

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

présentée par

Thomas DEDIEU

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet :

**Auto-transformations et géométrie des variétés
de Calabi-Yau**

Soutenue le 4 novembre 2008
devant le jury composé de

Serge CANTAT	Examineur
Olivier DEBARRE	Examineur
Jean-Pierre DEMAILLY	Rapporteur
Christian PESKINE	Examineur
Thomas PETERNELL	Examineur
Claire VOISIN	Directrice de thèse

pour Lise

Remerciements

Je tiens en premier lieu à témoigner de ma gratitude envers Claire Voisin. Il est bien évident que cette thèse lui doit beaucoup. Elle a partagé ses idées avec moi avec une grande générosité, et m'a consacré son temps sans compter. Je la remercie pour tout ce qu'elle m'a enseigné pendant ces trois années de thèse, non seulement pour toutes les mathématiques qu'elle m'a apprises, mais aussi pour les valeurs qu'elle m'a transmises, et qui j'ose le croire me permettront d'être un honnête mathématicien.

Je remercie Jean-Pierre Demailly d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Sa présence dans le jury de ma thèse est un grand honneur pour moi. Ses notes sur l'hyperbolicité de Kobayashi et les différentielles de jets ont été mon premier contact avec l'hyperbolicité, et restent pour moi une référence irremplaçable.

Ciro Ciliberto m'a accueilli très chaleureusement lors d'un séjour à Rome au printemps 2008. J'ai retrouvé à ses côtés la géométrie projective qui m'a mené plus jeune à la géométrie algébrique complexe. J'ai beaucoup appris à son contact, et cela a toujours été un plaisir pour moi de travailler avec lui. Je suis très heureux qu'il ait été rapporteur de ma thèse, et le remercie pour sa lecture attentive et critique de ce texte.

Serge Cantat s'est beaucoup intéressé à mon travail. En discuter avec lui a toujours été très motivant, et source de nombreuses questions et idées à explorer. Je lui suis reconnaissant pour les belles mathématiques qu'il m'a fait découvrir. J'apprécie beaucoup de le compter parmi les membres de mon jury.

J'ai appris des mathématiques très variées d'Olivier Debarre, grâce à la clarté et à la justesse avec lesquelles il écrit. J'ai plusieurs fois pu compter sur son aide et sa gentillesse et je l'en remercie. Le soutien de Christian Peskine au sein de l'Institut, en particulier pour organiser mon séjour à Rome, m'a été très précieux. Je lui en suis reconnaissant. Je suis très honoré de leur présence dans le jury de ma thèse.

Les travaux de Thomas Peternell sont pour moi une grande source de motivation pour apprendre la théorie de Mori et la géométrie birationnelle en dimensions supérieures. J'attends beaucoup de ce qu'il pourra m'enseigner cette année à Bayreuth. Je le remercie chaleureusement d'avoir accepté d'être membre du jury de ma thèse.

Bien sûr, je dois beaucoup à tous les enseignants qui ont su, chacun à leur façon, me transmettre leur goût des mathématiques, et qui ont chacun à leur tour laissé la trace de leur influence dans ma personnalité mathématique. Je pense plus particulièrement à mes professeurs de classes préparatoires, Serge Francinou et Philippe Esperet, et à Yves Laszlo qui m'a initié avec enthousiasme aux mathématiques modernes à l'École Polytechnique. Certaines idées qu'ils m'ont apprises resurgissent régulièrement avec une justesse déconcertante.

Je tiens à remercier ici mes grands frères et sœurs mathématiques Catriona et Gianluca pour leur gentillesse envers moi, pour toute l'aide et les conseils qu'ils m'ont apportés pendant ces années de jeunesse. Je n'oublie pas non plus mes petits frères mathématiques Julien et François, tous deux au savoir encyclopédique : nos nombreuses discussions m'ont beaucoup appris.

Je veux adresser un remerciement spécial à Ernesto, dont l'amitié m'est précieuse, et qui me fait grandement bénéficier de l'expérience qu'il a acquise au cours des quelques années d'avance qu'il a sur moi.

Je veux aussi remercier tous ceux qui ont contribué à rendre les diverses séances de travail plus sympathiques, et qui ont répondu à toutes mes questions : Andreas Höring, Laurent Bonavero, Christophe Mourougane, Sebastien Boucksom, Frédéric Han, Benoît Claudon, ... La liste est longue, et ceux qui en sont absents sauront, je l'espère, trouver ici la reconnaissance qu'ils méritent.

L'ambiance chaleureuse et familiale du bureau 7C18 a souvent été réconfortante pour moi. J'ai profité de la passion communicative de Vincent pour les maths lors de ses trop rares passages. Je le remercie pour le temps qu'il a passé à répondre patiemment à mes questions de culture générale. Je garde un excellent souvenir de nos réflexions sur la bidualité. Dimitri aura été mon consultant en topologie algébrique. Je tiens aussi à saluer Mairi et Ruchi.

Les nombreux amis que j'ai rencontrés sur le plateau des thésards à Chevaleret ont contribué à rendre le quotidien plus amusant, qu'ils en soient ici remerciés. Le temps qu'ils ont passé, déjeuner après déjeuner, à attendre que je finisse mon repas bien après tout le monde est un signe sûr de leur amitié. J'adresse mes remerciements les plus sincères à Julien et Juliette, qui auront été mes agents spéciaux à Paris, et qui se sont occupés des formalités administratives pour la thèse à ma place, pendant que j'étais sous d'autres cieux.

Je salue également les amis issus d'horizons divers, qui ont su me changer les idées au cours de ces années, et ceux avec lesquels au contraire j'ai partagé les moments de doute et d'euphorie de la thèse.

Je voudrais également témoigner toute ma reconnaissance à ma famille : je sais ce que je vous dois. Votre présence à mes côtés depuis toujours a fait de moi ce que je suis, et j'espère modestement être digne de la fierté que vous placez en moi.

Les derniers mots seront pour Caroline, qui a toujours cru en moi, et qui se bat au quotidien pour me communiquer sa confiance. Elle a poussé le dévouement jusqu'à lire cette thèse en entier, pour traquer les nombreux artefacts qui ont longtemps émaillé les versions successives de ce texte. Merci d'être là pour moi.

Table des matières

Introduction	3
I Non existence d'endomorphismes rationnels non triviaux et irréductibilité des variétés de Severi universelles pour les surfaces $K3$	5
1 Introduction à la géométrie des surfaces $K3$	7
1.1 Espace de modules des surfaces $K3$	8
1.1.1 Systèmes linéaires et polarisations	8
1.1.2 Modules et périodes	9
1.2 Endomorphismes rationnels	12
1.2.1 Le cas des morphismes	12
1.2.2 Exemples	15
1.3 Courbes nodales et variétés de Severi	17
1.3.1 Déformations d'hypersurfaces nodales	17
1.3.2 Le problème de Severi	18
1.3.3 Généralisations	21
1.4 Courbes rationnelles sur les surfaces $K3$	24
1.4.1 Résultats d'existence	24
1.4.2 Étude des singularités	26
1.5 Groupes de Chow	28
1.5.1 Théorie générale	28
1.5.2 Groupes de Chow des surfaces $K3$	30
2 Severi varieties and self-rational maps of $K3$ surfaces	35
2.1 Introduction et principaux résultats	35
2.2 Link between the two conjectures	38
2.3 Properties of a self-rational map on a $K3$ surface	42
2.3.1 Numerical properties	42
2.3.2 Complexity of an elimination of indeterminacies	46
II Log-K-correspondances et pseudo-formes volume intrinsèques pour les paires logarithmiques	51
3 Préliminaires de géométrie complexe et algébrique	53
3.1 Géométrie hyperbolique	53
3.1.1 Théorie de l'uniformisation	53

3.1.2	Métrie de Poincaré	55
3.1.3	Conjecture de Calabi et métriques de Kähler-Einstein	56
3.2	Géométrie logarithmique	58
3.2.1	Compactifications des variétés ouvertes	58
3.2.2	Complexe de de Rham logarithmique	59
4	Introduction aux conjectures de Kobayashi et Lang	61
4.1	Aspect analytique	62
4.1.1	Hyperbolicité au sens de Kobayashi	62
4.1.2	Hyperbolicité au sens de la mesure	69
4.2	Aspect algébrique	73
4.2.1	Approximations par des applications algébriques	73
4.2.2	Hyperbolicité algébrique	76
4.2.3	Conjectures de Lang	78
4.3	Aspect arithmétique	80
4.3.1	Densité potentielle	80
4.3.2	Conjectures de Lang et Vojta	81
4.4	Compléments et variantes	83
4.4.1	Hyperbolicité-distance et densité potentielle	83
4.4.2	Distance et volume	86
5	Auto-transformations des variétés à fibré canonique trivial	87
5.1	Auto-applications rationnelles	88
5.1.1	Applications à l'hyperbolicité	88
5.1.2	Applications à la densité potentielle	92
5.2	K -autocorrespondances	94
5.2.1	Définition	94
5.2.2	Exemples	95
5.2.3	Une nouvelle forme volume intrinsèque	99
6	Intrinsic pseudo-volume forms for logarithmic pairs	103
6.1	Introduction et principaux résultats	103
6.2	Log- K -correspondances	106
6.2.1	Definition and basic properties	106
6.2.2	Composition of log- K -correspondances	108
6.3	Intrinsic logarithmic pseudo-volume forms	110
6.3.1	The Poincaré volume form on the punctured disk	110
6.3.2	Log- K -correspondances and intrinsic logarithmic pseudo-volume forms	112
6.4	Curvature arguments	116
6.4.1	Metrics with negative curvature on \mathbf{D}^n	116
6.4.2	Mappings onto pairs with positive logarithmic canonical bundle	119
6.5	Log- K -autocorrespondances on log- K -trivial pairs	120
6.5.1	Log- K -autocorrespondances and the Kobayashi conjecture	120
6.5.2	Geometric construction of self-correspondances on log- K -trivial pairs	122
6.5.3	Realization as log- K -autocorrespondances	123
	Bibliographie	131

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de la géométrie des variétés de Calabi-Yau. Je m'y intéresse plus particulièrement à la recherche d'auto-transformations de ces variétés, et aux conséquences géométriques de l'existence de telles transformations. Elle est constituée de deux parties relativement indépendantes, correspondant aux deux directions de recherche poursuivies dans cette thèse.

La première partie est consacrée aux surfaces $K3$, qui occupent une place un peu à part parmi les variétés de Calabi-Yau, puisqu'elles sont à la fois simplement connexes et munies d'une forme symplectique holomorphe. Le but de cette partie est l'étude d'une conjecture qui prédit que si S est une surface $K3$ projective générique, alors il n'existe pas d'application rationnelle dominante $\varphi : S \dashrightarrow S$ avec $\deg \varphi > 1$.

Je tire parti du fait que la théorie des déformations des courbes nodales sur une surface $K3$ fonctionne très agréablement pour obtenir un argument en faveur de cette conjecture. Pour toute surface projective S , munie d'un fibré en droites effectif L , les variétés de Severi du couple (S, L) sont les variétés qui paramètrent les courbes irréductibles de degré (par rapport à L) et de genre géométrique fixés. Les variétés initialement introduites par Severi sont celles relatives aux courbes planes. Leur intérêt tient au fait que toute courbe projective lisse se réalise comme une courbe plane nodale *via* une série de projections. Joe Harris ([Har86]) a démontré l'irréductibilité des variétés de Severi paramétrant des courbes planes nodales. De manière similaire, on s'attend à ce que les variétés de Severi universelles $\mathcal{V}_{k,h}^g \rightarrow \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$ définies au-dessus de l'espace de modules des surfaces $K3$ munies d'une polarisation de degré $2g - 2$ soient irréductibles. Je démontre que si les variétés de Severi universelles pour certaines valeurs de (k, h) sont irréductibles, alors la conjecture sur la non existence de transformations rationnelles pour une surface $K3$ projective générique est vraie.

Je présente également quelques résultats fournissant des contraintes numériques et géométriques pour l'existence de transformations rationnelles sur une surface $K3$ projective générique, ce qui va dans le sens de la conjecture étudiée. Précisons enfin que cette conjecture semble assez fine, puisque on connaît des exemples de surfaces $K3$ munies de telles transformations rationnelles : ce sont les surfaces Kummer d'une part, et les surfaces $K3$ elliptiques d'autre part. Elles ne sont pas génériques, puisqu'elles ont un nombre de Picard supérieur à 2. De plus, il existe un exemple dû à Claire Voisin ([Voi04b]) de variétés symplectiques holomorphes (et donc à fibré canonique trivial) de dimension 4, dont le nombre de Picard vaut génériquement 1, et qui possèdent des transformations rationnelles de degré strictement supérieur à 1. Ces variétés sont équivalentes par déformations à la désingularisation d'un produit symétrique de surfaces $K3$.

La seconde partie est consacrée à l'étude d'une classe plus large de transformations, les K -correspondances, introduite par Claire Voisin ([Voi04b]). Une K -correspondance entre deux variétés X et Y est une correspondance $\Sigma \subset X \times Y$ satisfaisant à certaines hypothèses, assurant en particulier l'existence d'une application jacobienne holomorphe. Si X est une variété à fibré

canonique trivial, une transformation rationnelle $X \dashrightarrow X$ dominante est un cas particulier de K -autocorrespondance de X . L'avantage de s'intéresser aux K -correspondances plutôt qu'aux transformations rationnelles est qu'il semble plus facile d'en construire. On trouve notamment de nombreux exemples de familles de variétés de Calabi-Yau possédant des K -autocorrespondances dans [Voi04b].

L'article [Voi04b] est largement consacré à l'étude de la pseudo-forme volume Φ_X , définie intrinsèquement sur toute variété complexe X . La définition de Φ_X est calquée sur celle de la pseudo-forme volume de Kobayashi-Eisenman Ψ_X ([Kob76], [Eis70]), en remplaçant les applications holomorphes du polydisque unité vers X par des K -correspondances. On peut voir une justification de la pertinence de cette nouvelle définition dans le beau théorème d'approximation des applications holomorphes par des applications algébriques au sens de Nash de Demailly, Lempert et Shiffman ([DLS94]). On sait que Ψ_X est génériquement non-dégénérée lorsque la variété X est projective et de type général (par Griffiths [Gri71], et Kobayashi et Ochiai [KO75]). Ceci est encore vrai pour Φ_X ([Voi04b]). Les variétés X telles que Ψ_X est génériquement non-dégénérée sont dites hyperboliques au sens de la mesure infinitésimale. Réciproquement, il est conjecturé par Kobayashi que Ψ_X est nulle sur un ouvert de Zariski de X lorsque X n'est pas de type général. Cette conjecture est vérifiée pour les variétés de Fano. Un résultat important de [Voi04b] est que la conjecture de Kobayashi relative à Φ_X est vraie pour de nombreuses variétés de Calabi-Yau. C'est une conséquence de l'existence de K -autocorrespondances dilatantes, car celles-ci augmentent les formes volume, alors que Φ_X est automatiquement préservée par les K -autocorrespondances.

J'adapte ici ces constructions au contexte des paires logarithmiques (X, D) , où X est une variété complexe, et D est un diviseur à croisements normaux sur X , dont la partie positive est réduite. La motivation essentielle pour l'introduction de ces paires est l'étude des variétés ouvertes quasi-projectives, que l'on peut réaliser comme le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux dans une variété projective, grâce au théorème de désingularisation d'Hironaka. Je définis la notion de log- K -correspondance, qui permet de définir une pseudo-forme volume $\Phi_{X,D}$ sur toute paire comme ci-dessus, dont le modèle local est issu de la métrique de Poincaré sur le disque épointé $\mathbf{D} \setminus \{0\}$. La pseudo-forme volume $\Phi_{X,D}$ coïncide avec Φ_X lorsque $D = 0$. Je démontre que si $K_X(D)$ est ample, et si la partie positive de D est globalement à croisements normaux, alors $\Phi_{X,D}$ est génériquement non-dégénérée. En me basant sur la construction de Claire Voisin, je démontre également que $\Phi_{X,D}$ est nulle pour une large classe de paires à fibré log-canonique $K_X(D)$ trivial.

Première partie

Non existence d'endomorphismes rationnels non triviaux et irréductibilité des variétés de Severi universelles pour les surfaces $K3$

Chapitre 1

Introduction à la géométrie des surfaces $K3$

Dans ce chapitre introductif, on donne quelques propriétés des surfaces $K3$. Une surface $K3$ est une surface lisse S , à fibré canonique trivial ($K_S = 0$), et à irrégularité nulle ($H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$). Ces surfaces doivent leur nom à André Weil, «à cause de Kummer, Kähler, Kodaira, et de la belle montagne K2 au Cachemire »([Wei79]). Elles sont toutes simplement connexes. La plupart du temps, nous ne nous intéresserons qu'aux surfaces $K3$ algébriques, qui sont projectives.

Certains résultats présentés ici sont très classiques. C'est le cas de ceux présentés au paragraphe 1.1. Ce paragraphe contient d'une part l'étude des systèmes linéaires sur les surfaces $K3$, et d'autre part une brève présentation de l'espace des modules des surfaces $K3$ polarisées. Ces résultats sont inclus ici car ils sont utilisés sans cesse au cours du travail présenté dans cette première partie de thèse, au chapitre 2. En particulier, l'étude des systèmes linéaires sur les surfaces $K3$ est fondamentale pour comprendre les propriétés des variétés de Severi de ces surfaces.

Ces variétés sont introduites au paragraphe 1.3. Elles paramètrent les courbes irréductibles et nodales de genre géométrique et de degré fixés sur une surface projective donnée. Elles sont l'un des deux objets géométriques étudiés dans l'article [Ded07], présenté au chapitre 2, et auquel est consacré la première partie de cette thèse. On commence par rappeler quelques résultats concernant les déformations d'hypersurfaces nodales, nécessaires à l'étude des variétés de Severi, qui permettent en particulier de montrer la lissité des variétés de Severi pour les surfaces de Del Pezzo (paragraphe 1.3.2), et pour les surfaces $K3$ (paragraphe 1.3.3). On explique ensuite la preuve due à Harris d'un résultat annoncé par Severi, selon lequel les familles de courbes planes irréductibles et nodales, de genre et de degré fixés, sont irréductibles. Enfin, on décrit la situation que l'on s'attend à rencontrer dans le cas de surfaces projectives plus générales. L'étude des variétés de Severi est poursuivie au paragraphe 1.4 suivant, où il est démontré dans le cas des surfaces $K3$ qu'elles sont non vides dès que le degré et le genre géométrique sont compatibles.

L'autre aspect de l'article [Ded07] est l'étude des transformations rationnelles des surfaces $K3$. Cet objet d'étude est présenté au paragraphe 1.2, où on décrit les exemples connus de surfaces $K3$ munies d'auto-applications rationnelles de degré > 1 . Ces exemples sont tous donnés par des surfaces $K3$ algébriques spéciales, puisqu'elles ont toutes un groupe de Picard plus gros que \mathbf{Z} , et ne sont donc pas génériques dans l'espace de modules des surfaces $K3$ polarisées. On commence par expliquer pourquoi il est inutile de s'intéresser aux surfaces $K3$ munies d'endomorphismes pour étudier la conjecture qui nous intéresse dans [Ded07], qui prédit qu'une surface

$K3$ projective générique ne possède pas de transformation rationnelle de degré > 1 .

Enfin, un dernier paragraphe (1.5) est consacré aux groupes de Chow, qui paramètrent les cycles algébriques modulo équivalence rationnelle, et qui sont un autre ingrédient essentiel de [Ded07] (voir chapitre 2). On y rappelle la définition et les propriétés bien connues de ces objets dans un premier temps. Ensuite, on présente quelques résultats au sujet des groupes de Chow des surfaces $K3$, dont l'intérêt est d'une certaine manière justifié par le beau théorème de Mumford sur les groupes de Chow des surfaces.

1.1 Espace de modules des surfaces $K3$

1.1.1 Systèmes linéaires et polarisations

On commence par étudier les systèmes linéaires sur une surface $K3$ et les morphismes dans des espaces projectifs qu'ils fournissent. Les résultats obtenus nous seront très utiles tout au long de cette première partie de thèse. Cette étude aujourd'hui très classique est menée de manière systématique et complète dans [SD74]. On reprend ici la présentation de [Bea78].

Proposition 1.1.1 *Soient S une surface $K3$, et C une courbe lisse de genre g sur S .*

(i) *On a $C^2 = 2g - 2$ et $h^0(C) = g + 1$.*

(ii) *Si $g \geq 1$, le système linéaire $|C|$ est sans point base, et définit donc un morphisme $\varphi := \varphi_{|C|} : S \rightarrow \mathbf{P}^g$. Sa restriction à C est le morphisme canonique $C \rightarrow \mathbf{P}^{g-1}$, i.e. celui défini sur C par le système linéaire complet $|\omega_C|$.*

(iii) *Si $g = 2$, $\varphi : S \rightarrow \mathbf{P}^2$ est un morphisme de degré 2 ramifié au-dessus d'une sextique dans \mathbf{P}^2 .*

(iv) *Si $g \geq 3$, on a les deux possibilités suivantes :*

- *ou bien φ est un morphisme birationnel (c'est le cas si une courbe générique de $|C|$ n'est pas hyperelliptique) ;*

- *ou bien φ est un morphisme de degré 2 sur une surface rationnelle (non nécessairement lisse) de degré $g - 1$ dans \mathbf{P}^g (c'est le cas si une courbe générique de $|C|$ est hyperelliptique).*

(v) *Si $g \geq 3$ (resp. $g = 2$), alors le morphisme défini par le système linéaire $|2C|$ (resp. $|3C|$) est birationnel.*

Preuve. L'égalité $C^2 = 2g - 2$ est donnée par la formule du genre $p_a(C) = 1 + (K_S \cdot C + C^2)/2$. La formule $h^0(\mathcal{O}_S(C)) = g + 1$ s'obtient en montrant d'abord que $h^1(\mathcal{O}_S(C)) = h^1(\mathcal{O}_S(-C)) = 0$ par la suite exacte de restriction, et en appliquant ensuite le théorème de Riemann-Roch.

D'autre part, comme $K_S = 0$, la suite exacte d'adjonction s'écrit

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(C) \rightarrow \omega_C \rightarrow 0,$$

ce qui prouve que le système linéaire $|C|$ découpe le système canonique $|\omega_C|$ sur la courbe C . Le reste de la proposition est essentiellement une conséquence des propriétés des systèmes linéaires canoniques sur les courbes (cf. par exemple [Har77] chapitre IV).

Le système $|\omega_C|$ est sans point base sur la courbe C , donc $|C|$ n'a pas non plus de point base.

Si C n'est pas hyperelliptique, $|\omega_C|$ est un plongement. Comme $\varphi^{-1}(\varphi(C)) = C$, ceci implique que φ est birationnel. Dans le cas contraire, toute courbe lisse de $|C|$ est hyperelliptique, et φ est de degré 2. Comme $C^2 = 2g - 2$, l'image de φ est une surface de degré $g - 1$ dans \mathbf{P}^g , dont les sections hyperplanes sont les courbes rationnelles $\varphi(C)$, ce qui prouve qu'il s'agit d'une surface rationnelle.

Enfin, le dernier point est une conséquence du fait que pour $g \geq 3$ (resp. $g = 2$), le morphisme bicanonique (resp. tricanonique) de C est un plongement. □

Exemple 1.1.2 Pour $g = 3$, $\varphi(S)$ est une quartique dans \mathbf{P}^3 . Pour $g = 4$, c'est l'intersection complète d'une quadrique et d'une cubique dans \mathbf{P}^4 . Pour $g = 5$, il s'agit génériquement de l'intersection complète de trois quadriques dans \mathbf{P}^5 . Ces exemples sont les seules intersections complètes dans un espace projectif qui sont des surfaces K3.

On décrit maintenant l'algèbre de cohomologie d'une surface K3. Cela sera utile d'une part pour obtenir des propriétés du groupe de Picard, et d'autre part pour étudier l'application des périodes pour les surfaces K3 au paragraphe suivant.

Soit S une surface K3. On a $\chi(\mathcal{O}_S) = 2$, donc la formule de Noether

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + \chi_{\text{top}}(S))$$

donne $\chi_{\text{top}}(S) = 24$. On en déduit les nombres de Betti $b_0(S) = 2$, $b_1(S) = 0$, et $b_2(S) = 22$, et les nombres de Hodge (pour la cohomologie en degré 2) $h^{2,0}(S) = h^{0,2}(S) = 1$ et $h^{1,1}(S) = 20$. La forme d'intersection sur $H^2(S, \mathbf{R})$ est donc de signature $(3, 19)$ d'après le théorème de l'indice de Hodge.

Le réseau $H^2(S, \mathbf{Z})$ est unimodulaire par dualité de Poincaré. De plus, comme le fibré canonique de S est trivial, la forme d'intersection sur ce réseau est paire. Étant pair, unimodulaire, et de signature $(3, 19)$, $H^2(S, \mathbf{Z})$ est isométrique au réseau

$$L = (-E_8)^{\oplus 2} \oplus U^{\oplus 3}$$

(cf. [Ser77]), où E_8 est le réseau (défini positif) des racines usuel, et U est le réseau hyperbolique, *i.e.* \mathbf{Z}^2 muni de la forme d'intersection

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Modules et périodes

Dans ce paragraphe, on montre de quelle manière l'application des périodes des surfaces K3 permet de construire un espace de modules. Cet espace de modules est nécessaire à la construction des variétés de Severi universelles, dont l'étude est l'un des principaux buts du travail présenté dans cette partie. On verra au passage une justification du fait que le groupe de Picard d'une surface K3 projective générique est isomorphe à \mathbf{Z} , ce qui sera utilisé sans cesse au cours des deux chapitres de cette partie. On suit essentiellement le texte [Pal85], vers lequel on renvoie pour des démonstrations complètes.

Application des périodes

On commence par définir l'application des périodes associée à une déformation de surfaces complexes. *A priori*, il faut travailler avec des surfaces kähleriennes. Ce n'est pas un problème dans le cas qui nous intéresse, puisque toutes les surfaces K3 sont kähleriennes.

L'étude de l'application des périodes est fondée sur le fait élémentaire suivant. Soit S une surface kählerienne compacte. La structure de Hodge polarisée de poids 2 sur $H^2(X, \mathbf{C})$ est caractérisée uniquement par la donnée du sous-espace vectoriel complexe $H^{2,0}(S) \subset H^2(S, \mathbf{C})$. Celui-ci doit satisfaire aux deux conditions suivantes : pour tout $\eta \in H^{2,0}(S)$, on a $(\eta \cdot \eta) = 0$ et $(\eta \cdot \bar{\eta}) > 0$. On note $h := h^{2,0}(S)$. Le domaine des périodes Ω de S est la partie de la grassmannienne $\text{Gr}(H^2(X, \mathbf{C}), h)$ paramétrant les h -plans satisfaisant aux deux conditions énoncées précédemment. Ainsi, chaque point du domaine des périodes correspond à une structure de Hodge possible induite par une structure complexe possible sur la variété différentiable sous-jacente à la surface S .

Soit $\phi : \mathcal{S} \rightarrow (B, 0)$ une déformation de S . Une telle déformation se réalise comme une famille de structures complexes $(S_t)_{t \in B}$ sur la variété différentiable sous-jacente à S . Chacune de ces structures complexes induit une structure de Hodge sur $H^2(S, \mathbf{C})$.

Définition 1.1.3 *L'application $\mathcal{P} : B \rightarrow \Omega$, qui à chaque $t \in B$ associe le point correspondant à $H^{2,0}(S_t) \subset H^2(S, \mathbf{C})$ dans le domaine des périodes de S , est appelée l'application des périodes de la déformation $\mathcal{S} \rightarrow B$.*

L'application des périodes est holomorphe. Pour expliciter sa différentielle, on utilise l'application de Kodaira-Spencer de la famille $\phi : \mathcal{S} \rightarrow (B, 0)$. C'est le morphisme

$$\rho : H^0(S, \phi^*T_B|_S) = T_{B,0} \rightarrow H^1(S, T_S),$$

induit par la suite exacte sur S

$$0 \rightarrow T_S \rightarrow T_S|_S \rightarrow \phi^*T_B|_S \rightarrow 0.$$

C'est l'application classifiante pour la déformation du premier ordre de S induite par \mathcal{S} . Notons au passage que l'espace des obstructions des déformations de S est $H^2(S, T_S)$.

La différentielle de l'application des périodes \mathcal{P} se calcule alors de la manière suivante. On a un morphisme

$$K : H^1(S, T_S^{1,0}) \rightarrow \text{Hom}(H^{2,0}(S), H^{1,1}(S))$$

fourni par l'application de cup-produit contraction avec $H^{2,0}(S) \cong H^0(S, \Omega_S^{2,0})$. Comme le domaine des périodes est un ouvert de la sous-variété définie par l'équation $(\eta \cdot \eta) = 0$ dans la grassmannienne $\text{Gr}(H^2(X, \mathbf{C}), h)$, pour tout $\mu \in \Omega$, l'espace tangent $T_{\Omega, \mu}$ s'identifie à l'ensemble des applications alternées de μ dans $H^2(X, \mathbf{C})/\mu$. Lorsque $h^{2,0}(S) = 1$ (ce qui est le cas si S est une surface $K3$), on en déduit

$$T_{\Omega, \mu} \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(\mu, \mu^\perp/\mu) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(H_\mu^{2,0}, H_\mu^{1,1}).$$

En fait, l'identité précédente est toujours valable grâce à la transversalité de Griffiths. On appelle μ_0 la période de la surface complexe S . La différentielle de l'application des périodes en 0 est la composée suivante, où ρ désigne l'application de Kodaira-Spencer.

$$\begin{array}{ccc} T_{B,0} & \xrightarrow{d\mathcal{P}_0} & T_{\Omega, \mu_0} \\ & \searrow \rho & \nearrow K \\ & H^1(S, T_S) & \end{array}$$

Théorème de Torelli pour les surfaces $K3$

On suppose maintenant que S est une surface $K3$. Dans ce cas, $H^{2,0}(S)$ est une droite, engendrée par une 2-forme holomorphe partout non nulle. L'application de cup-produit contraction avec $H^0(S, \Omega_S^{2,0})$ fournit alors des isomorphismes $H^i(S, T_S) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(H^{2,0}(S), H^{1,i}(S))$ pour $0 \leq i \leq 2$. En particulier, $H^0(S, T_S)$ et $H^2(S, T_S)$ sont tous les deux réduits à 0, et $H^1(S, T_S)$ est un espace vectoriel de dimension $h^{1,1}(S) = 20$. Il existe donc un espace de déformations locales universel de S , paramétré par un ouvert de $H^1(S, T_S)$, et tel que l'application de Kodaira-Spencer associée soit l'identité.

D'autre part, le domaine des périodes de S est un ouvert de la quadrique de $\mathbf{P}(H^2(S, \mathbf{C})) \cong \mathbf{P}^{21}$ donnée par l'équation $(\eta \cdot \eta) = 0$. On a déjà remarqué que le morphisme K du paragraphe

précédent est un isomorphisme. Les calculs de ce paragraphe, appliqués à la différentielle de l'application des périodes associées à la famille universelle de déformations locales, identifient $d\mathcal{P}_0$ à K , et prouvent donc le résultat suivant, qui constitue un théorème de Torelli local pour les surfaces K3.

Théorème 1.1.4 (Andreotti-Weil) *L'application des périodes associées à la famille universelle des déformations locales d'une surface K3 est un isomorphisme local.*

Il est nécessaire d'introduire la notion d'isométrie de Hodge effective pour énoncer une version globale de ce théorème. Soit S une surface kählérienne. On note \mathcal{C}_S le cône des éléments $\eta \in \mathbb{H}^{1,1}(S) \cap \mathbb{H}^2(S, \mathbf{R})$ tels que $(\eta \cdot \eta) > 0$. On appelle \mathcal{C}_S^+ la composante de \mathcal{C}_S qui contient les classes de Kähler. On note Δ_S^+ l'ensemble des classes de diviseurs effectifs de S d'auto-intersection (-2) . On appelle chambre kählérienne de S , et on note \mathcal{K}_S , la composante de \mathcal{C}_S^+ constituée des éléments η tels que pour tout $\delta \in \Delta_S^+$, on ait $(\eta \cdot \delta) > 0$. Elle contient les classes de Kähler. Les éléments η de \mathcal{K}_S sont tels que $(\eta \cdot d) > 0$ pour toute classe de diviseur effectif d .

Si S et S' sont deux surfaces kählériennes compactes, une isométrie $\varphi : \mathbb{H}^2(S, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbb{H}^2(S', \mathbf{Z})$ est une isométrie de Hodge effective si elle préserve la décomposition de Hodge, et si de plus $\varphi(\mathcal{K}_S) = \mathcal{K}_{S'}$. On rappelle que les surfaces K3 sont toutes kählériennes. On a alors le résultat suivant, qui est un théorème de Torelli global.

Théorème 1.1.5 (Burns-Rapoport, Piatečkii-Šapiro-Šafarevič) *Soient S et S' deux surfaces K3, et soit $\varphi : \mathbb{H}^2(S, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{H}^2(S', \mathbf{C})$ une isométrie de Hodge effective. Il existe un unique isomorphisme $u : X' \rightarrow X$ tel que $\varphi = u^*$.*

Idée de la preuve. Il faut tout d'abord démontrer un tel théorème de Torelli pour certaines surfaces K3 particulières, les surfaces de Kummer (cf. paragraphe 1.2.2). On montre ensuite que les périodes des surfaces de Kummer sont denses dans le domaine des périodes Ω .

Par application du théorème de Torelli local, on construit deux familles de surfaces K3 (S_t) et (S'_t) sur un ouvert de $U \subset \Omega$, telles que $S_0 = S$ et $S'_0 = S'$. L'ouvert U contient une partie dense T telle que pour tout $t \in T$, les surfaces S_t et S'_t sont des surfaces de Kummer. Ces surfaces ayant la même période, elles sont isomorphes par le théorème de Torelli pour les surfaces de Kummer.

Burns et Rapoport prouvent alors que ces isomorphismes $S'_t \cong S_t$ convergent vers un isomorphisme $S' \cong S$.

□

Modules des K3 polarisées

Les théorèmes de Torelli local et global (théorèmes 1.1.4 et 1.1.5 précédents) autorisent en un certain sens la construction d'un espace de modules pour les surfaces K3. Il faut au préalable introduire la notion de surface K3 marquée. Si S est une surface K3, on a vu au paragraphe 1.1.1 que $\mathbb{H}^2(S, \mathbf{Z})$ est isomorphe au réseau $L = (-E_8)^{\oplus 2} \oplus U^{\oplus 3}$.

Définition 1.1.6 *On appelle surface K3 marquée une paire (S, σ) , où S est une surface K3 marquée, et σ est une isométrie $\mathbb{H}^2(S, \mathbf{Z}) \rightarrow L$.*

La période d'une surface K3 marquée (S, σ) est naturellement la droite $\sigma_{\mathbf{C}}(\mathbb{H}^{2,0}(S)) \subset L_{\mathbf{C}} := L \otimes \mathbf{C}$. C'est un point du domaine des périodes $\Omega \subset \mathbf{P}(L_{\mathbf{C}})$, défini par les équations $(\eta \cdot \eta) = 0$ et $(\eta \cdot \bar{\eta}) > 0$.

Les théorèmes de Torelli local et global permettent alors de fabriquer un espace de modules fin \mathcal{M}_{K3} pour les surfaces K3 marquées, en recollant des ouverts paramétrant des familles

universelles locales de surfaces $K3$ marquées. Un théorème de Todorov dit alors que tout élément du domaine des périodes marquées Ω est la période d'une surface $K3$ marquée. Ceci permet d'établir un isomorphisme entre l'espace de modules des surfaces $K3$ marquées \mathcal{M}_{K3} et un revêtement étale du domaine des périodes marquées Ω , qui est un ouvert d'une hypersurface quadrique dans \mathbf{P}^{21} .

Dans ce travail, on s'intéresse plus particulièrement aux surfaces $K3$ projectives. Il est possible de fabriquer un espace de modules fin pour les surfaces $K3$ marquées munies d'une polarisation. Soit (S, σ) une surface $K3$ marquée, et notons $\mu \in \Omega$ sa période. Le théorème de Lefschetz sur les classes (1, 1) fournit un isomorphisme canonique

$$\text{Pic}(S) \cong \{\gamma \in \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Z}) \text{ tel que } (\sigma(\gamma) \cdot \mu) = 0\}. \quad (1.1)$$

En effet, soit $\gamma \in \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Z})$. Comme γ est entière, elle est dans l'orthogonal de $\mathbf{H}^{2,0}(S)$ si et seulement si elle est également dans l'orthogonal de $\mathbf{H}^{0,2}(S)$. Ceci implique que le membre de droite de (1.1) est égal à $\mathbf{H}^2(S, \mathbf{Z}) \cap \mathbf{H}^{1,1}(S)$. Cette intersection est égale à $\text{NS}(S)$ d'après le théorème de Lefschetz. Enfin, on a $\text{Pic}(S) \cong \text{NS}(S)$ car $\mathbf{H}^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$.

Tenant compte de ceci, l'application des périodes des surfaces $K3$ marquées permet la construction pour tout $h \geq 2$ d'un espace de modules pour les surfaces $K3$ munies d'une polarisation de degré $2h - 2$, de la manière suivante. On choisit $q \in L$ tel que $(q \cdot q) = 2h - 2$, et on considère Ω_q l'hypersurface de Ω découpée par l'hyperplan d'équation $(\eta \cdot q) = 0$. C'est un ouvert d'une quadrique lisse de dimension 19 dans $\mathbf{P}(q^\perp)$. On note Ω_q° l'ensemble des $\mu \in \Omega_q$ tels que q ne soit orthogonal à aucun élément de Δ_μ , où Δ_μ est l'ensemble des classes de diviseurs de carré (-2) sur la surface $K3$ marquée correspondant à la période μ . De tels diviseurs, s'ils sont effectifs, correspondent à des droites sur la surface. On a maintenant le résultat suivant.

Proposition 1.1.7 *La variété Ω_q° est un espace de modules fin pour les surfaces $K3$ marquées munies d'une polarisation de degré $2h - 2$.*

A partir de cet espace de modules, on construit un espace de modules fin $\mathcal{M}_{K3,g}$ pour les surfaces $K3$ marquées de genre g , *i.e.* les surfaces $K3$ marquées possédant un fibré inversible L d'auto-intersection $L^2 = 2g - 2$, et dont la classe dans $\mathbf{H}^2(S, \mathbf{Z})$ est indivisible.

L'isomorphisme (1.1) permet de décrire le groupe de Picard d'une surface $K3$ générique. Le résultat suivant sera utilisé de manière essentielle tout au long de la partie I de cette thèse.

Proposition 1.1.8 *Pour une surface $K3$ générique S , on a $\text{Pic}(S) = 0$. Pour une surface $K3$ algébrique générique, on a $\text{Pic}(S) \cong \mathbf{Z}$.*

Preuve. Soit S une surface $K3$. L'isomorphisme (1.1) prouve que le groupe de Picard de S est non nul si et seulement si la période μ de S est dans l'un des hyperplans d'équation $(\gamma_0 \cdot \mu) = 0$ dans $L_{\mathbf{C}}$, avec γ_0 entière. Donc pour μ hors d'une réunion dénombrable d'hyperplans du domaine des périodes Ω , on a $\text{Pic}(S) = 0$. Ceci prouve le premier point de la proposition.

De même, pour $\mu \in \Omega_q$ hors de la réunion dénombrable des sections hyperplanes d'équation $(\gamma_0 \cdot \mu) = 0$, $\gamma_0 \notin \mathbf{Z} \cdot q$, on a $\text{Pic}(S) \cong \mathbf{Z}$. □

1.2 Endomorphismes rationnels

1.2.1 Le cas des morphismes

Un problème un peu différent de celui qui nous intéresse consiste à chercher les variétés projectives lisses X qui sont munies d'un endomorphisme de degré strictement supérieur à 1, *i.e.*

d'un morphisme dominant $f : X \rightarrow X$ tel que $\deg(f) > 1$. On résume ici les travaux d'Amerik, Rovinski et Van de Ven ([ARV99]), Beauville ([Bea01]), Fujimoto et Nakayama ([Fuj02], [Nak02], [FN05]) à ce sujet.

Les variétés toriques et abéliennes sont manifestement munies de tels endomorphismes, et ce sont les seuls exemples que l'on connaisse. Ceci conduit à conjecturer qu'il n'en existe tout simplement pas d'autre. Plus précisément, si X satisfait aux deux conditions $\text{Pic}(X) = \mathbf{Z}$, et $\kappa(X) \geq 0$, on conjecture qu'il n'existe aucun endomorphisme de X qui soit de degré > 1 . Cette conjecture est démontrée en dimension inférieure à 3 ([FS98]). Dans cette direction, Beauville obtient dans [Bea01] le résultat suivant.

Théorème 1.2.1 (Beauville) *Soit X une intersection complète de multidegré (d_1, \dots, d_p) dans \mathbf{P}^{n+p} , de dimension $n \geq 2$. Si l'un au moins des d_i est supérieur à 3, alors X ne possède aucun endomorphisme de degré > 1 .*

Preuve. On se limite pour simplifier au cas d'une hypersurface $X \subset \mathbf{P}^{n+1}$. On montre, selon une idée d'Amerik, Rovinski et Van de Ven, que l'existence d'un morphisme $f : X \rightarrow X$ dominant, et tel que $\deg(f) > 1$ entraîne l'inégalité de classes de Chern

$$c_n(\Omega_X^1(2)) \leq 2^n \deg(X) \quad (1.2)$$

Le reste de la preuve est un calcul de classes de Chern pour lequel on renvoie à [Bea01], et qui montre que cette inégalité est fautive pour une hypersurface de degré supérieur à 3.

Le faisceau $\Omega_{\mathbf{P}^{n+1}}^1(2)$ est engendré par ses sections globales, donc $\Omega_X^1(2)$ aussi, par restriction puis passage au quotient. Ceci implique, d'après [ARV99], lemme 1.1, que pour toute section générale $\sigma \in H^0(X, \Omega_X^1(2))$, σ et son pull-back $f^*\sigma \in H^0(X, \Omega_X^1(2l))$ ont des zéros isolés (l est l'entier tel que $f^*\mathcal{O}_X(1) \cong \mathcal{O}_X(l)$). En comptant les zéros de ces sections, on obtient

$$c_n(\Omega_X^1(2l)) \geq \deg(f)c_n(\Omega_X^1(2)) \quad (1.3)$$

(l'ensemble des zéros de $f^*\sigma$ est la réunion des images inverses des zéros de σ et des zéros obtenus par annulation de la différentielle f_*). L'égalité annoncée s'obtient alors en remarquant qu'on peut supposer l arbitrairement grand, quitte à remplacer f par une puissance f^k . On a $\deg(f) = l^n$, donc les deux membres de l'inégalité (1.3) sont des polynômes en l , et il suffit de comparer leurs coefficients dominants pour obtenir (1.2). □

Par ailleurs, on va maintenant expliquer que les exemples intéressants se trouvent en dimensions de Kodaira 0 et $-\infty$. Soit X une variété complexe. Pour $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $K_X^{\otimes k}$ possède au moins une section non nulle, on note $\Theta_k : X \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, K_X^{\otimes k}))$ l'application rationnelle définie par le système linéaire complet $|K_X^{\otimes k}|$. C'est la k -ème application pluricanonique. On définit la dimension de Kodaira $\kappa(X)$ de X comme le maximum des dimensions des images des applications pluricanoniques Θ_k . S'il n'existe aucun entier $k \geq 1$ tel que $K_X^{\otimes k}$ possède des sections, on pose $\kappa(X) = -\infty$. Un endomorphisme $f : X \rightarrow X$ induit par pull-back une transformation linéaire sur $H^0(X, K_X^{\otimes k})$, et donc une transformation projective sur $\mathbf{P}(H^0(X, K_X^{\otimes k}))$, que l'on notera F_k . Lorsque la dimension de Kodaira de X est strictement positive, il existe donc une fibration méromorphe invariante par tout endomorphisme. L'action sur la base de la fibration est linéaire, induite par la restriction de F_k à l'image de Θ_k . Le résultat suivant, connu depuis assez longtemps dans le cas de la fibration canonique ($k = 1$, cf. [Uen75]), a été démontré récemment dans [NZ07].

Théorème 1.2.2 (Nakayama-Zhang) *Soit X une variété complexe compacte de dimension canonique $\kappa(X) > 0$, et soit f un endomorphisme de X . Pour tout $k > 0$ tel que $K_X^{\otimes k}$ possède*

au moins une section non nulle, il existe une transformation projective de $\mathbf{P}(H^0(X, K_X^{\otimes k}))$ qui fait commuter le diagramme suivant, et cette transformation est périodique.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \Theta_k \downarrow & & \downarrow \Theta_k \\ \mathbf{P}(H^0(X, K_X^{\otimes k})) & \xrightarrow{F_k} & \mathbf{P}(H^0(X, K_X^{\otimes k})) \end{array}$$

Ceci montre que les endomorphismes des variétés complexes compactes avec $\kappa > 1$ se réduisent à des variétés de dimension inférieure. De plus, puisque la transformation F_k est périodique, elle est nécessairement de degré 1, et sa dynamique est bien maîtrisée. Il n'y a donc que la composante de f agissant sur les fibres de Θ_k qui puisse être de degré > 1 .

Cette remarque signifie que les exemples intéressants se situent tous en dimension de Kodaira 0 ou $-\infty$. Ceci motive la classification des variétés complexes compactes homogènes connexes qui sont munies d'un endomorphisme de degré > 1 , effectuée par Cantat dans [Can03].

Le cas des surfaces K3

D'après les remarques précédentes, le cas où la classe canonique est triviale est crucial dans la recherche de variétés projectives munies d'endomorphismes de degré > 1 . Nous nous limitons à présent au cas des surfaces, pour lequel le problème de départ est complètement résolu (cf. [Can03]). S'il est clair que les variétés abéliennes sont munies de tels endomorphismes, le cas des surfaces K3 est réglé par le résultat suivant.

Proposition 1.2.3 *Soit S une surface K3. Tout morphisme dominant $f : S \rightarrow S$ est nécessairement un automorphisme de S .*

Preuve. On note R le diviseur de ramification de f , c'est-à-dire le lieu des zéros de l'application jacobienne de f . On a alors

$$K_S = f^*K_S + R.$$

Comme $K_S = 0$, cela donne $R = 0$, et f est donc un revêtement étale. Les surfaces K3 étant simplement connexes, cela implique que f est un automorphisme de S . □

L'étude des surfaces K3 munies d'automorphismes n'est pas le problème qui nous intéresse. Il s'agit néanmoins d'un domaine très actif (cf. par exemple les travaux de McMullen, Cantat). Pour illustrer ce problème, on donne un exemple de surface K3 munie d'un gros groupe d'automorphismes, et dont l'étude est tout à fait instructive.

Exemple 1.2.4 Soit S une surface K3, hypersurface de tridegré $(2, 2, 2)$ dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Chacune des trois projections π_i ($1 \leq i \leq 3$) sur le i -ème facteur est une fibration elliptique $S \rightarrow \mathbf{P}^1$. Ceci permet de définir des automorphismes σ_i , induits par les involutions définies sur les fibres elliptiques de ces fibrations (réalisant une courbe elliptique comme un tore complexe \mathbf{C}/Λ , l'involution sur cette courbe est donnée par $z \mapsto -z$). Autrement dit, σ_i est l'automorphisme associé au revêtement galoisien de degré 2 défini par la projection $\text{pr}_{kl} : S \rightarrow \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, où $\{i, k, l\} = \{1, 2, 3\}$. Le groupe des automorphismes de cette surface est engendré par σ_1, σ_2 et σ_3 .

1.2.2 Exemples

Soit S une surface $K3$. On a vu au paragraphe précédent que pour trouver des transformations $S \rightarrow S$ dominantes et de degré > 1 , il est inutile de chercher parmi les morphismes. On cherche donc naturellement des applications rationnelles $S \dashrightarrow S$ dominantes. On donne dans ce paragraphe des exemples de surfaces $K3$ munies de telles applications rationnelles.

Surfaces $K3$ elliptiques

Dans ce paragraphe, on décrit précisément de quelle manière on peut construire des endomorphismes rationnels sur une surface $K3$ munie d'une fibration elliptique.

Exemple 1.2.5 Soit S une surface $K3$ munie d'un pinceau elliptique $|F|$, et d'un fibré en droites relativement ample L , de degré relatif d . Alors la multiplication dans les fibres elliptiques permet de définir une application rationnelle dominante $\mu_{d+1} : S \dashrightarrow S$. L'image d'un point x appartenant à une fibre générique F est par définition l'unique point y de F tel que

$$\mathcal{O}_F((d+1)x - y) = L|_F. \quad (1.4)$$

Cette application préserve la fibration elliptique, et on voit qu'un point y dans une fibre générique F possède exactement $(d+1)^2$ points. Le degré topologique de μ_{d+1} est donc $(d+1)^2$.

D'après la proposition 1.1.1, si F est une courbe elliptique lisse sur une surface $K3$, alors le système linéaire complet $|F|$ est un pinceau. Dans la situation générique, les fibres singulières d'un tel pinceau sont des courbes rationnelles nodales (de genre arithmétique 1, donc avec un unique nœud), et il y en a exactement 24.

Le compte des fibres singulières se fait par la formule suivante, purement topologique. Soit S une surface lisse, B une courbe lisse, et $p : S \rightarrow B$ un morphisme surjectif. Alors on a (cf. [Bea78], lemme VI.4)

$$\chi_{\text{top}}(S) = \chi_{\text{top}}(F_{\text{gen}}) \cdot \chi_{\text{top}}(B) + \sum_{b \in \text{Exc}(p)} (\chi_{\text{top}}(F_b) - \chi_{\text{top}}(F_{\text{gen}})),$$

où F_{gen} est la fibre générique de p , $\text{Exc}(p)$ est l'ensemble des points de B au-dessus desquels p n'est pas lisse, et F_b est la fibre de p au-dessus du point b . Pour une fibration elliptique $S \rightarrow \mathbf{P}^1$ générique, où S est une surface $K3$, on obtient

$$\text{Card}(\text{Exc}(p)) = \chi_{\text{top}}(S) = 24.$$

La relation (1.4) n'est bien définie que sur les courbes lisses du pinceau elliptique, donc μ_{d+1} est seulement une application rationnelle. Nous expliquons maintenant comment il est possible d'éliminer ses indéterminations. On se place dans le cas générique, où les seules fibres singulières de $|F|$ sont 24 courbes rationnelles nodales isolées. On suppose pour simplifier que le degré relatif de L est 1. Il s'agit donc d'une section de $|F|$, qui fournit une origine pour chacune des fibres elliptiques lisses, et permet de définir la loi de groupe usuelle sur chacune d'entre elles. On se limite au cas de μ_2 , la multiplication par 2. Elle est de degré 4.

On se place au voisinage d'une fibre nodale F_0 , obtenue à partir de \mathbf{P}^1 en identifiant 0 et ∞ . On appelle p_0 le nœud ainsi obtenu. Le long de F_0 , μ_2 dégénère en $z \mapsto z^2$. Le degré de $\mu_2|_{F_0}$ est donc 2, au lieu de 4 le long de la fibre générique. Un seul éclatement au point p_0 suffit pour rendre μ_2 holomorphe au voisinage de p_0 . On note $\tau : \tilde{S} \rightarrow S$ cet éclatement, F'_0 la transformée

propre de F_0 , et E le diviseur exceptionnel. On appelle $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 \circ \tau$ l'application holomorphe locale ainsi obtenue.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & & \\ \tau \downarrow & \searrow \tilde{\mu}_2 & \\ S & \xrightarrow{\mu_2} & S \end{array}$$

On a $\tau^*F_0 = F'_0 + 2E$, et donc

$$(\tilde{\mu}_2)_*(F'_0 + 2E) = 2F_0 + 2(\tilde{\mu}_2)_*E = 4F_0,$$

car $\tilde{\mu}_2$ est de degré 2 le long de F'_0 comme $z \mapsto z^2$, et de degré 4 le long de la fibre générique de $|F|$. On obtient donc que $\tilde{\mu}_2$ est de degré 1 le long de E .

Cela s'interprète bien géométriquement. Une courbe elliptique lisse se réalise comme une cubique lisse C dans \mathbf{P}^2 , donnée par une équation $y^2 = x^3 + px + q$. Soit P un point de cette courbe. La tangente à C en P rencontre C en 3 points, dont un seul est distinct de P . On note Q ce troisième point. Le point $2P$ est le symétrique de Q par rapport à la droite $y = 0$. De la même manière, F_0 est représentée par une cubique nodale dans \mathbf{P}^2 . Le diviseur exceptionnel paramètre les droites passant par le nœud p_0 . Soit P un point de E . La droite correspondante rencontre la cubique en un seul point différent de p_0 . Le point $\tilde{\mu}_2(P)$ est par définition le symétrique par rapport à la droite d'équation $y = 0$ de ce point.

Finalement, on obtient une application holomorphe $\tilde{\mu}_2 : \tilde{S} \rightarrow S$ à partir de μ_2 en éclatant une seule fois la surface S en 24 points distincts.

Pour finir, on donne un exemple de surface K3 munie d'un pinceau elliptique. Soit S une hypersurface quartique de \mathbf{P}^3 contenant une droite Δ . On note H un diviseur hyperplan de S . Alors le système linéaire complet $|H - \Delta|$ est un pinceau elliptique. Pour le voir, il suffit de calculer

$$(H - \Delta)^2 = H^2 - 2H \cdot \Delta + \Delta^2 = 4 - 2 - 2 = 0.$$

Surfaces de Kummer

Les surfaces de Kummer sont un type tout à fait particulier de surfaces K3, qui possèdent des endomorphismes rationnels de degré > 1 . On rappelle ici brièvement leur construction en tant que quotients de tores complexes, et on explicite leurs endomorphismes rationnels.

Soit A un tore complexe de dimension 2, ι l'involution qui envoie un point $a \in A$ sur le point $-a$. Les points fixes de ι sont les 16 points de 2-torsion de A . Au voisinage de chacun de ces points, ι est donnée dans une carte holomorphe convenable par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. L'algèbre des invariants locaux est $\mathbf{C}[x^2, xy, y^2]$. Elle est isomorphe à $\mathbf{C}[\alpha, \beta, \gamma]/(\alpha\beta - \gamma^2)$, donc le quotient A/ι est une surface complexe avec 16 points doubles ordinaires. Ces singularités sont résolues par un éclatement simple $\tau : S \rightarrow A/\iota$. Dans S , on a remplacé chacun des 16 points singuliers par une (-2) -courbe. Il est bien connu qu'une telle surface S est une surface K3. On appelle ces surfaces les surfaces de Kummer. Elles possèdent des transformations rationnelles.

Exemple 1.2.6 Les homothéties $(x, y) \mapsto \lambda \cdot (x, y)$ du tore complexe A sont bien définies sur le quotient A/ι , et se relèvent donc en des endomorphismes rationnels de la désingularisation S .

Un exemple en dimension supérieure

Les deux familles d'exemples précédentes fournissent des endomorphismes rationnels sur des surfaces K3 qui ne sont pas génériques. En effet, dans le cas projectif, le rang du groupe de

Picard est au moins 2 pour les surfaces $K3$ munies d'un pinceau elliptique, et au moins 17 pour les surfaces de Kummer. Dans ce paragraphe, on donne un exemple de variété hyperkählerienne de dimension 4, qui possède des endomorphismes rationnels non triviaux, et qui a un groupe de Picard de rang 1. Il est dû à Claire Voisin ([Voi04b]).

Exemple 1.2.7 Soit X la variété paramétrant les droites contenues dans une hypersurface cubique $V \subset \mathbf{P}^5$. On définit une application rationnelle $\varphi : X \dashrightarrow X$ en associant à une droite générique $l \subset V$ l'unique droite l' distincte de l contenue dans l'intersection $P \cap V$, où P est l'unique plan tangent à V le long de l . Cette application rationnelle est de degré 16.

Beauville et Donagi ([BD85]) prouvent que si V est choisie génériquement, alors X est lisse, et on a $\text{Pic}(X) \cong \mathbf{Z}$. Ils montrent également que X est irréductible et de dimension 4, hyperkählerienne (*i.e.* munie d'une 2-forme holomorphe partout non dégénérée), et équivalente par déformation au schéma de Hilbert ponctuel $S^{[2]}$ d'une surface $K3$ de degré 14. Ceci implique en particulier que le fibré canonique K_X est trivial. Cette variété de Fano des droites d'une cubique de \mathbf{P}^5 est donc le plus proche analogue possible en dimension supérieure d'une surface $K3$.

De plus, Amerik et Campana ([AC05]) montrent que cet exemple ne se déduit pas des exemples précédents, puisqu'il ne respecte aucune fibration en vertu du théorème suivant : soit X une variété projective lisse, telle que $K_X = 0$ et $\text{NS}(X) \cong \mathbf{Z}$. Alors toute fibration rationnelle $g : X \dashrightarrow B$ ($0 < \dim B < \dim X$) a des fibres de type général. En effet, si F est une variété de type général, c'est-à-dire une variété de dimension de Kodaira maximale $\kappa(F) = \dim F$, il résulte du théorème 1.2.2 que les endomorphismes de F sont tous des automorphismes (pour k convenable, les fibres génériques de l'application pluricanonique Θ_k sont finies, et cette fibration est préservée par les endomorphismes de F).

1.3 Courbes nodales et variétés de Severi

1.3.1 Déformations d'hypersurfaces nodales

La théorie des déformations des hypersurfaces nodales est bien connue (voir par exemple le chapitre 14 de [Voi02] sur les pinceaux de Lefschetz). On en rappelle ici les principaux résultats. Pour une étude spécifique aux familles de courbes nodales sur une surface, on renvoie aux articles de Tannenbaum [Tan80] et [Tan82].

Soit X une variété complexe, lisse, de dimension n , munie d'un fibré en droites effectif L . On note $(S^\delta X)^\circ$ l'ouvert du produit symétrique $\text{Sym}^\delta X$ correspondant aux sommes $x_1 + \dots + x_\delta$ de δ points deux à deux distincts. On considère les hypersurfaces dans le système linéaire complet $|L|$ possédant au moins δ points singuliers. On introduit la variété d'incidence

$$\mathcal{I} = \{(D, x_1 + \dots + x_\delta) \in |L| \times (S^\delta X)^\circ \text{ t.q. } D \text{ est singulière en } x_1, \dots, x_\delta\}.$$

On note $\pi : \mathcal{I} \rightarrow |L|$ la projection sur le premier facteur. Au voisinage d'un point $(f, x) \in |L| \times (S^\delta X)^\circ$ (où f est une équation d'une hypersurface D , et $x = x_1 + \dots + x_\delta$), \mathcal{I} est définie par les $\delta(n+1)$ équations

$$\forall i = 1, \dots, \delta, \quad f(x_i) = \frac{\partial f}{\partial z_1}(x_i) = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n}(x_i) = 0,$$

où z_1, \dots, z_n désigne par un léger abus de notations un système de coordonnées holomorphes locales au voisinage de chacun des x_i . On a donc

$$\dim(\mathcal{I}) \geq \dim |L| - \delta.$$

On dit que $\dim |L| - \delta$ est la dimension attendue pour \mathcal{I} .

Après différentiation, on obtient les équations de l'espace tangent $T_{\mathcal{I},(f,x)}$ dans $T_{|L|,f} \times T_{(S^\delta X)^\circ,x}$: le vecteur tangent $(g, h_1 + \dots + h_\delta) \in T_{|L|,f} \times T_{(S^\delta X)^\circ,x}$ appartient à $T_{\mathcal{I},(f,x)}$ si et seulement si pour tout x_i on a

$$\begin{cases} df_{x_i}(h_i) + g(x_i) = g(x_i) = 0 \\ \text{Hess}_{x_i}(f)(h_i) = -\left(\frac{\partial g}{\partial z_1}(x_i), \dots, \frac{\partial g}{\partial z_n}(x_i)\right) = -dg_{x_i}. \end{cases}$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 1.3.1 *La projection $\pi : \mathcal{I} \rightarrow |L|$ est un plongement au point $(D, x_1 + \dots + x_\delta)$ si et seulement si les points x_1, \dots, x_δ sont tous des points singuliers non dégénérés de D , i.e. si les hessiennes $\text{Hess}_{x_i}(f)$ sont toutes non dégénérées.*

Dans ce cas, l'espace tangent à la projection $\pi(\mathcal{I}) \subset |L|$ s'identifie au point D à

$$\{g \in T_{|L|,D} \text{ t.q. } g(x_1) = \dots = g(x_\delta) = 0\} \cong \text{H}^0(X, \mathcal{O}_X(D) \otimes I_x) / \text{H}^0(X, \mathcal{O}_X),$$

où $I_x \subset \mathcal{O}_X$ est le faisceau d'idéaux définissant x dans X .

