Université Paris VII - Denis Diderot

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Nguyen Thi Kim Ngan

Modules de cycles et classes non ramifiées sur un espace classifiant

---

dirigée par Bruno Kahn

Soutenue le 9 juillet 2010 devant le jury composé de :

M. F. Bogomolov	Courant Institut	Rapporteur
M. J.-L. Colliot-Thélène	Université Paris XI	Examinateur
M. F. Déglise	Université Paris XIII	Examinateur
M. B. Kahn	Université Paris VII	Directeur de thèse
M. N. Karpenko	Université Paris VI	Examinateur
M. E. Peyre	Université de Grenoble I	Rapporteur
M. B. Totaro	University of Cambridge	Rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu
175, rue du Chevaleret
75 013 Paris

École doctorale Paris centre
Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

REMERCIEMENTS

J'ai eu la chance de travailler avec Bruno Kahn depuis le stage de Master 2. Il m'a initié à la K-théorie, à la cohomologie motivique et au problème intéressant de Noether. Il est bien évident que cette thèse lui doit beaucoup. Je voudrais le remercie non seulement pour toutes les mathématiques qu'il m'a apprises mais aussi pour les valeurs qu'il m'a transmises.

Fedor Bogomolov, Emmanuel Peyre et Burt Totaro m'ont fait le grand honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. Ce sont leurs résultats qui m'ont motivé à ce travail. Je leur remercie aussi pour les remarques qui m'ont permis d'en améliorer la qualité. Je suis également très heureuse d'avoir Jean-Louis Colliot-Thélène, Nikita Karpenko et Frédéric Déglise dans mon jury. Je les remercie tous.

Je tiens à remercier Ngo B.-C. d'avoir me présenté à Kahn et et pour ses encouragements ainsi que ses conseils utiles pendant ma thèse. Je voudrais remercier Ming-Chang Kang de m'avoir indiqué ses résultats récents sur le problème de Noether et pour une remarque importante dans ma démonstration du théorème principal ainsi que l'article de Saltman [**Salt84**]. Je remercie Georges Maltsiniotis et Bernhard Keller, organisateurs du groupe de travail "Algèbre et Topologie Homotopiques" dans lequel j'ai pu exposer mes travaux en détail. Je remercie aussi D. Hebert, F. Déglise, J. Wildeshaus, les organisateurs du groupe de travail "Cohomologie étale et formalisme des six opérations" où j'ai pu renforcer mes connaissances en maths et rencontrer les grands frères mathématiques: Frédéric, Joseph, Joël. Je ne peux pas non plus oublier les séances au séminaire des thésards de l'équipe Théorie des nombres et des "Bourbakettes" (séminaire pour les filles et maintenant pour les garçons aussi).

Un grand merci à l'IMJ, à l'équipe Théorie des nombres pour l'ambiance et de bonnes conditions de travail, à l'université Paris VII, à l'université Paris XII pour des expériences dans l'enseignement, ainsi que les secrétaires enthousiastes: M. Wasse, M. Proper, A. Dupouy. Je voudrais remercier aussi l'IHÉS, l'ICTP à Trieste, l'université de Regensburg, l'université de Münster, l'IHP, MFO, l'université de Strasbourg pour leur hospitalité à l'occasion de congrès.

J'ai des moments heureux et des bons souvenirs avec les amis au 7ème étage à Chevaleret. Je les remercie tous pour tous. Merci Claire et Martin pour les séances en dehors des maths. J'aimerais remercier également les amis vietnamiens d'avoir partagé les difficultés loin de la famille.

J'exprime toute ma gratitude à mes parents, à la petite famille de mon grand frère et à Duong pour leur soutien constant.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Cette thèse est composée de deux chapitres théoriques, un chapitre d'applications et un appendice de Bruno Kahn.

L'idée initiale vient du problème de Noether: Soient G un groupe fini et W une représentation fidèle de G sur un corps k. Donc G opère sur le corps des fonctions rationnelles $k(W)$. Est-ce que le corps des invariants $k(W)^G$ est transcendant pur sur k? La réponse en général est non. Saltman a utilisé la cohomologie non ramifiée de degré 2 de ce corps $H^2_{\mathrm{nr}}(\mathbb{C}(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (appelée aussi le groupe de Brauer non ramifié) pour trouver un contre-exemple sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ [**Salt84**]. Bogomolov [**Bog87**],[**CTS**, rem. p.159] et récemment Peyre [**Pey08**] ont réussi à donner des contre-exemples sur $\mathbb{C}$ en faisant le lien entre cette cohomologie et celle du groupe G en degré $2, 3$ respectivement. En particulier, Peyre a donné un p-groupe d'ordre p^{12} (p impair) dont la cohomologie non ramifiée de degré 2 est nulle mais celle de degré 3 ne l'est pas.

Ici nous pensons à la cohomologie sur les espaces classifiants "BG" et espérons établir des formules comme celles de Bogomolov et Peyre en degré plus grand sur un corps quelconque. Cela nous amène à donner un sens précis à $F(BG)$ dans le premier chapitre. L'idée de cette construction vient de Totaro [**Tot**], remonte à Bogomolov [**Bog92**]. Totaro a défini $F(BG)$ pour $F = CH^*$. On généralise sa construction pour les foncteurs F de la catégorie des schémas lisses $\mathbf{Sm}(k)$ vers une catégorie quelconque satisfaisant:

- Homotopie: Si $V \to X$ est un fibré vectoriel, alors $F(V) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

- Pureté: Si $U \subset X$ est un ouvert dont le fermé complémentaire est de codimension $\geq c$ (un entier donné), alors $F(U) \xrightarrow{\sim} F(X)$.

On dit alors que F est homotopique et pur en coniveau $\geq c$. En utilisant la double fibration

$$U/G \leftarrow U \times U'/G \rightarrow U'/G$$

où U, U' sont des G-torseurs linéaires de coniveau $\geq c$ (définition 1.2.1), on a

$$F(U/G) \xrightarrow{\sim} F(U'/G).$$

On définit alors

$$F(BG) = \varinjlim F(U/G).$$

Les axiomes de cette construction sont dus à Bruno Kahn. Il me laisse le travail de les vérifier. Dans ce chapitre, je donne aussi la condition sur c pour que $F(BG)$ existe pour certains F: cohomologie étale, cohomologie motivique, cohomologie motivique étale, homologie motivique.

Dans le second chapitre, nous établissons une formule pour la cohomologie non ramifiée de "BG" à l'aide de "résidus géométriques" inspirés par le travail de Peyre [**Pey08**, déf. 5]. Plus généralement, nous travaillons avec les modules de cycles de Rost [**Rost**]. Pour X lisse de corps des fonctions K et M un module de cycles, on note

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) := A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n) = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \mathrm{Ker}(M_n(K) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A))$$

où ∂_A est un résidu classique au sens de [**CTO**], [**Rost**] attaché à un anneau A de valuation discrète de type géométrique. On montre que $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ est bien défini (proposition 2.2.4). D'autre part, on définit des *résidus géométriques* $\partial^F_{D,g}$(définition 2.4.7) sur un corps k contenant μ_m où m est inversible dans k et G d'exposant divisant m. Et puis, nous définissons

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \bigcap_{D \subset G,\ g: \mu_m \to Z_G(D)} \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial^F_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1}))$$

où $A^0(X, M_n)$ est le groupe des éléments non ramifiés sur X (définition 2.1.7). Dans une lettre à Serre [**GMS**], Totaro a montré

$$A^0(BG, M_n) = \mathrm{Inv}_k(G, M_n)$$

où $\mathrm{Inv}_k(G, M_n)$ est le groupe des invariants de G à valeur dans M_n défini par Serre.

Le théorème principal de cette thèse est (théorème 2.7.1)

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

Cela nous permet de retrouver et généraliser le théorème de Bogomolov [**CTS**, thm. 7.1] et de Peyre [**Pey08**, thm. 1] dans le chapitre 3. De plus, on définit (définition 2.11.2)

$$A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) = \bigcap_A \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \to A^0(BA, M_n))$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de G. Et un raffinement du théorème principal (corollaire 2.11.5)

$$0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \to A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}).$$

Cela généralise "Bogomolov faible" *i.e.* la formule comme Bogomolov mais sur les sous-groupes abéliens et non pas sur les sous-groupes bicycliques:

i) $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG) = \mathrm{Br}_{\mathrm{nab}}(BG)$.
ii) $0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \to A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \to \bigoplus_{D,g} \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BD)$.

Cette suite (2.11.1) donne aussi (théorème 2.11.6)

i) Si $A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) = 0$, alors $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) = 0$.
ii) Si M est connectif (*i.e.* $M_n = 0$ pour n assez petit) et $\forall H \subset G, \forall n \in \mathbb{Z}, A^0_{\mathrm{nr}}(BH, M_n) = 0$, alors

$$\forall H \subset G, \forall n \in \mathbb{Z}, A^0_{\mathrm{nab}}(BH, M_n) = 0.$$

D'autre part, nous avons (théorème 3.2.2): $\widetilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(BG) \hookrightarrow \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG_{k_s})$.

D'autres applications dans le troisième chapitre sont la suite duale du théorème principal (3.1.1)

$$\bigoplus_{D,g} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0(BG) \to 0$$

et des conditions équivalentes pour avoir des groupes non ramifiés triviaux (partie 3.1.2).

Enfin, l'appendice sur la cohomologie motivique étale qui est utilisé dans la démonstration les théorèmes de Bogomolov et de Peyre, est écrit par Bruno Kahn.

CHAPITRE 1

UNE CONSTRUCTION DE $F(BG)$

1.1. Rappel sur les torseurs

Dans cette section, je rappelle les définitions et les propriétés des torseurs dont nous aurons besoin.

1.1.1. Quotients. — Soit k un corps.

Définition 1.1.1 **(Mumford [MFK**, déf. 0.6 ii, p.4**])**
Soit G un k-groupe algébrique et soit X un k-schéma de type fini sur lequel G opère par le morphisme $\mu_X : G \times X \to X$.

a) Un *quotient géométrique* de X par G est un k-schéma Y muni d'un k-morphisme $f : X \to Y$ tel que:
   (i) Le diagramme suivant est commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
G \times X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\mu_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y.
\end{tikzcd}
\tag{1.1.1}
$$

   (ii) f et le morphisme $\varphi : G \times X \to X \times_Y X$ défini par $\varphi(g, x) = (gx, x)$ sont surjectifs.
   (iii) f est submersif, i.e. $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X.
   (iv) Le faisceau $\mathcal{O}_Y$ est isomorphe au sous-faisceau de $f_*\mathcal{O}_X$ formé des fonctions G-invariantes.

b) f est un *quotient géométrique universel* s'il le reste après tout changement de base.

Si ce schéma Y existe, il est unique à isomorphisme unique près. On le note $Y = X/G$.

1.1.2. Existence de quotients. —

Proposition 1.1.2. — *Soit G opérant sur X et soit N un sous-groupe distingué de G. Supposons que X admette un quotient géométrique universel $f : X \to Y$ relativement à l'action de N. Alors G/N opère sur Y et les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *X admet un quotient géométrique universel Z relativement à l'action de G.*

(ii) *Y admet un quotient géométrique universel Z' relativement à l'action de G/N.*

Si c'est le cas, alors Z est isomorphe à Z'.

Démonstration. — On peut vérifer que cette proposition est vraie en remplaçant "quotient géométrique" par "quotient catégorique" (*cf.* [**MFK**, déf. 0.5, p.3]). En particulier, les deux quotients coïncident si l'un des deux existe par la propriété universelle des quotients catégoriques. Supposons donc que Z soit un quotient catégorique universel de X par G et de Y par G/N, et notons $g : Y \to Z,\ h = g \circ f : X \to Z$.

Appliquons le critère [**MFK**, (3), p.6]: Il suffit de vérifier la submersion de g, h et la surjectivité de $\varphi_X, \bar{\varphi}_Y$ dans le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
N \times X \arrow[r, two heads, "\varphi'_X"] \arrow[d] & X \times_Y X \arrow[d] \\
G \times X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, two heads, "\pi\times f"'] & X \times_Z X \arrow[d, two heads, "f\times f"] \\
G/N \times Y \arrow[r, "\bar{\varphi}_Y"] & Y \times_Z Y.
\end{tikzcd}$$

D'abord, comme f est un quotient géométrique universel, il est universellement submersif; par conséquent, g est universellement submersif si et seulement si h l'est.

D'autre part, comme f est surjectif, $f \times f$ est surjectif; donc si φ_X est surjectif, $\bar{\varphi}_Y$ est surjectif.

Inversement, si $\bar{\varphi}_Y$ est surjectif, alors on peut vérifier que φ_X est surjectif sur les $\bar{k}$-points grâce au diagramme ci-dessus. Et puis, d'après [**EGA I**, prop. 7.1.8, p. 331], φ_X est surjectif. $\square$

Corollaire 1.1.3. — *Dans la situation de la proposition 1.1.2, supposons que l'action de N sur X soit triviale. Alors l'action de G sur X en induit une de G/N. De plus, le quotient géométrique de X par G existe si et seulement si celui par G/N existe, et alors ils coïncident.*

1.1.3. Torseurs. —

Définition 1.1.4 **(Mumford [MFK**, déf. 0.10, p.17]**)**

Soit X un k-schéma sur lequel G opère et soit $f : X \to Y$ un k-morphisme. On dit que f est un *G-torseur* de *base Y* et *d'espace total X* si

(i) Y est un quotient géométrique de X
(ii) f est plat
(iii) φ (*cf.* déf. 1.1.1 a) (ii)) est un isomorphisme.

Remarque 1.1.5. — On peut montrer (Kahn, non publié) que cette définition est équivalente à celle de Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS**, déf. 2.9].

Théorème 1.1.6 ([**DG**, III.2.6.1, p. 313]). — *Si G est fini et opère sur un schéma X tel que toute orbite ensembliste soit contenue dans un ouvert affine de X, alors*

1. *Le carré* (1.1.1) *est cocartésien dans la catégorie des espaces localement annelés.*
2. *La projection $f : X \to Y := X/G$ est entière et le morphisme φ est surjectif.*
3. *Si G opère librement sur X, f est fini localement libre et φ est un isomorphisme. En particulier, X est l'espace total d'un G-torseur.*

Définition 1.1.7. — Un G-schéma X est *G-irréductible* si, pour toute décomposition $X = F_1 \cup F_2$ où F_1, F_2 sont des fermés G-stables, on a $X = F_1$ où $X = F_2$.

Lemme 1.1.8. — *Soit G opérant sur X de type fini. Alors on peut écrire $X = \bigcup_{\beta\in B} X_\beta$ où les X_β sont des fermés G-irréductibles. On appelle les X_β les composantes G-irréductibles de X.*

Démonstration. — Soit X_α une composante irréductible de X, et soit X_β est le plus petit fermé G-stable de X qui contient X_α. Alors X_β est G-irréductible. En effet, supposons que $X_\beta = F_1 \cup F_2$ où F_1, F_2 sont des fermés G-stables. Comme X_α est irréductible, $X_\alpha \subset F_1$ ou $X_\alpha \subset F_2$. Par minimalité de X_β, $F_1 = X_\beta$ ou $F_2 = X_\beta$. D'autre part, on a clairement $X = \cup X_\beta$, ce qui démontre le lemme. □

Lemme 1.1.9. — *Soient G, H deux groupes algébriques et U_G, U_H les espaces totaux d'un G et d'un H-torseur. Alors $U_G \times U_H$ est l'espace total d'un $G \times H$-torseur.*

Démonstration. — La projection

$$U_G \times U_H \to U_G/G \times U_H/H \xrightarrow{\sim} U_G \times U_H/G \times H$$

est fidèlement plate puisque $U_G \to U_G/G$ et $U_H \to U_H/H$ sont fidèlements plates. De plus, le morphisme

$$(G \times H) \times (U_G \times U_H) \to (U_G \times U_H) \times (U_G \times U_H)$$

qui envoie (g, h, x, y) vers (gx, hy, x, y) est un isomorphisme à cause des isomorphismes $(g, x) \mapsto (gx, x)$ et $(h, y) \mapsto (hy, y)$. Alors

$$U_G \times U_H \to U_G \times U_H/G \times H$$

est un $G \times H$-torseur. □

1.1.4. Propriétés de permanence des torseurs. —

Proposition 1.1.10. — *Les G-torseurs ont les propriétés suivantes:*

1. Stabilité par changement de base: *si on a le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} X' = Y' \times_Y X & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y, \end{array}$$

et si f est un G-torseur, alors f' l'est aussi pour tout g. Réciproquement, si f' est un G-torseur et g est fidèlement plat, alors f est un G-torseur.

2. Formule de la dimension: *si X est G-irréductible (cf. déf. 1.1.7), alors*

$$\dim X = \dim Y + \dim G.$$

3. *Soit $f : X \to Y$ un G-torseur et soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel sur X avec G-action linéaire équivariante, alors E/G existe et est un fibré vectoriel sur Y.*

Démonstration. — 1. La première assertion est grâce à la condition: f plat. La deuxième assertion résulte de la descente fidèlement plate.

2. L'hypothèse implique que Y est irréductible. Comme f est plat, on peut appliquer [**Har**, chap. III, cor. 9.6, p.257]: on a

$$\dim X - \dim Y = \dim X_y,$$

où X_y est la fibre d'un point quelconque de Y (elle est équidimensionnelle). D'après [**MFK**, (4), p. 6/7], on a $\dim X_y = \dim G$.

3. Cela résulte de la descente fidèlement plate [**SGA 1**, VIII, cor. 1.3 et prop. 1.10].

□

Remarque 1.1.11. — : Soient $f : X \to Y$ un G-torseur et $\pi : X' \to X$ un morphisme G-équivariant avec l'action de G sur X'. Alors, X'/G existe dans certains cas:

– π est un fibré vectoriel (Proposition 1.1.10, 3).
– Dans [**MFK**, prop. 7.1].
– π est une immersion ouverte ou fermée (Colliot-Thélène).

Lemme 1.1.12 **(Colliot-Thélène)**. — *Soit X l'espace total d'un G-torseur de base Y avec X de type fini. Soit U un ouvert non vide de X, stable par G. Posons $Z = (X - U)_{red}$. Alors, U et Z sont aussi les espaces totaux de G-torseurs.*

Démonstration. — Comme U est G-stable, alors Z est G-stable aussi. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \supset & U \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \supset & f(U) \end{array} \tag{1.1.2}$$

où $f(U)$ est un ouvert de Y car f est plat. On a $U \subset f^{-1}(f(U))$ et aussi l'égalité car U est G-stable. En effet, il nous suffit de montrer pour tout $K \supset k$, K algébriquement clos, on a $f^{-1}(f(U))(K) = U(K)$ (*cf.* [**EGA I**, prop. 7.1.8, p.331]). Soit $x \in X(K)$ tel que $f(x) \in f(U)(K)$ i.e. $f(x) = f(u)$ pour $u \in U(K)$. Comme f est un G-torseur, $f(K)$ l'est aussi (au sens discret). Alors, il existe $g \in G(K)$ tel que $x = gu$ et donc $x \in U(K)$. Donc le diagramme (1.1.2) est cartésien et donc $U \to f(U)$ est un G-torseur (par la proposition 1.1.10).

Posons $Z' = Y - f(U)$. Alors $f^{-1}(Z') = f^{-1}(Y) - f^{-1}(f(U)) = X - U = Z$ car f est fidèlement plat. De manière analogue, on a que $Z \to Z'$ est un G-torseur. □

1.1.5. Coniveaux. —

Définition 1.1.13. — Soit U un k-schéma intègre de type fini. Pour une immersion ouverte $\emptyset \neq U' \overset{j}{\hookrightarrow} U$, on définit

$$\delta(j) = \delta(U, U') = \operatorname{codim}_U(U - U'). \tag{1.1.3}$$

C'est le *coniveau* de j (ou de U' dans U).

On a (*cf.* [**Har**, Exercise 3.20,(d), p.95]):

$$\delta(U, U') = \operatorname{codim}_U(U - U') = \dim U - \dim(U - U').$$

Lemme 1.1.14. — *Soit U un k-schéma intègre de type fini.*

1. *Toute immersion ouverte $U' \overset{j}{\hookrightarrow} U$, où U' est non vide, est composée d'immersions ouvertes $U_i \overset{j_i}{\hookrightarrow} U_{i+1}$ avec $U_{i+1} - U_i$ irréductible.*
2. *Si G opère sur U et U' est G-invariant, j est composée d'immersions ouvertes $V_i \overset{j_i}{\hookrightarrow} V_{i+1}$ où V_i est G-stable et $V_{i+1} - V_i$ est G-irréductible pour tout i.*

3. *Si k est parfait, on peut choisir les j_i dans (1) et dans (2) de complémentaire lisse.*

Démonstration. —

1. On voit que (2) $\Rightarrow$ (1) car (1) est le cas particulier $G = \{1\}$. Donc il suffit de démontrer (2).
2. Posons $Z = U - U'$. Considérons les composantes G-irréductibles $Z_1, \ldots, Z_m$ de Z (*cf.* lemme 1.1.8). Posons
$$F_{m+1} = \emptyset,\ F_m = Z_m,\ F_{m-1} = Z_m \cup Z_{m-1} \ldots$$
Alors on a une chaîne de fermés $F_m \subset F_{m-1} \subset \cdots \subset F_1 \subset Z$ où $F_i - F_{i+1} = Z_i \setminus Z_{i+1}$ est G-irréductible comme ouvert non vide du G-irréductible Z_i. Posons $V_i = U - F_i$, alors on a une chaîne d'ouverts $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m \subset U$ avec $V_i - V_{i-1} = F_{i-1} - F_i$ G-irréductible.
3. Considérons la chaîne de fermés $\ldots Z_2 \subsetneq Z_1 \subsetneq Z$ où $Z_i = (Z_{i-1})_{sing}$ est lisse. D'après [**EGA IV**, cor. 17.15.13], cette chaîne est strictement décroissante. Il existe m tel que $Z_m = \emptyset$ car Z est noethérien. Alors, on a une chaîne de fermés $Z_m \subset Z_{m-1} \subset \cdots \subset Z \subset U$. Posons $U_i = U - Z_i$, on a une chaîne d'ouverts $U = U_m \supset \cdots \supset U_1 \supset U'$. Et $U_i - U_{i-1} = Z_{i-1} - Z_i$ est lisse par la définition des Z_i. En appliquant (1) et (2) pour chaque immersion ouverte $U_{i-1} \hookrightarrow U_i$, on obtient une nouvelle chaîne d'ouverts $U = U'_m \supset \cdots \supset U'_1 \supset U'$ où $U'_i - U'_{i-1}$ G-irréductible lisse.

$\square$

Lemme 1.1.15. — *Soit U un k-schéma lisse et soit c un entier positif.*

1. *Soient $U'' \overset{j'}{\hookrightarrow} U' \overset{j}{\hookrightarrow} U$ des immersions ouvertes. On a*
$$\delta(j) \geq c \text{ et } \delta(j') \geq c \Leftrightarrow \delta(jj') \geq c.$$
2. *Soit X un autre schéma lisse, on a $U' \times X \overset{j \times 1_X}{\hookrightarrow} U \times X$ et $\delta(j \times 1_X) = \delta(j)$.*
3. *Si U est un G-torseur et que G laisse stable $U' \hookrightarrow U$, on a*
$$\delta(U/G, U'/G) = \delta(U, U').$$

Démonstration. — Seul le point (3) mérite une démonstration.

(3) D'après le lemme 1.1.12, U'/G existe et $U' \to U'/G$ est un G-torseur.

(i) Si $U - U'$ est G-irréductible, alors on a

$$\begin{aligned}\delta(U/G, U'/G) &= \dim(U/G) - \dim(U/G - U'/G)\\ &= \dim(U/G) - \dim((U - U')/G)\\ &= \dim U - \dim(U - U') \text{ (\emph{cf.} prop. 1.1.10 (2))}\\ &= \delta(U, U').\end{aligned}$$

(ii) Sinon, posons $Z = U - U'$. D'après le lemme 1.1.14, $U' \hookrightarrow U$ est composée d'immersions ouvertes $U_i \overset{j_i}{\hookrightarrow} U_{i+1}$ avec $U_{i+1} - U_i$ G-irréductible. D'après la partie (i) ci-dessus, on a $\delta(U_{i+1}, U_i) = \delta(U_{i+1}/G, U_i/G)$. Et d'après (1), pour $U_{i-1} \hookrightarrow U_i \hookrightarrow U_{i+1}$, on a

$$\begin{aligned}\delta(U_{i+1}, U_{i-1}) \geq c &\Leftrightarrow \delta(U_{i+1}, U_i) \geq c \text{ et } \delta(U_i, U_{i-1}) \geq c\\ &\Leftrightarrow \delta(U_{i+1}/G, U_i/G) \geq c \text{ et } \delta(U_i/G, U_{i-1}/G) \geq c\\ &\Leftrightarrow \delta(U_{i+1}/G, U_{i-1}/G) \geq c.\end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $c > 0$, donc on a aussi

$$\delta(U_{i+1}, U_{i-1}) = \delta(U_{i+1}/G, U_{i-1}/G).$$

Par récurrence, on obtient $\delta(U, U') = \delta(U/G, U'/G)$.

□

1.2. Une construction de $F(BG)$

L'idée de cette construction vient de celle de Totaro (*cf.* [**Tot**, déf. 1.2]). Indépendamment, Morel et Voevodsky ont construit aussi BG en géométrie algébrique [**MV**, prop. 2.6]. Ici les axiomes de la construction de $F(BG)$ sont dus à Bruno Kahn, il me laisse le travail de les vérifier.

1.2.1. Représentations très fidèles. —

Définition 1.2.1. — Soit G un k-groupe algébrique linéaire. Soient E une représentation linéaire de G et c un entier ≥ 0. On dit que E est une *représentation très fidèle* de G de coniveau $\geq c$ s'il existe un ouvert U de E, stable par G tel que le quotient géométrique U/G existe, que

$U \to U/G$ soit un G-torseur et que $\delta(E, U) \geq c$.
On dit que U est un *G-torseur linéaire de coniveau* $\geq c$ s'il est obtenu de cette manière.

Remarque 1.2.2. — Une telle représentation très fidèle de coniveau aussi grand qu'on veut existe toujours d'après Totaro (*cf.* [**Tot**, rem. 1.4, p.4] ou [**CTS**, lemme 9.2]).

