Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6

Institut de Mathématiques de Jussieu U.M.R. 7586

Spécialité :

Mathématiques

présentée par :

M. Samy Khémira

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

Sujet :

Approximants de Hermite-Padé, déterminants d'interpolation et approximation diophantienne

Soutenue le 20 juin 2005 devant le jury composé de :

M. Francesco Amoroso	(Professeur, Caen)	
M. Yann Bugeaud	(Professeur, Strasbourg)	Rapporteur
M. Sinnou David	(Maître de Conférences Habilité, Paris)	
M. Michel Laurent	(Directeur de Recherches, Marseille)	
M. Joseph Oesterlé	(Professeur, Paris)	
M. Michel Waldschmidt	(Professeur, Paris)	Directeur
M. Franck Wielonsky	(Maître de Conférences Habilité, Lille)	Rapporteur

Remerciements

Je me rappelle encore, comme si c'était hier, ce lundi matin où je suis allé voir Michel Waldschmidt afin de lui dire que je souhaitais faire de l'approximation diophantienne pour finir mon DEA et pour y faire une thèse. Ceux qui connaissent un petit peu Michel ne seront pas étonnés si je dis qu'il était tôt...très tôt ! ! ! Je me rappelle avoir hésité ; de tout ce que j'avais pu lire jusque là en transcendance (ça n'était pas gigantesque non plus vu que je n'étais encore qu'en DEA), rarement son nom n'apparaissait pas, et ne connaissant pas Michel, je me disais qu'il devait être inaccessible ; maintenant, ces mêmes personnes qui connaissent un petit peu Michel doivent bien rire ! J'ai eu cette chance de rencontrer Michel, de profiter de ses connaissances, de son expérience. Chaque instant passé à discuter avec Michel m'a énormément apporté et comme tout bonheur, j'aurais aimé que ces moments soient encore plus nombreux, mais nous avons encore le temps Michel. Je remercie Michel Laurent pour m'avoir proposé des sujets de mémoire de DEA et de thèse sur lesquels j'ai aimé travailler. Et comme on dit, « jamais deux sans trois », cela est aussi valable pour les directeurs de thèse. Je ne pourrai jamais être assez reconnaissant envers Francesco Amoroso de s'être si bien occupé de moi. J'ai longuement cherché dans le dictionnaire afin de trouver un mot (ne serait-ce qu'un seul mot) à la hauteur des remerciements que je voulais ici exprimer, mais malheureusement aucun n'existe encore, alors juste merci (mais j'en pense beaucoup plus). Francesco, je ne savais pas qu'il était possible à une personne de pouvoir consacrer tant de temps à une autre (je m'excuse, ici, auprès de ta famille et de tes autres étudiants pour le temps que tu n'as pu leur accorder vu que c'était moi qui en profitais). Je te remercie pour tout, de t'être intéressé à moi, de t'être inquiété pour moi, de m'avoir tant appris, tant conseillé, tant corrigé. J'ai aimé avoir fait cette thèse en partie sous ta direction, j'ai aimé y avoir passé des nuits et des week-end (plus à penser qu'à produire certes...mais je compte inverser les choses prochainement). Tu m'as donné l'envie de m'investir encore plus, de continuer, d'approfondir, de me diversifier, de m'ouvrir encore plus dans ces mathématiques qui me plaisent toujours autant. Je ne vais peut-être pas faire que des heureux, mais la Théorie des Nombres est une très belle théorie et l'approximation diophantienne l'est encore plus ! Grâce à vous,

je ne considère pas cette thèse comme une fin ou un aboutissement, simplement parce que j'ai aussi appris à aimer ce que j'appréciais seulement il y a encore peu de temps. Et parce que je vous en serai toujours reconnaissant, mon souhait le plus cher est que vous soyez, un jour, fier de ce que je ferai. J'espère réussir à être digne de tout ce que j'ai reçu de vous et pouvoir, à mon tour, parvenir à apporter ma petite « contribution » (!).

Je remercie Sinnou David pour m'avoir consacré une partie importante de son temps afin de parler de lemme de zéros et de petites valeurs sur la fin de cette thèse. J'ai beaucoup appris de ces discussions et je suis certain que de nombreuses informations qu'il m'a indiquées me seront très utiles dans mes futures recherches.

Je suis ravi que Yann Bugeaud et Franck Wielonsky aient accepté de rapporter cette thèse. Leurs remarques et conseils m'ont été très précieux et bénéfiques. Merci.

Un chaleureux merci à Joseph Oesterlé qui me fait l'honneur d'être membre de ce jury.

Je tiens à remercier Stéphane Fischler pour tout ce que j'ai appris à ses côtés, à l'écouter et à le lire. Je le remercie pour tous les conseils qu'il a pu me donner, pour s'être intéressé à ce que je faisais, pour m'avoir souvent motivé, pour avoir réussi à me faire revenir sur une position (rien que cela est un exploit, j'espère que tu t'en rends bien compte) et pour avoir toujours été disponible dès que j'ai pu en avoir besoin. Je te remercie aussi, ainsi que Éric Gaudron (qui a fait un travail considérable), pour avoir pu organiser avec vous deux le colloque au CIRM qui me tenait à coeur et qui, grâce à vous, s'est bien déroulé ; là encore, j'ai beaucoup appris à évoluer à vos côtés.

Je tiens aussi à remercier Tanguy Rivoal pour m'avoir souvent proposé des idées sur ce que je faisais et sur quoi je pouvais me diriger dans mes recherches ; d'ailleurs, c'est lui qui m'a indiqué (Annexe) qu'à partir de son article avec Stéphane Fischler, je pouvais donner des expressions intégrales aux éléments que j'utilisais. Cela me permettra peut-être de faire des études plus analytiques sur certains points de mes recherches.

Un merci tout particulier à Damien Vergnaud pour avoir relu une première version de ma thèse (calculs y compris) (1) pendant l'été et -surtout- (2) pendant la préparation de son mariage !

Je remercie tous les diophantiens (et les autres aussi !) pour les exposés que j'ai pu suivre et pour les articles que j'ai pu lire, chacun d'entre vous m'avez énormément appris.

Merci à Layla pour avoir consacré des heures à répondre à la moindre question informatique, pour avoir raconté des histoires plus incroyables les unes que les autres (auxquelles, d'ailleurs, personne n'a jamais cru) et pour avoir nourri le bureau 7C06 (donc, et surtout, moi-même) en substances chimiques d'origines inconnues mais tellement bonnes. Merci pour toutes ces fêtes organisées dans le bureau, merci pour ton immense générosité...mais c'est malin, comment vais-je faire désormais pour pouvoir te rendre ne serait-ce que le dixième de ce que tu m'as apporté ? ? ? Saches que tu as été et resteras beaucoup plus qu'une simple collègue de bureau.

Merci à Gwendal pour sa complicité (ne t'inquiète pas, je ne dévoilerai pas ton surnom ici !), on n'était pas assez de deux pour pouvoir se faire un petite place dans cette jungle qui se nommait 7C06 avant que nous n'y mettions un peu d'ordre ! ! ! Je me rends compte que ta présence à mes côtés me fut indispensable.

Merci à tous les collègues (voire amis) de bureau que j'ai pu avoir : Bouthaina Belhaj, Sana Ben Hadj Amor, Laurent Berger, Cristiana Bertolin, Kristian Bjerklov, Vincent Bosser, Sana Boughzala, Marcos Diniz, Stéphane Fischler, Éric Gaudron, Massaye Gaye, Aïcha Hachemi, Nadia Hamida, Titem Harrache, Gwendal Le Bouffant, Catriona MacLean (n'est-ce pas isn't it ?), Julien Paupert, Layla Pharamond, Marusia Rebolledo, Mariane Riss, Maria Saprykina, Magda Sebestean, Dana Skrbo, Boutheina Souabni, Éric Villani (non non, cela ne fait pas 10 ans que je suis là, c'est juste que le bureau était grand ! ! !).
Merci aux différentes personnes qui n'étaient pas de mon bureau mais que j'ai eu plaisir à cotoyer : Cécile Armana, Julien Marché, Nicolas Ratazzi, Pierre Will et bien d'autres...
Je tiens aussi à associer à ces remerciements plusieurs personnes rencontrées au fil de colloques (Sophie Dion, Pierre-Antoine Desrousseaux, Nathan Ng, Corentin Pontreau,...)
Merci à toute l'équipe informatique qui m'a fournit un support de travail plus qu'efficace.
Merci à toute l'équipe administrative de l'institut qui a fait que cette thèse se soit déroulée dans de très bonnes conditions (un remerciement tout particulier à madame Orion dont la gentillesse et la disponibilité ont été inestimables).
Je tiens aussi à remercier tous ceux qui sont passés au sein du bdd...votre travail de l'ombre mérite, ô combien, d'être salué !
Je remercie les professeurs (dans l'ordre chronologique des enseignements) Laszlo,

Risler, Pankratov, Christol, Waldschmidt, Oesterlé, Krikorian et Koseleff pour avoir eu l'honneur d'être l'un de leurs chargés de TD. Ces années de monitorat et d'ATER m'ont permis de vivre cette thèse de façon encore plus agréable.

Je remercie mes amis pour tout ce qu'ils m'ont apporté en dehors des mathématiques.

Je tiens, aussi et surtout, à remercier mes parents et ma sœur Sabrina pour leur inestimable soutien, ainsi que leur confiance. Vous avez toléré et accepté tant de choses (mon caractère, mes humeurs, mes caprices et j'en passe...) que je n'ai pas les mots pour vous dire, aujourd'hui, combien votre présence m'est chère.

Enfin, ceux qui me connaissent savent que je ne dévoile jamais ce que je ressens, et, pour une fois, je pense en avoir déjà beaucoup trop dit. À vous tous que j'ai cités ici, sachez que mes sentiments et émotions sont bien plus profonds que ce que je n'ai pu retranscrire, mais leurs richesses demeureront toujours dans ce qui ne sera pas avoué ; donc je les garde pour moi mais n'en pense pas moins. Encore merci à vous tous, ma plus grande volonté restera que vous ne regrettiez pas de m'avoir tant apporté ; et j'espère, à mon tour, pouvoir autant donné que je n'ai reçu de vous.

À Albert, Amor et Zohra.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Historique et commentaires

Nous allons commencer en rappelant brièvement un peu de l'histoire de la théorie des nombres transcendants, ses tous premiers balbutiements, ainsi que les différents étapes et résultats liés aux études de cette thèse, notamment en relation avec la fonction exponentielle et les approximants de Hermite-Padé.

Définition 1.1.1 *On appelle nombre algébrique tout nombre complexe α racine d'un polynôme non nul à coefficients rationnels.*

Définition 1.1.2 *On appelle nombre transcendant tout nombre complexe qui n'est pas algébrique.*

La simple existence de tels nombres (transcendants) fut sujette à de nombreuses conjectures ; L. Euler par exemple, en 1744, dans [Eu], conjectura que $\log_a b$, où a et b sont des nombres rationnels avec b qui n'est pas égal à une puissance rationnelle de a, devait être un nombre transcendant. Un siècle plus tard, J. Liouville prouva le théorème suivant qui rendit possible la construction d'exemples de nombres transcendants :

Théorème 1.1.3 *Si α est une racine d'un polynôme irréductible à coefficients rationnels de degré $n \geq 1$, alors il existe une constante $c(\alpha) > 0$ telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout couple (p, q) de nombres entiers avec $q > 0$ et $\frac{p}{q} \neq \alpha$:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^n}.$$

Ce théorème nous dit notamment qu'un nombre algébrique ne peut être bien approché par des nombres rationnels.

Après que J. Liouville ([Li1] et [Li3]) eut construit les premiers cas de nombres transcendants en 1844, C. Hermite [He1] fut le premier à prouver la transcendance du nombre $e = \exp(1)$ en 1873. Un résultat plus général de transcendance (dont se déduisent celles de e et π) est fourni par le théorème de Hermite-Lindemann (voir [FeNe], paragraphe 2.3, théorème 2.2) démontré par Lindemann en 1882 :

Théorème 1.1.4 *Si α est un nombre algébrique non nul, alors e^α est un nombre transcendant.*

Les approximants de Hermite-Padé (dont il existe deux types, I et II) sont apparus dans le texte de C. Hermite [He1] en 1873 lors de constructions d'approximations rationnelles simultanées de puissances de e. C. Hermite utilisa, en particulier, ces approximants, pour démontrer la transcendance de e. Il en donna, ensuite, des expressions intégrales. Plus tard, H. Padé, un étudiant de C. Hermite, détermina les expressions explicites pour les approximations rationnelles des fonctions hypergéométriques de Gauss $F(a,b,c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} z^n$ où $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$ et $(a)_0 = 1$ est le symbole de Poch'hammer.

K. Mahler [Ma2] étudia les propriétés générales de ces approximants et, en particulier, les relations entre les approximants de type I et II.

Les approximants de Hermite-Padé ont aussi été utilisés afin de démontrer l'irrationnalité de certains nombres réels ainsi que pour déterminer un exposant d'irrationnalité pour chacun de ces mêmes nombres (voir par exemple [FeNe], chapitres 3 et, surtout, 4).

K. Mahler, tout d'abord, puis M. Mignotte ont travaillé sur le problème de la minoration de la distance de l'exponentielle d'un nombre entier au nombre entier le plus proche $\min_{a\in\mathbb{N}} \left|e^b - a\right|$ pour b nombre entier positif. En 1997, dans l'article [Wi1], F. Wielonsky travailla sur les approximants de Hermite-Padé liés aux fonctions exponentielles ; puis, en 1999, dans l'article [Wi2], il utilisa aussi des approximants de Hermite-Padé « légèrement modifiés » (qu'il appela non-diagonaux) ainsi que des expressions intégrales de ces mêmes polynômes afin d'améliorer la constante c dans la minoration en question, et obtenir finalement l'estimation suivante :

pour b suffisamment grand, et pour tout nombre entier a,

$$\left|e^b - a\right| \geq b^{-19.183b}. \tag{1.1}$$

Dans un autre registre, en 1957, Mahler [Ma3] a prouvé que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $c(\epsilon)$ ineffective telle que, pour tout nombre entier a,

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^n - a\right| > e^{-\epsilon n}.$$

Démonstrations antérieures de transcendance ; application au nombre e

Qualitativement, les démonstrations de transcendance suivent, en général, l'une des deux voies suivantes : la première est la construction de fonctions auxiliaires dont les fonctions dérivées sont évaluées en certains points, la seconde (introduite par M. Laurent [La1] à la fin des années 80) est la considération de déterminants d'interpolation. Après un lemme de zéros approprié, on utilise une minoration généralement fournie par une inégalité de Liouville, ainsi qu'une majoration analytique découlant d'un lemme de Schwarz. Nous pourrons d'ailleurs nous référer aux notes de cours de M. Waldschmidt [Wa5], qui démontre en particulier le théorème de Hermite-Lindemann par l'utilisation de déterminants d'interpolation ainsi que par la construction de fonctions auxiliaires.

La démonstration de Hermite faisait appel à des fonctions auxiliaires explicites. En effet, il considéra les approximants de Hermite-Padé des fonctions exponentielles $f_i(z) = e^{iz}$ ainsi que le reste du même système de Padé

$$R(z) = P_0(z) + P_1(z)e^z + \ldots + P_m(z)e^{mz}$$

qui, par définition, a un ordre élevé $(m + \sum_{k=0}^{m} \deg P_k)$ en $z = 0$.

M. Waldschmidt, dans [Wa1], reprit la méthode de Gel'fond-Schneider (dont s'est précédemment servi S. Lang mais en plusieurs (≥ 2) points) et utilisa aussi la construction d'une fonction auxiliaire F, évaluée en $z = 0$ et $z = \alpha \neq 0$, vérifiant, en termes des paramètres (S, T),

$$\begin{cases} F^{(\sigma_0)}(0) = 0 & 0 \leq \sigma_0 \leq S - T \\ \\ F^{(\sigma_1)}(\alpha) = 0 & 0 \leq \sigma_1 \leq T \end{cases}$$

Un exemple de démonstration utilisant des déterminants d'interpolation se trouve dans [Wa5] où est considéré le déterminant suivant :

$$\Delta = \det \left(\phi_\lambda^{\sigma_\mu} (\zeta_\mu) \right)_{1 \leq \lambda, \mu \leq L},$$

où les fonctions ϕ_λ sont des polynômes exponentiels, les nombres σ_μ des nombres entiers positifs et les nombres ζ_μ des nombres complexes deux à deux distincts.

1.2 Énoncés qualitatifs

Cette section a pour but de fournir les expressions algébriques des approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles, celles des polynômes de Hermite, certaines propriétés liées à une matrice de Vandermonde généralisée, et surtout d'énoncer un théorème liant ces trois expressions.

1.2.1 Approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles

Définition 1.2.1 *Soit m un entier naturel non nul.*

Soient $n_0, \ldots, n_m$ des entiers positifs, $f_0, \ldots, f_m$ des fonctions analytiques en 0 ; on appelle système d'approximants de Padé (ou approximants de Hermite-Padé) de type I pour les fonctions $f_0, \ldots, f_m$ et les paramètres $n_0, \ldots, n_m$, tout $(m+1)$-uplet $(P_0, ..., P_m)$ de polynômes non tous nuls tel que

$$\deg P_i(z) \leq n_i - 1; \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ord}_{z=0} \left(\sum_{i=0}^{m} P_i(z) f_i(z) \right) \geq \sigma - 1,$$

où $\sigma = \sum_{k=0}^{m} n_k$.

Remarque 1.2.2 *Nous pourrons nous référer à [FeNe] pour une définition d'un système d'approximants de Padé de type II (dont nous ne nous servirons pas ici).*

Définition 1.2.3 *On définit le reste d'un système de Padé (pour les fonctions $f_0, \ldots, f_m$) par*

$$R(z) = \sum_{i=0}^{m} P_i(z) f_i(z).$$

Remarque 1.2.4 *Ces approximants de Hermite-Padé existent toujours, il suffit de voir que l'on est amené à résoudre un système linéaire homogène de $\sigma - 1$ équations à σ inconnues.*

De plus,

Définition 1.2.5 *On dit que le système de Padé des fonctions $f_0, ..., f_m$ est parfait si*

$$\mathrm{ord}_{z=0}\left(R(z)\right) = \sigma - 1.$$

Il est évident qu'un système de Padé parfait est déterminé à une constante multiplicative près.

Considérons les fonctions $f_i(z) = e^{x_i z}$ pour $i = 0, \ldots, m$. Nous allons voir :

Lemme 1.2.6 *Il existe un unique système d'approximants de Padé $(P_0, ..., P_m)$ pour les fonctions $f_i(z) = e^{x_i z}$ normalisé par : le coefficient dominant de chaque P_i est égal à*

$$\frac{1}{(n_i - 1)!} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^{m} \frac{1}{(x_i - x_p)^{n_p}}.$$

Dans cette situation, nous définissons, pour $i = 0, \ldots, m$ et $j = 0, \ldots, n_i - 1$, les nombres $p_{i,j}$ par

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{n_i - 1} p_{i,j} \frac{z^j}{j!}. \tag{1.2}$$

Nous calculerons (paragraphe 2.2.2) les expressions explicites des approximants de Hermite-Padé de type I. La première étape de ce travail sera de proposer une nouvelle écriture pour les approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles ; nous les verrons (paragraphe 2.5.3) comme certains cofacteurs d'une matrice de Vandermonde généralisée définie dans le paragraphe 2.5.1.

1.2.2 Polynômes d'interpolation de Hermite

Les polynômes d'interpolation de Lagrange sont bien connus (voir [PoSz] par exemple), ils fournissent des expressions de polynômes prenant des valeurs données en des points donnés deux à deux distincts et sont régulièrement utilisés, par exemple, en analyse numérique. Les polynômes d'interpolation de Hermite en sont une généralisation prenant aussi en compte les dérivations successives. Ainsi, on considère toujours des nombres complexes $x_0, \ldots, x_m$ deux à deux distincts et des nombres entiers

$n_0, \ldots, n_m$ strictement positifs. Nous avons le lemme suivant dont la démonstration est donnée au paragraphe 2.3.1.

Lemme 1.2.7 *Soient $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $i = 0, \ldots, m$ et $j = 0, \ldots, n_i - 1$. Il existe un unique polynôme $\mathcal{L}_{i,j}$, de degré inférieur ou égal à $\sigma - 1$, appelé polynôme d'interpolation de Hermite satisfaisant, pour $i' = 0, \ldots, m$ et $j' = 0, \ldots, n_{i'} - 1$, à*

$$\mathcal{L}_{i,j}^{(j')}(x_{i'}) = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Nous définissons, pour $i = 0, \ldots, m$ et $j = 0, \ldots, n_i - 1$, les nombres $\gamma_{k;i,j}$ par

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = \sum_{k=0}^{\sigma-1} \gamma_{k;i,j} X^k. \tag{1.3}$$

On en déduit alors, par linéarité, la proposition suivante :

Proposition 1.2.8 *Pour tout $i = 0, \ldots, m$ et $j = 0, \ldots, n_i - 1$, soit $Y_{i,j} \in \mathbb{C}$.*

Il existe alors un et un seul polynôme $\mathcal{L}$ de degré inférieur ou égal à $\sigma - 1$ qui vérifie

$$\mathcal{L}^{(j)}(x_i) = Y_{i,j}$$

pour tout $i = 0, \ldots, m$ et $j = 0, \ldots, n_i - 1$. Ce polynôme s'écrit

$$\mathcal{L}(X) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_i-1} Y_{i,j} \mathcal{L}_{i,j}(X).$$

Les nombres $\gamma_{k;i,j}$ peuvent être identifiés grâce aux expressions des polynômes $\mathcal{L}_{i,j}$ par le théorème qui suit :

Théorème 1.2.9 *L'unique polynôme d'interpolation $\mathcal{L}_{i,j}$ de degré inférieur ou égal à $\sigma - 1$ qui vérifie $\mathcal{L}_{i,j}^{(\ell)}(x_k) = \delta_{k,i}\delta_{\ell,j}$ pour tout $k = 0, \ldots, m$ et tout $\ell = 0, \ldots, n_k - 1$ s'écrit :*

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = R_i(X) \frac{(X - x_i)^j}{j!} \sum_{k'=0}^{n_i-j-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{k'} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)_{|\zeta = x_i} \frac{(X - x_i)^{k'}}{k'!}, \tag{1.4}$$

où

$$R_i(X) = \prod_{\substack{k''=0 \\ k'' \neq i}}^{m} \left(\frac{X - x_{k''}}{x_i - x_{k''}}\right)^{n_{k''}}.$$

Nous donnerons une démonstration de ce théorème au paragraphe 2.3.2.

Remarque 1.2.10 *Le cas classique (interpolation de Lagrange) des points simples correspond à $n_0 = \ldots = n_m = 1$. La formule du théorème 1.2.9 se simplifie alors et s'écrit*

$$\mathcal{L}_{i,0}(X) = \sum_{k=0}^{m} \gamma_{k;i,0} X^k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{m} \left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

1.2.3 Matrice de Vandermonde généralisée

De même que pour la matrice de Vandermonde, nous définissons la matrice de Vandermonde généralisée (pondérée de coefficients binomiaux) par

Définition 1.2.11 *La matrice de Vandermonde généralisée est la matrice carrée de format $\sigma \times \sigma$ et d'expression*

$$\mathcal{M} = \left(\frac{1}{j!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} \right)^j X^k_{|X=x_i} \right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-1 \\ 0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n_i-1}} = \left(\binom{k}{j} x_i^{k-j} \right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-1 \\ 0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n_i-1}},$$

où, par convention, $\binom{k}{j} = 0$ pour $j > k$.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ x_0 & \ldots & 0 & x_1 & \ldots & 0 & \ldots & x_m & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n_0-2} & \ldots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n_0-1} & \ldots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^{\sigma-1} & \ldots & \binom{\sigma-1}{n_0-1} x_0^{\sigma-n_0} & x_1^{\sigma-1} & \ldots & \binom{\sigma-1}{n_1-1} x_1^{\sigma-n_1} & \ldots & x_m^{\sigma-1} & \ldots & \binom{\sigma-1}{n_m-1} x_m^{\sigma-n_m} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Nous noterons $a'_{k;i,j}$ le cofacteur ligne k colonne (i,j) de la matrice $\mathcal{M}$.

Le résultat principal de cette première partie qui sera démontré aux paragraphes 2.5.2 et 2.5.3 est le suivant. Il fait le lien entre les coefficients $p_{i,j}$ des approximants de Hermite-Padé P_i du lemme 1.2.6, les coefficients $\gamma_{k;i,j}$ des polynômes d'interpolation de Hermite $\mathcal{L}_{i,j}$ du lemme 1.2.7 et les cofacteurs $a'_{k;i,j}$ de la matrice de Vandermonde généralisée.

Théorème 1.2.12 *Pour tout* $0 \leq i \leq m$, *tout* $0 \leq j \leq n_i - 1$ *et tout* $0 \leq k \leq \sigma - 1$,

$$\gamma_{k;i,j} = \frac{(\det \mathcal{M})^{-1}}{j!} a'_{k;i,j} \tag{1.6}$$

et

$$p_{i,j} = a'_{\sigma-1;i,j}. \tag{1.7}$$

Dans le cas (classique) où nous retrouvons l'expression de polynômes d'interpolation de Lagrange, cela revient simplement à inverser une matrice de Vandermonde classique (voir sous-paragraphe 2.6.1).

1.2.4 Hauteur de matrice et application à une nouvelle démonstration de la transcendance de e

Il a été donné plusieurs preuves de la transcendance du nombre e, en commençant par Hermite. L'évolution des preuves de transcendance a, ensuite, souvent fait appel à l'utilisation de fonctions auxiliaires ; nous pourrons d'ailleurs trouver une nouvelle preuve (faisant usage de fonctions auxiliaires) de la transcendance de e dans [Wa1]. Comme nous l'avons déjà dit, M. Laurent introduisit, à la fin des années 80, la notion de « déterminant d'interpolation » permettant de remplacer la construction de fonctions auxiliaires.

Dans la suite de la thèse, nous ferons le lien entre ces deux méthodes.

Ces dernières preuves (dont celle de M. Waldschmidt [Wa1], avec utilisation de fonctions auxiliaires) peuvent, d'ailleurs, très bien se réécrire en termes de déterminants d'interpolation. La construction de fonctions ayant un ordre élevé en 0 est un point commun à ces preuves ; cependant, toutes les preuves précédentes considéraient un ordre au point $z = 1$ qui était, soit égal à 1 (approximants de Hermite-Padé), soit qui tendait vers $+\infty$ (comme le cas traité par M. Waldschmidt dans [Wa1]). La nouveauté dans la démonstration que nous proposerons, par rapport aux preuves déjà présentées sur le même sujet, est le paramètre T que nous introduisons et qui correspond à l'ordre donné au point $z = 1$. Lorsque nous prendrons $T = 1$, nous retrouverons alors la preuve de Hermite (utilisation des approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles).

Cette partie de la thèse sera alors consacrée à l'étude de la matrice $\mathcal{M}$ définie ci-dessous et plus particulièrement au rôle joué par le paramètre T que nous avons introduit. Nous établirons des majorations de hauteur d'une sous-matrice de $\mathcal{M}$ qui nous permettront de conclure la discussion selon les valeurs de T. Comme application directe, nous établirons alors une nouvelle démonstration de la transcendance du nombre e par l'utilisation de déterminants d'interpolation. Nous considérerons tout d'abord le cas « simple » ($T = 1$) qui correspond, en fait, à l'utilisation des approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles ; nous étudierons la matrice M suivante de taille $S \times S$, avec $S = KL$:

$$M = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

où

$$M_0 = \left(\frac{1}{s!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^s \left(z^k e^{\ell z} \right)(0) \right)_{\substack{0 \leq s \leq S-2 \\ 0 \leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1}} = \left(\frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!} \right)_{\substack{0 \leq s \leq S-2 \\ 0 \leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1}},$$

est une matrice $(S-1) \times S$, et où

$$M_1 = \left(\left(z^k e^{\ell z} \right)(1) \right)_{0 \leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1} = \left(e^\ell \right)_{0 \leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1}$$

est une matrice ligne. Ensuite, nous donnerons une version avec multiplicités, c'est-à-dire que nous étudierons une matrice avec un ordre T, au point $z = 1$, qui est supérieur à 1. Soit $1 \leq T \leq S - 1$; nous travaillerons alors sur la matrice $\mathcal{M}$ suivante de taille $S \times S$, avec $S = KL$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \mathcal{M}_1 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \in \mathbb{M}_{S-T,S}(\mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_1 \in \mathbb{M}_{T,S}(\mathbb{Q}[e]),$$

où

$$\mathcal{M}_0 = \left(\frac{1}{s!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^s \left(z^k e^{\ell z} \right)(0) \right)_{\substack{0 \leq s \leq S-T-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1}} = \left(\frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!} \right)_{\substack{0 \leq s \leq S-T-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1}},$$

et

$$\mathcal{M}_1 = \left(\frac{1}{s!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^s \left(z^k e^{\ell z} \right)(1) \right)_{\substack{0 \leq s \leq T-1 \\ 0 \leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1}}.$$

Ce dernier cas sera important pour la suite ; en effet, nous utiliserons ici, pour de petites valeurs du paramètre T, une formule de dualité sur les hauteurs de matrices, faisant intervenir certains cofacteurs de la matrice $\mathcal{M}$ et mettant alors en jeu les différents coefficients des polynômes de Hermite-Padé et ceux des polynômes d'interpolation de Hermite, qui nous permettra d'obtenir de meilleures estimations pour les majorations que nous voulons établir.

Cependant, parmi les petites valeurs de T, et comme nous nous en sommes aperçus dans le chapitre 3, celle correspondant à $T = 1$ fournit les meilleures majorations de hauteurs, et c'est donc dans cette situation que nous nous placerons dans le chapitre 4.

1.3 Énoncés quantitatifs

Les principaux résultats de cette thèse sont énoncés dans cette section et seront démontrés au chapitre 4. Nous commençons par quelques rappels historiques que nous comparerons avec nos nouveaux résultats.

1.3.1 Énoncés connus : mesures de transcendance, mesures liées à l'exponentielle, S^*-nombres...

E. Borel [Bo] fut le premier, en 1899, à donner une borne pour la mesure de transcendance d'un nombre. Il énonça la minoration suivante :

$$|P(e)| \geq H^{-c.\log\log H},$$

où H est la hauteur du polynôme P (c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients) et c une constante strictement positive dépendant seulement du degré de P.

Par la suite, beaucoup de mathématiciens ont travaillé sur des mesures de transcendance liées à des nombres remarquables tels que e ou π ; on trouvera des références dans [He2] et [Lin].

Trente ans après le résultat de E. Borel énoncé plus haut, J. Popken [Po] améliora ce dernier en donnant une nouvelle minoration qui dépendait toujours de la hauteur du polynôme considéré et de son degré. En effet, il obtint la borne suivante beaucoup plus précise :

$$|P(e)| \geq H^{-d-\frac{c_0(d)}{\log\log H}},$$

où H est la hauteur du polynôme P, d son degré et $c_0(d)$ une constante strictement positive dépendant uniquement de d. Ce résultat fut précisé par K. Mahler [Ma1] trois ans plus tard, qui montrait qu'on pouvait prendre $c_0(d) = cd^2 \log d$, où c est une constante absolue strictement positive.

Signalons aussi, que c'est la même année, en 1929, que A.O. Gel'fond prouva la transcendance de e^π.

Notons que, dans le cas où a et b (nous considérerons toujours b non nul dans la suite de la thèse) sont des nombres entiers, des travaux ont déjà été réalisés dans l'étude de la distance de l'exponentielle d'un nombre entier au nombre entier le plus proche apparue avec K. Mahler [Ma2] qui énonça le théorème suivant

Théorème 1.3.1 *Soient a et b deux nombres entiers, pour b suffisamment grand, nous avons*

$$|e^b - a| \geq b^{-cb},$$

avec $c = 40$.

