient Ω un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^n$ et $\Omega_\delta = T_\delta(\Omega)$, où les T_δ sont des C^1-difféomorphismes comme dans (2.17). La fonction $\delta \to \lambda_{1,\Omega_\delta}$ est continue et dérivable en $\delta = 0$, de dérivée en 0 $(\lambda_{1,\Omega_\delta})'(0) = \Lambda\lambda_{1,\Omega}$, où Λ est comme dans (2.17).*

On remarquera que dans ces exemples traités par le théorème 2.2.3, la 1-capacité de $K_\delta := \mathrm{adh}(\Omega\Delta\Omega_\delta)$ peut être grande. Si par exemple $\Omega = B_0(r)$ et $T_\delta = (1-\delta\Lambda)x$, $\Lambda \neq 0$, alors K_δ est un anneau de rayon intérieur (ou extérieur selon le signe de Λ) qui vaut r. En particulier, $\mathrm{cap}_1(K_\delta) = \omega_{n-1}r^{n-1} + o(1)$, et $\mathrm{cap}_1(K_\delta) \not\to 0$ quand $\delta \to 0$. Dans d'autres cas, la 1-capacité de K_δ peut converger vers 0 et l'on est alors ramené à la situation étudiée dans le théorème 2.2.1. Si par exemple $T_\delta(x) = \left(1 + \delta^\alpha R(\frac{1}{\delta}x)\right) x$, $\alpha > 2$, $R \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, et $0 \in \partial\Omega$, alors on récupère que $K_\delta \subset B_0(r_0\delta)$ pour un certain $r_0 > 0$, et $\mathrm{cap}_1(K_\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0$. On obtient avec les théorèmes 2.2.1 et 2.2.3 que $\Lambda = 0$ si $\mathrm{cap}_1(K_\delta) = o(\delta)$.

Les trois sous sections qui suivent sont consacrées aux preuves des théorèmes énoncés ci-dessus.

2.2.1 Preuve du théorème 2.2.1

Soit A_δ un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega_\delta}$, $\delta > 0$ fixé. Soit également ω_δ un ouvert borné lisse tel que $K_\delta \subset \omega_\delta$ et

$$\mathrm{cap}_1(K_\delta) \leq |\partial\omega_\delta| \leq \mathrm{cap}_1(K_\delta) + \varepsilon_\delta \; , \tag{2.18}$$

où $\varepsilon_\delta > 0$ est tel que $\varepsilon_\delta = o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right)$. Définissons v_δ par $v_\delta = \chi_{A_\delta}$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega}_\delta$, et $v_\delta = 0$ dans ω_δ. Alors $\mathrm{supp} v_\delta \subset \overline{\Omega}$, où $\mathrm{supp} v_\delta$ est le support de v_δ. Puisque $v_\delta \leq 1$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_\delta| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \chi_{A_\delta}| dx + |\partial\omega_\delta| \\ &= |A_\delta|\lambda_{1,\Omega_\delta} + (1 + o(1))\,\mathrm{cap}_1(K_\delta) \; , \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $o(1) \to 0$ quand $\delta \to 0$. Nous pouvons également écrire que

$$\begin{aligned} \int_\Omega v_\delta dx &= |A_\delta| - \int_{\omega_\delta} \chi_{A_\delta} dx \\ &= |A_\delta| + O\left(|\omega_\delta|\right) \; . \end{aligned} \tag{2.20}$$

D'après l'inégalité isopérimetrique et (2.18),

$$|\omega_\delta| \leq C|\partial\omega_\delta|^{\frac{n}{n-1}} = o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right)$$

où $C > 0$ est une constante dimensionnelle indépendante de δ. En revenant à (2.20), on obtient que

$$\int_\Omega v_\delta dx = |A_\delta| + o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right) \tag{2.21}$$

et d'après la définition variationnelle de $\lambda_{1,\Omega}$, (2.19), et (2.21), nous obtenons

$$\lambda_{1,\Omega} \leq \lambda_{1,\Omega_\delta} + \frac{1}{|A_\delta|}\mathrm{cap}_1(K_\delta) + o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right) \tag{2.22}$$

pour tout $\delta > 0$. Des arguments similaires permettent de montrer l'inégalité inverse. Soit A un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega}$, et soit w_δ la fonction définie par $w_\delta = \chi_A$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega}_\delta$, et $w_\delta = 0$ dans ω_δ, où ω_δ est comme dans (2.18). Alors supp$w_\delta \subset \overline{\Omega}_\delta$, et, comme ci-dessus, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_\delta| dx \leq |A|\lambda_{1,\Omega} + (1 + o(1))\,\mathrm{cap}_1(K_\delta)\ , \text{ et} \\ &\int_{\Omega_\delta} w_\delta dx = |A| + o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right)\ . \end{aligned} \tag{2.23}$$

En particulier, il suit de la définition variationnelle de $\lambda_{1,\Omega_\delta}$ que

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} \leq \lambda_{1,\Omega} + \frac{1}{|A|}\mathrm{cap}_1(K_\delta) + o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right) \tag{2.24}$$

pour tout $\delta > 0$. Sans perte de généralité, d'après la semicontinuité inférieure de la variation totale, nous pouvons choisir $A = A_0$ dans (2.24) de volume maximal parmi les ensembles propres pour $\lambda_{1,\Omega}$.

Dans ce qui suit, nous noterons $u_\delta \in BV(\Omega_\delta)$ une fonction propre pour $\lambda_{1,\Omega_\delta}$, par exemple $u_\delta = |A_\delta|^{-1}\chi_{A_\delta}$, et nous supposerons que $\mathrm{cap}_1(K_\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$. Alors, d'après (2.22) et (2.24), $\lambda_{1,\Omega_\delta} \to \lambda_{1,\Omega}$ quand $\delta \to 0$. Remarquons que $|A_\delta| \geq C$ avec $C > 0$ (grâce par exemple à l'inégalité de Sobolev dans $BV(\mathbb{R}^n)$ appliquée à l'extension par 0 en dehors de $\overline{\Omega}_\delta$ de la fonction $|A_\delta|^{-1}\chi_{A_\delta}$). Soit D un ouvert lisse borné de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overline{\Omega} \subset D$, et $\overline{\Omega}_\delta \subset D$ pour tout δ. Notons $\overline{u}_\delta$ l'extension de u_δ par 0 en dehors de $\overline{\Omega}_\delta$. Par (2.24), la suite $(\overline{u}_\delta)$ est bornée dans $BV(D)$. On peut donc supposer, l'injection de $BV(D)$ dans $L^1(D)$ étant compacte, que, à sous suite près, $\overline{u}_\delta \to \overline{u}$ dans $L^1(D)$ pour un certain $\overline{u} \in BV(D)$. D'après l'inégalité de Sobolev pour les fonctions BV, la suite $(\overline{u}_\delta)$ est également bornée dans $L^{n/(n-1)}(D)$. D'une part,

$$\begin{aligned} \int_{D\backslash\Omega} |\overline{u}_\delta| dx &\leq \|\overline{u}_\delta\|_{L^{n/(n-1)}} |\Omega_\delta \backslash \Omega|^{1/n} \\ &\leq C|\Omega_\delta \backslash \Omega|^{1/n}\ . \end{aligned}$$

D'autre part, nous pouvons écrire avec l'inégalité isopérimétrique que

$$|\Omega_\delta \backslash \Omega| \leq |K_\delta| \leq C \mathrm{cap}_1(K_\delta)^{\frac{n}{n-1}} = o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right) ,$$

où, comme ci-dessus, $C > 0$ est indépendante de δ. Il s'ensuit en particulier que $\int_{D\backslash\Omega} |\overline{u}_\delta| dx = o(1)$. Nous considérons $\overline{u}$ comme définie dans $\mathbb{R}^n$ (en posant $\overline{u} = 0$ en dehors de D), et notons $u = \overline{u}_{|\Omega}$ la restriction de $\overline{u}$ à Ω. Alors, d'après ce qui précède, $\overline{u} = u$ dans Ω, et $\overline{u} = 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$. On vérifie facilement que $\int_\Omega |u| dx = 1$, tandis que par semicontinuité inférieure de la variation totale, et puisque $\lambda_{1,\Omega_\delta} \to \lambda_{1,\Omega}$, nous pouvons écrire que

$$\lambda_{1,\Omega} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{u}_\delta| dx + o(1) \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{u}| dx + o(1) .$$

