THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII DENIS-DIDEROT

Spécialité :

MATHÉMATIQUES

présentée par :

Yann Sépulcre

Pour l'obtention du diplôme de :

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES DE L'UNIVERSITÉ PARIS VII

Sujet :

ESPACES DE MODULES DE FAISCEAUX SEMI-STABLES SUR LE PLAN PROJECTIF ET COURBES DE PONCELET

Soutenue le 1er Avril 2004, devant le jury composé de :

M. **Laurent GRUSON**, *Rapporteur*
M. **Joseph LE POTIER**, *Directeur*
M. **Kieran O′GRADY**
M. **Matei TOMA**, *Rapporteur*
Mme **Claire VOISIN**

Remerciements :

Je remercie chaleureusement J. Le Potier, mon directeur de thèse, pour ses conseils, son aide, et ses relectures attentives de mon travail. A force d'examiner avec sévérité ce que je lui soumettais, me freinant là où je voulais m'avancer trop vite, me corrigeant patiemment mes erreurs, il m'a enseigné un certain réalisme et m'a fait comprendre qu'une solution au brouillon d'un quelconque problème ne signifiait pas victoire. Il a su m'encourager discrètement à des moments cruciaux de ces quatre années.

Laurent Gruson m'a donné quelques explications sur les variétés de sécantes et les complexes de Schur. Très gentiment, il en a discuté avec moi et m'a donné des références. Il a également accepté d'être rapporteur de cette thèse, je l'en remercie vivement.

J'en profite également pour remercier mon autre rapporteur, Matei Toma. Sans son résultat d'injectivité générique du morphisme de Barth restreint à la variété des faisceaux de Poncelet, le second chapitre n'aurait été que conjectural. Il a également accepté de se déplacer pour ma soutenance.

Kieran O'Grady et Claire Voisin ont spontanément accepté de faire partie du jury aux côtés de ceux qui précèdent, ce qui est un grand plaisir pour moi.

J'exprime également mes remerciements à J.Vallès pour s'être intéressé à mon travail (il a lui-même étudié les courbes de Poncelet) et m'avoir permis de présenter à l'université de Versailles (UVSQ) le contenu du second chapitre.

Quelques exposés de L.Bonavero à l'école d'été 2000 de l'UJF (Grenoble) sur les constructions de Abramovitch, Wlodarczyk et Matsuki, faisant intervenir des éclatements (en géométrie torique), m'ont permis de voir des situations similaires à celles de ma thèse dans un autre cadre.

Il me faut remercier aussi tous ceux qui, secrétaires, bibliothéquaires, directeurs, organisateurs de séminaires et d'écoles d'été, et même restaurateurs, font de Chevaleret un lieu idéal et stimulant de travail. Mme Wasse en particulier a apporté une aide administrative constante.

Mes collègues et amis de Paris VI et VII sont trop nombreux pour que je puisse tous les citer : Julien, Francesca, Christophe, Kenji, Andrea, Luc, Majid, Charles, Tristan, Gwendal, Catriona,...

je regretterai beaucoup l'ambiance unique de ces années, cet esprit de solidarité et d'amitié qui unit les doctorants du site. J'ai également tissé des liens amicaux avec les membres de mon équipe non thésards : Laurent Koelblen, Frédéric Han, Daniel Huybrechts, Sebastien Boucksom...

Mes parents, mes frère et soeur, ma famille, et Margalith m'ont apporté un soutien constant au cours de ces années, chacun a été présent tant dans mes moments d'abattement que d'optimisme. Je suis particulièrement heureux que mon père soit présent à ma soutenance après ce qu'il a traversé.

Chapitre 1

Introduction

Dans toute cette thèse nous notons M_n l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$ sur le plan projectif $\mathbf{P}_2$. Ce travail se compose de quatre chapitres, outre cette introduction :

1. le chapitre 2 rassemble les notions et les résultats essentiels sur les espaces de modules de faisceaux semi-stables et de systèmes cohérents ;

2. dans un troisième chapitre, on s'intéresse à la sous-variété des courbes de Poncelet.

   Soient n un entier supérieur ou égal à 4, C une conique lisse du plan projectif complexe. Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane lisse de degré n du plan projectif.

   <u>Définition</u> 1 *Le couple* $(C, \mathcal{C})$ *est dit de Poncelet si* $\mathcal{C}$ *passe par les sommets d'un polygone général à* $n+1$ *côtés tangents à la conique* C*.*

   La courbe $\mathcal{C}$ passe donc par $\frac{n(n+1)}{2}$ sommets. Un théorème de Poncelet, généralisé par Darboux (cf [Da], [Tra]), énonce que le couple $(C, \mathcal{C})$ est de Poncelet si et seulement si il existe un pinceau de diviseurs effectifs sur C, de degré $n+1$, vérifiant la même propriété (pour un diviseur générique). Poncelet avait considéré des paires de conique (cas $n = 2$), et des triangles inscrits dans l'une et circonscrits à l'autre. L'étude de telles paires de Poncelet de coniques (on peut parler plus généralement de conique m circonscrite à une autre, $m \in \mathbf{N}^*$, lorsqu'il existe un $m-$polygône inscrit dans l'une et circonscrit à l'autre) est intéressante et fait intervenir des points de torsion sur des courbes elliptiques (cf [GH] où est présentée un critère explicite de Cayley sur les équations des coniques).

   Prendre un tel pinceau de diviseurs signifie choisir un sous-espace de dimension 2 de l'espace vectoriel des sections d'un fibré inversible de degré $n+1$ sur C. Trautmann donne ainsi l'équation d'une courbe générale de Poncelet dans [Tra]. Cela lui permet de montrer que pour une conique C fixée, l'ensemble des courbes de Poncelet de degré n associées à C s'identifie bien à une grassmanienne de sous-espaces de dimension 2 d'un espace vectoriel. Plus exactement, le plongement de cette grassmanienne dans l'espace projectif $\mathcal{C}_n$ des courbes de degré n s'identifie au plongement de Plücker.

Si l'on considère la famille des courbes de Poncelet associées à des coniques lisses, on obtient une partie localement fermée de $\mathcal{C}_n$ dont on peut prendre l'adhérence. On obtient ainsi une sous-variété projective Ponc_n intègre de dimension $2n+5$, appelée variété des courbes de Poncelet. Lorsque $n=4$, cette variété est de codimension 1 dans $\mathcal{C}_4$, et se nomme l'hypersurface des quartiques de Lüroth. Si $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{C}_n$ est l'hypersurface des courbes singulières, c'est une question à priori difficile de connaître l'intersection $\mathcal{S}_n \cap \mathrm{Ponc}_n$, autrement dit de déterminer les courbes singulières de Poncelet.

La variété des courbes de Poncelet n'est ni normale, ni à priori Cohen-Macaulay pour $n \geq 5$, et l'on ne connaît pas de systèmes d'équations explicites définissant son idéal dans $\mathcal{C}_n$.
C'est pourquoi plusieurs auteurs ont cherché à trouver un modèle projectif birationnel de Ponc_n afin de l'étudier. Ce modèle est donné par une compactification de l'ensemble des paires (Γ, Θ), où Θ est un faisceau localement libre sur une conique lisse de degré $n+1$, et Γ un pinceau de sections de Θ. En termes plus précis, on construit un espace de modules de ces paires (qu'on appelle plus loin systèmes cohérents), soumises à une condition plus générale de semi-stabilité ; c'est une variété projective S_n munie d'un morphisme birationnel surjectif sur la variété des courbes de Poncelet. C'est le point de vue adopté dans [LePT] où les auteurs établissent les premières propriétés de S_n.

Nous appelons les faisceaux semi-stables F de rang 2 et de classes de Chern $(0,n)$, tels que $F(1)$ possède deux sections linéairement indépendantes des faisceaux de Poncelet. A partir d'une paire (Γ, Θ) précédente, telle que Θ soit de support une conique lisse, on obtient de façon naturelle un faisceau de Poncelet, et on montre que la courbe de Poncelet associée à la paire est la courbe des droites de saut de F (cf [Ba]), c'est-à-dire la courbe du plan projectif dual définie par les droites l telles que $F|_l \not\cong \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l$ (le fait qu'il s'agisse bien d'une courbe projective est un résultat de Grauert et Mülich). Ceci est montré dans [LePT].
La condition de semi-stabilité de F permet d'introduire de façon naturelle la définition de semi-stabilité pour les systèmes cohérents. Ainsi il apparaît que S_n est aussi un modèle birationnel du sous-schéma fermé irréductible P_n de M_n, dont les points sont les classes de faisceaux de Poncelet. Le morphisme de P_n sur Ponc_n se factorise alors par le morphisme de Barth $\beta : P_n \to \mathcal{C}_n$. A noter que quand $n=4$ on a $P_4 = M_4$.

Nous montrons ici le résultat suivant.

Proposition 1 *L'espace de modules S_n n'est pas localement factorielle pour $n \geq 5$ (pour $n=4$ c'est vrai).*

Nous sommes donc encore assez loin de trouver une désingularisée de la variété Ponc_n. Toma a démontré (cf [Tom]) que la restriction du morphisme de Barth à P_n est génériquement injective pour $n \geq 5$. Sa démonstration ne marche cependant pas pour $n=4$. La preuve dans ce cas a été apportée récemment par Le Potier et Tikhomirov : le théorème principal de leur article est que le morphisme de Barth est génériquement injectif sur M_n (cf [LePT]).

Nous calculons ensuite le degré de Ponc_n relativement à son plongement dans $\mathcal{C}_n$. Grâce au résultat de Toma, on ramène le calcul de ce degré à celui d'un nombre d'intersection sur P_n, puis sur S_n. On montre alors que S_n est isomorphe, après une suite d'éclatements et de contractions à une grassmanienne relative. On est donc amené à calculer des formules de saut du nombre d'intersection comme dans [MinH], [MinH2], où l'auteur ramène le calcul du nombre de Donaldson à celui d'un nombre d'intersection sur un schéma de Hilbert de sous-schémas finis du plan.

Les espaces de modules de systèmes cohérents que Min He utilise concrètement sont différents des nôtres : à un faisceau semi-stable F et à un sous-espace Γ de $\mathrm{H}^0(F(1))$ de dimension 1, il associe le système cohérent $(\Gamma, F(1))$. Les éclatements et contractions qu'il effectue pour aboutir à un schéma de Hilbert ont des centres lisses (consulter aussi à ce propos [LeP1]), mais ces espaces de modules ne sont pas adéquats pour calculer le degré de Ponc_n. Notre cadre est par contre adapté mais les centres des éclatements que nous utilisons ne sont plus lisses, ce qui complique un peu les choses.

Nous trouvons des formules valables pour tout n ; le calcul pour n pair est un peu plus difficile. Nous avons fait quelques applications numériques. On obtient le théorème suivant, dont le premier point est connu depuis longtemps.

Théorème 1 *Pour $n = 4$ et $n = 5$, on obtient le degré de la variété des quartiques de Lüroth et des quintiques de Poncelet :*

(a) pour $n = 4$, on obtient le nombre de Donaldson $q_{13} = 54$,

(b) pour $n = 5$, ce degré est 6867.

3. Dans un quatrième chapitre, on s'intéresse à des diviseurs de M_4 et à la dimension de leurs systèmes linéaires.

   Quand $n = 4$, une base du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(M_4)$ est donnée par les classes des fibrés $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$, que nous précisons plus loin ($\mathcal{D}$ est le fibré déterminant de Donaldson). Nous caractérisons le cône ample, une question qui a déjà été résolue par Strømme (cf [Strø]) dans le cas n impair, et dont la réponse se formule dans une autre base que celle de Drézet. Nous montrons également que le fibré inversible $\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}^{\otimes p}$, pour $m, p \in \mathbf{Z}$, possède des sections non nulles si et seulement si $p + 2[\frac{m}{5}] \geq 0$ (la notation $[\ ]$ désignant la partie entière).

   On calcule ensuite la dimension de l'espace des sections $\mathrm{H}^0(M_4, \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A})$, pour $m \in \mathbf{Z}$. Pour $m < 0$, cette dimension est nulle. Nous calculons en fait la fonction polynôme

$$P : m \mapsto \chi(M_4, \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A})$$

   définie pour $m \in \mathbf{Z}$. Pour $m > 0$ il est facile de voir que $P(m)$ est la dimension cherchée. On commence par remarquer que pour calculer P il revient au même de calculer la caractéristique d'Euler de l'image réciproque du fibré $\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}$ sur S_4 (on a en effet un morphisme birationnel $\pi : S_4 \to P_4 = M_4$).

   La méthode utilisée est la même que celle du premier chapitre : grâce à trois éclatements et contractions, on passe de l'espace de modules de systèmes cohérents S_4 à une grassmanienne relative sur la conique universelle. Nous faisons des calculs de saut au passage de chaque valeur critique. On aboutit alors au théorème suivant :

<u>Théorème</u> 2 *La dimension de l'espace vectoriel* $H^0(M_4, \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A})$*, pour* $m \geq 0$*, est égale à*

$$\frac{9}{13!} \cdot \prod_{i=1}^{10} (m+i) \cdot (2m+11) \cdot (3m^2 + 33m + 104)$$

On remarque que le polynôme P vérifie l'équation fonctionnelle

$$P(m-5) = -P(-6-m), \quad \forall\, m \in \mathbf{Z}$$

ce qui peut s'interpréter aussi comme le fait que $\chi(\partial M_4, \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}^{-1}) = 0$ pour $m \in \mathbf{Z}$, où ∂M_4 est le bord de l'espace de modules M_4, i.e l'hypersurface des classes de faisceaux non localement libres. Nous ne savons malheureusement pas expliquer directement ce fait, qui est équivalent à ce que les images directes $\mathrm{R}^j \beta_*(\mathcal{A}^{-1})$ soient nulles pour $j \geq 0$ (où β est le morphisme de Barth).

Pour $m = 1$, on a $P(1) = 105$, ce qui permet de vérifier un cas particulier de la conjecture de dualité étrange : il existe un morphisme de dualité étrange

$$D : \mathrm{H}^0(\mathbf{P}_2^{[4]}, (\det L^{[4]})^{\otimes 2})^* \to \mathrm{H}^0(M_4, \mathcal{D} \otimes \mathcal{A})$$

où $\mathbf{P}_2^{[4]}$ est le schéma de Hilbert des sous-schémas finis de longueur 4 du plan projectif et L est le fibré vectoriel de rang 6 sur $\mathbf{P}_2^{[4]}$ défini par $L^{[4]} = \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathbf{\Xi}}(2))$, où $\mathbf{\Xi}$ est le sous-schéma universel de $\mathbf{P}_2^{[4]} \times \mathbf{P}_2$ et pr est la projection sur le premier facteur. Le travail fait par Le Potier dans [LeP4] permet de dire que D est un isomorphisme.

4. Dans un cinquième chapitre, nous nous intéressons à deux questions indépendantes qui viennent compléter l'étude des diviseurs du chapitre précédent.

   Tout d'abord, on se demande si il existe une surface de M_n, c'est-à-dire une sous-variété complète de dimension 2, ne rencontrant pas le bord ∂M_n ?
   Dans [LePH], Le Potier et Hulek répondent négativement à la question pour $n = 3$. On utilise la propriété très particulière de M_3 d'être lisse, isomorphe à l'éclaté d'une grassmanienne. On se ramène donc à des calculs dans l'anneau de cohomologie $\mathrm{H}^*(M_3)$ qui est simple à décrire (cf [F]). Mais on utilise également le fait que sur l'ouvert $M_3 \setminus \partial M_3$, les fibres du morphisme de Barth β sont de dimension ≤ 1. Ceci n'est pas vrai pour $n \geq 4$, mais nous ne faisons pas dans ce travail l'étude des fibres de β.

   Pour $n = 4$, cas que nous considèrerons encore ici, la situation semble plus compliquée. L'espace de modules M_4 n'est que localement factoriel, son ensemble singulier étant de dimension 8 (fermé des points strictement semi-stables). D'après ce qui précède, une première idée est donc de considérer la même question à propos des surfaces de S_4. De plus les systèmes cohérents étudiés sont portés par des coniques, et l'on dispose donc d'un morphisme support $\sigma : S_4 \to \mathbf{P}_5$. Nous montrerons le théorème suivant :

   <u>Théorème</u> 3 *Si* Y *est une sous-variété complète de* S_4 *ne rencontrant pas le bord* ∂S_4*, la restriction* $\sigma|_Y$ *est un morphisme fini sur son image au dessus de l'ouvert des coniques réduites.*

Au dessus des coniques doubles la situation semble un peu plus compliquée. Il n'est d'ailleurs pas exclu que l'on puisse construire des courbes contenues dans une telle fibre et évitant le bord. En faisant varier la conique double on pourrait espérer ainsi construire une surface qui évite ∂S_4.

Dans une seconde section, on s'intéresse à un diviseur remarquable de M_4, noté D_1 dans [LePT].

Soit $\mathbf{H} = \beta(M_4)$ l'hypersurface de $\mathcal{C}_4$ des quartiques dites de Lüroth. Le diviseur $\beta^{-1}(\mathcal{S}_4)$ de M_4, où $\mathcal{S}_4$ est le diviseur des quartiques singulières, est réunion de plusieurs composantes intègres, dont certaines avec multiplicité (cf [LePT] théorème 6.10). On met ainsi en évidence des diviseurs intègres D_1 et D_2 dont l'image par β sont des hypersurfaces $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ et sont appelées quartiques de Lüroth singulières de type I et II.

Il est déjà montré dans [LePT] que la restriction $\beta|_{D_2}$ est génériquement injective. Un représentant générique de $\mathcal{L}_2$ vérifie une condition géométrique simple : c'est une quartique singulière en un point ordinaire, dont le cône tangent coupe la quartique en deux points sommets d'une bitangente.

Une quartique générique de $\mathcal{L}_1$ est aussi singulière ordinaire, et nous calculons une de ses équations dans un repère bien choisi. Nous remarquons alors qu'une telle quartique est aussi caractérisée par une relation entre cône tangent au point singulier et une de ses bitangentes. Nous montrons ainsi à la suite la proposition suivante :

Proposition 2 *La restriction $\beta|_{D_1}$ est injective.*

On connaît ainsi le degré de $\mathcal{L}_1$, et l'on retrouve également le fait que $\beta : M_4 \to \mathcal{C}_4$ est génériquement injective : en effet, la formule donnant l'expression du diviseur $\beta^{-1}(\mathcal{S}_4)$ fait intervenir D_1 avec la multiplicité 1, ce qui montre que le rang générique de la différentielle $\mathrm{d}\beta$ le long de D_1 est 13.

Chapitre 2

Espaces de modules de faisceaux et de systèmes cohérents semi-stables sur le plan projectif

Si X est une variété projective lisse, on note $K(X)$ le groupe de Grothendieck des $\mathcal{O}_X-$modules cohérents. C'est le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux algébriques cohérents sur X quotienté par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $F - G - H$, dès que l'on a une extension $0 \to G \to F \to H \to 0$. Les éléments de $K(X)$ sont appelées des classes de Grothendieck.

Le produit tensoriel sur les fibrés vectoriels s'étend en une loi d'algèbre sur $K(X)$: si F, G sont des $\mathcal{O}_X-$modules cohérents, on pose

$$F \cdot G = \sum_i (-1)^i \ \underline{\mathrm{Tor}}^i_{\mathcal{O}_X}(F, G)$$

où la somme précédente est finie (tout faisceau cohérent sur X admet une résolution de longueur finie par des faisceaux localement libres). On peut se reporter à [Se] pour plus de détails.

Sur $K(X)$ est définie une forme quadratique $q : u \mapsto \chi(u^2)$. On note $K_{\mathrm{num}}(X) = K(X)/\mathrm{Ker}(q)$. Lorsque c est une classe dans $K(X)$, on note $\check{c} = c^* \cdot \omega_X$, l'opération notée * étant l'opération qui à la classe d'un fibré vectoriel associe son dual. On vérifie en effet que * se prolonge de façon unique en une opération définie sur $K(X)$ (en utilisant l'existence de résolutions localement libres finies pour tout module cohérent).

Exemple: Le groupe de Grothendieck $K(\mathbf{P}_2)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^3$. En effet, à la classe d'un faisceau cohérent F on associe le triplet $(\mathrm{rg}(F), c_1(F), \chi(F))$. Cette application se prolonge en un morphisme de groupes de $K(\mathbf{P}_2)$ dans $\mathbf{Z}^3$, dont on peut montrer qu'il est bijectif.

La forme quadratique q définie précédemment est ici : $q(F) = 2r\chi + c_1^2 - r^2$. $\square$

2.1 Faisceaux semi-stables sur le plan projectif

Rappelons aussi la notion de multiplicité d'un module cohérent (cf [Se]).

Définition 1 *Soit X un schéma projectif, muni d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_X(1)$ donné par un plongement dans un espace projectif $\mathbf{P}_N$, $N > 0$. Soit F un $\mathcal{O}_X-$module cohérent,* *on pose la fonction $P : n \mapsto \chi(F(n))$, pour $n \in \mathbf{Z}$. Alors P est une fonction polynômiale, dont le terme dominant s'écrit $r \cdot n^d/d!$, avec $d = \dim(\mathrm{Supp}(F))$. L'entier r est appelé la multiplicité de F.*

Lorsque le support de F est X, la multiplicité est appelé le rang de F. En conservant les notations de la définition, nous appelerons le polynôme $p(F) = \frac{P(F)}{r}$ polynôme de Hilbert réduit de F.

Définition 2 *Un faisceau algébrique cohérent F de dimension d et de multiplicité r sur une variété projective lisse X est dit semi-stable (resp. stable) si :*

1. *il est pur de dimension d, i.e si F n'a pas de sous-faisceau cohérent non nul de dimension $< d$*

2. *Pour tout sous-faisceau cohérent $F^{'} \subset F$ de multiplicité $0 < r^{'} < r$, on a*

$$\frac{\mathrm{P}_{F'}}{r^{'}} \leq \frac{\mathrm{P}_F}{r} \quad (\text{resp.} \quad <)$$

L'ordre considéré sur les polynômes est l'ordre lexicographique. La catégorie additive des faisceaux semi-stables est une catégorie abélienne et artinienne (toute suite décroissante est stationnaire). Tout faisceau semi-stable F admet une filtration de Jordan-Hölder dans cette catégorie, i.e une suite décroissante $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset ... \subset F_k = F$ dont les gradués sont stables. Le gradué total de cette filtration est unique, et deux faisceaux semi-stables sont dits $S-$équivalents si leurs gradués de Jordan-Hölder sont les mêmes.

Soit $c \in K_{\mathrm{num}}(X)$ une classe représentée par un module cohérent non nul de dimension d. Considérons le foncteur contravariant $S \mapsto \underline{M}_X(c)(S)$ qui à une variété algébrique S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur $S \times X$, plats sur S, tels que pour tout point fermé $s \in S$ le faisceau $\mathcal{F}(s)$ soit semi-stable de dimension d et de classe de Grothendieck c.

Théorème 1 *Il existe pour le foncteur $\underline{M}_X(c)$ un espace de modules grossier $M_X(c)$, dont les points fermés sont les classes de $S-$équivalence de faisceaux semi-stables de classe c. C'est un schéma projectif.*

Exemple: Soit h la classe dans $K(\mathbf{P}_2)$ donnée par le faisceau $\mathcal{O}_l$, où l est une droite du plan. Le théorème précédent, appliqué à $c = 2 - nh^2$, donne l'espace de modules M_n des faisceaux sur $\mathbf{P}_2$, semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$. C'est une variété projective localement factorielle de dimension $4n - 3$. Quand n est pair, son lieu singulier est de dimension $2n$, c'est le fermé des classes de faisceaux strictement semi-stables. □

On prend $X = \mathbf{P}_2$ dans la suite et h la classe de la section hyperplane. La famille des faisceaux semi- stables de classe c donnée étant limitée, il existe un entier m tel que $F(m)$ soit engendré par ses sections et $\mathrm{H}^q(F(m)) = 0$ pour tout F semi-stable de classe c et tout $q > 0$. On obtient alors $M_X(c)$ en prenant le bon quotient au sens de Mumford (cf [MuF], ou [LeP] chapitre 6) d'un ouvert de points semi-stables du schéma de Hilbert des quotients d'un faisceau localement libre $E = \mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_X(-m)$, avec $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{H}^0(F(m))$ sur lequel agit le groupe linéaire $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ (cf [LeP]).

Remarque : En fait, on établit une équivalence entre la propriété d'être un point semi-stable pour l'action du groupe et d'être semi-stable en tant que faisceau avec de plus la condition d'isomorphisme $\mathrm{H}^0(E(m)) \simeq \mathrm{H}^0(F(m))$ (pour plus de détails, cf [LeP] lemme 7.2.4).

A noter que dans [Gie], l'auteur donne une autre construction de M_n comme bon quotient d'une sous-variété d'un espace projectif, dit espace de Gieseker, paramétrant des formes bilinéaires alternées (à valeurs dans un espace vectoriel). Cet espace est plus gros que notre schéma des quotients. □

Pour tout $n \geq 2$, M_n est une variété intègre de dimension $4n-3$. Quand n impair, elle est lisse et il y a un faisceau universel sur $M_n \times \mathbb{P}_2$, qu'on note en général $\mathcal{F}$. Dans ce cas, si l'on considère deux faisceaux universels $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, il existe alors un faisceau inversible L sur M_n tel que $\mathcal{F}' \simeq L \otimes \mathcal{F}$. Pour $n = 3$ on dispose même d'une description explicite de M_3 en tant qu'éclaté d'une grassmanienne (cf [LePH]).

Pour $n = 2$ on a un isomorphisme $M_2 \simeq \mathbf{P}_5$ (cf ci-dessous). Quand $n \geq 4$ est pair, il n'y a plus de faisceau universel sur $M_n \times \mathbf{P}_2$, même au dessus de l'ouvert des points stables.

La construction de M_n comme bon quotient d'une variété a dans ce cas des conséquences importantes sur le type de singularités de cet espace de modules.

Définition 3 *Soit Y une variété normale. On dit que Y est à singularités rationnelles si il existe une désingularisation, i.e un morphisme birationnel $f : Z \to Y$ avec Z lisse, telle que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit satisfaite*

1. $\mathrm{R}^i f_*(\mathcal{O}_Z) = 0$ *pour* $i > 0$
2. *X est Cohen-Macaulay, et* $f_*(\omega_Z) = \omega_Y$

où ω_Y et ω_Z sont les faisceaux dualisants de Y et Z.

Pour la théorie de la dualité, on peut se reporter à [Ha2] ou à [Mor] pour un bref résumé des résultats principaux. Pour la preuve de l'équivalence des deux conditions, on se reportera à [Ke]. De plus, on a le théorème suivant (cf [Bout]) :

Théorème 2 *Soit G un groupe réductif opérant sur une variété Y' à singularités rationnelles et soit $Y = Y'//G$ un bon quotient de Y'. Alors Y est à singularités rationnelles.*

Ceci permet de voir que M_n est à singularités rationnelles. En effet, d'après un théorème de lissité des schémas de Hilbert de quotients, on montre que l'ouvert des points semi-stables dont on prend le quotient par l'action du groupe est lisse (cf [LeP] chap. 8) ; on a en effet $\mathrm{Ext}^2(F, F) = 0$ si F est semi-stable de classes de Chern $(0, n)$, car par dualité de Serre cet espace vectoriel est isomorphe au dual de $\mathrm{Hom}(F, F(-3))$, et le polynôme réduit de $F(-3)$ est strictement inférieur à celui de F. Ces deux faisceaux étant semi-stables, tout morphisme de F dans $F(-3)$ est nul.

Supposons un instant que la surface X soit juste projective lisse. En un point correspondant à la classe d'isomorphisme d'un faisceau stable F de classe c, on a une description explicite de l'espace tangent $\mathrm{T}_{[F]}M_X(c)$, et on a aussi un critère pour savoir si ce point est lisse.

Théorème 3 *Il existe un isomorphisme canonique $\mathrm{T}_{[F]}M_X(c) \simeq \mathrm{Ext}^1(F, F)$. Au voisinage d'un tel point, l'espace de modules $M_X(c)$ est isomorphe au schéma des zéros d'un morphisme d'un germe de schéma lisse d'espace tangent de Zariski $\mathrm{Ext}^1(F, F)$ à valeurs dans $\mathrm{Ext}^2(F, F)$.*

Ceci permet par exemple de prouver que l'espace de modules $M_X(c)$ est localement intersection complète au voisinage d'un point stable, lorsqu'il a la "bonne" dimension. Pour $X = \mathbf{P}_2$ et $c_1 = 0$, $c_2 = n$, l'énoncé dit simplement que l'ouvert des points stables de M_n est lisse.

2.2 Modules de saut des faisceaux semi-stables et morphisme de Barth

A toute classe de faisceau semi-stable F dans M_n, on associe sa courbe de droites de saut, qui est une courbe de degré n dans $\mathbb{P}_2^*$. Les points de cette courbe sont les droites $l \in \mathbb{P}_2^*$ telles que $\mathrm{H}^1(F(-1)|_l) \neq 0$, autrement dit tels que $F|_l$ soit non isomorphe au fibré trivial (cf [Ba]). En effet le théorème de Grauert-Mülich permet d'affirmer que l'ensemble de ces droites est une courbe.

On définit ainsi le morphisme dit de Barth

$$\beta : \ M_n \to \mathcal{C}_n$$

de M_n dans l'espace projectif $\mathcal{C}_n$ de dimension $\frac{n(n+3)}{2}$ des courbes planes de degré n de $\mathbb{P}_2^*$. Lorsque $n = 2$, $\beta : M_2 \to \mathcal{C}_2 \simeq \mathbf{P}_5$ est un isomorphisme. La classe d'un faisceau semi-stable de rang 2 et de classes de Chern $(0, 2)$ est donc déterminée par sa conique de saut.

Cette définition de droite de saut n'est en fait qu'un cas particulier de la notion de module de saut. Un $\mathcal{O}_X-$module cohérent G semi-stable est dit de saut pour F semi-stable de classe de Grothendieck $(2, 0, 2 - nh^2)$, si :

1. F est transverse à G, i.e $\underline{\mathrm{Tor}}_i^{\mathcal{O}_X}(F, G) = 0$ pour $i \geq 1$,
2. la classe de Grothendieck $[G]$ est orthogonale à $(2, 0, 2 - n)$ pour la forme quadratique usuelle, i.e $\chi(F \otimes G) = 0$ en vertu de (1), avec de plus $\mathrm{H}^2(F \otimes G) = 0$,
3. on a $\mathrm{H}^1(F \otimes G) \neq 0$, ou de façon équivalente $\mathrm{H}^0(F \otimes G) \neq 0$.

La condition 1. implique que $[F] \cdot [G] = [F \otimes G]$ dans l'algèbre $K(X)$, et la condition 2. est toujours satisfaite lorsque le support de G est de dimension 1. Une droite l est donc de saut pour F si et seulement si le faisceau $\mathcal{O}_l(-1)$ est un module de saut pour F.

L'hypothèse de semi-stabilité de G dans la définition sert à définir les morphismes de dualité étrange (voir section ci-après).

2.3 Groupe de Picard des espaces de modules de faisceaux semi-stables

On se reporte à [LeP3] pour cette section. On note h la classe dans $K(\mathbf{P}_2)$ de la section hyperplane.

Proposition 1 *Soit une classe de Grothendieck $v \in K(\mathbf{P}_2)$ orthogonale à la classe $2 - nh^2$. Il existe un fibré inversible $\mathcal{D}_v$ sur M_n unique à isomorphisme près et vérifiant la propriété universelle suivante : si S est une variété algébrique et $\mathcal{F}$ un faisceau sur $S \times \mathbf{P}_2$, $S-$ plat, paramétrant des faisceaux semi-stables sur $\mathbf{P}_2$ de classe de Grothendieck $c = 2 - nh^2$, et si $f : S \to M_n$ est le morphisme modulaire associé, on a la relation*

$$\lambda_{\mathcal{F}}(v) = \det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{F} \cdot v)) \simeq f^*(\mathcal{D}_v)$$

où le produit de K-théorie $\mathcal{F}\cdot v$ a lieu dans $K(S\times\mathbf{P}_2)$. Ceci a un sens même si S est singulière car on utilise des classes de faisceaux plats sur S. Le morphisme

$$\mathrm{pr}_! : K(S\times\mathbf{P}_2)\to K(S)$$

est le morphisme qui associe à la classe d'un faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ plat sur S la classe de

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{R}^i\mathrm{pr}_*(\mathcal{F})$$

Dans l'énoncé précédent, le déterminant a un sens même si S est singulière en vertu du lemme suivant. On note dans toute la suite $\mathcal{D}_v = \lambda_{M_n}(v)$.

<u>Lemme</u> 1 *Dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(S)$ associée à la catégorie abélienne des $\mathcal{O}_S-$modules cohérents, le complexe $\mathrm{Rpr}_*(\mathcal{F}\otimes^L_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}} v)\in D(S)$ est isomorphe à un complexe borné de fibrés vectoriels sur S.*

<u>Preuve</u>: Soit un entier m_0 tel que $\forall m\geq m_0$ on ait $\mathrm{H}^q(F(m))=0$ pour tous $q>0$ et F semi-stable de classe de Grothendieck fixée. D'après le théorème A de Serre relatif, le faisceau $\mathcal{F}$ admet une résolution $R^{\cdot}$ par des faisceaux localement libres du type $\mathcal{O}_S\otimes\mathcal{O}(-n)^k$, avec $n>>0$ suffisamment grand. L'élément v est un élément de la catégorie dérivée bornée $\mathrm{D}^b(\mathbf{P}_2)$ des faisceaux cohérents sur $\mathbf{P}_2$, et est représenté par un complexe $V^{\cdot}$ borné de fibrés vectoriels. Choisissant n assez grand il est clair que l'image directe Rpr_* dans $\mathrm{D}(S)$ du complexe de fibrés $R^{\cdot}\otimes V^{\cdot}$ sera représentée par un complexe borné de fibrés. $\Box$

Lorsque n est impair, le fibré $\mathcal{D}_v$ se construit en prenant un faisceau universel défini sur $M_n\times\mathbf{P}_2$ et en appliquant la formule de l'énoncé.

Lorsque n est pair, c'est un peu plus délicat : l'espace de modules M_n est le bon quotient d'un ouvert U d'un schéma de Hilbert. Cet ouvert U est formé de points semi-stables pour l'action d'un groupe réductif linéaire. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau universel sur $U\times\mathbb{P}_2$, on définit le faisceau inversible $\det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{F}\cdot(v)))$ sur U. L'action du groupe se linéarise à ce fibré (pour la définition d'une linéarisation cf [MuF]).

<u>Lemme</u> 2 *En un point p d'orbite fermée, le stabilisateur de p agit trivialement sur la fibre du fibré inversible précédent.*

<u>Preuve</u>: D'une façon générale le stabilisateur en un point est isomorphe au groupe des automorphismes du faisceau associé à ce point (cf [LeP] Lemme 8.3.1).

Si p est stable ce stabilisateur est trivial car un faisceau stable a pour groupe d'automorphismes $\mathbf{C}^*$. Si p est un point correspondant à un faisceau F strictement semi-stable, alors F est nécessairement un faisceau polystable par hypothèse, i.e il s'écrit comme somme directe $F_1\oplus F_2$, où F_i est un faisceau de multiplicité 1, nécessairement stable et de classe de Grothendieck $1-\frac{n}{2}h^2$. Alors le stabilisateur en un tel point est : soit $\mathbf{C}^*\times\mathbf{C}^*$; soit $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, dans le cas où $F_1\simeq F_2$.

Dans le premier cas, l'action du couple (α,β) sur la fibre est la multiplication par $\alpha^{<c/2,v>}\beta^{<c/2,v>}$, où $<,>$ désigne la forme quadratique sur $K(\mathbf{P}_2)$. Or $<c,v>=0$, ce qui permet de conclure.

Dans le second cas, l'action d'une matrice A sur la fibre est la multiplication par $\det(A)^{<c,v>}$, ce qui permet de conclure. $\Box$

Le lemme de descente de Kempf (cf [LeP] ex. page 138) s'applique donc, et on peut vérifier que le fibré quotient obtenu satisfait à la propriété universelle. Pour une preuve détaillée on peut consulter [LeP3] théorème 2.5 page 220. Nous reprendrons l'idée de la construction précédente pour définir des fibrés inversibles sur les espaces de modules de systèmes cohérents.

On définit ainsi deux fibrés inversibles sur M_n : $\mathcal{D} = \lambda_{M_n}(-h+h^2)$, et $\mathcal{B} = -\lambda_{M_n}(u)$, avec $u = 2+2h+(n-4)h^2$ (ces fibrés seront éventuellement indicés par n dans la suite). Le théorème suivant est dû à Drézet (cf [Dre]).

<u>Théorème</u> 4 *Lorsque n est impair, les classes des deux fibrés $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$ forment une base du groupe de Picard* $\mathrm{Pic}(M_n)$. *Lorsque n est pair, la classe de $\mathcal{B}$ est divisible par 2, et si on pose $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{B}$ le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ est une base de générateurs.*

Le fibré $\mathcal{D}$ s'appelle le fibré déterminant de Donaldson. Il est isomorphe à l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}(1)$ par le morphisme de Barth β. Cela lui donne des propriétés intéressantes comme celle d'être nef et big (il n'est pas ample car β possède des fibres de dimension ≥ 1). A noter que cette preuve du fait que $\mathcal{D}$ est big s'appuie sur le théorème de Le Potier-Tikhomirov qui dit que β est birationnel sur son image.

Revenons maintenant au cadre de la section 2.2. Etant données deux classes orthogonales c et c^* telles que tout couple de faisceaux semi-stables de classes c et c^* vérifient les conditions de définition de module de saut, on peut définir des fibrés inversibles $\mathcal{D}_{c,c^*}$ et $\mathcal{D}_{c^*,c}$ respectivement sur M_c et M_{c^*} avec la formule de la définition 1. On peut aussi définir (cf [Dan]) une section canonique du fibré $\mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c^*,c}$ sur $M_c \times M_{c^*}$ dont le lieu des zéros est précisément formé des couples $([F],[G])$ tels que $\mathrm{H}^0(F \otimes G) \neq 0$. On définit ainsi un morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(M_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \to \mathrm{H}^0(M_c, \mathcal{D}_{c,c^*})$$

C'est une question ouverte de savoir quand un tel morphisme est un isomorphisme. Jusqu'à présent quelques cas particuliers ont été examinés et la réponse a été positive.

2.4 Systèmes algébriques et familles de systèmes cohérents sur $\mathbf{P}_2$

2.4.1 Définitions

Soit S un schéma. On appelle système algébrique au dessus d'un schéma de base S la donnée d'un triplet $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Gamma}, i, \mathbf{\Theta})$ tel que Θ soit un module cohérent sur $S \times X$, tel que $\mathbf{\Gamma}$ soit un $\mathcal{O}_S$ module cohérent, et tel que $i : \mathbf{\Gamma} \to \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})$ soit un morphisme de faisceaux cohérents.

Pour deux systèmes algébriques $\mathbf{\Lambda}' = (\mathbf{\Gamma}', i', \mathbf{\Theta}')$ et $\mathbf{\Lambda}'' = (\mathbf{\Gamma}'', i'', \mathbf{\Theta}'')$ sur S, on peut définir un faisceau cohérent $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$ sur S, dont les sections au dessus de l'ouvert $U \subseteq S$ sont données par les couples (f, σ) où $f : \mathbf{\Theta}'|_{\mathrm{pr}^{-1}(U)} \to \mathbf{\Theta}''|_{\mathrm{pr}^{-1}(U)}$ est un morphisme de $\mathcal{O}_{U\times X}$ modules et $\sigma : \mathbf{\Gamma}' \to \mathbf{\Gamma}''$ un morphisme de $\mathcal{O}_U$ modules tels que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Gamma}'|_U \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "i'"] & \mathbf{\Gamma}''|_U \arrow[d, "i''"] \\ \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}')|_U \arrow[r, "\mathrm{pr}_*(f)"] & \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}'')|_U \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{pr}_*(f)$ est le morphisme induit par f sur les images directes. Le préfaisceau de $\mathcal{O}_S-$modules ainsi défini est un $\mathcal{O}_S-$module cohérent. En particulier, on désigne par $\mathrm{Hom}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$ l'espace vectoriel des sections globales du faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$. L'ensemble des systèmes algébriques sur un schéma S forme donc une catégorie.

Dans [MinH], [MinH2], l'auteur prouve que la catégorie des systèmes algébriques sur S est une catégorie abélienne avec assez d'objets injectifs. Cela nous permet de parler de noyau, conoyau, image d'un morphisme de systèmes algébriques sur S. Etant donnée un système algébrique $\mathbf{\Lambda}'$ sur S, on peut définir le $i$ème foncteur dérivé du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', -)$, ce qui permet donc d'introduire les faisceaux $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$. Dans le cas où S est un point, on obtient pour deux systèmes algébriques Λ' et Λ'' les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^i(\Lambda', \Lambda'')$, pour $i \geq 0$.

Introduisons maintenant la notion de système cohérent.

<u>Définition</u> 4 *On appelle système cohérent un couple $\Lambda = (\Gamma, F)$ formé d'un faisceau cohérent F de dimension d sur $X = \mathbf{P}_2$ et d'un sous-espace vectoriel $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(F)$.*

Un système cohérent est donc en particulier un système algébrique au dessus d'un point. On peut donc parler de morphismes de systèmes cohérents en tant que morphismes de systèmes algébriques.

Le noyau d'un morphisme de systèmes cohérents est un système cohérent, mais en général le conoyau d'un morphisme de systèmes cohérents n'est pas un système cohérent. Néanmoins si on se donne un sous-faisceau $F' \subset F$ et qu'on pose $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(F')$ et $\Lambda' = (\Gamma', F')$, le conoyau de l'injection $i : \Lambda' \hookrightarrow \Lambda$ est un système cohérent $\Lambda'' = (\Gamma/\Gamma', F/F')$. Si $c(F) = c$ et $\dim(\Gamma) = k$, on dit que Λ est de type (c, k).

On peut aussi introduire des familles de systèmes cohérents sur une base quelconque, mais nous souhaitons rappeler que nous prenons plus de précautions pour cette définition que pour celle des systèmes algébriques sur une base.

<u>Définition</u> 5 *Une famille plate sur S de systèmes cohérents de type (c, k), avec $c \in K(X)$ et $k \in \mathbf{N}^*$, est un couple $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ tel que $\mathbf{\Theta}$ soit un faisceau cohérent sur $S \times \mathbf{P}_2$, qui soit un $\mathcal{O}_S$ module plat, et $\mathbf{\Gamma}$ un sous-faisceau localement libre de rang k du faisceau cohérent $\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})$ tel qu'en un point s de S on ait :*

1. *Le faisceau $\mathbf{\Theta}(s)$ est de classe de Grothendieck c,*
2. *le morphisme composé d'espaces vectoriels $\mathbf{\Gamma}(s) \to \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})(s) \to \mathrm{H}^0(\mathbf{\Theta}(s))$ est injectif.*

Une telle famille plate sur S de systèmes cohérents est en particulier un système algébrique sur S. La catégorie des familles plates sur une variété donnée S de systèmes cohérents se plonge naturellement dans la catégorie abélienne des systèmes algébriques au dessus du schéma de base S. Lorsqu'on aura deux familles plates $\mathbf{\Lambda}'$ et $\mathbf{\Lambda}''$ sur S de systèmes cohérents, les $i$èmes foncteurs dérivés $\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$ et $\mathrm{Ext}^i(\Lambda', \Lambda'')$, pour $i \geq 0$, seront donc calculés dans la catégorie des systèmes algébriques.

La proposition suivante sera souvent utilisée pour calculer explicitement ces objets dans ce cas.

Proposition 2 *Soit S une variété algébrique, et $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ et $\mathbf{\Lambda}' = (\mathbf{\Gamma}', \mathbf{\Theta}')$ deux familles $S-$plates de systèmes cohérents sur $S \times X$, avec S une variété, on a une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 &\to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}') \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Theta}') \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Gamma}, \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}')/\mathbf{\Gamma}') \\ &\to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Lambda}') \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Theta}') \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Gamma}, \mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}')) \to ... \end{aligned}$$

Signalons enfin que nous disposons de la notion d'image réciproque d'un système algébrique, et d'une famille plate de systèmes cohérents.

Définition 6 *Soit $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Gamma}, i, \mathbf{\Theta})$ un système algébrique sur S, et soit $f : S' \to S$ un morphisme de schémas. Alors on note $f^*(\mathbf{\Lambda})$ le système algébrique sur S' donné par le triplet $(f^*(\mathbf{\Gamma}), f^*(i), f^*(\mathbf{\Theta}))$.*

Avec cette définition si de plus $\mathbf{\Lambda}$ est une famille plate sur S de systèmes cohérents, le système algébrique $f^*(\mathbf{\Lambda})$ est une famille plate sur S' de systèmes cohérents.

Dans l'énoncé précédent, le morphisme $f^*(i)$ est donné par la composée $f^*(\mathbf{\Gamma}) \to f^*(\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})) \to \mathrm{pr}_*(f^*(\mathbf{\Theta}))$. Le second point est alors clair, car en $s' \in S'$ d'image s par f, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} f^*(\mathbf{\Gamma})(s') \arrow[r] & \mathrm{pr}_*(f^*(\mathbf{\Theta}))(s') \arrow[r] & \mathrm{H}^0(f^*(\mathbf{\Theta})(s')) \\ \mathbf{\Gamma}(s) \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"] & \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})(s) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{H}^0(\mathbf{\Theta}(s)) \arrow[u, "\simeq"] \end{tikzcd}$$

Par exemple, si $S' \subset S$ est l'inclusion d'un sous-schéma de S, et si $\mathbf{\Lambda}$ est un système algébrique sur S (respectivement une famille plate sur S de systèmes cohérents), on pourra parler du système algébrique sur S' (respectivement de la famille plate sur S' de systèmes cohérents) "restreint(e)" $\mathbf{\Lambda}|_{S'}$.

2.4.2 Systèmes cohérents α semi-stables

Pour une système cohérent de type (c, k) on peut définir une notion de $\alpha-$ semi-stabilité lorsque α est un polynôme strictement positif à coefficients rationnels.

Définition 7 *Un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, F)$ est α semi-stable (resp. stable) si F est pur de multiplicité r et si pour tout sous-faisceau $F' \subset F$ de multiplicité $r' < r$ on a*

$$\frac{\dim(\Gamma')}{r'}\alpha + \frac{\mathrm{P}_{F'}}{r'} \leq \frac{\dim(\Gamma)}{r}\alpha + \frac{\mathrm{P}_F}{r} \quad \text{(resp. } <)$$

où $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(F')$.

Pour un système cohérent Λ, on note $p_{\Lambda,\alpha}$ le membre de droite de l'inégalité. Ce polynôme sera appelé simplement pente du système cohérent Λ. Si $\deg(\alpha) \geq \dim(F)$ la condition de semi-stabilité équivaut à

$$\frac{\dim(\Gamma')}{r'} \leq \frac{\dim(\Gamma)}{r} \quad \text{et si} \;=\; \text{alors} \quad \frac{\mathrm{P}_{F'}}{r'} \leq \frac{\mathrm{P}_F}{r}.$$

On dira simplement dans ce cas que le système cohérent (Γ, F) est semi-stable (car le paramètre α n'intervient plus).

Si Λ est α semi-stable, il existe une filtration de Jordan-Hölder dont les gradués sont des systèmes cohérents Λ_i stables tels que $p_{\Lambda_i,\alpha} = p_{\Lambda,\alpha}$.

Théorème 5 ([MinH2]) *Pour une classe $c \in K(\mathbf{P}_2)$ donnée et un entier k fixé, il existe un espace de modules grossier $\mathrm{S}_{\alpha,k,c}$ pour le foncteur contravariant $\underline{\mathrm{S}}_{k,c}$ qui à une variété algébrique S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles plates sur S de systèmes cohérents α semi-stables de type (c,k). Les points fermés de $\mathrm{S}_{\alpha,k,c}$ correspondent aux classes de $S-$équivalence.*

L'espace de modules $\mathrm{S}_{\alpha,k,c}$ se construit d'une façon similaire à celle de $M_X(c)$: on montre que la famille des systèmes cohérents de type donné est limitée, et on obtient $\mathrm{S}_{\alpha,k,c}$ en prenant le quotient par un groupe linéaire GL(H) d'un ouvert de points semi-stables d'un produit d'un schéma de Hilbert des quotients avec une grassmanienne (on tient en effet compte du sous-espace Γ). Nous donnerons quelques précisions de plus dans le premier chapitre.

Ces espaces de modules de systèmes cohérents ont un lien avec les espaces de modules de faisceaux semi-stables (qui sont réellement les objets que nous voulons étudions). Ceci sera bien sûr précisé dans cette thèse. Pour le moment nous nous contentons de rappeler des résultats connus sur les espaces de modules de systèmes cohérents semi-stables pour un paramètre.

2.5 Questions de lissité et schémas de quotients de systèmes cohérents

Voici un critère suffisant de lissité pour les espaces de modules de systèmes cohérents α semi-stables, qui ressemble beaucoup à celui des espaces de modules de faisceaux.

Théorème 6 ([MinH2] Thme 3.12) *Soit Λ un système cohérent $\alpha-$ stable, de type (k,c), et p le point qu'il définit dans $\mathrm{S}_{\alpha,k,c}$. Alors :*

- *l'espace tangent de Zariski $\mathrm{T}_p\, \mathrm{S}_{\alpha,k,c}$ est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(\Lambda,\Lambda)$,*

- *si $\mathrm{Ext}^2(\Lambda,\Lambda)=0$, alors p est un point lisse de $\mathrm{S}_{\alpha,k,c}$.*

De plus, au voisinage de p, l'espace de modules $\mathrm{S}_{\alpha,k,c}$ est isomorphe au schéma des zéros d'un germe de schéma lisse d'espace tangent $\mathrm{Ext}^1(\Lambda,\Lambda)$ à valeurs dans $\mathrm{Ext}^2(\Lambda,\Lambda)$.

Sur une variété S paramétrant des systèmes cohérents $\alpha-$stables, il peut être utile de savoir si la partie localement fermée des points de S correspondant à des systèmes $\beta-$instables $(\beta > \alpha)$ est lisse et de connaître son fibré normal. Pour cela on dispose d'un critère pratique faisant intervenir la notion suivante.

On considère des objets filtrés dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ ayant assez d'objets injectifs. On suppose que les gradués de cette filtration sont indexés par le même ensemble fini.

Définition 8 *Pour $A, B \in \mathcal{A}$, on note $\mathrm{Hom}_-(A,B)$ les morphismes de A vers B respectant la filtration, et $\mathrm{Hom}_+(A,B) = \mathrm{Hom}(A,B)/\mathrm{Hom}_-(A,B)$.*

On définit le foncteur $\mathrm{Ext}^i_-(A,-)$ comme le ième foncteur dérivé de $\mathrm{Hom}_-(A,-)$ dans la catégorie des objets filtrés.

Soit $B \to I^*$ est une résolution de l'objet B par des objets injectifs filtrés dont les gradués sont injectifs, tels que le complexe formé par les gradués de degré k soit une résolution du $k$ième gradué de B (il en existe toujours). On a alors $\mathrm{Ext}^i_-(A,B) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}^*_-(A,I^*))$ et on pose de plus $\mathrm{Ext}^i_+(A,B) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}^*_+(A,I^*))$.

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 3 *Sous les hypothèses précédentes, on a une suite exacte*

$$... \to \mathrm{Ext}^i_-(A,B) \to \mathrm{Ext}^i(A,B) \to \mathrm{Ext}^i_+(A,B) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_-(A,B) \to ...$$

Pour calculer en pratique ces groupes Ext^* filtrés, on utilise une suite spectrale.

Proposition 4 *Sous les hypothèses précédentes, on note* $\mathrm{gr}^i(C)$ *le* $i-$*ème gradué d'un objet filtré* $C \in \mathcal{A}$. *On a une suite spectrale de terme*

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \\ \oplus_i \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{gr}^i(A), \mathrm{gr}^{i-p}(B)) & \text{si } p \geq 0 \end{cases}$$

qui converge vers $\mathrm{Ext}^{p+q}_-(A,B)$ *en degré* $p+q$. *De même, il existe une suite spectrale de terme*

$$E_1^{p,q} = \begin{cases} \oplus_i \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{gr}^i(A), \mathrm{gr}^{i-p}(B)) & \text{si } p < 0 \\ 0 & \text{si } p \geq 0 \end{cases}$$

qui converge vers $\mathrm{Ext}^{p+q}_+(A,B)$ *en degré* $p+q$.

Nous pouvons enfin énoncer notre critère.

Proposition 5 *Supposons que* $\mathbf{\Lambda}$ *soit une famille plate sur* S *de systèmes cohérents* $\alpha-$ *semi stables. Soit* $s \in S$ *correspondant à une classe* $\Lambda = \mathbf{\Lambda}(s)$ $\alpha-$*stable et* $\beta-$*instable. On munit* Λ *de sa filtration d'Harder-Narasimhan relative à* β. *Supposons que :*

- *le morphisme* $\mathrm{T}_s S \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda,\Lambda)$ *est surjectif,*

- *on a* $\mathrm{Ext}^2_-(\Lambda,\Lambda) = \mathrm{Ext}^2_+(\Lambda,\Lambda) = 0$.

Alors le lieu $S_\beta \subset S$ *des points* $\beta-$*instables est lisse en* s, *d'espace normal isomorphe à* $\mathrm{Ext}^1_+(\Lambda,\Lambda)$.

Il arrive que de telles strates de points $\beta-$ instables apparaissent comme des schéma de quotients de Hilbert relatifs au dessus de S (cf chapitres 2,3).

Nous utilisons aussi les groupes Ext filtrés dans un cadre relatif, c'est-à-dire que l'on peut parler de foncteurs dérivés filtrés $\underline{\mathrm{Ext}}^*_{\mathrm{pr}/\pm}$ appliqués à des familles de systèmes algébriques $\mathbf{\Lambda}$ sur une base S munies d'une filtration dans la catégorie considérée. Nous tenons juste à rappeler ici au lecteur les rudiments sur ces schémas de quotients de familles de systèmes cohérents que nous utilisons.

Le schéma de Hilbert des faisceaux quotients de polynôme de Hilbert donné d'un faisceau cohérent donné vérifie une propriété universelle qu'on peut trouver dans [Gro] ainsi que sa construction. On peut adapter un tel théorème-définition au cas d'une famille $S-$ plate de systèmes cohérents.

En effet, soit $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ une telle famille, avec $\mathbf{\Theta}$ un faisceau sur $S \times X$. Soit le foncteur qui à un morphisme $\alpha : S' \to S$ de variété algébriques associe l'ensemble des familles $S'-$plates de systèmes cohérents $\mathbf{\Lambda}'$ quotients de $(\alpha \times id_X)^*(\mathbf{\Lambda})$ sur $S' \times X$, tels que pour tout $s \in S'$, le système cohérent $\mathbf{\Lambda}'(s)$ soit de type (k,c).

Dans [MinH2], Min He prouve que ce foncteur est représentable par un schéma projectif sur S. De plus il montre la proposition suivante qui donne des informations sur l'espace tangent en un point de ce schéma des quotients, et qui est adaptée de la proposition 15.2.1 de [LeP] (voir aussi [HuLe] annexe du chapitre 2), dont l'énoncé porte sur les faisceaux (c'est le théorème 1.26 de [MinH]).

Proposition 6 *Avec les notations précédentes, soit un point* $t = (s, \Lambda^{'})$ *du schéma de Hilbert des quotients* $\mathrm{Quot}_{k,c}(\mathbf{\Lambda}/S)$*. On note* $\Lambda^{''}$ *le noyau du morphisme quotient* $\mathbf{\Lambda}(s) \to \Lambda^{'}$*. On obtient ainsi une filtration de* $\mathbf{\Lambda}(s)$ *de gradués* $(\Lambda^{''}, \Lambda^{'})$*. On a alors une suite exacte d'espaces tangents (où les groupes Ext filtrés sont relatifs à la filtration précédente) :*

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_+(\mathbf{\Lambda}(s), \mathbf{\Lambda}(s)) \to \mathrm{T}_t\mathrm{Quot}_{k,c}(\mathbf{\Lambda}/S) \to \mathrm{T}_s S \xrightarrow{\omega_+} \mathrm{Ext}^1_+(\mathbf{\Lambda}(s), \mathbf{\Lambda}(s))$$

Le morphisme ω_+ *se déduit du morphisme infinitésimal de Kodaira-Spencer* $\omega : \mathrm{T}_s S \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{\Lambda}(s), \mathbf{\Lambda}(s))$*.*

On a par ailleurs dans l'énoncé précédent $\mathrm{Ext}^0_+(\mathbf{\Lambda}(s), \mathbf{\Lambda}(s)) = \mathrm{Hom}(\Lambda^{''}, \Lambda^{'})$, et $\mathrm{Ext}^1_+(\mathbf{\Lambda}(s), \mathbf{\Lambda}(s)) = \mathrm{Ext}^1(\Lambda^{''}, \Lambda^{'})$.

Chapitre 3

Faisceaux semi-stables sur le plan projectif et variété des courbes de Poncelet

3.1 Généralités et notations

Tous les schémas considérés ici sont des schémas de type fini sur $\mathbb{C}$. Par variété on entend schéma de type fini et réduit.

1. A chaque fois que l'on considère un produit $T \times X$, où T et X sont des schémas, pr désigne la projection sur T, et pr_2 la projection sur X. On appelle D la variété d'incidence dans $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$, des couples (l, x) avec $x \in l$. On note donc pr la projection de D sur $\mathbb{P}_2^*$. La notation Δ désignera la diagonale réduite de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$, ou du même produit avec $\mathbb{P}_2^*$, selon le cas.