K. Mahler [Ma4] abaissa la constante à $c = 33$. Puis, M. Mignotte [Mi] se pencha aussi sur ce problème en fournissant une valeur de la constante de l'ordre de $c = 21$ (une valeur inférieure avait été initialement annoncée avant qu'une erreur soit décelée) ; mais finalement, comme nous l'avons dit (1.1), c'est F. Wielonsky [Wi2] qui donna la meilleure valeur aujourd'hui connue avec $c = 19.183$. Comme nous le verrons par la suite, une des applications de cette thèse concerne ce problème de K. Mahler qui est la minoration de la distance de l'exponentielle d'un nombre entier au nombre entier le plus proche. Cette application fut la première envisagée pour les travaux de cette thèse ; cependant, nous verrons un peu plus loin que nous pourrons obtenir mieux, à savoir des résultats d'approximation diophantienne plus généraux de l'exponentielle d'un nombre algébrique par un nombre algébrique (tous deux de hauteur majorée). K. Mahler ([Ma2] et [Ma4]) utilisa les approximants de Hermite-Padé de type I de fonctions exponentielles P_i pour $i = 0, \ldots, m$, afin d'obtenir les premiers résultats relatifs à cette étude. Ces mêmes approximants de Hermite-Padé ont des écritures explicites sous forme intégrale :

$$P_i(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^{m} (\zeta + x_i - x_j)^{n_j}} \mathrm{d}\zeta, \tag{1.10}$$

où C_0 est un cercle centré en 0 et de rayon strictement inférieur à la plus petite distance séparant deux x_j.

L'idée de F. Wielonsky fut de reprendre cette famille d'approximants en y ajoutant un paramètre qu'il introduisit au niveau du degré de certains de ces polynômes ; en effet, il utilisa la famille de polynômes, qu'il appelle « approximants de Hermite-Padé non-diagonaux », suivante :

$$\widetilde{P}_i(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^{m} (\zeta + x_i - x_j)^n \prod_{j=q}^{m-q} (\zeta + x_i - x_j)^{sn}} \mathrm{d}\zeta.$$

Ceci revient à prendre $n_j = n$ si $j \notin \{q, \ldots, m-q\}$, et aussi $n_j = n(s+1)$ si $j \in \{q, \ldots, m-q\}$ dans l'égalité (1.10) ci-dessus, alors que K. Mahler prend $n_j = n$ pour tout j.

La signification de ce terme « non-diagonaux » correspond juste au fait que les polynômes C_i ne sont pas tous de même degré. Cependant, il s'agit, là encore, d'approximants de Hermite-Padé de type I avec la propriété les caractérisant, à savoir que ce sont des polynômes vérifiant :

$$\mathrm{ord}_{z=0} \left(\sum_{i=0}^{m} \widetilde{P}_i(z) f_i(z) \right) \geq -1 + \sum_{i=0}^{m} \left(\deg \widetilde{P}_i + 1 \right).$$

Toujours dans le cas où a et b sont des nombres entiers, N.I. Feld'man et Yu. V. Nesterenko [FeNe] énoncent le résultat suivant (qu'ils attribuent à K. Mahler) :

Théorème 1.3.2

$$\min_{b_0, b_1 \in \mathbb{N}^\star} |e^{b_1} - 2^{b_0}| \geq e^2 - 2^3 = 0.6109...$$

Yu. V. Nesterenko et M. Waldschmidt avaient fourni, en 1996, un résultat plus général (valable pour a et b deux nombres algébriques) dans [NeWa]. Ce théorème impliquait alors la minoration suivante que nous pourrons trouver (pour le cas rationnel) dans [MuTi] (où il s'est glissé une petite erreur, à savoir qu'il faudra remplacer $3.3 \log 2$ par $3.3 \log 3$).

Soit a un nombre algébrique. Soit

$$P(X) = a_0 + \ldots + a_p X^p = a_p(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_p) \in \mathbb{Z}[X]$$

le polynôme minimal de a (les nombres α_i étant les nombres complexes conjugués de a). La hauteur (logarithmique absolue de Weil) de a est définie par

$$h(a) = \frac{1}{p}\left(\log|a_0| + \sum_{i=1}^{p}\log\max\{1, |\alpha_i|\}\right).$$

D'après le théorème de Hermite-Lindemann [FeNe], le minimum de la différence $|e^b - a|$, quand a décrit l'ensemble fini des nombres algébriques de hauteur majorée par $\log\mathcal{A}$ et de degré majoré par D_1 et b l'ensemble fini des nombres algébriques non nuls de hauteur majorée par $\log\mathcal{B}$ et de degré majoré par D_2 est strictement positif ; c'est une fonction de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, D_1 et D_2 dont nous cherchons une minoration explicite.

Théorème 1.3.3 *Il existe une constante absolue positive $\mathcal{A}_0$ ayant la propriété suivante. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et E trois nombres réels avec $D\log\mathcal{A} \geq 1$, $\mathcal{B} \geq 1$ et $E \geq e$. Soient a et b deux nombres algébriques de hauteurs respectivement majorées par $\log\mathcal{A}$ et $\log\mathcal{B}$. Notons $|b|_+ = \max\{1, |b|\}$ et $D = [\mathbb{Q}(a,b) : \mathbb{Q}]$ le degré du corps engendré, sur $\mathbb{Q}$, par a et b. Alors*

$$\begin{aligned}\left|e^b - a\right| \geq\ & \exp\{-211D\left(\log\mathcal{B} + \log\log\mathcal{A} + 4\log D + 2\log(E|b|_+) + 10\right) \\ & \times\left(D\log\mathcal{A} + 6\log E + 2E|b|\right)\left(3.3D\log(D+2) + \log E\right)\left(\log E\right)^{-2}\}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Remarque 1.3.4 *Une application de l'inégalité (1.11) est donnée dans [MuTi].*

Remarque 1.3.5 *Dans le cas où a et b sont des nombres entiers, le théorème 1.3.3 implique le théorème 1.3.1 avec une constante c égale à* 5432.

Il est, de plus, équivalent, d'étudier une minoration de $|e^b - a|$ que de $|\log a - b|$; en effet,

Proposition 1.3.6 *Sous les conditions du théorème 1.3.3, en posant*

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\ &= D\left(\log\mathcal{B} + \log\log\mathcal{A} + 4\log D + 2\log(E|b|_+) + 10\right) \\ & \times\left(D\log\mathcal{A} + 6\log E + 2E|b|\right)\left(3.3D\log(D+2) + \log E\right)\left(\log E\right)^{-2};\end{aligned}$$

si

$$\left|e^b - a\right| \geq \exp\{-211\mathcal{V}\}$$

alors

$$|\log a - b| \geq \exp\{-213\mathcal{V}\}.$$

Démonstration : On suppose ici $|b-\log a| \leq 1/2$. Par le théorème des accroissements finis, nous avons
$$|e^z - 1| \leq |z| e^{|z|}.$$
Appliquée à $z = \log a - b$, cette inégalité donne alors
$$\left|e^b - a\right| \leq e^{|b|+1/2} |b - \log a|.$$
Or,
$$e^{|b|+1/2} \leq e^{2\mathcal{V}}$$
et, d'après notre hypothèse,
$$\left|e^b - a\right| \geq \exp\{-211\mathcal{V}\}.$$
Ceci nous permet alors d'en déduire le résultat annoncé. □

La définition suivante est classique

Définition 1.3.7 *Un nombre de Liouville est un nombre réel ν tel que, pour tout nombre réel strictement positif κ, il existe un nombre rationnel $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \geq 2$ et*
$$0 < \left|\nu - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^\kappa}.$$
Voir l'article de J. Liouville [Li1], ou sa version développée [Li2].

Théorème 1.3.8 *Si β et α sont des nombres rationnels non nuls avec $\log \alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors e^β et $\log \alpha$ ne sont pas des nombres de Liouville.*

Le fait que e ne soit pas un nombre de Liouville a été démontré par J. Popken en 1928 (voir (2.23) et le théorème 2.6 page 100 de [FeNe], paragraphe 4.1). Pour les nombres de la forme e^β, cela résulte d'une version effective du théorème de Lindemann-Weierstrass démontrée par K. Mahler en 1932 (théorème 2.8 p. 103, paragraphe 4.3 de [FeNe]). Enfin pour les logarithmes de nombres algébriques, c'est un résultat de K. Mahler en 1952 (référence (2.28) de [FeSh] et théorème 2.10, paragraphe 4.4 de [FeNe]).

Ces résultats se déduisent aussi de l'article de G. Diaz [Di] (on y trouve, de plus, des mesures de transcendance liées aux fonctions exponentielles et logarithmes) dont les minorations données relèvent de la méthode de Gel'fond-Schneider.

D'autres classifications existent, notamment, pour les nombres réels, celle de K. Mahler, ainsi que celle de J.F. Koksma (exclusivement pour les nombres transcendants). On donnera, ici, certaines définitions et propriétés s'y rapportant ; ces dernières se trouvent dans les livres de Y. Bugeaud [Bu] et T. Schneider [Sch], le lecteur souhaitant plus de renseignements ainsi qu'un panorama plus général du sujet pourra également les consulter.

Soit ζ un nombre réel. Pour un entier n et un réel $H \geq 1$ donnés, on définit la quantité

$$w_n(\zeta, H) = \min\left\{|P(\zeta)| : P(X) \in \mathbb{Z}[X], H(P) \leq H, \deg(P) \leq n, P(\zeta) \neq 0\right\},$$

où $H(P)$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme P. Posons par ailleurs

$$w_n(\zeta) = \limsup_{H \mapsto +\infty} \frac{-\log w_n(\zeta, H)}{\log H}$$

et

$$w(\zeta) = \limsup_{n \mapsto +\infty} \frac{w_n(\zeta)}{n}.$$

Proposition 1.3.9 *Soit ζ un nombre réel, soit $n \geq 1$ un nombre entier, on a alors*

$$0 \leq w_n(\zeta) \leq +\infty$$

et

$$0 \leq w(\zeta) \leq +\infty.$$

Mahler divisa alors l'ensemble des nombres réels en quatre :

Définition 1.3.10 *Soit ζ un nombre réel. On dit que ζ est un*

$$A\text{−}nombre \quad si \quad w(\zeta) = 0;$$

$$S\text{−}nombre \quad si \quad 0 < w(\zeta) < +\infty;$$

$$T\text{−}nombre \quad si \quad w(\zeta) = +\infty \quad et \quad w_n(\zeta) < +\infty \quad pour \quad tout \quad n \geq 1;$$

$$U\text{−}nombre \quad si \quad w(\zeta) = +\infty \quad et \quad w_n(\zeta) = +\infty \quad pour \quad certains \quad n.$$

J.F. Koksma donna une autre classification très proche de celle de K. Mahler. Soit ζ un nombre réel. Pour un entier n et un réel $H \geq 1$ donnés, on définit la quantité

$$w_n^*(\zeta, H) = \min\left\{|\zeta - \alpha| : \alpha \ \textit{réel algébrique}, H(\alpha) \leq H, \deg(\alpha) \leq n, \alpha \neq \zeta\right\},$$

où $H(P)$ désigne le maximum des valeurs absolues des coefficients du polynôme minimal de α. Posons par ailleurs

$$w_n^*(\zeta) = \limsup_{H \mapsto +\infty} \frac{-\log\left(Hw_n^*(\zeta, H)\right)}{\log H}$$

et

$$w^*(\zeta) = \limsup_{n \mapsto +\infty} \frac{w_n^*(\zeta)}{n}.$$

Proposition 1.3.11 *Soit ζ un nombre réel, soit $n \geq 1$ un nombre entier, on a alors*

$$0 \leq w_n^*(\zeta) \leq +\infty$$

et

$$w_n(\zeta) = w_n^*(\zeta) = n$$

pour presque tout nombre réel ζ.

J.F. Koksma divisa lui aussi l'ensemble des nombres réels en quatre :

Définition 1.3.12 *Soit ζ un nombre réel. On dit que ζ est un*

$$A^* - nombre \quad si \quad w^*(\zeta) = 0;$$

$$S^* - nombre \quad si \quad 0 < w^*(\zeta) < +\infty;$$

$$T^* - nombre \quad si \quad w^*(\zeta) = +\infty \quad et \quad w_n^*(\zeta) < +\infty \quad pour \quad tout \quad n \geq 1;$$

$$U^* - nombre \quad si \quad w^*(\zeta) = +\infty \quad et \quad w_n^*(\zeta) = +\infty \quad pour \quad certains \quad n.$$

Définition 1.3.13 *Nous désignons par θ^* et appelons type du S^*-nombre ζ la borne inférieure de tous les θ_1^* pour lesquels il existe un $c_n^*(\zeta)$ avec*

$$Hw_n^*(\zeta, H) > c_n^*(\zeta) H^{-\theta_1^* n}.$$

Les minorations énoncées dans [Di] permettent en particulier d'en déduire une majoration du type du S^*-nombre e^α pour α algébrique.

Notons par ailleurs la minoration suivante (par K. Mahler) de formes linéaires de puissances rationnelles de e :

Soient $m, a_1, \ldots, a_m, p_1, \ldots, p_m, q$ des nombres entiers non nuls,

$$L = a_1 e^{\frac{p_1}{q}} + a_2 e^{\frac{p_2}{q}} + \ldots + a_m e^{\frac{p_m}{q}}$$

et

$$h = \max\left\{|a_1|, \ldots, |a_m|\right\}.$$

Alors

$$|L| \geq (|a_1|, \ldots, |a_m|)^{\frac{-(m-1)}{m}} h^{\frac{-cm^2 \log(m+1)}{\log\log h}}$$

où c est une constante absolue explicite.

1.3.2 Nouveaux énoncés d'approximation diophantienne

Nous allons énoncer plusieurs théorèmes et corollaires d'approximation diophantienne (approximations rationnelle et algébrique). Nous pourrons comparer le théorème principal (1.3.14) avec celui obtenu par Yu. V. Nesterenko et M. Waldschmidt (voir théorème 1.3.3), et voir que nous améliorons sensiblement la constante 211 dans le cas rationnel (qui est utile pour[MuTi]) et plus généralement dans le cas algébrique lorsque D est fixé.

Comme nous l'avons vu à l'instant, K. Mahler [Ma4], M. Mignotte [Mi] et F. Wielonsky [Wi2] ont travaillé sur le problème diophantien de la minoration de la distance de l'exponentielle d'un nombre entier au nombre entier le plus proche, M. Mignotte et F. Wielonsky ayant successivement amélioré le premier résultat de K. Mahler. Tous trois ont utilisé des approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles ou logarithmes et des méthodes assez analytiques. En revanche, Yu. V. Nesterenko et M. Waldschmidt [NeWa] se sont servis de déterminants d'interpolation. Dans cette thèse, nous établissons des liens entre ces différentes approches et nous obtenons finalement de nouvelles mesures. Voici les principaux résultats que nous démontrerons dans cette thèse.

Théorème 1.3.14 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux nombres réels positifs, $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ de hauteur majorée par $\log \mathcal{A}$, $b \in \overline{\mathbb{Q}}$ de hauteur majorée par $\log \mathcal{B}$. Soient K et L deux nombres entiers strictement positifs tels que $KL > 4 \cdot 10^4$, et E un nombre réel supérieur ou égal à 1, tels que l'inégalité suivante soit vérifiée*

$$\begin{aligned} KL \log E \quad &> 5DKL \log 2 + K\left(D \log \mathcal{B} + (D+1)\log K + D\right) \\ &+ L\left(D \log \mathcal{A} + E|b| + \log E + D\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Alors

$$\left|e^b - a\right| \geq E^{-KL}.$$

Remarque 1.3.15 *Dans l'inégalité (1.12), le coefficient de KL est $\log E$ à gauche, et est $5D \log 2$ à droite. L'hypothèse (1.12) impose donc*

$$E > 2^{5D}.$$

Cette contrainte sur E est plus forte que celle du théorème 1.3.3 ; cependant, à D fixé et à partir d'une valeur seuil pour $\mathcal{A}$, cette condition (1.12) est alors moins contraignante que celle du théorème 1.3.3.

La recherche de paramètres K, L qui conviennent nous amène au corollaire suivant :

Corollaire 1.3.16 *Posons $\gamma_D = 2^{5D}$. Soit E un nombre réel strictement supérieur à γ_D.*

Soient c_K et c_L deux nombres réels strictement positifs vérifiant

$$c_K c_L \log\left(\frac{E}{\gamma_D}\right) > (c_K + c_L)\log E. \tag{1.13}$$

Alors il existe un nombre réel positif $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ de sorte que, pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_0$, on ait

$$\begin{aligned}\left|e^b - a\right| \geq \exp\{&-c_K c_L\left(D\log\mathcal{A} + \log E + E|b| + D\right)\\ &\times \frac{D\log\mathcal{B} + (D+1)\left(\log\log\mathcal{A} + \log(E|b|_+) + 2\log D\right) + D}{\log E}\Big\}.\end{aligned}$$

Nous allons, à présent, nous restreindre au cas rationnel. Par un choix convenable des paramètres c_K et c_L, nous obtenons le corollaire qui suit

Corollaire 1.3.17 *Il existe une constante absolue strictement positive $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ telle que pour tous nombres rationnels a et b avec $a > 0$ et $b \neq 0$, si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, E sont trois nombres réels satisfaisant*

$$h(a) \leq \log\mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_0, \quad h(b) \leq \log\mathcal{B} \quad \text{et} \quad E \geq 2^{20},$$

on ait

$$\begin{aligned}\left|e^b - a\right| \geq \exp\Big\{&-\frac{64}{9}\left(\log\mathcal{A} + \log E + E|b| + 1\right)\\ &\times \frac{\log\mathcal{B} + 2\left(\log\log\mathcal{A} + \log(E|b|_+)\right) + 1}{\log E}\Big\}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Par un choix convenable de E, nous obtiendrons le corollaire suivant :

Corollaire 1.3.18 *Il existe une constante absolue strictement positive $\mathcal{A}_1$ telle que pour tous nombres rationnels a et b avec $a > 0$ et $b \neq 0$, si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont deux nombres réels satisfaisant*

$$h(a) \leq \log\mathcal{A}, \quad h(b) \leq \log\mathcal{B} \quad \mathcal{A} \geq \mathcal{A}_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{B} \geq 2,$$

on ait

$$|e^b - a| \geq \exp\left\{-1.3\cdot 10^5 \left(\log\mathcal{A}\right)\left(\log\mathcal{B}\right)\right\}. \tag{1.15}$$

Remarque 1.3.19 *Dans le cas où* $\log a > (\log \mathcal{A})^{1/2}$*, nous obtiendrons une estimation légèrement plus précise :*

$$|e^b - a| \geq \exp\left\{-10^5 (\log \mathcal{A})(\log \mathcal{B})\right\}, \tag{1.16}$$

et une encore meilleure pour $|b| \leq 1$ *:*

$$|e^b - a| \geq \exp\left\{-3.2 \cdot 10^4 (\log \mathcal{A})(\log \mathcal{B})\right\}. \tag{1.17}$$

Le corollaire 1.3.18 permet de retrouver le théorème 1.3.8.

Nous pouvons alors déduire, comme application de ces corollaires, le résultat suivant :

Corollaire 1.3.20 *Pour tout nombre rationnel* $a > 1$*, on a*

$$\lim_{b_0 \longrightarrow +\infty} \min_{b_1 \in \mathbb{N}^*} \left|e^{b_1} - a^{b_0}\right| = +\infty;$$

de plus, il existe une constante absolue strictement positive $\mathcal{A}_2$ *telle que pour tout nombre réel* $\mathcal{A}$ *satisfaisant*

$$h(a) \leq \log \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} \geq \mathcal{A}_2$$

on ait

$$\min_{b_0, b_1 \in \mathbb{N}^*} \left|e^{b_1} - a^{b_0}\right| \geq \exp\left\{-2.6 \cdot 10^5 \log \mathcal{A} \log\log \mathcal{A}\right\}.$$

Remarque 1.3.21 *Quand on choisit* $a = 2$*, on trouve*

$$\lim_{b_0 \longrightarrow +\infty} \min_{b_1 \in \mathbb{N}^*} \left|e^{b_1} - 2^{b_0}\right| = +\infty,$$

et par conséquent il existe une constante réelle strictement positive β *telle que*

$$\min_{b_0, b_1 \in \mathbb{N}^*} \left|e^{b_1} - 2^{b_0}\right| \geq \beta;$$

le théorème 1.3.2 affirme que $\beta = e^2 - 2^3$ *convient.*

Nous donnerons, à la fin du chapitre 4, d'autres minorations explicites semblables à celles du théorème 1.3.2.

Dans le cas particulier où a et b sont deux nombres entiers, nous démontrerons une variante du théorème 1.3.14.

Théorème 1.3.22 *Soit b un nombre entier strictement positif ; soient K et L deux nombres entiers tels que $KL > 4 \cdot 10^4$, et E un nombre réel supérieur ou égal à 1, tels que l'inégalité suivante soit vérifiée*

$$KL \log E > KL \log 11.33 + 2K \log K + E|b|L + L \log(6LE).$$

Alors, pour tout nombre entier a, nous avons

$$\left|e^b - a\right| \geq E^{-KL}.$$

Remarque 1.3.23 *Le théorème 1.3.22 implique le théorème 1.3.1 avec une constante c égale à 707 (en prenant K de l'ordre de b et L de l'ordre de $\log b$).*

Les résultats précédents permettent également de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.3.24 *Soit b un nombre algébrique (non nul), alors e^b est un S^*-nombre de type majoré par $\dfrac{503}{9}$.*

Chapitre 2

Liens entre approximants de Hermite-Padé, polynômes d'interpolation de Hermite et matrice de Vandermonde généralisée

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème 1.2.12. Nous allons, dans un premier temps, redonner les formules intégrales de Hermite des approximants de Hermite-Padé de type I des fonctions exponentielles. Ensuite, nous expliciterons les expressions algébriques de ces mêmes approximants par différentes méthodes. Le premier objectif étant de décrire les polynômes approximants en termes d'algèbre linéaire, nous introduisons, pour cela, les déterminants de Vandermonde généralisés.

Nous ferons ensuite le lien avec l'interpolation de Hermite où nous donnerons l'expression du polynôme d'interpolation de Hermite par deux méthodes (une algébrique et une matricielle).

Finalement, nous montrerons que les coefficients des approximants de Hermite-Padé de type I des fonctions exponentielles correspondent à des mineurs de la matrice de Vandermonde généralisée précédemment considérée, tout comme les coefficients des polynômes d'interpolation de Hermite.

Cette section a pour but de préciser des formules et valeurs intrinsèques pour certains coefficients dont nous nous servirons dans les deux chapitres suivants.

Dans tout ce chapitre, m est un nombre entier strictement positif, $x_0, \ldots, x_m$ des nombres complexes deux à deux distincts et $n_0, \ldots, n_m$ des nombres entiers strictement positifs. Nous allons donc considérer les approximants de Hermite-Padé de type I des fonctions $f_i(z) = e^{x_i z} \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq m.$

Remarque 2.1.1 *Les liens mis en évidence dans cette partie entre les approximants de Hermite-Padé et les polynômes d'interpolation de Hermite reposent, en fait, sur une seule et simple égalité, propriété de la fonction exponentielle :*

pour tous entiers $i, j \geq 1$, et tout nombre complexe ω, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}z^{i-1}} \left(\frac{z^{j-1}}{(j-1)!} e^{\omega z} \right)_{z=0} &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}z^{j-1}} \left(z^{i-1} \right)_{z=\omega} \\ &= \binom{i-1}{j-1} \omega^{i-j} \end{aligned}$$

Rappelons que, par convention, cette quantité est nulle si $j > i$.

Ainsi, les coefficients de Taylor à l'origine des fonctions « polynômes exponentiels » s'interprètent en termes de valeurs de polynômes et de leurs dérivées. Nous pourrons nous référer à [Wa3] pour des généralisations en plusieurs variables.

2.2 Rappels sur les approximants de Hermite-Padé de fonctions exponentielles

Nous allons, ici, redonner les formules intégrales de Hermite pour les approximants de Hermite-Padé de type I des fonctions exponentielles. Ensuite, nous expliciterons les expressions algébriques de ces mêmes approximants.

2.2.1 Formules de Hermite

Hermite a donné les formules suivantes pour les approximants de Hermite-Padé de type I, $P_0, \dots, P_m$, des fonctions exponentielles, attachés aux nombres $x_0, \dots, x_m$ et aux paramètres $n_0, \dots, n_m$:

Proposition 2.2.1 *Soient C_0 et C_∞ deux cercles : le premier centré en 0 et de rayon strictement inférieur à la plus petite distance séparant deux x_j, et le second centré en 0 contenant tous les points $x_0, ..., x_m$.*

Soient

$$P_i(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{e^{z\zeta}}{\prod\limits_{j=0}^{m} (\zeta + x_i - x_j)^{n_j}} \mathrm{d}\zeta$$

et

$$R(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\infty} \frac{e^{z\zeta}}{\prod\limits_{j=0}^{m} (\zeta - x_j)^{n_j}} \mathrm{d}\zeta.$$

Alors :

(1) $P_0, \dots, P_m$ *sont des polynômes de degré* $n_i - 1$,

(2) $R(z) = \sum\limits_{i=0}^{m} P_i(z) e^{x_i z}$ *et*

(3) $\mathrm{ord}_{z=0}\,(R(z)) \geq \sigma - 1$ *où* $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{m} n_i$.

Les polynômes $P_0, \dots, P_m$ sont donc des approximants de Hermite-Padé de type I pour les fonctions $e^{x_0 z}, \dots, e^{x_m z}$. De plus, ce système est parfait.

Démonstration : Nous allons montrer (1) en étudiant les dérivées successives des P_i. On fixe $i \in \{0, \dots, m\}$.

Si n est un nombre entier supérieur ou égal à n_i, nous avons :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n (P_i(z)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{\zeta^n e^{z\zeta}}{\prod\limits_{j=0}^{m} (\zeta + x_i - x_j)^{n_j}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{\zeta^{n-n_i} e^{z\zeta}}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{m} (\zeta + x_i - x_j)^{n_j}} \mathrm{d}\zeta = 0$$

car la fonction $\zeta \longmapsto \zeta^{n-n_i} e^{z\zeta} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} (\zeta + x_i - x_j)^{-n_j}$ est holomorphe sur le disque dont le bord est C_0.

Donc P_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n_i - 1$. Montrons que P_i est un polynôme de degré exactement égal à $n_i - 1$ en prouvant que $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n_i-1} (P_i(z)) \neq 0$.

Par la même formule que précédemment et par la formule des résidus, nous avons :

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{n_i-1} (P_i(z)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{1}{\zeta} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} (\zeta + x_i - x_j)^{n_j}} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m} (x_i - x_j)^{n_j}} \neq 0. \quad (2.1)$$

Donc chaque P_i est bien un polynôme de degré égal à $n_i - 1$.

Nous montrons (2) en explicitant le membre de droite. D'après les expressions des P_i et en plaçant $e^{x_i z}$ dans l'intégrale, il vient

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(z) e^{x_i z} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=0}^{m} \int_{C_0} \frac{e^{z(\zeta + x_i)}}{\prod_{j=0}^{m} (\zeta + x_i - x_j)^{n_j}} \mathrm{d}\zeta.$$

Nous effectuons alors le changement de variables $\zeta \longmapsto \zeta + x_i$ et nous notons C_{x_i} un cercle de centre x_i et de rayon strictement inférieur à la plus petite distance séparant deux x_j. Donc,

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(z) e^{x_i z} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=0}^{m} \int_{C_{x_i}} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^{m} (\zeta - x_j)^{n_j}} \mathrm{d}\zeta.$$

Finalement,

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(z)e^{x_i z} = \frac{1}{2i\pi}\sum_{i=0}^{m}\int_{C_{x_i}} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^{m}(\zeta - x_j)^{n_j}}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_{x_0}\sqcup\ldots\sqcup C_{x_m}} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^{m}(\zeta - x_j)^{n_j}}\mathrm{d}\zeta$$

car les cercles C_{x_i} en question sont disjoints.

Maintenant, les $m+1$ pôles de $\zeta \longmapsto e^{z\zeta}\prod_{j=0}^{m}(\zeta - x_j)^{-n_j}$ étant, chacun, dans exactement un des cercles C_{x_i} pour $i = 0, \ldots, m$, alors comme C_∞ est un cercle centré en 0 contenant tous les points $x_0, ..., x_m$, nous avons :

$$R(z) = \int_{C_{x_0}\sqcup\ldots\sqcup C_{x_m}} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^{m}(\zeta - x_j)^{n_j}}\mathrm{d}\zeta = \int_{C_\infty} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^{m}(\zeta - x_j)^{n_j}}\mathrm{d}\zeta$$

d'après le théorème de Cauchy.

Nous pouvons donc conclure :

$$\sum_{i=0}^{m} P_i(z)e^{x_i z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_\infty} \frac{e^{z\zeta}}{\prod_{j=0}^{m}(\zeta - x_j)^{n_j}}\mathrm{d}\zeta = R(z).$$

Enfin, nous montrons (3) de la manière suivante.

Comme la fonction $\zeta \longmapsto \prod_{j=0}^{m}(\zeta - x_j)^{-n_j}$ a, en $\zeta = \infty$, un zéro d'ordre $\sigma = \sum_{i=0}^{m} n_i$ et que ses pôles sont en $\zeta = x_0, \ldots, x_m$, nous pouvons donc écrire, en effectuant un développement de Laurent de cette fonction :

$$\prod_{j=0}^{m}(\zeta - x_j)^{-n_j} = \sum_{k=\sigma}^{+\infty} c_k \zeta^{-k}$$

pour $|\zeta| > \max_{0\le j\le m} |x_j|$, où les c_k sont des nombres complexes et où $c_\sigma \neq 0$.

De plus, d'après l'expression intégrale de R, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{C_\infty}\left(\sum_{k=\sigma}^{+\infty} c_k\zeta^{-k}\right)e^{\zeta}\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2i\pi}\frac{1}{z}\int_{C_\infty}\left(\sum_{k=\sigma}^{+\infty} c_k z^k\zeta^{-k}\right)e^{\zeta}\mathrm{d}\zeta, \end{aligned}$$

grâce au changement de variables $\zeta \longmapsto \zeta/z$.

Donc,

$$R(z) = z^{\sigma-1}\frac{1}{2i\pi}\int_{C_\infty}\left(\sum_{k=\sigma}^{+\infty} c_k z^{k-\sigma}\zeta^{-k}\right)e^{\zeta}\mathrm{d}\zeta;$$

et par conséquent, $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k (R(z))$ s'annule en 0 pour tout $k = 0, \ldots, \sigma - 2$.

D'où nous concluons que $\mathrm{ord}_{z=0}\,(R(z)) \geq \sigma - 1$.

Pour terminer la preuve de la proposition, il reste à démontrer que $\mathrm{ord}_{z=0}\,(R(z)) = \sigma - 1$. En effet,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\sigma-1}(R(z))(0) &= (\sigma-1)!\frac{1}{2i\pi}\int_{C_\infty} c_\sigma\zeta^{-!\sigma}e^{\zeta}\mathrm{d}\zeta \\ &= (\sigma-1)!c_\sigma\frac{1}{2i\pi}\int_{C_\infty}\frac{e^{\zeta}}{\zeta^{\sigma}}\mathrm{d}\zeta \\ &= (\sigma-1)!c_\sigma \operatorname*{Rés}_{\zeta=0}\frac{e^{\zeta}}{\zeta^{\sigma}} \\ &= c_\sigma \neq 0. \end{aligned}$$

□

Notons, par ailleurs, que Hermite [He2] a fourni la représentation suivante pour le reste R :

$$R(z) = z^{\sigma}\int_0^1 \ldots \int_0^1 U(y_0, \ldots, y_{m-1}) \cdot e^{zV(y_0,\ldots,y_{m-1})}\mathrm{d}y_0 \ldots \mathrm{d}y_{m-1},$$

où

$$V(y_0,\dots,y_{m-1}) = (x_0-x_1)y_0\dots y_{m-1}+\dots+(x_{m-2}-x_{m-1})y_{m-2}y_{m-1}+x_{m-1}y_{m-1},$$

$$U(y_0,\dots,y_{m-1}) = (1-y_0)^{n_1-1}\dots(1-y_{m-1})^{n_m-1}y_0^{n_0-1}y_1^{n_0+n_1-1}\dots y_{m-1}^{n_0+\dots+n_{m-1}-1}.$$

2.2.2 Forme algébrique des approximants

Pour $0 \le i \le m$ et $0 \le j \le n_i - 1$, nous définissons $\Lambda(i,j)$ (qui dépend de $n_0,\dots,n_m$) comme l'ensemble des multi-indices entiers $\gamma = (\gamma_p)_{\substack{0\le p\le m\\ p\ne i}} \in \mathbb{N}^m$, avec $\gamma_p \ge 0$ pour p compris entre 0 et m, $p \ne i$, tels que $\displaystyle\sum_{\substack{p=0\\p\ne i}}^m \gamma_p = n_i - j - 1$.