En particulier, u est une fonction propre pour $\lambda_{1,\Omega}$ et

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{u}_\delta| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{u}| dx . \tag{2.25}$$

Soit $u_\delta = |A_\delta|^{-1} \chi_{A_\delta}$. Nous pouvons supposer que $|A_\delta| \to \Lambda$ pour un certain $\Lambda > 0$, et $\overline{u}_\delta \to \overline{u}$ presque partout. Comme $\int_\Omega |u| dx = 1$, nous pouvons écrire que $\overline{u} = |A|^{-1} \chi_A$ pour un certain $A \subset \overline{\Omega}$. En particulier, A est un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega}$, et $|A_\delta| \to |A|$ d'où, par (2.22) et (2.24),

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} = \lambda_{1,\Omega} + \frac{\varepsilon_\delta}{|A_\delta|} \mathrm{cap}_1(K_\delta) + o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right) ,$$

où $\varepsilon_\delta \in [-1, 1]$ (puisque $|A| \geq |A_0|$). C'est l'équation (2.14) du théorème 2.2.1. Elle est valable pour tout δ par contradiction. En remarquant que la convergence $\overline{u}_\delta \to \overline{u}$ dans L^1 implique que $\chi_{A_\delta} \to \chi_A$ dans L^1, le théorème 2.2.1 est démontré.

Concernant la remarque suivant le théorème 2.2.1, il reste encore à montrer que si $\mu_\delta = |\nabla \overline{u}_\delta|$ et $\mu = |\nabla \overline{u}|$, alors $\mu_\delta \rightharpoonup \mu$ faiblement quand $\delta \to 0$. D'après la semicontinuité inférieure de la variation totale,

$$\mu(U) \leq \liminf_{\delta \to 0} \mu_\delta(U)$$

pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, supposons qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^n$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que $\mu(K) + \varepsilon \leq \mu_\delta(K)$ pour une sous suite des μ_δ. Soit Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\overline{\Omega}$, K et les $\overline{\Omega}_\delta$. Quitte à extraire une autre sous suite, par semicontinuité inférieure de la variation totale, nous pouvons supposer que

$$\mu(\Omega' \backslash K) \leq \mu_\delta(\Omega' \backslash K) + \varepsilon'$$

pour tout δ, où $\varepsilon' < \varepsilon$ est strictement positif. Alors, si $\hat{\varepsilon} = \varepsilon - \varepsilon'$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}^n) = \mu(\Omega') &= \mu(K) + \mu(\Omega' \backslash K) \\ &\leq \mu_\delta(K) - \varepsilon + \mu_\delta(\Omega' \backslash K) + \varepsilon' \\ &= \mu_\delta(\Omega') - \hat{\varepsilon} = \mu_\delta(\mathbb{R}^n) - \hat{\varepsilon}\end{aligned}$$

pour tout δ, d'où nous déduisons une contradiction avec (2.25) puisque $\hat{\varepsilon} > 0$. En conséquence, pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$,

$$\mu(K) \geq \limsup_{\delta \to 0} \mu_\delta(K)$$

et, voir par exemple Evans-Gariepy [25], nous venons en fait de montrer que les mesures μ_δ convergent faiblement vers la mesure μ.

2.2.2 Preuve du théorème 2.2.2

On vérifie facilement avec la définition de la 1-capacité, le fait que la 1-capacité soit une mesure extérieure et l'inégalité isopérimétrique que

$$\mathrm{cap}_1(K_\delta) = \omega_{n-1}\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1} + o\left(\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1}\right) . \tag{2.26}$$

Indépendamment, $\dot{H}_1^1(\Omega_\delta) \subset \dot{H}_1^1(\Omega)$. D'où $\lambda_{1,\Omega} \leq \lambda_{1,\Omega_\delta}$. D'autre part, d'après la preuve du théorème 2.2.1, voir (2.24), et d'après (2.26), on a

$$\begin{aligned}\lambda_{1,\Omega_\delta} &\leq \lambda_{1,\Omega} + \frac{1}{|A|}\mathrm{cap}_1(K_\delta) + o\left(\mathrm{cap}_1(K_\delta)\right) \\ &= \lambda_{1,\Omega} + \frac{\omega_{n-1}}{|A|}\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1} + o\left(\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1}\right) .\end{aligned}$$

Ceci prouve (2.15). Il reste à montrer (2.16). Pour cela, nous devons être plus précis que dans la preuve du théorème 2.2.1. Soit A un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega}$ et soit ω_δ l'union pour $i = 1$ à k des boules $B_{x_i}(\tilde{\varepsilon}_{i,\delta})$, $\delta > 0$ petit, où $\varepsilon_{i,\delta} < \tilde{\varepsilon}_{i,\delta}$, et $\tilde{\varepsilon}_{i,\delta} = (1 + o(1))\,\varepsilon_{i,\delta}$ pour tout i et δ. Pour $u = \chi_A$, notons également u_δ^+ la trace de u quand u est restreinte à $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega}_\delta$, et u_δ^- la trace de u quand u est restreinte à ω_δ. Alors,

$$|A|\lambda_{1,\Omega} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx$$

et nous pouvons écrire que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx = \int_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega}_\delta} |\nabla u| dx + \int_{\omega_\delta} |\nabla u| dx + \int_{\partial\omega_\delta} |u_\delta^+ - u_\delta^-| d\sigma . \tag{2.27}$$

En particulier, en considérant w_δ définie par $w_\delta = u$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega}_\delta$, et $w_\delta = 0$ dans ω_δ, nous obtenons avec (2.27) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla w_\delta| dx &= \int_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{\omega}_\delta} |\nabla u| dx + \int_{\partial \omega_\delta} u_\delta^+ d\sigma \\ &\leq |A| \lambda_{1,\Omega} - \int_{\omega_\delta} |\nabla u| dx + \int_{\partial \omega_\delta} u_\delta^- d\sigma \\ &\leq |A| \lambda_{1,\Omega} - \int_{B_\delta} |\nabla u| dx + \int_{\partial B_\delta} u_\delta^- d\sigma + o\left(\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1}\right) ,\end{aligned} \tag{2.28}$$

où $B_\delta = B_{x_{i_0}}(\tilde{\varepsilon}_{i_0,\delta})$. Nous avons également que

$$\begin{aligned}&\int_{\partial B_\delta} u_\delta^- d\sigma = |\partial B_\delta| - \int_{\partial B_\delta} (1 - u_\delta^-) d\sigma \text{ , et} \\ &\int_{B_\delta} |\nabla u| dx + \int_{\partial B_\delta} (1 - u_\delta^-) d\sigma = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla dxv| ,\end{aligned} \tag{2.29}$$

où v est la fonction $v = \chi_{A^c}$ dans B_δ, $v = 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_\delta$, et $A^c = \mathbb{R}^n \backslash A$. Si nous supposons que $x_{i_0} \in \text{int}(\Omega \backslash A)$, alors $u_\delta^- = 0$ sur ∂B_δ, et il suit de la seconde équation dans (2.23), de (2.26) et (2.28), et de la définition variationnelle de $\lambda_{1,\Omega_\delta}$, que la première équation dans (2.16) est vraie. Supposons maintenant que $x_{i_0} \in \partial^\star A$. Alors la seconde équation dans (2.23), (2.26) , (2.28)–(2.29), et la définition variationnelle de $\lambda_{1,\Omega_\delta}$ donnent que