   Lorsqu'on se donne un morphisme $f : X \to Y$, et F un faisceau cohérent sur Y, on note parfois $\mathbf{F} = f^*(F)$ (en gras) l'image réciproque sur X lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

   Si X est un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{D}^+(X), \mathcal{D}^-(X)$ les catégories dérivées des complexes bornés a gauche et à droite respectivement des faisceaux cohérents sur X.

2. On note Q le fibré quotient de rang 2 sur $\mathbb{P}_2^*$. Rappelons que l'on a $Q \simeq \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}(1))$. Le fibré $Q \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}$ sur $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$ admet une section canonique s_Δ dont le schéma des zéros est la diagonale Δ. Enfin sauf mention explicite h désigne la classe dans $K(\mathbf{P}_2)$ de la section hyperplane de $\mathbf{P}_2$, c'est à dire la classe $[\mathcal{O}_l]$, où l est une droite du plan.

3. Soit X un schéma projectif muni d'une polarisation $\mathcal{O}_X(1)$. Pour tout faisceau F de multiplicité $r > 0$, on note $P(F)$ son polynôme de Hilbert, et $p(F) = \frac{P(F)}{r}$ son polynôme de Hilbert réduit. La relation d'ordre que l'on prend sur les polynômes est l'ordre lexicographique donné par les termes de plus haut degré. Si la codimension du support de F est i $(i = 0, 1, 2)$, on note en outre $\check{F} = \underline{\mathrm{Ext}}^i(F, \mathcal{O}_X)$.

Soient $F^{'}, F^{''}$ deux faisceaux cohérents sur X. On pose

$$\chi(F^{'}, F^{''}) = \sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(F^{'}, F^{''})$$

Ce nombre est bien défini car les dimensions des espaces vectoriels $\operatorname{Ext}^i(F^{'}, F^{''})$ sont finis. Si $\Lambda^{'}$, $\Lambda^{''}$ sont deux systèmes cohérents sur $\mathbf{P}_2$ (cf chapitres 0,1), on note également $\chi(\Lambda^{'}, \Lambda^{''}) = \sum_i (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(\Lambda^{'}, \Lambda^{''})$.

4. Pour un faisceau cohérent E sur un schéma X, on note

$$\mathbb{P}(E) = \operatorname{Proj}(\operatorname{Sym}^{\cdot} E)$$

le schéma projectif associé à E comme dans [EGA2]. Il est muni d'une projection π sur X, et aussi d'un faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$, quotient de $\pi^*(E)$. Le schéma $\mathbb{P}(E)$ satisfait à la propriété universelle suivante. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas et $f^*(E) \to L$ un quotient localement libre sur Y de rang 1 de $f^*(E)$, il existe un unique morphisme $g : Y \to \mathbb{P}(E)$ au dessus de X tel que le quotient $g^*\pi^*(E) \to g^*(\mathcal{O}(1))$ coincide avec $f^*(E) \to L$. En d'autres termes, le schéma $\mathbb{P}(E)$ paramètre les quotients inversibles du faisceau E.
Lorsque E est un faisceau localement libre de rang $r+1$ sur une variété X de dimension d, on note $\mathbf{P}(E) = \mathbb{P}(E^{\vee})$ le fibré projectif des droites du fibré E. Le dual $\mathcal{O}(-1)$ du faisceau canonique est alors un sous-fibré de rang 1 de $\pi^*(E)$.

5. Sous les hypothèses ci-dessus, on appelle $(k-r)^{ieme}$ classe de Segré de E, et on note $s_{k-r}(E)$, l'élément

$$s_{k-r}(E) = \pi_*(c_1(\mathcal{O}(1))^k \cap [\mathbb{P}(E)]) \ \in A_{d-(k-r)}(X).$$

On note $s(E) = \sum_i s_i(E) \ \in A_*(X)$ la classe de Segré totale. Quand X est lisse, on note de la même façon $s_{k-r}(E)$ dans le groupe de Chow $A_{d-(k-r)}(X)$ et son image dans $\mathrm{H}^{2k-2r}(X, \mathbf{Z})$ par l'application cycle, bien définie dans ce cas. D'autre part, on a la relation de multiplicativité bien connue $s(E) \cdot c(E^*) = 1$ dans l'algèbre de cohomologie de X. Les suites exactes de fibrés vectoriels donnent une relation multiplicative sur les classes de Segré totales, car ceci est vérifié par les classes totales de Chern.
Lorsque E n'est plus localement libre, on peut toujours définir les classes de Segré de E de la même façon, mais il faut prendre garde que la relation de multiplicativité et la relation avec la classe de Chern n'est plus forcément vérifiée (cf [F] chap. 4 exemples 4.1.6, 7 pour plus de détails).

3.2 Faisceaux de Poncelet

Soit n un entier ≥ 4. On note M_n l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur $\mathbf{P}_2$ de classe de Grothendieck $c = 2 - nh^2$, c'est-à-dire de rang 2 et de classes de Chern $(0, n)$.

3.2.1 La sous-variété des faisceaux de Poncelet

On s'intéresse à une certaine catégorie de faisceaux semi-stables de classe c, appelés faisceaux de Poncelet. Notre but dans cette section est de rappeler certains résultats, que l'on peut trouver dans [LePT]. Le sous-ensemble des classes de faisceaux de Poncelet est muni d'une structure naturelle de sous-schéma fermé de M_n, qui en fait une sous-variété intègre normale P_n. De plus l'intersection de P_n avec l'ouvert des points correspondant à des classes de faisceaux stables est de Cohen-Macaulay.

Définition 2 *Un faisceau semi-stable F de classe de Grothendieck c est de Poncelet si* $\dim \mathrm{H}^0(F(1)) \geq 2$ *ou, de façon équivalente* $\dim \mathrm{H}^1(F(1)) \geq n-4$.

A l'aide de la formule de Riemann-Roch, on montre en effet que pour tout faisceau semi-stable F de classe c, on a $\dim \mathrm{H}^0(F(1)) \leq 3$. Cela provient de la stricte décroissance des nombres de Hodge $j \mapsto \dim \mathrm{H}^1(F(j))$ pour un faisceau semi-stable (cf [LePH]). Lorsque $\dim \mathrm{H}^0(F(1)) = 3$, on dit que F est un faisceau spécial.

Soit $\mathbf{\Omega} = \mathrm{Hilb}^c(\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}(-m))$ le schéma de Hilbert paramétrant les faisceaux quotients de $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}(-m)$ de classe c, où m est un entier tel que pour tout F semi-stable de classe c on a

1. $\dim \mathrm{H} = \mathrm{H}^0(F(m))$ et $F(m)$ est engendré par ses sections,
2. $\mathrm{H}^q(F(m)) = 0$ pour tout $q > 0$.

Soit $\mathbf{\Omega}^{ss} \subset \mathbf{\Omega}$ l'ouvert des faisceaux quotients F semi-stables tels que le quotient induise un isomorphisme $\mathrm{H} \simeq \mathrm{H}^0(F(m))$. Alors on prouve que M_n est le bon quotient de $\mathbf{\Omega}^{ss}$ par l'action de $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$.

Sur $\mathbf{\Omega}^{ss} \times \mathbf{P}_2$ on dispose de la restriction du faisceau quotient universel $\mathcal{F}$. Soit le fermé de $\mathbf{\Omega}^{ss}$ donné par l'idéal de Fitting d'indice $n-5$ (cf [Eis] chapitre 20) du faisceau cohérent $\mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}(1))$; l'idéal de ce fermé est invariant par l'action du groupe et paramètre les faisceaux semi-stables F de classe c tels que $\dim \mathrm{H}^1(F(1)) \geq n-4$.

L'image dans le quotient M_n de ce fermé est donc un fermé P_n muni d'une structure naturelle de schéma.

Proposition 3 *Le sous-schéma fermé P_n de M_n est irréductible et normal de dimension $2n+5$.*

Preuve: voir proposition 4.8 de [LePT]. Dans cette proposition on montre également que l'ouvert des points stables de P_n est de Cohen-Macaulay. On s'appuie en particulier sur le lemme qui suit. $\square$

On reprend le faisceau universel $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{\Omega}^{ss} \times \mathbf{P}_2$.

lemme 1 *Il existe deux fibrés vectoriels A et B sur $\mathbf{\Omega}^{ss}$ de rang respectifs a et $a+n-6$ et un morphisme de ces fibrés dont le noyau est le faisceau* $\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}(1))$ *et le conoyau le faisceau* $\mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}(1))$.

Preuve: Il existe d'après la dualité de Serre un morphisme surjectif de fibrés $\mathcal{W} \boxtimes \mathcal{O}(-l) \to \check{\mathcal{F}}(-1)$ avec $\mathcal{W}$ un fibré sur $\mathbf{\Omega}^{ss}$ et $l >> 0$. Prenant le dual de ce morphisme, et compte tenu de l'injection naturelle $\mathcal{F}(1) \hookrightarrow \check{\check{\mathcal{F}}}(1)$, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}(1) \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to 0$$

où $\mathcal{M}$ est un fibré sur $\mathbf{\Omega}^{ss} \times \mathbf{P}_2$. Ajoutons également que si q est un point de V, la restriction de la suite exacte précédente à $\{q\} \times \mathbf{P}_2$ reste exacte par construction.

En prenant les images directes par la projection pr : $\mathbf{\Omega}^{ss} \times \mathbf{P}_2 \to \mathbf{\Omega}^{ss}$, on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathrm{pr}_*(\mathcal{F}(1)) \to \mathrm{pr}_*(\mathcal{M}) \to \mathrm{pr}_*(\mathcal{N}) \to \mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}(1)) \to 0$$

En un point q de $\mathbf{\Omega}^{ss}$, l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{M}_q)$ est de dimension $a = \mathrm{rg}(\mathcal{W}) \cdot r$, avec $r = \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(l))$. D'après le théorème de Grauert ([Ha], chap III, cor. 12.9)) le faisceau $A = \mathrm{pr}_*(\mathcal{M})$ est localement libre. De plus le faisceau $\mathcal{N}$ est plat sur $\mathbf{\Omega}^{ss}$, car si $q \in \mathbf{\Omega}^{ss}$ on a la suite exacte

$$0 \to \underline{\mathrm{Tor}}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{\Omega}^{ss}}}(\mathcal{N}, \mathbf{C}(q)) \to \mathcal{F}_q(1) \to \mathcal{M}_q$$

et le morphisme de droite est injectif donc le Tor de gauche est nul. On a également une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{F}_q(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{M}_q) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{N}_q) \to \mathrm{H}^1(\mathcal{F}_q(1)) \to 0$$

Compte tenu de ce que $\chi(\mathcal{F}_q(1)) = 6 - n$, on a $\dim \mathrm{H}^0(\mathcal{N}_q) = a + n - 6$. Le théorème de Grauert permet de conclure que $B = \mathrm{pr}_*(\mathcal{N})$ est localement libre. Le lemme est donc prouvé.

Le fermé P_n est alors l'image dans le quotient du fermé $P_n^{'}$ des points de $\mathbf{\Omega}^{ss}$ où le morphisme de fibrés de A dans B est de rang $\leq a-2$. L'action du groupe est libre sur l'ouvert des points stables, la codimension de l'intersection $P_n^{'} \cap \mathbf{\Omega}^s$ (ouvert des quotients stables) dans $\mathbf{\Omega}^s$ est donc $2n - 8$. Donc $P_n^{'}$ est de Cohen-Macaulay d'après la proposition 5 ci-dessous.

Dans le cas n impair, on peut faire tout le raisonnement précédent avec une famille universelle sur $M_n \times \mathbf{P}_2$, prouvant par là que P_n est Cohen-Macaulay. Quand n est pair, on conclut en invoquant la proposition suivante (cf [EGA4,2], corollaire 6.3.5).

Proposition 4 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme plat et surjectif entre deux schémas, et supposons X de Cohen-Macaulay. Alors Y est de Cohen-Macaulay.*

Ce résultat permet de conclure car le morphisme de passage au quotient est lisse au voisinage de P_n (l'action est libre, les fibres sont lisses isomorphes à GL(H)).

Soit X une variété complexe lisse, et E et F des fibrés vectoriels de rangs m et n. Soit $\phi : E \to F$ un morphisme de fibrés. Pour k entier positif inférieur à m, n, le sous-schéma fermé X_k de X d'idéal les mineurs d'ordre $k+1$ de ϕ a pour support l'ensemble des points x dans X où $\phi(x)$ est de rang inférieur ou égal à k. On sait (cf [ACG]) que l'on a $\mathrm{codim}(X_k, X) \leq (m-k)(n-k)$.

Proposition 5 *Si X_k est de codimension $(m-k)(n-k)$ exactement, ce schéma est de Cohen-Macaulay.*

Preuve: cf [ACG].

Nous allons dans la section suivante rappeler le lien qui existe entre faisceaux de Poncelet et courbes de Poncelet.

3.2.2 Systèmes cohérents semi-stables et faisceaux de Poncelet

La proposition suivante justifie l'introduction des systèmes cohérents semi-stables (cf chapitre 1) dans l'étude des faisceaux de Poncelet.

Proposition 6 *A un système cohérent de type* $(2h + nh^2, 2)$ *semi-stable on peut associer un faisceau de Poncelet de classe de Grothendieck* $2 - nh^2$*. Mais cette application n'est bijective qu'au dessus des faisceaux non spéciaux. Plus précisément :*

1. *Soit* F *un faisceau de Poncelet de rang* 2 *et de classes de Chern* $(0, n)$*. Soit* $\Gamma^* \subset \mathrm{H}^0(F(1))$ *un sous-espace de dimension* 2*. Alors le morphisme d'évaluation* $\Gamma^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to F(1)$ *est injectif, et son conoyau* $\check{\Theta}$ *est tel que* $\Theta = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\check{\Theta}, \mathcal{O})$ *est un faisceau pur de dimension* 1*, de classe de Grothendieck* $2h + nh^2$*.*

   De plus, on a une inclusion naturelle d'espaces vectoriels $\Gamma \subseteq \mathrm{H}^0(\Theta)$ *et le couple* (Γ, Θ) *est un système cohérent semi-stable (stable si* F *est stable).*

2. *Réciproquement, soit* (Γ, Θ) *est un système cohérent semi-stable (respectivement stable) avec* Γ*,* Θ *vérifiant les conditions de* (1)*. Alors l'inclusion* $\Gamma \subseteq \mathrm{H}^0(\Theta)$ *fournit un vecteur non nul de l'espace vectoriel* $\mathrm{Ext}^1(\check{\Theta}, \Gamma^* \otimes \mathcal{O})$*, i.e une extension non scindée*

   $$0 \to \Gamma^* \otimes \mathcal{O} \to F(1) \to \check{\Theta} \to 0$$

   Le faisceau F *est alors semi-stable (respectivement stable) de classe de Grothendieck* $2 - nh^2$*, et de Poncelet.*

Autrement dit, dans (1), le faisceau Θ a pour support une conique (éventuellement singulière), n'a pas de sous-faisceau porté par un point, et on a de plus $\chi(\Theta) = n + 2$. Cette application qui à un système cohérent semi-stable associe un faisceau de Poncelet n'est pas bijective car pour un faisceau spécial $\dim \mathrm{H}^0(F(1)) > 2$. Pour la démonstration de cette proposition, on se reporte à [LeP2] et [LePT].

Soit S_n l'espace de modules des systèmes cohérents semi-stables de type $(2h + nh^2, 2)$ (cf chapitre 1). C'est un schéma projectif dont on prouve dans [LePT] qu'il est irréductible et normal. L'application précédente permet de définir un morphisme modulaire $\pi : S_n \to M_n$ (cf section 3.3.2) dont l'image est au moins ensemblistement la sous-variété P_n (on montre à la section 3.4.1 que S_n est intègre).

Ce morphisme est birationnel au dessus de l'ouvert des faisceaux non spéciaux.

Rappelons qu'un faisceau spécial est obligatoirement stable et que les classes d'isomorphisme des faisceaux spéciaux forment une partie fermée de M_n. On note Σ_n le sous-schéma fermé réduit associé.

Proposition 7 *Une fibre de* π *en un point de* Σ_n*, munie de sa structure réduite, est isomorphe au plan projectif dual.*

Preuve: D'après la proposition 4.4 de [LePT], pour tout faisceau spécial F il existe une unique droite l et une suite exacte

$$0 \to Q^* \to F \to \mathcal{O}_l(1 - n) \to 0$$

La droite l est l'unique droite de saut d'ordre $n - 1$ et définit un point de multiplicité $n - 1$ sur la courbe des droites de saut de F (voir plus loin). Dans ce cas, tout sous-faisceau de $F(1)$ de la forme $\Gamma^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}$ correspondant au choix d'un sous-espace de $\Gamma^* \subset \mathrm{H}^0(F(1))$ de dimension 2, est nécessairement un sous-faisceau de Q.

On en déduit que si un système cohérent stable (Γ, Θ) définit un point de S_n dans la fibre de π au dessus du point de M_n défini par F, alors la droite l appartient à la conique support de Θ. Cette conique est donc singulière et l'autre droite l' qui la compose est déterminée par le conoyau de l'injection $\Gamma^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \hookrightarrow Q$, qui s'écrit $\mathcal{O}_{l'}$. Ceci prouve la proposition. $\square$

Nous ignorons si la fibre de l'énoncé précédent est réduite (il faudrait par exemple étudier le rang de la différentielle de π en un point de $\pi^{-1}(\Sigma_n)$). Cependant nous montrerons plus loin que le sous-schéma fermé $\pi^{-1}(\Sigma_n)$ de S_n est une hypersurface intègre et lisse, qui n'est pas un diviseur de Cartier pour $n \geq 5$, prouvant ainsi que la fibre de π en un point générique de Σ_n est lisse et que S_n n'est pas localement factorielle. On ne peut donc pas factoriser le morphisme π par l'éclatement $\widetilde{P}_n \to P_n$ de P_n le long de Σ_n pour $n \geq 5$.

Le cas $n = 4$ est différent : on a $P_4 = M_4$ et le fermé Σ_4 est de codimension 3 dans M_4. On prouve que $\pi : S_4 \to M_4$ est l'éclatement de M_4 le long de Σ_4. Nous y reviendrons au chapitre 3.

3.2.3 La variété des courbes de Poncelet

On rappelle qu'une courbe plane $\mathcal{C}$ est dite de Poncelet si elle est lisse et si il existe une conique lisse C, marquée de $n+1$ points (x_i), tels que les sommets du polygône qui a pour côtés les tangentes à C en x_i appartiennent à $\mathcal{C}$.

Soit C une conique lisse du plan projectif dual $\mathbf{P}_2^*$ (nous éclairons ci-dessous notre choix de $\mathbf{P}_2^*$ et non de $\mathbf{P}_2$). On sait qu'à tout pinceau de diviseurs de degré $n+1$ sur C on peut associer une courbe de Poncelet. Concrètement, si Θ est un faisceau inversible de degré $n+1$ sur la conique duale $\check{C}$, et $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\Theta)$ est un sous-espace de dimension 2, le lieu des droites l du plan $\mathbf{P}_2$ telles que le morphisme naturel d'espaces vectoriels $\Gamma \to \mathrm{H}^0(\Theta|_l)$ n'est pas inversible est une courbe de degré n dans $\mathbf{P}_2^*$, qui est de Poncelet pour la conique C.

Il est clair qu'ici, pour tout choix d'un sous-espace $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\Theta)$ de dimension 2, le couple (Γ, Θ) est un système cohérent stable. Soit donc F le faisceau de Poncelet stable image par π du point défini par le système cohérent (Γ, Θ). Soit maintenant $D \subset \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2$ la variété d'incidence droite-points, et pr et pr_2 les projections sur les premiers et second facteurs. On a la proposition suivante :

Proposition 8 *La courbe des droites de saut de F est donnée par l'idéal de Fitting du conoyau du morphisme canonique sur $\mathbf{P}_2^*$*

$$\varphi : \Gamma \otimes \mathbf{P}_2^* \to \mathrm{pr}_*(\mathrm{pr}_2^*(\Theta))$$

Une droite l appartient à la courbe des droites de saut de F si et seulement si l'application naturelle $\Gamma \to \mathrm{H}^0(\Theta|_l)$ est non inversible.

Preuve: La preuve est assez technique. La première assertion se prouve en montrant que l'idéal de Fitting est celui du faisceau $\mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathrm{pr}_2^*(F(-1)))$, qui définit le lieu des droites l telles que $\mathrm{H}^1(F(-1)|_l) \neq 0$, autrement dit le lieu des droites de saut de F (cf chapitre 1). C'est la proposition 5.3 de [LePT]. Le deuxième point est conséquence du point *(iii)* du lemme 5.1 du même article. La proposition en découle.

Dès lors il est clair que l'image par le morphisme de Barth β de la sous-variété P_n contient un ouvert de la sous-variété des courbes de Poncelet, plongée dans l'espace projectif des courbes de degré n. L'image $\beta(P_n)$ est donc cette sous-variété, et on sait que la restriction $\beta|_{P_n}$ est génériquement finie car la dimension est $2n+5$ dans les deux cas. D'après les résultats principaux de [Tom] et [LePT], on peut dire en fait que $\beta|_{P_n}$ est génériquement injectif.

Les observations précédentes sont fort utiles si l'on cherche à calculer le degré de la sous-variété des courbes de Poncelet de degré n. En effet, le fibré déterminant de Donaldson $\mathcal{D}$ sur M_n (cf chapitre 1) est l'image réciproque $\beta^*(\mathcal{O}(1))$. Il suffit donc de savoir calculer le nombre d'intersection

$$\mathrm{I}_n = c_1(\mathcal{D})^{2n+5} \cap [P_n]$$

où $[P_n]$ désigne l'élément dans le groupe de Chow des $2n+5$ cycles de M_n.

La stratégie suivie pour répondre à cette question est la suivante : le nombre précédent est aussi un nombre d'intersection sur l'espace de modules S_n. Comme dans [LeP1] et [MinH] (où les situations sont tout de même différentes), S_n peut être mis en relation avec d'autres espaces de modules de systèmes cohérents semi-stables pour un choix de paramètre (cf chapitre 1). Cela consiste à faire des éclatements puis des contractions. Sur chacun de nos espaces de modules, on définit un analogue naturel de notre nombre d'intersection. Nous calculons aussi les variations de ce nombre à chaque éclatement / contraction. Le but est d'arriver ainsi à une situation où ce calcul devient classique, grâce par exemple au calcul de Schubert.

3.3 Espaces de modules de systèmes cohérents α semi-stables

3.3.1 Les espaces de modules $S_{\alpha,n}$

Valeurs critiques

On considère toujours des polynômes à coefficients rationnels strictement positifs, comparés avec la relation d'ordre lexicographique. Il découle directement de la définition de α semi-stabilité que si $\alpha < \gamma < \beta$ est un triplet ordonné de polynômes, tout système cohérent α semi-stable et β semi-stable, est γ semi-stable.

Définition 3 *On dit que α est un paramètre ou une valeur critique si pour tout $\alpha_+ > \alpha$, il existe des systèmes cohérents α semi-stables mais non α_+ semi-stables.*

On peut formuler le lemme suivant.

lemme 2 *Quelque soit n, et $\alpha > 0$ un polynôme constant, α est une valeur critique si et seulement si $S_{\alpha,n}$ contient des systèmes strictement semi-stables S-équivalents $(\Gamma, \Theta') \oplus (0, \Theta'')$, avec Θ' et Θ'' de multiplicité 1, et*

$$\chi(\Theta') = \frac{n}{2} - \alpha + 1 \ ; \ \chi(\Theta'') = \frac{n}{2} + \alpha + 1.$$

Donc α critique si et seulement si α rationnel et $n - 2\alpha \in 2\mathbf{Z}$, et ≥ 2.

<u>Preuve</u>: Supposons $\alpha > 0$ une valeur critique. Pour tout $\alpha_+ > \alpha$, il existe un système cohérent (Γ, Θ) qui est α semi-stable, et un sous-faisceau $\Theta^{'} \subset \Theta$ de multiplicité 1, tel que $\alpha_+(1 - \dim \Gamma^{'}) < \chi(\Theta^{'}) - \frac{n}{2} - 1$, avec $\Gamma^{'} = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\Theta^{'})$. On a toujours $\alpha(1 - \dim \Gamma^{'}) \geq \chi(\Theta^{'}) - \frac{n}{2} - 1$. On a donc $\dim \Gamma^{'} = 2$. Les valeurs des $\chi(\Theta^{'}) - \frac{n}{2} - 1$ appartenant à $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z} + \frac{1}{2}$, et ceci étant valable quelque soit $\alpha_+ > \alpha$, on en déduit qu'il existe (Γ, Θ) qui est α semi-stable, muni d'un sous-faisceau $\Theta^{'}$ de multiplicité 1 , tel que $\chi(\Theta^{'}) = \frac{n}{2} - \alpha + 1$ et $\dim(\Gamma^{'}) = 2$.

Réciproquement, si α est rationnel et $n - 2\alpha \in 2\mathbf{Z}$, et ≥ 2, le système cohérent polystable $(\Gamma, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} - \alpha)) \oplus (0, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2} + \alpha))$, où $l, l^{'}$ sont deux droites, définit une classe de S-equivalence, et ce système cohérent est non α_+ semi-stable pour $\alpha_+ > \alpha$.

Soit n donné, et soient α_i les valeurs critiques rangées dans l'ordre croissant, i étant entier. Il découle de la définition d'une valeur critique que quelques soient $\alpha, \beta \in]\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0+1}[$, avec i_0 donné, tout système cohérent est α semi-stable si et seulement si il est β semi-stable.

Construction des espaces de modules, premières propriétés

Soit α un polynôme à coefficients rationnels strictement positifs. Au chapitre 1 nous avons défini une notions de α semi-stabilité, et nous avions rappelé l'existence d'espaces de modules de systèmes cohérents α semi-stables et de type fixé. Dans la suite nous notons donc $S_{\alpha,n}$ l'espace de modules de systèmes cohérents de type $(2h + nh^2, 2)$ et α semi-stables. Il est clair que les schémas $S_{\alpha,n}$ sont tous isomorphes à S_n pour α de degré ≥ 1.

<u>lemme</u> 3 *Soit (Γ, Θ) un système cohérent α semi-stable. Alors on a $\mathrm{H}^1(\Theta) = 0$; de plus le faisceau Θ est engendré par ses sections globales.*

<u>Preuve</u>: Soit (Γ, Θ) un système cohérent α semi-stable de type $(2h + nh^2, 2)$. Remarquons que si l est une droite de $\mathbb{P}_2$, et que $\mathcal{O}_l(b)$ est un quotient de Θ, nécessairement $b > 0$. En effet, si $\Gamma^{'}$ est le sous-espace image de Γ par le morphisme $\Theta \to \mathcal{O}_l(b)$, la condition de α semi-stabilité implique que $b \geq \frac{n}{2} + \alpha(1 - \dim \Gamma^{'})$. Or on peut supposer $n - 2\alpha > 0$ d'après le lemme précédent.

Si le faisceau Θ n'est pas semi-stable, on écrit sa filtration d'Harder-Narasimhan

$$0 \to \mathcal{O}_{l^{'}}(a) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l^{''}}(b) \to 0$$

avec $a > b > 0$. Le lemme est clair dans ce cas.

Si le faisceau Θ est semi-stable, on a par dualité de Serre $\mathrm{H}^1(\Theta(i)) = 0$ pour $i \geq -1$. Cela prouve aussi que Θ est engendré par ses sections.

Le lemme précédent permet de donner une construction explicite de l'espace de modules $S_{\alpha,n}$ en tant que bon quotient d'un schéma. Cette propriété sera utile dans beaucoup de démonstrations ultérieures.

<u>Proposition</u> 9 *Soit α un polynôme à coefficients rationnels strictement positifs, n un entier, H un espace vectoriel de dimension $n+2$. Soit e la classe de Grohendieck donnée par $2h+nh^2$.*

On considère le schéma de Hilbert des quotients $\mathcal{H} = \mathrm{Hilb}^e(\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2})$, qui paramètre les faisceaux cohérents quotients de $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ de classe de Grothendieck e.

Désignons par $R^{ss}_{\alpha,n}$ l'ouvert du schéma $R_n = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}) \times \mathcal{H}$ des couples (Γ, Θ) tels que :

1. $\mathrm{H}^1(\Theta) = 0$;

2. *l'application linéaire* $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^0(\Theta)$ *est inversible ;*

3. *le couple* (Γ, Θ) *définit un système cohérent* α *semi-stable.*

Alors l'ouvert $R^{ss}_{\alpha,n}$ *est invariant par l'action naturelle de* $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ *; de plus il existe une polarisation* $\mathcal{L}_\alpha$ *de* R_n *telle que pour* (Γ, Θ) *vérifiant* (1)*, il y ait équivalence entre vérifier* (2) *et* (3) *et être semi-stable pour l'action de* $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ *et la polarisation* $\mathcal{L}_\alpha$*.*

Alors $S_{\alpha,n}$ *est isomorphe au bon quotient de* $R^{ss}_{\alpha,n}$ *par l'action de* $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ *; de plus cette action est libre sur l'ouvert* $R^{s}_{\alpha,n} \subset R_n$ *des couples* α *stables.*

Pour la preuve de cette proposition, on se réfère à [MinH2] (l'article [MinH] est plus succint sur les détails techniques).

On note dans la suite $q_{\alpha,n} : \; R^{ss}_{\alpha,n} \to S_{\alpha,n}$ le morphisme de passage au quotient.

On peut aussi rappeler que si n est impair, les points de $S_{\alpha,n}$ paramètrent des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents α stables. Si n est pair, il existe des systèmes cohérents strictement α semi-stables. On a à ce propos le lemme suivant.

<u>lemme</u> 4 *Si* β *est une valeur non critique, et si* $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ *est un système cohérent* β *strictement semi-stable, alors* n *est pair et* Λ *est S-équivalent à* $(\Gamma^{'}, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2})) \oplus (\Gamma^{''}, \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2}))$*, où* $l^{'}, l^{''}$ *sont deux droites, et* $\Gamma^{'}, \Gamma^{''}$ *des sous-espace de sections de dimension* 1*.*

<u>Preuve</u>: On peut supposer que β est compris entre deux valeurs critiques consécutives, et donc selon que n est pair ou impair $\beta \notin \mathbf{Z}$ ou $\notin \mathbf{Z} + \frac{1}{2}$ (cf lemme 2). Supposons que Λ possède un sous-système cohérent $\Lambda^{'} = (\Gamma^{'}, \Theta^{'})$ avec $\Theta^{'} = \mathcal{O}_{l^{'}}(i)$, $i \in \mathbf{Z}$ et

$$i + 1 + \beta \cdot \dim \Gamma^{'} = \frac{n+2}{2} + \beta$$

Du fait que $1 - \dim \Gamma^{'} \in \{-1, 0, 1\}$, l'hypothèse sur β entraîne $\dim \Gamma^{'} = 1$. On a alors $i = \frac{n}{2}$ ce qui justifie l'énoncé. □

Le lemme suivant est immédiat.

<u>lemme</u> 5 *Soit* n *donné, et soient* α_i *les valeurs critiques rangées dans l'ordre croissant,* i *étant entier. Alors quelque soit* $\alpha, \beta \in]\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0+1}[$*, avec* i_0 *donné, il existe un isomorphisme naturel*

$$S_{\alpha,n} \simeq S_{\beta,n}$$

<u>Preuve</u>: Pour un tel couple α, β, on a $R^{ss}_{\alpha,n} = R^{ss}_{\beta,n}$. On en déduit le résultat par passage au quotient.

Pour α critique, et $\alpha_+ > \alpha$ proche, on a l'inclusion $R^{ss}_{\alpha_+,n} \subset R^{ss}_{\alpha,n}$, ce qui fournit un morphisme $S_{\alpha_+,n} \to S_{\alpha,n}$ que nous étudierons. De même, pour un paramètre $\alpha_- < \alpha$ et proche de α, on a une inclusion $R^{ss}_{\alpha_-,n} \subset R^{ss}_{\alpha,n}$, et donc un morphisme canonique $S_{\alpha_-,n} \to S_{\alpha,n}$.

On s'interroge maintenant sur l'existence d'une famille universelle de systèmes cohérents α semi-stables pour α, n donnés, c'est à dire d'une famille plate de systèmes cohérents paramétrée par l'espace de modules $S_{\alpha,n}$ telle que le morphisme modulaire associé soit l'identité.

Proposition 10 *Pour n impair et α non valeur critique, il existe une famille universelle $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ de systèmes cohérents α semi-stables sur $S_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$.*

Preuve: Pour n impair et α non valeur critique, tous les points de $S_{\alpha,n}$ sont stables. Sur $R^s_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$, on a un faisceau quotient universel $\widehat{\mathbf{\Theta}}$, et on note $\widehat{\mathbf{\Gamma}} \subset \mathrm{pr}_*(\widehat{\mathbf{\Theta}})$ le sous-fibré universel de rang 2 provenant de la grassmanienne. On note $T = \mathrm{pr}_*(\widehat{\mathbf{\Theta}})$, qui est un fibré de rang $n+2$ sur $R^s_{\alpha,n}$. On peut trouver une résolution GL(H) équivariante de $\widehat{\mathbf{\Theta}}$. On prend le noyau du morphisme canonique surjectif GL(H) équivariant $\mathrm{pr}^*(\mathrm{pr}_*(\widehat{\mathbf{\Theta}})) \to \widehat{\mathbf{\Theta}}$, qui est un GL(H) faisceau. On prend ensuite un GL(H) faisceau localement libre qui le domine par un morphisme GL(H) équivariant, et on construit ainsi une résolution $\mathcal{L}^{\cdot} \to \widehat{\mathbf{\Theta}}$.

Posons $n+2 = 2k+1$. Soit le fibré inversible $L = (\Lambda^2 \widehat{\mathbf{\Gamma}})^{\otimes -k} \otimes \Lambda^{n+2} T$ sur $R^s_{\alpha,n}$. Quelque soit i, les GL(H) faisceaux $\mathcal{L}^i \otimes \mathrm{pr}^*(L^\vee)$ descendent par le lemme de Kempf sur $S_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$; en effet le stabilisateur en un point de $R^s_{\alpha,n}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^*$, et l'action d'un scalaire λ sur une fibre de L est la multiplication par $\lambda^{-2k} \cdot \lambda^{n+2} = \lambda$. Le complexe $\mathcal{L}^{\cdot} \otimes \mathrm{pr}^*(L^\vee)$ se descend également en un complexe sur $S_{\alpha,n} \times \mathbf{P}_2$.

On appelle $\mathbf{\Theta}$ le conoyau de la dernière flèche du complexe. Le fibré $\widehat{\mathbf{\Gamma}} \otimes L^\vee$ descend en un fibré de rang 2 noté $\mathbf{\Gamma}$ sur $S_{\alpha,n}$. Le couple $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ est une famille universelle sur $S_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$. $\square$

Pour n pair, en revanche, S_n n'a pas de famille universelle. La preuve est essentiellement la même que celle qui montre que l'espace de modules M_n n'admet pas de famille universelle pour n pair (cf [DN]).

3.3.2 Fibré déterminant $\mathcal{D}_{\alpha,n}$ sur $S_{\alpha,n}$

Dans cette section nous allons construire l'analogue pour les espaces de modules $S_{\alpha,n}$, avec α non critique, du fibré déterminant $\mathcal{D}_n$ sur M_n.

Supposons tout d'abord que α est supérieur à la plus grande valeur critique, autrement dit considérons S_n. Sur $R^{ss}_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$, on dispose d'une famille $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ de systèmes cohérents α semi-stables. On a également une extension canonique sur $S_n \times \mathbf{P}_2$:

$$0 \to \mathbf{\Gamma}^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathcal{F}(1) \to \check{\mathbf{\Theta}} \to 0$$

Le faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $R^{ss}_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$ obtenu est plat sur $R^{ss}_{\alpha,n}$, et paramètre des faisceaux semi-stables de Poncelet de classe $2 - nh^2$ (cf section 3.2.2). On a donc un morphisme modulaire $f_\alpha : R^{ss}_{\alpha,n} \to M_n$, qui est GL(H) invariant (par passage au quotient, on définit le morphisme $\pi : S_n \to M_n$ de la section 3.2.2).

On peut donc écrire, par la propriété universelle du fibré déterminant, que

$$f_\alpha^*(\mathcal{D}_n) = \det(\mathrm{pr}_!(\check{\mathbf{\Theta}}(-1) \cdot (-v))) \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^*$$

et l'on sait que ce fibré provient d'un fibré sur S_n.
On va donc poser, pour tout α non valeur critique, le fibré inversible sur $R^{ss}_{\alpha,n}$

$$\mathcal{D}_{\alpha,n} = f_\alpha^*(\mathcal{D}_n)$$

Nous avons l'intention de prouver que ce fibré se descend en fait sur l'espace de modules $S_{\alpha,n}$. Ceci sera clair grâce au résultat suivant.

Proposition 11 *Sous les hypothèses précédentes :*

1. *on a l'égalité*
$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha,n} = \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta}\cdot h)\otimes\det(\mathbf{\Gamma})^*.$$

2. *le fibré $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha,n}$ est l'image réciproque d'un fibré inversible sur $S_{\alpha,n}$ par le morphisme $q_{\alpha,n}$.*

Preuve: Commençons par rappeler le résultat classique de dualité relative à un morphisme lisse. Dans [Ha2] on trouvera un exposé sur des morphismes plus généraux. Ceci généralise la dualité de Serre à un cadre relatif.

Théorème 4 *Soient X, Y deux variétés algébriques, et $f : X \to Y$ un morphisme projectif lisse de dimension relative n. On définit $f^! : \mathcal{D}^+(Y) \to \mathcal{D}^+(X)$ par*

$$f^!(G^\cdot) = f^*(G^\cdot)\otimes\omega_{X/Y}[n]$$

où $\omega_{X/Y} = \Lambda^n\Omega^1_{X/Y}$ (faisceau dualisant de f). Alors quelque soit le couple $(F^\cdot, G^\cdot)\in\mathcal{D}^-(X)\times\mathcal{D}^+(Y)$, on a un isomorphisme de dualité fonctoriel

$$\theta_f : \mathrm{R}f_*(\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot_{\mathcal{O}_X}(F^\cdot, f^!(G^\cdot))) \to \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot_{\mathcal{O}_Y}(\mathrm{R}f_*(F^\cdot), G^\cdot).$$

Montrons que si $u\in K(\mathbb{P}_2)$ est un élément de l'algèbre de Grothendieck,

$$\mathrm{pr}_!(\check{\mathbf{\Theta}}\cdot u) = -\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta}\cdot\check{u})^*$$

où $u\mapsto u^*$ est l'involution de $K(\mathbb{P}_2)$, qui à la classe d'un fibré, associe son dual. Rappelons d'ailleurs que $\check{u} = u^*\otimes\omega_{\mathbb{P}_2}$. On peut donc supposer que la classe u est représentée par un faisceau localement libre de rang 1. Alors le produit de K-théorie $\check{\mathbf{\Theta}}\cdot u$ est représenté par la somme alternée des groupes de cohomologie du complexe $\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Theta}, u)$ dans la catégorie dérivée. Alors d'après le théorème,

$$\begin{aligned}\mathrm{Rpr}_*(\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Theta}, u)) &= \mathrm{Rpr}_*(\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Theta}\otimes\check{u}, \omega_{\mathbb{P}_2}))\\ &= \mathrm{Rpr}_*(\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Theta}\otimes\check{u}, \mathrm{pr}^!(\mathcal{O}_{R^{ss}_{\alpha,n}})))[-2]\\ &= \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Rpr}_*(\mathbf{\Theta}\otimes\check{u}), \mathcal{O}_{R^{ss}_{\alpha,n}})[-2]\end{aligned}$$

La somme alternée des groupes de cohomologie du complexe de gauche est bien $-\mathrm{pr}_!(\check{\mathbf{\Theta}}\cdot u)$, car $R\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Theta}, u)$ a sa cohomologie concentrée en degré 1. En effet le faisceau $\mathbf{\Theta}$ étant réflexif, on a $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathbf{\Theta}, \mathcal{O}) = 0$ si $i = 0, 2$. D'autre part on a $h^* = -h - h^2$. On en déduit 1. en prenant les déterminants des deux membres.

Montrons maintenant 2. Quelque soit α non critique, le fibré inversible $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha,n}$ est muni d'une action naturelle de GL(H) ; cette action se factorise par le groupe PGL(H) car tout scalaire λ agit sur une fibre de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha,n}$ par la multiplication par

$$\lambda^{\chi(\Theta\cdot h)}\cdot\lambda^{-\dim\Gamma} = 1$$

où Θ est une fibre de $\mathbf{\Theta}$ en un point de $R^{ss}_{\alpha,n}$.

Si α est une valeur non critique, montrons que ce fibré inversible inversible passe au quotient. L'espace de modules $S_{\alpha,n}$ est le bon quotient de $R^{ss}_{\alpha,n}$ par l'action de GL(H), donc $S_{\alpha,n}$ paramètre les orbites fermées de $R^{ss}_{\alpha,n}$. Il suffit donc de vérifier qu'en un point d'orbite fermée, le stabilisateur agit trivialement sur la fibre de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha,n}$ pour pouvoir ensuite appliquer le lemme de descente de Kempf (cf [LeP] ex. page 138).

Le stabilisateur d'un point de $R^{ss}_{\alpha,n}$ s'identifie au groupe des automorphismes du système cohérent correspondant. En un point α stable, le stabilisateur est isomorphe à $\mathbb{C}^*$, et on sait que l'action d'un scalaire est l'identité. Soit donc un point strictement α polystable $\Lambda^{'} \oplus \Lambda^{''}$, avec

$$\Lambda^{'} = (\Gamma^{'}, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2})), \;\; \Lambda^{''} = (\Gamma^{''}, \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2}))$$

avec $\dim(\Gamma^{'}) = \dim(\Gamma^{''})$=1. Si $l^{'} \neq l^{''}$ ou $l^{'} = l^{''}$ et $\Gamma^{'} \neq \Gamma^{''}$, le stabilisateur est isomorphe à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ car tout morphisme $u : \Lambda^{'} \to \Lambda^{''}$ est nul (et idem avec $\Lambda^{'}$ et $\Lambda^{''}$ échangés). Si $l^{'} = l^{''} = l$ et $\Gamma^{'} = \Gamma^{''}$, le stabilisateur est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Dans ce cas, l'action de $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sur une fibre est la multiplication par $\det(g)^{\chi(\Theta\cdot h)/2} \cdot \det(g)^{-1} = 1$. En effet, pour la contribution au terme $\det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta} \cdot h))$ on note que g agit sur $\chi(\Theta \cdot h)/2$ copies de $\mathcal{O}_l(2) \oplus \mathcal{O}_l(2)$, et pour celle de $\det(\mathbf{\Gamma})^*$ on obtient évidemment $\det(g)^{-1}$. Ceci achève de prouver la proposition. □

On peut donc poser la définition suivante.

Définition 4 *Le fibré inversible obtenu ainsi par passage au quotient s'appelle fibré déterminant de $S_{\alpha,n}$. On le notera $\mathcal{D}_{\alpha,n}$.*

On peut également énoncer la proposition suivante.

Proposition 12 *Soit S une variété algébrique et $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ une famille plate sur S de systèmes cohérents α semi-stables. Si l'on note $f_S : S \to S_{\alpha,n}$ le morphisme modulaire associé, et que l'on pose $\mathcal{D}_S = \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta} \cdot h) \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^*$ dans Pic(S), alors on a $f_S^*(\mathcal{D}_{\alpha,n}) \simeq \mathcal{D}_S$. De plus le fibré $\mathcal{D}_{\alpha,n}$ est l'unique élément du groupe de Picard de $S_{\alpha,n}$ vérifiant cette propriété pour tout S.*

La démonstration est du même type que celle effectuée dans [LeP3], § 2.13 page 224.

Remarque 1 *Pour α critique, considérons un système cohérent dans $R^{ss}_{\alpha,n}$ dont la classe de S-équivalence est $(\Gamma, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} - \alpha)) \oplus (0, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2} + \alpha))$, où $l, l^{'} \in \mathbb{P}_2^*$. Le stabilisateur d'un tel point est isomorphe à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ si $l \neq l^{'}$, et un couple (λ_1, λ_2) opère sur la fibre de $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha,n}$ par multiplication par $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Le lemme de Kempf ne s'applique pas, et on ne peut plus descendre le fibré $\widetilde{\mathcal{D}}_{\alpha,n}$ sur $S_{\alpha,n}$.*

3.3.3 Des fermés remarquables dans $S_{\alpha_+,n}$ et $S_{\alpha_-,n}$, pour α critique

On a vu que les $S_{\alpha,n}$ sont des bons quotients d'ouverts de points α semi-stables de R_n par l'action de GL(H). Si α est critique, et α_+, α_- sont deux valeurs supérieures et inférieures à α, dans un petit voisinage de α, on a des inclusions $R^{ss}_{\alpha_+,n} \subset R_n$ et $R^{ss}_{\alpha_-,n} \subset R_n$, qui donnent deux morphismes

$$\begin{array}{rccc} \pi_+ : & S_{\alpha_+,n} & \to & S_{\alpha,n} \\ \pi_- : & S_{\alpha_-,n} & \to & S_{\alpha,n}. \end{array}$$

Définition 5 *On appelle :*

- *$\Sigma_{\alpha,n}$ le fermé de $S_{\alpha,n}$ des points non α_+ semi-stables.*
- *$\Sigma^+_{\alpha,n}$ le fermé des points de $S_{\alpha_+,n}$ non α_- semi-stables.*
- *$\Sigma^-_{\alpha,n}$ le fermé des points de $S_{\alpha_-,n}$ non α_+ semi-stables.*

Les parties ainsi définis sont bien des fermés de Zariski dans les espaces de modules considérés. En effet, la condition de semi-stabilité étant une condition ouverte, les parties en question sont les images par des morphismes de passage au quotient de parties fermées invariantes par l'action du groupe. On munit $\Sigma_{\alpha,n}$ de sa structure réduite. On va munir dans la suite $\Sigma^-_{\alpha,n}$ et $\Sigma^+_{\alpha,n}$ de structures schématiques naturelles. On aura d'ailleurs les égalités de sous-schémas fermés $\pi_-^{-1}(\Sigma_{\alpha,n}) = \Sigma^-_{\alpha,n}$ et $\pi_+^{-1}(\Sigma_{\alpha,n}) = \Sigma^+_{\alpha,n}$.

Rappelons que l'on note $\mathrm{D} \subset \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$ d'incidence des couples droites-points. Soit G le fibré en grassmaniennes sur $\mathbb{P}_2^*$ donné par $\mathrm{Grass}(2, \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}(\frac{n}{2} - \alpha)))$. On note dans la suite :

1. $\mathbf{\Gamma}$ le fibré universel de rang 2 sur la grassmanienne G,
2. p_1, p_2 les projections naturelles de $G \times \mathbb{P}_2^*$ sur chacun des facteurs $\mathbb{P}_2^*$,
3. D_i, pour $i = 1, 2$, le sous-schéma fermé de $G \times \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2$ image réciproque de D par p_i,
4. $\mathbf{\Lambda}'$ et $\mathbf{\Lambda}''$ les familles de systèmes cohérents paramétrées par la variété $\Sigma_{\alpha,n} = G \times \mathbb{P}_2^*$, plates au dessus de $\Sigma_{\alpha,n}$, qui sont données par

$$\mathbf{\Lambda}' = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}(\frac{n}{2} - \alpha)), \;\; \mathbf{\Lambda}'' = (0, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha))$$

Le fermé $\Sigma_{\alpha,n}$

L'objet de cette section est l'énoncé et la preuve du résultat suivant.

Proposition 13 *Il existe un plongement fermé de* $\mathrm{G} \times \mathbb{P}_2^*$ *dans* $S_{\alpha,n}$ *d'image les points de* $\Sigma_{\alpha,n}$.

Preuve: Sur $G \times \mathbb{P}_2^*$, il existe une famille de systèmes cohérents $\mathbf{\Lambda}$, somme directe de deux sous-familles $\mathbf{\Lambda}' = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}(\frac{n}{2} - \alpha))$ et $\mathbf{\Lambda}'' = (0, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha))$. Il est clair qu'ont peut associer à $\mathbf{\Lambda}$ un morphisme modulaire $\sigma : G \times \mathbb{P}_2^* \to S_{\alpha,n}$, qui ensemblistement est une bijection sur son image $\Sigma_{\alpha,n}$. Montrons que σ est un plongement fermé. Sur $R^{ss}_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$, on a la restriction d'une famille universelle de quotients $\mathbf{\Lambda}_R$ de systèmes cohérents, et cette famille paramètre des systèmes cohérents α semi-stables. Posons λ la classe de $K(\mathbf{P}_2)$ égale à $h + (\frac{n}{2} + \alpha)h^2$. Soit $\mathcal{Q} = \mathrm{Quot}^\lambda(\mathbf{\Lambda}_R)$ le schéma de Hilbert relatif qui paramètre les systèmes cohérents quotients de la famille $\mathbf{\Lambda}_R$ de type $\lambda = (h + (\frac{n}{2} + \alpha)h^2, 0)$; autrement dit les quotients de la forme $(\Gamma, \Theta) \to (0, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha)$. Le schéma $\mathcal{Q}$ est projectif au dessus de $R^{ss}_{\alpha,n}$, et son image dans $R^{ss}_{\alpha,n}$ donne par passage au quotient le fermé $\Sigma_{\alpha,n}$ d'après le lemme 2.

Le morphisme $\sigma' : \mathcal{Q} \to R^{ss}_{\alpha,n}$ est un plongement fermé. En effet, considérons un point de ce schéma de Hilbert qui détermine à isomorphisme près une suite exacte

$$0 \to \Lambda' \to (\Gamma, \Theta) \to \Lambda'' \to 0 \;\; (*)$$

avec $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha))$, $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} + \alpha))$. On a $\mathrm{Hom}(\Lambda', \Lambda'') = 0$ d'après les rappels du chapitre 1, car un morphisme non nul de Λ' sur Λ'' induirait un morphisme injectif sur les faisceaux correspondant, et l'image du sous-espace Γ ne pourrait être 0. D'après la proposition 6 du chapitre 1, le morphisme $\mathcal{Q} \to R^{ss}_{\alpha,n}$ est non ramifié. Il est de plus injectif car tout système cohérent (Γ, Θ) de $R^{ss}_{\alpha,n}$ admet un unique sous-système cohérent de la forme $(\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha))$. En effet, la filtration de Harder-Narasimhan de (Γ, Θ) relativement au paramètre α_- est unique. D'après le lemme 7.4 de [Ha], chapitre II, le morphisme σ' est un plongement.

Soit $G^{'}$ l'image dans $S_{\alpha,n}$ du sous-schéma fermé $\mathcal{Q} \subset R^{ss}_{\alpha,n}$. On note ce plongement fermé $\sigma^{''} : G^{'} \hookrightarrow S_{\alpha,n}$. Il existe aussi un morphisme $h : \mathcal{Q} \to G \times \mathbb{P}_2^*$ qui à un quotient associe les deux termes $(\Lambda^{'}, \Lambda^{''})$ de la filtration de Harder-Narasimhan pour α_+. Par passage au quotient on obtient $h^{'} : G^{'} \to G \times \mathbb{P}_2^*$, et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G^{'} \arrow[r, hook, "\sigma^{''}"] \arrow[d, "h^{'}"'] & S_{\alpha,n} \\ G \times \mathbb{P}_2^* \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

On en déduit que $h^{'}$ est un plongement fermé, et donc que σ est un plongement fermé. Ceci prouve la proposition. □

__lemme__ **6** *Le fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$ est le lieu des points α_- stables, s'écrivant comme extension non scindée*

$$0 \to (\Gamma^{'}, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2} - \alpha)) \to (\Gamma, \Theta) \to (0, \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2} + \alpha)) \to 0 \quad (*)$$

où $l^{'}, l^{''} \in \mathbb{P}_2^*$.

De même $\Sigma^+_{\alpha,n}$ est le lieu des points α_+ stables, s'écrivant comme extension non scindée

$$0 \to (0, \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2} + \alpha)) \to (\Gamma, \Theta) \to (\Gamma^{'}, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2} - \alpha)) \to 0 \quad (**)$$

Dans les deux cas, l'application induite $\Gamma^{'} \to \Gamma$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Les suites exactes définissent la filtration de Harder-Narasimhan (cf chapitre 1) de (Γ, Θ) relativement au paramètre considéré. Dans le premier cas (Γ, Θ) est α_- stable, dans le second il est α_+ stable.

Dans les deux énoncés, nous avons noté de la même façon les sous-espaces Γ qui interviennent. Cela signifie que les morphismes de systèmes cohérents considérés induisent des isomorphismes sur ces sous-espaces.

__Preuve__: Soit (Γ, Θ) un système cohérent α_- semi-stable mais non α_+ semi-stable. De plus (Γ, Θ) est α semi-stable (car la propriété de semi-stabilité est valable pour tout paramètre α_- suffisamment proche de α) ; la preuve du lemme 2 montre qu'il existe un sous-système $(\Gamma, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2} - \alpha))$ de (Γ, Θ) (les deux sous-espaces de sections sont isomorphes, c'est pourquoi nous les notons de la même façon).

Comme (Γ, Θ) est α_- semi-stable, le support du conoyau de l'injection de faisceaux $\mathcal{O}_l(\frac{n}{2} - \alpha) \hookrightarrow \Theta$ est pur de dimension 1. Le conoyau de l'injection de systèmes cohérents $(\Gamma, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2} - \alpha)) \subset (\Gamma, \Theta)$ s'écrit donc $(0, \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2} + \alpha))$.

On obtient bien l'extension de l'énoncé, forcément non scindée d'après la propriété de α_- semi-stabilité. Réciproquement, une extension non scindée du type $(*)$ définit un système cohérent α_- stable, et non α_+semi-stable. Montrons le deuxième point. Soit (Γ, Θ) un système cohérent α_+ semi-stable mais non α_- semi-stable. Comme dans la preuve du lemme 2, on note que (Γ, Θ) possède un sous-système cohérent $(\Gamma^{'}, \Theta^{'})$ avec $\Theta^{'}$ un sous-faisceau de Θ de multiplicité 1, tel que l'on ait les inégalités

$$\alpha_-(1 - \dim \Gamma^{'}) < \chi(\Theta^{'}) - \frac{n}{2} - 1 \leq \alpha_+(1 - \dim \Gamma^{'})$$

Ceci impose $\Gamma^{'} = 0$, et $\chi(\Theta^{'}) = \frac{n}{2} + 1 + \alpha$. On peut conclure comme précédemment, ce qui prouve le lemme.

Remarque 2 *D'après ce lemme, il est clair que les morphismes π_- et π_+ définis précédemment envoient $\Sigma^-_{\alpha,n}$ et $\Sigma^+_{\alpha,n}$ sur $\Sigma_{\alpha,n}$.*

On suppose maintenant que α est valeur critique.

Description de $\Sigma^-_{\alpha,n}$

Dans cette section nous allons donner à $\Sigma^-_{\alpha,n}$ une structure de schéma qui le rend isomorphe à un fibré en espaces projectifs au sens de Grothendieck. Nous montons qu'en général, ce schéma possède deux composantes irréductibles.

Commençons par faire quelques remarques ensemblistes. Lorsqu'on fixe un couple $l^{'}, l^{''}$ de droites distinctes, et $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2} - \alpha))$ un sous-espace vectoriel de dimension 2, les classes d'extensions non scindées de systèmes cohérents du type (*) (cf lemme 6) sont paramétrées par l'espace projectif associé à l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2} + \alpha), \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2} - \alpha))$. Ce dernier est de dimension 1, par conséquent dans ce cas la donnée de $\Gamma, l^{'}$ et $l^{''}$ fixe un point de $S_{\alpha_-,n}$ dans $\Sigma^-_{\alpha,n}$.

Lorsque $l^{'} = l^{''} = l$, la situation est différente. Si on se donne Γ, les classes d'extensions de type (*) sont paramétrées par l'espace projectif associé à l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(2\alpha), \mathcal{O}_l)$, de dimension $2\alpha - 2$, isomorphe à $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(2\alpha - 3))^*$.

Nous voyons donc ce qui se passe ensemblistement sur les fibres de l'application $\pi_- : \Sigma^-_{\alpha,n} \to \Sigma_{\alpha,n}$. Il nous reste maintenant à traduire cela en termes de famille.

Proposition 14 *On suppose $\alpha \geq 1/2$, soit $D^-_{\alpha,n}$ le faisceau cohérent sur $\Sigma_{\alpha,n}$ donné par $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha - 3))$. Pour $\alpha \geq 1$ on a l'isomorphisme*

$$D^-_{\alpha,n} \simeq \mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}(2\alpha - 1, 2\alpha - 2),$$

où I_Δ est l'idéal de l'image réciproque par (p_1, p_2) de la diagonale dans $\mathbb{P}^*_2 \times \mathbb{P}^*_2$. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ le faisceau $D^-_{\alpha,n}$ est inversible.

Preuve: Sur $\mathbb{P}^*_2 \times \mathbb{P}_2$, le faisceau structural $\mathcal{O}_\mathrm{D}$ de la variété d'incidence $D \subset \mathbb{P}^*_2 \times \mathbb{P}_2$ admet la présentation suivante :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*_2 \times \mathbb{P}_2}(-1, -1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*_2 \times \mathbb{P}_2} \to \mathcal{O}_\mathrm{D} \to 0.$$

On a donc la suite exacte suivante sur $\Sigma_{\alpha,n}$:

$$\mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha - 3)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^*_2}(1) \boxtimes \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_\mathrm{D}(2\alpha - 2)) \to D^-_{\alpha,n} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha - 3))$$

On a en outre l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha - 3)) = \mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*\mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha - 3))$. On distingue deux cas :

1. lorsque $\alpha = 1/2$, le faisceau $\mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(-2))$ est inversible et isomorphe à $D^-_{\alpha,n}$,
2. lorsque $\alpha > 1/2$, la dernière flèche est surjective car $\mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha - 3)) = 0$.