Proposition 2.2.2 *Sous les hypothèses de la proposition 2.2.1, comme P_i, pour $i = 0,\dots,m$, est un polynôme de degré n_i-1, nous pouvons définir des nombres complexes $p_{i,j}$ $(0 \le j \le n_i - 1)$ par :*

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{i,j}\frac{z^j}{j!}.$$

Alors

$$p_{i,j} = \sum_{\gamma\in\Lambda(i,j)} \prod_{\substack{p=0\\p\ne i}}^m \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(x_i-x_p)^{\gamma_p+n_p}}\binom{\gamma_p+n_p-1}{n_p-1}\right).$$

En particulier, le coefficient dominant $\dfrac{1}{(n_i-1)!}p_{i,n_i-1}$ du polynôme P_i est

$$\frac{1}{(n_i-1)!}\prod_{\substack{p=0\\p\ne i}}^m \frac{1}{(x_i-x_p)^{n_p}}.$$

Cela résulte aussi de la formule (2.1).

Démonstration :

Nous utiliserons les écritures intégrales de la proposition 2.2.1.

En développant $e^{z\zeta}$ en série entière, nous avons $e^{z\zeta} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(z\zeta)^j}{j!}$; d'après la proposition 2.2.1, nous en déduisons (cette série convergeant normalement sur tout domaine contenant C_0)

$$P_i(z) = \sum_{j=0}^{n_i-1} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} f_{i,j}(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right) \frac{z^j}{j!}$$

où nous avons noté

$$f_{i,j}(\zeta) = \frac{\zeta^{j-n_i}}{\prod\limits_{\substack{p=0 \\ p\neq i}}^{m} (\zeta + x_i - x_p)^{n_p}}.$$

Alors, suivant l'expression précédente des P_i,

$$p_{i,j} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} f_{i,j}(\zeta) \mathrm{d}\zeta. \tag{2.2}$$

Les pôles éventuels de la fonction $f_{i,j}$ sont en 0 et en $x_p - x_i$ ($p = 0, \ldots, m$ et $p \neq i$) ; seul le point zéro se trouve à l'intérieur du cercle C_0. Nous allons donc étudier le développement de cette fonction $f_{i,j}$ au voisinage de zéro, afin d'en déterminer le résidu.

En dérivant k fois la série géométrique

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-x)^n,$$

on obtient la formule

$$\frac{k!}{(1+x)^{k+1}} = \sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)(-x)^{n-k}$$

qui fournit alors l'égalité suivante :

$$\frac{1}{(\zeta + x_i - x_p)^{n_p}} = \frac{1}{(n_p-1)!} \sum_{n\geq n_p-1} \frac{(-1)^{n-n_p+1}}{(x_i-x_p)^{n+1}} \frac{n!}{(n-n_p+1)!} \zeta^{n-n_p+1}.$$

Par un simple changement d'indice, nous concluons

$$\frac{1}{(\zeta + x_i - x_p)^{n_p}} = \frac{1}{(n_p-1)!} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(x_i-x_p)^{n+n_p}} \frac{(n+n_p-1)!}{n!} \zeta^n.$$

Le produit de telles expressions nous donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} (\zeta + x_i - x_p)^{n_p}} &= \prod_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} \left(\frac{1}{(n_p-1)!} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(x_i-x_p)^{n+n_p}} \frac{(n+n_p-1)!}{n!} \zeta^n \right) \\ &= \left(\prod_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} \frac{1}{(n_p-1)!} \right) \prod_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(x_i-x_p)^{n+n_p}} \frac{(n+n_p-1)!}{n!} \zeta^n \right). \end{aligned}$$

Le coefficient du monôme ζ^{n_i-j-1} dans le développement de $\prod\limits_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} (\zeta + x_i - x_p)^{-n_p}$, qui nous permettra d'obtenir le résidu cherché, vaut alors :

$$\begin{aligned} &\left(\prod_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} \frac{1}{(n_p-1)!} \right) \sum_{\Lambda(i,j)} \prod_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(x_i-x_p)^{\gamma_p+n_p}} \frac{(\gamma_p+n_p-1)!}{\gamma_p!} \right) \\ &= \sum_{\Lambda(i,j)} \prod_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(x_i-x_p)^{\gamma_p+n_p}} \binom{\gamma_p+n_p-1}{n_p-1} \right). \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème des résidus, nous en déduisons

$$p_{i,j} = \sum_{\Lambda(i,j)} \prod_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(x_i-x_p)^{\gamma_p+n_p}} \binom{\gamma_p+n_p-1}{n_p-1} \right).$$

$\square$

Remarque 2.2.3 *Nous avons une autre écriture pour les coefficients $p_{i,j}$.*

Suivant l'expression (2.2) des $p_{i,j}$:

$$p_{i,j} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_0} \frac{\zeta^{j-n_i}}{\prod\limits_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} (\zeta + x_i - x_p)^{n_p}} \mathrm{d}\zeta$$

nous pouvons écrire, grâce au théorème des résidus :

$$p_{i,j} = \frac{1}{(n_i-j-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{n_i-j-1} \prod_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} (\zeta - x_p)^{-n_p}\,(x_i).$$

Désignons par Q_i le polynôme suivant : $Q_i(\zeta) = \prod\limits_{\substack{p=0\\p\neq i}}^{m} (\zeta - x_p)^{n_p}$, alors

$$p_{i,j} = \frac{1}{(n_i-j-1)!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{n_i-j-1} \left(\frac{1}{Q_i(\zeta)}\right)(x_i). \tag{2.3}$$

Cette écriture nous servira par la suite pour vérifier la proportionnalité de certains coefficients.

2.3 Interpolation de Hermite

2.3.1 Généralités sur l'interpolation de Hermite

Nous démontrons maintenant le lemme 1.2.7

Démonstration :

Notons $\mathbb{C}_k[X]$ l'espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k.

Considérons l'application ϕ suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}^{\sigma} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0),\ldots,P^{(n_0-1)}(x_0),\ldots,P(x_m),\ldots,P^{(n_m-1)}(x_m)\big). \end{array}$$

Cette application ϕ est linéaire et son noyau est l'idéal de $\mathbb{C}_{\sigma-1}[X]$ engendré par le polynôme $\prod_{k=0}^{m}(X-x_k)^{n_k}$. Comme $\mathbb{C}_{\sigma-1}[X]\cap\ker\Phi=\{0\}$ et que $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}_{\sigma-1}[X]=\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^{\sigma}=\sigma$, nous en déduisons donc que l'application $\phi_{|\mathbb{C}_{\sigma-1}[X]}$ est bijective.

D'où l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation recherché. □

La proposition 1.2.8 se déduit immédiatemment du lemme 1.2.7.

2.3.2 Recherche algébrique du polynôme d'interpolation de Hermite

Nous allons, ici, fournir une expression intrinsèque des polynômes d'interpolation de Hermite. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 2.3.1 *Soient f et g deux fonctions analytiques dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$. Soit $x\in\mathcal{U}$ un point où f et g ne s'annulent pas. Soit n un nombre entier non nul.*

Supposons que

$$(f(X)g(X))^{(k)}(x)=0$$

pour tout $k=1,\ldots,n$; alors les $n+1$ premiers coefficients de Taylor de la fonction f en x sont proportionnels aux $n+1$ premiers coefficients de Taylor de la fonction g^{-1} en x, le coefficient de proportionnalité étant $f(x)g(x)$.

Démonstration :

Raisonnons modulo $(X-x)^{n+1}$, c'est-à-dire dans $\mathbb{C}[[X-x]]/\left((X-x)^{n+1}\right)$.

Soit $\alpha=f(X)g(X)$. L'hypothèse sur fg signifie que $f(X)g(X)-\alpha$ a un zéro de multiplicité $\geq n+1$ en $X=x$, ce qui s'écrit

$$\alpha\equiv f(x)g(x)\mod\left((X-x)^{n+1}\right).$$

Comme g ne s'annule pas en x, $g(X)$ est inversible dans $\mathbb{C}[[X-x]]/\left((X-x)^{n+1}\right)$ et par conséquent
$$f(X) \equiv \frac{\alpha}{g(X)} \mod \left((X-x)^{n+1}\right).$$
□

Nous en déduisons maintenant le théorème 1.2.9.

Première démonstration du théorème 1.2.9

Étant donné que pour tous les nombres entiers $k = 0, \ldots, m$ avec $k \neq i$, et pour tous les nombres entiers $\ell = 0, \ldots, n_k - 1$ nous avons $\mathcal{L}_{i,j}^{(\ell)}(x_k) = 0$, sachant aussi que $\mathcal{L}_{i,j}^{(\ell)}(x_i) = 0$ pour tous les nombres entiers $\ell = 0, \ldots, j-1$, nous en déduisons que le polynôme $\mathcal{L}_{i,j}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = Q_{i,j}(X) R_i(X) \frac{(X-x_i)^j}{j!} \tag{2.4}$$

où le polynôme $Q_{i,j}$ est de degré inférieur ou égal à $n_i - j - 1$.

Maintenant, $\mathcal{L}_{i,j}^{(j)}(x_i) = 1$ implique $Q_{i,j}(x_i) R_i(x_i) = 1$ par la formule de Leibniz, et donc $Q_{i,j}(x_i) = 1$.

De plus, $\mathcal{L}_{i,j}^{(k)}(x_i) = 0$ pour $k = j+1, \ldots, n_i - 1$ ce qui implique, toujours par la formule de Leibniz,
$$(Q_{i,j} R_i)^{(k)}(x_i) = 0,$$

pour $k = 1, \ldots, n_i - j - 1$.

Le polynôme $Q_{i,j}$ est donc déterminé par les conditions :
$$\left(Q_{i,j} R_i\right)(x_i) = 1 \tag{2.5}$$
et
$$(Q_{i,j} R_i)^{(k)}(x_i) = 0 \tag{2.6}$$
pour $k = 1, \ldots, n_i - j - 1$.

Écrivons $Q_{i,j}$ sous la forme de sa série de Taylor au point x_i :
$$Q_{i,j}(X) = \sum_{k=0}^{n_i-j-1} a_k \frac{(X-x_i)^k}{k!};$$

alors $a_0 = 1$ et (2.6) représentent $n_i - j - 1$ équations pour autant d'inconnues a_k $(1 \leq k \leq n_i - j - 1)$.

Nous appliquons le lemme 2.3.1 aux polynômes $Q_{i,j}$ et R_i qui vérifient (2.5) et (2.5). Par ce lemme, nous montrons que les a_k sont alors les premiers coefficients de Taylor de la fonction R_i^{-1} au point x_i pour $k = 1, \ldots, n_i - j - 1$; nous concluons donc que chaque coefficient du polynôme $Q_{i,j}$ s'exprime de la manière suivante :

$$a_k = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^k \left(\frac{1}{R_i(X)}\right)_{|X=x_i} ;$$

il s'ensuit alors

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = R_i(X)\frac{(X-x_i)^j}{j!}\sum_{k=0}^{n_i-j-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^k \left(\frac{1}{R_i(X)}\right)_{|X=x_i} \frac{(X-x_i)^k}{k!}.$$

□

Nous allons, maintenant, redémontrer le théorème 1.2.9 en utilisant la formule de Faa' Di Bruno [Fa] suivante.

Proposition 2.3.2 *Soient f et g deux fonctions dérivables n fois, respectivement en $g(t)$ et en t. Alors*

$$(fog)^{(n)}(t) = \sum \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} f^{(k)}(g(t)) \left(\frac{g'(t)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{g^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n},$$

où

$$k = k_1 + \ldots + k_n$$

et où la somme se fait sur les nombres entiers $k_1, \ldots, k_n$ tels que

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n.$$

Deuxième démonstration du théorème 1.2.9

Reprenons l'équation (2.4).

Nous avons $\mathcal{L}_{i,j}^{(j)}(x_i) = 1$, $\mathcal{L}_{i,j}^{(j+1)}(x_i) = 0$ et $\mathcal{L}_{i,j}^{(j+2)}(x_i) = 0$, ce qui implique donc

$$Q_{i,j}(x_i) = 1,$$
$$Q'_{i,j}(x_i) = -R'_i(x_i)$$

et

$$Q''_{i,j}(x_i) = 2R'^2_i(x_i) - R''_i(x_i).$$

En appliquant la formule de Leibniz à (2.4) de la façon suivante, nous avons (pour $n \geq j$) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{i,j}^{(n)}(x_i) &= \left(R_i(X)\frac{(X-x_i)^j}{j!}Q_{i,j}(X)\right)^{(n)}_{|X=x_i} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{(X-x_i)^j}{j!}\right)^{(k)} (x_i)\, (R_iQ_{i,j})^{(n-k)}_{|X=x_i}\,, \\
&= \binom{n}{j} (R_iQ_{i,j})^{(n-j)}(x_i).
\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence sur les $n-1$ premières dérivées de $Q_{i,j}$, en utilisant la proposition 2.3.2 pour $f(X) = \dfrac{1}{X}$ et $g(t) = R_i(t)$, et le fait que

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^k \left(\frac{1}{X}\right)_{|X=R_i(x_i)} = (-1)^k k! R_i(x_i)^{-(k+1)} = (-1)^k k!,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Q_{i,j}^{(n)}(x_i) &= \sum \frac{n!}{k_1!\dots k_n!}(-1)^k k! \left(\frac{R'_i(x_i)}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{R_i^{(n)}(x_i)}{n!}\right)^{k_n} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^n \left(\frac{1}{R_i}\right)(x_i),
\end{aligned}$$

où

$$k = k_1 + \dots + k_n$$

et où la somme se fait sur les nombres entiers $k_1, \dots, k_n$ tels que

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n.$$

Nous avons donc

$$Q_{i,j}(X) = \sum_{k=0}^{n_i-j-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^k \left(\frac{1}{R_i(X)}\right)_{|X=x_i} \frac{(X-x_i)^k}{k!}.$$

D'où l'écriture du polynôme $\mathcal{L}$. $\square$

2.4 Interpolation selon Hermite ; représentation intégrale et lien avec les polynômes de Hermite-Padé

Nous reprenons ici les propos de C. Hermite sur « une généralisation » de l'interpolation de Lagrange. Ceux-ci sont extraits d'une lettre de C. Hermite à M. Borchardt sur la « Formule d'Interpolation de Lagrange », qui se trouve dans les « Œuvres de Charles Hermite » [He2].

On se propose de trouver un polynôme $F(x)$ de degré $\sigma - 1$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{llll} F(a) = f(a), & F'(a) = f'(a), & \dots, & F^{(\alpha-1)}(a) = f^{(\alpha-1)}(a), \\ F(b) = f(b), & F'(b) = f'(b), & \dots, & F^{(\beta-1)}(b) = f^{(\beta-1)}(b), \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots\dots\dots, \\ F(l) = f(l), & F'(l) = f'(l), & \dots, & F^{(\lambda-1)}(l) = f^{(\lambda-1)}(l), \end{array}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. En supposant

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = \sigma,$$

la question comme on voit est déterminée et conduira à une généralisation de la formule de Lagrange sur laquelle on présentera quelques remarques. Elle se résout d'abord comme il suit. On considère une aire s, comprenant d'une part, $a, b, \ldots, l$, et de l'autre la quantité x ; on suppose qu'à son intérieur la fonction $f(x)$ est uniforme et n'a aucun pôle ; cela étant on établit la relation

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(\zeta)(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda}{(x-\zeta)(\zeta-a)^\alpha(\zeta-b)^\beta \ldots (\zeta-l)^\lambda} \mathrm{d}\zeta, \tag{2.7}$$

l'intégrale du second membre se rapportant au contour de s.

[...]

Si nous observons cette dernière représentation intégrale (2.7) pour la généralisation de l'interpolation de Lagrange, et celles de la proposition 2.2.1 pour les approximants de Hemite-Padé ainsi que pour leur reste :

$$P_i(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{e^{z\zeta}}{(\zeta + x_i - x_0)^{n_0} \dots (\zeta + x_i - x_m)^{n_m}} \mathrm{d}\zeta$$

et

$$R(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\infty} \frac{e^{z\zeta}}{(\zeta - x_0)^{n_0} \dots (\zeta - x_m)^{n_m}} \mathrm{d}\zeta,$$

nous remarquons une similitude qui *a posteriori* nous permet d'entrevoir un lien entre l'interpolation de Hermite et l'approximation de Hermite-Padé. C'est ce lien que nous allons mettre en évidence par le biais des déterminants de Vandermonde généralisés.

2.5 Déterminant de Vandermonde généralisé

2.5.1 Définitions et propriétés

Définition 2.5.1 *Nous nommerons « déterminant de Vandermonde généralisé » et nous noterons Δ, le déterminant suivant :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_0 & \dots & B_m \end{vmatrix}$$

où B_i est la matrice à σ lignes et n_i colonnes définie par

$$B_i = \left(\frac{1}{j!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} \right)^j (X^k)_{|X=x_i} \right)_{\substack{0 \le k \le \sigma-1 \\ 0 \le j \le n_i - 1}} = \left(\binom{k}{j} x_i^{k-j} \right)_{\substack{0 \le k \le \sigma-1 \\ 0 \le j \le n_i - 1}}.$$

Remarque 2.5.2 *Nous retrouvons le déterminant de Vandermonde usuel lorsque les n_i sont tous égaux à 1.*

Le déterminant Δ correspond au déterminant de la matrice définie par la formule (1.5).

La valeur de Δ est alors donnée par la formule suivante

Proposition 2.5.3 *Nous avons*

$$\Delta = \prod_{0 \leq k < p \leq m} (x_p - x_k)^{n_p n_k} .$$

Démonstration : Voir, par exemple, V. Elconin [El] ou R.P. Flowe et G.A. Harris [FlHa].

La preuve est classique. On regarde Δ comme un polynôme en $x_1, \dots, x_m$; il s'annule avec une multiplicité supérieure ou égale à $n_p n_k$ sur les hyperplans $x_p = x_k$.

2.5.2 Liens avec les polynômes d'interpolation de Hermite

Nous allons considérer une matrice de Vandermonde généralisée (définie par la formule (1.5)) afin de décrire le système matriciel dont se déduit l'expression des polynômes d'interpolation de Hermite. Le cas simple où tous les n_i sont égaux à 1 fait intervenir une matrice de Vandermonde usuelle.

Soit $\mathcal{L}_{i,j}(X) = \sum\limits_{k=0}^{\sigma-1} \gamma_{k;i,j} X^k$ le polynôme d'interpolation de Hermite défini dans le lemme 1.2.7 et soit $a'_{k;i,j}$ le cofacteur de $a_{k;i,j}$ dans la matrice $\mathcal{M}$; nous avons alors :

Proposition 2.5.4

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = \frac{\Delta^{-1}}{j!} \sum_{k=0}^{\sigma-1} a'_{k;i,j} X^k.$$

Démonstration : Il est équivalent de chercher le polynôme d'interpolation de Hermite $\mathcal{L}_{i,j}$ aux points $x_0, \dots, x_m$, d'ordres respectifs $n_0, \dots, n_m$, et de résoudre le système d'équations linéaires en les inconnues $\gamma_{0;i,j}, \dots, \gamma_{\sigma-1;i,j}$:

$${}^t\mathcal{M} \begin{pmatrix} \gamma_{0;i,j} \\ \vdots \\ \gamma_{\sigma-1;i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/j! \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

où le terme $1/j!$ se trouve sur la ligne j du bloc-ligne d'indice i.

En effet, si nous retranscrivons cette égalité matricielle en des équations algébriques, nous obtenons les équations suivantes, valables pour tout nombre entier $i' = 0, \ldots, m$ et tout nombre entier $j' = 0, \ldots, n_{i'} - 1$:

$$\sum_{k=j'}^{\sigma-1} \gamma_{k;i,j} \binom{k}{j'} x_{i'}^{k-j'} = \frac{1}{j'!} \delta_{i,i'} \delta_{j,j'}.$$

Le polynôme d'interpolation recherché est donc bien le polynôme $\mathcal{L}_{i,j}(X) = \sum_{k=0}^{\sigma-1} \gamma_{k;i,j} X^k$; il reste à déterminer les $\gamma_{k;i,j}$, pour $k = 0, \ldots, \sigma - 1$.

Afin de retrouver les expressions explicites, il ne nous reste plus qu'à déterminer $\mathcal{M}^{-1}$ qui est aussi égale à la matrice transposée de la comatrice de $\mathcal{M}$ divisée par son déterminant. De même que pour le cas des points simples, on connaît le déterminant de $\mathcal{M}$ qui est un déterminant de Vandermonde généralisé, il faut et il suffit alors d'en exprimer tous les cofacteurs.

Comme $a'_{k;i,j}$ est le cofacteur de $a_{k;i,j}$ dans la matrice $\mathcal{M}$, on a

$$\gamma_{k;i,j} = \frac{1}{j!} (\det \mathcal{M})^{-1} a'_{k;i,j}.$$

Or, le déterminant de $\mathcal{M}$ n'est rien d'autre que Δ ; d'où la conclusion de cette démonstration.

$\square$

La proposition 2.5.4 démontre la relation (1.6) du théorème 1.2.12.

2.5.3 Liens avec les approximants de Hermite-Padé

Nous nous intéressons ici au cas particulier où $f_i(z) = e^{iz}$.

Nous allons, dans un premier temps, identifier les coefficients des approximants de Hermite-Padé avec les coefficients d'une certaine forme linéaire, ce qui nous permettra ensuite de déterminer les coefficients de chaque approximant.
Pour cela, nous allons montrer que les coefficients des approximants de Hermite-Padé de type I des fonctions exponentielles peuvent s'exprimer comme certains cofacteurs d'une matrice de Vandermonde généralisée.

Posons, comme au paragraphe 1.2.1,

$$R(z) = \sum_{i=0}^{m} P_i(z) e^{x_i z} \quad \text{et} \quad P_i(z) = \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{i,j} \frac{z^j}{j!}.$$

Nous avons alors

$$R(z) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{i,j} \frac{z^j}{j!} e^{x_i z},$$

et donc

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k (R(z)) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{i,j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \left(\frac{z^j}{j!} e^{x_i z}\right).$$

Nous démontrons ici la deuxième partie du théorème 1.2.12.

Proposition 2.5.5 *Nous avons, pour* $0 \leq i \leq m$ *et* $0 \leq j \leq n_i - 1$,

$$p_{i,j} = a'_{\sigma-1;i,j}.$$

Démonstration :

Nous déduisons de la formule de Leibniz que

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{i,j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \left(\frac{z!^j}{j!} e^{x_i z}\right)(0) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_i-1} p_{i,j} \binom{k}{j} x_i^{k-j},$$

pour tout $k \geq 0$.

Considérons l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{\sigma} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{C}^{\sigma-1} \\ (b_{i,j})_{0 \leq i \leq m;\, 0 \leq j \leq n_i - 1} & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n_i-1} b_{i,j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \left(\frac{z^j}{j!} e^{x_i z}\right)(0) \right)_{0 \leq k \leq \sigma-2} \end{array}.$$

La matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{C}^{\sigma}$ est :

$$\left(\binom{k}{j} x_i^{k-j} \right)_{\substack{0 \leq k \leq \sigma-2 \\ 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n_i - 1}}.$$

Si nous rajoutons à cette matrice la ligne

$$\left(\binom{\sigma-1}{j}x_i^{\sigma-1-j}\right)_{0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n_i-1},$$

nous obtenons une matrice dont le déterminant est le déterminant de Vandermonde généralisé Δ qui est non nul ce qui implique que Φ est de rang $\sigma-1$, et que $\ker\Phi$ est de rang $\sigma-(\sigma-1)=1$. Nous pouvons donc conclure que $\ker\Phi$ est engendré par $(p_{i,j})_{0\leq i\leq m\ ;\ 0\leq j\leq n_i-1}$ car les $p_{i,j}$ ne sont pas tous nuls.

Nous en déduisons que les $p_{i,j}$ sont égaux, à une constante multiplicative près, aux cofacteurs de la dernière ligne du déterminant de Vandermonde généralisé. □

La proposition 2.5.4 démontre alors la relation (1.7) du théorème 1.2.12.

2.6 Calculs matriciels pour les approximants de Hermite-Padé et les polynômes d'interpolation de Hermite

Nous avons donné, au paragraphe 2.3, deux démonstrations du théorème 1.2.9. En voici une troisième. Pour expliquer la stratégie, nous présentons d'abord le cas particulier pour les points simples.

2.6.1 Calculs matriciels pour les polynômes d'interpolation de Hermite

Nous allons, dans un premier temps, déterminer l'unique polynôme $\mathcal{L}_i=\mathcal{L}_{i,0}$ de degré m qui vérifie $\mathcal{L}_i(x_j)=\delta_{i,j}$, c'est-à-dire expliciter le polynôme de degré m prenant la valeur 1 au point x_i et la valeur 0 aux autres points. Nous savons déjà que ce polynôme s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{i,0}(X)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m}\left(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\right)=\sum_{\ell=0}^{m}\gamma_{\ell;i,0}X^{\ell}. \tag{2.8}$$

Pour cela, nous considérons la matrice $M=\left(x_i^j\right)_{\substack{i=0,\dots,m\\ j=0,\dots,m}}$ qui est une matrice de Vandermonde.

Calculs effectifs pour le cas simple (polynômes d'interpolation de Lagrange)

Nous nous proposons de calculer les coefficients $\gamma_{\ell;i,0}$ dans la formule (2.8). Nous devons par conséquent inverser une matrice de Vandermonde « classique », ce qui revient à calculer ses cofacteurs (nous en connaissons le déterminant). Essentiellement, pour calculer le cofacteur de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$, nous remplaçons la ligne $i+1$ par une ligne dont les éléments sont les différents monômes en une indéterminée X, et nous calculons le déterminant de la nouvelle matrice ; puis ensuite, nous regardons le coefficient du monôme en X^j du polynôme ainsi obtenu.

Ainsi,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^j & \dots & x_0^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{i-1} & \dots & x_{i-1}^j & \dots & x_{i-1}^m \\ 1 & X & \dots & X^j & \dots & X^m \\ 1 & x_{i+1} & \dots & x_{i+1}^j & \dots & x_{i+1}^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^j & \dots & x_m^m \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m-i} \prod_{\substack{0\le k<\ell\le m \\ k,l\neq i}} (x_\ell - x_k) \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq i}}^{m} (X - x_p)$$

$$= (-1)^{m-i} \prod_{\substack{0\le k<\ell\le m \\ k,l\neq i}} (x_\ell - x_k) \sum_{p=0}^{m} \sigma_{m-p}(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) X^p,$$

où $\sigma_\ell(x_0, \dots, x_n)$ est le $(\ell+1)^{ième}$ polynôme symétrique élémentaire de valeur 1 pour $\ell = 0$ et de valeur $(-1)^\ell \sum_{0\le i_1<\ldots<i_\ell\le n} x_{i_1} \dots x_{i_\ell}$ pour $1 \le \ell \le m$.

Ainsi, le cofacteur de la ligne $i+1$ et de la colonne $j+1$ d'une matrice de Vandermonde « classique » vaut

$$
\begin{aligned}
\gamma_{i,j} &= (-1)^{m-i}\left(\prod_{\substack{0\le k<\ell\le m\\ k,\ell\neq i}}(x_\ell - x_k)\right)\sigma_{m-j}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)\\
&= \frac{\sigma_{m-j}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)}{\prod\limits_{\substack{p=0\\ p\neq i}}^{m}(x_i-x_p)}\prod_{0\le k<\ell\le m}(x_\ell - x_k).
\end{aligned}
$$

Nous concluons finalement (grâce à l'égalité matricielle précédente et à l'aide de la formule de Cramer qui donne M^{-1} en fonction des cofacteurs de M)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{i,0}(X) &= \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{\sigma_{m-j}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)}{\prod\limits_{\substack{p=0\\ p\neq i}}^{m}(x_i-x_p)}\right)X^j\\
&= \frac{1}{\prod\limits_{\substack{p=0\\ p\neq i}}^{m}(x_i-x_p)}\sum_{\ell=0}^{m}\sigma_{m-\ell}(x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)X^\ell\\
&= \frac{1}{\prod\limits_{\substack{p=0\\ p\neq i}}^{m}(x_i-x_p)}\prod_{\substack{p=0\\ p\neq i}}^{m}(X-x_p) = \prod_{\substack{p=0\\ p\neq i}}^{m}\left(\frac{X-x_p}{x_i-x_p}\right).
\end{aligned}
$$

Nous retrouvons bien la formule du polynôme d'interpolation de Lagrange (2.8).

Calculs effectifs pour le cas général (polynômes d'interpolation de Hermite) : troisième démonstration du théorème 1.2.9

Nous allons donc redémontrer la formule donnée, dans le théorème 1.2.9, pour $\mathcal{L}_{i,j}(X)$.

Nous utilisons les notations introduites lors de la définition du « déterminant de Vandermonde généralisé » au paragraphe 2.5.1.

On considère le vecteur colonne $c(X) = {}^t(1, X, \ldots, X^{\sigma-1})$.

Notons $c^{(k)}(X)$ le vecteur $c(X)$ dérivé k fois par rapport à la variable X ; nous entendons par dérivation d'un vecteur, la dérivation de chacune des coordonnées de ce même vecteur.

Notons aussi pour abréger, avec $0 \leq i \leq m$,

$$B_i = \left(\binom{k}{\ell} x_i^{k-\ell}\right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-1 \\ 0\leq \ell\leq n_i-1}},$$

et pour $1 \leq j \leq n_i - 1$,

$$\widetilde{B}_j(X) = \left(\binom{k}{\ell} X^{k-\ell}\right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-1 \\ 0\leq \ell\leq j-1}} \quad ; \quad \widetilde{B}_{i,j} = \widetilde{B}_j(x_i) = \left(\binom{k}{\ell} x_i^{k-\ell}\right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-1 \\ 0\leq \ell\leq j-1}}$$

et

$$\widetilde{\widetilde{B}}_{i,j} = \left(\binom{k}{\ell} x_i^{k-\ell}\right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-1 \\ j+1\leq \ell\leq n_i-1}}.$$

Nous avons alors :

Proposition 2.6.1 *Le polynôme d'interpolation de Hermite $\mathcal{L}_{i,j}$ s'exprime de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{i,j}(X) &= \frac{(\det \mathcal{M})^{-1}}{j!} \left| \; B_0 \ldots B_{i-1} \; \widetilde{B}_{i,j} \; c(X) \; \widetilde{\widetilde{B}}_{i,j} \; B_{i+1} \ldots B_m \; \right| \\
&= \frac{(-1)^{n_i-j-1}(\det \mathcal{M})^{-1}}{j!} \left| \; B_0 \ldots B_{i-1} \; \widetilde{B}_{i,j} \; \widetilde{\widetilde{B}}_{i,j} \; c(X) \; B_{i+1} \ldots B_m \; \right|.
\end{aligned}$$

Démonstration : Il suffit, pour cela, d'utiliser la proposition 2.5.4 et de voir que le polynôme

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\ell} \left| \; B_0 \ldots B_{i-1} \; \widetilde{B}_{i,j} \; c(X) \; \widetilde{\widetilde{B}}_{i,j} \; B_{i+1} \ldots B_m \; \right| \\
&= \left| \; B_0 \ldots B_{i-1} \; \widetilde{B}_{i,j} \; \left(\tfrac{\partial}{\partial X}\right)^{\ell} c(X) \; \widetilde{\widetilde{B}}_{i,j} \; B_{i+1} \ldots B_m \; \right|
\end{aligned}$$

s'annule en $X = x_i$ pour $0 \leq \ell \leq j-1$ et $j+1 \leq \ell \leq n_1 - 1$, et prend la valeur $j! \det \mathcal{M}$ en $X = x_i$ pour $l = j$.

$\square$

Nous introduisons deux variables x et y (qui seront ensuite évaluées en α_i) et nous considérons le polynôme $S_i \in \mathbb{C}[x, y, X]$ suivant :

$$S_i(x,y,X) = \left| \, B_0 \ \ldots \ B_{i-1} \quad \widetilde{B}_{n_i-2}(x) \ \ c(y) \ \ c(X) \ \ B_{i+1} \ \ldots \ B_m \, \right|.$$

Nous déduisons alors de la proposition 2.6.1 l'expression algébrique différentielle suivante pour le polynôme $\mathcal{L}_{i,j}$:

Corollaire 2.6.2 *Pour $0 \leq i \leq m$ et $j = n_i - 1$, on a*

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = \frac{(\det \mathcal{M})^{-1}}{(n_i-1)!(n_i-2)!} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n_i-2} (S_i(x,y,X))\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = x_i}},$$

et pour $0 \leq j \leq n_i - 2$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{i,j}(X) = \ & (-1)^{n_i-j-1}(\det \mathcal{M})^{-1} \left(\frac{1}{(n_i-2)!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n_i-j-2} \frac{1}{(n_i-1)!} \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n_i-1} S_i(x,y,X) \right)\Big|_{\substack{x = x_i \\ y = x_i}}.\end{aligned}$$

Démonstration : Nous allons démontrer ce corollaire en utilisant une propriété qu'a un Wronskien dont les blocs-colonnes sont composés de dérivées successives d'une même colonne, à savoir qu'il se produit un décalage comme nous le montrons ci-dessous.