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} \leq \lambda_{1,\Omega} + \frac{1}{|A|} \left(\omega_{n-1} \varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1} - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v| dx \right) + o\left(\varepsilon_{i_0,\delta}^{n-1}\right) \tag{2.30}$$

pour tout δ. Soit T_δ le difféomorphisme donné par

$$T_\delta(x) = x_{i_0} + \tilde{\varepsilon}_{i_0,\delta}^{-1}(x - x_{i_0}).$$

Alors, par la formule de changement de variable pour la variation totale, voir Giusti [31], nous pouvons écrire que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v| dx = \tilde{\varepsilon}_{i_0,\delta}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla (v \circ T_\delta^{-1})| dx . \tag{2.31}$$

Soit A_δ l'ensemble des x tels que $T_\delta^{-1}(x) \in A^c$. Alors $v \circ T_\delta^{-1} = \chi_{A_\delta}$ dans B, et $v \circ T_\delta^{-1} = 0$ in $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}$, où $B = B_{x_{i_0}}(1)$. Puisque $\partial^\star A^c = \partial^\star A$, $x_{i_0} \in \partial^\star A^c$. Par la propriété de blow-up du bord réduit (voir Evans et Gariepi [25]), nous pouvons écrire que

$$\chi_{A_\delta} \to \chi_{H^-(x_{i_0})} \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \tag{2.32}$$

quand $\delta \to 0$, où $H^-(x_{i_0})$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\nu_{A^c}(x_{i_0}).(y - x_{i_0}) \leq 0$$

et où $\nu_{A^c}(x_{i_0})$ est la normale extérieure généralisée à A^c en x_{i_0}. Par (2.32), $v \circ T_\delta^{-1} \to \hat{v}$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, où $\hat{v} = \chi_{H^-(x_{i_0})}$ dans B, et $\hat{v} = 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}$. Par semicontinuité inférieure de la variation totale, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v \circ T_\delta^{-1})| dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \hat{v}| dx + o(1) \ . \tag{2.33}$$

On vérifie facilement que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \hat{v}| dx = \frac{1}{2}\omega_{n-1} + b_{n-1} \ , \tag{2.34}$$

où b_n est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. On obtient alors la seconde équation dans (2.16) en combinant (2.30)–(2.34). Ceci termine la preuve du théorème 2.2.2.

La preuve du théorème 2.2.2, et donc le théorème lui-même, peuvent être facilement étendus à d'autres types de trous faits dans Ω. Par exemple, si l'on ne suppose plus seulement l'un des $\varepsilon_{i,\delta}$ dominant, ou quand on enlève $K_{i,\delta} \subset B_{x_i}(\varepsilon_{i,\delta})$ au lieu de toute la boule.

2.2.3 Preuve du théorème 2.2.3

D'après la formule de changement de variable pour la variation totale (voir Giusti [31]), si T est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, Ω est un ouvert lisse de $\mathbb{R}^n$, et $u \in BV(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega^\star} |\nabla u^\star| dx = \int_\Omega |(DT)^{-1}\nu_u||DT||\nabla u| dx \ , \tag{2.35}$$

où $\Omega^\star = T(\Omega)$, $u^\star = u \circ T^{-1}$, ν_u est la dérivée de Radon-Nikodym de ∇u par rapport à $|\nabla u|$, et $|DT|$ est la valeur absolue du déterminant de DT. D'après (2.35) avec $T = T_\delta$, en remarquant que $|\nu_u| = 1$ pour $|\nabla u|$-presque tout x, la définition variationnelle de $\lambda_{1,\Omega_\delta}$, et (2.17), on obtient facilement que $\limsup_{\delta \to 0} \lambda_{1,\Omega_\delta} \leq \lambda_{1,\Omega}$. Réciproquement, considérons u_δ une fonction propre positive ou nulle pour $\lambda_{1,\Omega_\delta}$, et définissons la fonction v_δ par $v_\delta = u_\delta \circ T_\delta$. D'après (2.17), (2.35), et ce que l'on vient de dire, la suite $(\overline{v}_\delta)$ est bornée dans $BV(\mathbb{R}^n)$, avec la propriété supplémentaire que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{v}_\delta| dx \leq (1 + o(1))\, \lambda_{1,\Omega_\delta} \ , \text{ et} \\ &\int_\Omega v_\delta dx = (1 + o(1)) \int_{\Omega_\delta} u_\delta dx = 1 + o(1) \ , \end{aligned} \tag{2.36}$$

où $o(1) \to 0$ quand $\delta \to 0$. Comme ci-dessus, nous adoptons la notation $\overline{v}_\delta$ pour désigner l'extension de v_δ par zéro en dehors de Ω. Soit D un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ contenant à la fois Ω et les Ω_δ. D'après la compacité de l'injection de $BV(D)$ dans $L^1(D)$, nous pouvons supposer, à sous-suite près, que $\overline{v}_\delta \to v$ dans $L^1(D)$ et également presque partout quand $\delta \to 0$. Notons u la restriction de v à Ω. Alors $u \geq 0$ et, d'après la seconde équation dans (2.36), $\int_\Omega u dx = 1$. De plus, d'après la première équation dans (2.36) et la semicontinuité inférieure de la variation totale,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,\Omega} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{u}| dx \\ &\leq \int_D |\nabla v| dx \leq \liminf_{\delta \to 0} \lambda_{1,\Omega_\delta} \ , \end{aligned}$$

où $\overline{u}$ désigne l'extension de u par zéro en dehors de Ω. En particulier, $\lambda_{1,\Omega_\delta} \to \lambda_{1,\Omega}$ quand $\delta \to 0$, et la fonction $\delta \to \lambda_{1,\Omega_\delta}$ est continue en $\delta = 0$. Ceci prouve la première assertion du théorème 2.2.3.

Une conséquence des développements ci-dessus est que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{v}_\delta| dx \to \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{u}| dx$$

quand $\delta \to 0$, et u est une fonction propre pour $\lambda_{1,\Omega}$. En particulier, de la même façon que dans la section 2.2.1, on voit que $\mu_\delta \rightharpoonup \mu$ faiblement, où $\mu_\delta = |\nabla \overline{v}_\delta|$ et $\mu = |\nabla \overline{u}|$. Dans tout ce qui suit, nous considérons un ensemble propre A_δ pour $\lambda_{1,\Omega_\delta}$ et $u_\delta = |A_\delta|^{-1}\chi_{A_\delta}$. Alors (nous renvoyons encore à la section 2.2.1 pour les arguments élémentaires utilisés ici), $\overline{u} = |A|^{-1}\chi_A$, où A est un ensemble propre pour $\lambda_{1,\Omega}$. En particulier, $|\nabla \overline{v}_\delta| \rightharpoonup \mu$ faiblement, et

$$\mu = |A|^{-1}\mathcal{H}^{n-1} \lfloor \partial_\star A$$

où $\partial_\star A$ est le bord au sens de la mesure de A (voir par exemple Evans-Gariepy [25]), et $\mathcal{H}^{n-1}$ est la mesure de Hausdorff $(n-1)$-dimensionelle. Nous montrons maintenant la seconde assertion du théorème 2.2.3, à savoir la différentiabilité de la valeur propre $\lambda_{1,\Omega_\delta}$ en $\delta = 0$ et l'équation $(\lambda_{1,\Omega_\delta})'(0) = \Lambda\lambda_{1,\Omega}$. Comme on le vérifie aisément à partir de (2.17), pour tout $x \in \overline{\Omega}$, et tout $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $|X| = 1$,

$$\begin{aligned} &|DT_\delta(x)| = 1 - n\Lambda\delta + o(\delta) \ , \text{ et} \\ &\left|(DT_\delta)(x)^{-1}.X\right| = 1 + \Lambda|X|^2\delta + o(\delta) \ , \end{aligned} \tag{2.37}$$

où les $o(\delta)$ sont uniformes en x et X. D'après (2.11) et (2.35) avec $T = T_\delta$, nous pouvons écrire que