Rappelons la construction dans [**CTS**, lemme 9.2]: Soit $G \subset \mathrm{GL}_n$ une représentation k-linéaire fidèle de G. Soit $N \geq 1$ un entier. Soient W l'espace des matrices carrées $(N+n) \times (N+n)$ sur k et V l'espace des matrices $n \times (N+n)$ sur k. Soit $U \subset V$ l'ouvert dense de V formé des matrices de rang n. La projection $W \to V$ induit un morphisme surjectif de G-variétés

$$\pi : \mathrm{GL}_{N+n} \twoheadrightarrow U.$$

On note $\tilde{G} \cong G$ le sous-groupe de GL_{N+n} des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} I_N & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

où $D \in G$ et I_N est la matrice identique $N \times N$. On note $H \subset \mathrm{GL}_{N+n}$ le sous-groupe formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathrm{GL}_N$ et I_n est la matrice identique $n \times n$. Alors H est une extension de GL_N par un sous-groupe invariant unipotent dont la variété sous-jacente est un espace affine $\mathbb{A}^{Nn}$. De plus, π induit un G-isomorphisme $\mathrm{GL}_{N+n}/H \xrightarrow{\sim} U$. Comme le produit $\Gamma = H\tilde{G} \cong H \rtimes G$ est un sous-groupe fermé de GL_{N+n}, le morphisme canonique

$$\mathrm{GL}_{N+n} \to \mathrm{GL}_{N+n}/\Gamma$$

se factorise par π et induit un G-torseur $\mathrm{GL}_{N+n}/H \to \mathrm{GL}_{N+n}/\Gamma$. Alors U/G existe et U est un G-torseur sur U/G:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_{N+n}/H \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{GL}_{N+n}/\Gamma \arrow[d, "\cong"] \\ U \arrow[r] & U/G. \end{tikzcd}$$

D'autre part, c'est clair que la codimension du fermé complémentaire $S = V - U$ tend vers l'infini quand N tend vers l'infini.

En particulier, d'après Waterhouse [**Wat**, p. 121-122], un quotient d'un groupe algébrique linéaire par un sous-groupe fermé est une variété quasi-projective lisse. Donc U/G est quasi-projective lisse.

1.2.2. Représentations très fidèles d'un groupe fini. — Soient G un groupe fini et W une représentation très fidèle de G sur k. Pour $g \in G$, on note

$$W^g = W^{\langle g \rangle} = \{x \in W \mid gx = x\}.$$

Considérons $U = W - \bigcup_{g \neq 1} W^g$. C'est un ouvert G-stable de W. Alors U est l'espace total d'un G-torseur (*cf.* thm. 1.1.6).

Définition 1.2.3. — On note

$$\nu(W) := \delta(W, U) = \inf_{g \neq 1} \{\operatorname{codim}_W W^g\}.$$

Lemme 1.2.4. — *On a*

$$\forall n \geq 1, \ \nu(W^n) = n\nu(W).$$

Démonstration. — D'abord

$$(W^n)^g = \{(w_1, \dots, w_n) \in W^n \mid gw_i = w_i \ \forall i = \overline{1, \dots, n}\} = (W^g)^n.$$

D'où on a

$$\begin{aligned} \nu(W^n) &= \inf_{g \neq 1} \{\operatorname{codim}_{W^n} (W^n)^g\} \\ &= \inf_{g \neq 1} \{\operatorname{codim}_{W^n} (W^g)^n\} \\ &= n\nu(W). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.5. — Ce lemme 1.2.4 est une autre manière d'obtenir un G-torseur linéaire de coniveau aussi grand qu'on veut (pour G fini).

1.2.3. La construction principale. —

Définition 1.2.6. — Soit $\mathbf{Sm}(k)$ la catégorie des k-schémas lisses, séparés et de type fini. Notons $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$ la catégorie ayant les mêmes objets, mais dont les morphismes sont les morphismes dominants.

Soit F un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ et soit c un entier ≥ 0. On dit que F est *homotopique et pur en coniveau* $\geq c$ s'il vérifie les deux axiomes suivants:

1. **Homotopie:** Si $f : V \to X$ est un fibré vectoriel, alors $F(f) : F(V) \to F(X)$ est un isomorphisme.
2. **Pureté:** $F(U) \xrightarrow{\sim} F(X)$ si U est un ouvert de X tel que $\delta(X, U) \geq c$.

Remarque 1.2.7. — Ici le foncteur F est covariant. Dans la suite, on utilisera souvent des foncteurs contravariants. Mais on passe des uns aux autres en remplaçant $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^{op}$ (catégorie opposée).

Exemple 1.2.8. — Supposons que k soit parfait. Si F est homotopique et pur en coniveau $\geq c$, alors

$$Y \mapsto F(X \times Y)$$

l'est aussi.

En effet, soit U un ouvert de Y tel que le fermé complémentaire $Z = Y - U$ soit lisse, de coniveau $\geq c$. Alors $X \times U$ est aussi un ouvert de $X \times Y$ et son fermé complémentaire est aussi de coniveau $\geq c$. Alors d'après l'hypothèse de F, on a

$$F(X \times U) \xrightarrow{\sim} F(X \times Y).$$

Si $E \to Y$ est un fibré vectoriel, alors $X \times E \to X \times Y$ l'est aussi. Donc

$$F(X \times E) \xrightarrow{\sim} F(X \times Y).$$

Remarque 1.2.9. — Si k est parfait, il suffit d'exiger la condition de pureté dans le cas particulier où $X - U$ est *lisse et irréductible*. En effet, d'après le lemme 1.1.14, $U \hookrightarrow X$ est composée d'immersions ouvertes $U_i \hookrightarrow U_{i+1}$ avec $U_{i+1} - U_i$ irréductible lisse. Donc $F(U_i) \xrightarrow{\sim} F(U_{i+1})$ et par récurrence, $F(U) \xrightarrow{\sim} F(X)$. De plus, d'après le lemme 1.1.15, pour $U_{i-1} \hookrightarrow U_i \hookrightarrow U_{i+1}$, on a $\delta(U_{i+1}, U_{i-1}) \geq c \Leftrightarrow \delta(U_{i+1}, U_i) \geq c$ et $\delta(U_i, U_{i-1}) \geq c$. Par récurrence,

$$\delta(X, U) \geq c \Leftrightarrow \delta(U_{i+1}, U_i) \geq c.$$

Définition 1.2.10. — Soit c un nombre entier ≥ 0. Soient U, U' deux k-schémas lisses irréductibles munis d'une action de G. On dit que le couple (U, U') est *admissible de coniveau* $\geq c$ si

(a) U est l'espace total d'un G-torseur.
(b) U' est un ouvert non vide d'une représentation E' de G tel que le quotient géométrique U'/G existe et que $\delta(E', U') \geq c$.

Remarque 1.2.11. — (U, U) est admissible de coniveau $\geq c$ si et seulement si U est un G-torseur linéaire de coniveau $\geq c$ (*cf.* déf. 1.2.1).

Construction 1.2.12. — *Soit F un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geq c$. Alors il existe une famille de morphismes canoniques*

$$\varphi_{U,U'} : F(U/G) \to F(U'/G)$$

pour tout couple admissible U, U' de coniveau $\geq c$, ayant les propriétés suivantes:

1. *Réflexivité: si (U, U) est admissible, alors $\varphi_{U,U} = Id_{F(U/G)}$.*
2. *Symétrie: si (U, U') et (U', U) sont admissibles, alors*

$$\varphi_{U,U'}\varphi_{U',U} = 1$$

   et $\varphi_{U,U'}$ est un isomorphisme.
3. *Transitivité: si (U, U'), (U', U'') et (U, U'') sont admissibles, alors*

$$\varphi_{U',U''}\varphi_{U,U'} = \varphi_{U,U''}.$$

Démonstration. — C'est la construction de la double fibration qui remonte à Bogomolov et d'autres ("lemme sans nom", *cf.* [**CTS**, §3.2]).

Comme U est l'espace total d'un G-torseur et que $U \times E' \to U$ est un fibré vectoriel G-équivariant, d'après la proposition 1.1.10 (3), $U \times E'$ est aussi l'espace total d'un G-torseur et $U \times E'/G \to U/G$ est un fibré vectoriel. D'après le lemme 1.1.12, comme $U \times U' \hookrightarrow U \times E'$ est une immersion ouverte, il existe $(U \times U')/G \hookrightarrow (U \times E')/G$. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} \frac{U \times E'}{G} \arrow[d, "p"'] & \overset{j}{\supset} & \frac{U \times U'}{G} \arrow[r, "p_{U'}^{U,U'}"] \arrow[d, "p_U^{U,U'}"'] & \frac{U'}{G} \\ \frac{U}{G} & \Longrightarrow\!\!\!= & \frac{U}{G}. & \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, p est un fibré vectoriel, donc par l'axiome d'homotopie (*cf.* déf. 1.2.6), $F(p)$ est un isomorphisme. D'autre part, $\delta(U \times E'/G, U \times U'/G) \geq c$ (d'après la définition 1.1.13 de $\delta(j)$ et le lemme 1.1.15), donc l'inclusion j définit un isomorphisme par l'axiome de pureté. Finalement, on définit $\varphi_{U,U'}$ par la composition

$$F(U/G) \xrightarrow{F(p)^{-1}} F(U \times E'/G) \xrightarrow{F(j)^{-1}} F(U \times U'/G) \xrightarrow{F(p_{U'}^{U,U'})} F(U'/G).$$

Notons que $\varphi_{U,U'} = F(p_{U'}^{U,U'})F(j)^{-1}F(p)^{-1} = F(p_{U'}^{U,U'})F(p_U^{U,U'})^{-1}$, ce qui montre que $\varphi_{U,U'}$ ne dépend que de U' et pas de l'immersion $U' \hookrightarrow E'$.

Il reste à vérifier les trois propriétés.

Réflexivité: $\varphi_{U,U} = F(p_U^{U,U})F(p_U^{U,U})^{-1} = 1$.

Symétrie: $\varphi_{U,U'}\varphi_{U',U} = F(p_{U'}^{U,U'})F(p_U^{U,U'})^{-1}F(p_U^{U,U'})F(p_{U'}^{U,U'})^{-1} = 1$. Et $\varphi_{U,U'}$ est un isomorphisme. C'est évident par la définition de $\varphi_{U,U'}$.

Transitivité: On considère deux autres diagrammes:

$$\begin{tikzcd} \frac{U' \times E''}{G} \arrow[d, "p'"'] & \overset{j'}{\supset} & \frac{U' \times U''}{G} \arrow[r, "p_{U''}^{U',U''}"] \arrow[d, "p_{U'}^{U',U''}"'] & \frac{U''}{G} \\ \frac{U'}{G} & = & \frac{U'}{G}. & \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\frac{U \times E''}{G} \arrow[d, "p''"'] & \overset{j''}{\supset} & \frac{U \times U''}{G} \arrow[r, "p^{U,U''}_{U''}"] \arrow[d, "p^{U,U''}_{U}"'] & \frac{U''}{G} \\
\frac{U}{G} \arrow[rr, equal] & & \frac{U}{G}.
\end{tikzcd}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\varphi_{U',U''}\varphi_{U,U'} = \varphi_{U,U''} \\
\Leftrightarrow\ & F(p^{U',U''}_{U''})F(p^{U',U''}_{U'})^{-1}F(p^{U,U'}_{U'})F(p^{U,U'}_{U})^{-1} = F(p^{U,U''}_{U''})F(p^{U,U''}_{U})^{-1}.
\end{aligned}$$

De plus, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\frac{U \times U' \times U''}{G} \arrow[r, "p^{U,U',U''}_{U',U''}"] \arrow[d, "p^{U,U',U''}_{U,U'}"'] & \frac{U' \times U''}{G} \arrow[d, "p^{U',U''}_{U'}"'] \\
\frac{U \times U'}{G} \arrow[r, "p^{U,U'}_{U'}"] & \frac{U'}{G}.
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que

$$F(p^{U,U'}_{U'})F(p^{U,U',U''}_{U,U'}) = F(p^{U',U''}_{U'})F(p^{U,U',U''}_{U',U''}). \tag{1.2.1}$$

D'autre part, on a

$$\begin{tikzcd}
\frac{U \times U' \times E''}{G} \arrow[d, "p_0"'] & \overset{j_0}{\supset} \frac{U \times U' \times U''}{G} \\
\frac{U \times U'}{G}.
\end{tikzcd}$$

Comme U, U' sont des espaces totaux de G-torseurs, $U \times U'$ l'est aussi d'où on déduit que p_0 est un fibré vectoriel et donc $F(p_0)$ est inversible par l'axiome d'homotopie de F. De plus, j_0 est une immersion ouverte avec $\delta(U \times U' \times E''/G, U \times U' \times U''/G) \geq c$ (*cf.* lemme 1.1.15), donc $F(j_0)$ est inversible par l'axiome de pureté de F. Alors, $F(p^{U,U',U''}_{U,U'}) = F(p_0)F(j_0)$ est inversible. Ainsi,

$$(1.2.1) \Leftrightarrow F(p^{U',U''}_{U'})^{-1}F(p^{U,U'}_{U'}) = F(p^{U,U',U''}_{U',U''})F(p^{U,U',U''}_{U,U'})^{-1}.$$

De manière analogue, on a

$$F(p_U^{U,U''})^{-1}F(p_U^{U,U'}) = F(p_{U,U''}^{U,U',U''})F(p_{U,U'}^{U,U',U''})^{-1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\varphi_{U',U''}\varphi_{U,U'} &&=\varphi_{U,U''}\\
\Leftrightarrow &F(p_{U''}^{U',U''})F(p_{U'}^{U',U''})^{-1}F(p_{U'}^{U,U'}) &&=F(p_{U''}^{U,U''})F(p_U^{U,U''})^{-1}F(p_U^{U,U'})\\
\Leftrightarrow &F(p_{U''}^{U',U''})F(p_{U',U''}^{U,U',U''})F(p_{U,U'}^{U,U',U''})^{-1} &&=F(p_{U''}^{U,U''})F(p_{U,U''}^{U,U',U''})F(p_{U,U'}^{U,U',U''})^{-1}\\
\Leftrightarrow &F(p_{U''}^{U',U''})F(p_{U',U''}^{U,U',U''}) &&=F(p_{U''}^{U,U''})F(p_{U,U''}^{U,U',U''}).
\end{aligned}$$

Cela est vrai grâce au diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\frac{U\times U'\times U''}{G} \arrow[r, "p_{U,U''}^{U,U',U''}"] \arrow[d, "p_{U',U''}^{U,U',U''}"'] & \frac{U\times U''}{G} \arrow[d, "p_{U''}^{U,U''}"'] \\
\frac{U'\times U''}{G} \arrow[r, "p_{U''}^{U',U''}"] & \frac{U''}{G}.
\end{tikzcd}$$

On a donc montré

$$\varphi_{U',U''}\varphi_{U,U'} = \varphi_{U,U''}.$$

□

Définition 1.2.13. — On note $F(BG)$ la limite inductive des $F(U/G)$, où U est un G-torseur linéaire de coniveau $\geq c$, par rapport au sytème transitif d'isomorphismes $\varphi_{U,U'}$.

Remarque 1.2.14. — Pour tout U G-torseur linéaire de coniveau $\geq c$, $F(U/G) \xrightarrow{\sim} F(BG)$ donc la définition de $F(BG)$ permet simplement de ne choisir aucun U.

1.2.4. Propriétés "universelles" de $F(BG)$. —

Lemme 1.2.15. — (a) *Si U est l'espace total d'un G-torseur, on a un morphisme canonique $\varphi_U : F(U/G) \to F(BG)$.*

(b) *Si $f : U' \to U$ est un morphisme de G-torseurs, $\varphi_{U'} = \varphi_U \circ F(\bar{f})$ avec $F(\bar{f}) : F(U'/G) \to F(U/G)$.*

(c) *Si U vérifie la condition (b) de la définition 1.2.10, on a un morphisme canonique $\psi_U : F(BG) \to F(U/G)$.*

(d) *Si $f : U' \to U$ est un morphisme avec U, U' vérifie la condition (b) de la définition 1.2.10, alors $\psi_U = F(\bar{f})\psi_{U'}$.*

(e) *Si U est un G-torseur linéaire de coniveau $\geq c$, φ_U et ψ_U sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.*

Démonstration. — Choisissons un G-torseur linéaire U_0 de coniveau $\geq c$. On a un morphisme canonique $\varphi_{U_0} : F(U_0/G) \to F(BG)$ qui est un isomorphisme d'après la propriété (2) de la construction 1.2.12.

(a) Si U est l'espace total d'un G-torseur, alors (U, U_0) est admissible. Donc par la construction 1.2.12, il existe un morphisme $\varphi_{U,U_0} : F(U/G) \to F(U_0/G)$. Posons $\varphi_U = \varphi_{U_0}\varphi_{U,U_0}$.

Ce morphisme ne dépend pas du choix de U_0. En effet, prenons un autre G-torseur linéaire U_1 de coniveau $\geq c$, et considérons le morphisme associé $\varphi_{U_1} : F(U_1/G) \to F(BG)$. Puisque (U_0, U_1) et (U_1, U_0) sont admissibles, φ_{U_0,U_1} est inversible. Et on a $\varphi_{U_1} = \varphi_{U_0}\varphi^{-1}_{U_0,U_1}$ par la propriété de la limite inductive. Donc

$$\begin{aligned}\varphi_U = \varphi_{U_0}\varphi_{U,U_0} &= \varphi_{U_0}\varphi^{-1}_{U_0,U_1}\varphi_{U_0,U_1}\varphi_{U,U_0}\\ &= \varphi_{U_1}\varphi_{U,U_1} \text{ (par la propriété transitivité de } \varphi).\end{aligned}$$

(b) Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} F(\dfrac{U'}{G}) & \xrightarrow{F(p_{U'}^{U',U_0})^{-1}} & F(\dfrac{U' \times U_0}{G}) & \xrightarrow{F(p_{U_0}^{U',U_0})} & F(\dfrac{U_0}{G}) \\ {\scriptstyle F(\bar{f})}\big\downarrow & & {\scriptstyle F(\overline{f \times id_{U_0}})}\big\downarrow & & {\scriptstyle =}\big\downarrow \\ F(\dfrac{U}{G}) & \xrightarrow{F(p_U^{U,U_0})^{-1}} & F(\dfrac{U \times U_0}{G}) & \xrightarrow{F(p_{U_0}^{U,U_0})} & F(\dfrac{U_0}{G}). \end{array}$$

Les deux rectangles sont commutatifs par fonctorialité, donc on a

$$\begin{aligned}\varphi_{U',U_0} &= F(p_{U_0}^{U'\times U_0})F(p_U^{U\times U_0})^{-1}\\ &= F(p_{U_0}^{U\times U_0})F(\overline{f \times id_{U_0}})F(p_{U'}^{U'\times U_0})^{-1}\\ &= F(p_{U_0}^{U\times U_0})F(p_U^{U\times U_0})^{-1}F(\bar{f})\\ &= \varphi_{U,U_0}F(\bar{f}).\end{aligned}$$

Alors, $\varphi_{U'} = \varphi_U \circ F(\bar{f})$.

(c) Si U vérifie la condition (b) de la définition 1.2.10, (U_0, U) est admissible. Donc il existe $\varphi_{U_0,U} : F(U_0/G) \to F(U/G)$. Alors il existe un morphisme ψ_U de $F(BG)$ dans $F(U/G)$ comme suit

$$F(BG) \leftarrow F(U_0/G) \xrightarrow{\varphi_{U_0,U}} F(U/G).$$

(d) De manière analogue à b), on a $\psi_U = F(\bar{f}) \circ \psi_{U'}$.

(e) Si U est linéaire de coniveau $\geq c$, par la propriété de symétrie de φ, on a $\varphi_U \psi_U = \psi_U \varphi_U = 1$.

□

Remarque 1.2.16. — Nous avons les deux premières applications suivantes:

1. Si $H \subset G$ est un sous-groupe fermé de G, alors $G \to G/H$ est un H-torseur. Donc pour tout F (covariant), on a un morphisme canonique (*cf.* lemme 1.2.15 a))
$$F(G/H) \to F(BH).$$
2. Appliquons (a) et (b) du lemme 1.2.15 à $F = CH^n(-)^{op}$ (groupe de Chow en degré n) avec
$$CH^n(-)^{op} : X \mapsto CH^n(X) \in Ab^{op},$$
donc F est covariant, on retrouve le théorème 1.3 de Totaro dans [**Tot**]:

***Théorème 1.2.17* (Totaro).** — [**Tot**, thm. 1.3, p.4] *Soit G un groupe algébrique sur un corps k. Alors le groupe $CH^i(BG)$ est identique à l'ensemble des symboles α associant à chaque variété quasi-projective lisse X et à un G-torseur $E \to X$ un élément $\alpha(E) \in CH^i(X)$ tel que pour tout morphisme $f : Y \to X$, on ait*
$$\alpha(f^*E) = f^*(\alpha(E)).$$

D'abord on vérifie que
$$CH^i(BG) = \{\alpha \mid \forall\ G\text{-torseur } E \to X,\ \alpha(E) \in CH^i(X)\}.$$

D'après le lemme 1.2.15, pour $F = CH^i$ (contravariant) on a
$$\varphi_E : CH^i(BG) \to CH^i(E/G).$$

Donc pour $x \in CH^i(BG)$, on définit $\alpha(E) = \varphi_E(x)$. Pour chaque α comme dans l'hypothèse, on définit $x = \alpha(EG)$ où EG est l'espace total d'un G-torseur de base "BG". Concrètement, fixons U un G-torseur linéaire de coniveau $\geq c$ et prenons $EG = U$, on a

$$CH^i(BG) = CH^i(U/G).$$

De plus, d'après le lemme 1.2.15, pour $f^* = F(f) : CH^i(X) \to CH^i(Y)$, on a

$$\varphi_{f^*E} = \varphi_E \circ F(f)$$

ou

$$\alpha(f^*E) = f^*(\alpha(E)).$$

1.3. Fonctorialité en F

Lemme 1.3.1. — *Soient F, F' deux foncteurs homotopiques et purs en coniveau $\geq c$. Si $f : F \to F'$ est une transformation naturelle, alors f induit*

$$f_{BG} : F(BG) \to F'(BG).$$

Démonstration. — Soient U, U' des G-torseurs linénaires de coniveau $\geq c$, on a le diagramme commutatif suivant d'après le lemme 1.2.15:

$$\begin{tikzcd} F(U/G) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F'(U/G) \arrow[d, "\wr"] \\ F(U'/G) \arrow[r] & F'(U'/G) \end{tikzcd}$$

Donc en passant à la limite inductive, on a un morphisme $F(BG) \to F'(BG)$. □

Lemme 1.3.2. — *Soient F, F', F'' des foncteurs homotopiques et purs en coniveaux $\geq c, c', c''$. Si $f : F \times F' \to F''$ est une transformation naturelle, alors f induit*

$$f_{BG} : F(BG) \times F'(BG) \to F''(BG).$$

Démonstration. — Posons $c_0 = \sup(c, c', c'')$, alors F, F', F'' sont purs en coniveau $\geq c_0$. Soit U un G-torseur de coniveau $\geq c_0$, on a

$$F(U/G) \times F'(U/G) \to F''(U/G).$$

En passant à la limite inductive, on a un morphisme

$$f_{BG} : F(BG) \times F'(BG) \to F''(BG).$$

$\square$

Exemple 1.3.3. — Utilisons les lemmes 1.3.1 et 1.3.2 pour $F = CH^i$, $F' = CH^j$, $F'' = CH^{i+j}$, on trouve la structure d'anneau de $CH^*(BG)$.

Remarque 1.3.4. — Soit (F_n) un système inductif de foncteurs homotopiques et purs en coniveau $\geq c_n$ (peut-être $c_n \to +\infty$) vers une catégorie $\mathcal{C}$ admettant des limites inductives dénombrables. Pour $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$, posons $F(X) = \varinjlim F_n(X)$. Ceci définit un nouveau foncteur $F = \varinjlim F_n$. Alors $F(BG)$ a un sens même si F n'est pur d'aucun coniveau. En effet, pour tout n, d'après le lemme 1.3.1, on a bien un morphisme

$$F_n(BG) \to F_{n+1}(BG)$$

ne dépendant d'aucun choix, donc on peut définir

$$F(BG) = \varinjlim F_n(BG).$$

1.4. Fonctorialité en G

Définition 1.4.1. — Soient $f : G \to H$ un morphisme des k-groupes algébriques linéaires et X un schéma sur lequel H opère. On note $f^*(X)$ le schéma X muni de l'action de G via f: c'est l'image réciproque de X par f.

Proposition 1.4.2. — *La loi $G \mapsto F(BG)$ définit un foncteur de la catégorie des k-groupes algébriques linéaires vers $\mathcal{C}$. Autrement dit:*

- *à tout k-homomorphisme $f : G \to H$ est associé un morphisme $F(Bf) : F(BG) \to F(BH)$;*
- *si $g : H \to K$ est un autre homomorphisme, on a $F(B(gf)) = F(Bg)F(Bf)$.*

Démonstration. — Soient U_0 un G-torseur linéaire de coniveau $\geq c$ et U'_0 un H-torseur linéaire de coniveau $\geq c$. Donc G opère aussi sur E'_0 via f et laisse stable U'_0. On décompose f comme suit:

$$G \twoheadrightarrow G/N \hookrightarrow H,$$

où $N = Ker(f)$. D'après le corollaire 1.1.3, U'_0 est l'espace total d'un $f(G/N)$-torseur et $U'_0/(f(G/N)) \to U'_0/H$ est fidèlement plat. On note $f^*(U'_0)$ l'image réciproque de U'_0 relative à f (*cf.* déf. 1.4.1). Donc

$$f^*(U'_0)/(G/N) \xrightarrow{\sim} U'_0/(f(G/N)) \to U'_0/H$$

est fidèlement plat et $f^*(U'_0)$ est aussi l'espace total d'un G/N-torseur (i.e. $f^*(U'_0)$ est l'espace total d'un G-torseur potentiel). D'après la proposition 1.1.2, le quotient géométrique $f^*(U'_0)/G$ existe et égal à $f^*(U'_0)/(G/N)$. Notons $\pi_f^{U'_0} : f^*(U'_0)/G \to U'_0/H$. Donc on a un morphisme ψ_{U_0,U'_0} de $F(U_0/G)$ à $F(U'_0/H)$ comme suit:

$$F(U_0/G) \xrightarrow{\varphi^G_{U_0,f^*(U'_0)}} F(f^*(U'_0)/G) \xrightarrow{F(\pi_f^{U'_0})} F(U'_0/H).$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{aligned} F(BG) = \varinjlim F(U/G) \leftarrow F(U_0/G) \stackrel{\psi_{U_0,U'_0}}{\longrightarrow} & F(U'_0/H) \\ & \to F(BH) = \varinjlim F(U'/H). \end{aligned}$$

Comme U_0 est G-torseur linéaire de coniveau $\geq c$, donc $F(U/G) \xrightarrow{\sim} F(BG)$. Alors il existe un morphisme $F(Bf) : F(BG) \to F(BH)$ grâce au diagramme au-dessus.