Définissons le polynôme $\mathcal{P}$ par

$$\mathcal{P}(x,X) = \frac{1}{(n_i-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n_i-1}$$

$$\det\left[B_0\ldots B_{i-1}; c(x), c'(x), \ldots, c^{(n_i-3)}(x), c(y), c(X); B_{i+1}\ldots B_m\right]$$

$$= \frac{1}{(n_i-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n_i-1}\det\left[*; c(x), c'(x), \ldots, c^{(n_i-3)}(x), c(y), c(X); *\right]$$

$$= \frac{1}{(n_i-1)!}\det\left[*; c(x), c'(x), \ldots, c^{(n_i-3)}(x), \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n_i-1} c(y), c(X); *\right]$$

avec $*$ désignant les autres colonnes du déterminant indépendantes de x, y et X.

Nous noterons alors

$$|i_0, \ldots, i_{n_i-3}|$$

ce déterminant. Étant donné que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\binom{k}{\ell}x^{k-\ell}\right) = (\ell+1)\left(\binom{k}{\ell+1}x^{k-(\ell+1)}\right),$$

nous avons alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}|i_0, \ldots, i_{n_i-3}| &= \sum_{j=0}^{n_i-3}(j+1)\,|i_0, \ldots, i_{j-1}, i_j+1, i_{j+1}, \ldots, i_{n_i-3}| \\ &= (n_i-2)\,|i_0, \ldots, i_{n_i-4}, i_{n_i-2}|\,.\end{aligned}$$

En dérivant successivement $n_i - j - 2$ fois le long de la droite $x = y = x_i$, nous obtenons alors le polynôme

$$\frac{(n_i-2)!}{j!}\left|\ B_0\ \ldots\ B_{i-1}\ \widetilde{B}_{i,j}\ \widetilde{\widetilde{B}}_{i,j}\ c(X)\ B_{i+1}\ \ldots\ B_m\ \right|$$

qui est multiple, d'après la proposition 2.6.1, du polynôme $\mathcal{L}_{i,j}$. Ceci nous permet alors d'achever cette démonstration. □

En utilisant la valeur donnée pour un déterminant de Vandermonde généralisé, nous en déduisons que l'expression algébrique de ce polynôme S_i est la suivante :

Proposition 2.6.3 *On a*

$$\begin{aligned} S_i(x,y,X) &= (-1)^{n_i \sum\limits_{\ell=i+1}^{m} n_\ell} \prod_{\substack{0\le p<q\le m \\ p,q\neq i}} (x_q-x_p)^{n_q n_p} \\ &\quad \times \left(\prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell\neq i}}^{m} (x-x_\ell)^{n_\ell} \right)^{n_i-2} (y-x)^{n_i-2} \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell\neq i}}^{m} (y-x_\ell)^{n_\ell} (X-x)^{n_i-2} \\ &\quad \times \prod_{\substack{\ell=0 \\ \ell\neq i}}^{m} (X-x_\ell)^{n_\ell} (X-y). \end{aligned}$$

Démonstration : En effet ; le polynôme S_i est un déterminant de Vandermonde généralisé à $m+3$ blocs en les points $x_0,\ldots,x_{i-1},x,y,X,x_{i+1},\ldots,x_m$ d'ordres respectifs $n_0,\ldots,n_{i-1},n_i-2,1,1,n_{i+1},\ldots,n_m$. La proposition 2.5.3 donnant la valeur d'un déterminant de Vandermonde généralisé nous fournit alors la valeur de S_i.

□

Nous obtenons la proposition suivante qui nous permettra, ensuite, de conclure la démonstration du théorème 1.2.9 :

Proposition 2.6.4 *Soit le polynôme $\mathcal{T}_{i,j}$ défini, pour $0\le i\le m$ et $0\le j\le n_i-2$, comme suit :*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{i,j}(X) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n_i-j-2} \\ &\quad \left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n_i-1} R_i(x)^{n_i-2}(y-x)^{n_i-2} R_i(y)(X-x)^{n_i-2}(X-y) \right)\Bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=x_i}}, \end{aligned}$$

où

$$R_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} \left(\frac{X-x_k}{x_i-x_k}\right)^{n_k};$$

alors

$$\mathcal{L}_{i,n_i-1}(X) = R_i(X)\frac{(X-x_i)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}$$

et, pour j inférieur ou égal à $n_i - 2$,

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = \frac{(-1)^{n_i-j-1} R_i(X)}{(n_i-2)!(n_i-1)!} \mathcal{T}_{i,j}(X).$$

Démonstration : Il suffit juste de remarquer (en utilisant, de plus, la valeur de $\det \mathcal{M}$) les deux écritures suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{i,n_i-1}(X) &= \frac{1}{(n_i-2)!(n_i-1)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n_i-2} \big(R_i(x)^{n_i-2}(y-x)^{n_i-2} R_i(y)(X-x)^{n_i-2} R_i(X) \\
&\quad \times (X-y)\big)\Big|_{\substack{x=x_i \\ y=x_i}},
\end{aligned}$$

et, pour j inférieur ou égal à $n_i - 2$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{i,j}(X) &= \frac{(-1)^{n_i-j-1} R_i(X)}{(n_i-2)!(n_i-1)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n_i-j-2} \\
&\quad \left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n_i-1} R_i(x)^{n_i-2}(y-x)^{n_i-2} R_i(y)(X-x)^{n_i-2}(X-y)\right)\Bigg|_{\substack{x=x_i \\ y=x_i}}.
\end{aligned}$$

□

Nous allons, désormais, à partir de ces égalités, retrouver l'expression de $\mathcal{L}_{i,j}$ fournie dans le théorème 1.2.9.

Démonstration : (du théorème 1.2.9)

Nous allons juste effectuer une récurrence sur σ.

En effet, il est évident que pour tout entier u strictement supérieur à $n_i - 1$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^u (\mathcal{T}_{i,j}(X)) = 0;$$

aussi, pour tout entier $0 \leq u \leq j-1$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^u (\mathcal{T}_{i,j}(X))(x_i) = 0;$$

de plus,

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^j (\mathcal{T}_{i,j}(X))(x_i) = (-1)^{n_i-j-1}(n_i-2)!(n_i-1)!$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{j+1} (\mathcal{T}_{i,j}(X))(x_i) &= (-1)^{n_i-j-1}(n_i-2)!(n_i-1)!(j+1)\left(-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)(R_i(\zeta))\,(x_i)\right)\\ &= (-1)^{n_i-j-1}(n_i-2)!(n_i-1)!(j+1)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)\left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{T}_{i,j}$ est un polynôme de degré au plus égal à $n_i - 1$ et dont les j premiers coefficients de son développement de Taylor au point x_i sont nuls. Dans ce cas, il existe $n_i - j$ réels t_k tels que

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = R_i(X)\frac{(X-x_i)^j}{j!}\sum_{k=0}^{n_i-j-1} t_k \frac{(X-x_i)^k}{k!}$$

avec

$$t_0 = 1$$

et

$$t_1 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)\left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i).$$

Donc, lorsque $n_i = 1$, nous retrouvons bien l'expression du polynôme d'interpolation recherché. Montrons par récurrence que cette expression reste valable pour des degrés supérieurs.

Supposons que l'unique polynôme d'interpolation $\mathcal{L}_{i,j}$ de degré $\sigma - 1$ qui vérifie $\mathcal{L}_{i,j}^{(\ell)}(x_k) = \delta_{k,i}\delta_{\ell,j}$ pour tout $k = 0, \ldots, m$ et tout $\ell = 0, \ldots, n_k - 1$ s'écrit :

$$\mathcal{L}_{i,j}(X) = R_i(X)\frac{(X - x_i)^j}{j!} \sum_{k=0}^{n_i - j - 1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^k \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)\frac{(X - x_i)^k}{k!}.$$

Cherchons désormais l'unique polynôme d'interpolation $Q_{i,j}$ de degré σ qui vérifie $Q_{i,j}^{(\ell)}(x_k) = \delta_{k,i}\delta_{\ell,j}$ pour tout $k = 0, \ldots, m$ distinct de i et tout $\ell = 0, \ldots, n_k - 1$, et qui vérifie $Q_{i,j}^{(\ell)}(x_i) = \delta_{\ell,j}$ pour tout $\ell = 0, \ldots, n_i$.

Nous pouvons écrire $Q_{i,j}$ comme la somme de $\mathcal{L}_{i,j}$ (qui est de degré $\sigma - 1$) et d'un polynôme U de degré σ qui vérifie $U^{(\ell)}(x_k) = 0$ pour tout $k = 0, \ldots, m$ distinct de i et tout $\ell = 0, \ldots, n_k - 1$, et qui vérifie $U^{(\ell)}(x_i) = 0$ pour tout $\ell = 0, \ldots, n_i - 1$. D'où l'existence d'un nombre réel α tel que

$$U(X) = \alpha R_i(X)\frac{(X - x_i)^{n_i}}{n_i!}.$$

Ainsi, on a

$$Q_{i,j}(X) = \mathcal{L}_{i,j}(X) + \alpha R_i(X)\frac{(X - x_i)^{n_i}}{n_i!}.$$

Nous allons, désormais, déterminer ce réel α.

Étant donné que $Q_{i,j}^{(n_i)}(x_i) = 0$ et que $R_i(x_i) = 1$, nous avons

$$\alpha = -\mathcal{L}_{i,j}^{(n_i)}(x_i).$$

Ceci implique :

$$\alpha = -\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{n_i} \left(R_i(X) \sum_{l=0}^{n_i - j - 1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^l \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)\frac{(X - x_i)^{l+j}}{j!l!}\right)(x_i),$$

puis par la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}
\alpha = &-\sum_{k=0}^{n_i} \binom{n_i}{k} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{n_i-k} (R_i(X))(x_i) \\
&\times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{k} \left(\sum_{l=0}^{n_i-j-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{l} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)\frac{(X-x_i)^{l+j}}{j!l!}\right)(x_i) \\
= &-\sum_{k=j}^{n_i-1} \binom{n_i}{k} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{n_i-k} (R_i(X))(x_i) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{k-j} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)\frac{k!}{j!(k-j)!} \\
= &-\sum_{k=0}^{n_i-j-1} \binom{n_i}{k+j}\binom{k+j}{j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{n_i-k-j} (R_i(X))(x_i) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{k} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i) \\
= &-\sum_{k=0}^{n_i-j-1} \frac{n_i!}{j!k!(n_i-k-j)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{n_i-k-j} (R_i(X))(x_i) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{k} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i) \\
= &-\binom{n_i}{j}\sum_{k=0}^{n_i-j-1} \binom{n_i-j}{k} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{n_i-k-j} (R_i(X))(x_i) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{k} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i) \\
= &\binom{n_i}{j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{n_i-j} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i).
\end{aligned}$$

De ceci, nous tirons :

$$\begin{aligned}
Q_{i,j}(X) &= \mathcal{L}_{i,j}(X) + \binom{n_i}{j} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{n_i-j} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)R_i(X)\frac{(X-x_i)^{n_i}}{n_i!} \\
&= R_i(X) \sum_{\ell=0}^{n_i-j-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{\ell} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)\frac{(X-x_i)^{\ell+j}}{j!\ell!} \\
&+ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{n_i-j} \left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)R_i(X)\frac{(X-x_i)^{n_i}}{j!(n_i-j)!}
\end{aligned}$$

$$= R_i(X)\frac{(X-x_i)^j}{j!}\left(\sum_{\ell=0}^{n_i-j-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{\ell}\left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)\frac{(X-x_i)^{\ell}}{\ell!}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{n_i-j}\left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)\frac{(X-x_i)^{n_i-j}}{(n_i-j)!}\right)$$

$$= R_i(X)\frac{(X-x_i)^j}{j!}\left(\sum_{\ell=0}^{n_i-j}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{\ell}\left(\frac{1}{R_i(\zeta)}\right)(x_i)\frac{(X-x_i)^{\ell}}{\ell!}\right).$$

D'où la récurrence et l'expression du polynôme $\mathcal{L}_{i,j}$ qui était recherchée. Ceci complète la troisième démonstration du théorème 1.2.9. □

2.6.2 Calculs matriciels pour les approximants de Hermite-Padé

Nous nous proposons de retrouver les coefficients des approximants de Hermite-Padé par un calcul de déterminant. Nous avons, précédemment, traduit les coefficients des approximants de Hermite-Padé des fonctions exponentielles en termes de cofacteurs d'une matrice de Vandermonde généralisée.

Dans un premier temps, nous allons considérer un polynôme en deux variables écrit sous la forme d'un déterminant de Vandermonde géneralisé ; ensuite nous identifierons les cofacteurs dont nous cherchons les valeurs avec les dérivées de ce polynôme évaluées en un certain point.

Proposition 2.6.5 *Pour tout $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n_i - 1$, on a l'expression suivante pour chaque coefficient de chaque approximant de Hermite-Padé :*

$$p_{i,j} = \left| \; C_0 \; \ldots \; C_{i-1} \; \widetilde{C}_{i,j} \; \widetilde{\widetilde{C}}_{i,j} \; C_{i+1} \; \ldots \; C_m \; \right|$$

où

$$C_i = \left(\binom{k}{\ell}x_i^{k-\ell}\right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-2\\ 0\leq \ell\leq n_i-1}},$$

$$\widetilde{C}_j(X) = \left(\binom{k}{\ell}X^{k-\ell}\right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-2\\ 0\leq \ell\leq j-1}} \quad ; \quad \widetilde{C}_{i,j} = \widetilde{C}_j(x_i) = \left(\binom{k}{\ell}x_i^{k-\ell}\right)_{\substack{0\leq k\leq \sigma-2\\ 0\leq \ell\leq j-1}}$$

et

$$\widetilde{\widetilde{C}}_{i,j} = \left(\binom{k}{\ell} x_i^{k-\ell} \right)_{\substack{0 \le k \le \sigma-2 \\ j+1 \le \ell \le n_i-1}}.$$

Considérons alors le polynôme, en deux variables, $\widetilde{S}_i$ suivant :

$$\widetilde{S}_i(x,y) = \left| \begin{matrix} C_0 & \dots & C_{i-1} & \widetilde{C}_{n_i-2}(x) & c(y) & C_{i+1} & \dots & C_m \end{matrix} \right|,$$

où $c(z) = {}^t(1, z, \dots, z^{\sigma-2})$ est un vecteur colonne.

Proposition 2.6.6 *Les coefficients des approximants de Hermite-Padé s'expriment en fonction de différents déterminants de la manière suivante :*

pour le coefficient dominant, nous avons

$$\begin{aligned} p_{i,n_i-1} &= \left| \, C_0 \dots C_{i-1} \; \widetilde{C}_{i,n_i-2} \; \frac{c^{(n_i-2)}(x_i)}{(n_i-2)!} \; C_{i+1} \dots C_m \, \right| \\ &= \frac{1}{(n_i-2)!} \left(\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial y} \right)^{n_i-2} (x_i, x_i), \end{aligned}$$

pour les autres coefficients ($j = 0, \dots, n_i - 2$)*, nous avons*

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \left| \, C_0 \dots C_{i-1} \; \widetilde{C}_{i,j} \; \widetilde{\widetilde{C}}_{i,j} \; C_{i+1} \dots C_m \, \right| \\ &= \frac{j!}{(n_i-2)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{n_i-j-2} \left(\frac{1}{(n_i-1)!} \left(\frac{\partial \widetilde{S}_i}{\partial y} \right)^{n_i-1} (x,y) \right) (x_i, x_i). \end{aligned}$$

Le polynôme $\widetilde{S}_i$ précédemment considéré s'exprime de la manière suivante :

Lemme 2.6.7 *Pour* $0 \le i \le m$*, nous avons*

$$\widetilde{S}_i(x,y) = (-1)^{(n_i-1) \sum\limits_{\ell=i+1}^{m} n_\ell}$$

$$\times \prod_{\substack{0\le p<q\le m\\ p,q\neq i}} (x_q - x_p)^{n_q n_p} \left(\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq i}}^{m} (x - x_\ell)^{n_\ell} \right)^{n_i - 2} (y - x)^{n_i - 2} \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq i}}^{m} (y - x_\ell)^{n_\ell}.$$

Démonstration :

On remarque, pour commencer, que $\widetilde{S}_i$ est un déterminant de Vandermonde généralisé dans le sens où nous l'avons défini au paragraphe 2.5 ; ainsi, d'après la valeur intrinsèque d'un déterminant de Vandermonde généralisé, donnée dans les définitions et propriétés, nous en déduisons alors la valeur souhaitée pour $\widetilde{S}_i(x, y)$.

De façon analogue à l'égalité (2.3) pour l'écriture des coefficients $p_{i,j}$, nous en déduisons alors une expression du polynôme $\widetilde{S}_i$ en fonction du polynôme Q_i :

$$\widetilde{S}_i(x, y) = (-1)^{(n_i - 1) \sum\limits_{\ell=i+1}^{m} n_\ell} \prod_{\substack{0\le p<q\le m\\ p,q\neq i}} (x_q - x_p)^{n_q n_p} Q_i(x)^{n_i - 2} (y - x)^{n_i - 2} Q_i(y).$$

$\square$

Le rôle ici joué par le polynôme $\widetilde{S}_i$ est identique à celui du polynôme $S_{i,j}$ dans la section précédente concernant les polynômes de Hermite.

Chapitre 3

Hauteur de matrice et déterminants d'interpolation

3.1 Introduction

Les premiers énoncés sur la transcendance de nombres liés à la fonction exponentielle parurent à la fin du $19^{\text{ième}}$ siècle. La première preuve, celle de Hermite [He1], était basée sur la construction d'approximations rationnelles simultanées de puissances de e provenant de l'« identité de Hermite » :

pour tout polynôme f à coefficients complexes, on a l'identité suivante

$$\int_0^x e^{-t} f(t)dt = F(0) - F(x)e^{-x},$$

où

$$F(x) = \sum_{s=0}^{M} f^{(s)}(x) \qquad \text{et} \qquad M = \deg f(x).$$

Puis, comme nous pouvons le voir dans [Wa1], une autre méthode qui remonte à la solution de Gel'fond et Schneider du $7^{ème}$ problème de Hilbert (par l'absurde, en ayant supposé que les deux nombres complexes $\alpha \neq 0$ et e^{α} étaient algébriques), est de construire un polynôme

$$P_N(X, Y) \in \mathbb{Z}[X, Y]$$

de degrés respectifs R_1 et R_2 en X et Y dépendants de N comme suit :

$$R_1 = \left[N.\,(\log N)^{-1}\right] \qquad \text{et} \qquad R_2 = \left[(\log N)^2\right]$$

où $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x et tel que la fonction

$$F_N(z) = P_N(z, e^z)$$

vérifie, pour tout $s = 0, \ldots, N-1$,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^s F_N(0) = 0 \\ \\ \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^s F_N(\alpha) = 0 \end{cases}.$$

Ensuite, à partir de propriétés analytiques de la fonction F_N, M. Waldschmidt parvint à établir une contradiction, pour N assez grand, qui amène alors à conclure à la transcendance d'un des deux nombres complexes α ou e^α.

Les démonstrations de ce type, exceptée celle de Hermite, et faites jusqu'à présent, posaient toujours des ordres d'annulation, en 0 et au point α, qui tendaient vers $+\infty$.

Nous allons étudier la hauteur d'une matrice particulière, sous-matrice d'une matrice de Vandermonde généralisée ; cette hauteur interviendra de façon essentielle dans les études quantitatives de cette thèse. De plus, nous nous proposons, à la fin de ce chapitre, d'analyser comment une même démonstration pourrait s'établir par le biais de déterminants d'interpolation, qui sont des déterminants de matrices d'évaluation, avec des coefficients qui sont des polynômes exponentiels évalués en différents points, et qui nous permettent donc de nous ramener à des situations proches de celles évoquées au chapitre 2. De plus, l'ordre au point non nul α considéré (de valeur T) sera fini et aura donc un rôle de paramètre.

Nous expliciterons deux situations, une première sans multiplicité au point $\neq 0$ mettant en jeu la matrice M définie par (1.8) et une seconde avec multiplicités mettant en jeu la matrice $\mathcal{M}$ définie par (1.9). En liaison avec le chapitre précédent, nous remarquerons et utiliserons le fait que, dans le premier cas, nous ferons appel aux coefficients des polynômes de Hermite-Padé de type I de fonctions exponentielles et que, dans le second, nous utiliserons certains coefficients de polynômes d'interpolation de Hermite, ces cas étant confondus pour $T = 1$ (d'après le théorème 1.2.12).

Nous discuterons suivant la valeur de cette multiplicité ; en effet, le calcul essentiel de ce chapitre repose sur les majorations des hauteurs des matrices M_0 et $\mathcal{M}_0$. Cependant, suivant que cette matrice ($\mathcal{M}_0$) aura un nombre de lignes ($S - T$) faible ou élevé (qui correspond à l'ordre en $z = 0$ qui sera alors petit ou grand par rapport à celui au point $z = \alpha$), l'estimation (majoration) de la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$ sera plus ou moins précise selon que nous utiliserons une majoration directe ou faisant appel à une formule de dualité. L'intérêt de cette analyse se trouve bien dans l'étude selon la valeur du paramètre T, de l'éventuelle dualité qui est alors mise en jeu et des rôles des polynômes de Hermite-Padé ainsi que ceux d'interpolation de Hermite afin d'obtenir une majoration de la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$ la plus précise possible.

Remarque 3.1.1 *Dans la situation précédemment évoquée, considérée par M. Waldschmidt, il est donné la même importance au point $z = 0$ qu'au point non nul $z = \alpha$. Elle est donc comparable à la nôtre et assimilable au cas où l'ordre (noté T) au point non nul n'est pas négligeable face à celui en $z = 0$. Pour notre part, c'est le cas où T est petit sur lequel nous nous pencherons prioritairement.*

Ce chapitre, contrairement au premier qui était assez calculatoire (du fait des déterminants et des mineurs à expliciter), utilise plus d'algèbre et d'arithmétique. Nous introduirons ici les notions de hauteurs de matrice ou de sous-espace. Dans cette partie, nous nous sommes régulièrement inspirés de différents articles traitant du « lemme de Siegel » (essentiellement les articles de E. Bombieri, c'est-à-dire [BoVa],[BoCo1], [BoCo2] et [Gr]), ainsi que ceux de M. Laurent [La1] et A. Sert [Se].

En premier lieu, nous rappellerons quelques définitions et propriétés (rappels sur les valeurs absolues et hauteurs notamment) nécessaires à la démonstration qui suivra.

3.2 Hauteurs

Nous allons définir les notions de hauteurs de matrices (ou de sous-espaces) ainsi que quelques propriétés s'y référant. Nous rappellerons aussi les définitions liées aux notions de valeurs absolues.

3.2.1 Rappels sur les valeurs absolues

Rappelons la définition d'une valeur absolue, ainsi que quelques propriétés s'y rattachant. Le lecteur pourra consulter, par exemple, le livre de J. Neukirch [Neu] ou le cours de F. Amoroso [Am] afin d'obtenir plus d'informations.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres. Quand v est une place de $\mathbb{K}$ (classe de valuations équivalentes de $\mathbb{K}$), nous appellerons d_v le degré du complété k_v sur $\mathbb{Q}_v$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si v est archimédienne ou sur $\mathbb{Q}_p$ si v est une place ultramétrique et $v|p$; $d_v = [k_v : \mathbb{Q}_v]$.

Nous noterons $M_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des valeurs absolues de $\mathbb{K}$, normalisées de la façon suivante :

(i) si v est ultramétrique, $v|p$, $|p|_v = \frac{1}{p}$,
(ii) si v est archimédienne, $v|\infty$, $|x|_v = |x|$ où $|\cdot|$ est la valeur absolue euclidienne sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Nous avons, de plus, la « formule du produit » suivante :

$$\prod_{v \in M_{\mathbb{K}}} |x|_v^{d_v} = 1,$$

valable pour tout $x \in \mathbb{K}^\star$.

3.2.2 Hauteurs de matrices

Nous allons donner la définition de la hauteur d'un sous-espace ; on pourra aussi trouver, dans la littérature, des définitions équivalentes en termes de coordonnées sur la Grassmannienne (la Grassmannienne, notée $Gr(n,k)$, d'un espace vectoriel E dimension n, est l'ensemble des sous-espaces de dimension k de E).

Nous suivons ici le texte de F. Gramain [Gr]. On y trouve plusieurs identités concernant certains déterminants, utiles en théorie des nombres transcendants ainsi que la notion de « hauteur de matrice ». Plusieurs égalités ou inégalités d'algèbre linéaire permettant de donner plus d'informations sur les hauteurs de certaines matrices y sont détaillées, telles que les formules de Cauchy, de Sylvester, de Cauchy-Binet (qui nous fournit, en particulier, la valeur, pour une matrice M, de $|M|_v$ où v est une place archimédienne réelle ou complexe), de Jacobi ou encore de Francke. Ce texte est assez général, faisant aussi intervenir une étude adélique.
Plusieurs informations liées aux hauteurs de nombres algébriques sont aussi données dans l'article [StVa].

Nous allons maintenant définir la hauteur d'une matrice.

Définition 3.2.1 *Soient m, n, d trois nombres entiers strictement positifs. Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres de degré d sur $\mathbb{Q}$. Soit M une matrice à m lignes et n colonnes, à coefficients dans le corps de nombres $\mathbb{K}$, de rang $m \leq n$; nous définissons ses valeurs absolues locales par :*

(i) si v est une place ultramétrique,

$$|M|_v = \max_I |\Delta_I|_v$$

où le maximum porte sur les éléments de I, l'ensemble des parties à m éléments de $\{1, \ldots, n\}$, et où Δ_I est le déterminant $m \times m$ extrait de M dont les colonnes sont les éléments de I,

(ii) si v est une place archimédienne réelle,

$$|M|_v = |\det\left(M\ {}^tM\right)|_v^{1/2}$$

où ${}^tM$ est la matrice transposée de la matrice M,

(iii) si v est une place archimédienne complexe,

$$|M|_v = |\det(MM^\star)|_v^{1/2}$$

où $M^\star$ est la matrice adjointe de la matrice M.

La hauteur de la matrice M est alors définie par :

$$H(M) = \prod_{v \in M_{\mathbb{K}}} |M|_v^{d_v/d}.$$

Pour une matrice carrée régulière, on a

$$H({}^tM) = H(M).$$

Cela permet, pour une matrice M dont le rang est égal au nombre de colonnes, de définir

$$H(M) = H({}^tM).$$

Lemme 3.2.2 *Pour toute place archimédienne, on a*

$$|M|_v = \left(\sum_I |\Delta_I|_v^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration : Ceci provient essentiellement de la formule de Cauchy-Binet (voir [Gr] ou [Se] par exemple).

Si $M^\perp$ est la matrice orthogonale à M, nous avons (voir [StVa]) :

Lemme 3.2.3

$$H\left(M^\perp\right) = H(M).$$

Le lien qui sera donné entre la hauteur de la matrice que nous nommerons M_0 (voir ci-dessous) et celle de son orthogonal nous sera très utile ; en effet, nous avons une bonne connaissance de cette matrice $M_0^\perp$ car ses coordonnées seront égales aux coefficients des polynômes de Hermite-Padé pour le cas simple et à certains coefficients des polynômes d'interpolation de Hermite pour le cas général. Ces connaissances nous permettront, par la suite, de nous ramener aux calculs de hauteurs de polynômes au lieu de hauteurs de matrices.

3.3 Lemmes auxiliaires

Nous aurons besoin du lemme de zéros suivant (dont une démonstration est fournie dans [Wa3], corollaire 2.3.) qui nous permettra de conclure à la non nullité du déterminant de la matrice M introduite au paragraphe suivant :

Lemme 3.3.1 *Soient $w_1, \ldots, w_m$ des nombres réels deux à deux distincts, $x_1, \ldots, x_m$ des nombres réels deux à deux distincts et $\tau_1, \ldots, \tau_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ des entiers positifs ou nuls, avec*

$$\tau_1 + \ldots + \tau_n = \sigma_1 + \ldots + \sigma_m.$$

Considérons la matrice carrée

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^\sigma \left(z^\tau e^{w_i z} \right)(x_j) \right)_{\substack{(\tau,i)\\(\sigma,j)}}$$

indexée par les paires (τ, i) *avec* $0 \leq \tau \leq \tau_i - 1$ *et* $1 \leq i \leq n$ *pour les colonnes, et* (σ, j) *avec* $0 \leq \sigma \leq \sigma_j - 1$ *et* $1 \leq j \leq m$ *pour les lignes. Cette matrice est alors régulière.*

Par ailleurs, énonçons le lemme suivant (que nous utiliserons aussi au chapitre suivant) permettant quant à lui de fournir une majoration du déterminant étudié :

Lemme 3.3.2 *(Lemme de Schwarz)*

Soient T *un nombre entier positif,* r *et* R *deux nombres réels vérifiant* $0 < r \leq R$ *et* ψ *une fonction d'une variable complexe qui est analytique dans le disque* $|z| \leq R$. *Supposons que* ψ *a un zéro de multiplicité au moins* T *en* 0. *Alors,*

$$|\psi|_r \leq \left(\frac{R}{r}\right)^{-T} |\psi|_R.$$

Démonstration : Voir [Wa3], paragraphe 2.2.3 lemme 2.4 page 37.

□

3.4 Analyse de la matrice M avec un point (non nul) simple

Nous reprenons les notations du paragraphe 1.2.4 et nous utilisons la matrice introduite à cette occasion par la formule (1.8).

3.4.1 Majoration de la hauteur de la matrice M_0

Nous établissons maintenant une majoration pour la hauteur de la matrice M_0 qui jouera aussi un rôle important au chapitre 4.

Proposition 3.4.1 *Pour* $KL \geq 38121$*, nous avons :*

$$H\left(M_0\right) \leq (11.32)^{KL} K!$$

Démonstration : Pour démontrer la proposition 3.4.1, nous allons utiliser une relation de dualité qui améliore les majorations directes.

D'après le lemme 3.2.3, nous avons

$$H\left(M_0^{\perp}\right) = H\left(M_0\right).$$

La matrice M_0 est de taille $S \times (S-1)$ et de rang $S-1$, donc $M_0^{\perp}$ est un vecteur. Les coefficients de $M_0^{\perp}$ sont les nombres $x_{k,l}$ tels que, pour tout $s = 0, \ldots, S-2$, nous ayons :

$$\sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{K-1} x_{k,\ell} \frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!} = 0;$$

les $x_{k,\ell}$ sont justement les coefficients $p_{k,\ell}$ des approximants de Hermite-Padé, pour les fonctions $1, e^z, \ldots, e^{(L-1)z}$ et de paramètres $n_0 = \ldots = n_{L-1} = K$, déterminés lors du premier chapitre (avec la normalisation choisie au lemme 1.2.6). Nous avons alors

$$H(M_0) = H\left(M_0^{\perp}\right) = H\left(\left(p_{k,\ell}\right)_{k,\ell}\right),$$

où, d'après la proposition 2.2.2 en prenant $m = L-1,\ n_0 = \ldots = n_{L-1} = K$, puis $x_\ell = \ell \quad (0 \leq \ell \leq L-1)$,

$$p_{k,\ell} = \pm \frac{1}{k!} \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p+K}} \binom{\gamma_p+K-1}{K-1} \right),$$

où $\Lambda(\ell, k)$ a été défini au paragraphe 2.2.2.

Soit d_L le plus petit commun multiple des nombres entiers $1, \ldots, L$.