Dans les conditions de la proposition précédente, la variété d'incidence \mathcal{I} (ou de manière équivalente sa projection $\pi(\mathcal{I}) \subset |L|$) est de la dimension attendue $\dim |L| - \delta$ si et seulement si les δ nœuds imposent des conditions indépendantes au système $|L|$. Les points doubles ordinaires de D peuvent alors être lissés de manière indépendante par déformation.

Dans le cas particulier des courbes sur une surface, on retrouve le résultat suivant, établi par Zariski dans [Zar82]. Soit S une surface lisse, \mathcal{C} une famille de courbes sur S , et C_0 un membre générique de \mathcal{C} . Si C_0 est réduite, alors l'espace tangent $T_{\mathcal{C},C_0}$ s'identifie à un sous-espace \mathcal{T} de $\text{H}^0(C_0, \mathcal{O}_{C_0}(C_0))$. On a alors :

- (i) \mathcal{T} est en fait contenu dans $\text{H}^0(C_0, \mathcal{O}_{C_0}(C_0) \otimes I)$, où I est comme ci-dessus l'idéal définissant les points singuliers de C_0 dans S (il est parfois appelé idéal adjoint, ou encore idéal conducteur) ;
- (ii) si C_0 a des singularités qui ne sont pas des nœuds, alors en fait \mathcal{T} est contenu dans $\text{H}^0(C_0, \mathcal{O}_{C_0}(C_0) \otimes J)$, où J est un faisceau d'idéaux strictement plus petit que I , parfois appelé idéal équisingulier.

1.3.2 Le problème de Severi

On décrit dans ce paragraphe le problème initialement étudié par Severi dans [Sev21], et pour lequel il a proposé un argument en partie erroné. On présente brièvement la preuve de l'irréductibilité des familles de courbes étudiées par Severi, établie par Harris une soixantaine d'années plus tard ([Har86]).

Soit $V_{d,g}$ la variété paramétrant les courbes planes irréductibles de degré d et de genre géométrique g . On l'appelle variété de Severi. C'est la clôture de Zariski

$$V_{d,g} = \overline{\{C \in |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)|, C \text{ irréductible et nodale, } g(C) = g\}} \subset |\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)|$$

du lieu des courbes irréductibles nodales de genre géométrique g , dans l'espace projectif paramétrant toutes les courbes planes de degré d . Severi ne s'intéressait en fait qu'aux courbes planes irréductibles et nodales, i.e. à un ouvert de Zariski dense $V_{d,g}^\circ \subset V_{d,g}$. L'intérêt de ces courbes tient en grande partie au fait que toute courbe lisse est birationnellement équivalente à une courbe plane nodale *via* une série de projections. Severi annonce implicitement le résultat suivant.

Théorème 1.3.2 (Harris, [Har86]) *Pour tout $d \geq 1$ et $0 \leq g \leq (d-1)(d-2)/2$, la variété $V_{d,g}$ est irréductible.*

La preuve proposée par Harris s'articule autour des deux lemmes suivants, qui à eux deux impliquent évidemment le théorème.

Lemme 1.3.3 *Il existe une unique composante irréductible de $V_{d,g}$ qui contient la variété $V_{d,0}$ des courbes rationnelles nodales de degré d .*

Lemme 1.3.4 *Chacune des composantes irréductibles de $V_{d,g}$ contient une composante irréductible de $V_{d,g-1}$.*

Preuve du lemme 1.3.3. Elle est basée sur un argument de monodromie. On remarque pour commencer que $V_{d,0}$ est irréductible, car dominée par un ouvert d'un ensemble de triplets de polynômes homogènes sur \mathbf{P}^1 . Un point général de $V_{d,0}$ correspond à une courbe C_0 avec $(d-1)(d-2)/2 = p_a(C_0)$ nœuds. On voit l'allure locale de $V_{d,g}$ au voisinage de C_0 en remarquant qu'on peut lisser n'importe quel sous-ensemble de ces nœuds en déformant C_0 : il y a exactement $\binom{(d-1)(d-2)/2}{g}$ feuillettes de $V_{d,g}$ qui passent par C_0 .

Le résultat annoncé est alors une conséquence du fait que ces $\binom{(d-1)(d-2)/2}{g}$ feuillettes sont échangés transitivement par la monodromie quand C_0 varie dans $V_{d,0}$. Ceci s'obtient en montrant que la monodromie échange transitivement les nœuds de C_0 quand C_0 varie dans $V_{d,0}$: on voit cela en réalisant C_0 comme la projection d'une courbe rationnelle normale $\tilde{C}_0 \subset \mathbf{P}^d$ depuis un $(d-3)$ -plan général $\Lambda \subset \mathbf{P}^d$. Les nœuds de C_0 correspondent alors aux points d'intersection de Λ avec la variété des cordes de C (i.e. la variété de dimension 3 dans \mathbf{P}^d réglée par la réunion des droites bisécantes à C_0). Ces points d'intersection sont échangés transitivement par la monodromie. □

La preuve du second lemme nécessite des estimations de dimension pour les familles de courbes sur les surfaces à fibré anticanonique ample, qui tiennent compte du type de singularité des courbes de la famille. On ne peut pas se limiter à un résultat valable sur \mathbf{P}^2 uniquement, puisqu'il faut pouvoir utiliser ces estimations sur des éclatements de \mathbf{P}^2 dans le but de contrôler certaines conditions de tangence. Le prototype de ces résultats est le suivant.

Proposition 1.3.5 *Soit S une surface rationnelle lisse, et L un fibré en droites effectif sur S , tel que $C \cdot K_S < 0$ pour toute courbe $C \in |L|$. Soit $V_{k,\delta}^\circ$ la variété ouverte paramétrant les courbes irréductibles appartenant au système linéaire $|kL|$, et possédant exactement δ nœuds. Alors toutes les composantes de $V_{k,\delta}^\circ$ sont lisses, et sont ou bien vides, ou bien de la dimension attendue $\dim |kL| - \delta$.*

Preuve. D'après l'étude du paragraphe 1.3.1, on a toujours l'inégalité $\dim V_{k,\delta}^\circ \geq \dim |kL| - \delta$, donc il suffit de prouver pour toute courbe $C \in V_{k,\delta}^\circ$ l'inégalité $\dim T_{V_{k,\delta}^\circ, C} \leq \dim |kL| - \delta$. Soit donc $C \in V_{k,\delta}^\circ$. Comme S est rationnelle elle est régulière : on a $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, et donc $T_{|kL|, C} \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(C))$.

Par la formule d'adjonction, on a $\mathcal{O}_C(C) \cong \omega_C \otimes \mathcal{O}_C(-C \cdot K_S)$. Comme $C \cdot K_S < 0$, le diviseur $K_C - C \cdot K_S$ est non spécial (autrement dit, $h^1(C, K_C - C \cdot K_S) = 0$) et on obtient par le théorème de Riemann-Roch

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(C)) = p_a(C) - 1 - C \cdot K_S,$$

et donc $\dim |kL| = p_a(C) - 1 - C \cdot K_S$.

Enfin, comme S est régulière, la proposition 1.3.1 et la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S(C) \otimes I_Z \rightarrow \mathcal{O}_C(C) \otimes I_Z \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

donnent $T_{V_{k,\delta}^{\circ},C} \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(C) \otimes I_Z)$, où $I_Z \subset \mathcal{O}_S$ est le faisceau d'idéaux définissant le lieu singulier $Z \subset S$ de la courbe nodale C . Considérons maintenant une normalisation $\nu : \tilde{C} \rightarrow C$. Comme C est une courbe nodale, on a $(\omega_C \otimes I_Z) \cong \nu_* \omega_{\tilde{C}}$, et donc $\dim T_{V_{k,\delta}^{\circ},C} = h^0(\tilde{C}, K_{\tilde{C}} \otimes \nu^* \mathcal{O}_C(-C \cdot K_S))$, à nouveau par la formule d'adjonction. En appliquant à nouveau le théorème de Riemann-Roch, on obtient alors

$$\dim T_{V_{k,\delta}^{\circ},C} = g(C) - 1 - C \cdot K_S = \dim |kL| - \delta.$$

□

De cela, et à partir de l'étude du paragraphe 1.3.1, on déduit le résultat suivant. Soit S une surface rationnelle lisse, L un fibré en droites effectif sur S , et \mathcal{C} une famille de courbes de genre géométrique g appartenant à $|L|$. On suppose que pour un membre général C_0 de \mathcal{C} , on a $-K_S \cdot C_i > 0$ pour toute composante irréductible C_i de C_0 . Alors :

- (i) $\dim \mathcal{C} \leq g - L \cdot K_S - 1$;
- (ii) si on a l'égalité $\dim \mathcal{C} = g - L \cdot K_S - 1$, alors le membre général de \mathcal{C} est une courbe nodale ;
- (iii) toujours en cas d'égalité, si $C \subset S$ est une courbe, alors le membre général de \mathcal{C} rencontre C transversalement.

Nous avons maintenant tout ce qu'il nous faut pour donner les grandes lignes de la preuve du second lemme.

Idée de la preuve du lemme 1.3.4. On fixe une droite $\Delta \subset \mathbf{P}^2$, et on introduit certaines familles particulières de courbes. On appelle $V_{d,g}^m$ l'adhérence de l'ouvert paramétrant les courbes planes irréductibles C de degré d et de genre g telles qu'il existe un point $p \in \Delta$ où C et Δ se rencontrent avec multiplicité $(C \cdot \Delta)_p \geq m$. On note $U_{d,g}^m$ la famille des courbes non nécessairement irréductibles satisfaisant aux conditions précédentes.

Le lemme est alors essentiellement une conséquence du résultat de dégénérescence suivant. Il nous dit qu'on peut obtenir comme limite de courbes génériques de $V_{d,g}^m$ ou bien des courbes (*a priori* réductibles) de genre géométrique plus petit, ou bien des courbes ayant un point de contact d'ordre $> m$ avec Δ . Soit W une composante irréductible de $V_{d,g}^m$. Alors W contient au moins une des variétés suivantes :

- (i) une composante irréductible de $V_{d,g}^{m+1}$;
- (ii) une composante irréductible de $U_{d,g-1}^m$. Dans ce cas, on a deux possibilités : ou bien une courbe générale de cette composante est lisse au point de contact d'ordre m avec Δ , et possède au plus deux composantes irréductibles, ou bien une courbe générale de cette famille possède exactement deux branches locales au point p de contact d'ordre m , et possède au plus deux composantes irréductibles qui contiennent toutes le point p .

Cela s'obtient en regardant des familles à 1 paramètre de courbes dans W , auxquelles on applique la réduction semi-stable, et à partir des estimations de dimension obtenues par la proposition 1.3.5.

Ce résultat de dégénérescence permet ensuite de montrer (par récurrence sur le degré d , et en remarquant qu'on a nécessairement $V_{d,g}^{d+1} = \emptyset$) que chaque composante irréductible de $V_{d,g}^m$ contient une composante de $U_{d,g-1}^m$ dont un membre général est une courbe irréductible, qui possède deux branches locales au point de contact d'ordre m avec Δ . Autrement dit, c'est une courbe irréductible de degré d , avec un nœud de plus que le membre générique de $V_{d,g}^m$. Pour $m = 1$, on obtient donc une composante irréductible de $V_{d,g-1}$ dans chaque composante irréductible de $V_{d,g}$, comme il fallait démontrer.

□

1.3.3 Généralisations

Une généralisation naturelle du problème de Severi est de l'étendre à n'importe quelle surface projective S munie d'un fibré en droites effectif L . Un tel couple (S, L) étant donné, on définit pour tous entiers k et h

$$V_{k,h}(S, L) := \overline{\{C \in |kL|, C \text{ irréductible et nodale}, g(C) = h\}} \subset |kL|.$$

La variété $V_{k,h}(S, L)$ est l'adhérence de Zariski dans $|kL|$ de l'ouvert paramétrant les courbes irréductibles, nodales, et de genre géométrique h . On l'appelle encore variété de Severi, et on la note simplement $V_{k,h}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté. Ces variétés ont été étudiées par Chiantini et Ciliberto ([CC99]) dans le cas des hypersurfaces de \mathbf{P}^3 . Dans ce paragraphe, on présente leurs résultats, ainsi que les propriétés des variétés de Severi connues dans le cas des surfaces de Del Pezzo et des surfaces $K3$.

Avant de commencer, signalons également la possibilité d'étendre la définition des variétés de Severi de manière un peu différente. Au lieu de regarder des familles de courbes nodales, on peut regarder des familles de courbes possédant des singularités prescrites, d'un type analytique donné. C'est la voie suivie par Greuel, Keilen, Lossen et Shustin par exemple (*cf.* notamment [GLS00] et [Kei03]). Nous n'étudierons pas ce problème ici.

Commençons par introduire un peu de vocabulaire. Soient S une surface projective, munie d'un fibré en droites effectif L , et k et h deux entiers. Le genre arithmétique d'une courbe appartenant au système linéaire $|kL|$ est fixé par la formule du genre. On le note

$$p_a(k) = 1 + \frac{K_S \cdot (kL) + (kL)^2}{2}.$$

On pose $\delta = p_a(k) - h$, le nombre de nœuds d'une courbe irréductible nodale de genre arithmétique $p_a(k)$ et de genre géométrique h .

On a vu au paragraphe 1.3.1 l'inégalité $\dim V_{k,h} \geq \dim |kL| - \delta$, où le terme de droite est la dimension attendue pour $V_{k,h}$. Autrement dit, si tout se passe bien, on s'attend à ce qu'imposer un nœud aux courbes d'une famille soit une condition de codimension 1. Soit C une courbe correspondant à un point $[C] \in V_{k,h}$. La variété $V_{k,h}$ est lisse et de la dimension attendue au point $[C]$ si et seulement si les δ nœuds de C imposent des conditions indépendantes au système linéaire $|L|$ (*cf.* proposition 1.3.1).

Définition 1.3.6 *Si $V_{k,h}$ est lisse et de la dimension attendue au point $[C]$, on dit que $V_{k,h}$ est régulière au point $[C]$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est superabondante au point $[C]$. Dans ce cas, on a $\dim V_{k,h} > \dim |kL| - \delta$.*

On va maintenant donner les propriétés connues ou attendues des variétés de Severi de certaines surfaces. On s'attend à une situation commune aux surfaces avec $\deg K_X < 0$ ou $K_X = 0$, sensiblement différente de celle des surfaces de type général.

Surfaces de Del Pezzo

Les surfaces de Del Pezzo sont les surfaces projectives lisses obtenues à partir du plan projectif \mathbf{P}^2 *via* des systèmes linéaires de cubiques. A part \mathbf{P}^2 lui-même, ce sont des surfaces S_r de degré r dans \mathbf{P}^r , isomorphes à \mathbf{P}^2 éclaté en $9 - r$ points en position générale ($3 \leq r \leq 8$). Les surfaces de Del Pezzo sont donc toutes rationnelles. Pour ces surfaces, un diviseur hyperplan est un diviseur anti-canonique. Autrement dit, les systèmes linéaires $|-K_{S_r}|$ et $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(1) \otimes \mathcal{O}_{S_r}|$ sont égaux. Les surfaces de Del Pezzo sont les seules surfaces à fibré anti-canonique très ample, avec $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ plongé dans \mathbf{P}^8 . Pour $r = 3$ ou 4 , on obtient respectivement les hypersurfaces cubiques de

\mathbf{P}^3 , et les intersections complètes de deux quadriques dans \mathbf{P}^4 . Pour ces résultats de géométrie classique, on renvoie à [Bea78].

Les surfaces de Del Pezzo satisfont aux hypothèses de la proposition 1.3.5, qui montre que toutes les composantes des variétés de Severi de ces surfaces sont régulières. Pour le plan projectif, on sait de plus que $V_{k,h}$ est non vide dès que k et h sont compatibles, c'est-à-dire quand le nombre de nœuds imposé ne dépasse pas le genre arithmétique, ou encore quand la dimension attendue est positive ou nulle. En effet, on obtient par projection depuis \mathbf{P}^k des courbes planes rationnelles nodales de degré k quelconque, comme dans la preuve du lemme 1.3.3. En lissant les nœuds de ces courbes rationnelles, on obtient des points dans chacune des variétés $V_{k,h}(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1))$ pour $0 \leq h \leq p_a(k) = (k-1)(k-2)/2$. La situation est identique pour les autres surfaces de Del Pezzo, sur lesquelles il est à nouveau assez facile de produire des courbes rationnelles irréductibles et nodales en degré quelconque. En particulier, les variétés de Severi $V_{k,h}(S_r, \mathcal{O}_{S_r}(1))$ sont non vides, lisses, et de la dimension attendue pour $0 \leq h \leq p_a(k) = (rk^2 - rk + 2)/2$. On renvoie à [GLS98] pour une étude complète. Remarquons pour finir que pour les surfaces de Del Pezzo, les variétés $V_{k,0}$ paramétrant les courbes rationnelles nodales sont de dimension strictement positive.

En ce qui concerne l'irréductibilité, le seul résultat disponible est le résultat de Harris présenté au paragraphe précédent, qui donne l'irréductibilité des variétés de Severi de \mathbf{P}^2 . Il semble raisonnable de conjecturer le même résultat pour les autres surfaces de Del Pezzo.

Surfaces de Hirzebruch

Les surfaces de Hirzebruch sont les surfaces réglées de base \mathbf{P}^1 . Ce sont les surfaces $\mathbf{F}_n := \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n))$, où n est un entier positif. Le groupe de Picard de \mathbf{F}_n est engendré par la classe F d'une fibre du réglage et par la classe L_∞ de la section d'auto-intersection $-n$. On note $L_0 = L_\infty + nF$ la classe d'une section d'auto-intersection n . Tout diviseur effectif de \mathbf{F}_n ne contenant pas L_∞ est linéairement équivalent à une combinaison linéaire à coefficients positifs de L_0 et F .

Récemment, Tyomkin ([Tyo07]) a prouvé que les variétés de Severi $V_{1,h}(\mathbf{F}_n, \mathcal{O}_{\mathbf{F}_n}(dL_0 + kF))$ sont irréductibles et de la dimension attendue pour $d, k \geq 0$.

Surfaces $K3$

Comme dans le cas des surfaces de Del Pezzo, toutes les composantes des variétés de Severi des surfaces $K3$ sont régulières.

Proposition 1.3.7 *Soit S une surface $K3$ projective, munie d'un fibré en droites effectif L indivisible et d'auto-intersection $L^2 = 2g - 2$. Soient k et h deux entiers tels que $k > 0$ et $0 \leq h \leq p_a(k) = 1 + k^2(g-1)$. Pour toute courbe $C \in V_{k,h}(S, L)$, la variété de Severi $V_{k,h}(S, L)$ est lisse et de la dimension attendue h au point C .*

Preuve. On a $\dim |kL| = p_a(k)$ d'après la formule de Riemann-Roch (voir proposition 1.1.1), donc la dimension attendue pour $V_{k,h}$ est $p_a(k) - \delta = h$ (δ est le nombre de nœuds sur une courbe $C \in V_{k,h}$ générique). On a donc d'ores et déjà l'inégalité

$$\dim V_{k,h} \geq h. \quad (1.6)$$

Soit $C \in V_{k,h}$ une courbe générique, et notons Z le 0-cycle de S défini comme la somme des points singuliers de C . La proposition 1.3.1 décrit l'espace tangent de Zariski à $V_{k,h}$ au point C comme

$$T_{V_{k,h},C} \cong H^0(S, \mathcal{O}_S(C) \otimes I_Z) / H^0(S, \mathcal{O}_S) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(C) \otimes I_Z),$$

où $I_Z \subset \mathcal{O}_S$ est le faisceau d'idéaux définissant le sous-schéma $Z \subset S$. Le dernier isomorphisme est donné par l'annulation de $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ et la suite exacte (1.5). Comme le fibré canonique K_S est trivial, la formule d'adjonction donne

$$\mathcal{O}_C(C) \cong \mathcal{O}_C(K_S + C) \cong \omega_C.$$

Comme la courbe C est nodale, on a $\nu_*\omega_{\tilde{C}} = \omega_C \otimes I_Z$, où $\nu : \tilde{C} \rightarrow C$ est une normalisation de C . On en déduit

$$T_{V_{k,h},C} \cong H^0(\tilde{C}, \omega_{\tilde{C}}),$$

ce qui donne $\dim T_{V_{k,h},C} = g(C) = h$. Compte-tenu de l'inégalité (1.6), ceci prouve que $V_{k,h}$ est lisse et de dimension h au point C . □

D'autre part, on verra au paragraphe 1.4.1 la construction de courbes rationnelles irréductibles et nodales dans chacun des systèmes linéaires $|\mathcal{O}_S(k)|$ pour une surface $K3$ générale de degré $2g - 2$ dans \mathbf{P}^g , due à Chen [Che99]. A nouveau, il est possible de déformer ces courbes pour lisser leurs nœuds pour obtenir des courbes nodales de genre géométrique plus grand. Ceci montre qu'il existe des points dans toutes les variétés de Severi $V_{k,h}$ pour $0 \leq h \leq p_a(k)$. Finalement, on a donc le résultat suivant.

Théorème 1.3.8 *Soit S une surface $K3$ projective de genre g générique. Alors pour tous entiers k et h tels que $k > 0$ et $0 \leq h \leq p_a(k)$, la variété de Severi $V_{k,h}(S, \mathcal{O}_S(1))$ est lisse et de la dimension attendue h .*

On renvoie au paragraphe 2.1 pour voir quels résultats d'irréductibilité sont attendus pour les variétés de Severi des surfaces $K3$. Signalons déjà qu'il est plus raisonnable d'attendre des résultats d'irréductibilité pour les variétés de Severi universelles $\mathcal{V}_{k,h}^g$ définies au-dessus de l'espace de modules $\mathcal{M}_{K3,g}$ que pour les variétés de Severi ponctuelles $V_{k,h}$ étudiées ici.

Pour finir, notons que l'égalité $\dim |\mathcal{O}_S(k)| = p_a(k)$ indique d'après le théorème précédent qu'il existe un nombre fini (respectivement, au plus un nombre fini) de courbes rationnelles nodales en tout degré sur une surface $K3$ projective générique (respectivement, sur une surface $K3$ projective quelconque).

Hypersurfaces de \mathbf{P}^3

Le cas des hypersurfaces de \mathbf{P}^3 de degré inférieur à 3 est contenu dans celui des surfaces de Del Pezzo et des surfaces de Hirzebruch. Celui des hypersurfaces quartiques est inclus dans celui des surfaces $K3$.

Soit donc S une hypersurface lisse de \mathbf{P}^3 de degré supérieur à 5. Dans ce cas, S est une surface de type général. Un calcul explicite de $\dim |\mathcal{O}_S(k)|$ (via une suite exacte de restriction) et de $p_a(k)$ (via la formule du genre) fournit l'inégalité

$$\dim |\mathcal{O}_S(k)| < p_a(k).$$

On s'attend donc à ne trouver aucune courbe rationnelle irréductible et nodale sur S .

Dans [CS97], Chiantini et Sernesi montrent que toutes les composantes de $V_{k,h}$ sont régulières si le nombre de nœuds δ est petit par rapport à k et au degré d de S , plus précisément si $\delta < \frac{kd(k-2d+8)}{4}$. Chiantini et Ciliberto [CC99] prouvent d'autre part que chacune des variétés de Severi $V_{k,h}$ possède au moins une composante irréductible régulière. Leur construction se fait par récurrence sur le degré d de la surface, en partant de $d = 4$ (on a vu ci-dessus qu'il existe une composante régulière pour chacune des variétés de Severi d'une quartique de \mathbf{P}^3 , en conséquence de la construction de Chen). Le principe est de faire dégénérer une surface de

degré d en la somme d'une surface de degré $d - 1$ et d'un plan qui lui est tangent. Chiantini et Ciliberto prouvent qu'il existe des courbes nodales convenables sur de telles surfaces réductibles, qui permettent de retrouver des courbes nodales sur la surface irréductible de degré d .

Chiantini et Ciliberto construisent d'autre part des exemples de composantes superabondantes pour n'importe quelle surface de degré $d \geq 8$. Combiné à l'existence de composantes régulières, ce résultat prouve en particulier que les variétés de Severi des hypersurfaces de type général de \mathbf{P}^3 ne sont en général pas irréductibles. Ceci est à comparer au fait qu'il semble raisonnable de conjecturer l'irréductibilité des variétés de Severi dans le cas des surfaces de degré $d \leq 4$.

Les exemples de composantes superabondantes sont obtenus en intersectant la surface S avec des cônes. Par exemple, si S est une surface lisse de degré $d \geq 20$ dans \mathbf{P}^3 , on a $\dim |\mathcal{O}_S(3)| = 19$, donc on s'attend à ce qu'il soit impossible d'imposer 20 nœuds à une courbe de ce système linéaire. Pourtant, il est possible d'en obtenir en regardant l'intersection de S avec un cône général au-dessus d'une cubique plane nodale. Ces courbes sont dans une composante superabondante de $V_{3,p_a(3)-d}$.

1.4 Courbes rationnelles sur les surfaces $K3$

1.4.1 Résultats d'existence

La proposition 1.3.7 indique qu'il y a au plus une infinité dénombrable de courbes rationnelles sur une surface $K3$, mais il n'est pas du tout clair *a priori* qu'il y en ait ne serait-ce qu'une seule. Le fait qu'il existe une infinité de courbes rationnelles (nodales, qui plus est) sur une surface $K3$ algébrique quelconque a longtemps été un résultat bien connu des spécialistes, sans pour autant qu'il soit possible d'en trouver une preuve dans la littérature.

Dans [GG80], Green et Griffiths proposent une méthode pour construire de telles courbes, sans pour autant fournir une preuve complète. Une démonstration du fait que toute surface $K3$ algébrique possède au moins une courbe rationnelle, obtenue indépendamment par Bogomolov et Mumford, apparaît quelques temps après en appendice de l'article [MM83]. Il faudra ensuite attendre l'article de Chen [Che99] pour disposer de la preuve qu'il existe une infinité de courbes rationnelles nodales sur une surface $K3$ projective générique. On présente ici ces deux constructions.

En ce qui concerne l'étude des variétés de Severi des surfaces $K3$, le résultat de Chen présenté ici prouve le fait essentiel que les variétés de Severi $V_{k,h}$ d'une surface $K3$ projective générique ne sont pas vides, dès lors que le nombre de nœuds imposés ne dépasse pas le genre arithmétique des courbes de degré k (*cf.* théorème 1.3.8).

Théorème 1.4.1 (Bogomolov, Mumford) *Toute surface $K3$ projective contient une courbe rationnelle.*

Preuve. La stratégie de la preuve est la suivante : on va construire une surface $K3$ S_0 munie d'un système linéaire $|C_0|$, où C_0 est la réunion de deux courbes rationnelles lisses se rencontrant transversalement en $g + 1$ points, telle que $C_0^2 = 2g - 2$. On regardera ensuite les déformations de S_0 qui préservent le fibré $\mathcal{O}_{S_0}(C_0)$, et on verra que la courbe C_0 se déforme en une courbe irréductible nodale avec g nœuds dans toutes les directions. On utilise la connexité de l'espace de modules des surfaces $K3$ munies d'une polarisation de degré $2g - 2$ pour en déduire l'existence d'une courbe rationnelle dans une surface $K3$ algébrique quelconque.

On commence par montrer que si S est une surface $K3$, et $C = C_1 \cup C_2 \subset S$ est la réunion de deux courbes rationnelles lisses se rencontrant transversalement en $g + 1$ points, alors un membre général du système linéaire $|C|$ est une courbe lisse de genre g .

On applique les résultats de la proposition 1.1.1. On a $C_1^2 = C_2^2 = -2$, donc $C^2 = 2g - 2$. Il suffit donc de montrer que le système linéaire $|C|$ est sans point base. Sa restriction à C est le système linéaire canonique $|\omega_C|$. Pour décrire $|\omega_C|$, on considère une normalisation $\nu : \tilde{C} \rightarrow C$. La courbe \tilde{C} est la réunion disjointe de deux courbes rationnelles lisses \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 , et ω_C est donné par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \nu^* \omega_C \longrightarrow \Omega_{\tilde{C}_1}(\sum p_i^1) \oplus \Omega_{\tilde{C}_2}(\sum p_i^2) \xrightarrow{\oplus (\text{Res}_{p_i^1} - \text{Res}_{p_i^2})} \bigoplus \mathbf{C}_{p_i} \longrightarrow 0,$$

où les p_i sont les points d'intersection de C_1 et C_2 , et les p_i^1 et p_i^2 leurs préimages dans \tilde{C}_1 et \tilde{C}_2 respectivement. On vérifie alors qu'il existe pour tout point $p_0 \in \tilde{C}_1 \sqcup \tilde{C}_2$ une différentielle dans $\Omega_{\tilde{C}_1}(\sum p_i^1) \oplus \Omega_{\tilde{C}_2}(\sum p_i^2)$ envoyée sur 0 dans $\bigoplus \mathbf{C}_{p_i}$ et ne s'annulant pas en p_0 . Donc $|\omega_C|$ est sans point base, et $|C|$ aussi.

On construit maintenant une surface K3 munie d'une courbe correspondant à la description précédente.

Soient E et F deux courbes elliptiques telles qu'il existe une isogénie $\lambda : E \rightarrow F$ de degré $2(g+1)+1$. Soient $p \in E$ et $q \in F$ deux points d'ordre 2. On suppose que $\lambda(p) = q$. On considère la surface de Kummer S_0 obtenue comme la désingularisation $S_0 \rightarrow (E \times F)/\iota$, où ι est l'involution $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ (cf. paragraphe 1.2.2). Soit R_1 la courbe image de $E \times q$. On a un revêtement double $E \rightarrow R_1$ ramifié en 4 points, donc R_1 est une courbe rationnelle lisse (distincte des 16 courbes rationnelles exceptionnelles). Le graphe $\Gamma_\lambda \subset E \times F$ fournit une autre courbe rationnelle R_2 dans S_0 . On a $\Gamma_\lambda \cdot (E \times q) = 2(g+1)+1$, et les deux courbes Γ_λ et $E \times q$ se rencontrent transversalement. Elles ont un unique point d'ordre 2 en commun. Donc dans S_0 , les courbes R_1 et R_2 se rencontrent transversalement, et $R_1 \cdot R_2 = g+1$. Posant $C_0 = R_1 \cup R_2$, le couple (S_0, C_0) satisfait aux hypothèses que l'on voulait.

Pour finir, on explique brièvement l'argument de déformation qui permet de conclure. On utilise les résultats du paragraphe 1.1.2. Soit $\phi_0 : H^2(S_0, \mathbf{Z}) \rightarrow L$ un marquage de S_0 , et notons $l = \phi_0(c_1(C_0))$. La surface S_0 s'insère dans une famille $p : \mathcal{S} \rightarrow U_l$, munie d'un marquage $\phi : R^2 p_* \mathbf{Z} \rightarrow L$ étendant ϕ_0 , où U_l est une variété de dimension 19 paramétrant des surfaces K3 possédant une polarisation de degré $2g-2$. La section globale $\phi^{-1}(l)$ définit une classe de type $(1,1)$ dans $H^2(\mathcal{S}, \mathbf{Z}) \cong H^2(S_0, \mathbf{Z})$, correspondant à un fibré en droites \mathcal{L} . Comme $h^1(\mathcal{L}) = 0$, on peut supposer, quitte à restreindre U_l , et par semi-continuité, que le fibré $R^0 p_* \mathcal{L}$ sur U_l est trivial. Son projectivisé est un fibré trivial $V \cong U_l \times \mathbf{P}^g$ sur U_l . Par changement de base, on obtient une famille $\mathcal{S}_V \rightarrow V$. La courbe $C_0 \subset S_0$ est la fibre au-dessus du point $(0, [C_0]) \in V$ d'un diviseur relatif $C \subset \mathcal{S}_V$. On appelle $C_u \subset S_u$ la courbe au-dessus du point $(u, [C_u]) \in V$. Les nœuds p_1, \dots, p_{g+1} de C_0 appartiennent à C .

On montre alors, en utilisant la famille universelle des déformations d'un point double ordinaire que pour tout δ compris entre 0 et g , il existe un germe de sous-variété $V_\delta \subset V$ passant par $(0, [C_0]) \in V$, tel que pour tout $t \in V_\delta$ la courbe $C_t \subset S_t$ possède au moins δ points doubles. Les courbes satisfaisant à cette propriété forment une famille de codimension δ dans $|C_t|$. La projection $V_\delta \rightarrow U_l$ domine un voisinage de 0. Alors, pour t suffisamment proche de 0, la famille paramétrée par V_g fournit une courbe rationnelle nodale $C_t \subset S_t$.

□

Théorème 1.4.2 (Chen, [Che99]) *Soit $g \geq 3$, et S une surface K3 générale dans \mathbf{P}^g . Pour tout $k > 0$, le système linéaire $|\mathcal{O}_S(k)|$ contient une courbe rationnelle nodale et irréductible.*

Preuve. La preuve de ce théorème est basée sur le fait qu'une K3 générale dégénère en l'union de deux scrolls rationnels, démontré dans [CLM93].

Précisément, une surface K3 S de degré $2g - 2$ dans \mathbf{P}^g , telle que le fibré $\mathcal{O}_S(1)$ soit non divisible, se réalise comme le membre général d'une famille à 1 paramètre $\mathcal{S} \subset \mathbf{P}^g \times T$ (où T est le disque unité), dont la fibre centrale S_0 est la réunion de deux scrolls Q_1 et Q_2 de degré $g - 1$ dans \mathbf{P}^g . Ces deux scrolls se rencontrent transversalement le long d'une courbe elliptique E . En effet, Q_1 et Q_2 se rencontrent transversalement, donc $K_{Q_1+Q_2}|_{Q_i} = K_{Q_i}(Q_j)$, où $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Comme la classe canonique de $Q_1 + Q_2$ est triviale, ceci implique que E est un membre du système linéaire anticanonique $|-K_{Q_i}|$ sur chacun des Q_i . Si $g = 3$, \mathcal{S} est simplement le pinceau reliant une quartique lisse à la réunion de deux quadriques lisses Q_1 et Q_2 en position générale.

Localement au voisinage de E , l'équation de $\mathcal{S} \subset \mathbf{P}^g \times T$ est de la forme $xy = zt$, où t est le paramètre, Q_1 et Q_2 sont données respectivement par $x = 0$ et $y = 0$, et S est donnée par $z = 0$. On voit donc que les points de $E \cap S$ sont des points singuliers ordinaires de \mathcal{S} . Ce sont les seuls points singuliers de la variété \mathcal{S} de dimension 3. Il y en a seize, on les appelle p_1, \dots, p_{16} .

Si g est impair, on choisit de réaliser chacun des Q_i comme un $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, plongé dans \mathbf{P}^g grâce au système linéaire $|H_i^1 + lH_i^2|$ ($l = (g - 1)/2$), où H_i^1 est la classe des diviseurs horizontaux $\mathbf{P}^1 \times \{y_0\}$, H_i^2 celle des diviseurs verticaux $\{x_0\} \times \mathbf{P}^1$. Si g est pair, on a nécessairement $Q_i \cong \mathbf{F}_1 := \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1))$, plongé dans \mathbf{P}^g grâce au système linéaire $|C_i + lF_i|$ ($l = g/2$), où $C_i \in |\mathcal{O}_{\mathbf{F}_1}(1)|$, et F_i est une droite du réglage $\mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{P}^1$. Pour simplifier l'exposition, on se limitera pour la suite au cas g impair.

Il s'agit ensuite de construire des courbes nodales réductibles sur la fibre centrale, qui se déforment sur la fibre générique en des courbes rationnelles irréductibles et nodales.

Soit $k > 0$. On considère des courbes $C_1 \cup C_2$, où $C_i \subset Q_i$ se décompose en $C_i^1 \cup \dots \cup C_i^{k-1} \cup C_i^k$. On impose les conditions suivantes :

- $C_i^j \in |H_i^1|$ pour $j < k$, et $C_i^k \in |H_i^1 + kH_i^2|$;
- les C_i^j forment une chaîne fermée partant du point singulier $q_0 := p_1$ de la manière suivante :
 $C_1^j \cap E = q_{2j-2} + q_{2j-1}$ et $C_2^j \cap E = q_{2j-1} + q_{2j}$ pour $j < k$,
 $C_1^k \cap E = q_{2k-2} + (2kl + 1)r$, et $C_2^k = (2kl + 1)r + q_0$.

On peut librement supposer que les points q_1, \dots, q_{2k-2} et r ne sont pas des points singuliers de S , et qu'ils sont deux à deux distincts. On suppose de plus que les C_i^j se rencontrent transversalement, et qu'il n'existe aucun point commun à trois d'entre elles.

On remarque que chaque C_i est dans le système $|k(H_i^1 + lH_i^2)|$. Comme $C_1 \cap E = C_2 \cap E$, on voit donc que $C_1 \cup C_2$ est un membre du système linéaire $|\mathcal{O}_{Q_1 \cup Q_2}(k)|$. Cette courbe est la fibre centrale d'une famille de courbes nodales et irréductibles. Chacun des nœuds q_1, \dots, q_{2k-2} disparaît dans la fibre centrale. Le point r de contact d'ordre $2kl + 1$ entre C_1 et C_2 se déforme en $2kl$ nœuds distincts. Le point singulier $q_0 = p_1$ se déforme en 1 nœud. Enfin, les points d'intersection $C_i^j \cap C_i^k$ sur la partie lisse de $Q_1 \cup Q_2$ se déforment chacun en 1 nœud. Il y en a $2(k - 1)kl$ en tout. La courbe générique est donc une courbe irréductible nodale appartenant au système $|\mathcal{O}_S(k)|$, et possédant $2k^2l + 1 = k^2(g - 1) + 1$ nœuds. Comme le genre arithmétique d'une courbe du système $|\mathcal{O}_S(k)|$ sur une K3 générique du pinceau est $k^2(g - 1) + 1$, les courbes obtenues sont rationnelles.

On renvoie à [Che99] pour la preuve des résultats de déformations ci-dessus. Elle utilise l'espace des déformations versales d'un point de contact d'ordre m (*tacnode*). On pourra aussi consulter [CH98] à ce sujet. □

1.4.2 Étude des singularités

Après les résultats obtenus au paragraphe précédent, il est naturel de se poser la question suivante. Soit S une surface K3 de degré $2g - 2$ dans \mathbf{P}^g . On sait qu'il n'y a qu'un nombre fini

de courbes rationnelles dans chacun des systèmes linéaires $|\mathcal{O}_S(k)|$. Est-il vrai génériquement que ces courbes rationnelles sont toutes nodales ?

Une autre motivation pour chercher la réponse à cette question est la formule énumérative obtenue par Yau et Zaslow ([YZ96]). Cette formule prédit le nombre de courbes rationnelles dans la classe primitive d'une surface K3 de genre g . Soit $n(g)$ ce nombre. On note $\Delta(q) = q \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)^{24}$. C'est une forme modulaire de poids 12. Alors on a

$$\sum_{g=1}^{\infty} n(g)q^g = \frac{q}{\Delta(q)}.$$

Cette formule compte les courbes rationnelles avec multiplicité, c'est-à-dire qu'elle tient compte des éventuelles déformations infinitésimales qui peuvent exister. Ceci implique qu'elle ne compte vraiment le nombre de courbes rationnelles que si toutes les courbes rationnelles dans la classe primitive sont nodales.

Précisons que l'article [YZ96] contient une méthode permettant d'obtenir la formule précédente plutôt qu'une preuve de celle-ci. Beauville l'a démontrée rigoureusement dans [Bea99]. Pandharipande et Thomas ([PT07]) ont démontré récemment en utilisant la théorie des invariants de Gromov-Witten qu'elle est également valable pour compter les courbes rationnelles dans une classe quelconque.

Dans [Che02], Chen apporte une réponse positive à la question posée au début du paragraphe, dans le cas des courbes rationnelles appartenant à la classe primitive. On ne donnera que l'idée générale de la preuve, qui est très technique.

Théorème 1.4.3 (Chen) *Toutes les courbes rationnelles dans la classe primitive d'une surface K3 algébrique de genre $g \geq 2$ générique sont nodales.*

Idée de la preuve. On utilise la densité dans l'espace de modules des surfaces K3 algébriques d'un type spécial de surfaces K3, introduit par Bryan et Leung. Ces surfaces K3 spéciales ont un groupe de Picard engendré par deux classes R et F , et la forme d'intersection sur le groupe de Néron-Severi est donnée dans cette base par

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le pinceau $|F|$ fournit une fibration elliptique sur \mathbf{P}^1 . On a vu (*cf.* paragraphe 1.2.2) que dans la situation générique, ce pinceau contient 24 fibres singulières isolées, qui sont des courbes rationnelles nodales. La classe R est représentée par une section rationnelle lisse de ce pinceau.

Soit S une surface K3 générique de genre $g \geq 2$. Son groupe de Picard est engendré par une classe indécomposable d'auto-intersection $2g - 2$. Elle se réalise comme le membre générique d'une famille à 1 paramètre de surfaces K3, dont la fibre centrale S_0 est une surface K3 de Bryan et Leung comme ci-dessus. La classe primitive de S tend vers la classe $R + gF$ dans $\text{Pic}(S_0)$. Un diviseur $D \in |R + gF|$ est une courbe rationnelle stable si et seulement si il s'écrit

$$D = R \cup m_1 F_1 \cup \dots \cup m_{24} F_{24},$$

où les F_i sont les 24 courbes rationnelles nodales du pinceau $|F|$, et les m_i sont des entiers tels que $\sum m_i = g$.

Chen considère une famille $\mathcal{S} \rightarrow T$ de surfaces K3 de genre g sur le disque T , telle que la fibre centrale S_0 soit une surface K3 du type introduit par Bryan et Leung. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ une famille plate de courbes rationnelles sur T telle que la fibre générale C_t soit une courbe appartenant à la classe primitive de S_t , et telle que $C_0 \in |\mathcal{O}_{S_0}(R + gF)|$. Pour obtenir une telle famille \mathcal{C} ,

il peut être nécessaire d'effectuer un changement de base $\alpha : T \rightarrow T$. Chen prouve alors que pour toute courbe rationnelle $E \in |F|$, dont on note p le nœud, et telle que E est contenue avec multiplicité m dans C_0 , il existe m nœuds au voisinage de p dans la courbe générique C_t . Bien sûr, le cas difficile est celui où $m \geq 2$. □

1.5 Groupes de Chow

1.5.1 Théorie générale

Une référence complète sur ce sujet est le livre de Fulton [Ful98]. On suit ici la présentation de [Voi02], chapitre 21. On renvoie à ce livre pour les preuves.

La théorie des groupes de Chow est fondée sur la notion d'équivalence rationnelle. Nous commençons donc par introduire cette notion. Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps K . On appelle $\mathcal{Z}_k(X)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés réduites et irréductibles de dimension k de X . On dit que c'est le groupe des cycles algébriques de dimension k de X . Si $Y \subset X$ est un sous-schéma de dimension k , on lui associe une classe $c(Y) \in \mathcal{Z}_k(X)$, définie comme la somme des composantes de Y de dimension k , comptées avec leur multiplicité. Habituellement, on note $\mathcal{Z}^k(X) := \mathcal{Z}_{n-k}(X)$ ($n = \dim X$) le groupe des cycles algébriques de codimension k .

Soit $\phi : Y \rightarrow X$ un morphisme propre entre schémas quasi-projectifs. On lui associe des morphismes $\phi_* : \mathcal{Z}_k(Y) \rightarrow \mathcal{Z}_k(X)$ en posant pour tout sous-schéma réduit et irréductible $Z \subset Y$

$$\phi_* Z := (\deg[K(Z) : K(Z')]) \cdot Z', \quad \text{où } Z' = \phi(Z), \quad (1.7)$$

quand $\phi|_Z$ est génériquement finie (dans ce cas, le degré de l'extension de corps $K(Z)/K(Z')$ est le degré du morphisme dominant $Z \rightarrow Z'$), et $\phi_* Z = 0$ sinon (dans ce cas, $\dim Z' < \dim Z$). La propriété de ϕ assure le caractère fermé de Z' .

Si W est une variété algébrique normale, on peut associer à chaque fonction rationnelle non nulle $\phi \in K(W)^*$ son diviseur $\text{div}(\phi)$, car les anneaux localisés aux points de codimension 1 de W sont des anneaux de valuation. Tout ceci étant dit, on peut maintenant définir la relation d'équivalence rationnelle.

Définition 1.5.1 *Deux cycles de dimension k de X sont rationnellement équivalents si et seulement si leur différence est une somme de cycles de la forme*

$$\tau_* \text{div}(\phi), \quad \phi \in K(W)^*, \quad \dim W = k + 1,$$

où $\tau : \widetilde{W} \rightarrow W \subset X$ désigne une normalisation de W , et $W \subset X$ est une sous-variété fermée.

On appelle $\mathcal{Z}_k(X)_{\text{rat}} \subset \mathcal{Z}_k(X)$ le sous-groupe des cycles rationnellement équivalents à 0, et on pose

$$\text{CH}_k(X) := \mathcal{Z}_k(X) / \mathcal{Z}_k(X)_{\text{rat}}.$$

On notera aussi $\text{CH}^k(X)$ pour $\text{CH}_{n-k}(X)$. Quand X est lisse (ou plus généralement localement factorielle), $\mathcal{Z}^1(X)$ est le groupe des diviseurs de Cartier de X , et $\text{CH}^1(X)$ s'identifie à $\text{Pic}(X)$. En général, pour X réduite et irréductible, on dispose seulement d'une flèche $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{CH}^1(X)$.

A présent, on va décrire les propriétés de functorialité dont jouissent les groupes de Chow. Soit $p : Y \rightarrow X$ un morphisme propre entre schémas quasi-projectifs. Les morphismes $p_* : \mathcal{Z}_k(Y) \rightarrow \mathcal{Z}_k(X)$ construits précédemment *via* la formule (1.7) induisent des morphismes au niveau des groupes de Chow.

Proposition 1.5.2 *Le morphisme p_* envoie $\mathcal{Z}_k(Y)_{\text{rat}}$ dans $\mathcal{Z}_k(X)_{\text{rat}}$, et donc induit un morphisme*

$$p_* : \text{CH}_k(Y) \rightarrow \text{CH}_k(X).$$

Soit maintenant $p : Y \rightarrow X$ un morphisme plat. Si $Z \subset X$ est un sous-schéma réduit et irréductible de codimension k , alors $p^{-1}(Z)$ est un sous-schéma de codimension k de Y . On définit alors $p^*Z \in \mathcal{Z}^k(X)$ comme la classe du cycle $p^{-1}(Z)$. Par \mathbf{Z} -linéarité, cette définition fournit un morphisme $p^* : \mathcal{Z}^k(Y) \rightarrow \mathcal{Z}^k(X)$, qui induit un morphisme sur les groupes de Chow d'après le résultat suivant.

Proposition 1.5.3 *Le morphisme p^* envoie $\mathcal{Z}^k(Y)_{\text{rat}}$ dans $\mathcal{Z}^k(X)_{\text{rat}}$, et donc induit un morphisme*

$$p^* : \text{CH}^k(Y) \rightarrow \text{CH}^k(X).$$

En fait, on va voir qu'il est possible de définir un morphisme tirer-en-arrière sous des hypothèses plus générales en utilisant le produit d'intersection. La théorie de l'intersection pour les classes d'équivalence rationnelles, développée par Fulton dans [Ful98], prend la forme suivante.

Théorème 1.5.4 *Soient X une variété lisse, k et l deux entiers. Il existe un morphisme*

$$\text{CH}^k(X) \times \text{CH}^l(X) \rightarrow \text{CH}^{k+l}(X)$$

satisfaisant à la propriété suivante : si Z et Z' sont deux sous-schémas réduits et irréductibles de codimension k et l respectivement dans X , s'intersectant proprement (i.e. tels que $\dim Z \cap Z' = n - k - l$), alors ce morphisme associe à (Z, Z') la classe $Z \cdot Z'$ associée au cycle $Z \cap Z' \subset X$.

La dernière condition ci-dessus définit par bilinéarité la classe d'intersection de deux cycles dont les supports s'intersectent proprement. Lorsque ce n'est pas le cas, l'innovation fondamentale de la théorie de Fulton réside dans la définition de formules d'excès, qui donnent une classe $Z \cdot Z' \in \text{CH}^{k+l}(|Z| \cap |Z'|)$, où $|Z|$ et $|Z'|$ sont les supports de Z et Z' . Cette classe s'envoie ensuite dans $\text{CH}^{k+l}(X)$.

Cette construction s'adapte sans changement au cas d'un sous-schéma $j : Z \subset X$ localement intersection complète, sans hypothèse de lissité sur X . Elle fournit alors des morphismes

$$j^* : \text{CH}^k(X) \rightarrow \text{CH}^k(Z),$$

définis par $j^*Z' := l_*(Z \cdot Z')$, où $Z \cdot Z' \in \text{CH}_{\dim Z - k}(Z \cap |Z'|)$, et l est l'inclusion $Z \cap |Z'| \subset Z$.

Ceci permet de construire des morphismes tirer-en-arrière sans hypothèse de platitude, mais en supposant que le schéma d'arrivée est lisse. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme entre schémas quasi-projectifs. On suppose Y lisse. Dans ce cas, le graphe $\Gamma \subset X \times Y$ de f est localement intersection complète dans $X \times Y$, et est isomorphe à X . Comme la projection $\text{pr}_2 : X \times Y \rightarrow Y$ est plate, on peut donc définir f^* comme le composé

$$\text{CH}^k(Y) \xrightarrow{\text{pr}_2^*} \text{CH}^k(X \times Y) \xrightarrow{i^*} \text{CH}^k(\Gamma) \cong \text{CH}^k(X).$$

On dispose alors des résultats de compatibilité suivants.

Proposition 1.5.5 *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme, avec X et Y lisses.*

- (i) *Pour $Z, Z' \in \text{CH}(Y)$, on a $f^*(Z \cdot Z') = f^*Z \cdot f^*Z' \in \text{CH}(X)$.*
- (ii) *Si f est propre, pour $Z \in \text{CH}(Y)$ et $Z' \in \text{CH}(X)$ on a $f_*(f^*Z \cdot Z') = Z \cdot f_*Z' \in \text{CH}(Y)$ (formule de projection).*
- (iii) *Si $\dim X = \dim Y$, et si f est propre, alors pour $Z \in \text{CH}(Y)$ on a $f_*f^*Z = \deg f \cdot Z$, où l'on pose $\deg f = 0$ si f n'est pas dominant.*

1.5.2 Groupes de Chow des surfaces K3

On présente maintenant quelques propriétés des groupes de Chow des surfaces K3. Le groupe de Chow d'une surface lisse S se décompose en $\mathrm{CH}(S) = \mathbf{Z} \oplus \mathrm{Pic}(S) \oplus \mathrm{CH}_0(S)$. La seule partie de cette décomposition qui n'est pas bien comprise est le groupe $\mathrm{CH}_0(S)$ des 0-cycles de S modulo équivalence rationnelle.

On présente tout d'abord le théorème de Mumford ([Mum68], cf. paragraphe 5.2.1 pour une idée de la preuve), qui prédit que si $H^{2,0}(S) \neq 0$, alors $\mathrm{CH}_0(S)$ est très gros, dans un sens que l'on précisera. On explique ensuite des résultats dus à Beauville et Voisin d'une part, et à MacLean d'autre part, qui permettent malgré cet obstacle de comprendre une grande partie du CH_0 d'une surface K3.

Représentabilité du CH_0

Pour citer correctement le résultat de Mumford, il faut introduire la notion de groupe de Chow CH_0 représentable. On renvoie à [Voi02], chapitre 22, pour les preuves omises ici. Soit X une variété projective complexe. On suppose X connexe, de sorte que $H_0(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. On note $\mathrm{CH}_0(X)_{\mathrm{hom}} \subset \mathrm{CH}_0(X)$ le groupe des 0-cycles homologiquement triviaux (*i.e.* ici de degré 0), modulo équivalence rationnelle. On dispose pour tout $d > 0$ d'un morphisme

$$\begin{aligned} \sigma_d : \mathrm{Sym}^d X \times \mathrm{Sym}^d X &\rightarrow \mathrm{CH}_0(X)_{\mathrm{hom}} \\ (Z_1, Z_2) &\mapsto c(Z_1) - c(Z_2) \end{aligned}$$

(un point de $\mathrm{Sym}^d X$ s'identifie naturellement à la somme $x_1 + \dots + x_d$ de d points de X).

Définition 1.5.6 *On dit que $\mathrm{CH}_0(X)$ est représentable si pour d suffisamment grand l'application σ_d est surjective.*

Nous allons maintenant voir de quelle manière la condition de non représentabilité peut s'interpréter comme le fait d'être de dimension infinie.

On constate (*cf.* [Voi02]) que les fibres des applications σ_d sont des unions dénombrables de sous-ensembles algébriques fermés de $\mathrm{Sym}^d X \times \mathrm{Sym}^d X$. L'idée est d'utiliser la paramétrisation des courbes $C \subset X$ par une infinité dénombrable de schémas de Hilbert de X pour paramétrer les 0-cycles de la forme $\tau_* \mathrm{div}(\phi)$, où $\tau : \tilde{C} \rightarrow C \subset X$ est la normalisation d'une courbe $C \subset X$, et $\phi \in K(C)^*$.

Ceci permet de définir la dimension d'une fibre de σ_d comme étant la plus grande dimension d'une de ses composantes algébriques. On remarque alors que pour $x \in \mathrm{Sym}^d X \times \mathrm{Sym}^d X$ très générique (*i.e.* pour x hors d'une réunion dénombrable de sous-ensembles algébriques fermés propres), la dimension de la fibre $\sigma_d^{-1}(\sigma_d(x))$ est constante.

Définition 1.5.7 *On appelle r la dimension commune aux fibres $\sigma_d^{-1}(\sigma_d(x))$ pour $x \in \mathrm{Sym}^d X \times \mathrm{Sym}^d X$ très générique. On définit la dimension de $\mathrm{Im}(\sigma_d)$ comme étant l'entier $2d \dim X - r$.*

On dit alors que $\mathrm{CH}_0(X)$ est de dimension infinie si $\lim_{d \rightarrow \infty} \dim(\mathrm{Im}(\sigma_d)) = \infty$. Ces définitions étant posées, on a (*cf.* [Voi02]) :

Proposition 1.5.8 *Le groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ est représentable si et seulement si il est de dimension finie.*

On peut maintenant citer une version précise du théorème de Mumford.

Théorème 1.5.9 (Mumford, [Mum68]) *Soit S une surface projective lisse telle que*

$$H^0(S, K_S) \neq 0.$$

Alors $\mathrm{CH}_0(S)$ n'est pas représentable. Plus précisément, pour tout entier d , la fibre générale de σ_d est finie.

Pour conclure ce paragraphe, on signale que la réciproque de ce théorème est conjecturée par Bloch de la manière suivante.

L'application d'Albanese $\mathcal{Z}_0(X)_{\mathrm{hom}} \rightarrow H^{1,0}(X)^*/H_1(X, \mathbf{Z}) := \mathrm{Alb}(X)$, qui correspond à l'application d'Abel-Jacobi usuelle, est en fait bien définie sur les groupes de Chow, et un théorème de Roïtman ([Roï72]) dit que si $\mathrm{CH}_0(X)$ est représentable, alors l'application

$$\mathrm{CH}_0(X)_{\mathrm{hom}} \rightarrow \mathrm{Alb}(X)$$

ainsi définie est un isomorphisme. On a alors :

Conjecture 1.5.10 (Bloch) *Soit S une surface projective lisse complexe, telle que $H^{2,0}(S) = 0$. Alors l'application d'Albanese $\mathrm{CH}_0(S)_{\mathrm{hom}} \rightarrow \mathrm{Alb}(S)$ est un isomorphisme.*

Cette conjecture est démontrée dans le cas des surfaces qui ne sont pas de type général ([BKL76]), et pour différentes surfaces de type général telle que $h^{2,0}(S) = 0$ ([Voi92]).

CH_0 des surfaces $K3$

Dans le cas des surfaces $K3$, $H^0(S, K_S)$ est bien sûr engendré par une 2-forme holomorphe partout non nulle, donc le théorème de Mumford 1.5.9 s'applique. De ce fait, le résultat suivant, démontré dans [BV04], est assez surprenant. Il est pourtant fondé sur une idée géométrique tout à fait naturelle.

Théorème 1.5.11 (Beauville-Voisin) *Soit S une surface $K3$.*

(i) *Tous les points de S se trouvant sur une courbe rationnelle (éventuellement singulière) contenue dans S ont la même classe d'équivalence rationnelle $c_S \in \mathrm{CH}_0(S)$.*

(ii) *L'image de l'accouplement d'intersection $\mathrm{Pic}(S) \otimes \mathrm{Pic}(S) \rightarrow \mathrm{CH}_0(S)$ est contenu dans $\mathbf{Z} \cdot c_S$.*

(iii) *La seconde classe de Chern $c_2(S) \in \mathrm{CH}_0(S)$ est égale à $24 \cdot c_S$.*

Preuve. Par définition de la relation d'équivalence rationnelle, deux points sur une courbe rationnelle $R \subset S$ définissent la même classe dans $\mathrm{CH}_0(S)$. Les points (i) et (ii) sont donc des conséquences des résultats établis au paragraphe 1.4.1, qui disent que le groupe de Picard de S est engendré par des classes de courbes rationnelles.

Plus précisément, soit $j : \mathbf{P}^1 \rightarrow R \subset S$ la normalisation d'une courbe rationnelle. On note $c_R := j_*(p) \in \mathrm{CH}_0(S)$, où p est un point quelconque de \mathbf{P}^1 . Alors pour tout diviseur D sur S , on a

$$R \cdot D = j_* j^* D = j_*(n \cdot p) = n \cdot c_R \in \mathrm{CH}_0(S),$$

où $n = \deg(R \cdot D)$ est le nombre de points d'intersection de R et D .

Considérons donc un fibré en droites ample L sur S : on sait d'après les résultats du paragraphe 1.4.1 qu'il existe une courbe rationnelle (singulière) $H \in |L|$. Comme L est ample, H rencontre toutes les courbes rationnelles sur S : pour toute courbe rationnelle $R \subset S$, on a $\deg(H \cdot S) > 0$. Comme $\mathrm{CH}_0(S)$ est sans torsion d'après un théorème de Roïtman ([Roï80]), on a donc $c_R = c_H$ pour toute courbe rationnelle $R \subset S$. Ceci prouve (i). On appelle $c_X \in \mathrm{CH}_0(S)$ la classe commune à tous les points se trouvant sur une courbe rationnelle.

Soient D et D' deux diviseurs effectifs sur S . Toujours d'après les résultats du paragraphe 1.4.1, D et D' sont linéairement équivalents à des courbes rationnelles R et R' respectivement. On a alors l'égalité de classes d'équivalence rationnelle

$$D \cdot D' = R \cdot R' = \deg(R \cdot R') \cdot c_X.$$

Ceci prouve (ii).

Le troisième point est plus difficile. On renvoie à l'article [BV04] pour la preuve. \square

Par un raisonnement un peu similaire, mais utilisant des courbes elliptiques à la place des courbes rationnelles, Catriona MacLean obtient le résultat suivant ([Mac04]).