Dans ce dernier cas, on obtient la résolution suivante de $D^-_{\alpha,n}$:

$$\mathcal{O} \boxtimes \mathrm{S}^{2\alpha-3}Q \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(1) \boxtimes \mathrm{S}^{2\alpha-2}Q \to D^-_{\alpha,n} \to 0$$

La résolution de Koszul du faisceau d'idéaux I_Δ :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-2) \boxtimes \Lambda^2 Q(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \boxtimes Q(-1) \to \mathrm{I}_\Delta \to 0$$

permet d'obtenir la résolution de Koszul du faisceau $\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-2\alpha+1) \boxtimes \mathrm{S}^{2\alpha-3}Q(-2\alpha+2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-2\alpha+2) \boxtimes \mathrm{S}^{2\alpha-2}Q(-2\alpha+2) \to \mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2} \to 0$$

soit donc la présentation suivante :

$$0 \to \mathcal{O} \boxtimes \mathrm{S}^{2\alpha-3}Q \xrightarrow{\rho'} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(1) \boxtimes \mathrm{S}^{2\alpha-2}Q \to \mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}(2\alpha-1, 2\alpha-2) \to 0$$

On est ramené à prouver :

lemme 7 *Les deux morphismes ρ et ρ' sont égaux.*

Preuve: En un point x de $G \times \mathbb{P}_2^*$ au dessus du couple de droites (l', l''), l'application linéaire entre les fibres $\rho(x)$ est le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2\alpha-3)) \otimes \mathbb{C} \cdot z' \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2\alpha-2))$$

où $z' \in \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1))$ est une équation de l'. D'après l'identification $\mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{D_2}(1)) = Q$, on en déduit que c'est également l'expression de $\rho'(x)$.

On pose finalement $\mathrm{P}_- = \mathbb{P}(D^-_{\alpha,n})$, et on note $p_- : \mathrm{P}_- \to \Sigma_{\alpha,n}$ le morphisme canonique. Sur P_-, notons $\mathcal{O}(1)$ le faisceau inversible canonique p_- ample, et h_1 et h_2 les deux faisceaux inversibles images réciproques par la projection p_- des deux faisceaux $\mathcal{O}(1,0)$ et $\mathcal{O}(0,1)$ sur $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$. Commençons par expliciter les composantes irréductibles de P_-.

Proposition 15 *Lorsque la valeur critique α est inférieure ou égale à $3/2$, le schéma P_- est irréductible. Lorsque $\alpha > 3/2$, ce schéma a deux composantes lisses :*

1. *L'une, $A^-_{\alpha,n}$, de dimension $n - 2\alpha + 2$, isomorphe à l'éclaté de $\Sigma_{\alpha,n}$ le long du fermé défini par l'idéal $\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}$,*
2. *l'autre, $B^-_{\alpha,n}$, de dimension $n - 2$, isomorphe à $\mathbf{P}(\mathrm{S}^{2\alpha-2}\mathrm{N})$, où N est le fibré normal de la sous-variété de $\Sigma_{\alpha,n} = G \times \mathbb{P}_2^*$ donnée par l'idéal I_Δ (notation $\mathbf{P}$: fibrés paramétrant les droites vectorielles, cf section Notations).*

Preuve: Lorsque $\alpha \geq 1$, le morphisme canonique surjectif de faisceaux $\mathrm{S}^k(\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}) \to \mathrm{I}_\Delta^{k(2\alpha-2)}$ pour tout entier k positif fournit un plongement de l'éclaté de $\Sigma_{\alpha,n}$ suivant l'idéal $\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}$ dans P_-. On obtient ainsi une composante irréductible $A^-_{\alpha,n}$ de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ de dimension $n-2\alpha+2$. Le diviseur exceptionnel E_α de cet éclaté est isomorphe au schéma projectif $\mathrm{Proj}(\sum_{n\geq 0} \mathrm{I}_\Delta^{(2\alpha-2)n}/\mathrm{I}_\Delta^{(2\alpha-2)(n+1)})$.

L'image réciproque de la sous-variété "diagonale" de $\Sigma_{\alpha,n}$ (d'idéal I_Δ) dans P_- par π_- est isomorphe au schéma projectif $\mathbb{P}(\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}/\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-3}(4\alpha-3))$ (cf [EGA2] pour la "compatibilité" par changement de base de la construction du fibré projectif au sens de Grothendieck). Ce dernier est aussi isomorphe à $\mathbf{P}(\mathrm{S}^{2\alpha-2}\mathrm{N})$. C'est un fermé de dimension $n-2$ qu'on note $B^-_{\alpha,n}$. Lorsque

$\alpha > 3/2$, le fermé $B^-_{\alpha,n}$ est une seconde composante irréductible. Ceci prouve la proposition.

Soit $E^{'}_\alpha$ le sous-schéma fermé de P_- intersection de $B^-_{\alpha,n}$ avec $A^-_{\alpha,n}$, c'est-à-dire le sous-schéma de P_- d'idéal la somme des idéaux définissant les deux composantes de la proposition. On conserve les notations de l'énoncé précédent et de sa preuve. On définit la multiplicité d'une composante irréductible Y dans un schéma X comme la longueur de l'anneau artinien local $\mathcal{O}_{Y,X}$. Lorsque Y est la seule composante irréductible, on parle de la multiplicité géométrique de X.

Proposition 16 *Le sous-schéma $E^{'}_\alpha$ de P_- est le sous-schéma réduit associé à E_α, ce dernier étant un schéma irréductible de multiplicité géométrique $2\alpha - 2$. De plus, le plongement fermé $E^{'}_\alpha \subseteq B^-_{\alpha,n}$ s'identifie à un plongement de Veronese d'ordre $2\alpha - 2$.*

Preuve: Par hypothèse on a l'isomorphisme

$$E^{'}_\alpha \simeq \mathrm{Proj}(\sum_{n\geq 0} \mathrm{S}^{n(2\alpha-2)}(\mathrm{I}_\Delta/\mathrm{I}^2_\Delta))$$

Le plongement fermé de cette intersection dans $B^-_{\alpha,n}$ peut se voir comme associé au morphisme surjectif de faisceaux en algèbre graduée, défini en degré $n \geq 0$ par la flèche naturelle $\mathrm{S}^n(\mathrm{S}^{2\alpha-2}(\mathrm{N}^*)) \to \mathrm{S}^{n(2\alpha-2)}(\mathrm{N}^*)$. Le noyau de ce morphisme définit précisément l'idéal de l'image de $\mathbf{P}(\mathrm{N})$ dans $\mathbf{P}(\mathrm{S}^{2\alpha-2}(\mathrm{N}))$ par le plongement de Veronese d'ordre $2\alpha - 2$ (cf [Ha] chap. II Ex. 5.13). Le schéma $E^{'}_\alpha$ est donc isomorphe à $\mathbf{P}(\mathrm{N})$.

En vertu de l'inclusion $\mathrm{I}_\Delta^{(2\alpha-2)(n+1)} \subset \mathrm{I}_\Delta^{(2\alpha-2)n+1}$ pour tout n, on a un morphisme canonique de passage au quotient

$$\mathrm{I}_\Delta^{(2\alpha-2)n}/\mathrm{I}_\Delta^{(2\alpha-2)(n+1)} \to \mathrm{I}_\Delta^{(2\alpha-2)n}/\mathrm{I}_\Delta^{(2\alpha-2)n+1}$$

qui donne par passage au Proj un plongement fermé $E^{'}_\alpha = \mathbf{P}(\mathrm{N}) \subset E_\alpha$ (cf [Ha] chap. II Ex. 2.14 (b)).

La multiplicité géomètrique de E_α est $2\alpha-2$ car l'idéal définissant $E^{'}_\alpha$ dans E_α est nilpotent et engendré par sa partie de degré 0 qui est $\mathrm{I}_\Delta/\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}$. On en déduit que E_α est irréductible. $\square$

Soit S est un schéma, et $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ une famille de systèmes cohérents sur $S \times \mathbb{P}_2$. Si $\mathrm{L} \in \mathrm{Pic}(S)$, on note $\mathrm{L} \otimes \mathbf{\Lambda}$ la famille de systèmes cohérents $(\mathrm{L} \otimes \mathbf{\Gamma}, \mathrm{pr}^*(\mathrm{L}) \otimes \mathbf{\Theta})$ sur $S \times \mathbb{P}_2$.

Proposition 17 *Sur $P_- \times \mathbb{P}_2$, on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents*

$$0 \to \mathcal{L} \otimes \mathbf{\Lambda}^{''} \to \mathbf{\Lambda}_- \to \mathbf{\Lambda}^{'} \to 0$$

où $\mathbf{\Lambda}^{''}$ est l'image réciproque sur $P_- \times \mathbb{P}_2$ de la famille $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}(\frac{n}{2} - \alpha))$ sur $\Sigma_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$, et $\mathbf{\Lambda}^{'}$ l'image réciproque de la famille $(0, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha))$.

Preuve: On peut supposer $\alpha \geq 2$. Par définition, sur P_-, on a un morphisme surjectif de faisceaux $\mathbf{D}^-_{\alpha,\mathbf{n}} \to \mathcal{L}$. Ce qui donne une section non nulle $s \in \mathrm{H}^0(\mathrm{P}_-, \mathcal{L} \otimes {\mathbf{D}^-_{\alpha,\mathbf{n}}}^\vee)$. La dualité de Serre relative permet d'écrire l'isomorphisme suivant sur P_- :

$$D^{-\ \vee}_{\alpha,n} \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha), \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}).$$

Maintenant on a sur P_- les isomorphismes de faisceaux cohérents

$$p_-^*(\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha),\mathcal{O}_{\mathrm{D}_1})) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(p_-^*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha)),p_-^*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_1})),$$
$$p_-^*(D^-_{\alpha,n}) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(p_-^*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}),p_-^*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(2\alpha-3)))$$

d'après le lemme de changement de base 4.9 de [LeP2] ; on applique ensuite à nouveau le théorème de dualité de Serre relative pour obtenir que l'élément s fournit une extension

$$0 \to \mathcal{L}\otimes\mathbf{\Lambda}^{''} \to \mathbf{\Lambda}_- \to \mathbf{\Lambda}^{'} \to 0$$

On peut noter $\mathbf{\Lambda}_- = (\mathbf{\Gamma}_-,\mathbf{\Theta}_-)$, avec $\mathbf{\Gamma}_- = \mathcal{L}\otimes\mathbf{\Gamma}$. □

<u>lemme</u> 8 *Le faisceau $\mathbf{\Theta}_-$ est $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_-}-$plat, et $\mathbf{\Lambda}$ définit une famille de systèmes cohérents α_- stables.*

<u>Preuve</u>: Remarquons que $\mathbf{\Theta}_-$ est le terme du milieu d'une suite exacte de faisceaux sur $\mathrm{P}_-\times\mathbb{P}_2$ qui sont des images réciproques de faisceaux plats $\Sigma_{\alpha,n}$. Le premier point est donc clair.

A chaque point $x\in\mathrm{P}_-$ est associée une extension non scindée

$$0 \to (\Gamma,\mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}-\alpha)) \to (\Gamma,\Theta) \to (0,\mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}+\alpha)) \to 0$$

qui définit clairement un système cohérent α_- stable mais non α_+ semi-stable d'après le lemme 5. □

La famille $\mathbf{\Lambda}$ de systèmes cohérents est donc plate sur P_- au sens du chapitre 1, et définit donc un morphisme modulaire $\sigma_- : \mathrm{P}_- \to S_{\alpha_-,n}$ dont l'image est ensemblistement le fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$. On a la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 18 *Le morphisme σ_- est un plongement.*

<u>Preuve</u>: La démonstration est un peu différente, car nous ne savons pas à priori si P_- est un schéma réduit. On va jouer sur le fait que les points de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ sont des classes de systèmes cohérents α_- stables, ce qui n'était pas le cas pour $\Sigma_{\alpha,n}$. Soit à nouveau $\mathcal{Q} = \mathrm{Quot}^{\lambda}(\mathbf{\Lambda}_R)$ le schéma de Hilbert relatif au dessus de $R^{ss}_{\alpha_-,n}$ paramétrant point par point les quotients de type $\lambda = (h+(\frac{n}{2}+\alpha)h^2,0)$ de la famille universelle de quotients $\mathbf{\Lambda}_R$ paramétrée par $R^{ss}_{\alpha_-,n}$. On a déjà vu que l'on a un plongement fermé $\mathcal{Q}\subset R^{ss}_{\alpha_-,n}$. Sur $\mathcal{Q}\times\mathbf{P}_2$, on a une extension universelle de systèmes cohérents

$$0 \to \mathbf{\Lambda}^{'}_R \to \mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{Q}} \to \mathbf{\Lambda}^{''}_R \to 0 \quad (1)$$

qui paramètre point par point la filtration de Harder-Narasimhan de la famille $\mathbf{\Lambda}_R$ relativement au paramètre α_+. On peut voir la surjection $\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{Q}} \to \mathbf{\Lambda}^{''}_R$ comme le quotient universel, et $\mathbf{\Lambda}^{'}_R$ comme son noyau.

Considérons maintenant la fibration au dessus de P_- donnée par

$$\mathcal{H} = \underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{H}\otimes\mathcal{O},\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}_-))$$

dont la fibre en un point paramètre les isomorphismes $\mathrm{H}\simeq\mathrm{H}^0(\Theta)$, avec Θ le faisceau fibre de $\mathbf{\Theta}_-$. Le groupe $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ opère librement sur $\mathcal{H}$.

Soit $\mathcal{Q}^{'}$ le schéma obtenu par le changement de base

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}' \arrow[r, "t"] \arrow[d, "q"] & \mathcal{Q} \arrow[d] \\ \mathrm{P}_- \arrow[r, "\sigma_-"] & S_{\alpha_-,n} \end{tikzcd}$$

L'image réciproque sur $\mathcal{Q}^{'} \times \mathbf{P}_2$ de la famille $\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{Q}}$ paramètre point par point les mêmes classes de systèmes cohérents α_- stables que $q^*(\mathbf{\Lambda}_-)$. On peut donc supposer, moyennant torsion par un faisceau inversible sur $\mathcal{Q}^{'}$, que $t^*(\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{Q}}) \simeq q^*(\mathbf{\Lambda}_-)$. Par la propriété universelle du schéma de Hilbert, on a un morphisme $f : \mathcal{H} \to \mathcal{Q}^{'}$, et par conséquent un morphisme $g = t \circ f : \mathcal{H} \to \mathcal{Q}$.

L'extension (1) permet de définit un morphisme $h : \mathcal{Q} \to \mathrm{P}_-$, puis un morphisme $k : \mathcal{Q} \to \mathcal{H}$, également GL(H) équivariant. Il reste à remarquer que $g \circ k$ et $k \circ g$ sont les morphismes identité ; en effet le premier est associé à la famille universelle $\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{Q}}$, le second à la famille $\mathbf{\Lambda}_-$ (qui provient de extension universelle sur P_-). Pour conclure, on fait passer l'isomorphisme $g : \mathcal{H} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{Q}$ au quotient par l'action de GL(H). Le quotient de $\mathcal{H}$ est P_-. D'où l'énoncé. □

Dorénavant, on note donc $\pi_- : \mathrm{P}_- \to \Sigma_{\alpha,n}$ le morphisme de projection car p_- s'identifie à la restriction du morphisme $\pi_- : S_{\alpha_-,n} \to S_{\alpha,n}$ au sous-schéma fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$ qu'on prend isomorphe à P_-. On peut voir (bien que nous n'en aurons pas besoin) que l'on a aussi l'égalité schématique $\pi_-^{-1}(\Sigma_{\alpha,n}) = \Sigma^-_{\alpha,n}$.

Description de $\Sigma^+_{\alpha,n}$

On suppose toujours dans ce paragraphe que α est une constante > 0 critique.

On note toujours (cf § précédent) $\mathbf{\Lambda}^{'}$ et $\mathbf{\Lambda}^{''}$ les familles de systèmes cohérents paramétrées par la variété $\Sigma_{\alpha,n}$ données par

$$\mathbf{\Lambda}^{'} = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}(\frac{n}{2} - \alpha)), \;\; \mathbf{\Lambda}^{''} = (0, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha))$$

<u>lemme</u> 9 *Soit le faisceau cohérent sur $\Sigma_{\alpha,n}$ donné par $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}^{''}, \mathbf{\Lambda}^{'})$. C'est un fibré vectoriel de rang $n + 2\alpha + 3$.*

<u>Preuve</u>: La définition (cf chapitre 1) du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}^{''}, \mathbf{\Lambda}^{'})$ implique si $p = (\Gamma, l^{'}, l^{''})$ est un point de $\Sigma_{\alpha,n}$, on a l'isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}^{''}, \mathbf{\Lambda}^{'})(p) \simeq \mathrm{Ext}^1(\Lambda^{''}, \Lambda^{'})$$

où $\Lambda^{'} = \mathbf{\Lambda}^{'}(p)$, $\Lambda^{''} = \mathbf{\Lambda}^{''}(p)$ (ceci vient du fait que l'on travaille avec des familles de systèmes cohérents plates au dessus d'une variété ; pour plus de détails cf [MinH2]). On a donc la suite exacte

$$\begin{aligned} &0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{l'}(\tfrac{n}{2} - \alpha), \mathcal{O}_{l''}(\tfrac{n}{2} + \alpha)) \to \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(\tfrac{n}{2} + \alpha))) \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda^{''}, \Lambda^{'}) \\ &\to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l'}(\tfrac{n}{2} - \alpha), \mathcal{O}_{l''}(\tfrac{n}{2} + \alpha)) \to 0 \end{aligned}$$

Dans le cas où $l^{'} \neq l^{''}$, l'espace vectoriel de gauche est nul, et l'on trouve que la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\Lambda^{''}, \Lambda^{'})$ est $n + 2\alpha + 3$. Dans celui où $l^{'} = l^{''}$, le membre de gauche est isomorphe à $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2\alpha))$ et celui de droite est $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2\alpha+1))$, et le compte des dimensions donne aussi $n+2\alpha+3$. Ceci prouve le lemme. $\square$

On pose maintenant

$$D^+_{\alpha,n} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}'', \mathbf{\Lambda}')^*, \ \ \mathrm{P}_+ = \mathbb{P}(D^+_{\alpha,n})$$

P_+ est un fibré projectif sur $\Sigma_{\alpha,n}$ d'après ce qui précède. Soit $\mathcal{L}'$ le faisceau inversible p_+-ample, avec $p_+ : \mathrm{P}_+ \to \Sigma_{\alpha,n}$. Sur la variété $\mathbb{P}(D^+_{\alpha,n}) \times \mathbb{P}_2$, on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to \mathcal{L}' \otimes \mathbf{\Lambda}'' \to \mathbf{\Lambda}_+ \to \mathbf{\Lambda}' \to 0$$

On montre que la famille de systèmes cohérents $\mathbf{\Lambda}_+$ est plate sur P_+, que sa fibre Λ_+ en un point de P_+ s'insère dans une suite exacte $0 \to (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}+\alpha)) \to \Lambda_+ \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}-\alpha) \to 0$. D'après le lemme 6, le système cohérent Λ_+ est α_+ semi-stable et α_- instable.

Proposition 19 *La famille plate sur* P_+ *de systèmes cohérents* $\mathbf{\Lambda}_+$ *donne un morphisme modulaire* $\sigma_+ : \mathrm{P}_+ \to S_{\alpha+,n}$ *qui est un plongement fermé d'image les points de* $\Sigma^+_{\alpha,n}$.

Preuve: La preuve ne comporte pas de surprises. Soit $\mathbf{\Lambda}_R$ la restriction d'une famille de quotients universels à $R^{ss}_{\alpha+,n} \times \mathbb{P}_2$. Soit $\mathcal{H} = \mathrm{Quot}^t(\mathbf{\Lambda}_R)$ le schéma de Hilbert paramétrant les systèmes cohérents quotients de la famille $\mathbf{\Lambda}_R$ de type $t = (h + (\frac{n}{2}-\alpha)h^2, 2)$. Ce schéma est projectif sur $R^{ss}_{\alpha+,n}$, et son image dans $R^{ss}_{\alpha+,n}$ est formé des systèmes cohérents Λ admettant un quotient de la forme $(\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}-\alpha))$, avec $\dim\Gamma = 2$, ce qui donne alors une suite exacte $0 \to (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}+\alpha)) \to \Lambda \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}-\alpha)) \to 0$.

D'après la proposition 6 du chapitre 1, le schéma $\mathcal{H}$ se plonge dans $R^{ss}_{\alpha+,n}$; en effet soit Λ le système cohérent précédent, on a $\mathrm{Hom}(\Lambda'', \Lambda') = 0$, avec $\Lambda' = (\Gamma, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}-\alpha))$, $\Lambda'' = (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}+\alpha))$. Dès lors le morphisme $\mathcal{H} \to R^{ss}_{\alpha+,n}$ est non ramifié, et il est de plus injectif car Λ n'admet qu'un seul sous-système cohérent α_- destabilisant.

Sur $\mathrm{Quot}^t(\mathbf{\Lambda}_R) \times \mathbf{P}_2$, on a donc une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to \mathbf{\Lambda}' \to \mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{H}} \to \mathbf{\Lambda}'' \to 0$$

Les familles $\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}''$ définissent un morphisme de $\mathcal{H}$ vers $\Sigma_{\alpha,n}$, qui se factorise par $\sigma_+ : \mathrm{P}_+ \to S_{\alpha+,n}$ en vertu de la suite exacte ci-dessus. Le morphisme canonique $\mathcal{H} \to R^{ss}_{\alpha+,n}$ passe au quotient pour donner un plongement fermé $\mathcal{H}' \hookrightarrow S_{\alpha+,n}$, et ce plongement fermé se factorise encore par σ_+. Le schéma P_+ étant intègre, on en déduit que $\mathrm{P}_+ \simeq \mathcal{H}'$ et par suite l'énoncé de la proposition. $\square$

On munit donc le fermé $\Sigma^+_{\alpha,n}$ d'une structure schématique qui en fait une variété intègre isomorphe à P_+. Signalons que l'on a encore $\Sigma^+_{\alpha,n} = \pi_+^{-1}(\Sigma_{\alpha,n})$ au sens des schémas.

Un lien entre $\Sigma^-_{\alpha,n}$ et $\Sigma^+_{\alpha,n}$

Lorsque β est un paramètre compris entre deux valeurs critiques $\alpha - 1$ et α consécutives, on sait que l'on a les isomorphismes $S_{\beta,n} \simeq S_{\alpha-,n} \simeq S_{(\alpha-1)+,n}$. Les fermés $\Sigma^+_{\alpha-1,n}$ et $\Sigma^-_{\alpha,n}$ peuvent être considérés comme deux fermés du même espace de modules $S_{\beta,n}$. On conserve les notations de la proposition 15.

Proposition 20 *On a l'inclusion de fermés de $S_{\alpha_-,n}$ suivante :*

$$A^-_{\alpha,n} \subset \Sigma^+_{\alpha-1,n}$$

Preuve: Les deux schémas étant réduits, on est ramené a démontrer une inclusion ensembliste. De plus il suffit de prouver cette inclusion sur l'ouvert des couples de droites distinctes. On suppose donc que (Γ, Θ) s'insère dans une suite exacte courte non scindée

$$0 \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha)) \to (\Gamma, \Theta) \xrightarrow{\pi} (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha)) \to 0 \ (*)$$

avec l', l'' distinctes. Si $\{x\} = l' \cap l''$, on peut aussi écrire une extension

$$0 \to \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha - 1) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha) \to \mathbb{C}(x) \to 0$$

On a $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{O}_{l''}(2\alpha - 1), \mathcal{O}_{l'}) \simeq \mathbb{C}(x)(2 - 2\alpha)$ en tant que faisceaux sur $\mathbb{P}_2$. Soit le foncteur $\mathrm{Hom}(\ (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha - 1))\ , -)$ de la catégorie des systèmes cohérents (non abélienne) dans celle des espaces vectoriels, qu'on applique à la suite exacte (*). On obtient le morphisme de liaison

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l''}(2\alpha - 1), \mathcal{O}_{l'})$$

qui est le cup-produit par l'élément de l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l''}(2\alpha), \mathcal{O}_{l'})$ déterminé par $(*)$. De façon précise le morphisme d'évaluation $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathbb{C}(x)(1))$ est composé avec la multiplication naturelle

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{C}(x)(1)) \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{C}(x)(1 - 2\alpha)) \to \mathrm{H}^0(\mathbb{C}(x)(2 - 2\alpha))$$

La section de $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(1))$ correspondant à i s'annule précisément en x.

Il existe donc un relèvement de i par π

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha)) \arrow[r] & (\Gamma, \Theta) \arrow[r, "\pi"] & (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha)) \arrow[r] & 0 \\
 & & & (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha - 1)) \arrow[u, "i"] \arrow[ul, dotted] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

La proposition est donc claire. □

On peut aussi montrer qu'au moins ensemblistement, on a $\Sigma^+_{\alpha-1,n} \cap \Sigma^-_{\alpha,n} = A^-_{\alpha,n}$ (voir plus la stratification du fermé $\mathrm{Sing}(S_{\alpha_-,n}) \cap \Sigma^-_{\alpha,n}$).

3.4 Normalité et points singuliers des espaces de modules $S_{\alpha,n}$

Nous allons étudier les points singuliers de l'espace de modules $S_{\alpha,n}$ pour α non valeur critique. Nous allons en particulier démontrer que cet ensemble est un fermé de codimension ≥ 2, ce qui nous permet de montrer que ce sont des variétés normales.

Puis nous nous intéressons aux points singuliers de $S_{\alpha_-,n}$ qui appartiennent au fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$.

3.4.1 Normalité de $S_{\alpha,n}$, α non critique

On rappelle le théorème suivant (cf chapitre 1) qui a été montré par MinHe (cf [MinH2]) en adaptant la preuve d'un résultat similaire sur l'espace de modules M_n.

Théorème 5 *Soit β un polynôme à coefficients rationnels > 0. Soit Λ un système cohérent β stable. Au voisinage du point défini par la classe $[\Lambda]$, l'espace de modules est isomorphe au schéma des zéros d'un morphisme d'un germe de schéma lisse d'espace tangent $\mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda)$ à valeurs dans $\mathrm{Ext}^2(\Lambda, \Lambda)$. De plus l'espace tangent à $S_{\beta,n}$ en Λ est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda)$.*

La dernière assertion permet de remarquer que dans les conditions de l'énoncé, $[\Lambda]$ est un point singulier de $S_{\beta,n}$ si et seulement si $\mathrm{Ext}^2(\Lambda, \Lambda) \neq 0$. En effet, le nombre $\chi(\Lambda, \Lambda)$ est indépendant de Λ, ce qui montre que $\mathrm{Ext}^2(\Lambda, \Lambda) \neq 0$ si et seulement si $\dim \mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda) > 2n + 5$.

Le fermé des points non stables, pour n pair, est de codimension ≥ 2. Ce sont des systèmes cohérents β semi-stables qui s'insèrent dans une extension du type

$$0 \to (\Gamma', \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2})) \to (\Gamma, \Theta) \to (\Gamma'', \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2})) \to 0$$

avec Γ', Γ'' de dimension 1. Si l'on veut vérifier la condition R_2 de Serre, on peut donc se restreindre à l'ouvert des points β stables.

Théorème 6 *Les espaces de modules $S_{\beta,n}$ sont des variétés irréductibles et normales, pour β non critique.*

Preuve: Soit un point singulier de $S_{\beta,n}$ donné par la classe d'un système cohérent (Γ, Θ) qui est β stable, avec $\mathrm{Hom}(\Theta, \Theta(-3)) \neq 0$ (par dualité de Serre). Le faisceau Θ ne peut être semi-stable, car $p(\Theta(-3)) < p(\Theta)$. Il possède donc une filtration de Harder-Narasimhan

$$0 \to \mathcal{O}_{l'}(a) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l''}(b) \to 0 \quad (*)$$

On a par définition $a > b$, et de plus $l' = l''$ car il existe un morphisme non nul de $u : \Theta \to \Theta(-3)$ qui se factorise en un morphisme $v : \mathcal{O}_{l''}(b) \to \mathcal{O}_{l'}(a-3)$. C'est donc que $a \geq b+3$; comme $a + b = n$ on en déduit que $a \geq (n+3)/2$.

Soit $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(a))$, la condition de β semi-stabilité donne $a \leq \frac{n}{2} + \beta(1 - \dim \Gamma')$. Donc $\frac{3}{2} \leq \beta(1 - \dim \Gamma')$, et par suite $\Gamma' = 0$ et $\beta \geq \frac{3}{2}$. Si α est la plus grande valeur critique en dessous de β, on a $\alpha \geq \frac{3}{2}$ et $a \leq \frac{n}{2} + \alpha$, $b \geq \frac{n}{2} - \alpha$.

On a donc une suite exacte de systèmes cohérents

$$0 \to (0, \mathcal{O}_l(a)) \to (\Gamma, \Theta) \to (\Gamma, \mathcal{O}_l(b)) \to 0 \quad (*)$$

Cette suite exacte ne peut être scindée par la propriété de β stabilité.

Soit maintenant (a, b) un couple d'entiers tels que $a + b = n$, $b + 3 \leq a \leq \frac{n}{2} + \alpha$. On pose $\alpha' = a - \frac{n}{2}$, qui est > 0 et correspond à une valeur critique. Alors tout système cohérent β stable s'insérant dans une suite exacte de type $(*)$ est α'_+ stable et α'_- instable, et appartient à l'image $\Sigma_{\alpha',\beta,n}$ du fermé intègre $\Sigma^+_{\alpha',n}$ par le morphisme rationnel $S_{\alpha'_+,n} - -- > S_{\beta,n}$. Une classe d'un système cohérent β stable définissant un point singulier de $S_{\beta,n}$ appartient nécessairement à l'image d'un de ces morphismes rationnels pour un couple (a, b), ou encore pour une valeur α'. Ces images sont toutes irréductibles de dimension $2n+2$, leurs adhérences sont donc des fermés de codimension ≥ 2.

Soit $R^{ss}_{\beta,n}$ l'ouvert du schéma R_n (cf proposition 9), paramétrant des quotients β semi-stables. On va prouver que $R^{ss}_{\beta,n}$ est une variété normale, et localement intersection complète. La preuve qui suit provient de [LePT], où elle est faite pour R_n. Soit (Γ, Θ) un système cohérent et la donnée d'un quotient $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to \Theta$ dont on note le noyau K.

Il existe alors un morphisme d'un germe de schéma lisse d'espace tangent de Zariski $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{H}^0(\Theta)/\Gamma) \times \mathrm{Hom}(K, \Theta)$ à valeurs dans le groupe $\mathrm{Ext}^1(K, \Theta)$ dont le schéma des zéros est isomorphe à un voisinage du point de R_n correspondant. Ceci prouve que les composantes irréductibles sont de dimension supérieures à

$$2n + \dim \mathrm{Hom}(K, \Theta) - \dim \mathrm{Ext}^1(K, \Theta) = 2n + \chi(K, \Theta) = 2n + 4 + (n+2)^2$$

En effet $\chi(K, \Theta) = \dim \mathrm{H} \cdot \chi(\Theta) - \chi(\Theta, \Theta)$. Nous allons montrer que $R^{ss}_{\beta,n}$ est un schéma irréductible de dimension $2n + 4 + N^2$, avec $N = n + 2$.

Considérons pour cela le morphisme support $\sigma : R^{ss}_{\beta,n} \to \mathbf{P}_5$ qui à un point correspondant à un faisceau quotient Θ associe sa conique support. Au dessus de l'ouvert des coniques lisses, σ est lisse et ses fibres sont de dimension $2n + N^2 - 1$; en effet si la conique est fixée la classe d'isomorphisme du faisceau Θ est fixée (il est inversible sur la conique de degré $n+1$), et la classe d'isomorphisme d'un quotient $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O} \to \Theta$ est déterminée par un isomorphisme $\mathrm{H} \simeq \mathrm{H}^0(\Theta)$. Donc l'image réciproque par σ de l'ouvert des coniques lisses est irréductible de la bonne dimension. On peut dire mieux.

lemme 10 *Les fibres de σ sont de dimension $\leq 2n + N^2 - 1$ au dessus de l'ouvert des coniques réduites.*

Preuve: Si la conique est singulière réduite, réunion de deux droites distinctes, il n'existe donc qu'un nombre fini de faisceaux Θ_i (à isomorphisme près) tels qu'il existe un pinceau de sections $\Gamma_i \subset \mathrm{H}^0(\Theta_i)$ tels que (Γ_i, Θ_i) soit β semi-stable. En effet tout quotient $\Theta \to \mathcal{O}_l(a)$ vérifie $a > 0$ (cf lemme 3). Dès lors la fibre de σ en cette conique est recouverte par les images des morphismes

$$f_i : \mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}) \times \mathrm{Isom}(\mathrm{H}, \mathrm{H}^0(\Theta_i))/\mathrm{Aut}(\Theta_i) \to R_n$$

restreints aux ouverts des points β semi-stable. En effet, d'après [LeP] chapitre 8 le stabilisateur d'un quotient $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O} \to \Theta_i$ est isomorphe au groupe des automorphismes de Θ_i. Le membre de gauche est de dimension $\leq 2n + N^2 - 1$, le lemme est donc prouvé.

Il est donc clair que l'image réciproque des coniques réduites dans $R^{ss}_{\beta,n}$ est de dimension $\leq 2n + N^2 + 4$, et a donc la bonne dimension.

lemme 11 *Soit (Γ, Θ) un système cohérent β semi-stable de support une conique singulière C, tel que Θ soit un faisceau stable. Alors n est impair et Θ est isomorphe à $\mathcal{O}_C(\frac{n+1}{2})$. Réciproquement si le faisceau Θ est de cette forme, il est stable.*

Preuve: Supposons n pair. Le faisceau $\check{\Theta}(\frac{n}{2} - 1)$ possède une section non nulle, i.e il existe un morphisme non nul $u : \mathcal{O}_C \to \check{\Theta}(\frac{n}{2} - 1)$; on a donc un morphisme non nul $\check{u} : \Theta \to \mathcal{O}_C(\frac{n}{2} + 1)$. On a d'autre part une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}) \to \mathcal{O}_C(\frac{n}{2} + 1) \to \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + 1) \to 0$$

et l'on peut considérer le morphisme composé $v : \Theta \xrightarrow{\check{u}} \mathcal{O}_C(\frac{n}{2}+1) \to \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}+1)$. Si v est nul, $\check{u}$ se factorise par un morphisme non nul $\Theta \to \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2})$, dont le noyau a un polynôme de Hilbert réduit $\geq p(\Theta)$. Si v est non nul et non surjectif, le noyau de v donne encore un sous-faisceau de Θ de polynôme de Hilbert réduit $\geq p(\Theta)$. Ces deux cas conduisent à une contradiction. Donc Θ s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}-1) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}+1) \to 0 \ \ (1)$$

Une preuve presque identique à celle de la proposition 20 montre alors que Θ possède un sous-faisceau de la forme $\mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2})$, absurde (quand $l^{'} = l^{''} = l$, l'extension (1) définit un morphisme $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(1), \mathcal{O}_l) \simeq \mathbf{C}$ qui a un noyau non nul). Donc n est impair.

Le faisceau $\check{\Theta}(\frac{n-3}{2})$ possède une section non nulle, on a donc un morphisme non nul $\check{u} : \Theta \to \mathcal{O}_C(\frac{n+1}{2})$. Les deux faisceaux sont stables, et de même polynôme de Hilbert réduit, ils sont donc isomorphes. Ceci montre le lemme.

Revenant au théorème, soit $C = l^2$ une conique double fixée, l'adhérence de la partie localement fermée des points de R_n de support C tels que Θ soit stable est de dimension $\leq 2n + N^2 - 1$, car la classe d'isomorphisme de Θ est alors fixée (cf lemme 11) et son groupe d'automorphismes est de dimension 1. Donc l'adhérence dans $R^{ss}_{\beta,n}$ de la partie localement fermée des systèmes cohérents (Γ, Θ) tels que Θ soit stable de support une conique double est de dimension $\leq (2n + N^2 - 1) + 2 = 2n + N^2 + 1$.

Reste le cas des faisceaux non stables de support une conique double. Si le faisceau Θ est non stable, il s'insère dans une extension éventuellement scindée de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_l(a) \to \Theta \to \mathcal{O}_l(b) \to 0 \ \ (*)$$

avec $a \geq b \geq 1$. Les extensions non scindées sont paramétrées par l'espace projectif $\mathbf{P}_{a,b} = \mathbf{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(b), \mathcal{O}_l(a)))$, dont on peut calculer la dimension grâce à l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(b), \mathcal{O}_l(a)) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(a-b+1))$. La dimension est donc $a-b+1$. Soit donc $\mathbf{\Theta}_{a,b}$ la famille de faisceaux paramétrée par $\mathbf{P}_{a,b}$, et soit la fibration au dessus de $\mathbf{P}_{a,b}$ donnée par

$$W_{a,b} = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}) \times \underline{\mathrm{Isom}}(\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}, \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}_{a,b}))$$

dont la fibre au dessus d'un point x de la base paramètre les isomorphismes $\mathrm{H} \simeq \mathrm{H}^0(\mathbf{\Theta}_{a,b}(x))$, et les pinceaux de H. Par la propriété universelle du schéma de Hilbert, il existe un morphisme GL(H) équivariant $f_{a,b} : W_{a,b} \to R_n$ que l'on restreint à l'ouvert des points β semi-stables ; la fibre de $\nu : W^{ss}_{a,b} \to \mathbf{P}_{a,b}$ en un point x de $\mathbf{P}_{a,b}$ est isomorphe au groupe d'automorphismes de $\mathbf{\Theta}_{a,b}(x)$. Ce groupe est de dimension $a-b+2$. Le sous-schéma fermé $\overline{f_{a,b}(\nu^{-1}(x))}$ est donc de dimension $\leq 2n + N^2 - a + b - 2$. Par suite l'adhérence de l'image $f_{a,b}(W^{ss}_{a,b})$ est de dimension $\leq 2n + N^2 - 1 = (2n + N^2 - a + b - 2) + (a - b + 1)$, car elle est recouverte par les $\overline{f_{a,b}(\nu^{-1}(x))}$, pour x dans l'image $\nu(W^{ss}_{a,b})$.

Reste enfin le cas des extensions scindées. Pour chaque couple (a, b), on pose $\theta_{a,b} = \mathcal{O}_l(a) \oplus \mathcal{O}_l(b)$. Il existe un morphisme GL(H) équivariant

$$g_{a,b} : V_{a,b} = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}) \times \mathrm{Isom}(\mathrm{H}, \mathrm{H}^0(\theta_{a,b})) \to R_n$$

Comme précédemment, chaque isomorphisme $\mathrm{H} \simeq \mathrm{H}^0(\theta_{a,b})$ donne un quotient $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O} \to \theta_{a,b}$, et l'ensemble des classes d'isomorphisme des quotients obtenus est en bijection avec

$\mathrm{GL(H)}/\mathrm{Aut}(\theta_{a,b})$. Le groupe d'automorphisme de $\theta_{a,b}$ est de dimension $a-b+3$ si $a>b$, et de dimension 4 si $a=b$ (il est alors isomorphe à GL_2) ; il est donc toujours de dimension ≥ 2. Donc $\overline{g_{a,b}(V^{ss}_{a,b})}$ est de dimension $< 2n+N^2-1$.

L'image réciproque par le morphisme $q_{\beta,n} : R^{ss}_{\beta,n} \to S_{\beta,n}$ du fermé des classes strictement semi-stables est de codimension ≥ 2. Ailleurs le morphisme $q_{\beta,n}$ est lisse de dimension relative N^2-1. D'après ce qui précède, le fermé des points singuliers de $R^{ss}_{\beta,n}$ est de codimension ≥ 2. Par la critère de Serre, $R^{ss}_{\beta,n}$ est irréductible et normal, donc $S_{\beta,n}$ l'est également. Le théorème est montré.

Remarque 3 *Pour n pair, l'ouvert des classes stables est lisse pour les espaces de modules* $S_{2^-,n}$ *et* $S_{1^-,n}$, *et* S_4. *Les seules singularités de* S_4 *proviennent du fermé des classes strictement semi-stables. Pour n impair, les espaces* $S_{1/2^-,n}$ *et* $S_{3/2^-,n}$ *sont lisses.*

Nous ne connaissons pas le fermé des points singuliers de $S_{\alpha_-,n}$, pour une valeur α critique. Mais on peut caractériser le sous-schéma fermé des points singuliers dans $\Sigma^-_{\alpha,n}$. C'est l'objet des sous-sections suivantes.

3.4.2 Variété de sécantes

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension 2, (u,v) une base de V, (u,v) sa base duale. On pose $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathrm{V})$ la droite projective paramétrant les quotients non nuls de V, ou encore les droites vectorielles de V^*. Soit $d \geq 1$ un entier. On pose $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(\mathrm{S}^d V)$, qui est un espace projectif de dimension d.

Soit le plongement de Veronese $\nu_d : \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_d$ qui à la classe de $a\mathrm{u} + b\mathrm{v}$, où a, b sont des nombres complexes non tous deux nuls, associe celle de $(a\mathrm{u} + b\mathrm{v})^d$.

Le plongement ν_d est le morphisme induit sur les Proj par le morphisme naturel d'algèbres graduées $\oplus_i \mathrm{S}^i(\mathrm{S}^d\mathrm{V}) \to \oplus_i \mathrm{S}^{di}\mathrm{V}$. L'image du plongement ν_d est une courbe rationnelle lisse de $\mathbb{P}_d$, qu'on note C_d.

Définition 6 *Soit C une courbe irréductible complète de* $\mathbb{P}_d$. *Pour tout entier i tel que* $2 \leq 2i \leq d+1$, *on appelle i-ème variété des sécantes à la courbe C, et on note* $\mathrm{Sec}_i(C)$, *le fermé de* $\mathbb{P}_d$ *adhérence de l'union des sous-espaces projectifs de dimension* $i-1$ *qui rencontrent la courbe C en i points.*

Nous allons maintenant montrer que $\mathrm{Sec}_i(C_d)$ est irréductible de dimension $2i-1$. Pour cela nous utilisons une description explicite de $\mathrm{Sec}_i(C_d)$ comme variété déterminantielle.

La proposition qui suit est classique (cf [Har], chap. 9 prop. 9.7) et intervient dans des théorèmes plus généraux (th. 1.43, 1.56 de [Iar]).

Proposition 21 *La points de* $Sec_i(C_d)$ *sont les classes des formes binaires* $F \in \mathrm{S}^d\mathrm{V}^*$ *telles que l'application linéaire de contraction associée* $m_F : \mathrm{S}^i\mathrm{V} \to \mathrm{S}^{d-i}\mathrm{V}^*$ *soit de rang* $\leq i$.

Lorsque $2i = d+1$, ceci est toujours vérifié quelque soit F, on en déduit que $\mathrm{Sec}_{\frac{d+1}{2}}(C_d) = \mathbb{P}_d$.

Preuve: Un point de la ième variété de sécantes $\mathrm{Sec}_i(C_d)$ est la classe d'une forme binaire s'écrivant $\sum_{j=1}^i l_j^d$, où l_j est une forme linéaire sur V. Choisissons pour chaque j un vecteur v_j dans le noyau de l_j, et posons $v = v_1 \cdots v_i$. Alors $m_F(v)$ s'écrit comme la somme $\sum_{1\leq j\leq i} \binom{d}{i}\, l_j(v_1)\cdots l_j(v_i)\, l_j^{d-i}$, dont les termes sont tous nuls. Ceci prouve la condition nécessaire.

Réciproquement, supposons que m_F ait un noyau non nul. Soit $v \neq 0$, un vecteur du noyau de m_F ; on peut écrire $v = v_1 \cdots v_i$, où les v_j sont dans V, car le corps de base est algébriquement clos. Supposons que les v_j soient deux à deux linéairement indépendants ; on veut montrer qu'il existe alors des formes linéaires l_j, pour $1 \leq j \leq i$, telles que F s'écrive comme une somme $\sum_j \lambda_j l_j^d$, où les λ_j sont des scalaires et les l_j sont des formes linéaires s'annulant en v_j. Soit déjà l_1 une forme linéaire non nulle telle que $l_1(v_k) = \delta_{1k}$ pour tout k.

Raisonnons maintenant par récurrence sur i. Pour $i = 1$ le résultat est clair car dire que m_F s'annule en $v = v_1$ signifie que v est un zéro d'ordre d du polynôme homogène F. On écrit donc $F = \lambda_1 l_1^d$, où λ_1 est un scalaire.

Pour $i \geq 2$ contractons F par v_1. On obtient une forme binaire F_1 dans $\mathrm{S}^{d-1}\mathrm{V}^*$, et par hypothèse le morphisme de contraction

$$m_{F_1} : \mathrm{S}^{i-1}\mathrm{V} \to \mathrm{S}^{d-i}\mathrm{V}^*$$

possède un noyau non nul, qui contient $v_2 \cdots v_i$. Par hypothèse de récurrence au rang $i-1$ on peut écrire $F_1 = \sum_{2\leq j\leq i} \mu_j\, l_j^{d-1}$, on pose ensuite pour $2 \leq j \leq i$

$$\lambda_j = \frac{\mu_j}{d\, l_j(a_1)}$$

Par construction la contraction de la d-forme $G = F - \sum_{2\leq j\leq i} \lambda_j l_j^d$ par v_1 est nulle. C'est donc que $G = \lambda_1 l_1^d$. La preuve est faite dans le cas où les v_j sont deux à deux non liés.

Pour finir, soit Σ_d^i le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}(\mathrm{S}^i\ \mathrm{V}) \times \mathbb{P}(\mathrm{S}^d\mathrm{V})$ dont les points sont les couples $([v],[F])$ tels que $m_F(v) = 0$. Le fermé Σ_d^i est muni de deux projections

$$\begin{tikzcd} \Sigma_d^i \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathbb{P}(\mathrm{S}^d\mathrm{V}) \\ \mathbf{P}(\mathrm{S}^i\mathrm{V}) & \end{tikzcd}$$

Si $v \in \mathrm{S}^i\mathrm{V}$ est fixé non nul, la fibre $\mathrm{pr}_1^{-1}([v])$ s'identifie à l'espace linéaire noyau du morphisme de contraction $c(v)$ par v :

$$c(v) : \mathrm{S}^d\mathrm{V}^* \to \mathrm{S}^{d-i}\mathrm{V}^*$$

qui est surjectif. En effet, la transposée de $c(v)$ n'est autre que la multiplication par v, et l'algèbre $\mathrm{S}^*\mathrm{V}$ est intègre. C'est donc que le morphisme pr_1 est lisse de dimension relative $i-1$. Par suite Σ_d^i est irréductible lisse de dimension $2i-1$.

Comme nous l'avons vu au début de cette preuve, on a une inclusion $\mathrm{Sec}_i(C_d) \subset \Sigma_d^i$, et de plus les deux fermés coïncident au dessus de l'ouvert de $\mathbf{P}(\mathrm{S}^i\mathrm{V})$ formé des classes de formes symétriques ne comportant pas de facteur multiple. C'est donc que $\mathrm{Sec}_i(C_d) = \Sigma_d^i$ et cela prouve la proposition. □

Nous aurons à adapter ce que nous venons de voir à une situation relative. Soit $p : E \to X$ un fibré vectoriel de rang 2 sur une variété X. On peut considérer le plongement de Veronese relatif $\nu_d : \mathbf{P}(E) \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathrm{S}^d E)$. On note alors $\mathrm{Sec}_i(E)$ la sous-variété de $\mathbf{P}(\mathrm{S}^d E)$, dont la fibre en chaque point x de X est la ième variété de sécantes de $\mathbf{P}(\mathrm{S}^d E(x))$.

Nous allons décrire dans la section suivante l'intersection du fermé singulier de $S_{\alpha,n}$ et de $B^-_{\alpha,n} = \mathbf{P}(\mathrm{S}^{2\alpha-2}\mathrm{N})$ comme la variété de sécantes d'ordre $2\alpha - 2$ de $\mathbf{P}(\mathrm{N})$. Nous mettrons aussi en évidence des strates de points singuliers, qui sont également des variétés de sécantes.

3.4.3 Strates de points singuliers dans $\Sigma^-_{\alpha,n}$, pour α critique

On rappelle que N est le fibré normal de la sous-variété diagonale $\Delta \subset \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$. Le fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$, pour $\alpha \geq 2$, comporte deux composantes irréductibles $A^-_{\alpha,n}$ et $B^-_{\alpha,n}$. La composante $B^-_{\alpha,n}$ est isomorphe au changement de base du fibré projectif $\mathbf{P}(\mathrm{S}^{2\alpha-2}\mathrm{N}) \to \mathbf{P}_2^*$ par le morphisme

$$G = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{S}^{\frac{n}{2}+\alpha} Q) \to \mathbf{P}_2^*$$

L'intersection $A^-_{\alpha,n} \cap B^-_{\alpha,n}$ est isomorphe à $\mathbf{P}(\mathrm{N})$, et le plongement de cette intersection dans $B^-_{\alpha,n}$ s'identifie au plongement de Veronese.

Comme nous l'avons vu à la section 3.4.1, les points singuliers de $S_{\alpha_-,n}$ correspondant à des systèmes cohérents α_- stables ont pour image par σ des coniques doubles, et appartiennent à des fermés $\Sigma_{\alpha',\alpha_-,n}$, où α' est une valeur critique $\leq \alpha - 1$. Il reste à confronter cette condition avec celle d'appartenir à $B^-_{\alpha,n}$.

<u>**Proposition 22**</u> *Le lieu* $\mathrm{Sing}(S_{\alpha_-,n}) \cap \Sigma^-_{\alpha,n}$ *des points de* $\Sigma^-_{\alpha,n}$ *singuliers pour* $S_{\alpha_-,n}$ *est isomorphe à la variété des sécantes* $\mathrm{Sec}_{[\alpha-\frac{3}{2}]}(\mathrm{N}) \subset \mathbf{P}(\mathrm{S}^{2\alpha-2}\mathrm{N})$. *Ce fermé est donc intègre et lisse dimension* $n-4$ *si* n *est impair, et* $n-5$ *si* n *est pair.*

<u>Preuve</u>: Soit $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ un système cohérent α_- stable tel que $[\Lambda]$ soit un point singulier de $S_{\alpha_-,n}$. On sait que l'on a alors une suite exacte non scindée de systèmes cohérents

$$0 \to (0, \mathcal{O}_l(a)) \to \Lambda \to (\Gamma, \mathcal{O}_l(b)) \to 0 \qquad (1)$$

où (a, b) est un couple d'entiers tels que $a + b = n$ et $b + 3 \leq a \leq \frac{n}{2} + \alpha - 1$ (car $\alpha - 1$ est la plus grande valeur critique $\leq \alpha_-$). Si de plus $[\Lambda] \in \Sigma^-_{\alpha,n}$, on a une suite exacte non scindée de systèmes cohérents

$$0 \to (\Gamma, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} - \alpha)) \to \Lambda \to (0, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha)) \to 0 \quad (2)$$

Le fibré projectif $B^-_{\alpha,n}$ paramètre les classes d'extensions de type (2) ; on voit donc que le lieu des points de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ singuliers pour $S_{\alpha_-,n}$ sont les classes d'extension de type (2) telles qu'il existe une injection $i : \mathcal{O}_l(a) \hookrightarrow \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha)$, avec $a \geq \frac{n+3}{2}$, et un relèvement j de i

$$\begin{tikzcd} \Theta \arrow[r] & \mathcal{O}_l(\frac{n}{2}+\alpha) \\ & \mathcal{O}_l(a) \arrow[u, "i"'] \arrow[ul, "j"] \end{tikzcd}$$

La condition $a \leq \frac{n}{2} + \alpha - 1$ est automatiquement vérifiée par hypothèse de α_- stabilité.

Si a est fixé, on peut encore formuler cette condition en disant que si l'on pose $e \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2}+\alpha), \mathcal{O}_l(\frac{n}{2}-\alpha))$, définie par une extension de type (2), le morphisme de multiplication par e

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2}+\alpha-a)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(a), \mathcal{O}_l(\frac{n}{2}-\alpha)) \quad (3)$$

a un noyau non nul. Les espaces vectoriels $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2}+\alpha-a))$ et $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l(a), \mathcal{O}_l(\frac{n}{2}-\alpha))$ s'identifient respectivement aux fibres de $\mathrm{S}^{\frac{n}{2}+\alpha-a}Q$ et $\mathrm{S}^{\alpha+a-\frac{n}{2}-2}Q^*$ en l. Quant à e il appartient à la fibre de $\mathrm{S}^{2\alpha-2}Q$ en l également. En posant $d = 2\alpha-2$, et $i = \frac{n}{2}+\alpha-a$, on voit dès lors que le fermé des points de $B^-_{\alpha,n}$ vérifiant la condition (3) est le lieu B_i des points de $\mathbf{P}(\mathrm{S}^d Q^*)$ où le morphisme de fibrés

$$\mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathrm{S}^i Q \to \mathrm{S}^{d-i}Q^*$$

n'est pas injectif (on a noté $\mathcal{O}(1)$ le fibré canonique sur $\mathbf{P}(\mathrm{S}^d Q^*)$). D'après la section 3.4.2, on en déduit que B_i est isomorphe à la variété de sécantes $\mathrm{Sec}_i(\mathrm{N})$. Lorsque a varie entre $[\frac{n+3}{2}]$ et $\frac{n}{2}+\alpha-1$, on obtient une suite de fermés emboîtés

$$\mathbf{P}(\mathrm{N}) = \mathrm{Sec}_1(\mathrm{N}) \subset ... \subset \mathrm{Sec}_i(\mathrm{N}) \subset \mathrm{Sec}_{i+1}(\mathrm{N}) \subset ... \subset \mathrm{Sec}_{[\alpha-\frac{3}{2}]}(\mathrm{N})$$

La variété $\mathrm{Sec}_{[\alpha-\frac{3}{2}]}(\mathrm{N})$ est le fermé $\mathrm{Sing}(S_{\alpha_-,n}) \cap \Sigma^-_{\alpha,n}$. L'étude de la ième variété des sécantes à la courbe rationnelle lisse effectuée à la section précédente permet de conclure. □

La preuve met en évidence une stratification du fermé $\mathrm{Sing}(S_{\alpha_-,n}) \cap \Sigma^-_{\alpha,n}$, la dimension de $\mathrm{Ext}^2(\Lambda,\Lambda)$ restant constante sur chacune des strates $B_i \setminus B_{i-1}$ (pour $i=0$ on pose $B_0 = \emptyset$). A noter que si $i=1$, B_1 est précisément l'intersection $A^-_{\alpha,n} \cap B^-_{\alpha,n}$ (il n'est pas difficile de voir en adaptant la preuve de la proposition 20 au cas $l' = l''$ que c'est aussi $\Sigma^+_{\alpha-1,n} \cap B^-_{\alpha,n}$).

La dimension de la ième strate (i.e la dimension de B_i) est $n-2\alpha+2i-1$ d'après la section précédente. Cette observation nous permet de montrer plus loin que lorsqu'on éclate l'espace de modules $S_{\alpha_-,n}$ le long de $\Sigma^-_{\alpha,n}$, l'image réciproque de $B^-_{\alpha,n}$ est irréductible et fournit une composante du diviseur exceptionnel.

3.5 Les formules de saut

3.5.1 Introduction

On cherche à calculer le nombre $\mathrm{I}_n = c_1(\mathcal{D})^{2n+5} \cap [P_n]$, qui resprésente le degré de la variété des courbes de Poncelet ($\mathcal{D}$ est le fibré de Donaldson).

Soient les nombres

$$\mathrm{I}_{\alpha,n} = \int_{S_{\alpha,n}} c_1(\mathcal{D}_{\alpha,n})^{2n+5}$$

Pour α de degré ≥ 1, ce nombre est égal à $\int_{S_n} c_1(\pi^*(\mathcal{D}))^{2n+5}$ qui est égal à I_n (on rappelle que $\pi : S_n \to P_n$). La fonction $\alpha \mapsto \mathrm{I}_{\alpha,n}$ reste constante sur chaque intervalle entre deux valeurs critiques.

Soit donc α une valeur critique, et $\alpha_- < \alpha < \alpha_+$ deux autres valeurs proches de α. Dans cette section nous allons calculer le "saut" défini par la différence

$$\Delta_{\alpha,n} = \mathrm{I}_{\alpha_+,n} - \mathrm{I}_{\alpha_-,n}$$

L'idée est de trouver une variété projective S munie de deux morphismes birationnels sur $S_{\alpha_-,n}$ et $S_{\alpha_+,n}$, de sorte que l'on puisse exprimer $\Delta_{\alpha,n}$ comme nombre d'intersection sur S. Ceci va être réalisé en éclatant $S_{\alpha_-,n}$ et $S_{\alpha_+,n}$ le long des fermés exceptionnels $\Sigma^-_{\alpha,n}$ et $\Sigma^+_{\alpha,n}$.

L'idée n'est pas neuve : voir [Tha] pour un calcul sur des espaces de modules de fibrés sur des courbes, et [LeP1], [MinH] pour une situation déjà plus semblable à celle rencontrée ici.

3.5.2 Eclatements de $S_{\alpha_-,n}$ et $S_{\alpha_+,n}$

Nous essayons tout d'abord d'en savoir plus sur l'espace normal en un point du sous-schéma fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$ de $S_{\alpha_-,n}$ (et idem pour $\Sigma^+_{\alpha,n}$ et $S_{\alpha_+,n}$).

Proposition 23 *Soit x un point de $\Sigma^-_{\alpha,n}$, correspondant à la classe d'un système cohérent Λ qui est α_- stable. On a une suite exacte d'espaces vectoriels*

$$0 \to \mathrm{T}_x\Sigma^-_{\alpha,n} \to \mathrm{T}_x S_{\alpha_-,n} \xrightarrow{\omega_+} \mathrm{Ext}^1(\Lambda', \Lambda'')$$

où (Λ', Λ'') est la filtration de Harder-Narasimhan de Λ. On a de plus un isomorphisme $\mathrm{T}_x\Sigma^-_{\alpha,n} \simeq \mathrm{Ext}^1_-(\Lambda,\Lambda)$, au sens de la filtration (Λ', Λ'') (cf chapitre 1).