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |(DT_\delta)^{-1}.\nu_u| \, |DT_\delta| \, |\nabla \overline{u}| dx}{\int_\Omega |DT_\delta| \, u dx} \ , \tag{2.38}$$

où u et $\overline{u}$ sont comme ci-dessus. D'après (2.37),

$$\int_\Omega |DT_\delta|\, u dx = 1 - n\Lambda\delta + o(\delta)\ . \tag{2.39}$$

Puisque $|\nu_u| = 1$ μ-presque partout, et $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_\star A \backslash \partial^\star A) = 0$, nous obtenons également avec (2.37) que

$$\frac{1}{\lambda_{1,\Omega}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|(DT_\delta)^{-1}.\nu_u\right| |DT_\delta|\, |\nabla \overline{u}| dx = 1 - (n-1)\Lambda\delta + o(\delta)\ . \tag{2.40}$$

En injectant (2.39) et (2.40) dans (2.38), on obtient

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} - \lambda_{1,\Omega} \leq \Lambda\delta\lambda_{1,\Omega} + o(\delta)\ . \tag{2.41}$$

Pour obtenir l'inégalité réciproque, nous écrivons, en utilisant toujours (2.11) et (2.35), que

$$\begin{aligned} \lambda_{1,\Omega_\delta} - \lambda_{1,\Omega} \geq & \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |(DT_\delta)^{-1}.\nu_\delta|\, |DT_\delta|\, |\nabla \overline{v}_\delta| dx}{\int_\Omega |DT_\delta|\, v_\delta dx} \\ & - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{v}_\delta| dx}{\int_\Omega v_\delta dx}\ , \end{aligned} \tag{2.42}$$

où ν_δ est la dérivée de Radon-Nikodym de $\nabla \overline{v}_\delta$ par rapport à $|\nabla \overline{v}_\delta|$. D'après (2.37), puisque $|\nu_\delta| = 1$ pour μ_δ-presque tout point,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left|(DT_\delta)^{-1}.\nu_\delta\right| |DT_\delta|\, |\nabla \overline{v}_\delta| dx \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{v}_\delta| dx - (n-1)\Lambda\delta \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{v}_\delta| dx + o(\delta) \end{aligned} \tag{2.43}$$

et

$$\int_\Omega |DT_\delta|\, v_\delta dx = \int_\Omega v_\delta dx - n\Lambda\delta \int_\Omega v_\delta dx + o(\delta)\ . \tag{2.44}$$

En combinant (2.42), (2.43), et (2.44), on obtient que

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} - \lambda_{1,\Omega} \geq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{v}_\delta| dx}{\int_\Omega v_\delta dx} \Lambda\delta + o(\delta)\ . \tag{2.45}$$

Puisque $\int_\Omega v_\delta dx \to 1$ et $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \overline{v}_\delta| dx \to \lambda_{1,\Omega}$ quand $\delta \to 0$, il suit de (2.41) et (2.45) que

$$\lambda_{1,\Omega_\delta} - \lambda_{1,\Omega} = \Lambda\delta\lambda_{1,\Omega} + o(\delta).$$

Cette équation est valable pour une sous-suite, mais le membre de droite de celle-ci ne dépendant pas de la sous-suite, elle est en fait valable pour tout δ. En particulier, $(\lambda_{1,\Omega_\delta})'(0) = \Lambda\lambda_{1,\Omega}$ et ceci termine la preuve du théorème 2.2.3.

La preuve de la première assertion du théorème 2.2.3, et donc la continuité de $\lambda_{1,\Omega_\delta}$ en $\delta = 0$, s'étend à des T_δ de forme très générale. Nous avons seulement besoin que $T_\delta \to Id$ en topologie C^1 quand $\delta \to 0$.

Chapitre 3

Solutions de signe non constant pour une équation conformément invariante d'ordre 4 dans $\mathbb{R}^n$.

On étudie dans ce chapitre l'équation d'ordre 4

$$\Delta^2 u = |u|^{2^\sharp - 2} u \tag{3.1}$$

sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 5$, où $2^\sharp = \frac{2n}{n-4}$ est l'exposant critique pour les injections de Sobolev de H_2^2 dans les espaces L^p, et où $\Delta^2 = \Delta_\xi^2$ est l'opérateur bilaplacien pour la métrique euclidienne ξ. Dans ce qui précède, et dans la suite, H_2^2 désigne l'espace de Sobolev des fonctions de L^2 dont les dérivées d'ordre 1 et 2 sont également dans L^2. Dans [41], Lin a montré que les seules solutions régulières positives de (3.1) sont les fonctions

$$u_{\lambda,a}(x) = \alpha_n \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2 |x-a|^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \tag{3.2}$$

où

$$\alpha_n = \left(n(n-4)(n^2-4) \right)^{\frac{n-4}{8}}$$

et où $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$ sont quelconques. Ce resultat s'étend aux solutions nontriviales positives ou nulles de (3.1) appartenant à l'espace de Beppo-Levi $D_2^2(\mathbb{R}^n)$, le complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|u\| := \|\Delta u\|_2$. Nous dirons dans ce qui suit que deux solutions u et v d'une équation du type (3.1) sont équivalentes s'il existe $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$v(x) = \lambda^{-\frac{n-4}{2}} u \left(\frac{x-a}{\lambda} \right). \tag{3.3}$$

D'après le résultat de Lin, deux solutions positives lisses de (3.1) sont toujours équivalentes puisque toutes équivalentes à la solution $u_{1,0}$ par

$$u_{\lambda,a}(x) = \lambda^{\frac{n-4}{2}} u_{1,0} \left(\lambda(x-a) \right).$$

On vérifie par ailleurs facilement que deux solutions équivalentes ont la même énergie au sens où si u et v sont reliées par (3.3), alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta v)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2 dx.$$

L'énergie des solutions $u_{\lambda,a}$ données par (3.2) est exactement le quanta d'énergie d'une bulle apparaissant dans l'étude du blow-up des solutions positives des équations du type Paneitz-Branson. Nous renvoyons à Hebey-Robert [34] pour plus de détails sur cette affirmation.

L'objet de ce chapitre est de prouver le théorème suivant, analogue du résultat de Ding [17] lorsque l'on passe de l'équation d'ordre deux $\Delta u = |u|^{4/(n-2)} u$ à l'équation critique d'ordre quatre (3.1).

Théorème 3.0.4 *Il existe une suite $(u_k)_k$ de solutions de (3.1) dont l'énergie tend vers $+\infty$ quand $k \to +\infty$, à savoir telle que*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u_k)^2 dx = +\infty.$$

En particulier, l'equation (3.1) possède une infinité de solutions non-équivalentes. Ces solutions changent nécessairement de signe.

La preuve de ce théorème s'effectue en deux temps. On ramène d'abord, via la projection stéréographique, l'étude de l'équation (3.1) à celle d'une équation posée sur la sphère standard (S^n, h), à savoir l'équation (3.9) ci-dessous. On utilise pour ce faire les propriétés d'invariance conforme de l'opérateur de Paneitz-Branson. Les symétries et la compacité de S^n permettent alors d'obtenir une infinité de solutions à cette équation, ce qui fournit ensuite une infinité de solutions à l'équation d'origine. On utilise au cours du processus un théorème de type minimax dû à Ambrosetti et Rabinowitz [3], et la compacité des injections de Sobolev en présence de symétries démontrée par Hebey-Vaugon [36]. Cette démarche est à peu de choses près celle utilisée par Ding, le cas des équations d'ordre 4 étant tout de même techniquement plus délicat que celui des équations d'ordre 2.