De plus, ce morphisme ne dépend pas des choix de U_0, U'_0. En effet, soit U_1 (resp. U'_1) un autre G-torseur (resp. H-torseur) linéaire de coniveau $\geq c$. Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F(U_0/G) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^G_{U_0,U_1}"'] & F(f^*(U'_0)/G) \arrow[r, "F(\pi_f^{U'_0})"] \arrow[d, "\varphi^{G/N}_{f^*(U'_0),f^*(U'_1)}"'] & F(U'_0/H) \arrow[d, "\varphi^H_{U'_0,U'_1}"'] \\ F(U_1/G) \arrow[r] & F(f^*(U'_1)/G) \arrow[r, "F(\pi_f^{U'_1})"] & F(U'_1/H). \end{tikzcd}$$

Le rectangle à gauche est commutatif grâce au diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F(U_0/G) \arrow[r] & F(f^*(U_0')/G) \arrow[r, "\sim"] & F(f^*(U_0')/(G/N)) \\
F(U_0 \times U_1/G) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] & F(f^*(U_0') \times f^*(U_1')/G) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] & F(f^*(U_0') \times f^*(U_1')/(G/N)) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\wr"] \\
F(U_1/G) \arrow[r] & F(f^*(U_1')/G) \arrow[r, "\sim"] & F(f^*(U_1')/G).
\end{tikzcd}$$

Le même argument pour le rectangle à droit. Alors, le morphisme de $\varinjlim F(U/G)$ dans $\varinjlim F(U'/H)$ construit par $F(U_1/G) \to F(U_1'/G)$ coïncide avec le morphisme provenant des applications $F(U_0/G) \to F(U_0'/G)$ ci-dessus. Donc, $F(f)$ ne dépend pas des choix de U, U'.

Si $g : H \to K$ est un autre morphisme, on a

$$F(B(gf)) = F(Bg)F(Bf).$$

En effet, soit U_0'' un K-torseur linéaire de coniveau $\geq c$. Il nous faut montrer que

$$F(\pi_{gf}^{U_0''})\varphi^G_{U_0,(gf)^*(U_0'')} = F(\pi_g^{U_0''})\varphi^H_{U_0',g^*(U_0'')}F(\pi_f^{U_0'})\varphi^G_{U_0,f^*(U_0')}.$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
F(\frac{U_0}{G}) \arrow[r, "\varphi^G_{U_0,f^*(U_0')}"] & F(\frac{f^*(U_0')}{G}) \arrow[r, "\varphi^G_{f^*(U_0'),(gf)^*(U_0'')}"] \arrow[d, "F(\pi_f^{U_0'})"'] & F(\frac{(gf)^*(U_0'')}{G}) \arrow[d, "F(\pi_f^{U_0''})"'] \\
& F(\frac{U_0'}{H}) \arrow[r, "\varphi^H_{U_0',g^*(U_0'')}"] & F(\frac{g^*(U_0'')}{H}) \arrow[d, "F(\pi_g^{U_0''})"'] \\
& & F(\frac{U_0''}{K}).
\end{tikzcd} \tag{1.4.1}$$

On a

$$\varphi^G_{U_0,(gf)^*(U_0'')} = \varphi^G_{f^*(U_0'),(gf)^*(U_0'')}\varphi^G_{U_0,f^*(U_0')}$$

(propriété de transitivité de φ dans la construction 1.2.12) et

$$F(\pi_{gf}^{U_0''}) = F(\pi_g^{U_0''})F(\pi_f^{U_0'}).$$

Donc il nous reste à montrer le rectangle dans le diagramme (1.4.1) ci-dessus est commutatif. Considérons encore le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
F(\frac{U_0'}{G}) & \longleftarrow & F(\frac{U_0' \times U_0''}{G}) & \longrightarrow & F(\frac{U_0''}{G}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
F(\frac{U_0'}{H}) & \longleftarrow & F(\frac{U_0' \times U_0''}{H}) & \longrightarrow & F(\frac{U_0''}{H}).
\end{array}$$

Il est commutatif. Donc le rectangle dans le diagramme (1.4.1) est commutatif aussi. On a donc démontré $F(B(gf)) = F(Bg)F(Bf)$.

□

Grâce à la fonctorialité en F (*cf.* lemme 1.3.1 et 1.3.2) et à la fonctorialité en G (*cf.* prop. 1.4.2), on obtient:

Corollaire 1.4.3. — a) *Si $f : F \to F'$ est une transformation naturelle, alors $f_{BG} : F(BG) \to F'(BG)$ est naturelle en G.*

b) *Si $F = \varinjlim F_n$, $G \mapsto F(BG)$ est un foncteur en G où $F(BG)$ est défini comme dans la remarque 1.3.4.*

D'après l'exemple 1.2.8 et la proposition 1.4.2, on a:

Corollaire 1.4.4. — *Soit G un k-groupe algébrique linéaire, $F(X \times BG)$ est bien défini et*

$$G \mapsto F(X \times BG)$$

est un foncteur en G.

Comme première application de la fonctorialité, on définit:

Définition 1.4.5. — Soit F un foncteur de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$ vers une catégorie karoubienne C (dont tout endomorphisme idempotent a un noyau). Pour tout k-groupe algébrique linéaire G, on pose

$$\tilde{F}(BG) = \mathrm{Ker}(F(B\epsilon))$$

où ϵ est l'idempotent $G \to \mathrm{Spec}(k) \to G$ donné par l'unité de G.

1.5. Une extension: $F(BG \times BH)$

Définition 1.5.1. — Soient G, H deux k-groupes algébriques linéaires et U_G (*resp.* U_H) un G-torseur (*resp.* H-torseur) linéaire (déf. 1.2.1). De $G \mapsto F(BG)$, on définit $G \times H \mapsto F(BG \times BH)$ par:

$$F(BG \times BH) = \varinjlim_{U_G, U_H} F(U_G/G \times U_H/H).$$

On peut vérifier que cette loi définit un bifoncteur par la même méthode de la proposition 1.4.2.

D'après le lemme 1.1.9 et la définition 1.2.13, on a:

$$F(B(G \times H)) = F(U_G \times U_H/G \times H) \xrightarrow{\sim} F(U_G/G \times U_H/H).$$

Il en résulte que:

Lemme 1.5.2. — *On a un isomorphisme canonique et fonctoriel:*

$$F(B(G \times H)) \xrightarrow{\sim} F(BG \times BH). \tag{1.5.1}$$

1.6. Exemples de $F(BG)$

Le corps k est maintenant supposé parfait.

Soit $j : U \hookrightarrow V$ une immersion ouverte de coniveau $\delta(j) = c$ (*cf.* déf. 1.1.13). On va chercher ici des conditions sur c pour que $F(j)$ soit un isomorphisme pour un certain nombre de foncteurs F. D'après le lemme 1.1.14, on peut se limiter aux immersions ouvertes $j : U \hookrightarrow V$ telles que le fermé complémentaire $Z \overset{i}{\hookrightarrow} V$ soit lisse, irréductible et de codimension c.

1.6.1. Cohomologie étale. —

Proposition 1.6.1. — *Supposons m soit inversible dans k. Pour $F(X) = H^q_{\text{ét}}(X, M)$ où M est un faisceau localement constant (constructible), d'ordre divisant m (cohomologie étale cf.* [**Mil**, III, §1, déf. 1.5]*), $F(V) \xrightarrow{\sim} F(U)$ si $c > \frac{q+1}{2}$.*

Démonstration. — C'est grâce à la longue suite exacte [**Mil**, III, §1, prop. 1.25]

$$\cdots \to H^q_Z(V, M) \to H^q(V, M) \to H^q(U, M) \to H^{q+1}_Z(V, M) \to \dots$$

et [**Mil**, VI, §5, thm. 5.1 (cohomological purity), cor. 5.3 (Gysin sequence)]. Ou on a

$$H^q_Z(V,M) = H^{q-2c}(Z, M \otimes T_{Z/V})$$

où $T_{Z/V}$ (*cf.* [**Mil**, déf. p.243]) est un faisceau donc $H^{q-2c}(Z, M\otimes T_{Z/V}) = 0$ si $c > q/2$.

□

1.6.2. Cohomologie motivique. — Edidin et Graham ont défini la cohomologie motivique de BG dans [**EG**, 2.7, 2.8] en généralisant la définition $CH^*(BG)$ de Totaro. En particulier, ils définissent des groupes de Chow supérieurs équivariants au sens de Bloch, lors que nous définissons des groupes isomorphes à l'aide de la cohomologie motivique de Voevodsky (et un théorème de comparaison non trivial du à lui). Ici nous donnons directement une définition de $H^i(BG, \mathbb{Z}(n))$ comme un exemple de $F(BG)$ construit ci-dessus.

1.6.2.1. Catégorie des motifs effectifs géométriques. — [**Voe00b**]

Soit k un corps. On note $\mathbf{Sm}(k)$ la catégorie des schémas lisses sur k et $\mathbf{SmCor}(k)$ la catégorie des schémas lisses de type fini sur k où les morphismes sont les correspondances finies. On note $[X]$ l'objet de $\mathbf{SmCor}(k)$ correspondant à un schéma lisse X. Considérons la catégorie homotopique $\mathcal{H}^b(\mathbf{SmCor}(k))$ des complexes bornés sur $\mathbf{SmCor}(k)$. Soit T la classe d'objets de $\mathcal{H}^b(\mathbf{SmCor}(k))$ formée des complexes des deux formes suivantes:

1. Pour tout schéma lisse X sur k, le complexe
$$[X \times \mathbb{A}^1] \to [X]$$
est dans T.
2. Pour tout schéma lisse X et tout recouvrement ouvert $X = U \cup V$ de X, le complexe
$$[U \cap V] \to [U] \oplus [V] \to [X]$$
est dans T.

Définition 1.6.2. — ([**MVW**, déf. 9.1]) Une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de la catégorie triangulée $\mathcal{T}$ est *épaisse* si:

(i) Soit $A \to B \to C \to A[1]$ un triangle exact dans $\mathcal{T}$. Si deux entre A, B, C sont dans $\mathcal{C}$, le troisième l'est aussi.
(ii) Si $A \oplus B \in \mathcal{C}$, alors $A \in \mathcal{C},\ B \in \mathcal{C}$.

Notons $\bar{T}$ la sous-catégorie épaisse minimale de $\mathcal{H}^b(SmCor(k))$ qui contient T.

Définition 1.6.3. — [**Voe00b**, déf. 2.1.1] Soit k un corps. La *catégorie triangulée* $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ *des motifs géométriques effectifs sur* k est l'enveloppe pseudo-abélienne du quotient de la catégorie homotopique $\mathcal{H}^b(\mathbf{SmCor}(k))$ par la sous-catégorie épaisse $\bar{T}$. On note M le foncteur $\mathbf{Sm}(k) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$.

Définition 1.6.4. — [**Voe00b**, p. 192] On définit la *catégorie des motifs géométriques* $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ comme la catégorie obtenu de $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ en inversant $\mathbb{Z}(1)$. De plus, le foncteur

$$\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \to \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$$

est pleinement fidèle grâce au théorème de simplification de Voevodsky [**Voe10**].

1.6.2.2. Complexe motivique et cohomologie motivique. —

Définition 1.6.5. — [**MVW**, déf. 3.1] Pour tout entier $q \geq 0$, le *complexe motivique* $\mathbb{Z}(q)$ est défini comme le complexe des préfaisceaux avec transfert:

$$\mathbb{Z}(q) = C_*\mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{G}_m^{\wedge q})[-q] = M(\mathbb{G}_m^{\wedge q})[-q]$$

où $\mathbb{Z}_{tr}(X)$ est un préfaisceau avec transfert représenté par X [**MVW**, déf. 2.8] et $\mathbb{Z}_{tr}(X)(U) = Cor(U, X)$, et

$$\mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{G}_m^{\wedge q}) = \mathrm{Coker}(\bigoplus_{i=1}^{q} \mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{G}_m \times \dots \widehat{\mathbb{G}_m} \dots \times \mathbb{G}_m) \to \mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m))$$

[**MVW**, déf. 2.12].

Convention: $\mathbb{Z}(q) = 0$ si $q < 0$.

Définition 1.6.6. — [**MVW**, déf. 3.4] La *cohomologie motivique* $H^p(X, \mathbb{Z}(q))$ est défini comme l'hypercohomologie des complexes motiviques $\mathbb{Z}(q)$ dans la topologie de Zariski:

$$H^p(X, \mathbb{Z}(q)) = \mathbb{H}^p_{Zar}(X, \mathbb{Z}(q)),$$

ou [**MVW**, prop. 14.16]

$$H^p(X, \mathbb{Z}(q)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(q)[p]).$$

1.6.2.3. Pureté motivique. —

Proposition 1.6.7. — *Pour $F(X) = H^q(X, \mathbb{Z}(n))$ avec $q \in \mathbb{Z}$, $F(V) \xrightarrow{\sim} F(U)$ si $c > n$. De plus, F est homotopique.*

Démonstration. — D'abord, on a une longue suite exacte de Gysin [**MVW**, thm. 15.15]:

$$H^{q-2c}(Z, \mathbb{Z}(n-c)) \to H^q(V, \mathbb{Z}(n)) \to H^q(U, \mathbb{Z}(n)) \to H^{q+1-2c}(Z, \mathbb{Z}(n-c))$$

De plus, $\mathbb{Z}(q) = 0$ si $q < 0$ (*cf.* convention après [**MVW**, déf. 3.1]), donc $H^{q-2c}(Z, \mathbb{Z}(n-c)) = 0$ si $n < c$. Et donc $H^q(V, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} H^q(U, \mathbb{Z}(n))$ si $c > n$.

D'autre part, soit $E \to X$ un fibré vectoriel. D'après [**MVW**, cor. 13.16], $M(E) \xrightarrow{\sim} M(X)$. Donc

$$\begin{aligned} H^q(E, \mathbb{Z}(n)) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(M(E), \mathbb{Z}(n)[q]) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)}(M(X), \mathbb{Z}(n)[q]) = H^q(X, \mathbb{Z}(n)). \end{aligned}$$

Donc F est homotopique. □

Exemple 1.6.8. — Pour $q = 2n$ on a $H^{2n}(X, \mathbb{Z}(n)) = CH^n(X)$ (*cf.* [**MVW**, §17]) et donc on retrouve que $CH^n(BG)$ est défini si $c > n$ comme Totaro [**Tot**, déf. 1.2].

1.6.3. Cohomologie motivique étale. —

Proposition 1.6.9. — *Pour $F(X) = H^q_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_{\text{ét}}(n))$ (cohomologie motivique étale, cf. déf. A.1.1), $F(V) \xrightarrow{\sim} F(U)$ si $c > \sup(n, (q+1)/2)$. De plus, F est homotopique.*

C'est le lemme A.2.1 dans l'appendice A.

Remarque 1.6.10. — D'après les propositions 1.6.1, 1.6.7, 1.6.9, les foncteurs $H^q_{\text{ét}}(-, M)$, $H^q(-, \mathbb{Z}(n))$, $H^q_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}_{\text{ét}}(n))$ satisfont aux axiomes de la définition 1.2.6, donc $F(BG)$ existe pour c assez grand et est contravariant en G.

1.6.4. Homologie motivique. —

Définition 1.6.11. — L'*homologie motivique* est défini [**FV**, p. 182]

$$H_i(X, \mathbb{Z}(n)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{Z}(n)[i], M(X)).$$

Proposition 1.6.12. — $H_i(-, \mathbb{Z}(n))$ *est homotopique et pur en coniveau* $c > i - n + 1$.

Démonstration. — D'après [**MVW**, thm. 15.15], on a un triangle de Gysin:

$$M(U) \to M(V) \to M(Z)(c)[2c] \to M(U)[1]$$

D'où une longue suite exacte de Hom

$$\begin{aligned} \ldots \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(n-c)[i+1-2c], M(Z)) &\to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(n)[i], M(U)) \\ \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(n)[i], M(V)) &\to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}(n-c)[i-2c], M(Z)) \to \ldots \end{aligned}$$

D'après la définition 1.6.11, ceci implique

$$\begin{aligned} \ldots H_{i+1-2c}(M(Z), \mathbb{Z}(n-c)) \to H_i(M(U), \mathbb{Z}(n)) &\to H_i(M(V), \mathbb{Z}(n-c)) \\ &\to H_{i-2c}(M(Z), \mathbb{Z}(n-c)) \to \ldots \end{aligned}$$

De plus, pour X lisse

$$H_i(X, \mathbb{Z}(n)) = 0 \text{ si } i < n \text{ [\textbf{Kah10}, prop. 6.1]}.$$

Donc $H_i(U, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} H_i(V, \mathbb{Z}(n))$ si $c > i - n + 1$.

D'autre part, $H_i(X, \mathbb{Z}(n))$ est invariant par homotopie par le même argument que dans la démonstration de la proposition 1.6.7. □

Remarque 1.6.13. — D'après la proposition 1.6.12, $H_i(BG, \mathbb{Z}(n))$ est bien défini et covariant en G.

Au chapitre suivant, on calculera le coniveau des groupes de Chow à coefficients de Rost (*cf.* cor. 2.1.12).

CHAPITRE 2

MODULES DE CYCLES DE ROST ET CLASSES NON RAMIFIÉES

2.1. Module de cycles de Rost

Dans cette partie, je rappelle la définition des modules de cycles de Rost et leurs propriétés principales. Pour plus de détails, on peut se référer à l'article de Rost (*cf.* [**Rost**]).

Soit k un corps. On note $\mathcal{F}(k)$ la classe des corps de type fini sur k.

2.1.1. Prémodules de cycles. —

Définition 2.1.1. — [**Rost**, déf. 1.1, p.328] Un *prémodule de cycles* M associe à tout $F \in \mathcal{F}(k)$ un groupe abélien gradué

$$M(F) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n(F)$$

muni les données D1-D4 et les conditions R1a-R3e suivantes:

D1: Pour tout $\varphi : F \to E$, $\varphi_* : M(F) \to M(E)$ de degré 0.
D2: Pour tout $\varphi : F \to E$ fini, $\varphi^* : M(E) \to M(F)$ de degré 0.
D3: Pour chaque F, le groupe $M(F)$ est muni d'une structure de $K_*^M F$-module (ici $K_*^M F$ est l'anneau de Milnor de F), notée $x \cdot \rho$ où $x \in K_*^M F$ et $\rho \in M(F)$. Le produit $K_n^M F \cdot M_m(F) \subset M_{n+m}(F)$ est gradué.
D4: Soit v une valuation discrète de rang un de F de type géométrique (au sens de Rost, *cf.* rem. 2.1.2) , il existe $\partial_v : M(F) \to M(\kappa(v))$

de degré -1. Pour une uniformisante π de v sur F, on pose:

$$\begin{aligned} s_v^\pi : & M(F) \to M(\kappa(v)) \\ & \rho \mapsto s_v^\pi(\rho) = \partial_v(\{-\pi\}.\rho). \end{aligned}$$

R1a: Pour $\varphi : F \to E,\ \psi : E \to L$, on a $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

R1b: Pour $\varphi : F \to E,\ \psi : E \to L$ finis, on a $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

R3a: Soient $\varphi : E \to F$ et v une valuation de F, au dessus d'une valuation non triviale w de E avec l'indice de ramification e. Soit $\bar{\varphi} : \kappa(w) \to \kappa(v)$ le morphisme induit. Alors

$$\partial_v \circ \varphi_* = e \cdot \bar{\varphi}_* \circ \partial_w.$$

R3b: Soient $\varphi : F \to E$ fini et v une valuation de F. Pour une valuation w de E au dessus de v, soit $\varphi_w : \kappa(v) \to \kappa(w)$ le morphisme induit. Alors

$$\partial_v \circ \varphi^* = \sum_w \varphi_w^* \circ \partial_w.$$

R3c: Soient $\varphi : E \to F$ et v une valuation de F qui est triviale sur E. Alors

$$\partial_v \circ \varphi_* = 0.$$

R1c, R2a, R2b, R2c, R3d, R3e (*cf.* [**Rost**, p. 329]).

Remarque 2.1.2. — [**Rost**, p. 328] On dit qu'une valuation discrète v de rang un de F est de *type géométrique* si l'anneau $\mathcal{O}_v$ de v est une localisation d'un anneau intègre de type fini en un point régulier de codimension 1. Dans ce cas, on a

$$tr.deg.(F|k) = tr.deg.(\kappa_v|k) + 1.$$

Définition 2.1.3. — Un prémodule de cycles M est dit *connectif* s'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $M_n = 0$ pour tout $n < n_0$.

2.1.2. Modules de cycles. — Soit X un schéma sur k, on écrit $M(x) = M(k(x))$ pour $x \in X$. Si X est normal, alors l'anneau local de X en $x \in X^{(1)}$ est un anneau de valuation discrète de rang un; soit $\partial_x : M_n(\xi_X) \to M_{n-1}(x)$ l'homomorphisme résidu associé, où ξ_X est le point générique de X. Pour $x, y \in X$, on a aussi un morphisme $\partial_y^x : M(x) \to M(y)$ (*cf.* [**Rost**, p. 337]).

Définition 2.1.4. — [**Rost**, déf. 2.1, p.337] Un *module de cycles* M sur k est un prémodule de cycles M sur k satisfaisant des conditions (FD) et (C) suivantes:

(FD): “SUPPORT FINI”. Soient X un schéma normal et $\rho \in M(\xi_X)$, alors $\partial_x(\rho) = 0$ pour tout $x \in X^{(1)}$ en dehors d'un ensemble fini.

(C): “FERMETURE”. Soit X intègre et local de dimension 2, alors

$$0 = \sum_{x \in X^{(1)}} \partial^x_{x_0} \circ \partial^\xi_x : M(\xi_X) \to M(x_0)$$

où ξ_X est le point générique et x_0 est le point fermé de X.

Exemples 2.1.5. —

1. La K-théorie de Milnor, la cohomologie galoisienne, la cohomologie étale sont des modules de cycles [**Rost**, rem. 2.4 et 2.5].
2. D'après [**Deg**, 6.2.1], tout foncteur additif de $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)^{op}$ (*cf.* déf. 1.6.3) vers la catégorie des groupes abéliens fournit des modules de cycles (un pour chaque $r \in \mathbb{Z}$ par la formule de [**Deg**, 6.2.1]).

   Soit $\mathrm{DM}(k)$ comme dans [**CD**, Ex. 6.25]. On a un foncteur $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \to \mathrm{DM}(k)$. Si C est un objet de $\mathrm{DM}(k)$, il définit un foncteur

   $$C' \mapsto \mathrm{Hom}(C', C)$$

   par composition un foncteur contravariant sur $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$, et donc un module de cycles. En regardant la formule de Déglise, ce module de cycles est donné par la formule

   $$M_n(F) = H^n(F, C(n+r))$$

   où on pose, pour une k-variété lisse X

   $$H^n(X, C(n+r)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}(k)}(M(X), C(n+r)[n])$$

   d'où

   $$H^n(F, C(n+r)) = \varinjlim H^n(U, C(n+r))$$

   où U parcourt les modèles lisses de F/k.
3. D'après la proposition A.1.2 (Appendice A), remplaçons C dans la partie précédente (cohomologie motivique) par $R\alpha_*\mathbb{Z}$, on déduit que la cohomologie motivique étale définit un module de cycles.

Proposition 2.1.6. — [**Rost**, prop. 2.2] *Soit M un module de cycles sur k. Alors les propriétés (H) et (RC) suivantes sont satisfaites pour tout corps F de type fini sur k.*

(H): *HOMOTOPIE POUR $\mathbb{A}^1$. La suite suivante est exacte:*

$$0 \to M_n(F) \to M_n(F(t)) \xrightarrow{\partial_x} \bigoplus_{x \in (\mathbb{A}^1_F)_{(0)}} M(x) \to 0$$

où $F(t)$ est le corps des fonctions de $\mathbb{A}^1_F$.

(RC): *RÉCIPROCITÉ POUR LES COURBES. Soit X une courbe propre et lisse sur F. Alors*

$$M(\xi_X) \xrightarrow{\partial_x} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} M(F(x)) \to M(F)$$

où ξ_X est le point générique et la flèche $M(F(x)) \to M(F)$ est de (D2), est un complexe.

Si X est intègre et satisfait (FD), on pose:

$$d = (\partial_x^\xi)_{x \in X^{(1)}} : M_n(\xi_X) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} M_{n-1}(x).$$

Définition 2.1.7. — On note:

$$A^0(X, M_n) = \operatorname{Ker} d = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \operatorname{Ker} \partial_x^\xi \subset M_n(\xi_X).$$

On peut voir $A^0(X, M)$ comme le groupe des éléments non ramifiés sur X.

2.1.3. Complexes de cycles et groupes de Chow. —

Définition 2.1.8. — ([**Rost**, 3.2, p.346]) Soient M un module de cycles sur X et p un entier. Posons

$$C_p(X, M_n) = \bigoplus_{x \in X_{(p)}} M_{n+p}(x).$$

On définit

$$d = d_X : C_p(X, M_n) \to C_{p-1}(X, M_n)$$

par $d_y^x = \partial_y^x$ avec ∂_y^x comme dans [**Rost**, 2.1.0]. Cette définition est bien déterminée par l'axiome (FD). On a $d_X \circ d_X = 0$ ([**Rost**, lem. 3.3]).

Le complexe $C_*(X, M_n) = (C_p(X, M_n), d_X)_{p\geq 0}$ est appelé le *complexe de cycles homologique* sur X à coefficients dans M_n.

On pose aussi

$$C^p(X, M_n) = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} M_{n-p}(x)$$

et on définit:

$$d = d_X : C^p(X, M_n) \to C^{p+1}(X, M_n)$$

par $d_y^x = \partial_y^x$ comme dans [**Rost**, 2.1.0]. On a aussi $d \circ d = 0$.

Le complexe $C^*(X, M_n) = (C^p(X, M_n), d_X)_{p\geq 0}$ est donc appelé le *complexe de cycles cohomologique* sur X à coefficients dans M.

On note $A_p(X, M_n)$ (*resp.* $A^p(X, M_n)$) le p-ième groupe d'homologie (*resp.* de cohomologie) du complexe $C_*(X, M_n)$ (*resp.* $C^*(X, M_n)$). De plus, Rost l'appelle le groupe de Chow des cycles de dimension p (*resp.* de codimension p) avec coefficients dans M. Ceci généralise la définition 2.1.7.

***Remarque 2.1.9* (Groupes de Chow classiques)**

On a [**Rost**, rem. 5.1]:

$$A_p(X; K_*^M, -p) = CH_p(X) \text{ et } A^p(X; K_*^M, p) = CH^p(X).$$

Par exemple, on a $CH_0(X) = A_0(X, K_0^M)$.

Remarque 2.1.10. — Si X est équidimensionnel et de dimension d, alors $X^{(p)} = X_{(d-p)}$ et $C^p(X, M_n) = C_{d-p}(X, M_{n-d})$, donc $A^p(X, M_n) = A_{d-p}(X, M_{n-d})$.

Lemme 2.1.11. — [**Rost**, (3.10), p.350] *Soient $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte et Z le fermé complémentaire. Soit p un entier positif. On a une suite exacte de complexes:*

$$0 \to C_*(Z, M_n) \to C_*(X, M_n) \to C_*(U, M_n) \to 0.$$

D'où une suite exacte de localisation [**Rost**, §5, p. 356]*:*

$$\cdots \to A_p(Z, M_n) \to A_p(X, M_n) \to A_p(U, M_n) \to A_{p-1}(Z, M_n) \to \dots$$

C'est grâce à $X_{(p)} = Z_{(p)} \cup U_{(p)}$. De plus, posons

$$\delta(M) = \inf\{i | M_i \neq 0\}.$$

On a:

i) Si $n + p < \delta(M)$: $\forall X,\ C_p(X, M_n) = 0$ donc $A_p(X, M_n) = 0$.
ii) Si $n - p < \delta(M)$: $\forall X,\ C^p(X, M_n) = 0$ donc $A^p(X, M_n) = 0$.