Preuve: Le fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$ s'obtient comme quotient d'une sous-variété fermée de $R^{ss}_{\alpha_-,n}$. Plus précisément, soit $\mathbf{\Lambda}_R$ une famille universelle de systèmes cohérents quotients sur $R^{ss}_{\alpha_-,n} \times \mathbb{P}_2$ (cf proposition 9). On considère le schéma des quotients relatifs $\mathcal{H} = \mathrm{Hilb}^\lambda(\mathbf{\Lambda}_R) \to R^{ss}_{\alpha_-,n}$ qui paramètre les quotients de la famille $\mathbf{\Lambda}_R$ de type $\lambda = (h + (\frac{n}{2} + \alpha)h^2, 0)$, dont les points sont les systèmes cohérents $(\Gamma, \Theta) \in R^{ss}_{\alpha_-,n}$ munis d'une suite exacte

$$0 \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha)) \to (\Gamma, \Theta) \to (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha)) \to 0$$

Soit q un point de $\mathcal{H}$ au dessus d'un point p de $R^{ss}_{\alpha_-,n}$. On note Λ le système cohérent α_- semi-stable associé et (Λ', Λ'') la filtration de Harder - Narasimhan relative au paramètre α_+. Nous savons que l'on a une suite exacte d'espaces vectoriels :

$$0 \to \mathrm{T}_q\mathcal{H} \to \mathrm{T}_p R^{ss}_{\alpha_-,n} \xrightarrow{\omega_+} \mathrm{Ext}^1(\Lambda', \Lambda'') \quad (*)$$

où ω_+ est la composée $\mathrm{T}_q R^{ss}_{\alpha_-,n} \xrightarrow{\omega} \mathrm{Ext}^1(\Lambda,\Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_+(\Lambda,\Lambda)$, avec ω le morphisme de Kodaira-Spencer, et $\mathrm{Ext}^1(\Lambda,\Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_+(\Lambda,\Lambda)$ le morphisme canonique dans la suite exacte longue des groupes Ext filtrés.

L'image par le morphisme de passage au quotient de $\mathcal{H}$ est précisément $\Sigma^-_{\alpha,n}$. Le morphisme ω est la différentielle du morphisme quotient $q_{\alpha_-,n} : R^{ss}_{\alpha_-,n} \to S_{\alpha_-,n}$ au point q. L'action du groupe linéaire GL(H) étant libre sur l'ouvert de $R^s_{\alpha_-,n}$ des points α_- stables, et du fait que $q^{-1}_{\alpha_-,n}(\Sigma^-_{\alpha,n}) = \mathcal{H}$, on en déduit que l'on a le diagramme commutatif suivant de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{T}_q\mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{T}_p R^{ss}_{\alpha_-,n} \arrow[r, "\omega_+"] \arrow[d, "\omega"] & \mathrm{Ext}^1(\Lambda', \Lambda'') \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{T}_x\Sigma^-_{\alpha,n} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\Lambda,\Lambda) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\Lambda', \Lambda'')
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales du diagramme sont surjectives. On a également une suite exacte canonique

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_-(\Lambda,\Lambda) \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda,\Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_+(\Lambda,\Lambda)$$

La flèche de droite est précisément celle du diagramme en bas à droite. Ceci prouve la proposition.

Notons que dans l'énoncé de la proposition précédente, le morphisme $\mathrm{T}_x S_{\alpha_-,n} \stackrel{\omega_+}{\to} \mathrm{Ext}^1(\Lambda', \Lambda'')$ n'est pas toujours surjectif. En effet, son conoyau est l'espace vectoriel noyau du morphisme canonique $\mathrm{Ext}^2_-(\Lambda,\Lambda) \to \mathrm{Ext}^2(\Lambda,\Lambda)$. Il existe des points de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ pour lesquels les deux espaces vectoriels ne sont pas nuls.

En revanche, sur l'ouvert de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ des points lisses pour la variété $S_{\alpha_-,n}$ et pour le schéma $\Sigma^-_{\alpha,n}$, l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\Lambda', \Lambda'')$ est la fibre du fibré normal.

Soit maintenant x un point de $\Sigma^+_{\alpha,n}$ correspondant à la classe d'un système cohérent Λ qui s'insère dans une suite exacte

$$0 \to (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2} + \alpha)) \to \Lambda \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2} - \alpha)) \to 0$$

On note (Λ'', Λ') la filtration de Harder-Narasimhan de Λ pour la propriété de α_+ semi-stabilité ainsi définie. Alors on a une suite exacte d'espaces vectoriels

$$0 \to \mathrm{T}_x\Sigma^+_{\alpha,n} \to \mathrm{T}_x S_{\alpha_+,n} \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda') \to 0$$

La preuve est semblable à la précédente, nous ne la reproduisons pas. Nous remarquerons simplement que la flèche de droite est surjective, car elle s'identifie à la flèche canonique $\mathrm{Ext}^1(\Lambda,\Lambda) \to \mathrm{Ext}^1_+(\Lambda,\Lambda)$ (pour la filtration (Λ'', Λ')). Or l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^2_-(\Lambda,\Lambda)$ est nul, car d'après le chapitre 1 la suite spectrale $E_1^{p,q}$ qui permet de le calculer a ses termes sur la droite $p+q = 2$ tous nuls : en effet on a $\mathrm{Ext}^2(\Lambda', \Lambda') = 0$ (idem pour Λ''), et $\mathrm{Ext}^2(\Lambda', \Lambda'') = 0$, car ces espaces vectoriels sont d'après la proposition 2, chapitre 1 appliquée au cas d'un point, isomorphes respectivement à $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l'}, \mathcal{O}_{l'})$ et $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l'}, \mathcal{O}_{l''}(2\alpha))$.

Donnons maintenant un résultat général sur les éclatés de $S_{\alpha_-,n}$ et $S_{\alpha_+,n}$ suivant les fermés $\Sigma^-_{\alpha,n}$ et $\Sigma^+_{\alpha,n}$. On les note $\widetilde{S_{\alpha_-,n}}$ et $\widetilde{S_{\alpha_+,n}}$.

<u>Théorème</u> 7 *Sous ces hypothèses,*
- *il existe un isomorphisme canonique :* $\widetilde{S_{\alpha_-,n}} \simeq \widetilde{S_{\alpha_+,n}}$,
- *on suppose maintenant* $\alpha \leq \frac{3}{2}$, *notant* $\widetilde{S_{\alpha,n}}$ *la classe d'isomorphisme commune, il existe deux morphismes* φ_+ *et* φ_- *canoniques, et un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S_{\alpha,n}} \arrow[r, "\varphi_+"] \arrow[d, "\varphi_-"] & S_{\alpha_+,n} \arrow[d] \\ S_{\alpha_-,n} \arrow[r] & S_{\alpha,n} \end{tikzcd}$$

<u>Preuve</u>: On note encore $\mathbf{\Lambda}_R$ la restriction de la famille de systèmes cohérents sur $R_n \times \mathbb{P}_2$ à l'ouvert $R^{ss}_{\alpha_-,n}$ qui paramètre les systèmes cohérents α_- semi-stables. Soit $\mathcal{H} \subset R^{ss}_{\alpha_-,n}$ le sous-schéma fermé isomorphe à un schéma de Hilbert relatif des quotients de la famille $\mathbf{\Lambda}_R$ de la forme $(0, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2} + \alpha))$ (cf proposition précédente).

Soit $\mathbf{\Lambda}_-$ la famille de système cohérents α_- stables mais α_+ instables, paramétrée et plate sur P_-, construite à la proposition 17. On rappelle que $q_{\alpha_-,n} : R^{ss}_{\alpha_-,n} \to S_{\alpha_-,n}$ est le morphisme de passage au quotient, et $q^{-1}_{\alpha_-,n}(\Sigma^-_{\alpha,n}) = \mathcal{H}$. On note également $q_{\alpha_-,n}$ la restriction de ce même morphisme au sous-schéma $\mathcal{H}$. On peut supposer que l'on a

$$\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{H}} \simeq q^*_{\alpha_-,n}(\mathbf{\Lambda}_-)$$

En effet, les deux familles paramètrent des systèmes cohérents α_- stables, et en chaque point $q \in \mathcal{H}$, les deux fibres sont des systèmes cohérents sur $\mathbb{P}_2$ isomorphes. On en déduit, d'après [MinH2], qu'il existe un fibré inversible L tel que $\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{H}} \simeq L \otimes q^*_{\alpha_-,n}(\mathbf{\Lambda}_-)$ (l'hypothèse que les familles paramètrent des systèmes cohérents stables est essentielle). On peut supposer que L est trivial. Sur $P_- \times \mathbb{P}_2$ on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to \mathcal{L} \otimes \mathbf{\Lambda}^{'} \to \mathbf{\Lambda}_- \to \mathbf{\Lambda}^{''} \to 0$$

(cf proposition 17). On en déduit que l'on a une surjection canonique

$$\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{H}} \to q^*_{\alpha_-,n}(\mathbf{\Lambda}^{''})$$

On peut remarquer que les familles de systèmes cohérents précédentes sont plates sur leur support qui est $\mathcal{H}$, mais peuvent être aussi considérées comme des systèmes algébriques sur $R^{ss}_{\alpha,n}$. C'est ce point de vue que nous adoptons ci-dessous.

Soit maintenant $\mathcal{R}_-$ l'éclaté de $R^{ss}_{\alpha_-,n}$ le long du fermé $\mathcal{H}$. Soit $\phi_- : \mathcal{R}_- \to R^{ss}_{\alpha_-,n}$ le morphisme canonique, et E le diviseur exceptionnel. Considérons le morphisme surjectif de systèmes algébriques sur $\mathcal{R}_-$ donné par la composée

$$\phi^*_-(\mathbf{\Lambda}_R) \to \phi^*_-(\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{H}}) \to (q_{\alpha_-,n} \circ \phi_-)^*(\mathbf{\Lambda}^{''}) \ \ (*)$$

Le système algébrique $\phi^*_-(\mathbf{\Lambda}_R|_{\mathcal{H}})$ a pour support le fermé $\phi^{-1}(\mathcal{H})$ qui est E, et sa restriction à ce support est une famille plate de systèmes cohérents. Il en va de même du système algébrique $(q_{\alpha_-,n} \circ \phi_-)^*(\mathbf{\Lambda}^{''})$.

Soit $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}$ le système algébrique noyau de la flèche $(*)$. On a le résultat fondamental suivant :

Proposition 24 *Le système algébrique $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}$ sur $\mathcal{R}_-$, est une famille de systèmes cohérents α_+ stables, plate sur cette base.*

Preuve: On pose $\mathbf{\Lambda}_R = (\mathbf{\Gamma}_R, \mathbf{\Theta}_R)$, ainsi que $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-} = (\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{R}_-}, \mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-})$. Dans cette preuve, on note en gras $\mathbf{D}_i$, pour $i = 1, 2$, l'image réciproque par le morphisme $\pi_- \circ q_{\alpha_-,n} \circ \phi_-$ de la sous-variété de $\Sigma_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$ donnée par la variété d'incidence droite-point relative au $i$ème facteur $\mathbb{P}^*_2$ de $\Sigma_{\alpha,n}$. On a donc $\mathbf{D}_i \subset E \times \mathbb{P}_2$, et de plus

$$(q_{\alpha_-,n} \circ \phi_-)^*(\mathbf{\Lambda}^{'}) = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathbf{D}_1}(\frac{n}{2} - \alpha)), \ \ (q_{\alpha_-,n} \circ \phi_-)^*(\mathbf{\Lambda}^{''}) = (0, \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha))$$

On a par définition de $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}$ un isomorphisme $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{R}_-} \simeq \phi^*_-(\mathbf{\Gamma}_R)$.

Sur l'ouvert $\mathcal{R}_- \setminus E$, les deux systèmes algébriques $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}$ et $\phi^*_-(\mathbf{\Lambda}_R)$ sont isomorphes. Partons de la suite exacte de faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{R}_-}$ modules donnée par

$$0 \to \mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-} \to \phi^*_-(\mathbf{\Theta}_R) \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha) \to 0$$

et tensorisons par le faisceau $\mathcal{O}_E$. On obtient une suite exacte longue

$$0 \to \underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{R}_-}}(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha)) \to \mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-}|_E \to \phi^*_-(\mathbf{\Theta}_R)|_E \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha) \to 0$$

Pour calculer le membre de gauche, on utilise la résolution de $\mathcal{O}_E$ en tant que faisceau structural d'un diviseur de Cartier : $0 \to \mathcal{O}(-E) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_E \to 0$. Le $\mathcal{O}_{\mathcal{R}_-}$ module $\underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathcal{O}_{\mathcal{R}_-}}(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha))$ est donc le faisceau de cohomologie de gauche du complexe

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(-E, \frac{n}{2}+\alpha) \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha) \xrightarrow{id} \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha) \to 0$$

qui est $\mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(-E, \frac{n}{2}+\alpha)$.

D'autre part on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}_1}(\frac{n}{2}-\alpha) \to \phi_-^*(\mathbf{\Theta}_R)|_E \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha) \to 0$$

où le faisceau $\mathcal{L}$ est l'image réciproque sur $\mathcal{R}_-$ du faisceau inversible du même nom sur P_-. Il a pour support E. On en déduit finalement que le faisceau $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-}|_E$ s'insère dans la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(-E, \frac{n}{2}+\alpha) \to \mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-}|_E \to \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{D}_1}(\frac{n}{2}-\alpha) \to 0$$

En un point p de E d'image $q = (\Gamma, l^{'}, l^{''})$ dans $\Sigma_{\alpha,n}$, on dispose de deux suites exactes courtes : l'une qui est une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2}+\alpha) \to \mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-}(p) \to \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2}-\alpha) \to 0$$

et l'autre qui est une suite exacte de systèmes cohérents

$$0 \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2}-\alpha)) \to \phi_-^*(\mathbf{\Lambda}_R)(p) \to (0, \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2}+\alpha)) \to 0$$

On en déduit que l'on a un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{R}_-}(p) \simeq \Gamma$, une inclusion naturelle $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-}(p))$, et une suite exacte de systèmes cohérents

$$0 \to (0, \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2}+\alpha)) \to \mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}(p) \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2}-\alpha)) \to 0$$

On a le lemme suivant (cf [MinH]) :

lemme 12 *Cette extension est non scindée, et $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}(p)$ est un système cohérent α_+ semi-stable (et en fait stable).*

Nous n'en ferons pas la preuve. Il reste à montrer que le faisceau $\mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{R}_-}$ plat. Ceci est clair par le critère de platitude utilisant la constance du polynôme de Hilbert sur les fibres (cf [Ha], chap.III théo. 9.9).

La proposition 24 fournit donc un morphisme modulaire $\psi : \mathcal{R}_- \to S_{\alpha_+,n}$ et le diviseur exceptionnel a pour image ensembliste le fermé $\Sigma_{\alpha,n}^+$.

lemme 13 *On a $\psi^{-1}(\Sigma_{\alpha,n}^+) = E$ au sens des schémas.*

Preuve: En effet soit $\mathcal{H}^{'} \to \mathcal{R}_-$ le schéma de Hilbert relatif sur $\mathcal{R}_-$ paramétrant les quotients de la famille $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}$ de type $(\Gamma, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2}-\alpha))$. On a un plongement fermé $\mathcal{H}^{'} \subset \mathcal{R}_-$, et en un point q de $\mathcal{H}^{'}$, le système cohérent noyau du quotient $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}(q) \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l^{'}}(\frac{n}{2}-\alpha))$ est de la forme $(0, \mathcal{O}_{l^{''}}(\frac{n}{2}+\alpha))$; l'image de ce système cohérent par le morphisme canonique $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}(q) \to$

$\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}}(\phi_-(q))$ est nécessairement nulle car le système cohérent $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}}(\phi_-(q))$ est α_- semi-stable. Sur $\mathcal{H}' \times \mathbb{P}_2$, on a un quotient universel de la famille $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}|_{\mathcal{H}'}$, et ce quotient s'injecte naturellement dans $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}'}$. On a donc une famille quotient de $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}'}$ paramétrant des quotients de type $(0, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2}+\alpha))$. Par la propriété universelle vérifiée par le schéma de Hilbert, on a donc un morphisme canonique $f : \mathcal{H}' \to E$. En effet le diviseur exceptionnel E est le schéma de Hilbert paramétrant les quotients de la famille $\phi_-^*(\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}})$ de la forme $(0, \mathcal{O}_l(\frac{n}{2}+\alpha))$. Ceci se voit en notant que le diviseur exceptionnel E s'insère dans le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}_- \arrow[d, "\phi_-"] \\ \mathcal{H} \arrow[r] & R^{ss}_{\alpha_-,n} \end{tikzcd}$$

On voit ainsi directement que le couple $(E, \phi_-^*(\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}})|_E)$ vérifie la propriété universelle d'un schéma de Hilbert.

On construit ensuite de même un morphisme $g : E \to \mathcal{H}'$ et on vérifie que ces deux morphismes sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. En effet, $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des morphismes de schémas de Hilbert définis par les familles quotients universels de $\phi_-^*(\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}})$ et de $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-}$. □

De plus le quotient de $\mathcal{R}_-$ par l'action du groupe est isomorphe à l'éclaté $\widetilde{S_{\alpha_-,n}}$. En effet, le diviseur exceptionnel E a pour image par ϕ_- le fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$ qui est inclus dans l'ouvert des points correspondant à des classes de systèmes cohérents stables. Il existe donc un voisinage de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ au dessus duquel le morphisme de passage au quotient $q_{\alpha,n} : R^{ss}_{\alpha_-,n} \to S_{\alpha_-,n}$ est lisse de fibres isomorphe au groupe GL(H). On a le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_- \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{S_{\alpha_-,n}} \arrow[d] \\ R^{ss}_{\alpha_-,n} \arrow[r] & S_{\alpha_-,n} \end{tikzcd}$$

qui montre que le morphisme canonique $\mathcal{R}_- \to \widetilde{S_{\alpha_-,n}}$ est lisse au dessus d'un voisinage de l'image réciproque de $\Sigma^-_{\alpha,n}$, de fibres isomorphe à GL(H).

Par la propriété universelle de l'éclaté, on obtient donc un morphisme $r : \widetilde{S_{\alpha_-,n}} \to \widetilde{S_{\alpha_+,n}}$. On construit également un morphisme $r' : \widetilde{S_{\alpha_+,n}} \to \widetilde{S_{\alpha_-,n}}$ dont il est clair qu'il est l'application réciproque ensemblistement de r. Les deux variétés étant intègres, la première partie du théorème en découle.

Enfin, le deuxième point résulte de la proposition 23. En effet, dans ce cas $\Sigma^-_{\alpha,n}$ est lisse et la suite exacte de la proposition provient d'une suite exacte de fibrés vectoriels.

3.5.3 Le diviseur exceptionnel de l'éclatement : cas général

Pour α une valeur critique $\leq 3/2$, on a vu que le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $S_{\alpha_-,n}$ le long du fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$ (qui est isomorphe à celui de l'éclatement de $S_{\alpha_+,n}$ le long de $\Sigma^+_{\alpha,n}$) était lisse et intègre.

Il n'en va plus de même si $\alpha \geq 2$, car dans ce cas le fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$ n'est plus lisse, et si $\alpha \geq 5/2$, c'est l'espace de modules $S_{\alpha_-,n}$ qui possède de plus des singularités sur $\Sigma^-_{\alpha,n}$. Signalons que l'on ne possède plus qu'un morphisme canonique birationnel sur son image $\varphi : \widetilde{S_{\alpha,n}} \to S_{\alpha_-,n} \times_{S_{\alpha,n}} S_{\alpha_+,n}$, et l'image de E par φ est un fermé de $\Sigma^-_{\alpha,n} \times_{\Sigma_{\alpha,n}} \Sigma^+_{\alpha,n}$.

D'autre part, s'il est clair que l'on a déjà au moins deux composantes irréductibles dans le diviseur exceptionnel E, qui sont les adhérences d'images réciproques d'ouverts lisses de $A^-_{\alpha,n}$ et $B^-_{\alpha,n}$, il n'est pas clair que ce soient les seules.

La stratification du fermé $\mathrm{Sing}(S_{\alpha_-,n}) \cap \Sigma^-_{\alpha,n}$ (cf proposition 22) va permettre de majorer la dimension de l'image réciproque de ce fermé dans l'éclaté. On montrera ainsi que ce ne peut être une composante irréductible car elle n'est pas de codimension 1.

Soit $(\Sigma^-_{\alpha,n})^l \subset \Sigma^-_{\alpha,n}$ l'ouvert des points non singuliers pour $S_{\alpha_-,n}$. Aucun point de $(\Sigma^-_{\alpha,n})^l$ n'appartient à $A^-_{\alpha,n} \cap B^-_{\alpha,n}$, on peut donc écrire sans ambiguité $(\Sigma^-_{\alpha,n})^l = (A^-_{\alpha,n})^l \amalg (B^-_{\alpha,n})^l$. Remarquons que $(A^-_{\alpha,n})^l$ n'est autre que $A^l_{\alpha,n}$ privé de son intersection avec $B^-_{\alpha,n}$. D'autre part le faisceau normal $\mathrm{N}_{\Sigma^-_{\alpha,n}}$ (dual du conormal) de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ restreint à $(\Sigma^-_{\alpha,n})^l$ est localement libre. On note E^l l'ouvert du diviseur exceptionnel image réciproque de $(\Sigma^-_{\alpha,n})^l$. On obtient un plongement localement fermé $E^l \hookrightarrow \Sigma^-_{\alpha,n} \times_{\Sigma_{\alpha,n}} \Sigma^+_{\alpha,n}$.

En effet l'image réciproque de $(A^-_{\alpha,n})^l$ dans E^l a pour image par le plongement précédent un ouvert de la composante irréductible $F_1 = A^-_{\alpha,n} \times_{\Sigma_{\alpha,n}} \Sigma^+_{\alpha,n}$ du produit fibré $\Sigma^-_{\alpha,n} \times_{\Sigma_{\alpha,n}} \Sigma^+_{\alpha,n}$. L'adhérence de cette image réciproque dans $\widetilde{S_{\alpha,n}}$ est une composante irréductible de E, notée E_1. On obtient un morphisme naturel birationnel et surjectif de E_1 sur F_1. De même l'image réciproque de $(B^-_{\alpha,n})^l$ dans E a pour image une partie localement fermée de la composante irréductible lisse $F_2 = B^-_{\alpha,n} \times_{\Sigma_{\alpha,n}} \Sigma^+_{\alpha,n}$ du produit fibré. L'adhérence de cette image réciproque donne une composante irréductible E_2 de E. Le morphisme φ induit un morphisme birationnel de E_2 sur un fermé irréductible $F_2^{'}$ de codimension $2\alpha - 4$ dans F_2.

Nous allons maintenant calculer la classe fondamentale de cohomologie de $F_2^{'}$ dans F_2, mais nous le ferons explicitement dans un petit nombre de cas, à savoir $\alpha = 5/2$ si n est impair, et $\alpha = 2, 3$ si n est pair.

Les images réciproques sur $B^-_{\alpha,n} \times_{\Sigma_{\alpha,n}} \Sigma^+_{\alpha,n}$ de faisceaux sur $\Sigma_{\alpha,n}$, $\Sigma^-_{\alpha,n}$, ou $\Sigma^+_{\alpha,n}$, seront notées identiquement mais en gras. On identifie également $\mathbb{P}_2^*$ avec son image par le plongement diagonal dans $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$. On note $l = c_1(\mathcal{L})$ la première de Chern du fibré inversible canonique $\mathcal{L}$ sur $\Sigma^-_{\alpha,n}$ (et donc sur $B^-_{\alpha,n}$), et $l^{'}$ celle de $\mathcal{L}^{'}$, ainsi que t celle de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(1)$.

Proposition 25 *La classe fondamentale de $F_2^{'}$ dans F_2 est donnée par le terme de degré $2\alpha - 4$ de l'expression*

$$\frac{c(\mathrm{S}^{2\alpha-3}Q^* \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}^{'})}{c(\mathrm{N} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{'})}$$

où N *désigne l'image réciproque sur la composante F_2 du fibré normal de la diagonale $\mathbb{P}_2^* \subset \mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$.*

Preuve: Si n est impair, on a prouvé à la proposition 22 que le fermé des points singuliers de $S_{\alpha_-,n}$ appartenant à $B^-_{\alpha,n}$ est de codimension 2 ; si n est pair, il est de codimension 3. On note $\mathbf{\Lambda}^{'} = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}(\frac{n}{2} - \alpha))$ et $\mathbf{\Lambda}^{''} = (0, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(\frac{n}{2} + \alpha))$ les restrictions des familles de systèmes cohérents (paramétrées et plates sur $\mathrm{P}_- = \Sigma^-_{\alpha,n}$) à la composante $B^-_{\alpha,n}$, cf proposition 17). On a donc la suite exacte

$$0 \to \mathcal{L} \otimes \mathbf{\Lambda}' \to \mathbf{\Lambda}_- \to \mathbf{\Lambda}'' \to 0$$

Sur l'ouvert U des points lisses appartenant à $B^-_{\alpha,n}$, le fermé $F_2' \subset F_2$ s'écrit comme schéma des zéros d'une section d'un fibré de rang $2\alpha - 4$. Plus précisément, ce fibré est la restriction à U du conoyau K du morphisme canonique de faisceaux cohérents donné par

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}/+}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-) = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{L} \otimes \mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$$

où le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}/+}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-)$ est calculé relativement à la filtration $(\mathcal{L} \otimes \mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$ de $\mathbf{\Lambda}_-$; la section de K que l'on considère est l'image de la section canonique de $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{L} \otimes \mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$ par le quotient. Ceci découle de la proposition 23.

Nous savons d'après les rappels du chapitre 1 sur les groupes Ext filtrés, que le conoyau K s'insère dans la suite exacte

$$0 \to K \to \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}/-}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-) \to \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-) \to 0$$

Grâce à la suite spectrale $E_1^{p,q}$ aboutissant à $\underline{\mathrm{Ext}}^{p+q}_{\mathrm{pr}/+}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-)$ on montre que ce dernier est nul pour $p+q=2$. De plus la restriction du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-)$ à l'ouvert U est nulle car c'est un ouvert de points lisses.

Nous allons trouver une présentation du faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}/-}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-)$ sur l'ouvert $B^-_{\alpha,n} \setminus A^-_{\alpha,n}$, qui montrera que ce faisceau cohérent y est de plus localement libre de rang $2\alpha - 4$. La suite spectrale usuelle montre que ce faisceau est le conoyau de la différentielle $d^{0,1} : E_1^{0,1} \to E_1^{1,1}$, et que le noyau de $d^{0,1}$ est $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}/-}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-)$; on a d'ailleurs

$$E_1^{0,1} = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}') \oplus \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}'', \mathbf{\Lambda}''), \quad E_1^{1,1} = \mathcal{L} \otimes \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}'', \mathbf{\Lambda}')$$

D'après la proposition 23, le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}/-}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-)$ est isomorphe au faisceau tangent de $B^-_{\alpha,n}$ sur $B^-_{\alpha,n} \setminus A^-_{\alpha,n}$. L'inclusion $\mathrm{Ker}(d^{0,1}) \subset E_1^{0,1}$ s'identifie donc à la différentielle $\mathrm{d}\pi_-$ de $\pi_- : \Sigma^-_{\alpha,n} \to \Sigma_{\alpha,n}$. L'image de $\mathrm{d}\pi_-|_{B^-_{\alpha,n} \setminus A^-_{\alpha,n}}$ est le faisceau tangent de la diagonale de $\Sigma_{\alpha,n}$ (qui est l'image réciproque dans cette variété de la diagonale de $\mathbb{P}_2^* \times \mathbb{P}_2^*$). Donc le morphisme $d^{0,1}$ induit sur $B^-_{\alpha,n} \setminus A^-_{\alpha,n}$ un morphisme injectif de fibrés vectoriels

$$\mathrm{N} \to \mathrm{S}^{2\alpha-3} Q^* \otimes \mathcal{L}$$

dont le conoyau est $\underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}/-}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-)$.

Sur la sous-variété ouverte $U \times_{\Sigma_{\alpha,n}} \Sigma^+_{\alpha,n}$, on a une injection de fibrés $\mathcal{L}'^{\,-1} \otimes \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{L}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'')$ (par définition de $\Sigma^+_{\alpha,n}$ comme fibré projectif sur $\Sigma_{\alpha,n}$). Le morphisme canonique $\mathcal{L}^{-1} \otimes \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}'') \to \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}/-}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-)$, qu'on compose avec cette injection, fournit une section du fibré

$$\mathcal{L}' \otimes \mathcal{L} \otimes \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}/-}(\mathbf{\Lambda}_-, \mathbf{\Lambda}_-) \quad (*)$$

dont le schéma des zéros est $F_2'|_U$. Le complémentaire de $F_2'|_U$ dans F_2' est de codimension au moins $2\alpha - 6$ dans F_2. Ceci montre que la classe fondamentale cherchée est la classe de Chern d'ordre $2\alpha - 4$ du fibré $(*)$. La présentation de ce fibré calculée ci-dessus fournit l'énoncé de la proposition. $\square$

Pour n pair et $\alpha = 2$, cette classe est 1 (terme de degré 0) ; si $\alpha = 3$, on note que $\mathrm{N} \simeq Q(1)$, et on calcule le termé d'ordre 2 de l'expression

$$\frac{c(\mathrm{S}^3 Q^* \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}')}{c(Q(1) \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}')}$$

En écrivant l'isomorphisme $\mathrm{S}^3 Q \simeq \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}(3))$, on arrive à la résolution suivante du fibré $\mathrm{S}^3 Q^*$:

$$0 \to \mathrm{S}^3 Q^* \to \mathcal{O}^{10} \to \mathcal{O}(1)^6 \to 0$$

On en déduit

$$c(\mathrm{S}^3 Q^* \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{L}') = \frac{(1 + 2l + l')^{10}}{(1 + 2l + l' + t)^6}$$

de même

$$c(Q(1) \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = \frac{(1 + l + l' + t)^3}{1 + l + l'}$$

Finalement, la classe fondamentale de F_2' dans ce cas est donnée par

$$[F_2'] = 11l^2 + 6l \cdot l' - 39l \cdot t + l'^{\,2} - 9l' \cdot t + 45t^2$$

Pour n impair, on a $\alpha = 5/2$, cette classe est celle d'une hypersurface

$$[F_2'] = 4l + l' - 6t$$

Proposition 26 *Lorsqu'on éclate $S_{\alpha_-,n}$ suivant le fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$, on obtient un diviseur exceptionnel E avec deux composantes seulement, à savoir E_1 et E_2.*

Preuve: D'après le théorème 5, au voisinage d'un point $[\Lambda]$ de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ appartenant à la strate $\mathrm{Sec}_i(\mathrm{N}) \setminus \mathrm{Sec}_{i-1}(\mathrm{N})$ de points singuliers (cf proposition 22), l'espace de modules $S_{\alpha_-,n}$ est isomorphe à une intersection complète de codimension $\mathrm{Ext}^2(\Lambda, \Lambda)$ dans un germe d'espace affine V de dimension $\mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda)$. Pour un tel Λ, en posant $a = \frac{n}{2} + \alpha - i$, on a

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda) = n + 2a + 3, \;\; \dim \mathrm{Ext}^2(\Lambda, \Lambda) = a - b - 2$$

En effet, le nombre de droite se déduit directement du fait que que tout morphisme $f : \Theta \to \Theta(-3)$ se factorise un morphisme $g : \mathcal{O}_l(b) \to \mathcal{O}_l(a-3)$; le membre de gauche se déduit du fait que $\chi(\Lambda, \Lambda) = 1-(2n+5) = -2n-4$, par suite $\dim \mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda) = 2n+5+(a-b-2) = n+2a+3$ (car $a + b = n$).

On a la suite exacte fondamentale (cf [Ha] chapitre 8)

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2|_{B^-_{\alpha,n}} \to \Omega^1_V|_{B^-_{\alpha,n}} \to \Omega^1_{\Sigma^-_{\alpha,n}}|_{B^-_{\alpha,n}} \to 0 \;\; (1)$$

le terme de gauche désignant le faisceau conormal de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ dans V restreint à $B^-_{\alpha,n}$. Soit le morphisme surjectif canonique de faisceaux conormaux

$$\mathcal{N}_{\Sigma^-_{\alpha,n}/V}|_{B^-_{\alpha,n}} \to \mathcal{N}_{\Sigma^-_{\alpha,n}/S_{\alpha_-,n}}|_{B^-_{\alpha,n}} \to 0 \;\; (2)$$

(ne pas oublier que l'on travaille toujours sur des voisinages, et que l'on peut considérer $\mathcal{N}_{\Sigma^-_{\alpha,n}/S_{\alpha_-,n}}$ comme un module cohérent sur V). Si $\mathcal{J}$ désigne le faisceaux d'idéaux de $\Sigma^-_{\alpha,n}$ dans $S_{\alpha_-,n}$, on a d'après (2) un plongement fermé naturel

$$\mathbb{P}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2|_{B^-_{\alpha,n}}) \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2|_{B^-_{\alpha,n}})$$

Le terme de gauche représente l'image réciproque du fermé $B^-_{\alpha,n}$ dans l'éclaté de $S_{\alpha_-,n}$ le long de $\Sigma^-_{\alpha,n}$. L'ensemble singulier du faisceau $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2|_{B^-_{\alpha,n}}$ est de codimension ≥ 2 (son support est $A^-_{\alpha,n} \cap B^-_{\alpha,n}$), donc ce module cohérent est sans torsion car $B^-_{\alpha,n}$ est lisse. Le noyau de la flèche de gauche dans (1) est donc nul, car de torsion, et on note alors que le long de la ième strate de $B^-_{\alpha,n}$ pour $i \geq 2$, le faisceau $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2|_{B^-_{\alpha,n}}$ est localement libre de rang $n+5+2a-2i$ (on se sert de (1) et du fait que $\Sigma^-_{\alpha,n}$ est lisse de dimension $n-2$ sur la strate) ; cette strate est de dimension $n-1-2a+2i$, par conséquent son image réciproque dans l'éclaté est de dimension $\leq 2n+3$.

Pour $i = 1$, on se trouve sur l'intersection $A^-_{\alpha,n} \cap B^-_{\alpha,n}$ qui est donc formée de points singuliers pour $\Sigma^-_{\alpha,n}$. Nous ne calculerons pas les dimensions de l'espace tangent à $\Sigma^-_{\alpha,n}$ en ces points, mais nous invoquerons plutôt le corollaire 6.9.3 d'[EGA4,2], qui permet d'écrire que $A^-_{\alpha,n} \cap B^-_{\alpha,n}$ est réunion de sous-schémas fermés intègres S_i sur lesquels les restrictions du faisceau $\Omega^1_{\Sigma^-_{\alpha,n}}$ sont localement libres, de rang $\geq n-2$; par conséquent les calculs de dimensions d'images réciproques des $i$èmes strates pour $i \geq 2$ reste valable.

On en déduit que l'image réciproque de ce lieu dans l'éclaté de $S_{\alpha_-,n}$ suivant le fermé $\Sigma^-_{\alpha,n}$ ne peut pas être une composante irréductible. Celle-ci serait en effet obligatoirement de dimension $2n+4$, et elle serait localement dominée par un fermé de dimension $\leq 2n+3$ d'un espace affine. $\square$

3.5.4 L'espace de modules S_n n'est pas localement factoriel pour $n \geq 5$

Soit n un entier. Considérons le morphisme $\pi : S_n \to P_n$. Soit Σ_n le sous-ensemble fermé de P_n des faisceaux spéciaux. Ce sont les faisceaux F semi-stables sur $\mathbb{P}_2$ de rang 2 et classe $(0,n)$, qui admettent une droite de saut d'ordre $n-1$. D'après [LePT] proposition 4.4, le fermé Σ_n muni de sa structure réduite est isomorphe au fibré en espaces espaces projectifs $\mathbb{P}(\underline{\mathrm{Ext}}^1_{pr}(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}(1-n), Q^*)^\vee)$ au dessus de $\mathbb{P}^*_2$. Il est clair que Σ_n est en fait contenu dans l'ouvert des points stables de M_n.

__**lemme**__ **14** *On a l'égalité au sens schématique* $\pi^{-1}(\Sigma_n) = \Sigma^+_{\alpha_m,n}$.

__Preuve__: Considérons S_n comme bon quotient d'un schéma R^{ss}_n (cf proposition 9). Notons par abus $\pi : R^{ss}_n \to P_n$ le morphisme composé. Sur $R^{ss}_n \times \mathbb{P}_2$ il existe une famille universelle $\mathbf{\Lambda}_R = (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ de systèmes cohérents semi-stables. Restreignons cette famille au fermé $\pi^{-1}(\Sigma_n) \times \mathbb{P}_2$. On a deux suites exactes sur $\pi^{-1}(\Sigma_n) \times \mathbb{P}_2$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{\Gamma}^* \boxtimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r] & \pi^*(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{\mathbf{\Theta}}(-1) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi^*(\mathbf{Q})^* \arrow[r] & \pi^*(\mathcal{F}) \arrow[r] & \pi^*(\mathcal{O}_D(1-n)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui fournissent un morphisme surjectif représenté en pointillés. On a donc un morphisme naturel de $\pi^{-1}(\Sigma_n)$ vers le schéma de Hilbert relatif paramètrant les quotients de systèmes cohérents $(\Gamma,\Theta) \to (0,\mathcal{O}_l(1)) \to 0$, avec (Γ,Θ) semi-stable. Ce morphisme est un plongement fermé car $\pi^{-1}(\Sigma_n)$ est un sous-schéma fermé de R_n^{ss}. Par passage au quotient, le plongement fermé de $\pi^{-1}(\Sigma_n)$ dans S_n se factorise par $\Sigma^+_{\alpha_m,n}$. On en déduit l'énoncé car le fermé $\Sigma^+_{\alpha_m,n}$ est intègre et $\pi^{-1}(\Sigma_n)$ possède au moins une composante irréductible de la bonne dimension d'après la proposition 7 et [EGA4,2] (prop. 5.6.5). □

Remarque 4 *Pour $n = 4$, l'espace de modules S_4 se décrit comme l'éclaté de M_4 suivant le fermé Σ_4 (cf [LeP2]). L'énoncé du lemme est alors immédiat.*

La remarque précédente n'est plus valable pour $n \geq 5$. On en vient à l'objet de cette sous-section.

Proposition 27 *Pour $n \geq 5$, l'espace de modules S_n n'est pas localement factoriel.*

Preuve: Pour $n = 5$, si S_5 était factoriel, l'éclatement de S_5 suivant $\Sigma^+_{3/2}$ serait isomorphe à S_5. Ce qui n'est pas car le morphisme $\pi_- : \Sigma^-_{3/2} \to \Sigma_{3/2}$ n'est pas un isomorphisme.

Pour $n \geq 6$, c'est à peu près la même chose : l'éclatement de S_n le long du fermé critique $\Sigma^+_{\alpha_{\max},n}$ serait isomorphe à S_n, en particulier le diviseur exceptionnel E de $\widetilde{S}_n$ serait isomorphe à $\Sigma^+_{\alpha_{\max},n}$. Or nous avons vu que E possède deux composantes irréductibles, et $\Sigma^+_{\alpha_{\max},n}$ est intègre. Ceci prouve la proposition.

3.6 Calcul des sauts

Dans cette section nous donnons des formules pour calculer les sauts $\Delta_{\alpha,n} = \mathrm{I}_{\alpha_+,n} - \mathrm{I}_{\alpha_-,n}$.

La première étape consiste à remarquer que les fibrés $\varphi_-^*(\mathcal{D}_{\alpha_-,n})$ et $\varphi_+^*(\mathcal{D}_{\alpha_+,n})$ sont isomorphes sur l'ouvert $\widetilde{S_{\alpha,n}} \setminus E$ (cf théorème 7). On passe donc de l'un à l'autre de ces deux fibrés par tensorisation par un multiple de $\mathcal{O}(E)$. C'est l'objet de la première sous-section.

Le nombre $\Delta_{\alpha,n}$ se ramène donc à un calcul de nombre d'intersection sur E. Ce dernier diviseur possède deux composantes E_1 et E_2. On se ramène d'après les observations précédentes à un calcul sur F_1 et F_2 (c'est là que la classe du fermé F_2' intervient). Les composantes F_i étant des produits fibrés faisant intervenir $\Sigma_{\alpha,n}$, $\Sigma^-_{\alpha,n}$, et $\Sigma^+_{\alpha,n}$, on se ramène par application de la formule de projection (cf [F]) à des calculs d'images directes de puissances de classes de Chern d'un fibré universel sur une grassmanienne relative, ce que nous faisons explicitement. Ces étapes forment les seconde et troisième sous-sections.

3.6.1 Le saut du fibré déterminant

Les notations de la preuve du théorème 7 sont conservées dans la suite. On rappelle en outre que h désigne la classe de Grothendieck du faisceau structural d'une droite de $\mathbb{P}_2$.

Dans cette section on note, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, les images réciproques par les morphismes φ_- et φ_+ des fibrés déterminants $\mathcal{D}_{\alpha_-,n}$ et $\mathcal{D}_{\alpha_+,n}$ par les mêmes symboles. On rappelle que la variété $\mathcal{R}_-$ est l'éclaté de $R^{ss}_{\alpha_-,n}$ suivant le fermé $\mathcal{H}$ paramétrant les systèmes cohérents α_- semi-stables mais α_+ instables. Sur $\mathcal{R}_- \times \mathbb{P}_2$ on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to \mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}_-} \to \phi_-^*(\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{R}}) \to (0, \mathcal{O}_{\mathbf{D_2}}(\frac{n}{2}+\alpha)) \to 0 \quad (*)$$

Proposition 28 *Sur la variété $\widetilde{S_{\alpha,n}}$ on a un isomorphisme*

$$\mathcal{D}_{\alpha_-,n} \simeq \mathcal{D}_{\alpha_+,n} \otimes \mathcal{O}(E)$$

Preuve: Sur $\mathcal{R}_-$ on a par la propriété universelle du fibré déterminant (cf proposition 12) les isomorphismes

$$\mathcal{D}_{\alpha_-,n} \simeq \det(\mathrm{pr}_*(\phi_-^*(\mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}}) \cdot h)) \otimes \det(\phi_-^*(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{R}}))^*,$$
$$\mathcal{D}_{\alpha_+,n} \simeq \det(\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}_{\mathcal{R}_-} \cdot h)) \otimes \det(\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{R}_-})^*$$

On a donc la relation

$$\mathcal{D}_{\alpha_-,n} \simeq \mathcal{D}_{\alpha_+,n} \otimes \det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha)\cdot h))$$

Les produits de K-théorie sont pris dans le groupe $K(\mathcal{R}_- \times \mathbb{P}_2)$ (ces produits sont licites car on se limite à la K-théorie des modules plats sur $\mathcal{R}_-$).

Plaçons nous sur l'ouvert $U \subset E$ complémentaire du fermé de E constitué des points dont l'image dans $\Sigma_{\alpha,n}$ a pour projection sur le second facteur $\mathbf{P}_2^*$ le point $\check{l}$ déterminé par la droite l. Le fermé complémentaire de U dans E est de codimension ≥ 2 dans $\mathcal{R}_-$. Soit la résolution de $\mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha)$ donnée par

$$0 \to h_2^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(\frac{n}{2}+\alpha-1) \to \mathcal{O}(\frac{n}{2}+\alpha) \to \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha) \to 0$$

Cette résolution reste exacte par tensorisation par $\mathcal{O}_l$ au dessus de l'ouvert U, en effet dans ce cas les modules $\mathcal{O}_l$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha)$ sont transverses (ce qui signifie que les Tor supérieurs sont nuls). On a donc la résolution suivante valable sur $U \subset E$:

$$0 \to h_2^*|_U \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2}+\alpha-1)) \to \mathcal{O}_U \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(\frac{n}{2}+\alpha)) \to \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha)\otimes\mathcal{O}_l)|_U \to 0$$

Le déterminant du membre de droite coïncide donc sur un ouvert de $\mathcal{R}_-$ dont le complémentaire est de codimension ≥ 2 avec le faisceau inversible

$$\det(\mathcal{O}_E)^{\otimes \frac{n}{2}+\alpha+1} \otimes \det(h_2^*)^{\otimes -\frac{n}{2}-\alpha}$$

Le terme précédent est isomorphe au fibré $\mathcal{O}(E)$ en vertu du lemme suivant. La proposition est prouvée.

lemme 15 *Soit L un faisceau inversible sur un diviseur de Cartier effectif E sur un schéma projectif X intègre. Alors L est un faisceau de dimension homologique* 1 *et on a :*

$$\det(L) \simeq \mathcal{O}(E)$$

Preuve: Il existe un faisceau localement libre de rang fini A sur X et une surjection $A \to L \to 0$. Soit B son noyau. Le faisceau B est localement libre sur X, car en tout point $x \in E$, on $\mathrm{Tor}_2^{\mathcal{O}_x}(L_x, \mathbb{C}(x)) = 0$ en vertu de la présentation $0 \to \mathcal{O}(-E) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_E \to 0$ du faisceau $\mathcal{O}_E$. On a donc un morphisme de fibrés, injectif sur les faisceaux de sections, donné par $f : B \to A$, et le schéma des zéros de $\det(f)$ est E. En effet il suffit de considérer un recouvrement ouvert fini (U_i) de X tel pour chaque i on ait

$$L|_{U_i} \simeq \mathcal{O}_E|_{U_i}$$

La restriction de la résolution localement libre de L à chaque U_i est alors une résolution de $\mathcal{O}_E$, ce qui prouve le lemme. □

3.6.2 Expression de $\Delta_{\alpha,n}$

Commençons par un préliminaire. On rappelle que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont les fibrés inversibles canoniques sur les fibrés en espaces projectifs $\Sigma^-_{\alpha,n}$ et $\Sigma^+_{\alpha,n}$. De plus $\mathbf{\Gamma}$ est toujours le sous-fibré universel de rang 2 sur $\Sigma_{\alpha,n}$. On désigne encore par h la classe d'une section hyperplane de $\mathbb{P}_2$.

__lemme 16__ *On a l'expression suivante des restrictions des fibrés déterminants aux fermés $\Sigma^-_{\alpha,n}$ et $\Sigma^+_{\alpha,n}$:*

1. *sur $\Sigma^-_{\alpha,n}$,*
$$\mathcal{D}_{\alpha_-,n}|_{\Sigma^-_{\alpha,n}} \simeq \mathcal{L}^{-1} \otimes h_1^{\frac{n}{2}-\alpha} \otimes h_2^{\frac{n}{2}+\alpha} \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^\vee$$
2. *Sur $\Sigma^+_{\alpha,n}$, on a :*
$$\mathcal{D}_{\alpha_+,n}|_{\Sigma^+_{\alpha,n}} \simeq \mathcal{L}' \otimes h_1^{\frac{n}{2}-\alpha} \otimes h_2^{\frac{n}{2}+\alpha} \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^\vee$$

__Preuve:__ On part de la suite exacte de familles sur $\Sigma^-_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \to \mathbf{\Lambda}' \otimes \mathcal{L} \to \mathbf{\Lambda}_- \to \mathbf{\Lambda}'' \to 0$$

Comme remarqué à la proposition 17, on a $\mathbf{\Lambda}_- = (\mathbf{\Gamma}_- = \mathbf{\Gamma} \otimes \mathcal{L}, \mathbf{\Theta}_-)$. On en déduit, toujours d'après la propriété universelle du fibré déterminant

$$\mathcal{D}_{\alpha_-,n}|_{\Sigma^-_{\alpha,n}} = \det(\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}_- \cdot h)) \otimes \det(\mathbf{\Gamma} \otimes \mathcal{L})^*.$$

Dans le groupe de Grothendieck $K(\Sigma^-_{\alpha,n} \times \mathbb{P}_2)$, on a

$$\mathbf{\Theta}_- \cdot h = (\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\frac{n}{2} - \alpha) \cdot h) + \mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2} + \alpha) \cdot h$$

On choisit une résolution du faisceau $\mathcal{O}_l$ donnée par $0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_l \to 0$ ce qui nous permet d'écrire

$$\mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2} + \alpha) \cdot h = \mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2} + \alpha) - \mathcal{O}_{D_2}(\frac{n}{2} + \alpha - 1)$$

et une décomposition similaire pour le produit d'intersection $(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\frac{n}{2} - \alpha)) \cdot h$. On obtient finalement

$$\det(\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}_- \cdot h)) \simeq \mathcal{L}^A \otimes (\mathcal{L} \otimes h_1^{-1})^B \otimes h_2^C$$

où $A = \binom{\frac{n}{2}-\alpha+2}{2} - \binom{\frac{n}{2}-\alpha+1}{2}$, $B = -\binom{\frac{n}{2}-\alpha+1}{2} + \binom{\frac{n}{2}-\alpha}{2}$, $C = \binom{\frac{n}{2}+\alpha+1}{2} - \binom{\frac{n}{2}+\alpha}{2}$. C'est-à-dire que $A = \frac{n}{2} - \alpha + 1$, $B = \alpha - \frac{n}{2}$, $C = \frac{n}{2} + \alpha$. On arrive à

$$\det(\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta} \cdot h)) \simeq \mathcal{L} \otimes h_1^{\frac{n}{2}-\alpha} \otimes h_2^{\frac{n}{2}+\alpha}.$$

Maintenant, $\det(\mathbf{\Gamma} \otimes \mathcal{L}) \simeq \det(\mathbf{\Gamma}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2}$, ce qui donne le premier point. Pour le second, le calcul est strictement identique. Mais cette fois la famille $\mathbf{\Gamma}$ n'est plus tensorisée par $\mathcal{L}'$, ce qui explique la différence du résultat.

On doit évaluer $\Delta_{\alpha,n} = \int_{\widetilde{S_{\alpha,n}}} c_1(\mathcal{D}_{\alpha_+,n})^{2n+5} - c_1(\mathcal{D}_{\alpha_-,n})^{2n+5}$. En écrivant l'identité $c_1(\mathcal{D}_{\alpha_+,n}) - c_1(\mathcal{D}_{\alpha_-,n}) = -c_1(\mathcal{O}(E))$, d'après la proposition 28, on remarque que $\Delta_{\alpha,n}$ s'écrit comme un nombre d'intersection sur E. On pose maintenant $\gamma_i = c_i(\mathbf{\Gamma})$, $i = 1, 2$. On note $l = c_1(\mathcal{L})$, $l' = c_1(\mathcal{L}')$, et $v = (\frac{n}{2} - \alpha)h_1 + (\frac{n}{2} + \alpha)h_2 - \gamma_1$. On a :

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{D}_{\alpha_-,n}|_{\Sigma^-_{\alpha,n}}) &= -l + v \\ c_1(\mathcal{D}_{\alpha_+,n}|_{\Sigma^+_{\alpha,n}}) &= l' + v \end{aligned}$$

On a la relation formelle

$$(l' + v)^{2n+5} - (-l + v)^{2n+5} = (l' + l) \sum_{i=1}^{2n+5} \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{2n+5}{i} v^{2n+5-i} l^k l'^{i-1-k}$$

de laquelle on tire l'expression de $\Delta_{\alpha,n}$:

$$\Delta_{\alpha,n} = -\sum_{i=0}^{2n+4} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{2n+5}{i+1} \int_E v^{2n+4-i} l^k l'^{i-k} \qquad (*)$$

D'après la proposition 3.5.3, le saut $\Delta_{\alpha,n}$ se décompose donc en somme de deux intégrales, à savoir celles sur E_1 et E_2, notées $\Delta^i_{\alpha,n}$, $i = 1, 2$. Par définition F_1 désigne le produit fibré $A^-_{\alpha,n} \times_{\Sigma_{\alpha,n}} \Sigma^+_{\alpha,n}$. On a donc un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\varphi_+"] \arrow[d, "\varphi_-"] & \Sigma^+_{\alpha,n} \arrow[d, "\pi_+"] \\ A^-_{\alpha,n} \arrow[r, "\pi_-"'] & \Sigma_{\alpha,n} \end{tikzcd}$$

et de plus la restriction du morphisme $\varphi : \widetilde{S_{\alpha,n}} \to S_{\alpha_-,n} \times_{S_{\alpha,n}} S_{\alpha_+,n}$ à la composante E_1 de E est birationnelle sur F_1. Par les formules de projection et de changement de base (cf [F]), on a

$$\Delta^1_{\alpha,n} = -\sum_{i=0}^{2n+4} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{2n+5}{i+1} \Delta^1_\alpha(i, k)$$

avec $\Delta^1_\alpha(i, k)$ égal à :

$$\Delta^1_\alpha(i, k) = \int_{\Sigma_{\alpha,n}} v^{2n+4-i} \cdot (\pi_-)_*(l^k) \cdot (\pi_+)_*(l'^{i-k}).$$

Les images directes $(\pi_-)_*(l^k)$, $(\pi_+)_*(l'^{i-k})$ s'interprètent comme des classes de Segré de fibrés pour $\alpha \leq 3/2$; en effet dans ce cas les faisceaux $D^-_{\alpha,n}$ et $D^+_{\alpha,n}$ sont localement libres.

On pose maintenant $G_{\alpha,n} = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}(\frac{n}{2} - \alpha)))$. On désigne par t le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^*_2}(1)$ sur $G_{\alpha,n}$. De même, pour calculer $\Delta^2_{\alpha,n}$, on remarque que φ induit un morphisme birationnel de E_2 sur son image $F'_2 \subseteq F_2$, dont on connait la classe fondamentale f'_2. On peut donc à nouveau appliquer la formule de projection et les formules de changement de base au diagramme

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^+_{\alpha,n} \arrow[d, "\pi_+"] \\ B^-_{\alpha,n} \arrow[r, "\pi_-"'] & \Sigma_{\alpha,n} \end{tikzcd}$$

pour nous ramener à une intégrale sur F_2. On peut écrire :

$$\Delta^2_{\alpha,n} = -\sum_{i=0}^{2n+4}\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{2n+5}{i+1}\Delta^2_\alpha(i,k)$$

avec $\Delta^2_\alpha(i,k)$ égal à :

$$\Delta^2_\alpha(i,k) = \int_{F_2}(nt-\gamma_1)^{2n+4-i}\cdot l^k\cdot l'^{i-k}\cdot f'_2$$

Nous ferons les calculs explicites un peu plus loin selon les cas.

3.6.3 Calculs de $\Delta^1_{\alpha,n}$ et $\Delta^2_{\alpha,n}$

Expression de $\Delta^1_{\alpha,n}$

Lorsque $\alpha = 1/2, 1$, le faisceau $D^-_{\alpha,n}$ est localement libre sur $\Sigma_{\alpha,n}$, isomorphe respectivement à $\mathcal{O}(0,-1) = h_2^*$ et $\mathcal{O}(1,0) = h_1$. Ce sont les cas pour lesquels $\pi_- : \Sigma^-_{\alpha,n} \to \Sigma_{\alpha,n}$ est un isomorphisme. La classe de cohomologie l est celle d'un faisceau sur $\Sigma_{\alpha,n}$. Nous avons donc

$$\Delta_\alpha(i,k) = \int_{\Sigma_{\alpha,n}} v^{2n+4-i}\cdot l^k\cdot s_{i-k-n-2\alpha-2}(\mathcal{W})$$

où $\mathcal{W}$ est le fibré $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}', \mathbf{\Lambda}''))$ (cf section Généralités et notations).

Lorsque $\alpha \geq 3/2$, le faisceau $D^-_{\alpha,n}$ est isomorphe à $\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}(2\alpha-1, 2\alpha-2)$. La restriction $\pi_- : A^-_{\alpha,n} \to \Sigma_{\alpha,n}$ s'identifie à l'éclatement de l'image réciproque dans $\Sigma_{\alpha,n}$ du fermé $\mathbb{P}_2^*\times\mathbb{P}_2^*$ d'idéal la puissance $2\alpha-2$ième de la diagonale.

Avec les notations de la preuve de la proposition 15, on a $l = -c_1(\mathcal{O}(E_\alpha))$; en travaillant dans les groupes de Chow de $A^-_{\alpha,n}$ (qui peut-être une variété singulière), on peut énoncer ce qui suit.

<u>lemme</u> 17 *On a les relations*

1. $(\pi_-)_*(l^0) = [A^-_{\alpha,n}]$, $(\pi_-)_*(l) = 0$,
2. *pour* $k \geq 2$, $(\pi_-)_*(l^k) = -(2\alpha-2)s_{k-2}(\mathrm{N}(4\alpha-3))$, *où* N *est le fibré normal à la diagonale.*

<u>Preuve</u>: Le morphisme induit $\pi_-|_{E_\alpha}$ est une contraction, ce qui justifie le premier point. Le second se justifie ainsi : on a $(\pi_-)_*(l^k) = -(\pi|_{E_\alpha})_*(l^{k-1})$; or le second terme est une composante de la classe de Segré du cône normal au sous-schéma d'idéal $\mathrm{I}_\Delta^{2\alpha-2}$ (pour la définition générale de la classe de Segré d'un cône, cf [F] chapitre 4). D'après la preuve de la proposition 15, ce cône normal est non réduit, de sous-schéma réduit associé isomorphe à $\mathbf{P}(\mathrm{N}(4\alpha-3))$ (c'est l'intersection de $A^-_{\alpha,n}$ et $B^-_{\alpha,n}$), et sa multiplicité géométrique est $2\alpha-2$. On peut alors conclure grâce à la proposition 4.1 (b) de [F]. □

On peut donc écrire que pour $\alpha \geq 3/2$,

$$\Delta^1_\alpha(i,0) = \textstyle\int_{\Sigma_{\alpha,n}} v^{2n+4-i}\cdot s_{i-n-2\alpha-2}(\mathcal{W})$$
$$\Delta^1_\alpha(i,k) = -(2\alpha-2)\textstyle\int_{G_{\alpha,n}}(nt-\gamma_1)^{2n+4-i}\cdot s_{k-2}(Q(4\alpha-2))\cdot s_{i-k-n-2\alpha-2}(\mathcal{W})$$

si $k \geq 2$.

