Doctorat de mathématiques
Université Paris Diderot - Paris 7
UFR de mathématiques
École doctorale de sciences mathématiques de Paris Centre

Principe de réflexion MRP, propriétés d'arbres et grands cardinaux

Rémi Strullu

Thèse soutenue le 21 septembre 2012

Directeur de thèse :	Boban Veličković
Rapporteurs :	Jörg Brendle
	Pierre Matet
Membres du jury :	Jörg Brendle
	Hiroshi Sakai
	Boban Veličković (directeur de thèse)
	Matteo Viale

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Boban Veličković. Il m'a aiguillé tout le long de ces années sur des problèmes complexes mais passionnants. Sous sa direction j'ai été orienté très tôt vers des sujets nouveaux en théorie des ensembles, et celà dès mon travail de stage en Master, ce qui m'a permis d'aboutir aux résultats que je présente dans cette thèse. Sans son support et sa vision profonde des mathématiques, je n'aurais jamais été capable de mener à bien ce travail.

Je remercie chaleureusement les rapporteurs Jörg Brendle et Pierre Matet, pour avoir pris le temps de lire avec attention ma thèse. De même je remercie les membres du jury Jörg Brendle, Hiroshi Sakai et Matteo Viale pour s'être déplacé pour assister à ma soutenance, surtout de si loin pour beaucoup.

Grâce à l'équipe de logique et l'école doctorale j'ai pu assiter à de nombreux séminaires et conférences dont certains ont été décisifs pour mes recherches. Je tiens à remercier leur directeur respectif, Françoise Delon et Gilles Godefroy. Merci à toute l'équipe administrative, et tout particulièrement à Régine Guittard qui m'a permis de soutenir dans les temps. Je remercie aussi mes premiers professeurs en théorie des ensembles, Ramez Labib Sami et Jordi Lopez Abad pour m'avoir transmis leur passion pour cette discipline. Je remercie René Cori et Daniel Lascar pour avoir écrit le livre : "Logique Mathématique", qui m'a fasciné dès mes premières années d'études en classe prépa et qui m'a donné l'envie de m'orienter vers la logique. J'ai été ravi d'avoir pu travailler par la suite avec René Cori et d'avoir à mon tour enseigné la logique à l'université.

Merci à tous mes collègues et amis du bureau 5C06 pour tous les moments de détentes et de joie (entrecoupés de moments de travail...) que j'ai pu passer avec eux : David le nouvel homme prêt à faire le grand saut, Modest le champion du VS fighting au clavier, les membres du club latino dont Pablo spécialiste de l'import-export de Van, Avenilde et sa maitrise de la discipline, Victor le maître à danser, Carolina, Rachel et Julia pour leur bonne humeur et leur présence féminine, Laura la nouvelle mariée, Yann sans lunette, Clément et Gonenc, Luis le transfuge, François, Dimitri, Lauri, Farès, Ana, Stéphane, Karim, Gillet, Jérome. Je n'oublie pas les voisins du bureau 5B1 dont les financiers Idris et Thomas, Jibé, Marc, et notre totem Tchango dont l'avenir est compromis ces derniers temps. Un grand merci aussi à Jessica pour son amitié et sa curiosité lorsque j'essayais d'expliquer (avec succès ?) mes recherches.

En parallèle de ma thèse j'ai découvert une passion pour la cryptographie et la sécurité informatique. Je remercie la responsable du Master d'Informatique et de Cryptographie Mireille Fouquet et Sébastien Héon pour m'avoir fait découvrir les aspects pratiques de la sécurité informatique, ainsi que tous les professeurs du Master MIC. Je tavaille actuellement au sein de l'équipe de Cryptographie de Cassidian Cyber Security, et je tiens à saluer l'ensemble de mes collègues.

Enfin je remercie ma famille pour son support tout au long de cette thèse et pour m'avoir encouragé à aller jusqu'au bout. Et bien sûr Célia, pour tout le bonheur que l'on partage.

Résumé

Dans cette thèse, nous présentons les relations entre le principe de réflexion MRP introduit par Moore, les propriétés d'arbres généralisées ITP et ISP introduites par Weiß, ainsi que les propriétés square introduites par Jensen et développées par Schimmerling.

Le résultat principal de cette thèse est que MRP+MA entraine $\mathrm{ITP}(\lambda, \omega_2)$ pour tout cardinal $\lambda \geq \omega_2$. Ce résultat implique par conséquent que les méthodes actuelles pour prouver la consistance de MRP + MA nécessitent au moins l'existence d'un cardinal supercompact.

Il s'avère que MRP seul ne suffit pas à démontrer ce résultat, et nous donnons la démonstration que MRP n'entraine pas la propriété d'arbre la plus faible, à savoir $\mathrm{TP}(\omega_2, \omega_2)$. De plus MRP+MA n'entraine pas le principe d'arbre plus fort $\mathrm{ISP}(\omega_2, \omega_2)$.

Enfin nous étudions les relations entre MRP et des versions faibles de square. Nous montrons que MRP implique la négation de $\square(\lambda, \omega)$ et MRP + MA implique la négation de $\square(\lambda, \omega_1)$ pour tout $\lambda \geq \omega_2$.

Abstract

The object of this thesis is to study the relashionships between the reflection principle MRP introduced by Moore, the generalized tree properties ITP and ISP introduced by Weiß, and the square properties introduced by Jensen and extended by Schimmerling.

The main result is that $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ implies $\mathrm{ITP}(\lambda, \omega_2)$ for all cardinals $\lambda \geq \omega_2$. Consequently, all known methods for proving the consistency of $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ require at least a supercompact cardinal.

MRP alone is not enough to prove that result, and we give a proof that MRP does not imply the weakest tree property, $\mathrm{TP}(\omega_2, \omega_2)$. Furthermore, $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ does not imply the stronger tree property $\mathrm{ISP}(\omega_2, \omega_2)$.

In addition, we study the relationship between MRP and some weak versions of the square principle. We show that MRP implies the failure of $\square(\lambda, \omega)$, and $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ implies the failure of $\square(\lambda, \omega_1)$ for all $\lambda \geq \omega_2$

Table des matières

Introduction

L'origine du développement de la théorie des ensembles remonte à l'étude de l'arithmétique des cardinaux avec les travaux de Cantor vers la fin du 19-ème siècle. Celui-ci a alors formulé un problème qui est resté d'importance centrale dans le domaine, à savoir si la cardinalité de l'ensemble des nombres réels correspond au premier cardinal non dénombrable. La conjecture de Cantor, connue sous le nom de l'Hypothèse du Continu (CH), stipule ainsi que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Les travaux de Gödel sur l'incomplétude [7], publiés en 1931, ont permis de jeter un regard nouveau sur ce problème en mettant en évidence la possibilité surprenante qu'il ne puisse pas y avoir de solution à ce problème. En effet Gödel démontre de façon formelle qu'une théorie englobant l'arithmétique contient des formules indécidables, c'est-à-dire des formules qu'il est impossible de prouver ou de réfuter en partant des axiomes. De plus son second théorème, dont l'influence sur la logique sera tout aussi importante, stipule que toute théorie contenant l'arithmétique ne peut prouver sa propre consistance. Ces découvertes mettent ainsi à mal le programme de formalisation des mathématiques lancé par Hilbert dont le but était d'assurer les fondements des mathématiques via une théorie complète qui prouverait sa propre consistance.

En 1947, Gödel conjecture alors [9] que l'hypothèse du continu est indécidable dans le système axiomatique classique de la théorie des ensembles, ZFC. Gödel parvient néanmoins à prouver la consistance relative de CH [8] en mettant en évidence l'univers constructible L, modèle minimal de ZFC, dans lequel CH est satisfait. Il souligne alors le fait que des nouveaux axiomes, ayant des propriétés de maximalité s'opposant aux principes de minimalité de L, sont nécessaires pour prouver la négation de CH. La recherche de ces nouveaux axiomes fut appelée par la suite programme de Gödel.

Il faudra attendre les travaux de Cohen [4] pour obtenir une preuve complète de l'indépendance de CH. En effet en 1963 Cohen découvre une nouvelle technique, le forcing, permettant de construire un modèle de ZFC dans lequel CH n'est pas satisfait. Cette technique révolutionnaire, pour laquelle Cohen se verra attribué la médaille Fields, permet, en partant d'un modèle de ZFC, de construire un modèle plus large contenant un nouvel objet. Ce nouvel objet, d'essence combinatoire, est obtenu à partir d'un ordre partiel qui approxime l'objet à construire. La technique du forcing se révèle extrêmement riche et permet de résoudre quasiment tout les problèmes d'indécidabilité ouverts à l'époque.

Dans les années 70 deux axes de recherche se sont développés autour du programme de Gödel : les grands cardinaux et les axiomes de forcing. Les axiomes de forcing sont apparus suite au développement des techniques de forcing, notamment les techniques d'itération. Ils répondent au critère de maximalisation du programme de Gödel dans le sens où si un objet combinatoire de petit taille est obtenu par le forcing, alors il est déjà présent dans le modèle de base. On peut alors interpréter un axiome de forcing comme une façon de saturer le modèle par les forcings appartenant à une certaine classe.

Le premier axiome de forcing, Martin Axiom (MA), a été présenté par Martin et Solovay [17] en 1970 et concernait la classe des forcings dont les antichaines sont dénombrables (ccc). Les travaux de Shelah [24] sur le forcing propre ont permis par la suite d'élargir la classe des forcings considérés et d'isoler l'axiome de forcing propre PFA, introduit au début des années 80 par Baumgartner et Shelah [2]. Enfin en 1988 Foreman, Magidor, et Shelah [6] formulent l'axiome Martin Maximum (MM), et prouvent qu'il est d'une certaine manière l'axiome de forcing le plus fort que l'on puisse formuler.

Parallèlement, les recherches sur les grands cardinaux permettent de dégager une hiérarchie linéaire d'hypothèses, basées sur l'existence de cardinaux ayant des propriétés fortes. Grossièrement, un cardinal supercompact est fortement compact, un fortement compact est mesurable, un mesurable est faiblement compact, un faiblement compact est Mahlo et donc inaccessible. De plus la hiérarchie est stricte : pour deux hypothèses de grands cardinaux, en dessous d'un cardinal satisfaisant l'une il existe une infinité de cardinaux satisfaisant l'autre.

Les conséquences induites par l'existence d'un grand cardinal sont bien différentes de celles obtenues par un axiome de forcing : alors que les axiomes de forcing PFA et MM donnent une valeur précise au continu, CH ne peut être résolu en utilisant seulement les hypothèses de grands cardinaux, comme l'on montré Levy et Solovay dans [19]. Cependant un pont est créé entre ces deux axes de développement grâce aux résultats d'équiconsistance. L'idée est de comparer la force d'un axiome avec l'existence d'un grand cardinal : la satisfaction d'un axiome implique l'existence d'un modèle avec un certain grand cardinal, et l'existence de ce grand cardinal implique l'existence d'un modèle de l'axiome considéré.

Alors que la consistance de MA ne nécessite pas d'hypothèse de grands cardinaux, les preuves de consistance de PFA et MM supposent quand à elles l'existence d'un cardinal supercompact. La réciproque à ce théorème devient alors un problème célèbre de la théorie des ensembles : à partir d'un modèle de PFA ou même de MM, peut-on obtenir un modèle de ZFC avec un supercompact ? Les travaux de Schimmerling [22] en 1992 permettent de fixer une borne inférieure au problème. En effet Schimmerling démontre que la consistance de ZFC + PFA implique la consistance de ZFC + il existe un cardinal de Woodin. Un cardinal de Woodin est précédé d'un ensemble stationnaire de cardinaux mesurable et est donc Mahlo. De plus un cardinal supercompact est Woodin. Cependant il existe des cardinaux de Woodin qui ne sont pas faiblement compact, ce qui laisse un fossé entre les bornes inférieures de consistance et les bornes supérieures connues.

La conjecture de l'équiconsistance de PFA avec un supercompact reste encore un problème ouvert à l'heure actuelle. Néanmoins, la résolution du problème a pris récemment un nouveau tournant avec les travaux de Viale et Weiß [27]. En 2010, dans son mémoire de thèse [29], Weiß introduit des principes combinatoires généralisant des propriétés d'arbres. Ces nouveaux principes permettent de caractériser les grands cardinaux : ainsi un cardinal κ inaccessible est supercompact si et seulement si $\mathrm{ISP}(\kappa)$ (ou de façon équivalent $\mathrm{ITP}(\kappa)$) est vrai et de même κ est fortement compact si et seulement si $\mathrm{SP}(\kappa)$ (ou de façon équivalent $\mathrm{TP}(\kappa)$) est vrai. Viale et Weiß reconsidèrent alors le problème d'équiconsistance de PFA en se focalisant sur les méthodes de forcing. Puisque que toutes les méthodes actuelles permettant de prouver la consistance de PFA reposent sur des itérations de forcing, la question de la consistance est ainsi reformulée : si on considère une itération de forcings qui force PFA dans un extension générique, quelle est l'hypothèse de grand cardinal nécessaire sur la longueur de l'itération dans l'univers de base ?

Baumgartner a prouvé dans [2] que PFA implique la propriété d'arbre (tree property) sur ω_2, c'est à dire que tout arbre de hauteur ω_2 dont les niveaux sont de cardinal inférieur à ω_2 possèdent une branche de longueur ω_2. Cette propriété est proche de la caractérisation d'un cardinal faiblement compact. En effet un cardinal κ est faiblement compact si et seulement si il est inaccessible et la propriété d'arbre sur κ est vraie. De plus une itération de forcings qui force PFA collapse la longueur de l'itération κ sur ω_2. Ainsi l'idée de Viale et Weiß est de récupérer des propriétés d'arbres de l'extension générique vers l'univers de base. En utilisant le principe ISP, ils prouvent que si une itération standard de forcings propre force PFA, alors il existe un cardinal supercompact. Ce résultat répond partiellement au problème d'équiconsistance de PFA avec un supercompact, dans le sens où toutes les méthodes connues à l'heure actuelle pour prouver la consistance de PFA nécessitent un cardinal supercompact.

En 2003, Moore [20] introduit un nouveau principe de réflexion, MRP. MRP découle de PFA. Ce principe va se révéler extrêmement riche et factoriser de nombreuses conséquences de PFA : au niveau de l'arithmétique des cardinaux, MRP fixe la valeur du continu en impliquant que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ et implique l'hypothèse des cardinaux singulier SCH. MRP implique l'existence d'une base à 5 éléments pour les ordres totaux non dénombrables (Moore [21]) ainsi que l'existence d'un bon ordre sur les réels (en réalité de $P(\omega_1)$) qui est Δ_1-définissable (Caicedo -Veličković [3]). Enfin MRP peut être utilisé comme une boite à outil par des mathématiciens non spécialistes en technique du forcing. En effet la formulation de MRP est beaucoup plus simple que celle de PFA car elle ne requiert pas la connaissance du forcing.

C'est dans ce contexte de recherche que nos résultats permettent de mettre en lumière la relation entre MRP, les nouveaux principes d'arbres ITP et ISP ainsi que les principes square introduits par Jensen et développés par Schimmerling. Comme PFA implique à la fois MRP et ISP (et donc ITP), il est naturel de se demander si MRP est un axiome suffisamment fort pour impliquer ISP ou ITP. Le théorème principal de cette thèse est le suivant :

Théorème. MRP + MA *implique* ITP(λ, ω_2) *pour tout cardinal* $\lambda \geq \omega_2$.

Grâce aux travaux de Viale et Weiß, l'étude de ces relations se révèle être particulièrement fructueuse car elle permet d'obtenir des nouveaux résultats de consistance relative. Nous obtenons donc comme corollaire de ce théorème que toutes les méthodes connues pour obtenir un modèle de MRP + MA nécessitent l'existence d'un cardinal supercompact. Ce résultat généralise ainsi les travaux de Viale et Weiß sur la consistance de PFA en répondant partiellement au problème d'équiconsistance de MRP + MA avec un cardinal supercompact. Il permet aussi de justifier l'utilisation de MRP à la place de l'axiome de forcing PFA, MRP ne nécessitant pas la connaissance de la technique du forcing.

Nous examinons de plus les relations entre MRP et les différentes variantes des principes d'arbres. Nous donnons les démonstrations des résultats suivants :

- MRP seul n'implique pas TP(ω_2, ω_2) (Magidor).
- MRP + MA n'implique pas ISP(ω_2, ω_2) (König).

En adaptant notre technique nous renforçons certains résultats non publiés de Sharon [23] concernant square :

- MRP implique $\neg\square(\lambda, \omega)$ pour tout $\lambda \geq \omega_2$.
- MRP + MA implique $\neg\square(\lambda, \omega_1)$ pour tout $\lambda \geq \omega_2$. [1]

Cette thèse s'organise en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous rappellerons les définitions des axiomes de forcings MA et PFA. Ces axiomes suivent un schéma de construction particulier, qui est similaire à la propriété de Baire. Puisque l'équiconsistance d'un axiome est donnée en terme de

1. Il s'avère que ce dernier résultat est une conséquence du principe ITP.

grands cardinaux, nous définirons succinctement la notion de cardinal fortement compact et supercompact à l'aide d'ultrafiltres. Enfin nous présenterons les premiers résultats de consistance relative des axiomes de forcing, dus à Martin et Solovay [17] ainsi que Baumgartner et Shelah [2], à savoir que la consistance de MA ne nécessite pas de grands cardinaux et que l'existence d'un cardinal supercompact implique la consistance de PFA. La présentation de ces résultats, inspirée de celles de Abraham [1] et de Jech [10], permet de donner une première borne de consistance pour MRP + MA.

Dans le second chapitre, nous présenterons le principe de réflexion MRP introduit par Moore [20]. MRP découle de PFA, tout en factorisant un nombre important de ses propriétés. Nous présenterons l'influence de MRP sur l'arithmétique des cardinaux, notamment le fait que le continu vaut $\aleph_2$ (Moore, [20]) ou encore SCH est satisfait (Viale, [26]). La démonstration du premier résultat utilise le principe υ qui définit un bon ordre sur $P(\omega_1)/NS$ de longueur ω_2 et entraine la négation de $weak - \Diamond$. La démonstration de SCH quant à elle repose sur l'existence d'une matrice de recouvrement.

Le troisième chapitre est le chapitre central de cette thèse et est consacré aux relations entre MRP et les propriétés d'arbres au sens large. Nous démontrons dans un premier temps que MRP implique la négation d'une version faible de square à deux cardinaux, $\square(\lambda, \omega)$, pour tout cardinal $\lambda \geq \omega_2$. En supposant de plus MA nous élargissons le résultat à ω_1 en démontrant que MRP + MA implique la négation de $\square(\lambda, \omega_1)$, pour tout cardinal $\lambda \geq \omega_2$. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que ce dernier résultat présuppose que MRP + MA implique que tout arbre de hauteur ω_2 et de niveaux $< \omega_2$ possède une branche cofinale. Cette hypothèse sera vérifiée dans la seconde partie du chapitre. Néanmoins les preuves sur square s'avèrent plus simples et illustrent parfaitement la démonstration dans le cas général ITP qui lui se révèle être très technique. C'est pour cette raison que celles-ci sont présentées en début de chapitre, en guise d'introduction au résultat principal. Dans la seconde partie nous commencerons par introduire les généralisations de principes d'arbres ITP, ISP, TP, SP mis en évidence par Weiß [29] dans sa thèse. Nous démontrons alors la version générale de notre théorème, à savoir que MRP + MA implique ITP(λ, ω_1) pour tout $\lambda \geq \omega_2$. Nous donnerons ensuite la preuve d'un résultat non publié de Magidor, qui est que MRP est consistent avec $\square_{\kappa,\omega_1}$. Par conséquent MRP seul ne suffit pas pour démontrer le théorème principal. Enfin nous discuterons de la relation entre MRP + MA et une version plus forte de la propriété d'arbre, ISP.

Introduction (English Version)

Modern Set Theory originates with Cantor's work on cardinal arithmetic in the late 19th century. In his research, Cantor was faced with question that has remained of central importance in the field ever since : whether the cardinality of the set of reals is the first uncountable cardinal. Cantor's conjecture, known as the Continuum Hypothesis (CH), states that $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Gödel's work on incompleteness, which he published in 1931, suggested that there may not exist a definitive answer to Cantor's question. Indeed, Gödel showed that any formal theory containing arithmetic cannot be complete ; that is, there exist formulas that can neither be proved nor disproved from the axioms of the theory. Moreover, his second incompleteness theorem, whose impact on logic is equally important, states that any theory containing arithmetic cannot prove its own consistency. These results put an end to Hilbert's program, whose aim was to found the whole of Mathematics on a complete theory that would prove its own consistency.

In 1947, Gödel conjectured [9] that the Continuum Hypothesis is undecidable in ZFC, the classical axiomatic system of Set Theory. He subsequently proved the consistency of CH with ZFC [8] using the universe of constructible sets L, which is in some sense a minimal model of ZFC. Gödel then conjectured that new axioms would be required for proving the consistency of the failure of CH ; and that these new axioms would fulfill some maximality property, in contrast with the minimality of L. The search for these new axioms was later called Gödel's program.

The problem of the independence of CH was eventually solved by Cohen in 1963 [4], in a paper that would win him the Fields Medal. Cohen's approach relied on a revolutionary new technique called forcing, which he used to build a model of ZFC where CH is not satisfied. Starting from a model of ZFC, forcing can be applied to build a larger model containing a new object. This technique turned out to be extremely fruitful and was subsequently used to solve almost all undecidability problems open at the time.

In the 1970s, two lines of research began developing around Gödel's program : large cardinals and forcing axioms. Forcing axioms emerged following the development of new forcing techniques, especially iterated forcing. They satisfy the maximization criteria of Gödel's program, in the sense that forcing axioms imply that if an object of small combinatorial size can be obtained by forcing, then that object was already present in the ground model. We can thus interpret a forcing axiom as a way of saturating a model by forcings belonging to a certain class.

The first forcing axiom was introduced by Martin and Solovay [17] in 1970. Martin's Axiom (MA) applies to the class of forcings whose antichains are countable (ccc). Shelah's work [24] on proper forcing has allowed for this class to be extended, and the Proper Forcing Axiom (PFA) was introduced by Baumgartner and Shelah [2]. Finally in 1988 Foreman, Magidor, and Shelah [6] introduced Martin's Maximum (MM), and showed that it is in some sense the strongest forcing axiom possible.

Meanwhile, research on large cardinals led to identifying a linear hierarchy among certain cardinals with strong properties. Roughly speaking, a supercompact cardinal is strongly compact, a strongly compact cardinal is measurable, a measurable cardinal is weakly compact, and a weakly compact is Mahlo and therefore inaccessible. Furthermore this order is strict : for any two types of large cardinals, below a cardinal satisfying the stronger type one can find many cardinals belonging to the weaker type.

The implications of large cardinals assumptions on ZFC are very different from those induced by a forcing axiom : while the forcing axioms PFA and MM give a precise value to the continuum, CH cannot be decided by large cardinal assumptions, as shown by Levy and Solovay [19]. However a bridge can be created between these two techniques through equiconsistency results. It is possible to compare the strength of a forcing axiom with that of a large cardinal in the folowing sense : the consistency of a forcing axiom with ZFC may imply the existence of a model with a certain large cardinal, and the existence of some large cardinal may imply the existence of a model of ZFC with a certain forcing axiom.

While the consistency of MA does not require any large cardinal assumption, known proofs of the consistency of PFA and MM assume the existence of a supercompact cardinal. Finding the weakest large cardinal assumption necessary to prove the consistency of PFA and MM has become a famous problem in Set Theory. The question can be summed up in the following way : from a model of PFA or even MM, can we get a model of ZFC with a supercompact cardinal ? In 1992 Schimmerling [22] found a lower bound for this problem, by showing that the consistency of ZFC + PFA implies the consistency of ZFC + existence of a Woodin cardinal. There is a stationary set of measurable cardinals below a Woodin cardinal and thus a Woodin cardinal is Mahlo. Moreover a supercompact cardinal is Woodin. However, the first Woodin cardinal is not even weakly compact. This leaves a gap between the known lower and the upper bounds for the consistency of PFA.