Théorème 1.5.12 (MacLean) *Soient S une surface K3 projective générique, et $x \in S$ un point général. Alors l'ensemble des points $y \in S$ rationnellement équivalents à x est dense dans S pour la topologie usuelle.*

Preuve. Un des arguments principaux est la propriété élémentaire suivante des courbes elliptiques. Soient E une courbe elliptique lisse, et x un point de E . Alors l'ensemble des points $y \in E$ tels que $y - x$ est de torsion est dense dans E . Cette propriété sera utilisée pour exploiter le résultat de Roïtman selon lequel le CH_0 d'une surface K3 est sans torsion ([Roï80]).

Le second ingrédient essentiel de la preuve est l'existence de familles à 1 paramètre de courbes elliptiques (singulières) sur une surface K3 projective générique. D'après les résultats du paragraphe 1.4.1, il existe pour une telle surface S une courbe rationnelle nodale dans chacun des systèmes linéaires $|\mathcal{O}_S(k)|$, $k > 0$. Ceci entraîne, par l'étude des variétés de Severi des surfaces K3 menée au paragraphe 1.3.3, l'existence de familles à 1 paramètre de courbes nodales de genre géométrique ≤ 1 , appartenant à $|\mathcal{O}_S(k)|$ (ces familles sont obtenues en déformant une courbe rationnelle nodale, de manière à lisser l'un des nœuds).

On considère donc deux familles irréductibles

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{\phi_i} & S \\ \pi_i \downarrow & & \\ B_i & & \end{array}$$

à 1 paramètre de courbes appartenant à $|\mathcal{O}_S(i)|$, $i = 1$ ou 2 , et dont le membre général est une courbe intègre (*i.e.* réduite et irréductible), nodale, et de genre géométrique ≤ 1 . Les morphismes ϕ_1 et ϕ_2 sont surjectifs.

Soit $x \in S$ général. Ceci permet de supposer que x n'appartient pas à l'image d'une courbe non intègre de la famille F_2 . On choisit un point $y \in F_1$ tel que $\phi_1(y) = x$, et on note $b_0 = \pi_1(y) \in B_1$. La fibre F_{1,b_0} est l'image d'une application surjective $\bar{F}_{1,b_0} \rightarrow F_{1,b_0}$, où \bar{F}_{1,b_0} est une courbe nodale de genre ≤ 1 . Il existe une composante de \bar{F}_{1,b_0} dont l'image dans S est une courbe passant par le point x , que l'on note E . Le genre de E est ≤ 1 , donc l'ensemble des points $z \in E$ tels que $z - x \in \text{CH}_0(E)$ est de torsion est dense dans E . Comme $\text{CH}_0(S)$ est sans torsion, l'ensemble des $z \in E$ tels que $z = x \in \text{CH}_0(S)$ est dense dans E .

L'idée de la preuve est maintenant que la courbe E est transverse à un membre général de la famille F_2 . On considère alors l'ensemble dense dans F_2 des courbes de F_2 qui sont de genre ≤ 1 et qui rencontrent E en un point rationnellement équivalent à x . Pour une telle courbe E_2 , le raisonnement précédent montre que l'ensemble des points $z \in E_2$ tels que $z = x \in \text{CH}_0(S)$ est dense dans E_2 .

On obtient ainsi un ensemble $B^\circ \subset B_2$ dense dans B_2 , tel que pour tout $b \in B^\circ$, l'ensemble des points z appartenant à la fibre $\pi_2^{-1}(b)$ et linéairement équivalents à x dans S est dense dans $\pi_2^{-1}(b)$. Ceci fournit un ensemble dense dans S de points linéairement équivalents à x dans S . \square

Catriona MacLean obtient également le résultat suivant, qui est une réciproque partielle du théorème précédent, et qui est à rapprocher du théorème de Mumford.

Théorème 1.5.13 (MacLean) *Soit S une surface lisse, telle que pour $x \in S$ générique, l'ensemble des points rationnellement équivalents à x dans S soit dense pour la topologie de Zariski. Alors on a nécessairement $h^{2,0}(S) \leq 1$.*

Chapitre 2

Severi varieties and self-rational maps of $K3$ surfaces

2.1 Introduction et principaux résultats

Dans ce chapitre, et sauf mention explicite du contraire, S désigne une surface $K3$ projective lisse, générique. En particulier, on suppose $\text{Pic}(S) \cong \mathbf{Z}$. On considère un endomorphisme rationnel φ de S , c'est-à-dire une application rationnelle dominante $\varphi : S \dashrightarrow S$. Il existe une élimination des indéterminations de φ , *i.e.* un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & & \\ \tau \downarrow & \searrow \tilde{\varphi} & \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

où $\tilde{\varphi}$ est un morphisme, et τ est une suite finie d'éclatements. On définit le degré topologique de φ comme étant l'entier $\deg \varphi := \deg \tilde{\varphi}$. C'est le nombre de points dans la préimage d'un point générique de S . On définit le degré algébrique de φ comme étant l'unique entier l tel que $\varphi^* \mathcal{O}_S(1) \cong \mathcal{O}_S(l)$. C'est le degré des polynômes qui définissent φ . On note R le diviseur de ramification de $\tilde{\varphi}$, c'est-à-dire le diviseur des zéros du jacobien $\wedge^2 d\tilde{\varphi}$.

Endomorphismes rationnels

L'objet principal de ce chapitre est l'étude des propriétés géométriques et numériques des endomorphismes rationnels $S \dashrightarrow S$ d'une surface $K3$ projective générique, dans le but d'obtenir des arguments en faveur de la conjecture suivante.

Conjecture A *Soit S une surface $K3$ projective générique. Il n'existe pas d'application rationnelle dominante*

$$\varphi : S \dashrightarrow S$$

telle que $l > 1$, où l est défini par la relation $\varphi^ \mathcal{O}_S(1) \cong \mathcal{O}_S(l)$.*

La recherche de variétés complexes X munies d'endomorphismes $f : X \rightarrow X$ est un autre problème, présenté au paragraphe 1.2.1. Dans le cas d'une surface $K3$, on a vu qu'un endomorphisme $S \rightarrow S$ est un revêtement étale à cause de la trivialité du fibré canonique K_S , et donc un

automorphisme puisque S est simplement connexe (*cf.* proposition 1.2.3). Ces endomorphismes sont donc sans rapport avec la conjecture qui nous intéresse.

On recherche donc des endomorphismes rationnels sur les surfaces $K3$. On a décrit au paragraphe 1.2.2 les exemples connus de telles transformations. On sait que les surfaces de Kummer, ainsi que les surfaces $K3$ elliptiques sont munies d'endomorphismes rationnels de degré > 1 . Ces exemples ne contredisent pas la conjecture A, puisque ils ne concernent que des surfaces $K3$ avec un nombre de Picard supérieur à 2. En revanche, ils indiquent qu'il est nécessaire de supposer S générique.

En dimension supérieure, Claire Voisin a construit des transformations rationnelles sur la variété de Fano $X = \mathcal{F}(V)$ des droites d'une hypersurface cubique $V \subset \mathbf{P}^5$ (exemple 1.2.7). Ces variétés sont équivalentes par déformation au schéma de Hilbert $S^{[2]}$ d'une surface $K3$ de genre 8. Pour un choix générique de l'hypersurface cubique V , on a $\text{Pic}(X) \cong \mathbf{Z}$, donc cet exemple indique que la conjecture A est spécifique aux surfaces.

L'existence d'applications rationnelles de degré > 1 sur une surface $K3$ (ou plus généralement sur une variété de Calabi-Yau) a des conséquences importantes sur ses propriétés de densité potentielle, d'hyperbolicité (annulation de la pseudo-forme volume de Kobayashi-Eisenman), et sur l'existence d'applications méromorphes surjectives $\mathbf{C}^2 \dashrightarrow S$. Ces conséquences sont développées au chapitre 5.

Variétés de Severi universelles

Le résultat principal de ce chapitre est une relation entre la conjecture A précédente et l'irréductibilité des variétés de Severi des surfaces $K3$.

Les variétés de Severi ont été introduites au paragraphe 1.3. Elles paramètrent les courbes irréductibles et nodales de degré et de genre géométrique fixés sur une surface donnée. Pour une surface $K3$ projective générique S fixée, dont on note L le générateur positif du groupe de Picard, les variétés de Severi sont de la dimension attendue : pour tous entiers $k > 0$ et $h \geq 0$, si $h \leq p_a(k)$, alors $V_{k,h}(S, L)$ est lisse et de dimension $\dim |kL| - (p_a(k) - h) = h$ (*cf.* théorème 1.3.8). En revanche, on ne s'attend pas nécessairement à ce que ces variétés de Severi soient irréductibles. Par exemple, il est clair que les variétés $V_{k,0}(S, L)$, qui paramètrent des courbes rationnelles, ne sont pas irréductibles, puisqu'elles sont constituées d'un nombre fini de points.

On considère ici plutôt les variétés de Severi universelles des surfaces $K3$, en un certain sens plus proches que leur version ponctuelle des considérations initiales de Severi, qui s'intéressait aux courbes projectives lisses de genre donné, et les projetait dans le plan projectif pour les étudier. Les variétés de Severi universelles paramètrent l'ensemble des courbes de degré et de genre géométrique fixés que l'on peut plonger dans une surface $K3$ algébrique.

Soit $g \geq 2$ un entier. On note $\mathcal{M}_{K3,g}$ l'espace de modules des surfaces $K3$ de genre g (ce sont les surfaces $K3$ munies d'un fibré en droites ample et indivisible L , d'auto-intersection $L^2 = 2g - 2$). Il existe une famille universelle $\mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$ définie au-dessus d'un ouvert de $\mathcal{M}_{K3,g}$. A un point générique $m \in \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$ correspond une surface $K3$ S_m de groupe de Picard $\text{Pic}(S_m) = \mathbf{Z} \cdot L_m$. On définit la variété de Severi universelle $\mathcal{V}_{k,h}^g$ comme la variété au-dessus de $\mathcal{M}_{K3,g}^\circ$ dont les fibres sont les variétés de Severi ponctuelles $V_{k,h}$.

$$\begin{array}{ccc} V_{k,h}(S_m, L_m) & \subset & \mathcal{V}_{k,h}^g \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & \in & \mathcal{M}_{K3,g}^\circ \end{array}$$

Il est tout à fait possible que la variété universelle $\mathcal{V}_{k,h}^g$ soit irréductible même si ses fibres ne le sont pas. On conjecture que les variétés $\mathcal{V}_{k,h}^g$ sont toutes irréductibles. Toutefois, il est

suffisant pour l'application que nous avons en vue dans ce chapitre d'émettre la conjecture suivante, moins optimiste (en particulier, elle n'inclut pas l'irréductibilité des variétés de Severi universelles paramétrant des courbes rationnelles).

Conjecture B *Soit $g \geq 2$ un entier. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M(\varepsilon)$ telle que pour tous entiers k et h tels que $k \geq M(\varepsilon)$ et*

$$\varepsilon p_a(k) \leq h \leq p_a(k),$$

la variété de Severi universelle $\mathcal{V}_{k,h}^g$ est irréductible.

Résultats

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant, démontré au paragraphe 2.2.

Théorème C *Soient $g, l \geq 2$ deux entiers. Si pour $m \in \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$ générique il existe une application rationnelle dominante $\varphi_m : S_m \dashrightarrow S_m$ telle que $\varphi_m^* \mathcal{O}_S(1) \cong \mathcal{O}_S(l)$, alors la variété de Severi universelle $\mathcal{V}_{kl,p_a(k)}^g$ possède au moins deux composantes irréductibles.*

Le corollaire suivant au théorème C fournit une méthode pour démontrer la conjecture A sur les endomorphismes rationnels. Il s'obtient simplement en remarquant qu'on a asymptotiquement l'équivalence $p_a(k)/p_a(lk) \sim_{k \rightarrow \infty} 1/l^2$.

Corollaire D *La conjecture B sur l'irréductibilité des variétés de Severi universelles implique la conjecture A sur la non existence d'endomorphisme rationnel de degré strictement supérieur à 1 pour une surface K3 projective générique.*

Au paragraphe 2.3, on rassemble un certain nombre de contraintes numériques entre les degrés topologique et algébrique d'un endomorphisme rationnel $S \dashrightarrow S$, où S est une surface K3 projective générique. Ces contraintes restreignent les possibilités d'existence de tels endomorphismes rationnels, et fournissent des arguments en faveur de la conjecture A. Les contraintes les plus significatives sont résumées dans le théorème suivant.

Théorème E *Soient S une surface K3 projective générique de genre g , et $\varphi : S \dashrightarrow S$ une application rationnelle dominante telle que $\varphi^* \mathcal{O}_S(1) = \mathcal{O}_S(l)$ et $\deg \varphi > 1$.*

(i) Il existe un entier relatif λ tel que $\deg \varphi = \lambda^2$. L'entier $l - \lambda$ est divisible par $2g - 2$ (le signe de λ n'est pas connu a priori).

(ii) Soit $\tau : \tilde{S} \rightarrow S$ une suite finie d'éclatements fournissant une élimination des indéterminations minimale de φ . On appelle p le nombre d'éclatements contenus dans τ . Il existe des entiers strictement positifs β_1, \dots, β_p tels que

$$l^2 = \deg \varphi + (2g - 2) \sum_i \beta_i^2.$$

De plus, la somme des β_i est divisible par 2.

(iii) Si τ ne contient pas de chaîne d'éclatements successifs de longueur supérieure à 3, alors

$$\deg \varphi \leq 1 + \frac{1}{24} [p + 4(g - 1) \sum_i \beta_i].$$

Le résultat suivant permet d'autre part de contrôler la complexité de l'élimination des indéterminations, représentée par l'arbre d'intersection des courbes exceptionnelles irréductibles qui apparaissent avec la suite d'éclatements τ .

Proposition F (i) *La profondeur de l'arbre est inférieure à $\deg \varphi - 2$. En cas d'égalité, l'arbre est connexe, ce qui signifie que tous les éclatements de τ se font au-dessus d'un seul point de S .*

(ii) *Si toutes les courbes exceptionnelles irréductibles sont disjointes, ou de manière équivalente si la profondeur de l'arbre est 1, alors τ est une suite d'éclatements simples au-dessus d'au plus $8(\deg \varphi - 1)$ points de S .*

2.2 Link between the two conjectures

In this section, we prove that conjecture B implies conjecture A. We start with the following result, which for a generic K3 surface S , describes the geometric action of a dominant self-rational map $\varphi : S \dashrightarrow S$ on a generic curve $C \in |\mathcal{O}_S(k)|$.

Proposition 2.2.1 *Let S be a K3 surface of genus $g \geq 2$, with $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z}$, and assume there exists a dominant rational map $\varphi : S \dashrightarrow S$ satisfying $\varphi^* \mathcal{O}_S(1) \cong \mathcal{O}_S(l)$. We consider $C \in |\mathcal{O}_S(k)|$ generic.*

(i) *Its image $\varphi(C)$ lies in $|\mathcal{O}_S(kl)|$.*

(ii) *For k big enough, $\varphi(C)$ is irreducible and nodal, and C and $\varphi(C)$ have the same geometric genus $p_a(k)$.*

Proof. (i) Consider

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & & \\ \tau \downarrow & \searrow \tilde{\varphi} & \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

an elimination of indeterminacies of φ , and write R for the ramification divisor of $\tilde{\varphi}$. Since $K_{\tilde{S}} = \tilde{\varphi}^* K_S + R$ and K_S is trivial, R is entirely exceptional. In other words, φ is smooth away from the indeterminacy locus.

Since $C \in |\mathcal{O}_S(k)|$ is generic, we can assume that it avoids the indeterminacy locus. Then $\varphi|_C$ is locally an imbedding, and in particular we have the equality of homology classes

$$[\varphi(C)] = \varphi_*[C]$$

(φ_* and φ^* are defined as $\tilde{\varphi}_* \tau^*$ and $\tau_* \tilde{\varphi}^*$ respectively). We then compute the intersection product

$$\langle [\varphi(C)], L \rangle = \langle \varphi_*[C], L \rangle = \langle [C], \varphi^* L \rangle,$$

where L is the divisor class corresponding to $\mathcal{O}_S(1)$. Finally, we have $\langle [\varphi(C)], L \rangle = kl(2g - 2)$, and therefore $\varphi(C) \in |klL|$.

(ii) We define a scheme $S \times_S S$, which is pointwise the set of pairs of points in S having the same image under φ , by considering a morphism $\varphi_U : U \rightarrow S$ (U Zariski-open subset of S) representing the rational map φ , and taking $S \times_S S$ to be the Zariski-closure of $U \times_S U$ in $S \times_{\text{Spec } \mathbf{C}} S$.

We claim that for k big enough, $\varphi|_C$ is everywhere injective but at a finite number of points of C , or equivalently that

$$C \times_S C \subset S \times_S S$$

only possesses a finite number of points outside from the diagonal. To prove this, we define the incidence variety

$$J = \{(C, x_1 + x_2) \in |\mathcal{O}_S(k)| \times (S^2 S)^\circ \text{ s.t. } (x_1, x_2) \in C \times_S C\},$$

which parametrizes the pairs of distinct points of S having the same image by φ (recall that $(S^2S)^\circ$ is the open subset of the symmetric product Sym^2S corresponding to sums of two distinct points). It is given by the equations

$$\begin{cases} x_1, x_2 \in C \\ x_1 \neq x_2 \\ \varphi(x_1) = \varphi(x_2). \end{cases}$$

Now the projection of J on $(S^2S)^\circ$ is $S \times_S S$, which is pointwise the set of sums $x_1 + x_2$ with $x_1 \neq x_2$ and $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, and is of dimension 2. When k is large enough, the fibers of J over its projection on $(S^2S)^\circ$ are of dimension $\dim |\mathcal{O}_S(k)| - 2$ (see 2.2.2), so

$$\dim J = \dim |\mathcal{O}_S(k)|.$$

The fiber of J over generic $C \in |\mathcal{O}_S(k)|$ is thus necessarily zero-dimensional, and our claim is proved. It follows that for generic $C \in |kL|$, $\varphi|_C$ is of degree 1 onto its image $\varphi(C)$. We can assume C to be smooth. Then it is the normalization of $\varphi(C)$, and these two curves have the same geometric genus.

A similar argument shows that for $C \in |\mathcal{O}_S(k)|$ generic, there cannot exist three pairwise distinct points on C having the same image under the action of φ . So, since C is smooth and $\varphi|_C$ is a local imbedding, all singular points of $\varphi(C)$ occur as the identification of two distinct points in C by φ . We shall now prove that for generic $C \in |\mathcal{O}_S(k)|$, these singular points are all nodes. Write $p : \mathbf{P}(T_S) \rightarrow S$ for the canonical projection of the projectivized holomorphic tangent bundle, and consider the incidence variety

$$J' \subset |\mathcal{O}_S(k)| \times \mathbf{P}(T_S) \times \mathbf{P}(T_S),$$

defined by the equations

$$(C, u_1, u_2) \in J' \iff \begin{cases} u_1, u_2 \in \mathbf{P}(T_C) \\ p(u_1) \neq p(u_2) \\ \varphi \circ p(u_1) = \varphi \circ p(u_2) \\ \varphi_* u_1 = \varphi_* u_2. \end{cases}$$

It parametrizes the couples of tangent directions of S at two different points, that are sent by the differential φ_* on a couple of colinear tangent directions at the same point of S (*i.e.* exactly the situations that yield degenerated singularities on $\varphi(C)$). The image of the projection of J' on $\mathbf{P}(T_S) \times \mathbf{P}(T_S)$ is given by the conditions $p(u_1) \neq p(u_2)$, $\varphi \circ p(u_1) = \varphi \circ p(u_2)$ and $\varphi_* u_1 = \varphi_* u_2$, which yield three independent equations, so it is of dimension 3. When k is large enough, the generic fiber of J' over its projection on $\mathbf{P}(T_S) \times \mathbf{P}(T_S)$ is of codimension 4 in $|\mathcal{O}_S(k)|$ (see 2.2.2). Then

$$\dim J' = \dim |\mathcal{O}_S(k)| - 1,$$

and the fiber of J' over generic $C \in |\mathcal{O}_S(k)|$ is necessarily empty, which concludes the proof. \square

Remark 2.2.2 Proposition 2.2.1 works as soon as $k \geq 4$ when $g \geq 3$, and as soon as $k \geq 6$ when $g = 2$.

Indeed, if $g \geq 3$ (resp. $g = 2$), then the line bundle $\mathcal{O}_S(k)$ is very ample for $k \geq 2$ (resp. $k \geq 3$), see proposition 1.1.1. This is sufficient to ensure that two distinct points of S impose independent conditions on $|\mathcal{O}_S(k)|$ and thus that the argument concerning J is correct.

Now let x_1 and x_2 be two distinct points in some projective space \mathbf{P}^N , and $u_1 \in \mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^N, x_1})$, $u_2 \in \mathbf{P}(T_{\mathbf{P}^N, x_2})$ be two tangent directions. As soon as the line defined by (x_1, u_1) (resp. (x_2, u_2))

does not pass through x_2 (resp. x_1), we are sure that (x_1, u_1) and (x_2, u_2) impose independent conditions on the linear system of quadrics in \mathbf{P}^N . So when $g \geq 3$ and $k \geq 4$ (resp. $g = 2$ and $k \geq 6$), the claim about the dimension of the generic fiber of J' is true.

Theorem 2.2.3 *Let $g, l \geq 2$ be given. If for $m \in \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$ generic there exists a dominant rational map $\varphi_m : S_m \dashrightarrow S_m$ satisfying $\varphi_m^* \mathcal{O}_S(1) \cong \mathcal{O}_S(l)$, then for k great enough the universal Severi variety $\mathcal{V}_{kl,p_a(k)}$ possesses at least two irreducible components.*

Theorem 2.2.3 is one of the main results of this article. The key of the proof is the construction of two irreducible components of $V_{kl,p_a(k)}$ for S generic, such that the rational equivalence class (in $\text{CH}_0(S)$) of the singularity 0-cycle is constant for the curves parametrized by the first component, and non constant for those parametrized by the second component. We give these two constructions in lemmas 2.2.4 and 2.2.6.

Lemma 2.2.4 *Let S be a generic genus g K3 surface. Under the hypotheses of proposition 2.2.1, and for k large enough, there exists an irreducible component of $V_{kl,p_a(k)}$ on which the application*

$$C \in V_{kl,p_a(k)} \mapsto \text{cl}(Z_C) \in \text{CH}_0(S)$$

is constant.

Here $V_{kl,p_a(k)}$ is a Severi variety related to the single surface S , and for $C \in V_{kl,p_a(k)}$, $\text{cl}(Z_C)$ is the rational equivalence class of the singularity 0-cycle Z_C of the curve C .

Proof. By proposition 2.2.1, for $C \in |kL|$ generic and k large enough, $\varphi(C)$ is an irreducible nodal curve in $|klL|$, with geometric genus $p_a(k)$, and therefore $\varphi(C) \in V_{kl,p_a(k)}$. $V_{kl,p_a(k)}$ is of the expected dimension $p_a(k)$ by theorem 1.3.8, while $|kL|$ is a projective space of dimension $p_a(k)$. So the subset of $V_{kl,p_a(k)}$ parametrizing the images of curves in $|kL|$ under the action of φ is an irreducible component V' of $V_{kl,p_a(k)}$.

Let C be a generic curve in $|kL|$, and write $Z_{\varphi(C)}$ for the 0-cycle of the singular points of its image $\varphi(C)$, seen as a 0-cycle in S . From the proof of proposition 2.2.1, we know that $\varphi|_C : C \rightarrow \varphi(C)$ is a normalization of $\varphi(C)$. The latter being an irreducible nodal curve, we have

$$2Z_{\varphi(C)} = K_{\varphi(C)} - (\varphi|_C)_* K_C,$$

as 0-cycles in $\varphi_* C$. This proves that for another generic curve $C' \in |kL|$, the singularity 0-cycle $Z_{\varphi(C')}$ of the image $\varphi(C')$ is rationally equivalent to $Z_{\varphi(C)}$, as 0-cycles in S . Indeed, since C and C' are rationally equivalent, the adjunction formula tells us that $K_C = (K_S + C)|_C$ and $K_{C'} = (K_S + C')|_{C'}$ are rationally equivalent, as 0-cycles on S . $\varphi(C)$ and $\varphi(C')$ are rationally equivalent as well, since they both are in $|klL|$, and the adjunction formula tells us that $K_{\varphi(C)} = (K_S + \varphi(C))|_{\varphi(C)}$ and $K_{\varphi(C')} = (K_S + \varphi(C'))|_{\varphi(C')}$ are rationally equivalent, as 0-cycles on S . \square

Remark 2.2.5 In fact, one gets

$$\text{cl}(Z_{\varphi(C)}) = \frac{1}{2}k^2(l^2 - 1)L^2 = \frac{p_a(kl) - p_a(k)}{2g - 2}L^2 \in \text{CH}_0(S).$$

$\delta = p_a(kl) - p_a(k)$ is the number of nodes of $\varphi(C)$ for C generic. Using [BV04] (cf. theorem 1.5.11), we get

$$\text{cl}(Z_{\varphi(C)}) = \delta c_X \in \text{CH}_0(S),$$

where c_X is the rational equivalence class of any point of S that lie on a rational curve.

We now construct an irreducible component of $V_{kl,p_a(k)}$, which parametrizes curves with non constant rational equivalence class for their singularity 0-cycles.

Lemma 2.2.6 *Let S be a generic genus g K3 surface. Under the hypotheses of proposition 2.2.1, and for k large enough, there exists an irreducible component of $V_{kl,p_a(k)}$ on which the application*

$$C \in V_{kl,p_a(k)} \mapsto \text{cl}(Z_C) \in \text{CH}_0(S)$$

is non constant.

Proof. By theorem 1.3.8, there exists an irreducible family of dimension $p_a(k) - 1$ of irreducible curves $C \in |kL|$, with only one node as singularity. We write Z_C for the 0-cycle on S defined by the singular point of C . $\varphi(C)$ is generically an irreducible curve in $|klL|$, with exactly $\delta + 1$ nodes as singularities, $\delta = p_a(kl) - p_a(k)$ (this is proposition 2.2.1). In fact, one has

$$Z_{\varphi(C)} = \varphi_* Z_C + Z'_{\varphi(C)}$$

as 0-cycles on S , where $Z'_{\varphi(C)}$ is the sum of the singular points that appear when applying φ . As C moves, $Z'_{\varphi(C)}$ has constant rational equivalence class in $\text{CH}_0(S)$, exactly as in the proof of lemma 2.2.4.

We thus have an irreducible $(p_a(k) - 1)$ -dimensional family of curves $\varphi(C) \in |klL|$. For each $\varphi(C)$, we smooth one of the nodes that are in $Z'_{\varphi(C)}$. This eventually gives an irreducible, $p_a(k)$ -dimensional family of irreducible, nodal curves in $|klL|$, with exactly δ nodes. Such a family is an irreducible component V'' of $V_{kl,p_a(k)}$.

We claim that the rational equivalence class of the singularity 0-cycles $Z_{C'}$ of curves C' parametrized by V'' is non constant. This can be seen by the following simple consideration. For any points $x, y \in S$, and if k is large enough, we can find a curve $C \in |kL|$ with a node at x as its only singular point, and such that $\varphi(C)$ is nodal, with nodes at $\varphi(x)$ and y . Smoothing y , we get curves C' in V'' , with singularity 0-cycle

$$Z_{C'} = \varphi(x) + Z'_{\varphi(C)} - y.$$

Since $Z'_{\varphi(C)}$ has constant rational equivalence class, fixing x and letting y move, we see that that the rational equivalence class $\text{cl}(Z_{C'}) \in \text{CH}_0(S)$ cannot be constant. □

Proof of theorem 2.2.3. We write the Stein factorization

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{V}_{k,p} & \\ & \swarrow & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{K3,g}^\circ & \longrightarrow & \mathcal{M}_{K3,g}^\circ \end{array}$$

of the projective morphism $\mathcal{V}_{k,p} \rightarrow \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$. $\mathcal{V}_{k,p} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{K3,g}^\circ$ is a projective morphism with connected fibers, while $\widetilde{\mathcal{M}}_{K3,g}^\circ \rightarrow \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$ is finite. A point of $\widetilde{\mathcal{M}}_{K3,g}^\circ$ over $m \in \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$ represents a connected component of $(\mathcal{V}_{k,l})_m$. The monodromy of this morphism thus acts as a subgroup of the permutation group of the connected components of fibers of $\mathcal{V}_{k,p} \rightarrow \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$. Irreducibility of $\mathcal{V}_{k,p}$ is equivalent to the fact that the monodromy acts transitively on the components of the fibers $V_{k,l}$ (see e.g. [Har86]).

If there exists a dominant rational map $\varphi_m : S_m \dashrightarrow S_m$, satisfying $\varphi_m^* \mathcal{O}_{S_m}(1) \cong \mathcal{O}_{S_m}(l)$ for generic $m \in \mathcal{M}_{K3,g}^\circ$, then we have by lemmas 2.2.4 and 2.2.6 two irreducible components V'_m

and V_m'' of each generic fiber $(\mathcal{V}_{kl,p_a(k)})_m$ that are algebraically distinguished, since for curves parametrized by the first one, all singularity 0-cycles are rationally equivalent, and for curves parametrized by the other one, they are not. It follows that there exists an open subset

$$\begin{array}{c} \widetilde{\mathcal{M}}_{K3,g}^\circ \\ \downarrow \\ U \subset \mathcal{M}_{K3,g}^\circ, \end{array}$$

such that all fibers over U contain at least two points that are algebraically distinguished. The monodromy cannot exchange these two points. In particular it does not act transitively, and $\mathcal{V}_{kl,p_a(k)}$ is not irreducible. \square

2.3 Properties of a self-rational map on a $K3$ surface

This section is devoted to the study of a dominant self-rational map on a given $K3$ surface. The observation of the geometry of an elimination of indeterminacies gives properties that this map must satisfy, and which of course restrain the possibilities for such a self-rational map to exist. We first get numerical relations between the algebraic and topological degree that are always valid. We then make further remarks depending on the complexity of the elimination of indeterminacies, and give a way to control this complexity.

The notations are as follows. S is a generic algebraic $K3$ surface. We assume in particular that $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z} \cdot L$, where L is effective and satisfies $L^2 = 2g - 2$ ($g \in \mathbf{N}^*$). $\varphi : S \dashrightarrow S$ is a dominant rational map, and l the positive integer such that $\varphi^* \mathcal{O}_S(1) \cong \mathcal{O}_S(l)$. We assume $l > 1$. We consider an elimination of indeterminacies of φ , *i.e.* a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S} & & \\ \tau \downarrow & \searrow \varphi_i & \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S, \end{array}$$

where τ is a finite sequence of blow-ups

$$\widetilde{S} = S_p \xrightarrow{\varepsilon_p} S_{p-1} \xrightarrow{\varepsilon_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\varepsilon_2} S_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} S_0 = S.$$

We write F_i for the exceptional divisor which appears with ε_i , and E_i for $\varepsilon_p^* \circ \cdots \circ \varepsilon_{i+1}^* F_i$ ($1 \leq i \leq p$). $(\tau^* L, E_1, \dots, E_p)$ is an orthogonal basis of $\text{Pic}(\widetilde{S})$, and $E_i^2 = -1$ ($1 \leq i \leq p$).

2.3.1 Numerical properties

We start with a numerical observation coming from Hodge theory.

Proposition 2.3.1 *There exists an integer λ , such that*

$$\deg \varphi = \lambda^2.$$

Proof. Let ω be a global, nowhere vanishing, holomorphic 2-form on S . Since K_S is trivial, and $K_{\tilde{S}} = \tau^*K_S + E_1 + \cdots + E_p$, where the E_i 's are exceptional divisors, any global holomorphic 2-form on \tilde{S} is a multiple of $\tau^*\omega$. In particular there exists $\lambda \in \mathbf{C}$ such that $\tilde{\varphi}^*\omega = \lambda\tau^*\omega$.

We write $\mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}}$ for the transcendental rational cohomology of S , that is the orthogonal in $\mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})$ of the Neron-Severi group $\text{NS}(S)$, with respect to the intersection form $\langle \cdot, \cdot \rangle$. We shall show that $\tilde{\varphi}^*\eta = \lambda\tau^*\eta$ for all $\eta \in \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}}$.

We clearly have $\mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}} \cong \mathbf{H}^2(\tilde{S}, \mathbf{Q})_{\text{tr.}}$ via τ^* , and since $\tilde{\varphi}^*$ sends the transcendental cohomology classes of S to transcendental cohomology classes in \tilde{S} , there exists a Hodge structure morphism

$$\psi : \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}} \longrightarrow \mathbf{H}^2(\tilde{S}, \mathbf{Q})_{\text{tr.}},$$

such that for all $\eta \in \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}}$, one has $\tilde{\varphi}^*\eta = \tau^*(\psi(\eta))$. Now $\omega \in \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}}$, and $\tilde{\varphi}^*\omega = \lambda\tau^*\omega$, so the eigenspace E_λ relative to λ for ψ is non empty.

Suppose $E_\lambda \subset \mathbf{H}^2(S, \mathbf{C})_{\text{tr.}}$ is a proper subspace for S generic. Since $\lambda \in \mathbf{C}$ is algebraic over \mathbf{Q} , the equations defining E_λ are contained in the countable set of equations with coefficients in $\overline{\mathbf{Q}}$. This says that, when S moves, $\omega \in E_\lambda$ is contained in a countable union of proper linear subspaces of $\mathbf{H}^2(S, \mathbf{C})$. This contradicts the surjectivity of the period map for K3 surfaces : its image is an open set of a projective quadric in $\mathbf{P}(\mathbf{H}^2(S, \mathbf{C}))$ (see e.g. [Pal85]). We thus have $E_\lambda = \mathbf{H}^2(S, \mathbf{C})_{\text{tr.}}$ for S generic.

ψ acts on $\mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}}$ as multiplication by λ , so λ is necessarily a rational number. From the two equalities

$$\int_{\tilde{S}} \tilde{\varphi}^*\omega \wedge \tilde{\varphi}^*\bar{\omega} = \text{deg}(\varphi) \int_S \omega \wedge \bar{\omega},$$

and

$$\int_{\tilde{S}} \tilde{\varphi}^*\omega \wedge \tilde{\varphi}^*\bar{\omega} = \lambda^2 \int_{\tilde{S}} \tau^*\omega \wedge \tau^*\bar{\omega} = \lambda^2 \int_S \omega \wedge \bar{\omega},$$

we get $\text{deg}(\varphi) = \lambda^2$. Since $\text{deg} \varphi$ is an integer, and λ is a rational number, λ is necessarily an integer. □

We shall now prove a divisibility property involving λ . To do so, we need some further notations. Let us write

$$\tilde{\varphi}^*L = l\tau^*L - \sum_{1 \leq i \leq p} \alpha_i E_i$$

for some integers $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Since $\text{Pic}(S) = \mathbf{Z} \cdot L$, and the E_i 's are effective, there also exist non negative integers β_1, \dots, β_p , such that for all i

$$\tilde{\varphi}_*E_i = \beta_i L.$$

Note that by projection formula,

$$\alpha_i = \tilde{\varphi}_*(\tilde{\varphi}^*L \cdot E_i) = L \cdot \tilde{\varphi}_*E_i = \beta_i L^2 = (2g - 2)\beta_i.$$

Lemma 2.3.2 $2g - 2$ necessarily divides $l - \lambda$.

Proof. Let λ be as in the proof of proposition 2.3.1. We have $\tilde{\varphi}^*\eta' = \lambda\tau^*\eta'$ for all class $\eta' \in \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}}$. We have on the other hand $\tilde{\varphi}^*c_1(L) = l\tau^*c_1(L) - (2g - 2) \sum_i \beta_i [E_i]$.

Any $\eta \in \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})$ decomposes over \mathbf{Q} into $\eta = \eta' + \eta''$, where $\eta' \in \mathbf{H}^2(S, \mathbf{Q})_{\text{tr.}}$, and $\eta'' = (\langle \eta, c_1(L) \rangle / (2g - 2))c_1(L)$. Then

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^*\eta &= \lambda\tau^*\eta' + l\tau^*\eta'' - \langle \eta, c_1(L) \rangle \sum_i \beta_i [E_i] \\ &= \lambda\tau^*\eta + (l - \lambda)\tau^*\eta'' - \langle \eta, c_1(L) \rangle \sum_i \beta_i [E_i]. \end{aligned}$$

The intersection product is unimodular, and $c_1(L)$ is indivisible. So there exists a class $\eta_1 \in H^2(S, \mathbf{Z})$, such that

$$\langle \eta_1, c_1(L) \rangle = 1.$$

It decomposes over \mathbf{Q} into $\eta_1 = \eta'_1 + \eta''_1$, and the equality

$$(l - \lambda)\tau^* \eta''_1 = \tilde{\varphi}^* \eta_1 - \lambda \tau^* \eta_1 + \langle \eta_1, c_1(L) \rangle \sum_i \beta_i [E_i]$$

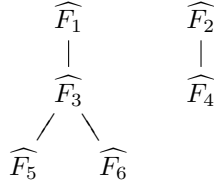
shows that

$$(l - \lambda)\tau^* \eta''_1 = \frac{l - \lambda}{2g - 2} \tau^* c_1(L)$$

is an integral cohomology class. Since $c_1(L)$ is indivisible, this shows that $2g - 2$ necessarily divides $l - \lambda$. □

We now look more specifically at the geometry of the elimination of indeterminacies. To have a more accurate description of the situation, we consider the proper transforms $\widehat{F}_i \subset \widetilde{S}$ of the F_i 's, and introduce their intersection tree. Later on, we will call it the exceptional tree, or the ramification tree (recall that since K_S is trivial, the ramification divisor of $\tilde{\varphi}$ and the total exceptional divisor of τ are equal, *cf.* proof of proposition 2.2.1). Its vertices are the \widehat{F}_i 's, and two vertices are connected if and only if the two corresponding divisors meet in \widetilde{S} . The descendants of a vertex \widehat{F}_i are the vertices situated below \widehat{F}_i in the tree, *i.e.* those corresponding to divisors whose projection by $\varepsilon_{i+1} \circ \dots \circ \varepsilon_p$ is contained in F_i . The depth m_i of a vertex \widehat{F}_i is the number of ancestors of \widehat{F}_i in the tree, *i.e.* the number of points situated above \widehat{F}_i . The depth of the tree is the maximal depth of its vertices.

Example 2.3.3 The following exceptional tree



is obtained by first blowing up S along two points; \widehat{F}_1 and \widehat{F}_2 are the exceptional divisors above these two points. One then blows up the resulting surface along one point on \widehat{F}_1 , and one point on \widehat{F}_2 . Write \widehat{F}_3 (resp. \widehat{F}_4) for the exceptional divisor appearing above the blown up point on \widehat{F}_1 (resp. \widehat{F}_2). One finally blows up along two points of \widehat{F}_3 . The descendants of \widehat{F}_3 are \widehat{F}_3 , \widehat{F}_5 and \widehat{F}_6 . Its ancestors are \widehat{F}_1 and \widehat{F}_3 . Its depth is 2. The depth of the tree is 3.

This being set, $E_i = \varepsilon_p^* \circ \dots \circ \varepsilon_{i+1}^* F_i$ is clearly the sum of all descendants of \widehat{F}_i in the tree. In the above example we have $E_3 = \widehat{F}_3 + \widehat{F}_5 + \widehat{F}_6$. The canonical divisor of \widetilde{S} is $K_{\widetilde{S}} = \varepsilon_p^* \circ \dots \circ \varepsilon_1^* K_S + E_1 + \dots + E_p$. Since K_S is trivial we have

$$K_{\widetilde{S}} = \sum_{1 \leq i \leq p} E_i = \sum_{1 \leq i \leq p} m_i \widehat{F}_i.$$

It is also the ramification divisor of the map $\tilde{\varphi}$.

Let F be an exceptional divisor, such that τ does not contain any blow up along a point of F (*i.e.* an exceptional divisor which appears at the bottom of the exceptional tree). For a suitable

choice of notations, this divisor can be supposed to be F_p . If F collapses under the action of $\tilde{\varphi}$, then there necessarily exists a morphism $\tilde{\varphi}_{p-1} : S_{p-1} \rightarrow S$, and a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc}
 S_p & & \\
 \varepsilon_p \downarrow & \searrow \tilde{\varphi} & \\
 S_{p-1} & & \\
 \varepsilon_{p-1} \downarrow & \searrow \tilde{\varphi}_{p-1} & \\
 \vdots & & \\
 \varepsilon_1 \downarrow & \searrow \varphi & \\
 S & \xrightarrow{\varphi} & S,
 \end{array}$$

that is another elimination of indeterminacies of φ involving one less exceptional divisor. We may thus assume τ to be minimal, in the sense that $\tilde{\varphi}$ does not contract to a point any exceptional divisor which appears at the end of the exceptional tree.

The following equality is obtained simply by computing the self-intersection $(\tilde{\varphi}L)^2$. It is the most important relation between $\deg \varphi$ and l . We use the minimality of τ to show the positivity of the β_i 's.

Proposition 2.3.4 *The β_i 's are all positive. In addition, the algebraic degree l and the topological degree of φ satisfy*

$$l^2 = \deg \varphi + (2g - 2) \sum_{1 \leq i \leq p} \beta_i^2.$$

Proof. We have $E_i = \widehat{F}_i + \widehat{F}_{i_1} + \dots + \widehat{F}_{i_q}$, where $\widehat{F}_i, \widehat{F}_{i_1}, \dots, \widehat{F}_{i_q}$ are all the descendants of \widehat{F}_i in the exceptional tree. Therefore

$$\beta_i = \gamma_i + \gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_q},$$

where $\tilde{\varphi}_* \widehat{F}_{i_s} = \gamma_{i_s} L$, $1 \leq s \leq q$. The γ_{i_s} 's are *a priori* non negative integers. \widehat{F}_i has at least one descendant \widehat{F}_{i_j} at the end of the exceptional tree. By minimality of τ , $\tilde{\varphi}$ cannot contract \widehat{F}_{i_j} to a point, and we have $\gamma_{i_j} \geq 1$. Finally

$$\beta_i \geq \gamma_{i_j} > 0.$$

We get the relation between l and $\deg \varphi$ simply by computing in two different ways the self-intersection $(\tilde{\varphi}^*L)^2$. We have on the one hand

$$(\tilde{\varphi}^*L)^2 = (\deg \tilde{\varphi})L^2 = (\deg \varphi)(2g - 2),$$

and on the other hand

$$(\tilde{\varphi}^*L)^2 = l^2(\tau^*L)^2 + \sum_{1 \leq i \leq p} \alpha_i^2 E_i^2 = (2g - 2)l^2 - (2g - 2)^2 \sum_{1 \leq i \leq p} \beta_i^2,$$

which yields the announced formula. □

We now get the following arithmetic property on the β_i 's by some Riemann-Roch computations.

Lemma 2.3.5 $\sum_{1 \leq i \leq p} \beta_i$ is even.

Proof. We first show that $\tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ is a locally free sheaf of rank $r := \deg \varphi$. Since it is clearly torsion free, it is enough to show that any section defined on a punctured open set $U \setminus \{x_0\}$ extends in a unique way to a section defined over U (see [Bar77], lemma 1). So let $U \subset S$ be an open set, $x_0 \in U$, and $f \in \tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}(U \setminus \{x_0\})$. f can be seen as a holomorphic function on \tilde{S} , defined over $\tilde{\varphi}^{-1}(U \setminus \{x_0\})$. If the fiber of $\tilde{\varphi}$ above x_0 is a finite set of points, then the result is clear. Otherwise the fiber contains an irreducible exceptional curve F . f cannot be singular along F , since this would give by restriction a global section of $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(mF)|_F$ for some positive m , which is impossible, since $F^2 < 0$. So f has only isolated singularities along F , and therefore extends to a function over $\tilde{\varphi}^{-1}(U)$.

Now it is an easy consequence of Grauert's theorem that $R^i \tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}} = 0$ for $i > 0$. This gives $\tilde{\varphi}_! \mathcal{O}_{\tilde{S}} = \tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}$, and we thus have

$$\begin{aligned} ch(\tilde{\varphi}_! \mathcal{O}_{\tilde{S}}).td(T_S) &= \left(r[S] + c_1(\tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}) + \frac{c_1(\tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}})^2 - 2c_2(\tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}})}{2} \right) . ([S] + 2) \\ &= r[S] + c_1(\tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}) + \left(\frac{c_1(\tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}})^2 - 2c_2(\tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}})}{2} + 2r \right) . \end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$\tilde{\varphi}_* (ch(\mathcal{O}_{\tilde{S}}).td(T_{\tilde{S}})) = \tilde{\varphi}_* \left([\tilde{S}] - \frac{1}{2}(E_1 + \dots + E_p) + 2 \right) = r[S] - \frac{1}{2}(\sum_i \beta_i) L + 2,$$

so the Grothendieck-Riemann-Roch formula gives

$$c_1(\tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\tilde{S}}) = -\frac{1}{2}(\sum_i \beta_i) L.$$

Since L is indivisible, the lemma follows. □

2.3.2 Complexity of an elimination of indeterminacies

To motivate the study of the complexity of the elimination of indeterminacies, we first show that we have further numerical constraints on φ when the elimination of indeterminacies is not too complicated. The following numerical property is true under the hypothesis that the exceptional tree has depth smaller than 2.

Proposition 2.3.6 *If the differential $d\tilde{\varphi}$ does not vanish identically along any curve of \tilde{S} , then the topological degree of φ satisfies the inequality*

$$\deg \varphi \leq 1 + \frac{1}{24} [p + 4(g-1)\sum_i \beta_i].$$

The condition on the differential is satisfied as soon as the total depth of the exceptional tree is non greater than 2.

Proof. We follow an idea of Amerik, Rovinsky and Van de Ven ([ARV99], see [Bea01] as well). The fiber bundle $\Omega_S^1(2)$ is generated by its global sections, so by lemma 1.1 of [ARV99] a generic section $\sigma \in H^0(S, \Omega_S^1(2))$ has isolated zeroes. With the assumption made on $d\tilde{\varphi}$ this is also true

for the pull-back section $\tilde{\varphi}^* \sigma \in \mathbf{H}^0(\tilde{S}, \Omega_{\tilde{S}}^1(2\tilde{\varphi}^*L))$. Counting these zeroes yields the inequality on Chern classes

$$c_2\left(\Omega_{\tilde{S}}^1(2\tilde{\varphi}^*L)\right) \geq (\deg \varphi)c_2\left(\Omega_S^1(2)\right).$$

The left-hand side of this inequality is

$$c_2(\Omega_{\tilde{S}}^1) + 2\tilde{\varphi}^*c_1(L) \cdot c_1(\Omega_{\tilde{S}}^1) + 4\tilde{\varphi}^*c_1(L)^2,$$

and its right-hand side is

$$\deg \varphi \left[c_2(\Omega_S^1) + 2c_1(L) \cdot c_1(\Omega_S^1) + 4c_1(L)^2 \right].$$

Now $\tilde{\varphi}^*c_1(L)^2 = (\deg \varphi)c_1(L)^2$, so we get

$$c_2(\Omega_{\tilde{S}}^1) + 2\tilde{\varphi}^*c_1(L) \cdot c_1(\Omega_{\tilde{S}}^1) \geq \deg \varphi \left[c_2(\Omega_S^1) + 2c_1(L) \cdot c_1(\Omega_S^1) \right],$$

that is

$$\chi_{\text{top}}(\tilde{S}) + 2\tilde{\varphi}^*L \cdot K_{\tilde{S}} \geq \deg \varphi \left[\chi_{\text{top}}(S) + 2L \cdot K_S \right],$$

where χ_{top} denotes the topological Euler-Poincaré characteristic, that is the alternated sum of the Betti numbers. It is 24 for all K3 surfaces. \tilde{S} is obtained from S by successively blowing up along p points so $\chi_{\text{top}}(\tilde{S}) = 24 + p$. We also have $K_S = 0$, and

$$\tilde{\varphi}^*L \cdot K_{\tilde{S}} = (l\tau^*L - \sum_i \alpha_i E_i) \cdot (E_1 + \cdots + E_p) = \sum_i \alpha_i.$$

We eventually get

$$24 + p + 2\sum_i \alpha_i \geq 24 \deg \varphi,$$

which yields the desired inequality with the relations $\alpha_i = (2g - 2)\beta_i$.

Now suppose $d\tilde{\varphi}$ vanishes identically along a curve C in \tilde{S} . Then C necessarily collapses under the action of $\tilde{\varphi}$, and it appears with multiplicity at least 2 in its ramification divisor. Indeed, let f be some local equation for C . If $d\tilde{\varphi}$ vanishes with order μ along C , then it writes

$$d\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} f^\mu g_{11} & f^\mu g_{12} \\ f^\mu g_{21} & f^\mu g_{22} \end{pmatrix}$$

in some local holomorphic coordinate system, with the g_{ij} holomorphic, and $\wedge^2 d\tilde{\varphi}$ vanishes with order 2μ along C . If the total depth of the exceptional tree is less than 2, the only curves which appear with multiplicity greater than 2 in the ramification divisor are at the end of the tree, and cannot be contracted to a point by $\tilde{\varphi}$ by minimality of the elimination of indeterminacies. So in this case, $d\tilde{\varphi}$ does not vanish identically along any curve of \tilde{S} . □

The first step towards a control of the complexity of the elimination of indeterminacies is made with the following basic remark. It shows that the depth of the exceptional tree is controlled by the topological degree.

Proposition 2.3.7 (i) *The depth m of the exceptional tree always satisfy*

$$m \leq \deg \varphi - 2.$$

(ii) *If the tree has two connected components of depths m' and m'' , then*

$$m' + m'' \leq \deg \varphi - 2.$$

In particular, if one has equality in (i), then the tree only has one connected component.

Proof. (i) Since the ramification divisor of $\tilde{\varphi}$ is $\sum_i m_i \hat{F}_i$, it is clear that

$$m = \max m_i \leq \deg \varphi - 1.$$

Now suppose there exists an irreducible exceptional curve F that has depth $\deg \varphi - 1$ in the exceptional tree. Then it is at the end of the tree, and therefore is not contracted. F appears in the ramification divisor with multiplicity $\deg \varphi - 1$, and thus

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\varphi}(F)) = (\deg \varphi)F + E,$$

where E is contracted by $\tilde{\varphi}$. In particular, E is exceptional for τ as F is. It follows that $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\varphi}(F))$ is supported on the exceptional divisor of τ , which implies that it has negative self-intersection. This contradicts the fact that

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\varphi}(F))^2 = (\deg \varphi)\tilde{\varphi}(F)^2 > 0.$$

(ii) If the tree has two connected components of depths m' and m'' , then we have two irreducible exceptional curves F' and F'' of depths m' and m'' , that are not contracted, and that do not meet in \tilde{S} . The image curves $\tilde{\varphi}(F')$ and $\tilde{\varphi}(F'')$ intersect in S , because their images have their class proportional to $c_1(L)$. Let x be an intersection point. There are at least two distinct points $x' \in F'$ and $x'' \in F''$ in $\tilde{\varphi}^{-1}(x)$. Since F' and F'' appear with multiplicities m' and m'' in the ramification divisor of $\tilde{\varphi}$, x' and x'' appear with multiplicities $m' + 1$ and $m'' + 1$ in $\tilde{\varphi}^{-1}(x)$. This implies

$$m' + m'' + 2 \leq \deg \tilde{\varphi}.$$

□

Remark 2.3.8 In fact, (ii) can be extended as follows : if there exist two distinct curves F' and F'' at the end of the exceptional tree, which have depths m' and m'' , then

$$m' + m'' + 2 \leq \deg \tilde{\varphi}.$$

Now the following result gives control on another aspect of the elimination of indeterminacies, namely the number of blown-up points on S . It says that in case all irreducible exceptional curves are disjoint, then their number is bounded from above. The hypothesis is equivalent to the fact that we can eliminate the indeterminacies of φ by the single blow up of finitely many distinct points on S .

Proposition 2.3.9 *If the exceptional tree has depth 1, then*

$$p \leq 8(\deg \varphi - 1).$$

Proof. In this case, the ramification divisor of $\tilde{\varphi}$ is $E_1 + \cdots + E_p$, where the E_i 's are disjoint \mathbf{P}^1 's, and by minimality of the elimination of indeterminacies, $\tilde{\varphi}$ does not contract any of them. So the differential $d\tilde{\varphi}$ is surjective, and we have an exact sequence

$$0 \rightarrow \tilde{\varphi}^* \Omega_S \rightarrow \Omega_{\tilde{S}} \rightarrow \bigoplus_i L_i \rightarrow 0,$$

where each L_i is a line bundle on the exceptional curve E_i . This gives

$$\begin{aligned} c_2(\Omega_{\tilde{S}}) &= c_2(\tilde{\varphi}^* \Omega_S) + c_1(\tilde{\varphi}^* \Omega_S) \cdot c_1(\bigoplus_i L_i) + c_2(\bigoplus_i L_i) \\ &= (\deg \varphi)c_2(\Omega_S) + \sum_i c_2(L_i). \end{aligned}$$

By restriction, we get on each E_i an exact sequence

$$0 \rightarrow K_i \rightarrow \Omega_{\tilde{S}|E_i} \rightarrow L_i \rightarrow 0,$$

where K_i is a line bundle on E_i . We have a map $K_i \rightarrow \Omega_{E_i}$, given by the composition

$$\begin{array}{ccc} & \Omega_{\tilde{S}|E_i} & \\ (d\tilde{\varphi})^t \nearrow & \downarrow & \\ K_i & \longrightarrow & \Omega_{E_i}. \end{array}$$

Since $\tilde{\varphi}$ is ramified along E_i , the map $K_i \rightarrow I_i/I_i^2$ induced by $(d\tilde{\varphi})^t$ is zero (here $I_i \subset \mathcal{O}_{\tilde{S}}$ is the ideal sheaf of E_i). This shows that the above map $K_i \rightarrow \Omega_{E_i}$ is an injection, and thus that

$$\deg K_i \leq \deg \Omega_{E_i} = -2$$

(as line bundles on $E_i \cong \mathbf{P}^1$). On the other hand, $\deg(\Omega_{\tilde{S}|E_i}) = -1$ by the conormal exact sequence, so one has

$$\deg(L_i) = \deg(\Omega_{\tilde{S}|E_i}) - \deg(K_i) \geq 1.$$

We write d_i for $\deg(L_i)$ (*i.e.* $L_i = \mathcal{O}_{E_i}(d_i)$). The restriction exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-(d_i+1)E_i) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{S}}(-d_iE_i) \rightarrow \mathcal{O}_{E_i}(d_i) \rightarrow 0$$

gives the two relations

$$\begin{cases} c_1(L_i) - (d_i+1)E_i &= -d_iE_i \\ c_2(L_i) - (d_i+1)E_i \cdot c_1(L_i) &= 0, \end{cases}$$

and therefore

$$c_2(L_i) = -d_i - 1 \leq -2.$$

So eventually

$$\begin{aligned} c_2(\Omega_{\tilde{S}}) &= (\deg \varphi)c_2(\Omega_S) + \sum_i c_2(L_i) \\ &\leq 24 \deg \varphi - 2p, \end{aligned}$$

and since one knows that $c_2(\Omega_{\tilde{S}}) = 24 + p$, one gets the announced inequality. \square

In case $\deg \varphi = 4$, propositions 2.3.7 and 2.3.9 work very well. The following proposition sums up what they learn us in this case.

Example 2.3.10 If $\deg \varphi = 4$, then either the exceptional tree has depth 1 and there are less than 24 blown-up points, or it has depth 2 and there is only one blown up point.

Note that example 2.3.10 shows that if $\deg \varphi = 4$, then the hypotheses of proposition 2.3.6 are always satisfied. To conclude, we compute the first possible couples $(\deg \varphi, l)$ for which there could actually be a self-rational map φ , according to all numerical properties gathered above. Recall that K3 surfaces of genera 2, 3, 4 and 5 are respectively double covers of \mathbf{P}^2 , quartics in \mathbf{P}^3 , complete intersections of a cubic and a quadric in \mathbf{P}^4 , and complete intersections of three quadrics in \mathbf{P}^5 .

Example 2.3.11 For $\deg \varphi = 4$, the first possible values of l possible are given by

g	2	3	4	5
l	6, 8, 10, ...	6, 10, 14, ...	8, 10, 14, ...	6, 10, 14, ...

For $\deg \varphi = 9$, we get

g	2	3	4	5
l	5, 7, 9, ...	5, 7, 9, ...	9, 15, 21, ...	5, 11, 13, 19, ...

Deuxième partie

Log- K -correspondances et pseudo-formes volume intrinsèques pour les paires logarithmiques

Chapitre 3

Préliminaires de géométrie complexe et algébrique

Ce chapitre regroupe deux paragraphes assez distincts.

Le premier traite de géométrie hyperbolique : on y étudie les variétés complexes munies d'une métrique à courbure négative. Le disque unité, muni de la métrique de Poincaré est un exemple important d'une telle variété. Il conduit naturellement à s'intéresser aux métriques de Kähler-Einstein. Cette étude constitue le fondement essentiel des notions d'hyperbolicité-distance et d'hyperbolicité-volume au sens de Kobayashi, définies et étudiées au chapitre 4. La notion d'hyperbolicité-volume fournit l'une des motivations principales du travail [Ded08], présenté au chapitre 6.

Le second introduit la notion de géométrie logarithmique. Il s'agit alors d'étudier une variété complexe ouverte U via une compactification projective X , obtenue en ajoutant à U une hypersurface dite de bord (ceci est à comparer à la réalisation de \mathbf{P}^n comme \mathbf{C}^n plus un hyperplan de points à l'infini). Le fibré log-canonique $K_X(D)$ est un objet particulièrement intéressant pour une telle étude. Ce sont les idées présentées dans ce paragraphe qui nous permettent dans [Ded08] d'étendre les travaux de Claire Voisin sur l'hyperbolicité-volume pour les variétés de Calabi-Yau projectives ([Voi04b]) aux variétés quasi-projectives (*cf.* chapitre 6).

3.1 Géométrie hyperbolique

3.1.1 Théorie de l'uniformisation

On présente ici le théorème d'uniformisation, et quelques unes de ses applications immédiates. Il a été obtenu initialement par Klein et Poincaré indépendamment, puis mis sous sa forme définitive par Koebe. Dans sa forme classique, il s'énonce de la manière suivante.

Théorème 3.1.1 *Soit X une surface de Riemann connexe. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) X est simplement connexe.
- (ii) $H^1(X, \mathbf{C}) = 0$.
- (iii) X est isomorphe à la sphère de Riemann $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, au plan complexe \mathbf{C} , ou au disque unité \mathbf{D} .

Ce résultat difficile s'applique de manière particulièrement importante à la classification des surfaces de Riemann. Soit X une surface de Riemann connexe. Son revêtement universel \tilde{X} est

une surface de Riemann connexe et simplement connexe. On note $\Gamma := \text{Aut}(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$ le groupe des automorphismes de ce revêtement. Son action (à gauche) sur \tilde{X} est libre et proprement discontinue, et X est isomorphe au quotient $\Gamma \backslash \tilde{X}$. Le théorème d'uniformisation permet dès lors d'affirmer que toute surface de Riemann connexe est isomorphe au quotient de \mathbf{P}^1 , \mathbf{C} ou \mathbf{D} par l'action libre et proprement discontinue d'un sous-groupe d'automorphismes. Dans le cas compact, les quotients de \mathbf{P}^1 , \mathbf{C} et \mathbf{D} correspondent respectivement aux courbes algébriques lisses de genre $g = 0$, $g = 1$ et $g \geq 2$.

Dans le cas où le revêtement universel est \mathbf{P}^1 ou \mathbf{C} , la situation est assez simple. Tout élément de $\text{Aut}(\mathbf{P}^1) \cong \text{PSL}(2, \mathbf{C})$ possède un point fixe, donc il n'existe pas de sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbf{P}^1)$ agissant librement et proprement discontinûment sur \mathbf{P}^1 , et la seule surface de Riemann dont le revêtement universel est isomorphe à \mathbf{P}^1 est \mathbf{P}^1 lui-même.