Donc on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.1.12. — 1. *Sous l'hypothèse du lemme 2.1.11, alors*

$$A_p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A_p(U, M_n) \text{ si } \dim Z < p - 1.$$

2. *De plus, si X est équidimensionnel, alors*

$$A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n) \text{ si } \operatorname{codim}_X Z > \inf\{n - \delta(M), p + 1\}.$$

Démonstration. — 1. C'est à cause de

$$A_p(Z, M_n) = 0 \text{ si } Z_{(p)} = \varnothing \ i.e. \ \dim Z < p.$$

2. Du lemme 2.1.11 et (1), en supposant que Z soit irréductible lisse, on déduit que

$$A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n) \text{ si } \operatorname{codim}_X Z > p + 1.$$

De plus, si $x \in X^{(p)} \cap Z$, alors $x \in Z^{(p-c)}$ donc on a une suite exacte de localisation:

$$\cdots \to A^{p-c}(Z, M_{n-c}) \to A^p(X, M_n) \to A^p(U, M_n) \to A^{p-c+1}(Z, M_{n-c}) \to \dots$$

Si $n - c < \delta(M)$ *i.e.* $c > n - \delta(M)$, alors $M_{n-c} = 0$, donc on a aussi $A^p(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^p(U, M_n)$. On en déduit (2).

□

Du corollaire 2.1.12, on déduit le corollaire suivant:

Corollaire 2.1.13. — *$A^p(-, M_n)$ est un foncteur contravariant sur $\mathbf{Sm}(k)$, homotopique de coniveau $\geq \inf\{n - \delta(M) + 1, p + 2\}$.*

D'après [**Rost**, §12, p.382], $A^p(-, M_n)$ est un foncteur contravariant et l'invariance par homotopie est démontrée dans [**Rost**, prop. 8.6, p.370].

Corollaire 2.1.14. — *Considérons $F(X) = A^p(X, H^q(\mathbb{Z}(n)))$ le terme E_2 de la suite spectrale de coniveau* [**BO**]. *Alors*

$$A^p(X, H^q(\mathbb{Z}(n))) \xrightarrow{\sim} A^p(U, H^q(\mathbb{Z}(n))) \text{ si } c > \inf\{n, p+1\}.$$

On applique le corollaire 2.1.12 et dans ce cas $\delta(M) = 0$.

2.2. Classes non ramifiées

Dans cette partie, on introduit la notion suivante:

Définition 2.2.1. — 1. Pour tout corps de fonctions K sur un corps k, on définit:

$$A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n) = \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \mathrm{Ker}(M_n(K) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A)),$$

où $\mathcal{P}(K/k)$ est l'ensemble des anneaux de valuation discrète A de rang un de type géométrique de K sur k tels que $K = \mathrm{Frac}(A)$.

2. Si X/k est un schéma lisse de corps des fonctions K, on note:

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n).$$

Remarque 2.2.2. — 1. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement

$$A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(K/k, M_n).$$

2. De plus, on a

$$A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \subset A^0(X, M_n).$$

3. Si $M_n(K) = H^n(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n+i))$, $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ est le groupe de cohomologie non ramifiée de K défini par Colliot-Thélène et Ojanguren [**CTO**, déf. 1.1.1, p. 143]:

$$\begin{aligned} &H^n_{\mathrm{nr}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n+i)) \\ &= \bigcap_{A \in \mathcal{P}(K/k)} \mathrm{Ker}(H^n_{\text{ét}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n+i)) \xrightarrow{\partial_A} H^{n-1}_{\text{ét}}(\kappa_A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(n+i-1))). \end{aligned}$$

Lemme 2.2.3. — *Soit $f : K \hookrightarrow L$ une extension de corps. Alors $f_* : M_n(K) \to M_n(L)$ envoie $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ dans $A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$.*

Démonstration. — Soit $B \in \mathcal{P}(L/k)$. Si B est trivial sur K, alors d'après (R3c) (*cf.* déf. 2.1.1), on a $\partial_B \circ f_* = 0$. Si B est au dessus $A \in \mathcal{P}(K/k)$ avec l'indice de ramification e, alors d'après la propriété (R3a) (*cf.* déf. 2.1.1), le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} M_n(L) & \xrightarrow{\partial_B} & M_{n-1}(\kappa_B) \\ {\scriptstyle f_*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle e\cdot\bar{f}_*} \\ M_n(K) & \xrightarrow{\partial_A} & M_{n-1}(\kappa_A). \end{array}$$

Soit $x \in A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$. Alors $\partial_A(x) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(K/k)$ et donc $\partial_B(f_*(x)) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{P}(L/k)$ *i.e.* $f_*(x) \in A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$. Donc $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ est bien envoyé dans $A^0_{\mathrm{nr}}(L, M_n)$. □

Soit $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$ la catégorie des schémas lisses de type fini sur k dont les morphismes sont dominants (*cf.* déf. 1.2.6). Soit $X \to Y$ dans $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$, alors $k(Y) \hookrightarrow k(X)$ et donc le lemme 2.2.3 donne un morphisme:

$$A^0_{\mathrm{nr}}(Y, M_n) \to A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n)$$

tel que $A^0_{\mathrm{nr}} \to A^0$ soit une transformation naturelle. On en déduit que $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ est un foncteur contravariant sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$. De plus, ça fait de $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ un sous-foncteur de $A^0(-, M_n)$ sur $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$.

Proposition 2.2.4. — *Le foncteur*

$$X \mapsto A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n)$$

est homotopique et pur en coniveau 1 *sur* $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$.

Démonstration. — Il nous faut vérifier deux propriétés:

i) Pureté: Soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte. D'après la définition de $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ on a tout de suite:

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(U, M_n)$$

car $k(X) = k(U)$. C'est vrai pour tout ouvert dense de X, donc $A^0_{\mathrm{nr}}(-, M_n)$ est de coniveau 1.

ii) Homotopie: on utilise la même méthode que Colliot-Thélène et Ojanguren (*cf.* [**CTO**, prop. 1.2]).

Soit $p : V \to X$ un fibré vectoriel. Soit U un ouvert de X. D'après i), on a:

$$\begin{array}{ccc} A^0_{\mathrm{nr}}(V, M_n) & \xrightarrow{\sim} & A^0_{\mathrm{nr}}(f^{-1}(U), M_n) \\ {\scriptstyle p^*}\uparrow & & \uparrow \\ A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) & \xrightarrow{\sim} & A^0_{\mathrm{nr}}(U, M_n). \end{array}$$

Quand U est assez petit, on a $f^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{A}^m$. Donc pour montrer que p^* est un isomorphisme, on peut se limiter au cas $V = X \times \mathbb{A}^1$.

D'après le lemme 2.2.3, on a:

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \to A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n).$$

D'après la propriété (H) (*cf.* prop. 2.1.6), on a:

$$A^0_{\mathrm{nr}}(k(V)/k(X), M_n) \xleftarrow{\sim} M_n(k(X)).$$

Et donc grâce au diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n) \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed] & A^0_{\mathrm{nr}}(V/k(X), M_n) \\ A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \arrow[u] \arrow[r, hook] & M_n(k(X)) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

on a:

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X/k, M_n) \hookrightarrow A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n).$$

Réciproquement, soit $\zeta \in A^0_{\mathrm{nr}}(V/k, M_n)$. Si $B \in \mathcal{P}(k(V)/k)$ est trivial sur $k(X)$, alors d'après (R3c) (*cf.* déf. 2.1.1), le morphisme composé suivant est trivial:

$$M_n(k(X)) \to M_n(k(V)) \xrightarrow{\partial_B} M_{n-1}(\kappa_B).$$

Donc, en utilisant (H), on obtient que ζ vient d'un élément bien déterminé, que nous noterons encore ζ, de $M_n(k(X))$. Soit $A \in \mathcal{P}(k(X)/k)$. Il existe $B \in \mathcal{P}(k(V)/k)$ au dessus de A tel que $\kappa_B = \kappa_A(t)$ (*cf.* [**Bour1**, prop. 2, p.157]). On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \zeta \in M_n(k(X)) & \xrightarrow{\partial_A} & M_{n-1}(\kappa_A) \\ {\scriptstyle p^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}^*} \\ M_n(k(V)) & \xrightarrow{\partial_B} & M_{n-1}(\kappa_B) \end{array}$$

parce que dans ce cas, l'indice de ramification de B sur A (R3a) est égal à 1.

De plus, d'après la propriété (H) (*cf.* prop. 2.1.6), $\bar{p}^*$ est injectif. D'où on a $\partial_A(\zeta) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(k(X)/k)$ et donc $\zeta \in A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n)$. Ainsi,

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(V, M_n).$$

□

Définition 2.2.5. — Soient k un corps et X une k-variétée intègre (ou lisse). On dit que

- X est *k-rationnel* si elle est k-birationnel avec un espace affin *i.e.* $k(X) \xrightarrow{\sim} k(\mathbb{A}^n_k)$.
- X est *stablement k-rationnel* si $X \times_k \mathbb{A}^n$ est k-rationnel.

Corollaire 2.2.6. — *Si X est stablement k-rationnel, alors*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(k(X), M_n) = M_n(k).$$

Démonstration. — Si X est stablement rationnel, utilisant la propriété (H) de la proposition 2.1.6 par récurence, on a

$$M_n(k) = A^0_{\mathrm{nr}}(k(\mathbb{A}^m), M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(k(X \times \mathbb{A}^l), M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(k(X), M_n).$$

□

Si X/k est lisse et propre, Rost a montré que $A^0(X, M_n)$ est un invariant birationnel (*cf.* [**Rost**, cor. 12.10]). On a un résultat plus précis:

Proposition 2.2.7. — *Si X/k est lisse et propre, alors*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n) = A^0(X, M_n).$$

Démonstration. — On utilise [**CT**, prop. 2.1.8 e)] qui dit que: Soient F un foncteur de la catégorie des k-algèbres vers une catégorie abélienne et X/k une variété intègre de corps des fonctions $k(X)$. Posons:

$$F_1(X) = \{\alpha \in F(k(X)) \mid \forall P \in X^{(1)},\ \alpha \in \mathrm{Im} F(\mathcal{O}_{X,P})\}$$
$$F_{\mathrm{nr}}(k(X)/k) = \{\alpha \in F(k(X)) \mid \forall A \in \mathcal{P}(k(X)/k),\ \alpha \in \mathrm{Im} F(A)\}.$$

Si F satisfait la condition de la pureté en codimension un pour les anneaux locaux réguliers A de corps des fractions K *i.e.*

$$\operatorname{Im}(F(A) \to F(K)) = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \operatorname{Im}(F(A_p) \to F(K)) \tag{2.2.1}$$

où p est de hauteur un dans A, alors

$$F_1(X) = F_{\text{nr}}(k(X)).$$

Considérons $F = A^0(-, M_n)$, on a:

$$\begin{aligned} F_1(X) &= \bigcap_{x \in X^{(1)}} \operatorname{Im}(A^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}, M_n) \to A^0(k(X), M_n)) \\ &= A^0(X, M_n) \\ F_{\text{nr}}(k(X)/k) &= \bigcap_{A \in \mathcal{P}(k(X)/k)} \operatorname{Im}(A^0(\operatorname{Spec} A, M_n) \to A^0(k(X), M_n)) \\ &= A^0_{\text{nr}}(k(X), M_n) \end{aligned}$$

grâce à la définition 2.1.7 et $A^0(k(X), M_n) = M_n(k(X))$.

Donc il nous faut vérifier (2.2.1) pour $F = A^0(-, M_n)$ *i.e.*

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}(A^0(\operatorname{Spec} A, M_n) \to A^0(K, M_n)) \\ &\qquad = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \operatorname{Im}(A^0(\operatorname{Spec} A_p, M_n) \to A^0(K, M_n)) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

D'après la définition de $A^0(-, M_n)$ (*cf.* déf. 2.1.7), on a $A^0(K, M_n) = M_n(K)$ et

$$A^0(\operatorname{Spec} A, M_n) = \bigcap_{p,\ ht(p)=1} \operatorname{Ker}(M_n(K) \to M_{n-1}(\kappa_p)),$$

$$A^0(\operatorname{Spec} A_p, M_n) = \operatorname{Ker}(M_n(K) \to M_{n-1}(\kappa_p)).$$

D'où on en déduit (2.2.2). Enfin, en appliquant [**CT**, prop. 2.1.8 e)], on a:

$$A^0_{\text{nr}}(X, M_n) = A^0(X, M_n).$$

□

2.3. Représentabilité

Merkurjev a défini aussi le groupe $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ et il le note $M_n(K)_{\mathrm{nr}}$ [**Mer**, §2.2] . En particulier, il a montré [**Mer**, thm. 2.10] que: pour X lisse et propre, le foncteur

$$M \mapsto A^0_{\mathrm{nr}}(k(X), M) = A^0(X, M)$$

de la catégorie des modules de cycles vers une catégorie abélienne est coreprésentable par K^X où

$$K^X_n(F) = A_0(X_F, K^M_n)$$

pour tout corps de fonctions F/k et $K^X_0(F) = CH_0(X_F)$.

Mais Kahn vient de montrer un résultat plus général [**Kah10**, thm. 1.3]: pour X lisse,

$$M \mapsto A^0(X, M)$$

est coreprésentable par H^X où

$$H^X_n(F) = H_{-n}(X_F, \mathbb{Z}(-n))$$

pour tout corps de fonctions F/k et $H^X_0(k) = H_0(X, \mathbb{Z}(0)) = H^S_0(X)$ (homologie de Suslin). Si X est projectif, on a $H^X = K^X$.

Lemme 2.3.1. — *Le foncteur $X \mapsto H^X$ est homotopique et pur en-coniveau ≥ 2. Donc H^{BG} est bien défini pour G un k-groupe algébrique linéaire. De plus, $H^{BG} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est connectif (cf. déf. 2.1.3) où p est l'exposant caractéristique de k.*

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition 1.6.12. Donc d'après la définition 1.2.13, H^{BG} est bien défini. De plus, on a

$$H^{BG}_n = H^{U_G/G}_n$$

où U_G est un G-torseur linéaire de coniveau ≥ 2 (*cf.* déf. 1.2.1). Comme U_G/G est une variété lisse, $H^{U_G/G} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ et donc $H^{BG} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ est connectif d'après [**Kah10**, prop. 6.7]. □

Remarque 2.3.2. — Supposons k de caractéristique p et G fini d'ordre premier à p. On a $H_i(k, \mathbb{Z}(n)) = 0$ si $n > 0$, donc

$$\tilde{H}_i(BG, \mathbb{Z}(n)) = H_i(BG, \mathbb{Z}(n)).$$

Ce groupe est annulé par l'ordre de G qui est premier à p. Donc on peut enlever $\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ dans le lemme 2.3.1.

Théorème 2.3.3. — *Pour G un groupe algébrique linéaire, on a*

$$A^0(BG, M_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BG}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{HI}}(h_0^{Nis}(BG), \mathcal{M}_0)$$

où $\mathcal{M}_0(U) = A^0(U, M_0)$.

C'est grâce à [**Kah10**, thm. 1.3, thm. 1.4] et au lemme 2.3.1 en remarquant que

$$\mathrm{HI} \to \mathrm{PST}$$

où HI est la catégorie des faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie et PST est la catégorie des préfaisceaux Nisnevich avec transferts, est pleinement fidèle, donc $\mathrm{Hom}_{\mathrm{HI}} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{PST}}$.

2.4. Résidus géométriques

Je présente ici les résidus géométriques construits par Bruno Kahn, inspiré par Peyre et Voevodsky.

2.4.1. La construction F_{-1} de Voevodsky. —

Définition 2.4.1. — Soit F un foncteur contravariant de $\mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}(k)$ vers la catégorie des groupes abéliens. On définit pour $X \in \mathbf{Sm}_{\mathrm{dom}}$ (*cf.* [**Voe00a**, 3.1]):

$$F_{-1}(X) = \mathrm{Coker}(F(X \times \mathbb{A}^1) \to F(X \times (\mathbb{A}^1 - \{0\}))) \tag{2.4.1}$$

et on note

$$\partial^F : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X).$$

Si F est défini sur $\mathbf{Sm}$ tout entier, on note

$$s^F : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F(X)$$

défini par $1 \in \mathbb{G}_m$.

Lemme 2.4.2. — *Si F est invariant par homotopie et fonctoriel sur la catégorie des k-schémas lisses $\mathbf{Sm}(k)$, alors*

$$(s^F, \partial^F) : F(X \times \mathbb{G}_m) \to F(X) \oplus F_{-1}(X)$$

est un isomorphisme pour tout X.

Démonstration. — Comme F est invariant par homotopie, $F(X) \xrightarrow{\sim} F(X \times \mathbb{A}^1)$. De plus, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} F(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^F"] \arrow[dl, bend right, "s^F"'] & F_{-1}(X) \arrow[r] & 0 \\ F(X) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, bend right, "p^*"'] & & & \end{tikzcd}$$

où $p : X \times \mathbb{G}_m \to X$ est la projection sur X. Comme $s^F \circ p^* = id$, on a

$$F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} F(X) \oplus F_{-1}(X).$$

$\square$

***Exemples 2.4.3* ($F_{-1}(X)$ pour certains foncteurs F)**

1. Soit $F(X) = H^i(X, \mathbb{Z}(n))$ (cohomologie motivique). Considérons l'immersion fermée $\{1\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1$, alors on a un triangle de Gysin [**MVW**, thm. 15.15]

$$M(\mathbb{G}_m) \to M(\mathbb{A}^1) \to M(\{1\})(1)[2] \xrightarrow{+1}$$

D'où la longue suite exacte suivante

$$H^i(X \times \mathbb{A}^1, \mathbb{Z}(n)) \to H^i(X \times \mathbb{G}_m, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{(1)} H^{i-1}(X, \mathbb{Z}(n-1))$$
$$\xrightarrow{(2)} H^{i+1}(X \times \mathbb{A}^1, \mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{(3)} H^{i+1}(X \times \mathbb{G}_m, \mathbb{Z}(n))$$

D'après le lemme 2.4.2, (3) est injectif scindé donc (2) est nul et donc (1) est surjectif, soit

$$F_{-1}(X) = H^{i-1}(X, \mathbb{Z}(n-1)).$$

On a le même résultat pour la cohomologie étale, cohomologie motivique étale *i.e.*

- Si $F(X) = H^i_{\text{ét}}(X, M)$, alors $F_{-1}(X) = H^{i-1}_{\text{ét}}(X, M(-1))$;
- Si $F(X) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$, alors $F_{-1}(X) = H^{i-1}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n-1))$.

2. Soit $F(X) = A^0(X, M_n)$. On a une suite exacte de localisation (*cf.* la preuve du cor. 2.1.12)

$$A^0(X \times \mathbb{A}^1, M_n) \to A^0(X \times \mathbb{G}_m, M_n) \xrightarrow{(4)} A^0(X, M_{n-1})$$
$$\xrightarrow{(5)} A^1(X \times \mathbb{A}^1, M_n) \xrightarrow{(6)} A^1(X \times \mathbb{G}_m, M_n)$$

D'après le corollaire 2.1.13 et le lemme 2.4.2, (6) est injectif scindé donc (5) est nul et donc (4) est surjectif, soit

$$F_{-1}(X) = A^0(X, M_{n-1}).$$

Lemme 2.4.4. — *Si F est homotopique et pur en coniveau $\geq c$, alors F_{-1} l'est aussi. Par conséquent, pour G un k-groupe algébrique linéaire, $F_{-1}(BG)$ est bien défini.*

Démonstration. — Soit $E \to X$ un fibré vectoriel, d'après l'hypothèse sur F, on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd} F(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F_{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & 0 \\ F(E \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] & F(E \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & F_{-1}(E) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Donc il existe un morphisme $F_{-1}(X) \to F_{-1}(E)$ et c'est un isomorphisme grâce au diagramme ci-dessus.

De plus, soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte de coniveau $\delta(X, U) \geq c$, comme F est homotopique et pur de coniveau $\geq c$, on a aussi un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd} F(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F_{-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & 0 \\ F(U \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] & F(U \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & F_{-1}(U) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Donc $F_{-1}(X) \xrightarrow{\sim} F_{-1}(U)$. Ainsi, F_{-1} est homotopique et pur de coniveau $\geq c$.

D'où $F_{-1}(BG)$ est bien défini d'après la définition 1.2.13.

□

2.4.2. Résidus géométriques à la Kahn. —

***Construction 2.4.5* (B. Kahn)**. — *Soient k un corps et m un entier inversible dans k. Soit X un schéma lisse sur k. Soit F un foncteur homotopique et pur en coniveau $\geq c$. Le morphisme résidu*

$$\partial_m^F : F(X \times B\mu_m) \to F_{-1}(X) \tag{2.4.2}$$

où $F(X \times B\mu_m)$ est comme dans le corollaire 1.4.4, est défini de la manière suivante:

Utilisant la remarque 1.2.16 (1) pour $\mu_m \subset \mathbb{G}_m$ en remarquant que $\mathbb{G}_m/\mu_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_m$ et l'exemple 1.2.8, on obtient une composition:

$$F(X \times B\mu_m) \to F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X).$$

De manière équivalente, soit U un $\mathbb{G}_m$-torseur linéaire de coniveau $\geq c$. Considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{G}_m \arrow[d] & U \times \mathbb{G}_m \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & U \arrow[d] \\
\mathbb{G}_m & \mathbb{G}_m/\mu_m \arrow[l, "\times m"', "\sim"] & (U \times \mathbb{G}_m)/\mu_m \arrow[l, "\bar{\pi}_1"'] \arrow[r, "\bar{\pi}_2"] & U/\mu_m.
\end{tikzcd}$$

La ligne du bas induit un diagramme

$$\begin{aligned}
F(X \times (U/\mu_m)) &\to F(X \times (U \times \mathbb{G}_m)/\mu_m) \\
&\xleftarrow{\sim} F(X \times (\mathbb{G}_m/\mu_m)) \xleftarrow{\sim} F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X).
\end{aligned}$$

D'où on déduit (2.4.2).

***Lemme 2.4.6* (B. Kahn).** — *Suppposons que F soit défini sur $\mathbf{Sm}(k)$. Le morphisme résidu (2.4.2) est compatible avec celui considéré par Peyre dans* [**Pey08**, (13) p. 207] *i.e. le morphisme ∂_{A_χ} dans la démonstration du théorème 2.7.4 (voir ci-dessous).*

Démonstration. — Soit $U = \mathbb{A}^n - \{0\}$ et faisons opérer $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{A}^n$ et donc sur U par homothéties. Choisissons un point rationnel $x \in U(k)$: ce point définit un morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant $\varphi : \mathbb{G}_m \to U$, d'où un morphisme:

$$\bar{\varphi} : \mathbb{G}_m \xleftarrow{\sim} \mathbb{G}_m/\mu_m \to U/\mu_m.$$

Soit $\gamma : \mathbb{G}_m \to U \times \mathbb{G}_m$ le transposé du graphe de φ: c'est une section μ_m-équivariante de π_1 telle que $\pi_2 \circ \gamma = \varphi$. Par conséquent γ induit une section $\bar{\gamma}$ de $\bar{\pi}_1$ telle que $\bar{\pi}_2 \circ \bar{\gamma} = \bar{\varphi}$, ce qui implique que la composition:

$$F(X \times (U/\mu_m)) \xrightarrow{\bar{\varphi}^*} F(X \times \mathbb{G}_m) \to F_{-1}(X)$$

est égale à (2.4.2).

De plus, l'inclusion d'une droite L dans $\mathbb{A}^n$ induit un morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant $L - \{0\} \to U$, qui correspond à φ par le choix d'un point rationnel de $L - \{0\}$. Ceci montre que le résidu (2.4.2) est compatible avec celui considéré par Peyre dans [**Pey08**, (13) p. 207]. □

2.4.3. Résidus géométriques à la Peyre. — À partir de maintenant, on suppose que $\mu_m \subset k$.

Définition 2.4.7. — Soient G un groupe fini, $I = \mu_m$, $D \subset G$ et $g : I \to Z_G(D)$ un homomorphisme. On note $\varphi : D \times I \to G$ défini par $\varphi(d, i) = d.g(i)$. On définit un morphisme:

$$\partial^F_{D,g} : F(BG) \xrightarrow{\varphi^*} F(B(D \times I)) \xrightarrow{\sim} F(BD \times BI) \xrightarrow{\partial^F_m} F_{-1}(BD)$$

où ∂^F_m est comme dans (2.4.2), l'isomorphisme est de (1.5.1) et $F_{-1}(BD)$ est comme dans le lemme 2.4.4.

Exemples 2.4.8. — D'après les exemples 2.4.3, on a des résidus suivants:

$$\begin{aligned}
\partial^F_{D,g} &: H^n_{\text{ét}}(BG, \mu_m^{\otimes j}) \to H^{n-1}_{\text{ét}}(BD, \mu_m^{\otimes(j-1)}),\\
\partial^F_{D,g} &: H^n_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(q)) \to H^{n-1}_{\text{ét}}(BD, \mathbb{Z}(q-1)),\\
\partial^F_{D,g} &: H^n(BG, \mathbb{Z}(q)) \to H^{n-1}(BD, \mathbb{Z}(q-1)),\\
\partial^F_{D,g} &: A^0(BG, M_n) \to A^0(BD, M_{n-1}).
\end{aligned}$$

Proposition 2.4.9. — *$\partial^F_{D,g}$ est canonique et fonctoriel en F.*

Démonstration. — Soit $F \to F'$ une transformation naturelle. Comme $G \mapsto F(BG)$ est un foncteur en G (*cf.* prop. 1.4.2), on a tout de suite le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F(BG) \arrow[r] \arrow[d] & F'(BG) \arrow[d] \\
F(BD \times BI) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^F_m"] & F'(BD \times BI) \arrow[d, "\partial^{F'}_m"] \\
F_{-1}(BD) \arrow[r] & F'_{-1}(BD)
\end{tikzcd}$$

d'après la définition de $\partial^F_m, \partial^{F'}_m$ comme (2.4.2). □

2.5. Résidu d'un cup-produit

2.5.1. Cas particulier. — Soient $X \in \mathbf{Sm}(k)$ et $f : X \to \mathbb{G}_m$ ($f \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*)$). Soit $\Gamma_f : X \to X \times \mathbb{G}_m$ le graphe de f. Soit F un foncteur contravariant homotopique et pur en coniveau $\geq c$. On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} F(X \times \mathbb{A}^1) \arrow[r] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "\Gamma_f^*"] & F_{-1}(X) \arrow[r] & 0 \\ & F(X) \arrow[ul, "\sim"] & & \end{tikzcd}$$

Si $f = 1$, alors $\Gamma_f^* = s^F$ (la section dans le lemme 2.4.2) et donc on a

$$F(X \times \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} F(X) \oplus F_{-1}(X). \tag{2.5.1}$$

Posons $\{f\}^* := \Gamma_f^* - \Gamma_1^*$. Alors $\{f\}^* = 0$ sur $F(X \times \mathbb{A}^1)$ et donc induit un morphisme

$$\{f\}^* : F_{-1}(X) \to F(X). \tag{2.5.2}$$

Maintenant, soit la diagonale $\Delta : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$. On a le morphisme

$$(1_X \times \Delta)^* : F(X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \to F(X \times \mathbb{G}_m).$$

Par transport de structure, il définit un morphisme $\tilde{\Delta}$:

$$\begin{tikzcd} F(X \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "(1_X \times \Delta)^*"] \arrow[d, "\wr"] & F(X \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\wr"] \\ F(X) \oplus 2F_{-1}(X) \oplus F_{-2}(X) \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] & F(X) \oplus F_{-1}(X) \end{tikzcd}$$

où $F_{-2} = (F_{-1})_{-1}$ et l'isomorphisme à gauche est comme (2.5.1) en appliquant deux fois $f = 1$.