To this day, the conjecture of the equiconsistency of PFA with the existence of a supercompact cardinal remains open. However, progress on this question has recently taken a new turn with Viale and Weiß work [27]. In his PhD thesis in 2010 [29], Weiß introduced new combinatorial principles that generalize traditional tree properties. These new principles can be used to characterize large cardinals : an inaccessible cardinal κ is supercompact if and only if ISP(κ) (or ITP(κ)) holds, and κ is strongly compact if and only if SP(κ) (or TP(κ)) holds. Viale and Weiß were then led to recast the equiconsistency problem of PFA in the context of forcing iteration. Since all known methods for proving the consistency of PFA are based on forcing iterations, the equiconsistency problem can be reformulated in the following way : if we consider a "standard" forcing iteration that forces PFA in a generic extension, what large cardinal hypothesis is required on the length of the iteration in the ground model ?

Baumgartner proved that PFA implies the tree property on ω_2 [2], i.e. every tree of height ω_2 whose levels are of cardinal less than ω_2 have a branch of length ω_2. This property is close to the characterization of a weakly compact cardinal. Indeed, a cardinal κ is weakly compact if and only if it is an inaccessible cardinal and the tree property on κ holds. Moreover standard forcing iterations used to force PFA collapse the length of the iteration κ to ω_2. Thus the idea of Viale and Weiß is to bring down trees poperties from the generic extension to the ground model. Using the ISP principle, they show that if a proper standard forcing iteration forces PFA, then there is a supercompact cardinal in the ground model. This result partially answers the equiconsistency problem of PFA with a supercompact, in the sense that any of the know methods for proving the consistency of PFA requieres at least a supercompact cardinal.

In 2003, Moore [20] introduced a new reflection principle, MRP. MRP is a consequence of PFA. This principle has turned out to be very rich and captures many properties of PFA : in cardinal arithmetics, MRP fixes the value of the continuum (MRP implies that $2^{\aleph_0} = \aleph_2$) and MRP also implies the Singular Cardinal Hypothesis (SCH). MRP implies that the class of uncountable linear orders has a five element basis (Moore [21]), and that there is a well-order on the reals (actually $P(\omega_1)$) that is Δ_1-definable (Caicedo -Veličković [3]). MRP has the additional benefit of being usable by mathematicians who are not familiar with forcing. Indeed the statement of MRP may be more intuitive than PFA because it does not require prior knowledge of forcing.

In this context, our result etablishes some relationships between MRP, the tree properties ITP and ISP, and the square properties introduced by Jensen and extended by Schimmerling. As PFA implies both MRP and ISP, it is a natural question to ask whether MRP has the same consistency strength as PFA, and whether MRP is strong enough to imply ITP or ISP on its own. The main theorem of this thesis is the following :

Théorème. $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ *implies* $\mathrm{ITP}(\lambda, \omega_2)$ *for all cardinals* $\lambda \geq \omega_2$.

Thanks to the work of Viale and Weiß, studying these relationships is particularly fruitful because it provides new consistency results. Thus, as a corollary to our theorem, all known methods to prove $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ require the existence of a supercompact cardinal.

In addition, we study the relationship between MRP and some variants of the generalized tree properties. We give the proof of the following results :

– MRP alone does not imply $\mathrm{TP}(\omega_2, \omega_2)$ (Magidor).
– $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ does not imply $\mathrm{ISP}(\omega_2, \omega_2)$ (König).

By adapting our technique we strengthen some unpublished results of Sharon [23] on square :

– MRP implies the failure of $\square(\lambda, \omega)$ for all $\lambda \geq \omega_2$.

– MRP + MA implies the failure of $\square(\lambda, \omega_1)$ for all $\lambda \geq \omega_2$. [2]

The present thesis is divided into three chapters. In chapter one, we recall the definitions of the forcing axioms MA and PFA. These axioms follow a particular construction scheme, which is similar to Baire's property. As the equiconsistency strength of an axiom is given in terms of large cardinals, we briefly define the notions of strongly compact and supercompact cardinals. Finally we present the first results on the consistency strength of forcing axioms due to Solovay and Martin [17] and Baumgartner and Shelah [2], namely the consistency of MA does not require large cardinals, and the existence of a supercompact cardinal implies the consistency of PFA, following the presentation of Abraham [1] and Jech [10]. These results provide a lower bound for the consistency strength of MRP + MA.

In chapter two, we present the reflection principle MRP introduced by Moore in [20]. MRP is a consequence of PFA, and captures some of its most main combinatorial properties. In particular we will will survey the influence of MRP on cardinal arithmetic, including the fact that the continuum is $\aleph_2$ (Moore, [20]) and that SCH holds (Viale, [26]). The proof of the first result uses the υ principle which defines a well-order relation on $P(\omega_1)/NS$ of length ω_2 and implies the failure of weak-$\Diamond$. The proof of SCH relies on the existence of a covering matrix.

The third chapter is the main chapter of this thesis and is dedicated to the relationship between MRP and tree properties. First we show that MRP implies the failure of the two cardinal version of square $\square(\lambda, \omega)$ for all $\lambda \geq \omega_2$.

2. This last result can be obtained as a direct consequence of ITP.

Assuming MA, we extend our result to ω_1 and we show that $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ implies the failure of $\square(\lambda, \omega_1)$ for all $\lambda \geq \omega_2$. This last result requires the fact that MRP+MA implies the tree property on ω_2. The truth of this assumption will be established as a corollary to ITP in the second part of the chapter. However the proofs on square are easier to understand and give an nice introduction to the more technical main result, which is why they are presented as a first step. In the second part of the chapter, we define the generalized tree properties ITP, ISP, TP and SP introduced by Weiß [29] in his PhD thesis. We then show our main result that $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ implies $\mathrm{ITP}(\lambda, \omega_1)$ for all $\lambda \geq \omega_2$. It appears that MRP alone is not enough for proving the result, and we give a proof of an unpublished result of Magidor that MRP is consistent with $\square_{\kappa,\omega}$. Finally we discuss the relationship between MRP and the strongest tree property, ISP.

Notation

Les notations utilisées dans cette thèse sont standards et pour celles qui ne seraient pas définies dans cette section, le lecteur peut se référer aux ouvrages de Jech [10] ou Kunen [15].

En règle générale les lettres κ, λ désigneront des cardinaux, et α, β, ξ des ordinaux. Soit X un ensemble, $|X|$ désigne la cardinalité de X. $P(X)$ est l'ensemble des parties de X. Pour un cardinal κ, $[X]^\kappa$ ($[X]^{<\kappa}$) est l'ensemble des parties de cardinalité κ (inférieure à κ) de X. $C \subseteq [X]^\omega$ est un club si pour toute famille dénombrable $(X_i)_{i<\omega}$ d'éléments de C avec $X_i \subseteq X_{i+1}$, $\bigcup_{i<\omega} X_i \in C$ (C est clos) et pour tout $Y \in [X]^\omega$, il existe $Z \in C$ tel que $Y \subseteq Z$ (C est cofinal). Il est bien connu que C est un club si et seulement si il existe une fonction $f : [X]^{<\omega} \to X$ telle que C contient les parties dénombrables closes par f, c'est à dire les ensembles $Y \in [X]^\omega$ tels que $f([Y]^{<\omega}) \subseteq Y$. $S \subseteq [X]^\omega$ est stationnaire si il rencontre tous les clubs de $[X]^\omega$. Si α est un ordinal et $X \subseteq \alpha$, il existe un ordinal appelé type d'ordre de X et noté $ot(X)$ tel que $(ot(X), <)$ est isomorphe à $(X, <)$. $Lim(X)$ désigne l'ensemble des ordinaux limites de X pour la topologie induite par la relation d'ordre sur α. Si κ est un cardinal, $cof(\kappa)$ désigne la cofinalité de κ. Pour un cardinal régulier θ, nous noterons H_θ la structure $(H_\theta, \in, <)$ dont le domaine est la collection des ensembles dont la clôture transitive est de cardinalité inférieure à θ et $<$ est un bon ordre sur H_θ fixé de façon arbitraire.

Un forcing est définit comme un ensemble muni d'un ordre partiel $\leq_{\mathbb{P}}$ avec un plus grand élément $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$. Un élément p du forcing est appelé condition. Une condition $q \leq p$ est dite plus forte que p. Deux conditions p et q sont incompatibles si il n'existe pas de conditions $r \in \mathbb{P}$ telle que $r \leq p$ et $r \leq q$. Un sous ensemble $D \subseteq \mathbb{P}$ est dense si pour tout condition $p \in \mathbb{P}$, il existe $q \in D$ avec $q \leq p$ et $A \subseteq \mathbb{P}$ est une antichaine si pour tout $p, q \in A$ avec $p \neq q$, p et q sont incompatibles entre elles. Un filtre $G \subseteq \mathbb{P}$ est une collection de conditions telles que si $q \in G$ et $q \leq p$ alors $p \in G$ et si $p, q \in G$, il existe $r \in G$ tel que $r \leq p, q$. V désigne le ground model. Un filtre G est générique si il rencontre tous les ensembles denses de V et $V[G]$ désignera l'extension générique obtenue. $V^{\mathbb{P}}$ désigne l'ensemble des $\mathbb{P}$-termes. Si $\dot{\sigma}$ est un $\mathbb{P}$-termes, on notera $\sigma_G \in V[G]$ l'évaluation de $\dot{\sigma}$ avec le filtre générique G et nous noterons σ pour désigner cette évaluation lorsque le filtre générique est évident. Le symbole $\Vdash_{\mathbb{P}}$ désigne la relation de forcing définit dans V et nous rappelons que $p \Vdash_{\mathbb{P}} \phi(\dot{\sigma_0}, ..., \dot{\sigma_n})$ si et seulement si pour tout filtre générique G tel que $p \in G$, $V[G]$ satisfait la formule $\phi(\sigma_0, .., \sigma_n)$. On notera $\Vdash_{\mathbb{P}} \phi$ pour $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \phi$. Les forcings considérés seront séparatifs, et donc si $p, q \in \mathbb{P}$, $p \leq q$ si et seulement si $p \Vdash q \in \dot{G}$ avec $\dot{G}$ le $\mathbb{P}$-terme pour le filtre générique. Si $\mathbb{P}$ est un forcing et $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}$-terme pour un forcing, l'itération $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ désigne le forcing dont les conditions sont de la forme $(p, \dot{q})$ avec p une condition de $\mathbb{P}$ et $p \Vdash \dot{q}$ est une condition de $\dot{\mathbb{Q}}$. De plus $(p_0, \dot{q_0}) \leq (p_1, \dot{q_1})$ si et seulement si $p_0 \leq p_1$ et $p_0 \Vdash \dot{q_0} \leq \dot{q_1}$. Si $\dot{\mathbb{Q}}$ est un forcing $\mathbb{Q}$ de V, on utilisera la notation $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ pour désigner le produit. Un système d'itération de forcings à support fini (ou dénombrable) est une famille $((\mathbb{P}_\alpha)_{\alpha \leq \kappa}, (\dot{\mathbb{Q}})_{\alpha < \kappa})$ telle que pour tout $\alpha \leq \kappa$ $\mathbb{P}_\alpha$ est un forcing, pour tout $\alpha < \kappa$ $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ est un $\mathbb{P}_\alpha$-terme pour un forcing, $\mathbb{P}_0 = \{\mathbb{1}\}$, si $\alpha = \beta + 1$ alors $\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}_\beta * \dot{\mathbb{Q}}_\beta$ et si α est limite alors $\mathbb{P}_\alpha = \{p \in \prod_{\beta < \alpha} \dot{\mathbb{Q}}_\beta \colon$ le support de p est fini (dénombrable)$\}$. Le support d'une condition $p = (\dot{q}_\beta)_{\beta < \alpha}$, noté $supt(p)$, désigne $\{\beta < \alpha \colon \mathbb{1} \nVdash_{\mathbb{P}_\beta} \dot{q}_\beta = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\beta}\}$.

Chapitre 1

Les axiomes de forcing

Dans ce chapitre nous introduirons les axiomes de forcings MA et PFA. Nous donnerons la définition des cardinaux fortement compact et supercompact. Puis nous présenterons les preuves de consistance relative de MA et PFA.

1.1 Forcings ccc, σ-clos et propres

En pratique, les techniques de forcings les plus couramment utilisées préservent le premier cardinal non dénombrable $\aleph_1$. Lors de la découverte du forcing par Cohen, deux classes de forcings répondant à ces critères ont été isolées : les forcings ccc (countable chain condition ou condition de chaine dénombrable) et les forcings σ-clos.

Définition 1.1.1. *Soit κ un cardinal régulier. Un forcing $\mathbb{P}$ est κ-cc si toute antichaine de $\mathbb{P}$ est de cardinalité $< \kappa$. $\mathbb{P}$ est ccc si il est $\aleph_1$-cc.*

Définition 1.1.2. *Un forcing $\mathbb{P}$ est σ-clos si pour toute suite décroissante $(p_i)_{i<\omega}$ de conditions dans $\mathbb{P}$, il existe $p \in \mathbb{P}$ tel que pour tout $i \in \omega$, $p \leq p_i$.*

Les propositions suivantes assurent que ces deux classes de forcings préservent $\aleph_1$:

Proposition 1.1.1. *Soit $\mathbb{P}$ un forcing.*

- *si $\mathbb{P}$ est κ-cc, alors $\mathbb{P}$ préserve les cardinaux $\geq \kappa$.*
- *si $\mathbb{P}$ est σ-clos, alors toute fonction $f \in V[G]$ de ω dans V est dans V.*

Dans [24], Shelah introduit une nouvelle classe de forcings : les forcings propres. Cette notion se révèle être extrêmement riche et généralise la classe des forcings ccc et σ-clos. Les forcings propres préservent $\aleph_1$ et sont stables par itération à support dénombrable.

Définition 1.1.3. *Soit $\mathbb{P}$ un forcing et M un sous modèle élémentaire dénombrable de H_θ. Une condition p est $(M, \mathbb{P})$-générique si pour tout sous ensemble dense $D \in M$ et pour tout $q \leq p$ il existe $d \in D \cap M$ tel que q et d soient compatibles.*

Définition 1.1.4. *Soit $\mathbb{P}$ un forcing. $\mathbb{P}$ est propre si pour tout $\theta > 2^{|\mathbb{P}|}$, il existe un club C de sous modèles élémentaires dénombrables de H_θ tel que*

$$\forall M \in C, \forall p \in M, \exists q \leq p \text{ tel que } q \text{ est } (M, \mathbb{P})\text{-générique}$$

Le théorème suivant, du à Shelah [24], montre que les forcings propres préservent $\aleph_1$.

Théorème 1.1.1 (Shelah [24])**.** *$\mathbb{P}$ est propre si et seulement si tout sous ensemble stationnaire S de $[X]^\omega$ avec $X \in V$ reste stationnaire dans $V[G]$ quelque soit le filtre générique G sur $\mathbb{P}$.*

Ainsi un forcing à la fois propre et $\aleph_2$-cc préserve les cardinaux dans toutes les extensions génériques.

1.2 Axiomes de forcings

Les axiomes de forcings sont des axiomes de la forme $\mathrm{FA}(\mathcal{C}, < \kappa)$, avec $\mathcal{C}$ une classe de forcings satisfaisant une même propriété et κ un cardinal. $\mathrm{FA}(\mathcal{C}, < \kappa)$ est la formule suivante :

> Soit $\mathbb{P}$ un forcing dans la classe $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ une famille de sous ensembles denses de $\mathbb{P}$ telle que $|\mathcal{D}| < \kappa$. Alors il existe un filtre G sur $\mathbb{P}$ tel que pour tout $D \in \mathcal{D}$, $G \cap D \neq \emptyset$.

On peut interpréter un axiome de forcing comme une façon de saturer l'univers avec une classe de forcing, dans le sens où si l'on prend une famille de parties denses de petite taille pour un forcing de la classe considérée, alors il existe déjà un filtre générique pour cette famille.

Les axiomes de forcings considérés dans cette thèse sont l'axiome de forcing propre PFA (Proper Forcing Axiom) et l'axiome de Martin MA (Martin Axiom). Dans ce qui suit CCC désigne la classe des forcings ccc et $PROPRES$ la classes des forcings propres.

Définition 1.2.1 (MA)**.** MA *est l'axiome de forcing* $\mathrm{FA}(\mathrm{CCC}, < 2^{\aleph_0})$. MA_κ *est l'axiome de forcing* $\mathrm{FA}(\mathrm{CCC}, < \kappa^+)$*.*

Définition 1.2.2 (PFA)**.** PFA *est l'axiome de forcing* $\mathrm{FA}(\mathrm{PROPRES}, < \aleph_2)$*.*

Nous pouvons noter que MA est trivialement vrai à partir du moment où CH est satisfait. MA n'est donc considéré en tant qu'axiome que lorsque que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$.

1.3 Grands cardinaux

Nous rappelons les notions de cardinaux fortement compact et supercompact. Pour plus de détails sur les grands cardinaux, nous recommandons au lecteur de consulter le livre de Kanamori *The Higher Infinite* [13].

Définition 1.3.1. *Soit S un ensemble. $F \subseteq P(S)$ est un filtre sur S si :*

1. *pour tout X, $Y \in F$, $X \cap Y \in F$.*
2. *pour tout X, $Y \in F$, si $X \subseteq Y$ et $X \in F$, alors $Y \in F$.*
3. *$\emptyset \notin F$.*

De plus un filtre F est non-principal si pour tout $x \in S$, $\{x\} \notin F$. Tous les filtres considérés dans cette section sont non-principaux.

Définition 1.3.2. *Soit κ un cardinal. Un filtre F est κ-complet si pour toute famille $(X_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ d'ensembles de F avec $\lambda < \kappa$, $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in F$.*

Définition 1.3.3. *Un filtre U sur S est un ultrafiltre si pour tout $X \subseteq S$, $X \in U$ ou $S \setminus X \in U$.*

Définition 1.3.4. *Un cardinal non dénombrable κ est fortement compact si pour tout ensemble S, tout filtre κ-complet sur S se prolonge en un ultrafiltre κ-complet.*

Un filtre F sur un ensemble de partie $[A]^\kappa$ est un *bon* filtre (nice filter) si il contient le filtre formé des ensembles $\tilde{P} = \{Q \in [A]^\kappa : P \subseteq Q\}$ avec $P \in [A]^\kappa$. De plus un filtre F sur $[A]^\kappa$ est normal si pour toute fonction $f : [A]^\kappa \to A$ telle que f est une fonction de choix (c-a-d $f(P) \in P$ pour tout $P \in [A]^\kappa$), il existe un élément du filtre sur lequel f est constante.

Définition 1.3.5. *Un cardinal non dénombrable κ est supercompact si pour tout A tel que $|A| \geq \kappa$, il existe un bon ultrafiltre κ-complet et normal sur $[A]^\kappa$.*

1.4 Premiers résultats de consistance relative

De façon basique, l'idée est de mesurer la force d'un axiome en utilisant une échelle de comparaison. Une échelle convenable est celle des grands cardinaux. En effet leur hiérarchie est bien cloisonnée, dans le sens où il est impossible de démontrer l'existence d'un cardinal "fort" à partir d'un cardinal "plus faible". On ramène alors la supposition d'un modèle de la théorie des ensembles dans lequel l'axiome est satisfait à celle d'un modèle de ZFC dans lequel il existe un certain type de grand cardinal.

Nous exposerons dans cette section deux résultats importants de consistance relative des axiomes de forcing. Le premier stipule que la consistance de MA ne requiert pas d'hypothèse sur les grands cardinaux. Le second résultat nous donne comme borne supérieure pour la consistance de PFA l'existence d'un supercompact. Puisque PFA entraine le principe MRP, ce résultat s'applique à MRP + MA.

Notons que, malgré le fait que la force de consistance de MA peut être considérée comme nulle, aucune méthode ne permet à l'heure actuelle de prouver que la consistance de MRP + MA est équivalente à celle de MRP.

1.4.1 $Cons(\text{ZFC}) \to \text{Cons}(\text{ZFC} + \text{MA} + \neg\text{CH})$

La consistance de l'axiome de forcing MA + $\neg$CH se montre en utilisant une itération à support fini de forcings ccc. L'idée est de créer un filtre générique pour chacun des forcings ccc en procédant par itération. Les ordres partiels ccc nouvellement créés dans les extensions génériques seront rattrapés et traités dans les étapes suivantes. Une fonction de traçage permet ainsi de s'assurer que tous les forcings ccc ont été parcourus lors de la construction. Dans le cas de Martin Axiom, cette méthode ne requiert pas l'existence d'un grand cardinal. En effet, une remarque sur l'axiome nous permet de borner le cardinal des ordres partiels considérés. Dans ce qui suit CCC désigne la classe des forcings ccc et CCC_κ la classe des forcings de cardinalité inférieure à κ.

Lemme 1.4.1. $\text{FA}(\text{CCC}, \kappa)$ *est équivalent à* $\text{FA}(\text{CCC}_\kappa, \kappa)$.

Démonstration. Trivialement $\text{FA}(\text{CCC}, \kappa)$ implique $\text{FA}(\text{CCC}_\kappa, \kappa)$.

Montrons l'implication inverse. Supposons que $\text{FA}(\text{CCC}_\kappa,\kappa)$ soit satisfait et soit $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbb{1})$ un forcing ccc ainsi que $\mathcal{D} = (D_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ une famille de sous ensembles denses de $\mathbb{P}$ de cardinalité $\lambda < \kappa$. Par le théorème de

Lowenheim-Skolem nous pouvons considérer $(Q, \leq, (D_\alpha)_{\alpha<\lambda})$ un sous modèle élémentaire de cardinal λ de la structure $(P, \leq, (D_\alpha)_{\alpha<\lambda})$. Par élémentarité la famille $\mathcal{D}' = (D_\alpha \cap Q)_{\alpha<\lambda}$ est une famille de sous ensembles denses pour le forcing ccc $\mathbb{Q} = (Q, \leq, \mathbb{1})$. Donc il existe un filtre G générique pour cette famille. Ainsi le filtre

$$H = \{p \in \mathbb{P} \colon \exists q \in G \quad q \leq p\}$$

est un filtre sur $\mathbb{P}$ générique pour la famille $(D_\alpha)_{\alpha<\lambda}$. □

Le lemme suivant nous donne une propriété utile sur les forcings ccc.

Lemme 1.4.2. *Soit $\mathbb{P}$ un forcing $\kappa - cc$ et $\dot{D}$ un $\mathbb{P}$-terme tel que*

$$\Vdash \dot{D} \subseteq \kappa \textit{ et } |\dot{D}| < \kappa$$

Alors il existe $\gamma < \kappa$ tel que

$$\Vdash \dot{D} \subseteq \gamma$$

Démonstration. Considérons

$$E = \{\alpha \colon \exists p \text{ tel que } p \Vdash \alpha = sup\ D\}$$

Pour chaque $\alpha \in E$, prenons une condition p_α qui témoigne de l'appartenance de α à E. L'ensemble $\{p_\alpha \colon \alpha \in E\}$ forme une antichaine de $\mathbb{P}$, donc $|E| < \kappa$. Ainsi il existe $\gamma < \kappa$ tel que $E \subseteq \gamma$ et on en déduit que $\Vdash \dot{D} \subseteq \gamma$. □

Lemme 1.4.3. *Soit $\mathbb{P}$ un forcing κ-cc et $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}$-terme pour un forcing tel que*

$$\Vdash \dot{\mathbb{Q}} \textit{ est } \kappa - cc$$

Alors $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ est $\kappa - cc$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une antichaine $(p_i, \dot{q}_i)_{i<\kappa}$ dans $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ de cardinal κ. Soit $\dot{\sigma}$ le $\mathbb{P}$-terme tel que

$$\Vdash \dot{\sigma} = \{i \in \kappa \colon p_i \in \dot{G}\}$$

Si G est un filtre générique, $\{q_i \colon i \in \sigma\}$ forme une antichaine dans $\mathbb{Q}$ et puisque $\mathbb{Q}$ est κ-cc, $|\sigma| < \kappa$. Ainsi $\Vdash |\dot{\sigma}| < \kappa$. D'après le lemme 1.4.2, il existe $\gamma < \kappa$ tel que $\Vdash \dot{\sigma} \subseteq \gamma$. Mais $p_\gamma \Vdash \gamma \in \dot{\sigma}$, ce qui est contradictoire. □

Théorème 1.4.1. *Soit* $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi<\lambda}$ *un système d'itération de forcings à support fini telle que pour tout* $\xi < \lambda$*,*

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \dot{\mathbb{Q}}_\xi \textit{ est } \kappa - cc$$

Alors pour tout $\xi \leq \lambda$*,* $\mathbb{P}_\xi$ *est* κ*-cc.*

Démonstration. La preuve se fait par induction sur ξ.