Expression de $\Delta_{\alpha,n}$

Pour calculer $\Delta^2_{\alpha,n}$, on doit calculer l'image directe $(\pi_-|_{B^-_{\alpha,n}})_*(l^k)$. On sait que $B^-_{\alpha,n}$ est isomorphe au fibré projectif $\mathbf{P}(\mathrm{S}^{2\alpha-2}\mathrm{N}(3-4\alpha))$. Par conséquent l'image directe précédente est la classe de Segré d'ordre $k-2\alpha+2$ du fibré $\mathrm{S}^{2\alpha-2}Q(1-2\alpha)$.

Il s'agit maintenant de calculer la classe de segré totale $s(\mathcal{W}) = s(D^{+*}_{\alpha,n})$. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 29 *On a :*

$$s(D^{+*}_{\alpha,n}) = \frac{(1+h_1-h_2)^{(\alpha+1)(2\alpha+1)}\,(1-\gamma_1-2h_2+\gamma_2+h_2^2+\gamma_1 h_2)^{\frac{(\frac{n}{2}+\alpha+1)(\frac{n}{2}+\alpha)}{2}}}{(1+h_1)^{(\alpha+1)(2\alpha+3)}\,(1-h_2)^{\alpha(2\alpha+1)}\,(1-\gamma_1+\gamma_2)^{\frac{(\frac{n}{2}+\alpha+2)(\frac{n}{2}+\alpha+1)}{2}}}$$

Preuve: On pose ici $\mathbf{\Theta}' = \mathcal{O}_{\mathbf{D}_1}(\frac{n}{2}-\alpha)$, et $\mathbf{\Theta}'' = \mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(\frac{n}{2}+\alpha)$. On sait que $D^{+*}_{\alpha,n}$ s'insère dans la suite exacte

$$0 \to \mathbf{\Gamma}^* \boxtimes \mathrm{S}^{n/2+\alpha}Q \to D^{+*}_{\alpha,n} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Theta}', \mathbf{\Theta}'') \to 0.$$

En effet, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Theta}', \mathbf{\Theta}'')$ est de torsion, et inclus dans un fibré, donc nul. On note dans $K(\Sigma_{\alpha,n}\times\mathbb{P}_2)$ la différence $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Theta}', \mathbf{\Theta}'') - \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Theta}', \mathbf{\Theta}'')$ par $\chi(\mathbf{\Theta}', \mathbf{\Theta}'')$. On a donc dans $K(\Sigma_{\alpha,n}\times\mathbb{P}_2)$:

$$D^{+*}_{\alpha,n} = -\chi(\mathbf{\Theta}', \mathbf{\Theta}'') + \mathbf{\Gamma}^* \boxtimes \mathrm{S}^{n/2+\alpha}Q.$$

Or

$$\chi(\mathbf{\Theta}', \mathbf{\Theta}'') = \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathbf{D}_2}(2\alpha)) - \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(1)\boxtimes \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}(2\alpha+1)),$$

et donc

$$\begin{aligned} D^{+*}_{\alpha,n} &= \alpha(2\alpha+1)h_2^{-1} + (\alpha+1)(2\alpha+3)h_1 - (\alpha+1)(2\alpha+1)(h_1\boxtimes h_2^{-1}) \\ &+ \frac{(\frac{n}{2}+\alpha+2)(\frac{n}{2}+\alpha+1)}{2}\mathbf{\Gamma}^* - \frac{(\frac{n}{2}+\alpha+1)(\frac{n}{2}+\alpha)}{2}(\mathbf{\Gamma}^*\boxtimes h_2^{-1}) + H \end{aligned}$$

où H est une somme de fibrés triviaux sur $\Sigma_{\alpha,n}$. On est ramené à calculer $c(\mathbf{\Gamma}\boxtimes h_2)$. Or

$$c(\mathbf{\Gamma}\boxtimes h_2) = 1 + (\gamma_1+2h_2) + (\gamma_2+h_2^2+\gamma_1 h_2) + ..$$

on en déduit finalement par multiplicativité le résultat annoncé.

3.6.4 Calculs d'images directes de classes de cohomologie

Dans les calculs précédents, on se trouve face à des produits de classes de Chern de fibrés universels sur des grassamaniennes. Pour pouvoir avoir des résultats explicites, il nous faut un préliminaire de calcul de Schubert.
Soit X un schéma, et W un fibré vectoriel de rang r sur X. On note $\mathrm{Grass}(2,W)$ la grassmanienne relative des plans vectoriels de W_x, $x\in X$. On note $\pi : \mathrm{Grass}(2,W)\to X$ la projection canonique, et $S\subset \pi^*(W)$ le sous fibré universel de rang 2. On utilise pour les classes de Segré les conventions données en début de chapitre.

Proposition 30 *On a :*

$$\pi_*(c_2(S)^m\, c_1(S)^k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta_{m,k,j}$$

avec

$$\Delta_{m,k,j} = \begin{vmatrix} s_{m+j-r+2}(W) & s_{k-j+m-r+3}(W) \\ s_{m+j-r+1}(W) & s_{k-j+m-r+2}(W) \end{vmatrix}$$

Preuve: Soit $\mathrm{Drap}_{1,2}(W)$ la variété des drapeaux relatifs, qui au dessus d'un point $x \in X$, paramètre les couples de sous-espaces vectoriels $F_1 \subset F_2 \subset W_x$, tels que $\dim(F_i) = i$. On a un diagramme commutatif naturel

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Drap}_{1,2}(W) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "p"] & \mathrm{Grass}(2, W) \arrow[d, "\pi"] \\ P(W) \arrow[r, "\pi_1"'] & X \end{tikzcd}$$

Le morphisme φ associe au couple $F_1 \subset F_2 \subset W_x$ le sous-espace F_2, et ψ associe F_1. Ainsi $\mathrm{Drap}_{1,2}(W)$ peut aussi s'identifier à $P(Q_1)$, où le fibré Q_1 est défini par la suite exacte

$$0 \to L_1 \to \pi_1^*(W) \to Q_1 \to 0,$$

L_1 étant le fibré inversible universel sur $P(W)$. Sur $\mathrm{Drap}_{1,2}(W)$, on a donc une suite exacte canonique de fibrés

$$0 \to \psi^*(L_1) \to \varphi^*(S) \to L_2 \to 0.$$

Notons a_1, a_2 les classes de Chern de L_1 et L_2. Alors on a les relations

$$\begin{aligned} \varphi^*\, c_1(S) &= \psi^*(a_1) + a_2 \\ \varphi^*\, c_2(S) &= \psi^*(a_1) \cdot a_2 \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} \pi_*(c_2(S)^m\, c_1(S)^k) &= \varphi_*\, (\varphi^*\, c_2(S)^m \cdot \varphi^*\, c_1(S)^k \cdot a_2) \\ &= p_*\, (\psi^*(a_1)^m \cdot (\psi^*(a_1) + a_2)^k \cdot a_2^{m+1}) \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{k} C_k^j\, p_*\, (\psi^*(a_1)^{m+j} \cdot a_2^{k-j+m+1}) \end{aligned}$$

avec de plus

$$p_*\, (\psi^*(a_1)^{m+j} \cdot a_2^{k-j+m+1}) = (\pi_1)_*(a_1^{m+j} \cdot \psi_*\, (a_2^{k-j+m+1})) \quad (*)$$

D'après les conventions sur les classes de Segré :

$$\psi_*\, (a_2^{k-j+m+1}) = (-1)^{k-j+m+1}\, s_{k-j+m-r+3}\, (Q_1^*).$$

Or on a la relation suivante sur les classes de Segré et de Chern totales $s(Q_1^*) = c(L_1) {\cdot} \pi_1^*\, s(W^*)$. Donc

$$s_{k-j+m-r+3}\, (Q_1^*) = a_1 \cdot \pi_1^*(\, s_{k-j+m-r+2}\, (W^*)) + \pi_1^*(\, s_{k-j+m-r+3}\, (W^*))$$

soit

$$\begin{aligned}
(*) \quad &= \quad (-1)^{k-j+m+1}\ \pi_{1*}(a_1^{m+j+1}\cdot\pi_1^*(s_{k-j+m-r+2}(W^*)\\
&\qquad + \ a_1^{m+j}\cdot\pi_1^*(s_{k-j+m-r+3}(W^*)))\\
&= \qquad (-1)^k\ (s_{m+j-r+2}(W^*)\cdot s_{k-j+m-r+2}(W^*)\\
&\qquad - \ s_{m+j-r+1}(W^*)\cdot s_{k-j+m-r+3}(W^*))
\end{aligned}$$

On reconnait dans cette dernière expression les mineurs de l'énoncé de la proposition.

On prend maintenant pour base X le produit $\mathbb{P}_2^*\times\mathbb{P}_2^*$. Soit le fibré $W=\mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}(\frac{n}{2}-\alpha))\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}$. Soit $\pi:\ \mathrm{Grass}(2,W)\to\mathbb{P}_2^*\times\mathbb{P}_2^*$ la projection canonique. Les notations h_1 et h_2 désignent les images réciproques du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(1)$ par les projections sur le premier et le deuxième facteur. On note aussi γ_i, pour $i=1,2$, les deux classes de Chern du fibré S.

<u>**lemme**</u> **18** *Soit* $r=\frac{n}{2}-\alpha+1$ *et* $A=\frac{r(r-1)}{2}$. *Alors dans l'algèbre de cohomologie de* $\mathbb{P}_2^*\times\mathbb{P}_2^*$ *:*

$$\pi_*(\gamma_2^m\cdot\gamma_1^k)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\begin{vmatrix}\binom{A}{m+j-r+2} & \binom{A}{k-j+m-r+3}\\ \binom{A}{m+j-r+1} & \binom{A}{k-j+m-r+2}\end{vmatrix}\cdot h_1^{k+2m-2r+4}$$

<u>Preuve</u>: Il suffit de remarquer que

$$s(W)=(1+h_1)^A=\sum_{k=0}^{A}\binom{A}{k}h_1^k$$

d'où l'on tire

$$s_k(W)=\binom{A}{k}h_1^k.$$

On utilise alors la proposition précédente.

On peut donc calculer explicitement $\Delta_{\alpha,n}$.

3.7 Calcul de l'intégrale $\mathrm{I}_{\epsilon,n}$ pour n quelconque

Les préliminaires précédents vont également être utiles pour le calcul de $\mathrm{I}_{\epsilon,n}$, le paramètre ϵ étant inférieur à la plus petite valeur critique. Cela fera l'objet de cette dernière section.

3.7.1 Le cas n impair

Supposons n impair. On s'intéresse à l'espace de modules $S_{\epsilon,n}$ pour un paramètre $0<\epsilon<\frac{1}{2}$, c'est-à-dire inférieur strictement à la plus petite valeur critique. Tous les systèmes cohérents ϵ semi-stables sont stables, et s'écrivent (Γ,Θ), avec Θ un faisceau stable.

Soit $\mathfrak{C}\subset\mathbb{P}_5\times\mathbb{P}_2$ la conique universelle, c'est à dire la sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}_5\times\mathbb{P}_2$ formé des couples (C,x) composés d'une conique C et d'un point x sur C. Le schéma $\mathfrak{C}$ est muni de deux projections pr et pr_2 sur $\mathbb{P}_5$ et $\mathbb{P}_2$ respectivement. On peut donc considérer sur $\mathfrak{C}$ les faisceaux inversibles

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(i,j)=\mathrm{pr}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(i))\otimes\mathrm{pr}_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(j))$$

Soit p l'entier positif défini par la relation $2p+1=n+2$, et $A=\frac{p(p-1)}{2}$. Soit W le fibré vectoriel de rang $2p+1$ sur $\mathbb{P}_5$ défini par

$$W=\mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(0,p)).$$

Proposition 31 *Suivant les hypothèses et notations précédentes on a un isomorphisme :*

$$S_{\epsilon,n} \simeq \mathrm{Grass}(2, W)$$

Preuve: Sur $\mathrm{Grass}(2, W) \times \mathbb{P}_2$ il existe une famille universelle de systèmes cohérents $(\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(p))$, de type $(2h+nh^2, 2)$. D'après le lemme 11, le morphisme modulaire $f : \mathrm{Grass}(2, W) \to S_{\epsilon,n}$ associé est bijectif. L'ouvert U de $S_{\epsilon,n}$ des classes de systèmes cohérents de support une conique lisse est non singulier, d'après [Ha] il existe donc un ouvert V dans U tel que le morphisme induit $f : f^{-1}(V) \to V$ est lisse, donc est un isomorphisme. Le morphisme f est donc un morphisme fini birationnel de schémas et le schéma cible est normal d'après le théorème 6, c'est donc un isomorphisme. □

Posons maintenant $G = \mathrm{Grass}(2, W)$. Soit $\sigma : \mathrm{Grass}(2, W) \to \mathbb{P}_5$ la projection canonique. Notons t le faisceau inversible donné par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)$. On utilisera cette notation pour désigner également la classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}_5, \mathbf{Z})$ donnée par sa première classe de Chern. On note $\mathbf{t}$ (en gras), l'image réciproque de t sur G. Enfin on note γ_1 la première classe de Chern du fibré $\mathbf{\Gamma}$.

Proposition 32 *On a l'expression suivante de* $\mathrm{I}_{\epsilon,n}$ *:*

$$\mathrm{I}_{\epsilon,n} = \sum_{k=2n}^{2n+5} \sum_{j=0}^{k} (-1)^k \binom{2n+5}{k} \binom{k}{j} (p-1)^{2n+5-k} \begin{vmatrix} \binom{A}{j-2p+1} & \binom{A}{k-j-2p+2} \\ \binom{A}{j-2p} & \binom{A}{k-j-2p+1} \end{vmatrix}$$

Preuve: Le fibré déterminant $\mathcal{D}_{\epsilon,n}$ sur $S_{\epsilon,n}$ a pour expression

$$\mathcal{D}_{\epsilon,n} \simeq \mathbf{t}^{\otimes(p-1)} \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^*$$

En effet soit la résolution suivante sur $G \times \mathbb{P}_2$ du faisceau $\mathbf{\Theta}$:

$$0 \to \mathbf{t}^{-1} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(p-2) \to \mathcal{O}_G \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(p) \to \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(0, p)) \to 0.$$

L'expression du fibré déterminant est alors immédiate. On a donc dans $\mathrm{H}^2(G, \mathbf{Z})$, la relation $c_1(\mathcal{D}_{\epsilon,n}) = (p-1) \cdot \mathbf{t} - \gamma_1$. On en déduit :

$$\mathrm{I}_{\epsilon,n} = \sum_{k=0}^{2n+5} (-1)^k \binom{2n+5}{k} (p-1)^{2n+5-k} \int_G \mathbf{t}^{2n+5-k} \cdot \gamma_1^k$$

Il est clair que $s(W) = (1+t)^A$. D'après la section 3.4, on a $\sigma_*(\gamma_1^k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta_{0,k,j}$, avec :

$$\begin{aligned} \Delta_{0,k,j} &= \begin{vmatrix} s_{j-2p+1}(W) & s_{k-j-2p+2}(W) \\ s_{j-2p}(W) & s_{k-j-2p+1}(W) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \binom{A}{j-2p+1} & \binom{A}{k-j-2p+2} \\ \binom{A}{j-2p} & \binom{A}{k-j-2p+1} \end{vmatrix} t^{k-2n} \end{aligned}$$

La proposition est donc claire. □

On peut maintenant achever la calcul de I_n pour n impair.

3.7.2 Le cas n pair

Soit $n \geq 4$ un entier pair. Cette fois le calcul de l'intégrale en dessous de la plus petite valeur critique 1 va être un peu plus fastidieux. En effet, nous n'avons pas de description de $S_{\epsilon,n}$ aussi simple que pour n impair. Il y a également le problème de l'absence de famille universelle de systèmes cohérents.

Soit à nouveau $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}_5 \times \mathbb{P}_2$ la conique universelle de la section précédente. Soit $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} \times_{\mathbb{P}_5} \mathfrak{C}$ le schéma paramétrant les coniques marquées de deux points. Notons $\mathbf{I}_{\mathfrak{C}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}$ le faisceau d'idéaux de la diagonale du produit $\mathfrak{C} \times_{\mathbb{P}_5} \mathfrak{C}$. Soit $\mathrm{p}_1 : \mathfrak{C}' \to \mathfrak{C}$ la projection sur le premier facteur. Posons la grassmanienne relative $G = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{p}_{1*}(\mathbf{I}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}+1)))$, qui est un schéma lisse en grassmaniennes au dessus de $\mathfrak{C}$, de dimension $2n+6$. Soit $\pi : G \to \mathfrak{C}$ la projection canonique.

Soit la famille $\mathbf{\Lambda}_G = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{I}_G)$ de systèmes cohérents sur $\mathbb{P}_2$, paramétrée par la variété G, qui en chaque point de G détermine le système cohérent $(\Gamma, \mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1))$ où x est un point d'une conique singulière C, I_x est le $\mathcal{O}_C$ module idéal du point $\{x\}$, et Γ est un pinceau de sections du faisceau $\mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1)$. En d'autres termes, si l'on considère que $\mathfrak{C}'$ est naturellement plongée dans le produit $\mathfrak{C} \times \mathbb{P}_2$, le faisceau $\mathcal{I}_G$ est l'image réciproque du $\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}$ module cohérent $\mathbf{I}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}+1)$ par le morphisme $(\pi, \mathrm{Id}) : G \times \mathbb{P}_2 \to \mathfrak{C} \times \mathbb{P}_2$.

Il est clair qu'il existe un morphisme rationnel $\phi : G - - > S_{\epsilon,n}$; on s'intéresse dans ce qui suit à son domaine de définition, c'est-à-dire au fermé de G des points correspondant à des systèmes cohérents ϵ instables.

<u>**lemme**</u> **19** *Un système cohérent $(\Gamma, \mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1))$, où x est un point d'une conique C, est ϵ instable si et seulement si il s'insère dans une suite exacte*

$$0 \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2})) \to (\Gamma, \mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1)) \to (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2})) \to 0,$$

où l', l'', sont deux droites du plan.

<u>Preuve</u>: Supposons que x soit un point d'une conique C, et posons $\Lambda = (\Gamma, \mathcal{O}_C(\frac{n}{2}+1)) \to (0, \mathbf{C}(x))$, $\Lambda_x = (\Gamma, \mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1))$. Considérons la suite exacte canonique de systèmes cohérents

$$0 \to \Lambda_x \to \Lambda \to (0, \mathbf{C}(x)) \to 0,$$

où $\mathbf{C}(x)$ est le faisceau structural du point $\{x\}$. Soit $\Theta' \subset \mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1)$ un sous-module cohérent de multiplicité 1. Le système cohérent (Γ', Θ'), avec $\Gamma' = \Gamma \cap \mathrm{H}^0(\Theta')$, est sous-système cohérent de $\Lambda_x = (\Gamma, \mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1))$, et donc de $\Lambda = (\Gamma, \mathcal{O}_C(\frac{n}{2}+1))$. Le faisceau $\mathcal{O}_C(\frac{n}{2}+1)$ est stable, on a donc selon les cas

1. Si $\Gamma' = 0$, on a $p(\Theta') < p(\mathcal{O}_C(\frac{n}{2}+1))$, soit donc $p(\Theta') \leq p(\mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1) < p(\mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1)+\epsilon$, où $\epsilon > 0$;
2. si $\dim(\Gamma') = 1$, la condition de ϵ semi-stabilité se réduit à $p(\Theta') \leq p(\mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1)$ qui est vérifié ;
3. Si $\dim(\Gamma') = 2$, le système cohérent (Γ', Θ') est ϵ destabilisant pour Λ_x si et seulement si on a $p(\Theta') = p(\mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1))$, en effet si $p(\Theta') \leq p(\mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1)) - 1$, on a nécesairement $p(\Theta') < p(\mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1)) - \epsilon$ pour $\epsilon < \frac{1}{2}$.

Il en ressort que le système cohérent $(\Gamma, \mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1))$ est ϵ instable si et seulement si il admet un sous-système cohérent de la forme $(\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}))$. Cela justifie l'énoncé du lemme. $\square$

L'extension du lemme est scindée lorsque $l' \neq l''$, et $x = l' \cap l''$. Si la conique est double égale à l^2, toute classe $[\omega]$ d'une extension non scindée dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l))$ définit le faisceau d'idéaux d'un point dans la conique, qui est le point où s'annule la classe de la section de $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(1)) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l)$ qui correspond à $[\omega]$.
De manière générale le point x dans l'énoncé 19 appartient à la droite l'', et les deux systèmes cohérents $(\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}))$, $(0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}))$ forment la filtration de Harder-Narasimhan pour le paramètre ϵ. Notons $\Sigma_{-\epsilon}$ le sous-schéma fermé de G, des points ϵ instables, qu'on munit de sa structure réduite. On dispose donc d'un morphisme naturel $\psi : \Sigma_{-\epsilon} \to G_0 \times \mathrm{D}$, avec $G_0 = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_\mathrm{D}(\frac{n}{2})))$, et où la seconde composante de ψ associe à un système cohérent de $\Sigma_{-\epsilon}$ le point sur l'' dont on considère l'idéal.

Il est presque clair que ψ est bijectif. On va montrer que $\Sigma_{-\epsilon}$ est en fait isomorphe à $G_0 \times \mathrm{D}$. Commençons par établir la proposition suivante :

Proposition 33 *Soit p un point de G, le morphisme de déformation infinitésimal de Kodaira-Spencer $\kappa : \mathrm{T}_p G \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{\Lambda}_G(p), \mathbf{\Lambda}_G(p))$ est surjectif.*

Preuve: Supposons que $\pi(p) = (C, x)$, où $(C, x) \in \mathfrak{C}$. Posons pour simplifier $\Lambda = \mathbf{\Lambda}_G(p)$. Soit toujours I_x le $\mathcal{O}_C-$module idéal du point x. D'après les rappels du chapitre 1 l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda)$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{H}^0(\Lambda)/\Gamma) \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda) \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_x) \to 0.$$

D'autre part, on a la suite exacte d'espaces tangents associée à une fibration

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{H}^0(\Lambda)/\Gamma) \to \mathrm{T}_p G \to \mathrm{T}_{(C,x)}\mathfrak{C} \to 0,$$

le terme de gauche correspondant à l'espace tangent de la fibre au dessus de (C, x). Le morphisme κ s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{H}^0(\Lambda)/\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{T}_p G \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"] & \mathrm{T}_{(C,x)}\mathfrak{C} \arrow[d, "k"] \\
\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{H}^0(\Lambda)/\Gamma) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\Lambda, \Lambda) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_x)
\end{tikzcd}$$

On est amené à prouver le lemme :

lemme 20 *Dans le diagramme précédent le morphisme $k : \mathrm{T}_{(C,x)}\mathfrak{C} \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_x)$ est surjectif.*

Preuve: La variété d'incidence $\mathfrak{C}$ est une hypersurface de $\mathbb{P}_5 \times \mathbb{P}_2$, qui est le schéma des zéros d'une section du fibré inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)$, on a donc une suite exacte de fibrés tangents sur $\mathfrak{C}$:

$$0 \to \mathrm{T}\mathfrak{C} \to \mathrm{T}(\mathbb{P}_5 \times \mathbb{P}_2)|_{\mathfrak{C}} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(1, 2) \to 0.$$

Considérons le complexe formé par le faisceau I_x placé en degré 0, qui est quasi-isomorphe au complexe à deux termes placés en degré 0 et 1 :

$$R^\cdot = 0 \to \mathcal{O}_C \to \mathbb{C}(x) \to 0$$

où $\mathbb{C}(x)$ est le faisceau structural du point x. On a donc (cf [GeM]) une suite spectrale d'aboutissement $\mathrm{Ext}^n(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_x)$ en degré n :

$$E_1^{p,q} = \sum_i \mathrm{Ext}^q(R^i, R^{i+p}) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_x)$$

On a donc

$$\begin{array}{rcc} E_2^{-1,2} & = & \mathrm{H}^0[\, 0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C, \mathbb{C}(x))^* \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}(x), \mathbb{C}(x))^* \,] \\ E_2^{0,1} & = & \mathrm{H}^0[\, \mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}(x), \mathcal{O}_C) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}(x), \mathbb{C}(x)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{C}(x)) \,] \\ E_2^{1,0} & = & \mathrm{H}^0[\, \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}(x), \mathbb{C}(x)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_C, \mathbb{C}(x)) \to 0 \,] \end{array}$$

où l'on note H^0 le foncteur consistant à prendre la cohomologie en degré 0 d'un complexe. On voit tout de suite que $E_2^{-1,2} = E_2^{1,0} = 0$. Il est clair d'autre part que cette suite spectrale dégénère au niveau E_2. On remarque également que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathbb{C}(x)) \simeq \mathbb{C}$, et que c'est précisément la fibre du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(1,2)$ au point (C, x). On en déduit donc que l'on a une surjection naturelle $T_{(C,x)}\mathfrak{C} \to E_2^{0,1}$. Comme on a $E_2^{0,1} \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathrm{I}_x, \mathrm{I}_x)$, le lemme s'ensuit. □

Proposition 34 *Le fermé $\Sigma_{-\epsilon}$ est lisse et équidimensionnel de dimension $n+3$.*

Preuve: Plaçons nous toujours en un point p de $\Sigma_{-\epsilon}$, et conservons les notations de la proposition précédente. Montrons que

$$\mathrm{Ext}^2_+(\Lambda, \Lambda) = 0, \;\; \mathrm{Ext}^2_-(\Lambda, \Lambda) = 0$$

les groupes Ext filtrés étant relatifs à la filtration de Λ dont les gradués sont donnés par $\Lambda'' = (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}))$ et $\Lambda' = (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}))$. Or on a clairement $\mathrm{Ext}^2(\Lambda'', \Lambda') = \mathrm{Ext}^2(\Lambda', \Lambda'') = 0$, ainsi que $\mathrm{Ext}^2(\Lambda'', \Lambda'') = \mathrm{Ext}^2(\Lambda', \Lambda') = 0$. D'après les suites spectrales d'aboutissement les groupes Ext filtrés, on obtient le résultat. On sait dès lors que $\Sigma_{-\epsilon}$ est lisse en p, et que son espace normal à G en un de ses points x est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda')$ (le théorème du chapitre 1 s'applique car la famille $\mathbf{\Lambda}_G$ est complète). C'est un espace vectoriel de dimension toujours égale à $n+3$ d'après un calcul identique à celui de la proposition 9. L'énoncé s'en déduit car $\dim G = 2n+6$. □

On rappelle qu'on note toujours $G_0 = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}(\frac{n}{2})))$ la grassmanienne relative. On note également $\mathbf{\Gamma}_0$ le sous-fibré universel de rang 2 sur G_0. Notons enfin Δ l'image réciproque de la diagonale de $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$ dans $\mathrm{D} \times \mathbb{P}_2$ par la projection naturelle sur les deux derniers facteurs. On note encore Δ l'image réciproque de cette variété dans $G_0 \times \mathrm{D} \times \mathbb{P}_2$. Cela ne devrait pas générer de confusion dans la suite. Notons $\mathbf{h}$ l'image réciproque du fibré inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ sur le facteur D du produit précédent.

Proposition 35 *Le morphisme $\psi : \Sigma_{-\epsilon} \to G_0 \times \mathrm{D}$ est un isomorphisme.*

Preuve: Sur $G_0 \times \mathrm{D} \times \mathbb{P}_2$, notons D_i, pour $i = 1, 2$, l'image réciproque de la variété d'incidence relative au i ème facteur $\mathbb{P}_2^*$ dans $G_0 \times \mathrm{D}$. On a alors une suite exacte universelle sur $G_0 \times \mathrm{D} \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}(\frac{n}{2}) \boxtimes \mathbf{h}_2^{-1} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}+1) \to \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(\frac{n}{2}+1) \to 0$$

Cette suite exacte paramètre en un point de $G_0 \times \mathrm{D}$, au dessus du couple de droites $(l^{'}, l^{''})$, toutes les extensions non scindées $0 \to \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}) \to \mathcal{O}_C(\frac{n}{2}+1) \to \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}+1) \to 0$. Alors C est la conique dégénérée en $l^{'}, l^{''}$. Il s'agit maintenant d'introduire le point sur $l^{''}$, et de considérer cette situation "en famille". C'est le but du lemme suivant.

lemme 21 *Soit* $\mathrm{D}^{'}$ *le fermé de* $\mathrm{D} \times \mathbb{P}_2$ *image réciproque de la variété d'incidence relative au premier et troisième facteur par la projection naturelle. On a l'isomorphisme de faisceaux sur* D *:*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_{\mathrm{D}'}(-1)) \simeq \mathcal{O}(-1,1)$$

où $\mathrm{pr} : \mathrm{D} \times \mathbb{P}_2 \to \mathrm{D}$ *est la projection sur le premier facteur.*

Preuve: On utilise encore la résolution de la diagonale Δ sur $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}(-1) \boxtimes Q^* \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

Le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_{\mathrm{D}'}(-1))$ est donc le noyau du morphisme de faisceaux sur D

$$\mathbf{h} \otimes \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{\mathrm{D}'}(-1) \otimes Q) \to \mathbf{h}^{\otimes 2}.$$

Cette flèche est la flèche naturelle $\mathcal{O}(-1,1) \to \mathcal{O}(0,2)$ qui est nulle sur D. D'où le lemme. $\square$

On a donc sur D $\times \mathbb{P}_2$ une suite exacte universelle

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(1) \otimes \mathbf{h}^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{D}'}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathrm{D}'} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0.$$

On en déduit une suite exacte sur $G_0 \times \mathrm{D} \times \mathbb{P}_2$ de familles de systèmes cohérents, donnée par

$$0 \to (\mathbf{\Gamma}_0 \boxtimes \mathbf{h}_2^{-1}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}(\frac{n}{2}) \boxtimes \mathbf{h}_2^{-1}) \to \mathbf{\Lambda}_0 \to \mathbf{h}_2 \otimes \mathbf{h}^{-1} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(\frac{n}{2}) \to 0 \quad (\mathbf{F})$$

La famille $\mathbf{\Lambda}_0$ est plate et paramètre des systèmes cohérents ϵ instables, s'écrivant $(\Gamma, \mathrm{I}_x(\frac{n}{2}+1))$, où x est un point d'une conique dégénérée, et I_x est l'idéal de ce point dans la conique. Il existe donc un morphisme $\sigma_0 : G_0 \times \mathrm{D} \to G$ d'image les points de $\Sigma_{-\epsilon}$. En fait σ_0 se factorise par l'inclusion $\Sigma_{-\epsilon} \subset G$, il est clair dès lors que ψ est un isomorphisme de réciproque σ_0. $\square$

Remarque 5 *L'énoncé précédent prouve également la lissité de* $\Sigma_{-\epsilon}$*. Cependant la proposition qui établit la complétude de la famille* $\mathbf{\Lambda}_G|_{\Sigma_{-\epsilon}}$ *permet de plus la description de l'espace normal à* $\Sigma_{-\epsilon}$ *en un point.*

Sur $G \times \mathbb{P}_2$, on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to (\mathbf{\Gamma}, \mathrm{I}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}+1)) \to (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(\frac{n}{2}+1)) \to (0, \mathcal{O}_{\mathbf{\Delta}}(\frac{n}{2}+1)) \to 0$$

où la famille $(\mathbf{\Gamma}, \mathrm{I}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}+1))$ n'est autre que la famille universelle $\mathbf{\Lambda}_G$.

Considérons à présent l'éclatement $\phi : \widetilde{G} \to G$ le long de la sous-variété lisse $\Sigma_{-\epsilon}$. On note E_0 le diviseur exceptionnel sur $\widetilde{G}$. On pose encore $\mathbf{\Lambda}^{'} = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_1}(\frac{n}{2}))$ et $\mathbf{\Lambda}^{''} = (0, \mathcal{O}_{\mathrm{D}_2}(\frac{n}{2}))$. On a lemme suivant :

lemme 22 *Sur* $\widetilde{G} \times \mathbb{P}_2$*, on a une famille universelle* $\mathbf{\Lambda}_\epsilon$*, plate sur* $\widetilde{G}$*, de systèmes cohérents semi stables de type* $(2h + nh^2, 2)$*.*

Preuve: Sur $\widetilde{G} \times \mathbb{P}_2$, on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to \mathbf{\Lambda}_\epsilon \to \phi^*(\mathbf{\Lambda}_G) \to \phi^*(\mathbf{\Lambda}^{''}) \to 0.$$

Un raisonnement déjà effectué montre qu'en un point x du diviseur exceptionnel de $\widetilde{G}$, le système cohérent $\mathbf{\Lambda}_\epsilon(x)$ s'insère dans une extension du type

$$0 \to (0, \mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2})) \to \mathbf{\Lambda}_\epsilon(x) \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2})) \to 0. \quad (*)$$

Cette extension est nécessairement non scindée et elle représente le point de l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathbf{\Lambda}^{'}(x), \mathbf{\Lambda}^{''}(x)))$, qui détermine le point x sur le diviseur exceptionnel d'après la description de l'espace normal à $\Sigma_{-\epsilon}$ en un de ses points. Une extension non scindée comme ci-dessus est nécessairement ϵ semi-stable. Il est clair d'autre part que la famille $\mathbf{\Lambda}_\epsilon$ est plate au dessus de $\widetilde{G}$. $\square$

On en déduit un morphisme modulaire $\psi : \widetilde{G} \to S_{\epsilon,n}$. Notons $\Sigma_\epsilon^{'}$ le fermé de $S_{\epsilon,n}$ des systèmes cohérents ϵ semi-stables s'écrivant comme extension non scindée du type $(*)$. Soit le fibré en espaces projectifs $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\underline{\mathrm{Ext}}^1_{pr}(\mathbf{\Lambda}^{'}, \mathbf{\Lambda}^{''}))$ sur $\Sigma_0 = G_0 \times \mathbb{P}_2^*$. Il existe un morphisme modulaire $\varphi : \mathbf{P} \to \Sigma_\epsilon^{'}$ qui est un isomorphisme au dessus de l'ouvert des points ϵ stables de support une conique réduite. En revanche le critère de plongement habituel ne s'applique pas au dessus du fermé des classes de systèmes cohérents de support une droite double, ou de classe de $S-$équivalence strictement semi-stable (voir à ce propos le chapitre suivant).

D'après la description de l'espace normal $\mathrm{N}_{\Sigma_{-\epsilon}/G}$ en un point de $\Sigma_{-\epsilon}$, on en déduit que l'on a le diagramme cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} E_0 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbf{P} \arrow[d, "r"] \\ \Sigma_{-\epsilon} \arrow[r, "\mathrm{pr}"] & \Sigma_0 \end{tikzcd}$$

On rappelle que l'on note $\Lambda_G = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{I}_G)$ la famille universelle de systèmes cohérents sur $G \times \mathbb{P}_2$. Posons le fibré inversible sur G égal à

$$\mathcal{D}_G = \det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{I}_G \cdot h)) \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^*$$

Avec les notations précédentes,on a l'isomorphisme

$$\mathcal{D}_G \simeq \det(\mathbf{\Gamma})^* \otimes \det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(\frac{n}{2}+1) \cdot h)) \otimes \det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{O}_{\mathbf{\Delta}}(\frac{n}{2}+1) \cdot h))^{-1} \quad (1)$$

Soit la résolution du faisceau $\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}$ par des faisceaux localement libres sur $G \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(-1,0) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2) \to \mathcal{O}_{G \times \mathbb{P}_2} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{C}'} \to 0$$

où on a utilisé la notation $\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(-1,0)$ pour désigner l'image réciproque sur G de la restriction du fibré $\mathcal{O}(-1,0)$ à la sous-variété $\mathfrak{C} \subset \mathbb{P}_5 \times \mathbb{P}_2$. On en tire l'isomorphisme de fibrés inversibles sur G :

$$\det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(\frac{n}{2}+1) \cdot h)) \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(1,0)^{\otimes(\frac{n}{2})}.$$

On déduit aussi de la résolution la diagonale $\mathbf{\Delta}$ que

$$\det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{O}_{\mathbf{\Delta}}(\frac{n}{2}+1) \cdot h)) \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(0,1))$$

On a donc finalement, compte tenu de (1)

$$\mathcal{D}_G \simeq \det(\mathbf{\Gamma})^* \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}, -1) \quad (2)$$

Par fonctorialité de la construction du fibré déterminant, on en tire $\mathcal{D}_G|_{\Sigma_{-\epsilon}} \simeq \det(\mathbf{\Gamma})^*|_{\Sigma_{-\epsilon}} \otimes \mathbf{h_1}^{\otimes\frac{n}{2}} \otimes \mathbf{h_2}^{\otimes\frac{n}{2}} \otimes \mathbf{h}^{-1}$.

Il est clair également que si $\mathbf{\Lambda}_0$ est la famille plate sur $G_0 \times \mathrm{D}$ de systèmes cohérents ϵ instables définie par la suite exacte $(\mathbf{F})$ ci-avant, on a un isomorphisme de familles $\mathbf{\Lambda}|_{\Sigma_{-\epsilon}} \simeq \mathbf{\Lambda}_0$.

D'après la suite exacte on a

$$\mathcal{D}_G|_{\Sigma_0^-} \simeq \det(\mathbf{\Gamma}_0)^* \otimes \mathbf{h_1}^{\otimes\frac{n}{2}} \otimes \mathbf{h_2}^{\otimes\frac{n}{2}+2} \otimes \mathbf{h}^{-1}$$

Ecrivons $\mathbf{\Lambda}_\epsilon = (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta}_\epsilon)$, où $\mathbf{\Gamma}$ est l'image réciproque sur l'éclaté $\widetilde{G}$ du fibré canonique de rang 2 sur G. Par la propriété universelle du fibré déterminant, on a

$$\psi^*(\mathcal{D}_{\epsilon,n}) \simeq \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta}_\epsilon \cdot h)) \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^*.$$

La démonstration de la formule de saut aux valeurs critiques strictement positives pour le fibré déterminant est encore valable. On a donc

$$\phi^*(\mathcal{D}_G) \simeq \psi^*(\mathcal{D}_{\epsilon,n}) \otimes \mathcal{O}(E_0)$$

On pose dans la suite $c_{1,G} = c_1(\mathcal{D}_G) \in \mathrm{H}^2(G, \mathbf{Z})$. On peut considérer l'élément de $K(\mathbb{P}_2)$ noté h, qui est la classe d'une droite, comme un élément de $K(\mathfrak{C})$, donc de $K(G)$. Soit donc le nombre d'intersection

$$\mathrm{I}_{G,n} = \int_G c_{1,G}^{2n+5} \cdot h$$

Le morphisme $\phi : \widetilde{G} \to G$ est birationnel, on a donc aussi $\mathrm{I}_{G,n} = \int_{\widetilde{G}} \phi^*(c_{1,G})^{2n+5} \cdot h$. D'autre part notons que

$$2 \int_{S_{\epsilon,n}} c_1(\mathcal{D}_{\epsilon,n})^{2n+5} = \int_{\widetilde{G}} \psi^*(c_1(\mathcal{D}_{\epsilon,n}))^{2n+5} \cdot h$$

Brièvement, cela provient du fait qu'une droite coupe une conique en deux points. Pour calculer $\mathrm{I}_{\epsilon,n}$, il nous suffira donc de calculer $\mathrm{I}_{G,n}$ et la différence $\Delta_G = \mathrm{I}_{G,n} - \int_{\widetilde{G}} \psi^*(c_1(\mathcal{D}_{\epsilon,n}))^{2n+5} \cdot h$.

D'après les sections précédentes, on a

$$\psi^*(\mathcal{D}_{\epsilon,n})|_{E_0} = \mathcal{L}' \otimes h_1^{\frac{n}{2}} \otimes h_2^{\frac{n}{2}} \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^\vee,$$

Dans la formule précédente $\mathcal{L}'$ est l'image réciproque sur E_0 du fibré inversible canonique sur $\mathbf{P}$ relativement ample, et $\mathbf{\Gamma}$ est l'image réciproque sur E_0 du fibré canonique de rang 2 sur Σ_0. On a également l'identité $c_{1,G}|_{\Sigma_{-\epsilon}} = -c_1(\mathbf{\Gamma}) + \frac{n}{2}h_1 + (\frac{n}{2}+2)h_2 - h$. Posons encore $v = -c_1(\mathbf{\Gamma}) + \frac{n}{2}h_1 + \frac{n}{2}h_2$. On a comme dans la troisième section :

$$\begin{aligned} \Delta_G &= \textstyle\sum_{i=0}^{2n+4} \sum_{k=0}^{i} \binom{2n+5}{i+1} \int_{E_0} (2h_2 - h)^{i-k} \cdot v^{2n+4-i} \cdot l'^k \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{2n+4} \sum_{k=0}^{i} \binom{2n+5}{i+1} \int_{\Sigma_0} v^{2n+4-i} \cdot \mathrm{pr}_*((2h_2 - h)^{i-k}) \cdot r_*(l'^k) \end{aligned}$$

où pr : $\Sigma_{-\epsilon} \to \Sigma_0$ est la projection naturelle et $r : \mathbf{P} \to \Sigma_0$ est le morphisme structural. Le terme $r_*(l'^k)$ est égal à la partie de degré $k - n - 2$ de

$$s(\varphi^*(\mathcal{D}_{\epsilon,n})) = \frac{(1 + h_1 - h_2)\,(1 - \gamma_1 - 2h_2 + \gamma_2 + h_2^2 + \gamma_1 h_2)^{\frac{n(n+2)}{8}}}{(1 + h_1)^3\,(1 - \gamma_1 + \gamma_2)^{\frac{(n+2)(n+4)}{8}}}.$$

On utilise ensuite les relations sur la variété d'incidence $\int_{\mathrm{D}} h_2^2 \cdot h = \int_{\mathrm{D}} h_2 \cdot h^2 = 1$.

Dans la suite on pose $A = \binom{\frac{n}{2}+1}{2}$. On rappelle que $\pi : G \to \mathfrak{C}$ est la projection canonique, et $\mathbf{t}$ est l'image réciproque du fibré inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_5}(1)$ par la projection pr : $\mathfrak{C} \to \mathbf{P}_5$.

Proposition 36 *On a l'expression :*

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{G,n} \quad = \quad & \textstyle\sum_{m=0}^{2n+5} \sum_{j=0}^{m} (-1)^m \binom{2n+5}{m} \cdot \binom{m}{j} \cdot (\frac{n}{2})^{2n+4-m} \cdot (\frac{n}{2} \begin{vmatrix} \binom{A}{j-n-2} & \binom{A}{j-n} \\ \binom{A}{m-j-n-1} & \binom{A}{m-j-n+1} \end{vmatrix} + \\ & ((-1)^m(2n+5-m) - n) \begin{vmatrix} \binom{A}{j-n-1} & \binom{A}{j-n} \\ \binom{A}{m-j-n} & \binom{A}{m-j-n+1} \end{vmatrix}) \end{aligned}$$

Preuve: De la relation $c_{1,G} = -c_1(\mathbf{\Gamma}) + c_1(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}, -1))$ dans $\mathrm{H}^2(G, \mathbb{Z})$ on tire :

$$\mathrm{I}_{G,n} = \sum_{m=0}^{2n+5} (-1)^m \binom{2n+5}{m} \int_{\mathfrak{C}} \pi_*(c_1(\mathbf{\Gamma})^m) \cdot c_1(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}, -1))^{2n+5-m} \cdot h$$

Des paragraphes précédents on tire

$$\pi_*(c_1(\mathbf{\Gamma})^m) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Delta_{0,m,j}$$

avec $\Delta_{0,m,j} = s_{j-n}(W) \cdot s_{m-j-n}(W) - s_{j-n-1}(W) \cdot s_{m-j-n+1}(W)$, où W est le fibré vectoriel $\mathrm{p}_{1*}(\mathrm{I}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}+1))$ sur $\mathfrak{C}$ de rang $n+2$ ($\mathrm{p}_1 : \mathfrak{C}' \to \mathfrak{C}$ est la projection sur le premier facteur, cf début section). De la suite exacte sur $\mathfrak{C}'$:

$$0 \to \mathrm{I}_{\mathfrak{C}}(\frac{n}{2}+1) \to \mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(\frac{n}{2}+1) \to \mathcal{O}_{\mathbf{\Delta}}(\frac{n}{2}+1) \to 0,$$

on déduit l'expression de la classe de Segré totale de W :

$$\begin{aligned} s(W) \quad &= \quad s(\mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(\tfrac{n}{2}+1)) \cdot c(\mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathbf{\Delta}}(\tfrac{n}{2}+1))^*) \\ &= \quad c(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}}(1,0))^A \cdot \tfrac{(1+h)^3}{(1+h+h^2)^6} \\ &= \quad (1+t)^A(1-3h) \end{aligned}$$

Pour un entier l donné, on a donc $s_l(W) = \binom{A}{l}\, t^l - 3\binom{A}{l-1}\, t^{l-1} \cdot h$. D'autre part, on a les valeurs suivantes des intégrales sur $\mathfrak{C}$, $\int_{\mathfrak{C}} t^5 \cdot h = 2$ et $\int_{\mathfrak{C}} t^4 \cdot h^2 = 1$. Ces remarques combinées avec l'expression ci-dessus de $\mathrm{I}_{G,n}$ conduit à la formule de l'énoncé de la proposition. □

Des calculs explicites pour $n = 4, 5$ permettent d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 8 *1. Le degré de la sous-variété des quartiques planes de Lüroth est le nombre de Donaldson* q_{13} *de* M_4 *(cf Introduction) ; le calcul de l'intégrale* I_G *donne* -6006*, celui du saut en* 0 *donne* 6558*, et le saut à la valeur critique* 1 *est* -222*,*

2. pour $n = 5$*, le degré de la sous-variété des quintiques de Poncelet est* 6867 *; il y a deux valeurs critiques* $\alpha = 3/2, 1/2$ *; l'intégrale* I_ϵ *vaut* -5148*, le premier saut en* $1/2$ *vaut* 13347*, le second* -1332*.*

Chapitre 4

Systèmes linéaires associés à des diviseurs de l'espace de modules M_4

4.1 Notations

1. On note $d \subset \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2$ la variété d'incidence droite-points au lieu de D, ceci afin de ne pas confondre avec les hypersurfaces D_1 et D_2 que nous rencontrerons plus loin. L'image réciproque sur d, ou plus généralement l'image réciproque sur tout schéma de la forme $X \times \mathbf{P}_2$, du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$ par la projection sur le second facteur, est notée $\mathbf{h}$ (en gras). Cette notation ne devrait ainsi pas prêter à confusion avec le h précédent.

   On note d_i, pour $i = (1,2)$, le fermé de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2$ égal à la variété d'incidence relative au i ème facteur $\mathbf{P}_2^*$. On note également h_i l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$ sur le i ème facteur de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$.

   Le fermé (réduit) noté $\Delta \subseteq \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2$ désigne la "diagonale" du produit, déterminé par l'ensemble des couples (x, x) avec $x \in \mathbf{P}_2$.

   Le fibré Q sur $\mathbf{P}_2$ est le fibré tautologique quotient de rang 2, qui s'insère dans une suite exacte
   $$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O}^3 \to Q \to 0$$
   Dans ce qui précède, il se peut qu'on ait $\mathbf{P}_2^*$ au lieu de $\mathbf{P}_2$.

2. Lorsque $Z \subset X$ est un sous-schéma fermé d'un schéma X, on note I_Z le $\mathcal{O}_X-$module idéal de Z. Si $f : Y \to X$ est un morphisme de schémas, et F un $\mathcal{O}_X-$module cohérent, on note parfois F le $\mathcal{O}_Y-$module $f^*(F)$ s'il n'y a pas d'ambiguité.

   Lorsque E est un fibré vectoriel sur un schéma Y, on note $\mathbf{P}(E) \to Y$ le fibré projectif associé paramétrant les droites vectorielles des fibres de E, i.e si $\mathcal{E}$ est le $\mathcal{O}_Y-$module localement libre des sections de E, on a $\mathbf{P}(E) = \mathrm{Proj}(S^*\mathcal{E}^\vee)$ (cf [Ha] II,7).

3. On identifie le fibré en grassmanniennes $\mathrm{Grass}(2, \mathrm{pr}_* \, \mathcal{O}_d(2)) \to \mathbf{P}_2^*$ avec le fibré en plans projectifs $\mathbf{P}(\mathrm{S}^2 \, Q^*) \to \mathbf{P}_2^*$. Le fibré $\mathbf{\Gamma}$ canonique de rang 2 sur la grassmanienne est alors isomorphe au dual du conoyau de l'injection $\mathcal{O}(-1) \hookrightarrow \mathrm{S}^2 \, Q^*$.

4. On note $\mathbf{\Lambda}_1'$ et $\mathbf{\Lambda}_1''$ les familles (plates) de systèmes cohérents paramétrés par $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ données par $\mathbf{\Lambda}_1' = (0, \mathcal{O}_{d_1}(3))$, $\mathbf{\Lambda}_1'' = (\mathcal{O} \boxtimes Q, \mathcal{O}_{d_2}(1))$.
   On note également $\mathbf{\Lambda}_2'$ et $\mathbf{\Lambda}_2''$ les familles paramétrées par $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}(\mathrm{S}^2\, Q^*)$ de systèmes cohérents données par $\mathbf{\Lambda}_2' = (0, \mathcal{O}_{d_1}(2))$, $\mathbf{\Lambda}_2'' = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{d_2}(2))$.
5. $\mathbf{H}$ désigne l'hypersurface des quartiques de Lüroth ; c'est une hypersurface de l'espace projectif paramétrant les quartiques planes.

On rappelle que par variété on entend un schéma de type fini réduit sur un corps. Enfin que tous les schémas que l'on considère sont de type fini sur $\mathbf{C}$.

On rappelle la notion d'image directe d'un diviseur de Weil par un morphisme propre birationnel de schémas.

Définition 9 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre birationnel de schémas et $D \subset X$ une hypersurface intègre de X non contenue dans le lieu exceptionnel E de f. On appelle image directe de D par f, et on note $f_*(D)$ l'hypersurface intègre adhérence de $f(D \setminus E)$ dans Y.*

Il est montré dans [F], proposition 1.4, que cette application f_* passe au quotient par la relation d'équivalence rationnelle entre diviseurs de Weil. Si en particulier D est un diviseur de Cartier, on note $f_*(D)$ l'image directe de la classe de D en tant que diviseur de Weil.

4.2 Les espaces de modules M_4 et S_4

On commence par rappeler brièvement la construction de l'espace de modules M_n, ce qui sert de passage de référence pour tout le reste du chapitre.

Soit k un entier suffisamment grand tel que pour tout faisceau semi-stable F de classe de Grothendieck $c = 2 - nh^2$, le faisceau $F(k)$ soit engendré par ses sections, avec $\mathrm{H}^i(F(k)) = 0$ pour $i > 0$. On choisit alors un espace vectoriel H de dimension $\chi(F(k))$, et on considère le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}^c(\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}(-k))$ qui paramètre les quotients de $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-k)$ de classe de Grothendieck c. Ce schéma des quotients est muni d'une polarisation définie par le plongement dans une grassmanienne, et le groupe linéaire GL(H) opère sur lui.

On sait alors (cf rappels des chapitres 0, 1 ou voir [LeP]) que l'ouvert $\mathcal{V}$ des points semi-stables pour cette action coïncide avec les faisceaux semi-stables F tels que $\mathrm{H} \simeq \mathrm{H}^0(F(k))$. L'espace de modules M_n est le bon quotient obtenu.

Dans toute la suite on fait $n = 4$. Il ne nous intéresse pas ici de déterminer un entier k explicite, nous voulons juste pouvoir faire référence dans la suite à l'ouvert $\mathcal{V}$ du schéma de Hilbert ci-dessus qui est utile pour certaines preuves.

4.2.1 Présentation et propriétés générales

On note dans cette section h la classe d'une section hyperplane de $\mathbf{P}_2$. Nous nous intéressons ici à des systèmes cohérents de type $(c = 2h + 4h^2, k = 2)$, autrement dit des couples (Γ, Θ) avec Θ de multiplicité 2 et de caractéristique d'Euler 6 (de support une conique), et $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\Theta)$ un pinceau de sections, soumis à des conditions de semi stabilité selon un paramètre α.

Comme exposé au chapitre 1, à chaque paramètre α est associé un espace de modules grossier $S_{\alpha,c,2}$; pour $\alpha > 1$, ces espaces de modules sont isomorphes à une même variété notée

S_4, la valeur 1 est critique (c'est à dire qu'il existe des systèmes cohérents 1 semi-stables mais non α semi-stables pour $\alpha > 1$), et pour $0 < \alpha < 1$, les schémas $S_{\alpha,c,2}$ sont isomorphes à une même variété qu'on note S_ϵ.

On dispose de morphismes support $\sigma : S_4 \to \mathcal{C}_2 = \mathbf{P}_5$, et idem pour S_ϵ, qui à la classe d'un système cohérent associe sa conique support.

Dans le premier chapitre, nous avons vu qu'il existait un morphisme $\pi : S_4 \to P_4$ surjectif sur la sous-variété P_4 de M_4 des classes de faisceaux semi-stables de Poncelet. On a ici $P_4 = M_4$ car ces deux variétés sont intègres de dimension 13.

L'image $\mathbf{H} = \beta(M_4)$ est une hypersurface de l'espace des quartiques $\mathbf{P}_{14}$, appellée hypersurface des quartiques de Lüroth. Ces courbes planes sont des courbes de Poncelet (cf chapitre 1). Nous retrouvons plus loin que β est génériquement injectif (cf [LePT]).

Il est connu (cf [LeP2]) que π est l'éclatement de M_4 le long de la sous-variété Σ des faisceaux spéciaux (i.e les F tels que $F(1)$ ait trois sections linéairement indépendantes, ou encore tels que F possède une droite de saut d'ordre 3, cf [LePT] proposition 4.4).

Remarquons que Σ est incluse dans le lieu des points lisses de M_4 : en effet tout faisceau spécial est stable. Nous en déduisons que S_4 est une variété localement factorielle, et ses points singuliers sont les classes de systèmes cohérents strictement semi stables. Il est en effet facile de vérifier que (Γ, Θ) strictement semi-stable si et seulement si le faisceau F donné par l'extension canonique

$$0 \to \Gamma^* \otimes \mathcal{O} \to F(1) \to \check{\Theta} \to 0$$

est strictement semi-stable.

De plus, on a un morphisme canonique $\pi_- : S_4 \to S_\epsilon$ qui est l'éclatement de S_ϵ le long du fermé des points α instables, pour $\alpha > 1$ qu'on note Σ_ϵ dans la suite. Ce fermé est de dimension 4 (voir section 4.2.2).

Proposition 7 *Un point de S_ϵ ou S_4 correspondant à la classe d'un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ stable est lisse. De plus ces deux espaces de modules sont à singularités rationnelles.*

Preuve: On a prouvé au chapitre 1 que si (Γ, Θ) était un système cohérent α semi-stable, on a $\mathrm{H}^1(\Theta) = 0$ et Θ est engendré par ses sections. On sait donc que S_ϵ et S_4 s'obtiennent respectivement comme quotients de deux ouverts $\mathcal{V}_\epsilon$ et $\mathcal{V}_{1+}$ du produit des deux schémas suivants :

1. un schéma de Hilbert des quotients $\mathrm{Hilb}^c(\mathrm{H} \otimes \mathcal{O})$ (qui paramètre les quotients du faisceau $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}$ de classe $c = 2h + 4h^2$, avec dim(H)= 6,

2. une grassmanienne Grass(2,H) qui paramètre les sous-espaces de dimension 2 de H.

En effet le groupe linéaire GL(H) agit sur les deux facteurs de ce produit, et les schéma S_ϵ et S_4 s'obtiennent respectivement comme quotients de l'ouvert $\mathcal{V}_\epsilon$ des points ϵ semi-stables, respectivement de l'ouvert $\mathcal{V}_{1+}$ des points semi-stables. Or soit (Γ, Θ) un système cohérent α semi-stable, avec $0 < \alpha = \epsilon < 1$, ou $\alpha > 1$, et supposons que l'on ait un quotient de $\mathrm{H}\otimes\mathcal{O}$:

$$0 \to K \to \mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to \Theta \to 0$$

L'étude différentielle des schémas de Hilbert (cf [LeP] théorème 8.2.1) montre que si $\mathrm{Ext}^1(K,F) = 0$, le schéma $\mathrm{Hilb}^c(\mathrm{H}\otimes\mathcal{O})$ est lisse au point ainsi défini. Or comme $\mathrm{H}^1(\Theta)=0$, ceci équivaut à $\mathrm{Ext}^2(\Theta,\Theta)=0 \quad (*)$.

La condition $(*)$ est encore équivalente par dualité de Serre à la condition $\mathrm{Hom}(\Theta,\Theta(-3)) = 0$, qui est toujours vérifiée. En effet, lorsque Θ est un faisceau semi-stable, c'est une conséquence directe de la propriété de semi-stabilité, et si Θ est instable, il admet une filtration de Harder-Narasimhan dont le premier terme est de la forme $\mathcal{O}_{l'}(3)$; en effet on aurait sinon une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{l'}(4) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l''} \to 0$$

et par conséquent, le sous-espace vectoriel $\Gamma\cap\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(4))$ contiendrait une droite vectorielle λ ; le sous-système cohérent $(\lambda,\mathcal{O}_{l'}(4))$ serait destabilisant pour (Γ,Θ), absurde. Donc Θ s'insère dans ce cas dans une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{l'}(3) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l''}(1) \to 0$$

et la condition (1) est alors claire.