La hauteur d'une matrice ne change pas si nous multiplions tous ses coefficients par un même nombre non nul, ici nous choisissons

$$(-1)^{L-\ell-1} K! d_L^{K-1} (L-1)!^K.$$

Ainsi, considérons les nombres entiers (pour tout $0 \leq k \leq K-1,\ 0 \leq \ell \leq L-1$) suivant :

$$y_{k,l} = (-1)^{L-\ell-1} \frac{K!}{k!} d_L^{K-1} \binom{L-1}{\ell}^K \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \binom{\gamma_p+K-1}{K-1} \right);$$

nous obtenons donc

$$
\begin{aligned}
& H\left((p_{k,\ell})_{k,\ell}\right) \\
& = H\left((y_{k,\ell})_{k,\ell}\right) \\
& = \prod_{v\in M_{\mathbb{Q}}} \max_{k,\ell} |y_{k,\ell}|_v \\
& = \max_{k,\ell} |y_{k,\ell}| \prod_{p\in\mathcal{P}} \max_{k,\ell} |y_{k,\ell}|_p \\
& \leq \max_{k,\ell} |y_{k,\ell}| \\
& \leq H\left((-1)^{L-\ell-1}\frac{K!}{k!} d_L^{K-1} \binom{L-1}{\ell}^K \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0\\ p\neq\ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \binom{\gamma_p+K-1}{K-1} \right) \right).
\end{aligned}
$$

Pour terminer, nous avons de plus les majorations suivantes, pour tout k,ℓ :

$$
\begin{aligned}
& \left| (-1)^{L-\ell-1}\frac{K!}{k!} d_L^{K-1} \binom{L-1}{\ell}^K \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0\\ p\neq\ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \binom{\gamma_p+K-1}{K-1} \right) \right| \\
& \leq K! d_L^{K-1} 2^{(L-1)K} KL 2^{(K-1)L} \\
& \leq K! e^{\frac{107}{103}L(K-1)} KL 4^{KL},
\end{aligned}
$$

car nous avons, d'après [RoSc], le lemme suivant :

Lemme 3.4.2 *soit L un nombre entier strictement positif, alors*

$$d_L \leq e^{\frac{107}{103}L}$$

et de plus, $\binom{n}{k} \leq 2^n$ pour tout entier n. En particulier,

$$\prod_{\substack{p=0\\p\neq\ell}}^{L-1} \binom{\gamma_p + K - 1}{K-1} \leq \prod_{\substack{p=0\\p\neq\ell}}^{L-1} 2^{\gamma_p+K-1} \leq 2^{\sum\limits_{\substack{p=0\\p\neq\ell}}^{L-1}(\gamma_p+K-1)} \leq 2^{(L-1)(K-1)+\sum\limits_{\substack{p=0\\p\neq\ell}}^{L-1}\gamma_p}$$

$$\leq 2^{(L-1)(K-1)+K-1} \leq 2^{(K-1)L}.$$

Nous en déduisons

$$H(M_0) \leq K! e^{\frac{107}{103}KL} KL 4^{KL}.$$

Maintenant,

$$KL \leq \left(\frac{11.32}{4e^{\frac{107}{103}}}\right)^{KL}$$

pour $KL \geq 38121$.

Ainsi, nous obtenons

$$H(M_0) \leq (11.32)^{KL} K!.$$

$\square$

Remarque 3.4.3 *Quand L est fixé et que K tend vers $+\infty$, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$(11.32)^{KL} = o\left(K!^{\epsilon}\right)$$

3.4.2 Application au théorème de Hermite sur la transcendance de e

Soit $\mathbb{K}$ le corps engendré, sur $\mathbb{Q}$, par e.

Nous allons étudier le déterminant de M ; après avoir montré qu'il était non nul, nous lui appliquerons la formule du produit, énoncerons des majorations pour ses valeurs absolues aux différentes places et ainsi, nous en déduirons une inégalité liant différentes hauteurs de matrices.

En développant par rapport à la dernière ligne le déterminant de M, nous déduisons

$$\det M = \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^{K\ell+k} e^{\ell} \Delta_{\ell,k},$$

où $\Delta_{\ell,k}$ est le cofacteur de la dernière ligne et de la colonne k du bloc ℓ de la matrice M précédemment définie.

Nous allons majorer, dans les sous-paragraphes suivants, les valeurs absolues de $\det M$ aux différentes places v. Ces majorations seront données par les lemmes 3.4.4, 3.4.5 et 3.4.6 ; le premier provient d'une majoration triviale tandis que les deux suivants sont plus fins et utilisent l'analyse complexe.

Pour la place archimédienne v_0 laissant e invariant

Lemme 3.4.4

$$|\det M|_{v_0} \leq |M_0|_{v_0} S^{1/2} K^{K-S+1} e^{LK}.$$

Démonstration : Pour cette place, v_0, étant donné que $\det M$ est réel, la valeur absolue associée est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$; ainsi, $|\det M|_{v_0} = |\det M|$.

Alors $\det M$ est la valeur au point 1 de la fonction

$$\psi : z \longmapsto \det \begin{pmatrix} M_0 \\ z^k e^{\ell z} \end{pmatrix}.$$

La fonction ψ admet le point 0 pour zéro d'ordre $S-1$; en effet, si nous dérivons ψ de 0 à $S-2$ fois, nous obtiendrons alors (après évaluation en $z=0$) le déterminant d'une matrice ayant deux lignes identiques.

Nous allons désormais appliquer le lemme 3.3.2 (de Schwarz) afin de fournir une majoration de $\det M$.

Ainsi, soit $R \geq 1$; nous avons donc la majoration suivante :

$$|\det M| = |\psi(1)| \leq \frac{|\psi(z)|_R}{R^{S-1}}. \tag{3.1}$$

Maintenant, étant donné que $\psi(z) = \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^{K\ell+k} z^k e^{\ell z} \Delta_{\ell,k}$ (par développement par rapport à la dernière ligne), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|\psi(z)|_R &= \left|\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}(-1)^{K\ell+k}z^k e^{\ell z}\Delta_{\ell,k}\right|_R \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}\left|z^k e^{\ell z}\right|_R |\Delta_{\ell,k}|;
\end{aligned}$$

puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous aboutissons à

$$|\psi(z)|_R \leq \left(\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}\left|z^k e^{\ell z}\right|_R^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}|\Delta_{\ell,k}|^2\right)^{1/2}.$$

En utilisant le lemme 3.2.2 et en remplaçant S par KL, nous obtenons alors

$$\left(\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}\left|z^k e^{\ell z}\right|_R^2\right)^{1/2} \leq S^{1/2}R^K e^{LR} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}|\Delta_{\ell,k}|^2\right)^{1/2} = |M_0|_{v_0},$$

nous obtenons

$$|\psi(z)|_R \leq |M_0|_{v_0} S^{1/2}R^K e^{LR}.$$

Finalement, en prenant $R = K$ (choix identique au paragraphe 3.5.2), la relation (3.1) donne

$$|\det M| \leq |M_0|_{v_0} S^{1/2}K^{K-S+1}e^{LK}.$$

$\square$

Pour les autres places archimédiennes

Lemme 3.4.5 *Pour les places archimédiennes de $\mathbb{K}$ autres que v_0, nous avons*

$$|\det M|_v \leq \sqrt{S}|M_0|_v \max(1, |e|_v)^L.$$

Démonstration : M_0 est une matrice de taille $(S-1)\times S$ et de rang $S-1$. D'après la formule de Cauchy-Binet (lemme 3.2.2), on a

$$|M_0|_v = \left(\sum_I |\Delta_I|_v^2\right)^{1/2}$$

où I parcourt l'ensemble des parties à $S-1$ éléments de $\{0,\ldots,S-1\}$ et où Δ_I désigne le déterminant $(S-1)\times(S-1)$ extrait de M_0 dont les colonnes sont les éléments de I ; donc

$$|M_0|_v = \left(\sum_{\ell,k} |\Delta_{\ell,k}|_v^2\right)^{1/2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|\det M|_v &= \left|\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}(-1)^{K\ell+k}e^{\ell}\Delta_{\ell,k}\right|_v \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}\left|e^{\ell}\right|_v |\Delta_{\ell,k}|_v .
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|\det M|_v &\leq \left(\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}\left|e^{\ell}\right|_v^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\ell=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{K-1}|\Delta_{\ell,k}|_v^2\right)^{1/2} \\
&\leq \sqrt{S}|M_0|_v \max(1,|e|_v)^L
\end{aligned}$$

□

Pour les places ultramétriques

Lemme 3.4.6 *Pour les places v ultramétriques de $\mathbb{K}$, nous avons*

$$|\det M|_v \leq |M_0|_v \max(1,|e|_v)^L.$$

Démonstration : La matrice M_0 est de taille $(S-1)\times S$ et de rang $S-1$,

$$|M_0|_v = \max_I |\Delta_I|_v;$$

donc

$$|M_0|_v = \max_{(l,k)\in[0;L-1]\times[0;K-1]} |\Delta_{l,k}|_v.$$

En utilisant l'inégalité ultramétrique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\det M|_v &= \left| \sum_{\ell=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{K-1} (-1)^{K\ell+k} e^{\ell} \Delta_{\ell,k} \right|_v \\ &\leq \max_{(\ell,k)} |\Delta_{\ell,k}|_v \max(1, |e|_v)^L \\ &\leq |M_0|_v \max(1, |e|_v)^L. \end{aligned}$$

□

Supposons désormais que e est un nombre algébrique (ce qui fait que $\mathbb{K}$ est un corps de nombres).

Le déterminant de M est, d'après le lemme 3.3.1, un élément non nul de $\mathbb{K}$; ceci étant, il vérifie alors la formule du produit :

$$\prod_{v \in M_{\mathbb{K}}} |\det M|_v^{d_v} = 1,$$

où $d_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_v]$ désigne le degré local de $\mathbb{K}$ en la place v.

En étudiant la matrice M et en supposant e algébrique de degré d, nous en déduisons alors l'inégalité suivante :

Proposition 3.4.7 *Nous avons, pour K suffisamment grand :*

$$1 \leq H(M_0)^d K^{(1-L)K} 3^{KL}.$$

Pour montrer cette assertion, nous allons utiliser les majorations précédemment établies, aux différentes places de $\mathbb{K}$, du déterminant de la matrice M.

Démonstration de la proposition 3.4.7

D'après la formule du produit, nous obtenons

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{v \in M_K} |\det M|_v^{d_v} \\ &= |\det M|_{v_0}^{d_{v_0}} \prod_{\substack{v \in M_K \\ v|\infty, v \neq v_0}} |\det M|_v^{d_v} \prod_{\substack{v \in M_K \\ v\nmid\infty}} |\det M|_v^{d_v}, \end{aligned}$$

et d'après les majorations déterminées dans les lemmes 3.4.4, 3.4.5 et 3.4.6, nous avons donc

$$\begin{aligned} 1 \; &\leq S^{1/2} K^{K-S+1} e^{LK} |M_0|_{v_0} \times \\ &\times \prod_{\substack{v \in M_K \\ v|\infty, v \neq v_0}} \left(\sqrt{S} |M_0|_v \max(1, |e|_v)^L\right)^{d_v} \prod_{\substack{v \in M_K \\ v \nmid \infty}} \left(|M_0|_v \max(1, |e|_v)^L\right)^{d_v}. \end{aligned}$$

Or,

$$\prod_{v \in M_K} |M_0|_v^{d_v} = H(M_0)^d$$

et

$$\prod_{v \in M_K} \max\left(1, |e|_v\right)^{d_v L} = H(e)^{dL}.$$

Nous en déduisons

$$1 \leq H(M_0)^d S^{1/2} K^{K-S+1} e^{L(K-1)} \sqrt{S}^{d-1} H(e)^{dL}$$

et donc

$$1 \leq H(M_0)^d S^{d/2} K^{K-S+1} e^{L(K-1)} H(e)^{dL}.$$

Finalement, nous obtenons, pour K suffisamment grand (en fonction de d et de $H(e)$),

$$1 \leq H(M_0)^d K^{(1-L)K} 3^{KL}.$$

Cela achève la démonstration de la proposition 3.4.7.

□

Nous avions supposé e algébrique de degré d ; ainsi, d'après les propositions 3.4.1 et 3.4.7, nous aboutissons alors à l'inégalité suivante :

$$1 \leq ((11.32)^{KL} K!)^d K^{(1-L)K} 3^{KL}.$$

En majorant $K!$ par K^K, nous obtenons alors l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} 1 \; &\leq ((11.32)^{KL} K^K)^d K^{(1-L)K} 3^{KL} \\ &\leq K^{K(d+1-L)} (3(11.32)^d)^{KL}. \end{aligned}$$

Ainsi, en fixant $L > d+1$, lorsque nous faisons tendre K vers $+\infty$, nous obtenons une contradiction et la transcendance du nombre e s'ensuit alors.

3.5 Analyse de la matrice $\mathcal{M}_0$ avec un point (non nul) multiple

Nous allons utiliser une matrice similaire à la précédent à la différence près que nous donnerons une multiplicité T au point non nul α considéré. De plus, nous discuterons selon la valeur prise par cette multiplicité.

Soit $1 \le T \le S-1$, considérons alors la matrice $\mathcal{M}$ suivante, introduite par la formule (1.9) au paragraphe 1.2.4, de taille $S \times S$ avec $S = KL$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \mathcal{M}_1 \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \in \mathbb{M}_{S-T,S}(\mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_1 \in \mathbb{M}_{T,S}(\mathbb{Q}[e]),$$

où

$$\mathcal{M}_0 = \left(\frac{1}{s!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^s \left(z^k e^{\ell z} \right)(0) \right)_{\substack{0 \le s \le S-T-1 \\ 0 \le \ell \le L-1, 0 \le k \le K-1}} = \left(\frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!} \right)_{\substack{0 \le s \le S-T-1 \\ 0 \le \ell \le L-1, 0 \le k \le K-1}},$$

$$\mathcal{M}_1 = \left(\frac{1}{s!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^s \left(z^k e^{\ell z} \right)(1) \right)_{\substack{0 \le s \le T-1 \\ 0 \le \ell \le L-1, 0 \le k \le K-1}} = \left(a_{k,\ell}^{(s)}(1) \right)_{\substack{0 \le s \le T-1 \\ 0 \le \ell \le L-1, 0 \le k \le K-1}},$$

et où

$$\begin{aligned} a_{k,\ell}^{(s)}(z) &= \frac{1}{s!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^s \left(z^k e^{\ell z} \right) = \frac{1}{s!} \sum_{j=0}^{\min(s,k)} \binom{s}{j} \frac{k!}{(k-j)!} z^{k-j} \ell^{s-j} e^{\ell z} \\ &= z^k e^{\ell z} \sum_{j=0}^{\min(s,k)} \binom{k}{j} \frac{\ell^{s-j}}{(s-j)!} z^{-j}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nous ne le préciserons pas à chaque fois, mais dans cette partie, s désignera toujours un nombre entier compris entre 0 et $T-1$.

3.5.1 Majorations de la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$, avec et sans formule de dualité

Nous pouvons donner une majoration, pour la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$, de deux façons différentes. La première consiste à fournir une majoration directe de cette hauteur, la seconde fera appel à une formule de dualité. Nous comparerons ces deux majorations suivant les valeurs de T : quand T est grand la première est meilleure, quand T est petit c'est la seconde.

Majoration avec dualité

Nous nous proposons de montrer la majoration suivante pour la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$.

Proposition 3.5.1

$$H(\mathcal{M}_0) \leq K!^T 23^{KLT}.$$

Remarque 3.5.2 *Appliquée à $T = 1$, nous obtenons une majoration légèrement moins fine que celle énoncée à la proposition 3.4.1.*

La démonstration de la proposition 3.5.1 repose sur les lemmes 3.5.3 et 3.5.6 qui suivront.

Pour obtenir cette majoration, nous allons utiliser la formule de dualité sur les hauteurs de matrices (lemme 3.2.3), ainsi qu'une inégalité entre la hauteur d'une matrice et celles de ses lignes.

Lemme 3.5.3

$$H(\mathcal{M}_0) \leq \prod_{s=S-T}^{S-1} H\left(\mathcal{L}_{\ell,k}^{(s)}(0)\right)_{(k,\ell)}.$$

Démonstration : Considérons la matrice $\mathcal{M}'$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}' &= \left(\frac{1}{s!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^s \left(z^k e^{\ell z}\right)(0)\right)_{\substack{0\leq s\leq S-1 \\ 0\leq \ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1}} = \left(\frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!}\right)_{\substack{0\leq s\leq S-1 \\ 0\leq \ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1}} \\ &= \left(\frac{k!}{s!}\binom{s}{k}\ell^{s-k}\right)_{\substack{0\leq s\leq S-1 \\ 0\leq \ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les vecteurs A_{S-T+j}, $j = 0, \ldots, T-1$, des coordonnées des cofacteurs des T dernières lignes de la matrice $\mathcal{M}'$ sont orthogonaux aux vecteurs lignes de la sous-matrice $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$. Par l'algèbre linéaire, nous avons donc :

$$\mathcal{M}_0^{\perp} = (A_{S-T}, \ldots, A_{S-1}),$$

car $\mathcal{M}'$ est une matrice régulière. Nous utiliserons le lemme suivant ([BoVa]) :

Lemme 3.5.4 *Soient N, N_1, N_2 trois nombres entiers positifs et*

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

une matrice par blocs où X_1 est une matrice de taille $N_1 \times N$ et X_2 une matrice de taille $N_2 \times N$; nous avons

$$H(X) \leq H(X_1)H(X_2).$$

Ainsi, en appliquant cette inégalité à la matrice de taille $T \times S$ et de rang $T \leq S$, dont les lignes sont ${}^tA_{S-T}, \ldots, {}^tA_{S-1}$, nous avons

$$H(\mathcal{M}_0) = H(\mathcal{M}_0^{\perp}) = H({}^tA_{S-T}, \ldots, {}^tA_{S-1}) \leq \prod_{s=S-T}^{S-1} H\left(A_s\right).$$

Maintenant, chaque ligne (A_s) contient les cofacteurs de la $s^{ième}$ ligne de la matrice de Vandermonde généralisée $\mathcal{M}'$. Nous allons donc chercher, en premier lieu, les cofacteurs des T dernières lignes de la matrice $\mathcal{M}'$ définie par (3.3).

Définition 3.5.5 *On définit le nombre entier $T!!$ par $T!! = 1! \ldots T!$.*

Soit $\mathcal{M}''$ la matrice suivante :

$$\mathcal{M}'' = \left(\binom{s}{k}\ell^{s-k}\right)_{\substack{0\leq s\leq S-1 \\ 0\leq \ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1}}.$$

Notons $A'_{s;\ell,k}$ le cofacteur de la ligne s et de la colonne (ℓ, k) de la matrice $\mathcal{M}'$, rappelons que $a'_{s;\ell,k}$ est le cofacteur de la ligne s et de la colonne (ℓ, k) de la matrice $\mathcal{M}''$. Alors

$$A'_{s;\ell,k} = \frac{(K-1)!!^L}{k!} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq s}}^{S-1} \frac{1}{j!} a'_{s;\ell,k} = \frac{(K-1)!!^L}{(S-1)!!} \frac{s!}{k!} a'_{s;\ell,k}.$$

Grâce au théorème 1.2.12, il nous suffit de majorer les T coefficients dominants d'une famille de polynômes d'interpolation de Hermite. Nous avons aussi donné (théorème 1.2.9) les écritures algébriques de ces polynômes.

Donc, il existe un nombre rationnel C tel que, pour tout k, l, s,

$$A'_{s;\ell,k} = \frac{C}{s!} \cdot \mathcal{L}^{(s)}_{\ell,k}(0);$$

et donc,

$$H\left(A_s\right) = H\left(\left(A'_{s;\ell,k}\right)_{(\ell,k)}\right) = H\left(\left(\frac{1}{s!}\mathcal{L}^{(s)}_{\ell,k}(0)\right)_{(\ell,k)}\right).$$

Pour conclure, nous avons la majoration suivante pour la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$:

$$H(\mathcal{M}_0) \leq \prod_{s=S-T}^{S-1} H\left(\left(\frac{1}{s!}\mathcal{L}^{(s)}_{\ell,k}(0)\right)_{(\ell,k)}\right).$$

□

Pour majorer $\displaystyle\prod_{s=S-T}^{S-1} H\left(\left(\frac{1}{s!}\mathcal{L}^{(s)}_{\ell,k}(0)\right)_{(\ell,k)}\right)$, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.5.6 *Pour tout s, nous avons :*

$$H\left(\left(\frac{1}{s!}\mathcal{L}^{(s)}_{\ell,k}(0)\right)_{(\ell,k)}\right) \leq K!23^{KL}.$$

Démonstration : Dans la suite, nous noterons k et l les deux indices avec $0 \leq k \leq K-1$ et $0 \leq \ell \leq L-1$. Nous savons

$$\mathcal{L}_{\ell,k}(X) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq\ell}}^{L-1}\left(\frac{X-j}{\ell-j}\right)^K \frac{(X-\ell)^k}{k!}\sum_{j=0}^{K-k-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^j\left(\frac{1}{R_\ell(\zeta)}\right)_{|\zeta=\ell}\frac{(X-\ell)^j}{j!},$$

donc nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(s)}_{\ell,k}(X) &= s!\sum_{\sigma_0+\ldots+\sigma_L=s}\left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq\ell}}^{L-1}\frac{1}{\sigma_j!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{\sigma_j}\left(\frac{X-j}{\ell-j}\right)^K\right]\left[\frac{1}{\sigma_\ell!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{\sigma_\ell}\frac{(X-\ell)^k}{k!}\right]\\ &\times\left[\frac{1}{\sigma_L!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}\right)^{\sigma_L}\left(\sum_{j=0}^{K-k-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^j\left(\frac{1}{R_\ell(\zeta)}\right)_{|\zeta=\ell}\frac{(X-\ell)^j}{j!}\right)\right]\end{aligned}$$

et donc,

$$\mathcal{L}_{\ell,k}^{(s)}(X) \;= s! \sum_{\sigma_0+\ldots+\sigma_L=s} \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq\ell}}^{L-1} \binom{K}{\sigma_j} \frac{(X-j)^{K-\sigma_j}}{(\ell-j)^K}\right] \left[\binom{k}{\sigma_\ell} \frac{(X-\ell)^{k-\sigma_\ell}}{k!}\right]$$

$$\times \left[\sum_{j=0}^{K-k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^j \left(\frac{1}{R_\ell(\zeta)}\right)_{|\zeta=\ell} \binom{j}{\sigma_L} (X-\ell)^{j-\sigma_L}\right]$$

(rappelons que $\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$). En développant notre calcul, nous obtenons

$$\mathcal{L}_{\ell,k}^{(s)}(0) = s! \sum_{\sigma_0+\ldots+\sigma_L=s} (-1)^{\ell K} \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq\ell}}^{L-1} \binom{K}{\sigma_j}\right] \left[\frac{\binom{L-1}{\ell}}{\ell}\right]^K \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq\ell}}^{L-1} (-j)^{-\sigma_j}\right]$$

$$\times \left[\binom{k}{\sigma_\ell} \frac{(-\ell)^{k-\sigma_\ell}}{k!}\right] \left[\sum_{j=0}^{K-k-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^j \left(\frac{1}{R_\ell(\zeta)}\right)_{|\zeta=\ell} \binom{j}{\sigma_L} (-\ell)^{j-\sigma_L}\right]. \tag{3.4}$$

Or, d'après le théorème 1.2.12, la famille des coefficients dominants $\gamma_{\sigma-1;\ell,k}$ des polynômes $\mathcal{L}_{\ell,k}$ d'interpolation de Hermite correspond, à un facteur multiplicatif près, à la famille des coefficients des approximants de Hermite-Padé $p_{\ell,k}$ de degré $K-1$ pour les fonctions $f_\ell(z) = e^{\ell z}$. Afin de déterminer ce coefficient multiplicatif entre ces deux familles, regardons deux éléments particuliers associés dans chacune des deux familles.

Rappelons les écritures des $p_{\ell,k}$ et des $\mathcal{L}_{\ell,k}$ (*cf* proposition 2.2.2) :

$$p_{\ell,k} = \frac{1}{k!} \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0\\ p\neq\ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p+K}} \binom{\gamma_p+K-1}{K-1}\right),$$

où $\Lambda(\ell,k)$ est l'ensemble des indices $\gamma = (\gamma_p)_{\substack{0\leq p\leq L-1\\ p\neq\ell}}$, satisfaisant $0 \leq \gamma_p \leq K-k-1$ $(0 \leq p \leq L-1,\, p \neq \ell)$ et tels que $\sum\limits_{\substack{p=0\\ p\neq\ell}}^{L-1} \gamma_p = K-k-1$;

$$\mathcal{L}_{\ell,k}(X) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq\ell}}^{L-1} \left(\frac{X-j}{\ell-j}\right)^K \frac{(X-\ell)^k}{k!} \sum_{j=0}^{K-k-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^j \left(\frac{1}{R_\ell(\zeta)}\right)_{|\zeta=\ell} \frac{(X-\ell)^j}{j!}.$$

Nous pouvons alors déduire de ceci

$$p_{\ell,K-1} = \frac{1}{(K-1)!} \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq \ell}}^{L-1} \frac{1}{(\ell-p)^K},$$

et

$$\gamma_{\sigma-1;\ell,K-1} = \frac{1}{(K-1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{1}{\ell-j}\right)^K .$$

Nous en déduisons donc non seulement l'égalité entre les deux familles $(p_{\ell,k})$ et $(\gamma_{\sigma-1;\ell,k})$, mais aussi l'égalité suivante :

$$\frac{1}{k!} \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p+K}} \binom{\gamma_p+K-1}{K-1} \right)$$

$$= \frac{1}{k!} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{1}{\ell-j}\right)^K \right) \frac{1}{(K-k-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{K-k-1} \left(\frac{1}{R_\ell(\zeta)}\right)_{|\zeta=\ell} .$$

Donc

$$\frac{1}{(K-k-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{K-k-1} \left(\frac{1}{R_\ell(\zeta)}\right)_{|\zeta=\ell} = \sum_{\Lambda(\ell,k)} \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \binom{\gamma_p+K-1}{K-1} \right);$$

et grâce à un changement d'indices trivial,

$$\frac{1}{j!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\right)^{j} \left(\frac{1}{R_\ell(\zeta)}\right)_{|\zeta=\ell} = \sum_{\Lambda(\ell,K-j-1)} \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \binom{\gamma_p+K-1}{K-1} \right). \tag{3.5}$$

Ainsi, pour tout k, ℓ, s, nous avons

$$K! d_L^K (L-1)!^K \frac{1}{s!} \mathcal{L}_{\ell,k}^{(s)}(0) \in \mathbb{Z},$$

et donc

$$H\left(\left(\frac{1}{s!}\mathcal{L}_{\ell,k}^{(s)}(0)\right)_{(\ell,k)} \right) \leq \max_{k,\ell} \left| K! d_L^K (L-1)!^K \frac{1}{s!} \mathcal{L}_{\ell,k}^{(s)}(0) \right|.$$

Pour tout k, ℓ, s, nous avons, par les formules (3.4) et (3.5),

$$
\begin{aligned}
\left| K! d_L^K (L-1)!^K \frac{1}{s!} \mathcal{L}_{\ell,k}^{(s)}(0) \right| \leq & \sum_{\sigma_0+\ldots+\sigma_L=s} \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq \ell}}^{L-1} \binom{K}{\sigma_j} \right] \left[\binom{L-1}{\ell} \right]^K \\
& \times \left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq \ell}}^{L-1} j^{-\sigma_j} \prod_{j=0}^{L-1} j^K \right] \left[\binom{k}{\sigma_\ell} \frac{K! \ell^{k-\sigma_\ell}}{k!} \right] \\
& \times \left[\sum_{j=0}^{K-k-1} \binom{j}{\sigma_L} \ell^{j-\sigma_L} d_L^{K-j} \right] \\
& \sum_{\Lambda(\ell, K-j-1)} \prod_{\substack{p=0\\ p\neq \ell}}^{L-1} \left(\frac{(-1)^{\gamma_p} d_L^{\gamma_p}}{(\ell-p)^{\gamma_p}} \frac{(\gamma_p+K-1)!}{\gamma_p!(K-1)!} \right).
\end{aligned}
$$

Nous utilisons les majorations suivantes :

$$
\sum_{\sigma_0+\ldots+\sigma_L=s} 1 \leq \binom{S}{L+1} \leq \frac{S^{L+1}}{(L+1)!} \leq \left(\frac{e\cdot S}{L+1} \right)^{L+1} \leq (e \cdot K)^{L+1},
$$

$$
\binom{a}{b} \leq 2^a,
$$

$$
d_L \leq e^{\frac{107}{103}L},
$$

$$
\prod_{j=0}^{L-1} j^{K-\sigma_j} \leq L^T,
$$

$$
\mathrm{Card}\left(\Lambda(\ell, K-j-1)\right) \leq LK.
$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} H\left(\left(\frac{1}{s!}\mathcal{L}_{\ell,k}^{(s)}(0)\right)_{(\ell,k)}\right) &\leq (e\cdot K)^{L+1}\,2^{K(L-1)}L^K 2^{K(L-1)}L^T 2^K K! \\ &\times K L^{K-1}2^{K-1}LK2^{(K-1)L}e^{\frac{107}{103}LK} \\ &\leq K!L^{2K+T}\left(\frac{e}{2}\right)^{L+1}K^{L+3}\left(8e^{\frac{107}{103}}\right)^{LK} \\ &\leq K!23^{KL} \end{aligned}$$

□

Majoration directe

Sans utiliser de formule duale comme dans le cas précédent, nous obtenons alors la majoration suivante pour la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$:

Proposition 3.5.7

$$H(\mathcal{M}_0) \leq (KL-T-1)!!(L-1)^{\frac{(KL-T)(KL-T-1)}{2}}.$$

Démonstration : Considérons la matrice $\mathcal{M}_0$ comme précédemment

$$\mathcal{M}_0 = \left(\frac{1}{s!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^s\left(z^k e^{\ell z}\right)(0)\right)_{\substack{0\leq s\leq S-T-1\\ 0\leq \ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1}} = \left(\frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!}\right)_{\substack{0\leq s\leq S-T-1\\ 0\leq \ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1}}.$$

Nommons A'_s, pour $0 \leq s \leq S-T-1$, les lignes de la matrice $\mathcal{M}_0$. De même que dans la sous-section « avec dualité », en utilisant le lemme 3.5.4, nous avons l'inégalité suivante :

$$H(A'_0,\dots,A'_{S-T-1}) \leq \prod_{s=0}^{S-T-1} H\left(A'_s\right) \leq \prod_{s=0}^{S-T-1} H\left(\left(\frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!}\right)_{(\ell,k)}\right).$$

Or,

$$H\left(\left(\frac{\ell^{s-k}}{(s-k)!}\right)_{(\ell,k)}\right) \leq s!(L-1)^s;$$

nous en déduisons alors

$$H(\mathcal{M}_0) \leq (S-T-1)!!(L-1)^{\frac{(S-T)(S-T-1)}{2}},$$

et donc

$$H(\mathcal{M}_0) \leq (KL-T-1)!!(L-1)^{\frac{(KL-T)(KL-T-1)}{2}}.$$

□

Comparaison

Ainsi, sans utilisation de la formule duale sur les hauteurs de matrices, nous obtenons

$$H(\mathcal{M}_0) \leq (KL-T-1)!!(L-1)^{\frac{(KL-T)(KL-T-1)}{2}},$$

tandis qu'avec cette dernière, la majoration obtenue est la suivante :

$$H(\mathcal{M}_0) \leq K!^T 23^{KLT}.$$

Donc, si T est « grand », alors la première majoration (directe) est la plus fine et si T est « petit », alors il vaut mieux utiliser la seconde (duale) afin d'obtenir de meilleures estimations. En effet, la fonction de la variable T

$$f(T) = K!^T 23^{KLT}$$

est croissante et nous fournira les estimations les plus précises pour de petites valeurs de T ; au contraire, la fonction de la variable T

$$g(T) = (KL-T-1)!!(L-1)^{\frac{(KL-T)(KL-T-1)}{2}}$$

est décroissante et est donc plus efficace pour de grandes valeurs de T.

Un des buts de cette thèse était d'analyser, selon les valeurs de T, les majorations obtenues pour $H(\mathcal{M}_0)$ ($T = 1$ correspond aux approximants de Hermite-Padé de type I). Le cas $T = 1$ ayant déjà été étudié, il semble légitime de regarder si de petites valeurs de $T > 1$ pourraient améliorer les résultats. Nous concluons alors à une réponse négative.

3.5.2 Nouvelle application au théorème de Hermite

Nous pouvons affirmer que $\det \mathcal{M}$ est l'évaluation, au point e, d'un polynôme à coefficients rationnels. C'est justement à partir de $\det \mathcal{M}$ que nous allons établir, à nouveau, la transcendance de e.