3.1 Le laplacien conforme et l'opérateur de Paneitz-Branson

Deux opérateurs conformes dans le contexte des variétés riemanniennes ont été particulièrement étudiés. L'un, d'ordre 2, est connu sous le nom de laplacien conforme. L'autre, d'ordre 4, est connu sous le nom d'opérateur de Paneitz, ou encore de Paneitz-Branson. Dans ce qui suit, (M, g) désigne une variété riemannienne. Le laplacien conforme de (M, g) est l'opérateur L_g qui est défini par

$$L_g u = \Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u$$

où $u \in C^2(M)$, et S_g désigne la courbure scalaire de g. Cet opérateur intervient dans les problèmes de courbure scalaire prescrite, le plus célèbre de ces problèmes étant connu sous le nom de problème de Yamabe. Si $\tilde{g} \in [g]$ est une métrique conforme à g, par exemple $\tilde{g} = \phi^{\frac{4}{n-2}} g$ où $\phi \in C^\infty(M)$ est strictement positive, et si $n \geq 3$, l'invariance conforme du laplacien conforme se traduit par l'équation

$$L_{\tilde{g}} u = \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} L_g(u\phi) \tag{3.4}$$

valable pour toute fonction $u \in C^2(M)$. L'opérateur de Paneitz-Branson P_g^n est quand à lui un opérateur d'ordre 4. Il est défini (lorsque $n \geq 4$) par l'équation

$$P_g^n u = \Delta_g^2 u - div_g\,(A_g du) + \frac{n-4}{2} Q_g^n u$$

où $u \in C^4(M)$. Dans cette équation, A_g est un champ de 2-tenseurs, et Q_g^n est une fonction. Ils sont donnés par

$$A_g = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)} S_g g - \frac{4}{n-2} Ric_g\ ,$$

et

$$Q_g^n = \frac{1}{2(n-1)} \Delta_g S_g + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2} S_g^2 - \frac{2}{(n-2)^2} |Ric_g|^2\ ,$$

où Ric_g désigne le tenseur de Ricci de g, et S_g la courbure scalaire de g. Dans le cas de la sphère unité standard (S^n, h), on a $S_h = n(n-1)$ et $Ric_h = (n-1)h$. On trouve que l'opérateur de Paneitz-Branson se réduit à

$$P_h^n u = \Delta_h^2 u + c_n \Delta_h u + d_n u$$

où $c_n = \frac{n^2-2n-4}{2}$ et $d_n = \frac{n(n-4)(n^2-4)}{16}$. Si $\tilde{g} \in [g]$ est une métrique conforme à g, par exemple $\tilde{g} = \phi^{\frac{4}{n-4}} g$ où $\phi \in C^\infty(M)$ est strictement positive, et si $n \geq 5$, l'invariance conforme de l'opérateur de Paneitz-Branson se traduit par l'équation

$$P_g^n(u\phi) = \phi^{\frac{n+4}{n-4}} P_{\tilde{g}}^n u \tag{3.5}$$

valable pour toute fonction $u \in C^4(M)$. On pourra consulter le survey [9] par Chang et Yang pour une introduction plus complète à l'opérateur de Paneitz-Branson.

3.2 Preuve du théorème 3.0.4

On note $\Phi : S^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique de pôle nord N dans S^n. Il est alors bien connu que

$$(\Phi^{-1})^* h = \phi^{\frac{4}{n-4}} \xi \tag{3.6}$$

où

$$\phi(x) = \frac{4^{\frac{n-4}{4}}}{(1+|x|^2)^{\frac{n-4}{2}}}. \tag{3.7}$$

Considérons une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ de l'équation (3.1) et soit $\hat{u}$ la fonction définie sur S^n, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donnée par

$$\hat{u} = (u\phi^{-1}) \circ \Phi. \tag{3.8}$$

L'opérateur de Paneitz-Branson sur la sphère unité standard (S^n, h) de $\mathbb{R}^n$, voir la section précédente, s'écrit sous la forme

$$P_h^n u = \Delta_h^2 u + c_n \Delta_h u + d_n u$$

où

$$c_n = \frac{n^2 - 2n - 4}{2} \text{ et } d_n = \frac{n(n-4)(n^2-4)}{16}.$$

L'invariance conforme (3.5) de P_h^n entraîne que

$$\begin{aligned} \phi^{2^\sharp - 1}(P_h^n \hat{u}) \circ \Phi^{-1} &= P_\xi^n u \\ &= \Delta_\xi^2 u \\ &= |u|^{2^\sharp - 2} u \\ &= \phi^{2^\sharp - 1}(|\hat{u}|^{2^\sharp - 2}\hat{u}) \circ \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie par ailleurs facilement que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\sharp} dx = \int_{S^n} |\hat{u}|^{2^\sharp} dv_h.$$

En particulier, si $\hat{u}$ est solution de

$$P_h^n \hat{u} = |\hat{u}|^{2^\sharp - 2}\hat{u} \tag{3.9}$$

alors $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $u = (\hat{u} \circ \Phi^{-1})\phi$ est une solution de (3.1) telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\sharp} dx = \int_{S^n} |\hat{u}|^{2^\sharp} dv_h. \tag{3.10}$$

On remarquera que si $\hat{u} \in H_2^2(S^n)$ est solution de (3.9), alors $\hat{u} \in L^p(S^n)$ pour tout p, et $\hat{u}$ est en fait dans $C^4(S^n)$. Nous affirmons maintenant que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2 dx < +\infty. \tag{3.11}$$

Pour le voir on considère la métrique riemannienne $\tilde{\xi}$ sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\tilde{\xi} = \phi^{\frac{4}{n-4}}\xi$. L'invariance conforme (3.4) du laplacien conforme entraîne que

$$\begin{aligned} \Delta_\xi u &= L_\xi u \\ &= \phi^{\frac{n+2}{n-4}} L_{\tilde{\xi}} \left(u\phi^{-\frac{n-2}{n-4}}\right) \\ &= \phi^{\frac{n+2}{n-4}} \left(\Delta_{\tilde{\xi}}(u\phi^{-\frac{n-2}{n-4}}) + \frac{n(n-2)}{4} u\phi^{-\frac{n-2}{n-4}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2 \, dv_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{4}{n-4}} \left(\Delta_{\tilde{\xi}}(u\phi^{-\frac{n-2}{n-4}}) + \frac{n(n-2)}{4} u\phi^{-\frac{n-2}{n-4}} \right)^2 dv_{\tilde{\xi}}$$

et nous pouvons également écrire que

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{\xi}}(u\phi^{-\frac{n-2}{n-4}}) &= \Delta_{\tilde{\xi}} \left((\hat{u} \circ \Phi^{-1}) \phi^{-\frac{2}{n-4}} \right) \\ &= \Delta_{\tilde{\xi}}(\hat{u} \circ \Phi^{-1}) \phi^{-\frac{2}{n-4}} + \Delta_{\tilde{\xi}}(\phi^{-\frac{2}{n-4}})(\hat{u} \circ \Phi^{-1}) \\ &\quad -2\langle \nabla(\hat{u} \circ \Phi^{-1}); \nabla\phi^{-\frac{2}{n-4}} \rangle_{\tilde{\xi}} \end{aligned}$$

où $\langle \cdot;\cdot \rangle_{\tilde{\xi}}$ désigne le produit scalaire pour la métrique $\tilde{\xi}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2 \, dv_\xi &\leq 4 \int_{S^n} (\Delta_h \hat{u})^2 \, dv_h + C_1(I_1 + I_2 + I_3) \\ &\leq C_2 + C_1(I_1 + I_2 + I_3) \end{aligned}$$

où $C_1, C_2 > 0$ sont des constantes positives, et

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S^n} \left(\Delta_h(\phi^{-\frac{2}{n-4}} \circ \Phi) \right)^2 (\phi^{\frac{4}{n-4}} \circ \Phi) dv_h \\ I_2 &= \int_{S^n} \left(\phi^{\frac{4}{n-4}} \circ \Phi \right) \left| \nabla \left(\phi^{-\frac{2}{n-4}} \circ \Phi \right) \right|_h^2 dv_h \\ I_3 &= \int_{S^n} \left(\phi^{-2} \circ \Phi \right) (u \circ \Phi)^2 dv_h. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire, grâce encore une fois à l'invariance conforme du laplacien conforme, que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta_{\tilde{\xi}}(\phi^{-\frac{2}{n-4}}) \right)^2 \phi^{\frac{4}{n-4}} dv_{\tilde{\xi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{2n+4}{n-4}} \left(\phi^{-\frac{n+2}{n-4}} \Delta_\xi \phi - \frac{n(n-2)}{4} \phi^{-\frac{2}{n-4}} \right)^2 dx \\ &\leq C_3 \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi \phi)^2 \, dx + C_4 \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{2^\sharp} dx < +\infty \end{aligned}$$

où $C_3, C_4 > 0$ sont des constantes positives. De la même manière,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{4}{n-4}} \left| \nabla \phi^{-\frac{2}{n-4}} \right|_{\tilde{\xi}}^2 dv_{\tilde{\xi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{2^\sharp} \left| \nabla \phi^{-\frac{2}{n-4}} \right|_{\xi}^2 dx < +\infty. \end{aligned}$$