On va calculer $\tilde{\Delta}$ dans le cas particulier où F provient d'un foncteur sur $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ (*cf.* déf. 1.6.3). Le lemme suivant jusitifie la notion (2.5.2):

Lemme 2.5.1. — *Si F provient d'un foncteur sur $\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ et $X = \operatorname{Spec} k$, alors $\{f\}^*$ est induit par le cup-produit par $\{f\} \in K_1^M(k)$ pour $f \in k^*$.*

Démonstration. — Dans ce cas, $\Gamma_f^* - \Gamma_1^*$ provient de

$$M(X) \xrightarrow{\Gamma_f - \Gamma_1} M(X \times \mathbb{G}_m) = M(X) \oplus M(X)(1)[1] \xrightarrow{pr} M(X)(1)[1]$$

pour $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$. Si on considère $X = \operatorname{Spec} k$ d'où $f \in k^*$, alors

$$\Gamma_f - \Gamma_1 \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(1)[1]) \cong K_1^M(k) \text{ [\textbf{MVW}, thm. 5.1]}.$$

Donc on a un isomorphisme qui identifie $\Gamma_f - \Gamma_1$ à $\{f\} \in K_1^M(k) \cong k^*$. $\square$

Proposition 2.5.2. — *Supposons que F se factorise en*

$$\mathbf{Sm}(k)^{op} \xrightarrow{M^{op}} \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)^{op} \xrightarrow{F} Ab.$$

Alors $\tilde{\Delta}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum & \{-1\} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — On choisit la décomposition $M(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1]$ donné par le point $1 \in \mathbb{G}_m$. Cela donne exactement (2.5.1) sur $F(X \times \mathbb{G}_m)$ et $F_{-1}(M(X)) = F(M(X)(1)[1])$. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
F(M(X) \otimes M(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m)) \arrow[r, "(1_X \times \Delta)^*"] \arrow[d, "\wr"] & F(M(X) \otimes M(\mathbb{G}_m)) \arrow[d, "\wr"] \\
F(M(X) \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1])^{\otimes 2}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & F(M(X) \otimes (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1])) \arrow[d, "\wr"] \\
F(M(X)) \oplus 2F_{-1}(M(X)) \oplus F_{-2}(M(X)) \arrow[r, "\tilde{\Delta}"] & F(M(X)) \oplus F_{-1}(M(X))
\end{tikzcd}$$

Dans ce cas, la nature de $\tilde{\Delta}$ est induite par

$$M(\Delta) : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1)[1] \to \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}(1)[1] \oplus \mathbb{Z}(2)[2]$$

et on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}(j)[j], \mathbb{Z}(i)[i]) = \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(i-j)[i-j]) &= K_{i-j}^M(k) \text{ si } i \geq j, \\ &= 0 \text{ si } i < j. \end{aligned}$$

D'après [**HK**, lem. 7.4 et cor. 7.9(b)], on trouve que $\tilde{\Delta}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sum & \{-1\} \end{pmatrix}$$

où $\sum : 2F_{-1}(M(X)) \to F_{-1}(M(X))$ est induit par $\mathbb{Z}(1)[1] \to 2\mathbb{Z}(1)[1]$ et $\{-1\} : F_{-2}(M(X)) \to F_{-1}(M(X))$ est induit par $\{-1\} : \mathbb{Z}(1)[1] \to$

$\mathbb{Z}(2)[2]$ (*cf.* lemme 2.5.1), qui est compatible avec celui de [**HK**, cor. 7.9(b)].

□

2.5.2. Cas général. — Soient F, G, H dans la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathbf{Sm}(k)$ vers les groupes abéliens et supposons que pour tous schémas $X, Y \in \mathbf{Sm}(k)$, on ait un produit externe:

$$F(X) \otimes G(Y) \to H(X \times Y) \tag{2.5.3}$$

bifonctoriel en (X, Y). D'où un produit interne:

$$F(X) \otimes G(X) \to H(X \times X) \to H(X)$$

où la dernière flèche est donnée par la diagonale $X \to X \times X$.

Considérons le diagramme commutatif de suites exactes:

$$\begin{tikzcd}
F(X\times\mathbb{A}^1)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F(X\times\mathbb{G}_m)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(X)\otimes G(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & 0 \\
H(X\times Y\times\mathbb{A}^1) \arrow[r] & H(X\times Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] & H_{-1}(X\times Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donc il existe un morphisme

$$F_{-1}(X) \otimes G(Y) \to H_{-1}(X \times Y), \tag{2.5.4}$$

et de manière analogue

$$F(X) \otimes G_{-1}(Y) \to H_{-1}(X \times Y). \tag{2.5.5}$$

Pour $Y = X$, on a

$$F(X) \otimes G_{-1}(X) \oplus F_{-1}(X) \otimes G(X) \to H_{-1}(X \times X) \to H_{-1}(X).$$

Considérons encore le diagramme commutatif de suites exactes suivant:

$$\begin{tikzcd}
F(X\times\mathbb{A}^1)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F(X\times\mathbb{G}_m)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(X)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & 0 \\
H_{-1}(X\times Y\times\mathbb{A}^1) \arrow[r] & H_{-1}(X\times Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] & H_{-2}(X\times Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Donc il existe un morphisme

$$F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) \to H_{-2}(X \times Y). \tag{2.5.6}$$

Théorème 2.5.3. — *Soient $x \in F(X \times \mathbb{G}_m)$ et $y \in G(X \times \mathbb{G}_m)$, notons xy leur cup-produit dans $H(X \times \mathbb{G}_m)$, on aura*

$$\partial^H(xy) = \partial^F(x)s^G(y) + s^F(x)\partial^G(y) + \{-1\}\partial^F(x)\partial^G(y). \tag{2.5.7}$$

Démonstration. — Appliquons ce qui précède, on a des diagrammes commutatifs:

$$\begin{tikzcd}
F_{-1}(X) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "1\times\partial^G"] & H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\partial^{H_{-1}}"] \\
F_{-1}(X) \otimes G_{-1}(Y) \arrow[r] & H_{-2}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
F_{-1}(X) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "1\times s^G"] & H_{-1}(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "s^{H_{-1}}"] \\
F_{-1}(X) \otimes G(Y) \arrow[r] & H_{-1}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

où $s^G, s^{H_{-1}}$ sont des spécialisations comme dans le lemme 2.4.2.

Maintenant considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
F(X \times \mathbb{G}_m) \otimes G(Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & (F(X) \oplus F_{-1}(X)) \otimes (G(Y) \oplus G_{-1}(Y)) \arrow[dd] \\
H(X \times \mathbb{G}_m \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\wr"] & \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(1_{X\times Y}\times\Delta)^*"] & H(X \times Y) \oplus 2H_{-1}(X \times Y) \oplus H_{-2}(X \times Y) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X \times Y \times \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\sim"] & H(X \times Y) \oplus H_{-1}(X \times Y)
\end{tikzcd}$$

où la longue flèche de droite est construite à partir de (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5), (2.5.6). D'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(X\times\mathbb{G}_m)\otimes G(Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^F\times s^G+s^F\times\partial^G", "+\partial^F\times\partial^G"'] \arrow[d] & F_{-1}(X)\otimes G(Y)\oplus F(X)\otimes G_{-1}(Y)\oplus F_{-1}(X)\otimes G_{-1}(Y) \arrow[d] \\
H(X\times Y\times\mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "(1_{X\times Y}\times\Delta)^*"] & 2H_{-1}(X\times Y)\oplus H_{-2}(X\times Y) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X\times Y\times\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] & H_{-1}(X\times Y)
\end{tikzcd}$$

Si $Y=X$, on aura

$$\begin{tikzcd}
F(X\times\mathbb{G}_m)\otimes G(X\times\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^F\times s^G+s^F\times\partial^G", "+\partial^F\times\partial^G"'] \arrow[d] & F_{-1}(X)\otimes G(X)\oplus F(X)\otimes G_{-1}(Y)\oplus F_{-1}(X)\otimes G_{-1}(X) \arrow[d] \\
H(X\times X\times\mathbb{G}_m\times\mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, "(1_{X\times X}\times\Delta)^*"] & 2H_{-1}(X\times X)\oplus H_{-2}(X\times X) \arrow[d, "\tilde{\Delta}"] \\
H(X\times X\times\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] \arrow[d, "(\Delta_X\times 1)^*"] & H_{-1}(X\times X) \arrow[d, "(\Delta_X)^*"] \\
H(X\times\mathbb{G}_m) \arrow[r, "\partial^H"] & H_{-1}(X)
\end{tikzcd}$$

où Δ_X est la diagonale $X\xrightarrow{\Delta_X}X\times X$. Du diagramme ci-dessus et de la proposition 2.5.2, on a:

$$\partial^H(xy)=\partial^F(x)s^G(y)+s^F(x)\partial^G(y)+\{-1\}\partial^F(x)\partial^G(y).$$

□

Corollaire 2.5.4. — *Comme les résidus géométriques se factorisent par $F(X\times\mathbb{G}_m)\to F_{-1}(X)$, nous avons la formule (2.5.7) dans tous les cas: ∂^F de la définition 2.4.1, ∂^F_m de (2.4.2), $\partial^F_{D,g}$ de la définition 2.4.7.*

Remarque 2.5.5. — La formule (2.5.7) est analogue à celle de Rost [**Rost**, **P3**, p. 331] (Un signe apparaît en plus chez Rost parce que les modules de cycles sont gradués).

2.6. Classes non ramifiées sur un espace classifiant

Remarque 2.6.1. — Soient G un groupe algébrique linéaire et W une représentation très fidèle de G sur un corps k (*cf.* déf. 1.2.1).

D'après le corollaire 2.1.13, la proposition 2.2.4 et la définition de $F(BG)$ (*cf.* déf. 1.2.13), $A^0(BG, M_n)$ et $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ ont un sens et sont contravariants en G.

De plus, comme $A^0(-, M_n)$ est homotopique et pur en coniveau ≥ 2 (*cf.* cor. 2.1.13), on écrit $A^0(BG, M_n) = A^0(U/G, M_n)$ pour un ouvert U de W qui est l'espace total d'un G-torseur et de coniveau $\delta(W, U) \geq 2$.

Totaro a une remarque similaire sur le coniveau [**GMS**, appendix C]. De plus, l'argument de [**GMS**, appendix C] démontre:

Théorème 2.6.2. — *Pour tout groupe G algébrique linéaire sur un corps k, on a*

$$A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Inv}_k(G, M_n)$$

où $\mathrm{Inv}_k(G, M_n)$ *est le groupe des invariants de G à valeur dans M_n défini par Serre* [**GMS**, déf. 1.1], *c'est l'ensemble des morphismes de foncteurs $A \to M_n$ où*

$$A : Corps/k \to Ens, \;\; A(F) = H^1(F, G).$$

2.6.1. Le foncteur $A^0_{\mathrm{NR}}(-, M_n)$. —

Définition 2.6.3. — Soit k un corps contenant le groupe des racines de l'unité $I = \mu_m$ où m est inversible dans k. Soit G un groupe fini et supposons que l'exposant de G divise m. On définit:

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \bigcap_{(D \subset G,\ g: I \to Z_G(D))} \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1})),$$

où $\partial_{D,g}$ est comme dans la définition 2.4.7.

Remarque 2.6.4. — $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ est indépendant du choix de m. En effet, supposons que m divise m' et que $\mu_{m'} \subset k$. Comme l'exposant de G divise m, il divise m'. Si $g : \mu_m \to Z_G(D)$, soit $g' : \mu_{m'} \twoheadrightarrow \mu_m \xrightarrow{g} Z_G(D)$ la composition de la surjectivité $\mu_{m'} \twoheadrightarrow \mu_m$ et de g. Donc $\partial_{D,g} = \partial_{D,g'}$.

Réciproquement, si $g' : \mu_{m'} \to Z_G(D)$, alors $g'(\mu_{m'})$ est un sous-groupe cyclique de G donc d'ordre divise m. D'où g' se factorise par

$$\begin{tikzcd} \mu_{m'} \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & Z_G(D) \\ \mu_m \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Alors $\partial_{D,g} = \partial_{D,g'}$.

Proposition 2.6.5. — *La loi*

$$G \mapsto A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$$

est un foncteur contravariant.

Démonstration. — Soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Si $D \subset G$ est un sous-groupe de G et $s \in Z_G(D)$, on pose $D_H = f(D)$ et $s_H = f(s)$. Pour tout $d_H \in D_H$, il existe $d \in D$ tel que $d_H = f(d)$, on a

$$s_H d_H = f(s)f(d) = f(sd) = f(ds) = f(d)f(s) = d_H s_H.$$

Donc $s_H \in Z_H(D_H)$. Soit $g : \mu_m \to Z_G(D)$, nous avons

$$g_H : \mu_m \xrightarrow{g} Z_G(D) \xrightarrow{f} Z_H(D_H).$$

D'où le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} A^0(BG, M_n) \arrow[r] & A^0(BD \times B\mu_m, M_n) \arrow[r] & A^0(BD \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & A^0(BD, M_{n-1}) \\ A^0(BH, M_n) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H \times B\mu_m, M_n) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[u] & A^0(BD_H, M_{n-1}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

parce que $A^0(BG, M_n)$ est contravariant en G (*cf.* rem. 2.6.1). On en déduit un morphisme

$$\mathrm{Ker}(\partial^H_{D_H, g_H}) \to \mathrm{Ker}(\partial^G_{D,g}).$$

D'où finalement un morphisme

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BH, M_n) \to A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n).$$

D'autre part, soit $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{f'} K$ une composée de morphismes de groupes. On a aussi une composée

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BK, M_n) \to A^0_{\mathrm{NR}}(BH, M_n) \to A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$$

grâce au diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[r, "\partial^G_{D,g}"] & A^0(BD, M_{n-1}) \\
A^0(BH, M_n) \arrow[r, "\partial^H_{D_H, g_H}"] \arrow[u, "F(Bf)"] & A^0(BD_H, M_{n-1}) \arrow[u, "F(Bf)"'] \\
A^0(BK, M_n) \arrow[r, "\partial^K_{D^H_K, g^H_K}"] \arrow[u, "F(Bg)"] & A^0(BD^H_K, M_{n-1}) \arrow[u, "F(Bg)"']
\end{tikzcd}$$

où $D^H_K = g(D_H) = gf(D)$ et $g^H_K = f' \circ g_H = f' \circ f \circ g$. □

2.6.2. Une formule simplifiée pour $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$. —

Lemme 2.6.6. — *Soient $D' \subset D \subset G$ et $g : I \to Z_G(D)$, on note $g' : I \to Z_G(D) \hookrightarrow Z_G(D')$. Alors $\operatorname{Ker} \partial^F_{D,g} \subset \operatorname{Ker} \partial^F_{D',g'}$.*

Démonstration. — C'est grâce au diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
F(BG) \arrow[r] \arrow[d, "="] & F(BD \times BI) \arrow[r] \arrow[d] & F(BD \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & F_{-1}(BD) \arrow[d] \\
F(BG) \arrow[r] & F(BD' \times BI) \arrow[r] & F(BD' \times \mathbb{G}_m) \arrow[r] & F_{-1}(BD')
\end{tikzcd}$$

□

Du lemme 2.6.6, on déduit:

Proposition 2.6.7. — *On a*

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \bigcap_{g:\ \mu_m \to G} \operatorname{Ker}(\partial_{Z_G(g),g})$$

où $Z_G(g)$ est le centralisateur de $g(\mu_m) \subset G$.

2.7. Théorème principal

Le but de ce chapitre est de montrer le théorème suivant:

Théorème 2.7.1. — *On a:*

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

Pour cela, on va définir un groupe intéressant contenant $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ avec les conditions: Soit W une représentation linéaire fidèle de G. Soient $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ et $B \in \mathcal{P}(k(W)/k)$ au dessus de A. Soient D le groupe de décomposition de B dans G et I son groupe d'inertie.

Remarque 2.7.2. — Comme l'exposant de G divise m, l'ordre de G divise une puissance de m et donc $|G|$ est inversible dans k. D'après [**Ser68**, IV, §2, cor.2, cor.3], I est cyclique canoniquement isomorphe à μ_q avec $q|m$ et central dans D.

Définition 2.7.3. — On définit:

$$A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) = \bigcap_{(D\subset G,\ g:I\to Z_G(D))} \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1})),$$

où l'intersection porte sur l'ensemble des sous groupes D, I relatifs à $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ comme ci-dessus et $\partial_{D,g}$ est comme dans la définition 2.4.7.

Il est clair que

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n).$$

On va montrer dans les sections suivantes les résultats:

Théorème 2.7.4. — *Supposons que $k \supset \mu_m$ et que m soit inversible dans k. Soient G un groupe fini d'exposant m et W une k-représentation fidèle de G. Soient $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$ et $B \in \mathcal{P}(k(W)/k)$ au-dessus de A. Soient D le groupe de décomposition de B dans G et I son groupe d'inertie. Soit $g : I \to Z_G(D)$. Considérons les résidus suivants:*

$$A^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} A^0(BD, M_{n-1}) \text{ (cf. déf. 2.4.7)}$$

et

$$M_n(k(W)^G) \xrightarrow{\partial_A} M_{n-1}(\kappa_A)$$

où κ_A est le corps résiduel de A. Si $x \in A^0(BG, M_n)$ est tel que $\partial_{D,g}(x) = 0$, alors $\partial_A(x) = 0$. D'où on déduit:

$$A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \text{ (cf. déf. 2.7.3 et déf. 2.2.1).}$$

Proposition 2.7.5. — *Soient G un groupe fini et W une représentation fidèle de G. Alors,*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$$

(cf. déf. 2.2.1 et déf. 2.6.3).

D'où on déduit le théorème principal 2.7.1 et un peu plus précisément:

Corollaire 2.7.6. —

$$A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, M_n) = A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

Corollaire 2.7.7. — *Si M est la cohomologie galoisienne, alors*

$$H^n_{\mathrm{nr}}(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = A^0_{\mathrm{NR},sp}(k(W)^G, H^n_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = A^0_{\mathrm{NR}}(BG, H^n_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

De plus, comme $A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$ et $A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n)$ sont des foncteurs contravariants en G (*cf.* rem. 2.6.1 et prop. 2.6.5), on obtient:

Corollaire 2.7.8. — *On a aussi un résultat équivalent au théorème 2.7.1 pour la partie réduite (cf. déf. 1.4.5):*

$$\tilde{A}^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) = \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n).$$

2.8. Lemmes

Dans cette partie, on garde les hypothèses de la définition 2.6.3 et les notations précédentes.

Pour montrer le théorème 2.7.4, on a besoin des lemmes suivants:

Lemme 2.8.1. — *Soit k un corps contenant le groupe μ_q des racines de l'unité où q est inversible dans k. Soient G un groupe fini et N un groupe cyclique d'ordre q. Soit G' une extension centrale de G par N. Soit k'/k une extension de groupe de Galois G. Soit $\chi : N \xrightarrow{\sim} \mu_q$ un caractère fidèle de N sur k. Notons W_χ la k-représentation de dimension un correspondante. Soit $W = \mathrm{Ind}_N^{G'} \chi$ la représentation de G' induite de W_χ. Alors W est fidèle et*

$$k'(W)/k'(W)^{G'} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Frac}(S'(k'/k))/\,\mathrm{Frac}(R(k'/k))$$

où G' opère sur $k'(W)$ par son action sur k' (via G) et sur W, et $S'(k'/k), R(k'/k)$ sont comme dans Saltman [**Salt84**, p.74,75].

Rappelons que l'extension $S'(k'/k)/R(k'/k)$ de [**Salt84**, p.74,75] est donnée par:

- $S''(k'/k) := k'[y(g) \mid g \in G](1/s)$ où $s = \prod_{g\in G} y(g)$. Et G opère sur $S''(k'/k)$ par son action sur k' et par
$$gy(h) = y(gh)\ \forall g \in G.$$
- $S(k'/k) := S''(k'/k)[x(g) \mid 1 \neq g \in G]/(x(g)^q = y(g)/y(1))$. Notons $x(1) = 1$. Alors l'action de G sur $S(k'/k)$ s'étend celle sur $S''(k'/k)$ via
$$gx(h) = [x(gh)/x(h)]\chi(c(g,h))$$
où $c(g,h) \in N$ et forme un G 2-cocycle dans N.
- $S'(k'/k) := S(k'/k)[\gamma]/(\gamma^q = y(1))$. Donc N opère sur $S'(k'/k)$ par son action triviale sur $S(k'/k)$ et par
$$n\gamma = \chi(n)\gamma.$$
Alors G' opère sur $S'(k'/k)$ via N et G.
- $R(k'/k) := S(k'/k)^G$
et le diagramme suivant:
$$\begin{tikzcd}
 & & S'(k'/k) \\
k' \arrow[r] & S''(k'/k) \arrow[r] & S(k'/k) \arrow[u, "N"'] \\
k \arrow[u, "G"'] \arrow[rr] & & R(k'/k). \arrow[u, "G"']
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Considérons la suite exacte:
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & G' \arrow[r, shift right, "\pi"'] & G \arrow[l, shift right, bend right, "s"'] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$
où s est une section ensembliste. On définit $c(g,h)$, pour $g, h \in G$, par la relation:
$$s(g)s(h) = s(gh)c(g,h).$$

Alors $c(g,h) \in N$. On peut choisir s telle que $s(1) = 1$ et donc $c(1,g) = c(g,1) = 1$ pour tout $g \in G$. Soit $g' \in G'$, on écrit $g' = n(g')s\pi(g')$ avec $n(g') \in N \subset Z(G')$.

D'après la définition des représentations induites, on a

$$W = k[G'] \otimes_{k[N]} W_\chi$$

de base $\{s(g) \otimes w | g \in G\}$ où w est une base de W_χ. L'action de G' sur W est:

$$\begin{aligned} g' \in G',\ g'(s(g) \otimes w) &= g's(g) \otimes w \\ &= n(g')s\pi(g')s(g) \otimes w \\ &= n(g')s(\pi(g')g)c(\pi(g'),g) \otimes w \\ &= s(\pi(g')g) \otimes n(g')c(\pi(g'),g).w \\ &= s(\pi(g')g) \otimes \chi(n(g')c(\pi(g'),g))w \\ &= \chi(n(g')c(\pi(g'),g))s(\pi(g')g) \otimes w. \end{aligned}$$

En particulier:

- Si $n \in N$, on a:

$$n(s(g) \otimes w) = \chi(n)s(g) \otimes w.$$

- Si $h \in G$, on a:

$$s(h)(s(g) \otimes w) = \chi(c(h,g))s(hg) \otimes w.$$

Alors $\mathrm{Ind}_N^{G'} \chi$ est une représentation fidèle de G' *i.e.* pour tout $1 \neq g' \in G'$, il existe $x \in W$ tel que $g'x \neq x$. En effet, soient $1 \neq g' \in G'$ et

$x = \sum_{g\in G} \lambda_g s(g) \otimes w \in W,\ \lambda_g \in k$, on a:

$$\begin{aligned}
g'x = x \Leftrightarrow & g' \sum_{g\in G} \lambda_g s(g) \otimes w = \sum_{g\in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\
\Leftrightarrow & \sum_{g\in G} \lambda_g g' s(g) \otimes w = \sum_{g\in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\
\Leftrightarrow & \sum_{g\in G} \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g)) s(\pi(g')g) \otimes w = \sum_{g\in G} \lambda_g s(g) \otimes w \\
\Leftrightarrow & \sum_{g\in G} \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g)) s(\pi(g')g) \otimes w = \sum_{g\in G} \lambda_{\pi(g')g} s(\pi(g')g) \otimes w \\
\Leftrightarrow & \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g)) = \lambda_{\pi(g')g}\ \forall g \in G.
\end{aligned}$$

Si $1 \neq g' = n(g') \in N$, alors $\chi(n(g')) \neq 1$ et donc

$$g'x = x \Leftrightarrow \lambda_g \chi(n(g')) = \lambda_g\ \forall g \in G \Leftrightarrow \lambda_g = 0\ \forall g \in G \Leftrightarrow x = 0.$$

Si $1 \neq g' = n(g')s\pi(g') \in G' - N$ *i.e.* $\pi(g') \neq 1$, soit m le nombre d'éléments de G, on a:

$$g'x = x \Leftrightarrow \lambda_g \chi(n(g')c(\pi(g'), g)) = \lambda_{\pi(g')g}\ \forall g \in G.$$

Ici on a m variables λ_g mais il y a au maximum $m-1$ équations indépendantes. Donc on peut trouver des λ_g hors des solutions *i.e.* des λ_g tels que $g'x \neq x$.

Remarque 2.8.2. — Si on note $W^{g'} = \{x \in W | g'x = x\}$ (pour $g' \in G' - N$), alors $\dim W^{g'} = [G : \langle \pi(g') \rangle]$. Donc

$$\nu(W) = 1 \Leftrightarrow \exists g' : |G| - [G : \langle \pi(g') \rangle] = 1 \Leftrightarrow |G| = |\langle \pi(g') \rangle| = 2.$$

(*cf.* déf. 1.2.3).

Fin de la démonstration du lemme 2.8.1:
Posons

$$\gamma = 1 \otimes w \text{ et } x(g) = \frac{s(g) \otimes w}{1 \otimes w} \in k(W)\ \forall g \neq 1.$$

Si $h \in G$, on a

$$\begin{aligned} s(h)x(g) &= \frac{s(h)s(g) \otimes w}{s(h) \otimes w} \\ &= \frac{\chi(c(h,g))s(hg) \otimes w}{s(h) \otimes w} \\ &= \chi(c(h,g))x(hg)/x(h). \end{aligned}$$

Si $n \in N$, on a

$$\begin{aligned} nx(g) &= \frac{\chi(nc(1,g))s(g) \otimes w}{\chi(nc(1,1))1 \otimes w} \\ &= x(g) \text{ car } c(1,1) = c(1,g) = c(g,1) = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, N opère trivialement sur $\{x(g)|g \in G\}$.