Soit $F = \displaystyle\sum_{j=0}^{LT} f_j X^j \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme tel que

$$\det \mathcal{M} = F(e).$$

D'après un lemme de zéros (lemme 3.3.1, le même que pour le cas sans multiplicité), $\det \mathcal{M}$ est un élément non nul de K. Cependant, $F(X)$ est un polynôme à coefficients rationnels et non pas entiers. Posons

$$G(X) = (T-1)!! \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) F(X)$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, et rappelons que $T!! = 1! \dots T!$. Nous avons alors les deux lemmes suivants :

Lemme 3.5.8

$$(T-1)!! \leq T^{T^2}.$$

Lemme 3.5.9

$$G(X) \in \mathbb{Z}[X].$$

Démonstration : En effet, d'après les expressions des $a_{k,\ell}^{(s)}(1)$, nous pouvons écrire, en développant $\det \mathcal{M}$ par rapport aux T dernières lignes, que

$$F(e) = \sum_{\underline{k},\underline{\ell}} F_{\underline{k},\underline{\ell}}(e) \Delta_{\underline{k},\underline{\ell}}$$

où les $\Delta_{\underline{k},\underline{\ell}}$ sont les mineurs de taille $(S-T) \times (S-T)$ extraits de $\mathcal{M}_0$ et où les $F_{\underline{k},\underline{\ell}}$ sont des polynômes à coefficients rationnels. Nous avons, dans cette situation,

$$(T-1)!! F_{\underline{k},\underline{\ell}}(X) \in \mathbb{Z}[X]$$

et

$$\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) \Delta_{\underline{k},\underline{\ell}} = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \max_{k,\ell} |\Delta_{\underline{k},\underline{\ell}}|_p \right) \Delta_{\underline{k},\underline{\ell}} \in \mathbb{Z}.$$

Et donc,

$$G(X) = (T-1)!! \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) F(X) \in \mathbb{Z}[X].$$

□

Soient $g_0, \dots, g_{LT}$ les coefficients de $G(X)$

$$G(X) = \sum_{j=0}^{LT} (T-1)!! \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) f_j X^j = \sum_{j=0}^{LT} g_j X^j;$$

ainsi,

$$g_j = (T-1)!! \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) f_j. \tag{3.6}$$

Nous allons aussi voir, dans ces conditions, certaines égalités satisfaites par la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$. Nous appliquerons une inégalité de Liouville à la valeur de G au point e. Nous aurons ainsi besoin de majorations, faisant intervenir la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$, pour $|G(e)|$ et $||G||_1$.

Majoration de $|G(e)|$

Proposition 3.5.10

$$|G(e)| \leq H(\mathcal{M}_0) K^{-KT(L-1)} 6^{LKT} (KLT)^{T(T+1)}.$$

Démonstration : Afin de démontrer cette proposition, nous considérons $\det \mathcal{M}$ comme la valeur au point 1 de la fonction

$$\psi : z \longmapsto \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(a_{k,\ell}^{(s)}(z) \right)_{0 \leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1}^{0 \leq s \leq T-1} \end{pmatrix}$$

où $a_{k,\ell}^{(s)}(z)$ vaut $\dfrac{1}{s!} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^s \left(z^k e^{\ell z} \right)$.

La fonction ψ admet le point 0 pour zéro d'ordre $T(S-T)$. En effet, la valeur en 0 de $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^{T(S-T)} \psi$ est une somme de déterminants de Vandermonde généralisés dont un seul est non nul ; de plus, pour tout $0 \leq t < T(S-T)$, la valeur en 0 de $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^t \psi$ est une somme de déterminants ayant tous au moins deux lignes égales ; donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right)^t \psi_{|z=0} = 0$ pour tout $0 \leq t < T(S-T)$.

Soit R un nombre réel supérieur ou égal à 1 ; par application du lemme de Schwarz 3.3.2, nous avons donc l'inégalité suivante :

$$|\det \mathcal{M}| = |\psi(1)| \leq \frac{|\psi(z)|_R}{R^{T(S-T)}}.$$

Déterminons alors une majoration pour $|\psi(z)|_R$; en développant ce déterminant par rapport aux T dernières lignes et en nommant $\Delta_{\underline{k},\underline{\ell}}$ le déterminant de taille $(S-T)\times(S-T)$ extrait de $\mathcal{M}_0$ en omettant les colonnes d'indices $(\underline{k},\underline{l})$, on obtient la majoration élémentaire suivante :

$$|\psi(z)| \leq \sum_{\substack{0\leq \ell_1\leq L-1\\ 0\leq k_1\leq K-1}} \left|a^{(T-1)}_{k_1,\ell_1}(z)\right| \sum_{\substack{0\leq \ell_2\leq L-1\\ 0\leq k_2\leq K-1}} \left|a^{(T-2)}_{k_2,\ell_2}(z)\right| \cdots \sum_{\substack{0\leq \ell_T\leq L-1\\ 0\leq k_T\leq K-1}} \left|a^{(0)}_{k_T,\ell_T}(z)\right| |\Delta_{\underline{k},\underline{\ell}}|. \tag{3.7}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la formule de Cauchy-Binet, nous en déduisons alors que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}|\psi(z)| &\leq |\mathcal{M}_0| \prod_{i=1}^{T-1} \sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} \left|a^{(T-i)}_{k,\ell}(z)\right| \left(\sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} \left|a^{(0)}_{k,\ell}(z)\right|^2\right)^{1/2}\\ &\leq |\mathcal{M}_0| \prod_{i=1}^{T} \sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} \left|a^{(T-i)}_{k,\ell}(z)\right|,\end{aligned}$$

et donc, pour tout nombre réel $R\geq 1$, nous avons

$$|\psi(z)|_R \leq |\mathcal{M}_0| \prod_{i=1}^{T} \sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} R^k e^{\ell R} \sum_{j=0}^{\min(T-i,k)} \binom{k}{j} \frac{\ell^{(T-i)-j}}{((T-i)-j)!};$$

d'après l'équation (3.2). Aussi, par une suite de majorations triviales, il s'ensuit que, pour tout réel $R\geq 1$,

$$\begin{aligned}|\psi(z)|_R &\leq |\mathcal{M}_0|\, e^{LRT} R^{KT} \prod_{i=1}^{T} \sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} \sum_{j=0}^{\min(T-i,k)} \binom{k}{j} \frac{l^{(T-i)-j}}{((T-i)-j)!}\\ &\leq |\mathcal{M}_0|\, e^{LRT} R^{KT} \left(S2^K L^T\right)^T\\ &\leq |\mathcal{M}_0|\, e^{LRT} R^{KT} S^T 2^{TK} L^{T^2}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons alors, pour tout $R\geq 1$,

$$|\det\mathcal{M}| \leq |\mathcal{M}_0|\, e^{LRT} R^{KT-T(S-T)} S^T 2^{TK} L^{T^2}.$$

Déterminons maintenant une valeur convenable pour R qui satisfait à la majoration de $\det \mathcal{M}$.

Considérons la fonction f définie par $f(R) = e^{LRT} R^{KT-T(S-T)}$. Sa dérivée logarithmique vaut $LT - \frac{T(S-T-K)}{R}$, et s'annule alors pour $R = \frac{S-T-K}{L} = K - \frac{K+T}{L}$.

Nous aboutissons donc, en prenant, par simplicité, $R = K$, à

$$\begin{aligned} |\det \mathcal{M}| &\leq |\mathcal{M}_0|\, e^{LKT} K^{-KT(L-1)+T(T+1)} 2^{TK} L^{T(T+1)} \\ &\leq |\mathcal{M}_0|\, K^{-KT(L-1)} (2e)^{LKT} (KL)^{T(T+1)}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} |G(e)| &\leq (T-1)!! \left(\prod_{p \in P} |\mathcal{M}_0|_p \right) |\mathcal{M}_0|\, K^{-KT(L-1)} (2e)^{LKT} (KL)^{T(T+1)} \\ &\leq |H(\mathcal{M}_0)|\, K^{-KT(L-1)} 6^{LKT} (KLT)^{T(T+1)}. \end{aligned}$$

□

Désignons, pour un polynôme G, $||G||_1$ comme la somme des valeurs absolues des coefficients de G.

Majoration de $||G||_1$

Proposition 3.5.11 *Pour $K \geq 6$, on a*

$$||G||_1 \leq H(\mathcal{M}_0) e^{TK} (TL)^{(T+1)^2}.$$

Démonstration :

Posons $a_{k,\ell}^{(s)}(1) = R_{k,\ell;s}(e)$ où $R_{k,\ell;s}(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Nous avons la majoration suivante pour les coefficients du polynôme F :

$$\max_j |f_j| \leq |\mathcal{M}_0|\, S^T \max_{k,\ell;s} H\left(R_{k,\ell;s}(X)\right)^T$$

où $H\left(R_{k,\ell;s}(X)\right)$ est la hauteur du polynôme $R_{k,\ell;s}(X)$. En effet, d'après le développement (3.7) de $\det \mathcal{M}$,

$$|\det \mathcal{M}| \leq \sum_{\substack{0 \leq \ell_1 \leq L-1 \\ 0 \leq k_1 \leq K-1}} \left| a_{k_1,\ell_1}^{(T-1)}(1) \right| \sum_{\substack{0 \leq \ell_2 \leq L-1 \\ 0 \leq k_2 \leq K-1}} \left| a_{k_2,\ell_2}^{(T-2)}(1) \right| \cdots \sum_{\substack{0 \leq \ell_T \leq L-1 \\ 0 \leq k_T \leq K-1}} \left| a_{k_T,\ell_T}^{(0)}(1) \right| |\Delta_{\underline{k},\underline{\ell}}|.$$

Ceci nous donne immédiatement le résultat souhaité.

D'après (3.6), nous avons

$$|g_j| = (T-1)!! \left(\prod_{p \in P} |\mathcal{M}_0|_p \right) |f_j| \, .$$

Des relations

$$a_{k,\ell}^{(s)}(1) = e^{\ell} \sum_{j=0}^{\min(s,k)} \binom{k}{j} \frac{\ell^{s-j}!}{(s-j)!};$$

on déduit

$$H\left(R_{k,\ell;s}(X)\right) \leq L^T 2^K.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} |g_j| &= (T-1)!! \left(\prod_{p \in P} |\mathcal{M}_0|_p \right) |f_j| \\ &\leq H(\mathcal{M}_0)(T-1)!! S^T L^{T^2} 2^{TK}. \end{aligned}$$

Or,

$$G(X) = \sum_{j=0}^{LT} g_j X^j,$$

donc

$$||G||_1 \leq H(\mathcal{M}_0)(T-1)!! T S^T L^{T^2+1} 2^{TK};$$

on utilise enfin les majorations $(T-1)!!T \leq T^{(T+1)^2}$ et $K^T 2^{TK} \leq e^{TK}$ pour $K \geq 6$, et on en déduit alors la majoration voulue

$$||G||_1 \leq H(\mathcal{M}_0) e^{TK} (TL)^{(T+1)^2}.$$

□

Nous pouvons, dans cette situation où une multiplicité (T) a été introduite, à nouveau prouver la transcendance de e ; pour cela, nous aurons besoin de l'inégalité de Liouville suivante (se déduisant de l'inégalité plus générale de la proposition 3.14 dans [Wa3]), appliquée à $G(e)$,

Proposition 3.5.12 *Supposons e algébrique, nous avons alors*

$$|G(e)| \geq ||G||_1^{-(d-1)} \, e^{-dLTh(e)}$$

où $h(e)$ désigne la hauteur de e.

D'après l'inégalité de Liouville, des majorations de $|G(e)|$, $||G||_1$, ainsi que de l'inégalité $K! \leq K^K$, nous obtenons

(1)
$$|G(e)| \geq ||G||_1^{-(d-1)}\, e^{-dLTh(e)},$$

(2)
$$||G||_1 \leq H(\mathcal{M}_0) e^{TK} (TL)^{(T+1)^2}$$

et

(3)
$$|G(e)| \leq H(\mathcal{M}_0) K^{-KT(L-1)} 6^{LKT} (KLT)^{T(T+1)}.$$

Pour « T grand »

Comme nous venons de le spécifier, pour ce cas, où T est grand, nous aurons tout intérêt à utiliser la majoration directe de la hauteur de la matrice $\mathcal{M}_0$ ne faisant pas intervenir la dualité. Ainsi, d'après les différentes estimations énoncées antérieurement, l'inégalité de Liouville s'écrit alors :

$$\left[H(\mathcal{M}_0) e^{TK} (TL)^{(T+1)^2}\right]^{-(d-1)} e^{-dLTh(e)} \leq H(\mathcal{M}_0) K^{-KT(L-1)} 6^{LKT} (KLT)^{T(T+1)},$$

où
$$H(\mathcal{M}_0) \leq (KL - T - 1)!!(L-1)^{\frac{(KL-T)(KL-T-1)}{2}}.$$

Cependant, nous n'arriverons pas toujours à aboutir à une contradiction ; en effet, le cas $T = KL/2$ ne contredit en aucun cas l'inégalité de Liouville car dans ce cas, nous aurons :

$$K^{-KT(L-1)} (KLT)^{T(T+1)} = e^{\frac{-K^2L^2}{2}\log K + \frac{K^2L^2}{2}\log(KL)}.$$

Afin d'aboutir à la conclusion voulue, il faudrait considérer $T = KL/\alpha$ où α sera une constante prise suffisamment grande.

Pour « T petit »

En utilisant la formule de dualité, nous obtenons alors l'inégalité suivante :

$$\left[H(\mathcal{M}_0) e^{TK} (TL)^{(T+1)^2}\right]^{-(d-1)} e^{-dLTh(e)} \leq H(\mathcal{M}_0) K^{-KT(L-1)} 6^{LKT} (KLT)^{T(T+1)},$$

où
$$H(\mathcal{M}_0) \leq K!^T 23^{KLT}.$$
Considérons, par exemple, le cas T constant.

L'inégalité de Liouville se réécrit (en majorant $K!$ par K^K) de la façon suivante :

il existe une constante C (ne dépendant que de d) telle que
$$1 \leq K^{KT(d-L+1)} C^{KL} T^{dT(T+1)}.$$

Remarque 3.5.13 *En prenant $L = o(\log K)$, il s'en suit que*
$$C^{KL} T^{dT(T+1)} = o(K!^{\epsilon})$$
pour tout $\epsilon > 0$, lorsque $K \longrightarrow \infty$.

Ainsi, en fixant $L > d+1$, lorsque nous faisons tendre K vers $+\infty$, nous aboutissons à une contradiction. D'où la conclusion.

Chapitre 4

Démonstrations de nouveaux énoncés d'approximation diophantienne

Le but de ce chapitre est de démontrer les principaux énoncés de cette thèse qui sont les théorèmes 1.3.14 et 1.3.22, ainsi que les corollaires 1.3.16, 1.3.17, 1.3.18 et 1.3.20 énoncés dans l'introduction. Après avoir défini la matrice utilisée pour cette étude, nous allons établir certains lemmes auxiliaires (lemme de zéros et lemme de Schwarz) que nous utiliserons par la suite.

4.1 Matrice d'étude

Soient K, L deux nombres entiers strictement positifs, μ un nombre entier positif ; considérons la matrice $\mathcal{M}(x,y)$ suivante de taille $S \times S$, où $S = KL$:

$$\mathcal{M}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \mathcal{M}_1(x,y) \end{pmatrix}$$

avec

$$\mathcal{M}_0 \in \mathbb{M}_{S-1,S}(\mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_1(x,y) \in \mathbb{M}_{1,S}(\mathbb{Q}[x,y]),$$

où

$$\mathcal{M}_0 = \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^s \left(z^k e^{\ell z}\right)(0) \right)_{\substack{0 \le s \le S-2 \\ 0 \le \ell \le L-1, 0 \le k \le K-1}} = \left(\binom{s}{k} k! \ell^{s-k} \right)_{\substack{0 \le s \le S-2 \\ 0 \le \ell \le L-1, 0 \le k \le K-1}},$$

puis

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(x,y) &= \left(y^\ell \sum_{j=0}^{k} \binom{\mu}{j} \frac{k!}{(k-j)!} x^{k-j} \ell^{\mu-j}\right)_{0\le\ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \\ &= \left(\delta^\mu \left(X^k Y^\ell\right)(x,y)\right)_{0\le\ell\le L-1, 0\le k\le K-1},\end{aligned}$$

où δ est l'opérateur de dérivation défini de la façon suivante :

$$\delta = \frac{\partial}{\partial X} + Y\frac{\partial}{\partial Y}.$$

Remarque 4.1.1 *Nous avons, en particulier,*

$$\mathcal{M}_1(z,e^z) = \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^\mu \left(z^k e^{\ell z}\right)\right)_{0\le\ell\le L-1, 0\le k\le K-1}.$$

Nous noterons $F(x,y) = \det \mathcal{M}(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$.

4.2 Lemmes auxiliaires

4.2.1 Lemme de Schwarz

Voici un lemme qui nous fournira une majoration pour un déterminant lié aux matrices que nous étudions :

Soient a et b deux nombres complexes. Posons $\epsilon = \left|e^b - a\right|$; on a $\epsilon > 0$.

Pour $0 \le k \le K-1$, $0 \le \ell \le L-1$, définissons les nombres complexes $w_{k,l}$ et les fonctions $\Phi_{k,\ell}$ par :

(i)

$$w_{k,\ell} = \frac{a^\ell - e^{b\ell}}{|e^b - a|} \sum_{j=0}^{k} \binom{\mu}{j} \frac{k!\ell^{\mu-j}}{(k-j)!} b^{k-j},$$

et

(ii)

$$\Phi_{k,\ell}(z) = z^k e^{\ell z},$$

de telle sorte que

$$\delta^\mu \left(X^k Y^\ell\right)(z,e^z) = \Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z)$$

(cf. remarque 4.1.1) et

$$\delta^{\mu}\left(X^kY^{\ell}\right)(b,a) = \Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(b) + \epsilon w_{k,l}.$$

Le lemme suivant sera utile pour la démonstration du théorème 1.3.14.

Lemme 4.2.1 *Soient K, L deux entiers strictement positifs et E un nombre réel supérieur ou égal à 1. Posons $S = KL$, et soit $\mathcal{N}$ un nombre réel strictement positif tel que,*

pour tout $0 \leq k \leq K-1$, $0 \leq \ell \leq L-1$, on ait

$$\max\left\{|w_{k,\ell}|, \left|\Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(zb)\right|_E\right\} \leq e^{\mathcal{N}}; \tag{4.1}$$

supposons, par ailleurs,

$$\epsilon < E^{-S}. \tag{4.2}$$

Alors, le logarithme de la valeur absolue du déterminant

$$\mathcal{D} = \det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(b) + \epsilon w_{k,\ell}\right)_{0\leq\ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1} \end{pmatrix}$$

est majoré par

$$\log|\mathcal{D}| \leq -(KL-\mu-1)\log E + \mathcal{N} + \frac{1}{2}\log(4LK) + \log|\mathcal{M}_0|.$$

Rappelons que la notation $|\mathcal{M}_0|$ est celle introduite lors de la définition de la hauteur d'une matrice au paragraphe 3.2.2.

Démonstration : Définissons la fonction suivante :

$$\psi : z \longmapsto \det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(z)\right)_{0\leq\ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1} \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors, en développant suivant la dernière ligne,

$$|\psi(z)| \leq \sum_{\substack{0\leq\ell\leq L-1 \\ 0\leq k\leq K-1}} \left|\Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(z)\right| |\Delta_{k,l}|, \tag{4.3}$$

où $|\Delta_{k,l}|$ est le mineur de la matrice $\mathcal{M}_0$ dont la colonne d'indice $(k;l)$ a été ôtée. Considérons la fonction

$$\mathcal{D}(z) = \det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(bz) + \epsilon w_{k,\ell}\right)_{0\leq\ell\leq L-1, 0\leq k\leq K-1} \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(1).$$

Alors,

$$\mathcal{D}(z) = \mathcal{D}_0(z) + \epsilon.\mathcal{D}_1(z), \tag{4.4}$$

où

$$\mathcal{D}_I(z) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(c^{(I)}_{\mu;k,\ell}(z)\right)_{0\le\ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix}$$

et

$$c^{(I)}_{\mu;k,\ell}(z) = \begin{cases} \Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(bz) & \text{si} \quad I = 0 \\ \\ w_{k,\ell} & \text{si} \quad I = 1 \end{cases}.$$

On a

$$\mathcal{D}_0(z) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(bz)\right)_{0\le\ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{D}_1(z) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ (w_{k,\ell})_{0\le\ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^t \mathcal{D}_0(z) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(b^t \Phi^{(\mu+t)}_{k,\ell}(bz)\right)_{0\le\ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix},$$

on a, pour tout $t < S - \mu$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^t \mathcal{D}_0(0) = 0.$$

Donc le déterminant $\mathcal{D}_0(z)$ a un zéro à l'origine d'ordre supérieur ou égal à

$$S - \mu - 1.$$

Cet ordre est, en fait, exactement égal à $S - \mu - 1$ quand $\mu \le S - 1$, mais nous n'utiliserons pas cette information.

Par application du Lemme de Schwarz 3.3.2, nous en déduisons, pour tout $E \ge 1$,

$$\log |\mathcal{D}_0(1)| \le -(S - \mu - 1) \cdot \log E + \log |\mathcal{D}_0(z)|_E . \tag{4.5}$$

D'autre part, on peut écrire

$$\log|\mathcal{D}_1(1)| = \log|\mathcal{D}_1(z)|_E$$

car $\mathcal{D}_1(z)$ ne dépend pas de z.

Étudions maintenant, pour $I=0$ et $I=1$, le terme $\log|\mathcal{D}_I(z)|_E$.

En développant $\mathcal{D}_I(z)$ suivant la dernière ligne (comme pour la démonstration de l'inégalité (4.3)), nous obtenons

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_I(z)| &\leq \sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} \left|c^{(I)}_{\mu;k,\ell}(z)\right| |\Delta_{k,l}| \\ &\leq \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} \left|\Phi^{(\mu)}_{k,\ell}(z)\right| |\Delta_{k,l}| & \text{si} \quad I=0 \\ \displaystyle\sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} |w_{k,\ell}(z)|\, |\Delta_{k,l}| & \text{si} \quad I=1 \end{cases}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (4.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\mathcal{D}_I(z)|_E^2 \leq \sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} |w_{k,\ell}|^2 \sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} |\Delta_{k,l}|^2.$$

De plus, le lemme 3.2.2 donne

$$|\mathcal{M}_0|^2 = \sum_{\substack{0\leq \ell\leq L-1\\ 0\leq k\leq K-1}} |\Delta_{k,l}|^2,$$

et on en déduit

$$\log|\mathcal{D}_I(z)|_E \leq \log|\mathcal{M}_0| + \mathcal{N} + \frac{1}{2}\log(LK).$$

En utilisant l'inégalité (4.5), nous avons

$$\log|\mathcal{D}_I(1)| \leq \begin{cases} -(S-\mu-1)\log E + \mathcal{N} + \dfrac{1}{2}\log(LK) + \log|\mathcal{M}_0| & \text{si} \quad I=0 \\ \mathcal{N} + \dfrac{1}{2}\log(LK) + \log|\mathcal{M}_0| & \text{si} \quad I=1 \end{cases}.$$

De l'égalité (4.4), nous déduisons

$$|\mathcal{D}| = |\mathcal{D}(1)| \quad \leq 2 \max \{\epsilon \, |\mathcal{D}_1(1)| \, , |\mathcal{D}_0(1)|\} \, .$$

Comme $E \geq 1$ et $S = KL$, on a

$$\log \epsilon \leq -S \log E \leq -(KL - \mu - 1) \log E.$$

Par conséquent,

$$\log |\mathcal{D}| \leq -(KL - \mu - 1) \log E + \mathcal{N} + \frac{1}{2} \log (4LK) + \log |\mathcal{M}_0|.$$

Ceci démontre le lemme 4.2.1. □

4.2.2 Lemme de zéros et polynômes de Fel'dman

Nous allons énoncer et démontrer un lemme de zéros qui précise celui de Yu. V. Nesterenko et M. Waldschmidt dans [NeWa], puis nous introduirons des polynômes de Fel'dman.

Un nouveau lemme de zéro

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle.

Rappelons que nous avons défini δ comme l'opérateur de dérivation

$$\delta = \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y}. \tag{4.6}$$

sur l'espace $\mathbb{K}[X, Y]$ des polynômes en deux variables.

Lemme 4.2.2 *Soient $D_0, D_1, M, S_1, \ldots, S_M$ des nombres entiers positifs vérifiant*

$$S_1 + \ldots + S_M > (D_0 + M)(D_1 + 1) - M. \tag{4.7}$$

Soient $(\zeta_1, \eta_1), \ldots, (\zeta_M, \eta_M)$ des couples de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ où $\zeta_1, \ldots, \zeta_M$ sont deux à deux distincts. Il n'existe alors pas de polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X, Y]$, de degré majoré par D_0 en X et de degré majoré par D_1 en Y qui satisfait à

$$\delta^{\sigma_\mu} P(\zeta_\mu, \eta_\mu) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 \leq \sigma_\mu < S_\mu \quad \text{avec} \quad 1 \leq \mu \leq M. \tag{4.8}$$

Démonstration : Supposons qu'il existe un polynôme non nul P de degré $\leq D_0$ en X et de degré $\leq D_1$ en Y qui satisfait les égalités (4.8). Nous allons montrer que la condition (4.7) n'est pas satisfaite.

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que Y ne divise pas le polynôme P, et que P a un degré supérieur ou égal à 1 par rapport à la variable Y (le cas où P est de degré 0 en la variable Y est celui, trivial, d'un polynôme en une variable). Définissons les nombres entiers n, $k_0, k_1, \ldots, k_n, m_0, \ldots, m_n$, les polynômes $Q_i \in \mathbb{K}[X]$ $(0 \leq i \leq n)$ et les éléments $b_0, \ldots, b_n$ de $\mathbb{K}^*$ par les conditions suivantes :

$$k_0 = 0 < k_1 < \ldots < k_n \leq D_1,$$

$$P(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(X) Y^{k_i},$$

$$Q_i(X) = b_i X^{m_i} + \ldots \in \mathbb{K}[X], \quad b_i \in \mathbb{K}^* \quad (i = 0, \ldots, n).$$

Pour $0 \leq \sigma \leq n$, nous définissons les polynômes $Q_{\sigma i} \in \mathbb{K}[X]$ par

$$\delta^\sigma P(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} Q_{\sigma i}(X) Y^{k_i}, \tag{4.9}$$

de sorte que

$$Q_{\sigma i}(X) = \sum_{j=0}^{\sigma} \binom{\sigma}{j} Q_i^{(\sigma-j)}(X) k_i^j = b_i k_i^\sigma X^{m_i} + \ldots.$$

On pose

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= \det\left(Q_{\sigma i}(X)\right)_{0 \leq i,\sigma \leq n} = \det\left(b_i k_i^\sigma X^{m_i} + \ldots\right)_{0 \leq i,\sigma \leq n} \\ &= b_0 \ldots b_n \cdot B \cdot X^{m_0 + \ldots + m_n} + \ldots, \end{aligned}$$

où B est le déterminant de Vandermonde construit à partir des nombres $k_0, \ldots, k_n$, et donc $B \neq 0$. Maintenant, de (4.9), nous déduisons, par les formules de Cramer,

$$\Delta(X) = \sum_{\sigma=0}^{n} \Delta_\sigma(X,Y) \cdot \delta^\sigma P(X,Y) \qquad \text{avec} \qquad \Delta_\sigma(X,Y) \in \mathbb{K}[X,Y].$$

Par conséquent, pour tout $1 \leq j \leq M$, tout $\tau \in \mathbb{Z}$ vérifiant $0 \leq \tau < \max\{0, S_j - n\}$, on peut écrire

$$\Delta^{(\tau)}(\zeta_j) = \sum_{\sigma=0}^{n+\tau} c_{\tau,j,\sigma} \cdot \delta^\sigma P(\zeta_j, \eta_j) = 0$$

avec $c_{\tau_j,j,\sigma} \in \mathbb{K}$. Or $n \leq D_1$, et $\deg \Delta(X) = m_0 + \ldots + m_n \leq (n+1)D_0 \leq (D_1+1)D_0$. Donc

$$\sum_{j=1}^{M}(S_j - n) \leq \sum_{j=1}^{M} \max\{0, S_j - n\} \leq \deg \Delta(X) \leq (D_1+1)D_0$$

et

$$\sum_{j=1}^{M} S_j \leq (D_1+1)D_0 + nM \leq (D_1+1)D_0 + D_1 M = (D_0+M)(D_1+1) - M.$$

Ceci montre que la condition (4.7) n'est pas satisfaite. Le lemme 4.2.2 en résulte. □

Remarque 4.2.3 *Le lemme* 2 *de [NeWa] est le cas particulier du lemme 4.2.2 dans lequel* $S_1 = \ldots = S_M$.

Remarque 4.2.4 *Un exemple avec* $D_0 = 0$ *où le lemme de zéro précédent est optimal est donné par le polynôme* $\mathcal{P}(X,Y) = (Y-1)^{D_1}$ *qui vérifie (4.8) avec* $S_1 = \ldots = S_M = D_1$, *pour les points* $(\zeta_\mu, \eta_\mu) = (\mu, 1)$, $1 \leq \mu \leq M$.

Considérons le polynôme $\mathcal{H} \in \mathbb{Z}[X]$ suivant

$$\mathcal{H}(X,Y) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(X^k Y^l\right)_{0\leq \ell \leq L-1, 0 \leq k \leq K-1} \end{pmatrix}$$

Ce polynôme a un degré égal à $K-1$ en X et $L-1$ en Y ; de plus, il admet au point $(0,1)$ un zéro d'ordre $S-1$. D'après le lemme 4.2.2, on en déduit que ce même polynôme ne peut admettre en un point $(b,a) \neq (0,1)$ un zéro d'ordre supérieur ou égal à L. Ainsi, il existe un nombre entier $0 \leq \mu \leq L-2$ tel que pour tout nombre entier $0 \leq m \leq \mu - 1$, on ait

$$\delta^m \mathcal{H}(b,a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta^\mu \mathcal{H}(b,a) \neq 0.$$

Le polynôme $F \in \mathbb{Q}[X,Y]$ introduit à la fin de la section 4.1 vérifie

$$F(X,Y) = \delta^\mu \mathcal{H}(X,Y),$$

de sorte que, avec les notations du lemme 4.2.1,

$$\mathcal{D} = F(b,a) \neq 0.$$

À partir de maintenant, μ désignera cette valeur.

Le lemme 4.2.2 suffira pour la démonstration du théorème 1.3.22, mais pour continuer celle du théorème 1.3.14 il faut aller un peu plus loin. En effet, le lemme 4.2.2 a fait apparaître un nouveau paramètre μ apportant le terme $\mu \log \mu$ dans les majorations suivantes découlant du lemme de Scharwz. Celui-ci est trop grand pour établir l'inégalité (1.12). Le but de ce qui va suivre sera donc d'« éliminer » ce terme $\mu \log \mu$. Nous pourrions simplement considérer l'opérateur $\dfrac{1}{\mu!}\delta^{\mu}$ mais nous ne serions alors plus en présence d'un polynôme à coefficients entiers (dans l'objectif d'utiliser une inégalité de Liouville), mais seulement rationnels. La question qui se pose alors à nous est :« comment éliminer ce terme $\mu \log \mu$ tout en gardant des nombres entiers ? ».

Nous allons, pour cela, utiliser des polynômes de Fel'dman qui ont l'avantage de prendre des valeurs entières en tous les points entiers et qui vont aussi nous permettre de compenser le terme $\mu \log \mu$.