Enfin, par (3.8), nous avons que

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C_5 \int_{\mathbb{R}^n} dv_{\tilde{\xi}} \\ &= C_5 \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{2^\sharp} dx < +\infty \end{aligned}$$

où $C_5 > 0$ est une constante positive. Ceci prouve (3.11). Par ailleurs

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{2^\star} dx < +\infty \tag{3.12}$$

où $2^\star = 2n/(n-2)$ est l'exposant critique de Sobolev pour l'injection de H_1^2 (espace des fonctions de L^2 dont le gradient est dans L^2) dans les espaces L^p. Pour démontrer (3.12), on remarque que (3.8) permet d'écrire que

$$\left|\nabla(\hat{u} \circ \Phi^{-1})\right|_\xi = \phi^{\frac{2}{n-4}} \left|\nabla \hat{u}\right|_h .$$

On écrit ensuite que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{2^\star} dx &\leq C_6 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\nabla(\hat{u} \circ \Phi^{-1})\right|_\xi^{2^\star} \phi^{2^\star} dx + C_7 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|_\xi^{2^\star} dx \\ &\leq C_8 \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{2^\sharp} dx + C_6 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi|_\xi^{2^\star} dx < +\infty \end{aligned}$$

où $C_6, C_7, C_8 > 0$ sont des constantes positives, ce qui prouve (3.12).

Soit maintenant $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ dans $B_0(1)$ et $\eta \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash B_0(2)$, où $B_0(r)$ désigne la boule euclidienne ouverte de centre 0 et rayon r dans $\mathbb{R}^n$. Etant donné $R > 0$, on pose

$$\eta_R(x) = \eta\left(\frac{x}{R}\right)$$

et soit u une solution de (3.1). Après multiplication de (3.1) par $\eta_R u$ et intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_R |u|^{2^\sharp} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\xi(\eta_R u) \Delta u dx \\ &= I_1(R) + I_2(R) - 2I_3(R) \end{aligned} \tag{3.13}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1(R) &= \int_{B_0(2R)} \eta_R (\Delta_\xi u)^2 dx \\ I_2(R) &= \int_{A_R)} (\Delta_\xi \eta_R) u (\Delta_\xi u) dx \\ I_3(R) &= \int_{A_R} \langle \nabla \eta_R ; \nabla u \rangle_\xi (\Delta_\xi u) dx \end{aligned}$$

et où A_R désigne l'anneau $A_R = B_0(2R)\backslash B_0(R)$. D'après (3.11),

$$I_1(R) \to \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2 \, dx$$

quand $R \to +\infty$. Nous avons également

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_R |u|^{2^\sharp} dx \to \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\sharp} dx$$

quand $R \to +\infty$. Indépendamment, en notant $V(R) = \mathrm{Vol}_\xi(A_R)$, nous pouvons écrire, grâce à l'inégalité de Hölder et en remarquant que $V(R) \leq CR^n$, que

$$\begin{aligned}
|I_2(R)| &= \left| \int_{A_R} (\Delta_\xi \eta_R) u (\Delta_\xi u) dx \right| \\
&\leq CR^{-2} \|u\|_{2^\sharp} \left(\int_{A_R} (\Delta_\xi u)^{\frac{2n}{n+4}} dx \right)^{\frac{n+4}{2n}} \\
&\leq CR^{-2} \|u\|_{2^\sharp} \left(\int_{A_R} (\Delta_\xi u)^2 dx \right)^{1/2} V(R)^{\frac{2}{n}} \\
&\leq C \|u\|_{2^\sharp} \left(\int_{A_R} (\Delta_\xi u)^2 dx \right)^{1/2} .
\end{aligned}$$

Par conséquent $I_2(R) \to 0$ quand $R \to +\infty$. Grâce à (3.12), nous pouvons également écrire que

$$\begin{aligned}
|I_3(R)| &\leq CR^{-1} \|\nabla u\|_{2^\star} \left(\int_{A_R} |\Delta_\xi u|^{\frac{2n}{n+2}} dx \right)^{\frac{n+2}{2n}} \\
&\leq CR^{-1} \|\nabla u\|_{2^\star} \left(\int_{A_R} (\Delta_\xi u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} V(R)^{\frac{1}{n}} \\
&\leq C \|\nabla u\|_{2^\star} \left(\int_{A_R} (\Delta u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc également que $I_3(R) \to 0$ quand $R \to +\infty$. Finalement, en faisant tendre $R \to +\infty$ dans (3.13), nous déduisons de ce qui précède que si $\hat{u}$ est une solution de (3.9) alors $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $u = (\hat{u} \circ \Phi^{-1})\phi$ est une solution de (3.1) telle que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\sharp} dx \\
&= \int_{S^n} |\hat{u}|^{2^\sharp} dv_h < +\infty.
\end{aligned}$$

Il suffit donc, pour prouver le théorème 3.0.4, de montrer qu'il existe une suite $(\hat{u}_k)_k$ de solutions de (3.9) telles que

$$\int_{S^n} |\hat{u}_k|^{2^\sharp} dv_h \to +\infty$$

quand $k \to +\infty$. Notons J la fonctionnelle associée à (3.9) définie sur $H_2^2(S^n)$ par

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{S^n} \left((\Delta_h u)^2 + c_n |\nabla u|_h^2 + d_n u^2 \right) dv_h - \frac{1}{2^\sharp} \int_{S^n} |u|^{2^\sharp} dv_h.$$

Considérons également un sous groupe fermé G du groupe des isométries $Isom_h(S^n)$ de (S^n, h). Etant donnés $q = 1, 2$ et $p > 1$, on note $H_{q,G}^p(S^n)$ l'espace donné par l'équation

$$H_{q,G}^p(S^n) = \left\{ u \in H_q^p(S^n),\ u \text{ est } G \text{ invariante} \right\}$$

où $H_q^p(S^n)$ est l'espace de Sobolev des fonctions de L^p dont les q premières dérivées sont dans L^p. Posons

$$k = \min_{x \in S^n} dim\ O_G^x$$

où O_G^x désigne l'orbite de x sous l'action de G. La composition d'une application continue et d'une application compacte est une application compacte. Si G est choisi de sorte que $k \geq 1$, il suit des travaux de Hebey et Vaugon [36] que l'inclusion $H_{1,G}^{2^\star}(S^n) \subset L^{2^\sharp}(S^n)$ est compacte. La suite d'inclusions

$$H_{2,G}^2(S^n) \subset H_{1,G}^{2^\star}(S^n) \subset L^{2^\sharp}(S^n)$$

donne alors la compacité de l'injection $H_{2,G}^2(S^n) \subset L^{2^\sharp}(S^n)$. On fixe dans ce qui suit G de sorte que $k \geq 1$ et de sorte que $H_{2,G}^2(S^n)$ est de dimension infinie. Nous pouvons par exemple, comme Ding [17], prendre $G = O(n_1) \times O(n_2)$ où n_1, n_2 sont tels que $n_1 + n_2 = n + 1$ et $n_1, n_2 \geq 2$. Dans ce cas on trouve que $k = \min(n_1, n_2) - 1)$. On affirme maintenant qu'il existe une suite $(\hat{u}_m)_m$ de points critiques de la fonctionnelle J restreinte à $H_{2,G}^2(S^n)$ tels que

$$\int_{S^n} \hat{u}_m^{2^\sharp} dv_h \to +\infty \tag{3.14}$$

quand $m \to +\infty$. Notons $\|\cdot\|$ la norme sur $H_2^2(S^n)$ définie par

$$\|u\|^2 = \int_{S^n} \left((\Delta_h u)^2 + c_n |\nabla u|_h^2 + d_n u^2 \right) dv_h.$$

On vérifie alors facilement que J est paire, que $J(0) = 0$, et que

(A1) il existe $\rho, \alpha > 0$ tels que $J > 0$ dans $B_0(\rho)\backslash\{0\}$ et $J \geq \alpha$ sur $S_0(\rho)$, et

(A2) J vérifie la condition de Palais-Smale

où $B_0(\rho)$ est la boule de centre 0 et rayon ρ dans $H_2^2(S^n)$, et $S_0(\rho)$ est la sphère de centre 0 et rayon ρ dans $H_2^2(S^n)$. On vérifie aussi que pour tout sous espace $E \subset H_{2,G}^2(S^n)$ de dimension finie,

(A3) $E \bigcap \big\{J \geq 0\big\}$ est borné.