- $\mathbb{P}_0 = \{\mathbb{1}\}$ donc la propriété est triviale pour $\xi = 0$.
- Si ξ est un ordinal successeur $\eta + 1$, alors $\mathbb{P}_\xi = \mathbb{P}_\eta * \dot{\mathbb{Q}}_\eta$ et d'après le Lemme 1.4.3, $\mathbb{P}_\xi$ est κ-cc.
- Si ξ est limite, $\mathbb{P}_\xi$ est l'ensemble des suites à support fini dans $\prod_{\eta<\xi} \dot{Q}_\eta$. Supposons pour obtenir une contradiction qu'il existe une antichaine $(p_i)_{i<\kappa}$ dans $\mathbb{P}_\xi$ de cardinal κ. Puisque les supports des conditions sont finis, on peut considérer que la famille $(supt(p_i))_{i<\kappa}$ forme un Δ-système de racine $r \subseteq \gamma$, c'est-à-dire que pour tout $i, j < \kappa$, $i \neq j$, $supt(p_i) \cap supt(p_j) = r$. Mais $\{p_i \restriction \gamma \colon i < \kappa\}$ forme alors une antichaine de cardinal κ dans $\mathbb{P}_\gamma$, ce qui contredit l'hypothèse d'induction.

□

Théorème 1.4.2 (Martin, Solovay [19])**.** *Supposons que* κ *soit un cardinal régulier tel que* $2^{<\kappa} = \kappa$*. Alors il existe un forcing* $\mathbb{P}$ *tel que* $\Vdash_{\mathbb{P}} \mathrm{MA} + 2^{\aleph_0} = \kappa$*.*

Démonstration. Choisissons une fonction surjective $f : \kappa \to \kappa \times \kappa$ telle que

$$\forall \xi, \theta, \eta \in \kappa \quad f(\xi) = (\theta, \eta) \to \theta < \xi$$

Une telle fonction nous servira de fonction de traçage. On peut facilement en obtenir une à partir d'une bijection $g : \kappa \to \kappa \times \kappa \times \kappa$ en posant $f(\xi) = (\theta, \eta)$ si $g(\xi) = (\gamma, \theta, \eta)$ avec $\theta < \xi$ et $(0, 0)$ sinon.

Nous allons construire par induction un système d'itération de forcings $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi<\kappa}$ et une suite de cardinaux $(\lambda_\xi)_{\xi<\kappa}$ tels que pour tout $\xi < \kappa$:

1. $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est un forcing ccc de domaine $\lambda_\xi \times \lambda_\xi$.
2. $\lambda_\xi < \kappa$.

D'après la condition 1. et en utilisant le Théorème 1.4.1, chacun des forcings $\mathbb{P}_\xi$ sera ccc. De plus la condition 2. nous assurera que le cardinal de chaque forcing $\mathbb{P}_\xi$ est strictement inférieur à κ et donc le forcing $\mathbb{P}_\kappa$ sera de cardinal inférieur ou égal à κ.

Nous rappelons qu'un $\mathbb{P}$-terme $\dot{\sigma}$ pour un sous ensemble du terme $\dot{\tau}$ est un bon terme si il s'écrit sous la forme

$$\bigcup \{\{\dot{x}\} \times A_{\dot{x}} \colon \dot{x} \in dom(\dot{\tau})\}$$

avec $A_{\dot{x}}$ une antichaine de $\mathbb{P}$ pour chaque $\dot{x} \in dom(\dot{\tau})$.

Ainsi si σ est un terme pour un sous ensemble de τ, alors il existe un bon terme μ tel que

$$\Vdash \dot{\sigma} = \dot{\mu}$$

L'idée de la construction est d'énumérer, à chaque étape ξ de l'induction, la liste des bons $\mathbb{P}_\xi$-termes pour les nouveaux forcings ccc produits par le forcing $\mathbb{P}_\xi$. Puisque le forcing est ccc, l'ensemble des antichaines de $\mathbb{P}_\xi$ est de cardinal au plus (κ^ω) et l'ensemble des bons termes pour un forcing ccc sur $\lambda \times \lambda$ ($\lambda < \kappa$ fixé) est de cardinal au plus $(\kappa^\omega)^\lambda = \kappa$. Ainsi à chaque étape ξ on peut fixer une énumération $(\dot{\mathbb{Q}}_{\xi,\eta})_{\eta<\kappa}$ des bons termes pour les forcings $\dot{\mathbb{Q}}$

tels que

$$\Vdash \dot{\mathbb{Q}} \text{ est un forcing ccc sur } \lambda \times \lambda$$

avec $\lambda < \kappa$.

On considère la valeur (θ, η) de la fonction de traçage f en ξ. Puisque $\theta < \xi$, $\dot{\mathbb{Q}}_{\theta,\eta}$ peut être vu comme un $\mathbb{P}_\xi$-terme. Cependant la propriété d'être ccc a pu être détruite par le forcing $\mathbb{P}_\xi$ en rajoutant une antichaine non dénombrable. On considère donc un $\mathbb{P}_\xi$-terme $\dot{\mathbb{Q}}$ tel que

$$\Vdash \dot{\mathbb{Q}} \text{ est ccc et si } \dot{\mathbb{Q}}_{\theta,\eta} \text{ est ccc alors } \dot{\mathbb{Q}}_{\theta,\eta} = \dot{\mathbb{Q}}$$

On pose $\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \dot{\mathbb{Q}}$ et λ_ξ le cardinal sur lequel est définit le forcing $\dot{\mathbb{Q}}_{\theta,\eta}$.

Soit $\mathbb{P}_\kappa$ le forcing obtenu à partir du système d'itération et G un filtre générique. Nous allons montrer que MA_λ est satisfait dans $V[G]$ pour tout $\lambda < \kappa$. Prenons dans $V[G]$ un forcing ccc $\mathbb{Q}$ de cardinalité λ et une famille $\mathcal{D}$ de sous ensembles denses de cardinalité λ. Alors il existe $\theta < \kappa$ tel que $\mathbb{Q}$, $\mathcal{D} \in V[G_\theta]$ avec G_θ le filtre générique induit sur $\mathbb{P}_\theta$ par G. Donc il existe $\eta < \kappa$ tels que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\theta,\eta}$. Soit $\xi > \theta$ tel que $f(\xi) = (\theta, \eta)$. Alors $V[G_{\xi+1}]$ contient un filtre générique pour $\mathbb{Q}_\xi = \mathbb{Q}_{\theta,\eta} = \mathbb{Q}$. Puisque $\mathcal{D} \in V[G_\xi]$, $G_{\xi+1}$ qui est un filtre dans $V[G]$ est générique pour la famille $\mathcal{D}$.

Puisque dans $V[G]$, MA_λ est satisfait pour tout $\lambda < \kappa$, on a que $2^\omega \geq \kappa$ dans $V[G]$. Un argument de comptage sur les bons termes de ω nous donne l'inégalité inverse. $\square$

1.4.2 $Cons(\mathrm{ZFC} + \exists\kappa$ **supercompact** $) \rightarrow \mathrm{Cons(PFA)}$

De même que pour la démonstration de la consistance de MA, l'idée principale est d'utiliser une itération de forcings propres. Cependant, afin de s'assurer d'avoir traité tous les forcings considérés, une propriété sur les cardinaux supercompacts sera utilisée. Dans un premier temps nous présenterons le résultat que l'itération de forcings propres à support dénombrable est propre, puis nous présenterons la preuve de la consistance de PFA à l'aide d'un cardinal supercompact.

Lemme 1.4.4. *Soit $\mathbb{P}$ un forcing propre et $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}$-terme pour un forcing propre. Si p est une condition $(M, \mathbb{P})$-générique et $\dot{q}$ un $\mathbb{P}$-terme pour une condition de $\dot{\mathbb{Q}}$ telle que*

$$p \Vdash \dot{q} \text{ est } (M[G], \mathbb{P})\text{-générique}$$

alors $(p, \dot{q})$ est $(M, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-générique.

Remarque 1.4.1. Nous pouvons remarquer qu'une condition p est $(M, \mathbb{P})$-générique si et seulement si $p \Vdash M \cap \dot{G}$ est M-générique. En utilisant cette caractérisation le lemme précédent devient alors évident.

Lemme 1.4.5. *Soit $\mathbb{P}$ un forcing propre et $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}$-terme pour un forcing propre. Soit θ un cardinal régulier suffisamment grand et $M \prec H_\theta$ un sous modèle élémentaire dénombrable tel que $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}} \in M$. Enfin soit p_0 une condition $(M, \mathbb{P})$-générique et $\dot{r}$ un $\mathbb{P}$-terme pour une condition de $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ tels que :*

$$p_0 \Vdash \dot{r} = (\dot{r_0}, \dot{r_1}) \in M \text{ et } \dot{r_0} \in \dot{G}_0$$

où $\dot{G}_0$ désigne le $\mathbb{P}$-terme pour le filtre générique sur $\mathbb{P}$.

Alors il existe une condition p de $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$, $(M, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-générique, telle que p prolonge p_0 (c'est à dire $p = (p_0, \dot{p_1})$ avec $\dot{p_1}$ un $\mathbb{P}$-terme pour une condition de $\dot{\mathbb{Q}}$) et telle que

$$p \Vdash \dot{r} \in \dot{G}$$

où $\dot{G}$ désigne le $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$-terme pour le filtre générique sur $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$.

Démonstration. Pour déterminer $\dot{p_1}$, prenons un filtre générique G sur $\mathbb{P}$ contenant p_0. Puisque $\dot{r}$ est dans M, r_1 est dans $M[G]$. Puisque $\mathbb{Q}$ est propre, il existe une condition p_1 de $\mathbb{Q}$ en dessous de r_1 qui est $(M[G], \mathbb{Q})$-générique. Soit $\dot{p}_1$ un $\mathbb{P}$-terme désignant cette condition. p_0 est $(M, \mathbb{P})$-générique et $p_0 \Vdash \dot{p}_1$ est $(M[G], \dot{\mathbb{Q}})$-générique donc $(p_0, \dot{p}_1)$ est $(M, \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}})$-générique. De plus $p_0 \Vdash \dot{r}_0 \in G_0$ et $p_0 \Vdash \dot{p}_1 \leq \dot{r}_1$ donc $(p_0, \dot{p}_1) \Vdash \dot{r} \in G$. □

Lemme 1.4.6. *Soit $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi<\lambda}$ un système d'itération de forcings propres à support dénombrable. Soit θ un cardinal régulier suffisamment grand et $M \prec H_\theta$ un sous modèle élémentaire dénombrable tel que $\mathbb{P}_\lambda \in M$. Fixons un ordinal $\gamma \in M \cap \lambda$. Enfin soit p_0 une condition $(M, \mathbb{P}_\gamma)$- générique et $\dot{r}$ un $\mathbb{P}$-terme pour une condition de $\mathbb{P}_\lambda$ tels que :*

$$p_0 \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \dot{r} \in M \text{ et } \dot{r} \restriction \gamma \in \dot{G}_\gamma$$

où $\dot{G}_\gamma$ désigne le $\mathbb{P}_\gamma$-terme pour le filtre générique sur $\mathbb{P}_\gamma$.

Alors il existe une condition p de $\mathbb{P}_\lambda$, $(M, \mathbb{P}_\lambda)$-générique, telle que p prolonge p_0 (c'est à dire $p = p_0 \restriction \gamma$) et

$$p \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \dot{r} \in \dot{G}_\lambda$$

Le lemme se démontre par récurrence sur λ.

Si $\lambda = \alpha + 1$ est successeur, on distingue deux sous cas : si $\gamma + 1 = \lambda$, le lemme est démontré grâce au lemme 1.4.5. Si $\gamma + 1 < \lambda$, on peut se ramener au sous -cas précédent grâce à l'hypothèse de récurrence.

Si λ est limite, $\lambda \cap M$ n'a pas de plus grand élément. Soit $(\gamma_i)_{i\in\omega}$ une suite croissante cofinale dans $\lambda \cap M$ avec $\gamma_0 = \gamma$. Soit $(D_i)_{i<\omega}$ une énumération des denses de M. Nous allons construire par récurrence une suite $(p_n)_{n\in\omega}$ de conditions telles que

- $p_n \in \mathbb{P}_{\gamma_n}$ est $(M, \mathbb{P}_{\gamma_n})$ générique
- $p_n \restriction \gamma_{n-1} = p_{n-1}$

Pour chaque p_n, nous allons construire de plus un $\mathbb{P}_{\gamma_n}$ - terme $\dot{r}_n$ tel que p_n

force que :

1. $\dot{r}_n \in \mathbb{P}_\lambda \cap M$
2. $\dot{r}_n \leq \dot{r}_{n-1}$
3. $\dot{r}_n \in D_{n-1}$
4. $\dot{r}_n \restriction \gamma_n \in \dot{G}_{\gamma_n}$

L'induction se prouve de la façon suivante : Supposons p_n et $\dot{r}_n$ construits. Nous allons dans un premier temps déterminer $\dot{r}_{n+1}$ puis p_{n+1}.

Soit G un filtre générique sur $\mathbb{P}_{\gamma_n}$ tel que $p_n \in G$. Considérons l'ensemble $D'_n = \{d \restriction \gamma_n \colon d \in D_n \ \text{ et } d \leq r_n\}$. $D'_n \in M$ est dense en dessous de $r_n \restriction \gamma_n \in G$ et p_n est $(M, \mathbb{P}_{\gamma_n})$-générique, donc $D'_n \cap G \cap M \neq \emptyset$ et il existe une condition $r_{n+1} \in D_n \cap M$, $r_{n+1} \leq r_n$ telle que $r_{n+1} \restriction \gamma_n \in G$. Soit $\dot{r}_{n+1}$ un $\mathbb{P}_{\gamma_{n+1}}$-terme pour une telle condition.

En utilisant l'hypothèse de récurrence sur λ et en prenant les paramètres γ_{n+1} pour λ et γ_n pour γ, il existe une condition p_{n+1} $(M, \mathbb{P}_{\gamma_{n+1}})$- générique telle que p_{n+1} prolonge p_n (et force par conséquent les propriétés (1)-(3) de $\dot{r}_n$) et telle que

$$p_{n+1} \Vdash \dot{r}_{n+1} \restriction \gamma_{n+1} \in \dot{G}_{\gamma_{n+1}}$$

(propriété 4).

Supposons les suite construites. On pose $p = \bigcup p_n$. Il suffit de démontrer que pour tout entier n, $p \Vdash \dot{r}_n \in \dot{G}_\lambda$, ceci entrainant alors que $p \Vdash \dot{r} \in \dot{G}_\lambda$ et que p est $(M, \mathbb{P}_\gamma)$-générique. Soit G_λ un filtre générique tel que $p \in G_\lambda$. Puisque p prolonge p_n, $r_n \restriction \gamma_n \in G_\lambda$. Or si $k \geq n$, $r_k \leq r_n$ et donc $r_n \restriction \gamma_k \in G_\lambda$. En posant $\gamma = sup(\gamma_n)_{n \in \omega}$, on en conclue que $r_n \restriction \gamma \in G_\lambda$, mais puisque $r_n \in M$, $supt(r_n) \subseteq \gamma$ et $r_n \restriction \gamma = r_n \in G$.

Théorème 1.4.3 (Shelah [24])**.** *Soit $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi<\lambda}$ un système d'itération de forcings à support dénombrable tel que pour tout $\xi < \lambda$,*

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \dot{\mathbb{Q}}_\xi \textit{ est propre}$$

Alors pour tout $\xi \leq \lambda$ $\mathbb{P}_\xi$ est propre.

Démonstration. Soit θ suffisamment grand et $M \prec H_\theta$ un sous modèle élémentaire dénombrable. Soit r une condition de $\mathbb{P}_\xi$ dans M_ξ. En appliquant le lemme précédent avec $\gamma = 0$, il existe une condition p $(M, \mathbb{P}_\xi)$-générique telle que $p \Vdash r \in G$, et donc $p \leq r$. $\square$

Théorème 1.4.4 (Laver [16]). *Soit κ un cardinal supercompact. Il existe une fonction $f : \kappa \to V_\kappa$ telle que pour tout ensemble x et pour tout $\lambda \geq \kappa$ avec $\lambda \geq |tc(x)|$, il existe un plongement élémentaire $j : V \to M$ de point critique κ tel que $j(\kappa) > \lambda$, $M^\lambda \subseteq M$ et $j(f)(\kappa) = x$.*

Théorème 1.4.5 (Baumgartner, Shelah [2]). *$Cons$(ZFC+$\exists\kappa$) supercompact $\to$ $Cons$(PFA)*

Démonstration. La preuve est quelque peu similaire à celle de la consistance de MA. On effectue une itération à support dénombrable de forcings propres de longueur κ avec κ un cardinal supercompact. La fonction de Laver nous sert comme fonction de traçage dans la construction de l'itération et permet de traiter tout les forcings propres. Chacune des notions de forcing est de cardinal inférieur à κ, ce qui nous assure que le forcing final est propre et κ-cc. Ainsi le forcing préserve les cardinaux au dessus de κ ainsi que $\aleph_1$, les cardinaux compris entre $\aleph_1$ et κ étant collapsés à $\aleph_1$. κ devient donc $\aleph_2$. De plus le modèle satisfait $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Concrètement l'itération se construit de la façon suivante : Soit κ un cardinal supercompact et $f : \kappa \to V_\kappa$ une fonction de Laver. Pour chaque $\xi < \kappa$, on pose :

- $\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \dot{\mathbb{Q}}$ si $f(\xi) = (\dot{\mathbb{Q}}, \dot{\mathcal{D}})$ avec $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}_\xi$-terme pour un forcing propre et $\dot{\mathcal{D}}$ un $\mathbb{P}_\xi$-terme pour une famille indexée par $\gamma < \kappa$ d'ensembles denses de $\dot{\mathbb{Q}}$.
- $\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \{\mathbb{1}\}$ sinon.

$\square$

Lemme 1.4.7. *Dans $V[G]$ soit $\mathcal{D} = (D_\alpha)_{\alpha<\gamma}$ une famille d'ensembles denses indexée par $\gamma < \kappa$ et $\mathbb{P}$ un forcing propre. Alors il existe un filtre $\mathcal{D}$-générique.*

Démonstration. Le lemme 1.4.7 permet de conclure que $V[G]$ satisfait PFA car celui-ci implique que dans $V[G]$, $\aleph_2 = \kappa$.

Démontrons donc le lemme. Soit $\dot{\mathbb{P}}$ et $\dot{\mathcal{D}}$ des $\mathbb{P}_\kappa$ termes pour $\mathbb{P}$ et $\mathcal{D}$. De plus soit λ suffisamment large tel que $\lambda > 2^{2^{|P|}}$ et supposons sans perdre de généralité que $\mathbb{P} \subseteq \lambda$. Puisque f est une fonction de Laver, il existe un plongement élémentaire $j : V \to M$ de point critique κ tel que $j(\kappa) > \lambda$, $M^\lambda \subseteq M$ et $j(f)(\kappa) = (\dot{\mathbb{P}}, \dot{\mathcal{D}})$.

$\mathbb{P}$ est un forcing propre, donc il existe un club C de sous modèles élémentaires de H_θ qui témoigne de cette propriété, avec $\theta < \lambda$. Or $M^\lambda \subseteq M$ et $\mathbb{P}_\kappa$ est κ-cc, on en déduit que $M[G]^\lambda \subseteq M[G]$ et C est un club dans $M[G]$. Ainsi $\mathbb{P}$ est propre dans $M[G]$.

Par élémentarité, $j(\mathbb{P}_\kappa)$ est une itération de forcing de longueur $j(\kappa)$ utilisant la fonction de traçage $j(f)$. Puisque κ est le point critique de j, $j(\mathbb{P}_\kappa) \restriction \kappa = \mathbb{P}_\kappa$. De plus $j(f)(\kappa) = (\dot{\mathbb{P}}, \dot{\mathcal{D}})$ avec $\mathbb{P}$ propre dans $M[G]$, donc $j(\dot{\mathbb{Q}})_\kappa = \mathbb{P}$ et $j(\mathbb{P}_\kappa)$ peut s'écrire sous la forme $\mathbb{P}_\kappa * \dot{\mathbb{P}} * \dot{\mathbb{Z}}$ où $\dot{\mathbb{Z}}$ est le reste de l'itération.

Soit $H*K$ un filtre générique dans $V[G]$ pour $\mathbb{P}*\dot{\mathbb{Z}}$. Il est alors possible de prolonger $j : V \to M$ en un plongement élémentaire $\tilde{j} : V[G] \to M[G*H*K]$ en posant $\tilde{j}(x) = j(\dot{x})_{G*H*K}$ avec $\dot{x}$ un $\mathbb{P}_\kappa$ terme pour x. H est générique dans $V[G]$ et rencontre donc tous les ensembles denses de $\mathcal{D}$. Cependant $j[H] = \{j(h)\colon h \in H\}$ est un sous ensemble de λ et $j \restriction \lambda \in M$, donc $j[H]$ est dans $M[G * H * K]$ et on a ainsi que $M[G * H * K] \models$ "il existe un filtre $\tilde{j}(\mathcal{D})$-générique sur $\tilde{j}(\mathbb{P})$". Par élémentarité de $\tilde{j}$, on en déduit que dans $V[G]$ il existe un filtre $\mathcal{D}$-générique sur $\mathbb{P}$. $\square$

Chapitre 2

Le principe de réflexion MRP

2.1 Introduction

Le principe de réflexion des stationnaires RP est une des propriétés combinatoires les plus importantes sous l'hypothèse de l'axiome de forcing MM. Celui-ci s'énonce de la façon suivante :

Pour tout ensemble stationnaire $S \subseteq [X]^\omega$, il existe $A \in [X]^{\omega_1}$ tel que $S \cap [A]^\omega$ est stationnaire.

Ce principe permet de démontrer les principales propriétés connues de l'arithmétique des cardinaux sous MM comme l'hypothèse des cardinaux singuliers SCH ou encore que $\lambda^\omega = \lambda$ pour tout cardinal régulier $\lambda \geq \aleph_2$. Cependant PFA n'entraine pas ce principe de réflexion. Au contraire ce principe agit comme une pierre angulaire entre ces deux axiomes de forcing : toutes les applications connues de MM qui ne découlent pas de PFA sont conséquences d'une forme de réflexion.

En 2003, Moore [20] met en évidence un nouveau principe de réflexion : le principe de réflexion des applications MRP (Mapping Reflection Principle). Contrairement à RP, PFA entraine MRP. De plus MRP conserve certaines propriétés de RP sur l'arithmétique des cardinaux. Ainsi Moore [20] montre que MRP entraine que $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ et Viale [26] montre que MRP implique SCH, lui permettant ainsi de résoudre la conjecture à ce problème avec PFA.

De plus il s'est avéré par la suite que MRP factorise d'autres conséquences de PFA, comme l'existence d'un bon ordre sur les réels (en réalité sur $P(\omega_1)$) qui est Δ_1-définissable sur $H(\omega_2)$ (Caicedo -Veličković [3]) ou encore l'existence d'une base à 5 éléments pour les ordres totaux (Moore [21]). MRP peut donc servir comme un important outil de démonstration, dont l'utilisation par rapport à PFA est simplifiée car elle ne présuppose pas la connaissance du forcing.