Polynômes de Fel'dman. Lemme de zéros

Définition 4.2.5 *Pour ν nombre entier positif, on définit le polynôme de Fel'dman $\mathcal{F}_\nu$ d'indice ν (et ses coefficients $\lambda_{j,\nu} \in \mathbb{Q}$, $j = 0 \dots \nu$) par*

$$\mathcal{F}_\nu(z) = \frac{z(z-1)\dots(z-\nu+1)}{\nu!} = \sum_{j=0}^{\nu} \lambda_{j,\nu} z^j.$$

En particulier, on a $\lambda_{\nu,\nu} = \dfrac{1}{\nu!}$ et $\lambda_{0,\nu} = 0$. Voici trois lemmes concernant ces polynômes :

Lemme 4.2.6 *Les coefficients $\lambda_{j,\nu}$ ($j = 0 \dots \nu$) du polynôme de Fel'dman $\mathcal{F}_\nu$ satisfont à l'égalité*

$$\sum_{j=0}^{\nu} |\lambda_{j,\nu}| = 1.$$

Démonstration : Il suffit, ici, de remarquer que, pour tout $0 \le j \le \nu$, le signe de $\lambda_{j,\nu}$ est le même que celui de $(-1)^{\nu-j}$; ainsi, on en déduit que

$$\sum_{j=0}^{\nu} |\lambda_{j,\nu}| = \sum_{j=0}^{\nu} \lambda_{j,\nu}(-1)^{\nu-j} = (-1)^{\nu}\mathcal{F}_\nu(-1) = 1.$$

Et de plus,

Lemme 4.2.7 *Pour tout $\nu \geq 3$, on a*

$$\sum_{j=1}^{\nu} j!\,|\lambda_{j,\nu}| \leq \nu 2^{\nu-3}.$$

Démonstration : D'une part, il est évident que

$$\sum_{j=1}^{\nu} j!\,|\lambda_{j,\nu}| \leq \nu \max_{1\leq j\leq \nu} \{j!\,|\lambda_{j,\nu}|\}.$$

Nous allons, d'autre part, montrer que nous avons

$$\max_{1\leq j\leq \nu} \{j!\,|\lambda_{j,\nu}|\} \leq 2^{\nu-3}.$$

En effet, nous avons (en posant $\lambda_{\nu+1,\nu}$)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\nu+1}(z) &= \frac{z-\nu}{\nu+1}\mathcal{F}_{\nu}(z) = \frac{z-\nu}{\nu+1}\sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{j,\nu}z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\nu}\lambda_{j,\nu}\frac{z^{j+1}}{\nu+1} - \sum_{j=0}^{\nu}\nu\lambda_{j,\nu}\frac{z^j}{\nu+1} \\
&= \sum_{j=1}^{\nu+1}\lambda_{j-1,\nu}\frac{z^{j}}{\nu+1} - \sum_{j=0}^{\nu}\nu\lambda_{j,\nu}\frac{z^j}{\nu+1} \\
&= \sum_{j=1}^{\nu}\left(\lambda_{j-1,\nu} - \nu\lambda_{j,\nu}\right)\frac{z^j}{\nu+1} + \frac{z^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \\
&= \sum_{j=1}^{\nu}\lambda_{j,\nu+1}z^j + \frac{z^{\nu+1}}{(\nu+1)!}.
\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'en déduire que, pour tout $1 \leq j \leq \nu$, nous avons

$$\begin{aligned} j!\,|\lambda_{j,\nu+1}| &= \frac{j!}{\nu+1}\,|\lambda_{j-1,\nu} - \nu\lambda_{j,\nu}| \\ &\leq \frac{j}{\nu+1}(j-1)!\,|\lambda_{j-1,\nu}| + \frac{\nu}{\nu+1}j!\,|\lambda_{j,\nu}| \\ &\leq \frac{\nu+j}{\nu+1}\max_{1\leq j\leq\nu}\{j!\,|\lambda_{j,\nu}|\} \\ &\leq 2\max_{1\leq j\leq\nu}\{j!\,|\lambda_{j,\nu}|\}\,; \end{aligned}$$

nous pouvons alors écrire que

$$\max_{1\leq j\leq\nu+1}\{j!\,|\lambda_{j,\nu+1}|\} \leq 2\max_{1\leq j\leq\nu}\{j!\,|\lambda_{j,\nu}|\}$$

et ainsi conclure ce lemme après avoir calculé $\max_{1\leq j\leq 3}\{j!\,|\lambda_{j,3}|\} = 1$.

□

Rappelons que le nombre entier d_ν est le plus petit commun multiple des nombres $1, \ldots, \nu$ (voir le lemme 3.4.2). Le lemme suivant est facile et bien connu

Lemme 4.2.8 *Soient k et u deux nombres entiers positifs. Pour tout nombre entier ℓ et tout nombre entier $0 \leq u \leq k$, on a*

$$d_\nu^k \mathcal{F}_\nu^{(u)}(\ell) \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration : Nous renvoyons au lemme 4 (paragraphe 4) de l'article [NeWa] pour une démonstration de ce lemme. □

L'opérateur

$$\mathcal{F}_\mu(\delta) = \frac{\delta(\delta-1)\ldots(\delta-\mu+1)}{\mu!}$$

va nous permettre à la fois de conserver des nombres entiers (grâce à un coefficient d_μ^k qui n'est pas trop grand) et d'éliminer le terme $\mu\log\mu$ grâce au dénominateur ($\mu!$) de ce polynôme. Si nous analysons comment se décompose cette expression, nous obtenons alors une combinaison linéaire de composées de l'opérateur de dérivation δ.

Considérons le polynôme en deux variables $\mathcal{G}$ défini de la façon suivante :

$$\mathcal{G}(X,Y) = d_\mu^{K-1}\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p\right)\mathcal{F}_\mu(\delta)\left(\mathcal{H}(X,Y)\right). \tag{4.10}$$

Lemme 4.2.9 *Le polynôme $\mathcal{G}(X,Y)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Sa valeur au point (b,a) est*

$$\mathcal{G}(b,a) = \frac{d_\mu^{K-1}}{\mu!}\left(\prod_{p\in\mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p\right)F(b,a)$$

qui est un nombre algébrique non nul.

Démonstration : Pour tout couple d'indices (k,l), on a

$$\delta^i(X^kY^l) = \sum_{j=0}^{k}\binom{i}{j}\frac{k!}{(k-j)!}l^{i-j}X^{k-j}Y^l$$

et

$$\mathcal{F}_\mu^{(j)}(l) = \sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{i,\mu}\frac{i!}{(i-j)!}l^{i-j},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\mu(\delta)(X^kY^l) &= \sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{i,\mu}\sum_{j=0}^{k}\binom{i}{j}\frac{k!}{(k-j)!}l^{i-j}X^{k-j}Y^l \\
&= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{i,\mu}\frac{i!}{(i-j)!}l^{i-j}X^{k-j}Y^l \\
&= Y^l\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\sum_{i=0}^{\mu}\lambda_{i,\mu}\frac{i!}{(i-j)!}l^{i-j}\right)X^{k-j} \\
&= Y^l\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathcal{F}_\mu^{(j)}(l)X^{k-j}.
\end{aligned}$$

Grâce au lemme 4.2.8, on en déduit que $d_\mu^{K-1}\mathcal{F}_\mu(\delta)(X^kY^l)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Comme

$$\mathcal{F}_\mu(\delta)\left(\mathcal{H}(X,Y)\right) = \det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\mathcal{F}_\mu(\delta)\left(X^k Y^l\right)\right)_{0\le \ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix},$$

il résulte de la définition de $|\mathcal{M}_0|_p$ que les coefficients du polynôme $\mathcal{G}(X,Y)$ sont dans $\mathbb{Z}$.

De la définition de $\mathcal{H}$ et étant donné que le polynôme en deux variables

$$\det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\delta^j\left(X^k Y^l\right)\right)_{0\le \ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix}$$

s'annule au point (b,a) pour $0 \le j < \mu$, nous déduisons

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\mu(\delta)\left(\mathcal{H}\right)(b,a) &= \det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\mathcal{F}_\mu(\delta)\left(X^k Y^l\right)\right)_{0\le \ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix}(b,a) \\
&= \det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\dfrac{1}{\mu!}\delta^\mu\left(X^k Y^l\right)\right)_{0\le \ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix}(b,a) \\
&+ \sum_{j=0}^{\mu-1} \lambda_{j,\mu} \det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\delta^j\left(X^k Y^l\right)\right)_{0\le \ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix}(b,a) \\
&= \det\begin{pmatrix} \mathcal{M}_0 \\ \left(\dfrac{1}{\mu!}\delta^\mu\left(X^k Y^l\right)\right)_{0\le \ell\le L-1, 0\le k\le K-1} \end{pmatrix}(b,a) \\
&= \frac{\delta^\mu}{\mu!}\mathcal{H}(b,a) = \frac{1}{\mu!}F(b,a);
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux polynômes $\dfrac{1}{\mu!}F(X,Y)$ et $\mathcal{F}_\mu(\delta)\left(\mathcal{H}(X,Y)\right)$ prennent la même valeur au point (b,a). Cela termine alors la démonstration du lemme.

□

4.3 Démonstration du théorème 1.3.14

Commençons par fournir des majoration et minoration pour $|\mathcal{G}(b,a)|$.

4.3.1 Minoration de $|\mathcal{G}(b,a)|$

Définition 4.3.1 *Soit $f(X) = a_0 + \ldots + a_p X^p$ un polynôme à coefficients complexes. Nous définissons la longueur $L(f)$ de f comme la somme des valeurs absolues de ses coefficients, ou encore*

$$L(f) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|.$$

Nous avons une définition similaire pour les polynômes à plusieurs variables

Définition 4.3.2 *Soit $f(X_0, \ldots, X_m) = \sum_{i_0,\ldots,i_m} a_{i_0,\ldots,i_m} X_0^{i_0} \ldots X_m^{i_m}$ un polynôme à coefficients complexes. Nous définissons la longueur $L(f)$ de f comme la somme des valeurs absolues de ses coefficients, ou encore*

$$L(f) = \sum_{i_0,\ldots,i_m} |a_{i_0,\ldots,i_m}|.$$

Pour minorer $|\mathcal{G}(b,a)|$, nous utiliserons l'estimation suivante de la longueur de $\mathcal{G}$:

Lemme 4.3.3 *La longueur du polynôme $\mathcal{G}$ se majore de la façon suivante :*

$$L(\mathcal{G}) \leq d_\mu^{K-1} H(M_0) \mu 2^{\mu+K-4} e^{L-1} \sqrt{KL}.$$

Démonstration : On va commencer par majorer $L\left(\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X,Y))\right)$. En développant le déterminant (et polynôme) $\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X,Y))$ selon la dernière ligne, on obtient

$$\begin{aligned}
L\left(\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X,Y))\right) &= L\left(\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{\ell=0}^{L-1} \mathcal{F}_\mu(\delta)\left(X^k Y^\ell\right) \cdot \Delta_{k,\ell}\right) \\
&= L\left(\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{\ell=0}^{L-1} \left(\sum_{j=0}^{\mu} \lambda_{j,\mu} \delta^j \left(X^k Y^\ell\right)\right) \cdot \Delta_{k,\ell}\right) \\
&= L\left(\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{\ell=0}^{L-1} \left(\sum_{j=0}^{\mu} \lambda_{j,\mu} \sum_{h=0}^{\min\{j,k\}} \binom{j}{h} \frac{k!}{(k-h)!} \ell^{j-h} X^{k-h} Y^\ell\right) \cdot \Delta_{k,\ell}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{\ell=0}^{L-1} |\Delta_{k,\ell}| \cdot \sum_{j=0}^{\mu} \sum_{h=0}^{\min\{j,k\}} |\lambda_{j,\mu}| \binom{j}{h} \frac{k!}{(k-h)!} \ell^{j-h}.
\end{aligned}$$

En utilisant, de plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} L\left(\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X,Y))\right) \ &\leq \left(\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{\ell=0}^{L-1}|\Delta_{k,\ell}|^2\right)^{1/2} \\ &\cdot \left(\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{\ell=0}^{L-1}\left(\sum_{j=0}^{\mu}\sum_{h=0}^{\min\{j,k\}}|\lambda_{j,\mu}|\binom{j}{h}\frac{k!}{(k-h)!}\ell^{j-h}\right)^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous majorons $\binom{k}{h}$ par 2^{K-1} et $\displaystyle\sum_{h=0}^{\min\{j,k\}}\frac{\ell^{j-h}}{(j-h)!}$ par e^{L-1}, puis nous utilisons le lemme 4.2.7 afin de conclure de la façon suivante :

$$\begin{aligned} L\left(\mathcal{F}_\mu(\delta)(\mathcal{H}(X,Y))\right) \ &\leq |\mathcal{M}_0|\left(KL\left(\sum_{j=0}^{\mu}\sum_{h=0}^{\min\{j,k\}}|\lambda_{j,\mu}|\,j!\binom{k}{h}\frac{\ell^{j-h}}{(j-h)!}\right)^2\right)^{1/2} \\ &\leq |M_0|\sqrt{KL}\sum_{j=0}^{\mu}|\lambda_{j,\mu}|\,j!2^{K-1}e^{L-1} \\ &\leq |M_0|\sqrt{KL}\mu 2^{\mu-3}2^{K-1}e^{L-1} \\ &\leq |M_0|\mu 2^{\mu+K-4}e^{L-1}\sqrt{KL}. \end{aligned}$$

Nous pourrons remarquer qu'une majoration moins fine de $j!$ par $\mu!$ et l'utilisation du lemme 4.2.6 ne conviendront pas (le terme $\mu!$ étant trop grand). Nous concluons alors cette démonstration grâce à la définition de $\mathcal{G}$ donnée par la formule (4.10).

□

L'inégalité de Liouville suivante est bien connue (voir [Wa3], page 83)

Lemme 4.3.4 *Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$ qui est une extension de degré fini D de $\mathbb{Q}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ et f un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$, de degré au plus N_i par rapport à la variable X_i, et qui ne s'annule pas au point $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Alors,*

$$\log|f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)| \geq -(D-1)\log L(f) - D\sum_{i=1}^{n}N_i h(\alpha_i).$$

Grâce à la proposition 3.4.1, on en déduit la minoration suivante de $|\mathcal{G}(b,a)|$:

Proposition 4.3.5 *Pour $KL > 4\cdot 10^4$, on a :*

$$\begin{aligned}\log|\mathcal{G}(b,a)| \quad &\geq -(D-1)\left(\frac{107}{103}\mu(K-1)+\log\left(K!(11.32)^{KL}\right)+\frac{1}{2}\log(KL)\right.\\ &\left.+\log\mu+(\mu+K-4)\log 2+(L-1)\right)-D(K-1)\log\mathcal{B}\\ &-D(L-1)\log\mathcal{A}.\end{aligned}$$

Démonstration : En effet, par les lemmes 3.4.2, 4.3.3 et 4.3.4, nous avons

$$\begin{aligned}\log|\mathcal{G}(b,a)| \quad &\geq -(D-1)\log L(\mathcal{G})-D(K-1)h(b)-D(L-1)h(a)\\ &\geq -(D-1)\log\left(d_\mu^{K-1}H(M_0)\mu 2^{\mu+K-4}e^{L-1}\sqrt{KL}\right)-D(K-1)h(b)\\ &-D(L-1)h(a)\\ &\geq -(D-1)\left(\frac{107}{103}\mu(K-1)+\log H(M_0)+\frac{1}{2}\log(KL)+\log\mu\right.\\ &\left.+(\mu+K-4)\log 2+(L-1)\right)-D(K-1)\log\mathcal{B}-D(L-1)\log\mathcal{A}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc le résultat souhaité en majorant $H(M_0)$ par $K!(11.32)^{KL}$ pour $KL > 4\cdot 10^4$ selon la proposition 3.4.1.

□

4.3.2 Majoration de $|\mathcal{G}(b,a)|$

Pour vérifier les hypothèses du lemme 4.2.1, il faut connaître une valeur admissible du paramètre $\mathcal{N}$. Dans ce but, nous allons établir la minoration analytique que voici.

Proposition 4.3.6 *Soient E un nombre réel supérieur ou égal à 1 et*

$$\mathcal{N}=\max\left\{E|b|L, |b|+\log\ell+(\ell-1)\log\left(e^b+\epsilon\right)\right\}+\log K!+\mu\log(2L).$$

Alors, pour tout $0\leq k\leq K-1$ et $0\leq\ell\leq L-1$, on a

$$\max\left\{|\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(zb)|_E, |w_{k,\ell}|\right\}\leq e^{\mathcal{N}}.$$

Démonstration : Commençons par $|\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(zb)|_E$. On majore $\binom{\mu}{j}$ par 2^μ, $k!$ par $K!$, $\ell^{\mu-j}$ par L^μ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{z^{k-j}}{(k-j)!}$ par $e^{|z|}$. Alors,

$$\left|\sum_{j=0}^{k}\binom{\mu}{j}k!\ell^{\mu-j}\frac{z^{k-j}}{(k-j)!}\right|\leq(2L)^\mu K!e^{|z|}$$

et

$$\left|\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(z)\right|\leq e^{L|z|}(2L)^\mu K!.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|\Phi_{k,\ell}^{(\mu)}(zb)|_E &\leq \left|e^{zb\ell}\sum_{j=0}^{\min(\mu,k)}\binom{\mu}{j}\frac{k!\ell^{\mu-j}}{(k-j)!}(zb)^{k-j}\right|_E\\
&\leq \exp\left\{E|b|L+\log K!+\mu\log(2L)\right\}\\
&\leq e^{\mathcal{N}}.
\end{aligned}$$

On majore de même $|w_{k,\ell}|$:

$$\begin{aligned}
|w_{k,\ell}| &= \left|\frac{a^\ell-e^{b\ell}}{e^b-a}\sum_{j=0}^{\min(\mu,k)}\binom{\mu}{j}\frac{k!\ell^{\mu-j}}{(k-j)!}b^{k-j}\right|\\
&\leq \left|\frac{a^\ell-e^{b\ell}}{e^b-a}\right|2^\mu e^{|b|}K!L^\mu\\
&\leq \ell\max(a,e^{|b|})^{\ell-1}2^\mu e^{|b|}K!L^\mu\\
&\leq \ell(e^{|b|}+\epsilon)^{\ell-1}2^\mu e^{|b|}K!L^\mu\\
&\leq \exp\left\{\log K!+\mu\log(2L)+|b|+\log\ell+(\ell-1)\log\left(e^{|b|}+\epsilon\right)\right\}\\
&\leq e^{\mathcal{N}}.
\end{aligned}$$

□

Ainsi, sous les hypothèses du lemme 4.2.1, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 4.3.7 *pour $KL > 4\cdot 10^4$, nous avons*

$$\begin{aligned}\log|\mathcal{G}(b,a)| &\leq -(KL-\mu-1)\log E + \log K! + \mu\log(2L) + \frac{107}{103}\mu(K-1)\\ &+\max\left\{E|b|L, |b| + \log\ell + (\ell-1)\log\left(e^{|b|}+\epsilon\right)\right\} - \log\mu!\\ &+\frac{1}{2}\log(4LK) + \log\left(K!(11.32)^{KL}\right).\end{aligned}$$

Démonstration : Avec les notations du lemme 4.2.1 et grâce à la proposition 4.3.6, nous avons

$$\begin{aligned}\log|\mathcal{D}| &\leq -(KL-\mu-1)\log E + \mathcal{N} + \frac{1}{2}\log(4LK) + \log|\mathcal{M}_0|\\ &\leq -(KL-\mu-1)\log E + \frac{1}{2}\log(4LK) + \log|\mathcal{M}_0| + \log K! + \mu\log(2L)\\ &+\max\left\{E|b|L, |b| + \log\ell + (\ell-1)\log\left(e^{|b|}+\epsilon\right)\right\}.\end{aligned}$$

En utilisant la relation entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{G}(b,a)$ donnée par le lemme 4.2.9, nous en déduisons

$$\begin{aligned}\log|\mathcal{G}(b,a)| &= \log\left(\frac{d_\mu^{K-1}}{\mu!}\left(\prod_{p\in P}|\mathcal{M}_0|_p\right)\mathcal{D}\right)\\ &\leq \log(\prod_{p\in\mathcal{P}}|\mathcal{M}_0|_p) + \log|\mathcal{D}| + \log\left(\frac{d_\mu^{K-1}}{\mu!}\right)\\ &\leq -(KL-\mu-1)\log E + \log K! + \mu\log(2L) - \log\mu!\\ &+\frac{1}{2}\log(4LK) + \log|\mathcal{M}_0| + \log\left(\prod_{p\in\mathcal{P}}|\mathcal{M}_0|_p\right) + \frac{107}{103}\mu(K-1)\\ &+\max\left\{E|b|L, |b| + \log\ell + (\ell-1)\log\left(e^{|b|}+\epsilon\right)\right\}.\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc le résultat souhaité en majorant, grâce à la proposition 3.4.1 et à l'hypothèse $KL > 4\cdot 10^4$,

$$|\mathcal{M}_0|\prod_{p\in\mathcal{P}}|\mathcal{M}_0|_p$$

par

$$H(M_0) \leq K!(11.32)^{KL}.$$

□

4.3.3 Fin de la démonstration du théorème 1.3.14

À partir des minoration et majoration pour $|\mathcal{G}(b,a)|$ (propositions 4.3.5 et 4.3.7) et en majorant ϵ par E^{-KL} (selon les hypothèses du lemme 4.2.1), nous en déduisons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq (D-1)\left(\frac{107}{103}\mu(K-1) + \log\left(K!(11.32)^{KL}\right) + \log\mu + (\mu+K-4)\log 2\right. \\
&\left. + L - 1 + \frac{1}{2}\log(KL)\right) + D(L-1)\log\mathcal{A} + KL\log 11.32 - (KL-\mu-1)\log E \\
&+ \mu\log(2L) + \frac{1}{2}\log(4LK) + \frac{107}{103}\mu(K-1) - \log\mu! + D(K-1)\log\mathcal{B} + 2\log K! \\
&+ \max\left\{E|b|L, |b| + \log\ell + (\ell-1)\log\left(e^{|b|} + E^{-KL}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
KL\log\left(\frac{E}{11.32^D}\right) \quad &\leq (D+1)\log K! + (\mu+1)\log E + \mu\log(2L) + D(L-1)\log\mathcal{A} \\
&+ \frac{1}{2}\log\left(4(LK)^D\right) + \frac{107}{103}D\mu(K-1) + (D-1)\log\mu - \log\mu! \\
&+ D(K-1)\log\mathcal{B} + (D-1)(\mu+K-4)\log 2 + (L-1)(D-1) \\
&+ \max\left\{E|b|L, |b| + \log\ell + (\ell-1)\log\left(e^{|b|} + E^{-KL}\right)\right\};
\end{aligned}$$

et donc, en majorant μ par $L-2$, ℓ par $L-1$ et $\mu\log(2L)-\log\mu!$ par $2L$, on obtient

$$\begin{aligned}
KL\log\left(\frac{E}{11.32^D}\right) &\leq (D+1)\log K! + (L-1)\log E + D(L-1)\log\mathcal{A} + \log 2\\
&+\frac{D}{2}\log(LK) + \frac{107}{103}D(L-2)(K-1) + (D+1)L\\
&+D(K-1)\log\mathcal{B} + (D-1)(L+K-6)\log 2 + (D-1)\log L\\
&+\max\left\{E|b|L, |b| + \log(L-1) + (L-2)\log\left(e^{|b|}+E^{-KL}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en majorant E^{-KL} par $e^{|b|}\left(e^{\frac{1}{10}}-1\right)$, nous avons

$$\begin{aligned}
(L-2)\log\left(e^{|b|}+E^{-KL}\right) &\leq (L-1)\left(|b|+\frac{1}{10}\right)\\
&\leq |b|(L-1)+\frac{L}{10},
\end{aligned}$$

ce qui permet de majorer

$$\max\left\{E|b|L, |b| + \log(L-1) + (L-2)\log\left(e^{|b|}+E^{-KL}\right)\right\}$$

par

$$E|b|L + \log(L-1) + \frac{L}{10}.$$

De plus,

$$(D-1)(L-6)\log 2 + (D+1)L + (D-1)\log L + \log(L-1) + \frac{L}{10} \leq \left(1+\frac{107}{103}\right)DL,$$

$$(D+1)\log K! + (D-1)K\log 2 \leq (D+1)K\log K$$

et

$$\log 2 + \frac{D}{2}\log(LK) + DLK\log\left(11.32\exp\left(\frac{107}{103}\right)\right) \leq 5DLK\log 2$$

pour $KL > 4\cdot 10^4$; ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}
KL\log E &\leq 5DKL\log 2 + K\left(D\log\mathcal{B} + (D+1)\log K + D\right)\\
&+L\left(D\log\mathcal{A} + E|b| + \log E + D\right).
\end{aligned}$$

Finalement, nous venons de prouver que sous les conditions de lemme 4.2.1 nous obtenons l'inégalité ci-dessus. Ceci nous permet alors de conclure la démonstration du théorème 1.3.14.

4.4 Démonstration du corollaire 1.3.16

Soient K, L deux nombres entiers définis par

$$K = \left[c_K \frac{D \log \mathcal{A} + \log E + E|b| + D}{\log E} \right],$$
$$L = \left[c_L \frac{D + D \log \mathcal{B} + (D+1)\left(\log\log \mathcal{A} + \log(E|b|_+) + 2\log D\right)}{\log E} \right];$$

avec c_K, c_L et E trois nombres réels strictement positifs vérifiant l'inégalité (1.13).

Pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ (dépendante de η) telle que pour tout $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_0$, nous avons (en utilisant, pour la première inégalité, $[x] > x - 1$, ce qui implique que $[x][y] > xy - x - y + 1$ où $[x]$ désigne la partie réelle du nombre, ici positif, x)

$$\begin{aligned}
KL \log\left(\frac{E}{\gamma_D}\right) \quad & > c_K c_L \frac{\log\left(\frac{E}{\gamma_D}\right)}{\log E} \left(D \log \mathcal{A} + \log E + E|b| + D\right) \\
& \times \frac{D + D \log \mathcal{B} + (D+1)\left(\log\log \mathcal{A} + \log(E|b|_+) + 2\log D\right)}{\log E} \\
& - c_K \frac{D \log \mathcal{A} + \log E + E|b| + D}{\log E} \\
& - c_L \frac{D + D \log \mathcal{B} + (D+1)\left(\log\log \mathcal{A} + \log(E|b|_+) + 2\log D\right)}{\log E} \\
& + 1 \\
& > \left(c_K c_L \frac{\log\left(\frac{E}{\gamma_D}\right)}{\log E} - \eta \right) \left(D \log \mathcal{A} + \log E + E|b| + D\right) \\
& \times \frac{D + D \log \mathcal{B} + (D+1)\left(\log\log \mathcal{A} + \log(E|b|_+) + 2\log D\right)}{\log E},
\end{aligned}$$

puis

$$L\left(D\log\mathcal{A}+E|b|+\log E+D\right)\leq c_L\left(D\log\mathcal{A}+\log E+E|b|+D\right)$$
$$\times\frac{D+D\log\mathcal{B}+(D+1)\left(\log\log\mathcal{A}+\log(E|b|_+)+2\log D\right)}{\log E}.$$

De plus, en majorant la somme $D\log\mathcal{A}+\log E+E|b|+D$ par le produit $D\log\mathcal{A}\times\log E\times E|b|\times D$, puis $D\log c_K$ par $\log\log\mathcal{A}$, on obtient

$$D\log K!\leq DK\log K\leq DK\left(\log c_K+\log\log\mathcal{A}+\log(E|b|_+)+2\log D\right)$$
$$\leq c_K\frac{\left(D\log\mathcal{A}+\log E+E|b|+D\right)D\left(\log c_K+\log\log\mathcal{A}+\log(E|b|_+)+2\log D\right)}{\log E}$$
$$\leq c_K\left(D\log\mathcal{A}+\log E+E|b|+D\right)$$
$$\times\frac{D+D\log\mathcal{B}+(D+1)\left(\log\log\mathcal{A}+\log(E|b|_+)+2\log D\right)}{\log E},$$

et

$$KL\log E\leq c_Kc_L\left(D\log\mathcal{A}+\log E+E|b|+D\right)$$
$$\times\frac{D\log\mathcal{B}+(D+1)\left(\log\log\mathcal{A}+\log(E|b|_+)+2\log D\right)+D}{\log E}.$$

Alors, pour $\mathcal{A}$ suffisamment grand, disons $\mathcal{A}\geq\widetilde{\mathcal{A}}_0$, on a $KL>4\cdot 10^4$ et

$$\eta<c_Kc_L\frac{\log\left(\frac{E}{\gamma_D}\right)}{\log E}-\left(c_K+c_L\right),$$

nous avons l'inégalité (1.12).

Dans cette situation, les conditions du théorème 1.3.14 sont satisfaites, et nous obtenons alors une contradiction avec ce qui avait été supposé dans le lemme 4.2.1, à savoir que $\epsilon<E^{-KL}$.

Nous en déduisons ainsi l'inégalité voulue.

4.5 Démonstration du corollaire 1.3.17

Nous allons, à partir du corollaire 1.3.16 précédent, expliciter (pour le cas rationnel) une constante absolue $\mathcal{C}$ telle qu'il existe une constante absolue $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_0$,

$$\left|e^b - a\right| \geq \exp\left\{-\mathcal{C}\frac{(\log\mathcal{A} + \log E + E|b| + 1)\,(\log\mathcal{B} + 2\,(\log\log\mathcal{A} + \log(E|b|_+)) + 1)}{\log E}\right\}.$$

La plus petite valeur que nous pouvons obtenir, dans ces conditions, est $\mathcal{C} = 4$; il suffit de considérer le cas extrême où E tend vers $+\infty$. Cependant, nous allons ici donner une borne inférieure pour E qui ne sera pas trop grande, de sorte que si nous souhaitons utiliser à nouveau ce corollaire par la suite, cette valeur minimale pour E ne nous donne pas des constantes trop élevées.

Remarque 4.5.1 *Le raisonnement précédent nous permet de retrouver la situation optimale d'une telle étude, à savoir la possibilité de pouvoir choisir E grand, ce qui nous permet d'obtenir de meilleures constantes. Nous pourrons dans cette direction, reprendre l'article de Yu. V. Nesterenko et M. Waldschmidt [NeWa] et remarquer que la problématique selon le paramètre E est la même.*

Nous reprenons alors l'étude faite pour le corollaire 1.3.16. Soient

$$E \geq 2^{20},\ c_K = \frac{8}{3} \text{ et } c_L = \frac{8}{3}\,;$$

les conditions nécessaires à la réalisation du corollaire 1.3.16 sont alors remplies. Le corollaire 1.3.17 s'en déduit alors immédiatement.

Remarque 4.5.2 *Quelques exemples d'autres valeurs numériques :*

(i) En ayant supposé seulement $E \geq 2^{15/2}$, on obtient alors pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_0$,

$$\left|e^b - a\right| \geq \exp\left\{-36\frac{(\log\mathcal{A} + \log E + E|b| + 1)\,(\log\mathcal{B} + 2\,(\log\log\mathcal{A} + \log(E|b|_+)) + 1)}{\log E}\right\},$$

avec les constantes c_K et c_L ayant pour valeurs respectives 6 et 6.

(ii) En ayant supposé seulement $E \geq 2^{25/4}$, on obtient alors pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_0$,

$$\left|e^b - a\right| \geq \exp\left\{-100\frac{(\log\mathcal{A} + \log E + E|b| + 1)\,(\log\mathcal{B} + 2\,(\log\log\mathcal{A} + \log(E|b|_+)) + 1)}{\log E}\right\},$$

avec les constantes c_K et c_L ayant pour valeurs respectives 10 et 10.

4.6 Théorème 1.3.22 et problème de K. Mahler

Le théorème 1.3.22 énoncé dans l'introduction est une variante du théorème 1.3.14, avec une constante un peu plus précise, dans le cas où a et b sont deux nombres entiers.

Pour obtenir ce résultat, il suffit de remarquer que nous n'avons pas besoin de considérer les dénominateurs de a et b, puis que le terme $\mu \log \mu$ qui est, au plus, de l'ordre de $L \log L$ est ici négligeable !

En effet, considérons le polynôme en deux variables $\widetilde{\mathcal{G}}$ définit de la façon suivante :

$$\widetilde{\mathcal{G}}(X,Y) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} |\mathcal{M}_0|_p \right) F(X,Y).$$

Le lemme de zéros 4.2.2 (indépendant de la nature entière, rationnelle ou algébrique de a et b) s'applique toujours et nous avons le lemme suivant

Lemme 4.6.1 *Le polynôme $\widetilde{\mathcal{G}}(X,Y)$ prend une valeur entière et non nulle au point (b,a).*

Corollaire 4.6.2 *On a*

$$\log \left| \widetilde{\mathcal{G}}(b,a) \right| \geq 0.$$

Le lemme de Schwarz 4.2.1 s'applique également et nous avons alors

Proposition 4.6.3 *Le nombre $\log \left| \widetilde{\mathcal{G}}(b,a) \right|$ est majoré, pour $KL > 4 \cdot 10^4$, comme suit*

$$\begin{aligned} \log \left| \widetilde{\mathcal{G}}(b,a) \right| &\leq KL \log 11.32 - (KL - \mu - 1) \log E + 2K \log K + \frac{1}{2} \log(4LK) \\ &+ \mu \log(2L) + \max \left\{ E|b|L, |b| + \log \ell + (\ell - 1) \log \left(e^{|b|} + E^{-KL} \right) \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant les résultats du corollaire 4.6.2 et de la proposition 4.6.3 et, en majorant μ par $L-2$ et ℓ par $L-1$, nous avons

$$\begin{aligned} KL \log E &\leq KL \log 11.32 + (L-1) \log E + 2K \log K + (L-2) \log(2L) \\ &+ \frac{1}{2} \log(4LK) + \max \left\{ E|b|L, |b| + \log(L-1) + (L-2) \log \left(e^{|b|} + E^{-KL} \right) \right\} \end{aligned}$$

ce qui nous permet, en utilisant les majorations

$$KL\log 11.32 + \frac{1}{2}\log(4LK) \leq KL\log 11.33,$$

puis

$$\max\left\{E|b|(L+1), |b| + \log(L-1) + (L-2)\log\left(e^{|b|} + E^{-KL}\right)\right\}$$

$$\leq E|b|L + \log(L-1) + \frac{L}{10}$$

ainsi que

$$(L-1)\log E + (L-2)\log(2L) + \log(L-1) + \frac{L}{10} \leq L\log(6LE),$$

d'obenir le résultat voulu du théorème 1.3.22.