Les seuls sous-groupes d'automorphismes de \mathbf{C} agissant de façon libre et proprement discontinue sont les sous-groupes discrets de \mathbf{C} (agissant par translation). On obtient donc les possibilités suivantes pour les surfaces de Riemann revêtues par \mathbf{C} :

- $\Gamma = \{0\}$ et $X = \mathbf{C}$;
- $\Gamma = \mathbf{Z} \cdot \gamma_0$, $\gamma_0 \neq 0$ et $X \cong \mathbf{C}/\mathbf{Z} \cong \mathbf{C}^*$; habituellement, on représente \mathbf{C}^* comme \mathbf{P}^1 privé des deux points 0 et ∞ . La géométrie de cette courbe est très proche de la courbe rationnelle nodale (de genre géométrique 0 et de genre arithmétique 1) obtenue en identifiant 0 et ∞ dans \mathbf{P}^1 ;
- Γ est un réseau et X est un tore complexe, *i.e.* une courbe elliptique lisse.

Le cas où le revêtement universel est le disque unité \mathbf{D} est nettement plus riche. Les surfaces de Riemann dont le revêtement universel holomorphe est \mathbf{D} sont dites hyperboliques. Un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbf{D}) \cong \text{PU}(1, 1)$ agit librement et proprement discontinûment si et seulement si il est discret. Il est donc possible de classifier les surfaces de Riemann hyperboliques en classifiant tous les sous-groupes discrets de $\text{PU}(1, 1)$. C'est l'objet de la théorie de l'uniformisation. On renvoie à [FK92] pour un développement sur ce sujet.

Il est parfois plus commode de considérer que le revêtement universel des surfaces de Riemann hyperboliques est le demi-plan supérieur $\mathbf{H} := \{\Im(z) > 0\}$. Ceci est autorisé par le fait que la transformation de Cayley

$$\omega \in \mathbf{D} \mapsto i \frac{1 + \omega}{1 - \omega} \in \mathbf{H}. \quad (3.1)$$

est un biholomorphisme entre \mathbf{D} et \mathbf{H} . On peut alors s'intéresser aux sous-groupes discrets de $\text{Aut}(\mathbf{H}) \cong \text{PGL}(2, \mathbf{R})$ plutôt qu'à ceux de $\text{PU}(1, 1)$.

On conclut ce paragraphe avec le résultat suivant, qui permet de calculer la métrique de Poincaré sur une surface de Riemann hyperbolique époincée au voisinage de chacun des époinçages.

Théorème 3.1.2 *Soit $X = \Gamma \backslash \mathbf{H}$ une surface de Riemann hyperbolique. Les époinçages de X sont en correspondance bijective avec les classes de conjugaison dans Γ d'éléments paraboliques irréductibles (les transformations paraboliques sont celles qui possèdent un seul point fixe dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, elles sont toutes conjuguées à $z \mapsto z + 1$).*

Pour chaque époinçage x_0 de X , il existe un voisinage époincé U de x_0 dans X , un disque $\tilde{U} \subset \mathbf{H}$, et un élément parabolique $T \in \Gamma$ tel que $U \cong \langle T \rangle \backslash \tilde{U}$ d'une part, et deux points de \tilde{U} sont équivalents sous l'action de Γ si et seulement si ils le sont sous l'action de $\langle T \rangle$ d'autre part. A isomorphisme de revêtement près, on peut toujours supposer que $\tilde{U} = \{\Im(z) > b\}$, et $T = z \mapsto z + 1$.

3.1.2 Métrique de Poincaré

On définit ici la métrique de Poincaré sur le disque unité \mathbf{D} . Cela va nous permettre *via* le théorème d'uniformisation de munir d'une métrique à courbure négative toutes les surfaces de Riemann à caractéristique d'Euler $\chi > 0$.

Définition 3.1.3 *La métrique de Poincaré sur le disque unité \mathbf{D} est donnée par la forme de Kähler*

$$\kappa = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Elle coïncide avec la métrique euclidienne standard en l'origine, et elle est invariante sous l'action des automorphismes de \mathbf{D} . Comme le groupe $\mathrm{PU}(1, 1)$ des automorphismes de \mathbf{D} agit transitivement, la métrique de Poincaré est déterminée en chaque point de \mathbf{D} par son expression en 0.

En utilisant l'isomorphisme de Cayley (3.1) entre le disque unité et le demi-plan supérieur, on définit la métrique de Poincaré du demi-plan supérieur \mathbf{H} . Elle s'écrit

$$\frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z - \bar{z}|^2}. \quad (3.2)$$

Remarque 3.1.4 On peut maintenant expliquer pourquoi on parle de géométrie hyperbolique, en donnant une interprétation alternative de la métrique de Poincaré.

Soit q la forme quadratique canonique de signature $(2, 1)$ sur \mathbf{R}^3 . La nappe supérieure de l'hyperboloïde d'équation $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = -1$ dans \mathbf{R}^3 est isomorphe à un disque de rayon 2 *via* la projection stéréographique depuis le point de coordonnées $(0, 0, -1)$ sur le plan d'équation $z = 1$. En un point $u = (x, y, z)$, le plan tangent à l'hyperboloïde est isomorphe au plan orthogonal à u pour la forme quadratique q . Comme $q(u) = -1$, la restriction de q à ce plan est définie positive. Ainsi, q définit une métrique sur l'hyperboloïde.

En transportant cette métrique sur le disque unité à l'aide de la projection stéréographique (puis d'une homothétie), on obtient la métrique de Poincaré (à un facteur multiplicatif égal à 4 près).

Bien sûr, la métrique de Poincaré κ sur \mathbf{D} (ou sur \mathbf{H}) induit une métrique sur toutes les surfaces de Riemann dont le revêtement universel est isomorphe à \mathbf{D} . Ces métriques sont aussi appelées métriques de Poincaré. On va maintenant calculer explicitement la métrique de Poincaré sur le disque épointé, et sur le disque avec une singularité orbifold.

Exemple 3.1.5 On a vu que le disque épointé $\mathbf{D} \setminus \{0\}$ est isomorphe au quotient du demi-plan supérieur par le groupe d'automorphismes engendré par la transformation $z \mapsto z + 1$. La projection canonique s'écrit

$$\pi : Z \in \mathbf{H} \mapsto z = \exp(2\pi i Z) \in \mathbf{D} \setminus \{0\}.$$

On a donc $Z = \log(z)/2\pi i$, ce qui donne

$$dZ = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}.$$

La métrique de Poincaré sur $\mathbf{D} \setminus \{0\}$ est induite par la métrique sur \mathbf{H} donnée par (3.2), et s'écrit donc

$$\frac{i}{2} \frac{dZ \wedge d\bar{Z}}{|Z - \bar{Z}|^2} = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 (\log |z|^2)^2}.$$

Le théorème 3.1.2, qui établit la correspondance entre les époutages d'une surface de Riemann et les classes de conjugaison d'éléments paraboliques dans le groupe des automorphismes du revêtement universel, permet d'affirmer que l'expression précédente donne la métrique de Poincaré au voisinage d'un époutage sur n'importe quelle surface de Riemann hyperbolique.

Exemple 3.1.6 On obtient de la même manière une expression de la métrique de Poincaré au voisinage d'une singularité orbifold. On dit qu'une surface de Riemann X possède une singularité orbifold au point x_0 s'il existe une compactification \widehat{X} de X , et un voisinage U de x_0 dans \widehat{X} , tel que $U \setminus \{x_0\}$ soit un voisinage épouté de x_0 dans X , et tel que U soit isomorphe au quotient du disque \mathbf{D} par une transformation elliptique de type fini, *i.e.* par une transformation $z \mapsto e^{2\pi i/\nu} z$, $\nu \in \mathbf{Z}$.

Dans ce cas, l'application de projection $\pi : Z \in \mathbf{D} \mapsto z = Z^\nu \in \mathbf{D}$ donne

$$dZ = \frac{1}{\nu} \frac{dz}{z^{1-\frac{1}{\nu}}},$$

et donc la métrique de Poincaré sur $\langle z \mapsto e^{2\pi i/\nu} z \rangle \setminus \mathbf{D}$, induite par la métrique κ sur \mathbf{D} donnée par la définition 3.1.3 s'écrit

$$\frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{\nu^2 (1 - |z^{\frac{1}{\nu}}|^2)^2 |z^{1-\frac{1}{\nu}}|^2}.$$

On conclut ce paragraphe en vérifiant que la métrique de Poincaré est solution de l'équation de Kähler-Einstein, que nous étudierons plus en détails au paragraphe suivant. Ceci implique en particulier que la métrique de Poincaré est à courbure négative, et donc que toutes les surfaces de Riemann hyperboliques peuvent être munies d'une métrique à courbure négative.

Dans le cas de la dimension 1 que l'on considère ici, il s'agit simplement de prouver la relation

$$-i\partial\bar{\partial} \log(\kappa) = -4\kappa \tag{3.3}$$

(on retrouve le facteur 4 de la remarque 3.1.4). Cela résulte du calcul suivant :

$$-i\partial\bar{\partial} \log \left(\frac{1}{(1 - z\bar{z})^2} \right) = 2i\partial \left(\frac{-z}{1 - z\bar{z}} d\bar{z} \right) = -2i \frac{1}{(1 - z\bar{z})^2} dz \wedge d\bar{z}.$$

3.1.3 Conjecture de Calabi et métriques de Kähler-Einstein

On présente dans ce paragraphe deux problèmes étroitement liés : la recherche de métriques de Kähler-Einstein d'une part, et la recherche de métriques kähleriennes ayant une courbure de Ricci prescrite *a priori* d'autre part.

On commence par rappeler quelques définitions. Soient X une variété complexe lisse, et L un fibré en droites holomorphe sur X . On associe à toute métrique hermitienne h sur L la forme différentielle fermée réelle de type $(1, 1)$

$$\omega_{L,h} := -\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log h.$$

Au facteur $1/2\pi$ près, c'est la courbure de Chern du fibré L . La classe de cohomologie de de Rham $[\omega_{L,h}] \in H^2(X, \mathbf{R})$ ne dépend pas du choix de la métrique h , et est égale à la première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X, \mathbf{Z})$.

Une métrique g sur X est une métrique hermitienne sur le fibré T_X . La courbure de Ricci de g est la forme

$$\text{Ric}(g) := -\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log(\det g).$$

On a donc $[\text{Ric}(g)] = c_1(X)$.

Ceci étant dit, on peut maintenant parler des deux problèmes qui nous intéressent. On suit le texte [Aub98], chapitre 7.

Question 3.1.7 *Soit X une variété kählérienne (lisse). Existe-t-il une métrique g sur X , pour laquelle il existe un réel k tel que*

$$\text{Ric}(g) = k\omega_g, \quad (3.4)$$

où ω_g est la forme de Kähler associée à g ?

On appelle (3.4) l'équation de Kähler-Einstein, et une métrique solution de cette équation est dite de Kähler-Einstein. Comme la courbure de Ricci est une forme fermée, une métrique de Kähler-Einstein est nécessairement kählérienne. La forme de Kähler associée à une métrique g est bien sûr positive, donc comme $[\text{Ric}(g)] = c_1(X)$, l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein n'est possible que si $c_1(X)$ est définie positive, définie négative, ou nulle.

D'autre part, Calabi conjecture ([Cal54], [Cal57]) le résultat suivant.

Conjecture 3.1.8 (Calabi) *Pour toute forme α représentant la première classe de Chern $c_1(X)$, il existe une métrique g sur X telle que*

$$\text{Ric}(g) = \alpha.$$

Dans le cas $c_1(X) \leq 0$, une solution conjointe à ces deux problèmes a été apportée indépendamment par Aubin ([Aub76], [Aub78]) et Yau ([Yau78]). Elle prend la forme suivante.

Théorème 3.1.9 (Aubin, Yau) *Soit X une variété kählérienne compacte lisse. Si $c_1(X) < 0$, alors il existe une unique métrique de Kähler-Einstein à homothétie près.*

Si $c_1(X) = 0$, alors il existe une unique métrique de Kähler-Einstein à homothétie près dans chaque classe de cohomologie positive de type $(1, 1)$.

Les variétés à $c_1(X) < 0$ sont de type général. Dans ce cas, le théorème prédit l'existence d'un représentant de la première classe de Chern, qui est à un facteur multiplicatif k près la forme de Kähler d'une métrique de Kähler-Einstein. La métrique de Poincaré étudiée au paragraphe précédent fournit une métrique de Kähler-Einstein (avec $k = -4$) sur toute courbe lisse de genre $g \geq 2$.

Pour les variétés à $c_1(X) = 0$, l'équation de Kähler-Einstein s'écrit simplement $\text{Ric}(g) = 0$. Le théorème dit alors que chaque classe de cohomologie positive et de type $(1, 1)$ possède un représentant qui est la forme de Kähler d'une métrique à courbure nulle. Il s'agit d'un cas particulier de la conjecture de Calabi, puisque que la forme nulle représente la première classe de Chern de X .

Les variétés de Calabi-Yau sont les variétés à fibré canonique K_X trivial, satisfaisant aux conditions supplémentaires $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $0 < i < \dim X$, qui les distinguent des variétés abéliennes et des variétés hyperkähleriennes. Elles fournissent un exemple de variétés à $c_1(X) = 0$. Leur nom ne devrait maintenant plus sembler mystérieux.

Le cas des variétés à $c_1(X) > 0$ est plus compliqué. Il existe des variétés pour lesquelles l'équation de Kähler-Einstein possède plusieurs solutions (par exemple l'espace projectif), et d'autres pour lesquelles elle n'en admet aucune (par exemple l'espace projectif éclaté en un ou deux points). On renvoie à [Aub98] pour le détail des résultats connus dans ce cas.

Cas des variétés non compactes

Remarquons pour finir qu'il existe des résultats concernant l'équation de Kähler-Einstein sur les variétés ouvertes ([Kob84], [TY87]). Ils sont obtenus en appliquant les méthodes de la géométrie logarithmique, expliquées au paragraphe 3.2 suivant.

Théorème 3.1.10 (Kobayashi, Tian-Yau) *Soient X une variété projective complexe lisse, et $D \subset X$ un diviseur effectif globalement à croisements normaux. Si $K_X + D$ est ample, alors il existe une unique métrique de Kähler-Einstein complète (à homothétie près) à courbure de Ricci négative sur la variété ouverte $U := X \setminus D$.*

La condition d'amplitude de $K_X + D$ est ici l'analogie de la condition $c_1(X) < 0$ dans le cas compact. Elle permet la fabrication d'une forme volume μ sur U , obtenue à partir d'une forme volume sur X singulière le long de D , et qui s'inspire de la métrique de Poincaré sur $\mathbf{D} \setminus \{0\}$

$$\frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 (\log |z|^2)^2},$$

qui est elle-même solution de l'équation de Kähler-Einstein. Cette construction, due à Carlson et Griffiths ([CG72a], [Gri76], cf. paragraphe 6.4) est le point de départ de la preuve du théorème 3.1.10.

3.2 Géométrie logarithmique

3.2.1 Compactifications des variétés ouvertes

Soit U une variété quasi-projective, c'est-à-dire un ouvert dans une variété projective X . On note $D := X \setminus U$. On l'appelle le bord de U dans X . Le sous-ensemble fermé $D \subset X$ n'est *a priori* pas nécessairement un diviseur. Pour utiliser le fibré canonique logarithmique, il est cependant nécessaire de supposer que D est un diviseur réduit et à croisements normaux dans X (cf. définition 3.2.1 ci-dessous). Dans ce cas, on définit le fibré canonique de la paire (X, D) comme étant le fibré $K_X(D)$ des formes différentielles méromorphes de degré maximal sur X , possédant au plus un pôle le long de D .

On rappelle les notions de diviseur à croisements normaux, et de diviseur globalement à croisements normaux.

Définition 3.2.1 *Soient X une variété projective lisse et $D \subset X$ un diviseur effectif. On dit que D est globalement à croisements normaux si c'est la réunion $\bigcup_{1 \leq i \leq p} D_i$ d'un nombre fini d'hypersurfaces lisses $D_i \subset X$ qui se rencontrent transversalement.*

On dit que D est à croisements normaux si au voisinage de chaque point de D il existe un système de coordonnées holomorphes local (z_1, \dots, z_n) dans lequel D est donné par une équation de la forme

$$z_1^{m_1} \cdots z_p^{m_p} = 0.$$

On note en particulier qu'une hypersurface irréductible $D \subset X$ qui possède deux branches locales transverses le long d'un diviseur S de D est un diviseur à croisement normaux qui n'est pas globalement à croisements normaux.

En fait, le lemme de désingularisation (plongée) d'Hironaka ([Hir64]) permet de supposer sans grande restriction que le bord de U dans X est un diviseur à croisements normaux.

Lemme 3.2.2 (Hironaka) *Soit X une variété algébrique complexe projective, et $U \subset X$ un sous-ensemble ouvert propre de X . Alors il existe une série finie d'éclatements $\tau : \tilde{X} \rightarrow X$ qui est un isomorphisme au-dessus de U , et telle que le complémentaire de $\tau^{-1}(U)$ dans \tilde{X} est un diviseur à croisements normaux.*

La variété \tilde{X} est elle aussi projective, comme il est démontré dans [BS58] par exemple. Précisons qu'il est illusoire d'espérer obtenir un diviseur exceptionnel réduit dans \tilde{X} , comme on le constate déjà avec l'exemple très simple suivant. Si X est une surface, et $D = X \setminus U$ est une courbe avec une singularité cuspidale (*i.e.* donnée localement par une équation du type $y^2 = x^3$), la série minimale d'éclatements permettant d'obtenir un diviseur à croisements normaux au-dessus de X fait apparaître des courbes exceptionnelles avec multiplicités. Ceci n'est cependant pas du tout gênant pour nous, puisque U est le complémentaire dans \tilde{X} du diviseur réduit associé à $\tau^*(D)$.

3.2.2 Complexe de de Rham logarithmique

On va maintenant utiliser le cadre que l'on vient d'introduire pour définir et étudier le complexe de de Rham logarithmique. On renvoie à [Voi02], chapitre 8, pour une présentation détaillée des résultats évoqués ici.

Soient X une variété complexe, et $D \subset X$ un diviseur réduit et à croisements normaux.

Définition 3.2.3 *Pour tout entier $k > 0$, on note $\Omega_X^k(\log D)$ le sous-faisceau du faisceau des formes différentielles méromorphes sur X et holomorphes sur $X \setminus D$, défini par la condition suivante : si α est une telle forme différentielle définie sur un ouvert $V \subset X$, $\alpha \in \Omega_X^k(\log D)(V)$ si et seulement si α et sa différentielle $d\alpha$ admettent un pôle d'ordre au plus 1 le long de chaque composante de D .*

Soit (z_1, \dots, z_n) un système local de coordonnées holomorphes sur X , dans lequel D est donné par l'équation $z_1 \cdots z_p = 0$. Une section α du faisceau $\Omega_X^k(\log D)$ sur cet ouvert de coordonnées s'écrit localement $\alpha = \beta/z_1 \cdots z_p$, où β est une k -forme holomorphe. On a donc

$$d\alpha = \frac{d\beta}{z_1 \cdots z_p} + \sum_{1 \leq i \leq p} \frac{\beta}{z_1 \cdots \widehat{z}_i \cdots z_p} \wedge \frac{-dz_i}{z_i^2},$$

et comme $d\alpha$ admet un pôle d'ordre au plus 1 le long de D , on en déduit que β s'écrit nécessairement $\sum_{I,J} \beta_{I,J} dz_I \wedge dz_J$, $I \subset \{1, \dots, p\}$ et $J \subset \{p+1, \dots, n\}$, où chaque fonction $\beta_{I,J}$ s'annule sur l'hypersurface d'équation $\prod_{i \in \{1, \dots, p\} \setminus I} z_i$. Ceci implique que sur cet ouvert V de coordonnées, $\Omega_X^k(\log D)$ est un faisceau de \mathcal{O}_V -modules libres, engendré par les

$$\frac{dz_I}{z_I} \wedge dz_J,$$

avec $I \subset \{1, \dots, p\}$, $J \subset \{p+1, \dots, n\}$ et $|I| + |J| = k$.

On vient de voir que les $\Omega_X^k(\log D)$ sont des faisceaux de \mathcal{O}_X -modules libres. La différentielle ∂ munit $(\Omega_X^\bullet(\log D), \partial)$ d'une structure de complexe de faisceaux sur X . Ce complexe est appelé le complexe de de Rham logarithmique.

L'objet qui nous intéresse est l'ouvert $U = X \setminus D$. On note $j : U \subset X$. On a naturellement un morphisme de complexes

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \rightarrow j^* \mathcal{A}_U^\bullet, \quad (3.5)$$

où \mathcal{A}_U^\bullet est le complexe de de Rham usuel sur U . Le résultat suivant est dû à Griffiths ([Gri69]) et Deligne ([Del71]). C'est essentiellement une conséquence du théorème des résidus.

Proposition 3.2.4 *Le morphisme $\Omega_X^\bullet(\log D) \rightarrow j^* \mathcal{A}_U^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.*

L'importance de ce résultat provient du corollaire suivant, qui explique pourquoi le complexe de de Rham logarithmique fournit autant d'information sur U .

Corollaire 3.2.5 *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{H}^k(U, \mathbf{C}) \cong \mathbf{H}^k(X, \Omega_X^\bullet(\log D)).$$

Dans notre travail sur l'hyperbolicité logarithmique, seule la géométrie du fibré $\Omega_X^1(\log D)$ interviendra. En fait, on a un isomorphisme canonique

$$K_X(D) \cong \det(\Omega_X^1(\log D)),$$

donné par le fait que $\Omega_X^1(\log D)$ est engendré sur \mathcal{O}_X par les formes $dz_1/z_1, \dots, dz_p/z_p, dz_{p+1}, \dots, dz_n$ (si $D \subset X$ est donné par l'équation $z_1 \cdots z_p = 0$). Cet isomorphisme généralise l'isomorphisme $K_X = \det \Omega_X^1$ dans le cas compact, et justifie donc le remplacement du fibré canonique par le fibré canonique logarithmique.

Chapitre 4

Introduction aux conjectures de Kobayashi et Lang

L'une des motivations essentielles du travail [Ded08], présenté dans cette partie de la thèse (*cf.* chapitre 6), est de démontrer pour les variétés de Calabi-Yau quasi-projectives la dégénérescence d'une variante de la pseudo-forme volume de Kobayashi Ψ_X , étendue aux paires logarithmiques. La pseudo-forme volume Ψ_X , définie par Kobayashi et Eisenman ([Kob76], [Eis70], *cf.* définition 4.1.17), fournit une forme volume intrinsèque pour les variétés à première classe de Chern $c_1(X)$ négative (qui possèdent en particulier une métrique de Kähler-Einstein), et devrait génériquement s'annuler sinon. Les variétés telles que Ψ_X soit génériquement non dégénérée sont dites hyperboliques (au sens de la mesure infinitésimale), en accord avec les résultats présentés au paragraphe 3.1.

L'objectif de ce chapitre est de donner une définition précise de cette pseudo-forme volume Ψ_X , d'étudier ses propriétés connues ou conjecturales, et d'établir les liens qu'elle entretient avec un certain nombre d'autres notions géométriques, algébriques ou arithmétiques. On verra également pourquoi il est crucial de démontrer l'annulation de Ψ_X dans le cas des variétés de Calabi-Yau pour démontrer la conjecture de Kobayashi, qui prédit que Ψ_X est génériquement dégénérée pour les variétés qui ne sont pas de type général (*cf.* définition 4.0.6 ci-dessous).

En fait, on va présenter deux notions d'hyperbolicité, cousines l'une de l'autre et toutes les deux issues des travaux de Kobayashi. En première approximation, on peut dire que l'une caractérise le fait qu'il n'existe aucune courbe entière (holomorphe) $\mathbf{C} \rightarrow X$ non constante, et l'autre le fait qu'il n'existe aucune application holomorphe $\mathbf{C} \times \mathbf{D}^{n-1} \rightarrow X$ génériquement de rang maximal. On s'attachera en particulier à rendre explicite les points communs et les différences de ces deux notions d'hyperbolicité.

Une observation frappante concernant ces deux notions d'hyperbolicité est le fait que ces notions, bien qu'*a priori* relevant de l'analyse complexe, entretiennent des liens étroits avec certaines propriétés algébriques. On verra ainsi qu'il existe plusieurs façons conjecturales de caractériser l'hyperbolicité par des méthodes entièrement algébriques. On expliquera également les liens conjecturés par Lang ([Lan86]) entre l'hyperbolicité et l'existence d'applications rationnelles depuis des familles de variétés abéliennes sur la variété étudiée. Dans une direction plus arithmétique, on présentera la notion de densité potentielle, conjecturalement très attachée à l'une des deux notions d'hyperbolicité. Une variété X définie sur un corps de nombres k a des points rationnels potentiellement dense s'il existe une extension finie de corps k'/k telle que les points k' -rationnels de X soient denses dans X pour la topologie de Zariski.

Un des points importants de ce chapitre consiste à déterminer de quelle manière les propriétés

géométriques d'une variété déterminent ses propriétés d'hyperbolicité (et de densité potentielle). Dans le cas des courbes, la situation est claire. Le théorème d'uniformisation 3.1.1 permet de distinguer trois grandes familles parmi les surfaces de Riemann, qui sont caractérisées dans le cas compact par le signe du degré du fibré canonique (*cf.* paragraphe 3.1.1). L'appartenance d'une surface de Riemann à l'une ou l'autre de ces familles lui impose ses propriétés d'hyperbolicité et de densité potentielle. En dimension supérieure, la situation devient forcément plus complexe, puisque le signe du fibré canonique n'est en général pas bien défini. Il y a le plus souvent des directions dans lesquelles il est positif, et d'autres dans lesquelles il est négatif, ou nul.

Il reste toutefois possible de distinguer certains types de géométrie pure, dont on peut deviner les liens avec l'hyperbolicité et la densité potentielle. En particulier, la notion de variété de type général joue un rôle prépondérant. Elle est définie au moyen de la dimension de Kodaira. Soit X une variété algébrique. Pour tout entier $k \geq 1$ tel que le fibré pluricanonique K_X^k possède des sections, il existe une application rationnelle $\Theta_k : X \dashrightarrow \mathbf{P}(\mathbf{H}^0(X, K_X^k))$. La dimension de Kodaira de X est définie comme le maximum $\kappa(X)$ des dimensions des images des Θ_k . Elle vaut $-\infty$ si aucun des fibrés pluricanoniques ne possède de section. On a alors la définition suivante.

Définition 4.0.6 *Une variété algébrique X est dite de type général si sa dimension de Kodaira est maximale, c'est-à-dire si $\kappa(X) = \dim X$.*

Avant de commencer, signalons qu'une certaine partie des comportements décrits ici est conjecturale (le travail présenté dans cette partie de la thèse consiste d'ailleurs précisément à étudier l'une de ces conjectures).

4.1 Aspect analytique

4.1.1 Hyperbolicité au sens de Kobayashi

On commence par présenter l'hyperbolicité au sens de Kobayashi, qui met en jeu la pseudo-métrique de Kobayashi k_X . On va voir de quelle manière l'annulation de cette pseudo-métrique sur une variété X est liée à l'existence de courbes entières sur X .

La notion d'hyperbolicité induite par k_X (parfois appelée hyperbolicité-distance, par opposition à l'hyperbolicité-volume étudiée au paragraphe 4.1.2 suivant) n'est pas celle à laquelle le travail [Ded08] est consacré (*cf.* chapitre 6). Son étude permet néanmoins de dégager les principales notions utiles à l'étude de l'hyperbolicité volume, dans un contexte technique un peu plus simple d'un certain point de vue. Il semble également utile d'introduire cette notion pour dégager les particularités de la notion d'hyperbolicité-volume à laquelle nous nous intéresserons principalement par la suite.

Définition et premières propriétés

Soit X une variété complexe de dimension n . On commence par définir la pseudo-métrique de Kobayashi (*cf.* [Kob76], [Kob05]).

Définition 4.1.1 *La pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden est définie pour tout $x \in X$ et tout $\zeta \in T_{X,x}$ par la pseudo-norme hermitienne associée*

$$k_X(\zeta) = \inf\{\lambda > 0 \text{ t.q. } \exists f : \mathbf{D} \rightarrow X \text{ avec } f(0) = x \text{ et } \lambda f'(0) = \zeta\},$$

où f parcourt l'ensemble des applications holomorphes entre \mathbf{D} et X .

On dit que X est hyperbolique au sens de Kobayashi si cette pseudo-métrique est partout non dégénérée, autrement dit si c'est une métrique sur X .

L'expression de la pseudo-métrie de Kobayashi-Royden des courbes est instructive quant à son comportement général.

Exemple 4.1.2 Si $X = \mathbf{C}$ ou $X = \mathbf{P}^1$, alors k_X est identiquement nulle. Ceci est dû au fait que chaque point de X possède un voisinage isomorphe à un disque de rayon arbitrairement grand.

Il suffit de montrer ce résultat pour $0 \in \mathbf{C}$. On dispose pour tout $R > 0$ de l'application holomorphe

$$f_R : x \in \mathbf{D} \mapsto R \cdot x \in \mathbf{C}.$$

On a alors $f'_R(0) = R \cdot f'_1(0)$, et on voit en faisant tendre R vers ∞ que $k_{\mathbf{C}}(f'_1(0)) = 0$, ce qui implique l'annulation de $k_{\mathbf{C}}$ en 0 comme on voulait.

Exemple 4.1.3 Si $X = \mathbf{D}$, alors k_X est égale à la norme hermitienne associée à la métrique de Poincaré (cf. définition 3.1.3). C'est une conséquence d'un résultat classique de Schwarz, qui dit que pour toute application holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ telle que $f(0) = 0$, on a $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbf{D}$.

Soit $z_0 \in \mathbf{D}$, et considérons une application holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ telle que $f(0) = z_0$. Par transitivité du groupe des automorphismes de \mathbf{D} , il existe une homographie $h \in \text{Aut}(\mathbf{D})$ telle que $h \circ f(0) = 0$. D'après le lemme de Schwarz, on a alors $|h \circ f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbf{D}$, ce qui implique $|(h \circ f)'(0)| \leq 1$, et donc $|f'(0)| \leq 1/|h'(z_0)|$.

La métrique de Poincaré est conservée par les biholomorphismes du disque, donc

$$|h'(z_0)|^2 dz \wedge d\bar{z} = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 - |z_0|^2)^2},$$

dont on déduit $|f'(0)| \leq 1 - |z_0|^2$. Cette inégalité étant valable pour toute application holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ envoyant 0 sur z_0 , on a donc

$$k_{X,z_0} \geq \frac{1}{1 - |z_0|^2}. \quad (4.1)$$

De plus, en choisissant une application f qui est une homographie, on a l'égalité $|f'(0)| = 1 - |z_0|^2$, ce qui prouve que l'inégalité (4.1) est en fait une égalité.

Notons au passage l'utilisation du lemme de Schwarz. On verra plus loin dans ce paragraphe une généralisation de ce résultat, due à Ahlfors, qui est un outil très important pour l'étude des questions d'hyperbolicité.

La propriété suivante de la pseudo-métrie de Kobayashi est immédiate d'après la définition, et constitue l'une de ses caractéristiques essentielles.

Proposition 4.1.4 Soit $\phi : X \rightarrow Y$ une application holomorphe. On a

$$\phi^* k_Y \leq k_X.$$

Courbes entières et hyperbolicité

On a déjà constaté, lorsqu'on a calculé la pseudo-métrie de Kobayashi pour \mathbf{C} et \mathbf{P}^1 , que l'existence de disques concentriques arbitrairement grands au voisinage d'un point entraîne l'annulation de d_X dans la direction de ces disques au point considéré.

On va maintenant formaliser cet argument, au moyen du processus de reparamétrisation de Brody. Une conséquence de ceci sera la caractérisation, au moins dans le cas compact, de l'hyperbolicité par la non existence de courbe entière.

Soient X une variété complexe lisse, munie d'une métrique hermitienne ω , et $f : \mathbf{D} \rightarrow X$ une application holomorphe. Pour tout $R > 0$, on note $\mathbf{D}_R \subset \mathbf{C}$ le disque de rayon R , centré en 0.

Lemme 4.1.5 (Brody) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rayon $R \geq (1 - \varepsilon)\|f'(0)\|_\omega$ et une homographie $\psi : \mathbf{D}_R \cong (1 - \varepsilon)\mathbf{D}$, tels que pour tout $t \in \mathbf{D}_R$ on ait*

$$\|(f \circ \psi)'(t)\|_\omega \leq \frac{1}{1 - \frac{|t|^2}{R^2}},$$

avec égalité quand $t = 0$.

Preuve. Le principe est le suivant. On commence par restreindre f à $\mathbf{D}_{1-\varepsilon}$ pour s'affranchir du comportement au bord qu'on ne contrôle pas. On peut alors trouver un maximum à la différentielle de f . On place ce maximum au centre du disque par l'action d'une homographie, et on obtient alors le résultat par conservation de la métrique de Poincaré par les homographies.

On considère l'application $f_\varepsilon : t \in \mathbf{D} \mapsto f((1 - \varepsilon) \cdot t) \in X$. Sa différentielle est l'application

$$\zeta \in T_{\mathbf{D},t} \mapsto (1 - \varepsilon)f'((1 - \varepsilon) \cdot t) \cdot \zeta \in T_{X,f((1 - \varepsilon) \cdot t)}.$$

On munit \mathbf{D} de la métrique de Poincaré, et X de la métrique ω . La norme de df_ε au point t , relativement à ces métriques est

$$(1 - \varepsilon)(1 - |t|^2)\|f'((1 - \varepsilon) \cdot t)\|_\omega.$$

On choisit un point $t_0 \in \mathbf{D}$ où cette norme est maximale. Ceci est possible, puisque f est définie sur le compact $\overline{\mathbf{D}}_\varepsilon \subset \mathbf{D}$.

On choisit alors $R > 0$ et $\psi : \mathbf{D}_R \cong \mathbf{D}_{1-\varepsilon}$ pour avoir à la fois $\psi(0) = (1 - \varepsilon) \cdot t_0$ et $\|(f \circ \psi)'(0)\|_\omega = 1$. Comme l'homographie

$$\tilde{\psi} : t \in \mathbf{D} \mapsto \frac{1}{1 - \varepsilon}\psi(Rt) \in \mathbf{D}$$

préserve la métrique de Poincaré, on a pour tout $t \in \mathbf{D}$

$$\frac{R}{1 - \varepsilon}|\psi'(Rt)| \frac{1}{1 - \frac{|\psi(Rt)|^2}{(1 - \varepsilon)^2}} = \frac{1}{1 - |t|^2}. \quad (4.2)$$

On a bien sûr $\|(f \circ \psi)'(0)\|_\omega = |\psi'(0)|\|f'((1 - \varepsilon) \cdot t_0)\|_\omega$, et on a choisi R et ψ pour avoir $\|(f \circ \psi)'(0)\|_\omega = 1$. Tenant compte de ceci, et du fait que $\psi(0) = (1 - \varepsilon) \cdot t_0$, l'égalité (4.2) s'écrit

$$R = \frac{1}{|\psi'(0)|}(1 - \varepsilon)(1 - |t_0|^2) = (1 - \varepsilon)(1 - |t_0|^2)\|f'((1 - \varepsilon)t_0)\|_\omega$$

en $t = 0$. On en déduit d'ores et déjà l'inégalité $R \geq (1 - \varepsilon)\|f'(0)\|_\omega$, puisque la différentielle df_ε est de norme maximale en t_0 . Ceci nous donne aussi pour tout t l'inégalité

$$\left(1 - \left|\frac{\psi(t)}{1 - \varepsilon}\right|^2\right)\|f'(\psi(t))\|_\omega \leq (1 - |t_0|^2)\|f'((1 - \varepsilon) \cdot t_0)\|_\omega = \frac{R}{1 - \varepsilon},$$

qui donne finalement

$$\|(f \circ \psi)'(t)\|_\omega \leq |\psi'(t)| \frac{R/(1 - \varepsilon)}{1 - \left|\frac{\psi(t)}{1 - \varepsilon}\right|^2} = \frac{1}{1 - \frac{|t|^2}{R^2}},$$

où la dernière égalité est donnée par (4.2). \square

Le lemme de reparamétrisation de Brody permet de construire, à partir d'une application holomorphe $f : \mathbf{D} \rightarrow X$, une application holomorphe $\mathbf{D}_R \rightarrow X$ avec R d'autant plus grand que la dérivée de f en 0 est grande.

Dans le cas où X est compacte, on dispose du théorème d'Ascoli, qui permet d'utiliser le lemme de reparamétrisation de la manière suivante. Soit (f_ν) une suite d'applications holomorphes $\mathbf{D} \rightarrow X$ telle que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f'_\nu(0)\|_\omega = \infty$. Alors quitte à extraire une sous-suite, il existe une suite de transformations homographiques $\psi_\nu : \mathbf{D}_{R_\nu} \cong \mathbf{D}_{1-1/\nu}$ telle que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} R_\nu = \infty$ et $(f_\nu \circ \psi_\nu)$ converge uniformément sur tout compact de \mathbf{C} vers une fonction holomorphe non constante $g : \mathbf{C} \rightarrow X$ satisfaisant à $\|g'(0)\|_\omega = 1$ et $\sup \|g'(t)\|_\omega \leq 1$. On obtient ainsi le critère d'hyperbolicité de Brody.

Corollaire 4.1.6 *Soit X une variété complexe compacte. La variété X est hyperbolique si et seulement s'il n'existe pas de courbe entière sur X , c'est-à-dire pas d'application holomorphe non constante $g : \mathbf{C} \rightarrow X$.*

Cette nouvelle version de l'hyperbolicité pour les variétés compactes permet en particulier de prouver que l'hyperbolicité est une propriété ouverte.

Proposition 4.1.7 *Soit $\mathcal{X} \rightarrow B$ une famille de variétés complexes compactes. L'ensemble des $t \in B$ tels que la fibre X_t soit hyperbolique est ouvert dans B pour la topologie usuelle.*

Preuve. On munit \mathcal{X} d'une métrique hermitienne ω . Soit (X_ν, t_ν) une suite de fibres non hyperboliques, avec $\lim_{\nu \rightarrow \infty} t_\nu = t_\infty$. D'après le critère d'hyperbolicité de Brody, il existe pour chaque ν une application holomorphe non constante $f_\nu : \mathbf{C} \rightarrow X_\nu$, telle que $\|f'_\nu(0)\|_\omega = 1$ et $\|f'_\nu\| \leq 1$. On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli. Il existe ainsi une sous-suite de (f_ν) qui converge uniformément vers une limite $f_\infty : \mathbf{C} \rightarrow X_\infty$, avec $\|f'_\infty\|_\omega = 1$. Ceci prouve que la fibre limite X_∞ n'est pas hyperbolique. \square

Hyperbolicité et courbure

On a déjà remarqué pour les courbes que la propriété d'hyperbolicité est liée aux propriétés de courbure du fibré tangent. On présente ici le lemme d'Ahlfors-Schwarz, qui permet dans une certaine mesure d'expliciter cette relation. Comme le lemme de Schwarz dont il est issu, ce résultat est un avatar du principe du maximum.

Avant de commencer, il est nécessaire de rappeler deux propriétés essentielles de la métrique de Poincaré κ sur le disque unité \mathbf{D} , qu'on a obtenues au paragraphe 3.1.2. Premièrement, il s'agit d'une métrique à courbure de Ricci négative, autrement dit $-i\partial\bar{\partial}\log(\kappa)$ est une forme de type $(1,1)$ définie négative. Deuxièmement, elle est solution de l'équation de Kähler-Einstein $-i\partial\bar{\partial}\log(\kappa) = -4\kappa$.

Proposition 4.1.8 (Ahlfors-Schwarz) *Soit ω la forme de Kähler d'une pseudo-métrique sur le disque unité \mathbf{D} . On suppose qu'elle satisfait aux deux conditions suivantes :*

- (a) $i\partial\bar{\partial}\log(\omega) > 0$;
- (b) $i\partial\bar{\partial}\log(\omega) \geq 4\omega$.

Alors on a l'inégalité entre formes de type $(1,1)$

$$\omega \leq \kappa. \tag{4.3}$$

Ce résultat est valable non seulement pour les pseudo-métriques C^∞ , mais aussi pour celles qu'on peut écrire $\omega = |h|^{1/r}\tilde{\omega}$, où h est une fonction holomorphe, r un entier positif, et $\tilde{\omega}$ une forme de type $(1, 1)$ positive et C^∞ . Dans ce cas, la courbure de Ricci de ω est simplement définie comme $i\partial\bar{\partial}\log(\tilde{\omega})$. On a besoin de cette petite amélioration technique pour les applications de ce résultat à l'hyperbolicité.

Preuve de la proposition 4.1.8. On commence par se restreindre à $\mathbf{D}_{1-\varepsilon}$ de la manière suivante. On a une homothétie $h_\varepsilon : \mathbf{D} \cong \mathbf{D}_{1-\varepsilon}$, et on définit $\omega_\varepsilon := h_\varepsilon^*(\omega|_{\mathbf{D}_{1-\varepsilon}})$. Il suffit de prouver l'inégalité (4.3) pour ω_ε , puisque ω_ε converge uniformément vers ω sur tout compact de \mathbf{D} quand ε tend vers 0.

On étudie alors le rapport $\omega_\varepsilon/\kappa$. Il définit une fonction f continue sur \mathbf{D} , qui s'annule sur le bord de \mathbf{D} (car ω_ε est bornée sur \mathbf{D} , grâce à la restriction qu'on a opérée), et le long du lieu singulier de ω_ε . On en déduit que f possède un maximum, et on appelle $x \in \mathbf{D}$ un point où ce maximum est atteint. Supposons par l'absurde avoir $f(x) > 1$. En x , on a alors l'inégalité $\omega_\varepsilon > \kappa$, ce qui compte tenu des hypothèses donne

$$i\partial\bar{\partial}\log(\omega_\varepsilon) - i\partial\bar{\partial}\log(\kappa) > 0.$$

Autrement dit, le laplacien $i\partial\bar{\partial}\log(f)$ est défini positif, ce qui implique d'après le principe du maximum pour les fonctions pluri-subharmoniques que f ne peut pas posséder de maximum en x . □

La première application de ce résultat à l'hyperbolicité est le théorème suivant. On rappelle qu'un fibré vectoriel E sur une variété complexe X est dit ample si le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(E^*)}(1)$ est ample sur $\mathbf{P}(E^*)$.

Théorème 4.1.9 *Soit X une variété complexe compacte lisse. Si le fibré Ω_X est ample, alors X est hyperbolique au sens de Kobayashi.*

Preuve. Comme Ω_X est ample, il existe une métrique hermitienne h à courbure négative sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T_X)}(-1)$. La métrique h vérifie donc $i\partial\bar{\partial}\log h > 0$.

Soit $f : \mathbf{D} \rightarrow X$ une application holomorphe non constante, et $\tilde{f} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{P}(T_X)$ son relèvement tangent. La métrique h fournit une métrique sur $\tilde{f}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T_X)}(-1)$, et donc (via l'application naturelle $T_{\mathbf{D}} \rightarrow \tilde{f}^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}(T_X)}(-1)$) une pseudo-métrique \tilde{f}^*h sur $T_{\mathbf{D}}$, possédant éventuellement des singularités du type décrit plus haut.

Comme X est compacte, on peut supposer (quitte à multiplier h par une constante) avoir pour tout $f : \mathbf{D} \rightarrow X$ non constante l'inégalité de formes de type $(1, 1)$

$$\tilde{f}^*i\partial\bar{\partial}\log h \geq 4\tilde{f}^*h.$$

On peut alors appliquer le lemme d'Ahlfors-Schwarz. On obtient l'inégalité $\tilde{f}^*h \leq \kappa$, qui donne exactement la borne inférieure

$$k_X \geq |\cdot|_h$$

pour la pseudo-métrique de Kobayashi. En particulier, k_X est partout strictement positive. □

Le résultat précédent n'est pas suffisant pour décrire les liens entre la courbure de X (i.e. le signe de $c_1(X)$) et ses propriétés d'hyperbolicité. En effet, les hypothèses du théorème 4.1.9 sont très fortes, et ne sont le plus souvent pas vérifiées par les variétés dont l'hyperbolicité est prédite par les conjectures que nous allons maintenant présenter (et prouvée pour un certain nombre d'entre elles).

Les variétés de Fano sont les variétés X projectives lisses telles que le fibré en droites anticanonique $-K_X$ est ample. Cette dernière condition est équivalente à $c_1(X) > 0$. Il a été démontré par Campana ([Cam92]), et Kollár, Miyaoka et Mori ([KMM92a]) que les variétés de Fano sont rationnellement connexes (voir aussi l'exposé [Deb97]). Cela signifie que pour tous points génériques x et y de X , il existe une courbe rationnelle reliant x à y . Ce résultat implique que pour toute variété de Fano X , la pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi est génériquement nulle (voir aussi paragraphe 4.4).

Pour les variétés à $c_1(X) = 0$, Kobayashi ([Kob76]) conjecture le résultat suivant.

Conjecture 4.1.10 *Soit X une variété projective à fibré canonique K_X trivial. Alors $d_X = 0$.*

Cette conjecture est bien évidemment vérifiée dans le cas des variétés abéliennes, puisque en tant que tore complexe, une telle variété X est toujours uniformisée par un espace affine (autrement dit, il existe un morphisme surjectif $\mathbf{C}^n \rightarrow X$, $n = \dim X$).

En dimension 2, la conjecture est également vérifiée pour les surfaces $K3$ algébriques, car sur ces surfaces, deux points sont toujours reliés par une chaîne de courbes elliptiques. Ce dernier fait est une conséquence de la régularité des variétés de Severi d'une surface $K3$, associée à l'existence de courbes rationnelles nodales (cf. partie I, théorème 1.3.8).

Il existe également des exemples de variétés X qui ne sont pas hyperkähleriennes, et pour lesquelles la conjecture est vérifiée. Il s'agit des variétés X que l'on peut réaliser comme un revêtement double $r : X \rightarrow \mathbf{P}^n$ ramifié au-dessus d'une hypersurface lisse de degré $2n + 2$. Ces variétés sont elles aussi balayées par des courbes elliptiques, que l'on obtient comme image inverse des droites $l \subset \mathbf{P}^n$ qui rencontrent le lieu de branchement Σ le long d'un 0-cycle de la forme $x + y + z + t + 2 \cdot \sum_{1 \leq i \leq n-1} x_i$. Cet exemple est dû à Claire Voisin ([Voi03]).

En ce qui concerne les variétés de type général, Kobayashi a conjecturé le résultat suivant.

Conjecture 4.1.11 *Soit $X \subset \mathbf{P}^n$ une hypersurface générale de degré $d \geq 2n + 1$. Alors X est hyperbolique au sens de Kobayashi.*

Green et Griffiths ([GG80]) conjecturent un résultat plus fin.

Conjecture 4.1.12 *Soit X une variété projective de type général. Alors la réunion des courbes entières dans X n'est pas Zariski dense.*

La conjecture précédente est motivée par une nouvelle manière d'employer le lemme d'Ahlfors-Schwarz, apparue dans [GG80], qui permet de démontrer dans certains cas les deux conjectures 4.1.11 et 4.1.12.

Nous allons maintenant expliquer très brièvement ces idées. On renvoie à [Dem97] pour une présentation détaillée. Soit X une variété complexe lisse. On considère pour tout entier $k \geq 0$ l'espace de jets $J_k(X)$, constitué des germes d'ordre k d'applications holomorphes $\mathbf{D} \rightarrow X$ en 0, c'est-à-dire des morphismes $\text{Spec}(\mathbf{C}[t]/(t^{k+1})) \rightarrow X$. On obtient une compactification $P_k(X)$ naturelle de $J_k(X)$ en quotientant l'espace des sections non nulles de $J_k(X)$ par l'action par changement d'échelle de \mathbf{C}^* (pour tout $\lambda \neq 0$, l'action de λ sur un k -jet est induite par $t \mapsto \lambda \cdot t$). On associe canoniquement à toute application holomorphe non constante $f : \mathbf{D} \rightarrow X$ un relèvement $f_k : \mathbf{D} \rightarrow P_k(X)$, qui à tout point t associe le k -jet de f en t .

L'idée de Green et Griffiths est d'appliquer le lemme d'Ahlfors-Schwarz à des métriques de k -jets plutôt qu'à des métriques hermitiennes sur X comme dans la preuve du théorème 4.1.9. Une pseudo-métrique de k -jets est par définition une pseudo-norme hermitienne sur le fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{P_k(X)}(-1)$. Une façon d'obtenir de telles pseudo-métriques de k -jets consiste à exploiter l'existence de différentielles de k -jets. Une différentielle de k -jets de degré m

est une section du fibré $\mathcal{O}_{P_k(X)}(m)$, où $P_k(X)$ est réalisé comme un fibré en espaces projectifs pondérés sur X . Ceci permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.1.13 (Green-Griffiths, [GG80]) *Soit L un fibré en droites ample sur X . On suppose qu'il existe une section non nulle*

$$\sigma \in H^0(P_k(X), \mathcal{O}_{P_k(X)}(m) \otimes \pi_k^* L^{-1}),$$

où $\pi_k : P_k(X) \rightarrow X$ est la projection naturelle. Alors pour toute application holomorphe non constante $f : \mathbf{C} \rightarrow X$, σ s'annule le long de l'image $f_k(\mathbf{C}) \subset P_k(X)$ du relèvement canonique de f .

Ce résultat tout à fait étonnant peut s'exprimer de la manière suivante. S'il existe une équation différentielle d'ordre k et de degré m , à valeurs dans un fibré L ample sur X , alors toute courbe entière est une solution de cette équation différentielle. Ces techniques sont précisées par Demailly dans [Dem97]. Il considère un espace de k -jets X_k qui est une compactification de l'espace des k -jets lisses et invariant par reparamétrisation, alors que Green et Griffiths considèrent seulement ceux qui sont invariants par changement d'échelle. Ceci permet d'obtenir le résultat suivant, en exhibant des différentielles de jets à valeurs dans un fibré ample, obtenues grâce à des estimations de dimension fournies par le théorème de Riemann-Roch.

Théorème 4.1.14 (Demailly-El Goul, [DEG00]) *Soit S une surface de degré d très générique dans \mathbf{P}^3 . Si $d \geq 21$, alors S est hyperbolique au sens de Kobayashi.*

Siu a ensuite obtenu une méthode de preuve pour le théorème suivant.

Théorème 4.1.15 (Siu, [Siu04]) *Pour tout entier $n > 0$, il existe une constante δ_n telle que toute hypersurface générique $X \subset \mathbf{P}^n$ de degré $d \geq \delta_n$ soit hyperbolique au sens de Kobayashi.*

Son approche se base sur l'article [Voi96a], dans lequel Claire Voisin donne un nouveau point de vue sur des résultats de Clemens ([Cle86]) et Ein ([Ein88]), qui lui permet de raffiner leurs résultats. On introduit pour tout $d > 0$ la famille universelle $\phi : \mathcal{X} \rightarrow U_d$ des hypersurfaces lisses de degré d dans \mathbf{P}^n . Il lui correspond une famille universelle d'espaces de $(n-1)$ -jets $\phi_{n-1} : \mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{X}) \rightarrow U_d$. On appelle toujours $\pi : \mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$ la projection naturelle. La démonstration de Siu se fonde alors sur l'existence de constantes c_n et c'_n , ne dépendant pas de d , telles que le fibré

$$(T_{\mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{X})} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{X})}(c_n) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(c'_n))|_{\mathcal{P}_{n-1}(\mathcal{X})}$$

est engendré par ses sections globales.

Le programme de Siu a été mené avec succès par Păun dans le cas $n = 2$ ([Pău08]), puis par Rousseau pour $n = 3$ ([Rou07]). Récemment, Merker ([Mer08]) a obtenu ces constantes pour n quelconque. Il obtient $c_n = \frac{n^2+5n}{2}$ (pour $n = 2$ ou 3 , son résultat coïncide avec les précédents). Ce programme a permis à Rousseau de prouver le résultat explicite suivant.

Théorème 4.1.16 (Rousseau, [Rou07]) *Soit X une hypersurface de degré d générique de \mathbf{P}^4 . Si $d \geq 593$, alors toute courbe entière $f : \mathbf{C} \rightarrow X$ est contenue dans une sous-variété propre $Z \subset X$.*

4.1.2 Hyperbolicité au sens de la mesure

On présente maintenant une généralisation due à Eisenman ([Eis70]) de la notion d'hyperbolicité étudiée au paragraphe précédent. On y perd la caractérisation de Brody en termes de courbes entières, mais on y gagne une relation plus claire avec la courbure : c'est le théorème de Griffiths-Kobayashi-Ochiai 4.1.24, cf. [Gri71] et [KO75].

La notion d'hyperbolicité présentée ici, dite hyperbolicité-volume, est induite par la pseudo-forme volume Ψ_X , dont l'étude constitue une motivation essentielle du travail [Ded08], présenté au chapitre 6 de cette thèse.

Définition et propriétés élémentaires

Soit X une variété complexe lisse de dimension n .

Définition 4.1.17 La pseudo-forme volume de Kobayashi-Eisenman Ψ_X est définie par sa pseudo-norme hermitienne associée sur $\bigwedge^n T_X$

$$\|\xi\|_{\Psi_{X,x}} = \inf \{ \lambda > 0 \text{ t.q. } \exists \phi : \mathbf{D}^n \rightarrow X \text{ avec } \phi(0) = x \text{ et } \lambda \cdot J_\phi(\partial/\partial t_1 \wedge \cdots \wedge \partial/\partial t_n) = \xi \}$$

pour tous $x \in X$ et $\xi \in \bigwedge^n T_{X,x}$, ϕ désignant une application holomorphe depuis le polydisque $\mathbf{D}^n \subset \mathbf{C}^n$.

On dit que X est hyperbolique au sens de la mesure infinitésimale si la pseudo-forme volume Ψ_X est partout non dégénérée.

Remarque 4.1.18 La pseudo-forme volume de Kobayashi-Eisenman est intimement liée à la forme volume de Poincaré

$$\kappa_n := \frac{i^n}{2^n} \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{(1 - |z_j|^2)^2}$$

sur le polydisque \mathbf{D}^n , induite par la métrique de Poincaré sur \mathbf{D} (cf. définition 3.1.3). En effet, le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\mathbf{D}^n)$ agit transitivement, et préserve la forme volume de Poincaré. Comme celle-ci coïncide avec la forme volume euclidienne standard en 0, on peut calculer Ψ_X à l'aide de l'expression

$$\Psi_{X,x} = \inf \{ (\phi_b^{-1})^* \kappa_n, \phi : \mathbf{D}^n \rightarrow X \text{ t.q. } \phi(b) = x \text{ et } \phi \text{ non ramifiée en } b \}, \quad (4.4)$$

où ϕ est une application holomorphe $\mathbf{D}^n \rightarrow X$, et ϕ_b^{-1} son inverse défini localement au voisinage de b , dont l'existence est assurée par l'hypothèse de non ramification en b .

La pseudo-forme volume de Kobayashi satisfait comme k_X à une propriété de décroissance des volumes immédiate, mais néanmoins fondamentale.

Proposition 4.1.19 Soit $\phi : X \rightarrow Y$ une application holomorphe. Alors on a l'inégalité de formes volumes sur X

$$\phi^* \Psi_Y \leq \Psi_X.$$

Il est intéressant de noter que la pseudo-forme volume de Kobayashi se comporte bien vis-à-vis des produits.

Proposition 4.1.20 Soient X et Y deux variétés complexes lisses. Il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que des dimensions n et m de X et Y respectivement, telle que

$$C \text{pr}_1^* \Psi_X \otimes \text{pr}_2^* \Psi_Y \leq \Psi_{X \times Y} \leq \text{pr}_1^* \Psi_X \otimes \text{pr}_2^* \Psi_Y.$$

Preuve. L'inégalité de droite est élémentaire, puisque tout couple d'applications holomorphes $\phi_1 : \mathbf{D}^n \rightarrow X$ et $\phi_2 : \mathbf{D}^m \rightarrow Y$ fournit une application holomorphe $(\phi_1, \phi_2) : \mathbf{D}^{n+m} \rightarrow X \times Y$, dont le déterminant jacobien est le produit tensoriel des déterminants jacobiens respectifs de ϕ_1 et ϕ_2 .

Pour obtenir l'inégalité de gauche, considérons une application holomorphe $\phi : \mathbf{D}^{n+m} \rightarrow X \times Y$. Pour toute partition $\{1, \dots, n+m\} = I \sqcup J$ en deux parties à n et m éléments respectivement, on obtient des applications holomorphes $\phi_I : \mathbf{D}^n \rightarrow X$ et $\phi_J : \mathbf{D}^m \rightarrow Y$ en se restreignant à $\{0\} \times \dots \times \mathbf{D} \times \dots$ (où les facteurs non nuls correspondent aux indices contenus dans I pour ϕ_I , et à ceux contenus dans J pour ϕ_J), puis en projetant sur X ou Y .

D'après les propriétés élémentaires du déterminant, il existe une famille de signes $\varepsilon_{I,J} \in \{\pm 1\}$ indiquée par toutes les partitions de $\{1, \dots, n+m\}$ en deux parties à n et m éléments, et telle que

$$\det J_\phi = \sum_{I,J} \varepsilon_{I,J} \det J_{\phi_I} \cdot \det J_{\phi_J}.$$

Ceci fournit l'inégalité

$$|\det J_\phi| \leq \sum_{I,J} |\det J_{\phi_I}| \cdot |\det J_{\phi_J}| \leq \binom{n}{p} \cdot \sup_{I,J} (|\det J_{\phi_I}| \cdot |\det J_{\phi_J}|),$$

qui prouve l'inégalité de gauche pour $C = 1/\binom{n}{p}$. □

Dans [Yau75], Yau introduit une variante de la pseudo-forme volume Ψ_X , qui présente l'avantage d'être un invariant birationnel.

Définition 4.1.21 *La pseudo-forme volume $\tilde{\Psi}_X$ est définie par sa pseudo-norme hermitienne associée sur $\bigwedge^n T_X$*

$$\|\xi\|_{\tilde{\Psi}_X, x} = \inf \{ \lambda > 0 \text{ t.q. } \exists \phi : \mathbf{D}^n \rightarrow X \text{ avec } \phi(0) = x \text{ et } \lambda \cdot J_\phi(\partial/\partial t_1 \wedge \dots \wedge \partial/\partial t_n) = \xi \}$$

pour tous $x \in X$ et $\xi \in \bigwedge^n T_{X,x}$, où ϕ est cette fois une application méromorphe $\mathbf{D}^n \dashrightarrow X$ définie au voisinage de 0.

Les liens entre $\tilde{\Psi}_X$ et Ψ_X ne sont pas très clairs, mis à part l'inégalité évidente $\tilde{\Psi}_X \leq \Psi_X$.

Liens avec la courbure

Il existe une version en dimension quelconque du lemme d'Ahlfors-Schwarz, qui permet de préciser les liens entre l'hyperbolicité au sens de la mesure infinitésimale et la courbure d'une variété.

On note

$$\omega_n := \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{(1 - |z_j|^2)^2}$$

la forme de Kähler de la métrique de Poincaré sur le polydisque \mathbf{D}^n . Elle permet de retrouver la forme volume de Poincaré par la formule $\kappa_n = \omega_n^n / n!$. Les calculs permettant d'établir l'équation de Kähler-Einstein (3.3) satisfaite par la métrique de Poincaré sur \mathbf{D} fournissent l'identité

$$-i\partial\bar{\partial} \log(\kappa_n) = -4\omega_n,$$

et donc l'équation

$$(i\partial\bar{\partial} \log(\kappa_n))^n = 4^n n! \kappa_n.$$

Le lemme d'Ahlfors-Schwarz en dimension quelconque s'énonce alors de la manière suivante.

Proposition 4.1.22 (Ahlfors-Schwarz) Soit μ une pseudo-forme volume sur le polydisque \mathbf{D}^n . On suppose qu'elle satisfait aux deux conditions suivantes :

(a) $i\partial\bar{\partial}\log(\mu) > 0$;

(b) $(i\partial\bar{\partial}\log(\mu))^n \geq 4^n n! \mu$.