Dans ce chapitre nous présenterons certaines des propriétés fondamentales de MRP, à savoir :

Théorème (Moore [21])**.** PFA *implique* MRP*.*

Théorème (Moore [21])**.** MRP *implique que* $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$*.*

Théorème (Moore [21])**.** MRP *implique la négation de* $\square(\kappa)$ *pour tout* $\kappa \geq \omega_2$*.*

Théorème (Viale [26])**.** MRP *implique* SCH*.*

2.2 Enoncé du principe MRP

2.2.1 Quelques définitions préliminaires

Nous allons dans un premier temps introduire certaine notions nécessaires à la définition du principe MRP.

Définition 2.2.1 (Topologie de Ellentuck)**.** *Soit $N \in [X]^\omega$ et $x \subset N$, x fini. On définit $[x, N] = \{Z \in [X]^\omega : x \subset Z \subseteq N\}$. La topologie de Ellentuck est la topologie engendrée par les ouverts élémentaires de la forme $[x, N]$.*

Définition 2.2.2. *Soit θ un cardinal régulier, X un sous ensemble non dénombrable tel que $[X]^\omega \in H_\theta$ et $M \prec H_\theta$ un sous modèle élémentaire dénombrable de H_θ. $\Sigma \subseteq [X]^\omega$ est dit M-stationnaire si pour tout club C de $[X]^\omega$ tel que $C \in M$ on a que $C \cap \Sigma \cap M \neq \emptyset$.*

Définition 2.2.3. *Une application Σ est ouverte stationnaire s'il existe un cardinal régulier θ et un ensemble X non dénombrable avec $[X]^\omega \in H_\theta$ tel que :*

1. *$dom(\Sigma)$ est un club dans l'ensemble des sous modèles élémentaires dénombrables de H_θ et $X \in M$ pour tout $M \in dom(\Sigma)$.*
2. *pour tout $M \in dom(\Sigma)$, $\Sigma(M) \subseteq [X]^\omega$ est ouvert pour la topologie de Ellentuck et M-stationnaire.*

2.2.2 Le principe MRP

Nous pouvons donc à présent énoncer le principe MRP :

Définition 2.2.4 (MRP)**.** *Pour toute application Σ ouverte stationnaire, il existe une suite $(N_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ d'éléments de $dom(\Sigma)$ telle que :*

1. *$(N_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ est une $\in$-chaine continue, autrement dit $N_\xi \in N_{\xi+1}$ et $N_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} N_\eta$ si ξ est limite*
2. *pour tout $\xi < \omega_1$ limite, il existe $\eta < \xi$ tel que pour tout $\mu \in [\eta, \xi[$, $N_\mu \cap X \in \Sigma(N_\xi)$.*

Une telle suite est appelée suite de réflexion.

Théorème 2.2.1 (Moore [20])**.** PFA *implique* MRP.

Démonstration. Soit Σ une application ouverte stationnaire donnée. Il existe θ et X tels que $[X]^\omega \in H_\theta$ et Σ est définie sur un club $dom(\Sigma)$ de sous modèles élémentaires de H_θ. On définit $\mathbb{P}_\Sigma$ comme l'ensemble des suites croissantes continues dans $dom(\Sigma)$ de la forme $(N_\xi \colon \xi \leq \alpha)$ avec $\alpha < \omega_1$ et telles que :

$$\forall \xi \leq \alpha \text{ limite, } \exists \eta < \xi \text{ tel que } \forall \mu \in [\eta, \xi[,\ N_\mu \cap X \in \Sigma(N_\xi) \quad (*)$$

L'ordre sur $\mathbb{P}_\Sigma$ est l'ordre définit par inclusion inverse :
si $p = (N^p_\xi \colon \xi \leq \alpha^p)$ et $q = (N^q_\xi \colon \xi \leq \alpha^q)$, alors

$$p \leq q \leftrightarrow \begin{cases} \alpha^p \geq \alpha^q \\ \forall \xi \leq \alpha^q,\ N^p_\xi = N^q_\xi \end{cases}$$

Lemme 2.2.1. $\mathbb{P}_\Sigma$ *est propre.*

Démonstration. Nous démontrons en réalité la propriété suivante qui est plus forte : pour tout sous modèle élémentaire dénombrable M convenable et toute condition $p \in M \cap \mathbb{P}_\Sigma$, il existe une condition $q \leq p$ telle que pour tout $D \in M$ dense, il existe $d \geq q$ dans $M \cap D$.

Soit M un sous modèle élémentaire dénombrable de H_λ avec λ suffisamment grand tel que $\mathbb{P}_\Sigma, \Sigma, H_{|\mathbb{P}_\Sigma|^+} \in M$ et $M \cap H_\theta \in dom(\Sigma)$. Soit p une condition dans M. On fixe $(D_i)_{i<\omega}$ une énumération des ensembles denses de M. Nous allons construire par induction une suite décroissante de conditions $(d_i \colon i \in \omega)$ avec $d_0 = p$ et d_{i+1} dans $D_i \cap M$ de telle sorte qu'il existe une condition q telle que $q \leq d_i$ pour tout i.

On fixe de plus une énumération $(m_i)_{i<\omega}$ de $M \cap H_\theta$. Supposons que d_i soit construit. On considère l'ensemble

$$E = \{N \cap X \colon N \prec H_{|\mathbb{P}_\Sigma|^+}, \text{ et } m_i, D_i, d_i \in N\}$$

E est un club dans M. Puisque $\Sigma(M \cap H_\theta)$ est M-stationnaire, il existe un sous modèle élémentaire $N \in M$ de $H_{|\mathbb{P}_\Sigma|^+}$ tel que $N \cap X \in \Sigma(M \cap H_\theta)$. De plus $\Sigma(M \cap H_\theta)$ est ouverte, donc il existe un sous ensemble fini z de N tel que $[z, N \cap X] \subseteq \Sigma(M \cap H_\theta)$. Soit N_0 la clôture de Skolem de $\{z, m_i, d_i\}$ dans N. On pose alors

$$r = d_i \cup \{(\alpha, N_0)\}$$

avec α la longueur de d_i. Puisque $r \in N$ et $D_i \in N$ est dense, il existe une condition $d \in D_i \cap N$ telle que $d \leq r$. On prend alors $d_{i+1} = d$.

Il reste à montrer qu'il existe une condition q telle que $q \leq d_i$ pour tout i. On pose $q = (\bigcup_i d_i) \cup \{(\alpha, M \cap H_\theta)\}$ avec α la borne supérieure des longueurs α_i des conditions d_i. Par confort de notation on réécrit q sous la forme $q = (N_\xi \colon \xi \leq \alpha)$.

Tout d'abord $\{m_i \colon i \in \omega\} \subseteq \bigcup_i N_{\alpha_i} \subseteq M \cap H_\theta$, donc $\bigcup_i N_{\alpha_i} = M \cap H_\theta$ et q est bien une suite croissante continue. Vérifions que la propriété (*) est bien satisfaite : si ξ est un ordinal limite inférieur à α, il existe i tel que $\xi < \alpha_i$ et la propriété (*) est vérifiée grâce à d_i. Si $\xi = \alpha$, alors pour chaque $i \geq 1$ il existe par construction un ensemble fini z et un sous modèle élémentaire dénombrable N tels que $[z, N \cap X] \subseteq \Sigma(N_\alpha)$. $d_i = (N_\xi \colon \xi \leq \alpha_i)$ est dans N et de plus pour tout ξ tel que $\alpha_i < \xi \leq \alpha_{i+1}$, $z \in N_\xi$, ce qui nous assure que $N_\xi \cap X \in \Sigma(N_\alpha)$ et (*) est vérifiée. Ainsi q est bien une condition de $\mathbb{P}_\Sigma$ et clairement $q \leq d_i$ pour tout i.

□

Lemme 2.2.2. *Pour tout $\alpha < \omega_1$, l'ensemble $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P}_\Sigma \colon \alpha \in dom(p)\}$ est dense dans $\mathbb{P}_\Sigma$.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur α. Clairement D_0 est dense. Si $\alpha = \beta + 1$ et D_β est dense, alors D_α est dense. Si α est limite, soit p une condition donnée. On considère un sous modèle élémentaire dénombrable

M tel que $\{D_\beta \colon \beta < \alpha\} \subseteq M$ et $p \in M$. D'après la démonstration du Lemme 2.2.1, il existe donc une condition $q \leq p$ telle que pour tout $\beta < \alpha$, $q \leq d_\beta$ avec $d_\beta \in D_\beta$ et donc $q \in D_\alpha$. $\square$

Nous pouvons donc à présent démontrer le Théorème 2.2.1. Appliquons PFA au forcing $\mathbb{P}_\Sigma$ et à la famille d'ensembles denses $(D_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ et soit G_Σ le filtre obtenu. Alors $\bigcup G_\Sigma$ est une suite $(N_\xi \colon \xi < \omega_1)$ telle que $(N_\xi \colon \xi < \alpha)$ est dans $\mathbb{P}_\Sigma$ pour tout $\alpha < \omega_1$ et la propriété (*) est ainsi vérifiée pour tout $\xi < \omega_1$ limite. $\square$

Corollaire 2.2.1. *Cons*(ZFC + $\exists\kappa$ *supercompact*) $\rightarrow$ Cons(MRP).

2.2.3 Exemple d'application rapide de MRP

Nous allons illustrer l'utilisation du principe MRP en donnant un exemple d'application simple.

Proposition 2.2.1. *Soit pour tout $\alpha < \omega_1$, α limite, une décomposition de α en deux ouverts disjoints K^0_α, K^1_α (ouvert est à prendre dans le sens de la topologie naturelle induite par la relation d'ordre sur les ordinaux). Alors il existe un club C de ω_1 tel que pour tout point limite ξ de C, il existe $i \in \{0,1\}$ et $\eta < \xi$ tel que $[\eta, \xi[\cap C \subseteq K^i_\xi$.*

Démonstration. Soit $M \prec H_\theta$ avec θ choisit suffisamment grand. On note $\delta_M = M \cap \omega_1$ et $\Sigma^i(M) = \{N \in [M \cap \omega_1]^\omega : sup(N) \in K^i_{\delta_M}\}$ pour $i \in \{0,1\}$.

Lemme 2.2.3. *Pour tout $M \prec H_\theta$, $\Sigma^i(M)$ est ouvert et $\Sigma^0(M)$ ou $\Sigma^1(M)$ est M-stationnaire.*

Démonstration. Montrons que pour tout $i \in \{0,1\}$, $\Sigma^i(M)$ est ouvert pour la topologie de Ellentuck. Par exemple pour $i = 0$, soit $N \in \Sigma^0(M)$. Si N admet un plus grand élément δ, alors $[\{\delta\}, N] \subseteq \Sigma^0(M)$. Si N n'admet pas de plus grand élément, alors puisque $sup(N) \in K^0_{\delta_M}$ et $K^0_{\delta_M}$ est ouvert, il existe $\alpha < sup(N)$ tel que $[\alpha, sup(N)] \subseteq K^0_{\delta_M}$. Or il existe $\beta \in N$ tel que

$\beta > \alpha$, et donc $[\beta, sup(N)] \subseteq K^0_\alpha$. On en déduit que $[\{\beta\}, N] \subseteq \Sigma^0(M)$.

Montrons qu'il existe $i \in \{0,1\}$ tel que $\Sigma^i(M)$ est M-stationnaire. Dans le cas contraire $\Sigma^0(M)$ et $\Sigma^1(M)$ ne sont tous deux pas M-stationnaires, donc il existe deux clubs $C_0, C_1 \in M$ tels que $C_0 \cap M \subseteq \Sigma^0(M)$ et $C_1 \cap M \subseteq \Sigma^1(M)$. Or $M \prec H_\theta$ avec θ pris suffisamment grand, donc $M \models$ "C_0 et C_1 sont des clubs de $[\omega_1]^\omega$". Ainsi $M \models C_0 \cap C_1 \neq \emptyset$, et il existe $x \in M \cap C_0 \cap C_1$, ce qui est absurde car $\Sigma^0(M) \cap \Sigma^1(M) = \emptyset$. $\square$

Soit Σ l'application qui à $M \prec H_\theta$ associe l'ensemble $\Sigma^i(M)$ tel que $\Sigma^i(M)$ est M-stationnaire. Σ est ouverte stationnaire, donc il existe une suite de réflexion $(N_\xi)_{\xi \in \omega_1}$. Soit $C = \{N_\xi \cap \omega_1 : \xi \in \omega_1\}$. C est un club de ω_1 et pour tout γ limite dans C, il existe ξ limite tel que $\gamma = N_\xi \cap \omega_1$. Ainsi il existe $\eta < \xi$ et $i \in \{0,1\}$ tels que pour tout $\mu \in [\eta, \xi[$, $N_\mu \cap \omega_1 \in K^i_{\delta_{N_\xi}}$ et donc $[N_\eta \cap \omega_1, \gamma[\cap C \subseteq K^i_\gamma$. $\square$

2.3 MRP et l'hypothèse du continu

Dans cette section nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 2.3.1 (Moore [20])**.** MRP *implique que* $2^{\aleph_0} = \aleph_2$*.*

Pour démontrer ce théorème, nous procédons de la façon suivante : dans un premier temps, nous définissons une fonction hauteur sur les parties dénombrables d'ordinaux. Puis dans un second temps, nous énonçons le principe combinatoire υ. Nous démontrons en utilisant les fonctions hauteurs que MRP implique υ. Enfin nous montrons que υ implique que $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ ainsi que υ implique que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

2.3.1 Fonction hauteur sur les parties dénombrables d'ordinaux

Nous allons introduire une fonction hauteur w sur les parties dénombrables d'ordinaux. Pour celà, on choisit pour tout ordinal $\alpha < \omega_1$ limite une partie $C_\alpha \subseteq \alpha$, cofinal de type d'ordre ω. Soit M et N dénombrables, $N \subseteq M \subseteq ORD$, tels que $\sup(N) < \sup(M)$ et $ot(M)$ est limite. On définit $\omega(N, M) = |\sup(N) \cap \pi_M^{-1}(C_{ot(M)})|$ où $\pi_M : M \to ot(M)$ est l'isomorphisme de M sur $ot(M)$.

Remarque 2.3.1. La fonction hauteur ainsi définie est à valeur dans ω car $ot(C_\alpha) = \omega$. De plus elle est monotone : si $N \subseteq N'$ alors $\omega(N, M) \leq \omega(N', M)$.

2.3.2 Le principe υ

Le principe υ permet de coder un sous ensemble de ω_1 par une suite croissante continue de sous modèles élémentaires via la fonction hauteur.

Définition 2.3.1. *Soit $A \subseteq \omega_1$. Le principe $\upsilon(A)$ s'énonce ainsi : il existe $\delta < \omega_2$, δ de cofinalité ω_1, et une suite $(N_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ croissante continue dans $[\delta]^\omega$ telle que $\delta = \bigcup_{\xi<\omega_1} N_\xi$ et pour tout $\xi < \omega_1$ limite, il existe $\eta < \xi$ tel que pour tout μ avec $\eta \leq \mu < \xi$,*

$$N_\xi \cap \omega_1 \in A \text{ si et seulement si } \omega(N_\mu \cap \omega_1, N_\xi \cap \omega_1) < \omega(N_\mu, N_\xi)$$

υ est satisfait si $\upsilon(A)$ est satisfait pour tout $A \subseteq \omega_1$.

2.3.3 MRP implique υ

Théorème 2.3.2. MRP *implique le principe υ.*

Démonstration. Soit $M \prec H_{(2^{\omega_1})^+}$, on définit

1. $\Sigma_<(M) = \{N \in [M \cap \omega_2]^\omega : \omega(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) < \omega(N, M \cap \omega_2)\}$
2. $\Sigma_\geq(M) = \{N \in [M \cap \omega_2]^\omega : \omega(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) \geq \omega(N, M \cap \omega_2)\}$

Lemme 2.3.1. *$\Sigma_<$ et $\Sigma_\geq$ sont ouverts M-stationnaires.*

Démonstration. Montrons que ces ensembles sont ouverts. Soit $i \in \{<, \geq\}$ et soit $N \in \Sigma_i(M)$. Si $\sup N \cap \omega_1 \in N$, on pose $\beta_1 = \sup N \cap \omega_1$. Sinon soit $\alpha_1 = \max(\pi^{-1}(C_{ot(M \cap \omega_1)}) \cap \sup(N \cap \omega_1))$. Puisque $\sup N \cap \omega_1$ est limite, il existe $\beta_1 \in N$ tel que $\beta_1 > \alpha_1$. De même si $\sup N \in N$ on pose $\beta_2 = \sup N$. Sinon soit $\alpha_2 = \max(\pi^{-1}(C_{ot(M \cap \omega_2)}) \cap \sup(N))$. Puisque $\sup N$ est limite, il existe $\beta_2 \in N$ tel que $\beta_2 > \alpha_2$. Pour tout $Y \in [\{\beta_1, \beta_2\}, N]$, $\omega(Y \cap \omega_1, M \cap \omega_1) = \omega(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1)$ et $\omega(Y, M \cap \omega_2) = \omega(N, M \cap \omega_2)$. On en déduit que $[\{\beta_1, \beta_2\}, N] \subseteq \Sigma_i(M)$.

Montrons que $\Sigma_<$ est M-stationnaire : soit E un club dans $[\omega_2]^\omega$, $E \in M$. Il existe $\delta < \omega_1$ tel que $E_\delta = \{sup(N) : N \in E \text{ et } N \cap \omega_1 \subseteq \delta\}$ soit cofinal dans ω_2. Puisque $M \prec H_\theta$, par élémentarité, il existe $\delta \in M$ tel que $\{\sup(N) : N \in E \cap M \text{ et } N \cap \omega_1 \subseteq \delta\}$ soit cofinal dans $\omega_2 \cap M$. Soit $N \in E \cap M$, tel que $|\sup(N) \cap \pi^{-1}(C_{ot(M)})| > |\delta \cap \pi^{-1}(C_{ot(M \cap \omega_1)})|$. Alors $N \in E \cap M \cap \Sigma_<(M)$.

Montrons que $\Sigma_\geq$ est M-stationnaire : soit E un club dans $[\omega_2]^\omega$, $E \in M$. Il existe δ, $\omega_1 < \delta < \omega_2$ tel que $E \cap [\delta]^\omega$ est un club dans $[\delta]^\omega$. Puisque $M \prec H_\theta$, il existe $\delta \in M$ tel que $E \cap M \cap [\delta]^\omega$ est un club dans $[\delta \cap M]^\omega$. Puisque $\delta > \omega_1$, il existe $N \in E \cap M$, tel que $N \subseteq \delta$ et $\omega(N \cap \omega_1, M \cap \omega_1) = |\sup(N) \cap \pi^{-1}(C_{ot(M \cap \omega_1)})| > |\delta \cap \pi^{-1}(C_{ot(M \cap \omega_2)})| \geq \omega(N, M \cap \omega_2)$. Alors $N \in E \cap M \cap \Sigma_\geq(M)$. $\square$

Soit $A \subseteq \omega_1$ et soit $\Sigma : M \to \begin{cases} \Sigma_<(M) & \text{si } M \cap \omega_1 \in A \\ \Sigma_\geq(M) & \text{si } M \cap \omega_1 \notin A \end{cases}$
D'après le lemme, cette application est ouverte stationnaire. Donc en appliquant MRP, il existe une suite de réflexion $(N_\xi)_{\xi \in \omega_1}$. On considère $N^*_\xi = N_\xi \cap \omega_2$. La suite $(N^*_\xi)_{\xi \in \omega_1}$ est une suite croissante continue qui est club dans

$\delta = \bigcup_{\xi\in\omega_1} N^*_\xi$. De plus pour tout ξ limite, il existe $\eta < \xi$ tel que pour tout $\mu \in [\eta, \xi[$,

$$N^*_\xi \cap \omega_1 \in A \Leftrightarrow \omega(N^*_\mu \cap \omega_1, N^*_\xi \cap \omega_1) < \omega(N^*_\mu, N^*_\xi)$$

On a bien que MRP implique υ. □

2.3.4 υ implique $2^{\aleph_1} = \aleph_2$

Avant de démontrer que υ implique $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, remarquons tout d'abord que $|P(\omega_1)\diagup NS| = |P(\omega_1)|$. En effet soit $(S_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ une partition de ω_1 en stationnaires deux a deux disjoints. Alors l'application $\omega_1 \to P(\omega_1)\diagup NS$, $A \subseteq \omega_1 \mapsto \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ est injective et donc $|P(\omega_1)\diagup NS| \geq |P(\omega_1)|$. L'inégalité inverse est évidente.

Soit $A \subseteq \omega_1$. On définit $\delta_A = min\{\delta : \delta \text{ convient pour } \upsilon(A)\}$. On vérifie que si $A =_{NS} B$, alors $\delta_A = \delta_B$. En effet si $A =_{NS} B$, il existe un club C de ω_1 tel que $C \cap A = C \cap B$. Soit $(N^A_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ une suite croissante continue, club dans $[\delta_A]^\omega$. Alors $D = \{\xi \in \omega_1 : N^A_\xi \cap \omega_1 \in C\}$ est un club dans ω_1. Donc la suite $(N^A_\xi)_{\xi\in D}$ convient pour $\upsilon(B)$ et on en déduit que $\delta_B \leq \delta_A$. On démontre de même que $\delta_B \geq \delta_A$.

On peut donc définir une application de $P(\omega_1)\diagup NS \to \omega_2$, $[A] \mapsto \delta_A$. Montrons que cette application est injective : on suppose que $\delta_A = \delta_B = \delta$. Soit $(N^A_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ une suite qui convient pour $\upsilon(A)$, et $(N^B_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ une suite qui convient pour $\upsilon(B)$. On considère $E = \{\xi \in \omega_1 : N^A_\xi = N^B_\xi\}$. Alors E est un club : en effet si γ est un point limite de E, alors $N^A_\gamma = N^B_\gamma$ par continuité des suites. De plus soit $\xi_0 \in \omega_1$: puisque $(N^B_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ est un club dans δ, il existe $\mu_1 > \xi_0$ tel que $N^B_{\mu_1} \supseteq N^A_{\xi_0}$. De même il existe $\mu_2 > \mu_1$ tel que $N^A_{\mu_2} \supseteq N^B_{\mu_1}$. En procédant ainsi de suite, on construit une suite $(\mu_n)_{n\in\omega}$ et si on note $\mu = \sup_{n\in\omega} \mu_n$, $\mu > \xi_0$ et $\mu \in E$. Soit E' l'ensemble des points limites de E.

Puisque E est un club, E' est un club. Si on note $C = \{N_\xi^A \cap \omega_1 : \xi \in E'\}$, alors C est un club. Montrons que $C \cap A = C \cap B$. Soit $\gamma \in C \cap A$. Alors $\gamma = N_\xi^A \cap \omega_1$, avec ξ limite dans E. On suppose que $\gamma \notin B$. D'après la définition de la suite $(N_\xi^B)_{\xi \in \omega_1}$, il existe $\eta_B < \xi$ tel que pour tout $\mu \in [\eta_B, \xi[$, $\omega(N_\mu^B \cap \omega_1, N_\xi^B \cap \omega_1) \geq \omega(N_\mu^B, N_\xi^B)$. De plus d'après la définition de la suite $(N_\xi^A)_{\xi \in \omega_1}$, il existe $\eta_A < \xi$ tel que pour tout $\mu \in [\eta_A, \xi[$, $\omega(N_\mu^A \cap \omega_1, N_\xi^A \cap \omega_1) < \omega(N_\mu^A, N_\xi^A)$. On pose $\eta = \max(\eta_A, \eta_B)$. Puisque ξ est limite dans E il existe $\mu \in]\eta, \xi[$, tel que $\mu \in E$. Donc on a $N_\xi^A = N_\xi^B$ et $N_\mu^A = N_\mu^B$, ce qui est absurde car $\omega(N_\mu^A \cap \omega_1, N_\xi^A \cap \omega_1) < \omega(N_\mu^A, N_\xi^A)$ et $\omega(N_\mu^B \cap \omega_1, N_\xi^B \cap \omega_1) \geq \omega(N_\mu^B, N_\xi^B)$. On en déduit que $C \cap A \subseteq C \cap B$. On démontre de même que $C \cap B \subseteq C \cap A$. On en conclue que $C \cap A = C \cap B$ et $A =_{NS} B$.