Application à un problème de K. Mahler : on pose $A = 70.15$ et $B = 2.5$; prenons les valeurs suivantes pour les paramètres E, K, L :

$E = 56.2,$

$K = [Ab],$

$L = [B\log b]$;

dans cette situation, les conditions du théorème 1.3.22 sont satisfaites, et nous obtenons alors une contradiction à ce qui avait été supposé dans le lemme 4.2.1, à savoir que $\epsilon < E^{-KL}$.

Nous en déduisons l'inégalité suivante :

pour b suffisamment grand et pour tout nombre entier a,

$$\left|e^b - a\right| \geq b^{-707b}.$$

Nous obtenons donc à nouveau une minoration de la forme

$$\left|e^b - a\right| \geq b^{-c\cdot b},$$

mais avec une constante moins bonne que celle de F. Wielonsky (voir dans [Wi2]).

Les énoncés à venir sont des résultats appliqués au cas rationnel des théorème et corollaires précédents.

4.7 Démonstration du corollaire 1.3.18

(i) Mettons-nous dans la situation où $|b| \leq 1$.

Posons $E = 2^{\frac{25}{4}} \log \mathcal{A}$. On a alors

$$E|b| \leq 2^{\frac{25}{4}} \log \mathcal{A}$$

ce qui implique l'existence d'une constante absolue $\mathcal{A}_1'$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}_1'$,

$$\log \mathcal{A} + \log E + E|b| + 1 \leq \left(2 + 2^{\frac{25}{4}}\right) \log \mathcal{A}.$$

Nous avons l'existence d'une constante absolue $\mathcal{A}_1''$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}_1''$

$$\begin{aligned} \frac{\log \mathcal{B} + 2\log\log \mathcal{A} + 2\log(E|b|_+) + 1}{\log E} &\leq \frac{\log \mathcal{B} + 4\log\log \mathcal{A} + \frac{25}{2}\log 2 + 1}{\frac{25}{4}\log 2 + \log\log \mathcal{A}} \\ &\leq 4\log \mathcal{B} \end{aligned}$$

D'après le deuxième exemple de la remarque 4.5.2, nous en déduisons qu'il existe une constante absolue $\mathcal{A}_1 = \max\{\mathcal{A}_1', \mathcal{A}_1''\}$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}_1$

$$\begin{aligned} \left|e^b - a\right| &\geq \exp\left\{-100 \frac{(\log \mathcal{A} + \log E + E|b| + 1)\left(\log \mathcal{B} + 2\left(\log\log \mathcal{A} + \log(E|b|_+)\right) + 1\right)}{\log E}\right\}, \\ &\geq \exp\left\{-3.2 \cdot 10^4 \left(\log \mathcal{A}\right)\left(\log \mathcal{B}\right)\right\}. \end{aligned}$$

(ii) Mettons-nous désormais dans la situation où $|\log a| > (\log \mathcal{A})^{1/2}$.

Notons que l'hypothèse $|\log a| > (\log \mathcal{A})^{1/2}$ implique $|\log a| > (\log 10)^{1/2} \geq 1.5$. Ainsi, l'inégalité $|b - \log a| \leq 1/2$ donne $|b| \geq 1$.

Étant donné que $\dfrac{1}{\mathcal{A}} \leq a \leq \mathcal{A}$, alors $|\log a| \leq \log \mathcal{A}$.

Posons $\log E = \dfrac{25}{4}\log 2 + \log\log \mathcal{A} - \log|\log a|$, on a, en particulier,

$$\log E \geq \frac{25}{4}\log 2;$$

en utilisant le fait que $|b - \log a| \leq 1/2$ et $\dfrac{b}{b - \frac{1}{2}} \leq 2$ (on rappelle qu'ici $|b| \geq 1$), on obtient

$$Eb = \frac{2^{\frac{25}{4}} b \log \mathcal{A}}{|\log a|} \leq \frac{2^{\frac{25}{4}} b \log \mathcal{A}}{b - \frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{29}{4}} \log \mathcal{A}$$

ce qui implique l'existence d'une constante absolue $\widetilde{\mathcal{A}}_1'$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_1'$,

$$\log \mathcal{A} + \log E + Eb + 1 \leq \left(2 + 2^{\frac{29}{4}}\right) \log \mathcal{A}.$$

Par ailleurs, nous avons l'existence d'une constante absolue $\widetilde{\mathcal{A}}_1''$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_1''$

$$\begin{aligned} \frac{\log \mathcal{B} + 2 \log\log \mathcal{A} + 2\log(E|b|_+) + 1}{\log E} &\leq \frac{\log \mathcal{B} + 4 \log\log \mathcal{A} + \frac{29}{2}\log 2 + 1}{\frac{25}{4}\log 2} \\ &\leq \frac{4}{25 \log 2} \log \mathcal{B} + \frac{16}{25 \log 2} \log\log \mathcal{A} + 2.6; \end{aligned}$$

de plus, $|b - \log a| \leq 1/2$ et $|\log a| > (\log \mathcal{A})^{1/2}$ impliquent

$$(\log \mathcal{A})^{1/2} \leq \mathcal{B} + 1/2$$

et donc

$$\log\log \mathcal{A} \leq 2 \frac{\log(5/2)}{\log 2} \log \mathcal{B}.$$

Ceci permet alors d'obtenir que

$$\begin{aligned} \frac{\log \mathcal{B} + 2 \log\log \mathcal{A} + 2\log(E|b|_+) + 1}{\log E} &\leq \left(\frac{4}{25 \log 2} + \frac{32 \log(5/2)}{25 (\log 2)^2}\right) \cdot \log \mathcal{B} + 2.6 \\ &\leq 6.43 \log \mathcal{B}. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 1.3.17, nous en déduisons qu'il existe une constante absolue $\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \max\left\{\widetilde{\mathcal{A}}_1', \widetilde{\mathcal{A}}_1''\right\}$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_1$

$$\begin{aligned} \left|e^b - a\right| &\geq \exp\left\{-100 \frac{(\log \mathcal{A} + \log E + E|b| + 1)\left(\log \mathcal{B} + 2\left(\log\log \mathcal{A} + \log(E|b|_+)\right) + 1\right)}{\log E}\right\}, \\ &\geq \exp\left\{-10^5 (\log \mathcal{A})(\log \mathcal{B})\right\}. \end{aligned}$$

(iii) Mettons-nous enfin dans la situation où $|b| > 1$ et $|\log a| \leq (\log \mathcal{A})^{1/2}$.

Étant donné que $|\log a| \leq (\log \mathcal{A})^{1/2}$, alors $\log|\log a| \leq \dfrac{1}{2}\log\log \mathcal{A}$.

Posons $\log E = \dfrac{25}{4}\log 2 + \log\log \mathcal{A} - \log|\log a|$, on a, en particulier,

$$\log E \geq \frac{25}{4}\log 2 + \frac{1}{2}\log\log \mathcal{A};$$

en utilisant le fait que $|b - \log a| \leq 1/2$ et $\dfrac{b}{b-\frac{1}{2}} \leq 2$ (on rappelle qu'ici $|b| \geq 1$), on obtient

$$Eb = \frac{2^{\frac{25}{4}} b \log \mathcal{A}}{|\log a|} \leq \frac{2^{\frac{25}{4}} b \log \mathcal{A}}{b - \frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{29}{4}} \log \mathcal{A}$$

ce qui implique l'existence d'une constante absolue $\widetilde{\mathcal{A}}_1'$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_1'$,

$$\log \mathcal{A} + \log E + Eb + 1 \leq \left(2 + 2^{\frac{29}{4}}\right) \log \mathcal{A}.$$

De plus, nous avons l'existence d'une constante absolue $\widetilde{\mathcal{A}}_1''$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_1''$

$$\begin{aligned}\frac{\log \mathcal{B} + 2\log\log \mathcal{A} + 2\log(E|b|_+) + 1}{\log E} &\leq \frac{\log \mathcal{B} + 4\log\log \mathcal{A} + \frac{29}{2}\log 2 + 1}{\frac{25}{4}\log 2 + \frac{1}{2}\log\log \mathcal{A}} \\ &\leq 8\log \mathcal{B}.\end{aligned}$$

D'après le corollaire 1.3.17, nous en déduisons qu'il existe une constante absolue $\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \max\left\{\widetilde{\mathcal{A}}_1', \widetilde{\mathcal{A}}_1''\right\}$ telle que pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_1$

$$\begin{aligned}\left|e^b - a\right| &\geq \exp\left\{-100\frac{(\log \mathcal{A} + \log E + E|b| + 1)\left(\log \mathcal{B} + 2\left(\log\log \mathcal{A} + \log(E|b|_+)\right) + 1\right)}{\log E}\right\}, \\ &\geq \exp\left\{-1.3 \cdot 10^5 (\log \mathcal{A})(\log \mathcal{B})\right\}.\end{aligned}$$

Remarque 4.7.1 *Nous avons pris* $(\log \mathcal{A})^{1/2}$ *comme valeur de référence pour* $\log a$. *Ce choix est arbitraire. Une valeur plus petite que* $1/2$ *pour l'exposant aurait amélioré la troisième estimation mais dégradé la seconde ; à l'inverse, une valeur plus grande que* $1/2$ *aurait donné une moins bonne estimation pour la troisième minoration mais en aurait fournie une meilleure pour la seconde.*

4.8 Démonstration du corollaire 1.3.20

Nous nous plaçons ici dans le cas où $|b_0 \log a - b_1| \leq 1/2$ sachant que la situation inverse implique, par le théorème des accroissements finis, que $\left|e^{b_1} - a^{b_0}\right| \geq \frac{1}{2}$.

Nous utilisons le corollaire 1.3.18 : il existe une constante absolue $\underline{\mathcal{A}}$ telle que pour tout $\mathcal{A} \geq \underline{\mathcal{A}}$, on ait

$$\left|e^{\frac{b_1}{b_0}} - a\right| \geq \exp\left\{-1.3 \cdot 10^5 (\log \mathcal{A}) (\log \max\{b_0, b_1\})\right\}.$$

Donc, en majorant $\max\{b_0, b_1\}$ par $b_0 + b_1$, on a

$$\begin{aligned}
\left|e^{b_1} - a^{b_0}\right| = \left|\left(e^{\frac{b_1}{b_0}}\right)^{b_0} - a^{b_0}\right| \quad &= \left|e^{\frac{b_1}{b_0}} - a\right| \left|\left(e^{\frac{b_1}{b_0}}\right)^{b_0-1} + \ldots + a^{b_0-1}\right| \\
&\geq \left|e^{\frac{b_1}{b_0}} - a\right| b_0 \min\left\{e^{\frac{b_1}{b_0}}, a\right\}^{b_0-1} \\
&\geq \exp\left\{-1.3 \cdot 10^5 (\log \mathcal{A}) (\log(b_0 + b_1)) + \log b_0\right. \\
&\left. +(b_0 - 1) \log \min\left\{e^{\frac{b_1}{b_0}}, a\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $|b_0 \log a - b_1| \leq 1/2$ (en particulier, on a $b_0 \log a - \frac{1}{2} \leq b_1$), on a $\log \min\left\{e^{\frac{b_1}{b_0}}, a\right\} = \log a$ ou $\log \min\left\{e^{\frac{b_1}{b_0}}, a\right\} = \frac{b_1}{b_0} \geq \frac{b_0 \log a - \frac{1}{2}}{b_0} \geq \log a - \frac{1}{2b_0}$.

On en déduit

$$\begin{aligned}
\min_{b_1 \in \mathbb{N}^*} \left|e^{b_1} - a^{b_0}\right| \quad &\geq \exp\left\{-1.3 \cdot 10^5 (\log \mathcal{A}) (\log(b_0(1 + \log a) + 1/2)) + \log b_0\right. \\
&\left. +(b_0 - 1)\left(\log a - \frac{1}{2b_0}\right)\right\}. \\
&\geq \exp\left\{-1.3 \cdot 10^5 (\log \mathcal{A}) \log b_0 - 1.3 \cdot 10^5 (\log \mathcal{A}) \log(2 + \log a)\right. \\
&\left. + \log b_0 + (b_0 - 1) \log a - \frac{1}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Le membre de droite de la dernière inégalité tend vers $+\infty$ quand b_0 tend vers $+\infty$, on en déduit alors que

$$\lim_{b_0 \longrightarrow +\infty} \min_{b_1 \in \mathbb{N}^*} \left| e^{b_1} - a^{b_0} \right| \longrightarrow +\infty.$$

De plus, la fonction de la variable b_0 correspondant au même membre de droite dans la dernière inégalité prend sa valeur minimum pour $b_0 = \dfrac{1.3 \cdot 10^5 \log \mathcal{A} - 1}{\log a}$. Ceci nous permet de conclure qu'il existe alors un nombre réel strictement positif $\mathcal{A}_2$ tel que, pour tout $\mathcal{A} \geq \mathcal{A}_2$,

$$\min_{b_0, b_1 \in \mathbb{N}^*} \left| e^{b_1} - a^{b_0} \right| \geq \exp\left\{ -2.6 \cdot 10^5 \log \mathcal{A} \log\log \mathcal{A} \right\}.$$

Finalement, la proposition suivante est facile à démontrer.

Proposition 4.8.1 *Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe une constante positive κ telle que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ avec $q \geq 2$,

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^\kappa}.$$

(ii) Il existe deux constantes $\mathcal{C}$ et κ telles que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ avec $q \geq 2$,

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{\mathcal{C}}{q^\kappa}.$$

(iii) Il existe deux constantes q_0 et κ telles que pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ avec $q \geq q_0$,

$$\left| \theta - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^\kappa}.$$

Ainsi, le corollaire 1.3.18 et cette dernière proposition nous permettent alors de retrouver le théorème 1.3.8.

4.9 Exemples de minorations explicites

Nous fournissons ici (à l'aide du logiciel PARI[1]) des minorations, pour quelques valeurs rationnelles fixées $a > 1$, de $\left| e^{b_1} - a^{b_0} \right|$ sur l'ensemble des couples d'entiers

[1] plus de renseignements sont donnés à l'adresse *http://pari.math.u−bordeaux.fr*

$(b_0, b_1) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Il suffit de déterminer à partir de quand la fonction (pour $b_0 > 0$)

$$b_0 \longmapsto \min_{b_1 \in \mathbb{N}^*} \left| e^{b_1} - a^{b_0} \right|$$

est strictement croissante ; cela est possible car les différentes constantes $\mathcal{A}_0, \widetilde{\mathcal{A}}_0, \mathcal{A}_1$ et $\widetilde{\mathcal{A}}_1$ sont explicites pour chaque nombre rationnel $a > 1$. En effet, une fois ceci effectué, il s'avère que le minimum recherché s'obtient avant ce seuil, ce qui permet de faire "tourner le programme" en se limitant à un nombre fini d'entiers (de l'ordre de quelques millions pour les premières valeurs, jusqu'à plusieurs dizaines de millions pour les dernières). Nous obtenons alors le tableau suivant :

a	valeur minimale	valeur minimale approchée	$[\log a]$
3/2	$(3/2)^5 - e^2$	0.204694	0
2	$2^3 - e^2$	0.610944	0
5/2	$e - 5/2$	0.218282	0
3	$3 - e$	0.281718	1
7/2	$7/2 - e$	0.781718	1
4	$4 - e$	1.281718	1
9/2	$(9/2)^2 - e^3$	0.164463	1
5	$5 - e$	2.281718	1
11/2	$e^2 - 11/2$	1.889056	1
6	$e^2 - 6$	1.389056	1
13/2	$e^2 - 13/2$	0.889056	1
7	$e^2 - 7$	0.389056	1
15/2	$15/2 - e^2$	0.110944	2
8	$8 - e^2$	0.610944	2
17/2	$17/2 - e^2$	1.110944	2
9	$9 - e^2$	1.610944	2
19/2	$19/2 - e^2$	2.110944	2
10	$10 - e^2$	2.610944	2
50	$e^4 - 50$	4.598150	3
100	$100 - e^4$	45.401850	4
500	$500 - e^6$	96.571207	6
1000	$e^7 - 1000$	96.633158	6
5000	$5000 - e^8$	2019.042013	8
10000	$10000 - e^9$	1896.916072	9

4.10 Démonstration de la proposition 1.3.24

Nous allons tout d'abord donner le lien entre $h(a)$, la hauteur logarithmique de Weil d'un nombre algébrique a, et $H(a)$ sa hauteur naïve, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues des coefficients de son polynôme minimal. Énonçons, pour cela, le lemme suivant (voir lemme 3.11, page 80 dans [Wa3])

Lemme 4.10.1 *Soit α un nombre algébrique de degré n, nous avons*

$$\frac{1}{n}\log H(\alpha) - \log 2 \leq h(\alpha) \leq \frac{1}{n}\log H(\alpha) + \frac{1}{2n}\log(n+1) \leq \frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n+1}H\right).$$

Ainsi, l'ensemble des nombres algébriques a tels que $H(a) \leq H$ correspond à l'ensemble des nombres algébriques a tels que $h(a) \leq \frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n+1}H\right)$. Donc, en utilisant la minoration obtenue dans le corollaire 1.3.16 avec $c_K c_L = \frac{64}{9}$, pour $\mathcal{A} \geq \widetilde{\mathcal{A}}_0$ et pour $E = c \cdot \log \mathcal{A} \geq 2^{20}$ (choix ultérieur à faire pour c), on a :

$$\begin{aligned}
Hw_n^*(e^b, H) &= H\min\left\{|e^b - a| : a \textit{ réel algébrique}, H(a) \leq H, \deg(a) \leq n\right\} \\
&= H\min\left\{|e^b - a| : a \textit{ réel algébrique}, h(a) \leq \frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n+1}H\right),\right. \\
&\quad \left.\deg(a) \leq n\right\} \\
&\geq H\exp\left\{-\frac{64}{9}\left[n\left(\frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n+1}H\right)\right) + \log c\right.\right. \\
&\quad \left. + \log\left(\frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n+1}H\right)\right) + c\cdot\frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n+1}H\right)|b| + n\right] \\
&\quad \times\left[n\log\mathcal{B} + (n+1)\left(\log\left(\frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n+1}H\right)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \log\left(c\cdot\frac{1}{n}\log\left(\sqrt{n+1}H\right)|b|_+\right) + 2\log n\right) + n\right] \\
&\quad \left.\times\left[\log c + \log\log(2H)\right]^{-1}\right\} \\
&\geq H^{-\frac{256}{9}(n+1)+1} \\
&\geq H^{-\frac{503}{9}n}
\end{aligned}$$

en prenant $c = \dfrac{1}{2|b|}$ (par exemple). Nous en déduisons alors que e^b est un S^*-nombre d'après les définitions données au chapitre 1, et que son type est majoré par $\dfrac{503}{9}$.

Appendice : Expressions intégrales pour un problème de Type Padé

Nous avons montré (théorème 1.2.12) que certains cofacteurs de la matrice de Vandermonde généralisée (1.5) correspondaient à des coefficients des polynômes de Hermite-Padé ($T = 1$) de fonctions exponentielles. Il pourrait être utile de connaître une correspondance similaire pour T quelconque. En effet, cela nous permettrait, entre autres, de reprendre un étude analytique identique à celle de F. Wielonsky (voir [Wi2]), et donc d'effectuer une analyse peut-être plus précise selon les valeurs prises par le paramètre T. La possibilité de cette correspondance m'a été signalée par T. Rivoal et se déduit de l'article de S. Fischler et T. Rivoal [FiRi].

Rappelons (proposition 2.2.1) que les coefficients des approximants de Padé P_i de fonctions exponentielles $f_i(z) = e^{x_i z}$, pour $i = 0, \ldots, m$ sont donnés par les cofacteurs de la dernière ligne de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} B_0 & \ldots & B_m \end{pmatrix}$$

où B_i est la matrice à σ lignes et n_i colonnes définie par

$$B_i = \left(\frac{1}{j!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} \right)^j \left(x_i^k \right) \right)_{\substack{0 \le k \le \sigma - 1 \\ 0 \le j \le n_i - 1}} = \left(\binom{k}{j} x_i^{k-j} \right)_{\substack{0 \le k \le ! \sigma - 1 \\ 0 \le j \le n_i - 1}} .$$

Nous allons désormais fournir les expressions intégrales associées au problème de type Padé suivant :

trouver une famille $(\widetilde{P}_0, \ldots, \widetilde{P}_n)$ de polynômes de degré inférieur ou égal à $a - 1$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}_k(z) e^{kz} = O\left(z^{a(n+1) - \rho - \sigma - 1} \right),$$

où $\rho+\sigma$ est un nombre entier de l'intervalle $[0; a(n+1)-1]$.

Remarque .0.2 *Le problème de Padé correspond à $\rho=\sigma=0$.*

Remarque .0.3 *Le problème de type Padé a toujours au moins une solution non nulle. Cette solution est unique à une constante multiplicative près si et seulement si $\rho=\sigma=0$ (Padé). Dans les autres situations ($\rho+\sigma>0$), il existe plusieurs choix possibles.*

Notons le symbole de Poch'hammer $(n)_k = n(n+1)\dots(n+k-1)$ et $(n)_0 = 1$.

Proposition .0.4 *Soient $j=1,\dots,a$ et*

$$\mathcal{U}_j(X) = \sum_{k=0}^{n} u_{j,k} X^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{kj} \frac{(-k-\rho)_\rho (n-k+1)_\sigma}{k!^j (n-k)!^j} X^k.$$

Pour tout $k=0,\dots,n$, les polynômes

$$\widetilde{P}_k(z) = \sum_{j=0}^{a-1} (-1)^j u_{j+1,k} \frac{z^j}{j!}$$

satisfont à

$$S(z) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}_k(z) e^{kz} = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{a-1} (-1)^j u_{j+1,k} \frac{z^j}{j!} \right] e^{kz} = O\left(z^{a(n+1)-\rho-\sigma-1}\right).$$

Ceci nous permet, suivant les choix de ρ et σ, d'exhiber une famille de polynômes fournissant un reste d'ordre choisi, compris entre 0 et $a(n+1)-1$.

Soient C_0 un cercle centré en 0 et de rayon strictement inférieur à 1, et C_∞ un cercle entourant tous les points $0,\dots,n$. Nous avons alors, toujours selon l'article [FiRi], les expressions intégrales suivantes :

Proposition .0.5 *Pour tout $i=0,\dots,m$, les polynômes $\widetilde{P}_i$ et S de la proposition .0.4 vérifient*

$$\widetilde{P}_i(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_0} \frac{(\zeta-\rho)_\rho (\zeta+n+1)_\sigma e^{-z\zeta}}{(\zeta+i)_{n+1}^a} \mathrm{d}\zeta$$

et de plus,

$$S(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_\infty} \frac{(\zeta - \rho)_\rho (\zeta + n + 1)_\sigma e^{-z\zeta}}{(\zeta)^a_{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

On vérifie qu'en remplaçant ρ et σ par 0, on retrouve bien les expressions intégrales de la proposition 2.2.1.

Remarque .0.6 *Le terme $\rho + \sigma$ qui intervient dans l'ordre de $a(n+1)$ correspond au degré du numérateur de la fonction intégrée.*

Remarque .0.7 *Dans les cas où $\rho + \sigma > 0$, si nous souhaitons une unicité du problème, il sera alors nécessaire d'avoir les deux conditions (équivalentes) du système* (8) *de [FiRi], appliquées à e^z au lieu de z.*

Ainsi, en prenant $\rho + \sigma = T - 1$, $a = K$ et $n = L - 1$, nous obtenons une famille $(\widetilde{P}_0, \ldots, \widetilde{P}_{L-1})$ de polynômes de degré inférieur ou égal à $K - 1$ tels que

$$\sum_{k=0}^{L-1} \widetilde{P}_k(z) e^{kz} = O\left(z^{KL-T}\right).$$

Bibliographie

[AlRo] K. Alladi, M. Robinson *On certain irrational values of the logarithm,* Lect. Notes Math. **751**,1-9(1979).

[Am] F. Amoroso *Manuscrit. Cours de DEA sur les minorations de hauteur de nombres algébriques.*

[Ba] A. Baker *Transcendental Number Theory,* Cambridge University Press (1975).

[BaTi] A.A. Balkema, R. Tijdeman Some estimates in the theory of exponential sums, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. **24**, 115–133 (1973).

[BoCo1] E. Bombieri and P. B. Cohen *Effective Diophantine approximation on* $\mathbb{G}_M$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **24**, no. 2, 205-225 (1997).

[BoCo2] E. Bombieri and P. B. Cohen *Siegel's lemma, Padé approximations and Jacobians,* (With an appendix by Umberto Zannier) Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **25**, no. 1-2, 155-178 (1998).

[BoVa] E. Bombieri and J.D. Vaaler *On Siegel's lemma,* Invent. Math. **73**, no. 1, 11-32 (1983).

[Bo] E. Borel *Sur la nature arithmétique du nombre e,* C. R. Acad. Sci., Sér. A 128, 596-599 (1899).

[Bu] Y. Bugeaud *Approximations by algebraic numbers,* Cambridge Tracts in Mathematics (2004).

[Ch] G.V. Chudnovsky *Formules de Hermite pour les approximants de Padé de logarithmes et de fonctions binômes, et mesures d'irrationnalité*, C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. **288**, 965–967 (1979).

[Di] G. Diaz *Une nouvelle minoration de* $|\log\alpha-\beta|$, $|\alpha-\exp\beta|$, α *et* β *algébriques,* Acta Arith. **64**, 43-57 (1993).

[El] V. Elconin *The Wronskian of the functions* $x^{k-1}e^{a_jx}$, Giorn. Mat. Battaglini **74**, 189-193 (1936).

[Eu] L. Euler *Opera Omnia, Introductio in Analysis Infinitorum,* Lipsiae et Berolini (1922).

[Fa] C. F. Fa di Bruno *Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel,* Quart. J. Math. **1**, 359-360 (1857).

[FeNe] N.I. Fel'dman and Yu.V. Nesterenko *Number Theory IV. Transcendental Numbers.* Encyclopædia of Mathematical Sciences, **44**. Springer-Verlag, Berlin (1998).

[FeSh] N.I. Fel'dman and A. Shidlovskii *The development and present state of the theory of transcendental numbers,* Engl. transl. in Russian Math. Surveys, **22**, no. 3, 1–79 (1967).

[FiRi] S. Fischler et T. Rivoal *Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées*, J. Math. Pures Appl. **82.10**, 1369-1394 (2003).

[FlHa] R.P. Flowe and G.A. Harris *A note on generalized Vandermonde determinants,* SIAM J. Matrix Anal. Appl. **14**, 1146-1151 (1993).

[Ge] A. O. Gel'fond *Calcul des différences finies,* Dunod (1963).

[Gr] F. Gramain *Sur le Lemme de Siegel (d'après E. Bombieri et J. Vaaler),* Publications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie ; **64**, Fascicule **1** (1983-1984).

[He1] C. Hermite *Sur la fonction exponentielle*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **77**, 18-24 (1873).

[He2] C. Hermite *Œuvres de Charles Hermite*, 432–443, tome III, Gauthier-Villars, (1917).

[La1] M. Laurent *Sur quelques résultats récents de transcendance*, Journées Arithmétiques (Luminy, 1989), Astérisque **198-200**, 209-230 (1991).

[La2] M. Laurent *Hauteurs de matrices d'interpolation,* Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990), 215-238, de Gruyter, Berlin (1992).

[La3] M. Laurent *Linear forms in two logarithms and interpolation determinants* Acta Arith. **66**, no. 2, 181–199 (1994).

[La4] M. Laurent *Interpolation determinants of exponential polynomials. Dedicated to Professor Kálmán Györy on the occasion of his 60th birthday*, Publ. Math. Debrecen **56**, no. 3-4, 457–473 (2000).

[LaMiNe] M. Laurent, M. Mignotte, Yu. V. Nesterenko *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation* J. Number Theory **55**, no. 2, 285–321 (1995).

[Li1] J. Liouville *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques,* C. R. Acad. Sci. Paris **18**, 883–885 (1844).

[Li2] J. Liouville *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques,* J. Math. Pures Appl. **16**, 133–142 (1851).

[Li3] J. Liouville *Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationelles algébriques inséré dans le Compte Renddu de la dernière séance,* C. R. Acad. Sci. Paris **18**, 910–911 (1844).

[Lin] F. Lindemann *Über die zahl* π, Math. Ann., **20**, 213–225 (1882).

[Ma1] K. Mahler *Zur approximation der exponentialfunktion und der logarithmus,* J. Reine Angew. Math. **166**, 61-66 (1932).

[Ma2] K. Mahler *On the approximation of logarithms of algebraic numbers*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. **245**, 371-398 (1953).

[Ma3] K. Mahler *On the fractional parts of powers of a rational number II,* Mathematika **4**, 122–124 (1957).

[Ma4] K. Mahler *Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms*, Math. Ann. **168**, 200-227 (1967).

[Mi] M. Mignotte *Approximations rationnelles de* π *et quelques autres nombres*, Bull. Soc. Math. Fr. **37**, 121-132 (1974).

[Mu] G. Mühlbach *On Hermite interpolation by Cauchy-Vandermonde systems : the Lagrange formula, the adjoint and the inverse of a Cauchy-Vandermonde matrix*, J. of comput. and appl. math. **67**, 147-159 (1996).

[MuTi] J.-M. Muller ; A. Tisserand *Towards exact rounding of the elementary functions*, Alefeld, Goetz (ed.) et al., Scientific computing and validated numerics. Proceedings of the international symposium on scientific computing, computer arithmetic and validated numerics **SCAN-95**, Wuppertal, Germany, September 26-29, 1995. Berlin : Akademie Verlag. Math. Res. 90, 59-71 (1996).

[NeWa] Yu. V. Nesterenko ; M. Waldschmidt *On the approximation of the values of exponential function and logarithm by algebraic numbers,*, Mat. Zapiski, **2** Diophantine approximations, Proceedings of papers dedicated to the memory of Prof. N.I.Feldman, 23-42 (1996).

[Neu] J. Neukirch *Algebraic Number Theory,* **322**, Springer-Verlag, Berlin (2000).

[PoSz] G. Pólya, G. Szegö *Problems and theorems in analysis. Vol. II. Theory of functions, zeros, polynomials, determinants, number theory, geometry,* **216**, Springer-Verlag, New-York (1976).

[Po] J. Popken *Zur Transzendenz von e,* Math. Z. **29**, 525-541 (1929).

[RoSc] J. Rosser ; L. Schoenfeld *Approximate formulas for some functions of prime numbers,* Illinois J. Math. **6**, 64-94 (1962).

[Sc] W.M. Schmidt *Diophantine approximations and diophantine equations,* Lecture Notes in Mathematics, **1467**, Springer-Verlag, Berlin (1991).

[Sch] T. Schneider *Introduction aux nombres transcendants,* Gauthier-Villars (1959).

[Se] A. Sert *Une version effective du théorème de Lindemann-Weierstrass par les déterminants d'interpolation,* J. of Number Theory **76**, 94-119 (1999).

[Sh] A. Shidlovskii *Transcendental numbers,* De Gruyter studies in mathematics, **12** (1989).

[StVa] T. Struppeck ; J.D. Vaaler *Inequalities for heights of algebraic numbers subspaces and the Thue-Siegel principle,* Analytic Number Theory, Progr. Math., **85**, 493-528 (1989).

[Ti] R. Tijdeman *An auxiliary result in the theory of transcendental numbers,* J. of Number Theory **74**, 80–94 (1973).

[Wa1] M. Waldschmidt *Nombres transcendants*, Lecture Notes **402**, Springer-Verlag, Berlin (1974).

[Wa2] M. Waldschmidt *Nombres transcendants et groupes algébriques,* Astérisque **69-70**, S.M.F. (1979).

[Wa3] M. Waldschmidt *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups,* **326**, Springer-Verlag, Berlin (2000).

[Wa4] M. Waldschmidt *On a Problem of Mahler Concerning the Approximation of Exponentials and Logarithms. Dedicated to Professor Kálmán Győry on the occasion of his 60th birthday,* Publ. Math. Debrecen, **3-4**, 713–738 (2000).

[Wa5] M. Waldschmidt *Linear Independence Measures for Logarithms of Algebraic Numbers*, Diophantine Approximation (Lectures given at the C.I.M.E Summer School held in Cetraro, Italy, June 28 - July 6, 2000), Lecture Notes in Math. **1819**, Springer-Verlag, 249-334 (2003).

[Wi1] F. Wielonsky *Asymptotics of diagonal Hermite-Padé approximants to e^z,* J. of Approx. Theory **90**, 283-298 (1997).

[Wi2] F. Wielonsky *Hermite-Padé approximants of exponential functions and an inequality of Mahler,* J. of Number Theory **74**, no. 2, 230-249 (1999).