Donc les deux ouverts dont on prend le quotient sont lisses. Le groupe $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ opérant librement sur l'ouvert des points stables, on en déduit la première assertion. Pour la seconde, on invoque le théorème de Boutot (cf [Bout]). $\square$

A noter qu'il est probable que l'espace de modules S_n ne soit pas à singularités rationnelles pour $n \geq 5$. Le problème vient des points provenant de systèmes cohérents Λ s'insérant dans une suite exacte

$$0 \to (0,\mathcal{O}_{l'}(\frac{n}{2}+\alpha)) \to \Lambda \to (\Gamma,\mathcal{O}_{l''}(\frac{n}{2}-\alpha)) \to 0$$

avec $\alpha \geq 3/2$. On sait déjà, d'après le chapitre 1, que S_n n'est pas localement factorielle pour $n \geq 5$.

4.2.2 Le diviseur exceptionnel E de l'éclaté S_4

D'après [LePT] proposition 4.4, la variété lisse Σ est isomorphe au fibré en espaces projectifs $s : \mathbf{P}(W) \to \mathbf{P}_2^*$, où W est le fibré sur $\mathbf{P}_2^*$ donné par $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_d(0,-3),\mathcal{O}\boxtimes Q^*)$. Sur $\mathbf{P}(W)\times\mathbf{P}_2$ on a une suite exacte définissant une famille plate sur Σ de faisceaux spéciaux :

$$0 \to L\boxtimes Q^* \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_d(0,-3) \to 0 \;\; (1)$$

avec $L = \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(1)$. Les faisceaux spéciaux sont stables, et leurs classes d'isomorphisme sont donc des points lisses de l'espace de module M_4. On peut donc parler du fibré normal N_{Σ/M_4}. Le diviseur $\mathbf{E}$ est alors isomorphe au fibré en espaces projectifs $\mathbf{P}(\mathrm{N}_{\Sigma/M_4})$. On a la proposition suivante :

Proposition 8 *Le fibré* N_{Σ/M_4} *est isomorphe à* $(L^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1))\otimes\mathrm{H}^0(Q)^*$.

Preuve: Soit $\mathcal{V}$ l'ouvert du schéma de Hilbert introduit en 4.2. On note $p : \mathcal{V} \to M_4$ le morphisme de passage au quotient. Sur $\mathcal{V}\times\mathbf{P}_2$ il existe un faisceau quotient universel $\mathcal{F}$ paramétrant des faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $(0,4)$. D'après un lemme du chapitre 1, il existe deux fibrés vectoriels A et B sur $\mathcal{V}$ de rangs respectifs a et $a-2$

et un morphisme de ces fibrés dont le noyau est le faisceau $\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}(1))$ et le conoyau le faisceau $\mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}(1))$. Par conséquent le sous-schéma $p^{-1}(\Sigma)$ est isomorphe au sous-schéma défini par l'idéal des mineurs maximaux du morphisme précédent.

Soit $\mathcal{F}_1$ le faisceau sur $\Sigma \times \mathbf{P}_2$ donné par la suite exacte (1). On sait que $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1)$ est la restriction du fibré tangent $\mathrm{T}M_4$ à Σ ; en effet la sous-variété Σ ne paramètre que des faisceaux stables.

On peut considérer le morphisme de Petri

$$\zeta : \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1) \to \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}_1(1)), \mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}_1(1)))$$

car d'après ce qui précède on peut considérer un tel morphisme sur $p^{-1}(\Sigma)$, étant donné que le faisceau cohérent $p^*(\mathcal{F}_1)$ qui a pour support $p^{-1}(\Sigma)$ est la restriction du faisceau cohérent $\mathcal{F}$ (à torsion près). Ce morphisme passe au quotient et donne ζ.

Le morphisme ζ se factorise par le fibré normal N_{Σ/M_4}. Il est clair que $\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}_1(1)) \simeq L \otimes \mathrm{H}^0(Q)$ et que $\mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}_1(1)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1)$, la proposition revient donc à montrer que ζ est surjectif.

Mais ceci est clair car $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}_1(1)), \mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}_1(1))) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(L \boxtimes Q, \mathcal{O}_d(-2))$, et ζ est la composée des deux morphismes

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_1) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(L \boxtimes Q, \mathcal{F}_1(1)) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(L \boxtimes Q, \mathcal{O}_d(-2))$$

qui se déduisent de la suite exacte (1). Les conoyaux du premier morphisme et du second sont respectivement

$$\underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_d(-2), \mathcal{F}_1(1)), \;\; \underline{\mathrm{Ext}}^2_{\mathrm{pr}}(L \boxtimes Q, L \boxtimes Q)$$

qui sont nuls. Ceci achève la preuve. □

Le morphisme $\pi_- : S_4 \to S_\epsilon$ est aussi un éclatement, il est fondamental de remarquer que $\mathbf{E}$ et le diviseur exceptionnel de π_- coïncident. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 9 *On a l'égalité* $\mathbf{E} = \pi_-^{-1}(\Sigma_\epsilon)$.

Preuve: Soit F un faisceau spécial. Il existe une droite l, et une suite exacte non scindée

$$0 \to Q \to F(1) \to \mathcal{O}_l(-2) \to 0$$

Toute point de S_4 dans la fibre de π au point de M_4 défini par F, est la classe d'un système cohérent semi-stable (Γ, Θ), avec $\Gamma^* \subset \mathrm{H}^0(F(1))$ un sous-espace vectoriel de dimension 2 (cf chapitre 1).

De la suite exacte $0 \to \Gamma^* \otimes \mathcal{O} \to F(1) \to \check{\Theta} \to 0$, on tire un morphisme surjectif $\check{\Theta} \to \mathcal{O}_l(-2)$; par conséquent le faisceau Θ possède un sous-faisceau de la forme $\mathcal{O}_l(3) = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{O}_l(-2), \mathcal{O})$. La propriété de (Γ, Θ) d'être semi-stable implique que l'on a une suite exacte non scindée de systèmes cohérents

$$0 \to (0, \mathcal{O}_l(3)) \to (\Gamma, \Theta) \to (\mathbf{C}^2, \mathcal{O}_{l'}(1)) \to 0$$

D'après le chapitre 1, de tels systèmes cohérents sont ϵ instables, et comme les deux hypersurfaces de l'énoncé sont lisses et irréductibles, elles sont égales (au sens schématique). □

Rappelons que le fermé Σ_ϵ est isomorphe à $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$, et est contenu dans l'ouvert des points ϵ stables (ouvert lisse). On rappelle qu'on note $\mathbf{\Lambda}_1^{'}$ et $\mathbf{\Lambda}_1^{''}$ les familles (plates) de systèmes cohérents paramétrés par $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ données par $\mathbf{\Lambda}_1^{'} = (0, \mathcal{O}_{d_1}(3))$, $\mathbf{\Lambda}_1^{''} = (\mathcal{O} \boxtimes Q, \mathcal{O}_{d_2}(1))$

Sur $\Sigma_\epsilon \times \mathbf{P}_2$ on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to \mathcal{O}(1,1) \otimes \mathbf{\Lambda}_1^{''} \to \mathbf{\Lambda}_{\Sigma_\epsilon} \to \mathbf{\Lambda}_1^{'} \to 0 \quad (1^{'})$$

qui en tout point q de Σ_ϵ donne la filtration de Harder-Narasimhan du système cohérent $\mathbf{\Lambda}_{\Sigma_\epsilon}(q)$.

Le diviseur $\mathbf{E}$ de S_4 est donc isomorphe au fibré projectif $\mathbf{P}(\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_1^{''}, \mathbf{\Lambda}_1^{'}))$ sur Σ_ϵ. Si on note $\mathcal{L}$ le fibré inversible relativement ample associé à ce fibré, on a $\mathcal{O}(\mathbf{E})|_{\mathbf{E}} \simeq \mathcal{L}^{-1} \otimes h_1^{-1} \otimes h_2^{-1}$.

4.2.3 Groupes de Picard de M_4 et S_4

Lorsqu'on se donne une variété S, et une famille S plate $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ de systèmes cohérents semi-stables, on calcule ici explicitement en termes de la famille les fibrés $f^*(\mathcal{D})$ et $f^*(\mathcal{A})$, où $f : S \to M_4$ est le morphisme modulaire et $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ est le système générateur du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(M_4) \simeq \mathbf{Z}^2$ (voir chapitre 1).

On rappelle que pour toute classe de Grothendieck $v \in K(\mathbf{P}_2)$ orthogonale à la classe $2 - 4h^2$, il existe un fibré inversible $\mathcal{D}_v$ sur M_4 unique à isomorphisme près et vérifiant la propriété universelle suivante : si S est une variété algébrique et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $S \times \mathbf{P}_2$, qui soit un $\mathcal{O}_S$ module plat, paramétrant des faisceaux semi-stables sur $\mathbf{P}_2$ de classe $2 - 4h^2$, et si $f : S \to M_4$ est le morphisme modulaire associé, on a la relation

$$\lambda_{\mathcal{F}}(v) = \det(\mathrm{pr}_!(\mathcal{F} \cdot v)) \simeq f^*(\mathcal{D}_v)$$

où le produit de K-théorie $\mathcal{F} \cdot v$ a lieu dans $K(S \times \mathbf{P}_2)$ (ce produit a un sens lorsqu'interviennent des classes de faisceaux plats sur S). Le déterminant précédent a un sens même si S est singulière. On note par la suite $\mathcal{D}_v = \lambda_{M_4}(v)$.

On définit ainsi les fibrés suivants sur M_4 :

1. $\mathcal{D} = \lambda_{M_4}(-h + h^2)$ (fibré déterminant de Donaldson)
2. $\mathcal{A} = -\lambda_{M_4}(u)$, avec $u = 1 + h$.

Le morphisme $\pi : S_4 \to M_4$ est un éclatement, on a donc $\mathrm{Pic}(S_4) \simeq \mathbf{Z}^3$, les images réciproques $\pi^*(\mathcal{D})$, $\pi^*(\mathcal{A})$, et le diviseur exceptionnel $\mathbf{E}$ sont générateurs. Soit $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ une famille plate paramétrée par une variété lisse S de systèmes cohérents semi-stables de type $(2, 2h + 4h^2)$, et $f : S \to S_4$ le morphisme modulaire. L'injection naturelle de faisceaux $\mathbf{\Gamma} \hookrightarrow \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})$ donne une extension canonique de faisceaux sur $S \times \mathbf{P}_2$:

$$0 \to \mathbf{\Gamma}^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \to \mathcal{F}(1) \to \check{\mathbf{\Theta}} \to 0.$$

Le faisceau $\mathcal{F}$ est plat sur S et paramètre des faisceaux semi- stables sur $\mathbf{P}_2$ de classes de Chern $(0, 4)$. Soit g le morphisme modulaire $g : S \to M_4$ associé qui se factorise par f.

Etant donnée une classe $v \in K(\mathbf{P}_2)$, associons lui le couple $(v^*(-2), -\chi(v(-1)))$ dans $K(\mathbf{P}_2) \times \mathbf{Z}$, où $c \mapsto c^*$ est l'homomorphisme de conjugaison, qui envoie la classe d'un faisceau localement libre sur son dual (on a $\check{c} = c^*(-3)$). On a alors d'après le théorème de dualité relative :

$$\begin{aligned} g^*(\mathcal{D}_v) &= \det(\mathrm{pr}_!(\check{\mathbf{\Theta}} \cdot v(-1)))^* \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^{\otimes -\chi(v(-1))} \\ &= \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta} \cdot v^*(-2))) \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^{\otimes -\chi(v(-1))} \end{aligned}$$

Il est clair que le fibré $\pi^*(\mathcal{D}_v)$ vérifie une propriété universelle semblable à la précédente : soit $(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta})$ une famille de systèmes cohérents vérifiant les hypothèses précédentes, alors

$$f^*(\pi^*(\mathcal{D}_v)) \simeq \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta} \cdot v^*(-2))) \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^{\otimes -\chi(v(-1))}$$

On note toujours $\mathcal{D}$ le fibré sur S_4 défini par $\pi^*(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est le fibré déterminant de Donaldson (i.e $v = -h + h^2$). La formule suivante a déjà été vue au chapitre 1 :

$$f^*(\mathcal{D}) = \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta} \cdot h)) \otimes \det(\mathbf{\Gamma})^* \quad (1)$$

On a de même $g^*(\mathcal{A}) = \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta} \cdot v))^* \otimes \det(\mathbf{\Gamma}^*)^{\otimes -\chi(u(-1))}$, si v désigne la classe duale de $u(-1)$. On a $\chi(u(-1)) = 0$, et v s'exprime comme la différence $2[\mathcal{O}(-2)] - [\mathcal{O}(-1)]$ dans $K(\mathbf{P}_2)$. On en déduit

$$f^*(\pi^*(\mathcal{A})) = \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta}(-2)))^{\otimes -2} \otimes \det(\mathrm{pr}_!(\mathbf{\Theta}(-1))) \quad (2)$$

On note également $\mathcal{A}$ l'image réciproque par π^* du même fibré si il n'y a pas d'ambiguité.

On note $t = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}(1))$. On rappelle ici le (*ii*) du corollaire 6.5 de [LePT].

Lemme 3 *On a* $\pi^*(\mathcal{A}) = t \otimes \mathcal{O}(\mathbf{E})$ *dans* $\mathrm{Pic}(S_4)$.

On a également $\mathrm{Pic}(S_\epsilon) \simeq \mathbf{Z}^2$. Grâce aux formules (1) et (2) on peut définir des fibrés $\mathcal{D}_\epsilon$ et $\mathcal{A}_\epsilon$ sur S_ϵ vérifiant la même propriété universelle. On a $\mathcal{A}_\epsilon = (\pi_-)_*(\mathcal{A})$ (au sens de l'image directe d'un diviseur), donc $\mathcal{A}_\epsilon = t$. On a également $\mathcal{D}_\epsilon = (\pi_-)_*(\mathcal{D})$, et $\pi_-^*(\mathcal{D}_\epsilon) = \mathcal{D} \otimes \mathcal{O}(\mathbf{E})$. On obtient aussi la formule de saut suivante :

$$\pi_-^*(\mathcal{A}_\epsilon) = \pi^*(\mathcal{A}) - \mathbf{E}$$

4.3 L'hypersurface D_2 de M_4

Nous allons dans cette section décrire et donner quelques propriétés de l'hypersurface remarquable de M_4 des classes de faisceaux semi-stables admettant une droite de saut d'ordre ≥ 2. Ces faisceaux ont des quartiques de saut singulières, qui vérifient génériquement une propriété géométrique remarquable.

4.3.1 Systèmes cohérents de support une conique singulière

L'ensemble des classes de systèmes cohérents semi stables de support une conique singulière forment une hypersurface de S_4 ; en effet, le fermé $\mathcal{S}_2$ des coniques singulières est une hypersurface de $\mathcal{C}_2$. Munissons ce sous-schéma fermé de sa structure réduite : le diviseur de Cartier associé à pour fibré $t^{\otimes 3} = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}(3))$ (cf [LePT] lemme 6.7). En effet l'hypersurface des coniques réductibles est de degré 3. Cette hypersurface est réunion de deux hypersurfaces :

1. L'une est notée D_2, elle représente l'adhérence de la partie localement fermée des classes de systèmes cohérents (Γ, Θ), tels que Θ soit un faisceau semi stable de support une conique singulière réduite,
2. l'autre est le diviseur exceptionnel $\mathbf{E}$.

D'après ce qui précède, les points du diviseur $\mathbf{E}$ sont les classes de systèmes cohérents stables (Γ, Θ) tels que Θ soit un faisceau instable.

D'après la première assertion, un point général de D_2 représente un système cohérent (Γ, Θ) tel qu'il existe une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{l'}(2) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l''}(2) \to 0$$

En effet, le faisceau Θ admet pour quotient un faisceau porté par une droite ; si Θ s'insère dans une suite exacte non scindée de la forme

$$0 \to \mathcal{O}_{l'}(1) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l''}(3) \to 0$$

alors on montre facilement que Θ admet un sous-faisceau de la forme $\mathcal{O}_{l''}(2)$. Il suffit en effet de considérer l'injection de faisceaux canoniques $i : \mathcal{O}_{l''}(2) \hookrightarrow \mathcal{O}_{l''}(3)$ d'image le faisceau des sections s'annulant au point x intersection de l' et l''. Cette injection i se relève suivant la surjection $\Theta \to \mathcal{O}_{l''}(3)$. Cette observation va nous permettre dans la section suivante de construire un fibré projectif et un morphisme surjectif de ce fibré dans D_2 (cf section 4.3.2).

On rappelle (cf lemme 4 du chapitre 1) que les points de S_4 strictement semi stables correspondent aux classes de S-équivalence $(\gamma', \mathcal{O}_{l'}(2)) \oplus (\gamma'', \mathcal{O}_{l''}(2))$ avec γ', γ'' des espaces vectoriels de dimension 1.

Corollaire 1 *L'hypersurface* D_2 *contient le fermé des points strictement semi-stables de* S_4*, de dimension* 8.

Preuve: Dans le cas 1. du début de cette section, il y a deux possibilité : soit la flèche naturelle $\Gamma \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2))$ est injective, soit elle possède un noyau de dimension 1. En effet, le système cohérent (Γ, Θ) étant semi-stable, il ne peut posséder de sous-système cohérent de la forme $(\Gamma, \mathcal{O}_{l'}(2))$. La seconde possibilité montre que l'hypersurface D_2 contient le fermé des points strictement semi stables. □

On note maintenant $t = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}(1))$. Dans [LePT] proposition 6.8, on rappelle que dans $\mathrm{Pic}(S_4)$, on a la relation

$$\mathrm{D}_2 = t^{\otimes 3} \otimes \mathcal{O}(-\mathbf{E})$$

4.3.2 Description de l'hypersurface D_2 de S_4

On note $\Omega = \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^* \setminus \Delta$ l'ouvert complémentaire de la diagonale. On désigne toujours par $\mathbf{\Lambda}'_2$ et $\mathbf{\Lambda}''_2$ les familles de systèmes cohérents paramétrées par $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*)$ et données respectivement par

$$\mathbf{\Lambda}'_2 = (0, \mathcal{O}_{d_1}(2)), \quad \mathbf{\Lambda}''_2 = (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{d_2}(2))$$

(cf Notations).

Soit le fibré en espaces projectifs $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}''_2, \mathbf{\Lambda}'_2))$ sur $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}(\mathrm{S}^2\, Q^*)$. On note $\sigma : \mathbf{P} \to \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ le morphisme "support" obtenu en composant la projection naturelle $\mathbf{P}(\mathrm{S}^2\, Q^*) \to \mathbf{P}_2^*$ avec le morphisme structural du fibré $\mathbf{P}$.

Le fibré $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}''_2, \mathbf{\Lambda}'_2)$ est de rang 7 et s'insère dans une suite exacte sur $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*)$ (cf chapitre 1)

$$0 \to \mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathbf{\Gamma}^* \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}''_2, \mathbf{\Lambda}'_2) \to \mathrm{I}_\Delta(1,2) \to 0$$

en vertu de l'isomorphisme $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_{d_2}, \mathcal{O}_{d_1}) \simeq \mathrm{I}_\Delta(1,2)$. En effet, de la suite exacte $0 \to \mathcal{O}(-1,-1) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{d_2} \to 0$, on tire la suite exacte longue suivante sur $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$

$$0 \to \mathcal{O} \to Q \boxtimes \mathcal{O}(1) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_{d_2}, \mathcal{O}_{d_1}) \to 0$$

où l'on reconnait la résolution du faisceau $\mathrm{I}_\Delta(1,2)$.

On note $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ le faisceau inversible relativement ample associé, et $\mathbf{\Lambda_P}$ la famille de systèmes cohérents paramétrée par $\mathbf{P}$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \mathbf{\Lambda}_2^{'} \to \mathbf{\Lambda_P} \to \mathbf{\Lambda}_2^{''} \to 0 \quad (1)$$

La suite exacte (2) détermine un morphisme modulaire $\varphi : \mathbf{P} \to S_\epsilon$. L'image de φ est le fermé des classes de systèmes cohérents Λ qui s'insèrent dans une suite exacte non scindée de la forme

$$0 \to (0, \mathcal{O}_{l'}(2)) \to \Lambda \to (\Gamma, \mathcal{O}_{l''}(2)) \to 0 \quad (1^{'})$$

Proposition 10 *Le morphisme φ est un plongement au dessus de l'ouvert des classes de systèmes cohérents stables de support une conique singulière réduite. Cependant φ n'est pas un plongement.*

Preuve: On prouve en effet, cf chapitre 1, que le morphisme φ est non ramifié sur l'ouvert de $\sigma^{-1}(\Omega) \subset \mathbf{P}$ déterminant des systèmes cohérents stables. En effet, supposons que Λ soit stable et s'insère dans une suite exacte non scindée de type $(1^{'})$ (cf ci-dessus), avec $l^{'}$ et $l^{''}$ distinctes. Alors $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{l'}, \mathcal{O}_{l''}) = 0$ et la proposition 6, chapitre 1 montre que φ est non ramifié (on omet les détails ici). Comme φ est de plus injectif sur un tel ouvert, on en déduit le premier point.

Les hypothèses stable et de support une conique réduites sont essentielles dans ce qui précède, en effet sur l'ouvert $\sigma^{-1}(\Omega)$ le morphisme φ n'est même pas injectif. En effet, soit la classe de S-équivalence d'un système cohérent strictement semi-stable. On suppose que cette classe s'écrit $(\gamma^{'}, \mathcal{O}_{l'}(2)) \oplus (\gamma^{''}, \mathcal{O}_{l''}(2))$ avec $l^{'}$, $l^{''}$ distinctes. Considérons un point dans la fibre de φ correspondante, déterminé par la classe d'une extension du type $(1^{'})$. D'après Le système cohérent Λ admet un sous-système cohérent de la forme $(\gamma^{''}, \mathcal{O}_{l''}(2))$ (cf chapitre 1). C'est donc que l'extension de faisceaux précédente est scindée. Notons $\Lambda^{'} = (0, \mathcal{O}_{l'}(2))$, et $\Lambda^{''} = (\Gamma, \mathcal{O}_{l''}(2))$. D'après les préliminaires (chapitre 1), on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2))) \to \mathrm{Ext}^1(\Lambda^{''}, \Lambda^{'}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l''}, \mathcal{O}_{l'}) \to 0$$

La classe de l'extension $(1^{'})$ définit donc la classe d'un morphisme $\omega : \Gamma \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2))$ de rang 1. En effet, le noyau de ω est le sous-espace vectoriel $\gamma^{''}$. L'image de ω est un sous-espace vectoriel $\gamma^{'} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2))$ de dimension 1.

La fibre de φ au point x contient donc deux composantes irréductibles. La première a ses points en correspondance biunivoque avec les couples $(\Gamma, [\omega])$ où $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2))$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 et $[\omega]$ est la classe à homothétie près d'un morphisme $\omega : \Gamma \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2))$ d'espaces vectoriels de noyau $\gamma^{''}$ et d'image $\gamma^{'}$. Ces couples paramètrent les points de la droite projective $\mathbf{P}((\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2))/\gamma^{''})^*)$. La seconde composante se caractérise de façon identique en inversant les rôles de $l^{'}$ et $l^{''}$. Ceci prouve que φ n'est pas un plongement.
$\square$

L'image de φ est donc un diviseur $\Sigma_\epsilon^{'}$ de S_ϵ qui contient Σ_ϵ : en effet, comme remarqué au chapitre 1, tout faisceau Θ s'insérant dans une suite exacte non scindée

$$0 \to \mathcal{O}_{l''}(1) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l'}(3) \to 0 \quad (2)$$

avec $l^{'}$ et $l^{''}$ distinctes, s'insère également dans une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{l'}(2) \to \Theta \to \mathcal{O}_{l''}(2) \to 0 \quad (2^{'})$$

Si l'on suppose de plus que le sous-espace $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\Theta)$ est l'image de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(1))$ par l'injection dans la suite exacte (2), on obtient un système cohérent (Γ, Θ) ϵ stable qui définit un point de Σ_ϵ ; alors dans la suite exacte $(2^{'})$ on a nécessairement $\Gamma \cap \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2)) = 0$.

Soit $\widetilde{\mathbf{P}} \to \mathbf{P}$ l'éclatement suivant le fermé $\Sigma_{\mathbf{P}} = \varphi^{-1}(\Sigma_\epsilon)$. Par la propriété universelle de l'éclaté, il existe un morphisme $\varphi : \widetilde{\mathbf{P}} \to S_4$ (on le note par abus de la même façon). L'image de φ dans S_4 est par définition le diviseur D_2 d'après la section 4.3.1. On peut montrer que le fermé $\Sigma_{\mathbf{P}}$ est isomorphe à l'éclatement de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ suivant la diagonale. Ce morphisme φ sera utilisé dans une section ultérieure pour déterminer si il y a des courbes dans les fibres de σ évitant le bord ∂S_4.

4.3.3 L'hypersurface D_2 de M_4

On en vient au but de cette section, qui est d'introduire l'hypersurface D_2 et d'énoncer quelques propriétés.

<u>**Définition**</u> **10** *On note $D_2 \subset M_4$ le fermé adhérence des classes de faisceaux stables possédant une droite de saut d'ordre ≥ 2. C'est une hypersurface de M_4.*

Il est montré dans [LePT] que D_2 est l'image par le morphisme π de l'hypersurface D_2 que nous avons explicitée ci-dessus. Le morphisme π induit un isomorphisme sur des voisinages des points correspondant à des classes strictement semi stables ; en effet la sous-variété Σ ne contient que des classes stables. On en déduit d'après l'étude sommaire de φ que les deux hypersurfaces D_2 et D_2 sont probablement singulières le long du fermé des classes strictement semi-stables. Nous n'en ferons pas la démonstration cependant.

Les faisceaux spéciaux sont les faisceaux possédant une droite de saut d'ordre ≥ 3. On a donc $\Sigma \subset D_2$.

<u>**Proposition**</u> **11** *L'hypersurface D_2 est singulière en tout point de Σ.*

<u>Preuve</u>: Soit $Z \subseteq M_4 \times \mathbf{P}_2^*$ la sous-variété formée des couples (F, l) tels que $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(-2)) \neq 0$. Cette condition est encore équivalente à $\mathrm{H}^1(F|_l) \neq 0$. Soit $\mathcal{V}$ l'ouvert du schéma de Hilbert introduit dans la preuve de la proposition 8. Soit $\mathcal{F}$ le faisceau universel sur $\mathcal{V} \times \mathbf{P}_2$, paramétrant des faisceaux semi-stables de rang 2 et de classes de Chern $(0, 4)$. Soit $Z^{'} \subseteq \mathcal{V} \times \mathbf{P}_2^*$ la sous-variété dont le support est le lieu des points où le morphisme

$$u : \mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F}(-1)) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \to \mathrm{R}^1\mathrm{pr}_*(\mathcal{F})$$

est de rang ≤ 1. Le fibré de gauche est de rang 4, et celui de droite de rang 2. Par passage au quotient, l'image de $Z^{'}$ est Z. Le morphisme de projection $\mathrm{p} : Z \to D_2$ étant fini, et les fibres du morphisme $Z^{'} \to Z$ étant de dimension inférieures où égal à la dimension du groupe qui agit, on en déduit que la sous-variété $Z^{'}$ est irréductible de codimension 3.

L'image réciproque de la sous-variété Σ par la projection p est est le lieu des couples (F, l) tels que l soit une droite de saut d'ordre 3 de F, c'est-à-dire tels que $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(-3)) \neq 0$, i.e tels que $\mathrm{H}^1(F(1)|_l) \neq 0$. Cette condition entraîne que $\dim(\mathrm{H}^1(F|_l)) \geq 2$, c'est à dire que $\mathrm{p}^{-1}(\Sigma)$ est inclus dans le lieu des points où le morphisme u est nul.

Au desssus d'un point correspondant à un faisceau spécial F_0, la fibre de la projection p est réduite au point $\{(F_0, l_0)\}$, où l_0 est la droite de saut d'ordre 3. En effet, cette fibre est un fermé du sous-schéma de $\mathbf{P}_2^*$ donné par l'annulation du morphisme de fibrés $u_{\{F_0\}}$: $\mathrm{H}^1(F_0(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \to \mathrm{H}^1(F_0) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}$. On dispose d'une application différentielle de Petri

$$\delta : \mathrm{T}_{\check{l}_0}\mathbf{P}_2^* \to \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^1(F_0(-1)), \mathrm{H}^1(F_0))$$

Soit z_0 une équation de la droite l_0, l'espace tangent $\mathrm{T}_{\check{l}_0}\mathbf{P}_2^*$ est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1))/(z_0)$. A une classe $\overline{\lambda}$ de ce quotient correspondant à une forme linéaire λ, la différentielle δ associe le morphisme d'espaces vectoriels qui est la multiplication par λ. Si δ n'est pas injective il existe une droite $l \neq l_0$ qui soit de saut d'ordre ≥ 2 pour F_0, ce qui est absurde. Ceci montre que la fibre de p en F_0 est lisse donc réduite à un point. D'après le corollaire 4.6.7 (i) d'[EGA3], le morphisme p est une immersion fermée au voisinage de (F_0, l_0).

Si D_2 est lisse au point $\{F_0\}$, alors Z est lisse au point $\{(F_0, l_0)\}$, ce qui n'est pas. En effet, l'action du groupe étant libre sur l'ouvert des points stables et les faisceaux spéciaux étant stables, on se ramène à prouver que $Z^{'}$ n'est pas lisse en un point au dessus de $\{(F_0, l_0)\}$. Mais c'est une conséquence du fait qu'il est défini comme le lieu des points où un morphisme de fibrés vectoriels a son rang de codimension au moins 2. (cf [ACG]). $\square$

Il est donc clair que le diviseur D_2 est très singulier. Il est cependant normal : en effet les singularités de D_2 sont concentrées aux classes strictement semi-stables, éventuellement aux points dont l'image par σ est une conique double, et le fermé Σ est de codimension 3 dans M_4 ; de plus on sait que M_4 est de Cohen-Macaulay, car c'est une variété localement factorielle, donc D_2 est de Cohen-Macaulay.

Pour finir cette section, on peut rappeler que dans [LePT], les auteurs prouvent que la restriction du morphisme de Barth β à D_2 est génériquement injective (Théorème 8.3). Les auteurs utilisent pour la preuve le diviseur D_2 de S_4 et la description de ses points généraux grâce au fibré $\mathbf{P}$. L'image $\beta(D_2)$ est une hypersurface de $\mathbf{H}$, dite des quartiques de Lüroth de type II. De telles quartiques génériques vérifient une propriété géométrique simple qui les caractérisent.

4.4 Une variété lisse dominant l'espace de modules S_ϵ

Nous allons construire ici une variété lisse munie d'un morphisme surjectif sur S_ϵ. Dans le premier chapitre, nous avons déjà rencontré une grassmanienne relative qui domine l'espace de modules $S_{\epsilon,n}$ lorsque n est pair. Il nous reste à apporter ici des compléments, non sans faire d'abord quelques rappels.

Soit $\mathfrak{C} \subset \mathbf{P}_5 \times \mathbf{P}_2$ la conique universelle. Soit $\mathfrak{C}^{'} = \mathfrak{C} \times_{\mathbf{P}_5} \mathfrak{C}$ la variété paramétrant les coniques marquées de deux points. Notons p_1 la projection sur le premier facteur. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux de la diagonale de $\mathfrak{C}^{'}$.

Soit maintenant le fibré en grassmaniennes sur $\mathfrak{C}$ donné par

$$\mathcal{G} = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{p_1}_*(\mathcal{I}(3))) \xrightarrow{g} \mathfrak{C}$$

Cette variété projective lisse paramètre les systèmes cohérents de la forme $(\Gamma, \mathrm{I}_x(3))$, où I_x est le faisceau d'idéaux d'un point x dans une conique. Elle est de dimension 14, la dimension d'une fibre en un point de $\mathfrak{C}$ est 8. On note $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{G}}$ le fibré canonique de rang 2 sur $\mathcal{G}$. On définit ainsi une famille universelle de systèmes cohérents $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{G}} = (\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{G}}, \mathbf{\Theta}_{\mathcal{G}})$ paramétrée par $\mathcal{G}$.

Dans ce qui suit, on note encore h la classe de la section hyperplane dans $K(\mathbf{P}_2)$ et $\mathbf{h}$ (en gras) l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$ sur la variété d'incidence d par la projection sur le second facteur.

Soit le fermé $\Sigma_{-\epsilon} \subset \mathcal{G}$ des points représentant des systèmes cohérents ϵ instables, pour $0 < \epsilon < 1$. Ces points sont les systèmes cohérents $(\Gamma, \mathrm{I}_x(3))$ tels que l'on ait une suite exacte de systèmes cohérents

$$0 \to (\Gamma'', \mathcal{O}_{l''}(2)) \to (\Gamma, \mathrm{I}_x(3)) \to (0, \mathcal{O}_{l'}(2)) \to 0 \ \ (*)$$

Dans ce cas la conique est donc singulière et I_x est le faisceau d'idéaux d'un point sur l''. Le fermé $\Sigma_{-\epsilon}$ est isomorphe à la variété $d \times \mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*)$. En effet, la suite exacte $(*)$ définit la filtration de Harder-Narasimhan de $(\Gamma, \mathrm{I}_x(3))$, qui est unique. On note h_1 et h_2 les images réciproques sur $\Sigma_{-\epsilon}$ du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$ provenant des facteurs d et $\mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*)$, et $\mathbf{\Gamma} \subset \mathrm{S}^2 Q$ le fibré canonique de rang 2 sur $\mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*)$.

Proposition 12 *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{N}_{\Sigma_{-\epsilon}/\mathcal{G}} \simeq h_1^{\otimes 2} \ \otimes \ \mathbf{h}^* \ \otimes \ \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_2'', \mathbf{\Lambda}_2')$$

le fibré de droite étant considéré comme un fibré sur $d \times \mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*)$ après changement de base.

Preuve: Ceci a en fait déjà été vu au chapitre 1, sans toutefois avoir été énoncé. On construit une famille $\mathbf{\Lambda}$ de systèmes cohérents paramétrée et plate sur $\Sigma_{-\epsilon}$ telle que au point (l', x, Γ'', l'') de la base, la fibre $\mathbf{\Lambda}(x)$ soit isomorphe au système cohérent $(\Gamma, \mathrm{I}_x(3))$ s'insérant dans la suite exacte $(*)$ (cf ci-dessus). On obtient la suite exacte

$$0 \to h_1^* \otimes (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{d_2}(2)) \to \mathbf{\Lambda} \to h_1 \otimes \mathbf{h}^* \otimes (0, \mathcal{O}_{d_1}(2)) \to 0 \ \ (*)$$

La famille $\mathbf{\Lambda}$ est la restriction (à torsion près), de la famille $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{G}}$. En effet, on a une extension canonique dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{d_1}(3), h_1^* \otimes \mathcal{O}_{d_2}(2))$, qui détermine en chaque point (l_1, l_2) de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ une extension définissant le faisceau $\mathcal{O}_C(3)$, où C est la conique réunion des l_i. On a d'autre part l'injection de faisceaux sur $d \times \mathbf{P}_2$:

$$h_1 \otimes \mathbf{h}^* \otimes \mathcal{O}_{d_1}(2) \to \mathcal{O}_{d_1}(3)$$

dont le conoyau est $\mathcal{O}_{\Delta}(3)$, où Δ est le fermé des points (l, x, y) de $d \times \mathbf{P}_2$ tels que $x = y$. Il est dès lors clair que l'extension $(*)$ sur les faisceaux paramètre en un point (l', x, l'') de $d \times \mathbf{P}_2^*$ le faisceau $\mathrm{I}_x(3)$.

La famille $\mathbf{\Lambda}_{\mathcal{G}}$ est complète (i.e le morphisme de Kodaira-Spencer est surjectif). Les membres de gauche et de droite dans la suite exacte ci-dessus jouant le rôle point par point de la filtration de Harder-Narasimhan (pour le paramètre ϵ) du système cohérent correspondant, la proposition du chapitre 1 portant sur le fibré normal d'une strate de points instables pour un paramètre permet de conclure. $\square$

On a clairement un morphisme dominant $\phi : \mathcal{G}\backslash\Sigma_{-\epsilon} \to \mathcal{S}_\epsilon$, dont les fibres sont des coniques lisses au dessus d'un point général de S_ϵ. En effet, au dessus d'un point de S_ϵ correspondant à un classe de système cohérent de support une conique lisse, un point de la fibre de ϕ correspond au choix d'un point sur la conique. Soit $\widetilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ l'éclatement de $\mathcal{G}$ suivant la sous-variété $\Sigma_{-\epsilon}$. Il existe un morphisme surjectif $\psi : \widetilde{\mathcal{G}} \to S_\epsilon$ dont la restriction à $\mathbf{E}^{'}$ est induite par $\varphi : \mathbf{P} \to S_\epsilon$. L'image de $\mathbf{E}^{'}$ par ψ est donc l'hypersurface $\Sigma^{'}_\epsilon$.

Remarque : Il faut prendre garde cependant que l'image réciproque $\psi^{-1}(\Sigma^{'}_\epsilon)$ n'est pas, même ensemblistement, le diviseur $\mathbf{E}^{'}$: il existe en effet, des systèmes cohérents $(\Gamma, \mathrm{I}_x(3))$ de support une conique singulière avec I_x le faisceau d'idéaux du point $x \in l^{'}$, tels que la suite exacte (dont la classe est unique à scalaire près) $0 \to \mathcal{O}_{l''}(2) \to \mathrm{I}_x(3) \to \mathcal{O}_{l'}(2) \to 0$ soit non scindée, et telle que le morphisme induit $\Gamma \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2))$ soit injectif. Alors le système cohérent $(\Gamma, \mathrm{I}_x(3))$ définit un point de $\mathcal{G} \setminus \Sigma_{-\epsilon}$ qui détermine aussi une classe dans $\Sigma^{'}_\epsilon$. On a ainsi défini une partie localement fermée dans $\mathcal{G}\backslash\Sigma_{-\epsilon}$ dont l'image par ϕ a pour adhérence $\Sigma^{'}_\epsilon$. $\square$

Le lemme suivant sera utilisé dans le calcul des sauts dans une section ultérieure visant à calculer des dimensions de systèmes linéaires.

Lemme 4 *On a* $\psi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{G}}}) \simeq \mathcal{O}_{S_\epsilon}$ *et* $\mathrm{R}^i\psi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{G}}}) = 0$ *pour* $i > 0$.

Preuve: On considère la factorisation de Stein de $\widetilde{\psi}$ qui fournit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{G}} \arrow[r] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathrm{Spec}(\psi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{G}}})) \arrow[d, "f"] \\ & S_\epsilon \end{tikzcd}$$

Le morphisme ψ est projectif, le morphisme f est donc fini. Soient $V \subseteq \widetilde{\mathcal{G}}$ et $W \subseteq S_\epsilon$ les ouverts des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents de support une conique lisse. On a $\psi^{-1}(W) = V$, le morphisme $\psi|_V$ est lisse ; la fibre de ψ en un point de W est isomorphe à la conique support du système cohérent correspondant. On a donc l'isomorphisme $\psi_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{G}}})|_W \simeq \mathcal{O}_{S_\epsilon}|_W$. Donc f est birationnel et est donc un isomorphisme car S_ϵ est une variété normale (cf [Ha], III cor.11.4). Notons que ψ est donc à fibres connexes.

Il semble délicat de prouver la seconde assertion directement, par exemple à l'aide du théorème des fonctions formelles (cf [Ha] III, Thme 11.1), car les fibres du morphisme ψ semblent délicates à étudier (cf remarque ci-dessus), et certaines de ces fibres peuvent être de dimension ≥ 2 et non réduites. Nous invoquerons donc le théorème suivant, dû à Kollar (cf [Kol], thme 7.1).

Théorème 7 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif de variétés projectives complexes, avec X lisse. On suppose que la fibre générique de f est connexe. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

1. $\mathrm{R}^i f_*(\mathcal{O}_X) = 0$ *pour* $i > 0$,

2. *Y est à singularités rationnelles, et* $\mathrm{H}^i(F, \mathcal{O}_F) = 0$ *pour* $i > 0$.

La condition d'être à singularités rationnelles pour Y implique 1. lorsque f est une résolution des singularités, c'est-à-dire lorsque f est birationnel.

La fibre de ψ au dessus d'un point général de S_ϵ donné par la classe du système cohérent (Γ, Θ) est la conique support du faisceau Θ. De plus S_ϵ est à singularités rationnelles (cf proposition 7). Il suffit d'appliquer le théorème. □

Comme à la section 4.2.3, on définit les fibrés inversibles $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}_\mathcal{G}$ par les formules

$$\mathcal{D}_\mathcal{G} = \det(\mathrm{pr}_! \, \mathbf{\Theta}_\mathcal{G} \cdot h) \otimes \det(\mathbf{\Gamma}_\mathcal{G})^*, \;\; \mathcal{A}_\mathcal{G} = \det(\mathrm{pr}_! \, \mathbf{\Theta}_\mathcal{G}(-2))^{\otimes -2} \otimes \det(\mathrm{pr}_! \, \mathbf{\Theta}_\mathcal{G}(-1))$$

Ces fibrés inversibles vérifient des propriétés universelles analogues à celles de $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}_\epsilon$, et $\mathcal{A}_\epsilon$.

On a la formule dite de "saut" suivante : $\widetilde{\pi}^*(\mathcal{D}_\mathcal{G}) = \psi^*(\mathcal{D}_\epsilon) \otimes \mathcal{O}(\mathbf{E}')$, qu'on a justifiée au chapitre 1.

Lemme 5 *On a l'isomorphisme $\mathcal{A}_\mathcal{G} \simeq t$, où t désigne par abus l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}(1)$ par le morphisme support, composé des morphismes $\mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbf{P}_5$.*

Preuve: En effet on a $\widetilde{\pi}^*(\mathcal{A}_\mathcal{G}) \simeq \psi^*(\mathcal{A}_\epsilon)$ sur l'ouvert $\widetilde{\mathcal{G}} \setminus \mathbf{E}'$. Or $\mathcal{A}_\epsilon \simeq t$, donc on a $\widetilde{\pi}^*(\mathcal{A}_\mathcal{G}) \simeq \widetilde{\pi}^*(t)$ sur $\widetilde{\mathcal{G}} \setminus \mathbf{E}'$. En prenant l'image directe $\widetilde{\pi}_*$ de cet isomorphisme, et compte tenu de ce que $\widetilde{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{G}}}) \simeq \mathcal{O}_\mathcal{G}$, on peut conclure. □

4.5 Calcul de dimensions de systèmes linéaires sur M_4

Pour $n \geq 3$, le groupe de Picard des fibrés inversibles de l'espace des modules M_n est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$. Pour $n \geq 4$, on introduit la classe du fibré $\mathcal{B} = -\lambda_{M_n}(2 + 2h + (n-4)h^2)$ (cf section 4.2.3). On distingue deux cas :

1. lorsque n est impair le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ forme une base de $\mathrm{Pic}(M_n)$,
2. lorsque n est pair, il existe un fibré $\mathcal{A}$ tel que $2\mathcal{A} = \mathcal{B}$ et le couple $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ est alors une base.

Les bases précédentes ont été introduites par Drézet. Dans la suite nous donnons un critère d'amplitude et nous examinons le cas des diviseurs non amples.

4.5.1 Diviseurs généraux

Le lemme suivant est utile.

Lemme 6 *Le fibré $\mathcal{A}$ possède des sections non nulles. On a en fait* $\dim \mathrm{H}^0(\mathcal{A}) = 6$.

Preuve: L'image réciproque $\pi^*(\mathcal{A})$ est isomorphe à $t \otimes \mathcal{O}(\mathbf{E})$. Une section de $\pi^*(\mathcal{A})$ s'écrit donc comme produit d'une section de t et de la section non nulle (unique à scalaire près) donnée par le diviseur exceptionnel. On obtient aussitôt l'énoncé. □

On note $|D| = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(D))$ le système linéaire associé à une classe de diviseur D de composantes (m, p) dans la base de Drézet.

Proposition 13 *On a $|D| \neq 0$ si et seulement si $m \geq 0$ et $p + 2[\frac{m}{5}] \geq 0$.*

Preuve: Si m et n vérifient la condition de droite, alors soit $k \in \mathbf{N}$ le quotient de la division de m par 5. Alors $D = k(5\mathcal{D} - 2\mathcal{A}) + (m-5k)\mathcal{D} + (p+2k)\mathcal{A}$ et $m - 5k, p + 2k \geq 0$. Comme ∂M_4 est un diviseur effectif, ainsi que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$, la condition est suffisante.

Pour la condition nécessaire, considérons le fibré $\pi^*(\mathcal{O}(D))$ sur S_4. Soit C une conique lisse, la restriction du fibré précédent à la sous-variété $\sigma^{-1}(\{C\})$ isomorphe à une grassmanienne, est isomorphe à $\det(\Gamma^*)^{\otimes m}$ où Γ est le sous-fibré universel de rang 2 de cette grassmanienne. Ce fibré est encore isomorphe à la restriction de $\mathcal{O}(m)$ par le plongement de Plücker. Si $m < 0$, alors tout diviseur effectif de classe D contiendrait nécessairement $\sigma^{-1}(\{C\})$, et C étant lisse arbitraire c'est absurde. On en déduit que le système linéaire $|D|$ contient le bord, éventuellement avec multiplicité. On peut donc écrire

$$D = k(5\mathcal{D} - 2\mathcal{A}) + E$$

où $k \in \mathbf{N}^*$, et E est un diviseur effectif ne contenant pas le bord. Donc E a pour composantes (m', p') dans la base de Drézet, avec $m' \geq 0$, et $p' \geq 0$. On a donc $m \geq 5k$, donc $[m/5] \geq k$. Comme $p + 2k \geq 0$, on en déduit l'énoncé. $\square$

Proposition 14 *Les systèmes linéaires $|\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}^{\otimes p}|$, avec $m \geq 0$ et $p > m$, ont pour fermé de base la sous-variété des faisceaux spéciaux Σ.*

Preuve: Rappelons que le fibré projectif $\mathbf{P}(W)$, où W est le fibré sur $\mathbf{P}_2^*$ donné par

$$W = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_d(-3), \mathcal{O} \boxtimes Q^*))$$

est isomorphe à Σ. Les restrictions des fibrés $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$ à une fibre sont isomorphes respectivement à $\mathcal{O}(1)$ et $\mathcal{O}(-1)$ en vertu du lemme ci-dessous. Alors la restriction du fibré $\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}^{\otimes p}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(m-p)$, et $m - p < 0$. Ceci prouve que chaque fibre appartient à tous les diviseurs du système linéaire de l'énoncé, et par suite Σ est inclus dans le fermé de base.

Réciproquement, soit un point x de M_4 hors de Σ. D'après le lemme 3, on a $\pi^*(\mathcal{A}) = t + \mathbf{E}$ dans $\mathrm{Pic}(S_4)$, par conséquent il existe une section de $\mathcal{A}$, et même de $\mathcal{A}^{\otimes p}$, qui ne s'annule pas en x. De même en considérant une section hyperplane de $\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(1)$ évitant le point $\beta(x)$, on obtient une section de $\mathcal{D}^{\otimes m}$ ne s'annulant pas en x. On a donc construit une section de $\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}^{\otimes p}$ dont le lieu des zéros évite x, ce qui prouve la proposition. $\square$

Lemme 7 *Les fibrés $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$ ont pour restriction à la sous-variété Σ :*

$$\mathcal{D}|_\Sigma = \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(4), \ \mathcal{A}|_\Sigma = \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(-1)$$

Preuve: On reprend la suite exacte sur $\mathbf{P}(W) \times \mathbf{P}_2$ donnée par :

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(1) \boxtimes Q^* \to \mathcal{F} \to \mathcal{O}_d(-3) \to 0$$

On pose $v = [\mathcal{O}_l(-1)]$ la classe de Grothendieck du faisceau $\mathcal{O}_l(-1)$, où l est une droite, et $u = 1 + h$. On a donc, par fonctorialité du fibré $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}|_\Sigma &= -\det(\mathrm{pr}_! \mathcal{F} \cdot v) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(-\chi(Q|_l(-2))) \otimes \det(\mathrm{pr}_! \mathcal{O}_d(-3) \cdot v)^{-1} \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-\chi(\mathcal{O}_l(-5))) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(4) \end{aligned}$$

le passage de la deuxième à la troisième ligne venant de la suite exacte $0 \to \mathcal{O}(-1,-4) \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}_d(-3) \to 0$, et le reste se justifiant grâce à $\chi(Q|_l(-2)) = \chi(Q(-2)) - \chi(Q(-3)) = -1$, et $\chi(\mathcal{O}_l(-5)) = -4$; on a de même :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}|_\Sigma &= -\det(\mathrm{pr}_! \mathcal{F} \cdot u) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(-1) \otimes \det(\mathrm{pr}_! \mathcal{O}_d(-3) \cdot u)^{-1} \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(\chi(u(-4))) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W)}(-1) \end{aligned}$$

Ce sont bien les formules annoncées. □

<u>**Définition**</u> **11** *Soit X une variété projective de dimension d. Un fibré inversible $\mathcal{O}(D)$ sur X associé à un diviseur de Cartier D est dit big si*

$$\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}(kD)) > c \cdot k^d$$

avec $c > 0$ et pour $k >> 1$.

Si $f : Y \to X$ est birationnel et si $\mathcal{O}(D)$ est un fibré inversible sur X qui est big, alors $f^*(\mathcal{O}(D))$ est big. On remarquera que si f est fini, alors $\mathcal{O}(D)$ est ample si et seulement si $f^*\mathcal{O}(D)$ est ample (cf [Ha3]). La propriété d'être big est donc une sorte d'analogue birationnel d'être ample. En l'occurence le fibré inversible $\mathcal{D} = \beta^*(\mathcal{O}(1))$ sur M_4 est big car $\beta : M_4 \to \mathcal{C}_4$ est birationnel sur son image. Nous rappelons ces définitions en vue d'énoncer le théorème de Kawamata-Viehweg dans la prochaine section.

Commençons par examiner le cas du fibré $\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}$ qui est intéressant. On note e la classe dans $K(\mathbf{P}_2)$ d'un faisceau de la forme $\mathrm{I}_Z(2)$, où I_Z est le faisceau d'idéaux d'un sous-schéma fini Z de longueur 4 du plan. La classe e est orthogonale à la classe $c = 2 - 4h^2$ qui est celle des faisceau semi-stables que nous considérons. D'après les rappels du chapitre 1, à la classe e est associée un fibré inversible $\mathcal{D}_e = \lambda_{M_4}(e)$ sur M_4. Dans ce cas le fibré $\mathcal{D}_e$ n'est autre que $\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}$.

Soit $\mathbf{P}_2^{[4]}$ le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas finis du plan de longueur 4. On peut voir $\mathbf{P}_2^{[4]}$ comme l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 1 et de classes de Chern $(2,4)$ (ici la condition de semi-stabilité se résume à être sans torsion). Sur $\mathbf{P}_2^{[4]}$ on peut définir également un fibré inversible $\mathcal{D}_c$ associé à la classe c orthogonale à e : soit $\mathbf{\Xi} \subset \mathbf{P}_2^{[4]} \times \mathbf{P}_2$ le sous-schéma universel, et $\mathrm{I}_{\mathbf{\Xi}}$ son faisceau d'idéaux ; on pose

$$\mathcal{D}_c = \det(\mathrm{pr}_!(\mathrm{I}_{\mathbf{\Xi}}(2) \cdot c))$$

Il existe une section globale sur $M_4 \times \mathbf{P}_2^{[4]}$ du fibré inversible $\mathcal{D}_e \boxtimes \mathcal{D}_c$ dont le lieu des zéros est l'ensemble des couples $([F], Z)$ tels que $\mathrm{H}^0(F \otimes \mathrm{I}_Z(2)) \neq 0$, ou ce qui est équivalent $\mathrm{H}^1(F \otimes \mathrm{I}_Z(2)) \neq 0$. La section du fibré $\mathcal{D}_e \boxtimes \mathcal{D}_c$ peut se voir comme une famille de sections de $\mathcal{D}_e$ paramétrée par $\mathbf{P}_2^{[4]}$. Pour vérifier que $\mathcal{D}_e$ est engendré par ses sections, il suffit donc de vérifier que pour toute classe de faisceau semi-stable $[F]$, il existe un sous-schéma Z de longueur 4 tel que $\mathrm{H}^0(F \otimes \mathrm{I}_Z(2)) = 0$. C'est ce que l'on fait dans la proposition ci-dessous.

<u>**Proposition**</u> **15** *Le fibré inversible $\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}$ est big et engendré par ses sections (donc nef).*

Preuve: La propriété d'être big est claire ; il suffit de remarquer que $\dim \mathrm{H}^0((\mathcal{D}\otimes\mathcal{A})^{\otimes m}) \geq \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{D}^{\otimes m})$ et d'utiliser le fait que $\mathcal{D}$ est big.

Il est clair également qu'au moins en dehors de Σ, le fibré $\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}$ est engendré par ses sections. D'après les remarques précédentes, il suffit de montrer que pour tout faisceaux spécial F, il existe un sous-schéma fini Z de longueur 4 tel que $\mathrm{H}^0(F\otimes \mathrm{I}_Z(2)) = 0$. Partons de la suite exacte suivante

$$0 \to Q^* \to F \to \mathcal{O}_l(-3) \to 0$$

On peut choisir un sous-schéma fini Z de longueur 4 tel que $\mathrm{H}^0(Q^*\otimes \mathrm{I}_Z(2)) = 0$. En effet il suffit de trouver quatre points distincts tels que toute section globale du fibré $Q(1)$ s'annulant en ces points soit nulle. Mais toute section globale de $Q(1)$ (qui est le fibré tangent $\mathrm{T}_{\mathbf{P}_2}$) provient d'une section globale du fibré $\mathrm{H}^0(Q)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$, qui s'annule soit en un sous-schéma fini de degré ≤ 3, soit en une droite. Il suffit donc de choisir quatre points distincts dont trois d'entre eux sont non alignés. Si ces quatre points sont hors de l, on a aussi $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(-3)\otimes \mathrm{I}_Z(2)) = 0$. $\square$

Strømme (dans le cas n impair) a caractérisé les classes de fibrés amples, c'est-à-dire le cône ample de $\mathrm{Pic}(M_n)$.

Pour cela il introduit dans [Strø] une base (φ,ψ) du groupe de Picard, qu'il définit à l'aide d'une monade dont la cohomologie est le faisceau universel $\mathcal{F}$ concentré en degré 0. Il montre que la classe ψ est effective ; en fait cette classe est linéairement équivalente au $n-$ième multiple de la classe de l'hypersurface des faisceaux possédant une conique de saut. Il montre également que pour $a >> 0$ la classe $a\varphi + b$ est le multiple d'une classe ample, donnée par l'image réciproque d'un fibré $\mathcal{O}(1)$ par un plongement de Gieseker de M_n. Ceci prouve que le cône ample coïncide avec les classes $a\varphi + b\psi$, $a, b > 0$.

On peut prouver que dans ce cas on a les formules suivantes permettant de passer de la base de Strømme à la base de Drézet :

$$\mathcal{D} = \varphi,\ \ \mathcal{B} = \psi - 2(n-3)\varphi$$

ce qui permet de conclure que les diviseurs de classe $m\mathcal{D} + p\mathcal{B}$ sont amples si et seulement si $p > 0$ et $m > 2p(n-3)$. On peut adapter la preuve de Strømme dans le cas n pair, bien que nous n'ayons plus de faisceau universel, mais nous ne le ferons pas. On va plutôt montrer à l'aide du critère de Nakai-Moishezon le résultat suivant d'amplitude sur M_4.

Théorème 8 *Le fibré $\mathcal{D}^{\otimes m}\otimes\mathcal{A}$ est ample pour $m \geq 2$.*

Preuve: Les fibrés $\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ sont engendrés par leurs sections. Ceci montre que si $Y \subset M_4$ est une sous-variété intègre de dimension d, les nombres d'intersection pour $i \geq 0$

$$a_i = \int_Y c_1(\mathcal{D})^i c_1(\mathcal{D}\otimes\mathcal{A})^{d-i}$$

sont positifs ou nuls. En effet, ce nombre d'intersection est obtenu en coupant successivement Y par $d-i$ sections de $\mathcal{D}\otimes\mathcal{A}$, chaque fois non nulles sur les intersections successives, puis par i sections de $\mathcal{D}$ vérifiant la même propriété.

On sait maintenant que $\mathcal{D}^{\otimes m}\otimes\mathcal{A}$ est ample pour $m >> 0$ (cf [LeP3] corollaire 3.10). Dans l'article [LeP3], on considère le morphisme naturel $\det : M_n \to \mathrm{Pic}^0(X)$ qui à la classe d'un faisceau F semi-stable associe son déterminant $\det(F)$ qui est un fibré inversible sur la surface X, de classe de Chern 0. On montre alors que le fibré $\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}$ est ample pour $m >> 0$ relativement à det (on fait intervenir, comme Strømme dans sa preuve d'amplitude, un plongement de Gieseker). Comme ici $\mathrm{Pic}^0(X)$ est trivial, le résultat s'ensuit.

C'est donc que l'un des nombres a_i est > 0. En effet,

$$c_1(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{d} (m-1)^{d-i} c_1(\mathcal{D})^i c_1(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A})^{d-i}$$

Par conséquent $\int_Y c_1(\mathcal{D}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{A})^d > 0$, et le critère de Nakai-Moishezon (cf [Ha3] permet de conclure. L'énoncé est démontré pour $m \geq 2$ car $\mathcal{D}$ est engendré par ses sections. □

4.5.2 Calcul de la dimension des systèmes linéaires $|\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}|$ sur M_4

Théorème d'annulation cohomologique

L'énoncé original du théorème d'annulation de Kodaira porte sur la cohomologie du dual d'un fibré inversible ample sur une variété projective lisse. Il y a eu depuis de nombreuses généralisations (cf [Mor]) à des fibrés nef et big, avec certains types de singularités.

Il existe un premier théorème d'annulation de la cohomologie en degré > 0 du fibré $L \otimes K_X$, lorsque X est lisse et L est ample. Cet énoncé peut-être beaucoup généralisé (cf [Mor]), nous n'utiliserons qu'une version un peu plus élaborée.