2.3.5 υ implique $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$

Nous allons introduire le principe combinatoire suivant :

Définition 2.3.2 (weak-$\Diamond$)**.** *Pour toute fonction $F : 2^{<\omega_1} \to 2$ il existe une fonction $g : \omega_1 \to 2$ telle que pour tout $f : \omega_1 \to 2$, l'ensemble $S = \{\alpha \in \omega_1 : F(f \upharpoonright \alpha) = g(\alpha)\}$ est stationnaire.*

Devlin et Shelah ont démontré que :

Théorème 2.3.3 (Devlin, Shelah [5])**.** *weak-$\Diamond \Leftrightarrow 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.*

Donc pour démontrer que MRP $\Rightarrow 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ il suffit de démontrer que $\upsilon \Rightarrow \neg$weak-$\Diamond$.

Démonstration. On démontre ce résultat par l'absurde. Avec un codage convenable, on définit une fonction $F : 2^{<\omega_1} \to 2$ telle que $F(f) = 0$ si et seulement si f code une suite $(N_\xi)_{\xi \leq \mu}$ croissante continue avec $\mu < \omega_1$ limite et la suite satisfait la propriété (*) qui est : il existe $\eta < \mu$ tel que pour tout $\xi < \omega_1 \in [\eta, \mu[$, $\omega(N_\xi \cap \omega_1,\ N_\mu \cap \omega_1) < \omega(N_\xi, N_\mu)$.

D'après le principe weak-$\Diamond$, il existe $g : \omega_1 \to 2$ qui convient pour F. On note $A = \{\xi \in \omega_1 \colon g(\xi) = 1\}$. De plus d'après le principe υ, il existe une suite $(N_\xi)_{\xi<\omega_1}$ qui convient pour $\upsilon(A)$. On remarque alors que si on choisit μ limite tel que $N_\mu \cap \omega_1 = \mu$, on a que $\mu \in A$ si et seulement si $N_\mu \cap \omega_1 \in A$ si et seulement si la suite $(N_\xi)_{\xi\leq\mu}$ satisfait le principe (*). Soit f le code associé à la suite $(N_\xi)_{\xi<\omega_1}$.

On peut supposer que le codage est suffisamment convenable pour que $C_1 = \{\mu \colon f \restriction \mu$ code pour $(N_\xi)_{\xi\leq\mu}\}$ soit un club de ω_1. De plus $C_2 = \{\mu \in \omega_1 \colon \mu = N_\mu \cap \omega_1\}$ est aussi un club. Si on pose $C = C_1 \cap C_2$, puis que $S = \{\alpha \in \omega_1 \colon F((N_\xi)_{\xi\leq\alpha}) = g(\alpha)\}$ est stationnaire, il existe $\mu \in S \cap C$. Or d'après la remarque précédente, $F(f \restriction \mu) \neq g(\mu)$, ce qui est une contradiction. $\square$

2.4 MRP implique $\neg\square(\kappa)$ pour $\kappa > \omega_1$, κ régulier

2.4.1 Le principe $\square(\kappa)$

Définition 2.4.1. $\square(\kappa)$ *est satisfait si il existe une suite* $(C_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ *telle que :*

1. *si* $\alpha = \beta + 1$, $C_\alpha = \{\beta\}$ *et si* α *est limite,* C_α *est un club dans* α
2. *si* β *est limite dans* C_α, *alors* $C_\alpha \cap \beta = C_\beta$
3. *il n'existe pas de club* C *de* κ *tel que pour tout point limite* α *de* C, $C \cap \alpha = C_\alpha$

2.4.2 MRP implique $\neg\square(\kappa)$

Dans ce qui suit nous allons démontrer que MRP implique la négation de $\square(\kappa)$ pour tout cardinal régulier $\kappa > \omega_1$.

Pour démontrer ce résultat on raisonne par l'absurde. On suppose que l'on a $\square(\kappa)$ pour $\kappa > \omega_1$, κ régulier. Soit $(C_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ une suite qui convient pour le principe $\square(\kappa)$ et soit $M \prec H_\theta$ tel que $(C_\alpha)_{\alpha\in\kappa} \in M$. On définit $\Sigma(M) = \{N \in [M \cap \kappa]^\omega : \sup N \notin C_{\sup(M\cap\kappa)}\}$.

Lemme 2.4.1. $\Sigma(M)$ *est ouvert et* M*-stationnaire.*

Démonstration. Montrons que $\Sigma(M)$ est ouvert : soit $N \in \Sigma(M)$. Si N admet un plus grand élément α, alors $[\{\alpha\}, N] \subseteq \Sigma(M)$. Sinon $\sup N$ est limite. Par hypothèse $\sup N \notin C_{\sup M\cap\kappa}$, on démontre donc qu'il existe $\alpha \in N$ tel que pour tout $\beta \in [\alpha, \sup N]$, $\beta \notin C_{\sup M\cap\kappa}$. En effet dans le cas contraire, pour tout $\alpha \in N$, il existe $\beta_\alpha > \alpha$ tel que $\beta_\alpha \in C_{\sup M\cap\kappa}$. Or $C_{\sup M\cap\kappa}$ est clos, donc $\sup N = \sup_{\alpha\in N} \beta_\alpha$ est dans $C_{\sup M\cap\kappa}$, ce qui contredit l'hypothèse que $N \in \Sigma(M)$. Soit $\alpha \in N$ tel que pour tout $\beta \in [\alpha, \sup N]$, $\beta \notin C_{\sup M\cap\kappa}$. Alors $[\{\alpha\}, N] \subseteq \Sigma(M)$.

Montrons par l'absurde que $\Sigma(M)$ est M-stationnaire. Soit E un club de $[\kappa]^\omega$, $E \in M$. On suppose que pour tout $N \in E \cap M$, $N \notin \Sigma(M)$. Si on pose $S = \{\sup N \colon N \in E\}$ on remarque que $S \cap M \subseteq C_{\sup M\cap\kappa}$: en effet soit $\alpha \in S\cap M$, alors par élémentarité de M, $M \models$ "$\exists N \in E$ tel que $\sup N = \alpha$", et donc $\alpha = \sup N$ avec $N \in E \cap M$.

On a que pour tous $\alpha < \beta$ limites dans $S \cap M$, $C_\alpha = C_{\sup M\cap\kappa} \cap \alpha$ et $C_\beta = C_{\sup M\cap\kappa} \cap \beta$, et donc $C_\alpha = C_\beta \cap \alpha$. Par élémentarité de M et puisque $S \in M$, on a que pour $\alpha < \beta$ limites dans S, $C_\alpha = C_\beta \cap \alpha$. On considère $C = \bigcup\{C_\alpha : \alpha \text{ limite dans } S\}$. Il est clair que C est un club de κ. De plus C trivialise la suite $(C_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$: soit δ limite dans C. Il existe $\alpha \in S$ tel que δ est un point limite de C_α. Donc $C_\delta = C_\alpha \cap \delta$. Or $C_\alpha = C \cap \alpha$: en effet $C_\alpha \subseteq C$ et réciproquement si $\gamma \in C$, $\gamma < \alpha$, alors $\gamma \in C_{\alpha_\gamma}$ avec α_γ un point limite de S et on a donc trois cas :

1. si $\alpha_\gamma = \alpha$, alors $\gamma \in C_\alpha$
2. si $\alpha_\gamma > \alpha$, alors $C_{\alpha_\gamma} \cap \alpha = C_\alpha$, et donc $\gamma \in C_\alpha$
3. si $\alpha_\gamma < \alpha$, alors $C_\alpha \cap \alpha_\gamma = C_{\alpha_\gamma}$ et donc $\gamma \in C_\alpha$

Le club C contredit donc le principe $\square(\kappa)$. On en déduit donc par l'absurde qu'il existe $N \in E \cap M \cap \Sigma(M)$. $\square$

Il ne reste plus qu'à appliquer MRP à la fonction Σ ainsi définie pour obtenir une contradiction. Soit $(N_\xi)_{\xi \in \omega_1}$ une suite de réflexion pour la fonction Σ. On considère l'ensemble $E = \{\sup N_\xi \cap \kappa : \xi \in \omega_1\}$. Si on pose $\delta = \sup E$, alors E est un club dans δ. Donc $E \cap C_\delta$ est un club. Soit γ un point limite de $E \cap\ C_\delta$. Alors $\gamma = \sup N_\xi \cap \kappa$ avec ξ limite et il existe $\eta < \xi$ tel que pour tout $\mu \in [\eta, \xi[$, $N_\mu \cap \kappa \in \Sigma(N_\xi)$. Donc pour tout $\mu \in [\eta, \xi[$, $\sup N_\mu \cap \kappa \notin C_\gamma = C_\delta \cap \gamma$. Donc γ n'est pas un point limite de $E \cap C_\delta$, ce qui est absurde.

2.5 MRP implique SCH

Dans cette section nous présentons une preuve du résultat de Viale [26] disant que MRP implique SCH.

2.5.1 SCH et le théorème de Silver

On rappelle la définition de l'hypothèse des cardinaux singuliers :

Définition 2.5.1 (SCH)**.** *Pour tout cardinal κ singulier, $\kappa^{cof(\kappa)} = max(\kappa^+, 2^{cof(\kappa)})$.*

Le théorème suivant, du à Silver [25], donne une régularité à la valeur de l'exponentiation d'un cardinal singulier de cofinalité non dénombrable lorsque SCH est satisfait en dessous de ce cardinal.

Théorème 2.5.1 (Silver [25])**.** *Soit κ un singulier de cofinalité non dénombrable. Si pour tout $\lambda < \kappa$ $\lambda^{cof(\lambda)} = max(\lambda^+, 2^{cof(\lambda)})$ alors $\kappa^{cof(\kappa)} = max(\kappa^+, 2^{cof(\kappa)})$.*

Ainsi pour prouver que MRP implique SCH il suffit de démontrer que $\lambda^\omega = \lambda$ pour tout cardinal régulier $\lambda > \aleph_1$. En effet, d'après le Théorème de Silver, le premier cardinal κ pour lequel SCH échoue est de cofinalité dénombrable. Or sous cette hypothèse, $\kappa^+ \leq \kappa^{cof \kappa} \leq (\kappa^+)^\omega = \kappa^+$, ce qui serait contradictoire.

Nous remarquons que le seul cas problématique pour démontrer par récurrence que $\lambda^\omega = \lambda$ pour un cardinal régulier λ est lorsque $\lambda = \kappa^+$ avec κ un cardinal de cofinalité ω. Ainsi dans ce qui suit κ désigne un cardinal de cofinalité ω tel que pour tout $\mu < \kappa$, $\mu^\omega < \kappa$.

2.5.2 Fonctions hauteurs sur ω_1 et κ^+

Tout d'abord nous définissons une fonction hauteur sur ω_1. Pour tout $\alpha < \omega_1$, α limite, on choisit $D_\alpha \subseteq \alpha$ cofinal dans α, de type d'ordre ω. Pour $\delta < \gamma < \omega_1$ limites, on pose alors $\omega(\delta, \gamma) = |\delta \cap D_\gamma|$.

De même on définit une fonction hauteur sur κ^+ qui dépend d'une décomposition particulière des ordinaux inférieurs à κ^+ que l'on va définir. Pour cela nous choisissons au préalable un club $C_\alpha \subseteq \alpha$ de type d'ordre minimal pour chaque $\alpha < \kappa^+$ de cofinalité ω_1.

Théorème 2.5.2 (Viale [26]). *Il existe une suite $(K(n,\beta))_{n\in\omega,\beta\in\kappa^+}$ telle que :*

1. *$K(n,\beta) \subseteq \beta$ et $|K(n,\beta)| < \kappa$ pour tout $n \in \omega$, $\beta < \kappa^+$*
2. *pour tout $n < p$, $K(n,\beta) \subseteq K(p,\beta)$ et $\bigcup_{n\in\omega} K(n,\beta) = \beta$*
3. *pour tout $\alpha < \beta$ tel que $cof(\alpha) = \omega_1$, il existe $n \in \omega$ tel que $C_\alpha \subseteq K(n,\beta)$*
4. *pour tout $n \in \omega$, $\beta \in \kappa^+$, $K(n,\beta)$ est clos.*

Démonstration. Soit $(\kappa_n)_{n\in\omega}$ une suite croissante telle que $\sup_{n\in\omega} \kappa_n = \kappa$. Pour tout $\eta < \kappa^+$ on choisit une surjection $\phi_\eta : \kappa \to \eta$. On pose alors

$$K(n,\beta) = \overline{\phi_\beta(\kappa_n) \bigcup \{C_\alpha \colon \alpha \in \phi_\beta(\kappa_n) \text{ et } cof(\alpha) = \omega_1\}}$$

où $\overline{a}$ désigne la clôture de a. $\square$

Soit $\delta < \gamma < \kappa^+$, la fonction hauteur est définie par :

$$ht(\delta, \gamma) = \{\min n\colon \delta \in K(n, \gamma)\}$$

2.5.3 MRP implique $\kappa^\omega = \kappa^+$

Comme nous l'avons souligné précédemment il suffit de démontrer que MRP implique que $\kappa^\omega = \kappa^+$ pour obtenir SCH.

Soit N un ensemble dénombrable, $\alpha_N = \sup N \cap \omega_1$ et $\delta_N = \sup N \cap \kappa^+$. Soit M dénombrable, $M \prec H_\theta$ avec θ choisit suffisamment grand. On remarque qu'il existe $\beta_M < \kappa^+$, $\beta_M \geq \delta_M$, tel que pour tout $\alpha < \kappa^+$, $cof(\alpha) = \omega_1$, il existe $\beta < \beta_M$, $cof(\beta) = \omega_1$, tel qu'on ait $C_\alpha \cap M = C_\beta \cap M$. En effet $\{C_\alpha \cap M : \alpha < \kappa^+ \text{ et } cof(\alpha) = \omega_1\} \subseteq P(M)$ avec M dénombrable, donc $|\{C_\alpha \cap M : \alpha < \kappa^+ \text{ et } cof(\alpha) = \omega_1\}| \leq 2^\omega < \kappa$.

On définit l'application ouverte stationnaire Σ par :

$$\Sigma(M) = \{N \in [M \cap \kappa^+]^\omega \colon \alpha_N < \alpha_M \text{ et } \delta_N < \delta_M \text{ et } \omega(\alpha_N, \alpha_M) < ht(\delta_N, \beta_M)\}$$

Lemme 2.5.1. $\Sigma(M)$ *est ouvert.*

Démonstration. Soit $N \in \Sigma(M)$. On pose $n = \omega(\alpha_N, \alpha_M)$. Alors il existe $\alpha \in N$, $\alpha < \kappa^+$ tel que pour tout $\beta \in]\alpha, \delta_N]$, $\beta \notin K(n, \beta_M)$: sinon pour tout $\alpha \in N \cap \kappa^+$, il existe $\beta_\alpha < \delta_N$ tel que $\beta_\alpha > \alpha$ et $\beta_\alpha \in K(n, \beta_M)$. Donc puisque $K(n, \beta_M)$ est clos, $\sup_{\alpha \in N} \beta_\alpha = \delta_N \in K(n, \beta_M)$, ce qui contredit le fait que $\omega(\alpha_N, \alpha_M) < ht(\delta_N, \beta_M)$. On choisit donc $\alpha \in N$, $\alpha < \kappa^+$ tel que pour tout $\beta \in]\alpha, \delta_N]$, $\beta \notin K(n, \beta_M)$ et on en conclue que $[\{\alpha\}, N] \subseteq \Sigma(M)$. $\square$

Lemme 2.5.2. *Si* $\kappa^\omega > \kappa^+$, *alors* $\Sigma(M)$ *est* M*-stationnaire.*

Démonstration. Soit E un club de $[\kappa^+]^\omega$ tel que $E \in M$, et $f : [\kappa^+]^{<\omega} \to \kappa^+$ la plus petite application pour l'ordre sur H_θ telle que $\{Z \in [\kappa^+]^\omega \colon f[Z]^{<\omega} \subseteq$

$Z\} \subseteq E$. Alors $f \in M$. Il suffit de trouver $X \in \Sigma(M) \cap M$ qui soit clos par f.

Soit $N \in M$ un sous modèle élémentaire dénombrable de $H_{\kappa^{++}}$, contenant tous les objets nécessaires définis plus hauts. En particulier $f \in N$ et donc $E \in N$. On note $n = \omega(\alpha_N, \alpha_M)$, et on choisit $\alpha \in N$ tel que $ht_{\alpha_M}(\alpha) = n$. Soit $C = \{\gamma \in E\colon cof(\gamma) = \omega\}$. C est un élément de N. De plus $|[E]^\omega| = (\kappa^+)^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0} > \kappa^+$. Par hypothèse, pour tout $\mu < \kappa$ $\mu^\omega < \kappa$, et donc $|[K(n,\beta)]^\omega| < \kappa$ et $[E]^\omega \nsubseteq \bigcup_{n\in\omega,\beta\in\kappa^+} K(n,\beta)$. De plus, par élémentarité de N, il existe $X \in [E]^\omega$ tel que $X \in N$ et $X \nsubseteq K(n,\beta)$ pour tout n, β. En particulier $X \nsubseteq K(n,\beta_M)$. Puisque X est dénombrable et $X \in N$, on en déduit $X \subseteq N$. Donc si on prend $\gamma \in X \setminus K(n,\beta_M)$, on a que $\gamma \in N$, $\gamma \notin K(n,\beta_M)$, $cof(\gamma) = \omega$ et $f[\gamma]^{<\omega} \subseteq \gamma$. On choisit un sous ensemble dénombrable $Y \subseteq \gamma$, $\sup Y = \gamma$. Par élémentarité $Y \in N$. Soit $Z = cl_f(Y) \subseteq \gamma$. Donc $\sup Z = \gamma$, $\sup Z \notin K(n,\beta_M)$. Or $Z \in N$, donc $\alpha_Z < \alpha_N$. On en conclue que $\omega(\alpha_Z,\alpha_M) \le n < ht(\delta_Z,\beta_M) = ht(\gamma,\beta_M)$, c'est à dire $Z \in \Sigma(M)$, et Z est clos par f. $\square$

On démontre par l'absurde que $\kappa^\omega = \kappa^+$ en utilisant les deux lemmes précédents : supposons que $\kappa^\omega > \kappa^+$. Alors l'application Σ ainsi définie est ouverte stationnaire. Soit $(N_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ une suite de réflexion pour Σ obtenue en appliquant MRP. On pose alors

$$E = \{\sup N_\xi \cap \kappa^+ \colon \xi \in \omega_1\}$$

Si on note $\delta = \sup E$, alors E est un club dans δ. Donc $E \cap C_\delta$ est un club de δ, et il existe un club D de ω_1 tel que $\{\sup N_\xi \cap \kappa \colon \xi \in D\} \subseteq C_\delta$. Soit γ un point limite de D. On pose $M = N_\gamma$. D'après la définition de β_M, il existe $\beta < \beta_M$ tel que $C_\delta \cap M = C_\beta \cap M$. De plus il existe $n \in \omega$ tel que $C_\beta \subseteq K(n,\beta_M)$ et donc pour tout $\mu \in D$ tel que $\mu < \gamma$, $\delta_{N_\mu} \in K(n,\beta_M)$ et $ht(\delta_{N_\mu}, M) \le n$. En utilisant la propriété de la suite de réflexion, il existe $\eta < \gamma$ tel que pour tout $\mu \in [\eta, \gamma[$, $\omega(\alpha_{N_\mu}, \alpha_M) < ht(\delta_{N_\mu}, \beta_M)$. Or α_{N_μ} converge vers α_M, donc il existe $\mu > [\eta, \gamma[$, $\mu \in D$ tel que $\omega(\alpha_N, \alpha_M) \geq n$, ce qui est absurde car $ht(\delta_{N_\mu}, \beta_M) \leq n$.

Chapitre 3

MRP et les propriétés d'arbres

3.1 Introduction

Nous avons pu voir dans le chapitre 1 comment obtenir un modèle de PFA en utilisant une itération de forcings propres de longueur un cardinal supercompact. Une des questions les plus célèbres en théorie des ensembles est la réciproque de ce théorème : à partir d'un modèle de PFA ou MM, peut-on obtenir un modèle de ZFC + $\exists\kappa$ supercompact ?

Récemment dans [28], Weiß a introduit de nouveaux principes combinatoires cristallisant la puissance de consistance relative des grands cardinaux en généralisant des propriétés sur les arbres. Ainsi TP, SP correspondent à l'existence d'un cardinal fortement compact et ITP, ISP correspondent à l'existence d'un cardinal supercompact. En utilisant ces nouveaux principes combinatoires, Viale et Weiß dans [27] ont ainsi obtenu de nouveaux résultats concernant la puissance de consistance relative de PFA. D'une part ils ont démontré le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 (Viale, Weiß[27]). PFA *implique* $\mathrm{ISP}(\lambda, \omega_2)$ *pour tout cardinal* $\lambda \geq \omega_2$.

D'autre part ils ont démontré que :

Théorème 3.1.2 (Viale, Weiß[27])**.** *Soit κ un cardinal inaccessible dans V. Soit $\mathbb{P}$ un forcing tel que :*

1. *$\mathbb{P}$ est la limite directe d'un système $\{(\mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ pour lequel $\mathbb{P}_\alpha$ est la limite directe de $(\mathbb{P}_\beta)_{\beta<\alpha}$ pour un ensemble stationnaire de α,*
2. *pour tout $\alpha < \kappa$, $\mathbb{P}_\alpha$ est de cardinal inférieur à κ.*

Sous ces hypothèses :

> *si $\mathbb{P}$ force que le principe $\mathrm{TP}(\lambda, \kappa)$ est satisfait pour tout $\lambda \geq \kappa$, alors κ est fortement compact dans V.*

Nous dirons qu'une itération de forcings est standard si la construction satisfait les hypothèses du Théorème 3.1.2.

Pour tout cardinal $\lambda \geq \kappa$ avec κ régulier, $\mathrm{ISP}(\lambda, \kappa)$ implique $\mathrm{ITP}(\lambda, \kappa)$ et $\mathrm{ITP}(\lambda, \kappa)$ implique $\mathrm{TP}(\lambda, \kappa)$. Ainsi le résultat principal formulé par Viale et Weiß est que pour toute itération standard de forcings dont la longueur est un cardinal inaccessible κ, qui collapse κ sur ω_2 et force PFA, la longueur de l'itération est fortement compacte dans V.

La généralisation du Théorème 3.1.2 dans sa version supercompacte est à l'heure actuelle une conjecture :

Conjecture 3.1.1. *Soit κ un cardinal inaccessible dans V. Soit $\mathbb{P}$ une itération standard de forcing de longueur un cardinal inaccessible κ. Si $\mathbb{P}$ force que le principe $\mathrm{ISP}(\lambda, \kappa)$ est satisfait pour tout $\lambda \geq \kappa$, alors κ est supercompact dans V.*

Cependant, sous certaines hypothèses additionnelles sur les forcings, Viale et Weiß ont pu obtenir une réponse positive à ce problème :

Théorème 3.1.3 (Viale, Weiß[27])**.** *Soit κ un cardinal inaccessible dans V. Soit $\mathbb{P}$ une itération standard de forcing de longueur un inaccessible κ. Si $\mathbb{P}$*

est un forcing propre et que $\mathbb{P}$ force le principe ITP(λ, κ) *pour tout* $\lambda \geq \kappa$, *alors* κ *est supercompact dans* V.

Dans la première partie de ce chapitre, nous étudierons la relation entre MRP et les principes square. Les principes square ont été introduits par Jensen dans [12], et généralisés par Schimmerling dans [22]. De même que les principes combinatoires introduits par Weiß, les principes square peuvent être utilisés pour mesurer la puissance de consistance relative d'un axiome de forcing ou d'un principe de réflexion.