Pour $n \in N$, $n\gamma = \chi(n)\gamma$.
Pour $h \in G$,

$$\begin{aligned} s(h)\gamma &= s(h) \otimes w \\ &= (1 \otimes w)\frac{s(h) \otimes w}{1 \otimes w} = \gamma x(h). \end{aligned}$$

Ainsi, on a les mêmes générateurs et relations que ceux de Saltman, et donc

$$k'(W)/k'(W)^{G'} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Frac}(S'(k'/k))/\operatorname{Frac}(R(k'/k)).$$

□

***Lemme 2.8.3* ("Lemme sans nom tordu")**. — *Soient G, N, G' comme dans le lemme 2.8.1. Soit k'/k une extension de groupe de Galois G. Soient W, W' deux représentations fidèles de G' sur k. Alors $k'(W)^{G'}$ et $k'(W')^{G'}$ sont stablement équivalents sur k. Si l'un est pur, l'autre est stablement pur.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de W tel que U soit un G'-torseur (*cf.* rem. 1.2.2). Alors $U_{k'} = U \times_k \operatorname{Spec}(k')$ est encore un G'-torseur puisque $\operatorname{Spec}(k')$ est un k-schéma affine (*cf.* [**SGA 1**, VIII, cor. 7.9] ou [**Mil**, chap. 1, thm. 2.23]). Donc $U_{k'} \times_k W'/G'$ est un fibré vectoriel sur

$U_{k'}/G'$. Et donc $k'(W \oplus W')^{G'} = k'(U_{k'} \times W')^{G'}$ est transcendant pur sur $k'(W)^{G'}$. Alors, on a le diagramme:

$$\begin{tikzcd} & k'(W \oplus W')^{G'} & \\ k'(W)^{G'} \arrow[ur, "pur"] & & k'(W')^{G'}. \arrow[ul, "pur"'] \end{tikzcd}$$

D'où $k'(W)^{G'}$ et $k'(W')^{G'}$ sont stablement équivalents sur k. □

Lemme 2.8.4. — *Soient G, N, G' comme dans le lemme 2.8.1. Soient K un corps complet pour une valuation discrète v de rang un. Soit A l'anneau de valuation de v. On suppose:*

$$K \xrightarrow{G} K_{nr} \xrightarrow{N} K'$$

où K'/K est galoisienne de groupe G', d'inertie N. Soit $B \subset K_{nr}$ au-dessus de A. Soient κ_A, κ_B des corps résiduels de A, B. Supposons que $\mu_q \subset \kappa_A$ et que q soit inversible dans κ_A. Alors l'image de $[G'] \in H^2(G, N)$ est triviale dans le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\kappa_A)$.

Démonstration. — Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} {[G'] \in H^2(G, N)} \arrow[r] \arrow[d] & H^2(G, \kappa_B^*) \arrow[r, hook] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] & \mathrm{Br}(\kappa_A) \\ H^2(G, K_{nr}^*) \arrow[d, hook] & & \\ \mathrm{Br}(K). & & \end{tikzcd}$$

Il existe un morphisme $\varphi : H^2(G, \kappa_B^*) \to H^2(G, K_{nr}^*)$ faisant commuter le triangle et il est injectif (*cf.* [**Ser68**, p. 192-194]). En effet, on a la suite exacte:

$$1 \to U_{K_{nr}} \to K_{nr}^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$$

et on peut choisir une uniformisante de K telle que cette suite soit scindée. Donc on en déduit la suite exacte scindée:

$$0 \to H^2(G, U_{K_{nr}}) \to H^2(G, K_{nr}^*) \to H^2(G, \mathbb{Z}) \to 0.$$

De plus, on a une autre suite exacte:

$$1 \to U^1_{K_{nr}} \to U_{K_{nr}} \to \kappa_B^* \to 1$$

où $U^1_{K_{nr}}$ est le sous-groupe de $U_{K_{nr}}$ formé des $a \in U_{K_{nr}}$ tels que $v(1-a) \geq 1$. On a $H^q(G, U^1_{K_{nr}}) = 0$ pour tout $q \geq 1$ [**Ser68**, lemme 2, p. 193]. Donc

$$H^2(G, \kappa_B^*) \xleftarrow{\sim} H^2(G, U_{K_{nr}}) \hookrightarrow H^2(G, K^*_{nr}).$$

Comme K'/K est une extension de groupe de Galois G' induite par K_{nr}/K de groupe G (“the embedding problem"), d'après [**Salt84**, prop. 1.1], l'image de $[G']$ dans $H^2(G, K^*_{nr})$ est triviale. Elle est donc triviale dans $H^2(G, \kappa_B^*) \hookrightarrow \mathrm{Br}(\kappa_A)$. □

2.9. Démonstration du théorème 2.7.4

Remarque 2.9.1. — La représentation W'' intervenant à la fin de la démonstration ci-dessous provient du lemme 2.8.1, elle joue un rôle-clé dans la démonstration. En principe, on pourrait utiliser $W'' \oplus W''$ à la place de W' ci-dessous mais cela rendrait la vérification du lemme 2.9.2 plus compliquée. Pour cette raison, nous préférons procéder indirectement en passant par la représentation régulière de D.

Démonstration du théorème 2.7.4

D'après la remarque 2.7.2, I est cyclique ($I \xrightarrow{\sim} \mu_q$ où $q|m$) et central dans D. Rappelons aussi que

$$I = \mathrm{Ker}(D \to Gal(\kappa_B/\kappa_A)).$$

Soit W' une k-représentation fidèle de D, qui est somme directe d'au moins deux représentations régulières de D (*cf.* lem. 1.2.4 et rem. 2.6.1). Soit

$$\chi : I \xrightarrow{\sim} \mu_q \hookrightarrow k^*$$

le caractère fidèle de I (*cf.* [**Pey08**, dém. prop. 3, p.207]). Soit π une uniformisante de B telle que $\pi^q \in k(W)^I$ (un tel π existe d'après [**Lang**, chap. II, prop. 12]). Alors, $k(W) = k(W)^I[\pi]$ et

$$\sigma\pi = \chi(\sigma)\pi \tag{2.9.1}$$

pour $\sigma \in I$, parce que $\mu_q \subset k(W)^I$ donc l'extension est kummerienne.

On note $\varphi : D \times I \to G$ le morphisme défini par $(d, i) \mapsto di$. Alors $D \times I$ opère sur W via φ.

Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\overline{k(W)} \arrow[r] & \overline{k(W \oplus W' \oplus \chi)} & \overline{k(W' \oplus \chi)} \arrow[l] \\
k(W) \arrow[u] \arrow[r] & k(W \oplus W' \oplus \chi) \arrow[u] & k(W' \oplus \chi) \arrow[l] \arrow[u] \\
k(W)^G \arrow[u, "G"'] \arrow[r] & k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I} \arrow[u, "D\times I"'] & k(W' \oplus \chi)^{D\times I} \arrow[l] \arrow[u, "D\times I"']
\end{tikzcd}$$

où $D \times I$ opère sur $W \oplus W' \oplus \chi$ par l'action de $D \times I$ sur W, l'action de D sur W' et l'action de I sur χ. D'après [**Bour1**, lemme 1, p. 156], il existe une unique valuation discrète de rang un w_1 prolongeant v_B dans $k(W)(X_1)$ avec $X_1 \in W'$ telle que

$$w_1(P) = w_1(\sum_j a_j X_1^j) = \inf_j \{v_B(a_j) + j\xi\}$$

où $a_j \in k(W)$ et $\xi \in \mathbb{Z}$. On choisit $\xi = 0$ et donc $w_1(X_1) = 0$. De plus, d'après [**Bour1**, prop. 2, p.157], le corps résiduel κ_{w_1} de w_1 est transcendant pur sur $\kappa_B = \kappa_{v_B}$ et plus précisément $\kappa_{w_1} = \kappa_B(t_1)$ où t_1 est l'image de X_1 dans κ_{w_1}. Par récurrence, il existe une unique valuation discrète w prolongeant v_B dans $k(W \oplus W')$ telle que

$$w(\sum_J a_J X^J) = \inf_J \{v_B(a_J)\} \text{ où } J = (j_1, \dots, j_s), X^J = X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}, a_J \in k(W).$$

Donc $w(X_i) = 0, i = 1, \dots, s$ pour $X_i \in W'$ et $\kappa_w = \kappa_B(t_1, \dots, t_s)$ où t_i est l'image de X_i dans κ_w pour tout i. Notons la formule:

$$w(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s) = 0 \quad \text{si } k^s \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \neq (0, \dots, 0). \tag{2.9.2}$$

Enfin, il existe une unique valuation discrète de rang un $v_{B'}$ prolongeant w donc prolongeant v_B dans $k(W \oplus W' \oplus \chi) = k(W \oplus W')(T)$ telle que

$$v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l} X^J T^l) = \inf_l \{w(\sum_J a_{J,l} X^J) + l\} = \inf_{J,l} \{v_B(a_{J,l}) + l\},\ a_{J,l} \in k(W).$$

Donc $v_{B'}(T) = 1$ (on choisit $\xi = 1$). Et donc $v_{B'}(T/\pi) = 0$ où π engendre l'idéal maximal m_B de B. D'où $\kappa_{B'} = \kappa_{v_{B'}} = \kappa_B(t_1, \dots, t_s, t)$

où t est l'image de T/π dans $\kappa_{B'}$. Ainsi l'anneau B' de $v_{B'}$ prolonge B dans $k(W \oplus W' \oplus \chi)$. Posons $A' = B' \cap k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I}$.

Lemme 2.9.2. — *Le groupe de décomposition D' de B' dans $D \times I$ est $D' = D \times I$ et son groupe d'inertie est $I' = 1 \times I$.*

Démonstration. — D'abord on va montrer que $DB' = B'$. Soit $g \in D$. Comme D est le groupe de décomposition de B, on a $gB = B$. De plus, comme W' est une somme de k-représentations régulières de D, on a $gX_i = X_j$ pour $X_i, X_j \in W'$ et donc $gX^J = g(X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}) = X^{gJ}$. Alors, on a:

$$\begin{aligned} v_{gB'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l) &= v_{B'}(g(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l)) = v_{B'}(\sum_{J,l}(ga_{J,l})X^{gJ}T^l) \\ &= \inf_{J,l}\{v_B(ga_{J,l}) + l\} = \inf_{J,l}\{v_{gB}(a_{J,l}) + l\} \\ &= \inf_{J,l}\{v_B(a_{J,l}) + l\} = v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l). \end{aligned}$$

Grâce à l'unicité de B', on a $gB' = B'$ pour tout $g \in D$, donc $DB' = B'$. Et on a aussi que $W' \subset B'$. Grâce à l'équation (2.9.2), on a $v_{B'}(\sum \lambda_i X_i) = 0$ avec $\lambda_i \in k$ et donc $W' \hookrightarrow \kappa_{B'}$. Posons $\overline{W'} = \mathrm{Im}(W')$, c'est le sous-espace vectoriel de $\kappa_{B'}$ de base $t_1, \dots, t_s$ et D opère librement sur $\overline{W'}$. Notons que $W' \to \overline{W'}$ est un ismorphisme $D \times I$-équivariant de k-espaces vectoriels.

Comme $I \subset D$ et $I = \langle\sigma\rangle$ opère sur T par $\sigma T = \chi(\sigma)T$ où $\chi(\sigma) \in k^*$. De manière analogue, on a

$$\begin{aligned} v_{\sigma B'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l) &= v_{B'}(\sigma(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l)) = v_{B'}(\sum_{J,l}(\chi(\sigma)(\sigma a_{J,l}))X^JT^l) \\ &= \inf_{J,l}\{v_B(\chi(\sigma)(\sigma a_{J,l})) + l\} = \inf_{J,l}\{v_{\sigma B}(a_{J,l}) + l\} \\ &= \inf_{J,l}\{v_B(a_{J,l}) + l\} = v_{B'}(\sum_{J,l} a_{J,l}X^JT^l). \end{aligned}$$

Ainsi $IB' = B'$. En conclusion, $(D \times I)B' = B'$.

D'autre part, I opère trivialement sur κ_B à cause de la définition de I et D opère librement sur $\{t_1, \ldots, t_s\}$. De plus,

$$\sigma t = \sigma(T/\pi) = \chi(\sigma)T/\chi(\sigma)\pi = t$$

où π est choisi comme en (2.9.1). Ainsi $1 \times I$ opère trivialement sur $\kappa_B(t_1, \ldots, t_s, t)$. $\square$

Soient B_χ la restriction de B' à $k(W' \oplus \chi) = k(W')(T)$ et v_{B_χ} sa valuation associée. Alors v_{B_χ} est nulle sur $k(W')$ et $v_{B_\chi}(T) = 1$ (donc c'est le même anneau que Peyre a considéré dans [**Pey08**, p.207]). Posons $A_\chi = B_\chi \cap k(W' + \chi)^{D\times I}$. On a aussi que le groupe de décomposition de B_χ est $D \times I$ et son groupe d'inertie est $1 \times I$. On a des diagrammes:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B' & B_\chi \arrow[l] \\ A \arrow[r] \arrow[u] & A' \arrow[u] & A_\chi \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \kappa_B \arrow[r] & \kappa_{B'} & \kappa_{B_\chi} \arrow[l] \\ \kappa_A \arrow[r] \arrow[u, "D/I"] & \kappa_{A'} \arrow[u, "D"'] & \kappa_{A_\chi}. \arrow[l] \arrow[u, "D"'] \end{tikzcd}$$

Lemme 2.9.3. — *L'indice de ramification (cf. déf. 2.1.1, R3a) de $A'|A$ est* 1.

Démonstration. — D'abord, d'après notre construction, l'indice de ramification de $B|A$ est $e_{B|A} = |I| = q$ et celui de $B'|B$ est $e_{B'|B} = v_{B'}(\pi_B) = 1$ où π_B est une uniformisante de B. D'après le lemme 2.9.2, $e_{B'|A'} = |1 \times I| = |I| = q$. Enfin, grâce à la relation:

$$e_{B'|A} = e_{B'|B}e_{B|A} = e_{B'|A'}e_{A'|A},$$

on en déduit $e_{A'|A} = 1$.

$\square$

Il vient donc le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
A^0(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[rr, "(2.4.2)"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & & A^0(BD, M_{n-1}) \arrow[d, hook] \\
M_n(k(W)^G) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_A"] & M_n(k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D \times I}) \arrow[d, "\partial_{A'}"] & M_n(k(W' \oplus \chi)^{D\times I}) \arrow[l] \arrow[r, "\partial_{A_\chi}"] \arrow[d, "\partial_{A_\chi}"] & M_{n-1}(k(W')^D) \arrow[dl, "="] \\
M_{n-1}(\kappa_A) \arrow[r] & M_{n-1}(\kappa_{A'}) & M_{n-1}(\kappa_{A_\chi}). \arrow[l, "e_{A'|A_\chi}\cdot"'] &
\end{tikzcd}$$

En effet, la commutativité du rectangle en haut à gauche et du triangle en haut au milieu est à cause de la définition du foncteur $A^0(-, M_n)$ et des morphismes $A^p(X, M_n) \to A^p(Y, M_n)$ pour $Y \to X$ (*cf.* “the pullback map” [**Rost**, §12]). Le trapèze en haut à droite est commutatif pour les morphismes résidus de (2.4.2) et plus précisément par le lemme 2.4.6. Enfin, la commutativité des rectangles en bas est à cause du lemme 2.9.3 et de la propriété (R3a) (*cf.* déf. 2.1.1).

Si l'image de $x \in A^0(BG, M_n)$ est nulle dans $A^0(BD, M_{n-1})$, alors son image dans $M_{n-1}(\kappa_{A_\chi})$ et donc dans $M_{n-1}(\kappa_{A'})$ est aussi nulle. On veut démontrer que son image soit nulle dans $M_{n-1}(\kappa_A)$.

Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\kappa_B \arrow[r] & \kappa_{B'} = \kappa_B(t_1, \ldots, t_s, t) \\
\kappa_B \arrow[r] \arrow[u, "="] & (\kappa_{B'})^I = \kappa_B(t_1, \ldots, t_s)^I(t) \arrow[u, "I"'] \\
\kappa_A \arrow[r] \arrow[u, "D/I"] & \kappa_{A'} = (\kappa_B(t_1, \ldots, t_s, t))^D. \arrow[u, "D/I"']
\end{tikzcd}$$

Soit $W'' = \operatorname{Ind}_I^D \chi$ (vue comme k-représentation). Comme χ est un facteur direct de la représentation régulière de I, W'' est un facteur direct de la représentation régulière de D, donc $W'' \subset W'$. D'après le lemme 2.8.1, W'' est fidèle. On note $\overline{W''}$ l'image de W'' dans $\kappa_{B'}$ (*i.e.* $\overline{W''} = \operatorname{Im}(W'' - \{0\}) \cup \{0\}$). D'après le lemme 2.8.3, $\kappa_{A'} = \kappa_B(\overline{W'}, t)^D$

et $\kappa_B(\overline{W''},t)^D$ sont stablement équivalents sur κ_A.

De plus, d'après [**Salt84**, thm. 1.5], $\kappa_B(\overline{W''},t)^D = \kappa_A([D])(y)$ où y est une variable et $[D] \in \mathrm{Br}(\kappa_A)$. D'après le lemme 2.8.4, cette classe d'algèbre centrale simple $[D]$ est triviale, donc $\kappa_B(\overline{W''},t)^D$ est transcendent pur sur κ_A. D'après le lemme 2.8.3, $\kappa_{A'}$ est stablement pur sur κ_A. Posons

$$E = \kappa_B(\overline{W''},t)^D(y_1,\ldots,y_p) \cong \kappa_{A'}(z_1,\ldots,z_l).$$

On a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & E & \\
\kappa_B(\overline{W''},t)^D \arrow[ur] & & \kappa_{A'} \arrow[ul] \\
 & \kappa_A \arrow[ul, "pur"] \arrow[ur, "st.pur"'] &
\end{tikzcd}$$

En utilisant la propriété d'homotopie pour $\mathbb{A}^1$ (*cf.* prop. 2.1.6, (H)) par récurrence, on a le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
 & M_{n-1}(E) & \\
M_{n-1}(\kappa_B(\overline{W''},t)^D) \arrow[ur, hook] & & M_{n-1}(\kappa_{A'}) \arrow[ul, hook'] \\
 & M_{n-1}(\kappa_A) \arrow[ul, hook'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Comme l'image de x est nulle dans $M_{n-1}(\kappa_{A'})$, alors elle est bien nulle dans $M_{n-1}(\kappa_A)$.

2.10. Démonstration de la proposition 2.7.5

Soit $x \in A^0_{\mathrm{nr}}(k(W)^G, M_n) \subset A^0(BG, M_n)$ *i.e.* $\partial_A(x) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{P}(k(W)^G/k)$. Maintenant remplaçons la notation $\partial^F_{D,g}$ (*cf.* déf. 2.4.7) par $\partial^G_{D,g}$ pour garder la trace de G. On veut montrer que pour tout le couple (D,g), on a $\partial^G_{D,g}(x) = 0$.

Soit $\varphi : D \times I \to G$ le morphisme défini par $\varphi(d,i) = d.g(i)$. D'après la définition des résidus géométriques (*cf.* déf. 2.4.7), $\partial^G_{D,g}$ se factorise par $\partial^{D\times I}_{D,g}$ par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} A^0(BG, M_n) \arrow[d, "\varphi^*"] \arrow[dr, "\partial^G_{D,g}"] & \\ A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[r, "\partial^{D\times I}_{D,g}"] & A^0(BD, M_{n-1}), \end{tikzcd}$$

donc on a $\partial^G_{D,g}(x) = \partial^{D\times I}_{D,g}(\varphi^*(x))$. On va montrer $\partial^{D\times I}_{D,g}(\varphi^*(x)) = 0$ par le même argument que Peyre dans ([**Pey08**, p. 207]): Soient W' une représentation fidèle de D et χ la représentation fidèle de dimension 1 de I (*cf.* [**Pey08**, p. 207]). On a le diagramme commutatif suivant (*cf.* lemme 2.4.6):

$$\begin{tikzcd} A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[r, "\partial^{D\times I}_{D,g}"] \arrow[d, hook] & A^0(BD, M_{n-1}) \arrow[d, hook] \\ M_n(k(W' \oplus \chi)^{D\times I}) \arrow[r, "\partial_{A_\chi}"] & M_{n-1}(k(W')^D) = M_{n-1}(\kappa_{A_\chi}) \end{tikzcd}$$

où $A_\chi \in \mathcal{P}(k(W' + \chi)^{D\times I}/k)$. Donc on va montrer que l'image de x par ∂_{A_χ} est nulle.

D'abord, considérons:

$$i : K = k(W)^G \subset k(W)^{D\times I} \subset L = k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I}.$$

D'après le lemme 2.2.3, on a:

$$i_*(A^0_{\mathrm{nr}}(k(W)^G, M_n)) \subset A^0_{\mathrm{nr}}(k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I}, M_n).$$

On a aussi le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} A^0_{\mathrm{nr}}(k(W)^G, M_n) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, hook] & A^0_{\mathrm{nr}}(k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I}, M_n) \arrow[d, hook] \\ A^0(BG, M_n) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, hook] & A^0(BD \times BI, M_n) \arrow[d, hook] \\ M_n(k(W)^G) \arrow[r] & M_n(k(W \oplus W' \oplus \chi)^{D\times I}) \end{tikzcd}$$

donc $\varphi^*(x) = i_*(x)$.

De plus, les groupes $A^0_{\mathrm{nr}}(K, M_n)$ sont des invariants k-birationnels d'après leur définition (*cf.* déf. 2.2.1), donc

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BD\times BI, M_n) \cong A^0_{\mathrm{nr}}(k(W\oplus W'\oplus\chi)^{D\times I}, M_n) \cong A^0_{\mathrm{nr}}(k(W'\oplus\chi)^{D\times I}, M_n).$$

Alors, $i_*(x) \in A^0_{\mathrm{nr}}(k(W' \oplus \chi)^{D\times I})$ et donc $\partial_{A_\chi}(i_*(x)) = 0$.

2.11. Un raffinement du théorème principal

Concernant le problème de rationalité, rappelons un résultat bien connu de Fischer:

***Théorème 2.11.1* (Fischer).** — *Soient k un corps contenant le groupe μ_m des racines m-ième de l'unité où m est inversible dans k et A un groupe abélien fini d'exposant m. Si U est un A-torseur, alors U/A est stablement rationel (cf. déf. 2.2.5). En particulier, $\tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BA, M_n) = 0$ pour tout module de cycles M_n.*

Définition 2.11.2. — Soient k un corps contenant μ_m où m est inversible dans k et G un groupe fini d'exposant m. On définit

$$A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) = \bigcap_A \mathrm{Ker}(A^0(BG, M_n) \to A^0(BA, M_n))$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de G.

***Lemme 2.11.3* ("Lemme de Bogomolov").** — *Pour tout $D \subset G$ et $g : I = \mu_m \to Z_G(D)$, on a*

$$\partial_{D,g}(A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n)) \subset A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}).$$

Démonstration. — Soit A_D un sous-groupe abélien de D. Posons $A = \langle A_D, g(\mu_m)\rangle$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A^0(BG, M_n) & \longrightarrow & A^0(BA, M_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0(BD \times BI, M_n) & \longrightarrow & A^0(BA_D \times BI, M_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0(BD, M_{n-1}) & \longrightarrow & A^0(BA_D, M_{n-1}). \end{array}$$

Si $x \in A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n)$, alors son image dans $A^0(BA, M_n)$ et donc dans $A^0(BA_D, M_{n-1})$ est nulle pour tout $A_D \subset D$. Donc $x \in A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1})$. □

Lemme 2.11.4. — *Avec l'hypothèse de la définition 2.11.2, on a*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \subset A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n).$$

Démonstration. — D'après le théorème 2.7.1, on a

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) = A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n).$$

De plus, pour tout sous-groupe abélien A de G, on a le diagramme commutatif suivant par fonctorialité:

$$\begin{tikzcd} A^0_{\mathrm{NR}}(BG, M_n) \arrow[r, hook] \arrow[d] & A^0(BG, M_n) \arrow[d] \\ A^0_{\mathrm{NR}}(BA, M_n) \arrow[r, hook] & A^0(BA, M_n). \end{tikzcd}$$

D'après Fischer (*cf.* thm. 2.11.1) et le corollaire 2.2.6, $A^0_{\mathrm{nr}}(BA, M_n) = 0$ pour tout A abélien. Donc d'après le théorème principal 2.7.1, on a aussi $A^0_{\mathrm{NR}}(BA, M_n) = 0$. Si $x \in A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n)$, alors son image est nulle dans $A^0(BA, M_n)$ pour tout $A \subset G$ à cause du diagramme ci-dessus. Donc $x \in A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n)$. □

Corollaire 2.11.5. — *On a la suite exacte suivante*

$$0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \to A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}). \tag{2.11.1}$$

Démonstration. — D'après le théorème 2.7.1, le lemme 2.11.3 et le lemme 2.11.4, on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) \arrow[r] \arrow[dr, hook] & A^0(BG, M_n) \arrow[r] & \bigoplus_{D,g} A^0(BD, M_{n-1}) \\ & & A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \arrow[u, hook] \arrow[r] & \bigoplus_{D,g} A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

où la première ligne est une suite exacte. D'où (2.11.1). □

Théorème 2.11.6. — *Avec l'hypothèse de la définition 2.11.2, soit M un module de cycles et $n \in \mathbb{Z}$, on a*

i) *Si* $\tilde{A}^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) = 0$*, alors* $\tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) = 0$*.*

ii) *Si* M *est connectif (cf. déf. 2.1.3) et*

$$\forall H \subset G, \forall n \in \mathbb{Z}, \tilde{A}^0_{\mathrm{nr}}(BH, M_n) = 0,$$

alors

$$\forall H \subset G, \forall n \in \mathbb{Z}, \tilde{A}^0_{\mathrm{nab}}(BH, M_n) = 0.$$

Démonstration. — On a tout de suite (a) grâce au lemme 2.11.4. On montre (b) par récurrence sur n. Comme M est connectif, c'est évident pour n petit. Supposons que ce soit vrai pour $n-1$. Utilions la suite exacte (2.11.1) avec $A^0_{\mathrm{nab}}(BD, M_{n-1}) = 0$ $\forall D$, on a

$$A^0_{\mathrm{nab}}(BG, M_n) \xleftarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_n) = 0.$$

Et c'est vrai aussi pour tout sous-groupe H de G. $\square$

CHAPITRE 3

APPLICATIONS

3.1. Zéro-cycles sur le compactifié de BG

Rappellons le problème de la résolution des singularités:

Théorème 3.1.1 **(Hironaka)**. — [**Har**, V, §3, rem. 3.8.1] *Soit V une k-variété. Si k est de caractéristique zéro, il existe un morphisme birationnel propre $f : V' \to V$ avec V' lisse.*

3.1.1. Le foncteur $\overline{CH}_0$. —

Définition 3.1.2. — Soient $X \in \mathbf{Sm}(k)$ et une compactification $j : X \hookrightarrow \bar{X}$ où $\bar{X}$ est projectif et lisse. On définit

$$\overline{CH}_0(X) = CH_0(\bar{X}) = A_0(\bar{X}, K_0^M).$$

Proposition 3.1.3. — *Si k est de caractéristique zéro, $\overline{CH}_0(X)$ ne dépend que de X et $\overline{CH}_0$ définit un foncteur homotopique et pur en coniveau ≥ 1.*

Démonstration. — Notons $\mathbf{Sm}^{proj}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sm}$ formée des schémas projectifs, S_b la classe des morphismes birationnels de $\mathbf{Sm}$ et $S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}$ (*resp.* $S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}^{proj}$) la catégorie des fractions de $\mathbf{Sm}$ (*resp.* de $\mathbf{Sm}^{proj}$) dont les morphismes dans S_b sont inversibles (*cf.* [**G-Z**, chap. 1]). D'après Kahn et Sujatha [**KS**, thm. 2.1], on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sm}^{proj} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbf{Sm} \arrow[d] \\ S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}^{proj} \arrow[r, "\sim"] & S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}\,. \end{tikzcd}$$

Considérons le foncteur $F : \mathbf{Sm} \to Ab$ donné par $F(X) = H_0(X, \mathbb{Z})$ (homologie de Suslin *cf.* déf. 1.6.11). Il vérifie les hypothèses de [**KS**, §3] par rapport au digramme ci-dessus. En effet, pour X projectif et lisse, $F(X) = H_0(X, \mathbb{Z}) = CH_0(X)$ et d'après Fulton [**Ful**, ex. 16.1.11, p .312], $CH_0(X) = CH_0(Y)$ pour tout $X \to Y$ dans S_b. Donc on a un isomorphisme naturel:

$$(\mathbf{Sm}^{proj} \to \mathbf{Sm} \xrightarrow{F} Ab) \cong (\mathbf{Sm}^{proj} \to S_b^{-1}\,\mathbf{Sm}^{proj} \xrightarrow{CH_0} Ab).$$

En appliquant [**KS**, §3 et thm. 2.1], on a une transformation naturelle de foncteurs

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0(X)$$

où $\overline{CH}_0(X) := CH_0(\bar{X})$ pour $\bar{X}$ une compactification lisse de X. C'est exactement le foncteur défini dans la définition 3.1.2.