Théorème 9 *(Kawamata-Viehweg) Soit X une variété projective lisse. Soit L un fibré inversible numériquement équivalent à un fibré nef et big sur X. Alors $\mathrm{H}^i(X, L \otimes \omega_X) = 0$ pour $i > 0$, avec ω_X le faisceau dualisant de X.*

On peut en fait déduire du théorème précédent un énoncé semblable lorsque X est une variété projective, normale à singularités rationnelles, et le fibré L est numériquement équivalent à un diviseur nef et big. Il suffit en effet de considérer une résolution des singularités $f : Y \to X$, et le fibré $f^*(L)$ sur Y, puis d'utiliser la formule de projection et la suite spectrale de Leray.

Notons que le faisceau dualisant ω_X est défini pour toute variété projective. Si l'on suppose que X est une variété normale, et que l'on note K_X le diviseur canonique (diviseur de Weil que l'on définit grâce à l'ouvert des points lisses, dont le complémentaire est de codimension ≥ 2), on a $\omega_X \simeq \mathcal{O}(K_X)$ (cf [Mor] proposition 5.75). Le faisceau dualisant n'est donc pas toujours inversible. Cependant, dans notre cas, les espaces de modules considérés sont localement factoriels, et les faisceaux dualisants sont inversibles. On a en particulier :

Proposition 16 *On a $\omega_{M_4} \simeq \mathcal{D}^{\otimes -6}$.*

Preuve: Voir [Dan] proposition 4.1.4 qui est très générale. □

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2 *Le fibré $\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -6}$ est le faisceau dualisant ω_{S_ϵ} de S_ϵ.*

Preuve: Ceci se voit en notant que $\omega_{S_4}|_{S_4 \setminus \mathbf{E}} \simeq \omega_{M_4}|_{M_4 \setminus \Sigma}$. On a donc $\omega_{S_4} = \omega_{M_4} \otimes \mathcal{O}(i\mathbf{E})$ pour $i \in \mathbf{Z}$. Comme $\pi_*(\omega_{S_4}) = \omega_{M_4}$ (car S_4 est à singularités rationnelles), on sait que $i \geq 0$: en effet si $i < 0$, on a $\pi_*(\mathcal{O}(i\mathbf{E})) \subset \mathrm{I}_\Sigma$.

Par conséquent, les fibres de $\pi_-|_{\mathbf{E}}$ étant des espaces projectifs de dimension 8, et S_ϵ étant à singularités rationnelles, on peut écrire

$$\begin{aligned}(\pi_-)_*(\omega_{S_4}) &= \omega_{S_\epsilon} \\ &= (\pi_-)_*(\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -6} \otimes \mathcal{O}((6+i)\mathbf{E})) \\ &= \mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -6}\end{aligned}$$

Ceci prouve l'énoncé. □

En pratique, le corollaire précédent ne sera utilisé que pour montrer la proposition 17. Il semble plausible que l'on ait $\omega_{S_4} = \mathcal{D}^{\otimes -6}$, mais nous ne traiterons pas cette question.

Principe du calcul et premières remarques

Nous allons en fait nous ramener à calculer la fonction $P(m) = \chi(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A})$.

Lemme 8 *La fonction P est polynômiale de degré* 13.

Preuve: On sait déjà que P est polynômiale est de degré ≤ 13. Il suffit en effet d'appliquer le théorème de Riemann-Roch pour les variétés singulières (plus précisément, cf [F] exemple 18.3.6). Soit $f : X \to M_4$ une résolution des singularités (nécessairement rationnelle). Le fibré $f^*(\mathcal{D})$ est big ; comme de plus $\mathcal{A}$ est un fibré effectif (lemme 6), on en déduit que

$$\dim \mathrm{H}^0(X, f^*(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A})) > c \cdot m^{13} \quad (*)$$

pour $c > 0$ et m suffisamment grand.

On remarque ensuite que le fibré $f^*(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A})$ est nef et big sur X pour $m \geq 1$ d'après la proposition 15. En effet, le fibré $\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}$ est ample pour $m \geq 2$ d'après le théorème 8, donc nef et big, et f est birationnel. D'après le théorème de Kawamata-Viehweg on a pour $m \geq -5$ et $i > 0$:

$$\mathrm{H}^i(X, f^*(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}) = 0$$

En appliquant la formule de projection, on obtient $\mathrm{H}^i(M_4, \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}) = 0$ pour $i > 0$.

Pour $m \geq -5$, on a donc $\chi(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}) = \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A})$, comme le membre de gauche est un polynôme, l'inégalité $(*)$ prouve le lemme. □

Pour $m = -6$, on peut prouver que la cohomologie est encore nulle, mais il faut trouver une démonstration différente, car le fibré $\mathcal{A}$ n'est ni nef ni big. Celle ci m'a été signalée par J. Le Potier.

Proposition 17 *La cohomologie* $\mathrm{H}^*(M_4, \mathcal{D}^{\otimes -6} \otimes \mathcal{A}) = 0$ *est nulle.*

Preuve: Sur S_4 on a la relation dite de saut sur les fibrés inversibles

$$\mathcal{A}_\epsilon \otimes \mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -6} \otimes \mathcal{O}(7\mathbf{E}) \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}^{\otimes -6}$$

Le morphisme $\pi_-|_{\mathbf{E}} : \mathbf{E} \to \Sigma_\epsilon$ a pour fibres des espaces projectifs de dimension 8, on peut donc écrire grâce à l'isomorphisme $\mathrm{R}(\pi_-)_*(\mathcal{O}(7\mathbf{E})) = \mathcal{O}_{S_\epsilon}$ et à la suite spectrale de Leray l'isomorphisme

$$\mathrm{H}^*(S_\epsilon, \mathbf{t} \otimes \mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -6}) \simeq \mathrm{H}^*(S_4, \mathcal{D}^{\otimes -6} \otimes \mathcal{A})$$

D'après le théorème de Leray appliqué au morphisme support $\sigma : S_\epsilon \to \mathbf{P}_5$, le terme de gauche est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme

$$\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\mathbf{P}_5, \mathcal{O}(1) \otimes \mathrm{R}^q\sigma_*(\omega_{S_\epsilon}))$$

d'après le corollaire 2. Comme $\mathbf{P}_5$ est lisse, et que S_ϵ est à singularités rationnelles, on a d'après le théorème de Grauert-Riemenschneider les égalités

$$\sigma_*(\omega_{S_\epsilon}) = \omega_{\mathbf{P}_5}, \ \ \mathrm{R}^i\sigma_*(\omega_{S_\epsilon}) = 0 \ \ i > 0$$

Comme $\omega_{\mathbf{P}_5} = \mathcal{O}(-6)$, et que la cohomologie du fibré $\mathcal{O}(-5)$ est nulle, on en déduit la proposition. □

Ces cas particuliers ayant été examinés, nous allons calculer la fonction P en introduisant les fonctions polynômiales

$$P_\epsilon : m \mapsto \chi(S_\epsilon, \mathcal{D}_\epsilon^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon), \ \ P_\mathcal{G} : m \mapsto \chi(\mathcal{G}, \mathcal{D}_\mathcal{G}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_\mathcal{G})$$

La dernière fonction est polynômiale de degré 14 (nous le prouvons plus loin), et son calcul explicite est possible grâce à un préliminaire de calcul de Schubert et la formule de Riemann-Roch.

Mais on calcule auparavant les sauts $\Delta_1 = P_\epsilon - P$, et $\Delta_0 = P_\mathcal{G} - P_\epsilon$; pour se faire on utilise les formules dites de "saut" des différents fibrés et on se ramène à des calculs de caractéristiques d'Euler-Poincaré sur $\Sigma_{\pm\epsilon}$. Cette méthode n'est évidemment pas sans rappeler celle que nous avions utilisée pour calculer le degré de la variété des courbes de Poncelet.

Dans la suite on note en abrégé GRR le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch (cf [F]).

Calcul de Δ_1

Commençons par calculer le saut $\Delta_1(m) = \chi(\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon) - \chi(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A})$, pour $m \in \mathbf{Z}$. Cette fonction est polynômiale de degré ≤ 13.

Proposition 18 *On a $\Delta_1(m) = \frac{6}{13!} \cdot \prod_{k=-7}^{3}(m-k) \cdot Q(m)$, où $Q(m)$ est un polynôme de degré 2 égal à $37m^2 + 330m + 818$.*

Preuve: Pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on a $\chi(\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon) = \chi(S_4, \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}((m-1)\mathbf{E}))$. En effet, les formules de saut sur S_4 :

$$\pi^*(\mathcal{D}) = \pi_-^*(\mathcal{D}_\epsilon) \otimes \mathcal{O}(-\mathbf{E}), \ \ \pi^*(\mathcal{A}) = \pi_-^*(\mathcal{A}_\epsilon) \otimes \mathcal{O}(\mathbf{E})$$

et le théorème GRR (ici on a $(\pi_-)_*(\mathcal{O}_{S_4}) = \mathcal{O}_{S_\epsilon}$, et $\mathrm{R}^i(\pi_-)_*(\mathcal{O}_{S_4}) = 0$ pour $i > 0$) justifient ce fait.

Supposons maintenant $m \geq 0$. Pour $1 \leq k \leq m-1$ (cet ensemble d'entiers étant vide si $m = 0, 1$), considérons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}((k-1)\mathbf{E}) \to \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(k\mathbf{E}) \to \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(k\mathbf{E})|_\mathbf{E} \to 0$$

on a alors

$$\begin{aligned} \Delta_1(m) &= \chi(\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon) - \chi(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{m-1} \chi(\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(k\mathbf{E})|_\mathbf{E}) \end{aligned}$$

Pour $m = 0, 1$ nous avons vu que la somme précédente est nulle. De plus la fibration projective $\pi : \mathbf{E} \to \Sigma$ est de rang 2, donc chaque terme de la somme précédente est nul si $m - 1 \leq 2$, soit $m \leq 3$. Ceci nous donne 4 zéros de Δ_1.

Si $m > 0$, on a

$$\begin{aligned}\Delta_1(-m) &= \chi(\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon) - \chi(\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon \otimes \mathcal{O}((m+1)\mathbf{E}) \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \chi(\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon \otimes \mathcal{O}(k\mathbf{E})|_{\mathbf{E}})\end{aligned}$$

On remarque ensuite que la fibration projective $\pi_- : \mathbf{E} \to \Sigma_\epsilon$ a ses fibres de dimension 8. On en déduit que pour $m + 1 \leq 8$, soit $m \leq 7$, tous les termes de la somme précédente sont nuls. Ceci nous prouve que les entiers $-7, ..., -1$ sont zéros de Δ_1.

Nous disposons donc déjà de 11 zéros. Il reste à déterminer les valeurs de Δ_1 en deux autres points et son terme dominant. Ce dernier est égal à

$$\frac{1}{13!} \int_{S_4} c_1(\mathcal{D}_\epsilon)^{13} - c_1(\mathcal{D})^{13} = -\frac{222}{13!}$$

cf le chapitre 1 (dernière section) où nous avons calculé le saut du nombre de Donaldson à la valeur 1.

On pose ici $\mathcal{L}$ le faisceau π ample sur $\mathbf{E} = \mathbf{P}(\mathrm{N}_{\Sigma/M_4})$. On rappelle que $\Sigma = \mathbf{P}(W) \xrightarrow{s} \mathbf{P}_2^*$, où W est le fibré vectoriel sur $\mathbf{P}_2^*$ donné par

$$W = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_d(0, -3), \mathcal{O} \boxtimes Q^*)$$

et qu'on note L le fibré inversible s ample sur $\mathbf{P}(W)$.

Pour $m = 4$, on trouve par le théorème GRR :

$$\begin{aligned}\Delta_1(4) &= \chi(\mathbf{E}, \mathcal{D}^{\otimes 4} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(3\mathbf{E})) \\ &= \chi(\Sigma, \mathcal{D}^{\otimes 4} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathrm{R}^2\pi_*(\mathcal{L}^{\otimes -3})) \\ &= \chi(\Sigma, L^{\otimes 4} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(16) \otimes L^{\otimes -1} \otimes L^{\otimes -3} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-3)) \\ &= \chi(\mathbf{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(13))\end{aligned}$$

On s'appuie en effet sur l'expression du fibré normal de Σ dans M_4 (cf proposition 8) et des expressions des restrictions des fibrés $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$ à Σ (cf 7). On trouve donc $\Delta_1(4) = 105$.

On rappelle aussi que Σ_ϵ est isomorphe à $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$, et que si l'on note $\mathcal{L}'$ le fibré inversible relativement ample canonique sur $\mathbf{P}(\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_1'', \mathbf{\Lambda}_1'))$, on a l'isomorphisme $\mathcal{O}(\mathbf{E})|_{\mathbf{E}} \simeq \mathcal{L}'^{-1} \otimes h_1^{-1} \otimes h_2^{-1}$ d'après la section 4.2.2. On a les expressions des restrictions

$$\mathcal{D}_\epsilon|_{\Sigma_\epsilon} = 3h_1 - h_2, \;\; \mathcal{A}_\epsilon|_{\Sigma_\epsilon} = h_1 + h_2$$

Pour $m = -8$, on trouve donc

$$\begin{aligned}\Delta_1(-8) &= \chi(\mathbf{E}, \mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -8} \otimes \mathcal{A}_\epsilon \otimes \mathcal{O}(9\mathbf{E})) \\ &= \chi(\mathbf{E}, h_1^{\otimes -33} \otimes \mathcal{L}'^{\otimes -9}) \\ &= \chi(\Sigma_\epsilon, h_1^{\otimes -33} \otimes \det(W^*))\end{aligned}$$

où W est le fibré $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_1'', \mathbf{\Lambda}_1')$ sur Σ_ϵ. On obtient finalement $\Delta_1(-8) = -21$. $\square$

Calcul de Δ_0

On cherche maintenant à calculer pour $m \in \mathbf{Z}$ le second saut

$$\Delta_0(m) = \chi(\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{G}}) - \chi(\mathcal{D}_{\epsilon}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_{\epsilon})$$

Cette fonction est polynômiale de degré ≤ 14. Nous allons voir dans la suite qu'elle est de degré 14, mais à priori nous ne pouvons en donner de preuve directe car les fibrés qui interviennent ne sont plus ni bigs, ni nefs.

On note dans la suite (certains sont des rappels) :

1. $\mathbf{\Gamma}$ le sous-fibré universel de rang 2 sur la grassmanienne relative $\mathrm{Grass}(2, \mathrm{S}^2 Q) = \mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*)$ (cf introduction du chapitre), et $\gamma = \det(\mathbf{\Gamma})$,
2. Σ_0 la variété $\mathbf{P}_2^* \times \mathrm{Grass}(2, \mathrm{S}^2 Q)$, et W le fibré sur Σ_0 défini par $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_2^{''}, \mathbf{\Lambda}_2^{'})$ (cf section 4.3.2),
3. h_i, pour $i = 1, 2$, désigne les images réciproques de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$ sur Σ_0 et $\mathbf{P}$ par la projection sur le $i$ème facteur $\mathbf{P}_2^*$, et $\tau = h_1 + h_2$.
4. t l'image réciproque $\sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}(1)$ sur S_ϵ, $\mathcal{G}$, ou $\widetilde{\mathcal{G}}$, avec σ le morphisme support ; en particulier $t|_{\Sigma_{-\epsilon}} = \tau$.

On rappelle que $\mathbf{P} = \mathbf{P}(W)$, et que sur $\mathbf{P} \times \mathbf{P}_2$, on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \mathbf{\Lambda}_2^{'} \to \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{P}} \to \mathbf{\Lambda}_2^{''} \to 0$$

On a un morphisme modulaire $\varphi : \mathbf{P} \to \Sigma_\epsilon^{'} \subset S_\epsilon$.

Lemme 9 *L'image réciproque $\varphi^*(\mathcal{D}_\epsilon|_{\Sigma_\epsilon^{'}})$ a pour expression*

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \tau^{\otimes 2} \otimes \gamma^*$$

Preuve: Tout découle encore de la propriété universelle du fibré déterminant $\mathcal{D}_\epsilon$. Si $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{P}} = (\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{P}}, \mathbf{\Theta}_{\mathbf{P}})$ est la famille de systèmes cohérents paramétrée par $\mathbf{P}$, le fibré cherché est

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{pr}_* \mathbf{\Theta}_{\mathbf{P}} \cdot h) \otimes \det(\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{P}})^* &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \textstyle\prod_{i=1,2} \det(\mathrm{pr}_* \mathcal{O}_{d_i}(2) \cdot h) \otimes \gamma^* \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \tau^{\otimes 2} \otimes \gamma^* \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

D'après le chapitre 1 et la section 4.4, le fermé $\Sigma_{-\epsilon}$ de $\mathcal{G}$ des systèmes cohérents ϵinstables est isomorphe à $d \times \mathbf{P}(S^2 Q^*)$, et le diviseur exceptionnel $\mathbf{E}^{'}$ est isomorphe à $\mathbf{P}$ après changement de base ; de plus on a les relations sur $\widetilde{\mathcal{G}}$ données par

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \mathcal{D}_\epsilon + \mathbf{E}^{'}, \;\; \mathcal{A}_{\mathcal{G}} = \mathcal{A}_\epsilon = t$$

Le lemme 9 permet de retrouver le résultat suivant du chapitre 1 (obtenu d'une façon un peu différente) :

Lemme 10 *On a l'expression suivante de la restriction :*

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}}|_{\Sigma_{-\epsilon}} = h_1^{\otimes 2} \otimes \tau^{\otimes 2} \otimes \gamma^* \otimes \mathbf{h}^*$$

Preuve: la proposition 12 permet d'écrire que $\mathcal{O}(\mathbf{E}^{'})|_{\mathbf{E}'} = h_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{h}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)$. Il suffit ensuite d'utiliser la formule de 9 et la formule de saut

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{G}}|_{\mathbf{E}'} &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \otimes \tau^{\otimes 2} \otimes \gamma^* \otimes h_1^{\otimes 2} \otimes \mathbf{h}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1) \\ &= h_1^{\otimes 2} \otimes \tau^{\otimes 2} \otimes \gamma^* \otimes \mathbf{h}^* \end{aligned}$$

pour obtenir l'énoncé après projection sur $\Sigma_{-\epsilon}$. $\square$

D'après le lemme 4 déduit du théorème 7 (Kollar), on sait que $\chi(\widetilde{\mathcal{G}}, \psi^*(\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon)) = \chi(S_\epsilon, \mathcal{D}_\epsilon^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}_\epsilon))$ (conséquence du théorème GRR). Ceci nous permet de déterminer le saut Δ_0 par des calculs sur $\widetilde{\mathcal{G}}$. D'après ce que nous avons écrit, on a $\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\otimes -m} \otimes \mathcal{O}(m\mathbf{E}^{'}) = \mathcal{D}_\epsilon^{\otimes -m}$ pour $m \in \mathbf{Z}$. Pour $m \geq 0$ on a donc :

$$-\Delta_0(-m) = \sum_{k=1}^{m} \chi(\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\otimes -m} \otimes \tau \otimes \mathcal{O}(k\mathbf{E}^{'})|_{\mathbf{E}'})$$

la somme précédente étant nulle si $m = 0$. Le moprhisme $\widetilde{\pi} : \mathbf{E}^{'} \to \Sigma_{-\epsilon}$ a ses fibres de dimension 6, on en déduit que pour $1 \leq m \leq 6$, chaque terme de la somme précédente est nul, et donc $\Delta_0(-m) = 0$.

De plus le faisceau dualisant relatif du morphisme $\widetilde{\pi}|_{\mathbf{E}'}$ est celui de $\mathbf{P} \to \Sigma_0$ après changement de base. Il est donc isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-\mathrm{rg}\, W) \otimes \det(W)^*$. Pour $m = 7$ on obtient donc :

$$\begin{aligned} -\Delta_0(-7) &= \chi(\mathbf{E}^{'}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-7) \otimes \tau^{\otimes -13} \otimes \gamma^{\otimes 7}) \\ &= \chi(\Sigma_0, \det(W) \otimes \tau^{\otimes -13} \otimes \gamma^{\otimes 7}) \end{aligned}$$

la seconde ligne étant la dualité relative. On rappelle la suite exacte $0 \to \mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathbf{\Gamma}^* \to W \to \mathrm{I}_\Delta(1,2) \to 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \det(W) &= \det(\mathrm{I}_\Delta(1,2)) \otimes \det(\mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathbf{\Gamma}^*) \\ &= (\det(Q) \boxtimes \mathcal{O}(2)) \otimes (\mathcal{O}(6) \boxtimes \gamma^{\otimes -3}) \\ &= \mathcal{O}(7) \boxtimes (\gamma^{\otimes -3} \otimes \mathcal{O}(2)) \end{aligned}$$

ce qui fournit, grâce à l'expression du fibré normal de $\Sigma_{-\epsilon}$:

$$\begin{aligned} -\Delta_0(-7) &= \chi(\Sigma_0, h_1^{\otimes -6} \otimes h_2^{\otimes -11} \otimes \gamma^{\otimes 4}) \\ &= \chi(\Sigma_0, h_1^{\otimes -6} \otimes h_2 \otimes l^{\otimes -4}) \\ &= \chi(\Sigma_0, h_1^{\otimes -6} \boxtimes (h_2^{\otimes -2} \otimes \mathrm{S}^2 Q^*)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

les deux dernières lignes venant du théorème de dualité relative au morphisme $\mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*) \to \mathbf{P}_2^*$ dont le faisceau dualisant relatif est $l^{\otimes -3} \otimes h_2^{\otimes 3}$, et du fait que $\chi(\mathrm{S}^2 Q^*(-2)) = 0$.

Si maintenant on cherche $\Delta_0(1)$, on écrit que

$$\begin{aligned} \Delta_0(1) &= \chi(\mathbf{E}^{'}, \mathcal{D}_{\mathcal{G}} \otimes t|_{\mathbf{E}'}) \\ &= \chi(\Sigma_{-\epsilon}, \mathcal{D}_{\mathcal{G}}|_{\Sigma_{-\epsilon}} \otimes \tau) \\ &= \chi(\Sigma_{-\epsilon}, h_1^{\otimes 2} \otimes \tau^{\otimes 3} \otimes \gamma^* \otimes \mathbf{h}^*) \end{aligned}$$

Cette dernière expression est un multiple de $\chi(d, \mathcal{O}_d(5,-1))$ qui est nul. On a donc trouvé 9 zéros entiers de Δ_1 : les entiers compris entre -7 et 1. Il n'y en en fait pas d'autres. Il reste un polynôme R de degré 5 à déterminer puisque le degré de Δ_0 est ≤ 14. On choisit de faire les calculs pour $m = -10, -9, -8, 2, 3, 4$, ce qui permet de trouver R par interpolation.

Proposition 19 *La fonction $m \mapsto \Delta_0(m)$ est un polynôme de degré 14 qui s'écrit $\lambda \cdot \prod_{j=-7}^{1}(m-j) \cdot R(m)$, où λ et $R(X) = \sum_{k=0}^{5} r_k X^k$ sont un rationnel et un polynôme à coefficients entiers de degré 5 qu'on peut déterminer.*

Preuve: Pour $m > 0$, on écrit

$$\begin{aligned}\Delta_0(m) &= \chi(\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\otimes m} \otimes t) - \chi(\mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\otimes m} \otimes t \otimes \mathcal{O}(-m\mathbf{E}'))\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} \chi(\mathbf{E}', \mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\otimes m} \otimes \tau \otimes \mathcal{O}(-i\mathbf{E}'))\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} \chi(\mathbf{E}', h_1^{\otimes 2(m-i)} \otimes \tau^{\otimes 2m+1} \otimes \gamma^{\otimes -m} \otimes \mathbf{h}^{\otimes i-m} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(i))\end{aligned}$$

On utilise une première fois le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour le morphisme $\widetilde{\pi} : \mathbf{E}' \to \Sigma_{-\epsilon}$. On désigne par l le fibré inversible quotient de l'injection $0 \to \mathbf{\Gamma} \to \mathrm{S}^2 Q$ sur $\mathrm{Grass}(2, \mathrm{S}^2 Q)$. On a $\gamma = \det(\mathrm{S}^2 Q) \otimes l^{-1} = h_2^{\otimes 3} \otimes l^{-1}$. On a donc

$$\begin{aligned}\Delta_0(m) &= \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} \chi(\Sigma_{-\epsilon}, h_1^{\otimes 2(m-i)} \otimes \tau^{\otimes 2m+1} \otimes \gamma^{\otimes -m} \otimes \mathbf{h}^{\otimes i-m} \otimes \mathrm{S}^i W^*)\\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{m-1} \chi(\Sigma_{-\epsilon}, h_1^{\otimes 2(m-i)} \otimes h_2^{\otimes -3m} \otimes \tau^{\otimes 2m+1} \otimes l^{\otimes m} \otimes \mathbf{h}^{\otimes i-m} \otimes \mathrm{S}^i W^*)\end{aligned}$$

Soit $\pi_0 : \Sigma_{-\epsilon} \to \Sigma_0$ la projection naturelle ; on a $(\pi_0)_*(\mathbf{h}^{\otimes i-m}) = \mathrm{S}^{m-i-2}Q^*(-1) = \mathrm{S}^{m-i-2}Q(1+i-m)$. On peut écrire, grâce au théorème de Grothendieck-Riemann-Roch :

$$\Delta_0(m) = \sum_{i=0}^{m-1} \chi(\Sigma_0, h_1^{\otimes m-i+1} \otimes h_2^{\otimes -3m} \otimes \tau^{\otimes 2m+1} \otimes (\mathrm{S}^{m-i-2}Q \boxtimes l^{\otimes m}) \otimes \mathrm{S}^i W^*)$$

On s'intéresse maintenant à la classe dans $K(\mathbf{P}_2)$ du fibré $\mathrm{S}^i W^*$. A partir de la suite exacte faisant intervenir W, on peut aboutir à une décomposition générale de cette classe, mais l'expression qui en résulte est très lourde, c'est pourquoi nous nous cantonnons à $i \leq 3$.

On a $\mathrm{S}^i W = \sum_{j=0}^{i} \mathrm{S}^j(\mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathbf{\Gamma}^*) \otimes \mathrm{S}^{i-j}(\mathrm{I}_\Delta(1,2))$. On a

$$\mathrm{S}^j(\mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathbf{\Gamma}^*) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \mathrm{S}^{j-k}(\mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathrm{S}^2 Q^*) \otimes (\Lambda^k \mathrm{S}^2 Q \boxtimes l^{\otimes -k})$$

Si P est un polynôme à deux variables U et V, ne contenant que des monômes du type $\mathrm{U}^i\mathrm{V}^j$, avec $i \geq j$, on note P^σ le symétrisé de ce polynôme, c'est-à-dire l'unique polynôme tel que le coefficient devant $\mathrm{U}^i\mathrm{V}^j$, avec $i \geq j$, est le même que P, et le coefficient devant $\mathrm{U}^i\mathrm{V}^j$, avec $i \leq j$, est celui de P devant $\mathrm{U}^j\mathrm{V}^i$. On utilise cette notation pour des sommes de produits tensoriels en h_1^* et h_2^*. Cela nous évite d'écrire des lignes trop longues dans l'énoncé qui suit. On note toujours $\tau = h_1 \boxtimes h_2$.

Lemme 11 *Pour $m \leq 3$, la classe du fibré $A_m = \mathrm{S}^m(\mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathrm{S}^2 Q)$ dans $K(\mathbf{P}_2)$ a pour expression :*

1. $m = 1$, $(36 - 18h_1^{-1} + 9\tau^{-1})^\sigma$,
2. $m = 2$, $(666 - 648h_1^{-1} + 153h_1^{-2} + 648\tau^{-1} - 162h_1^{-2} \boxtimes h_2^{-1} + 45\tau^{\otimes -2})^\sigma$,
3. $m = 3$, $(8436 + 17658\tau^{-1} + 4536\tau^{\otimes -2} + 165\tau^{\otimes -3} - 11988h_1^{-1} - 8536h_1^{-2} \boxtimes h_2^{-1} - 810h_1^{-3} \boxtimes h_2^{-2} + 5508h_1^{-2} + 1377h_1^{-3} \boxtimes h_2^{-1} - 816h_1^{-3})^\sigma$.

Preuve: On part de la suite exacte canonique sur $\mathbf{P}_2^*$ donnée par

$$0 \to \mathcal{O}(-1)^3 \to \mathcal{O}^6 \to \mathrm{S}^2 Q \to 0$$

On écrit ensuite

$$\mathrm{S}^m(\mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathrm{S}^2 Q) = \sum_{p=0}^{m} (-1)^p \mathrm{S}^{m-p}(\mathcal{O}^6 \boxtimes \mathrm{S}^2 Q) \otimes \Lambda^p(h_1^{*3} \boxtimes \mathrm{S}^2 Q)$$

cette dernière expression étant égale à

$$\sum_{0 \le p+q \le m} (-1)^{p+q} \binom{m-p-q+35}{m-p-q} \binom{18}{q} h_2^{\otimes -q} \otimes \Lambda^p(h_1^{*3} \boxtimes \mathrm{S}^2 Q)$$

On écrit ensuite

$$\begin{array}{ll} \Lambda^p(h_1^{*3} \boxtimes \mathrm{S}^2 Q) & = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \Lambda^{p-r}(h_1^{*18}) \otimes \mathrm{S}^r(\tau^{*9}) \\ & = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{18}{p-r} \binom{r+8}{r} h_1^{\otimes -p} \boxtimes h_2^{\otimes -r} \end{array}$$

ce qui nous donne finalement comme expression de $\mathrm{S}^m(\mathrm{S}^2 Q \boxtimes \mathrm{S}^2 Q)$:

$$\sum_{\substack{0 \le p+q \le m \\ 0 \le r \le p}} (-1)^{p+q+r} \binom{m-p-q+35}{m-p-q} \binom{18}{q} \binom{18}{p-r} \binom{r+8}{r} h_1^{\otimes -p} \boxtimes h_2^{\otimes -q-r}$$

autrement dit

$$\sum_{0 \le p' \le p \le p'' \le m} (-1)^{p'+p''-p} \binom{m-p''+35}{m-p''} \binom{18}{p''-p} \binom{18}{p'} \binom{p-p'+8}{p-p'} h_1^{\otimes -p} \boxtimes h_2^{\otimes p'-p''}$$

où l'on a posé pour passer de la première à la seconde ligne $p' = p-r$, $p'' = p+q$.

Les expressions obtenues doivent être symétriques en les h_i. Nous avons calculé explicitement les termes jusqu'à $m = 3$. Cela donne l'énoncé. On remarquera que les formules se compliquent très vite. $\square$

Lemme 12 *Dans le groupe de Grothendieck $K(\mathbf{P}_2)$ on a la décomposition suivante pour $a \ge 0$:*

$$\mathrm{S}^a(\mathrm{I}_\Delta(1,2)) = h_2^{\otimes a} \otimes [\binom{a+2}{2} - a\tau^{-1}]$$

Preuve: La résolution du faisceau $\mathrm{I}_\Delta(1,2)$ donnée par la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to Q \boxtimes \mathcal{O}(1) \to \mathrm{I}_\Delta(1,2) \to 0$ permet d'obtenir la résolution de suivante de la puissance symétrique :

$$0 \to \mathrm{S}^{a-1} Q \boxtimes \mathcal{O}(a-1) \to \mathrm{S}^a Q \boxtimes \mathcal{O}(a) \to \mathrm{S}^a(\mathrm{I}_\Delta(1,2)) \to 0$$

Dans $K(\mathbf{P}_2^*)$ on a la relation $\mathrm{S}^a Q = \binom{a+2}{2} - \binom{a+1}{2}\mathcal{O}(-1)$ valable pour $a \ge 0$; on peut écrire à présent dans le groupe $K(\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*)$ les identités

$$\begin{array}{ll} \mathrm{S}^a(\mathrm{I}_\Delta(1,2)) & = \mathrm{S}^a Q \boxtimes h_2^{\otimes a} - \mathrm{S}^{a-1} Q \boxtimes h_2^{\otimes a-1} \\ & = \binom{a+2}{2} h_2^{\otimes a} - \binom{a+1}{2} h_1^{\otimes -1} \otimes h_2^{\otimes a} - \binom{a+1}{2} h_2^{\otimes a-1} + \binom{a}{2} h_1^{-1} \otimes h_2^{\otimes a-1} \\ & = h_2^{\otimes a} \otimes [\binom{a+2}{2} + \binom{a}{2}\tau^{-1} - \binom{a+1}{2}\tau^{-1}] \\ & = h_2^{\otimes a} \otimes [\binom{a+2}{2} - a\tau^{-1}] \end{array}$$

Ceci donne l'énoncé. □

Les deux lemmes précédents permettent de calculer une décomposition de la classe de S^iW^*, pour $i \leq 3$. On calcule l'expression

$$\begin{array}{l} \sum_{0\leq k\leq j\leq i}(-1)^k A^*_{j-k} \otimes (\Lambda^k S^2 Q^* \boxtimes l^{\otimes k}) \otimes h_2^{\otimes 3j-2k-i} \otimes [\binom{i-j+2}{2} + (j-i)\tau] = \\ \sum_{0\leq k\leq j\leq i}(-1)^k A^*_{j-k} \otimes (\Lambda^k S^2 Q \boxtimes l^{\otimes k}) \otimes h_2^{\otimes 3j-i} \otimes \tau^{\otimes -2k} \otimes [\binom{i-j+2}{2} + (j-i)\tau] \end{array}$$

en vertu du fait que $\Lambda^k S^2 Q^* = \Lambda^k S^2 Q(-2k)$.

On finit par aboutir à l'expression suivante, toujours à l'aide de Grothendieck-Riemann-Roch : $\Delta_0(m) = \sum_{0\leq k\leq j\leq i\leq m-1}(-1)^k F_{i,j,k}$, où $F_{i,j,k}$ est le nombre

$$\chi(\mathbf{P}_2^{*2}, h_1^{\otimes m-i+1} \otimes h_2^{\otimes -3m+3j-i} \otimes \tau^{\otimes 2(m-k)+1} \otimes A^*_{j-k} \otimes B_{k,i} \otimes [\binom{i-j+2}{2} + (j-i)\tau]$$

avec

$$\begin{array}{rl} B_{k,i} & = \Lambda^k(S^2Q) \otimes S^{m-i-2}Q \boxtimes r_*(l^{\otimes m+k}) \\ & = \Lambda^k(S^2Q) \otimes S^{m-i-2}Q \boxtimes S^{m+k}S^2Q \end{array}$$

où l'on a noté $r : \mathbf{P}(S^2Q^*) \to \mathbf{P}_2^*$ la projection canonique. Il résulte maintenant de la formule de Pieri que

$$S^{m+k}S^2Q = \oplus_{2q\leq m+k} S^{2(m+k)-4q}Q \otimes \det(Q)^{\otimes 2q}$$

Selon les cas $k = 0, 1, 2, 3$, on écrit que $S^2Q(k)$ est isomorphe à $\mathcal{O}, S^2Q, S^2Q(1)$ ou $\mathcal{O}(2)$. On se ramène donc à calculer des sommes de produits de caractéristiques d'Euler-Poincaré de fibrés $S^aQ(\alpha)$, avec $a \leq 6$ et α un entier relatif. On peut donc facilement calculer cette somme pour $m \leq 3$.

Finalement la fonction $m \mapsto \Delta_0(m)$ est polynômiale de degré 14 et ses 9 racines sont $-7, -6, ..., 0, 1$. Elle s'écrit $\Delta_0(m) = \lambda\cdot\prod_{j=-7}^{1}(m-j)\cdot R(m)$, où $\lambda \in \mathbf{Q}$ et $R(X) = \sum_{k=1}^{5} r_k X^k \in \mathbf{Z}[X]$ de degré 5 à coefficients entiers. On trouve avec Maple

$$\begin{array}{rrr} \lambda = \frac{6}{14!}; & r_5 = 2\cdot 11\cdot 13\cdot 23; & \\ r_4 = 41^2\cdot 47; & r_3 = 2\cdot 140111 & r_2 = -101117; \\ r_1 = -2\cdot 3^4\cdot 19\cdot 797; & r_0 = -2^3\cdot 3\cdot 158791; & \end{array}$$

ce qui achève de prouver la proposition. □

Calcul de $P_{\mathcal{G}}$

On rappelle qu'on note $g : \mathcal{G} \to \mathfrak{C}$ le morphisme structural du fibré en grassmaniennes sur la conique universelle. On a $\mathcal{G} = \mathrm{Grass}(2, W)$, où W désigne dans la suite le fibré vectoriel $p_{1*}(\mathcal{I}(3))$ (cf section 4.4). On note dans la suite :

1. γ le déterminant du fibré $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{G}}$,
2. t les images réciproques sur $\mathfrak{C}$ et $\mathcal{G}$ du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_5}(1)$,
3. $\mathbf{h}$ les images réciproques du fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)$ sur $\mathfrak{C}$ (grâce à la seconde projection) et $\mathcal{G}$.

Il reste donc à évaluer la fonction $P_{\mathcal{G}}(m) = \chi(\mathcal{G}, \mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\otimes m} \otimes t)$ pour $m \in \mathbf{Z}$. D'après l'étude faite au chapitre 1 à la dernière section, on a

$$\mathcal{D}_{\mathcal{G}} = \gamma^* \otimes t^{\otimes 2} \otimes \mathbf{h}^*$$

Par conséquent, le théorème de GRR donne

$$\chi(\mathcal{G}, \mathcal{D}_{\mathcal{G}}^{\otimes m} \otimes t) = \chi(\mathfrak{C}, t^{\otimes 2m+1} \otimes \mathbf{h}^{\otimes -m} \otimes g_!(\gamma^{\otimes -m})) \ \ (*)$$

Le lemme suivant est un cas particulier d'un résultat classique (cf [Bo], [Dem] pour des cas bien plus généraux). Nous faisons une brève démonstration.

Lemme 13 *Lorsque $m \geq 0$, on a $g_*(\gamma^{\otimes -m}) \simeq \mathrm{S}^{m,m}W^*$, où l'on note $\mathrm{S}^{m,m}W^*$ le noyau du morphisme canonique de contraction surjectif*

$$\mathrm{S}^m W^* \otimes \mathrm{S}^m W^* \to \mathrm{S}^{m+1} W^* \otimes \mathrm{S}^{m-1} W^*$$

Dans ce cas, on a également $\mathrm{R}^i g_*(\gamma^{\otimes -m}) = 0$, pour $i > 0$.

Preuve: On considère la variété de drapeaux $\mathrm{D}(W)$ qui paramètre en un point $x \in \mathfrak{C}$ les couples $V \subset \Gamma \subset W(x)$ de sous-espaces avec $\dim V = 1$ et $\dim \Gamma = 2$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D}(W) & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \downarrow a & & \downarrow g \\ \mathbf{P}(W) & \xrightarrow{b} & \mathfrak{C} \end{array}$$

Sur la variété $\mathrm{D}(W)$ on dispose de deux fibrés l_i, $i = 1, 2$, tels que l_1 provienne du dual du fibré inversible canonique relativement ample sur $\mathbf{P}(W)$, et tels que l'image réciproque de γ sur $\mathrm{D}(W)$ soit isomorphe à $l_1 \otimes l_2$.

On a $a_*(l_2^{\otimes -m}) = \mathrm{S}^m(W'^*)$, où W' est le fibré canonique quotient de W sur $\mathbf{P}(W)$, et $b_*(l_1^{\otimes -m}) = \mathrm{S}^m(W^*)$.

Il ne reste plus qu'à prendre le dual de la résolution suivante de $\mathrm{S}^m(W')$:

$$0 \to \mathrm{S}^{m-1}(W) \otimes l_1 \to \mathrm{S}^m(W) \to \mathrm{S}^m(W') \to 0$$

et à appliquer b_*, on obtient alors l'énoncé. Pour une preuve élémentaire du fait que le morphisme de contraction est surjectif, on peut consulter [Dan] proposition 2.1.4.

Pour le second point, on le déduit directement du théorème de Kodaira-Nakano-Akizuki (voir [Dem]). □

Pour $m = 1$, on trouve par exemple $g_*(\gamma^{\otimes -m}) = \Lambda^2 W^*$. Cela permet d'obtenir assez rapidement la dimension de $\mathrm{H}^0(\mathcal{D}_{\mathcal{G}} \otimes t)$ (voir plus loin).

Remarque : Soit E un fibré vectoriel sur une variété complexe X. Plus généralement, si on prend une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ..\lambda_r \geq 0)$ de longueur r, on définit le fibré vectoriel $\mathrm{S}^\lambda(E^*)$ associé à E comme étant l'image directe sur X du fibré $\prod_{i=1}^r l_i^{\otimes \lambda_i}$ sur une variété de drapeaux $\mathrm{D}^\lambda(E) \to X$ paramétrant en chaque point x de X les suites de longueur r de sous-espaces vectoriels emboîtés de $E(x)$ de dimension $\lambda_1, .., \lambda_r$. En l'occurence le fibré précédent est obtenu avec la partition à deux termes (m,m). Pour un exposé sur les foncteurs de Schur, qui interviennent en théorie des représentations, on peut se reporter à [FH]. $\square$

D'après la décomposition de Pieri on a $\mathrm{S}^m W^* \otimes \mathrm{S}^m W^* = \oplus_{0\leq i\leq m} \mathrm{S}^{m+i,m-i} W^*$ et $\mathrm{S}^{m+1}W^* \otimes \mathrm{S}^{m-1}W^* = \oplus_{0\leq i\leq m-1} \mathrm{S}^{m+1+i,m-1-i}W^*$. Le morphisme de contraction correspond alors à la somme des projections canoniques dans les deux décompositions. On a aussi $\mathrm{S}^{m,m}W^* \simeq (\mathrm{S}^{m,m}W)^*$.

Lemme 14 *Lorsque $m<0$, on a $g_!(\gamma^{\otimes -m}) = \mathrm{S}^{-m-6,-m-6}W \otimes \det(W)^{\otimes 2}$.*

Preuve: On a dans ce cas $g_!(\gamma^{\otimes -m}) = \mathrm{R}^8 g_*(\gamma^{\otimes -m})$. Le faisceau dualisant du morphisme g est $\gamma^{\otimes \mathrm{rg}(W)} \otimes \det(W)^{\otimes -2}$, par conséquent le théorème de dualité relative nous donne

$$\mathrm{R}^8 g_*(\gamma^{\otimes -m})^* = g_*(\gamma^{\otimes m+6}) \otimes \det(W)^{-\otimes 2}$$

Donc $g_!(\gamma^{\otimes -m})$ est bien la classe du fibré $\mathrm{S}^{-m-6,-m-6}W \otimes \det(W)^{\otimes 2}$ en vertu des remarques précédentes. $\square$

Lorsque $-5 \leq m \leq -1$, la classe $g_!(\gamma^{\otimes -m})$ est donc nulle. Lorsque $m=-6$, on obtient $\det(W)^{\otimes 2}$, et pour $m=-7$, on obtient $\Lambda^2 W \otimes \det(W)^{\otimes 2}$. Cela fait 9 entiers où le calcul est relativement aisé : $-7,..,1$ (voir ci-après).

D'après le chapitre 1 (dernière section où l'on introduit les fibrés en grassmanienne), le fibré W s'insère dans une suite exacte

$$0 \to W \to \mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(3)) \to \mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(3) \to 0$$

où l'on rappelle que $\mathfrak{C}'$ est la conique universelle avec deux points marqués, et que Δ est le sous-schéma fermé de $\mathfrak{C}'$ image réciproque de la diagonale de $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_2$. On a une inclusion naturelle $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C} \times \mathbf{P}_2$ (donnée par le second point marqué), et donc la résolution suivante de $\mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(3))$ sur $\mathfrak{C}$:

$$0 \to (t^{\otimes -1})^3 \to \mathcal{O}^{10} \to \mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(3)) \to 0 \quad (*)$$

Pour $\mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(3))$, on utilise la résolution usuelle de la diagonale. On a déjà la résolution suivante de $\mathcal{O}_\Delta(3)$ sur $\mathfrak{C} \times \mathbf{P}_2$:

$$0 \to \mathbf{h}^{\otimes -2} \boxtimes \mathcal{O}(2) \to \mathbf{h}^{\otimes -1} \boxtimes Q(2) \to \mathcal{O}_{\mathfrak{C}} \boxtimes \mathcal{O}(3) \to 0$$

ce qui donne par image directe la résolution suivante de $\mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(3)$:

$$0 \to (\mathbf{h}^{\otimes -2})^{\oplus 6} \to (\mathbf{h}^{\otimes -1})^{\oplus 15} \to \mathcal{O}^{\oplus 10} \to 0 \quad (**)$$

Ceci nous permet de calculer

$$\begin{aligned} \det(W) &= \det \mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}'}(3)) \otimes \det \mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_\Delta(3)^{-1} \\ &= t^{\otimes 3} \otimes \mathbf{h}^{\otimes -3} \end{aligned}$$

Pour $m<0$, nous avons donc

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{G}}(m) &= \chi(\mathfrak{C}, t^{\otimes 2m+1} \otimes \mathbf{h}^{\otimes -m} \otimes \mathrm{S}^{-m-6,-m-6}W \otimes \det(W)^{\otimes 2}) \\ &= \chi(\mathfrak{C}, t^{\otimes 2m+7} \otimes \mathbf{h}^{\otimes -m-6} \otimes \mathrm{S}^{-m-6,-m-6}W) \\ &= \chi(\mathfrak{C}, t^{\otimes -2m-7} \otimes \mathbf{h}^{\otimes m+6} \otimes \mathrm{S}^{-m-6,-m-6}W^* \otimes \omega_{\mathfrak{C}}) \end{aligned}$$

La dernière ligne vient de la dualité de Serre. Maintenant $\mathfrak{C}$ est une hypersurface dans $\mathbf{P}_5 \times \mathbf{P}_2$ de fibré $\mathcal{O}(1,2)|_{\mathfrak{C}} = t \otimes \mathbf{h}^{\otimes 2}$. On a donc $\omega_{\mathfrak{C}} = \omega_{\mathbf{P}_5} \boxtimes \omega_{\mathbf{P}_2}|_{\mathfrak{C}} \otimes t \otimes \mathbf{h}^{\otimes 2} = t^{\otimes -5} \otimes \mathbf{h}^{-1}$. On a donc pour $m < 0$, si l'on pose $m^{'} = -m-6$:

$$P_{\mathcal{G}}(m) = \chi(\mathfrak{C}, t^{\otimes 2m^{'}} \otimes \mathbf{h}^{\otimes -m^{'}-1} \otimes \mathrm{S}^{m^{'},m^{'}} W^*)$$

Pour $m = -6$, on a $m^{'} = 0$, et $P_{\mathcal{G}}(-6) = \chi(\mathfrak{C}, t^{\otimes -5}) = 0$.

Posons maintenant $W^{'} = \mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_{\mathfrak{C}^{'}}(3))$, et $L = \mathrm{p}_{1*}(\mathcal{O}_{\Delta}(3)$. On a pour tout $a \geq 0$, $\mathrm{S}^a W^* = \mathrm{S}^a W^{'*} - \mathrm{S}^{a-1} W^{'*} \otimes L^*$ dans le groupe $K(\mathfrak{C})$ (bien que $\mathfrak{C}$ ne soit pas une variété lisse, on peut considérer un tel groupe et utiliser l'additivité des caractères de Chern définis sur ce groupe, cf [F]).

On a également pour $b \geq 0$ l'égalité

$$\mathrm{S}^b W^{'*} = \sum_{c=0}^{b} (-1)^c \binom{b-c+9}{9} \binom{3}{c} t^{\otimes c}$$

en vertu de la suite exacte $(*)$, et aussi $L^* = 10 - 15h + 6h^{\otimes 2}$ en vertu de $(**)$. Ces formules combinées permettent d'exprimer finalement $\mathrm{S}^a W^*$ pour $a \geq 0$ ainsi que $\mathrm{S}^{m,m} W^*$. Par exemple, pour $m = 1$, on obtient pour $\mathrm{S}^{1,1} W^* = \Lambda^2 W^*$ l'expression

$$45 - 150\, h + 285\, h^{\otimes 2} - 180\, h^{\otimes 3} + 36\, h^{\otimes 4} + (6 - 45\, h + 18\, h^{\otimes 2})\, t$$

On écrit pour finir la formule de Riemann-Roch, en intégrant sur $\mathfrak{C}$ la multiplication du caractère de Chern de $t^{\otimes 2m+1} \otimes \mathbf{h}^{\otimes -m} \otimes \mathrm{S}^{m,m} W^*$ ou de $t^{\otimes 2m^{'}} \otimes \mathbf{h}^{\otimes -m^{'}-1} \otimes \mathrm{S}^{m^{'},m^{'}} W^*$, selon le cas, par la classe de Todd de $\mathfrak{C}$ qui est

$$\mathrm{Td}(\mathfrak{C}) = \mathrm{T}(t)^6 \cdot \mathrm{T}(h)^3 \;/\; \mathrm{T}(t+2h)$$

avec $\mathrm{T}(x) = x/(1-e^{-x})$. On conclut en notant que $\int_{\mathfrak{C}} t^i \cdot h^j$ est égal à 2 si $(i=4, j=2)$ et 1 si $(i=5, j=1)$. Par exemple, pour $m=1$, on obtient $P_{\mathcal{G}}(1) = 105$.

Proposition 20 *Le polynôme $P_{\mathcal{G}}(m)$ est égal à*

$$\frac{33}{7 \cdot 12!} \cdot \prod_{i=5}^{7} (m+i) \cdot \prod_{j=2}^{4} (m+j)^2 \cdot (m+1) \cdot (46m^4 + 97m^3 - 613m^2 - 160m + 5040)$$

Le polynôme $P_{\mathcal{G}} - \Delta_0 - \Delta_1$ est égal à la caractéristique d'Euler du faisceau $\mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}$, pour $m \in \mathbf{Z}$. On obtient finalement

Théorème 10 *On a $P(m) = \frac{9}{13!} \cdot \prod_{i=1}^{10} (m+i) \cdot (2m+11) \cdot (3m^2 + 33m + 104)$.*

De cette formule il nous a semblé utile de tirer deux remarques :

1. on a une relation de symétrie $P(m-5) = -P(-6-m)$, ce qui implique que l'on a la relation $\chi(\partial M_4, \mathcal{D}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}^{-1}) = 0$ $(*)$, en vertu de la dualité de Serre et de la suite exacte de faisceaux
$$0 \to \mathcal{D}^{\otimes -5} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{-1} \to \mathcal{A}^{-1}|_{\partial M_4} \to 0$$

Nous ne savons pas traiter cette question liée au fait que les images directes par β du faisceau $\mathcal{A}^{-1}|_{\partial M_4}$ sont nulles. Cela semble plausible car la restriction du fibré $\mathcal{A}$ à la fibre générique de $\beta|_{\partial M_4}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(1)$.

L'auteur a tenté de montrer $(*)$ en considérant que le bord ∂M_4 est birationnel à un fibré en espaces projectifs (au sens de Grothendieck) sur $\partial M_3 \times \mathbf{P}_2$ (en vertu du lemme de Strømme, cf lemme (4.2) de [Strø]), mais il s'est heurté au fait que le bord ∂M_4 n'est pas une variété normale : en effet la sous-variété de codimension 2 dans M_4 des classes de faisceaux singuliers en au moins deux points est formée de points singuliers pour ∂M_4.

2. Le morphisme naturel $\alpha : \mathrm{H}^0(\mathcal{D}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{A}) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A})$ (dont on montre facilement qu'il est injectif) n'est pas un isomorphisme (on le savait déjà en vertu de la proposition 15), et l'image de α est formée précisément des sections de $\mathcal{D} \otimes \mathcal{A}$ nulles sur Σ. Il suffit en effet de remarquer que l'on a

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathrm{I}_\Sigma) = \mathrm{H}^0(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(-\mathbf{E}))$$

et le calcul de la dimension du membre de gauche est tout à fait similaire à celle de $\mathrm{H}^0(\mathcal{D} \otimes \mathcal{A})$. Elle est égale à 90.

En fait le calcul de la dimension de l'espace des sections globales est utile pour la conjecture de dualité étrange.

4.5.3 Conséquence : dualité étrange sur $\mathbf{P}_2$

On suit dans ce paragraphe ce qui est exposé dans [LeP4]. Certaines généralités y sont exposées dans les premières parties, valables sur une surface projective lisse X générale de genre $p_g = 0$, mais on se limitera encore ici à $X = \mathbf{P}_2$.

On prend deux classes $c, c^* \in K(\mathbf{P}_2)$ orthogonales, de dimension ≥ 1. On suppose que c et c^* satisfont aux conditions du chapitre 1 où l'on définit les modules de saut.

A la classe c^* est associée un fibré inversible $\mathcal{D}_{c,c^*}$ sur l'espace de modules M_c, qui est l'unique fibré inversible tel que pour toute variété algébrique S, si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $S \times \mathbf{P}_2$, plat sur S, paramétrant des faisceaux semi-stables de classe c, alors si $f : S \to M_c$ est le morphisme modulaire associé, on a

$$f^*(\mathcal{D}_{c,c^*}) = \det(\mathrm{pr}_! \, \mathcal{F} \cdot c^*)$$

De même on définit ainsi un fibré inversible $\mathcal{D}_{c^*,c}$ sur M_{c^*}. Alors on a la proposition suivante.

Proposition 21 *Il existe une section s_{c,c^*} canonique du fibré inversible $\mathcal{D}_{c,c^*} \boxtimes \mathcal{D}_{c^*,c}$ sur $M_c \times M_{c^*}$ dont le schéma des zéros a pour support le fermé des couples $([F],[G])$ tels que $\mathrm{H}^1(F \otimes G) \neq 0$.*

Remarque : Au vu des conditions sur c et c^*, ce lieu est aussi celui des couples tels que $\mathrm{H}^0(F \otimes G) \neq 0$. □

Il en résulte l'existence du morphisme de dualité dite étrange.

Définition 12 *La section s_{c,c^*} permet de définir un morphisme*

$$D_{c,c^*} : \mathrm{H}^0(M_{c^*}, \mathcal{D}_{c^*,c})^* \to \mathrm{H}^0(M_c, \mathcal{D}_{c,c^*})$$

qu'on appelle morphisme de dualité étrange.

On cherche à savoir à quelles conditions ce morphisme est un isomorphisme. Jusqu'à présent seuls quelques résultats sont connus. Donnons un premier exemple. On choisit la classe $c = 2 - nh^2$, de sorte que $M_c = M_n$. Soit c^* la classe de $\mathcal{O}_l(-1)$, avec l une droite. L'espace de modules M_{c^*} est alors isomorphe à $\mathbf{P}_2^*$,car il paramètre exactement les faisceaux du type $\mathcal{O}_l(-1)$. De plus $\mathcal{D}_{c,c^*} = \mathcal{D}$ (fibré de Donaldson), et $\mathcal{D}_{c^*,c} = \mathcal{O}(n)$. Le morphisme de dualité étrange est alors une application linéaire

$$\mathrm{H}^0(\mathbf{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^* \to \mathrm{H}^0(M_n, \mathcal{D})$$

Le terme de gauche est isomorphe à $\mathrm{H}(\mathcal{C}_n, \mathcal{O}(1))$. C'est en fait le morphisme β^* transposé du morphisme de Barth $\beta : M_n \to \mathcal{C}_n$. L'idée est en effet que si F est un faisceau semi-stable, l est une droite de saut pour F si et seulement si $\mathrm{H}^1(F|_l(-1)) \neq 0$. On prouve dans [Dan] le résultat suivant :

Théorème 11 *Pour $2 \leq n \leq 19$, le morphisme β^* est un isomorphisme.*

Le second exemple est celui dans lequel le calcul de la section précédente intervient et généralise le cas particulier de dualité que nous avons vu juste avant l'énoncé de la proposition 15. Soit L un fibré associé à un diviseur effectif sur $\mathbf{P}_2$, et deux entiers m et n tels que $n + m = \chi(L)$. On considère l'espace de modules M_c des faisceaux semi-stables de classe $c = (2, 0, 2 - 2n)$. On prend $c^* = (1, c_1(L), \chi(L) - m)$ qui est bien orthogonale à c. L'espace de modules M_{c^*} est isomorphe au schéma de Hilbert des sous-schémas finis de longueur m, noté $\mathbf{P}_2^{[m]}$, car il paramètre les faisceaux du type $\mathrm{I}_\xi \otimes L$, avec $\xi \in \mathbf{P}_2^{[m]}$.

Les conditions du début du paragraphe sont satisfaites. En effet si F semi- stable, on a bien $\mathrm{H}^2(F \otimes \mathrm{I}_\xi(L)) \simeq \mathrm{Hom}(F, L^* \otimes \mathcal{O}(-3))^* = 0$. Le fibré inversible $\mathcal{D}_{c^*,c}$ est isomorphe à $(\det L^{[m]})^{\otimes 2}$, où $L^{[m]}$ est le faisceau localement libre de rang m sur $\mathbf{P}_2^{[m]}$ défini comme suit : soit $\mathbf{\Xi} \subset \mathbf{P}_2^{[m]} \times \mathbf{P}_2$ le sous-schéma universel, muni des projections

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Xi} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2^{[m]} & \end{tikzcd}$$

on définit alors $L^{[m]} = \mathrm{pr}_*(p^*(L))$. On obtient donc un morphisme de dualité étrange

$$D_{c,c^*} : \mathrm{H}^0(\mathbf{P}_2^{[m]}, (\det L^{[m]})^{\otimes 2})^* \to \mathrm{H}^0(M_n, \mathcal{D}_{c,c^*})$$

dont on se demande si c'est un isomorphisme.

Lorsque $n = 2$, $d = \deg(L) = 1, 2$ et $m = \chi{-}2$, avec ici $\chi = \binom{d+2}{2}$, le terme $\mathrm{H}^0(\mathbf{P}_2^{[m]}, (\det L^{[m]})^{\otimes 2})$ peut-être décrit en termes de représentation symétrique de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(L)$. On prouve également (cf [LeP4]) que le morphisme de dualité étrange est injectif.