Nous avons donné dans la section 4 du chapitre 2 la preuve que MRP implique la négation de $\square(\lambda)$ pour tout $\lambda \geq \omega_2$. Nous étendons ce résultat à une version faible de square à deux cardinaux en démontrant que :

Théorème. MRP *implique la négation de* $\square(\lambda, \omega)$ *pour tout* $\lambda \geq \omega_2$.

Théorème. MRP + MA *implique la négation de* $\square(\lambda, \omega_1)$ *pour tout cardinal* $\lambda \geq \omega_2$.

Ces résultats sont prouvés en utilisant une représentation des principes square sous formes d'arbres. Or il y a une analogie très forte entre les propriétés d'arbres, les principes square et les principes combinatoires de Weiß. D'ailleurs un théorème de Weiß stipule que :

Théorème 3.1.4. *Pour tout* λ, κ *tels que* $cof(\lambda) > \kappa$, ITP(λ, κ) *implique la négation de* $\square(\lambda, \kappa)$.

C'est ainsi que dans la seconde partie de ce chapitre, nous étudierons la relation entre MRP et les propriétés d'arbres ITP,ISP. En se basant sur la démonstration précédente et en la généralisant aux listes, nous prouverons que :

Théorème. MRP+MA *implique que le principe* ITP(λ, ω_2) *est satisfait pour tout* $\lambda \geq \omega_2$.

Nous obtenons ainsi les corollaires suivant :

Corollaire. *Soit $\mathbb{P}$ une itération standard de forcings de longueur κ qui collapse κ sur ω_2 et force* MRP+MA. *Alors κ est un cardinal fortement compact dans le modèle de base.*

Corollaire. *Soit $\mathbb{P}$ une itération standard de forcings de longueur κ tel que $\mathbb{P}$ est propre, $\mathbb{P}$ collapse κ sur ω_2 et force* MRP+MA. *Alors κ est un cardinal supercompact dans le modèle de base.*

De plus ce résultat généralise celui de Baumgartner concernant la ω_2-propriété d'arbre sous PFA :

Corollaire. MRP + MA *implique que tout ω_2-arbre a une branche cofinale.*

3.2 MRP et les principes square

Dans cette section, nous étudions la relation entre MRP et les principes square. Nous commencerons par définir le principe $\square(\lambda, \kappa)$, puis nous donnerons une formulation équivalente sous forme d'arbre. Enfin nous démontrerons que MRP implique la négation de $\square(\lambda, \omega)$ et MRP+MA implique la négation de $\square(\lambda, \omega_1)$ pour $\lambda \geq \omega_2$.

3.2.1 Le principe $\square(\lambda, \kappa)$

Définition 3.2.1. *Soit $\kappa \leq \lambda$ des cardinaux réguliers. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in Lim(\lambda)}$ est une suite $(\lambda, < \kappa)$-cohérente si :*

1. *pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$, $|\mathcal{C}_\alpha| < \kappa$.*
2. *pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$ et $C \in \mathcal{C}_\alpha$, C est un club dans α.*
3. *pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$ et $C \in \mathcal{C}_\alpha$, si $\beta \in Lim(C)$ alors $C \cap \beta \in \mathcal{C}_\beta$.*

Soit $\mathcal{C}$ une suite $(\lambda, < \kappa)$-cohérente. Un club $C \subseteq \lambda$ trivialise $\mathcal{C}$ si pour chaque $\alpha \in Lim(C)$, $C \cap \alpha \in \mathcal{C}_\alpha$.

$\square(\lambda, <\kappa)$ est le principe suivant : il existe une suite $\mathcal{C}$ $(\lambda, <\kappa)$-cohérente telle qu'il n'y a pas de club $C \subseteq \lambda$ qui trivialise $\mathcal{C}$.

Remarque 3.2.1. Par notation $\square(\lambda, \kappa)$ désigne $\square(\lambda, <\kappa^+)$.

3.2.2 Arbres et club-arbres

La définition d'arbre utilisée sera la suivante :

Définition 3.2.2. *Soit $\kappa \leq \lambda$ des cardinaux réguliers. $T = (T_\alpha)_{\alpha\in\lambda}$ est un $(\lambda, <\kappa)$-arbre si :*

1. *pour chaque $\alpha < \lambda$, $T_\alpha \subseteq 2^\alpha$.*
2. *pour chaque $\alpha < \lambda$, $|T_\alpha| < \kappa$.*
3. *pour chaque $\alpha < \lambda$, pour chaque $t \in T_\alpha$ et pour chaque $\beta < \alpha$, $t_{\restriction\beta}$ est dans T_β.*

Soit T un $(\lambda, <\kappa)$-arbre. T a une branche cofinale si il existe $t \in 2^\lambda$ telle que pour chaque $\alpha < \lambda$, $t\restriction \alpha \in T_\alpha$.

Remarque 3.2.2. Si $\kappa < \lambda$ alors tout $(\lambda, <\kappa)$-arbre a une branche cofinale. Ce résultat est du à Kurepa, et une esquisse de la démonstration peut être trouvée dans [15].

Nous allons en quelque sorte généraliser la définition d'arbre en introduisant la notion de club arbre. L'idée est d'affaiblir la propriété qui stipule que si un élément t est dans l'arbre, alors tout ses prédécesseur le sont aussi. On requière à la place que l'ensemble des niveaux pour lesquels les prédécesseurs sont dans l'arbre contient un club.

Définition 3.2.3. *Soit $\kappa \leq \lambda$ des cardinaux réguliers. $T = (T_\alpha)_{\alpha\in Lim(\lambda)}$ est un $(\lambda, <\kappa)$-club arbre si :*

1. *pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$, $T_\alpha \subseteq 2^\alpha$,*
2. *pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$, $|T_\alpha| < \kappa$,*

3. pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$, pour chaque $t \in T_\alpha$ il existe un club C^t tel que pour tout $\beta \in Lim(C^t)$, $t \upharpoonright \beta \in T_\beta$,

4. pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$, pour chaque $t \in T_\alpha$, pour tout $\beta \in Lim(C^t)$, $C^{t\upharpoonright\beta} = C^t \cap \beta$.

Soit T un $(\lambda, < \kappa)$-club arbre. T a une club branche si il existe $t \in 2^\lambda$ et un club $C^t \subseteq \lambda$ tels que pour tout $\alpha \in Lim(C^t)$, $t \upharpoonright \alpha \in T_\alpha$.

Proposition 3.2.1. *Soit $\kappa \leq \lambda$ des cardinaux réguliers. Les formulations suivantes sont équivalentes :*

(i) tout $(\lambda, < \kappa)$-club arbre a une club branche.

(ii) $\neg\square(\lambda, < \kappa)$ + tout $(\lambda, < \kappa)$-arbre a une branche cofinale.

Démonstration. (i) implique (ii) : Soit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ une suite cohérente. On considère le $(\lambda, < \kappa)$-club arbre $T = (T_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ avec $T_\alpha = \{\chi_C : C \in \mathcal{C}_\alpha\}$ et pour tout $t \in T_\alpha$, C^t est le club tel que $t = \chi_C$, χ_C désignant la fonction caractéristique de C. T a une club branche : il existe une fonction $t \in 2^\lambda$ et un club $C \subseteq \lambda$ tel que pour $\alpha \in Lim(C)$, $t \upharpoonright \alpha \in T_\alpha$. Donc si $\alpha \in Lim(C)$, il existe $C_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha$ tel que $t \upharpoonright \alpha = \chi_{C_\alpha}$. Ainsi t est un club de λ. Si $\alpha \in Lim(t)$, alors il existe $\beta > \alpha$, $\beta \in Lim(C)$. $t \upharpoonright \beta = \chi_{C_\beta}$ et α est un point limite de C_β, donc $t \upharpoonright \alpha = \chi_{C_\beta} \upharpoonright \alpha = \chi_{C_\beta \cap \alpha} = \chi_{C_\alpha}$ et t trivialise $\mathcal{C}$. De plus tout arbre est un club arbre donc tout $(\lambda, < \kappa)$-arbre a une branche.

(ii) implique (i) : Soit $T = (T_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ un club arbre. $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ avec $\mathcal{C}_\alpha = \{C^t : t \in T_\alpha\}$ est une suite cohérente. Il existe un club C qui trivialise $\mathcal{C}$. $T' = (T_\alpha)_{\alpha \in Lim(C)}$ forme un $(\lambda, < \kappa)$-arbre et si t est une branche de T', t forme une branche de T indexée par C. □

3.2.3 MRP et square revisités

Nous démontrons les théorèmes suivants :

Théorème 3.2.1. MRP *implique que pour tout $\lambda \geq \omega_2$, $\neg\square(\lambda, \omega)$.*

Théorème 3.2.2. $\mathrm{MRP} + \mathrm{MA}$ *implique que pour tout* $\lambda \geq \omega_2$, $\neg\Box(\lambda, \omega_1)$.

Ces résultats sont présentés en premier car ils facilitent la compréhension de la généralisation au principe ITP, beaucoup plus technique. Cependant nous assumerons dans toute cette section l'hypothèse que tout $(\lambda, < \kappa)$-arbre a une branche pour tout $\lambda \geq \omega_2$ et $\kappa = \omega_1$ et ω_2. D'après la remarque 3.2.2, le seul cas gênant est lorsque $\kappa = \omega_2$ et $\lambda = \omega_2$, et puisque l'on prouvera dans la section suivante que MRP+MA entraine $\mathrm{ITP}(\omega_2, \omega_2)$, ce cas sera donc traité.

Nous allons introduire quelques notations pour les démonstrations qui suivent : nous fixons un cardinal $\mu > 2^\lambda$. Ainsi $2^\lambda, \lambda \subseteq H_\mu$. Nous fixons de même un cardinal régulier θ_0 tel que $H_\mu \in H_{\theta_0}$. Pour les deux prochains lemmes, on supposera λ, κ fixés et $T = (T_\alpha)_{\alpha \in Lim(\lambda)}$ désignera un $(\lambda, < \kappa)$-club arbre qui n'a pas de club branche. De plus nous supposons que tout $(\lambda, < \kappa)$-arbre a une branche. Enfin pour chaque $\theta \geq \mu$ et chaque $M \subseteq H_\theta$, nous posons $\delta_M = \sup(M \cap \lambda)$.

Définition 3.2.4. *Soit* $M \subseteq H_\theta$ *un sous modèle élémentaire dénombrable de* H_θ *et* $t \in T_{\delta_M}$. t *est* M*-cofinal si*

$$\sup\{\alpha \in M \cap Lim(C^t) \colon t \restriction \alpha \in M\} = \delta_M.$$

On posera alors

$$Cof(M) = \{t \in T_{\delta_M} \colon \ t \ est \ M - cofinal\}.$$

Nous pouvons remarquer que les paramètres intervenants dans la définition de M- cofinal sont dans H_μ et donc $Cof(M) = Cof(M \cap H_\mu)$.

Lemme 3.2.1. *Soit* M *un sous modèle élémentaire dénombrable de* H_{θ_0} *tel que* $\mu, T \in M$ *et soit* $t \in Cof(M)$. *Soit* $E \in M$ *un club dans* $[H_\mu]^\omega$. *Alors il existe* $X \in M \cap E$ *tel que* $t \restriction \delta_X \notin Cof(X)$.

Démonstration. Nous démontrons ce lemme par l'absurde. Supposons pour aboutir à une contradiction qu'il existe un club $E \in M$ et $t \in Cof(M)$ tel que pour tout $X \in E \cap M$, $t \upharpoonright \delta_X \in Cof(X)$. Soit $C \in M$ un club tel que $C \subseteq \{\delta_N \colon N \in E\}$. Pour chaque $\alpha \in C \cap M$, α est un point limite de C^t. Donc par définition de C^t, $t \upharpoonright \alpha \in T_\alpha$. De plus $t \in Cof(M)$, donc $t \upharpoonright \alpha \in M$. On en déduit par élémentarité de M que pour chaque $\alpha \in C$, il existe $s \in T_\alpha$ tel que pour chaque $\beta \in C \cap \alpha$, $s \upharpoonright \beta \in T_\beta$. Pour chaque $\alpha \in C$, soit $T'_\alpha = \{s \in T_\alpha \colon \forall \beta \in C \cap \alpha, s \upharpoonright \beta \in T_\beta\}$ et $T' = (T'_\alpha)_{\alpha \in C}$. T' est un $(\lambda, < \kappa)$-arbre, donc T' a une branche. Par conséquent T a une club branche, ce qui contredit les hypothèses. □

Nous fixons θ tel que $H_{\theta_0} \in H_\theta$.

Lemme 3.2.2. *Soit M un sous modèle élémentaire dénombrable de H_θ tel que $\mu, T, \theta_0 \in M$ et $(t_i)_{i<n}$ une suite finie d'éléments de $Cof(M)$. Soit $E \in M$ un club dans $[H_\mu]^\omega$. Alors il existe $X \in M \cap E$ tel que pour chaque $i < n$, $t_i \upharpoonright \delta_X \notin Cof(X)$.*

Démonstration. Nous prouvons le lemme par induction sur la longueur de la suite.

Cas $n = 1$: La démonstration est la même que celle du lemme précédent.

Cas $n = p + 1$: Soit $E \in M$ un club dans $[H_\mu]^\omega$. Soit $E' = \{N \prec H_{\theta_0} \colon E, \mu, T \in N\}$ et soit $E'' = \{N \cap H_\mu \colon N \in E'\}$. E' et E'' sont dans M. Nous pouvons appliquer l'hypothèse d'induction à E''. Donc il existe $N \in M \cap E'$ tel que si $i < p$, $t_i \upharpoonright \delta_N \notin Cof(N)$. Il y a deux sous cas :

– Soit $t_p \upharpoonright \delta_N \notin Cof(N)$ et donc $N \cap H_\mu$ satisfait les conclusions du lemme.

– Soit $t_p \restriction \delta_N \in Cof(N)$. Donc $N \prec H_{\theta_0}$, $E \in M$ est un club dans $[H_\mu]^\omega$ et $t_p \restriction \delta_N \in Cof(N)$. Puisque pour tout $i < p$ $t_i \restriction \delta_N \notin Cof(N)$, il existe $\alpha_i \in N$ tel que si $\beta \in N \backslash \alpha_i$ alors $t_i \restriction \beta \notin T_{\delta_N}$. Soit $\alpha = max\{\alpha_i \colon i < p\}$. Clairement $\alpha \in N$. Par le Lemme 3.2.1 il existe $X \in N \cap E$, $\alpha \in X$ et $t_p \restriction \delta_X \notin Cof(X)$. Puisque $\alpha \in X$ et $X \subseteq N \cap H_\mu$, pour tout $i < p$ $t_i \restriction \delta_X \notin Cof(X)$. Par conséquent X satisfait les conclusions du lemme.

$\square$

Théorème 3.2.3. MRP *implique que pour tout $\lambda \geq \omega_2$ et pour tout $(\lambda, < \omega_1)$-club arbre T, T a une club branche.*

Démonstration. Nous démontrons ce théorème par l'absurde.

Supposons qu'il existe λ et un $(\lambda, < \omega_1)$-club arbre T tel que T n'a pas de club branche. D'après la Remarque 3.2.2, si T est un $(\lambda, < \omega_1)$-arbre alors T a une branche. Soit $M \prec H_\theta$ tel que $T, \mu, \theta_0 \in M$. Soit $(E_i)_{i<\omega}$ une énumération de tous les clubs de $[H_\mu]^\omega$ dans M. De plus, soit $(t_i)_{i<\omega}$ une énumération de $Cof(M)$.

Nous appliquons le précédent lemme : pour chaque $i < \omega$, il existe $X_i \in M \cap E_i$ tel que pour tout $k \leq i$, $t_k \restriction \delta_{X_i} \notin Cof(X_i)$. Par le même raisonnement que celui du précédent lemme, il existe $\alpha_i \in X_i$ tel que si $Y \subseteq X$ et $\alpha_i \in Y$, alors pour tout $k \leq i$, $t_k \restriction \delta_Y \notin Cof(Y)$.

Nous définissons $\Sigma(M) = \bigcup_{i \in \omega} [\{\alpha_i\}, X_i]$. Σ est bien une application ouverte stationnaire. En appliquant MRP, soit $(M_\xi)_{\xi<\omega_1}$ une suite de réflexion pour Σ. On pose $M = \bigcup_{\xi \in \omega_1} M_\xi$ et prenons un $t \in T_{\delta_M}$.

Sous lemme 3.2.1. *L'ensemble $C = \{\xi \in \omega_1 \colon t \restriction \delta_{M_\xi} \in Cof(M_\xi)\}$ contient un club.*

Démonstration du sous lemme. Soit $C_0 = \{\xi \in \omega_1 \colon \delta_{M_\xi} \in C^t\}$. C_0 est un club. Soit $C_1 = \{\xi \in C_0 \colon \sup\{\alpha \in M_\xi \colon t \restriction \alpha \in M_\xi\} = \delta_{M_\xi}\}$. $Lim(C_1)$ est un club et $Lim(C_1) \subseteq C$. □

Nous pouvons à présent terminer la démonstration du théorème 3.2.3 en obtenant une contradiction. Soit ξ un point limite de C. Nous choisissons une suite croissante $(\xi_n)_{n\in\omega}$ d'ordinaux de C telle que $\sup\{\xi_n \colon n \in \omega\} = \xi$ et soit δ_n l'ordinal désignant $\delta_{M_{\xi_n}}$, δ désignant δ_{M_ξ}. Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $M_{\xi_n} \cap H_\mu \in \Sigma(M_\xi)$. Cependant $t \restriction \delta \in Cof(M_\xi)$, donc il existe $i_0 \in \omega$ tel que $t \restriction \delta = t_{i_0}$. Puisque pour tout $n > n_0$, $M_{\xi_n} \in \Sigma(M_\xi)$ et $M_\xi = \bigcup_{n\in\omega} M_{\xi_n}$, il existe n tel que $M_{\xi_n} \cap H_\mu \in [\{\alpha_i\}, X_i]$ avec $i > i_0$. Mais alors $t \restriction \delta_n \notin Cof(M_{\xi_n})$, ce qui est contradictoire. □

Théorème 3.2.4. MRP + MA *implique que pour tout* $\lambda \geq \omega_2$ *et pour tout* $(\lambda, < \omega_2)$*-club arbre* T*,* T *a une club branche.*

Démonstration. Nous démontrons ce théorème par l'absurde.

Nous supposons qu'il existe λ et un $(\lambda, < \omega_2)$-club arbre T tel que T n'a pas de club branche. Soit $M \prec H_\theta$ tel que $T, \mu, \theta_0 \in M$ et soit $(E_i)_{i<\omega}$ une énumération de tous les clubs de $[H_\mu]^\omega$ dans M.

En utilisant MA, nous construisons par généricité un suite $(X_i)_{i<\omega}$ telle que pour tout $t \in Cof(M)$, il existe un entier i_0 tel que si $i > i_0$, alors $t \restriction \delta_{X_i} \notin Cof(X_i)$.

Pour cela introduisons le forcing $\mathbb{P}$ suivant :

$$\mathbb{P} = \{((\alpha_i, X_i)_{i\leq n}, \mathcal{T}) \colon \text{ pour chaque } i < n,\ X_i \in M \cap E_i,\ \alpha_i \in X_i$$
$$\text{et } \mathcal{T} \text{ est une partie finie de } Cof(M)\}.$$

L'ordre $\leq_{\mathbb{P}}$ sur $\mathbb{P}$ est le suivant : $p \leq_{\mathbb{P}} q$ si :

(a) $q = ((\alpha_i^q, X_i^q)_{i\leq j}, \mathcal{T}^q)$

(b) $p = ((\alpha_i^p, X_i^p)_{i\leq k}, \mathcal{T}^p)$

(c) $\mathcal{T}^q \subseteq \mathcal{T}^p$

(d) $j \leq k$ et pour chaque $i \leq j$, $\alpha_i^p = \alpha_i^q$ et $X_i^p = X_i^q$

(e) pour chaque $t \in \mathcal{T}^q$, et pour chaque i, $j+1 \leq i \leq k$, si $Y \in [\{\alpha_i\}, X_i]$ alors $t \restriction \delta_Y \notin Cof(Y)$.

Le forcing $\mathbb{P}$ est ccc. De plus, d'après le lemme 3.2.2, pour chaque $t \in Cof(M)$, et pour chaque $i \in \omega$, $D^{(t,i)} = \{p \in \mathbb{P} \colon t \in \mathcal{T} \text{ et } lg(p) > i\}$ est dense. En appliquant MA, il existe un filtre G tel que pour tout $t \in Cof(M)$, et pour tout $i \in \omega$, $D^{(t,i)} \cap G \neq \emptyset$. Soit (α_i^G, X_i^G) la suite générique obtenue à partir du filtre.

Nous définissons l'application ouverte stationnaire Σ par :

$$\Sigma(M) = \bigcup_{i\in\omega} [\{\alpha_i^G\}, X_i^G]$$

Par le même raisonnement que celui du précédent lemme, Σ ne se reflète pas.

$\square$

3.3 MRP et les propriétés d'arbres généralisées

3.3.1 Les principes ISP, ITP, SP et TP

Dans cette section, nous rappellerons la définition des principes combinatoires introduits par Weiß [29] dans sa thèse.

Définition 3.3.1. *Soit κ un cardinal régulier et $\lambda \geq \kappa$. Une liste $D = (d_X)_{X\in[\lambda]^{<\kappa}}$ est une suite telle que pour tout $X \in [\lambda]^{<\kappa}$, $d_X \subseteq X$.*

Définition 3.3.2. *Soit $D = (d_X)_{X\in[\lambda]^{<\kappa}}$ une liste.*

1. *D est mince (thin) si pour tout $X \in [\lambda]^{<\kappa}$, $|\{d_Y \cap X \colon X \subseteq Y\}| < \kappa$.*
2. *D est élancée (slender) si pour tout θ suffisamment large il existe un club $C \subseteq [H_\theta]^{<\kappa}$ tel que pour tout $M \in C$ et pour tout $X \in M \cap [\lambda]^{\omega_1}$, $d_{M\cap\lambda} \cap X \in M$.*

Remarque 3.3.1. Si D est une liste mince, alors D est élancée.

Définition 3.3.3. *Soit $D = (d_X)_{X\in[\lambda]^{<\kappa}}$ une liste.*

1. *D a une branche cofinale (cofinal branch) si il existe un sous ensemble $B \subseteq \lambda$ tel que pour tout $X \in [\lambda]^{<\kappa}$, il existe $Y \in [\lambda]^{<\kappa}$, $X \subseteq Y$ et $d_Y \cap X = B \cap X$.*
2. *D a une branche ineffable (ineffable branch) si il existe un sous ensemble $B \subseteq \lambda$ et un ensemble stationnaire $S \subseteq [\lambda]^{<\kappa}$ tel que pour tout $X \in S$, $d_X = B \cap X$.*

Définition 3.3.4. *Soit κ un cardinal régulier, et $\lambda \geq \kappa$.*

1. *le principe* $\mathrm{TP}(\lambda, \kappa)$ *est satisfait si toute liste mince $(d_X)_{X\in\lambda]^{<\kappa}}$ a une branche cofinale.*
2. *le principe* $\mathrm{SP}(\lambda, \kappa)$ *est satisfait si toute liste élancée $(d_X)_{X\in\lambda]^{<\kappa}}$ a une branche cofinale.*
3. *le principe* $\mathrm{ITP}(\lambda, \kappa)$ *est satisfait si toute liste mince $(d_X)_{X\in\lambda]^{<\kappa}}$ a une branche ineffable.*
4. *le principe* $\mathrm{ISP}(\lambda, \kappa)$ *est satisfait si toute liste élancée $(d_X)_{X\in[\lambda]^{<\kappa}}$ a une branche ineffable.*

Remarque 3.3.2. Notre définition de liste mince est légèrement différente de celle que Weiß a définie dans le sens ou elle ne se restreint pas à un club. Cependant si on note $\mathrm{TP}^*(\lambda, \kappa)$ le principe combinatoire obtenu à partir de la définition originale, $\mathrm{TP}^*(\lambda, \kappa)$ est équivalent à $\mathrm{TP}(\lambda, \kappa)$. La même remarque est applicable à ITP.