De plus, $\overline{CH}_0$ est homotopique et pur en coniveau ≥ 1. En effet, soit $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte, alors $\bar{X}$ est aussi un compactifié de U:

$$U \hookrightarrow X \hookrightarrow \bar{X}.$$

Donc

$$\overline{CH}_0(U) = \overline{CH}_0(\bar{X}) = CH_0(X).$$

D'autre part, soit $f : E \to X$ un fibré vectoriel. Soit U un ouvert de X, on a le cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} j^*E \arrow[r, hook, "o"] \arrow[d] & E \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, hook, "j", "o"'] & X \end{tikzcd}$$

où $j^*E \cong U \times \mathbb{A}^n$ quand U est assez petit. Alors

$$\begin{tikzcd} \overline{CH}_0(j^*E) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \overline{CH}_0(E) \arrow[d] \\ \overline{CH}_0(U) \arrow[r, "\sim"] & \overline{CH}_0(X). \end{tikzcd}$$

Il nous amène à considérer le cas $E = X \times \mathbb{A}^n$.

Soit $j : X \hookrightarrow Y$ une compactification de X, nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} E = X \times \mathbb{A}^n \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \times \mathbb{A}^n \arrow[r, hook] & Y \times \mathbb{P}^n \arrow[d] \\ X \arrow[rr, hook] & & Y \end{tikzcd}$$

où $Y \times \mathbb{P}^n$ est une compactification lisse de E. D'après [**Ful**, III, thm. 3.3], on a $CH_0(Y \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} CH_0(Y)$. Donc

$$\overline{CH}_0(E) = \overline{CH}_0(X).$$

Ainsi, $\overline{CH}_0$ est homotopique et pur en coniveau ≥ 1. □

Remarque 3.1.4. — La démonstration de la proposition 3.1.3 fournit un morphisme de foncteurs

$$H_0(-, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0.$$

Ce morphisme est surjectif d'après [**Kah10**, prop. 6.1].

Remarque 3.1.5. — Soit G un groupe fini sur un corps k de caractéristique zéro . D'après la proposition 3.1.3 et la définition 1.2.13, $\overline{CH}_0(BG)$ est bien défini et on a une surjection (*cf.* rem. 3.1.4)

$$H_0(BG, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \overline{CH}_0(BG).$$

3.1.2. Un résultat dual du théorème 2.7.1. —

Proposition 3.1.6. — *Si k est de caractéristique zéro, on a la suite exacte suivante:*

(3.1.1)
$$\bigoplus_{D \subset G, g: I \to Z_G(D)} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z}) \to \overline{CH}_0(BG) \to 0.$$

Démonstration. — D'après le théorème 2.7.1, on a:

$$0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_0) \to A^0(BG, M_0) \to \bigoplus_{D, g: I \to Z_G(D)} A^0(BD, M_{-1}).$$

Soient U_G un G-torseur linéaire de coniveau $\geq c$ et $\bar{X}$ une compactification lisse de U_G/G. D'après la définition 2.2.1 et la proposition 2.2.7, on a

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, M_0) = A^0_{\mathrm{nr}}(U_G/G, M_0) = A^0(\bar{X}, M_0).$$

De plus, d'après [**Kah10**, thm. 1.3], pour X lisse, on a

$$A^0(X, M_0) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^X, M)$$

où CM est la catégorie des modules de cycles et pour tout corps F/k,

$$H^X_n(F) = H_{-n}(X_F, \mathbb{Z}(-n)).$$

Donc on a la suite exacte:

$$\begin{aligned}0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{\bar{X}}, M) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{U_G/G}, M)\\ &\to \bigoplus_{D, g: I \to Z_G(D)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{U_D/D}[1], M).\end{aligned}$$

Comme CM est une catégorie abélienne, utilisons le lemme de Yoneda, on a la suite exacte

$$\bigoplus_{D, g: I \to Z_G(D)} H^{U_D/D}[1] \to H^{U_G/G} \to H^{\bar{X}} \to 0.$$

D'où la suite exacte suivante sur le corps de base k:

$$\bigoplus_{D, g: I \to Z_G(D)} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z}) \to H_0(\bar{X}, \mathbb{Z}) \to 0$$

où $H_0(\bar{X}, \mathbb{Z}) = A_0(\bar{X}, K^M_0) = \overline{CH}_0(BG)$ (*cf.* déf. 3.1.2).

Le morphisme $H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) \to H_0(BG, \mathbb{Z})$ est donné explicitement par

$$\begin{array}{rcl} H_{-1}(BD, \mathbb{Z}(-1)) = & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{Z}, M(U_D/D)(1)[1]) \\ & & \downarrow \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{Z}, M(U_D/D) \otimes M(\mathbb{G}_m)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle (*)} \\ & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{Z}, M(U_D/D) \otimes M(U_{\mu_m}/\mu_m)) \\ & & \downarrow \\ H_0(BG, \mathbb{Z}) & = & \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbb{Z}, M(U_G/G)) \end{array}$$

où $(*)$ est donné par $\mathbb{G}_m \to B\mu_m$. $\square$

Remarque 3.1.7. — Si k est de caractéristique p, la suite exacte (3.1.1) donne une définition de "$\overline{CH}_0(BG)$".

3.1.3. Conditions équivalentes pour des groupes non ramifiés triviaux. —

Définition 3.1.8. — Soient k un corps et X un schéma lisse sur k. On dit que X *n'a pas d'invariants non ramifiés* (de type motivique à cause des invariants dans le groupe de Witt) si pour tout module de cycles M,

$$M_n(k) \xrightarrow{\sim} A^0_{\mathrm{nr}}(X, M_n).$$

Théorème 3.1.9. — *Si k est de caractéristique zéro, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *X n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 3.1.8);*
b) *L'application deg : $\overline{CH}_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est bijective pour toute extension F/k.*

Démonstration. — D'après le théorème 3.1.1 et la définition 3.1.2, on a

$$\overline{CH}_0(X_F) = CH_0(\bar{X}_F)$$

où $\bar{X}$ est une compactification propre et lisse de X. Donc ce théorème est exactement [**Mer**, thm. 2.11]. $\square$

Corollaire 3.1.10. — *Soit G un k-groupe algébrique linéaire. Si k est de caractéristique zéro, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *"BG" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 3.1.8);*
b) *$\widetilde{\overline{CH}}_0(BG_F) = 0$ pour toute extension F/k (déf. 1.4.5).*

Démonstration. — Remarquons que pour $\operatorname{Spec} k \to G$, on a

$$\begin{tikzcd} \overline{CH}_0(BG_F) \arrow[r] & \mathbb{Z} \\ \overline{CH}_0(B1) \arrow[u] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

D'où le résultat d'après le théorème 3.1.9. $\square$

Corollaire 3.1.11. — *Soit G un groupe fini d'exposant m sur un corps k contenant μ_m, m est inversible dans k. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *"BG" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 3.1.8);*

b) *Pour tout module de cycles M et pour tout n,*

$$\tilde{A}^0(BG, M_n) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} A^0(BD, M_{n-1})$$

est injectif.

c) *Pour toute extension F/k,*

$$\bigoplus_{D,g} H_{-1}(BD_F, \mathbb{Z}(-1)) \twoheadrightarrow \tilde{H}_0(BG_F, \mathbb{Z}).$$

Démonstration. — $(a) \Leftrightarrow (b)$ grâce au théorème 2.7.1 et à la définition 3.1.8. Et $(a) \Leftrightarrow (c)$ à cause de la proposition 3.1.6 et du corollaire 3.1.10. □

Corollaire 3.1.12. — *Soit G un groupe fini d'exposant m sur un corps k contenant μ_m, m est inversible dans k. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *Pour tout $H \subset G$, "BH" n'a pas d'invariants non ramifiés (déf. 3.1.8);*

i^{bis}) *Comme i) mais à valeurs dans un module de cycles connectif (déf. 2.1.3).*

ii) *Pour tout $H \subset G$ et pour toute extension F/k,*

$$\bigoplus_{A \subset H} H_0(BA_F, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_0(BH_F, \mathbb{Z})$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de H.

Démonstration. — On va montrer $(i) \Rightarrow (i^{bis}) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (i^{bis})$ est évident.

$(i^{bis}) \Rightarrow (ii)$: Pour tout $H \subset G$ et pour tout M connectif, d'après le théorème 2.11.6, on a

$$A^0(BH, M_n) \hookrightarrow \bigoplus_{A} A^0(BA, M_n).$$

D'après le théorème 2.3.3, ceci implique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BH}, M[n]) \hookrightarrow \bigoplus_A \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BA}, M[n])$$

pour tout M connectif. Comme H^{BH}, H^{BA} sont connectifs (*cf.* lemme 2.3.1), ceci implique par le lemme de Yoneda

$$\forall H \subset G, \bigoplus_A H^{BA} \twoheadrightarrow H^{BH}.$$

En évaluant H_0 sur un corps F, on a

$$\forall H \subset G, \forall F/k, \bigoplus_{A \subset H} H_0(BA_F, \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_0(BH_F, \mathbb{Z}).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Pour tout module de cycles M, on a (*cf.* thm. 2.3.3)

$$A^0(BH, M_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}}(H^{BH}, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{HI}}(h_0^{Nis}(BH), \mathcal{M}_0).$$

Donc (ii) implique

$$\bigoplus_{A \subset H} h_0^{Nis}(BA)(\mathrm{Spec}\, F) \twoheadrightarrow h_0^{Nis}(BH)(\mathrm{Spec}\, F)$$

pour tout F/k. Ensuite, on a besoin le lemme suivant:

Lemme 3.1.13. — *Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{HI}$ deux faisceaux Nisnevich avec transferts invariants par homotopie et $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Alors,*

$$f \text{ est un épimorphisme} \Leftrightarrow \forall F/k, f_F \text{ est surjectif.}$$

Démonstration. — C'est évident pour $\Rightarrow$. Pour $\Leftarrow$, posons $\mathcal{H} = \mathrm{Coker}\, f$, on a $\mathcal{H}_{\mathrm{Spec}\, F} = 0\ \forall F/k$. D'après [**MVW**, cor. 11.2], $\mathcal{H} = 0$. D'où f est épimorphisme. □

Appliquons le lemme 3.1.13 pour $\mathcal{F} = \oplus_A h_0^{Nis}(BA)$, $\mathcal{G} = h_0^{Nis}(BH)$, on a

$$\forall H \subset G, \bigoplus_{A \subset H} h_0^{Nis}(BA) \twoheadrightarrow h_0^{Nis}(BH).$$

Ceci implique

$$\forall H \subset G, A^0(BH, M_n) \hookrightarrow \bigoplus_A A^0(BA, M_n)$$

pour tout module de cycles M. On en déduit (i) grâce au lemme 2.11.4. □

3.2. Théorèmes de Bogomolov et de Peyre

On retrouve ici les théorèmes de Bogomolov [**CTS**, thm. 7.1] et de Peyre [**Pey08**, thm. 1].

3.2.1. Généralité du théorème de Bogomolov. —

Lemme 3.2.1. — *Soit k un corps contenant $I = \mu_m$ où m est inversible dans k. Soient G un groupe fini d'exposant divisant m. On a*

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) = A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) = 0.$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}
&A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z}))\\
&= \mathrm{Ker}(A^0(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) \to \bigoplus_A A^0(BA, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})))\ (\text{déf. } 2.11.2)\\
&= \mathrm{Ker}(H^2_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A H^2_{\text{ét}}(BA, \mathbb{Z}))\ (\text{lemme A.5.1})\\
&= \mathrm{Ker}(H^2(G, \mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A H^2(A, \mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}))\ (\textit{cf.}\ (\text{A.4.2}))\\
&= \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) \to \bigoplus_A \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}))\\
&= 0
\end{aligned}$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de G. D'après le lemme 2.11.4, on a aussi

$$A^0_{\mathrm{nr}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) = A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^2_{\text{ét}}(\mathbb{Z})) = 0.$$

□

Théorème 3.2.2. — *Soit k un corps contenant $I = \mu_m$ où m est inversible dans k. Soient G un groupe fini d'exposant divise m et W une k-représentation fidèle de G. On a*

$$\tilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) = \bigcap_{A \in \mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(H^2(G, k^*) \to H^2(A, k^*)). \tag{3.2.1}$$

où $\mathcal{B}_G$ est l'ensemble des sous-groupes bicycliques de G et $\tilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G)$ est la partie réduite de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG)$ (cf. déf. 1.4.5).

En particulier, si $k = k_s$ est séparablement clos, on a [**Bog87**]

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G) = \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(H^2(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})). \tag{3.2.2}$$

En général ($\mu_m \subset k$),

$$\tilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) \hookrightarrow \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G).$$

Démonstration. — Rappelons que

$$\mathrm{Br}(k(W)^G) = H^2_{\text{ét}}(k(W)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = A^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))).$$

Utilisons le corolaire 2.11.5 et le lemme 3.2.1 , on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG) &= \mathrm{Br}_{\mathrm{nab}}(BG) \\ &\subset \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(A^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))) \to A^0(BA, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))))). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

En fait, on a l'égalité. En effet, soit γ appartenant à la partie droite de (3.2.3), on raisonne comme Peyre [**Pey08**, rem. 4]. Soient $D \subset G$ et $g : I = \mu_m \to Z_G(D)$. Soit $x \in D$, alors $A = \langle x, I\rangle$ est un sous-groupe bicyclique de G. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} H^3_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(1))) \arrow[r, "\partial^F_{D,g}"] \arrow[d] & H^2_{\text{ét}}(BD,\mathbb{Z})) \arrow[r, equal, "(A.4.2)"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(D,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ H^3_{\text{ét}}(BA,\mathbb{Z}(1))) \arrow[r, "\partial^F_{\langle x\rangle,g}"] & H^2_{\text{ét}}(B\langle x\rangle,\mathbb{Z})) \arrow[r, equal, "(A.4.2)"] & \mathrm{Hom}(\langle x\rangle,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus H^2_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}). \end{tikzcd}$$

Comme l'image de γ dans $H^3_{\text{ét}}(BA,\mathbb{Z}(1))$ et donc dans $H^2_{\text{ét}}(B\langle x\rangle,\mathbb{Z})$ est nulle pour tout $x \in D$, son image dans $H^2_{\text{ét}}(BD,\mathbb{Z})$ l'est aussi. Alors $\gamma \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k(W)^G) &= \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(\tilde{A}^0(BG, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))) \to \tilde{A}^0(BA, H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1)))) \\ &= \bigcap_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Ker}(\tilde{H}^3_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(1)) \to \tilde{H}^3_{\text{ét}}(BA,\mathbb{Z}(1)))\ (\textit{cf.}\ (\mathrm{A.5.1})). \end{aligned}$$

D'après (A.4.3), on a $\tilde{H}^3_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(1)) = H^2(G,k^*)$. D'où on obtient (3.2.1).

Si k est séparablement clos, on a

$$H^3_{\text{ét}}(k_s,\mathbb{Z}(1)) = H^2(k_s,\mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(k_s) = 0.$$

De plus, comme $\mu_m \hookrightarrow k^*$ pour tout sous-groupe des racines de l'unité, k^*/μ_m est divisible et donc $H^2(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(G,k^*)$. D'où on obtient (3.2.2).

En général, on a $\tilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G) = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k_s(W)^G)$ car $\mathrm{Br}(k_s) = 0$. Considérons la longue suite exacte suivante:

$$H^1(G,k^*) \to H^1(G,k_s^*) \to H^1(G,k_s^*/k^*) \to H^2(G,k^*) \to H^2(G,K_s^*)$$

Comme $\mu_m \subset k^* \subset k_s^*$, on a

$$H^1(G,k^*) \xleftarrow{\sim} H^1(G,\mu_m) \xrightarrow{\sim} H^1(G,k_s^*).$$

Donc la suite

$$0 \to H^1(G,k_s^*/k^*) \to H^2(G,k^*) \to H^2(G,K_s^*)$$

est exacte. D'où le diagramme commutatif de suites exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & & \tilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(BG) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG_{k_s}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1(G,k_s^*/k^*) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & H^2(G,k^*) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(G,k_s^*) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^1(A,k_s^*/k^*) \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^2(A,k^*) \arrow[r] & \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^2(A,k_s^*).
\end{tikzcd}$$

La flèche fragmentée est injective parce que

$$H^1(G,k_s^*/k^*) = \mathrm{Hom}(G,k_s^*/k^*) \hookrightarrow \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} H^1(A,k_s^*/k^*) = \bigoplus_{A\in\mathcal{B}_G} \mathrm{Hom}(A,k_s^*/k^*)$$

(si $f : G \to k_s^*/k^*$ et $f(x) = 0\ \forall x \in G$, alors $f = 0$). D'où on obtient

$$\tilde{\mathrm{Br}}_{\mathrm{nr}}(BG) \hookrightarrow \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BG_{k_s}).$$

$\square$

3.2.2. Une généralisation de $A^0_{\mathrm{NR}}(-, M_n)$ inspirée par Bogomolov. —

Définition 3.2.3. — Soit $F : \mathbf{Sm}(k)^{op} \to Ab$. On définit

$$F_{neg}(X) := \bigcup_U \mathrm{Ker}(F(X) \to F(U)) = \mathrm{Ker}(F(X) \to F(\mathrm{Spec}\, k(X)))$$

où U parcourt les ouverts de X et $k(X)$ est le corps des fonctions de X, et

$$F_{st}(X) := F(X)/F_{neg}(X) = \mathrm{Im}(F(X) \to F(\mathrm{Spec}\, k(X))).$$

Lemme 3.2.4. — *Supposons k infini. Si F est homotopique et pur en coniveau $\geq c$ (cf. déf. 1.2.6), alors F_{neg}, F_{st} le sont aussi.*

Démonstration. — Soit $E \to X$ un fibré vectoriel. Soit U un ouvert de X. Considérons le diagramme des cartésiens suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d] & \supset & E_U \arrow[d] & & E_\eta \arrow[ll, hook'] \arrow[d] & k(E) \arrow[l, hook'] \\ X & \supset & U & \supset & k(X) & \end{tikzcd}$$

D'après l'hypothèse sur F, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F(E) \arrow[r] & F(E_U) \arrow[r] & F(E_\eta) \arrow[r] & F(k(E)) \\ F(X) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & F(U) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & F(k(X)) \arrow[u, "\wr"'] & \end{tikzcd}$$

D'où $F_{neg}(X) \xrightarrow{\sim} F_{neg}(E)'$ où $F_{neg}(E)' = \mathrm{Ker}(F(E) \to F(E_\eta))$. En fait $F_{neg}(E)' = F_{neg}(E)$. En effet, on va montrer $F(E_\eta) \hookrightarrow F(\mathrm{Spec}\, k(E))$. On peut se ramener au cas $X = \mathrm{Spec}\, k$. Pour tout ouvert V de $E_\eta = \mathbb{A}^n_k$, $V(k)$ est non vide. Donc $F(k) \to F(V)$ admet une section et $F(k) \hookrightarrow F(k(E))$. Alors, on a $F_{neg}(X) \xrightarrow{\sim} F_{neg}(E)$.

Soit $U \subset X$ un ouvert de X de coniveau $\delta(X, U) \geq c$ (*cf.* déf. 1.1.13). On a aussi le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F_{neg}(U) \arrow[r] & F(U) \arrow[r] & F(\mathrm{Spec}\, k(U)) \\ 0 \arrow[r] & F_{neg}(X) \arrow[r] \arrow[u, dashed] & F(X) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"'] & F(\mathrm{Spec}\, k(X)) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

car $k(U) = k(X)$. D'où $F_{neg}(X) \xrightarrow{\sim} F_{neg}(U)$. Ainsi, F_{neg} est homotopique et pur en coniveau $\geq c$.

Donc d'après la définition de F_{st}, on en déduit tout de suite qu'il est homotopique et pur en coniveau $\geq c$. □

Remarque 3.2.5. — Si G est un groupe fini sur un corps infini k contenant μ_m où m est inversible dans k, alors $F_{neg}(BG), F_{st}(BG)$ sont bien définis (*cf.* déf. 2.6.3).

Définition 3.2.6. — On définit

$$F_{\mathrm{NR}}(BG) := \{x \in F(BG) \mid \forall (D,g), \partial^F_{D,g}(x) \in (F_{-1})_{neg}(BD)\}.$$

Exemple 3.2.7. — [**Bog92**] Soit $F = H^i_{\text{ét}}(-, \mathbb{Z}(n))$. Pour X lisse, notons l'ensemble des classes k-négligeables de $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$:

$$H^i_{neg}(X, \mathbb{Z}(n)) = \mathrm{Ker}(H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n)) \to H^i_{\text{ét}}(k(X), \mathbb{Z}(n))),$$

et la cohomologie stable de $H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$:

$$H^i_{st}(X, \mathbb{Z}(n)) = H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))/H^i_{neg}(X, \mathbb{Z}(n)).$$

Donc d'après la proposition 1.6.1, l'exemple 2.4.3,1) et la définition 3.2.6, on a

$$\begin{aligned}(3.2.4)\quad & H^i_{\mathrm{NR}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \\ & = \{x \in H^i_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \mid \forall (D,g), \partial^F_{D,g}(x) \in H^{i-1}_{neg}(BD, \mathbb{Z}(n-1)).\}\end{aligned}$$

3.2.3. Théorème de Peyre. —

Définition 3.2.8. — Soit G un groupe fini sur un corps k contenant μ_m où m est inversible dans k.

On définit le groupe $H^3_p(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ des *classes permutation négligeables* comme le groupe [**Pey08**, déf. 4]

$$\sum_{H \subset G} Cores^G_H(\mathrm{Im}(H^1(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\otimes 2} \xrightarrow{\cup} H^3(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))).$$

Notons $H^4_{Ch}(BG, \mathbb{Z}(2)) = \langle c_2(\rho) \rangle$ le sous-groupe de $H^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2))$ engendré par les classes de Chern des représentations ρ de G.

Utilisant [**Pey08**, prop.1 et prop. 2] et le corollaire A.4.1, on obtient

Lemme 3.2.9. — *Si k est séparablement clos, alors*

$$H^3_p(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = H^4_{Ch}(BG,\mathbb{Z}(2))\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}].$$

Théorème 3.2.10. — *Soit k un corps contenant μ_m où m est inversible dans k. Soient G un k-groupe fini d'exopsant m et W une représentation fidèle de G. On a un isomorphisme:*

$$H^4_{\mathrm{NR}}(BG,\mathbb{Z}(2))/H^4_{Ch}(BG,\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H^4_{\mathrm{nr}}(k(W)^G,\mathbb{Z}(2)) \tag{3.2.5}$$

où $H^4_{\mathrm{NR}}(BG,\mathbb{Z}(2))$ est comme dans (3.2.4) et $H^4_{Ch}(BG,\mathbb{Z}(2))$ comme dans la définition 3.2.8.

Démonstration. — D'après le théorème 2.7.1, on a:

$$H^3_{\mathrm{nr}}(k(W)^G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = A^0_{\mathrm{NR}}(BG,H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))).$$

Pour X un k-schéma lisse, on a une suite exacte (*cf.* prop. A.5.2)

$$0\to CH^2(X)\to H^4_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(2))\to A^0(X,H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2)))\to 0.$$

Remplaçons $X = U/G$ où U est un G-torseur linéaire de coniveau > 2 (condition de pureté *cf.* prop. 1.6.7, prop. 1.6.9 et cor. 2.1.13), on a

$$0\to CH^2(BG)\to H^4_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(2))\to A^0(BG,H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2)))\to 0.$$

Alors, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & CH^2(BG) \arrow[r] & H^4_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(2)) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^F_{D,g}"] & A^0(BG,H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \arrow[r] \arrow[d, "\partial^F_{D,g}"] & 0 \\
& & H^3_{\text{ét}}(BD,\mathbb{Z}(1)) \arrow[r, "\sim"] & A^0(BD,H^3_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(1))) &
\end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme est de (A.5.1). D'après [**Tot**, p. 257], $CH^2(BG)$ est engendré par des classes de Chern des représentations de G. D'où on obtient (3.2.5).

□

Remarque 3.2.11. — En particulier, si k est algébriquement clos de caractéristique zéro, d'après le lemme A.3.1, 1) et le corollaire A.4.1, on a

$$H^4_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(2)) \cong H^3(G,H^1_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}(2)) = H^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$
$$\text{et } H^3_{\text{ét}}(BD,\mathbb{Z}(1)) = H^3(D,\mathbb{Z}) = H^2(D,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Donc d'après le lemme 3.2.9 et (3.2.5), on a:

$$H^3_{\mathrm{nr}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/H^3_p(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^3_{\mathrm{nr}}(k(W)^G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)),$$

et son noyau est annulé par une puissance de 2, où

$$H^3_{\mathrm{nr}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \bigcap_{D\subset G,\ g:I\to Z_G(D)} \mathrm{Ker}(H^3(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial^F_{D,g}} H^2(D,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})).$$

On peut sans doute montrer que ce groupe est égal à celui de Peyre [**Pey08**, déf. 5].