Alors on a l'inégalité de formes volumes sur \mathbf{D}^n

$$\mu \leq \kappa_n.$$

Comme pour le lemme d'Ahlfors-Schwarz standard 4.1.8, on autorise certaines singularités sur la pseudo-forme volume μ . Le résultat est valable pour toutes les formes μ que l'on peut écrire $\mu = |h|^{1/r} \tilde{\mu}$, où $\tilde{\mu}$ est une pseudo-forme volume C^∞ sur \mathbf{D}^n , et h est une fonction holomorphe. La preuve du résultat ci-dessus est très semblable à celle de la proposition 4.1.8, et sera généralisée au paragraphe 6.4.1.

Ce résultat permet tout d'abord de prouver que la pseudo-forme volume de Kobayashi coïncide avec la forme volume de Poincaré sur les quotients du polydisque \mathbf{D}^n par un groupe agissant librement et proprement discontinûment.

Théorème 4.1.23 (Kobayashi) La pseudo-forme volume de Kobayashi $\Psi_{\mathbf{D}^n}$ est égale à la forme volume de Poincaré κ_n .

Preuve. En considérant l'identité $\mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}^n$, et en utilisant la formule (4.4), on obtient l'inégalité $\Psi_{\mathbf{D}^n} \leq \kappa_n$. D'autre part, pour toute application holomorphe $\phi : \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}^n$, la pseudo-forme volume $\phi^* \kappa_n$ satisfait aux hypothèses du lemme d'Ahlfors-Schwarz, donc on a

$$\phi^* \kappa_n \leq \kappa_n.$$

Toujours d'après la formule (4.4), ceci fournit l'inégalité $\kappa_n \leq \Psi_{\mathbf{D}^n}$. □

Une des applications centrales du lemme d'Ahlfors-Schwarz aux questions d'hyperbolicité au sens de la mesure est le résultat suivant, dû à Griffiths ([Gri71]), et à Kobayashi et Ochiai ([KO75]), qui fournit en un certain sens l'hyperbolicité au sens de la mesure des variétés de type général.

Théorème 4.1.24 (Griffiths, Kobayashi-Ochiai) Soit X une variété projective de type général. Alors la pseudo-forme volume de Kobayashi Ψ_X est génériquement non dégénérée.

Preuve. Comme le fibré canonique K_X est gros (ou *big*, ce qui signifie que la dimension d'Iitaka-Kodaira $\kappa(X, K_X)$ est maximale, égale à $\dim X$), il existe un fibré en droites ample L sur X , et une inclusion de fibrés inversibles $L \subset K_X^{\otimes \alpha}$ pour un entier α suffisamment grand et suffisamment divisible. Cette inclusion fournit une section non nulle du fibré $K_X^{\otimes \alpha} \otimes L^{-1}$. On note $Z \subset X$ le diviseur de ses zéros.

Comme L est ample, on peut le munir d'une métrique hermitienne h , telle que la forme de Chern associée

$$\omega_{L,h} = -\frac{i}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log h$$

soit définie positive. On réalise alors $h^{-1/\alpha}$ comme une pseudo-forme volume μ sur X , avec des singularités admissibles pour le lemme d'Ahlfors-Schwarz 4.1.22, et satisfaisant de plus à la condition (a) d'après la positivité de $\omega_{L,h}$. Elle s'annule le long de Z .

Comme X est compacte, on peut supposer que la condition (b) est elle aussi satisfaite, quitte à multiplier h par une constante non nulle. Alors, d'après la proposition 4.1.22, on a pour toute application holomorphe $\phi : \mathbf{D}^n \rightarrow X$ l'inégalité de formes volumes sur \mathbf{D}^n

$$\phi^* \mu \leq \kappa_n.$$

En utilisant la formule (4.4), ceci donne l'inégalité $\mu \leq \Psi_X$. Comme μ s'annule seulement le long du diviseur Z , ceci conclut la preuve. \square

Remarque 4.1.25 La preuve précédente fonctionne encore dans le cas de la pseudo-forme volume Ψ_X de Kobayashi-Yau (cf. définition 4.1.21). Il existe donc un analogue au théorème de Griffiths-Kobayashi-Ochiai pour $\tilde{\Psi}_X$, démontré dans l'article [Yau75].

Une conséquence fameuse du théorème de Griffiths-Kobayashi-Ochiai est le fait que le degré des morphismes dominant une variété de type général donnée est borné supérieurement.

Corollaire 4.1.26 *Soient X et Y deux variétés projectives de même dimension. On suppose que Y est de type général. Alors pour tout morphisme dominant $\phi : X \rightarrow Y$, on a*

$$\deg \phi \leq \frac{\int_X \Psi_X}{\int_Y \Psi_Y}.$$

Preuve. En intégrant l'inégalité de décroissance des volumes $\phi^* \Psi_Y \leq \Psi_X$, on obtient

$$\deg \phi \cdot \int_Y \Psi_Y \leq \int_X \Psi_X.$$

On conclut grâce au fait que $\int_Y \Psi_Y > 0$ d'après le théorème 4.1.24. \square

On conclut ce paragraphe en présentant la réciproque conjecturale du théorème de Griffiths-Kobayashi-Ochiai, et quelques arguments en sa faveur.

Conjecture 4.1.27 (Kobayashi) *Soit X une variété complexe projective lisse. Si X n'est pas de type général, alors $\Psi_X = 0$ sur un ouvert dense de X pour la topologie de Zariski.*

On peut bien sûr affaiblir cette conjecture, en prédisant seulement l'annulation de $\tilde{\Psi}_X$ sur un ouvert dense de X .

Dans la direction de cette conjecture, Green et Griffiths ([GG80]) obtiennent le résultat suivant.

Lemme 4.1.28 *Si X est uniréglée, ou bien si X est rationnellement balayée par des courbes elliptiques, alors X satisfait à la conjecture de Kobayashi 4.1.27.*

On dit qu'une variété X est uniréglée s'il existe une application rationnelle dominante $\phi : Y \times \mathbf{P}^1 \dashrightarrow X$, avec $\dim Y = \dim X - 1$. De la même manière, on dit que X est rationnellement balayée par des courbes elliptiques s'il existe une application rationnelle dominante $\phi : \mathcal{E} \dashrightarrow X$, où \mathcal{E} est de dimension $\dim X$ et possède une fibration $\pi : \mathcal{E} \rightarrow Y$ au-dessus d'une variété quasi-projective lisse, dont les fibres sont des courbes elliptiques lisses.

Preuve du lemme 4.1.28. Dans les deux cas, le lieu d'indétermination de ϕ est de codimension au moins 2, donc ne rencontre pas la fibre générique de pr_1 (dans le premier cas), ou de π (dans le second cas), et il existe un ouvert $U \subset Y$ Zariski-dense au-dessus duquel ϕ est définie. On appelle ϕ_U le morphisme correspondant. On obtient alors l'inégalité

$$\phi_U^* \Psi_X \leq \Psi_{U \times \mathbf{P}^1} \quad (\text{ou } \phi_U^* \Psi_X \leq \Psi_{\mathcal{E}_U}) \quad (4.5)$$

par la propriété de décroissance des volumes. D'autre part, la proposition 4.1.20 implique que $\Psi_{U \times \mathbf{P}^1}$ et $\Psi_{\mathcal{E}_U}$ sont toutes les deux nulles. Dans les deux cas, on déduit de (4.5) l'annulation de $\phi_U^* \Psi_X$. Donc Ψ_X est nulle en dehors du lieu de branchement de ϕ .

□

En particulier, ce résultat implique que les variétés de Fano (*i.e.* les variétés projectives lisses, telles que le fibré anticanonique $-K_X$ est ample) satisfont à la conjecture de Kobayashi 4.1.27, puisqu'elles sont toutes rationnellement connexes, et donc uniréglées.

D'autre part, il démontre complètement la conjecture de Kobayashi 4.1.27 en dimension 2, grâce à la classification des surfaces, et au fait que les surfaces $K3$ algébriques sont balayées par des courbes elliptiques.

Pour la conjecture concernant l'annulation de $\tilde{\Psi}_X$, on obtient de la même façon le résultat suivant, plus souple que le lemme 4.1.28.

Lemme 4.1.29 *S'il existe une famille $\pi : \mathcal{A} \rightarrow Y$ de variétés abéliennes lisses, et une application rationnelle dominante $\phi : \mathcal{A} \dashrightarrow X$, non constante le long de la fibre générique de π , alors $\tilde{\Psi}_X = 0$ sur un ouvert dense de X .*

On verra plus loin au chapitre 5 une manière de prouver l'annulation de $\tilde{\Psi}_X$ quand X est une variété à fibré canonique trivial, munie d'un endomorphisme rationnel $\phi : X \dashrightarrow X$ de degré $d > 1$. On y expliquera également comment Claire Voisin ([Voi04b]), après avoir défini une variante Φ_X de la pseudo-forme volume de Kobayashi, utilisant un certain type de correspondances à la place des applications holomorphes, adapte cette technique, ce qui lui permet de prouver l'annulation de Φ_X pour beaucoup de variétés de Calabi-Yau.

On va étudier au paragraphe suivant le rôle joué par les correspondances dans les questions d'hyperbolicité.

4.2 Aspect algébrique

Dans ce paragraphe, on essaie de faire le lien entre des propriétés algébriques des variétés et les différentes notions d'hyperbolicité introduites au paragraphe précédent, *a priori* plutôt d'un caractère analytique.

Dans un premier temps, on présente un résultat de Demailly, Lempert et Shiffman ([DLS94]), qui permet le calcul de la pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi k_X en n'utilisant que des courbes algébriques. Le théorème présenté est un résultat d'approximation des applications holomorphes par des correspondances. Il justifie ainsi la pertinence de la nouvelle pseudo-forme volume définie par Claire Voisin, présentée au chapitre 5, pour laquelle les applications holomorphes sont remplacées par des correspondances. Cette nouvelle définition est l'un des points de départ de l'article [Ded08], présenté au chapitre 6.

Revenant à l'hyperbolicité-distance, on présente une version algébrique de cette notion, introduite par Demailly, plus faible que l'hyperbolicité au sens de Kobayashi, mais qui lui est conjecturalement équivalente dans le cas projectif.

Enfin, on explique des conjectures dues à Lang, qui proposent une explication d'un caractère algébrique pour l'annulation de la pseudo-forme volume (ou de la pseudo-métrique) de Kobayashi. Ces conjectures sont remarquables, puisque elles fournissent une interprétation purement algébrique d'un phénomène d'analyse complexe.

4.2.1 Approximations par des applications algébriques

Définition 4.2.1 *Soient Y et Z deux variétés algébriques quasi-projectives complexes, réduites et irréductibles. Une application holomorphe $f : \Omega \rightarrow Z$, définie sur un ouvert $\Omega \subset Y$, est dite algébrique au sens de Nash si son graphe $\Gamma_f \subset Y \times Z$ est contenu dans une sous-variété algébrique $G \subset Y \times Z$ de la même dimension que Y .*

Dans la définition précédente, la sous-variété algébrique $G \subset Y \times Z$ doit être vue comme une correspondance entre Y et Z (cf. paragraphe 5.2). Ainsi, une application algébrique au sens de Nash est une application qui s'obtient à partir d'une correspondance, en se restreignant à un ouvert sur lequel elle induit un morphisme. L'exemple suivant fournit un prototype d'application algébrique au sens de Nash.

Exemple 4.2.2 Pour tout entier $n > 0$, l'application $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ définie sur un ouvert de \mathbf{C} est algébrique au sens de Nash, puisque son graphe est un ouvert de la correspondance

$$G := \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \text{ t.q. } x^n = y\} \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}.$$

L'énoncé complet du théorème d'approximation de Demailly-Lempert-Shiffman nécessite la notion d'ouvert de Runge.

On commence par rappeler qu'une variété complexe X est dite de Stein si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

- (i) X est holomorphiquement séparable : pour tous points x et $y \in X$, $x \neq y$, il existe une fonction holomorphe f définie sur X telle que $f(x) \neq f(y)$;
- (ii) X est holomorphiquement convexe : pour tout compact $K \subset X$, l'enveloppe convexe de K

$$\bar{K} := \{z \in X \text{ t.q. } \forall f \in H^0(X, \mathcal{O}_X), |f(z)| \leq \sup_K |f|\}$$

est compacte.

Les variétés de Stein sont les analogues en géométrie analytique des ouverts affines en géométrie algébrique. On dispose des théorèmes A et B de Cartan pour les variétés de Stein, dont les théorèmes A et B de Serre sont les analogues concernant les variétés affines. Pour toute variété de Stein S de dimension n , le théorème de plongement de Bishop-Narasimhan assure qu'on peut réaliser S comme une sous-variété fermée de \mathbf{C}^{2n+1} .

Ceci étant dit, on dit qu'un ouvert $\Omega \subset Y$ dans une variété de Stein est un domaine de Runge si c'est lui même une variété de Stein, et si l'application de restriction $H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^0(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ a une image dense. Ces conditions sont équivalentes au fait que pour tout compact $K \subset \Omega$, l'enveloppe holomorphe de K dans Y soit contenue dans Ω .

Le théorème d'approximation établi dans [DLS94] est le suivant.

Théorème 4.2.3 (Demailly-Lempert-Shiffman) *Soit Ω un domaine de Runge dans une variété algébrique affine S , et $f : \Omega \rightarrow X$ une application holomorphe à valeurs dans une variété algébrique quasi-projective lisse. Pour tout domaine relativement compact $\Omega_0 \subset \Omega$, il existe une suite d'applications $f_\nu : \Omega_0 \rightarrow X$ qui sont algébriques au sens de Nash, et qui convergent vers f uniformément dans Ω_0 .*

Si de plus il existe une sous-variété algébrique $A \subset S$ (non nécessairement réduite), et un morphisme algébrique $\alpha : A \rightarrow X$ tel que $f|_{A \cap \Omega} = \alpha|_{A \cap \Omega}$, alors il existe une suite (f_ν) comme ci-dessus dont tous les termes satisfont à $f_\nu|_{A \cap \Omega_0} = \alpha|_{A \cap \Omega_0}$.

Idée de la preuve. La preuve de ce théorème repose sur un résultat classique d'existence de rétractions holomorphes pour les sous-variétés de Stein d'une variété complexe : si $M \subset Y$ est une sous-variété de Stein, alors il existe une rétraction holomorphe $\rho : V \rightarrow M$, où V est un voisinage de M dans Y , isomorphe à un voisinage de la section nulle dans le fibré normal $N_{M/Y}$. Si de plus Y est algébrique affine, et si $M \subset Y$ est une sous-variété algébrique fermée, alors on peut supposer que ρ est algébrique au sens de Nash.

Dans le cas où X est une variété algébrique affine dans \mathbf{C}^n , on obtient l'approximation voulue en approchant f par des polynômes $g : \Omega_0 \rightarrow \mathbf{C}^n$, puis en composant avec une rétraction sur X algébrique au sens de Nash. On renvoie à [DLS94] pour le cas général.

□

Bien entendu, si l'on dispose d'une suite couvrante (Ω_ν) d'ouverts relativement compacts dans Ω , le théorème précédent permet de fabriquer *via* le processus diagonal de Cantor une suite d'applications algébriques au sens de Nash convergeant vers f uniformément sur tout compact de Ω .

Le théorème d'approximation permet de prouver qu'il suffit de considérer les courbes algébriques sur une variété pour calculer sa pseudo-métrique de Kobayashi.

Corollaire 4.2.4 *Soit X une variété complexe lisse, $x \in X$ et $u \in T_{X,x}$. On a*

$$k_X(u) = \inf_{\phi: C \rightarrow X, \phi_*v=u} |v|_C,$$

où C est une courbe projective lisse, $\phi: C \rightarrow X$ est un morphisme, v est un vecteur tangent à C tel que $\phi_*v = u$, et $|\cdot|_C$ est la norme hermitienne associée à la métrique de Poincaré sur C (avec la convention $|\cdot|_C = 0$ si $g(C) \leq 1$).

Comme le disque unité peut se réaliser comme un ouvert de la sphère de Riemann \mathbf{P}^1 , une application holomorphe $\phi: \mathbf{D} \rightarrow X$ est algébrique au sens de Nash s'il existe une courbe algébrique C , et une correspondance algébrique

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & X \\ r \downarrow & & \\ \mathbf{P}^1 & & \end{array} \quad (4.6)$$

telle que $r^{-1}(\mathbf{D})$ possède une composante isomorphe à \mathbf{D} , sur laquelle la restriction de f donne précisément ϕ .

Le théorème d'approximation 4.2.3 dit alors que toute application holomorphe $\phi: \mathbf{D} \rightarrow X$ peut-être approximée en ce sens par un morphisme $f: C \rightarrow X$, tel que $f(0) = \phi(0)$, et tel que les différentielles f_* et ϕ_* en 0 sont proportionnelles (0 est le point correspondant à 0 $\in \mathbf{D}$ dans la composante de $r^{-1}(\mathbf{D})$ qui est isomorphe au graphe de ϕ).

Preuve du corollaire 4.2.4. L'inégalité \leq est une conséquence directe de la propriété de décroissance des distances (proposition 4.1.4), et du fait que la pseudo-métrique de Kobayashi sur les courbes est exactement la métrique de Poincaré (exemples 4.1.2 et 4.1.3).

Pour l'autre inégalité, considérons $x \in X$, $u \in T_{X,x}$, et une application holomorphe $\phi: \mathbf{D} \rightarrow X$ telle que $\phi(0) = x$ et $\lambda \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = u$, $\lambda > 0$. On considère une approximation de ϕ par une application algébrique au sens de Nash, dont la différentielle en 0 est proportionnelle à celle de ϕ , que l'on note comme dans le diagramme (4.6). On identifie *via* r le disque \mathbf{D} et la composante de $r^{-1}(\mathbf{D})$ qui est isomorphe au graphe de ϕ , et on note encore $f: \mathbf{D} \rightarrow X$ la restriction de f . Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\lambda + \varepsilon)f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = u$, et on peut supposer ε arbitrairement petit. D'après le lemme d'Ahlfors-Schwarz 4.1.8, on a l'inégalité entre les normes de Poincaré

$$|\cdot|_{C|\mathbf{D}} \leq |\cdot|_{\mathbf{D}}.$$

On en déduit $|\frac{\partial}{\partial t}|_C \leq 1$, et donc, notant $v = (\lambda + \varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}$,

$$|v|_C \leq \lambda + \varepsilon.$$

Ceci prouve que $\inf |v|_C \leq k_X(u)$, puisque $k_X(u)$ est par définition la borne inférieure des λ .

□

4.2.2 Hyperbolicité algébrique

On étudie maintenant une manière un peu différente d'envisager les aspects algébriques de la notion d'hyperbolicité. On va cette fois remplacer l'hyperbolicité au sens de Kobayashi par une notion voisine, *a priori* plus faible, introduite par Demailly dans son texte [Dem97]. L'observation fondamentale de Demailly est le résultat suivant, qui est une conséquence de la formule de Gauss-Bonnet.

Théorème 4.2.5 (Demailly) *Soit X une variété complexe compacte, munie d'une métrique hermitienne dont la forme $(1, 1)$ associée est ω . Si X est hyperbolique au sens de Kobayashi, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute courbe projective lisse C , et tout morphisme $\phi : C \rightarrow X$, on ait*

$$-\chi(C) = 2g(C) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C),$$

où $\deg_\omega(C) := \int_C \phi^* \omega$.

Preuve. Comme X est hyperbolique, il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que $k_X(\zeta) \geq \varepsilon_0 |\zeta|_\omega$ pour tout vecteur tangent $\zeta \in T_X$. Soit C une courbe projective lisse, et $\phi : C \rightarrow X$ un morphisme non constant. La courbe C ne peut être ni rationnelle ni elliptique puisque X est hyperbolique, donc elle est munie d'une métrique de Poincaré. La pseudo-métrique de Kobayashi k_C de C est égale à cette métrique de Poincaré. On note κ_C la forme volume associée sur C . La formule de Gauss-Bonnet dit que l'intégrale de la courbure de κ_C vaut $2\pi\chi(C)$. Or la métrique de Poincaré est à courbure de Gauss constante égale à -4 , puisque $-i\partial\bar{\partial} \log(\kappa) = -4\kappa$ pour la métrique de Poincaré sur le disque unité d'après (3.3). On obtient donc

$$\int_C \kappa_C = -\frac{1}{4} \int_C \text{courb}(k_C) = -\frac{\pi}{2} \chi(C). \quad (4.7)$$

D'autre part, la propriété de décroissance des distances 4.1.4 donne pour tout $\zeta \in T_C$ l'inégalité

$$k_C(\zeta) \geq k_X(\phi_* \zeta) \geq \varepsilon_0 |\phi_* \zeta|_\omega,$$

qui entraîne

$$\int_C \kappa_C \geq \varepsilon_0^2 \int_C \phi^* \omega,$$

ce qui donne l'inégalité voulue pour $\varepsilon = 2\varepsilon_0^2/\pi$ compte tenu de la formule (4.7). □

Ceci conduit à la définition suivante de l'hyperbolicité algébrique. Soit X une variété complexe compacte.

Définition 4.2.6 *On dit que X est algébriquement hyperbolique si pour toute métrique hermitienne h sur X , de forme $(1, 1)$ associée ω , il existe une constante ε telle que pour tout morphisme non constant $\phi : C \rightarrow X$ depuis une courbe projective lisse de genre g , on ait*

$$2g - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C).$$

Comme X est compacte, il est suffisant de prouver cette propriété pour une seule métrique hermitienne h .

Remarque 4.2.7 Cette définition prend un sens convenable seulement dans le cas des variétés projectives. En effet, un tore complexe général ne contient aucune courbe algébrique, et est donc algébriquement hyperbolique, alors que c'est l'exemple parfait d'une variété qui n'est pas hyperbolique au sens de Kobayashi.

Dans le cas algébrique, on choisit en général pour ω la forme de Chern associée à une métrique hermitienne sur un fibré ample sur X , de manière à retrouver le degré usuel des courbes sur X .

Le théorème 4.2.5 conduit Demailly à prédire le résultat suivant.

Conjecture 4.2.8 (Demailly) *Pour une variété projective lisse, l'hyperbolicité au sens de Kobayashi et l'hyperboïcité algébrique sont équivalentes.*

Remarque 4.2.9 En plus du théorème 4.2.5, Demailly prouve que si X est algébriquement hyperbolique, alors tous les morphismes $\phi : A \rightarrow X$ depuis une variété abélienne sont constants. Ce résultat va dans le sens des conjectures de Lang exposées au paragraphe suivant 4.2.3.

Pour finir, on va voir de quelle manière ces considérations s'étendent à la notion d'hyperbolicité au sens de la mesure infinitésimale. L'observation de départ est ici le résultat suivant ([Voi03]).

Proposition 4.2.10 (Voisin) *Soit X une variété de type général, et L un fibré en droites ample sur X . Alors il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour toute famille couvrante de courbes, c'est-à-dire pour tout diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\phi} & X, \\ \pi \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

où ϕ est un morphisme dominant, non constant sur les fibres de π , et π est un morphisme projectif dont la fibre générique est une courbe lisse C de genre g , on ait

$$2g - 2 \geq \varepsilon \deg(\phi_C^* L).$$

Preuve. Comme X est de type général, il existe un entier $r > 0$ tel que le fibré en droites $K_X^{\otimes r} \otimes L^{-1}$ soit effectif. On considère un tel r , et on choisit une section de ce fibré inversible, dont on note D le diviseur. Comme les courbes C de la famille $\pi : \mathcal{C} \rightarrow B$ couvrent X , elles ne restent dans aucune composante de D , donc on a

$$\deg(\phi_C^* D) \geq 0. \tag{4.8}$$

D'autre part, ϕ est dominant, donc génériquement de rang maximal, ce qui implique que le fibré normal $\phi_C^* T_X / T_C$ sur C soit engendré par ses sections globales. En particulier, ceci impose la condition

$$\deg(\phi_C^* T_X / T_C) \geq 0.$$

Cette inégalité s'écrit aussi $\deg(\phi_C^* K_X) \leq \deg K_C = 2g - 2$. L'inégalité (4.8) précédente donne alors

$$\deg(\phi_C^* L) \leq r \cdot \deg(\phi_C^* K_X) \leq r \cdot (2g - 2).$$

□

Ceci conduit naturellement à la définition suivante, introduite par Claire Voisin dans [Voi03].

Définition 4.2.11 *Une variété X , munie d'un fibré en droites ample L , est dite algébriquement hyperbolique au sens de la mesure s'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour toute famille couvrante $\phi : \mathcal{C} \rightarrow X$, dont la fibre générique est une courbe lisse C de genre g , on ait*

$$2g - 2 \geq \varepsilon \cdot \deg(\phi_C^* L).$$

4.2.3 Conjectures de Lang

On présente ici les conjectures de Lang ([Lan86]) concernant l'hyperbolicité. Elles proposent une forme algébrique des différentes conjectures de Kobayashi. Elles sont basées sur l'observation élémentaire suivante : soit Y une variété birationnelle à une variété abélienne, et $\phi : Y \rightarrow X$ une application holomorphe non constante dans une variété complexe lisse. Alors l'image de ϕ est balayée par des applications entières non constantes $\mathbf{C} \rightarrow Y \xrightarrow{\phi} X$. En particulier, la pseudo-forme volume de Kobayashi Ψ_X dégénère le long de l'image de ϕ .

Lang conjecture que la réciproque est vraie. En un certain sens, il prédit qu'il existe un critère d'hyperbolicité analogue à celui de Brody (proposition 4.1.6), où les applications rationnelles non constantes depuis les variétés abéliennes jouent le rôle des courbes entières non constantes.

Conjecture 4.2.12 (Lang, [Lan86]) *Soit X une variété projective complexe lisse. L'union des images de toutes les applications holomorphes non constantes $\mathbf{C} \rightarrow X$ est égale à la réunion des images des applications rationnelles non constantes $A \dashrightarrow X$, où A est une variété abélienne.*

Le théorème de Bloch (voir par exemple [GG80]) dit que cette conjecture est vraie si X est une sous-variété d'une variété abélienne.

D'autre part, il est clair que cette conjecture ne peut pas être étendue telle quelle aux variétés qui ne sont pas projectives, comme le prouve l'exemple des tores complexes généraux (cf. exemple 4.2.7). En fait, Cantat montre que même si on remplace les variétés abéliennes par des tores complexes, la conjecture ne s'étend toujours pas aux variétés non algébriques. Dans [Can00], il prouve en effet que les surfaces $K3$ non algébriques générales ne possèdent aucune application rationnelle non constante depuis un tore complexe sur elles-mêmes.

Lang conjecture un deuxième résultat, qui implique en particulier la conjecture de Kobayashi 4.1.27 sur l'annulation de la pseudo-forme volume de Kobayashi-Yau $\tilde{\Psi}_X$ sur un ouvert de Zariski dense.

Conjecture 4.2.13 (Lang, [Lan86]) *Soit X une variété complexe projective lisse. L'union des images de toutes les applications holomorphes non constantes $\mathbf{C} \rightarrow X$ est égale à X si et seulement si X n'est pas de type général.*

La synthèse de ces deux conjectures se résume de la manière suivante.

Corollaire 4.2.14 *Soit X une variété projective lisse qui n'est pas de type général. Alors X est couverte par les images des applications rationnelles non constantes $A \dashrightarrow X$ depuis une variété abélienne A .*

Remarque 4.2.15 En vertu du lemme 4.1.29, le résultat (conjectural) ci-dessus entraîne l'annulation de la pseudo-forme volume $\tilde{\Psi}_X$ sur un ouvert dense de X quand X n'est pas de type général. En effet, comme les familles paramétrant les variétés abéliennes munies d'une application rationnelle non constante vers X sont en nombre dénombrable, un argument du type Baire prouve l'existence d'une famille $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B$ de variétés abéliennes paramétrée par une variété quasi-projective, telle qu'il existe une application rationnelle dominante $\phi : \mathcal{A} \dashrightarrow X$ non constante sur les fibres de π .

Le résultat 4.2.14 entraîne également qu'une variété X qui n'est pas de type général n'est pas algébriquement hyperbolique au sens de la mesure (cf. définition 4.2.11). On donnera une preuve de ceci au chapitre 5, en utilisant les endomorphismes rationnels d'une fibration en variétés abélienne fournis par la multiplication le long des fibres.

A présent, suivant [Voi03], nous allons donner des exemples pour lesquels les conjectures de Lang sont vérifiées. Les premiers exemples sont relativement évidents.

Les variétés abéliennes, ou les variétés qui leurs sont birationnelles satisfont aux conjectures de Lang. D'autre part, comme chaque courbe elliptique E fournit un revêtement $E \rightarrow \mathbf{P}^1$, les variétés uniréglées (*i.e.* celles pour lesquelles il existe une application rationnelle dominante $Y \times \mathbf{P}^1 \dashrightarrow X$, $\dim Y = \dim X - 1$) satisfont également aux conjectures de Lang.

L'exemple des variétés uniréglées contient toutes les variétés de Fano, puisqu'on sait que ces variétés sont rationnellement connexes. Plus généralement, il est conjecturé et démontré en dimension 3 dans [Miy88] que toute variété projective lisse, satisfaisant à la condition d'annulation

$$\forall r > 0 \quad h^0(X, K_X^{\otimes r}) = 0 \quad (4.9)$$

est uniréglée (voir aussi [DPS01]).

D'autre part, si la condition d'annulation (4.9) n'est pas vérifiée, alors les systèmes pluricanoniques fournissent une fibration de X dont les fibres sont de dimension de Kodaira $\kappa = 0$, et de dimension > 0 exactement quand X n'est pas de type général. Cette fibration est la fibration d'Iitaka-Moishezon, fournie par les applications canoniques $\Theta_k : X \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, K_X^k))$ pour k suffisamment grand et suffisamment divisible (*cf.* [Uen75]).

Comme il est de plus conjecturé que les variétés dont la dimension de Kodaira est nulle sont birationnelles à des quotients de variétés singulières et à fibré canonique trivial (ceci est prouvé en dimension 3, *cf.* [Kaw92]), ce qui précède montre qu'il est suffisant de démontrer les conjectures de Lang pour les variétés à fibré canonique trivial pour les prouver complètement. Ce que l'on sait faire à ce sujet est résumé dans les exemples suivants.

Exemple 4.2.16 Les surfaces $K3$ algébriques satisfont aux conjectures de Lang, puisqu'elles sont balayées par des courbes elliptiques. Ce résultat a été obtenu dans la partie I, en étudiant les variétés de Severi des surfaces $K3$ (paragraphe 1.3.3), et en prouvant l'existence de courbes rationnelles nodales sur une surface $K3$ projective générique (théorème de Chen 1.4.2).

Exemple 4.2.17 (Voisin, [Voi03]) Les variétés de Calabi-Yau qui se réalisent comme des revêtements doubles $X \rightarrow \mathbf{P}^n$ ramifiés au-dessus d'une hypersurface Σ de degré $2n + 2$ sont elles aussi balayées par des courbes elliptiques. Ces courbes elliptiques sont obtenues comme les pré-images des droites dans \mathbf{P}^n qui sont tangentes à Σ en exactement $n - 1$ points. En effet, les pré-images des droites sont des courbes de genre arithmétique n d'après la formule de Riemann-Hürwitz, et les conditions de tangence imposent $n - 1$ nœuds à ces courbes, donc leurs normalisations sont des courbes elliptiques.

La famille des droites considérées est de codimension $n - 1$ dans la grassmannienne $\text{Gr}(2, n + 1)$ des droites de \mathbf{P}^n . Elle est donc de dimension $n - 1$. La théorie de l'intersection montre que ces droites balayent \mathbf{P}^n , et donc que les courbes elliptiques correspondantes balayent X .

Exemple 4.2.18 (Voisin, [Voi03]) Soit X la variété de Fano des droites d'une hypersurface cubique $V \subset \mathbf{P}^5$ (*cf.* exemple 1.2.7, partie I). Il s'agit d'une variété hyperkählerienne ([BD85]), donc son fibré canonique est trivial.

Cette variété est balayée par des surfaces qui sont birationnelles à des surfaces abéliennes. Pour toute section hyperplane $W \subset V$ (qui est donc une cubique dans \mathbf{P}^4), la surface de Fano X_W des droites contenues dans W est naturellement contenue dans X . Quand W possède un point double ordinaire y_0 , X_W est birationnelle au produit symétrique $\text{Sym}^2 C$ de la courbe C paramétrant les droites passant par x_0 . En effet, soit l une droite contenue dans W , ne passant pas par x_0 . Alors le plan P engendré par l et x_0 rencontre W le long d'une courbe cubique, singulière en x_0 et contenant la droite l . Cette intersection est donc la réunion de trois droites,

dont deux qui passent par x_0 . Clemens et Griffiths ([CG72b]) prouvent que C est l'intersection complète d'une cubique et d'une quadrique dans \mathbf{P}^3 . Ceci implique que C est de genre 4.

Si on impose deux points singuliers de plus à W , la courbe C acquiert deux nœuds, donc son genre géométrique n'est plus que 2. Alors X_W est birationnelle au produit symétrique second d'une courbe de genre 2, et donc à une surface abélienne. Les sections hyperplanes possédant 3 points singuliers non dégénérés forment une famille de dimension 2, et les surfaces de Fano correspondantes balaient X .

4.3 Aspect arithmétique

4.3.1 Densité potentielle

On définit ici la notion de densité potentielle, et on explique quelles sont les variétés que l'on sait jouir de cette propriété.

Définition 4.3.1 *Soit X une variété définie sur un corps k . On dit que les points k -rationnels de X sont denses si $X(k)$ n'est contenu dans aucun fermé de Zariski de X . On dit que les points rationnels de X sont potentiellement denses s'il existe une extension finie k'/k telle que les points k' -rationnels de X sont denses.*

Le plus souvent, k sera un corps de nombres, ou le corps de fonctions d'une courbe définie sur \mathbf{C} . On va maintenant donner un certain nombre d'exemples de variétés dont les points rationnels sont (ou ne sont pas) potentiellement denses.

Exemple 4.3.2 Les points \mathbf{Q} -rationnels des espaces projectifs \mathbf{P}^n sont denses.

L'exemple précédent implique que les points rationnels des variétés unirationnelles (*i.e.* les variétés X pour lesquelles il existe une application rationnelle dominante $\mathbf{P}^N \dashrightarrow X$) sont potentiellement denses.

Proposition 4.3.3 *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres k . Les points rationnels de A sont potentiellement denses.*

Idée de la preuve. Le principe de la preuve est de construire une extension k' sur laquelle est défini un point rationnel x , tel que l'ensemble $\mathbf{Z} \cdot x$ soit dense dans A .

Puisque k est un corps de nombres, le théorème de Mordell-Weil permet d'affirmer que $X(k)$ est un groupe abélien de type fini. L'autre ingrédient principal de la preuve est un résultat dû à Frey et Jarden, qui dit qu'il existe une extension finie k'/k telle que

$$\text{rg}(A(k)) < \text{rg}(A(k')).$$

Ceci prouve le résultat quand A est géométriquement simple (*i.e.* quand $A \otimes \bar{k}$ est simple). En effet, dans ce cas, le résultat précédent permet de considérer un point $x \in A(k')$ qui n'est pas de torsion. Alors, la clôture de Zariski de $\mathbf{Z} \cdot x$ contient une sous-variété abélienne de dimension > 0 de A . Par simplicité de A , ceci implique que $\overline{\mathbf{Z} \cdot x} = A$.

Le cas général se traite par récurrence sur le nombre de composantes simples de A . □

Remarque 4.3.4 Le cas d'une variété abélienne simple A de dimension > 1 peut aussi se démontrer en utilisant le théorème de Raynaud, qui dit qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de torsion sur une courbe $C \subset A$.

L'exemple 4.3.2 et la proposition 4.3.3 impliquent que les points rationnels d'une courbe projective lisse définie sur un corps de nombres sont potentiellement denses si le genre de la courbe est 0 ou 1.

La solution apportée par Faltings à la conjecture de Mordell prouve que ce comportement est antithétique de celui des courbes de genre $g \geq 2$.

Théorème 4.3.5 (Faltings) *Soit C une courbe projective lisse de genre $g \geq 2$, définie sur un corps de nombres k . Alors l'ensemble $C(k)$ des points k -rationnels de C est fini.*

Ainsi, le comportement des courbes vis-à-vis de la densité potentielle est entièrement compris, et ne dépend que du signe du fibré canonique. On va voir au paragraphe suivant quel est le comportement attendu en dimension supérieure.

4.3.2 Conjectures de Lang et Vojta

On présente ici des conjectures qui prédisent exactement quelles sont les variétés dont les points rationnels sont potentiellement denses.

Conjecture 4.3.6 (Lang, Bombieri) *Soit X une variété projective et de type général, définie sur un corps de nombres. Alors les points rationnels de X ne sont pas potentiellement denses.*

Notons que cette conjecture est en fait une version faible des résultats conjecturés par Vojta dans [Voj87]. Ceux-ci proposent une version quantitative de la dégénérescence des points rationnels, en utilisant la notion de hauteur.

En dimension 1, cette conjecture est démontrée par le théorème de Faltings 4.3.5, mais elle est encore largement ouverte en dimensions supérieures, y compris dans le cas des surfaces.

Dans [Lan86], Lang propose une caractérisation géométrique du lieu des points rationnels dans X . Si ses conjectures exposées au paragraphe 4.2.3 sont vraies, cette caractérisation implique que le lieu des points rationnels et le lieu non hyperbolique coïncident. Cette caractérisation implique également que la conjecture de Lang-Bombieri ci-dessus est une conséquence du corollaire conjectural 4.2.14.

Conjecture 4.3.7 *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres. Alors on a l'égalité*

$$\overline{\bigcup_{f:A \rightarrow X} f(A)} = \overline{\bigcup_{k'/k} X(k')},$$

où dans le membre de gauche f parcourt l'ensemble des applications rationnelles non constantes depuis une variété abélienne vers X , et dans le membre de droite k' parcourt l'ensemble des extensions finies de k . Les adhérences sont prises au sens de la topologie de Zariski.

Dans le sens contraire, il est conjecturé que l'obstruction à avoir des points rationnels potentiellement denses mise en évidence par la conjecture de Lang-Bombieri, à savoir posséder une "composante" de type général, est essentiellement la seule. Ceci prend la forme suivante.

Conjecture 4.3.8 (Colliot-Thélène, Harris) *Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres. Les points rationnels de X sont potentiellement denses si et seulement si il n'existe pas de revêtement étale fini X' de X admettant une fibration sur une base Y de type général et de dimension > 0 .*

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

En particulier, cette conjecture implique que les variétés de Fano (pour lesquelles le fibré anticanonique $-K_X$ est ample) et les variétés à fibré canonique trivial ont des points rationnels potentiellement denses.

On pourrait croire le cas des variétés de Fano réglé grâce au fait qu'elles sont rationnellement connexes, mais il n'est pas démontré à l'heure actuelle que les variétés rationnellement connexes définies sur un corps de nombres ont des points rationnels potentiellement denses. Il existe cependant un certain nombre d'exemples justifiant la conjecture 4.3.8 dans le cas des variétés de Fano.

En dimension 2, les variétés de Fano sont les surfaces de del Pezzo, qui sont toutes rationnelles, ce qui suffit à prouver la densité potentielle de leurs points rationnels. Plus généralement, beaucoup de variétés de Fano sont unirationnelles, ce qui suffit également pour qu'elles vérifient la conjecture. Dans le cas de la dimension 3, les quartiques de \mathbf{P}^4 , et les hypersurfaces de degré 6 dans l'espace projectif pondéré $\mathbf{P}(1, 1, 1, 2, 3)$ (doubles cônes de Veronese) sont birationnelles à des fibrations elliptiques sur \mathbf{P}^2 , ce qui permet de prouver la densité potentielle des points rationnels : la preuve se fonde sur le cas des variétés abéliennes (proposition 4.3.3). On reviendra sur cette stratégie au chapitre 5.

Le cas des variétés à fibré canonique trivial est ramené à celui des variétés hyperkähleriennes et des variétés de Calabi-Yau par la proposition 4.3.3, qui dit que les points rationnels des variétés abéliennes sont potentiellement denses.

Bogomolov et Tschinkel ont prouvé ([BT00]) que les points rationnels des surfaces $K3$ définies sur un corps de nombres, possédant un groupe d'automorphismes infini, ou bien se réalisant comme un pinceau elliptique, sont potentiellement denses (on esquissera une preuve de ce résultat au chapitre 5 suivant). Néanmoins, ces surfaces $K3$ sont spéciales, puisque leur nombre de Picard géométrique est supérieur à 2. Récemment, van Luijk a construit ([vL07]) des surfaces $K3$ définies sur \mathbf{Q} , avec nombre de Picard géométrique égal à 1, et possédant une infinité de points rationnels.

En dimension supérieure, la seule avancée dans cette direction a été effectuée récemment par Amerik et Voisin ([AV07], cf. théorème 5.1.14). Elles ont démontré que les points rationnels de la variété de Fano X des droites d'une hypersurface cubique V de \mathbf{P}^5 définie sur un corps de nombres sont potentiellement denses. On sait ([BD85]) que cette variété de Fano est hyperkählerienne, équivalente par déformation au schéma de Hilbert $S^{[2]}$ d'une surface $K3$, et possède un groupe de Picard isomorphe à \mathbf{Z} pour V générique. Cette dernière propriété reste vraie pour beaucoup de telles variétés X définies sur un corps de nombres, d'après un résultat de Terasoma ([Ter85]).

Remarque 4.3.9 Il existe des versions des conjectures ci-dessus pour le cas où k est un corps de fonctions (dans ce contexte, on entend par là le corps de fonctions $\mathbf{C}(B)$ d'une courbe lisse définie sur \mathbf{C}). En effet, lorsque X est une variété projective lisse définie sur un corps de nombres k , il existe un modèle projectif $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$, dont la fibre générique est $\mathcal{X}_k = X$. Ici, \mathcal{O}_k désigne l'anneau des entiers du corps k . Il existe des analogies naturelles entre le modèle $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ et une famille de variétés $\mathcal{X} \rightarrow B$ au dessus d'une courbe B , et dont la fibre générique est une variété X définie sur $\mathbf{C}(B)$. Ce sont ces analogies qui justifient la pertinence des questions de densité potentielle lorsque k est un corps de fonctions. Dans ce cadre, des résultats un peu plus avancés sont connus.

En particulier, le théorème de Graber, Harris et Starr ([GHS03], voir aussi [dJS03] pour un résultat valable en caractéristique positive) dit que les points rationnels des variétés rationnellement connexes définies sur un corps de fonctions sont potentiellement denses. Il résout une conjecture de Kollár, Miyaoka et Mori ([KMM92b]).

En ce qui concerne les variétés à fibré canonique trivial, Hassett et Tschinkel ont obtenu ([HT06]) des exemples de surfaces $K3$ définies sur $\mathbf{C}(t)$, dont le groupe de Picard géométrique

est \mathbf{Z} , et dont les points sont potentiellement denses.

4.4 Compléments et variantes

Dans ce paragraphe, on tâche de faire le lien entre les différentes questions évoquées dans ce chapitre. Il s'agit de l'étude de l'hyperbolicité au sens de la pseudo-métrique de Kobayashi k_X , ou au sens de la pseudo-forme volume de Kobayashi Ψ_X , et de la densité potentielle des points rationnels d'une variété définie sur un corps de nombres (ou sur un corps de fonctions).

Les conjectures de Lang (*cf.* paragraphe 4.2.3), prédisant la définition d'un lieu exceptionnel commun à ces problèmes comme le lieu rationnellement balayé par des variétés abéliennes, constituent un premier élément de comparaison. On présente ici d'autres idées, issues des travaux de Campana, qui permettent de conjecturer l'équivalence entre la densité potentielle des points rationnels et l'annulation de la pseudo-métrique de Kobayashi $k_{X_{\mathbb{C}}}$ pour une variété projective lisse X , définie sur un corps de nombres k . On précise également, en menant une étude élémentaire, quels sont les liens entre la pseudo-distance k_X et la pseudo-forme volume Ψ_X .

Précisément, le problème qui nous intéresse dans le travail présenté dans cette partie de la thèse est celui de l'annulation de Ψ_X et de ses variantes pour les variétés de Calabi-Yau. On a déjà vu page 78 pourquoi ce problème est essentiel en vue de la conjecture 4.1.27 de Kobayashi, prédisant l'annulation de Ψ_X pour toutes les variétés qui ne sont pas de type général : parmi ces variétés, celles pour lesquelles aucun fibré pluricanonique ne possède de section sont conjecturalement unirrégulières (ce qui implique $\Psi_X = 0$ génériquement). Les autres possèdent toutes une fibration en variété de dimension de Kodaira $\kappa = 0$ (la fibration d'Iitaka-Moishezon), et les variétés avec $\kappa = 0$ sont conjecturalement des quotients de variétés singulières à fibré canonique trivial. Enfin, on sait que $\Psi_X = 0$ si X est une variété abélienne.

On va voir ici que la théorie de Campana permet de manière un peu similaire de réduire la question de l'annulation de k_X (ou de la densité potentielle) aux variétés rationnellement connexes et aux variétés à fibré canonique trivial. On rappelle pour commencer la définition des variétés rationnellement connexes.

Définition 4.4.1 *Une variété X définie sur un corps k est rationnellement connexe s'il existe une variété quasi-projective T et un morphisme $F : \mathbf{P}^1 \times T \rightarrow X$ tels que l'application d'évaluation*

$$\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times T \rightarrow X \times X$$

est dominante.

Quand le corps k est indénombrable, cette définition équivaut au fait que par deux points génériques de X , il passe une courbe rationnelle. Si on suppose de plus que la caractéristique de k est nulle, alors ceci implique que pour tout ensemble $\{x_1, \dots, x_p\}$ de points de X , il passe une courbe rationnelle par x_1, \dots, x_p (*cf.* par exemple [Bon08] pour ces résultats).

En particulier, la pseudo-métrique k_X est nulle pour ces variétés. En revanche, le problème de la densité potentielle de leurs points rationnels est largement ouvert lorsqu'elles sont définies sur un corps de nombres (le cas corps de fonctions a été récemment démontré par Graber, Harris et Starr). On sait que les variétés abéliennes ont à la fois $k_X = 0$ et leurs points rationnels potentiellement denses. Le cas des variétés de Calabi-Yau est encore largement ouvert.

4.4.1 Hyperbolicité-distance et densité potentielle

On présente ici très brièvement la théorie des variétés spéciales de Campana (*cf.* [Cam04], et plus récemment [Cam07]), qui permet de conjecturer qu'il est équivalent pour une variété X

définie sur un corps k que les points k -rationnels de X soient potentiellement denses et que la pseudo-distance de Kobayashi sur la variété complexe $X_{\mathbb{C}}$ soit nulle.

En général, les propriétés géométriques d'une variété ne sont pas les mêmes dans toutes les directions. Une bonne méthode pour séparer les composantes aux comportements géométriques différents consiste à utiliser des fibrations, dont la base est d'un certain type, et les fibres d'un autre. En ce qui concerne les propriétés envisagées dans ce chapitre, il semble en effet qu'il y ait seulement deux types de géométrie pures, qui correspondent en dimension 1 aux courbes de genre $g \geq 2$ et $g \leq 1$ respectivement (cf. conjecture 4.4.3 ci-dessous). Le premier correspond aux variétés de type général, dont la définition correspond à celle déjà donnée (définition 4.0.6). Le second correspond simplement aux variétés ne possédant aucune composante de type général, *i.e.* celles qui n'admettent aucune fibration dont la base est de type général. Elles sont appelées les variétés spéciales par Campana.

La définition ci-dessus des variétés spéciales nécessite une bonne notion de fibration à base de type général, en particulier lorsque la fibration en question possède des fibres multiples. Soient X, Y deux variétés complexes compactes connexes et lisses, et $f : X \rightarrow Y$ une fibration holomorphe. On associe à f le \mathbf{Q} -diviseur

$$\Delta(f) = \sum_{D \subset Y} \left(1 - \frac{1}{m(f,D)}\right) \cdot D,$$

où D parcourt l'ensemble des diviseurs irréductibles de Y , et $m(f, D)$ est la multiplicité de la fibre de f au-dessus du point générique de D (on écrit $f^*D = \sum_j a_j D_j + E$, où E est f -exceptionnel, et on pose $m(f, D) = \inf_j a_j$). Cette définition est faite pour que le diviseur $K_Y + \Delta(f)$ sur Y corresponde au diviseur canonique d'un changement de base virtuel $u : Y' \rightarrow Y$ qui sépare les fibres multiples de f (autrement dit, $\Delta(f)$ est tel que $K_{Y'} = u^*(K_Y + \Delta(f))$). En général, il n'existe pas de morphisme représentant un tel changement de base virtuel. La paire $(Y/\Delta(f))$ définit ce que l'on appelle la base orbifolde de la fibration f . Sa dimension de Kodaira est la dimension d'Iitaka-Moishezon du fibré canonique orbifolde

$$\kappa(Y, K_Y + \Delta(f))$$

(autrement dit, c'est la dimension maximale des images des applications rationnelles définies par les systèmes linéaires $|k \cdot (K_Y + \Delta(f))|$ pour k suffisamment divisible). Comme dans le cas de la géométrie logarithmique (cf. paragraphe 3.2.2), il faut ajouter quelque chose au diviseur canonique traditionnel pour obtenir la bonne notion de diviseur canonique orbifolde.

Définition 4.4.2 *Soit X une variété complexe compacte. On dit que X est spéciale si elle ne possède aucune fibration holomorphe $f : X \rightarrow Y$ dont la base orbifolde $(Y/\Delta(f))$ est de type général (*i.e.* telle que $\kappa(Y, K_Y + \Delta(f)) = \dim Y$).*

Cette définition permet à Campana de formuler les conjectures suivantes, qui corrigent la conjecture 4.3.8 de Colliot-Thélène et Harris, et précisent celles de Kobayashi (conjectures 4.1.10, 4.1.11) et Green-Griffiths (conjecture 4.1.12).

Conjecture 4.4.3 (Campana, [Cam04]) *(i) Soit X une variété projective lisse définie sur un corps de nombres k . Les points rationnels de X sont potentiellement denses si et seulement si X est spéciale.*

(ii) Soit X une variété kählérienne compacte lisse. La pseudo-distance de Kobayashi k_X est nulle si et seulement si X est spéciale.

En fait, la théorie de Campana permet de prédire le comportement de n'importe quelle variété (projective ou kählérienne compacte selon le contexte) à partir de la conjecture précédente,

puisqu'elle fournit une décomposition canonique sous la forme d'une fibration à base (orbifold) de type général, et à fibres spéciales. Cette décomposition s'obtient en utilisant de manière répétée le quotient rationnel et la fibration d'Iitaka.

Soit X une variété kählérienne compacte lisse. La construction du quotient rationnel est due indépendamment à Campana ([Cam81]) et à Kollár, Miyaoka et Mori ([KMM92b]). Elle fournit une fibration méromorphe (unique)

$$r_X : X \dashrightarrow R(X)$$

telle que les fibres de r_X sont rationnellement connexes, et $R(X)$ n'est pas uniréglée. Cette fibration est le quotient de X par la relation d'équivalence qui identifie deux points lorsqu'ils sont reliés par une chaîne de courbes rationnelles. Pour un point $y \in R(X)$ général (*i.e.* en dehors d'une réunion dénombrable de sous-ensembles fermés algébriques propres), la fibre de r_X au-dessus de y est sa classe d'équivalence. Le fait que $R(X)$ n'est pas uniréglée est une conséquence du théorème de Graber, Harris et Starr (expliqué à la remarque 4.3.9, *cf.* [Deb03] pour une preuve).

Si $\kappa(X) = d \geq 0$, la fibration d'Iitaka-Moishezon de X est l'unique (à équivalence biméromorphe près) application méromorphe surjective

$$J_X : X \dashrightarrow J(X),$$

telle que $\dim J(X) = d$, et $\kappa(X_y) = 0$, où X_y est la fibre de J_X au-dessus d'un point $y \in J(X)$ générique. On l'obtient comme une application pluricanonique $\Theta_k : X \dashrightarrow \mathbf{P}(H^0(X, K_X^k))$ pour k suffisamment grand et suffisamment divisible (*cf.* [Uen75]). Il faut toutefois prendre garde au fait que la base de cette fibration n'est pas nécessairement de type général.

Si $\dim X = n$, Campana montre qu'en posant $c_X = (J_X \circ r_X)^n$ on obtient l'unique (à équivalence biméromorphe près) fibration

$$c_X : X \rightarrow C(X),$$

telle que la fibre générale de c_X est spéciale, et la base orbifold de cette fibration est de type général (si $\dim C(X) > 0$). On appelle cette fibration le cœur de X . Cette construction montre en particulier que les variétés spéciales sont des tours de variétés rationnellement connexes et de variétés à dimension de Kodaira nulle.

La conjecture 4.4.3 précédente s'insère alors dans la suivante. On conserve les notations ci-dessus.

Conjecture 4.4.4 (Campana, [Cam04]) (i) Si X est définie sur un corps de nombres k , alors les points rationnels de X sont concentrés sur un nombre fini de fibres du cœur au-dessus d'un ouvert dense de Zariski $U \subset C(X)$.

(ii) On a $k_X = c_X^*(k_{C(X)/\Delta(c_X)})$, où $k_{C(X)/\Delta(c_X)}$ est une métrique sur un ouvert Zariski dense $U \subset C(X)$.

Campana donne une expression de la pseudo-métrique $k_{C(X)/\Delta(c_X)}$, qui copie la définition classique de Kobayashi-Royden pour k_X , en remplaçant les applications holomorphes entre \mathbf{D} et X par des morphismes orbifoldes. Dans le cas où X est une courbe, et $\Delta = \sum_j \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \cdot x_j$, $k_{X/\Delta}$ correspond à la métrique de Poincaré définie sur une surface de Riemann hyperbolique à singularités orbifoldes (*cf.* exemple 3.1.6).

4.4.2 Distance et volume

Le travail auquel est consacré la seconde partie de cette thèse concerne des variantes de la pseudo-forme volume de Kobayashi Ψ_X . Pour relier les résultats concernant la pseudo-métrique k_X à ce travail, il est donc nécessaire de comprendre les liens entre la pseudo-distance et la pseudo-forme volume de Kobayashi. Le lemme suivant est essentiellement le seul résultat permettant de faire ce lien en toute généralité et de manière précise.

Lemme 4.4.5 (Voisin, [Voi03]) *Soit X une variété complexe. On suppose que Ψ_X s'annule au point $x \in X$ (ou plus généralement qu'il existe une suite de points (x_n) convergeant vers x et telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_{X, x_n} = 0$). Alors la pseudo-métrique de Kobayashi k_X est dégénérée au point x .*

Preuve. Par définition de Ψ_X , la condition d'annulation signifie qu'il existe une suite d'applications holomorphes $\phi_k : \mathbf{D}^n \rightarrow X$ telles que $\lim \phi_k(0) = x$ et $\lim |J_{\phi_k}(0)| = \infty$ (on munit X d'un système de coordonnées holomorphes au voisinage de X , et on utilise les coordonnées standard sur \mathbf{D}^n pour calculer les déterminants jacobiens $J_{\phi_k}(0)$).

Le fait que $\lim |J_{\phi_k}(0)| = \infty$ impose qu'il existe au moins une colonne de la matrice jacobienne de ϕ_k dont le module tend vers l'infini. Cette colonne correspond à un vecteur $f_{k*} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ pour une application holomorphe $f_k : \mathbf{D} \rightarrow X$ définie par restriction à partir de ϕ_k , et telle que $\lim f_k(0) = x$. Ceci prouve la dégénérescence de la pseudo-métrique de Kobayashi au point x . \square

Il faut retenir de ce lemme que l'annulation de Ψ_X "correspond" à l'annulation de k_X dans une seule direction. Il faut pourtant prendre garde au fait que l'annulation de k_X dans une direction n'entraîne pas nécessairement l'annulation de Ψ_X . Du point de vue du lemme de Brody (valable en toute rigueur uniquement dans le cas compact), l'annulation de la pseudo-métrique k_X dans une direction correspond à l'existence d'une courbe entière dans cette direction, alors que l'annulation de Ψ_X est plutôt à rapprocher de l'existence d'une courbe épaissie dans les directions normales $\mathbf{C} \times \mathbf{D}^{n-1}$. En tout cas, l'annulation de Ψ_X n'implique certainement pas l'annulation de k_X dans toutes les directions.

Ceci permet de bien comprendre la différence entre les cas (conjecturaux) d'annulation de k_X et de Ψ_X . La pseudo-métrique k_X doit s'annuler pour les variétés qui sont des tours de variétés rationnellement connexes et de variétés de dimension de Kodaira nulle. Elle doit être génériquement non dégénérée pour les variétés de type général. Pour les variétés mixtes, il semble que la construction du cœur $c_X : X \rightarrow C(X)$ permette de prévoir les directions dans lesquelles k_X dégénère (le long des fibres), et celles le long desquelles elle est non dégénérée (transversalement aux fibres, dans la direction de la base).

Pour Ψ_X , la situation est entièrement décrite par le théorème de Griffiths et Kobayashi-Ochiai, et la conjecture de Kobayashi. On sait que Ψ_X est génériquement non dégénérée sur les variétés de type général, et il est conjecturé qu'elle s'annule génériquement sur toutes les variétés qui ne sont pas de type général. Heuristiquement, l'existence d'une seule direction dans X qui n'est pas de type général suffit à impliquer l'annulation de Ψ_X ; il n'y a pas besoin pour cela que X soit purement non de type général (c'est-à-dire spéciale) comme il est nécessaire pour l'annulation de k_X .

Chapitre 5

Auto-transformations des variétés à fibré canonique trivial

Ce chapitre fait le lien entre les deux parties de cette thèse. L'une des motivations essentielles de la partie I était la recherche d'endomorphismes rationnels de degré strictement supérieur à 1 pour les surfaces $K3$. On explique dans la première moitié de ce chapitre comment l'existence de tels endomorphismes sur les surfaces $K3$, et plus généralement sur les variétés à fibré canonique trivial, permet de prouver des propriétés de (non) hyperbolicité ou de densité potentielle de points rationnels (*cf.* chapitre 4). La condition sur le degré des endomorphismes doit être comprise comme une condition de dilatation. Les endomorphismes satisfaisant à cette condition permettent de dilater les formes volumes, de faire augmenter le degré de diviseurs ou de sous-variétés, de propager des points rationnels. Ce sont ces propriétés dynamiques qui sont utilisées pour obtenir les résultats que nous allons présenter.

Dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, on définit les K -correspondances, introduites par Claire Voisin. Il s'agit de correspondances qui satisfont à une propriété autorisant la définition d'un morphisme jacobien généralisé. La notion de K -correspondance généralise celle de morphisme génériquement fini. Elle permet en particulier de modifier les définitions du chapitre précédent en utilisant des K -correspondances à la place des applications holomorphes, définissant ainsi une nouvelle pseudo-forme volume Φ_X généralisant celle de Kobayashi Ψ_X (*cf.* [Voi04b]). En un sens, le théorème d'approximation de Demailly-Lempert-Shiffman 4.2.3 ([DLS94], *cf.* paragraphe 4.2.1) fournit une bonne justification à une telle généralisation.

Dans le cas des variétés à fibré canonique trivial, un endomorphisme rationnel définit une auto- K -correspondance. Les applications de l'existence d'endomorphismes rationnels précédemment citées s'étendent au cas des K -correspondances. On va donner un certain nombre d'exemples de K -correspondances définies sur des variétés à fibré canonique trivial (dûs à Claire Voisin, [Voi04b]). L'existence de ces exemples permet de démontrer l'annulation de la pseudo-forme volume Φ_X pour une large catégorie de variétés de Calabi-Yau X , ce qui constitue un résultat analogue à celui prédit par la conjecture de Kobayashi 4.1.27. L'un des points essentiels du travail [Ded08], présenté au chapitre 6, est la définition et l'étude de la notion de K -correspondance dans le cadre de la géométrie logarithmique.