Remarque 3.3.3. $\mathrm{ISP}(\lambda, \kappa)$ implique $\mathrm{ITP}(\lambda, \kappa)$ et $\mathrm{SP}(\lambda, \kappa)$. $\mathrm{ITP}(\lambda, \kappa)$ implique $\mathrm{TP}(\lambda, \kappa)$. $\mathrm{TP}(\omega_2, \omega_2)$ est équivalent à la formulation : il n'y a pas d'arbre d'Aronszajn sur ω_2.

Les caractérisations suivantes sont dues à Jech [11], Magidor [18] et Weiß[29] :

Théorème 3.3.1. *Soit κ un cardinal.*

- *κ est fortement compact si et seulement si κ est inaccessible et* $\mathrm{TP}(\lambda, \kappa)$ *est satisfait pour tout $\lambda \geq \kappa$.*
- *κ est supercompact si et seulement si κ est inaccessible et* $\mathrm{ITP}(\lambda, \kappa)$ *est satisfait pour tout $\lambda \geq \kappa$.*

3.3.2 MRP+MA implique ITP(λ, ω_2) pour tout $\lambda \geq \omega_2$

Nous allons démontrer que MRP + MA implique que pour tout $\lambda \geq \omega_2$, $\mathrm{ITP}(\lambda, \omega_2)$. Comme corollaire immédiat, MRP + MA implique qu'il n'y a pas d'arbre Aronszajn de hauteur ω_2. Ce résultat améliore le résultat de Baumgartner qui a montré que PFA implique qu'il n'y pas d'arbre d'Aronszajn de hauteur ω_2.

Nous rappelons l'énoncé du théorème :

Théorème 3.3.2. MRP+MA *implique que* $\forall \lambda \geq \omega_2$, $\mathrm{ITP}(\lambda, \omega_2)$ *est satisfait.*

Avant de prouver le Théorème 3.3.2, nous introduisons quelques notations. Dans ce qui suit, nous fixons un cardinal régulier μ tel que $[\lambda]^{\leq\omega_1}, 2^\lambda \subseteq H_\mu$ et un cardinal régulier θ_0 tel que $H_\mu \in H_{\theta_0}$.

Soit $D = \{d_X \colon X \in [\lambda]^{\leq\omega_1}\}$ une liste mince. Pour tout $X \in [\lambda]^{\leq\omega_1}$, nous définissons :

$$T_X = \{d_Y \cap X \colon Y \in [\lambda]^{\leq\omega_1} \text{ et } X \subseteq Y\}.$$

D est mince, donc pour tout $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1}$, $|T_X| \leq \omega_1$.

Pour chaque θ et chaque $M \subseteq H_\theta$, soit $\delta_M = \sup(M \cap \lambda)$. Nous noterons $\overline{M}$ pour désigner la clôture de Skolem de $\omega_1 \cup M$ dans H_θ.

Définition 3.3.5. *Soit $Z \in [\lambda]^{\leq \omega_1}$. Nous dirons que Z est M-cofinal si pour tout $X \in M \cap [\lambda]^{\leq \omega_1}$, $Z \cap X \in M$. Nous posons :*

$$Cof(M) = \{Z \in T_{\overline{M}} \colon Z \textit{ est } M - \textit{cofinal } \}.$$

Nous posons de plus :

$$Branch(M) = \{Z \in T_{\overline{M}} \colon \textit{ il existe } B \subseteq \lambda \textit{ dans } M \quad \textit{tel que } B \cap \overline{M} = Z\}.$$

Enfin nous posons :

$$S(M) = Cof(M) \setminus Branch(M).$$

Nous remarquons que, puisque D est mince, $|S(M)| \leq \omega_1$. De plus $Cof(M) = Cof(M \cap H_\mu)$, $Branch(M) = Branch(M \cap H_\mu)$ et $S(M) = S(M \cap H_\mu)$.

Lemme 3.3.1. *Soit M un sous modèle élémentaire dénombrable de H_{θ_0} tel que $D, \mu \in M$. Soit $Z_0 \in S(M)$ et $E \in M$ un club de $[H_\mu]^\omega$. Il existe $N \in E \cap M$ tel que $Z_0 \cap \overline{N} \notin S(N)$.*

Démonstration. Fixons $Z_0 \in S(M)$ et supposons pour obtenir une contradiction qu'il existe un club $E \in M$ tel que pour tout $N \in E \cap M$, $Z_0 \cap \overline{N} \in S(N)$. Pour chaque $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1}$, nous choisissons $N_X \in E$ tel que $X \in N_X$. Pour chaque $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1}$, nous définissons :

$$T'_X = T_X \cap N_X \text{ et } T''_X = \{Z \in T'_X \colon \text{ pour chaque } Y \subseteq X,\, Z \cap Y \in T'_Y\}.$$

Remarquons que pour tout $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1} \cap M$, $T''_X \in M$.

Sous lemme 3.3.1. *Pour tout* $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1} \cap M$*,* $Z_0 \cap X \in T''_X$*.*

Démonstration du sous lemme. Soit $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1} \cap M$. $Z_0 \in Cof(M)$, donc $Z_0 \cap X \in M$. Alors $Z_0 \cap X \in T_X$. Pour chaque $Y \subseteq X$, $Z_0 \cap X \cap Y = Z_0 \cap Y \in N_Y$ puisque $Z_0 \cap \overline{N}_Y \in S(N_Y)$, ainsi $Z_0 \cap X \cap Y \in T'_Y$. En particulier $Z_0 \cap X \in T'_X$. Par conséquent pour tout $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1} \cap M$, $Z_0 \cap X \in T''_X$. $\square$

A partir $(T''_X \colon X \in [\lambda]^{\leq \omega_1})$ nous construisons par induction un arbre bien taillé (well pruned tree), i.e. une suite $(T^\infty_X \colon X \in [\lambda]^{\leq \omega_1})$ telle que pour chaque $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1}$, pour chaque $Z \in T^\infty_X$ et pour tout $Y \in [\lambda]^{\leq \omega_1}$, $X \subseteq Y$, il existe $Z' \in T^\infty_Y$ tel que $Z' \cap X = Z$.

Posons

$$T^0 = (T^0_X \colon X \in [\lambda]^{\leq \omega_1}) \text{ où } T^0_X = T''_X \text{ pour chaque } X \in [\lambda]^{\leq \omega_1}.$$

Par induction, pour chaque $\alpha < (\lambda^{\aleph_1})^+$ nous définissons une suite $T^\alpha = (T^\alpha_X \colon X \in [\lambda]^{\leq \omega_1})$ telle que pour tout $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1}$, si $\alpha = \beta + 1$:

$$T^\alpha_X = \{Z \in T^\beta_X \colon \text{ pour tout } Y \in [\lambda]^{\leq \omega_1},\ X \subseteq Y, \text{ il existe } Z' \in T^\beta_Y \text{ tel que } Z' \cap X = Z\}$$

et si α est limite :

$$T^\alpha_X = \bigcap_{\beta < \alpha} T^\beta_X.$$

Enfin $T^\infty = (T^\infty_X \colon X \in [\lambda]^{\leq \omega_1})$ est une suite telle que pour chaque $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1}$,

$$T^\infty_X = \bigcap \{T^\alpha_X \colon \alpha < (\lambda^{\aleph_1})^+\}.$$

Sous lemme 3.3.2. $(T^\infty_X \colon X \in [\lambda]^{\leq \omega_1})$ *est bien taillé et pour tout* $X \in [\lambda]^{\leq \omega_1} \cap M$*,* $Z_0 \cap X \in T^\infty_X$*.*

Démonstration du sous lemme. Pour chaque $\alpha < (\lambda^{\aleph_1})^+$, posons :

$$D^\alpha = \bigcup \{T_X^\alpha \colon X \in [\lambda]^{\omega_1}\}$$

$(D^\alpha)_{\alpha<(\lambda^{\aleph_1})^+}$ est une suite décroissante de sous ensembles $[\lambda]^{\leq\omega_1}$, donc il existe $\alpha < (\lambda^{\aleph_1})^+$ tel que pour tout $\beta \in (\lambda^{\aleph_1})^+ \setminus \alpha$, $D^\alpha = D^\beta$. Donc $(T_X^\infty \colon X \in [\lambda]^{\leq\omega_1})$ est bien taillé.

T^∞ est défini par induction à paramètres dans M, donc T^∞ est dans M. Puisque pour chaque $\alpha \in M \cap (\lambda^{\aleph_1})^+$ et pour chaque $X \in M$, $Z_0 \cap X \in T_X^\alpha$, par élémentarité $Z_0 \cap X \in T_X^\infty$. □

Sous lemme 3.3.3. *Il existe $X_0 \in [\lambda]^{\leq\omega_1}$ et $(B_i)_{i<\omega}, B_i \subseteq \lambda$ tels que pour tout $Y \in [\lambda]^{\leq\omega_1}$, si $X_0 \subseteq Y$ alors $T_Y^\infty = \{B_i \cap Y \colon i \in \omega\}$ et si $i \neq i'$ $B_i \cap Y \neq B_{i'} \cap Y$.*

Démonstration du sous lemme. Cette preuve est similaire au cas d'un μ-arbre de hauteur κ avec $\kappa > \mu$. Soit $X \subseteq Y$, nous dirons qu'il y a un branchement entre X et Y si il existe $Z, Z' \in T_Y^\infty$ tel que $Z \neq Z'$ et $Z \cap X = Z' \cap X$. Supposons que pour tout X, il existe Y, $X \subseteq Y$ tel qu'il y a un branchement entre X et Y. Nous pouvons définir une suite $(X_i)_{i<\omega_1}$ et une suite $(Z_i)_{i<\omega_1}$ tels que $(X_i)_{i<\omega_1}$ est croissante, pour tout $i < \omega_1$ $Z_i \in T_{X_i}^\infty$, et pour tout $i < j < \omega_1$ $Z_j \cap X_i \neq Z_i$. Si nous définissons $X_{\omega_1} = \bigcup_{i\in\omega_1} X_i$, alors pour tout i il existe un $Z_i' \in T_{X_{\omega_1}}^\infty$ tel que $Z_i' \cap X_i = Z_i$. Mais $|\{Z_i \colon i \in \omega_1\}| = \aleph_1$ et $|T_{X_{\omega_1}}^\infty| \leq \aleph_0$, ce qui entraine une contradiction.

Donc il existe X_0 tel que pour tout $Y \supseteq X_0$, il n'y a pas de branchement entre X_0 et Y. Soit $\{Z_i \colon i \in \omega\}$ une énumération de $T_{X_0}^\infty$. Pour chaque i nous pouvons définir :

$$Seg_Y^{Z_i} = \{Z' \in T_Y^\infty \colon Z' \cap X_0 = Z_i\}.$$

Notons que $|Seg_Y^{Z_i}| = 1$. Soit $B_i = \bigcup_{X_0 \subseteq Y} Seg_Y^{Z_i}$. $\square$

Maintenant nous sommes prêts pour prouver le Lemme 3.3.1. Supposons que $X_0 \in M$ et $(B_i)_{i<\omega} \in M$ satisfait la conclusion du Sous lemme 3.3.3. Pour chaque $Y \in M$ tel que $X_0 \subseteq Y$, $Z_0 \cap Y \in T_Y^\infty$, donc il existe $i_Y \in \omega$ tel que $Z_0 \cap Y = B_{i_Y} \cap Y$. Notons que si $Y, Y' \supseteq X_0$, $i_Y = i_{Y'}$. Soit $i_0 = i_{X_0}$, alors $B_{i_0} \in M$ et $B_{i_0} \cap \overline{M} = Z_0$, ce qui contredit que $Z_0 \notin Branch(M)$.

$\square$

Nous fixons un cardinal régulier θ tel que $H_{\theta_0} \in H_\theta$.

Lemme 3.3.2. *Soit M un sous modèle élémentaire dénombrable de H_θ tel que $D, \mu, \theta_0 \in M$. Soit $(Z_i)_{i<n}$ une suite finie dans $S(M)$ et $E \in M$ un club dans $[H_\mu]^\omega$. Il existe $N \in E \cap M$ tel que pour tout $i < n$, $Z_i \cap \overline{N} \notin S(N)$.*

Démonstration. Nous prouvons ce lemme par induction sur la longueur de la suite.

Cas $n = 1$: La preuve est la même que celle du précédent lemme.

Cas $n = p + 1$: Soit $E \in M$ un club dans $[H_\mu]^\omega$. On pose

$$E' = \{N \prec H_{\theta_0} \colon E, \mu, D \in N\} \text{ et } E'' = \{N \cap H_\mu \colon N \in E'\}$$

E' et E'' sont dans M. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse d'induction à E'' : il existe $N \in M \cap E'$ tel que pour tout $i < p$, $Z_i \cap \overline{N} \notin S(N)$. Il y a alors deux cas : soit $Z_p \cap \overline{N} \notin S(N)$ et donc $N \cap H_\mu$ satisfait la conclusion du lemme. Dans le cas contraire $Z_p \cap \overline{N} \in S(N)$. Donc $N \prec H_{\theta_0}$, $E \in M$ est un club dans $[H_\mu]^\omega$ et $Z_p \cap \overline{N} \in S(N)$. Puisque pour tout $i < p$ $Z_i \cap \overline{N} \notin S(N)$, il existe $X_i \in N \cap [\lambda]^{\leq \omega_1}$ tel que $Z \cap X_i \notin N$ ou $X_i \cap \overline{N} = Z_i \cap \overline{N}$. Soit $X = \{X_i \colon i < p\}$, clairement $X \in N$. E est un club dans $[H_\mu]^\omega$, donc d'après le Lemme 3.3.1 il existe $N' \in N \cap E$, $X \in N'$ et $Z_p \cap \overline{N'} \notin S(N)$.

Puisque $X \in N'$ et $N' \subseteq N \cap H_\mu$, pour tout $i < p$ $Z_i \cap \overline{N'} \notin S(N')$. Ainsi N' satisfait la conclusion du lemme. $\square$

Lemme 3.3.3. *Supposons que* $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ *soit satisfait. Pour chaque sous modèle élémentaire dénombrable* M *de* H_θ *tel que* $D, \mu, \theta_0 \in M$*, et pour chaque énumération* $(C_i)_{i<\omega}$ *de club de* $[H_\mu]^\omega$ *dans* M*, il existe une suite* $(X_i, N_i)_{i<\omega}$ *telle que pour tout* $i < \omega$ *on a :*

(i) $X_i \in M \cap H_\mu$

(ii) $N_i \in M \cap [H_\mu]^\omega$

(iii) $X_i \in N_i$

(iv) $N_i \in C_i$

et :

(v) pour tout $Z \in S(M)$*, il existe* i_0 *tel que pour tout* $j > i_0$*, et tout* $N' \in [\{X_j\}, N_j]$*,* $Z \cap \overline{N'} \notin S(N')$

Démonstration. Soit M un sous modèle élémentaire dénombrable de H_θ. Nous fixons une énumération $(C_i)_{i<\omega}$ des clubs de $[H_\mu]^\omega$ in M.

Soit $\mathbb{P}$ le forcing constitué des pairs $((X_i, N_i)_{i<n}, \mathcal{Z})$ tels que pour tout $i < n$:

(i) $X_i \in M \cap H_\mu$

(ii) $N_i \in M \cap [H_\mu]^\omega$

(iii) $X_i \in N_i$

(iv) $N_i \in C_i$

(v) $\mathcal{Z}$ est une sous ensemble fini de $S(M)$

On définit l'ordre suivant sur $\mathbb{P}$. $p \leq_{\mathbb{P}} q$ si :

(a) $q = ((X_i^q, N_i^q)_{i\leq j}, \mathcal{Z}^q)$

(b) $p = ((X_i^p, N_i^p)_{i\leq k}, \mathcal{Z}^p)$

(c) $\mathcal{Z}^q \subseteq \mathcal{Z}^p$

(d) $j \leq k$ et pour chaque $i \leq j$, $X_i^p = X_i^q$ et $N_i^p = N_i^q$

(e) pour chaque $Z \in \mathcal{Z}^q$, et pour chaque i, $j+1 \leq i \leq k$, si $N' \in [\{X_i\}, N_i]$ alors $Z \cap \overline{N'} \notin S(N')$.

Si $p \in \mathbb{P}$, $lg(p)$ désignera l'entier tel que $p = ((X_i^p, N_i^p)_{i \leq lg(p)}, \mathcal{Z}^p)$.

Sous lemme 3.3.4. *$\mathbb{P}$ est un forcing ccc.*

Démonstration du sous lemme. Par l'absurde soit A une antichaine de taille $\aleph_1$. Alors il existe $p \in A$, $q \in A$ avec la même suite finie, i.e $p = (s, \mathcal{Z}^p)$ et $q = (s, \mathcal{Z}^q)$ et ainsi $r = (s, \mathcal{Z}^p \cup \mathcal{Z}^q)$ est une condition dans $\mathbb{P}$ en dessous de p et q. □

Sous lemme 3.3.5. *Pour chaque $Z \in S(M)$ et $i \in \omega$,*

$$D^{Z,i} = \{p \in \mathbb{P} \colon Z \in \mathcal{Z}^p \text{ et } lg(p) \geq i\}$$

est dense.

Démonstration du sous lemme. Pour le démontrer, prenons

$$p = ((X_k^p, N_k^p)_{k \leq lg(p)}, \mathcal{Z}^p) \in \mathbb{P}.$$

Soit $\mathcal{Z}^q = \mathcal{Z}^p \cup \{Z\}$. D'après le Lemme 3.3.3, pour chaque k, $lg(p) \leq k \leq i$, il existe $N_k \in C_k$ tel que pour tout $Z' \in \mathcal{Z}^q$, $Z' \cap \overline{N}_k \notin S(N_k)$. Donc pour tout $Z' \in \mathcal{Z}^q$ il existe $X_k^{Z'} \in N_k$ tel que $Z' \cap X_k^{Z'} \notin N_k$ ou $X_k^{Z'} \cap \overline{N_k} = Z' \cap \overline{N_k}$. Posons $X_k = \{X_k^{Z'} \colon Z' \in \mathcal{Z}^q\}$. Donc pour tout $N' \in [\{X_k\}, N_k]$, et pour tout $Z' \in \mathcal{Z}^q$, $Z' \cap \overline{N'} \notin S(N')$. Ainsi $q = ((X_k^p, N_k^p)_{k \leq i}, \mathcal{Z}^q)$ est dans $D^{Z,i}$ et $q \leq_{\mathbb{P}} p$. □

Nous pouvons à présent terminer la démonstration du Lemme 3.3.3. Puisque $|S(M)| \leq \aleph_1$, nous pouvons appliquer $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ à la famille $(D^{Z,i})_{Z \in S(M), i \in \omega}$.

Soit G un filtre générique pour cette famille. Nous définissons $(X_i, N_i)_{i<\omega}$ comme la suite telle que pour tout $n < \omega$, il existe $p \in G$ tel que $(X_i, N_i)_{i<n} = (X_i^p, N_i^p)_{i<n}$. Cette suite satisfait la conclusion du lemme. $\square$

Théorème 3.3.3. *Supposons que* MRP + MA *soit satisfait. Soit* $(d_X)_{X\in[\lambda]^{\omega_1}}$ *une liste mince. Alors l'ensemble*

$$S = \{M \in [H_\mu]^{\omega_1} : \exists B \subseteq \lambda, B \in M \textit{ et } B \cap M = d_M\}$$

est stationnaire.

Démonstration. Supposons pour aboutir à une contradiction que S ne soit pas stationnaire. Nous allons construire une fonction stationnaire qui ne se reflète pas.

Soit $F : [H_\mu]^{<\omega} \to H_\mu$ une algèbre telle que $X \in [\lambda]^{\omega_1}$, $cl_F(X \cup \omega_1) \notin S$. Soit $C = \{cl_F(X) : X \in [\lambda]^\omega\}$. Clairement C est un club dans $[\lambda]^\omega$ et pour chaque $\in$-chaine croissante continue $(X_\xi)_{\xi<\omega_1}$ dans C, $X = \bigcup_{\xi\in\omega_1} X_\xi \notin S$. Soit $C' = \{M \prec H_\theta : M \cap H_\mu \in C\}$.

Nous définissons l'application stationnaire Σ suivante : Pour chaque M dans C' il existe une suite $(X_i, N_i)_{i<\omega}$ qui satisfait le Lemme 3.3.3, soit

$$\Sigma(M) = \bigcup\{[\{X_i\}, N_i] : i < \omega\}$$

D'après le Lemme 3.3.3, Σ est une application ouverte stationnaire. Nous allons montrer que la fonction Σ ne se reflète pas.

Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite de réflexion $(M_\xi)_{\xi<\omega_1}$ pour Σ. On pose $M = \bigcup_{\xi<\omega_1} M_\xi$ et $Z_M = d_{M\cap\lambda}$.

Sous lemme 3.3.6. *L'ensemble* $E = \{\xi \in \omega_1 : Z_M \cap \overline{M}_\xi \in Cof(M_\xi)\}$ *est un club.*

Démonstration du sous lemme. Nous montrons d'abord que E est cofinal. Soit $\xi_0 \in \omega_1$. Nous construisons par induction une suite croissante $(\xi_n)_{n<\omega}$ d'ordinaux de ω_1. A l'étape n, puisque $\overline{M}_{\xi_n} \in M$, par élémentarité $T_{\overline{M}_{\xi_n}} \in M$. Mais $|T_{\overline{M}_{\xi_n}}| \leq \omega_1$, donc $T_{\overline{M}_{\xi_n}} \subseteq M$ et $Z_M \cap \overline{M}_{\xi_n} \in M$. Choisissons ξ_{n+1} tel que $Z_M \cap \overline{M}_{\xi_n} \in M_{\xi_{n+1}}$. Soit $\xi = sup\{\xi_n \colon n \in \omega\}$. Nous montrons que $\xi \in E$: prenons $X \in M_\xi$. $M_\xi = \bigcup_{n\in\omega} M_{\xi_n}$. Donc il existe un entier n tel que $X \in M_{\xi_n}$. Par induction, $Z_M \cap \overline{M}_{\xi_n} \in M_{\xi_{n+1}}$. Ainsi $Z_M \cap \overline{M}_{\xi_n} \cap X \in M_\xi$. Donc $Z_M \cap X \in M_\xi$.

Nous montrons que E est clos. Soit ξ un point limite de E et $(\xi_n)_{n\in\omega}$ une suite dans E telle que $sup_{n\in\omega}\xi_n = \xi$. Soit $X \in M_\xi \cap [\lambda]^{\leq\omega_1}$. Il existe un $n \in \omega$ tel que $X \in M_{\xi_n}$. Mais ξ_n est dans E donc $Z_M \cap X \in M_{\xi_n} \subseteq M_\xi$. Donc $\xi \in E$. □

Sous lemme 3.3.7. *L'ensemble* $E' = \{\xi \in \omega_1 \colon Z_M \cap \overline{M}_\xi \notin Branch(M_\xi)\}$ *est un club.*

Démonstration du sous lemme. Supposons pour obtenir une contradiction que E' n'est pas un club. L'ensemble $\{M_\xi \colon \xi \notin E'\}$ est stationnaire dans $[M]^\omega$ et pour chaque M_ξ il existe $B_\xi \in M_\xi$ tel que $B_\xi \cap \overline{M}_\xi = Z_M \cap \overline{M}_\xi$. D'après le Lemme de Fodor, il existe un ensemble stationnaire $T \subseteq \omega_1$ et $B \in M$ tel que pour tout $\xi \in T$, $B \cap \overline{M}_\xi = Z_M \cap \overline{M}_\xi$. Mais $\bigcup_{\xi\in T} \overline{M}_\xi = M$, donc $B \cap M = Z_M$ et $M \cap H_\mu \in S$. Cependant $(M_\xi \cap H_\mu)_{\xi<\omega_1}$ est une $\in$-chaine croissante dans C. Donc $M \cap H_\mu \notin S$, ce qui est contradictoire. □

Sous lemme 3.3.8. *La fonction* Σ *ne se reflète pas.*

Démonstration du sous lemme. Prenons ξ un point limite dans $E \cap E'$ et choisissons une suite croissante $(\xi_n)_{n\in\omega}$ dans $E \cap E'$ telle que $sup\{\xi_n \colon n \in \omega\} = \xi$. $(M_\xi)_{\xi<\omega_1}$ est une suite de réflexion Σ, donc il existe $n_0 \in \omega$ tel que pour tout $n > n_0$, $M_{\xi_n} \cap H_\mu \in \Sigma(M_\xi)$. Cependant $Z_M \cap \overline{M}_\xi \in S(M_\xi)$, donc il existe $i_0 \in \omega$ tel que pour tout $j > i_0$ et pour tout $M' \in [\{X_j\}, N_j]$,

$Z_M \cap \overline{M'} \notin S(M')$. Puisque pour tout $n > n_0$, $M_{\xi_n} \cap H_\mu \in \Sigma(M_\xi)$ et $M_\xi = \bigcup_{n\in\omega} M_{\xi_n}$, il existe n tel que $M_{\xi_n} \cap H_\mu \in [\{X_j\}, N_j]$ avec $j > i_0$. Mais alors $Z_M \cap \overline{M}_{\xi_n} \notin S(M_{\xi_n})$, ce qui est contradictoire. $\square$

$\square$

Théorème 3.3.4. MRP+MA *implique que* $\mathrm{ITP}(\lambda, \omega_2)$ *est satisfait* $\forall \lambda \geq \omega_2$.