Remarque 3.2.12. — Grâce à la suite exacte (2.11.1) et au théorème 3.2.2, on obtient une généralisation du théorème de Bogomolov en degré 3 sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (ou en degré 4 sur $\mathbb{Z}$)

(3.2.6)

$$0 \to A^0_{\mathrm{nr}}(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \to A^0_{\mathrm{nab}}(BG, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \xrightarrow{\partial_{D,g}} \bigoplus_{D,g} \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(BD).$$

APPENDICE A

COHOMOLOGIE MOTIVIQUE ÉTALE

Bruno Kahn

A.1. Représentabilité de la cohomologie motivique étale

Soit k un corps parfait. Rappelons d'abord le diagramme de catégories en jeu ici:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sm}(k) \arrow[r, "M"] & \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{DM}_{\mathrm{gm}}(k) \arrow[d] \\
& \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(k) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\alpha^*"'] & \mathrm{DM}(k) \\
& \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(k) &
\end{tikzcd}$$

cf. définition 1.6.3 pour $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ et M. Voir [**KL**, C.4] pour α^* et son adjoint à droite $R\alpha_*$, et [**CD**, ex. 7.15] pour $\mathrm{DM}(k)$ et le foncteur ι (noté $L\Sigma^\infty$ dans loc. cit.).

Définition A.1.1. — Soit X une variété lisse sur un corps k. Pour $(i,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et pour un groupe abélien A, on pose

$$H^q_{\text{ét}}(X, A(n)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(k)}(\alpha^* M(X), A\otimes \mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}[q])$$

où

$$\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} = \begin{cases} \alpha^*\mathbb{Z}(n) & \text{si } n \geq 0 \\ (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)[-1] & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

où $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})' := \bigoplus_{l\neq \operatorname{car} k} \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$, cf. [**HK**, Déf. 3.1].

Rappelons que pour $A = \mathbb{Z}/m$ ou $A = \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l$ (m, l inversibles dans k), on retrouve la cohomologie étale ordinaire à coefficients dans des racines de l'unité tordues [**MVW**, prop. 10.6].

Proposition A.1.2. — *Soit* $R\alpha_* : \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(k) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(k)$ *l'adjoint à droite de* $\alpha^* : \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(k) \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(k)$ [**KL**, C.4]. *Alors* $X \mapsto H^q_{\text{ét}}(X, A(n))$ *est représenté par* $C_A \in \mathrm{DM}(k)$, *image de* $R\alpha_*A \in \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(k)$ *par le foncteur* $\iota : \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(k) \to \mathrm{DM}(k)$.

Démonstration. — Il suffit de fabriquer des isomorphismes

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(k)}(\alpha^*M, A \otimes \mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}(k)}(\iota M, C_A(n))$$

naturels en $M \in \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(k)$.

Supposons d'abord $n \geq 0$. Par la formule de projection, on a un isomorphisme

$$R\alpha_*A \otimes \mathbb{Z}(n) \simeq R\alpha_*(A \otimes \alpha^*\mathbb{Z}(n))$$

et l'isomorphisme cherché en découle par adjonction et par la pleine fidélité de ι, qui résulte du théorème de simplification de Voevodsky [**Voe10**].

Supposons maintenant $n < 0$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}(k)}(\iota M, C_A(n)) &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}(k)}(\iota M(-n), C_A)\\ &\xleftarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(k)}(M(-n), R\alpha_*A) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}_{\text{ét}}(k)}(\alpha^*M(-n), A).\end{aligned}$$

L'isomorphisme résulte alors de [**HK**, prop. A.4] (adapté aux coefficients A). □

A.2. Cohomologie motivique étale de BG, I

Lemme A.2.1. — *Soit* $(i, n) \in \mathbb{Z}$. *Alors le foncteur*

$$X \mapsto H^q_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n))$$

est homotopique et pur en coniveau $\geq \inf(n, \frac{q+1}{2})$, *au sens de la définition 1.2.6.*

Démonstration. — L'axiome d'homotopie découle immédiatement de la proposition A.1.2. Pour l'axiome de pureté, soit X une variété lisse et soit Z un fermé lisse purement de codimension c. En appliquant la proposition A.1.2 au triangle exact de Gysin

$$M(X-Z) \to M(X) \to M(Z)(c)[2c] \xrightarrow{+1}$$

on trouve:

$$H^q_{Z,\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(n)) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{DM}}(\iota M(Z), C_{\mathbb{Z}}(n-c)[q-2c]) = H^{q-2c}_{\text{ét}}(Z,\mathbb{Z}(n-c)).$$

Si $c > n$, ce groupe est la cohomologie étale d'un complexe de faisceaux concentré en degré 1: il est donc nul dès que $q-2c-1<0$, soit $q-2c \leq 0$. □

Soit G un k-groupe algébrique linéaire. D'après le chapitre 1, les groupes $H^q_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(n))$ sont définis et fonctoriels en G. On va les calculer quand G est un groupe fini (constant):

Le raisonnement approximatif est le suivant. Soit EG l'espace total du G-torseur universel de base BG. Alors $EG \to BG$ est un revêtement étale; la suite spectrale de Hochschild-Serre associée (à coefficients $\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}}$) peut se décrire comme la suite spectrale d'hypercohomologie associée au complexe de G-modules

$$R\Gamma_{\text{ét}}(EG,\mathbb{Z}(n)).$$

Comme EG est contractile, la projection $EG \to \operatorname{Spec} k$ induit un quasi-isomorphisme G-équivariant

$$R\Gamma_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} k,\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\text{ét}}(EG,\mathbb{Z}(n))$$

qui montre que $H^*_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(n))$ s'identifie à l'hypercohomologie (*à coefficients G-triviaux*)

$$\mathbb{H}^*(G, R\Gamma_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} k,\mathbb{Z}(n))).$$

Il est bien connu que, dans la catégorie dérivée des groupes abéliens, tout complexe est isomorphe à la somme directe de ses groupes de cohomologie décalés. La suite spectrale correspondante

$$E_2^{p,q} = H^p(G, H^q_{\text{ét}}(k,\mathbb{Z}(n))) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(n)) \tag{A.2.1}$$

dégénère donc en E_2 (quoique pas canoniquement).

Pour rendre le raisonnement ci-dessus rigoureux, il faut le faire à des niveaux “finis", c'est-à-dire en remplaçant $EG \to BG$ par $U \to U/G$ où U est l'espace total d'un G-torseur linéaire de coniveau tendant vers l'infini. En effet, on vérifie facilement que le lemme A.2.1 est optimal, c'est-à-dire que pour n fixé, le coniveau de $H^q_{\text{ét}}(-,\mathbb{Z}(n))$ tend vers l'infini avec q. Ceci force à appliquer une version de la remarque 1.3.4. Cela peut se faire de la manière suivante:

Soit $n \in \mathbb{Z}$. pour tout $q \in \mathbb{Z}$, considérons le foncteur

$$X \mapsto \tau_{\leq q} R\Gamma_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(n)) \tag{A.2.2}$$

à valeurs dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. Le lemme A.2.1 implique qu'il est homotopique et pur en coniveau $\geq \inf(n, \frac{q+1}{2})$.

À tout G-torseur $p : U \to U/G$, associons maintenant la suite spectrale

$$_{(q)}E_2^{p,q}(p) = H^p(G, H^q(\tau_{\leq q} R\Gamma_{\text{ét}}(U,\mathbb{Z}(n))) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(G, \tau_{\leq q} R\Gamma_{\text{ét}}(U,\mathbb{Z}(n)).$$

Ceci définit un foncteur contravariant de la catégorie des G-torseurs vers celle des suites spectrales, qui est homotopique et pur en coniveau $\geq \inf(n, \frac{q+1}{2})$, en un sens qui généralise celui de la définition 1.2.6 (axiomes relatifs à la base du G-torseur). De plus, les $_{(q)}E$ forment un système inductif, de limite la suite spectrale de Hochschild-Serre habituelle.

Les mêmes raisonnements qu'au chapitre 1 fournissent alors que les $_{(q)}E$ prennent un sens sur le “G-torseur universel" $EG \to BG$, et convergent quand $q \to \infty$ vers une suite spectrale de Hochschild-Serre pour ce torseur. Enfin, la propriété d'homotopie pour les (A.2.2) justifient la forme (A.2.1) de cette suite spectrale, et donc sa dégénérescence.

On peut résumer la discussion ci-dessus par le théorème suivant:

Théorème A.2.2. — *Soit G un groupe fini, et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors la cohomologie $H^*_{\text{ét}}(BG,\mathbb{Z}(n))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de la forme* (A.2.1) *(action triviale sur les coefficients), qui dégénère en E_2.* $\square$

A.3. Rappels sur la cohomologie motivique étale d'un corps

Si p est un nombre premier, un groupe abélien A est dit *p'-divisible* (resp. *uniquement p'-divisible*) si, pour tout entier m premier à p, la multiplication par m sur A est surjective (resp. bijective).

Lemme A.3.1. — *Soit p l'exposant caractéristique de k.*
1) Supposons k séparablement clos. Pour $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est nul pour $q > n$ et uniquement p'-divisible pour $q \leq n$, sauf pour $q = 1$. Le groupe $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est p'-divisible, de torsion isomorphe à $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)$.
2) Supposons k quelconque, et $n \neq 0$.
a) $H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$ est uniquement divisible pour $q \leq 0$.
b) Pour $q \geq n + 2$, l'homomorphisme

$$H^{q-1}_{\text{ét}}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)) \to H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n))$$

est bijectif.
c) Sous la conjecture de Bloch-Kato en degré n, on a

$$\begin{aligned} H^q(k, \mathbb{Z}(n)) &\xrightarrow{\sim} H^q_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n)) \text{ pour } q \leq n \\ H^n_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n)) &\simeq K^M_n(k) \\ H^{n+1}_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n)) &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer 2): 1) en est un cas particulier.

On a un triangle exact

$$\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \to \mathbb{Q}(n)_{\text{ét}} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n) \xrightarrow{+1} .$$

Comme $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)$ est un faisceau concentré en degré 0, cela démontre a) sauf pour $q = 0$, où on n'a a priori qu'une suite exacte

$$H^0_{\text{ét}}(k, \mathbb{Q}(n)) \to H^0_{\text{ét}}(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)) \to H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(n)).$$

Pour prouver la nullité de la première flèche, on peut raisonner comme suit (cf. preuve de [**Kah97**, th. 3.1]). Il suffit de montrer que, pour tout corps $k_0 \subset k$, de type fini sur le corps premier, l'homomorphisme

$$H^0_{\text{ét}}(k_0, \mathbb{Q}(n)) \to H^0_{\text{ét}}(k_0, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n))$$

est nul. Mais c'est évident, puisque le terme de gauche est divisible et le terme de droite est fini. (Ici on utilise que la cohomologie motivique étale à coefficients rationnels et de torsion commute aux limites inductives de corps: pour la seconde c'est standard, et pour la première cela résulte du théorème de comparaison avec la cohomologie Nisnevich [**MVW**, th. 14.24].)

b) provient du fait que le complexe (de faisceaux Nisnevich) $\mathbb{Z}(n)$ n'a pas de cohomologie en degré $> n$. Quant à c), le premier isomorphisme est l'énoncé "Bloch-Kato $\Rightarrow$ Beilinson-Lichtenbaum" [**Su-Vo, G-L**], le second résulte du premier et de l'isomorphisme canonique $K_n^M(k) \simeq H^n(k, \mathbb{Z}(n))$ [**MVW**, th. 5.1] et le dernier est "Hilbert 90 en poids n". □

Remarque A.3.2. — Pour référence ultérieure, donnons une reformulation triangulée de la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum (utilisée dans le lemme ci-dessus): pour $n \geq 0$, la conjecture de Beilinson-Lichtenbaum est vraie en poids n si et seulement si le triangle

$$\mathbb{Z}(n) \to R\alpha_*\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \to \tau_{\geq n+2}R\alpha_*\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} \xrightarrow{+1}$$

est exact dans $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}(k)$.

A.4. Cohomologie motivique étale de BG, II

A.4.1. Cas d'un corps séparablement clos. — On déduit du lemme A.3.1 et du théorème A.2.2 le corollaire suivant, qui précise un résultat de Peyre [**Pey99**, prop. 4.2.1] (ici, la conjecture de Bloch-Kato n'intervient pas):

Corollaire A.4.1. — *Supposons k séparablement clos. Pour tout $(n, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique*

$$\tilde{H}^q_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \simeq H^q(G, \mathbb{Z})'(n)$$

où $'$ désigne la partie de torsion première à l'exposant caractéristique de k.

Démonstration. — L'énoncé est évident pour $n = 0$, on peut donc supposer $n \neq 0$. Appliquons le lemme A.3.1: dans la suite spectrale (A.2.1), les seuls termes $E_2^{p,q}$ non nuls sont pour $p = 0$ ou $q = 1$. On obtient donc

$$\tilde{H}^q_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) \simeq \begin{cases} H^{q-1}(G, H^1(k, \mathbb{Z}(n))) & \text{si } q \neq 1 \\ 0 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

En réappliquant le lemme A.3.1, on obtient un homomorphisme

$$H^{q-1}(G, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)) \to H^{q-1}(G, H^1(k, \mathbb{Z}(n))$$

qui est bijectif pour $q \neq 1$. Toujours pour $q \neq 1$, on peut écrire

$$H^{q-1}(G, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)) \simeq H^{q-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n) \xrightarrow{\sim} H^q(G, \mathbb{Z})'(n).$$

On conclut en observant que $H^1(G, \mathbb{Z}) = 0$ et que $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est sans torsion. □

Dans les numéros suivants, on décrit le groupe $H^{n+2}_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n))$ pour $n \leq 2$, sur un corps k parfait quelconque.

A.4.2. $n < 0$**.** — Par définition, $\mathbb{Z}(n)_{\text{ét}} = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)[-1]$. On en déduit:

$$\tilde{H}^{n+2}_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(n)) = 0. \tag{A.4.1}$$

A.4.3. $n = 0$**.** — On a $\mathbb{Z}(0)_{\text{ét}} = \mathbb{Z}$, d'où

$$\tilde{H}^2_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(0)) = H^2(G, \mathbb{Z}). \tag{A.4.2}$$

(Rappelons que $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}) = 0$.)

A.4.4. $n = 1$**.** — On a $\mathbb{Z}(1)_{\text{ét}} = \mathbb{G}_m[-1]$, d'où

$$\tilde{H}^3_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(1)) = \widetilde{\mathrm{Br}}(BG) = H^2(G, k^*). \tag{A.4.3}$$

(Rappelons que $H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{G}_m) = 0$: théorème 90 de Hilbert.)

A.4.5. $n = 2$**.** — Dans ce cas, on obtient une suite exacte (scindée)

$$0 \to H^2(G, H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2))) \to \tilde{H}^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2)) \to H^3(G, H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2))) \to 0.$$

D'après le lemme A.3.1, on a $H^2_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2)) \simeq K_2^M(k) = K_2(k)$. Il reste un groupe à décrire:

Lemme A.4.2. — *On a un isomorphisme*

$$H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2)) \simeq K_3(k)_{\text{ind}}$$

où $K_3(k)_{\text{ind}} := \mathrm{Coker}(K_3^M(k) \to K_3(k))$.

Démonstration. — Cela résulte de [**BL**, th. (7.2)], du lemme A.3.1 2) c) et du théorème de Voevodsky comparant cohomologie motivique et groupes de Chow supérieurs [**Voe02**]. Une autre manière de conclure est d'utiliser la suite spectrale de Bloch-Lichtenbaum

$$E_2^{p,q} = H^{p-q}(k, \mathbb{Z}(-q)) \Rightarrow K_{-p-q}(k)$$

[**BL, Lev**]. Comme $E_2^{p,q} = 0$ pour $p < 0$ et $q = 0, -1$, cette suite spectrale donne une suite exacte

$$H^3(k, \mathbb{Z}(3)) \to K_3(k) \to H^1(k, \mathbb{Z}(2)) \to 0$$

c'est-à-dire un isomorphisme $K_3(k)_{\mathrm{ind}} \xrightarrow{\sim} H^1(k, \mathbb{Z}(2))$. On utilise alors l'isomorphisme $H^1(k, \mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(k, \mathbb{Z}(2))$ du lemme A.3.1. □

Soit k_0 le sous-corps des constantes de k, c'est-à-dire la fermeture algébrique du sous-corps premier. Alors $K_3(k_0)_{\mathrm{ind}} \to K_3(k)_{\mathrm{ind}}$ est injectif, de conoyau uniquement divisible (cf. [**Kah93**, (1.4)]). Comme dans [**Kah93**, th. 2.1], on en déduit:

Proposition A.4.3. — *On a une suite exacte scindée:*

$$0 \to H^2(G, K_2(k)) \to \tilde{H}^4_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(2)) \to H^3(G, K_3(k_0)_{\mathrm{ind}}) \to 0 \tag{A.4.4}$$

où k_0 est le sous-corps des constantes de k. □

A.4.6. $n > 2$. — La situation est plus compliquée. Pour $n = 3$, le groupe $\tilde{H}^5_{\text{ét}}(BG, \mathbb{Z}(3))$ admet une filtration à trois crans, commençant par $H^3(G, K_3^M(k))$.

A.5. Localisation de la cohomologie motivique étale

Soit X une k-variété lisse. On va décrire le noyau et le conoyau de l'homomorphisme

$$H^{n+2}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(n)) \to A^0(X, H^{n+2}_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(n))) \tag{A.5.1}$$

pour de petites valeurs de n. Notons que, d'après le lemme A.3.1 2) b), le second membre peut aussi s'écrire $A^0(X, H^{n+1}_{\text{ét}}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(n)))$.

A.5.1. $n \leq 1$. — Si $n < -1$, les deux membres sont nuls. Si $n = -1$, ils valent $H^0(k, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})'(-1))$. Si $n = 0$, le membre de gauche vaut $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Si $n = 1$, le membre de gauche n'est autre que $\operatorname{Br}(X)$. Dans chaque cas, on en déduit ou il est bien connu que:

Lemme A.5.1. — *Pour $n \leq 1$,* (A.5.1) *est un isomorphisme.*

Démonstration. — On a les suites exactes suivantes [**CT**, §3.4, (3.7) et (3.9), p. 24]

$$0 \to H^1_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^1_{\text{ét}}(k(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^0_{\text{ét}}(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(-1))$$

$$0 \to \operatorname{Br}(X) \to \operatorname{Br}(k(X)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où X est un schéma lisse et

$$\operatorname{Br}(X) := H^2(X, \mathbb{G}_m) = H^3_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(1)).$$

$\square$

A.5.2. $n = 2$. — Dans ce cas:

Proposition A.5.2. — *On a une suite exacte courte*

$$0 \to CH^2(X) \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \to A^0(X, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2))) \to 0.$$

Démonstration. — Si on remplace $\mathbb{Z}(2)_{\text{ét}}$ par $\Gamma(2)$, c'est la suite exacte (9) de [**Kah96**, th. 1.1]. Donnons-en une démonstration qui évite le complexe de Lichtenbaum.

Pour $n = 2$, en évaluant le triangle exact de la remarque A.3.2, on obtient une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 = H^3(X, \tau_{\geq 4} R\alpha_* \mathbb{Z}(2)_{\text{ét}}) &\to H^4(X, \mathbb{Z}(2)) \\ \to H^4_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(2)) \to H^4(X, \tau_{\geq 4} R\alpha_* \mathbb{Z}(2)_{\text{ét}}) &= H^0(X, \mathcal{H}^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2)) \\ &\to H^5(X, \mathbb{Z}(2)). \end{aligned}$$

Le groupe $H^4(X, \mathbb{Z}(2))$ est canoniquement isomorphe à $CH^2(X)$ [**MVW**, cor. 19.2], et $H^5(X, \mathbb{Z}(2)) = 0$ [**MVW**, th. 19.3]. Enfin, l'isomorphisme $H^0(X, \mathcal{H}^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2)) \simeq A^0(X, H^4_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(2)))$ provient de la conjecture de Gersten [**CT**, th. 4.1.1, (a) $\iff$ (c)]. $\square$

Remarque A.5.3. — On aurait pu démontrer le lemme A.5.1 de la même manière.

A.5.3. $n = 3$. — Le même raisonnement que pour la proposition A.5.2 donne:

Proposition A.5.4 **(cf. [Kah03, rem. 4.10]).** — *Sous la conjecture de Bloch-Kato en degré 3, on a une suite exacte*

$$0 \to A^2(X, K_3^M) \to H^5_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(3)) \to A^0(X, H^5_{\text{ét}}(\mathbb{Z}(3))) \\ \to CH^3(X) \to H^6_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}(3))$$

où $A^2(X, K_3^M) \xrightarrow{\sim} H^5(X, \mathbb{Z}(3))$ par la suite spectrale de coniveau pour la cohomologie motivique.

BIBLIOGRAPHIE

[Bog87] F.A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces of linear representations*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), 485-516, 688.

[Bog92] F.A. Bogomolov, *Stable cohomology of groups and algebraic varieties*, Mat. Sb. **183** (1992), 3-28.

[Bour1] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Chapitres 5 à 7, Hermann.

[Bour2] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, Hermann.

[BO] S. Bloch, A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **7** (1974) 181-202.

[BL] S. Bloch, S. Lichtenbaum, *A spectral sequence for motivic cohomology*, K-theory preprint archives # **62**, 1995.

[CD] D.-C. Cisinki, F. Déglise, *Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories*, Homology, Homotopy Appl. **11** (2009), 219-260.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, *Birational invariants, purity and the Gersten conjecture* in K-theory and Algebraic Geometry: Connections with Quadratic Forms and Division Algebras (Santa Barbara, 1992), Proc. Sympos. Pure Math. **58** (1995), Amer. Math. Soc., Providence, 1995, 1–64.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène, Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97**, 141-158 (1989).

[CTS] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group)*, in Proceedings of the International Colloquium on Algebraic groups and Homogeneous Spaces (Mumbai 2004), ed. V. Mehta, TIFR Mumbai, Narosa Publishing House (2007), 113–186.

[Deg] F. Déglise, *Motifs génériques*, Rend. Mat. Sem. Univ. Padova **119** (2008), 173-244.

[DG] M. Demazure, P. Gabriel, Groupes algébriques, Masson-North Holland, 1970.

[EG] D. Edidin, W. Graham, *Equivariant intersection theory*, Inv. Math. **131** (1998), 595-634.

[FV] M. Friedlander, V. Voevodsky, *Bivariant cycle cohomology*, in *Cycles, transfers and motivic cohomology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 143 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000), 188-238.

[Ful] W. Fulton, Intersection theory, Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[GMS] S. Garibaldi, A. Merkurjev, J.-P. Serre, *Cohomological invariants in Galois cohomology*, AMS University Lecture Series, Vol. 28 (2003).

[G-L] T. Geisser, M. Levine, *Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*, J. reine angew. Math. **530** (2001), 55–103.

[G-Z] P. Gabriel, M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Springer-Verlag, New York, 1967.

[Har] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, 1977.

[HK] A. Huber-Klawitter, B. Kahn, *The slice filtration and mixed Tate motives*, Compositio Math. **142** (2006), 907–936.

[Kah93] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[Kah96] B. Kahn, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. **1** (1996), No. 17, 395-416.

[Kah97] B. Kahn, *The Quillen-Lichtenbaum conjecture at the prime* 2, K-theory preprint archives # **208**, 1997.

[Kah99] B. Kahn, *Motivic cohomology of smooth geometrically cellular varieties*, in *Algebraic K-theory* , Seattle, 1997, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 67 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1999), 149-174.

[Kah03] B. Kahn, *Équivalences rationnelle et numérique sur certaines variétés de type abélien sur un corps fini*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **36** (2003), 977–1002.

[Kah10] B. Kahn, *Relatively unramified elements in cycle modules*, prépublication, 2010.
http://www.math.jussieu.fr/∼kahn/preprints/prep2.html, # 13.

[KL] B. Kahn, M. Levine, *Motives of Azumaya algebras*, J. Inst. Math. Jussieu, 2010 (en ligne).

[KS] B. Kahn, R. Sujatha, *A few localisation theorems*, Homology, Homotopy and Applications, vol. **9** (2), 2007, 137-161.

[Lang] S. Lang, Algebraic Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 110.

[Lev] M. Levine *The homotopy coniveau tower*, J. of Topology **1** (2008), 217–267.

[Mer] A. S. Merkurjev, *Unramified elements in cycle modules*, J. London Math. Soc. **78** (2008), 51-64.

[MVW] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, Lectures notes on motivic cohomology, Clay Mathematics Monographs **2**, Amer. Math. Soc., 2006.

[Mil] J.S. Milne, Etale Cohomology, Princeton University Press, 1980.

[MV] F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory of schemes*, Publ. Math. IHÉS, **90** (1999), 45–143.

[MFK] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3rd ed., Springer, Berlin, 1994.

[Pey99] E. Peyre, *Application of motivic complexes to negligible classes*, Algebraic K-theory (Seattle 1998) (W. Raskind et C. Weibel, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, AMS, Providence, 1999, 181–211.

[Pey08] E. Peyre, *Unramified cohomology of degree 3 and Noether's problem*, Invent. Math. **171**,191-225 (2008).

[Rost] M. Rost, *Chow groups with cofficients*, Doc. Math. **1** (1996), 319-393.

[Salt84] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77**, 71-84 (1984).

[Salt87] D. J. Saltman, *Multiplicative field invariants*, J. Algebra **106** (1987), 221-238

[Ser68] J.-P. Serre, Corps locaux, Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 1296, Hermann, Paris, 1968.

[Su-Vo] A. Suslin, V. Voevodsky *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, *in* The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), 117–189, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

[Tot] B. Totaro *The Chow ring of a classifying space*, *in* Algebraic K-Theory, ed. W. Raskind and C. Weibel, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **67**, American Mathematical Society, 1999, 249–281.

[Voe00a] V. Voevodsky, *Cohomological theory of presheaves with transfers*, in *Cycles, transfers and motivic cohomology theories*, Annals of Mathematics Studies **143**, princeton University press, 2000, 87-137.

[Voe00b] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*, in *Cycles, transfers and motivic cohomology theories*, Annals of Mathematics Studies, vol. 143 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000), 188-238.

[Voe02] V. Voevodsky *Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic*, Int. Math. Res. Not. **2002**, 351–355.

[Voe10] V. Voevodsky *Cancellation theorem*, à paraître à Doc. Math.

[Wat] W. Waterhouse, Introduction to Affine Groupe Schemes, New-York: Springer-Verlag (1979).

[EGA I] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique, ch. I: Le langage des schémas, Springer, 1971.

[EGA IV] A. Grothendieck, A. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique, ch. IV: étude locale des schémas et des morphismes de schémas (fin), Publ. Math. IHÉS **32** (1967).

[SGA 1] Revêtements étales et groupe fondamental, (A. Grothendieck et al.) Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960 – 1961 (SGA 1), Lecture Notes in Math. **224**, Springer, Berlin, 1971.

[SGA 4] Cohomologie étale (A. Grothendieck et al.), Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie (SGA 4), tomes 1,2,3, Lect. notes in Math. **269**, **270**, **305**, Springer, 1972-1973.