5.1 Auto-applications rationnelles

5.1.1 Applications à l'hyperbolicité

Hyperbolicité algébrique au sens de la mesure

On a vu dans l'exemple 1.2.5, partie I, de quelle manière on peut utiliser la multiplication dans une courbe elliptique pour définir des endomorphismes rationnels sur une surface $K3$ munie d'un pinceau elliptique. Le résultat suivant, dû à Claire Voisin ([Voi03]), utilise une généralisation de cette idée aux familles de variétés abéliennes, et établit un lien entre les conjectures de Lang et l'hyperbolicité algébrique au sens de la mesure (cf. définition 4.2.11).

Proposition 5.1.1 (Voisin) *Soit X une variété projective lisse. On suppose que X est dominée par une famille de variétés abéliennes, c'est-à-dire qu'il existe un diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\phi} & X \\ \pi \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

où ϕ est une application rationnelle dominante, non constante sur les fibres de π , et π est un morphisme projectif, dont les fibres génériques sont des variétés abéliennes lisses. Alors X n'est pas algébriquement hyperbolique au sens de la mesure.

Preuve. On suppose pour simplifier que la famille π possède une section (à changement de base près, c'est essentiellement toujours le cas). Cette section permet de munir les fibres de π d'une origine, et donc de définir la multiplication par tout entier $n \geq 0$ pour chacune d'entre elles. Ceci fournit un endomorphisme rationnel

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\mu_n} & \mathcal{A} \\ & \searrow & \swarrow \\ & B & \end{array}$$

au-dessus de B (les indéterminations viennent du fait qu'il existe éventuellement des fibres de π qui ne sont pas lisses), et donc une nouvelle famille couvrante de variétés abéliennes $\phi_n := \phi \circ \mu_n : \mathcal{A} \rightarrow X$.

Soit $b \in B$ générique, et A_b la fibre de π au-dessus de b . Par tirer-en-arrière, la multiplication fibre à fibre μ_n agit sur $H^2(A_b, \mathbf{Z})$ comme la multiplication par n^2 . Donc pour toute courbe $C \subset A_b$ évitant le lieu d'indétermination de ϕ et de ϕ_n , on a

$$\deg(\phi_n^*)|_C = n^2 \cdot \deg(\phi^*)|_C.$$

Ceci montre qu'en partant d'une famille couvrante de courbes pour \mathcal{A} , on obtient par composition avec ϕ_n pour n suffisamment grand une famille couvrante de courbes de genre fixé et de degré arbitrairement grand.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\phi_n} & \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

Par définition, cela signifie que X n'est pas algébriquement hyperbolique au sens de la mesure. \square

Remarque 5.1.2 Si les conjectures de Lang sont vraies, alors toute variété X projective lisse qui n'est pas de type général satisfait aux hypothèses de la proposition précédente (corollaire 4.2.14). Ainsi, si les conjectures de Lang sont vraies, la proposition précédente affirme que les variétés qui ne sont pas de type général ne sont pas algébriquement hyperboliques au sens de la mesure. On sait réciproquement que les variétés de type général sont algébriquement hyperboliques au sens de la mesure (*cf.* proposition 4.2.10).

Annulation de la pseudo-forme volume de Kobayashi

Le raisonnement fournissant cette seconde application est résumé par la proposition suivante (*cf.* [Voi03]).

Proposition 5.1.3 (Voisin) *Soit X une variété projective lisse, à fibré canonique K_X trivial. On suppose qu'il existe une application rationnelle dominante*

$$\phi : X \dashrightarrow X$$

de degré $d > 1$. Alors $\tilde{\Psi}_X = 0$.

La pseudo-forme volume $\tilde{\Psi}_X$ est la variante introduite par Yau (définition 4.1.21) de la pseudo-forme volume de Kobayashi Ψ_X . Pour obtenir l'annulation de Ψ_X , il faut supposer que ϕ est holomorphe.

Preuve. Soit η un générateur de $H^0(X, K_X)$, c'est-à-dire une forme différentielle holomorphe de degré maximal $n = \dim X$ qui est partout non nulle. Son tiré-en-arrière $\phi^*\eta$ lui est nécessairement proportionnel : il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\phi^*\eta = \lambda \cdot \eta$. Comme X est compacte, on obtient par intégration

$$\int_X \phi^*(\eta \wedge \bar{\eta}) = |\lambda|^2 \int_X \eta \wedge \bar{\eta},$$

et donc $|\lambda|^2 = \deg \phi > 1$.

D'autre part, on écrit $\tilde{\Psi}_X = \chi \cdot \eta \wedge \bar{\eta}$, où χ est une fonction semi-continue supérieurement sur X . Par inégalité des volumes décroissants, on a

$$\phi^*\tilde{\Psi}_X \leq \tilde{\Psi}_X,$$

dont on déduit $|\phi^*\chi| |\lambda|^2 \leq |\chi|$. Ceci implique automatiquement $\chi = 0$, puisque χ possède un maximum sur X . □

L'application de ce résultat aux surfaces $K3$ projectives ne présente pas un grand intérêt, puisqu'on sait qu'elles ont toutes une pseudo-forme volume de Kobayashi nulle par un argument de balayage par des courbes elliptiques (singulières), alors qu'on conjecture qu'une surface $K3$ projective générique ne possède pas de transformation rationnelle satisfaisant aux hypothèses de la proposition 5.1.3.

En revanche, ce résultat prouve l'annulation de $\tilde{\Psi}_X$ pour la variété de Fano des droites d'une cubique lisse de \mathbf{P}^5 quelconque. Ceci peut aussi se démontrer en utilisant le fait que ces variétés sont balayées par des surfaces abéliennes ([Voi03], *cf.* exemple 4.2.18), grâce au lemme 4.1.29.

Uniformisation par \mathbf{C}^n

L'application présentée ici est la suite naturelle de la précédente. On va voir ici que sous des hypothèses plus fortes (si l'on dispose d'endomorphismes cohomologiquement dilatants) il est possible, en utilisant des techniques de dynamique holomorphe, d'obtenir une application

méromorphe surjective $\mathbf{C}^n \dashrightarrow X$, $n = \dim X$ (ce qui entraîne en particulier l'annulation de $\widetilde{\Psi}_X$). Ces résultats sont dus à Fornaess et Sibony, Briend et Duval, Dinh et Sibony, Guedj. On en trouvera une présentation beaucoup plus précise dans les deux textes [Can06] et [Gue06], accompagnée de références vers les travaux originaux cités ci-dessus.

Soit X une variété kählérienne compacte lisse de dimension n , et soit $\phi : X \dashrightarrow X$ une application méromorphe dominante. Elle induit des morphismes

$$\phi^* : H^k(X, \mathbf{C}) \rightarrow H^k(X, \mathbf{C}) \quad (5.1)$$

pour tout entier $k \geq 0$, qui respectent la décomposition de Hodge et la structure entière. Une façon de construire ces morphismes consiste à considérer dans $X \times X$ l'adhérence Γ du graphe de ϕ . Alors les différentes composantes de la classe $[\Gamma] \in H^{n,n}(X \times X)$ dans la décomposition de Künneth

$$H^{n,n}(X \times X) \cong \bigoplus_{0 \leq p, q \leq n} H^{p,q}(X) \otimes H^{n-p, n-q}(X) \cong \bigoplus_{0 \leq p, q \leq n} H^{p,q}(X) \otimes H^{p,q}(X)^\vee \quad (5.2)$$

induisent les morphismes recherchés.

Le but ici est d'étudier les propriétés dynamiques de ϕ , autrement dit de comprendre ce qui se passe quand on itère ϕ . Il faut donc bien prendre garde au fait qu'en général, les deux morphismes $(\phi^*)^k$ et $(\phi^k)^*$ ne coïncident pas (k est un entier arbitraire). Ceci est dû au fait que le graphe de ϕ^k et la composition $\Gamma \circ \dots \circ \Gamma$ au sens des correspondances ne coïncident pas en général (cf. paragraphe 6.2.2).

Définition 5.1.4 *Pour tout entier $p = 0, \dots, n$, le p -ème degré dynamique de ϕ est*

$$\lambda_p(\phi) := \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|(\phi^k)^*\|^{1/k} \right\},$$

où $\|\cdot\|$ est une norme d'opérateurs quelconque sur les endomorphismes de l'espace vectoriel $H^{p,p}(X) \cap H^{2p}(X, \mathbf{R})$.

En d'autres termes, le p -ème degré dynamique de ϕ est le rayon spectral de la suite d'opérateurs $(\phi^k)^* : H^{p,p}(X, \mathbf{R}) \rightarrow H^{p,p}(X, \mathbf{R})$. Notons que pour $p = n$,

$$\lambda_n(\phi) = \deg_{\text{top}}(\phi)$$

est le nombre d'antécédents d'un point générique de X par ϕ .

La suite des degrés dynamiques de ϕ est concave. C'est une conséquence de l'inégalité $1 \leq \lambda_{p-1}(\phi) \cdot \lambda_{p+1}(\phi) \leq \lambda_p(\phi)^2$, $1 \leq p \leq n$, établie par Guedj (cf. [Gue06]). Cette propriété explique la pertinence de la définition suivante.

Définition 5.1.5 *On dit que $\phi : X \dashrightarrow X$ est cohomologiquement dilatante si son degré topologique $\lambda_n(\phi) = \deg_{\text{top}}(\phi)$ majore strictement tous les autres degrés dynamiques :*

$$\forall k < n, \quad \lambda_k(\phi) < \lambda_n(\phi).$$

Pour une application cohomologiquement dilatante, la concavité de la suite des degrés dynamiques équivaut à la suite d'inégalités

$$1 = \lambda_0(\phi) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(\phi) < \lambda_n(\phi) = \deg_{\text{top}}(\phi).$$

Un exemple simple de transformation cohomologiquement dilatante est fourni par les endomorphismes holomorphes de \mathbf{P}^n qui sont de degré au moins 2. L'un des intérêts des applications cohomologiquement dilatantes réside en la propriété suivante, conséquence des travaux de Fornaess et Sibony, Briend et Duval, Dinh et Sibony, Guedj (cf. [Can06]).

Théorème 5.1.6 *Soit X une variété de Calabi-Yau projective lisse, de dimension n . Si X possède un endomorphisme rationnel cohomologiquement dilatant, alors il existe une application méromorphe surjective*

$$\mathbf{C}^n \dashrightarrow X.$$

Plus généralement, le résultat suivant est valable pour toute variété projective lisse X : si X possède un endomorphisme rationnel $\phi : X \dashrightarrow X$ cohomologiquement dilatant, alors il existe une application rationnelle $\mathbf{C}^n \dashrightarrow X$ dont l'image est le complémentaire d'une réunion au plus dénombrable d'ensembles analytiques fermés de codimension 1. Ce résultat s'obtient grâce à des techniques de dynamique holomorphe, qui permettent de démontrer l'existence de points périodiques répulsifs convenables (précisément, dans le support de la mesure d'entropie maximale de ϕ).

Malheureusement, bon nombre des exemples connus d'endomorphismes rationnels sur les variétés de Calabi-Yau ne sont pas cohomologiquement dilatants.

Exemple 5.1.7 On a vu (exemple 1.2.5, partie I) que les surfaces $K3$ munies d'un pinceau elliptique possèdent des transformations rationnelles, obtenues en utilisant la multiplication dans les fibres elliptiques. Ces transformations rationnelles ne sont pas cohomologiquement dilatantes. Cela est dû au fait qu'elles laissent stable la base du pinceau : elles ne sont dilatantes que dans la direction des fibres.

En revanche, les transformations rationnelles des surfaces de Kummer induites par les homothéties du tore complexe associé (exemple 1.2.6, partie I) sont cohomologiquement dilatantes.

Serge Cantat considère également des exemples de surfaces $K3$ munies de plusieurs pinceaux elliptiques, ce qui fournit plusieurs groupes de transformations rationnelles, et permet de les composer entre elles ([Can06]). Les exemples considérés sont les hypersurfaces de degré $(2, 2, 2)$ de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, et les revêtements doubles de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ ramifiés le long d'une courbe de bidegré $(4, 4)$. Pour ces deux exemples, un calcul explicite montre qu'en composant les applications rationnelles fournies par les différentes fibrations elliptiques, on obtient dans le cas générique uniquement des transformations rationnelles qui ne sont pas cohomologiquement dilatantes.

Pourtant, les transformations des hypersurfaces de $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ s'obtiennent comme des déformations de transformations linéaires sur des surfaces de Kummer. Mais le fait d'être cohomologiquement dilatante n'est pas stable par déformations, car les degrés dynamiques varient seulement semi-continûment.

Exemple 5.1.8 La transformation rationnelle de la variété de Fano des droites d'une hypersurface cubique de \mathbf{P}^5 construite par Claire Voisin ([Voi04b]) n'est pas non plus cohomologiquement dilatante. En effet, ses degrés dynamiques sont 1, 7, 31, 28 et 16. Ils ont été calculés par Ekaterina Amerik ([Ame07]).

Remarque 5.1.9 La classification des surfaces projectives complexes X pour lesquelles il existe une application holomorphe $\mathbf{C}^2 \rightarrow X$ génériquement de rang maximal a été effectuée par Buzzard et Lu ([BL00]), sauf dans le cas des surfaces $K3$ pour lesquelles on ne sait pas s'il existe en général une telle application. Ces résultats sont en accord avec les conjectures présentées au chapitre 4, et coïncident avec ce que l'on sait au sujet des endomorphismes rationnels des surfaces $K3$.

Si $\kappa(X) = 2$, alors X n'est clairement pas dominable par \mathbf{C}^2 . Si $\kappa(X) = -\infty$, X est birationnellement équivalente à une surface réglée ; elle est alors dominée par \mathbf{C}^2 si et seulement si la base du réglage est de genre inférieur à 1 (ce qui équivaut à $q = h^0(X, \Omega_X) \leq 1$). Si $\kappa(X) = 1$, alors X est une surface elliptique ; elle est dominée par \mathbf{C}^2 si et seulement si la base orbifolde de la fibration elliptique (*cf.* paragraphe 4.4.1) n'est pas de type général.

Si $\kappa(X) = 0$, on ne sait pas quelles sont les surfaces dominées par \mathbf{C}^2 . Le cas des surfaces ayant un revêtement biméromorphe à une surface abélienne est trivial. Dans le cas des surfaces $K3$, Buzzard et Lu montrent que les surfaces $K3$ possédant un pinceau elliptique et les surfaces de Kummer sont dominées par \mathbf{C}^2 .

5.1.2 Applications à la densité potentielle

Surfaces $K3$ elliptiques

Dans [BT00], Bogomolov et Tschinkel démontrent le résultat suivant.

Théorème 5.1.10 *Soit X une surface $K3$ définie sur un corps de nombre k . Si X possède une fibration elliptique $X \rightarrow \mathbf{P}^1$, alors les points rationnels de X sont potentiellement denses.*

Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu par Buzzard et Lu (cf. remarque 5.1.9 ci-dessus), qui prouve l'existence d'une application holomorphe $\mathbf{C}^2 \rightarrow X$ génériquement de rang maximal.

L'ingrédient essentiel de la preuve est l'existence de transformations rationnelles sur X , obtenues en utilisant la multiplication le long des fibres elliptiques de la fibration (exemple 1.2.5, partie I), et qui permettent de propager les points rationnels d'une section le long des fibres. Ceci prend la forme suivante.

Proposition 5.1.11 *Soit $\pi : \mathcal{E} \rightarrow B$ une fibration elliptique définie sur un corps de nombres k . On suppose qu'il existe une multisection M qui n'est pas de torsion, et telle que les points k -rationnels de M sont denses. Alors les points k -rationnels de \mathcal{E} sont denses.*

Cet énoncé nécessite quelques éclaircissements. Une multisection M est une sous-variété fermée $M \subset \mathcal{E}$ qui est génériquement finie au-dessus de B .

$$\begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & \mathcal{E} \\ & \searrow & \downarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

On peut voir une multisection comme l'adhérence d'une multisection de la fibre générique, au sens suivant. On note $F = k(B)$ le corps de fonctions de B . La variété \mathcal{E} fournit une variété \mathcal{E}_F définie sur F . Alors, une multisection de \mathcal{E}_F est un point de \mathcal{E}_F qui est défini sur une extension finie de F .

Le degré d d'une telle multisection M° de la fibre générique est défini comme le plus petit degré d'une extension F'/F sur laquelle le point M° est défini. La multisection M° s'identifie alors à un ensemble $\{m_1, \dots, m_d\}$ de d points conjugués de $\mathcal{E}_{\overline{F}}$.

Le 0-cycle $m_1 + \dots + m_d$ est défini sur F , et induit donc un point F -rationnel de la jacobienne $J^d(\mathcal{E}_F)$ paramétrant les fibrés en droites de degré d sur \mathcal{E}_F . Soit F'/F une extension sur laquelle un point m_1 est défini. On peut alors considérer le point F' -rationnel

$$\tau_M := (m_1 + \dots + m_d) - d \cdot m_1 \in J^0(\mathcal{E}_F)(F').$$

La fibration jacobienne $J^0(\mathcal{E}_F)$ étant canoniquement munie d'une section nulle, on dit que la multisection M est de torsion quand le point τ_M est de torsion.

Preuve de la proposition 5.1.11. Par changement de base $M^\circ \rightarrow B$, on obtient une fibration jacobienne $\mathcal{E}_{M^\circ} \cong J^0(\mathcal{E}_{M^\circ})$, la section nulle étant donnée par la diagonale $\Delta : M^\circ \hookrightarrow \mathcal{E} \times_B M^\circ$. Cette fibration jacobienne est munie d'une section τ_M qui n'est pas de torsion. L'ensemble $\mathbf{Z} \cdot \tau_M$ est donc dense dans $J^0(\mathcal{E}_M)$. Comme les points rationnels de M sont denses, ceci prouve que les

points rationnels sont denses dans \mathcal{E}_{M° . Comme cette fibration domine \mathcal{E} , cela prouve la densité des points rationnels de \mathcal{E} . \square

Bien entendu, il existe un résultat analogue à la proposition 5.1.11 pour les fibrations abéliennes à fibres de dimension quelconque. Il faut alors remplacer l'hypothèse que M n'est pas de torsion par l'hypothèse plus forte qu'elle est non dégénérée.

Le reste de la preuve du théorème 5.1.10 consiste à montrer que les surfaces $K3$ elliptiques possèdent des multisections rationnelles qui ne sont pas de torsion. On peut même choisir ces multisections avec un degré arbitrairement grand. On renvoie au texte [Has03] pour différentes approches permettant de démontrer cela. La plus naturelle emploie le groupe de Tate-Šafarevič.

Remarque 5.1.12 Bogomolov et Tschinkel montrent également le résultat suivant, plus facile. Soit X une surface $K3$ définie sur un corps de nombres k . Si la variété complexe $X(\mathbf{C})$ possède un groupe d'automorphismes infini, alors les points rationnels de X sont potentiellement denses sur k .

Notons que cet énoncé ne requiert aucune hypothèse sur le degré des transformations existant sur $X(\mathbf{C})$. Ce résultat s'obtient en prouvant qu'il existe une classe de diviseur effectif $[D]$ indécomposable, dont l'orbite dans $H^2(X, \mathbf{Z})$ sous l'action des automorphismes est infinie. On conclut alors en utilisant le fait qu'il existe une courbe rationnelle (singulière) dans X qui représente $[D]$.

Variété des droites d'une cubique de \mathbf{P}^5

On va maintenant expliquer de quelle manière on peut utiliser les transformations rationnelles construites sur ces variétés par Claire Voisin ([Voi04b], cf. exemple 1.2.7, partie I) pour prouver des résultats de densité potentielle.

Soit X la variété de Fano des droites d'une hypersurface cubique lisse $V \subset \mathbf{P}^5$. On a vu qu'il existe une application rationnelle

$$\phi : X \dashrightarrow X$$

de degré 16. La variété X est lisse, hyperkählérienne et de dimension 4. Pour V générique, elle satisfait à $\text{Pic}(X) \cong \mathbf{Z}$. On a déjà vu au paragraphe 1.2.2, partie I, que ceci entraîne que toute fibration rationnelle définie sur B a des fibres de type général, en vertu d'un théorème dû à Amerik et Campana ([AC05]). On a vu également que ceci implique qu'il n'existe pas de fibration rationnelle sur X qui soit préservée par ϕ .

D'autre part, Amerik et Campana associent une fibration méromorphe à tout endomorphisme rationnel ([AC05]).

Théorème 5.1.13 *Soit X une variété kählérienne compacte, et $\phi : X \dashrightarrow X$ une application rationnelle dominante. Alors il existe une application méromorphe ϕ -invariante*

$$\pi : X \dashrightarrow T,$$

dont la fibre générale X_t est l'adhérence de Zariski de l'ensemble des itérés par ϕ d'un point général de X_t (général signifiant hors d'une réunion dénombrable de fermés algébriques propres).

Dans le cas où X est la variété de Fano des droites de la cubique V , on a donc ou bien $\dim T = \dim X$ ou bien $\dim T = 0$ dans la fibration précédente. Il est impossible d'avoir $\dim T = \dim X$ car $\deg(\phi) > 1$, donc T est un point. Ceci implique que l'orbite d'un point général de X sous l'action de ϕ est dense dans X pour la topologie de Zariski.

En fait, le théorème 5.1.13 est vrai pour tout corps k algébriquement clos et de caractéristique nulle si on fait l'hypothèse plus forte que X est projective. C'est insuffisant pour prouver

la densité potentielle des points rationnels de X sur un corps de nombres k , puisque dans ce cas k est dénombrable, et il peut très bien n'y avoir aucun point rationnel défini sur une extension finie k'/k et dont l'orbite sous l'action de ϕ soit dense. En revanche, cela permet à Amerik et Campana de démontrer que si X est définie sur un corps de fonctions, alors ses points rationnels sont potentiellement denses.

Pour les variétés définies sur un corps de nombres, Amerik et Voisin ont obtenu le résultat suivant ([AV07]).

Théorème 5.1.14 *Soit k un corps de nombres. Pour beaucoup d'hypersurfaces cubiques $V \subset \mathbf{P}^5$ définies sur k , telles que la variété de Fano X des droites de V satisfait à $\text{Pic}(X_{\mathbf{C}}) \cong \mathbf{Z}$, les points rationnels de X sont potentiellement denses.*

Leur preuve utilise non seulement l'endomorphisme $\phi : X \rightarrow X$ (qui est défini sur le corps k), mais également le fait que X est couverte par une famille (Σ_b) de surfaces qui sont birationnelles à des surfaces abéliennes ([Voi03], cf. exemple 4.2.18, partie II). Pour une telle surface Σ_{b_0} définie sur k , les points rationnels sont potentiellement denses dans Σ_{b_0} . La preuve d'Amerik et Voisin consiste alors à montrer que la réunion dénombrable des surfaces $\phi^j(\Sigma_{b_0})$, $j \in \mathbf{N}^*$, est dense dans X pour la topologie de Zariski.

Il est précisé dans l'article [AV07] quelles sont les "nombreuses" hypersurfaces cubiques pour lesquelles la conclusion du théorème est vraie.

5.2 K -autocorrespondances

La plupart des résultats présentés dans ce paragraphe sont issus de l'article [Voi04b]. Les preuves données ici seront souvent succinctes. Lorsque c'est le cas, on renvoie au chapitre 6 pour des preuves détaillées, où ces notions sont adaptées à un contexte logarithmique (cf. [Ded08]).

5.2.1 Définition

Définition 5.2.1 *Soient X et Y deux variétés complexes lisses de dimension n . Une K -correspondance entre X et Y est un sous-ensemble analytique fermé $\Sigma \subset X \times Y$ réduit et de dimension n , tel que les deux projections sur X et Y sont génériquement de rang maximal, et qui satisfait de plus aux deux conditions suivantes :*

(i) *la restriction $\text{pr}_1|_{\Sigma}$ est propre ;*

(ii) *soient $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ une désingularisation, $f := \text{pr}_1 \circ \tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow X$, et $g := \text{pr}_2 \circ \tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow Y$; on a l'inégalité entre les diviseurs de ramification sur $\tilde{\Sigma}$*

$$R_f \leq R_g.$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{\Sigma} & \\
 f \swarrow & \downarrow \tau & \searrow g \\
 & \Sigma & \\
 \text{pr}_1 \swarrow & & \searrow \text{pr}_2 \\
 X & & Y
 \end{array} \tag{5.3}$$

Pour que la propriété (ii) soit vérifiée pour n'importe quelle désingularisation $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$, il suffit de trouver une désingularisation particulière pour laquelle c'est le cas. Une autre façon

d'exprimer cette condition (ii), est de dire qu'on impose que l'application

$$J_{\Sigma} := g_* \circ f_*^{-1} : f^*(\wedge^n T_X) \rightarrow g^*(\wedge^n T_Y) \quad (5.4)$$

soit holomorphe. On l'appelle le morphisme jacobien généralisé.

Une application holomorphe $\phi : X \rightarrow Y$ génériquement finie induit une K -correspondance : il est immédiat de vérifier que son graphe $\Gamma \subset X \times Y$ satisfait aux hypothèses de la définition 5.2.1. Dans ce cas, le jacobien généralisé (5.4) est le dual de l'inclusion de faisceaux

$$g^* K_Y = K_X(-R_\phi) \subset K_X,$$

que l'on peut voir comme une inclusion entre sous-faisceaux de K_Γ .

Comme pour les morphismes, il est possible de composer les K -correspondances. Les jacobiniens généralisés se comportent alors exactement comme dans le cas des morphismes. Soit Z une troisième variété complexe lisse de dimension n .

Proposition 5.2.2 *Soient $\Sigma \subset X \times Y$ et $\Sigma' \subset Y \times Z$ deux K -correspondances. On définit la composition $\Sigma' \circ \Sigma$ comme la réunion des composantes de*

$$\text{pr}_{13}(\text{pr}_{12}^{-1}(\Sigma) \cap \text{pr}_{23}^{-1}(\Sigma'))$$

sur lesquelles les deux projections sur X et Z sont génériquement de rang maximal. Le fermé analytique $\Sigma' \circ \Sigma \subset X \times Z$ définit une K -correspondance.

Dans la proposition ci-dessus, pr_{ij} désigne la projection de $X \times Y \times Z$ sur les i -ème et j -ème facteurs. On renvoie au paragraphe 6.2.2 pour une preuve de ce résultat. Il justifie la définition suivante.

Définition 5.2.3 *Une K -isocorrespondance entre X et Y est une K -correspondance $\Sigma \subset X \times Y$ telle que la transposée $\Sigma^T \subset Y \times X$ soit elle aussi une K -correspondance.*

Les K -isocorrespondances sont celles pour lesquelles les deux restrictions $\text{pr}_{1|\Sigma}$ et $\text{pr}_{2|\Sigma}$ sont propres, et pour lesquelles on a l'égalité

$$R_f = R_g$$

dans la condition (ii) de la définition 5.2.1.

5.2.2 Exemples

Nous allons maintenant donner des exemples d'endomorphismes au sens des K -correspondances pour les variétés à fibré canonique trivial. Ils sont issus de l'article [Voi04b]. La plupart seront des K -autocorrespondances, *i.e.* des K -isocorrespondances entre une variété et elle-même. Avant toute chose, commençons par le constat élémentaire suivant.

Lemme 5.2.4 *Soit X une variété complexe lisse dont le fibré canonique K_X est trivial. Soit $\phi : X \dashrightarrow X$ une application rationnelle dominante. Alors le graphe de ϕ*

$$\Gamma \subset X \times X$$

est une K -autocorrespondance.

Preuve. Le graphe de ϕ s'obtient de la manière suivante. Il existe un ouvert de Zariski $U \subset X$ sur lequel ϕ est définie. Ceci définit un graphe $\Gamma_U \subset U \times X$. Par définition, le graphe Γ de ϕ est l'adhérence de Zariski de Γ_U dans $X \times X$.

La restriction de Γ à U est isomorphe à U , et en particulier est lisse. Par le lemme de désingularisation d'Hironaka 3.2.2, on peut considérer une désingularisation $\tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ qui est un isomorphisme au-dessus de U , et tel que le complémentaire de Γ_U dans $\tilde{\Gamma}$ est un diviseur. Une telle désingularisation s'obtient comme une série d'éclatements. On obtient de la sorte le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{\Gamma} & \\
 & \downarrow & \searrow \tilde{\phi} \\
 \tau \swarrow & \Gamma & \searrow \\
 & \downarrow & \\
 X & \xrightarrow{\phi} & X
 \end{array}$$

Considérons une forme différentielle holomorphe globale sur X , de degré n et partout non nulle η . C'est un générateur de $H^0(X, K_X)$. Comme τ est un isomorphisme au-dessus de U , toute forme différentielle holomorphe globale sur $\tilde{\Gamma}$ est un multiple de $\tau^*\eta$. En particulier, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que

$$\tilde{\phi}^*\eta = \lambda \cdot \tau^*\eta. \quad (5.5)$$

Ces deux formes différentielles holomorphes globales sur $\tilde{\Gamma}$ s'annulent respectivement le long des diviseurs $R_{\tilde{\phi}}$ et R_{τ} , puisque η est une section globale partout non nulle de K_X . L'égalité (5.5) donne donc l'égalité $R_{\tau} = R_{\tilde{\phi}}$ entre les diviseurs de ramification. Les autres conditions pour que Γ soit une K -autocorrespondance sont clairement satisfaites. \square

Nous allons maintenant donner des exemples de K -correspondances qui ne sont pas des graphes d'application rationnelle. Pour les variétés à fibré canonique trivial, on peut utiliser la remarque suivante pour prouver qu'une correspondance Σ est une K -autocorrespondance.

Remarque 5.2.5 Soient X une variété projective à fibré canonique trivial, et $\Sigma \subset X \times X$ un fermé analytique réduit et de dimension $n = \dim X$, tel que les deux projections sur X sont propres, et génériquement de rang maximal. Soit $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ une désingularisation. On note $f = \text{pr}_1 \circ \tau$ et $g = \text{pr}_2 \circ \tau$ comme dans le diagramme (5.3).

Soit $\eta \in H^0(X, K_X)$ une forme différentielle holomorphe de degré maximal partout non nulle. S'il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que

$$f^*\eta = \lambda \cdot g^*\eta, \quad (5.6)$$

alors Σ est une K -autocorrespondance. En effet, comme η est une section globale partout non nulle du fibré en droites K_X , $f^*\eta$ et $g^*\eta$ s'annulent le long des diviseurs de ramification R_f et R_g respectivement. L'égalité (5.6) de formes différentielles sur $\tilde{\Sigma}$ implique donc l'égalité de diviseurs $R_f = R_g$.

D'autre part, (5.6) donne

$$f^*(\eta \wedge \bar{\eta}) = |\lambda|^2 g^*(\eta \wedge \bar{\eta}).$$

Comme X est compacte, on peut intégrer cette égalité sur $\tilde{\Sigma}$. Cela donne la relation

$$\deg f = |\lambda|^2 \deg g.$$

Exemple 5.2.6 Soit A une variété abélienne de dimension a . On considère deux entiers m et m' premiers entre eux, et on pose

$$\Sigma := A \overset{(m,m')}{\hookrightarrow} A \times A,$$

où l'inclusion est donnée par les multiplications par m et m' dans chaque facteur respectivement. Soit η une forme holomorphe de degré maximal partout non nulle sur A . On a l'égalité de formes holomorphes

$$\frac{1}{m^a} \text{pr}_1^* \eta = \frac{1}{m'^a} \text{pr}_2^* \eta$$

sur la variété lisse Σ . Donc d'après la remarque 5.2.5, Σ est une K -autocorrespondance, et on a

$$\deg \text{pr}_1 = \frac{m^{2a}}{m'^{2a}} \deg \text{pr}_2.$$

Exemple 5.2.7 Soit $M \subset \mathbf{P}^N$ une intersection complète générique de k hypersurfaces de degrés respectifs $d_1 \leq \dots \leq d_k$, telle que $d_k \geq 3$, et telle que la variété de Fano $X \subset \text{Gr}(r+1, N+1)$ paramétrant les r -plans contenus dans M soit lisse et de la bonne dimension.

On choisit les nombres r , N et d_i de sorte que X soit à fibré canonique trivial de la manière suivante. Le fibré canonique de la grassmannienne est $K_G = -(N+1) \cdot L$, où L est le déterminant du fibré \mathcal{E} , qui est le dual du fibré tautologique. L'intersection complète M est donnée par une section $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(d_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(d_k)$, et la variété de Fano de ses r -plans est le lieu des zéros de la section $(\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_k)$ de $\text{Sym}^{d_1} \mathcal{E} \oplus \dots \oplus \text{Sym}^{d_k} \mathcal{E}$ correspondante. On obtient donc par adjonction

$$K_X = -(N+1) \cdot L|_X + \sum_{1 \leq i \leq k} \det \left(\text{Sym}^{d_i} \mathcal{E} \right) |_{X}.$$

D'autre part, si E est un fibré vectoriel de rang g , on a pour tout entier l l'isomorphisme $\det(\text{Sym}^l E) \cong (\det E)^{\otimes \alpha}$, $\alpha = h^0(\mathbf{P}^q, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^q}(l-1))$. Appliquant ce résultat à \mathcal{E} , on obtient finalement

$$K_X = \left[-(N+1) + \sum_{1 \leq i \leq k} h^0(\mathbf{P}^{r+1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{r+1}}(d_i-1)) \right] \cdot L|_X.$$

Ceci montre que pour tous r et d_i , il existe exactement une dimension N telle que X soit à fibré canonique trivial.

On choisit alors deux entiers $m < m'$ tels que $m+m' = d_k$. On note Z l'intersection complète dans \mathbf{P}^N définie par $(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$, et X_Z la variété de Fano des $(r+1)$ -plans contenus dans Z . La variété M est une hypersurface dans Z , définie par une équation de degré d_k . On définit

$$\tilde{\Sigma} := \{(P_1, P_2, P) \in X \times X \times X_Z, \text{ t.q. } mP_1 + m'P_2 \subset P \cap M\},$$

et on appelle f et g les projections sur les premier et second facteurs respectivement. Claire Voisin prouve alors que $\tilde{\Sigma}$ est lisse et de dimension n , et que c'est une K -autocorrespondance de X , satisfaisant à $\deg f < \deg g$ ([Voi04b]).

La construction d'un endomorphisme rationnel $\phi : X \dashrightarrow X$ de degré 16 quand X est la variété des droites d'une cubique de \mathbf{P}^5 est un cas particulier de la construction ci-dessus, où $\tilde{\Sigma}$ est le graphe de l'application rationnelle ϕ .

Le dernier exemple est plus difficile, et nécessite le résultat suivant, initialement dû à Mumford ([Mum68]), qui concerne l'opération de tirer-en-arrière des formes holomorphes par des correspondances.

Théorème 5.2.8 *Soient X et Y deux variétés projectives lisses de dimension n . Soit $\Gamma \subset Y \times X$ un fermé algébrique génériquement fini au-dessus de Y . On suppose qu'il existe un sous-ensemble fermé algébrique propre $X' \subset X$, tel que pour tout $y \in Y$, le 0-cycle Γ_*y soit rationnellement équivalent à un 0-cycle supporté dans X' . Alors pour toute forme holomorphe de degré maximal $\eta_X \in H^0(X, K_X)$, on a*

$$\Gamma^*\eta_X = 0$$

sur Y .

On renvoie au paragraphe 1.5.1 pour la définition de l'équivalence rationnelle et des groupes de Chow. L'application pousser-en-avant

$$\Gamma_* : \text{CH}_0(Y) \rightarrow \text{CH}_0(X)$$

est définie *via* le produit d'intersection par $\Gamma_*Z := \text{pr}_{2*}(\Gamma \cdot \text{pr}_1^*Z)$. L'application tirer-en-arrière sur les formes holomorphes globales de degré maximal est définie comme pour (5.1) par la composante

$$[\Gamma]_0 \in H^{n,0}(Y) \otimes H^{0,n}(X) \cong H^0(Y, K_Y) \otimes H^0(X, K_X)^\vee$$

de la classe de cycle $[\Gamma] \in H^{n,n}(Y \times X)$ dans la décomposition de Künneth (5.2). On considère donc les formes globales comme des classes de cohomologie pour pouvoir appliquer la dualité de Poincaré.

Le résultat original prouvé par Mumford concerne les surfaces, et lui sert à établir le corollaire suivant (dans le cas $n = 2$), qui implique le résultat communément appelé théorème de Mumford, et déjà cité paragraphe 1.5.2 (théorème 1.5.9). Il s'obtient en appliquant le théorème 5.2.8 à la diagonale $\Delta_X \subset X \times X$.

Corollaire 5.2.9 *Soit X une variété projective lisse de dimension n . On suppose qu'il existe une sous-variété propre $j : X' \subset X$ telle que l'application*

$$j_* : \text{CH}_0(X') \rightarrow \text{CH}_0(X)$$

est surjective. Alors on a $H^0(X, K_X) = 0$.

La preuve de Mumford du théorème 5.2.8 a été formalisée un peu différemment par Bloch et Srinivas ([Blo80], [BS83]). Ils utilisent une décomposition de la classe de Γ dans le groupe de Chow $\text{CH}^n(Y \times X)$ (cf. [Voi02], chapitre 22). On reviendra sur cette opération de tirer-en-arrière des formes holomorphes par des correspondances au paragraphe 6.5.3, cette fois sans les réaliser comme des classes de cohomologie.

Les résultats ci-dessus permettent d'exhiber de nouveaux exemples de K -correspondances sur des variétés de Calabi-Yau. Il s'agit d'une des constructions les plus importantes de l'article [Voi04b]. On renvoie au paragraphe 6.5.3 pour le détail des preuves.

Exemple 5.2.10 *Soit X une variété projective complexe lisse, telle qu'il existe un plongement $j : X \subset Y$ dans une variété Y rationnellement connexe, tel que $X \in |-K_Y|$. Cette dernière condition assure la trivialité du fibré canonique K_X par la formule d'adjonction. On va construire des K -autocorrespondances de X en s'inspirant de la définition géométrique de l'addition sur une courbe elliptique réalisée comme une courbe cubique lisse dans \mathbf{P}^2 .*

Comme Y est rationnellement connexe, il existe des courbes rationnelles passant par un nombre arbitraire de points donnés, et avec un fibré normal arbitrairement ample ([KMM92b], cf. [Bon08]). Ceci permet, pour tous entiers positifs distincts m et m' , de considérer une courbe rationnelle C_0 satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- (i) l'intersection $C_0 \cap X$ s'écrit $m \cdot x_0 + m' \cdot y_0 + z_0$ en tant que diviseur sur C_0 , où x_0 et y_0 sont deux points distincts, et z_0 est un 0-cycle réduit dont le support ne contient ni x_0 ni y_0 ;
(ii) les déformations du sous-schéma $C_0 \subset Y$ induisent des déformations arbitraires du M -jet de C_0 aux points x_0 et y_0 ($M = \max(m, m')$).

On choisit de plus une hypersurface $W \subset X$ contenant le 0-cycle z_0 . On note $|C_0|$ l'espace paramétrant les déformations du sous-schéma $C_0 \subset Y$. On pose alors

$$\tilde{\Sigma} := \{(x, y, C) \in X \times X \times |C_0|, \text{ t.q. } C \cap X = m \cdot x + m' \cdot y + z, \text{ supp}(z) \subset W\},$$

et on note f et g les projections naturelles $\tilde{\Sigma} \rightarrow X$. En fait on considère plutôt l'unique composante irréductible de $\tilde{\Sigma}$ qui passe par le point (x_0, y_0, C_0) . Le schéma de Hilbert $|C_0|$ est lisse en C_0 , de dimension $h^0(C_0, N_{C_0/Y_0})$, ce qui vaut $-K_Y \cdot C_0 + n - 2$ d'après la formule de Riemann-Roch pour les fibrés vectoriels sur les courbes. Pour un choix générique de W , on a alors que $\tilde{\Sigma}$ est lisse au point (x_0, y_0, C_0) et de dimension

$$\dim \Sigma' = \dim |C_0| - [(m - 1) + (m' - 1) + \deg z_0] = n,$$

en utilisant le fait que $X \in |-K_Y|$ pour la dernière égalité.

Soit $\eta \in H^0(X, K_X)$ une n -forme différentielle holomorphe partout non nulle. On va maintenant montrer que

$$mf^*\eta + m'g^*\eta = 0. \quad (5.7)$$

Ceci s'obtient en appliquant le théorème de Mumford 5.2.8 à la correspondance $\Gamma \subset \tilde{\Sigma} \times X$ qui à un point $\sigma = (x, y, C) \in \tilde{\Sigma}$ associe le 0-cycle $\Gamma_*\sigma := m \cdot x + m' \cdot y$ sur X . Ce 0-cycle est égal à $C \cdot X - z$, donc Γ se décompose en une somme $\Gamma_C - \Gamma_W$. La correspondance Γ_W associe au point $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ le 0-cycle $(\Gamma_W)_*\sigma = z$, qui est supporté dans W . D'autre part, Γ_C associe à σ le 0-cycle $(\Gamma_C)_*\sigma = j^*C$ (où C est considéré comme un 1-cycle sur Y , et j est l'inclusion $X \subset Y$). Comme Y est rationnellement connexe, le groupe de Chow $\text{CH}_0(Y)$ est engendré par la classe d'un point quelconque de Y , et ceci entraîne par l'argument de Bloch et Srinivas que $\text{CH}_1(Y)$ est un facteur direct dans le groupe de Chow $\text{CH}_0(T)$ d'une certaine variété T de dimension $n - 1$. Finalement, il existe une sous-variété propre $W' \subset X$ telle que $\Gamma_*\sigma$ est rationnellement équivalent à un 0-cycle supporté dans W' . Les hypothèses du théorème 5.2.8 sont donc satisfaites, et on a $mf^*\eta + m'g^*\eta = \Gamma^*\eta = 0$.

Finalement, on définit Σ comme l'adhérence dans $X \times X$ de l'image de $\tilde{\Sigma}$ par (f, g) (ou plutôt de l'unique composante de $\tilde{\Sigma}$ passant par (x_0, y_0, C_0)). La correspondance Σ est de dimension n , et la relation (5.7) implique que c'est une K -autocorrespondance d'après la remarque 5.2.5.

5.2.3 Une nouvelle forme volume intrinsèque

On va maintenant utiliser les K -correspondances pour définir une nouvelle pseudo-forme volume intrinsèque Φ_X , inspirée par celle de Kobayashi-Eisenman Ψ_X (cf. paragraphe 4.1.2), et introduite par Claire Voisin ([Voi04b]). Les exemples du paragraphe précédent vont permettre de prouver la version correspondante de la conjecture de Kobayashi 4.1.27 (i.e. l'annulation de Φ_X) pour beaucoup de variétés X à fibré canonique trivial. Tous les résultats présentés ici sont issus de [Voi04b].

Définition 5.2.11 *Soit X une variété complexe lisse de dimension n . La pseudo-forme volume Φ_X est définie par la pseudo-norme hermitienne associée sur $\bigwedge^n T_X$*

$$\|\xi\|_{\Phi_X} = \inf \left\{ \lambda > 0, \text{ t.q. } \exists \Sigma \subset \mathbf{D}^n \times X \text{ } K\text{-correspondance et } \sigma \in \tilde{\Sigma}, \right. \\ \left. \text{avec } f(\sigma) = 0, \text{ } g(\sigma) = x, \text{ et } \lambda \cdot J_{\tilde{\Sigma}, \sigma}(\partial/\partial t_1 \wedge \cdots \wedge \partial/\partial t_n) = \xi \right\}$$

pour tous $x \in X$ et $\xi \in \bigwedge^n T_X$; $\tilde{\Sigma}$ est une désingularisation de Σ , et les morphismes f et g sont définis comme dans le diagramme (5.3).

En utilisant le fait que le groupe $\text{Aut}(\mathbf{D}^n)$ agit transitivement, et préserve la forme volume de Poincaré $\kappa_n = \prod_{1 \leq j \leq n} (i/2)^n (dz_j \wedge d\bar{z}_j) / (1 - |z_j|^2)^2$, qui coïncide avec la forme volume euclidienne standard en 0, on obtient comme dans la remarque 4.1.18 l'expression

$$(\Phi_X)_x = \inf \left\{ (f^* \kappa_n)_\sigma, \text{ où } \sigma \in \tilde{\Sigma}, g(\sigma) = x, \text{ et } \Sigma \subset \mathbf{D}^n \times X \text{ non ramifiée en } \sigma \right\}$$

pour tout $x \in X$, toujours avec les notations de (5.3). On dit que la K -correspondance Σ est non ramifiée en σ si on a l'égalité $R_f = R_g$ entre les diviseurs de ramification au voisinage de σ . Dans ce cas, le morphisme jacobien généralisé

$$J_{\tilde{\Sigma}} : f^* (\bigwedge^n T_{\mathbf{D}^n}) \rightarrow g^* (\bigwedge^n T_X)$$

est un isomorphisme au voisinage de σ , ce qui permet l'identification de $f^* \kappa_n$ avec une pseudo-métrique sur $g^* (\bigwedge^n T_X)$.

La pseudo-forme volume satisfait à la propriété de décroissance suivante, immédiate d'après la définition 5.2.11 (on utilise toujours les notations du diagramme (5.3)).

Proposition 5.2.12 *Soient X et Y deux variétés complexes lisses de dimension n , et soit $\Sigma \subset X \times Y$ une K -correspondance. Alors on a l'inégalité de pseudo-formes volume sur $\tilde{\Sigma}$*

$$g^* \Phi_Y \leq f^* \Phi_X.$$

Comme dans le cas classique, le lemme d'Ahlfors-Schwarz (proposition 4.1.22) permet d'obtenir des résultats importants. Il faut adapter le résultat initial pour pouvoir l'utiliser dans le cadre des K -correspondances, on renvoie au paragraphe 6.4 pour une formulation précise dans ce contexte.

Les principaux résultats obtenus sont analogues au théorème de Kobayashi 4.1.23 pour le premier, et au théorème de Griffiths-Kobayashi-Ochiai 4.1.24 pour le second.

Théorème 5.2.13 (Voisin) *Si X est le polydisque \mathbf{D}^n , ou un quotient de \mathbf{D}^n par un groupe agissant librement et proprement discontinûment, alors*

$$\Phi_X = \Psi_X = \kappa_X,$$

où κ_X est la forme volume de Poincaré sur X .

Théorème 5.2.14 (Voisin) *Soit X une variété projective et de type général. Alors*

$$\Phi_X > 0$$

hors d'un sous-ensemble algébrique fermé propre de X .

En dehors de l'inégalité immédiate $\Phi_X \leq \Psi_X$ et du théorème 5.2.13 précédent, on ne connaît pas de relation directe entre les deux pseudo-formes volume Φ_X et Ψ_X . Claire Voisin conjecture qu'elles sont équivalentes, au moins pour les variétés projectives.

Conjecture 5.2.15 (Voisin) *Soit X une variété projective lisse. Alors il existe une constante non nulle α telle que*

$$\alpha \Psi_X \leq \Phi_X \leq \Psi_X.$$

Pour finir, on va généraliser la proposition 5.1.3, qui permet de prouver l'annulation de Ψ_X en exploitant l'existence de transformations rationnelles. On appliquera ensuite cette idée aux exemples donnés au paragraphe 5.2.2.

Proposition 5.2.16 *Soit X une variété projective lisse, à fibré canonique K_X trivial. On suppose qu'il existe une K -autocorrespondance $\Sigma \subset X \times X$, telle que $\deg f \neq \deg g$. Alors la pseudo-forme volume Φ_X est nulle.*

Preuve. Soit $\eta \in H^0(X, K_X)$ une forme holomorphe de degré maximal, partout non nulle. Il existe une fonction positive et semi-continue supérieurement χ telle que

$$\Phi_X = \chi \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} i^n \eta \wedge \bar{\eta}.$$

D'autre part, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que

$$f^* \eta = \lambda \cdot g^* \eta,$$

et on a $\deg f = |\lambda|^2 \cdot \deg g$ (cf. remarque 5.2.5). Puisque $\deg f \neq \deg g$, on peut donc supposer $|\lambda| > 1$, quitte à considérer Σ^T au lieu de Σ .

Finalement, en appliquant la propriété de décroissance des volumes (proposition 5.2.12) à Σ et à sa transposée, on obtient l'égalité

$$f^* \Phi_X = g^* \Phi_X.$$

Ceci implique $f^* \chi = |\lambda|^2 \cdot g^* \chi$, ce qui est impossible puisque χ possède un maximum sur X . \square

En appliquant ce résultat aux exemples 5.2.6, 5.2.7 et 5.2.10 précédents, on obtient le théorème suivant, qui démontre la conjecture de Kobayashi 4.1.27 relativement à Φ_X pour une grande famille de variétés à fibré canonique trivial. On a vu au paragraphe 4.2.3 pourquoi le cas des variétés à K_X trivial est crucial pour cette conjecture.

Théorème 5.2.17 (Voisin) *Soit X une variété projective lisse à fibré canonique trivial, satisfaisant à l'une des hypothèses suivantes :*

- (a) X est balayée par des variétés abéliennes ;
- (b) X est la variété de Fano des r -plans contenus dans une intersection complète générique de k hypersurfaces de degrés $d_1 \leq \dots \leq d_k$ dans \mathbf{P}^N , avec $d_k \geq 3$;
- (c) X est une hypersurface lisse dans une variété rationnellement connexe Y , appartenant à la classe anti-canonique $|-K_Y|$.

Alors la pseudo-forme volume Φ_X est nulle sur X .

Le cas (a) est bien sûr à rapprocher des conjectures de Lang (cf. paragraphe 4.2.3). Quant au cas (c), il contient toutes les intersections complètes dans une variété de Fano avec un nombre de Picard égal à 1.

Pour finir, notons que l'argument de fond utilisé pour prouver le théorème ci-dessus est orthogonal à la géométrie des variétés de type général par la remarque suivante.

Remarque 5.2.18 Soient X une variété projective de type général, et $\Sigma \subset X \times X$ une K -autocorrespondance. Alors on a

$$\deg f = \deg g,$$

toujours en utilisant les notations du diagramme (5.3).

On va prouver cette égalité dans le cas où K_X est ample, pour simplifier. Comme les diviseurs R_f et R_g sont égaux, on a

$$f^*K_X = K_{\bar{\Sigma}} - R_f = K_{\bar{\Sigma}} - R_g = g^*K_X.$$

On en déduit $(f^*K_X)^2 = (g^*K_X)^2$, et donc

$$\deg f \cdot (K_X)^2 = \deg g \cdot (K_X)^2.$$

Comme K_X est ample, on a $(K_X)^2 > 0$, et l'égalité des degrés est démontrée.

Chapitre 6

Intrinsic pseudo-volume forms for logarithmic pairs

6.1 Introduction et principaux résultats

Le travail présenté dans ce chapitre consiste en l'étude d'une synthèse de deux variantes de la pseudo-forme volume Ψ_X de Kobayashi-Eisenman, présentée au paragraphe 4.1.2 : on remplace d'une part les applications holomorphes par des K -correspondances, comme dans [Voi04b], et d'autre part le fibré canonique par le fibré canonique logarithmique.

Dans le cas classique, on s'attend à ce que les propriétés de Ψ_X soient dictées par la dimension de Kodaira de la variété X . D'une part, le théorème de Griffiths-Kobayashi-Ochiai 4.1.24 ([Gri71], [KO75]) dit que si X est de type général (*i.e.* si K_X est gros, ou encore si la dimension de Kodaira $\kappa(X)$ est maximale égale à $\dim X$), alors Ψ_X est génériquement non-dégénérée. Dans ce cas, on dit que X est hyperbolique au sens de la mesure infinitésimale. D'autre part, la conjecture de Kobayashi 4.1.27 prédit réciproquement que si X n'est pas de type général, alors Ψ_X s'annule sur un ouvert de Zariski de X .

Dans le cas où X est une courbe projective, ceci est expliqué par le théorème d'uniformisation de Klein-Poincaré 3.1.1. Si $g(X) \leq 1$ (*i.e.* si X n'est pas de type général), alors $\Psi_X = 0$ car le revêtement universel holomorphe de X est \mathbf{P}^1 ou \mathbf{C} . Si $g(X) \geq 2$, alors X est un quotient du disque unité \mathbf{D} , et Ψ_X est égale à la forme volume de Poincaré. La conjecture de Kobayashi est également démontrée en dimension 2 (*cf.* [GG80]), grâce à la classification des surfaces de Kodaira-Enriques. Un argument essentiel dans la preuve est le fait que les surfaces $K3$ sont balayées par des courbes elliptiques (singulières, *cf.* théorème 1.3.8). En dimension quelconque, la conjecture de Kobayashi est connue pour les variétés de Fano, puisque celles-ci sont rationnellement connexes et donc uniréglées (*cf.* lemme 4.1.28), et pour les variétés abéliennes. Combiné aux considérations développées page 78 (sous la remarque 4.2.15), ceci indique que le point crucial de la conjecture de Kobayashi est le cas des variétés de Calabi-Yau.

On a expliqué au paragraphe 5.2.3 comment Claire Voisin ([Voi04b]) a défini une pseudo-forme volume Φ_X à partir de Ψ_X , en utilisant des K -correspondances. Cette nouvelle pseudo-forme volume satisfait elle aussi à un résultat analogue au théorème de Griffiths-Kobayashi-Ochiai (théorème 5.2.14), et s'annule pour beaucoup de variétés de Calabi-Yau (*cf.* théorème 5.2.17). Ceci constitue une étape importante en direction de la conjecture de Kobayashi.

On se propose dans ce chapitre de définir pour une paire logarithmique (X, D) une pseudo-forme volume $\Phi_{X,D}$ analogue à la pseudo-forme volume Φ_X définie par Claire Voisin.

L'un des intérêts des paires logarithmiques est qu'elles fournissent une bonne manière d'étudier les variétés ouvertes. Soit U une variété ouverte, complémentaire dans une variété projective X d'un diviseur D . On a vu au paragraphe 3.2 comment l'étude du fibré log-canonique $K_X(D)$ permet d'obtenir des informations sur U . En particulier, la cohomologie de Betti de U se calcule comme l'hypercohomologie du complexe de de Rham logarithmique $\Omega_X^\bullet(\log D)$, et on a $K_X(D) = \det(\Omega_X^1(\log D))$.

La théorie des orbifolds développée par Campana (*cf.* paragraphe 4.4.1) indique un autre aspect intéressant des paires logarithmiques. Cette théorie souligne qu'il est parfois plus judicieux de considérer un fibré canonique orbifold $K_X + \Delta$ plutôt que le fibré canonique standard K_X . En particulier, pour obtenir une bonne définition de la dimension de Kodaira d'une fibration méromorphe $f : X \dashrightarrow Y$, il faut considérer la dimension d'Iitaka $\kappa(Y, K_Y + \Delta(f))$ du fibré $K_Y + \Delta(f)$, où $\Delta(f)$ est un \mathbf{Q} -diviseur correspondant aux fibres multiples de la fibration f .

On considère ici X une variété complexe lisse et de dimension n , et D un diviseur de Weil à croisements normaux sur X , et dont la partie positive est réduite (ici, à croisements normaux signifie que le support de D est à croisements normaux). On ne suppose pas *a priori* que D est effectif, ni même qu'il possède une partie positive non nulle. On construit une pseudo-forme volume $\Phi_{X,D}$ sur la paire (X, D) satisfaisant aux propriétés suivantes.

Théorème A (i) *Il existe une pseudo-forme volume logarithmique (en général singulière) $\Phi_{X,D}$ sur la paire (X, D) , i.e. une pseudo-métrique (en général singulière) sur le fibré inversible $\bigwedge^n T_X(-D)$. Elle satisfait à la propriété de fonctorialité suivante. Soit Y une variété complexe lisse de dimension n , et $\nu : Y \rightarrow X$ un morphisme propre, de diviseur de ramification R tel que $\nu^*D - R$ est un diviseur à croisements normaux dont la partie positive est réduite. Alors on a*

$$\nu^*\Phi_{X,D} = \Phi_{Y,\nu^*D-R} \quad (6.1)$$

(si ν n'est pas propre, on a seulement l'inégalité $\nu^*\Phi_{X,D} \leq \Phi_{Y,\nu^*D-R}$).

(ii) *Soient D et D' deux diviseurs de Weil à croisements normaux sur X , dont les parties positives sont réduites. Si $D \leq D'$, alors $\Phi_{X,D} \leq \Phi_{X,D'}$.*

(iii) *Si $D = 0$, alors $\Phi_{X,0} = \Phi_X$.*

On effectue cette construction en suivant celle de Φ_X dans [Voi04b]. On remplace les applications holomorphes entre \mathbf{D}^n et X dans la définition de Ψ_X par des log- K -correspondances entre (\mathbf{D}^n, Δ_k) et (X, D) , où Δ_k est le diviseur donné dans \mathbf{D}^n par l'équation $z_{n-k+1} \cdots z_n = 0$ (*cf.* définition 6.2.1). Dans [Voi04b], Claire Voisin utilise des K -isocorrespondances locales pour transporter la forme volume de Poincaré depuis \mathbf{D}^n sur de petits ouverts dans X . Ici, on utilise des log- K -isocorrespondances locales pour transporter la forme volume de Poincaré logarithmique de la paire (\mathbf{D}^n, Δ_k) . Cette construction est expliquée au paragraphe 6.3. Les log- K -correspondances sont définies et étudiées au paragraphe 6.2.

Le paragraphe 6.4 est consacré à la preuve du théorème suivant, qui étend le théorème de Griffiths-Kobayashi-Ochiai au cadre logarithmique que nous nous sommes fixé.

Théorème B *Soit (X, D) une paire constituée d'une variété projective lisse X de dimension n , et d'un diviseur de Weil à croisements normaux D sur X , dont la partie positive est réduite et globalement à croisements normaux. Si $K_X + D$ est ample, alors $\Phi_{X,D} > 0$ (au lieu de Ψ_X , ce qui constitue une autre motivation pour notre construction) hors d'un fermé algébrique propre de X .*

Soient X et Y deux variétés projectives complexes de la même dimension, et $\nu : Y \rightarrow X$ un morphisme dominant. Si X est de type général, il est bien connu que la propriété de décroissance des volumes $\nu^*\Psi_X \leq \Psi_Y$ permet d'obtenir une borne supérieure pour $\deg \nu$ via le théorème de

Griffiths-Kobayashi-Ochiai (*cf.* corollaire 4.1.26). Lorsque X n'est pas de type général, on ne peut en revanche pas dire grand chose sur le degré de ν .

Un intérêt majeur du remplacement de Ψ_X par $\Phi_{X,D}$ est que l'on obtient des propriétés de décroissance du volume beaucoup plus précises (*cf.* théorème A et paragraphe 6.3.2). En effet, d'après la formule (6.1), avec $D = 0$, la relation standard de décroissance du volume est remplacée par une relation de conservation du volume dans le cas d'un morphisme propre dont le diviseur de ramification est à croisements normaux. La prise en compte de la ramification d'un morphisme $\nu : Y \rightarrow X$ fournit une plus grande précision dans la comparaison des pseudo-formes volumes (logarithmiques) intrinsèques de X et Y respectivement.

En combinant ceci au théorème B, on obtient un moyen de contrôler le degré d'un morphisme dominant $\nu : Y \rightarrow X$ même lorsque X n'est pas de type général (X et Y sont à nouveau de la même dimension). Supposons qu'il existe un diviseur de Weil à croisements normaux D sur X , tel que $K_X + D$ est ample. On décompose le diviseur de ramification R de ν en $R = \nu^*D + E$, où E est un diviseur de Weil sur Y , qui possède une partie négative non nulle dès que la partie positive de D est non nulle. On suppose que E est à croisements normaux, et que sa partie négative est réduite. Alors, l'intégration sur Y de l'inégalité de décroissance des volumes

$$\nu^* \Phi_{X,D} \leq \Phi_{Y,-E},$$

qui est une égalité lorsque ν est propre, fournit l'inégalité

$$\left(\int_X \Phi_{X,D} \right) (\deg \nu) \leq \int_Y \Phi_{Y,-E}. \quad (6.2)$$

Les pseudo-formes volume $\Phi_{X,D}$ et $\Phi_{Y,-E}$ peuvent avoir des pôles le long de la partie positive de D et de la partie négative de E respectivement. Elles sont cependant intégrables au voisinage de ces pôles grâce à l'existence de certaines singularités, de la même façon que la forme volume de Poincaré sur le disque épointé $\mathbf{D} \setminus \{0\}$ est intégrable au voisinage de 0 (*cf.* lemme 6.3.6). Enfin, on a $\int_X \Phi_{X,D} > 0$ d'après le théorème B, donc l'inégalité (6.2) fournit une borne supérieure pour $\deg \nu$.