Démonstration. Soit λ un cardinal régulier. Soit $(d_X)_{X\in[\lambda]^{\omega_1}}$ une liste mince. D'après le Théorème 3.3.3, l'ensemble S est stationnaire. En appliquant le lemme de Fodor, il existe un ensemble stationnaire $S' \subseteq S$ et $B \subseteq \lambda$ tel que pour tout $X \in S'$, $B \cap X = d_X$. Donc B est une branche ineffable pour $(d_X)_{X\in[\lambda]^{\omega_1}}$. $\square$

Corollaire 3.3.1. MRP + MA *implique qu'il n'y a pas d'arbre d'Aronszajn sur* ω_2.

Les corollaires suivant sont des conséquences directes des Théorèmes de Viale-Weiß 3.1.2 et 3.1.3 :

Corollaire 3.3.2. *Soit* $\mathbb{P}$ *une itération standard de forcings de longueur* κ *qui collapse* κ *sur* ω_2 *et force* MRP + MA. *Alors* κ *est un cardinal fortement compact dans le modèle de base.*

Corollaire 3.3.3. *Soit* $\mathbb{P}$ *un forcing propre obtenu par itération standard de forcings de longueur* κ*, qui collapse* κ *sur* ω_2 *et force* MRP + MA. *Alors* κ *est un cardinal supercompact dans le modèle de base.*

3.3.3 MRP n'implique pas TP(ω_2, ω_2)

Dans cette section, nous donnons la preuve d'un résultat non publié de Magidor, qui est que MRP est consistant avec $\square_{\omega_1,\omega_1}$. Ce résultat a pour conséquence que MRP seul ne peut impliquer le principe d'arbre le plus faible, à savoir $\mathrm{TP}(\omega_2, \omega_2)$. En fait, $\square_{\omega_1,\omega_1}$ est équivalent à l'existence d'un arbre d'Aronszajn spécial, ce qui est plus fort que $\neg\mathrm{TP}(\omega_2, \omega_2)$.

Nous rappelons la définition du principe $\square_{\omega_1,\omega_1}$:

Définition 3.3.6. *Le principe $\square_{\kappa,\lambda}$ est le satisfait si il existe une suite $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha \in Lim(\kappa^+)}$ telle que*

1. *pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$, $|\mathcal{C}_\alpha| \leq \lambda$.*
2. *pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$ et $C \in \mathcal{C}_\alpha$, C est un club dans α et $ot(C) \leq \kappa$.*
3. *pour chaque $\alpha \in Lim(\lambda)$ et $C \in \mathcal{C}_\alpha$, si $\beta \in Lim(C)$ alors $C \cap \beta \in \mathcal{C}_\beta$.*

Brièvement, l'idée de la preuve est la suivante. Nous partons du ground model V dans lequel nous supposons l'existence d'un cardinal supercompact κ. De même que pour prouver la consistance de PFA, nous allons construire en utilisant ce cardinal supercompact une itération de forcings propres à support dénombrable. Les forcings utilisés à chaque étape de l'itération seront soit le forcing défini par Moore pour ajouter une suite de réflexion à une application ouverte stationnaire, soit un forcing ajoutant un club à partir de segment initiaux dénombrables dans le ground model V. Chaque $\mathcal{C}_\alpha$ de la suite témoignant $\square_{\omega_1,\omega_1}$ sera définie comme l'ensemble des clubs de α du ground model dans le cas où la cofinalité dans V de α est ω, soit l'ensemble réduit au club obtenu par forcing dans le cas contraire.

Nous commençons tout d'abord par rappeler les propriétés du forcing permettant d'ajouter un club par segment initiaux dénombrables. Nous soulignons au lecteur le fait que ce forcing est défini dans le ground model V, avant tout processus d'itération de forcing.

Définition 3.3.7. *Soit $\alpha < \kappa$ tel que $cof^V(\alpha) > \omega$. On définit (dans V) le forcing $\mathbb{R}_\alpha$ de la façon suivante :*

$$\mathbb{R}_\alpha = \{c \subseteq \alpha \colon c \textit{ est un sous ensemble clos dénombrable}\}$$

L'ordre sur $\mathbb{R}_\alpha$ *est l'ordre inverse de celui de l'extension par segment initiaux :*

$$c_p \leq c_q \text{ si et seulement si } c_q \subseteq c_p \text{ et } sup(c_q) \cap c_p = c_q$$

Proposition 3.3.1. *Soit* G *un filtre générique pour* $\mathbb{R}_\alpha$*. Alors*

$$V[G] \models cof(\alpha) = \omega_1$$

De plus si l'on pose

$$C_G = \bigcup\{c \colon c \in G\}$$

C_G *est un club de type d'ordre* ω_1 *tel que*

$$\forall\gamma < \alpha,\ C_G \cap \gamma \in V$$

Enfin le forcing $\mathbb{R}_\alpha$ *ne rajoute pas de nouveaux réels.*

Démonstration. Une réunion dénombrable d'ensembles clos dénombrables est un ensemble clos dénombrable, donc $\mathbb{R}_\alpha$ est σ-clos et par conséquent le forcing ne rajoute pas de réels.

Démontrons que la cofinalité de α dans $V[G]$ est ω_1. Pour tout $\gamma < \alpha$, l'ensemble $D_\gamma = \{c \in \mathbb{R}_\alpha \colon sup(c) > \gamma\}$ est dense. G étant générique, C_G est un ensemble cofinal de α. De plus, les conditions dans G sont compatibles, il en suit que pour tout $\gamma < \alpha$, il existe $c \in \mathbb{R}_\alpha$ dénombrable tel que $c \cap \gamma = C_G \cap \gamma$. Ainsi les segments initiaux $C_G \cap \gamma$ sont dans V et $ot(C_G \cap \gamma) < \omega_1$ pour tout $\gamma < \alpha$. D'après cette indication, on en déduit que $ot(C_G) \leq \omega_1$. $\mathbb{R}_\alpha$ est σ-clos, donc ω_1 n'est pas collapsé et par conséquent $ot(C_G) = \omega_1$. Il en suit immédiatement que $cof(\alpha)^{V[G]} = \omega_1$.

Il reste à démontrer que C_G est clos. Soit $x \subseteq C_G$ avec $sup(x) < \alpha$. D'après ce qui précède, x est dénombrable et $x \in V$. Or, par densité, il existe $c \in G$ clos tel que $x \subseteq c$ et donc $sup(x) \in C_G$. $\square$

Nous rappelons la définition du forcing de Moore $\mathbb{M}_\Sigma$.

Définition 3.3.8. *Soit Σ une application ouverte stationnaire. Le forcing $\mathbb{M}_\Sigma$ est défini comme l'ensemble des suites croissantes continues dans dom(Σ) de la forme $(N_\xi \colon \xi \colon \xi \leq \alpha)$ avec $\alpha < \aleph_1$ et telles que :*

$$\forall \xi \leq \alpha \text{ limite, } \exists \eta < \xi \text{ tel que } \forall \mu \in [\eta, \xi[,\ N_\mu \cap X \in \Sigma(N_\xi) \quad (*)$$

L'ordre sur $\mathbb{M}_\Sigma$ est l'ordre définit par inclusion inverse :
si $p = (N^p_\xi \colon \xi \leq \alpha^p)$ et $q = (N^q_\xi \colon \xi \leq \alpha^q)$, alors

$$p \leq q \leftrightarrow \begin{cases} \alpha^p \geq \alpha^q \\ \forall \xi \leq \alpha^q,\ N^p_\xi = N^q_\xi \end{cases}$$

Proposition 3.3.2. *Le forcing $\mathbb{M}_\Sigma$ est propre et ne rajoute pas de réels.*

Démonstration. Nous avons vu précédemment que le forcing $\mathbb{M}_\Sigma$ est propre. En réalité nous avons démontré la propriété plus forte que si M est un sous modèle élémentaire dénombrable de H_θ et que si $p \in \mathbb{M}_\Sigma \cap M$, alors il existe une condition $q \leq p$ telle que pour tout $D \in M$ dense, il existe $d \in M \cap D$ telle que $q \leq d$. Cette propriété garantie que le forcing ne rajoute pas de réel, car si $\dot{f} \in M$ est un terme pour une fonction de 2^ω, q décide toutes les valeurs prises par $\dot{f}$. $\square$

De plus nous avons besoin du théorème d'itération suivant.

Théorème 3.3.5 (Shelah)**.** *Soit $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi<\alpha}$ une itération de forcing à support dénombrable telle que pour tout $\xi < \alpha$, $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est propre et tout ensemble ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans l'extension générique contient un ouvert dense dans le ground model". Alors $\mathbb{P}_\alpha$ est propre et tout ensemble ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans $V^{\mathbb{P}_\alpha}$ contient un sous ensemble ouvert dense dans V.*

Soit $\mathbb{P}$ un forcing propre et $\dot{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{P}$-terme pour un forcing. Nous dirons que $\Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\dot{\mathbb{Q}}$ est V-propre" si pour θ suffisamment grand il existe un club C de sous modèle élémentaires dénombrables de H_θ tels que dans $V[G]$, pour tout $M \in C$ et toute condition $p \in M[G] \cap \mathbb{Q}$, il existe une condition $q \leq p$ qui est $(M[G], \mathbb{Q})$-générique. Nous remarquons qu'en reproduisant la démonstration de Shelah, le théorème 3.3.5 reste vrai en remplaçant la condition $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est propre" par $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi}$ "$\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est V-propre".

Pour construire notre système d'itération de forcing, nous allons suivre le même exemple que pour PFA. Nous utilisons donc une fonction de Laver obtenue à partir d'un cardinal supercompact.

Théorème 3.3.6 (Laver [16])**.** *Soit κ un cardinal supercompact. Il existe une fonction $f : \kappa \to V_\kappa$ telle que pour tout ensemble x et pour tout $\lambda \geq \kappa$ avec $\lambda \geq |tc(x)|$, il existe un plongement élémentaire $j : V \to M$ de point critique κ tel que $j(\kappa) > \lambda$, $M^\lambda \subseteq M$ et $j(f)(\kappa) = x$.*

Nous supposons à présent l'existence d'un cardinal supercompact et d'une fonction de Laver f. Nous allons définir notre itération de forcing $(\mathbb{P}_\xi, \dot{\mathbb{Q}}_\xi)_{\xi<\kappa}$. Celle-ci est à support dénombrable et est définie par récurrence de la façon suivante :

- si $\xi = \gamma + 1$ avec γ limite de cofinalité non dénombrable, $\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \mathbb{R}_\gamma$.
- si ξ est limite et $f(\xi) = \dot{\Sigma}$ avec $\dot{\Sigma}$ un $\mathbb{P}_\xi$-terme pour une fonction ouverte stationnaire, alors $\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \dot{\mathbb{M}}_\Sigma$ avec $\dot{\mathbb{M}}_\Sigma$ le $\mathbb{P}_\xi$-terme pour le forcing de Moore correspondant.
- $\dot{\mathbb{Q}}_\xi = \{\mathbb{1}\}$ sinon.

Pour s'assurer que le forcing $\mathbb{P}_\kappa$ est propre, nous démontrons la propriété suivante.

Proposition 3.3.3. *Pour tout $\alpha < \kappa$, le forcing $\mathbb{P}_\alpha$ est propre. De plus $\mathbb{P}_\alpha$ force que $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ est V-propre et que tout ensemble ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans l'extension générique contient un sous ensemble ouvert dense du ground model.*

Cette propriété se démontre par récurrence. L'initialisation est triviale. Supposons que l'on soit à l'étape ξ et que la propriété soit satisfaite pour tout $\alpha < \xi$.

- si ξ est limite, en utilisant le théorème d'itération de Shelah, $\mathbb{P}_\xi$ est propre et force que tout ensemble ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans l'extension générique contient un sous ensemble ouvert dense du ground model. De plus dans le cas où $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est de la forme $\dot{\mathbb{M}}_\Sigma$, nous avons vu que $\Vdash_{\mathbb{P}_\xi} \dot{\mathbb{M}}_\Sigma$ est propre. Dans l'autre cas, $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est le forcing trivial et on a bien dans les deux cas que $\mathbb{P}_\xi$ force que $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est V-propre.
- si $\xi = \alpha + 1$, nous distinguons les deux cas principaux où $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ est de la forme $\dot{\mathbb{M}}_\Sigma$ et où $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ est de la forme $\mathbb{R}_\alpha$.

  On suppose que l'on a démontré la propriété (*) suivante : soit $\mathbb{P}$ un forcing propre tel que tout ensemble ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans l'extension générique contient un sous ensemble ouvert dense du ground model. Soit $\beta < \kappa$. Alors $\mathbb{P}$ force que $\mathbb{R}_\beta$ est V-propre et ne rajoute pas de réels.

  Dans le cas où $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ est de la forme $\dot{\mathbb{M}}_\Sigma$, puisque $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ "$\dot{\mathbb{M}}_\Sigma$ est propre", $\mathbb{P}_\xi$ est propre. De plus $\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ "$\dot{\mathbb{M}}_\Sigma$ ne rajoute pas de réel", donc P_ξ est propre et force que tout ensemble ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans l'extension générique contient un sous ensemble ouvert dense du ground model. En supposant la propriété (*) vrai, $\mathbb{P}_\xi$ force de plus que $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est V-propre.
  Dans le cas où $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ est de la forme $\mathbb{R}_\alpha$, la propriété (*) nous assure P_ξ est propre et force que tout ensemble ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans l'extension générique contient un sous ensemble ouvert dense du ground model. De plus $\mathbb{P}_\xi$ force que $\dot{\mathbb{Q}}_\xi$ est V-propre.

Il reste donc à prouver la propriété (*).

Proposition 3.3.4. *Soit $\mathbb{P}$ un forcing propre tel que tout ensemble ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans l'extension générique contient un sous ensemble ouvert dense du ground model et soit $\beta < \kappa$. Alors $\mathbb{P}$ force que $\mathbb{R}_\beta$ est V-propre et* *ne rajoute pas de réels.*

Démonstration. Soit M un sous modèle élémentaire dénombrable de H_θ et $r_0 \in M \cap \mathbb{R}_\beta$. Soit G un filtre générique sur $\mathbb{P}$. Nous allons montrer qu' il existe une condition $r_1 \leq r_0$ telle que r_1 est $(M[G], \mathbb{R}_\beta)$-générique. En réalité nous allons construire r_1 de telle sorte que si $D \in M[G]$, alors il existe $d \in D \cap M$ tel que $r_1 \leq d$, ce qui nous assure que $\mathbb{P}$ force que $\mathbb{R}_\beta$ ne rajoute pas de réels.

Soit $(D_i)_{i<\omega}$ une énumération dans $V[G]$ des sous ensembles ouverts denses de $\mathbb{R}_\beta \cap M$ qui sont dans $M[G]$. $\mathbb{R}_\beta \cap M$ est dénombrable donc il existe un ensemble dense $T \in V$ de $\mathbb{R}_\beta \cap M$ qui est isomorphe au forcing de Cohen. Puisque D_i est ouvert dense, $D_i \cap T$ est ouvert dense. Ainsi $D_i \cap T$ est isomorphe à un ouvert dense de $2^{<\omega}$ dans $V[G]$ et en utilisant l'hypothèse sur $\mathbb{P}$, il existe $D'_i \in V$ tel que $D'_i \subseteq D_i \cap T$ est ouvert dense dans T. De plus, puisque $\mathbb{P}$ est propre, la famille $\{D'_i \colon i \in \omega\}$ est incluse dans une famille dénombrable $\mathcal{F} \in V$ d'ensembles denses de T. Prenons dans V une énumération $(E_i)_{i\in\omega}$ de la famille $\mathcal{F}$. Pour chaque entier i, nous fixons une condition $d_i \in E_i \cap T$ telle que $d_{i+1} \leq d_i$ et $d_0 \leq r_0$. Le forcing $\mathbb{R}_\beta$ étant σ-clos, $r_1 = \bigcup_{i\in\omega} d_i$ est une condition de $\mathbb{R}_\beta$. De plus, pour tout $i \in \omega$, il existe $d \in D_i$ telle que $r_1 \leq d$. □

Théorème 3.3.7 (Magidor)**.** $\mathbb{P}_\kappa$ *force* $\mathrm{MRP} + \square_{\omega_1,\omega_1}$.

Démonstration. Le forcing $\mathbb{P}_\kappa$ est propre et κ-ccc. ω_1 est préservé dans l'extension générique et les cardinaux compris entre ω_1 et κ sont collapsés sur ω_1. De plus $\kappa = \omega_2^{V[G]}$.

En utilisant la même démonstration que pour PFA, notre fonction de Laver nous assure que MRP est satisfait dans toute extension générique. Il reste donc à prouver que $\mathbb{P}_\kappa$ force $\square_{\omega_1,\omega_1}$.

Pour chaque $\alpha < \kappa$ on définit une famille de clubs $\mathcal{C}_\alpha$ témoignant $\square_{\omega_1,\omega_1}$.

- si $cof(\alpha)^V = \omega$, on pose $\mathcal{C}_\alpha = \{C \in V \colon C$ est un club de type d'ordre $< \omega_1$ dans $\alpha\}$.
- sinon on pose $\mathcal{C}_\alpha = \{C_G\}$ où G est le filtre générique sur $\mathbb{R}_\alpha$ obtenu à l' étape $\alpha + 1$ de l'itération.

Puisque κ est supercompact dans V, $|\mathcal{C}_\alpha| < \kappa$ et donc $|\mathcal{C}_\alpha| \leq \omega_1$ dans $V[G]$. Le type d'ordre de C_G est ω_1, donc pour tout $C \in \mathcal{C}_\alpha$, $ot(C) \leq \omega_1$. Enfin si $C \in \mathcal{C}_\alpha$ et β est un point limite de C, $C \cap \beta$ est dans V, ce qui garantit la cohérence. Ainsi $(\mathcal{C}_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ est une $\square_{\omega_1,\omega_1}$ suite. $\square$

3.3.4 MRP+MA n'implique pas ISP(ω_2, ω_2)

ISP est un renforcement du principe ITP. Il est donc naturel de se demander si MRP + MA implique ISP. Cependant il s'avère que ce n'est pas le cas.

Pour démontrer cela nous allons introduire la définition suivante due à Shelah :

Définition 3.3.9. $\aleph_2$ *est approchable si il existe une suite* $(t_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ *de sous ensembles bornés de* ω_2 *et un club* $C \subseteq Lim(\omega_2)$ *tel que pour tout* $\alpha \in C$*, il existe un ensemble cofinal* $b_\alpha \subseteq \alpha$ *de type d'ordre* $cf(\alpha)$ *tel que* $\{b_\alpha \cap \beta \colon \beta < \alpha\} \subseteq \{t_\beta \colon \beta < \alpha\}$.

Weiß remarque dans [29] que ISP(ω_2, ω_2) implique que $\aleph_2$ n'est pas approchable.

Le théorème suivant a été prouvé par König dans [14].

Théorème 3.3.8 (König [14])**.** *Il existe un modèle de* MRP + MA + $\aleph_2$ *est approchable.*

Ainsi MRP + MA n'implique pas ISP(ω_2, ω_2).

Bibliographie

[1] U. Abraham. Proper forcing. In *Handbook of set theory. Vols. 1, 2, 3*, pages 333–394. Springer, Dordrecht, 2010.

[2] J. E. Baumgartner. Applications of the proper forcing axiom. In *Handbook of set-theoretic topology*, pages 913–959. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[3] A. E. Caicedo and B. Veličković. The bounded proper forcing axiom and well orderings of the reals. *Math. Res. Lett.*, 13(2-3) :393–408, 2006.

[4] P. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 50 :1143–1148, 1963.

[5] K. J. Devlin and S. Shelah. A weak version of $\diamondsuit$ which follows from $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$. *Israel J. Math.*, 29(2-3) :239–247, 1978.

[6] M. Foreman, M. Magidor, and S. Shelah. Martin's maximum, saturated ideals, and nonregular ultrafilters. I. *Ann. of Math. (2)*, 127(1) :1–47, 1988.

[7] K. Gödel. Uber formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme i. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 :173–198, 1931.

[8] K. Gödel. *The Consistency of the Continuum Hypothesis.* Annals of Mathematics Studies, no. 3. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940.

[9] K. Gödel. What is Cantor's continuum problem ? *Amer. Math. Monthly*, 54 :515–525, 1947.

[10] T. Jech. *Set theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[11] T. J. Jech. Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals. *Ann. Math. Logic*, 5 :165–198, 1972/73.

[12] R. B. Jensen. The fine structure of the constructible hierarchy. *Ann. Math. Logic*, 4 :229–308 ; erratum, ibid. 4 (1972), 443, 1972. With a section by Jack Silver.

[13] A. Kanamori. *The higher infinite*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2009. Large cardinals in set theory from their beginnings, Paperback reprint of the 2003 edition.

[14] B. König. Forcing indestructibility of set-theoretic axioms. *J. Symbolic Logic*, 72(1) :349–360, 2007.

[15] K. Kunen. *Set theory*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980. An introduction to independence proofs.

[16] R. Laver. Making the supercompactness of κ indestructible under κ-directed closed forcing. *Israel J. Math.*, 29(4) :385–388, 1978.

[17] A. Lévy and R. M. Solovay. Measurable cardinals and the continuum hypothesis. *Israel J. Math.*, 5 :234–248, 1967.

[18] M. Magidor. Combinatorial characterization of supercompact cardinals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 42 :279–285, 1974.

[19] D. A. Martin and R. M. Solovay. Internal Cohen extensions. *Ann. Math. Logic*, 2(2) :143–178, 1970.

[20] J. T. Moore. Set mapping reflection. *J. Math. Log.*, 5(1) :87–97, 2005.

[21] J. T. Moore. A five element basis for the uncountable linear orders. *Ann. of Math. (2)*, 163(2) :669–688, 2006.

[22] E. Schimmerling. Combinatorial principles in the core model for one Woodin cardinal. *Ann. Pure Appl. Logic*, 74(2) :153–201, 1995.

[23] A. Sharon. *MRP* and square principles. *unpublished*.

[24] S. Shelah. *Proper forcing*, volume 940 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[25] J. Silver. On the singular cardinals problem. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. 1*, pages 265–268. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975.

[26] M. Viale. Forcing axioms, supercompact cardinals, singular cardinal combinatorics. *Bull. Symbolic Logic*, 14(1) :99–113, 2008.

[27] M. Viale and C. Weiß. On the consistency strength of the proper forcing axiom. *Adv. Math.*, 228(5) :2672–2687, 2011.

[28] C. Weiß. The combinatorial essence of supercompactness. *submitted to Annals of Pure and Applied Logic (http ://arxiv.org/pdf/1012.2040)*.

[29] C. Weiß. Subtle and ineffable tree properties. *Ph.D. thesis*, 2010.