En effet, E étant de dimension finie, il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in E$, $\|u\| \leq C\|u\|_{2^\sharp}$. Soit $\{f_1, \ldots, f_N\}$ une base orthonormée de E et soit $u = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i$ tel que $\|u\| = 1$. Alors pour $R > 0$,

$$
\begin{aligned}
J\big(Ru\big) &= \frac{R^2}{2} - \frac{R^{2^\sharp}}{2^\sharp}\|u\|_{2^\sharp}^{2^\sharp} \\
&\leq \frac{R^2}{2}\left(1 - \frac{2R^{2^\sharp-2}}{2^\sharp C^{2^\sharp}}\right)
\end{aligned}
$$

et on obtient (A3). On peut alors, compte tenu de (A1)-(A3), appliquer le théorème 2.13 de type minimax dans Ambrosetti-Rabinowitz [3], duquel nous déduisons l'existence d'une suite croissante $(\alpha_m)_m$ de valeurs critiques de J données par

$$\alpha_m = \sup_{h\in\Gamma^\star} \inf_{u\in S\cap E_{m-1}^\perp} J\big(h(u)\big) \tag{3.15}$$

où $S = S_0(1)$, E_m est engendré par $\big\{f_1, \ldots, f_m\big\}$, $E_m^\perp$ est l'orthogonal de E_m, $(f_i)_{i\geq 1}$ est une base hilbertienne de $H_{2,G}^2(S^n)$, et $\Gamma^\star$ est l'ensemble des homéomorphismes impairs h de $H_{2,G}^2(S^n)$ qui sont tels que $J\big(h(B)\big) \geq 0$, où B est la boule de centre 0 et rayon 1 dans $H_{2,G}^2(S^n)$. La preuve de l'existence d'une suite $(\hat{u}_m)_m$ de points critiques de J restreinte à $H_{2,G}^2(S^n)$ tels que (3.14) soit vrai est alors réduite à la preuve du fait que

$$\alpha_m \to +\infty \tag{3.16}$$

quand $m \to +\infty$. On note dans ce qui suit

$$T = \Big\{u \in H_{2,G}^2(S^n) \text{ tel que } 2^\sharp\|u\|^2 = 2\|u\|_{2^\sharp}^{2^\sharp}\Big\}$$

et on note ensuite

$$\beta_m = \inf_{u\in T\cap E_m^\perp} \|u\|.$$

Alors

$$\beta_m \to +\infty \tag{3.17}$$

quand $m \to +\infty$. En effet dans le cas contraire, il existerait une suite $(u_m)_m \subset E_m^\perp \cap T$, bornée dans $H_2^2(S^n)$, et telle que $u_m \rightharpoonup 0$ dans $H_{2,G}^2(S^n)$ puisque $u_m \in E_m^\perp$. La compacité de l'injection $H_{2,G}^2(S^n) \subset L^{2^\sharp}(S^n)$ donne alors que, à sous-suite près, $u_m \to 0$ dans $L^{2^\sharp}(S^n)$. Comme $u_m \in T$ pour tout m, on en déduit que $u_m \to 0$ dans $H_2^2(S^n)$. Par ailleurs, l'inégalité de Sobolev correspondant à l'injection $H_2^2(S^n) \subset L^{2^\sharp}(S^n)$ et l'appartenance de u_m à T pour tout m, impliquent l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\|u_m\| \geq C$ pour tout m. C'est une contradiction et (3.17) est donc prouvé. Pour $u \in E_m^\perp$, on pose

$$h_m(u) = \frac{1}{2}\beta_m u.$$

En suivant ce qui est fait dans Ambrosetti-Rabinowitz [3], on montre facilement que h_m admet une extension $\tilde{h}_m \in \Gamma^\star$. Etant donné $u \in H_{2,G}^2(S^n)\backslash\{0\}$, considérons $\beta(u) \in \mathbb{R}$ tel que $\beta(u)u \in T$. Alors, si $u \in S \cap E_m^\perp$,

$$\begin{aligned} J\big(h_m(u)\big) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_m}{2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{\beta_m}{2\beta(u)}\right)^{2^\sharp - 2}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_m}{2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^\sharp - 2}\right) \end{aligned}$$

d'où nous déduisons (3.16) en utilisant (3.15) et (3.17). En particulier, il existe une suite $(\hat{u}_m)_m$ de points critiques de J restreinte à $H_{2,G}^2(S^n)$ tels que (3.14) soit vrai. Les $\hat{u}_m$ sont solutions de l'équation (3.9) restreinte à $H_{2,G}^2(S^n)$ au sens où pour tout m et tout $\varphi \in H_{2,G}^2(S^n)$,

$$\begin{aligned} &\int_{S^n} \left((\Delta_h \hat{u}_m)(\Delta_h \varphi) + c_n \langle \nabla \hat{u}_m, \nabla \varphi \rangle_h + d_n \hat{u}_m \varphi\right) dv_h \\ &= \int_{S^n} |\hat{u}_m|^{2^\sharp - 2} \hat{u}_m \varphi dv_h. \end{aligned}$$

Cette égalité est en fait vérifiée pour tout $\varphi \in H_2^2(S^n)$. Soit en effet φ une fonction quelconque régulière sur S^n (ou bien $\varphi \in H_2^2(S^n)$). Considérons φ_G définie par

$$\varphi_G(x) = \int_G \varphi\left(\sigma(x)\right) d\mu(\sigma)$$

où $d\mu$ est la mesure de Haar sur G. Clairement φ_G est régulière et G-invariante si φ est lisse, ou $\varphi_G \in H_{2,G}^2(S^n)$ si $\varphi \in H_2^2(S^n)$. Nous pouvons alors écrire que

$$\begin{aligned}
&\int_{S^n} \left((\Delta_h \hat{u}_m)(\Delta_h \varphi_G) + c_n \langle \nabla \hat{u}_m, \nabla \varphi_G \rangle_h + d_n \hat{u}_m \varphi_G\right) dv_h \\
&= \int_G \left(\int_{S^n} \Big((\Delta_h \hat{u}_m) \left(\Delta_h (\varphi \circ \sigma)\right) \right. \\
&\qquad \left. + c_n \langle \nabla \hat{u}_m, \nabla (\varphi \circ \sigma) \rangle_h + d_n \hat{u}_m (\varphi \circ \sigma) \Big) dv_h \right) d\mu(\sigma) \\
&= |G| \int_{S^n} \left((\Delta_h \hat{u}_m)(\Delta_h \varphi) + c_n \langle \nabla \hat{u}_m, \nabla \varphi \rangle_h + d_n \hat{u}_m \varphi\right) dv_h
\end{aligned}$$

où $|G|$ est le volume de G pour $d\mu$, et que

$$\begin{aligned}
&\int_{S^n} |\hat{u}_m|^{2^\sharp - 2} \hat{u}_m \varphi_G dv_h \\
&= \int_G \left(\int_{S^n} |\hat{u}_m|^{2^\sharp - 2} \hat{u}_m (\varphi \circ \sigma) dv_h \right) d\mu(\sigma) \\
&= |G| \int_{S^n} |\hat{u}_m|^{2^\sharp - 2} \hat{u}_m \varphi dv_h .
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\int_{S^n} \left((\Delta_h \hat{u}_m)(\Delta_h \varphi) + c_n \langle \nabla \hat{u}_m, \nabla \varphi \rangle_h + d_n \hat{u}_m \varphi\right) dv_h \\
&= \int_{S^n} |\hat{u}_m|^{2^\sharp - 2} \hat{u}_m \varphi dv_h
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in H_2^2(S^n)$ et tout m. En particulier, pour tout m, $\hat{u}_m$ est solution de (3.9). Ceci achève la preuve du théorème 3.0.4.