Finalement, on prouve le résultat principal de ce chapitre au paragraphe 6.5. Il s'agit de prouver l'annulation de la pseudo-forme volume $\Phi_{X,D}$ pour une grande classe de paires à fibré log-canonique trivial. Ce théorème doit être vu, comme le résultat de Claire Voisin dont il est adapté, comme un pas en direction de la conjecture de Kobayashi dans sa version logarithmique.

Théorème C *Soit Y une variété lisse rationnellement connexe, et soit (X, D) une paire telle que $X \subset Y$ est une hypersurface lisse, $D \subset X$ est un diviseur réduit et à croisements normaux, et $D = X \cap X'$, où $X' \subset Y$ est une hypersurface réduite telle que*

$$X + X' \in |-K_Y|.$$

Alors la pseudo-forme volume $\Phi_{X,D}$ est nulle.

Remarquons que la formule d'adjonction implique que la variété $\overline{X} := X \cup X'$ est à fibré canonique trivial. En utilisant l'égalité de fibrés en droites $K_X(D) = (K_{\overline{X}})|_X$, on voit que les hypothèses impliquent que le fibré inversible $K_X(D)$ est trivial. Comme dans [Voi04b], le point clef de la preuve est la construction de log- K -autocorrespondances de la paire (X, D) satisfaisant à une propriété de dilatation des formes volume (*cf.* proposition 6.5.3).

6.2 Log- K -correspondences

6.2.1 Definition and basic properties

In this section, we define and study the notion of log- K -correspondence. This will be used in the next section to define and study properly our variant of the Kobayashi-Eisenman pseudo-volume form.

Definition 6.2.1 *Let (X, D) and (Y, D') be pairs of the same dimension, i.e. X and Y are complex manifolds of dimension n , and D and D' are (not necessarily effective) Weil divisors of X and Y respectively. A log- K -correspondence from (X, D) to (Y, D') is a reduced n -dimensional closed analytic subset $\Sigma \subset X \times Y$, satisfying the three following properties.*

(i) *The projections to X and Y are generically of maximal rank on each irreducible component of Σ .*

(ii) *The first projection $\Sigma \rightarrow X$ is proper.*

(iii) *Let $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ be a desingularization, $f = \text{pr}_1 \circ \tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow X$, and $g = \text{pr}_2 \circ \tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow Y$. The ramification divisors R_f and R_g (of f and g respectively) satisfy the inequality*

$$R_f - f^*D \leq R_g - g^*D'.$$

The above notations are summed up in the following commutative diagram. They will be used very often without further notice in the end of this text.

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{\Sigma} & \\
 & \downarrow \tau & \\
 f \swarrow & \Sigma & \searrow g \\
 & \downarrow \text{pr}_1 \quad \downarrow \text{pr}_2 & \\
 X & & Y
 \end{array} \tag{6.3}$$

Note that if condition (iii) is true for one desingularization of Σ , then it is true for all desingularizations. Let us now explain the meaning of this last condition. The two Jacobian maps $\wedge^n df$ and $\wedge^n dg$ (or rather their transpose) give isomorphisms of line bundles on $\tilde{\Sigma}$

$$f^*(K_X(D)) \cong K_{\tilde{\Sigma}}(-R_f + f^*D) \quad \text{and} \quad g^*(K_Y(D')) \cong K_{\tilde{\Sigma}}(-R_g + g^*D').$$

So condition (iii) ensures the existence of a holomorphic (rather than just meromorphic) map

$$(J_{\tilde{\Sigma}})^T : g^*(K_Y(D')) \rightarrow f^*(K_X(D)),$$

given by the transpose of the holomorphic map

$$J_{\tilde{\Sigma}} := \wedge^n dg \circ (\wedge^n df)^{-1} : f^*(\wedge^n T_X(-D)) \rightarrow g^*(\wedge^n T_Y(-D')),$$

which we call the generalized logarithmic Jacobian map. When $D = 0$ and $D' = 0$, the notion of log- K -correspondence coincides with the notion of K -correspondence introduced in [Voi04b].

It is also important to note the following inequality of divisors on $\tilde{\Sigma}$. We write $D = D_1 - D_2$, with both D_1 and D_2 non negative, and similarly $D' = D'_1 - D'_2$. If D_1 is reduced, then the negative part of $R_f - f^*D$ is the sum of the reduced divisor $(f^*D_1)_{\text{red}}$ and possibly of some f -exceptional components contained in f^*D_1 . We write this f -exceptional sum E_1 . In the same way, if D'_1 is reduced, the negative part of $R_g - g^*D'$ writes $(g^*D'_1)_{\text{red}} + E'_1$, where E'_1 is a sum of

g -exceptional components contained in $g^*D'_1$. So if both D_1 and D'_1 are reduced, then condition (iii) implies the inequality

$$(f^*D_1)_{\text{red}} + E_1 \geq (g^*D'_1)_{\text{red}} + E'_1.$$

In particular, if D' has a positive part (i.e. if D'_1 does not vanish), then D necessarily has a positive part as well.

We shall now describe some enlightening examples.

Example 6.2.2 Let X and Y be complex manifolds of dimension n , and $D \subset X$ be an effective divisor. A morphism $\varphi : X \rightarrow Y$ such that the ramification divisor R_φ contains D (with multiplicities) yields a morphism of line bundles

$$\varphi^*K_Y \rightarrow K_X(-D). \quad (6.4)$$

The graph $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ is isomorphic to X . It satisfies properties (i) and (ii) of definition 6.2.1, and with the notations of (6.3), one has $R_g - R_f = R_\varphi \geq f^*D$. So Γ_φ is a (smooth) log- K -correspondence between $(X, -D)$ and $(Y, 0)$, and the generalized logarithmic Jacobian map

$$g^*K_Y \rightarrow f^*(K_X(-D))$$

identifies to (6.4).

Example 6.2.3 Let (X, D) and (X', D') be smooth logarithmic pairs, where X and X' are complex manifolds of the same dimension, and $D \subset X$ and $D' \subset X'$ are effective divisors. One also usually assumes D and D' to be normal crossing divisors, but this is not necessary for this example. A morphism of pairs $\varphi : (X, D) \rightarrow (X', D')$ is a morphism of complex manifolds $X \rightarrow X'$, such that the ramification divisor R_φ contains $\varphi^*D' - D$. In other words, we require that there exists an effective divisor $R \subset X$, such that $K_X + D = \varphi^*(K_{X'} + D') + R$ as divisors on X . Such a morphism yields a morphism of line bundles on X

$$\varphi^*(K_{X'}(D')) \rightarrow K_X(D). \quad (6.5)$$

Again, the graph $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$ is isomorphic to X , and satisfies both properties (i) and (ii) of definition 6.2.1, and we have $R_g - R_f = R_\varphi \geq g^*D' - f^*D$. So Γ_φ is a log- K -correspondence between (X, D) and (X', D') , and the generalized logarithmic Jacobian map

$$g^*(K_{X'}(D')) \rightarrow f^*(K_X(D))$$

identifies to (6.5).

Finally, the following notion of log- K -isocorrespondence will be useful later.

Definition 6.2.4 Let (X, D) and (Y, D') be logarithmic pairs of the same dimension n , and let $\Sigma \subset X \times Y$ be a reduced closed analytic subset, generically finite over X and Y . We let $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ be a desingularization, and use the notations (6.3). If both projections pr_1 and pr_2 are proper, and if

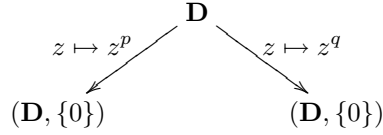
$$R_f - f^*D = R_g - g^*D',$$

then Σ is a log- K -isocorrespondence between (X, D) and (Y, D') .

Note that under these hypotheses, Σ is a log- K -correspondence between (X, D) and (Y, D') , and its transpose $\Sigma^T \subset Y \times X$ is a log- K -correspondence between (Y, D') and (X, D) . The generalized logarithmic Jacobian map then induces an isomorphism of line bundles on $\tilde{\Sigma}$

$$g^*(K_Y(D')) \cong f^*(K_X(D)).$$

Example 6.2.5 We consider the unit disk \mathbf{D} , with maps $f : z \in \mathbf{D} \mapsto z^p \in \mathbf{D}$ and $g : z \in \mathbf{D} \mapsto z^q \in \mathbf{D}$, where p and q are two relatively prime integers. Then the diagram



yields a log- K -autocorrespondence of the pair $(\mathbf{D}, \{0\})$. Indeed, we have the equality of divisors on \mathbf{D}

$$R_f - f^*\{0\} = (p - 1)\{0\} - p\{0\} = -\{0\} = R_g - g^*\{0\}.$$

6.2.2 Composition of log- K -correspondences

We shall now study carefully the composition of two log- K -correspondences. This will allow us in the next section to prove some properties of volume decreasing type for our logarithmic pseudo-volume form.

We first need to define the weaker notion of 0-correspondence, and to study the composition of two of them. Let X and Y be two n -dimensional complex manifolds.

Definition 6.2.6 A 0-correspondence between X and Y is a reduced closed analytic subset $\Sigma \subset X \times Y$, which is generically finite over X and Y , and such that the first projection $\Sigma \rightarrow X$ is proper.

In other words, $\Sigma \subset X \times Y$ has only to satisfy conditions (i) and (ii) of definition 6.2.1 to be a 0-correspondence.

Let Z be a third n -dimensional complex manifold. We denote by p_{lq} the projection of $Z \times X \times Y$ to the l -th and q -th factors.

Proposition-Définition 6.2.1 Let $\Sigma \subset X \times Y$ and $\Sigma' \subset Z \times X$ be two 0-correspondences. We define $\Sigma \circ \Sigma' \subset Z \times Y$ as the union of the components of $p_{13}(p_{12}^{-1}(\Sigma') \cap p_{23}^{-1}(\Sigma))$ on which the projections to Z and Y are generically of maximal rank. Then $\Sigma \circ \Sigma' \subset Z \times Y$ is a 0-correspondence.

Before stating the proof of this, let us see on a simple example why it may be necessary to remove certain irreducible components of $p_{13}(p_{12}^{-1}(\Sigma') \cap p_{23}^{-1}(\Sigma))$. Assume for simplicity that Z , X and Y are surfaces. Suppose we are given two 0-correspondences $\Sigma \subset X \times Y$ and $\Sigma' \subset Z \times X$, and that there exist two irreducible curves $C_Z \subset Z$ and $C_Y \subset Y$, and a point $x_0 \in X$, such that Σ' contains $C_Z \times \{x_0\}$ and Σ contains $\{x_0\} \times C_Y$. In other words, Σ' contains a contraction of the curve C_Z to the point x_0 , and Σ contains a blow-up of the point x_0 onto the curve C_Y . Then $C_Z \times C_Y$ is an irreducible component of $p_{13}(p_{12}^{-1}(\Sigma') \cap p_{23}^{-1}(\Sigma))$ of dimension 2. It is obvious that this component does not satisfy condition (i) of definition 6.2.1. Note that it would correspond to a blow-up of every point of C_X onto the curve C_Z .

Proof. We have a natural identification between $p_{12}^{-1}(\Sigma') \cap p_{23}^{-1}(\Sigma)$ and $\Sigma' \times_X \Sigma$. The first projection $\Sigma' \times_X \Sigma \rightarrow \Sigma'$ is proper by the stability of properness under base change ($\Sigma \rightarrow X$ is proper by the definition of a 0-correspondence). Since the projection $\Sigma' \rightarrow Z$ is proper as well, the composition $\Sigma' \times_X \Sigma \rightarrow \Sigma' \rightarrow Z$ is proper. *A fortiori* $\Sigma \circ \Sigma'$ satisfies condition (ii) of definition 6.2.1. Now condition (i) of definition 6.2.1 is clearly satisfied, and one sees that a component of $p_{13}(p_{12}^{-1}(\Sigma') \cap p_{23}^{-1}(\Sigma))$ which is generically of maximal rank over both Z and Y is necessarily of dimension n . □

We now specify definition 6.2.1 to the case of log- K -correspondences.

Proposition 6.2.7 *Let D_Z and D_Y be Weil divisors of Z and Y respectively, and D_X and D'_X be Weil divisors of X . Assume Σ' is a log- K -correspondence between (Z, D_Z) and (X, D'_X) , and Σ is a log- K -correspondence between (X, D_X) and (Y, D_Y) . If $D'_X \geq D_X$, then $\Sigma \circ \Sigma'$ is a log- K -correspondence between (Z, D_Z) and (Y, D_Y) .*

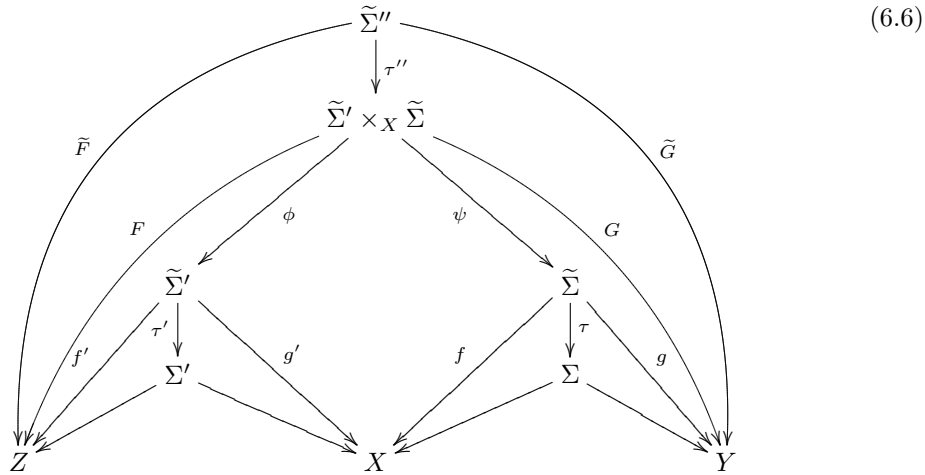
We have to prove that the two generalized logarithmic Jacobian maps $J_{\Sigma}^T : g^*(K_Y(D_Y)) \rightarrow f^*(K_X(D_X))$ and $J_{\Sigma'}^T : g'^*(K_X(D'_X)) \rightarrow f'^*(K_Z(D_Z))$ can be composed on $\tilde{\Sigma}' \times_X \tilde{\Sigma}$, to obtain a generalized logarithmic Jacobian map for $\Sigma \circ \Sigma'$. This composition is of course well defined, since we have a morphism $K_X(D_X) \rightarrow K_X(D'_X)$ of line bundles on X , because of the inequality $D_X \leq D'_X$. We just have to show that all this lifts to a desingularization $\tilde{\Sigma}'' \rightarrow \Sigma \circ \Sigma'$, and that the map we obtain in this way is actually the generalized logarithmic Jacobian map of $\Sigma \circ \Sigma'$. This is a consequence of the following lemma 6.2.8.

We need some further notations to state the lemma properly. We let $\tau' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow \Sigma'$ and $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ be desingularizations of Σ' and Σ respectively. We call f' and g' (resp. f and g) the maps from $\tilde{\Sigma}'$ (resp. $\tilde{\Sigma}$) to Z and X (resp. X and Y). Let ϕ and ψ be the natural projections from $\tilde{\Sigma}' \times_X \tilde{\Sigma}$ to $\tilde{\Sigma}'$ and $\tilde{\Sigma}$. We call Σ'' the union of the components of $\tilde{\Sigma}' \times_X \tilde{\Sigma}$ on which the maps $F := f' \circ \phi$ and $G := g \circ \psi$ to Z and Y are generically of maximal rank. We consider a desingularization $\tau'' : \tilde{\Sigma}'' \rightarrow \Sigma'' \subset \tilde{\Sigma}' \times_X \tilde{\Sigma}$, and call \tilde{F} and \tilde{G} the natural maps from $\tilde{\Sigma}''$ to Z and Y .

Lemma 6.2.8 *With the above notations (see also the diagram below), we have*

$$R_{\tilde{G}} - R_{\tilde{F}} = (\phi \circ \tau'')^*(R_{g'} - R_{f'}) + (\psi \circ \tau'')^*(R_g - R_f)$$

as an equality of divisors on $\tilde{\Sigma}''$.



Proof. Consider $\sigma \in \tilde{\Sigma}''$ and let $z = \tilde{F}(\sigma)$, $x = g' \circ \phi \circ \tau''(\sigma) = f \circ \psi \circ \tau''(\sigma)$, and $y = \tilde{G}(\sigma)$. Let ω_z , ω_x and ω_y be holomorphic n -forms, which generate respectively K_Z near z , K_X near x and K_Y near y . We then have

$$g'^*\omega_x = \chi' \cdot f'^*\omega_z \quad \text{and} \quad g^*\omega_y = \chi \cdot f^*\omega_x,$$

where χ' is a meromorphic function defined on the inverse image $U' \subset \tilde{\Sigma}'$ of a neighbourhood of $(z, x) \in Z \times X$, with divisor $(\chi') = (R_{g'} - R_{f'}) \cap U'$, and χ is similarly a meromorphic function

defined on $U \subset \tilde{\Sigma}$ with divisor $(\chi) = (R_g - R_f) \cap U$. Pulling back these equalities on $\tilde{\Sigma}''$ via $\phi \circ \tau''$ and $\psi \circ \tau''$, one gets

$$\tau''^* \phi^* g'^* \omega_x = \chi' \circ \phi \circ \tau'' \cdot \tau''^* \phi^* f'^* \omega_z \quad \text{and} \quad \tau''^* \psi^* g^* \omega_y = \chi \circ \psi \circ \tau'' \cdot \tau''^* \psi^* f^* \omega_x.$$

Now since $g' \circ \phi = f \circ \psi$, we have $\phi^* g'^* \omega_x = \psi^* f^* \omega_x$, and therefore

$$\tilde{G}^* \omega_y = \chi \circ \psi \circ \tau'' \cdot \chi' \circ \phi \circ \tau'' \cdot \tilde{F}^* \omega_z \quad (6.7)$$

on the inverse image $U'' \subset \tilde{\Sigma}''$ of a neighbourhood of $(z, y) \in Z \times Y$. Note that U'' contains a neighbourhood of $\sigma \in \tilde{\Sigma}''$. The meromorphic function $\chi \circ \psi \circ \tau'' \cdot \chi' \circ \phi \circ \tau''$ has divisor

$$(\tau''^* \phi^* (R_{g'} - R_{f'}) + \tau''^* \psi^* (R_g - R_f)) \cap U''.$$

□

Proof of proposition 6.2.7. Because of proposition 6.2.1, to show that $\Sigma \circ \Sigma'$ is a log- K -correspondence, it only remains to prove the inequality

$$R_{\tilde{F}} - \tilde{F}^* D_Z \leq R_{\tilde{G}} - \tilde{G}^* D_Y.$$

Since Σ' and Σ are log- K -correspondences, we have

$$R_{g'} - R_{f'} \geq g'^* D'_X - f'^* D_Z \quad \text{and} \quad R_g - R_f \geq g^* D_Y - f^* D_X.$$

By lemma 6.2.8, this yields

$$R_{\tilde{G}} - R_{\tilde{F}} \geq \tau''^* \phi^* (g'^* D'_X - f'^* D_Z) + \tau''^* \psi^* (g^* D_Y - f^* D_X).$$

On the other hand, since $D'_X \geq D_X$, and $g' \circ \phi = f \circ \psi$, we have

$$\phi^* g'^* D'_X - \psi^* f^* D_X \geq 0,$$

and therefore

$$R_{\tilde{G}} - R_{\tilde{F}} \geq \tau''^* \psi^* g^* D_Y - \tau''^* \phi^* f'^* D_Z = \tilde{G}^* D_Y - \tilde{F}^* D_Z,$$

which is the desired inequality. Eventually, we see from equality (6.7) that the morphism $J_{\tilde{\Sigma}''}^T$ of line bundles on $\tilde{\Sigma}''$ given by the log- K -correspondence $\Sigma \circ \Sigma'$ is obtained as the composition

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}^*(K_Y(D_Y)) & \xrightarrow{J_{\tilde{\Sigma}''}^T} & \tilde{F}^*(K_Z(D_Z)) \\ \searrow_{(\tau'' \circ \psi)^* J_{\tilde{\Sigma}}^T} & & \nearrow_{(\tau'' \circ \phi)^* J_{\tilde{\Sigma}'}^T} \\ & (\tau'' \circ \psi)^* f^*(K_X(D_X)) \subset (\tau'' \circ \phi)^* g'^*(K_X(D'_X)) & \end{array}$$

of the generalized logarithmic Jacobian maps given by Σ and Σ' .

□

6.3 Intrinsic logarithmic pseudo-volume forms

6.3.1 The Poincaré volume form on the punctured disk

In this paragraph, we describe the Poincaré volume form on the punctured disk $\mathbf{D} \setminus \{0\}$. We will use it later on as a local model to define intrinsic pseudo-volume forms for logarithmic pairs.

The punctured disk $\mathbf{D} \setminus \{0\}$ is the quotient of the upper half-plane \mathbf{H} by the subgroup of $\text{Aut}(\mathbf{H})$ generated by the parabolic transformation $Z \mapsto Z + 1$. The corresponding holomorphic projection map is

$$\pi : Z \in \mathbf{H} \mapsto z = \exp(2\pi i Z) \in \mathbf{D} \setminus \{0\}.$$

We thus get the Poincaré volume form on $\mathbf{D} \setminus \{0\}$ by its expression on \mathbf{H}

$$\frac{i}{2} \frac{dZ \wedge d\bar{Z}}{|Z - \bar{Z}|^2} = \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 (\log |z|^2)^2} \tag{6.8}$$

(cf. example 3.1.5).

It yields a logarithmic volume form on the pair $(\mathbf{D}, \{0\})$, i.e. a volume form with a pole at $z = 0$. It is left invariant by the log- K -autocorrespondences

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{D} & \\ z \mapsto z^p \swarrow & & \searrow z \mapsto z^q \\ (\mathbf{D}, \{0\}) & & (\mathbf{D}, \{0\}) \end{array} \tag{6.9}$$

described in example 6.2.5. Of course, it is also left invariant by the log- K -autocorrespondences of $(\mathbf{D}, \{0\})$ given by the rotations $z \in \mathbf{D} \mapsto e^{i\alpha} \cdot z \in \mathbf{D}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Lemma 6.3.1 *Up to multiplication by a constant, the Poincaré volume form on $\mathbf{D} \setminus \{0\}$ is the only logarithmic pseudo-volume form on $(\mathbf{D}, \{0\})$ that is left invariant by the rotations centred at 0 and by the log- K -autocorrespondences (6.9).*

Proof. Indeed, let

$$\frac{i}{2} \alpha(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2}$$

be such a logarithmic volume form on the pair $(\mathbf{D}, \{0\})$. Since it is invariant under the action of the rotations, $\alpha(z)$ depends only on $|z|$. On the other hand, letting $z = z'^p$, we find

$$\frac{dz}{z} = p \frac{z'^{p-1}}{z'^p} dz' = p \frac{dz'}{z'}$$

By invariance under the action of the log- K -autocorrespondences (6.9), we find that for every $r \in]0, 1[$, and for every relatively prime integers p and q , one has

$$p^2 \alpha(r^p) = q^2 \alpha(r^q).$$

This implies that there exists $\lambda > 0$ such that

$$\frac{i}{2} \alpha(z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2} = \lambda \frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 (\log |z|^2)^2}.$$

□

This shows in particular that the Poincaré logarithmic volume form on $(\mathbf{D}, \{0\})$ is essentially characterized by its invariance under the action of log- K -autocorrespondences of $(\mathbf{D}, \{0\})$. Note that it is locally integrable around $0 \in \mathbf{D}$. We will use its n -dimensional version given below, to define intrinsic logarithmic pseudo-volume forms on general pairs in the next subsection.

We let \mathbf{D}^n be the unit polydisk, with coordinates (z_1, \dots, z_n) , and Δ_k be the divisor given by the equation $z_{n-k+1} \cdots z_n = 0$. Then the pair (\mathbf{D}^n, Δ_k) is equipped with the Poincaré logarithmic volume form

$$\kappa_{n,k} = \left(\frac{i}{2}\right)^n \left(\bigwedge_{1 \leq j \leq n-k} \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{(1 - |z_j|^2)^2} \right) \wedge \left(\bigwedge_{n-k+1 \leq j \leq n} \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{|z_j|^2 (\log |z_j|^2)^2} \right). \quad (6.10)$$

This is a C^∞ logarithmic volume form on $\mathbf{D}^n \setminus \Delta_k$, and it is singular along Δ_k .

6.3.2 Log- K -correspondences and intrinsic logarithmic pseudo-volume forms

In this paragraph, we define the central object of this chapter, the intrinsic pseudo-volume form $\Phi_{X,D}$ of a logarithmic pair (X, D) . We first need to introduce the notion of logarithmic pseudo-volume form.

Definition 6.3.2 *Let (X, D) be a pair composed by a complex manifold X of dimension n , and a Weil divisor D of X . A logarithmic pseudo-volume form on (X, D) is a pseudo-metric on the line bundle $\bigwedge^n T_X(-D)$.*

Let μ be a logarithmic pseudo-volume form on (X, D) . In case it is C^∞ , it writes locally

$$\mu = \frac{1}{|h|^2} \mu',$$

where μ' is a C^∞ pseudo-volume form, and h is a meromorphic function with divisor D : if $D = D_1 - D_2$ with D_1 and D_2 non negative, then h has zeroes exactly along D_1 , and poles exactly along D_2 . It will often be useful to allow μ' to have singularities along the positive part D_1 of D (cf. definition 6.4.1). This is already clear from the expression (6.8) of the logarithmic Poincaré volume form on $(\mathbf{D}, \{0\})$, and more generally from the expression of $\kappa_{n,k}$ in (6.10) above.

Now $\Phi_{X,D}$ is defined as follows (we use the notations introduced in the diagram (6.3)).

Definition 6.3.3 *Let (X, D) be a pair composed by an n -dimensional complex manifold X and a normal crossing Weil divisor D of X , such that the positive part of D is reduced. For every $x \in X$, we let*

$$\Phi_{X,D,x} = \inf_{0 \leq k \leq n} (\inf \{ (f^* \kappa_{n,k})_\sigma, \text{ where } \sigma \in \tilde{\Sigma}, \Sigma \text{ log-}K\text{-correspondence between } (\mathbf{D}^n, \Delta_k) \text{ and } (X, D), \text{ unramified at } \sigma, \text{ with } g(\sigma) = x \}).$$

A log- K -correspondence Σ between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) is said to be unramified at σ if the inequality of divisors

$$R_f - f^* \Delta_k \leq R_g - g^* D$$

is an equality locally around σ . In this case, the transpose of the generalized logarithmic Jacobian yields a morphism of line bundles on $\tilde{\Sigma}$

$$g^* (K_X(D)) \rightarrow K_{\mathbf{D}^n}(\Delta_k),$$

which is an isomorphism locally around σ . This authorizes the identification of $f^* \kappa_{n,k}$ with a Hermitian metric on $g^* (K_X(D))^\vee$ locally around σ , and hence with a logarithmic pseudo-volume element at $x = g(\sigma)$.

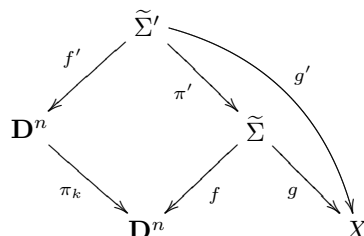
Under the hypotheses of definition 6.3.3, there exists an unramified log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) around every point $x \in X$ (the integer k depends on x). To see this, we write $D = D_1 - D_2$, with D_1 and D_2 non negative, and we choose a local holomorphic system of coordinates (z_1, \dots, z_n) centred at x , and defined on an open set $U \subset X$, such that D_2 is given in U by $z_1^{l_1} \cdots z_r^{l_r} = 0$, and D_1 is given in U by $z_{n-k+1} \cdots z_n = 0$ ($r + k \leq n$). Then D_2 is the ramification divisor of the morphism $U \rightarrow V$ defined by $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1^{l_1+1}, \dots, z_r^{l_r+1}, z_{r+1}, \dots, z_n)$, where V is an open subset of \mathbf{C}^n . In particular, the graph Γ of this morphism is an unramified log- K -correspondence between $(X, D_1 - D_2)$ and (V, D'_1) . Since D'_1 is given in V by the equation $z_{n-k+1} \cdots z_n = 0$, there exists an unramified log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (V, D'_1) . Then $\Gamma^T \circ \Sigma$ is an unramified log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) as we wanted. Note that k is the number of branches at the point x of the positive part D_1 of D .

Proposition 6.3.4 *When $D = 0$, one has $\Phi_{X,0} = \Phi_X$. More generally, when D is effective, we have*

$$\Phi_{X,D}|_{X \setminus D} = \Phi_{X \setminus D}.$$

Proof. The reason for this is simply that the logarithmic volume form $\kappa_{n,k}$ on (\mathbf{D}^n, Δ_k) comes from the Poincaré volume form $\kappa_{n,0}$ on $(\mathbf{D}^n, 0)$, due to the fact that $\mathbf{D}^n \setminus \Delta_k$ is a quotient of \mathbf{D}^n by a group acting freely and properly discontinuously (see paragraph 6.3.1). Let $\pi_k : \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}^n$ be the projection corresponding to this quotient. One has by definition $\pi_k^* \kappa_{n,k} = \kappa_{n,0}$.

Let x be a point in $X \setminus D$, and Σ be a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) , with a point $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ above x , where Σ is unramified. It yields by base change $\pi_k : \mathbf{D}^n \rightarrow \mathbf{D}^n$ a log- K -correspondence Σ' between $(\mathbf{D}^n, 0)$ and $(X \setminus D, 0)$. By the same base change, we get a desingularization $\tilde{\Sigma}'$ of Σ' .



At every point $\sigma' \in \tilde{\Sigma}'$ above σ , we have $(f'^* \kappa_{n,0})_{\sigma'} = (f'^* \pi_k^* \kappa_{n,k})_{\sigma'} = \pi'^*(f^* \kappa_{n,k})_{\sigma}$. In particular, $(f'^* \kappa_{n,0})_{\sigma'}$ and $(f^* \kappa_{n,k})_{\sigma}$ yield the same logarithmic volume element at x . At x , it is therefore sufficient to take the infimum of all $f'^* \kappa_{n,0}$ in the expression of $\Phi_{X,D}$ in definition 6.3.3 (i.e. we only consider $k = 0$), with Σ' log- K -correspondence between $(\mathbf{D}^n, 0)$ and $(X \setminus D, 0)$. By definition, this gives $\Phi_{X \setminus D}$ at the point x . □

When $D = -D_2$ is a negative divisor, a similar argument shows that $\Phi_{X,-D_2}$ can be computed only by looking at log- K -correspondences between $(\mathbf{D}^n, 0)$ and $(X, -D_2)$. In other words, at a point $x \in X$, $\Phi_{X,-D_2}$ is the infimum of all $(f^* \kappa_{n,0})_{\sigma}$ where $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, and Σ is a log- K -correspondence between $(\mathbf{D}^n, 0)$ and $(X, -D_2)$ as in definition 6.3.3.

One has the following obvious comparison results.

Proposition 6.3.5 *Let X be a complex manifold. Let D and D' be normal crossing Weil divisors of X , such that their respective positive parts are reduced. If $D \leq D'$, then one has*

$$\Phi_{X,D} \leq \Phi_{X,D'}.$$

When $D = 0$, one has

$$\Phi_{X,0} = \Phi_X \leq \Psi_X.$$

The inequality $\Phi_X \leq \Psi_X$ is already contained in [Voi04b]. It is a simple consequence of example 6.2.2. The inequality $\Phi_{X,D} \leq \Phi_{X,D'}$ when $D \leq D'$ comes from the fact that a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D') is in particular a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) .

In [Voi04b], Claire Voisin shows that if X is a quotient of \mathbf{D}^n by a group acting freely and properly discontinuously, then Φ_X is simply the Poincaré volume form on X . Then by proposition 6.3.4, we have

$$\Phi_{\mathbf{D}^n, \Delta_k} = \kappa_{n,k}. \quad (6.11)$$

The proof involves curvature arguments, which are generalized in section 6.4. When this is done, we will be able to show equality (6.11) directly (*cf.* theorem 6.4.3).

Lemma 6.3.6 *For any pair (X, D) as in definition 6.3.3, the logarithmic pseudo-volume form $\Phi_{X,D}$ is locally integrable.*

Proof. As we already saw, the Poincaré logarithmic pseudo-volume form

$$\frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 (\log |z|^2)^2}$$

on $(\mathbf{D}, \{0\})$ is integrable at the neighbourhood of 0. As a consequence, the Poincaré pseudo-volume form $\kappa_{n,k}$ on (\mathbf{D}^n, Δ_k) is locally integrable as well.

Now for any pair (X, D) as in definition 6.3.3, and for any point $x \in X$, there exists an integer k , and a log- K -isocorrespondence Σ between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) , which is unramified at the neighbourhood of a point $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ over x . By the expression of $\Phi_{X,D}$ in definition 6.3.3, one then has $(g^* \Phi_{X,D})_\sigma \leq (f^* \kappa_{n,k})_\sigma$. In particular, the growth of $\Phi_{X,D}$ at x is bounded from above by the growth of the Poincaré logarithmic volume form on (\mathbf{D}^n, Δ_k) , and hence $\Phi_{X,D}$ is locally integrable at x . □

An important feature of these intrinsic pseudo-volume forms is their decreasing volume properties (*cf.* proposition 4.1.19 in the standard case). For $\Phi_{X,D}$, we even obtain a preserving volume equality in the case of a proper morphism. These properties are obtained by using the study of the composition of log- K -correspondences, which was carried out in paragraph 6.2.2. The main result is the following.

Theorem 6.3.7 *Let (X, D) and (Y, D') be two pairs composed of a complex manifold and a normal crossing Weil divisor, the positive part of which is reduced. Assume there exists a log- K -correspondence $\Sigma \subset X \times Y$ between (X, D) and (Y, D') . We consider a desingularization $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$, and use the notations of (6.3). Then we have the inequality of logarithmic pseudo-volume forms on $\tilde{\Sigma}$*

$$g^* \Phi_{Y,D'} \leq f^* \Phi_{X,D}.$$

In the case when $D = D' = 0$, this is proved in [Voi04b]. As an immediate consequence of theorem 6.3.7, we have the following.

Corollary 6.3.8 *If Σ is a log- K -isocorrespondence between (X, D) and (Y, D') , then we have the equality of logarithmic pseudo-volume forms on $\tilde{\Sigma}$*

$$g^* \Phi_{Y,D'} = f^* \Phi_{X,D}.$$

Proof. Applying theorem 6.3.7 to the log- K -correspondence Σ on the one hand, and to the log- K -correspondence Σ^T on the other hand gives both inequalities

$$g^*\Phi_{Y,D'} \leq f^*\Phi_{X,D} \quad \text{and} \quad f^*\Phi_{X,D} \leq g^*\Phi_{Y,D'}.$$

One then obviously has the required equality. \square

Applying the former corollary to examples 6.2.2 and 6.2.3, we get the following.

Corollary 6.3.9 (i) *Let $\pi : X \rightarrow Y$ be a proper morphism, with ramification divisor R with normal crossings. Then we have*

$$\Phi_{X,-R} = \pi^*\Phi_{Y,0}.$$

If π is not proper, then we only have $\Phi_{X,-R} \geq \pi^*\Phi_{Y,0}$.

(ii) *Let $\nu : Y \rightarrow X$ be a proper morphism, and D be an effective, reduced, normal crossing divisor on X . We call D' the proper transform of D with a reduced scheme structure. Then D' has normal crossings, and there exist an effective divisor $R \subset Y$, and an exceptional divisor $E \subset Y$, such that ν ramifies exactly along $(\nu^*D - D') - E + R$. If $D' + E - R$ has normal crossings, and if E is reduced, then*

$$\nu^*\Phi_{X,D} = \Phi_{Y,D'+E-R}.$$

If ν is not proper, then we only have $\nu^*\Phi_{X,D} \leq \Phi_{Y,D'+E-R}$.

Having the result of proposition 6.2.7, it is fairly easy to prove the decreasing volume property. The argument is the same as in the standard case of Ψ_X .

Proof of theorem 6.3.7. Let $\sigma \in \tilde{\Sigma}$, $x = f(\sigma)$, and $y = g(\sigma)$. We have to show that for every $\xi \in f^*(\bigwedge^n T_X(-D))_\sigma \subset g^*(\bigwedge^n T_Y(-D'))_\sigma$, one has the inequality $\Phi_{Y,D'}(g_*\xi) \leq \Phi_{X,D}(f_*\xi)$.

Let $\Sigma' \subset \mathbf{D}^n \times X$ be a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) , and $\sigma' \in \tilde{\Sigma}'$ such that $g'(\sigma') = x$, and Σ' is not ramified at σ' . Then there exists $\xi' \in g'^*(\bigwedge^n T_X(-D))_{\sigma'}$ satisfying $g'_*\xi' = f_*\xi$. By definition, $\Phi_{X,D}(f_*\xi)$ is the infimum of the $\kappa_{n,k}(f'_*\xi')$, taken on all such Σ' and ξ' .

Now $\Sigma'' := \Sigma \circ \Sigma' \subset \mathbf{D}^n \times Y$ is a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (Y, D') . It has a desingularization $\tilde{\Sigma}''$ obtained as in the diagram (6.6). We use the same notations here. Since $g'(\sigma') = f(\sigma) = x$, there is a point $\sigma'' \in \tilde{\Sigma}''$ above both σ and σ' , and there exists $\xi'' \in (\psi \circ \tau'')^* f^*(\bigwedge^n T_X(-D))_{\sigma''} = (\phi \circ \tau'')^* g'^*(\bigwedge^n T_X(-D))_{\sigma''}$, such that $(\psi \circ \tau'')_*(\xi'') = \xi$ and $(\phi \circ \tau'')_*(\xi'') = \xi'$. We thus have $\tilde{G}_*\xi'' = g_*\xi$ on the one hand, and $\tilde{F}_*\xi'' = f'_*\xi'$, which implies that $\kappa_{n,k}(\tilde{F}_*\xi'') = \kappa_{n,k}(f'_*\xi')$ on the other hand.

Eventually, we have shown the inclusion of sets

$$\begin{aligned} & \{ \kappa_{n,k}(f'_*\xi'), \text{ with } \Sigma' \subset \mathbf{D}^n \times X, \text{ and } g'_*\xi' = f_*\xi \} \\ & \subset \{ \kappa_{n,k}(f''_*\xi''), \text{ with } \Sigma'' \subset \mathbf{D}^n \times Y, \text{ and } g''_*\xi'' = g_*\xi \}, \end{aligned}$$

where Σ' (resp. Σ'') runs through all log- K -correspondences between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) (resp. (Y, D')). Letting k take any value between 0 and n , and taking the infima, we get the desired inequality $\Phi_{Y,D'}(g_*\xi) \leq \Phi_{X,D}(f_*\xi)$. \square

6.4 Curvature arguments

Let X be a complex manifold. In the case of the standard Kobayashi-Eisenman pseudo-volume form, the Griffiths-Kobayashi-Ochiai theorem 4.1.24 connects the positivity (or rather the negativity) of the curvature of the canonical line bundle of X , and the infinitesimal measure hyperbolicity of X (*i.e.* positivity of Ψ_X , or of $\tilde{\Psi}_X$ in Yau's setting, *cf.* remark 4.1.25). The Kobayashi conjecture 4.1.27 gives a converse statement to this theorem.

We study a logarithmic variant of this conjecture in the logarithmic Calabi-Yau case in section 6.5. In this section, we first establish a generalized Ahlfors-Schwarz lemma in paragraph 6.4.1. Then in paragraph 6.4.2, we use it together with a result of Carlson and Griffiths to prove a version of the Griffiths-Kobayashi-Ochiai theorem relative to the logarithmic pseudo-volume forms $\Phi_{X,D}$. Note that for $D = 0$, this is done in [Voi04b].

6.4.1 Metrics with negative curvature on \mathbf{D}^n

We first need to recall a few facts about the logarithmic hyperbolic volume form $\kappa_{n,k}$ on (\mathbf{D}^n, Δ_k) and its curvature. It is obtained from the Poincaré metric, which has Kähler form

$$\omega_{n,k} = \frac{i}{2} \left(\sum_{1 \leq j \leq n-k} \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{(1 - |z_j|^2)^2} + \sum_{n-k+1 \leq j \leq n} \frac{dz_j \wedge d\bar{z}_j}{|z_j|^2 (\log |z_j|^2)^2} \right)$$

($\kappa_{n,k} = \omega_{n,k}^n/n!$, *cf.* (6.10)). It has Ricci form

$$\begin{aligned} & -i\partial\bar{\partial} \log \left(\prod_{1 \leq j \leq n-k} \frac{1}{(1 - z_j \bar{z}_j)^2} \prod_{n-k+1 \leq j \leq n} \frac{1}{z_j \bar{z}_j (\log(z_j \bar{z}_j))^2} \right) \\ &= 2i \left(\sum_{1 \leq j \leq n-k} \partial \frac{-z_j}{1 - z_j \bar{z}_j} d\bar{z}_j + \sum_{n-k+1 \leq j \leq n} \partial \frac{1}{\bar{z}_j \log(z_j \bar{z}_j)} d\bar{z}_j \right) = -4\omega_{n,k}. \end{aligned}$$

This gives the Kähler-Einstein equation

$$(i\partial\bar{\partial} \log \kappa_{n,k})^n = 4^n \omega_{n,k}^n = 4^n n! \kappa_{n,k}. \quad (6.12)$$

Eventually, we need the following definition to state properly the generalization of Ahlfors-Schwarz lemma in the logarithmic case.

Definition 6.4.1 *Let (X, D) be a pair composed by a complex manifold X , and a Weil divisor $D = D' - D''$, with D' and D'' non negative, and D' reduced and normal crossing. A logarithmic pseudo-volume form μ on (X, D) is said to have singularities of Poincaré type if it is C^∞ on $X \setminus D'$, and if it is equivalent to a non zero multiple of*

$$\prod_{n-k+1 \leq j \leq n} \frac{1}{|z_j|^2 (\log |z_j|^2)^2}$$

at the neighbourhood of D' , assuming it is given by the equation $z_{n-k+1} \cdots z_n = 0$.

Of course, the logarithmic Poincaré volume form $\kappa_{n,k}$ on (\mathbf{D}^n, Δ_k) has singularities of Poincaré type.

Proposition 6.4.2 *Let (X, D) be a pair composed by an n -dimensional complex manifold X and a normal crossing Weil divisor D of X , the positive part of which is reduced. Let $\Sigma \subset \mathbf{D}^n \times X$ be a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) , with desingularization $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$. Let μ be a logarithmic pseudo-volume form on (X, D) , satisfying the three following properties.*

- (a) $i\partial\bar{\partial} \log \mu > 0$.
- (b) μ has singularities of Poincaré type.
- (c) $(i\partial\bar{\partial} \log \mu)^n \geq 4^n n! \mu$.

Then one has the inequality of logarithmic pseudo-volume forms on $\tilde{\Sigma}$

$$g^* \mu \leq f^* \kappa_{n,k}.$$

Note that if D has a positive part, then μ has poles, and therefore inequality (c) cannot be true if μ has no singularity, *i.e.* if it writes locally $\mu'/|h|^2$, where h is a meromorphic function with divisor D , and μ' is a C^∞ pseudo-volume form on X . In this case, $i\partial\bar{\partial} \log \mu = i\partial\bar{\partial} \log \mu'$ is a C^∞ (1,1)-form. In particular, it has no pole on X .

Proof of proposition 6.4.2. We begin by restricting Σ to $\mathbf{D}_{1-\varepsilon}^n := \mathbf{D}(0, 1-\varepsilon)^n$ as follows. We let Σ_ε be the inverse image of Σ *via* the map $((1-\varepsilon)\text{id}, \text{id}) : \mathbf{D}^n \times X \rightarrow \mathbf{D}^n \times X$. This would correspond in the morphism case to the transformation of $\varphi : \mathbf{D}^n \rightarrow X$ into $\tilde{\varphi} := \varphi|_{\mathbf{D}_{1-\varepsilon}^n}((1-\varepsilon) \times \cdot) : \mathbf{D}^n \rightarrow X$. Of course one gets from $\tilde{\Sigma}$ a desingularization $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ of Σ_ε in a natural way, with maps f_ε and g_ε to \mathbf{D}^n and X .

Next, one considers the ratio

$$\psi_\varepsilon := \frac{g_\varepsilon^* \mu}{f_\varepsilon^* \kappa_n}.$$

It is a non-negative C^∞ -function on $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$. To see why, we first write locally $\mu = \mu'/|h|^2$, where h is a meromorphic function with divisor D (*i.e.* it has zeroes along the positive part D_1 of D , and poles along the negative part D_2 of D), and $\mu' = \chi_{\mu'}(i/2)^n \bigwedge_{1 \leq j \leq n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$ is a pseudo-volume form on X , which is C^∞ on $X \setminus D_1$, and singular along D_1 , so that μ has singularities of Poincaré type. On the other hand, we let similarly

$$\chi_{n,k} = \left(\prod_{1 \leq j \leq n-k} (1 - |t_j|^2)^{-2} \right) \left(\prod_{n-k+1 \leq j \leq n} (\log |t_j|^2)^{-2} \right),$$

so that $\kappa_{n,k} = \chi_{n,k}(i/2)^n \bigwedge_{1 \leq j \leq n} dt_j \wedge d\bar{t}_j / |t_{n-k+1} \cdots t_n|^2$. We let $h_k(t) = t_{n-k+1} \cdots t_n$ be a holomorphic equation of $\Delta_k \subset \mathbf{D}^n$. Then ψ_ε writes locally

$$\psi_\varepsilon = \frac{|s_g|^2 g_\varepsilon^* \chi_{\mu'}}{|g_\varepsilon^* h|^2} \cdot \frac{|f_\varepsilon^* h_k|^2}{|s_f|^2 f_\varepsilon^* \chi_{n,k}},$$

where s_f and s_g are local analytic equations of the ramification divisors R_f and R_g respectively. Now since Σ is a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) , one has $R_g - g^* D \geq R_f - f^* \Delta_k$, and therefore $s_g \cdot f_\varepsilon^* h_k / s_f \cdot g_\varepsilon^* h$ is C^∞ on X . In addition, since μ has singularities of Poincaré type, the ratio $g_\varepsilon^* \chi_{\mu'} / f_\varepsilon^* \chi_{n,k}$ is C^∞ on X as well.

Now, $1/\chi_{n,k}$ tends to 0 on the boundary of \mathbf{D}^n , while $\psi_\varepsilon \cdot f_\varepsilon^* \chi_{n,k}$ stays bounded near the boundary of $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$, since $\overline{\mathbf{D}_{1-\varepsilon}^n}$ is compact and f is proper. This gives

$$\lim_{f_\varepsilon(x) \rightarrow \partial \mathbf{D}^n} \psi_\varepsilon(x) = 0,$$

and so by properness of f_ε , the ratio ψ_ε has a maximum on $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$. Let $x_0 \in \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ be a point where this maximum is reached, and write $c := \psi_\varepsilon(x_0)$. Then we just have to show that $c \leq 1$ (we will then get the proposition by letting ε tend to 0).

We now suppose that $c > 1$, and show as in the standard proof that this contradicts hypotheses (a), (b) and (c). For $\alpha \in]1, c[$, define

$$\tilde{\Sigma}_{\varepsilon, \alpha} = \left\{ x \in \tilde{\Sigma}_{\varepsilon} \text{ s.t. } \psi_{\varepsilon}(x) \geq \alpha \right\}.$$

$\psi_{\varepsilon}(x)$ tends to 0 near the boundary of $\tilde{\Sigma}_{\varepsilon}$, so $\tilde{\Sigma}_{\varepsilon, \alpha}$ is compact, and with smooth boundary for α generic. Since $i\partial\bar{\partial} \log \chi_{\mu'} = i\partial\bar{\partial} \log \mu > 0$, and $i\partial\bar{\partial} \log \chi_{n,k} = 4\omega_{n,k} > 0$,

$$\theta := g_{\varepsilon}^* (i\partial\bar{\partial} \log \chi_{\mu'})^{n-1} + g_{\varepsilon}^* (i\partial\bar{\partial} \log \chi_{\mu'})^{n-2} f_{\varepsilon}^* (i\partial\bar{\partial} \log \chi_{n,k}) + \cdots + f_{\varepsilon}^* (i\partial\bar{\partial} \log \chi_{n,k})^{n-1}$$

is a semi-positive $(n-1, n-1)$ -form, positive away from the positive part of $R_f - f^* \Delta_k$. Note that it is $+\infty$ along the negative part of $R_g - g^* D$, i.e. along the positive part of the reduced divisor $(g^* D)_{\text{red}}$, where μ' is singular. Now ψ_{ε} has Laplacian $i\partial\bar{\partial} \log \psi_{\varepsilon} = i\partial\bar{\partial} \log (g_{\varepsilon}^* \chi_{\mu'}) - i\partial\bar{\partial} \log (f_{\varepsilon}^* \chi_{n,k})$, and we have

$$\begin{aligned} (i\partial\bar{\partial} \log \psi_{\varepsilon}) \theta &= g_{\varepsilon}^* (i\partial\bar{\partial} \log \chi_{\mu'})^n - f_{\varepsilon}^* (i\partial\bar{\partial} \log \chi_{n,k})^n \\ &\geq 4^n n! (g_{\varepsilon}^* \mu - f_{\varepsilon}^* \kappa_{n,k}), \end{aligned}$$

where the inequality is given by condition (c) on μ , and by the Kähler-Einstein equation (6.12) for the hyperbolic volume form. Now in $\tilde{\Sigma}_{\varepsilon, \alpha}$ we have $\psi_{\varepsilon} > 1$, and therefore

$$g_{\varepsilon}^* \mu - f_{\varepsilon}^* \kappa_n \geq 0,$$

with strict inequality away from the positive part of $R_f - f^* \Delta_k$ (again, this is $+\infty$ along the positive part of $(g^* D)_{\text{red}}$). Finally the Laplacian $i\partial\bar{\partial} \log \psi_{\varepsilon}$ is semi-positive, and positive away from the positive part of $R_f - f^* \Delta_k$.

When x_0 does not belong to the positive part of $R_f - f^* \Delta_k$, one can conclude from the maximum principle for pluri-subharmonic functions that ψ_{ε} cannot have a maximum at x_0 , which is a contradiction, and proves $c \leq 1$ as we wanted. Otherwise, one has to apply the following standard argument. One chooses m satisfying $\log \alpha < m < \log c$, and then defines a function

$$\mu^+(x) = \max(0, \log \psi_{\varepsilon}(x) - m).$$

It is non-negative, positive at x_0 , and vanishes identically near the boundary $\partial\tilde{\Sigma}_{\varepsilon, \alpha}$. Therefore we have

$$\int_{\tilde{\Sigma}_{\varepsilon, \alpha}} \mu^+ (i\partial\bar{\partial} \log \psi_{\varepsilon}) \theta > 0.$$

Note that the form $(i\partial\bar{\partial} \log \psi_{\varepsilon}) \theta$ is indeed integrable in $\tilde{\Sigma}_{\varepsilon, \alpha}$, because both μ and $\kappa_{n,k}$ only have singularities of Poincaré type. The derivatives of μ^+ are integrable, so we can integrate by parts the previous integral. This gives

$$- \int_{\tilde{\Sigma}_{\varepsilon, \alpha}} \partial \mu^+ \wedge (i\bar{\partial} \log \psi_{\varepsilon}) \theta > 0.$$

Since $\mu^+ = \log \psi_{\varepsilon} - m$ when it is non-zero, the former inequality gives

$$\int_{\tilde{\Sigma}_{\varepsilon, \alpha}} \partial \mu^+ \wedge (i\bar{\partial} \log \psi_{\varepsilon}) \theta = \int_{\{\log \psi_{\varepsilon}(x) \geq m\}} i (\partial \log \psi_{\varepsilon}) \wedge (\bar{\partial} \log \psi_{\varepsilon}) \theta < 0,$$

which is a contradiction, since the right-hand side integral is obviously positive. \square

As a first application of this result, we can show directly that $\Phi_{\mathbf{D}^n, \Delta_k}$ is indeed given by the hyperbolic logarithmic Poincaré volume form (see proposition 6.3.4 as well).

Theorem 6.4.3 For $0 \leq k \leq n$, we have the equality of logarithmic volume forms on (\mathbf{D}^n, Δ_k)

$$\Phi_{\mathbf{D}^n, \Delta_k} = \kappa_{n,k}.$$

Proof. The diagonal in $\mathbf{D}^n \times \mathbf{D}^n$ is a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and itself. By definition 6.3.3, we thus have $\Phi_{\mathbf{D}^n, \Delta_k} \leq \kappa_{n,k}$.

On the other hand, let Σ be a log- K -correspondence between (\mathbf{D}^n, Δ_p) and (\mathbf{D}^n, Δ_k) , with $0 \leq p \leq n$. Then by proposition 6.4.2, and using the standard notations of (6.3), we have $g^* \kappa_{n,k} \leq f^* \kappa_{n,p}$. This implies that $\kappa_{n,k} \leq \Phi_{\mathbf{D}^n, \Delta_k}$. □

6.4.2 Mappings onto pairs with positive logarithmic canonical bundle

Given a Weil divisor D on X , the condition corresponding to the fact that X is of general type is in the logarithmic setting the bigness of $K_X + D$. However, we shall need some slightly stronger hypotheses to generalize the Griffiths-Kobayashi-Ochiai theorem 4.1.24 to the case of the pseudo-volume form $\Phi_{X,D}$.

Theorem 6.4.4 Let (X, D) be a pair composed by a projective n -dimensional complex manifold X , and a normal crossing Weil divisor D of X , the positive part of which is reduced and has global normal crossings. If $K_X + D$ is ample, then $\Phi_{X,D} > 0$ away from a proper closed algebraic subset of X .

As an important consequence of this result, we can bound from above the degree of a morphism of logarithmic pairs, which is onto a pair with positive logarithmic canonical bundle.

Corollary 6.4.5 Let (X, D) be a pair composed by a projective manifold X , and a normal crossing Weil divisor D , the positive part of which is reduced, and has global normal crossings. We assume that $K_X + D$ is ample. Let (Y, D') be another logarithmic pair. We assume that D' has normal crossings, and that its positive part is reduced. For every dominant morphism $\phi : (Y, D') \rightarrow (X, D)$, we have

$$\deg \phi \leq \frac{\int_Y \Phi_{Y,D'}}{\int_X \Phi_{X,D}}.$$

Proof. The morphism ϕ induces a log- K -correspondence between (Y, D') and (X, D) (cf. example 6.2.3). By decreasing volume property, we thus have

$$\phi^* \Phi_{X,D} \leq \Phi_{Y,D'}. \tag{6.13}$$

Since for $0 \leq k \leq n$, the volume form $\kappa_{n,k}$ is integrable at the neighbourhood of Δ_k , and since X and Y are compact, definition 6.3.3 implies that the pseudo-volume forms $\Phi_{X,D}$ and $\Phi_{Y,D'}$ are integrable on X and Y respectively. In particular, (6.13) yields

$$(\deg \phi) \int_X \Phi_{X,D} \leq \int_Y \Phi_{Y,D'}.$$

Now, by theorem 6.4.4, the integral $\int_X \Phi_{X,D}$ is positive, so $\deg \phi$ is bounded from above. □

Along with Ahlfors-Schwarz lemma 6.4.2, the main ingredient in the proof of theorem 6.4.4 above is the following result.

Lemma 6.4.6 (Carlson-Griffiths, [CG72a]) Let (X, D) be a pair as in theorem 6.4.4. Then there exists a logarithmic volume form with Poincaré singularities μ on (X, D) , such that $i\partial\bar{\partial} \log \mu > 0$ and $(i\partial\bar{\partial} \log \mu)^n \geq \mu$.

For a complete proof of this, we refer to [Gri76], proposition 2.17. Let us still explain how this pseudo-volume form is constructed. We choose a Hermitian metric h_0 on K_X . Equivalently, h_0^{-1} is a C^∞ volume form μ_X on X . We assume for simplicity that D is effective, the general case follows easily. Then D is assumed to have global normal crossings, so it writes $D = D_1 + \dots + D_p$, where the D_j are smooth divisors on X , meeting transversally. We choose a Hermitian metric h_j for every line bundle $\mathcal{O}_X(D_j)$, and we let s_j be a global section of this line bundle, with zero divisor D_j . Then for $\alpha > 0$ sufficiently small, the pseudo-volume form

$$\mu_\alpha := \frac{\mu_X}{\prod_{j=1}^p h_j(s_j) (\log(\alpha h_j(s_j)))^2}$$

satisfies the required properties.

Before we continue, we want to underline that this result is used as a first step in the construction of complete Kähler-Einstein metrics with negative Ricci curvature on the complement of hypersurfaces of projective algebraic manifolds (see [Kob84] and [TY87]).

Proof of theorem 6.4.4. By lemma 6.4.6, there exists a logarithmic pseudo-volume form μ on (X, D) , with Poincaré singularities, and such that $i\partial\bar{\partial} \log \mu > 0$, and $(i\partial\bar{\partial} \log \mu)^n \geq \mu$. Up to a rescaling, one can assume that μ satisfies hypothesis (c) of lemma 6.4.2. Then if $0 \leq k \leq n$, and for every log- K -correspondence Σ between (\mathbf{D}^n, Δ_k) and (X, D) , we have the inequality of pseudo-volume forms on a desingularization $\tilde{\Sigma}$

$$g^* \mu \leq f^* \kappa_{n,k}.$$

It thus follows from the definition 6.3.3 of $\Phi_{X,D}$ that $\Phi_{X,D} \geq g^* \mu$, which implies that $\Phi_{X,D}$ is positive on a Zariski dense open subset of X , since μ is a true logarithmic volume form on (X, D) . □

6.5 Log- K -autocorrespondences on log- K -trivial pairs

In this section, we prove that for many pairs (X, D) , where X is a complex manifold, and D an effective divisor on X , which is reduced and has normal crossings, such that the line bundle $K_X(D)$ is trivial, the pseudo-volume form $\Phi_{X,D}$ vanishes. Again, the case $D = 0$ is handled in [Voi04b]. However, one has to be slightly more careful in our case for the proof. This is due to the fact that we need to pull-back differential forms *via* correspondences, instead of cohomology classes.

6.5.1 Log- K -autocorrespondences and the Kobayashi conjecture

In view of theorem 6.4.4, which has to be seen as a logarithmic version of the Kobayashi-Ochiai theorem for $\Phi_{X,D}$, the Kobayashi conjecture generalizes as follows in the logarithmic case.

Conjecture 6.5.1 *Let (X, D) be a pair composed by a projective manifold X and a normal crossing Weil divisor $D \subset X$, the positive part of which is reduced. If (X, D) is not of log-general type (i.e. if $K_X + D$ is not big), then $\Phi_{X,D}$ vanishes on a dense Zariski open subset of X .*

This section is devoted to the proof of the following result, which goes in the direction of this conjecture.

Theorem 6.5.2 *Let (X, D) be a pair consisting of a smooth projective variety X , and an effective divisor $D \subset X$, which is reduced and has normal crossings, such that $K_X(D)$ is trivial. Assume that there exists a smooth, rationally connected variety Y , such that X can be realized as a hypersurface $X \subset Y$, $D = X \cap X'$, where $X' \subset Y$ is a reduced hypersurface such that $X + X' \in |-K_Y|$. Then $\Phi_{X,D} = 0$.*

Note that this shows the log-Kobayashi conjecture for a very wide class of log- K -trivial pairs.

The next proposition shows why this theorem is an easy consequence of the existence on such pairs of log- K -autocorrespondences (*i.e.* log- K -isocorrespondences between a pair (X, D) and itself, see definition 6.2.4) satisfying a certain dilation property.