Pour $d = 1$, les dimensions des deux membres est 6 : le fibré $\mathcal{D}_{c,c^*}$ est en effet isomorphe à $\mathcal{A}$, et $\mathcal{D}_{c^*,c} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2)$, car $L = \mathcal{O}(1)$. De l'isomorphisme naturel $\mathrm{H}^0(M_4, \mathcal{A}) \simeq \mathrm{H}^0(S_4, \mathbf{t})$, on déduit que le morphisme de dualité étrange s'identifie à la transposée

$$\sigma^* : \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(2))^* \xrightarrow{\simeq} \mathrm{H}^0(S_4, \mathbf{t})$$

Pour $d = 2$, la dimension des deux membres est 105 (d'après [LeP4] et la section précédente), et le morphisme de dualité est encore un isomorphisme. Nous ignorons si cela est vrai pour $d \geq 3$, faute déjà de pouvoir calculer la dimension du terme de gauche.

Chapitre 5

Etudes de deux diviseurs remarquables de l'espace de modules M_4

Ce chapitre peut être vu comme une sorte de complément au précédent. Il rassemble deux résultats :

1. le premier porte sur les sous-variétés de M_4 évitant l'hypersurface ∂M_4 des classes de faisceaux non localement libres. La question originale que nous nous sommes posés portait sur les surfaces, tentant de trouver un analogue de la réponse donnée dans [LePH] pour l'espace de modules M_3 ; nous ne sommes parvenus qu'à un résultat très partiel qui laisse la question ouverte, mais qui a l'avantage d'être général.

2. Le second résultat répond à une question posée dans [LePT] : est ce que la restriction du morphisme de Barth β à l'hypersurface irréductible D_1 de M_4 est génériquement injective ? nous en profitons pour signaler une caractérisation géométrique des quartiques de Lüroth génériques de type I.

5.1 Sous-variétés de M_4 évitant ∂M_4

On s'intéresse ici au problème suivant annoncé dans l'introduction de ce chapitre : toute surface de M_4, i.e toute sous-variété complète de dimension 2, rencontre t'elle l'hypersurface des classes de faisceaux singuliers ?. Cette question est équivalente à la suivante : existe-t'il une famille complète de dimension 2 de fibrés vectoriels de rang 2 sur $\mathbf{P}_2$, semi-stables et de classes de Chern $(0,4)$? Nous ne répondons pas ici à cette question, sans doute assez difficile. On note toujours $\sigma : S_4 \to \mathbf{P}_5$ le morphisme qui à la classe d'un système cohérent semi-stables (Γ, Θ) associe la conique support de Θ. La notation σ pourra aussi désigner par abus le morphisme support défini de la même façon sur S_ϵ. Nous considérons le même problème dans l'espace de modules S_4 et nous établissons un petit résultat en fin de partie, qui montre qu'une sous-variété évitant le bord ne contient pas de courbes dans une fibre de σ, du moins au dessus de l'ouvert des coniques lisses. Il n'est pas impossible que l'on puisse construire des courbes dans une fibre de σ au dessus d'une conique double. Cela pourrait permettre de construire une surface qui évite ∂S_4 et de répondre négativement au problème posé.

Proposition 22 *Si C est une conique lisse, la restriction du fibré inversible ∂S_4 à la fibre $\sigma^{-1}(\{C\})$ est ample. Si C est une conique singulière, la restriction du fibré ∂S_4 au sous-schéma*

$\sigma^{-1}(\{C\}) \cap \mathbf{E}$ *est ample également.*

Preuve: Si C est lisse isomorphe à $\mathbf{P}_1$, tout système cohérent s'écrit (Γ, Θ) avec $\Theta \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(5)$. Un point ∞ à l'infini étant choisi sur cette droite, les sections globales du faisceau Θ s'interprètent donc comme des polynômes de degré 5 à coefficients complexes. Deux sections $s, s^{'} \in \mathrm{H}^0(\Theta)$ auront un zéro commun sur C si et seulement si leur résultant $\mathrm{R}(s, s^{'})$ en tant que polynômes est nul (cf [La] chap V, § 10). Le diviseur $\partial S_4 \cap \sigma^{-1}(\{C\})$ est donc la section de $\mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}^0(\Theta))$ par une hypersurface de $\mathbf{P}(\Lambda^2\mathrm{H}^0(\Theta))$ de degré 5.

Pour le second point, commençons par remarquer que d'après la description de $\mathbf{E}$ comme fibré projectif sur $\Sigma_\epsilon \simeq \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$, le sous-schéma $\sigma^{-1}(\{C\}) \cap \mathbf{E}$ possède au plus deux composantes irréductibles, isomorphes chacune à un espace projectif. Si C est réunion de $l^{'}$ et $l^{''}$, l'un des deux espaces est $\mathbf{P}\,\mathrm{Ext}^1(\Lambda^{'}, \Lambda^{''})$, avec $\Lambda^{'} = (\mathbf{C}^2, \mathcal{O}_{l^{'}}(1))$ et $\Lambda^{''} = (0, \mathcal{O}_{l^{''}}(3))$. L'autre se définit avec les rôles de $l^{'}$ et $l^{''}$ échangés.

On peut montrer l'énoncé pour l'une de ces composantes qu'on note $\mathbf{P}_0$. On a une suite exacte de familles de systèmes cohérents définie sur $\mathbf{P}_0 \times \mathbf{P}_2$

$$0 \to (0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_0}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{l^{'}}(3)) \to (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta}) \to (\mathbf{C}^2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_0}, \mathcal{O}_{l^{''}}(1)) \to 0 \quad (*)$$

D'après la propriété universelle des fibrés $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned} \pi|_{\mathbf{P}_0}^*(\mathcal{D}) &= \det(\mathrm{pr}_!\, \mathbf{\Theta} \cdot h) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}_0}(1) \\ \pi|_{\mathbf{P}_0}^*(\mathcal{A}) &= \det(\mathrm{pr}_!\, \mathbf{\Theta}(-2))^{\otimes -2} \otimes \det(\mathrm{pr}_!\, \mathbf{\Theta}(-1)) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}_0}(-4) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_0}(3) \\ &= \mathcal{O}_{\mathbf{P}_0}(-1) \end{aligned}$$

On a alors l'expression $\partial S_4|_{\mathbf{P}_0} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_0}(7)$. Ce fibré est donc très ample. $\square$

On introduit maintenant le diviseur de Cartier ∂S_ϵ de S_ϵ défini comme l'image directe du diviseur ∂S_4 par π_- (cf Introduction du chapitre précédent). Comme π_- est un morphisme birationnel de $S_4 \setminus \mathbf{E}$ sur $S_\epsilon \setminus \Sigma_\epsilon$, et que Σ_ϵ est de codimension ≥ 2, le diviseur $\partial S_\epsilon = (\pi_-)_*(\partial S_4)$ a pour fibré associé $\mathcal{D}_\epsilon^{\otimes 5} \otimes \mathcal{A}_\epsilon^{\otimes -2}$. L'hypersurface ∂S_ϵ est formée des classes de systèmes cohérents ϵ semi-stables possédant un point de base.

On s'intéresse maintenant aux courbes de D_2 contenues dans une fibre de σ.

Lemme 15 *On a dans* $\mathrm{Pic}(S_4)$ *:*

$$(\pi_-)^*(\partial S_\epsilon) = \partial S_4 + 7\,\mathbf{E}$$

Preuve: On sait que $\pi_-^*(\mathcal{D}_\epsilon) = \mathcal{D} + \mathbf{E}$ et que $\pi_-^*(\mathcal{A}_\epsilon) = \mathcal{A} - \mathbf{E}$. En écrivant les expressions des bords, on obtient le lemme. $\square$

Avant de poursuivre, nous voudrions signaler ici un fait concernant le morphisme $\varphi : \mathbf{P} \to S_\epsilon$ que nous avons posé au début du chapitre précédent. On pose $\Sigma_\mathbf{P} = \varphi^{-1}(\Sigma_\epsilon)$.

Proposition 23 *Le fermé* $\Sigma_\mathbf{P}$ *est isomorphe à l'éclatement de* $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ *suivant la diagonale.*

Preuve: Soient $l^{'}, l^{''}$ deux droites du plan, et soient $\Lambda^{'} = (0, \mathcal{O}_{l^{'}}(2))$ et $\Lambda^{''} = (\Gamma^{''}, \mathcal{O}_{l^{''}}(2))$ deux systèmes cohérents. Soit $\Lambda = (\Gamma, \Theta)$ un système cohérent donné par une extension non scindée

$$0 \to \Lambda^{''} \to \Lambda \xrightarrow{\alpha} \Lambda^{'} \to 0.$$

Le système cohérent Λ définit un point de $\mathbf{P}$. Son image par φ est dans Σ_ϵ si et seulement si il existe un sous-système cohérent $i : (\mathbf{C}^2, \mathcal{O}_{l^{''}}(1)) \hookrightarrow (\Gamma^{''}, \mathcal{O}_{l^{''}}(2))$ tel que l'on ait un relèvement de i par α

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\alpha"] & \Lambda^{''} \arrow[r] & 0 \\
 & (\mathbf{C}^2, \mathcal{O}_{l^{''}}(1)) \arrow[u, "i"'] \arrow[ul, dotted] &
\end{tikzcd}$$

On a une suite exacte de la forme $0 \to (\mathbf{C}^2, \mathcal{O}_{l^{''}}(1)) \xrightarrow{i} (\Gamma^{''}, \mathcal{O}_{l^{''}}(2)) \xrightarrow{j} (0, \mathbf{C}(x)) \to 0$, où $x \in l^{''}$, et l'image de Λ par φ est dans Σ_ϵ si et seulement si l'extension non scindée qui le définit est dans l'image de l'injection d'espaces vectoriels

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{C}(x), \mathcal{O}_{l^{'}}(2)) \xrightarrow{j} \mathrm{Ext}^1(\Lambda^{''}, \Lambda^{'})$$

induite par j. On doit donc choisir en outre $x \in l^{'} \cap l^{''}$.

Partons maintenant de la sous-variété Z de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2$ égale à l'intersection $d_1 \cap d_2$ des variétés d'incidence relatives aux premier et second facteurs. Cette sous-variété Z est isomorphe à l'éclaté de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ le long de la diagonale. On peut considérer que $Z \subseteq \mathbf{P}_2^* \times \mathrm{Grass}(2, \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_d(2)))$, en effet un triplet (l_1, l_2, x), où les l_i sont des droites et $x \in l_2$ définit aussi le sous-espace $\Gamma \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l_2}(2))$ des sections s'annulant en x.

Ci-dessous on identifie Z avec son plongement naturel dans $Z \times \mathbf{P}_2$. On a une suite exacte naturelle de faisceaux sur $Z \times \mathbf{P}_2$ donnée par

$$0 \to J \to \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_{d_2}(2) \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

et soit $\mathbf{\Gamma}^{''}$ le sous-fibré de rang 2 sur Z noyau de la surjection naturelle $\mathcal{O} \boxtimes \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_{d_2}(2)) \to \mathrm{pr}_*(\mathcal{O}_Z)$. On obtient une suite exacte de familles de systèmes cohérents sur $Z \times \mathbf{P}_2$ donnée par

$$0 \to (\mathbf{\Gamma}^{''}, J) \to (\mathbf{\Gamma}^{''}, \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_{d_2}(2)) \to (0, \mathcal{O}_Z) \to 0$$

ce qui nous permet d'écrire l'injection de fibrés sur Z :

$$0 \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_{d_2}(2)) \xrightarrow{\rho} \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}((\mathbf{\Gamma}^{''}, \mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_{d_2}(2)), (0, \mathcal{O}_{d_1}(2) \boxtimes \mathcal{O}))$$

le premier terme étant un fibré inversible. D'après les remarques précédentes l'image par φ d'un point du projectif du fibré de droite, qui n'est autre que la restriction du fibré projectif $\mathbf{P}$ au fermé Z de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}(S^2 Q^*)$, appartient à Σ_ϵ si et seulement si il est dans l'image de ρ.

On en déduit qu'on peut voir Z comme un fermé de $\mathbf{P}$, et ce fermé est précisément $\varphi^{-1}(\Sigma_\epsilon)$.
$\square$

Soit maintenant C une conique singulière réduite, décomposée en deux droites distinctes $l^{'}, l^{''}$. Soit $\{x\} = l^{'} \cap l^{''}$. Dans la suite, on note $\Gamma_0^{''}$ le pinceau des formes binaires sur $l^{''}$ qui s'annulent en x.

La grassmanienne $\mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2)))$ est isomorphe au plan projectif dual $\mathbf{P}(W^*)$, où $W = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2))$. On note $\mathcal{Q}$ le fibré quotient de rang 2 sur $\mathbf{P}(W^*)$.

Les restrictions des familles $\mathbf{\Lambda}_2'$ et $\mathbf{\Lambda}_2''$ à $\mathbf{P}(W^*) \subset \mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}(\mathrm{S}^2 Q^*)$ sont données par

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}_2'|_{\mathbf{P}(W^*)} &= (0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \boxtimes \mathcal{O}_{l'}(2))\\ \mathbf{\Lambda}_2''|_{\mathbf{P}(W^*)} &= (\mathcal{Q}^*, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \boxtimes \mathcal{O}_{l''}(2))\end{aligned}$$

Proposition 24 *Le fermé $\sigma^{-1}(\{C\}) \cap \mathrm{D}_2$ possède deux composantes irréductibles, dont les images réciproque par le morphisme $\varphi : \widetilde{\mathbf{P}} \to S_4$ sont chacunes isomorphes à l'éclaté en un point du fibré projectif $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ de rang 6 sur $\mathbf{P}_2^*$, où $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \oplus \mathcal{Q} \otimes \mathbf{C}^3$.*

Preuve: Considérons le morphisme composé $\sigma' = \sigma \circ \varphi$. Alors le fermé $\sigma'^{-1}(\{C\})$ de $\mathbf{P}$ (cf § 1.1) possède deux composantes irréductibles. L'une d'elles paramètre les classes d'extensions non scindées de systèmes cohérents

$$0 \to (0, \mathcal{O}_{l'}(2)) \to (\Gamma, \Theta) \to (\Gamma'', \mathcal{O}_{l''}(2)) \to 0 \quad (2)$$

et l'autre les mêmes extensions avec les places de l' et l'' échangées. Appelons $\mathbf{P}_C$ l'espace projectif paramétrant les extensions (2). Notons $\Sigma_{\mathbf{P}} \subset \mathbf{P}$ le fermé image réciproque $\varphi^{-1}(\Sigma_\epsilon)$. Le fermé $\Sigma_{\mathbf{P}}$ est isomorphe à l'éclaté de $\mathbf{P}_2^* \times \mathbf{P}_2^*$ suivant la diagonale d'après la proposition 23. Le fermé $\Sigma_{\mathbf{P}} \cap \mathbf{P}_C$ est réduit à un point, noté $\{p\}$.

On peut choisir un isomorphisme $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l''}, \mathcal{O}_{l'}) \simeq \mathbf{C}$. On a une suite exacte de fibrés sur $\mathbf{P}_2^*$

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2)) \otimes \mathcal{Q} \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{pr}}(\mathbf{\Lambda}_2''|_{\mathbf{P}(W^*)}, \mathbf{\Lambda}_2'|_{\mathbf{P}(W^*)}) \xrightarrow{e} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W^*)} \to 0$$

Cette suite exacte est scindable car $\mathrm{H}^1(\mathcal{Q}) = 0$. On choisit un isomorphisme $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2)) \simeq \mathbf{C}^3$, et on introduit le fibré en espaces projectifs $\mathbf{P}_C = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \oplus \mathbf{C}^3 \otimes \mathcal{Q}) \to \mathbf{P}_2^*$. On a un plongement naturel $\mathbf{P}_C \subset \mathbf{P}$, qui donne un plongement naturel $\widetilde{\mathbf{P}_C} \subset \widetilde{\mathbf{P}}$, où $\widetilde{\mathbf{P}_C}$ est l'éclaté de $\mathbf{P}_C$ en p. En effet c'est la transformée stricte de $\mathbf{P}_C$ par l'éclatement $\widetilde{\mathbf{P}} \to \mathbf{P}$.

L'image par φ du fermé $\widetilde{\mathbf{P}_C}$ est une des deux composantes irréductibles cherchées. Pour la seconde, il suffit d'inverser les rôles de l' et l''. □

Remarquons que toute section de e donne une section $r : \mathbf{P}_2^* \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$.

Lemme 16 *Soit $A \to \mathbf{P}_2^*$ le fibré en espaces affines, ouvert dans le fibré projectif $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ (cf proposition ci-dessus) des points dont la coordonnée donnée par la projection e est non nulle. Alors :*

1. *Ce fibré a des sections passant par p.*
2. *L'image de toute section passant par p est associée à une section de e.*

Preuve: On va construire une section σ de e. Soit un scindage τ de la surjection $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}(2)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2))$; à tout pinceau de formes binaires Γ'' sur l'' est associé ainsi un système linéaire $\widetilde{\Gamma''} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(2))$ induisant sur l'' le pinceau Γ''.

On a un morphisme canonique $\rho : \mathrm{Ext}^1(\Lambda'', \Lambda') \to \mathrm{Ext}^1(L, \Lambda')$, où L est le système cohérent $(\widetilde{\Gamma''}, \mathcal{O}(2))$. Il est de rang 6, et l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\Gamma'', \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2))) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(\widetilde{\Gamma''}, \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2)))$$

permet de construire point par point un scindage σ (le raisonnement s'adapte en utilisant les familles $\mathbf{\Lambda}_2^{'}|_{\mathbf{P}(W^*)}$ et $\mathbf{\Lambda}_2^{''}|_{\mathbf{P}(W^*)}$). Le sous-fibré $\mathbf{\Gamma} \subset \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})$, où $\mathbf{\Theta}$ est le faisceau de la suite exacte de familles de systèmes cohérent donnée par le scindage, est obtenu comme l'image de $\widetilde{\mathbf{\Gamma}''} \subset \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W^*)}$, par la flèche naturelle $\mathcal{O} \boxtimes \mathcal{O}_{l'}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}(W^*)} \boxtimes \mathcal{O}(2) \to \mathbf{\Theta}$ (on peut considérer en effet que l'on s'est choisit un scindage $\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}(-2)) \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ sur $\mathbf{P}(W^*)$).

On peut supposer que le scindage τ est défini par le sous-espace vectoriel des formes binaires en (x,t), où $x = 0$ est l'équation de $l^{''}$, $y = 0$ celle de $l^{'}$, et t ne s'annulant pas à l'intersection. Au dessus du point $p_0 \in \mathbf{P}(W^*)$ défini par le pinceau $\Gamma_0^{''}$ des formes binaires xt, x^2, le pinceau de quadriques est engendré par x^2, xt. Ces sections s'annulent sur la droite $l^{'}$. Donc $[\sigma(\Gamma_0^{''})] = p$.

Pour les autres sections de e, on ajoute à la section précédente une section du fibré $\mathcal{Q} \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2))$ qui s'annule en p_0. Une telle section correspond à une application linéaire $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l'}(2))$ qui s'annule sur le sous-espace $\Gamma_0^{''} = (x^2, xt)$. Nécessairement, en un autre point q de $\mathbf{P}(W^*)$, l'application linéaire associée $\mathbf{\Gamma}^{''}(q) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2))$ est de rang 1. □

Soit donc $\widetilde{\mathbf{P}_C}$ l'une des composantes de $\varphi^{-1}(\sigma^{-1}(C) \cap \mathrm{D}_2)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbf{P}_C} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & S_4 \arrow[d, "\pi_-"] \\ \mathbf{P}_C \arrow[r, "\varphi"] & S_\epsilon \end{tikzcd}$$

On note également $\mathbf{E}$ le diviseur exceptionnel dans $\widetilde{\mathbf{P}_C}$, qui est l'image réciproque par φ du diviseur du même nom sur S_4. L'image directe sur $\mathbf{P}_C$ du diviseur ∂S_4 de $\widetilde{\mathbf{P}_C}$ coïncide sur l'ouvert $\mathbf{P}_C \setminus \{p\}$ des points stables avec le diviseur $5\mathcal{D}_4 - 2\mathcal{A}$. Compte tenu des expressions de ces deux fibrés en termes des familles de systèmes cohérents, on obtient ici

$$\mathcal{D}_4 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_C}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1), \ \ \mathcal{A} \simeq \mathcal{O}$$

On en déduit que $\partial S_\epsilon \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_C}(5) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(5)$.

L'éclaté $\widetilde{S_r}$ de S_r en p est un fermé intègre de $\widetilde{\mathbf{P}_C}$. Choisissons r vérifiant la condition du lemme. La restriction $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_C}(1)|_{S_r}$ est le fibré trivial. On a donc $\partial S_\epsilon|_{S_r} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(5)$.

Proposition 25 *Il existe des surfaces de $\widetilde{\mathbf{P}_C}$ contenant une infinité de courbes intègres sur lesquelles le degré du bord ∂S_4 est nul (mais contenues dans ∂S_4).*

Preuve: Considérons à présent une courbe intègre $\mathcal{C}$ de $\widetilde{\mathbf{P}_C}$, non contenue dans $\mathbf{E}$. Soit $\mathcal{C}^{'}$ l'image de $\mathcal{C}$ par le morphisme π_-. La relation $\partial S_4 \cdot \mathcal{C} = 0$, compte tenu de la proposition 15, est équivalente à :

$$5\, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_C}(1) \cdot \mathcal{C}^{'} - 7\, \mathbf{E} \cdot \mathcal{C} + 5\, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1) \cdot \mathcal{C}^{'} = 0 \quad (*)$$

Remarquons que $\mathbf{E} \cdot \mathcal{C} = \mathrm{m}_p(\mathcal{C}^{'})$, où $\mathrm{m}_p(\mathcal{C}^{'})$ désigne la multiplicité de $\mathcal{C}^{'}$ en p. Soit $\mathcal{C}^{''}$ la courbe de $\mathbf{P}_2^*$ (intègre), définie comme l'image de $\mathcal{C}^{'}$ par le morphisme structural $\mathbf{P}_C \to \mathbf{P}_2^*$. Le terme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1) \cdot \mathcal{C}^{'}$ est alors égal à $\deg(\mathcal{C}^{'}/\mathcal{C}^{''}) \cdot \deg(\mathcal{C}^{''})$.

Soit une courbe $\mathcal{C}$ de S_r, dont l'image par r^{-1} est une courbe plane de degré 7, avec $\mathrm{m}_p(\mathcal{C}) = 5$. Elle vérifie la relation $(*)$, et donc son éclaté $\tilde{\mathcal{C}}$ en p vérifie $\partial S_4 \cdot \tilde{\mathcal{C}} = 0$. □

Proposition 26 *Le diviseur $\partial S_4|_{\widetilde{\mathbf{P}_C}}$ est réunion de deux hypersurfaces ∂_1 et ∂_2, dont les fibrés associés sont $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(2) - \mathbf{E}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_C}(5) + \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(3) - 6\ \mathbf{E}$.*

Preuve: Sur $\mathbf{P}_C \times \mathbf{P}_2$, on a une suite exacte de familles de systèmes cohérents

$$0 \to (0, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_C}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{l'}(2)) \to (\mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta}) \to (\mathbf{\Gamma}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_C} \boxtimes \mathcal{O}_{l''}(2)) \to 0 \quad (1)$$

Soit un point de $\mathbf{P}_2^*$ donné par un sous-espace Γ'' ayant un point de base sur l''. Il est clair que la fibre en Γ'' de $\mathbf{P}_C \to \mathbf{P}_2^*$ ne paramètre que des systèmes cohérents à point de base. Le lieu de ces sous-espaces Γ'' à point de base dans $\mathbf{P}_2^* = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{l''}(2)))$ est une conique lisse.

En effet en considérant l'isomorphisme naturel $\mathrm{Grass}(2, W) \simeq \mathbf{P}(\Lambda^2 W)$, cette conique a pour équation dans le système de coordonnées $[u, v, w]$ de Plücker de l'espace projectif $\mathbf{P}(\Lambda^2 W)$ (associé à une base de W) l'équation $uv - w^2 = 0$. L'image réciproque de cette conique dans $\mathbf{P}_C$ est donc un diviseur intègre et lisse noté B, de fibré associé $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(2)$, qui est une composante de ∂S_ϵ.

Ce diviseur contient le point p construit à la proposition 24. En effet, le point p définit un système cohérent (Γ, Θ) qui admet un unique quotient à isomorphisme près de la forme $(\Gamma^0, \mathcal{O}_{l''}(2))$, où Γ^0 est le système linéaire des sections s'annulant en $\{x\} = l' \cap l''$. De plus, φ est un plongement au voisinage des points correspondant à des systèmes cohérents stables de support une conique réduite. Comme B est lisse au voisinage de p, il en résulte que l'image réciproque de B dans $\widetilde{\mathbf{P}_C}$ contient l'éclaté de $\widetilde{B}$ de B au point p et le diviseur exceptionnel $\mathbf{E}$ avec la multiplicité 1.

L'éclaté $\widetilde{B}$ est donc une composante de $\partial S_4|_{\widetilde{\mathbf{P}_C}}$ que l'on note ∂_1. Son fibré associé est $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(2) \otimes \mathcal{O}(-\mathbf{E})$. L'énoncé de la proposition s'en déduit. □

Proposition 27 *L'intersection d'une courbe dans $\sigma^{-1}(C) \cap \mathrm{D}_2$ avec le diviseur ∂S_4 est non vide.*

Preuve: On se ramène au problème similaire dans $\widetilde{\mathbf{P}_C}$. Une courbe intègre $\mathcal{C}$ de $\widetilde{\mathbf{P}_C}$ ne rencontre pas ∂S_4 si et seulement si elle ne rencontre pas ∂_i, $i = 1, 2$. On obtient donc l'équation $2\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1) \cdot \mathcal{C}' - \mathrm{m}_p(\mathcal{C}') = 0$. Supposons que l'image de $\mathcal{C}'$ dans $\mathbf{P}_2^*$ soit une courbe $\mathcal{C}''$. On aurait alors $2\ \deg(\mathcal{C}'/\mathcal{C}'')\deg(\mathcal{C}'') = \mathrm{m}_p(\mathcal{C}')$. Or on a la proposition suivante (cf [Eis] lemme 11.12) :

Proposition 28 *Soit $f : C' \to C$ un morphisme fini de degré d entre deux courbes C, C' projectives, intègres éventuellement singulières. Soit $q \in C$, on a*

$$d \cdot \mathrm{m}_q(C) \geq \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{m}_p(C')$$

la somme portant sur les points de la fibre $f^{-1}(q)$.

Preuve: Commençons par normaliser C et C'. On obtient deux courbes $\widetilde{C}$, $\widetilde{C'}$ lisses, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{C'} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & C' \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{C} \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

La courbe C étant plongée dans un espace projectif $\mathbf{P}_N$, pour chaque section hyperplane h passant par q, la multiplicité d'intersection de h et de C en q est supérieure ou égale à $\mathrm{m}_q(C)$, et égale à ce nombre pour h générique.

Soit donc $A = \mathcal{O}_{C,q}$ l'anneau local de C en q, et $z \in A \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{lg}_A(A/zA) = \mathrm{m}_q(C)$ (la notation $\mathrm{lg}_A(M)$ est la longueur d'un $A-$module M). Soient également $(q_i)_{1 \leq i \leq r} \in \widetilde{C}$ et $(p_j)_{1 \leq j \leq s} \in \widetilde{C'}$ les ensembles finis des antécédents de q et des points de la fibre $f^{-1}(q)$ par les morphismes de normalisation, et posons $A_i = \mathcal{O}_{\widetilde{C},q_i}$, $B_j = \mathcal{O}_{\widetilde{C'},p_j}$.

Lemme 17 *Soient A un anneau local intègre de dimension 1 avec $K = \mathrm{Frac}(A)$, et $\mathcal{A}$ la clôture intégrale de A dans K, qu'on suppose de type fini sur A. Alors pour tout $a \in A \setminus \{0\}$, on a*

$$\mathrm{lg}_A(A/aA) = \sum_i \mathrm{lg}_{A_i}(A_i/aA_i) \cdot [k(A_i) : k(A)]$$

la somme portant sur les anneaux valuation discrète A_i dans K qui dominent A. Les A_i sont les localisés de $\mathcal{A}$ en ses idéaux maximaux.

Preuve: cf [Bou]. On peut aussi consulter l'appendice A de [F]. □

On rappelle également que si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux locaux et d est le degré de l'extension des corps résiduels (supposé fini), alors un $B-$module M de longueur finie est de longueur finie sur A et $\mathrm{lg}_A(M) = d \cdot \mathrm{lg}_B(M)$.

Ici tous les anneaux ont pour corps résiduels $\mathbf{C}$, on a donc la relation $\mathrm{lg}_A(A/zA) = \sum_{1 \leq i \leq r} \mathrm{lg}_{A_i}(A_i/zA_i)$, le nombre $\mathrm{lg}_{A_i}(A_i/zA_i)$ étant par ailleurs égal à l'ordre de z dans l'anneau de valuation discrète A_i. Maintenant l'extension des corps de fractions $K = K(C) \subset K' = K(C')$ est de degré d, il en est donc de même pour les corps de fractions de $\widetilde{C}$ et $\widetilde{C'}$. On peut écrire (cf [Bou] ou [F])

$$\sum_{j \in J_i} \mathrm{lg}_{A_i}(B_j/zB_j) = d \cdot \mathrm{lg}_{A_i}(A_i/zA_i)$$

la somme de gauche portant sur l'ensemble J_i des antécédents de q_i par $\widetilde{f}$. Appliquant encore le lemme 17, on voit que la somme $\sum_i \sum_{j \in J_i} \mathrm{lg}_{A_i}(B_j/zB_j)$ est aussi à égale à $\sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{lg}(\mathcal{O}_{C',p}/z\mathcal{O}_{C',p})$. Or on a $\mathrm{lg}(\mathcal{O}_{C',p}/z\mathcal{O}_{C',p}) \geq \mathrm{m}_p(C')$, ce qui prouve la proposition. □

D'après le lemme 28 on a

$$\mathrm{m}_p(\mathcal{C}') \leq \deg(\mathcal{C}'/\mathcal{C}'')\mathrm{m}_q(\mathcal{C}'')$$

où q est le point correspondant à Γ''_0. On aurait donc $2\deg(\mathcal{C}'') \leq \mathrm{m}_q(\mathcal{C}'')$, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{C}'$ est contenue dans une fibre de $\mathbf{P}_C$, et elle rencontre nécessairement la restriction de ∂_2 d'après la proposition 26. □

Les résultats de cette section permettent d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 12 *Si une sous-variété Y complète de S_4 ne rencontre pas le diviseur ∂S_4, la restriction $\sigma|_Y$ est un morphisme fini de Y sur son image au dessus de l'ouvert des coniques réduites.*

Soit maintenant C une conique d'équation $\{z^2 = 0\}$, où $\{z = 0\}$ est l'équation d'une droite l. Le fermé $(\sigma \circ \varphi)^{-1}(\{C\}) \subset \mathbf{P}$ (éventuellement schéma non réduit comme fibre d'un morphisme) possède une composante irréductible isomorphe au fibré projectif $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \to \mathbf{P}_2^*$, paramétrant les extensions non scindées de systèmes cohérents $0 \to (0, \mathcal{O}_l(2)) \to (\Gamma, \Theta) \to (\Gamma, \mathcal{O}_l(2)) \to 0$.

Le fermé $\Sigma'_{\mathbf{P}} = \Sigma_{\mathbf{P}} \cap \mathbf{P}(\mathcal{E})$ est cette fois isomorphe à une droite projective, car il est paramétré par les points de la droite l. L'image par φ de $\Sigma'_{\mathbf{P}}$ est un point de Σ_ϵ. De plus l'image de $\Sigma'_{\mathbf{P}}$ par le morphisme structural du fibré $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \to \mathbf{P}_2^* = \mathrm{Grass}(2, \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_l(2)))$ est une conique de $\mathbf{P}_2^*$, qui paramètre les pinceaux de sections à point de base.

Soit maintenant $\widetilde{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$ l'éclaté de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ suivant le fermé $\Sigma'_{\mathbf{P}}$. Il est facile de voir que comme ce qui précède, l'image réciproque $\widetilde{\varphi}^*(\partial S_4)|_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}$ est réunion de deux hypersurfaces, dont l'une a pour fibré associé $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(2) \otimes \mathcal{O}(-\mathbf{E})$. On ne peut pas raisonner comme précédemment, car les nombres qui interviennent ne sont plus des multiplicités de points sur des courbes. Nous ne savons donc traiter la question pour le moment.

5.2 Diviseur D_1 de M_4 et quartiques de Lüroth de type I

On étudie dans cette section le diviseur D_1 de M_4. Si $\mathcal{S}_4$ est l'hypersurface des quartiques planes singulières, l'hypersurface $\beta^{-1}(\mathcal{S}_4)$ est ensemblistement la réunion des diviseur D_1, D_2 et ∂M_4 (en fait, ces composantes apparaissent avec des multiplicités, cf [LePT] théorème 6.10).

Nous ferons intervenir là aussi l'image réciproque D_1 de D_1 dans S_4. Un point générique de D_1 représente la classe d'un système cohérent (Γ, Θ) de support une conique lisse, tel que Γ contienne une section ayant deux zéros doubles sur la conique (Γ contient toujours une section avec un zéro double).

Nous en déduisons que l'hypersurface $\mathcal{L}_1 = \beta(D_1) \subset \mathbf{H}$ est constituée génériquement de quartiques planes ayant une singularité ordinaire, et vérifiant une propriété géométrique remarquable (cependant moins "parlante" que pour les quartiques de Lüroth de type II). C'est grâce à cette propriété que l'on pourra trouver des équations locales de $\mathcal{L}_1$, et nous nous servirons de ces équations explicites pour montrer qu'à une quartique q de Lüroth de type I générique correspond une unique classe de faisceau semi-stable de D_1 dans la fibre $\beta^{-1}(q)$.

Ceci prouve que la restriction $\beta|_{D_1}$ est génériquement injective. D'après le théorème 6.10 de [LePT], on en déduit alors que le morphisme β est génériquement injectif. C'est une preuve plus courte que celle proposée dans l'article cité ci-dessus, qui s'appuie sur le calcul du rang de la différentielle $\mathrm{d}\beta$ en un point général du diviseur D_2.

5.2.1 Les hypersurfaces D_1 et $\mathcal{L}_1$

Dans l'espace de modules S_4 on considère la partie localement fermée des points correspondant à des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents (Γ, Θ) telles que le support de Θ soit lisse, et qu'il existe une section s de Γ s'annulant en deux points à l'ordre 2 ; autrement dit, telles qu'il existe une droite l d'équation $z = 0$ telle que $\Gamma \cap z^2\mathrm{H}^0(\Theta(-2)) \neq 0$.

On prend ensuite l'adhérence de cette partie dans S_4. Soit D_1 le fermé (réduit) obtenu.

<u>Proposition</u> 29 *Le fermé* D_1 *est une hypersurface intègre.*

<u>Preuve</u>: Prouvons l'irréductibilité. Considérons la restriction du faisceau $\mathbf{\Theta}$ sur $\mathfrak{C} \times \mathbf{P}_2$ (cf chapitre précédent) à l'ouvert $U \subset \mathfrak{C}$ des coniques lisses marquées. Si $u \in U$ est un point

représentant une conique lisse marquée, le faisceau $\mathbf{\Theta}(u)$ est inversible sur son support, de caractéristique d'Euler 6.

On considére alors l'injection naturelle de fibrés vectoriels sur $U \times \mathbf{P}_2^*$ donnée par

$$\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}(-2)) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-2) \to \mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})$$

On considère le fibré projectif $\mathbf{P}^{'} = \mathbf{P}(\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta}(-2)) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-2)) \to U \times \mathbf{P}_2^*$ puis le fibré projectif $\mathbf{P}^{''} = \mathbf{P}(\mathrm{pr}_*(\mathbf{\Theta})/\mathcal{O}(-1)) \to \mathbf{P}^{'}$, où $\mathcal{O}(1)$ est le fibré de rang 1 relativement ample de $\mathbf{P}^{'}$. Il existe un morphisme modulaire $f : \mathbf{P}^{''} \to S_4$ dont l'adhérence de l'image est D_1 par définition. Comme $\mathbf{P}^{''}$ est intègre, le fermé D_1 est intègre.

Il est clair d'autre part que la fibre générique de f en un point de D_1 coïncide avec la conique support du système cohérent associé à isomorphisme près. □

L'image $\pi(\mathrm{D}_1)$ est également un diviseur de M_4. On le note D_1 comme annoncé dans l'introduction de cette section. Pour calculer la quartique de saut associée à un point général de D_1, on va se servir de l'unique classe de système cohérent (Γ, Θ) qui lui correspond par π. On se rappelle (cf premières sections du chapitre 1), que cette quartique coïncide avec l'ensemble des droites l telles que le morphisme naturel d'espaces vectoriels $\Gamma \to \mathrm{H}^0(\Theta|_l)$ ne soit pas bijectif. Autrement dit, la quartique de saut est le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_2^*$ des points où le morphisme canonique de faisceaux

$$\Gamma \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \ \oplus \ \mathrm{H}^0(\Theta(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \to \mathrm{H}^0(\Theta) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*} \ \ (*)$$

est non inversible. Dans la proposition ci-dessous on explicite donc, pour une conique lisse donnée, des bases des espaces vectoriels $\mathrm{H}^0(\Theta(-1))$ et $\mathrm{H}^0(\Theta)$, afin de calculer le déterminant du morphisme précédent. On obtient ainsi la forme de l'équation d'une quartique générale de Lüroth de type I.

Proposition 30 *La sous-variété intègre $\mathcal{L}_1$ de $\mathcal{C}_4$ est l'adhérence de la partie localement fermée donnée par les quartiques d'équation $q = 0$, ayant une singularité ordinaire en un point O, et tel qu'il existe une bitangente de points de contact x_1 et x_2 tels que les droites (Ox_1) et (Ox_2) soient orthogonales pour la forme hessienne de q en O.*

Preuve: Supposons que x, y, z soit une base de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1))$, et notons u, v, w la base duale associée. Soit C une conique lisse, qu'on peut supposer d'équation $xz - y^2 = 0$. On suppose que $p \in C$ est le point de coordonnées homogènes $[1, 1, 1]$. Considérons la droite l d'équation $y = 0$. Elle coupe C en deux points de coordonnées $[1, 0, 0]$ et $[0, 0, 1]$. Les droites d'équation $x = 0$ et $z = 0$ sont tangentes à C aux points précédents.

Soit le faisceau $\Theta = \mathrm{I}_{\{p\}}(3)$, c'est-à-dire le $\mathcal{O}_C-$idéal du point p dans C. L'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\Theta(-2))$ est de dimension 2, engendré par les sections $\sigma = x - y$ et $\tau = y - z$, restreintes à C. L'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\Theta(-1))$ est de dimension 4, et est engendré par les sections $x\sigma, y\sigma, z\sigma$ et $x\tau, y\tau, z\tau$, soumises aux conditions $y\sigma - x\tau = 0$, $z\sigma - y\tau = 0$. On choisira donc $x\sigma, y\sigma, z\sigma$ et $z\tau$ comme base de $\mathrm{H}^0(\Theta(-1))$. De même l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\Theta)$, de dimension 6, possède une base donnée par $x^2\sigma, xy\sigma, xz\sigma, xz\tau, yz\tau, z^2\tau$.

Le morphisme $\mathrm{H}^0(\Theta(-1))\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1)\to\mathrm{H}^0(\Theta)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0\\ v & u & 0 & 0\\ w & v & u & 0\\ 0 & w & v & u\\ 0 & 0 & w & v\\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

dans les bases considérées. On considère la section $\zeta\in\mathrm{H}^0(\Theta)$ donnée par la restriction à C de la section de $\mathcal{O}(3)$ définie par $(x-z)y^2$, qui s'annule au point p. Cette section possède deux zéros doubles aux points $[1,0,0]$ et $[0,0,1]$, et un zéro simple en $[1,-1,1]$. On peut écrire $\zeta=xz(\sigma+\tau)$. Soit une autre section $\zeta^{'}\in\mathrm{H}^0(\Theta)$ non liée à la précédente, de coordonnées (a,b,c,d,e,f) dans la base précédente, et soit Γ l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par ζ et $\zeta^{'}$. Le déterminant du morphisme canonique de faisceaux sur $\mathbf{P}_2^*$ donné par $(*)$ (cf ci-dessus) définit la quartique de saut du système cohérent (Γ,Θ). C'est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & a & u & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & v & u & 0 & 0\\ 1 & c & w & v & u & 0\\ 1 & d & 0 & w & v & u\\ 0 & e & 0 & 0 & w & v\\ 0 & f & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

dont l'expression notée $q(u,v,w)$ est

$$(fu^2-aw^2)v^2\ +\ [-fu^3-eu^2w+buw^2+aw^3]v\ +\ (e-f)u^3w+(d-c)u^2w^2+(a-b)uw^3$$

Le point $O=[0,1,0]$ qui correspond à la droite $y=0$ est point singulier de la quartique, ordinaire si et seulement si $a\neq 0$ et $f\neq 0$, ce qu'on supposera désormais. La condition que Γ soit de dimension 2 étant que $c\neq d$ ou que a,b,e ou f soit non nul. On suppose que a,b,c,d,e,f sont donnés génériquement. Le point O est alors l'unique point singulier de la quartique.

La quartique passe par les points lisses $[1,0,0]$, $[0,0,1]$, et $[1,1,0]$ et $[0,1,1]$. Les deux points précédents correspondent par dualité aux droites joignant $[1,-1,1]$ et $[0,0,1]$, et $[1,-1,1]$ et $[1,0,0]$. Ils sont sur la droite $v-u-w=0$ qui est bitangente à la quartique. En effet, on vérifie que

$$\frac{\partial q}{\partial u}(1,1,0)=-f,\ \ \frac{\partial q}{\partial v}(1,1,0)=f,\ \ \frac{\partial q}{\partial w}(1,1,0)=-e+e-f=-f$$

et que

$$\frac{\partial q}{\partial u}(0,1,1)=b+a-b=a,\ \ \frac{\partial q}{\partial v}(0,0,1)=-a,\ \ \frac{\partial q}{\partial w}(0,0,1)=a$$

L'équation de la conique duale $\check{C}$ de C est $4uw-v^2=0$. Elle passe par $[1,0,0]$ et $[0,0,1]$, et est tangente aux droites $w=0$ et $u=0$ en ces points. La droite $v-u-w=0$ est de plus tangente à $\check{C}$ au point $[1,2,1]$, qui correspond par dualité au point $[1,-1,1]$ de C. Cela signifie que l'on peut retrouver $\check{C}$, et donc C, à partir de la quartique de saut.

En $[0,1,0]$, le cône tangent à la quartique est la conique d'équation fu^2-aw^2. Ce cône définit deux points de $\mathbf{P}_1$ identifié au projectif de l'espace normal en O à $\mathbf{P}_2$. L'équation du cône traduit que ces points sont échangés par l'involution $\iota : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_1$ de points fixes $u = 0$ et $w = 0$. On peut encore dire que les droites $u = 0$ et $w = 0$ sont orthogonales pour la forme quadratique définie par la hessienne de q en O.

Réciproquement, soit une quartique plane $\mathcal{Q}$ avec un unique point singulier ordinaire O, telle qu'il existe une bitangente à la quartique vérifiant la propriété suivante : les droites reliant les points de contact de la bitangente à O sont orthogonales pour la forme quadratique définie par le cône tangent en O. Alors $\mathcal{Q}$ est une quartique de Lüroth de type I.

En effet, on peut supposer que les points de contact de la bitangente sont $[1,1,0]$ et $[0,1,1]$, et que les droites joignant O à ces points coupent $\mathcal{Q}$ respectivement en $[1,0,0]$ et $[0,0,1]$. Ceci implique que $O = [0,1,0]$. Les hypothèses précédentes permettent d'écrire l'équation de la quartique sous la forme

$$(\alpha u^2 - \beta w^2)v^2 \ + \ [-\alpha u^3 - \gamma u^2 w + \delta u w^2 + \beta w^3]v \ + \ (\gamma - \alpha)u^3 w + \epsilon u^2 w^2 + (\beta - \delta)u w^3$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ sont des nombres complexes, avec $\alpha, \beta \neq 0$. D'après ce qui précède, $\mathcal{Q}$ est bien de Lüroth de type I. $\square$

Dans la preuve précédente, on a reconstruit à partir de la quartique et d'une bitangente appropriée la conique duale de celle de départ, et on a retrouvé la section s'annulant en deux zéros doubles. Dans la suite, on notera (H) la propriété pour une bitangente d'une quartique dont on a fixé un point singulier, de satisfaire à la propriété de la proposition 30.

5.2.2 La restriction de β à D_1

Voici donc la résultat principal de cette section. On note γ la composée $\beta \circ \pi$. Les hypersurfaces D_1 et D_1 n'étant pas contenus dans les fermés exceptionnels, toute propriété générique de l'une sera vraie pour l'autre.

Proposition 31 *La restriction $\gamma|_{\mathrm{D}_1}$ est génériquement injective.*

Preuve: Il suffit de montrer qu'il existe un ouvert non vide de $\mathcal{L}_1$ formé de quartiques singulières en un point non triple, telles qu'il existe une unique bitangente satisfaisant à (H). Soient donc x, y, z trois points distincts de $\mathbf{P}_2$, non alignés. Soit q un élément de $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(4))$. On peut supposer que x, y, z sont dans un ouvert affine isomorphe à $\mathbf{A}^2$, de sorte que q peut être vu comme polynôme à deux variables. On note $\mathrm{d}_o q$ l'application linéaire différentielle de q en un point o du plan affine et $\mathrm{J}^1_0 q$ son jet d'ordre 1 en o, c'est-à-dire la partie de degré ≤ 1 du développement de Taylor de q en o. De plus $\mathrm{d}^2_o q(-,-)$ désigne la forme quadratique hessienne de q en o. Dire que x est un point singulier de la quartique d'équation $\{q = 0\}$, que la droite (y, z) est une bitangente à cette quartique vérifiant (H) équivaut à écrire le système suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{J}^1_x q = 0 \\ q(y) = q(z) = 0 \\ \mathrm{d}_y q(yz) = \mathrm{d}_z q(yz) = 0 \\ \mathrm{d}^2_x q(xy, xz) = 0 \end{array}\right.$$

La seconde ligne signifie que la droite (y, z) a un ordre de contact ≥ 2 en y et z. Notons $\mathrm{S}^2(\mathbf{P}_2)$ le schéma paramétrant les couples non ordonnés de points de $\mathbf{P}_2$. Notons $\mathrm{S}^2_*(\mathbf{P}_2)$ l'ouvert de cette variété des couples de points distincts. Considérons le sous-schéma fermé $Z \subseteq \mathbf{P}_{14} \times \mathrm{S}^2_*(\mathbf{P}_2) \times \mathrm{S}^2_*(\mathbf{P}_2) \times \mathbf{P}_2$ formé des quadruplets $(q, \{y_1, z_1\}, \{y_2, z_2\}, x)$ tels que x soit un point singulier de la quartique d'équation $\{q = 0\}$ et les droites (y_i, z_i) soient des bitangentes à cette quartique vérifiant (H), pour $i = 1, 2$. La projection $p : Z \to \mathrm{S}^2_*(\mathbf{P}_2) \times \mathrm{S}^2_*(\mathbf{P}_2) \times \mathbf{P}_2$ a pour fibres des sous-variétés linéaires de $\mathbf{P}_{14}$, de dimension ≥ 1 d'après le nombre d'équations requises pour q (le fermé Z est donc non vide). Nous allons montrer qu'au dessus d'un point générique la fibre de p est de dimension 1, ce qui prouvera la proposition.

Soit donc $(q, \{y_1, z_1\}, \{y_2, z_2\}, x)$ un point générique de $\mathrm{S}^2_*(\mathbf{P}_2) \times \mathrm{S}^2_*(\mathbf{P}_2) \times \mathbf{P}_2$. On peut choisir un système de coordonnées du plan tel que $x = [0, 1, 0]$, $y_1 = [0, 0, 1]$, $z_1 = [1, 0, 0]$, et on peut supposer que q s'écrit

$$(u^2 + Aw^2)\,v^2 \;+\; (Bu^3 + Cu^2w + Duw^2 + Ew^3)\,v \;+\; Fu^2w^2$$

On peut supposer que y_2 et z_2 ne sont sur aucune des droites (x, y_1) et (x, z_1), et donc que $y_2 = [1, 1, 1]$ et que $z_2 = [\alpha, 1, \beta]$, où α, β sont des nombres complexes non nuls, car ni y_2 ni z_2 ne sont sur la droite (y_1, z_1).

La deuxième ligne du système (S) conduit donc aux égalités

$$\begin{array}{l} 1 + A + B + C + D + E + F = 0 \quad (\mathbf{1}) \\ \alpha^2 + \beta^2 A + \alpha^3 B + \alpha^2\beta C + \alpha\beta^2 D + \beta^3 E + \alpha^2\beta^2 F = 0 \quad (\mathbf{2}) \end{array}$$

Par ailleurs on a

$$\begin{array}{l} \frac{\partial q}{\partial u}(y_2) = 2 + 3B + 2C + D + 2F, \\ \frac{\partial q}{\partial w}(y_2) = 2A + C + 2D + 3E + 2F \\ \frac{\partial q}{\partial u}(z_2) = 2\alpha + 3\alpha^2 B + 2\alpha\beta C + \beta^2 D + 2\alpha\beta^2 F, \\ \frac{\partial q}{\partial w}(z_2) = 2\beta A + \alpha^2 C + 2\alpha\beta D + 3\beta^2 E + 2\alpha^2\beta F \end{array}$$

la troisième ligne du système (S) se traduit donc par les égalités

$$\begin{array}{l} 2(\alpha - 1) + 2(\beta - 1)A + 3(\alpha - 1)B + (2\alpha + \beta - 3)C + (\alpha + 2\beta - 3)D + 3(\beta - 1)E \\ +2(\alpha + \beta - 2)F = 0 \quad (\mathbf{3}) \\ 2\alpha(\alpha - 1) + 2\beta(\beta - 1)A + 3\alpha^2(\alpha - 1)B + [\alpha\beta(3\alpha - 2) - \alpha^2]C + \beta(3\alpha\beta - 2\alpha - \beta)D \\ +3\beta^2(\beta - 1)E + 2\alpha\beta(2\alpha\beta - \alpha - \beta)F = 0 \quad (\mathbf{4}) \end{array}$$

Etant donné que $\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}(x) = 2$, $\frac{\partial^2 q}{\partial w^2}(x) = 2A$, la dernière ligne de (S) se traduit par l'égalité $\alpha + \beta A = 0$ $(\mathbf{5})$.

Il reste à vérifier que le système d'équations $(\mathbf{1})$ à $(\mathbf{5})$ est bien de rang 5. Si l'on calcule le mineur d'ordre 5 relativement aux variables A, B, C, D, E, on obtient $-\beta(\alpha - \beta)^6$. Si ce mineur est nul, c'est que $\beta = 0$ ou que $a = b$. Ces deux cas sont exclus d'après le choix de y_2 et de z_2 qui n'est pas sur la droite (xy_2). $\square$

Comme annoncé dans l'introduction, on aboutit à la démonstration suivante d'un résultat classique.

<u>Proposition</u> 32 *Le morphisme de Barth $\beta : M_4 \to \mathcal{C}_4$ est génériquement injectif.*

<u>Preuve</u>: Il suffit de noter que d'après la formule dans [LePT] donnant l'expression de $\beta^{-1}(\mathcal{S}_4)$, où $\mathcal{S}_4$ est le diviseur des coniques singulières, la composante D_1 apparaît avec la multiplicité 1. C'est donc que le rang générique de la différentielle $\mathrm{d}\beta$ sur D_1 est maximal égal à 13. $\square$

Bibliographie

[ACG] Arbarello E., Cornalba M., Griffiths P., *Geometry of algebraic curves*, Springer-Verlag, 1984.

[Ba] Barth W., *Moduli of vector bundles on the projective plane*, Invent. Math 42 p.63-93, 1977.

[BaLeP] Baniča C., Le Potier J., *Existence de fibrés holomorphes sur les surfaces non algébriques*, J. reine angew. Math 378, 1987.

[Bo] Bott R., *Homogeneous vector bundles*, Ann. of Math. (2) 66, pp. 203-248, 1957.

[Bou] Bourbaki N., *Algèbre commutative*, Éléments de Mathématique, Algèbre, Chap. $1-7$, Hermann, Paris, 1961-1965.

[Bout] Boutot J.F, *Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs*, Invent. math. 88, pp. 65-68, 1987

[Da] Darboux G., *Principes de géométrie analytique*, Vol. 3, pp. 250-287, Gauthier-Villars, 1917.

[Dan] Danila G., *Formule de Verlinde et dualité étrange sur le plan projectif*, Thèse Université Paris 7, Chapitre 4, 1999.

[Dem] Demailly J.P, *Vanishing theorems for tensor power of an ample vector bundle*, Invent. math. 91 num. 1, pp. 203-220, 1988..

[Dre] Drézet J.M., *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables* $\mathbf{P}_2(\mathbf{C})$, Ann. Inst. Fourier 38 pp. 105-168, 1988.

[DN] Drézet J.M., Narasimhan M.S., *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Invent. Math. 97 p.53-94, 1989.

[Eis] Eisenbud D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, GTM 150, Springer.

[ElGo] Ellingsrud G., Göttsche L., *Variation of moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarization*, J. Reine Angew. Math 467 p.1-49, 1995.

[EGA2] Dieudonne J., Grothendieck A., *Eléments de géomètrie algébriqueII : étude globale élémentaire de quelques classes de morphisme*, Publ.Math.IHES, 1961.

[EGA3] Dieudonné J., Grothendieck A., *Etude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. IHES, 1961.

[EGA4,2] Dieudonne J., Grothendieck A., *Eléments de géomètrie algébriqueIV : étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, seconde partie, Publ.Math.IHES, 1965.

[F] Fulton W., *Intersection theory*, Second edition, Springer Verlag, 1998.

[FH] Fulton W., Harris J., *Representation theory : a first course*, GTM RIM 129, Springer.

[Fi] Fischer G., *Plane algebraic curves*, Student Math. Library Vol.15, AMS, 2001.

[GeM] Gelfand S.I., Manin Yu.I., *Methods of homological algebra*, Springer Verlag, 1996.

[GH] Griffiths P., Harris J., *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism*, Enseign. Math. 24 pp. 31-40, 1978.

[Gie] Gieseker D., *Moduli of vector bundles on projective surfaces*, Ann. of Math, 1977.

[Har] Harris J., *Algebraic geometry, a first course*, GTM 133, Springer.

[Ha] Hartshorne R., *Algebraic geometry*, GTM 52, Springer-Verlag, 1977.

[Ha2] ibid., *Residues and duality*, LNM 20, Springer-Verlag, Heidelberg(1966).

[HuLe] Huybrechts D., Lehn M., *Geometry of moduli spaces of semi stable sheaves*, Aspects of Math. Vol E31, 1997.

[Iar] Iarrobino A., Kanev V., *Power sums, Gorenstein algebras, and determinantal loci*, LNM 1721, Springer, 1999.

[Ke] Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B. *Toroidal embeddings I*, LNM, Springer.

[Kol] Kollar J., *Higher direct images of dualizing sheaves I*, Ann. of Math. 123, pp. 11-42, 1986.

[La] Lang S., *Algebra*, Addison-Wesley.

[LeP] Le Potier J., *Lectures on vector bundles*, Camb. studies in adv. math. (54), 1997.

[LeP1] ibid., *Systèmes cohérents et polynômes de Donaldson*, in : Maruyama M. (Ed.), *Proceedings du symposium Taniguchi*, LNM 179, Springer-Verlag, 1996.

[LeP2] ibid., *Systèmes cohérents et structures de niveaux*, Astérisque 214 (Publ. de la SMF), 1993.

[LeP3] ibid., *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques*, Proc. of Conf. on Complex Projective Geometry (Bergen 1989), LNS 179, pp.$213-240$.

[LeP4] ibid., *Dualité étrange sur les surfaces*, Non encore publié, 2003.

[LePH] ibid., Hulek K., *Sur l'espace de modules des faisceaux stables de rang* 2*, de classes de Chern* $(0,3)$ *sur* $\mathbb{P}_2$, Annales de l'institut Fourier 39 p.251-292, 1989.

[LePT] Le Potier J., Tikhomirov A., *Sur le morphisme de Barth*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. t.34 p.573-629, 2001.

[MinH] He Min., *Espace de modules de systèmes cohérents*, Int. J. Math. 9 (2) p.545-598, 1998.

[MinH2] idem, idem, Thèse université Paris7, 1996.

[Mor] Kollar J., Mori S., *Birational geometry of algebraic varieties*, Camb. Tracts in Math. 134, Camb. univ. press, 1998.

[MuF] Mumford D., Fogarty J., *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1982.

[Muk] Mukai S., *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or* K_3 *surface*, Invent. Math. 77 p.101-116, 1984.

[Se] Serre J.P., *Algèbre locale et multiplicités*, LNM 11, Springer-Verlag, 1989.

[Strø] Strømme S.A., *Ample divisors on fine moduli spaces on the projective plane*, Math. Z. 187, pp. 405-523, 1984.

[Tha] Thaddeus M., *Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula*, Invent. Math. 117 (2) p.317-353, 1994.

[Tom] Toma M., *Birational models for varieties of Poncelet curves*, Manuscr. math. 90 p.105-121, 1996.

[Tra] Trautmann G., *Poncelet curves and associated theta characteristics*, Expo. Math. 6 p.29-64, 1988.

[Va] Vallès J., *Diviseurs inattendus de droites sauteuses. Fibrés de Schwarzenberger*, Thèse, Université Paris 6, 1996.

Table des matières