Bibliographie

[1] F. J. Almgren. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems. *Mem. Am. Math. Soc.*, 4(165), 1976.

[2] C.O. Alves. Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-laplacian. *Nonlinear Anal.*, 51(7) :1187–1206, 2002.

[3] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal.*, 14 :349–381, 1973.

[4] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variations and free discontinuity problems.* Oxford Mathematical Monographs. Clarendon Press, 2000.

[5] G. Bellettini, V. Caselles, and M. Novaga. The total variation flow in $\mathbb{R}^n$. *J.Differential Equations*, 184 :475–525, 2002.

[6] M. Belloni and B. Kawohl. A direct uniqueness proof for equations involving the p-laplace operator. *Manuscripta Math.*, 109 :229–231, 2002.

[7] H. Brezis and J.M. Coron. Convergence of solutions of h-systems or how to blow bubbles. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 89(1) :21–56, 1985.

[8] H. Brezis and E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88(3) :486–490, 1983.

[9] S.Y.A. Chang and P.C. Yang. On a fourth order curvature invariant. In *Spectral problems in geometry and arithmetic*, pages 9–28, 1998.

[10] I. Chavel. *Riemannian geometry – a modern introduction.* Cambridge University Press, 1993.

[11] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian. In *Problems in Analysis, A Symposium in honor of S. Bochner*, pages 195–199, 1970.

[12] L. Damascelli and F. Pacella. Monotonicity and symmetry results for p-laplace equations and applications. *Adv. Differential equations*, 5(7-9) :1179–1200, 2000.

[13] L. Damascelli, F. Pacella, and M. Ramaswamy. Symmetry of ground states of p-laplace equations via the moving plane method. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 148(4) :291–308, 1999.

[14] F. Demengel. Functions locally almost 1-harmonic. *Applicable Analysis*, 83 :865–896, 2004.

[15] F. Demengel and E. Hebey. On some nonlinear equations involving the p-laplacian with critical sobolev growth. *Adv. Differential Equations*, 3(4) :533–574, 1998.

[16] F. Demengel, F. De Vuyst, and M. Motron. A numerical approach of the first eigenvalue for the 1-laplacian on the square and other particular sets. preprint 2002.

[17] W. Ding. On a conformally invariant elliptic equation in $\mathbb{R}^n$. *Comm. Math.Phys.*, 107(2) :331–335, 1986.

[18] O. Druet. The best constants problem in sobolev inequalities. *Math. Ann.*, 314(2) :327–346, 1999.

[19] O. Druet. Generalized scalar curvature type equations on compact riemannian manifolds. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 130(4) :767–788, 2000.

[20] O. Druet. Isoperimetric inequalities on compact manifolds. *Geom. Dedicata*, 90 :217–236, 2002.

[21] O. Druet. Sharp local isoperimetric inequalities involving the scalar curvature. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(8) :2351–2361, 2002.

[22] O. Druet and E. Hebey. The *ab* program in geometric analysis : sharp sobolev inequalities and related problems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 160(761), 2002.

[23] O. Druet, E. Hebey, and F. Robert. *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry.* Princeton University Press, 2004.

[24] L.C. Evans. Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations. In *Conference Board of the Mathematical Sciences*, volume 74, 1990.

[25] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1992.

[26] M. Flucher. Approximation of dirichlet eigenvalues on domains with small holes. *J. Math. Anal. Appl.*, 193(1) :169–199, 1995.

[27] M. Flucher. *Variational problems with concentration.* Birkhaüser, 1999.

[28] V. Fridman and B. Kawohl. Isoperimetric estimates for the first eignevalue of the p-laplace operator and the cheeger constant. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 44 :659–667, 2003.

[29] N. Ghoussoub and C. Yuan. Multiple solutions for quasi-linear pdes involving the critical sobolev and hardy exponents. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(12) :5703–5743, 2000.

[30] E. De Giorgi. Frontiere orientate di misura minima. *Seminario di Matematica della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 1961.

[31] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variations.* Birkhaüser, 1984.

[32] E. Gonzalez, U. Massari, and I. Tamanini. On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint. *Indiana Univ. Math. J.*, 32 :25–37, 1983.

[33] M. Guedda and L. Veron. Quasilinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Nonlinear Anal.*, 13(8) :879–902, 1989.

[34] E. Hebey and F. Robert. Coercivity and struwe's compactness for paneitz type operators with constant coefficients. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 13(4) :491–517, 2001.

[35] E. Hebey and N. Saintier. Stability and perturbations of the domain for the first eigenvalue of the 1-laplacian. à paraître dans Archiv der Mathematik.

[36] E. Hebey and M. Vaugon. Sobolev spaces in the presence of symmetries. *J. Math. Pures Appl.*, 76(10) :859–881, 1997.

[37] B. Kawohl and T. Lachand-Robert. Characterization of cheeger sets for convex subsets of the plane. préprint 2004.

[38] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations.* Academic Press, 1968.

[39] P.D. Lamberti. A differentiability result for the first eigenvalue of the p-laplacian upon domain perturbation. In *Nonlinear analysis and applications : to V. Lakshmikantham on his 80th birthday*, 2003.

[40] G.M. Lieberman. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlinear Anal*, 12(11) :1203–1219, 1988.

[41] C.S. Lin. A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in $\mathbb{R}^n$. *Comment. Math. Helv.*, 73(2) :206–231, 1998.

[42] P. Lindqvist. On the equation $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$. *Proceedings of the AMS*, 109(1) :157–164, 1990.

[43] P.L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limit case, parts 1 and 2. *Rev.Mat.Iberoamericana*, 1(1,2) :145–201, 45–121, 1985.

[44] V.G. Maz'ja. *Sobolev Spaces.* Springer Verlag, 1985.

[45] J. Garcia Melian and J. Sabina De Lis. On the perurbation of eigenvalues for the p-laplacian. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série 1*, 332(10) :893–898, 2001.

[46] J. Sacks and K. Uhlenbeck. The existence of minimal immersions of two-spheres. *Ann. of Math.*, 113(1) :1–24, 1981.

[47] N. Saintier. Asymptotic estimates and blow-up theory for critical equations involving the p-laplacian. à paraître dans Calc.Var.

[48] N. Saintier. Changing sign solutions of a conformally invariant fourth order equation in the euclidean space. à paraître dans Comm. Analysis and Geometry.

[49] M. Sango. Behaviour of the first eigenvalue of the p-laplacian in a domain with a hole. *Colloq. Math.*, 87(1) :103–111, 2001.

[50] R. Schoen and D. Zhang. Prescribed scalar curvature on the n-sphere. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 4(1) :1–25, 1996.

[51] E. Stredulinsky and W.P. Ziemer. Area minimizing sets subject to a volume constraint in a convex set. *J. Geom. Anal.*, 7 :653–677, 1997.

[52] M. Struwe. *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Third edition.* Springer-Verlag, 2000.

[53] P. Tolksdorf. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. *J. Differential Equations*, 51(1) :126–150, 1984.

[54] J.L. Vazquez. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 12(3) :191–202, 1984.

[55] W.P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*. Springer-Verlag, 1989.

ADRESSE ÉLECTRONIQUE : saintier@math.jussieu.fr