Proposition 6.5.3 *Let (X, D) be a pair composed by a smooth projective variety X , and an effective divisor $D \subset X$, which is reduced and has normal crossings, such that $K_X(D)$ is trivial. Let η_X be a generator of $H^0(X, K_X(D))$. If there exists a log- K -autocorrespondence Σ of the pair (X, D) , such that for a desingularization $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$, and with the notations (6.3) of definition 6.2.1, one has*

$$f^*\eta_X = \lambda g^*\eta_X,$$

where λ is a complex number with $|\lambda| \neq 1$, then $\Phi_{X,D} = 0$.

Proof. Let $\Omega_{X,D}$ be defined as

$$\Omega_{X,D} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} i^n \eta_X \wedge \bar{\eta}_X.$$

The dilation property satisfied by Σ shows that

$$f^*\Omega_{X,D} = |\lambda|^2 g^*\Omega_{X,D},$$

while corollary 6.3.8 gives the equality of pseudo-volume forms

$$f^*\Phi_{X,D} = g^*\Phi_{X,D}. \quad (6.14)$$

Now there exists a bounded, upper semi-continuous function χ on X , such that $\Phi_{X,D} = \chi\Omega_{X,D}$. χ has a maximum on X . Let x be a point on X where $\chi(x)$ is this maximum. Then take $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ such that $f(\sigma) = x$, and let $y = g(\sigma)$. Equality (6.14) eventually gives $\chi(y) = |\lambda|^2 \chi(x)$. Since of course we can assume $|\lambda| > 1$ by symmetry, this shows that $\chi(x) = 0$, and hence that $\chi = 0$ as we wanted. \square

Now the proof of 6.5.2 amounts to show the following theorem. This is done in the remainder of this section.

Theorem 6.5.4 *If (X, D) is a pair satisfying the condition of theorem 6.5.2, then there exists a log- K -autocorrespondence of (X, D) , such that (with the notations of proposition 6.5.3)*

$$mf^*\eta_X = -m'g^*\eta_X, \quad (6.15)$$

where m and m' are distinct positive integers.

In fact, by the following remark, it is enough to prove that there exists a proper 0-correspondence $\Sigma \subset X \times X$ (*cf.* definition 6.2.6) satisfying relation (6.15).

Remark 6.5.5 Let $\Sigma \subset X \times X$ be a reduced closed analytic subset, with both projections proper and generically finite. If $m f^* \eta_X = -m' g^* \eta_X$ (with the notations of proposition 6.5.3), then Σ is a log- K -autocorrespondence of (X, D) .

Indeed, η_X is an everywhere non zero section of $K_X(D)$, so the meromorphic n -form $f^* \eta_X$ (resp. $g^* \eta_X$) on $\tilde{\Sigma}$ has divisor $R_f - f^* D$ (resp. $R_g - g^* D$), *i.e.* it has zeroes along R_f , and poles along $f^* D$. Equality (6.15) thus yields the equality of divisors

$$R_f - f^* D = R_g - g^* D$$

on the desingularization $\tilde{\Sigma}$, proving that Σ is a log- K -autocorrespondence of (X, D) .

6.5.2 Geometric construction of self-correspondences on log- K -trivial pairs

From now on, we let Y be a smooth, rationally connected variety of dimension $n + 1$, and $\bar{X} \subset Y$ be a reduced hypersurface in the anticanonical linear class of Y (*i.e.* $\bar{X} \in |-K_Y|$), with smooth locus $\text{sm}(\bar{X}) \subset \bar{X}$. By adjunction, \bar{X} has a canonical sheaf $K_{\bar{X}}$, and it is trivial. We construct in this section a 0-correspondence $\Sigma \subset \bar{X} \times \bar{X}$. In [Voi04b], such correspondences were constructed in the case of smooth \bar{X} , and proved to be K -autocorrespondences. The process is in some way analogous to the geometric definition of addition on an elliptic curve in \mathbf{P}^2 . Of course, we have in mind the case when $\bar{X} = X \cup X'$ is the reunion of two reduced hypersurfaces, X smooth, and $D := X \cap X'$ is reduced and has normal crossings, which will give theorem 6.5.4 for the pair (X, D) , where D is seen as a divisor of X .

Since Y is rationally connected, there exists a rational curve $C_0 \subset Y$ satisfying the two following conditions.

(i) C_0 does not meet the singular part of \bar{X} , and $C_0 \cap \bar{X} = mx_0 + m'y_0 + z_0$ as a divisor on C_0 , where x_0 and y_0 are distinct points of $\text{sm}(\bar{X})$, m and m' are (fixed) distinct positive integers, and z_0 is a reduced 0-cycle on C_0 , disjoint from x_0 and y_0 .

(ii) The deformations of the subscheme $C_0 \subset Y$ induce arbitrary deformations of the M -jet of C_0 at two points of intersection with \bar{X} , where $M := \max(m, m')$.

This is given by the fact that C_0 can be chosen with arbitrarily ample normal bundle, because Y is rationally connected (see [KMM92b]).

In addition, one chooses a hypersurface $W \subset \bar{X}$ containing the 0-cycle z_0 . We denote by $|C_0|$ the space parametrizing all deformations of the subscheme $C_0 \subset Y$. Now define $\Sigma_{tot.} \subset \text{sm}(\bar{X}) \times \text{sm}(\bar{X}) \times |C_0|$ by

$$\Sigma_{tot.} := \{(x, y, C) \text{ s.t. } C \text{ deformation of } C_0, \\ C \cap \bar{X} = mx + m'y + z, \text{ supp}(z) \subset W\}. \quad (6.16)$$

Proposition 6.5.6 *For a generic choice of W , the Zariski closure of $\Sigma_{tot.}$ in $\bar{X} \times \bar{X} \times |C_0|$ has a unique n -dimensional irreducible component through the point (x_0, y_0, C_0) . We call this component Σ' . The Zariski closure of the projection of Σ' in $\bar{X} \times \bar{X}$ is irreducible of dimension n . Let us denote it Σ . Then $\Sigma \subset \bar{X} \times \bar{X}$ is a 0-correspondence.*

We call f' and g' the two morphisms $\Sigma' \rightarrow \bar{X}$ given by the projections of $\bar{X} \times \bar{X} \times |C_0|$ on its first and second factors respectively. Σ is an n -dimensional component of the closure of $(f', g')(\Sigma')$.

Proof. The proposition essentially follows from the fact that, for a generic choice of W , $\Sigma_{tot.}$ is smooth and of dimension $n = \dim \bar{X}$ at the point (x_0, y_0, C_0) . This gives the existence of a unique component Σ' at once. On the other hand, since the deformations of $C_0 \subset Y$ induce arbitrary deformations of the M -jet of C_0 at x_0 and y_0 , this implies that the image $(f', g')(\Sigma') \subset \bar{X} \times \bar{X}$ has a component of dimension n .

So let us show that $\Sigma_{tot.}$ is smooth and of dimension n near (x_0, y_0, C_0) . We first study the Hilbert scheme of $C_0 \subset Y$ at the infinitesimal neighbourhood of C_0 . Since C_0 is a rational curve, and its normal bundle $N_{C_0/Y}$ is ample, we have $h^1(C_0, N_{C_0/Y}) = 0$, and the Hilbert scheme of $C_0 \subset Y$ is smooth, and of dimension

$$h^0(C_0, N_{C_0/Y}) = \chi(C_0, N_{C_0/Y}).$$

By the Riemann-Roch formula,

$$\begin{aligned} \chi(C_0, N_{C_0/Y}) &= \deg(N_{C_0/Y}) + \text{rg}(N_{C_0/Y})(1 - g) \\ &= -K_Y \cdot C_0 + (2g - 2) + n(1 - g) = n - 2 - K_Y \cdot C_0 \end{aligned}$$

($g = 0$ is the geometric genus of C_0). Now to compute the dimension of $\Sigma_{tot.}$, we note that we impose to the deformations C of C_0 to meet \bar{X} properly and in the smooth locus $\text{sm}(\bar{X})$ (this is open), and to have intersection $C \cap \bar{X} = mx + m'y + z$, with $\text{supp}(z) \subset W$. This imposes at most $(m - 1) + (m' - 1) + \deg z$ conditions. In fact, for a generic choice of W , these conditions are infinitesimally independent at the starting point (x_0, y_0, C_0) . We deduce from this that $\Sigma_{tot.}$ is smooth at the neighbourhood of (x_0, y_0, C_0) , and, since $\bar{X} \in |-K_Y|$, of dimension

$$(-K_Y \cdot C_0 + n - 2) - (m + m' - 2 + \deg z) = n - K_Y \cdot C_0 - \bar{X} \cdot C_0 = n.$$

□

6.5.3 Realization as log- K -autocorrespondences

When $\bar{X} = X \cup X'$ is the union of two reduced hypersurfaces, and if X is smooth, then a section of $K_{\bar{X}}$ gives a meromorphic n -form on the component X by restriction to the smooth locus of \bar{X} . In this subsection, we show the following.

Theorem 6.5.7 *Let $\Sigma \subset \bar{X} \times \bar{X}$ be as before (see proposition 6.5.6). We consider a desingularization $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ and use the notations (6.3) of definition 6.2.1. Let $\eta_{\bar{X}}$ be a generator of $H^0(\bar{X}, K_{\bar{X}})$ (recall that $K_{\bar{X}}$ is trivial). We have the equality of meromorphic differential n -forms on $\tilde{\Sigma}$*

$$mf^*\eta_{\bar{X}} + m'g^*\eta_{\bar{X}} = 0. \quad (6.17)$$

Specializing this result to the case $\bar{X} = X \cup X'$ already mentioned, we get the following corollary. Of course, it proves theorem 6.5.4, and because of proposition 6.5.3, we get our main theorem 6.5.2 (cf. subsection 6.5.1).

Corollary 6.5.8 *If $\bar{X} = X \cup X'$ is the union of two reduced hypersurfaces, X smooth, and $D := X \cap X'$ reduced, then Σ induces a 0-correspondence $\Sigma_1 := \Sigma \cap (X \times X) \subset X \times X$. If η_X is a generator of $H^0(X, K_X(D))$, then we have the equality of meromorphic differential n -forms*

$$mf_1^*\eta_X + m'g_1^*\eta_X = 0$$

on a desingularization $\tilde{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1$, where f_1 and g_1 are the natural morphisms $\Sigma_1 \rightarrow X$. In particular, Σ_1 is a log- K -autocorrespondence of the pair (X, D) .

Proof. In this case, $\Sigma \subset \bar{X} \times \bar{X}$ splits into four components, contained in $X \times X$, $X \times X'$, $X' \times X$ and $X' \times X'$ respectively. Of course, the desingularization $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ splits as well. The first component gives $\Sigma_1 \subset X \times X$, equipped with a desingularization $\tilde{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1$ induced by τ .

On the other hand, we have by adjunction

$$(K_{\overline{X}})|_X = K_Y(\overline{X})|_X = K_Y(X)|_X \otimes \mathcal{O}_X(X') = K_X(D).$$

In particular, since $K_{\overline{X}}$ is trivial, $K_X(D)$ is trivial as well, and if $\eta_{\overline{X}}$ is a generator of $H^0(\overline{X}, K_{\overline{X}})$, then its restriction $\eta_X := \eta_{\overline{X}}|_X$ is a generator of $H^0(X, K_X(D))$. Since X is smooth, η_X is a meromorphic differential n -form, with polar divisor D . It is now clear from theorem 6.5.7 that we have the equality of meromorphic n -forms

$$mf_1^*\eta_X + m'g_1^*\eta_X = 0$$

on the desingularization $\tilde{\Sigma}_1 \rightarrow \Sigma_1$. By remark 6.5.5, this implies that Σ_1 is a log- K -autocorrespondence of (X, D) .

Proof of theorem 6.5.7. We consider a desingularization $\tau' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow \Sigma'$, with maps $\tilde{f} : \tilde{\Sigma}' \rightarrow \overline{X}$ and $\tilde{g} : \tilde{\Sigma}' \rightarrow \overline{X}$. It is enough to show (6.17) on $\tilde{\Sigma}'$, that is □

$$m\tilde{f}^*\eta_{\overline{X}} = -m'\tilde{g}^*\eta_{\overline{X}}. \tag{6.18}$$

The reason for this is that $(\Sigma, \text{pr}_1, \text{pr}_2)$ is the Stein factorization of (Σ', f', g') (and also of $(\tilde{\Sigma}', \tilde{f}, \tilde{g})$). In fact, since (6.18) is an equality of meromorphic differential forms, it is enough to prove it locally, and on a dense open subset of $\tilde{\Sigma}'$.

We construct three 0-correspondences $\Gamma_{x,y}$, Γ_z and Γ_C between Σ' and \overline{X} . Each of them is defined by its fiber over a generic point $\sigma = (x, y, C) \in \Sigma'$. We describe these generic fibers as subschemes of \overline{X} .

-The fiber of $\Gamma_{x,y}$ over σ is the 0-cycle $m \cdot x + m' \cdot y$.

-The fiber of Γ_z over σ is the 0-cycle $C \cdot X - m \cdot x - m' \cdot y$. For σ generic, this is the part of the intersection $C \cap \overline{X}$ that lies on the hypersurface $W \subset \overline{X}$.

-The fiber of Γ_C over σ is the 0-cycle $C \cap \overline{X}$. Γ_C can also be defined globally as $\mathcal{C} \cap (\Sigma' \times \overline{X}) \subset \Sigma' \times Y$, where \mathcal{C} is the universal curve over Σ' .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \hookrightarrow & \Sigma' \times Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \Sigma' \end{array}$$

Now, following an idea of Mumford ([Mum68]), we define the pull-back of $\eta_{\overline{X}}$ by a 0-correspondence $\Gamma \subset \Sigma' \times \overline{X}$. In fact, since it is enough to prove (6.18) locally and on a dense open subset of $\tilde{\Sigma}'$, we only need to define the pull-back of the restriction of $\eta_{\overline{X}}$ to a dense open subset of \overline{X} . We thus define a smooth, dense open subset $\Sigma^\circ \subset \Sigma'$ in the following way (since it is smooth, Σ° can also be seen as a dense open subset of $\tilde{\Sigma}'$). We let pr_{12} be the projection $\overline{X} \times \overline{X} \times |C_0| \rightarrow \overline{X} \times \overline{X}$. Then Σ° is the subset of $\Sigma' \cap \text{pr}_{12}^{-1}(\text{sm}(\overline{X}) \times \text{sm}(\overline{X}))$, above which the projection $\Gamma_C \rightarrow \Sigma'$ is finite. By restricting Σ° , one can assume that it is smooth, and that it is a self-0-correspondence of a smooth, dense open subset $X^\circ \subset \overline{X}$. We call Γ° the restriction of Γ to $\Sigma^\circ \times X^\circ$, and φ and ψ the two projections of Γ° on Σ° and X° respectively. The key point here is the fact that φ is proper. Of course, one can also assume Γ° to be smooth.

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma^\circ & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ \Sigma^\circ & & X^\circ \end{array}$$

We now define the pull-back by Γ° of the restriction $\eta^\circ := \eta_{\overline{X}}|_{X^\circ}$. Since $X^\circ \subset \text{sm}(\overline{X})$, η° is a holomorphic differential n -form on X° . Its pull-back $\psi^*\eta^\circ$ is then a holomorphic n -form on Γ° . Eventually, we let

$$(\Gamma^\circ)^*\eta^\circ := \varphi_*\psi^*\eta^\circ,$$

where φ_* is the trace map relative to φ . $(\Gamma^\circ)^*\eta^\circ$ is a holomorphic n -form on Σ° . It extends to a meromorphic n -form on the smooth variety $\widetilde{\Sigma}'$; we call it $\Gamma^*\eta_{\overline{X}}$. The definition of the trace map φ_* is classical. It goes as follows. Let ω be a holomorphic n -form on Γ° . If $U \subset \Sigma^\circ$ is an open subset above which φ is not ramified, then $\varphi^{-1}U$ is the disjoint union of d open subsets $U_1, \dots, U_d \subset \Gamma^\circ$, which are all isomorphic to U . On U , $\varphi_*\omega$ is defined as the sum

$$\omega|_{U_1} + \dots + \omega|_{U_d}.$$

Then all these local definitions glue together to give a well defined holomorphic n -form $\varphi_*\omega$ on Σ° , even if φ ramifies on Γ° .

We now have all the definitions we need to end the proof. The equality (6.18) is a simple consequence of the following proposition.

Proposition 6.5.9 *The holomorphic n -form $(\Gamma_{x,y}^\circ)^*\eta^\circ$ on Σ° vanishes.*

To see why this implies (6.18), we let $\Gamma_{f'}^\circ \subset \Sigma^\circ \times X^\circ$ and $\Gamma_{g'}^\circ \subset \Sigma^\circ \times X^\circ$ denote the restrictions to $\Sigma^\circ \times X^\circ$ of the graphs of $f' : \Sigma' \rightarrow \overline{X}$ and $g' : \Sigma' \rightarrow \overline{X}$ respectively. By construction, we have the equality of n -cycles in $\Sigma^\circ \times X^\circ$

$$\Gamma_{x,y}^\circ = m\Gamma_{f'}^\circ + m'\Gamma_{g'}^\circ.$$

This implies that $(\Gamma_{x,y}^\circ)^*\eta^\circ = mf'^*\eta^\circ + m'g'^*\eta^\circ$. So proposition 6.5.9 yields the equality (6.18) by continuity. □

Proof of proposition 6.5.9. By construction, we have $\Gamma_{x,y} + \Gamma_z = \Gamma_C$ as n -cycles in $\Sigma' \times \overline{X}$, and therefore $\Gamma_{x,y}^\circ + \Gamma_z^\circ = \Gamma_C^\circ$ in $\Sigma^\circ \times X^\circ$. The vanishing of proposition 6.5.9 is a consequence of the two vanishings $(\Gamma_z^\circ)^*\eta^\circ = (\Gamma_C^\circ)^*\eta^\circ = 0$ of holomorphic n -forms on Σ° .

The first one is given by the fact that Γ_z is contained in $\Sigma' \times W \subset \Sigma' \times X$. Let $\nu : \widetilde{W} \rightarrow W^\circ \subset X^\circ$ be a desingularization of $W^\circ := W \cap X^\circ$, and consider the following 0-correspondence obtained by base change.

$$\begin{array}{ccc} & (\Gamma_z^\circ)' & \\ \tilde{\varphi} \swarrow & & \searrow \psi \\ \Sigma^\circ & & \widetilde{W} \xrightarrow{\nu} X^\circ \end{array}$$

One has $(\Gamma_z^\circ)^*\eta^\circ = (\Gamma_z^\circ)'*\nu^*\eta^\circ = 0$, because $\dim W < n$ and therefore $\nu^*\eta^\circ = 0$.

As for the second one, it is a consequence of proposition 6.5.11 below. This proposition says that we have an equality of meromorphic forms on $\widetilde{\Sigma}'$

$$\Gamma_C^*\eta_{\overline{X}} = \mathcal{C}^*l_*\eta_{\overline{X}}. \tag{6.19}$$

Here, $l_* : H^0(\overline{X}, K_{\overline{X}}) \rightarrow H^1(Y, K_Y)$ is a push-forward map induced by the inclusion $l : \overline{X} \subset Y$, and $\mathcal{C}^* : H^1(Y, K_Y) \rightarrow H^0(\widetilde{\Sigma}', K_{\widetilde{\Sigma}'})$ is given by the correspondence between smooth varieties $\widetilde{\mathcal{C}} \subset \widetilde{\Sigma}' \times Y$, obtained by base change from the universal family $\mathcal{C} \subset \Sigma' \times Y$. Now, since Y is rationally connected, we have $H^1(Y, K_Y) = 0$. We deduce from this that $l_*\eta_{\overline{X}} = 0$, and therefore that $\Gamma_C^*\eta_{\overline{X}} = 0$. *A fortiori*, we have $(\Gamma_C^\circ)^*\eta^\circ = 0$ by restriction to Σ° . □

Remark 6.5.10 In fact, given a 0-correspondence $\Gamma \subset \Sigma' \times \overline{X}$, it is possible to define at once a meromorphic differential form $\Gamma^* \eta_{\overline{X}}$ on the desingularization $\widetilde{\Sigma}'$ of Σ in the following way.

By base change, Γ yields a correspondence between $\widetilde{\Sigma}'$ and \overline{X} . Let $\widetilde{\Gamma}$ be a desingularization of this new correspondence, and let $\widetilde{\varphi}$ and $\widetilde{\psi}$ be the natural morphisms from $\widetilde{\Gamma}$ to $\widetilde{\Sigma}'$ and \overline{X} respectively. Since \overline{X} is not necessarily smooth, the pull-back $\widetilde{\psi}^* \eta_{\overline{X}}$ is *a priori* a meromorphic form on $\widetilde{\Sigma}'$. It can be seen as an element of $H^0(\widetilde{\Gamma}, K_{\widetilde{\Gamma}}(-R + S)) \subset H^0(\widetilde{\Gamma}, K_{\widetilde{\Gamma}}(S))$, where R is the ramification divisor of $\widetilde{\psi}$, and S is the effective divisor containing the poles induced by the singularities of \overline{X} . Now, let $S' := \widetilde{\varphi}_* S$ be an effective divisor on $\widetilde{\Sigma}'$. We have $S \subset \widetilde{\varphi}^* S'$, so we have a morphism $\widetilde{\varphi}_* : H^0(\widetilde{\Gamma}, K_{\widetilde{\Gamma}}(S)) \rightarrow H^0(\widetilde{\Sigma}', K_{\widetilde{\Sigma}'}(S'))$, defined by Serre duality as the transpose of the pull-back map $\widetilde{\varphi}^* : H^n(\widetilde{\Sigma}', \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}'}(-S')) \rightarrow H^n(\widetilde{\Gamma}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(-S))$. We then let

$$\Gamma^* \eta_{\overline{X}} := \widetilde{\varphi}_* \widetilde{\psi}^* \eta_{\overline{X}}.$$

This is an element of $H^0(\widetilde{\Sigma}', K_{\widetilde{\Sigma}'}(S'))$. It can be represented by a meromorphic form on $\widetilde{\Sigma}'$ whose restriction to Σ° is the holomorphic form $(\Gamma^\circ)^* \eta^\circ$. This meromorphic form is the form $\Gamma^* \eta_{\overline{X}}$ defined in the proof of theorem 6.5.7.

This global construction is however somewhat misleading, in the sense that we consider $\Gamma^* \eta_{\overline{X}}$ as a meromorphic differential form on $\widetilde{\Sigma}'$, and not as a cohomology class. In addition, we will be mainly concerned by its restriction on Σ° , and we will compute this holomorphic restriction locally.

Let us now define precisely the various maps involved in formula (6.19). Let l be the inclusion $\overline{X} \subset Y$. We define a push-forward morphism l_* , as the boundary morphism $H^0(\overline{X}, K_{\overline{X}}) \rightarrow H^1(Y, K_Y)$ of the long exact sequence associated to the Poincaré residue exact sequence

$$0 \rightarrow K_Y \rightarrow K_Y(\overline{X}) \rightarrow K_{\overline{X}} \rightarrow 0.$$

On the other hand, we consider $\mathcal{C} \subset \Sigma' \times Y$, which is the universal curve relative to the parametrizing variety Σ' . We call Φ and Ψ the two projections on Σ' and Y respectively. By base change, \mathcal{C} gives a correspondence in $\widetilde{\Sigma}' \times Y$. Desingularizing this new correspondence, we obtain the following diagram, where $\widetilde{\mathcal{C}}$ is smooth, as well as $\widetilde{\Sigma}'$ and Y .

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\mathcal{C}} & \\ \widetilde{\Phi} \swarrow & & \searrow \widetilde{\Psi} \\ \widetilde{\Sigma}' & & Y \end{array}$$

This yields a Mumford pull-back $\mathcal{C}^* : H^1(Y, K_Y) \rightarrow H^1(\widetilde{\Sigma}', K_{\widetilde{\Sigma}'})$, defined as the composition

$$H^1(Y, K_Y) \xrightarrow{\widetilde{\Psi}^*} H^1(\widetilde{\mathcal{C}}, K_{\widetilde{\mathcal{C}}}) \xrightarrow{(\widetilde{\Phi}^*)^T} H^1(\widetilde{\Sigma}', K_{\widetilde{\Sigma}'}),$$

where the last morphism is obtained by Serre duality as the transpose of the pull-back map $\widetilde{\Phi}^* : H^n(\widetilde{\Sigma}', \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}'}) \rightarrow H^n(\widetilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$.

Proposition 6.5.11 *We have $\Gamma_{\mathcal{C}}^* \eta_{\overline{X}} = \mathcal{C}^* l_* \eta_{\overline{X}}$, as an equality of meromorphic forms on $\widetilde{\Sigma}'$.*

Again, this is an equality of meromorphic forms, so we can prove it locally in the dense open subset $\Sigma^\circ \subset \widetilde{\Sigma}'$, where it is an equality of holomorphic differential forms.

Now the situation is the following. \mathcal{C} is a family of curves over Σ' . These curves are embedded in Y . $\Gamma_{\mathcal{C}}$ is cut out on $\mathcal{C} \subset \Sigma' \times Y$ by $\Sigma' \times \overline{X}$, and since $\overline{X} \subset Y$ is a divisor, $\Gamma_{\mathcal{C}}$ can be seen as a family of divisors on the curves of the family \mathcal{C} . So basically, proposition 6.5.11 is just a generalization of the following result on curves, which is an application of the residue theorem.

Lemma 6.5.12 *Let C be a smooth curve, and $j : Z \subset C$ be an effective divisor. We have a push-forward morphism $j_* : H^0(Z, K_Z) \rightarrow H^1(C, K_C)$, taken from the long exact sequence associated to the Poincaré residue exact sequence*

$$0 \rightarrow K_C \rightarrow K_C(Z) \rightarrow K_Z \rightarrow 0.$$

The following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccc} H^0(Z, K_Z) & \xrightarrow{j_*} & H^1(C, K_C) \\ & \searrow j_Z & \downarrow f_C \\ & & \mathbf{C} \end{array}$$

Proof. We first study the case when Z is a single point $x \in C$ with multiplicity μ . It will then easily extend to the general case, as will be seen from the proof. We begin by defining a C^∞ function

$$\rho : z \in \mathbf{D} \mapsto \exp\left(\frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}\right) \in \mathbf{R}.$$

It extends by 0 on the complementary of the unit disk in \mathbf{C} to a C^∞ function $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$. It also satisfies $\rho(0) = 1$.

We then consider a neighbourhood $U \subset C$ of $x \in C$, equipped with a holomorphic coordinate z centered at x , and such that $U \cong \mathbf{D}$ via z , and $Z \subset C$ is given by the equation $z^\mu = 0$. Let $\omega_Z \in H^0(Z, K_Z)$. It writes

$$\frac{a_{-\mu+1} + a_{-\mu+2}z + \dots + a_0z^{\mu-1}}{z^{\mu-1}} \in \mathbf{C}[z]/(z^\mu) \cdot \frac{1}{z^{\mu-1}}, \tag{6.20}$$

and we have $\int_Z \omega_Z = a_0$. The differential form

$$\frac{\rho(z^\mu)}{2\pi i} (a_{-\mu+1} + a_{-\mu+2}z + \dots + a_0z^{\mu-1}) \frac{dz}{z^\mu}$$

is sent to ω_Z by the residue map. Its $\bar{\partial}$ -differential

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{-\mu|z^{\mu-1}|^2}{(|z^\mu|^2 - 1)^2} \exp\left(\frac{|z^\mu|^2}{|z^\mu|^2 - 1}\right) \left(\frac{a_{-\mu+1}}{z^{\mu-1}} + \dots + a_0\right) d\bar{z} \wedge dz \tag{6.21}$$

thus represents $j_*\omega_Z$. Note that in (6.21), the pole $z^{\mu-1}$ is eliminated by the $|z^{\mu-1}|^2$ from the numerator. The differential form $j_*\omega_Z$ is therefore a C^∞ section of $\Omega_C^{1,1}$. It is supported on $U \subset C$. The integral of this form on \mathbf{D} is

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{D}} \frac{-\mu(r^{\mu-1})^2}{(r^{2\mu} - 1)^2} \exp\left(\frac{r^{2\mu}}{r^{2\mu} - 1}\right) \left(\frac{a_{-\mu+1}e^{-i(\mu-1)\theta}}{r^{\mu-1}} + \dots + a_0\right) (2ir dr \wedge d\theta) \\ & = a_0 \int_{0 \leq r \leq 1} \frac{-2r^\mu}{(r^{2\mu} - 1)^2} \exp\left(\frac{r^{2\mu}}{r^{2\mu} - 1}\right) (\mu r^{\mu-1} dr) = a_0. \end{aligned}$$

This proves lemma 6.5.12. □

Remark 6.5.13 We have chosen to prove lemma 6.5.12 by an explicit local computation, because we find this fits well in the whole proof of proposition 6.5.11. However, the former result has to be seen as a straightforward consequence of the residue theorem in the following way.

Let $\omega_Z \in H^0(Z, K_Z)$. Using a partition of unity, one writes

$$\omega_Z = \text{Res}_Z(\omega_C),$$

where ω_C is a C^∞ differential form of type $(1, 0)$ on C , meromorphic on a neighbourhood of $Z \subset C$ and with poles at Z only, which vanishes outside another neighbourhood of $Z \subset C$. By definition of the map j_* , we have

$$j_*\omega_Z = \bar{\partial}\omega_C = d\omega_C.$$

Now for $\varepsilon > 0$ small enough and for every $z \in \text{Supp}(Z)$, we consider a disk $\Delta_{z,\varepsilon}$ of radius ε centred at z . We then let $T_\varepsilon := \bigcup_{z \in \text{Supp}(Z)} \Delta_{z,\varepsilon}$ be a tubular neighbourhood of radius ε of $Z \subset C$, and $C_\varepsilon := C \setminus T_\varepsilon$. Now using both Stokes theorem and the residue theorem, one has

$$\int_C j_*\omega_Z = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} d\omega_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial C_\varepsilon} \omega_C = \int_Z \text{Res}_Z(\omega_C) = \int_Z \omega_Z,$$

which proves the lemma.

The next step of the proof of proposition 6.5.11 is to extend lemma 6.5.12 to the family of curves \mathcal{C} . In fact, we have seen that it is enough to consider the smaller family $\mathcal{C}^\circ \rightarrow \Sigma^\circ$.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_C^\circ & \xrightarrow{(\text{id}_{\Sigma^\circ}, l)} & \mathcal{C}^\circ \\ & \searrow \varphi & \downarrow \Phi \\ & & \Sigma^\circ \end{array}$$

We recall that φ and ψ are the natural morphisms from Γ_C to Σ' and X respectively, that Φ and Ψ are the natural morphisms from \mathcal{C} to Σ' and Y , and that l is the inclusion $\bar{X} \subset Y$. The following lemma is proved by using lemma 6.5.12, and the fact that the push-forward map Φ_* is given locally above Σ° by the integration along the fibers of Φ .

Lemma 6.5.14 *The following diagram is commutative.*

$$\begin{array}{ccc} H^0(\Gamma_C^\circ, K_{\Gamma_C^\circ}) & \xrightarrow{(\text{id}_{\Sigma^\circ}, l)_*} & H^1(\mathcal{C}^\circ, K_{\mathcal{C}^\circ}) \\ & \searrow \varphi_* & \downarrow \Phi_* \\ & & H^0(\Sigma^\circ, K_{\Sigma^\circ}) \end{array}$$

To be more precise, the vertical arrows of the preceding diagram are given by φ_*° and Φ_*° respectively, where $\varphi^\circ := \varphi|_{\Gamma_C^\circ}$ and $\Phi^\circ := \Phi|_{\mathcal{C}^\circ}$.

Proof. Again, we want to show an equality of holomorphic differential forms on Σ° . This can be done locally. We thus choose an open subset $V \subset \Sigma^\circ$ over which the map $\Gamma_C^\circ \rightarrow \Sigma^\circ$ is étale (or rather the map $(\Gamma_C^\circ)_{red} \rightarrow \Sigma^\circ$ is étale). Then $\varphi^{-1}(V)$ is a disjoint union of open subsets $V_j \subset \Gamma_C^\circ$, such that for every j one has $(V_j)_{red} \cong V$.

One can assume that V is equipped with a holomorphic system of coordinates $v = (v_1, \dots, v_n)$, and that there exists a neighbourhood U_j of every $V_j \subset \Phi^{-1}(V)$ equipped with a holomorphic system of coordinates (v, t_j) , such that Φ is simply given locally by $(v, t_j) \mapsto v$, and that V_j is given by the local equation $t_j^{\mu_j} = 0$ (μ_j is equal to 1, m or m'). The coordinates t_j give local parameters of the curves C_σ ($\sigma \in V$) at their points of intersection with \bar{X} .

Let $\eta \in H^0(\Gamma_C^\circ, K_{\Gamma_C^\circ})$. Its restriction to $\varphi^{-1}(V)$ is a collection of meromorphic forms

$$\eta_j = \left(a_{j,-\mu_j+1}(v) + a_{j,-\mu_j+2}(v)t_j + \cdots + a_{j,0}(v)t_j^{\mu_j-1} \right) \frac{dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n}{t_j^{\mu_j-1}}$$

on the open subsets V_j , exactly as in (6.20). The map φ_* is locally defined as the trace map, so $\varphi_*\eta$ is given in V by

$$\varphi_*\eta = \left(\sum_j a_{j,0}(v) \right) dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n.$$

On the other hand, $(\text{id}, l)_*\eta$ is given in $\Phi^{-1}(V)$ by a $\bar{\partial}$ -closed, C^∞ differential form of type $(n+1, 1)$, which vanishes outside from the neighbourhood $\bigcup_j U_j$ of $\Gamma_C^\circ \subset C^\circ$. In the neighbourhood U_j of $V_j \subset \Phi^{-1}(V)$, it is given by

$$\bar{\partial} \left(\frac{\rho(t_j^{\mu_j})}{2\pi i} \left(a_{j,-\mu_j+1}(v) + a_{j,-\mu_j+2}(v)t_j + \cdots + a_{j,0}(v)t_j^{\mu_j-1} \right) \frac{dt_j}{t_j^{\mu_j}} \wedge dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \right),$$

exactly as in the proof of lemma 6.5.12. Eventually, Φ_* is given by the integration along the fibers of Φ . To compute this, we let ζ be a holomorphic n -vector field over V (i.e. a holomorphic section of $\bigwedge^n T_{\Sigma^\circ}$ over V), given in coordinates by

$$h(v) \frac{\partial}{\partial v_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial v_n}. \quad (6.22)$$

We lift it to a C^∞ n -vector field $\tilde{\zeta}$ on $\Phi^{-1}(V)$. Using a partition of unity, we can assume that in every U_j , $\tilde{\zeta}$ is simply given by the expression (6.22). At a point $\sigma \in V$ of coordinates v , the inner product $(\Phi_*(\text{id}, l)_*\eta)(\zeta)_\sigma$ is by definition

$$\int_{C_\sigma} ((\text{id}, l)_*\eta)(\tilde{\zeta}),$$

where C_σ is the fiber of Φ over σ . We let $Z_\sigma := (\Gamma_C^\circ \cap C_\sigma)$, and denote by j_σ the inclusion $Z_\sigma \subset C_\sigma$. The inner product $\eta(\tilde{\zeta})_{Z_\sigma} := \sum_{z \in \text{Supp}(Z_\sigma)} \eta(\tilde{\zeta})_z$ sits naturally in $H^0(Z_\sigma, K_{Z_\sigma})$. Now the $(1, 1)$ -form $((\text{id}, l)_*\eta)(\tilde{\zeta})$ restricted to C_σ is precisely $(j_\sigma)_*(\eta(\tilde{\zeta})_{Z_\sigma})$, so by lemma 6.5.12, we have

$$(\Phi_*(\text{id}, l)_*\eta)(\zeta)_\sigma = \int_{C_\sigma} (j_\sigma)_*(\eta(\tilde{\zeta})_{Z_\sigma}) = \int_{Z_\sigma} \eta(\tilde{\zeta})_{Z_\sigma} = (\varphi_*\eta)(\zeta)_\sigma.$$

This shows the equality of holomorphic differential forms $\Phi_*(\text{id}, l)_*\eta = \varphi_*\eta$ on V . \square

To conclude the proof of proposition 6.5.11, it only remains to show the following commutativity result.

Lemma 6.5.15 *The following diagram is commutative.*

$$\begin{array}{ccc} H^0(\overline{X}, K_{\overline{X}}) & \xrightarrow{l_*} & H^1(Y, K_Y) \\ \psi^* \downarrow & & \downarrow \Psi^* \\ H^0(\Gamma_C^\circ, K_{\Gamma_C^\circ}) & \xrightarrow{(\text{id}_{\Sigma^\circ}, l)_*} & H^1(C^\circ, K_{C^\circ}) \end{array}$$

In fact, the vertical arrows of this diagram are rather $(\psi^\circ)^*$ and $(\Psi^\circ)^*$, where $\psi^\circ : \Gamma_C^\circ \rightarrow \bar{X}$ and $\Psi^\circ : \mathcal{C}^\circ \rightarrow Y$ are the restrictions of ψ and Ψ to Γ_C° and \mathcal{C}° respectively.

Proof. It is clear from the definitions that $\psi^\circ = \Psi^\circ|_{\Gamma_C^\circ}$. On the other hand, we have $\Psi^*\bar{X} = \Gamma_C^\circ$ as an equality of divisors on \mathcal{C}° . This shows that we have a morphism of short exact sequences as follows.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Psi^*K_Y & \longrightarrow & \Psi^*K_Y(\bar{X}) & \longrightarrow & \psi^*K_{\bar{X}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \Psi^* & & \downarrow \Psi^* & & \downarrow \psi^* & & \\ 0 & \longrightarrow & K_{\mathcal{C}^\circ} & \longrightarrow & K_{\mathcal{C}^\circ}(\Gamma_C^\circ) & \longrightarrow & K_{\Gamma_C^\circ} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

It yields a morphism between the associated long exact sequences in cohomology. In particular, the following diagram is commutative.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^0(\Gamma_C^\circ, \psi^*K_{\bar{X}}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}^\circ, \Psi^*K_Y) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^0(\Gamma_C^\circ, K_{\Gamma_C^\circ}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{C}^\circ, K_{\mathcal{C}^\circ}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Up to the shrinking of $\Sigma^\circ \subset \Sigma$, we can assume that both ψ° and Ψ° are smooth, so we have $H^0(\Gamma_C^\circ, \psi^*K_{\bar{X}}) \cong H^0(\bar{X}, K_{\bar{X}})$ and $H^1(\mathcal{C}^\circ, \Psi^*K_Y) \cong H^1(Y, K_Y)$, and the lemma is proved. \square

Eventually, lemmas 6.5.14 and 6.5.15 give the commutativity of the left-hand side square and of the right-hand side triangle in the following diagram.

$$\begin{array}{ccccc} & & (\Gamma_C^\circ)^* & & \\ & \searrow & \curvearrowright & \searrow & \\ H^0(\bar{X}, K_{\bar{X}}) & \xrightarrow{\psi^*} & H^0(\Gamma_C^\circ, K_{\Gamma_C^\circ}) & \xrightarrow{\varphi_*} & H^0(\Sigma^\circ, K_{\Sigma^\circ}) \\ l_* \downarrow & & (\text{id}_{\Sigma^\circ}, l)_* \downarrow & \nearrow \Phi_* & \\ H^1(Y, K_Y) & \xrightarrow{\Psi^*} & H^1(\mathcal{C}^\circ, K_{\mathcal{C}^\circ}) & & \\ & \searrow & \curvearrowleft & \searrow & \\ & & (\mathcal{C}^\circ)^* & & \end{array}$$

On the other hand, it follows from the definitions of $(\Gamma_C^\circ)^*$ and $(\mathcal{C}^\circ)^*$ that the bended arrows commute with the rest of the diagram. We thus have the equality of holomorphic forms on Σ°

$$(\Gamma_C^\circ)^*\eta^\circ = (\mathcal{C}^\circ)^*l_*\eta_{\bar{X}},$$

which yields by continuity the desired equality of meromorphic differential forms on $\tilde{\Sigma}'$. This ends the proof of proposition 6.5.11. Theorem 6.5.7 is thus completely proved.

Bibliographie

- [AC81] Enrico Arbarello and Maurizio Cornalba. Footnotes to a paper of Beniamino Segre. *Math. Ann.*, 256(3) :341–362, 1981.
- [AC83] Enrico Arbarello and Maurizio Cornalba. A few remarks about the variety of irreducible plane curves of given degree and genus. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(3) :467–488 (1984), 1983.
- [AC05] Ekaterina Amerik and Frédéric Campana. Fibrations méromorphes sur certaines variétés de classe canonique triviale. Prépublication arXiv :math.AG/0510299, 2005.
- [ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Ame07] Ekaterina Amerik. A computation of invariants of a rational self-map. Prépublication arXiv :0707.3947, 2007.
- [ARV99] E. Amerik, M. Rovinsky, and A. Van de Ven. A boundedness theorem for morphisms between threefolds. *Ann. Inst. Fourier*, 49 :405–415, 1999.
- [Aub76] Thierry Aubin. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 283(3) :Aiii, A119–A121, 1976.
- [Aub78] Thierry Aubin. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kähleriennes compactes. *Bull. Sci. Math. (2)*, 102(1) :63–95, 1978.
- [Aub98] Thierry Aubin. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [AV07] Ekaterina Amerik and Claire Voisin. Potential density of rational points on the variety of lines of a cubic fourfold. A paraître dans *Duke Math. Journal*, 2007.
- [Bar77] Wolf Barth. Some properties of stable rank-2 vector bundles on \mathbf{P}_n . *Math. Ann.*, 226(2) :125–150, 1977.
- [BD85] Arnaud Beauville and Ron Donagi. La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4. *C. R. Acad. sci. Paris, Série 1*, 301(14) :703–706, 1985.
- [Bea78] Arnaud Beauville. *Surfaces algébriques complexes*. Number 54 in Astérisque. Société Mathématique de France, 1978.
- [Bea99] Arnaud Beauville. Counting rational curves on $K3$ surfaces. *Duke Math. J.*, 97(1) :99–108, 1999.
- [Bea01] Arnaud Beauville. Endomorphisms of hypersurfaces and other manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, (1) :53–58, 2001.
- [BHPV04] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, 2004. Second enlarged edition.

- [BKL76] S. Bloch, A. Kas, and D. Lieberman. Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$. *Compositio Math.*, 33(2) :135–145, 1976.
- [BL00] Gregory T. Buzzard and Steven S. Y. Lu. Algebraic surfaces holomorphically dominated by \mathbf{C}^2 . *Invent. Math.*, 139(3) :617–659, 2000.
- [Blo80] Spencer Bloch. On an argument of Mumford in the theory of algebraic cycles. In *Journées de Géométrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers, 1979*, pages 217–221. Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
- [Bog77] Fedor Bogomolov. Families of curves on a surface of general type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 236(5) :1041–1044, 1977.
- [Bon08] Laurent Bonavero. Variétés rationnellement connexes sur un corps algébriquement clos. Notes de cours pour les États de la Recherche de la Société Mathématique de France, Strasbourg 2008.
- [BS58] Armand Borel and Jean-Pierre Serre. Le théorème de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. France*, 86 :97–136, 1958.
- [BS83] Spencer Bloch and Vasudevan Srinivas. Remarks on correspondences and algebraic cycles. *Amer. J. Math.*, 105(5) :1235–1253, 1983.
- [BT99] Fedor Bogomolov and Yuri Tschinkel. On the density of rational points on elliptic fibrations. *J. Reine Angew. Math.*, 511 :87–93, 1999.
- [BT00] Fedor A. Bogomolov and Yuri Tschinkel. Density of rational points on elliptic $K3$ surfaces. *Asian J. Math.*, 4(2) :351–368, 2000.
- [BT04] Fedor Bogomolov and Yuri Tschinkel. Special elliptic fibrations. In *The Fano Conference*, pages 223–234. Univ. Torino, Turin, 2004.
- [BV04] Arnaud Beauville and Claire Voisin. On the Chow ring of a $K3$ surface. *J. Algebraic Geom.*, 13(3) :417–426, 2004.
- [Cal54] Eugenio Calabi. The space of Kähler metrics. In *Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam*, volume 2, pages 206–207, 1954.
- [Cal57] Eugenio Calabi. On Kähler manifolds with vanishing canonical class. In *Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz*, pages 78–89. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [Cam81] Frédéric Campana. Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact. *Invent. Math.*, 63(2) :187–223, 1981.
- [Cam92] Frédéric Campana. Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 25(5) :539–545, 1992.
- [Cam04] Frédéric Campana. Orbifolds, special varieties and classification theory. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(3) :499–630, 2004.
- [Cam07] Frédéric Campana. Orbifoldes spéciales et classification biméromorphe des variétés kähleriennes compactes. Prépublication arXiv :0705.0737, 2007.
- [Can06] Serge Cantat. Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux. In *États de la recherche (Rennes 2006)*, Panoramas et synthèses. Société mathématique de France. À paraître. Disponible sur la page web de l'auteur.
- [Can00] Serge Cantat. Deux exemples concernant une conjecture de Serge Lang. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(7) :581–586, 2000.
- [Can03] Serge Cantat. Endomorphismes des variétés homogènes. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :237–262, 2003.

- [CC99] Luca Chiantini and Ciro Ciliberto. On the Severi varieties of surfaces in \mathbf{P}^3 . *J. Alg. Geom.*, 8(1) :67–83, 1999.
- [CG72a] James Carlson and Phillip Griffiths. A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 95, 1972.
- [CG72b] C. Herbert Clemens and Phillip A. Griffiths. The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *Ann. of Math. (2)*, 95 :281–356, 1972.
- [CH98] Lucia Caporaso and Joe Harris. Counting plane curves of any genus. *Invent. Math.*, 131(2) :345–392, 1998.
- [Che99] Xi Chen. Rational curves on $K3$ surfaces. *J. Algebraic Geom.*, 8(2) :245–278, 1999.
- [Che02] Xi Chen. A simple proof that rational curves on $K3$ are nodal. *Math. Ann.*, 324(1) :71–104, 2002.
- [CL06] Antoine Chambert-Loir. Théorèmes d'équidistribution pour les systèmes dynamiques d'origine arithmétique. In *Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux, Etats de la recherche (Rennes 2006)*, Panoramas et synthèses. Société mathématique de France. A paraître. Disponible à l'adresse <http://perso.univ-rennes1.fr/antoine.chambert-loir/publications/papers/etats-v2.pdf>.
- [Cla07] Benoît Claudon. *Déformation de variétés kählériennes compactes : invariance de la Gamma-dimension et extension de formes pluricanoniques*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2007.
- [Cle86] Herbert Clemens. Curves on generic hypersurfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(4) :629–636, 1986.
- [CLM93] Ciro Ciliberto, Angelo Lopez, and Rick Miranda. Projective degenerations of $K3$ surfaces, Gaussian maps, and Fano threefolds. *Invent. Math.*, 114(3) :641–667, 1993.
- [CP07] Frédéric Campana and Mihai Păun. Variétés faiblement spéciales à courbes entières dégénérées. *Compos. Math.*, 143(1) :95–111, 2007.
- [CS97] Luca Chiantini and Edoardo Sernesi. Nodal curves on surfaces of general type. *Math. Ann.*, 307(1) :41–56, 1997.
- [CU03] Laurent Clozel and Emmanuel Ullmo. Correspondances modulaires et mesures invariantes. *J. Reine Angew. Math.*, 558 :47–83, 2003.
- [CW06] Frédéric Campana and Jörg Winkelmann. A Brody theorem for orbifolds. Prépublication arXiv :math/0604571, 2006.
- [Deb97] Olivier Debarre. Variétés de Fano. *Astérisque*, (245) :Exp. No. 827, 4, 197–221, 1997. Séminaire Bourbaki, Vol. 1996/97.
- [Deb03] Olivier Debarre. Variétés rationnellement connexes (d'après T. Graber, J. Harris, J. Starr et A. J. de Jong). *Astérisque*, (290) :Exp. No. 905, ix, 243–266, 2003. Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002.
- [Ded07] Thomas Dedieu. Severi varieties and self rational maps of $K3$ surfaces. Prépublication arXiv : 0704.3163. Soumis à l'*Int. J. Math.*, 2007.
- [Ded08] Thomas Dedieu. Intrinsic pseudo-volume forms for logarithmic pairs. Prépublication arXiv : 0804.4811. Soumis au *Bull. SMF*, 2008.
- [DEG00] Jean-Pierre Demailly and Jawher El Goul. Hyperbolicity of generic surfaces of high degree in projective 3-space. *Amer. J. Math.*, 122(3) :515–546, 2000.
- [Del71] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (40) :5–57, 1971.

- [Dem97] Jean-Pierre Demailly. Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials. In *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, volume 62 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 285–360. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [dJS03] Johan de Jong and Jason Starr. Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point. *Amer. J. Math.*, 125(3) :567–580, 2003.
- [DLS94] Jean-Pierre Demailly, László Lempert, and Bernard Shiffman. Algebraic approximations of holomorphic maps from Stein domains to projective manifolds. *Duke Math. J.*, 76(2) :333–363, 1994.
- [DPS01] Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell, and Michael Schneider. Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds. *Internat. J. Math.*, 12(6) :689–741, 2001.
- [Ein88] Lawrence Ein. Subvarieties of generic complete intersections. *Invent. Math.*, 94(1) :163–169, 1988.
- [Eis70] Donald A. Eisenman. *Intrinsic measures on complex manifolds and holomorphic mappings*. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 96. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970.
- [FK92] H. M. Farkas and I. Kra. *Riemann surfaces*, volume 71 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992.
- [FKPS07] Flaminio Flamini, Andreas Leopold Knutsen, Gianluca Pacienza, and Edoardo Sernesi. Nodal curves with general moduli on $K3$ surfaces. A paraître dans *Comm. Algebra*, 2007.
- [FN05] Yoshio Fujimoto and Noboru Nakayama. Compact complex surfaces admitting non-trivial surjective endomorphisms. *Tohoku Math. J. (2)*, 57(3) :395–426, 2005.
- [FS98] Yoshio Fujimoto and Eiichi Sato. On smooth projective threefolds with non-trivial surjective endomorphisms. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 74(10) :143–145, 1998.
- [Fuj02] Yoshio Fujimoto. Endomorphisms of smooth projective 3-folds with non-negative Kodaira dimension. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 38(1) :33–92, 2002.
- [Ful98] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [GG80] Mark Green and Phillip Griffiths. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In *The Chern Symposium 1979 (Proc. Internat. Sympos., Berkeley, Calif., 1979)*, pages 41–74. Springer, New York, 1980.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [GHS03] Tom Graber, Joe Harris, and Jason Starr. Families of rationally connected varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(1) :57–67 (electronic), 2003.
- [GLS98] Gert-Martin Greuel, Christoph Lossen, and Eugenii Shustin. Geometry of families of nodal curves on the blown-up projective plane. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(1) :251–274, 1998.
- [GLS00] G.-M. Greuel, C. Lossen, and E. Shustin. Castelnuovo function, zero-dimensional schemes and singular plane curves. *J. Alg. Geom.*, 9(4) :663–710, 2000.
- [Gri69] Phillip A. Griffiths. On the periods of certain rational integrals. I, II. *Ann. of Math. (2)* 90 (1969), 460–495; *ibid.* (2), 90 :496–541, 1969.
- [Gri71] Phillip A. Griffiths. Holomorphic mapping into canonical algebraic varieties. *Ann. of Math. (2)*, 93 :439–458, 1971.

- [Gri76] Phillip A. Griffiths. *Entire holomorphic mappings in one and several complex variables*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976. The fifth set of Hermann Weyl Lectures, given at the Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., October and November 1974, *Annals of Mathematics Studies*, No. 85.
- [Gue06] Vincent Guedj. Propriétés ergodiques des applications rationnelles. In *États de la recherche (Rennes 2006)*, Panoramas et synthèses. Société mathématique de France. A paraître. Prépublication arXiv :math/0611302.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Har86] Joe Harris. On the Severi problem. *Invent. Math.*, 84(3) :445–461, 1986.
- [Has03] Brendan Hassett. Potential density of rational points on algebraic varieties. In *Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001)*, volume 12 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 223–282. Springer, Berlin, 2003.
- [Hir64] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2)* 79 (1964), 109–203; *ibid. (2)*, 79 :205–326, 1964.
- [HM98] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of curves*, volume 187 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [HT06] Brendan Hassett and Yuri Tschinkel. Potential density of rational points for $K3$ surfaces over function fields. A paraître dans *American Journal of Mathematics*, 2006.
- [JK04] Trygve Johnsen and Andreas Leopold Knutsen. $K3$ projective models in scrolls, volume 1842 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Kaw92] Yujiro Kawamata. Abundance theorem for minimal threefolds. *Invent. Math.*, 108(2) :229–246, 1992.
- [Kei03] Thomas Keilen. Irreducibility of equisingular families of curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(9) :3485–3512, 2003.
- [KMM92a] János Kollár, Yoichi Miyaoka, and Shigefumi Mori. Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. *J. Differential Geom.*, 36(3) :765–779, 1992.
- [KMM92b] János Kollár, Yoichi Miyaoka, and Shigefumi Mori. Rationally connected varieties. *J. Algebraic Geom.*, 1(3) :429–448, 1992.
- [KO71] Shoshichi Kobayashi and Takushiro Ochiai. Mappings into compact manifolds with negative first Chern class. *J. Math. Soc. Japan*, 23 :137–148, 1971.
- [KO75] Shoshichi Kobayashi and Takushiro Ochiai. Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type. *Invent. Math.*, 31(1) :7–16, 1975.
- [Kob76] Shoshichi Kobayashi. Intrinsic distances, measures and geometric function theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(3) :357–416, 1976.
- [Kob84] Ryoichi Kobayashi. Kähler-Einstein metric on an open algebraic manifold. *Osaka J. Math.*, 21(2) :399–418, 1984.
- [Kob05] Shoshichi Kobayashi. *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, second edition, 2005. An introduction.
- [Kol96] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*, volume 32 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

- [Lan86] Serge Lang. Hyperbolic and Diophantine analysis. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 14(2) :159–205, 1986.
- [Mac04] Catriona Maclean. Chow groups of surfaces with $h^{2,0} \leq 1$. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(1) :55–58, 2004.
- [Mer08] Joel Merker. Low pole order frames on vertical jets of the universal hypersurface. Prépublication arXiv :0805.3987, 2008.
- [Miy88] Yoichi Miyaoka. On the Kodaira dimension of minimal threefolds. *Math. Ann.*, 281(2) :325–332, 1988.
- [MM83] Shigefumi Mori and Shigeru Mukai. The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11. In *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, volume 1016 of *Lecture Notes in Math.*, pages 334–353. Springer, Berlin, 1983.
- [Mum68] David Mumford. Rational equivalence of 0-cycles on surfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 9 :195–204, 1968.
- [Nak02] Noboru Nakayama. Ruled surfaces with non-trivial surjective endomorphisms. *Kyushu J. Math.*, 56(2) :433–446, 2002.
- [NZ07] Noboru Nakayama and De-Qi Zhang. Building blocks of étale endomorphisms of complex projective manifolds. Preprint 1577 of the Kyoto Univ. Res. Inst. Math. Sci., <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/index.html>, 2007.
- [Pal85] *Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes*. Société Mathématique de France, Paris, 1985. Papers from the seminar held in Palaiseau, October 1981–January 1982, Astérisque No. 126 (1985).
- [Pău08] Mihai Păun. Vector fields on the total space of hypersurfaces in the projective space and hyperbolicity. *Math. Ann.*, 340(4) :875–892, 2008.
- [PT07] Rahul Pandharipande and Richard P. Thomas. Stable pairs and BPS invariants. Prépublication arXiv :0711.3899, 2007.
- [Ran89] Ziv Ran. Enumerative geometry of singular plane curves. *Invent. Math.*, 97(3) :447–465, 1989.
- [Roï72] A. A. Roïtman. Rational equivalence of zero-dimensional cycles. *Mat. Sb. (N.S.)*, 89(131) :569–585, 671, 1972.
- [Roï80] A. A. Roïtman. The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence. *Ann. of Math. (2)*, 111(3) :553–569, 1980.
- [Rou07] Erwan Rousseau. Weak analytic hyperbolicity of generic hypersurfaces of high degree in \mathbb{P}^4 . *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 16(2) :369–383, 2007.
- [SD74] Bernard Saint-Donat. Projective models of K3 surfaces. *Amer. J. Math.*, 96 :602–639, 1974.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.
- [Sev21] Francesco Severi. *Vorlesungen über Algebraische Geometrie*. Anhang F. Leipzig : Teubner, 1921.
- [Siu04] Yum-Tong Siu. Hyperbolicity in complex geometry. In *The legacy of Niels Henrik Abel*, pages 543–566. Springer, Berlin, 2004.
- [Sil91] Joseph Silverman. Rational points on K3 surfaces : a new canonical height. *Invent. Math.*, 105(2) :347–373, 1991.
- [Tan80] Allen Tannenbaum. Families of algebraic curves with nodes. *Compositio Math.*, 41(1) :107–126, 1980.

- [Tan82] Allen Tannenbaum. Families of curves with nodes on $K3$ surfaces. *Math. Ann.*, 260(2) :239–253, 1982.
- [Ter85] Tomohide Terasoma. Complete intersections with middle picard number 1 defined over \mathbb{Q} . *Math. Z.*, 189(2) :289–296, 1985.
- [TY87] Gang Tian and Shing-Tung Yau. Existence of Kähler-Einstein metrics on complete Kähler manifolds and their applications to algebraic geometry. In *Mathematical aspects of string theory (San Diego, Calif., 1986)*, volume 1 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 574–628. World Sci. Publishing, Singapore, 1987.
- [Ty07] Ilya Tyomkin. On Severi varieties on Hirzebruch surfaces. *Int. Math. Res. Not.*, (23), 2007.
- [Uen75] Kenji Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439.
- [UY07] Emmanuel Ullmo and Andreï Yafaev. Points rationnels des variétés de Shimura : un principe du tout ou rien. Preprint 2007.
- [vL07] Ronald van Luijk. $K3$ surfaces with Picard number one and infinitely many rational points. *Algebra Number Theory*, 1(1) :1–15, 2007.
- [Voi92] Claire Voisin. Sur les zéro-cycles de certaines hypersurfaces munies d’un automorphisme. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 19(4) :473–492, 1992.
- [Voi96a] Claire Voisin. On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces. *J. Differential Geom.*, 44(1) :200–213, 1996.
- [Voi96b] Claire Voisin. *Symétrie miroir*, volume 2 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, Paris, 1996.
- [Voi98] Claire Voisin. A correction : “On a conjecture of Clemens on rational curves on hypersurfaces” [*J. Differential Geom.* **44** (1996), no. 1, 200–213; MR1420353 (97j :14047)]. *J. Differential Geom.*, 49(3) :601–611, 1998.
- [Voi02] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Number 10 in Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2002.
- [Voi03] Claire Voisin. On some problems of Kobayashi and Lang ; algebraic approaches. In *Current developments in mathematics, 2003*, pages 53–125. Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [Voi04a] Claire Voisin. A geometric application of Nori’s connectivity theorem. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 3(3) :637–656, 2004.
- [Voi04b] Claire Voisin. Intrinsic pseudo-volume forms and K -correspondences. In *The Fano Conference*, pages 761–792. Univ. Torino, Turin, 2004.
- [Voj87] Paul Vojta. *Diophantine approximations and value distribution theory*, volume 1239 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Wei79] André Weil. Final report on contract AF 18(603)-57. In *Scientific works. Collected papers. Vol. II (1951–1964)*. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [Yau75] Shing Tung Yau. Intrinsic measures of compact complex manifolds. *Math. Ann.*, 212 :317–329, 1975.
- [Yau78] Shing Tung Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(3) :339–411, 1978.

- [YZ96] Shing-Tung Yau and Eric Zaslow. BPS states, string duality, and nodal curves on $K3$. *Nuclear Phys. B*, 471(3) :503–512, 1996.
- [Zar82] Oscar Zariski. Algebraic systems of plane curves. *Am. J. Math.*, 104(1) :209–226, 1982.